



**HAL**  
open science

# Développement d'algorithmes et d'un code de calcul pour l'étude des problèmes de l'impact et du choc

Benoit Magnain

► **To cite this version:**

Benoit Magnain. Développement d'algorithmes et d'un code de calcul pour l'étude des problèmes de l'impact et du choc. Mécanique [physics.med-ph]. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2006. Français. NNT: . tel-00369905

**HAL Id: tel-00369905**

**<https://theses.hal.science/tel-00369905v1>**

Submitted on 23 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL D'ESSONNE**

Spécialité : **Mécanique**

Présentée par

**Benoît MAGNAIN**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL D'ESSONNE**

Titre de la thèse :

**DÉVELOPPEMENT D'ALGORITHMES ET D'UN CODE DE CALCUL  
POUR L'ÉTUDE DES PROBLÈMES DE L'IMPACT ET DU CHOC**

Directeur de thèse : Z.-Q. Feng

Co-directeur de thèse : J.-M. Cros

soutenue le 28 novembre 2006, devant le jury composé de :

Rapporteurs : P. Alart, Professeur, Université de Montpellier II  
A. Combescure, Professeur, INSA de LYON

Examineurs : O. Allix , Professeur, ENS Cachan  
J.-M. Cros, Maître de Conférences, Université d'Évry - Val d'Essonne  
Z.-Q. Feng, Professeur, Université d'Évry - Val d'Essonne  
Q.-C. He, Professeur, Université de Marne-la-Vallée  
P. Mineau, Ingénieur Recherche et Développement Michelin  
G. de Saxcé, Professeur, Université de Lille I  
C. Vallée, Professeur, Université de Poitiers



*À mes amis,*

*à ma famille,*

*à Juliette et Clémentine.*



# Avant-propos

*Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry, dirigé par Monsieur O. Daube.*

*Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Messieurs Z.-Q. Feng et J.-M. Cros pour m'avoir encadré durant ces trois années de recherche. Je leurs suis tout particulièrement reconnaissant pour leur disponibilité sans faille et les nombreux conseils qui m'ont permis d'atteindre mes objectifs. Je suis conscient d'avoir bénéficié, à travers eux, d'un encadrement tout à fait exceptionnel.*

*Je suis particulièrement sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur O. Allix en acceptant la charge de président du jury.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs P. Alart et A. Combescure qui ont accepté d'examiner mon travail ainsi que de faire parti du jury.*

*Mes remerciements sincères s'adressent également Messieurs Q.-C. Hé, P. Mineau, G. de Saxcé et C. Vallée qui m'ont fait l'immense plaisir de participer au jury.*

*Enfin, mes remerciements vont aussi à l'ensemble des membres du LMÉEÉ et tout particulièrement à Messieurs G. Turbelin, O. Le Maître, V. Loret et G. De Gassowski pour le soutien de tous les jours qu'ils ont su m'apporter.*



**Résumé :**

Dans beaucoup de problèmes de mécanique des solides, la prise en compte du contact avec frottement joue un rôle prépondérant. La bonne prédiction des effets du contact avec frottement devient un enjeu majeur pour les industriels. Malheureusement, très peu de problèmes peuvent être traités de manière analytique. Il est donc nécessaire de développer des méthodes numériques adaptées à ce type de problèmes. Dans ce travail, nous proposons une extension de la méthode du bi-potentiel, proposée par de Saxcé et Feng, pour l'analyse des problèmes d'impact entre plusieurs corps déformables dans le cadre des grandes déformations. Pour cela, nous optons pour un schéma d'intégration du premier ordre à la place d'un schéma plus classique du second ordre (Newmark, HHT, . . .). Ce choix permet de ne pas faire intervenir l'accélération, non définie au moment du choc, dans les calculs. Le modèle ainsi développé combine la méthode du bi-potentiel pour la résolution du problème du contact et un schéma du premier ordre pour la discrétisation temporelle. Ce travail a abouti au code de calcul par éléments finis FER/Impact. Les différentes applications numériques proposées mettent en évidence la validité et l'efficacité de la méthode. Une attention particulière est portée à la quantification de la dissipation d'énergie par frottement.

**mots clés :** contact - impact - dynamique - méthodes numériques - éléments finis

**Abstract :**

In many problems of solid mechanics, taking into account the frictional contact plays an important role. Good prediction of the results of contact with friction becomes then a prevailing element for the industry. However, few problems can be solved analytically. It is then necessary to develop numerical methods adapted to such issues. In this work, an extension of the bi-potential method, proposed by de Saxcé & Feng, is presented for the modeling of impact problems involving several deformable bodies within large deformations framework. To this purpose, we choose a first order time integrator instead of classical second order integrators (Newmark, HHT, . . .). This choice avoids to take account for the acceleration which is undefined at the impact instant. The model so developed combines the bi-potential method to solve contact problems and a first order scheme for the time integration. This work leads to develop the finite element code FER/Impact. Different numerical applications illustrate clearly the validity and efficiency of the method. A special attention is paid to the quantification of dissipated energy by friction.

**key words :** contact - impact - dynamic - numerical methods - finite element





# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Cadre du problème . . . . .	1
Objectif de l'étude . . . . .	1
Plan du document . . . . .	1
<b>1 Méthode des éléments finis en grandes perturbations</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Mécanique des milieux continus . . . . .	5
1.2.1 Cadre du problème . . . . .	6
1.2.2 Mesure des déformations . . . . .	8
1.2.3 Mesure des contraintes . . . . .	10
1.2.4 Équations d'équilibre . . . . .	11
1.2.5 Formulation intégrale forte . . . . .	12
1.2.6 Formulation intégrale faible . . . . .	13
1.3 Méthode des éléments finis . . . . .	13
1.3.1 Principes de base . . . . .	14
1.3.2 Linéarisation des forces internes . . . . .	24
1.3.3 Prise en compte des non-linéarités matérielles . . . . .	27
1.3.3.1 Loi matériau de type Néo-Hookéen . . . . .	29

1.3.3.2	Loi matériau de type Mooney-Rivlin . . . . .	30
1.3.3.3	Loi matériau de type Blatz-Ko . . . . .	31
1.3.4	Calcul de l'énergie totale du système . . . . .	32
1.3.4.1	Énergie cinétique . . . . .	33
1.3.4.2	Énergie élastique de déformation . . . . .	33
1.3.4.3	Énergie totale . . . . .	34
1.3.5	Techniques de programmation utilisées . . . . .	34
1.3.5.1	Langage de programmation . . . . .	34
1.3.5.2	Condition aux limites sur $\Gamma_u$ . . . . .	34
1.3.5.3	Stockage des matrices . . . . .	35
1.3.5.4	Méthode de résolution du système global . . . . .	35
1.4	Conclusions . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Résolution du problème de contact avec frottement</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	37
2.2	Cinématique du contact . . . . .	37
2.2.1	Notations . . . . .	38
2.2.2	Contact unilatéral . . . . .	40
2.2.3	Loi de frottement - modèle de Coulomb . . . . .	42
2.2.4	Loi de contact avec frottement . . . . .	45
2.2.5	Bi-potentiel de contact et lagrangien augmenté . . . . .	46
2.3	Méthode de résolution du contact dans un calcul par éléments finis . . . . .	49
2.3.1	Introduction . . . . .	49
2.3.2	La méthode de condensation . . . . .	50
2.3.3	Calcul de $\delta(\mathbf{U}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}$ : . . . . .	54
2.4	Détection du contact . . . . .	55
2.4.1	Définition de l'objet « zones de contact » : . . . . .	56
2.4.2	Algorithme de détection . . . . .	59
2.5	Conclusions . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Traitement du contact en dynamique</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Schéma de Newmark . . . . .	65
3.2.1	Présentation du schéma . . . . .	65
3.2.2	Applications numériques . . . . .	66
3.2.2.1	Impact longitudinal entre deux barres élastiques . . . . .	66
3.2.2.2	Impact oblique . . . . .	69
3.2.3	Conclusions . . . . .	73

3.3	Méthode du premier ordre . . . . .	74
3.3.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	75
3.3.2	Applications numériques . . . . .	76
3.3.2.1	Impact longitudinal entre deux barres élastiques . . . . .	77
3.3.2.2	Impact oblique . . . . .	81
3.3.3	Prise en compte du frottement . . . . .	84
3.3.4	Influence des paramètres de l'algorithme . . . . .	87
3.3.4.1	Influence du pas de temps $\Delta t$ . . . . .	87
3.3.4.2	Influence du paramètre $\xi$ . . . . .	89
3.3.4.3	Influence du maillage . . . . .	89
3.3.5	Conclusions . . . . .	91
3.4	Conclusions . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Jeu de billard . . . . .	93
4.3	Impact « déformable-rigide » en 2D . . . . .	99
4.4	Impact « déformable-déformable-rigide » en 2D : . . . . .	106
4.5	Impact « déformable-déformable » en 3D . . . . .	112
4.6	Auto-contact en 2D : . . . . .	117
4.7	Conclusions . . . . .	123
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>123</b>
	<b>A Impact longitudinal entre deux barres élastiques</b>	<b>129</b>
	<b>B Code de calcul FER/Impact</b>	<b>133</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>134</b>



# Liste des figures

1.1	Définition cinématique du problème . . . . .	6
1.2	Effort intérieur . . . . .	10
1.3	Dicrétisation spatiale d'un milieu continu . . . . .	15
1.4	Élément T3 . . . . .	16
1.5	Élément Q4 . . . . .	16
1.6	Élément T4 . . . . .	16
1.7	Élément H8 . . . . .	16
1.8	Élément de référence pour T3 . . . . .	19
1.9	Élément de référence pour Q4 . . . . .	19
1.10	Élément de référence pour T4 . . . . .	20
1.11	Élément de référence pour H8 . . . . .	20
1.12	Algorithme principal de résolution sans contact . . . . .	26
2.1	Cinématique du contact . . . . .	38
2.2	Repère local du contact . . . . .	39
2.3	Définition du problème . . . . .	40
2.4	Loi de contact unilatéral . . . . .	41
2.5	Loi de frottement de Coulomb . . . . .	43
2.6	Cône de Coulomb . . . . .	44
2.7	Loi de contact avec frottement . . . . .	45
2.8	Loi inverse de contact avec frottement . . . . .	46
2.9	Représentation graphique de la phase de correction . . . . .	48
2.10	Algorithme de correction . . . . .	49
2.11	Algorithme principal de résolution avec contact . . . . .	52
2.12	Algorithme de résolution global avec une méthode de condensation . . . . .	53
2.13	Composantes d'une zone de contact . . . . .	56
2.14	Composantes d'un nœud de contact . . . . .	57
2.15	Utilisation d'une zone d'alerte . . . . .	57
2.16	Erreur de détection du contact . . . . .	58
2.17	Algorithme principal de détection de contact . . . . .	59

2.18	Algorithme principal de détection de contact . . . . .	60
2.19	Projection de $\mathbf{X}_\alpha^1$ sur l'obstacle . . . . .	61
3.1	Impact longitudinal entre deux barres élastiques . . . . .	66
3.2	Déplacement du point $C$ pour $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,25$ . . . . .	67
3.3	Évolution de l'énergie pour $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,25$ . . . . .	67
3.4	Déplacement du point $C$ pour $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,5$ . . . . .	68
3.5	Évolution de l'énergie pour $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,5$ . . . . .	69
3.6	Impact oblique . . . . .	70
3.7	Résultats obtenus avec $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,25$ . . . . .	70
3.8	Évolution de l'énergie avec $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,25$ . . . . .	71
3.9	Contrainte de von-Mises ( $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,5$ ) . . . . .	72
3.10	Déplacement du point $P$ avec $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,5$ . . . . .	73
3.11	Évolution de l'énergie avec $\gamma = 0,5$ et $\beta = 0,5$ . . . . .	73
3.12	Déplacement du point $C$ avec le schéma du premier ordre . . . . .	77
3.13	Évolution de l'énergie avec le schéma du premier ordre . . . . .	78
3.14	Vitesse du point $C$ avec le schéma du premier ordre . . . . .	78
3.15	Réaction au point $C$ avec le schéma du premier ordre . . . . .	79
3.16	Déplacement des extrémités des deux barres . . . . .	80
3.17	Évolution de l'énergie du système . . . . .	81
3.18	Vitesse des deux surfaces de contact . . . . .	81
3.19	Contrainte de von Mises ( $\mu = 0,0$ ) . . . . .	82
3.20	Évolution de l'énergie au cours du temps . . . . .	83
3.21	Déplacement du point $P$ au cours du temps . . . . .	84
3.22	Contrainte de von-Mises ( $\mu = 0,2$ ) . . . . .	85
3.23	Évolution de l'énergie au cours du temps . . . . .	86
3.24	Variation de l'énergie dissipée en fonction du coefficient de frottement . . . . .	86
3.25	Influence du pas de temps sur les déplacements du point P . . . . .	87
3.26	Influence du pas de temps sur l'énergie totale du système . . . . .	88
3.27	Influence du coefficient $\xi$ sur l'énergie totale . . . . .	89
3.28	Maillage raffiné M2 . . . . .	90
3.29	Influence du maillage sur les déplacements du point $P$ . . . . .	90
3.30	Influence du maillage sur les contraintes au point $P$ . . . . .	91
4.1	Impact entre deux cylindres . . . . .	94
4.2	Déplacement des deux cylindres ( $\mu = 0,0$ ) . . . . .	95
4.3	Déplacement des deux cylindres ( $\mu = 0,2$ ) . . . . .	95
4.4	Contrainte $\sigma_{11}$ . . . . .	96
4.5	Contrainte $\sigma_{22}$ . . . . .	97

4.6	Contrainte $\sigma_{12}$ . . . . .	97
4.7	Contrainte de von-Mises . . . . .	98
4.8	Évolution de l'énergie sans frottement . . . . .	98
4.9	Évolution de l'énergie avec frottement . . . . .	99
4.10	Impact « déformable-rigide » en 2D . . . . .	100
4.11	Contraintes équivalentes de von-Mises . . . . .	102
4.12	Déplacement du centre $O$ . . . . .	103
4.13	Configurations du cylindre pour $t = 2$ ms . . . . .	103
4.14	Évolution de l'énergie ( $\mu = 0, 0$ ) . . . . .	104
4.15	Évolution de l'énergie ( $\mu = 0, 2$ ) . . . . .	105
4.16	Évolution de l'énergie ( $\mu = 0, 4$ ) . . . . .	105
4.17	Géométrie du problème . . . . .	107
4.18	Maillage du problème . . . . .	107
4.19	Contrainte de von-Mises (cas A) . . . . .	109
4.20	Contrainte de von-Mises (cas B) . . . . .	110
4.21	Contrainte de von-Mises (cas C) . . . . .	111
4.22	Géométrie du problème 3D . . . . .	112
4.23	Maillage du problème 3D . . . . .	113
4.24	Contrainte de von-Mises ( $\mu = 0, 2$ ) . . . . .	114
4.25	Contrainte de von-Mises ( $\mu = 0, 8$ ) . . . . .	115
4.26	État final . . . . .	116
4.27	Variation de l'énergie pour $\mu = 0, 2$ . . . . .	116
4.28	Variation de l'énergie pour $\mu = 0, 8$ . . . . .	117
4.29	Géométrie du problème . . . . .	118
4.30	Évolution du maillage au cours du temps - FER/Impact . . . . .	120
4.31	Champ de déplacement $u_1$ à l'état final . . . . .	121
4.32	Champ de déplacement $u_2$ à l'état final . . . . .	121
4.33	Contraintes de von-Mises en fin de simulation . . . . .	122
4.34	Erreur de résolution du contact - ANSYS . . . . .	122
4.35	Résolution du contact - FER/Impact . . . . .	123
A.1	Impact longitudinal entre deux barres élastiques . . . . .	129





# Liste des tableaux

1.1	Fonctions de forme pour les éléments T3, Q4 et T4 . . . . .	21
1.2	Fonctions de forme pour l'élément H8 . . . . .	21
1.3	Définition des points de Gauss . . . . .	23
3.1	Propriétés matériaux et données géométriques . . . . .	79
3.2	Comparaison des temps CPU . . . . .	87
4.1	Valeurs extrêmes des contraintes . . . . .	96
4.2	Influence du coefficient de frottement . . . . .	101
4.3	Définition des trois cas d'étude . . . . .	107
4.4	Données géométriques du problème . . . . .	118



# Introduction générale

## Cadre du problème :

Dans la plupart des problèmes de mécanique, il existe une configuration (au moins) du système étudié pour laquelle la prise en compte du contact et du frottement joue un rôle prépondérant. Le principe même du dispositif peut se baser sur l'action du frottement qui joue alors un rôle positif. C'est le cas, par exemple, des pneumatiques développés dans l'industrie automobile qui permettent de faire passer la puissance du moteur au sol grâce à l'adhérence entre le pneu et le revêtement de la route. C'est également le cas de la quasi totalité des systèmes de freinage. D'un autre côté, le frottement peut jouer un rôle néfaste. Sa prise en compte peut s'avérer tout aussi cruciale. C'est le cas des liaisons mécaniques pour lesquelles nous souhaitons une déperdition minimale d'énergie entre les pièces (roulements, paliers, glissières ...). Pour l'industrie, il est donc essentiel que la prédiction des phénomènes de contact avec frottement soit faite avec les meilleurs outils possibles.

Au 15<sup>ème</sup> siècle, les premières études scientifiques portant sur le problème du frottement sont l'œuvre de Léonard De Vinci qui montra de manière expérimentale que la force de frottement est proportionnelle à la masse du solide en mouvement mais qu'elle est indépendante de la surface de contact. Plus tard, les premières modélisations du phénomène de friction sont à mettre à l'actif d'Amontons (1699). En 1781, Coulomb proposa une extension de cette loi au problème de friction en dynamique. Notons que son modèle vérifie les différentes observations faites par De Vinci. En 1882, Hertz [Her82] a proposé la première étude analytique de contact pour un problème d'élasticité. Pour cela, il a étudié le cas d'un problème de contact sans frottement entre deux sphères comprimées l'une contre l'autre. Nous pouvons aussi citer les travaux de Boussinesq [Bou85] qui propose une solution au problème du contact entre un poinçon indéformable et un plan élastique. Malheureusement, très peu de problèmes peuvent être traités de manière analytique et le champ d'application qui en résulte est trop restreint pour le monde industriel.

Le traitement de ce type de problèmes est d'une grande difficulté du fait des non-linéarités des inégalités variationnelles qui servent à modéliser le contact avec frottement [DL72,

KO88]. En effet, la réaction normale de contact, la force de frottement ainsi que la surface de contact elle-même dépendent du déplacement des solides étudiés. Afin de dépasser le champ des problèmes de contact avec frottement qu'il est possible de résoudre de manière analytique, les scientifiques se sont tournés vers le domaine des méthodes numériques. La plus largement utilisée en mécanique des structures est sans aucun doute la méthode des éléments finis (M.E.F). Cette méthode permet d'approcher la solution exacte d'un système d'équations aux dérivées partielles. Proposée par le mathématicien R. Courant en 1943, elle ne rencontre le succès que nous lui connaissons qu'avec l'apparition des ordinateurs. Parmi les premiers développeurs de la méthode, nous pouvons citer R. W Clough (1960) qui fut le premier à employer le terme « éléments finis » mais aussi O. C. Zienkiewicz, M. J. Turner *et al.* ou J. Argyris. C'est donc tout naturellement que les recherches se sont tournées vers cette nouvelle méthode de résolution pour traiter le problème du contact.

Le premier code de calcul intégrant la possibilité de traiter le contact fut le code explicite HEMP-hydrocode développé par Wilkins (1964). Depuis, de nombreuses méthodes ont été mises au point pour intégrer les conditions de contact avec frottement à la formulation de la méthode des éléments finis. Cela concerne l'imperméabilité de la matière mais aussi la loi qui régit le frottement. Les méthodes les plus couramment employées sont : les méthodes de pénalisation [CT71, TY73], la méthode des multiplicateurs de Lagrange [BM88, CMV88] et la méthode du lagrangien augmenté [WST85, SL92, CA88, AC91, SF91].

Enfin, de nombreux travaux ont été dernièrement dirigés vers l'étude des problèmes d'impact. En d'autres termes, ces recherches s'intéressent au développement de méthodes numériques pour l'analyse du phénomène du contact avec frottement pour des problèmes de dynamique. La difficulté supplémentaire apportée par la partie dynamique du problème réside dans la stabilité de la méthode obtenue. En effet, le traitement du contact perturbe considérablement les critères de stabilité déterminés pour le cadre dit « classique ». Le travail de développement consiste alors à modifier les schémas existant pour les rendre plus stable dans le cadre des problèmes d'impact [WVVS90, LC97, Hu97, AP98, SP98] ou bien alors à explorer de nouvelles pistes jugées plus adaptées à ce type d'application [Jea89, Wro94, THR02, Khe05, Bar06]. C'est dans cet axe de recherche que se situe notre travail.

## **Objectifs de l'étude :**

La méthode du bi-potentiel proposée par de Saxcé et Feng [SF91, SF98] pour le traitement des problèmes de contact en quasi-statique est connue pour être très efficace et précise. Les possibilités qu'elle offre pour ce type d'application ont d'ailleurs fait l'objet de nom-

breuses publications. Dans ce travail, nous proposons une extension de cette méthode pour l'analyse des problèmes d'impact entre plusieurs corps déformables. Pour cela, nous envisageons l'utilisation d'un schéma d'intégration du premier ordre en lieu et place des schémas classiques du second ordre (Newmark, HHT ...). En effet, ces derniers nécessitent d'importantes modifications pour assurer la stabilité de la méthode [AP98, LC97]. Par ailleurs, ce choix permet de ne pas faire intervenir l'accélération, non définie au moment du choc, dans les calculs. Le modèle développé combine ainsi la méthode du bi-potentiel pour la résolution du problème du contact à un schéma du premier ordre pour la discrétisation temporelle. Enfin, l'algorithme obtenu est implanté dans le code de calcul par éléments finis FER/Impact. Les travaux effectués au cours de ces trois années ont fait l'objet de plusieurs publications [MFC05b, FMC05, FCM05, FHMC05, FJCM05, MFC05a, FMC06b, FMC06a, FHMC06]

## Plan du document :

Le premier chapitre de ce travail est consacré à un large rappel des notions de base utilisées dans la suite. Nous abordons les notions de la mécanique des milieux continus nécessaires à la présentation de la méthode des éléments finis qui est la base de notre recherche. Nous nous intéressons tout particulièrement au cadre des grandes perturbations pour lequel nous adoptons une description Lagrangienne totale. Nous apportons également un éclairage sur les différentes lois de comportement matériaux hyperélastiques qui sont implantées dans notre code de calcul. Enfin, nous détaillons les outils numériques utilisés dans le programme FER/Impact.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons la résolution des problèmes de contact avec frottement. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux différentes notions qui permettent de définir le problème du contact avec frottement. Nous présentons les conditions de Signorini qui traduisent le contact unilatéral ainsi que la loi de frottement de Coulomb. Dans un second temps, nous abordons en détail la méthode du bi-potentiel qui sera adoptée tout au long de notre travail. Nous détaillons les différents outils mathématiques (méthode du Lagrangien augmenté, algorithme d'Uzawa et algorithme de Gauss-Seidel) afin de présenter la méthode avec précision. Nous terminons ce chapitre par l'étude de l'algorithme de recherche des zones de contact qui est utilisé dans notre travail.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons à la problématique centrale de notre travail : l'intégration des équations du mouvement pour un problème d'impact. Nous présentons tout d'abord les difficultés rencontrées avec le schéma du second ordre de Newmark associé à la méthode du bi-potentiel. Pour cela, nous le confrontons à deux cas tests d'impact pour lesquels les résultats sont connus. La seconde partie de ce chapitre est dédiée à la solution

apportée dans notre travail au problème de stabilité rencontré avec la méthode précédemment présentée. Nous proposons l'utilisation d'un schéma d'intégration du premier ordre qui permet de ne pas avoir à calculer les termes d'accélération. De nombreuses comparaisons effectuées sur les résultats numériques obtenus avec le schéma de Newmark et le schéma du premier ordre sont apportées dans le but de consolider notre choix.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation de plusieurs résultats numériques qui viennent confirmer la robustesse ainsi que la précision de la méthode développée. Le premier test confronte le code à un enchaînement complexe de chocs entre des corps déformables et des obstacles rigides en 2D. Avec le deuxième test, nous démontrons la qualité de la méthode pour la prise en compte du frottement et l'estimation de l'énergie dissipée par frottement. Le troisième test permet d'évaluer le comportement du code de calcul face à un problème d'impact entre deux solides déformables dont le comportement est hyperélastique. Le cas d'un impact entre deux corps déformables en 3D est également présenté. Pour finir, nous présentons un problème d'auto-contact en 2D pour lequel l'utilisation du code FER/Impact permet d'éliminer le problème des modes rigides rencontré en statique.

# Chapitre 1

## Méthode des éléments finis en grandes perturbations

### 1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour but de rappeler les principaux concepts nécessaires à la compréhension des travaux présentés par la suite. Nous présentons la démarche permettant d'aboutir à la résolution par la méthode des éléments finis d'un problème de mécanique du solide en grandes perturbations. Nous n'aborderons pas ici le problème du contact qui fait l'objet du chapitre 2.

Nous débutons ces rappels par les notions de mécanique des milieux continus utiles à la modélisation de notre problème. Nous introduisons le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes adaptés aux problèmes de déformations finies. Nous proposons également un bref rappel des opérations qui aboutissent à la formulation intégrale faible des équations d'équilibre.

Par la suite, nous abordons la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en elle-même. Nous commençons par présenter les principes de base de la méthode que nous appliquons ensuite aux équations obtenues dans le paragraphe précédent. Nous proposons également un développement détaillé des différents outils mathématiques utilisés dans la suite pour la programmation du code FER/Impact.

### 1.2 Mécanique des milieux continus

Dans ce premier paragraphe, nous allons effectuer un rappel des différents concepts de la mécanique des milieux continus utiles à la suite de notre travail. Nous nous plaçons dans le



cadre d'un problème de dynamique pour lequel le solide étudié peut subir de grands déplacements et de grandes déformations [Sax00, Gar02, Pon95].

### 1.2.1 Cadre du problème

Considérons l'étude du comportement d'un solide  $\mathcal{B}$ . Pour le moment, nous ne prenons pas en compte le problème du contact.

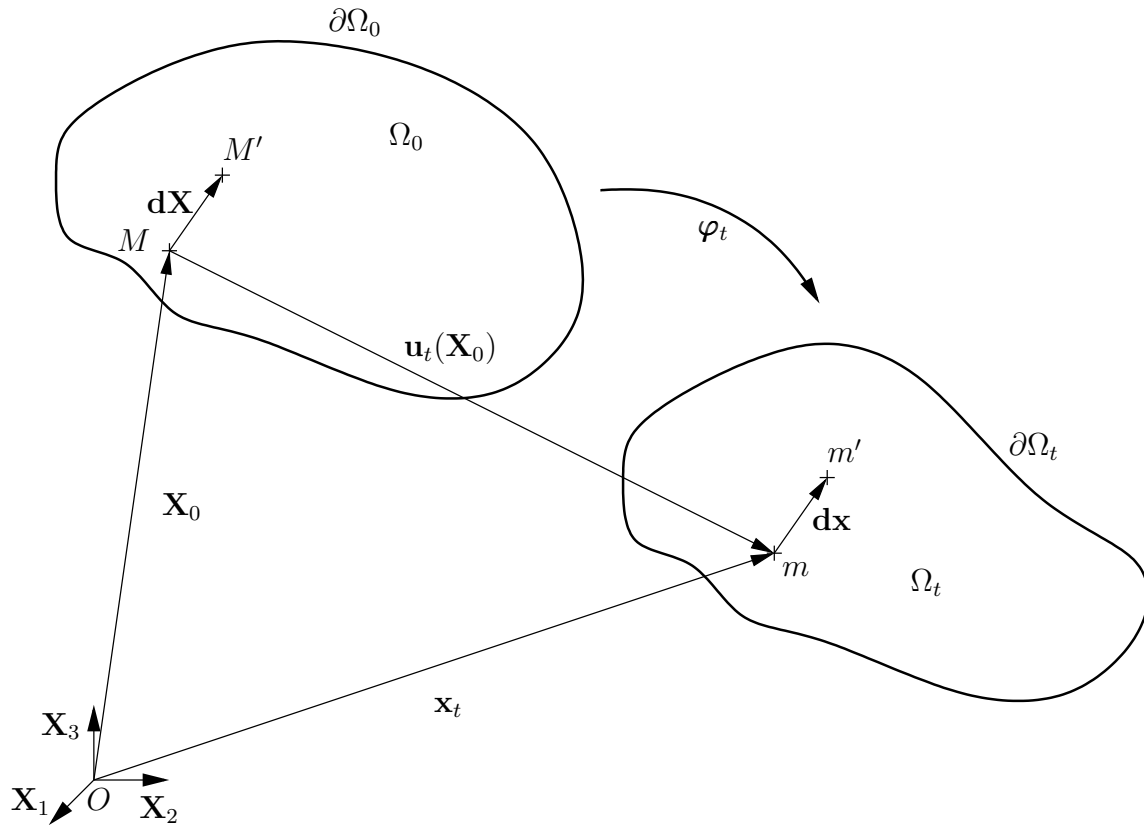


FIG. 1.1 – Définition cinématique du problème

La figure 1.1 illustre cet exemple de départ pour lequel nous observons les déplacements par rapport au repère orthonormé direct  $R_0 = (O, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ . Dans sa configuration initiale, les particules  $M$  constituant le solide  $\mathcal{B}$  occupent l'ensemble fermé  $\bar{\Omega}_0 \subset \mathbb{R}^3$  défini par :

$$\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0, \quad (1.1)$$

où :

- $\partial\Omega_0$  est le contour de  $\bar{\Omega}_0$ ,
- $\Omega_0$  est l'intérieur de  $\bar{\Omega}_0$ .

Dans le cadre de la dynamique, nous cherchons à prédire le comportement du solide  $\mathcal{B}$  sur

un intervalle de temps  $\mathbf{I} = [t_0, t_1]$ . Pour tout instant  $t \in \mathbf{I}$ , nous définissons une application  $\varphi_t$  telle que le nouveau domaine qu'occupe le solide  $\mathcal{B}$ , noté  $\bar{\Omega}_t$ , soit l'ensemble des points matériels  $m$  définis par :

$$m = \varphi_t(M) \quad \forall M \in \bar{\Omega}_0. \quad (1.2)$$

Dans la formulation lagrangienne totale, nous exprimons la position courante d'une particule en fonction de sa position initiale et du temps. C'est la formulation qui a été choisie pour nos travaux et qui sera donc utilisée tout au long de ce document. Il est important de noter que  $M$  et  $m$  font ici respectivement référence à une même particule du solide  $\mathcal{B}$  dans la configuration initiale (ou matérielle) et dans la configuration courante (ou spatiale). Pour la suite, nous choisissons de nous référer directement aux vecteurs positions  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{x}_t$  de  $M$  et  $m$  dans le référentiel  $R_0$ . Nous écrivons alors :

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(M, t_0) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_{R_0} = X_1 \cdot \mathbf{X}_1 + X_2 \cdot \mathbf{X}_2 + X_3 \cdot \mathbf{X}_3, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{X}(M, t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{R_0} = x_1 \cdot \mathbf{X}_1 + x_2 \cdot \mathbf{X}_2 + x_3 \cdot \mathbf{X}_3. \quad (1.4)$$

Le déplacement total subi par la particule  $M$  entre l'instant initial  $t_0$  et l'instant  $t$  est alors défini par le vecteur :

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{X}_0) = \mathbf{x}_t - \mathbf{X}_0. \quad (1.5)$$

L'application  $\varphi_t$  prend quant à elle la forme d'une matrice qui est définie par la relation :

$$\mathbf{x}_t = \varphi_t(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{u}_t(\mathbf{X}_0). \quad (1.6)$$

Afin d'alléger au maximum les notations, nous ne ferons plus référence à l'indicateur de temps  $t$ . Sans risque d'ambiguïté, nous écrirons donc dorénavant  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$  en lieu et place de  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{x}_t$ . Nous supprimons également l'indice  $R_0$  qui précise le référentiel dans lequel sont exprimées les quantités matricielles. Dans la formulation lagrangienne totale toutes les grandeurs sont en effet exprimées dans le repère d'origine. Seule l'introduction du problème du contact dans la formulation du problème (chapitre 2) engendrera la création d'un second repère : le repère local du contact. Nous prendrons garde, à ce moment là, à bien définir le système de notation adopté.

Pour un problème en trois dimensions, l'égalité 1.6 s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(X_1, X_2, X_3) \\ u_2(X_1, X_2, X_3) \\ u_3(X_1, X_2, X_3) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

L'application  $\varphi$  doit vérifier certaines conditions de compatibilité afin d'assurer l'impénétrabilité de la matière :

- elle doit être bijective,
- elle doit avoir un jacobien strictement positif.

## 1.2.2 Mesure des déformations

Considérons maintenant une seconde particule  $M'$  du solide  $\mathcal{B}$ , infiniment proche de  $M$  et telle que  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$ . Il est possible d'estimer la position courante de cette dernière en fonction de celle de  $M$  en écrivant :

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{X}') = \varphi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \quad (1.8)$$

Sur la figure 1.1, nous avons également :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

En reportant (1.9) dans (1.8), nous faisons apparaître le tenseur gradient de déformations  $\mathbf{F}$  défini par :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}. \quad (1.10)$$

Ce tenseur mesure les déformations subies par le domaine  $\bar{\Omega}_0$  entre la configuration initiale et la configuration courante. Nous avons :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}), \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{Id}$  est le tenseur identité. Le tenseur gradient des déplacements, noté  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X})$ , se calcule par :

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Notons que nous pouvons relier le tenseur  $\mathbf{F}$  à la variation d'un élément de volume  $dV$  par le biais de son déterminant :

$$d\Omega_t = J d\Omega_0 \quad \text{où} \quad J = \det \mathbf{F}. \quad (1.13)$$

Le tenseur gradient des déformations  $\mathbf{F}$  n'est pas utilisé sous cette forme pour exprimer les déformations subies par un domaine. En effet, il ne constitue pas une grandeur objective puisqu'il est affecté par les rotations de corps rigide. Une première solution consiste à effectuer une décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  pour séparer la partie déformation pure de la partie rotation de corps rigide. Nous obtenons alors :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad (1.14)$$

où :

- $\mathbf{V}$  est le tenseur Eulérien de déformation pure gauche,
- $\mathbf{U}$  est le tenseur Lagrangien de déformation pure droit,
- $\mathbf{R}$  est le tenseur des rotations de corps rigide par rapport aux axes de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$ .

Une autre possibilité consiste à introduire le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit (noté  $\mathbf{C}$ ) qui mesure les déformations par rapport à la configuration initiale :

$$d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} \quad \text{avec} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (1.15)$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$ , qui est objectif, est également symétrique et défini positif. Toutefois, il est égal au tenseur identité à l'état initial pour lequel les déformations sont, par définition, nulles. Nous utiliserons donc plus volontiers le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  qui rapporte une déformation nulle à l'état initial :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{Id}). \quad (1.16)$$

En utilisant les définitions de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{F}$ , le tenseur  $\mathbf{E}$  peut s'écrire sous la forme développée :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) \right). \quad (1.17)$$

Cette écriture met en évidence une partie linéaire et une partie non-linéaire. Sous l'hypothèse des petites perturbations, nous retrouvons bien le tenseur des déformations infinitésimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . En effet, si les termes de  $\mathbf{F}$  sont petits devant 1, il est possible de négliger le terme du second ordre et le tenseur des déformations est alors linéaire en déplacement.

**Remarque :** Il est important de noter ici que le tenseur des déformations  $\mathbf{E}$  est un tenseur symétrique de par sa construction. En effet, cette propriété est largement utilisée lors de la programmation de la méthode des éléments finis pour réduire la taille des tableaux de données à stocker et le nombre de composantes entrant en jeu dans les calculs.

### 1.2.3 Mesure des contraintes

Nous allons maintenant définir le tenseur chargé de mesurer les contraintes par rapport à la configuration initiale. En effet, cette dernière est la seule qui est connue *a priori* et les actions exercées sur le solide  $\mathcal{B}$  ne peuvent être exprimées que par rapport à elle. Pour cela, nous réécrivons l'expression d'une force qui s'exerce sur un élément de surface  $ds$  de la configuration courante (figure 1.2).

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l'élément de surface  $ds$ . Le tenseur  $\mathbf{T}$  est appelé tenseur des contraintes vraies (ou tenseur de Cauchy). En petites déformations, ce tenseur est souvent noté  $\sigma$ .

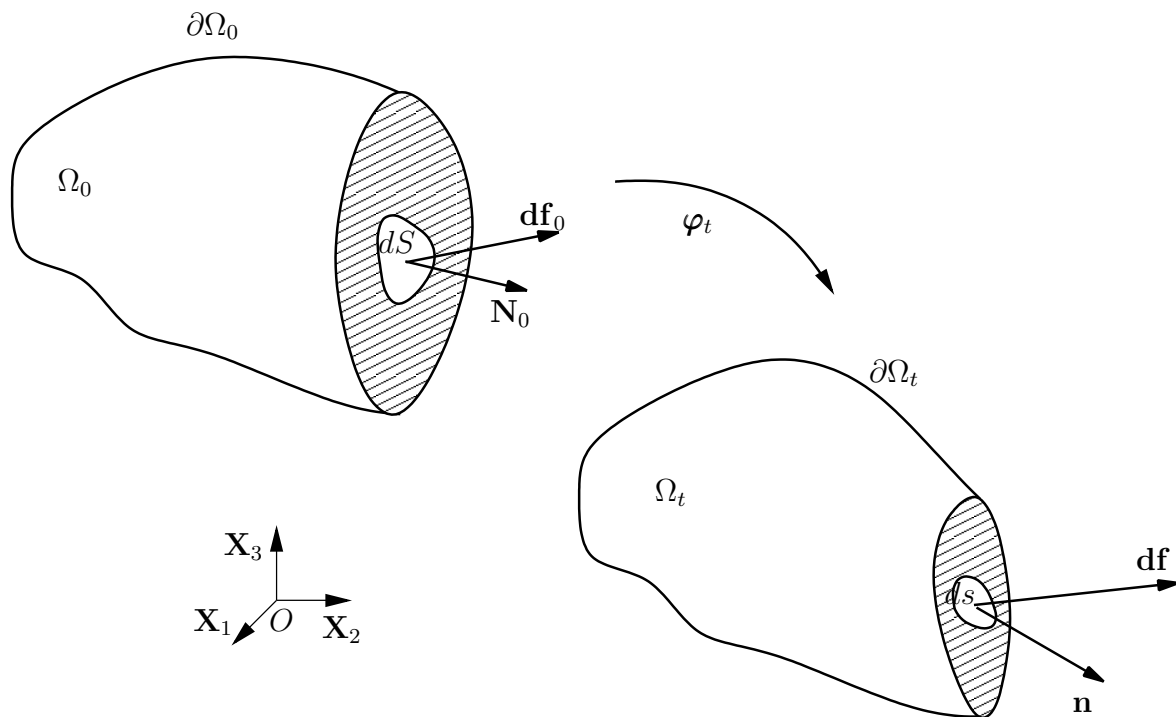


FIG. 1.2 – Effort intérieur

Nous écrivons maintenant une seconde formulation des efforts intérieurs en faisant intervenir cette fois l'élément de surface dans la configuration initiale. Ainsi, nous définissons

le tenseur  $\mathbf{P}$ , appelé premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, qui représente les contraintes actuelles par rapport à une surface de la configuration initiale :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_0 dS. \quad (1.19)$$

La formule de transformation des éléments de surface s'écrit :

$$\mathbf{n} ds = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_0 dS. \quad (1.20)$$

Ainsi, en introduisant (1.20) dans la définition (1.13), nous obtenons la relation entre les deux tenseurs des contraintes  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (1.21)$$

Cependant, de par sa construction,  $\mathbf{P}$  n'est exprimé ni purement par rapport à la configuration initiale ni purement par rapport à la configuration actualisée. De plus, il n'est pas symétrique (tout comme  $\mathbf{F}$ ). Nous cherchons donc à transporter  $d\mathbf{f}$  dans la configuration initiale :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_0 dS = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}_0 dS, \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Ce nouveau tenseur des contraintes est symétrique et exclusivement exprimé par rapport à la configuration initiale. C'est donc ce tenseur qui sera utilisé pour écrire les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations :

$$\delta\mathbf{S} = \mathbb{D} : \delta\mathbf{E}, \quad (1.23)$$

où  $\mathbb{D}$  est le tenseur d'élasticité du matériau considéré traduisant son comportement mécanique.

## 1.2.4 Équations d'équilibre

Pour tout  $t \in \mathbf{I}$  et pour tout  $\mathbf{X}_0 \in \Omega$ , la fonction  $\varphi(\mathbf{X})$  doit de vérifier :

$$\text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \rho \ddot{\varphi}(\mathbf{X}), \quad (1.24)$$

où  $\text{DIV}$  est l'opérateur de divergence rapporté à la configuration initiale,  $\mathbf{b}$  représente les forces volumiques appliquées à  $\mathcal{B}$  et  $\rho \ddot{\varphi}$  est le terme d'inertie.

Afin de ne faire apparaître que des termes de déplacement, nous écrivons :

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}). \quad (1.25)$$

Ainsi, nous obtenons la nouvelle équation d'équilibre sous forme locale :

$$\text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}). \quad (1.26)$$

Afin de compléter la formulation du problème, nous devons ajouter à l'équation (1.26) les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega_0$  et les conditions initiales. Pour cela, la frontière de  $\overline{\Omega}_0$  est décomposée en deux parties :  $\Gamma_u$  sur laquelle les déplacements sont imposés (conditions aux limites de type Dirichlet) et  $\Gamma_\sigma$  sur laquelle les actions extérieures sont connues (conditions aux limites de type Neumann). Ce découpage vérifie :

$$\begin{aligned} \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma &= \partial\Omega, \\ \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma &= \emptyset. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ainsi, les conditions aux limites sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_0 &= \overline{\mathbf{T}} \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{u} &= \overline{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Concernant les conditions initiales, elles permettent de définir la position et la vitesse du solide  $\mathcal{B}$  à l'instant  $t = 0$  par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{t=0}(\mathbf{X}) &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{dans } \overline{\Omega}_0, \\ \mathbf{u}_{t=0}(\mathbf{X}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad \text{dans } \overline{\Omega}_0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

### 1.2.5 Formulation intégrale forte

Dans la suite, nous allons modifier le système d'équation aux dérivées partielles (1.26) afin de permettre sa résolution par la méthode des éléments finis. Nous utiliserons pour cela la méthode des résidus pondérés associée à des fonctions de pondération de type Galerkin.

La première étape consiste à multiplier l'équation (1.26) par un champ de fonctions de pondération. Pour cela, nous choisissons le champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible suivant :

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \{ \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \mid \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0 \text{ sur } \Gamma_u \}. \quad (1.30)$$

Après intégration sur l'ensemble du domaine  $\bar{\Omega}_0$ , nous obtenons la formulation intégrale forte de l'équation d'équilibre :

$$\int_{\bar{\Omega}_0} \text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_0} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega. \quad (1.31)$$

### 1.2.6 Formulation intégrale faible

La seconde étape consiste à effectuer une intégration par parties du premier membre de l'équation (1.31) puis à utiliser le théorème de la divergence. Ceci permet de faire intervenir les efforts extérieurs dans la formulation :

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\partial\Omega - \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{P}(\mathbf{X}) \cdot \text{GRAD } \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_0} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega \quad (1.32)$$

Dans [Wri02], une seconde écriture de l'équation (1.32) est obtenue en faisant intervenir le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\partial\Omega - \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{E}(\mathbf{X}) \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_0} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \, d\Omega \quad (1.33)$$

## 1.3 Méthode des éléments finis

Afin de résoudre le problème aux valeurs limites établi dans le paragraphe précédent, il est nécessaire de mettre en œuvre une méthode de résolution numérique. Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement les concepts de base de la méthode des éléments finis [Hug87, ZT00, ZT91, Cri91, Cri97, BLM00].

À partir de maintenant, il devient plus commode d'utiliser la formulation matricielle des équations développées. Pour cela, nous utilisons le fait que les tenseurs  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{E}$  sont symé-



triques pour définir les vecteurs :

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} S_{11}(\mathbf{X}) \\ S_{22}(\mathbf{X}) \\ S_{33}(\mathbf{X}) \\ S_{12}(\mathbf{X}) \\ S_{13}(\mathbf{X}) \\ S_{23}(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} \text{ et } \mathbf{E}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} E_{11}(\mathbf{X}) \\ E_{22}(\mathbf{X}) \\ E_{33}(\mathbf{X}) \\ 2E_{12}(\mathbf{X}) \\ 2E_{13}(\mathbf{X}) \\ 2E_{23}(\mathbf{X}) \end{Bmatrix}. \quad (1.34)$$

Nous définissons également la matrice d'élasticité  $\mathbf{D}$  qui permet de réécrire la loi de comportement (1.23) sous sa forme matricielle :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{1111} & \mathbb{D}_{1122} & \mathbb{D}_{1133} & \mathbb{D}_{1112} & \mathbb{D}_{1113} & \mathbb{D}_{1123} \\ \mathbb{D}_{1122} & \mathbb{D}_{2222} & \mathbb{D}_{2233} & \mathbb{D}_{2212} & \mathbb{D}_{2213} & \mathbb{D}_{2223} \\ \mathbb{D}_{1133} & \mathbb{D}_{2233} & \mathbb{D}_{3333} & \mathbb{D}_{3312} & \mathbb{D}_{3313} & \mathbb{D}_{3323} \\ \mathbb{D}_{1112} & \mathbb{D}_{2212} & \mathbb{D}_{3312} & \frac{(\mathbb{D}_{1212} + \mathbb{D}_{1221})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1213} + \mathbb{D}_{1231})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1223} + \mathbb{D}_{1232})}{2} \\ \mathbb{D}_{1113} & \mathbb{D}_{2213} & \mathbb{D}_{3313} & \frac{(\mathbb{D}_{1312} + \mathbb{D}_{1321})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1313} + \mathbb{D}_{1331})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{1323} + \mathbb{D}_{1332})}{2} \\ \mathbb{D}_{1123} & \mathbb{D}_{2223} & \mathbb{D}_{3323} & \frac{(\mathbb{D}_{2312} + \mathbb{D}_{2321})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{2313} + \mathbb{D}_{2331})}{2} & \frac{(\mathbb{D}_{2323} + \mathbb{D}_{2332})}{2} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Le reste des termes de l'équation (1.33) prennent la forme vectorielle :

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1(\mathbf{X}) \\ \bar{T}_2(\mathbf{X}) \\ \bar{T}_3(\mathbf{X}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} b_1(\mathbf{X}) \\ b_2(\mathbf{X}) \\ b_3(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{X}) \\ u_2(\mathbf{X}) \\ u_3(\mathbf{X}) \end{Bmatrix}. \quad (1.36)$$

Pour la suite des développements, nous n'utiliserons plus que ce formalisme sauf pour le paragraphe 1.3.3 page 27 dans lequel l'écriture tensorielle est préférable.

### 1.3.1 Principes de base

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible de trouver une solution analytique pour le système d'équations défini au paragraphe précédent. Une solution consiste à procéder par approximation nodale : nous passons ainsi d'un système continu dans lequel le nombre d'inconnues est infini à un système discret, au nombre d'inconnues fini.

Afin de pouvoir aborder des géométries complexes, le domaine  $\bar{\Omega}_0$  est découpé en sous-domaines  $\bar{\Omega}_0^e$  (figure 1.3). Cette opération est appelée discrétisation spatiale (ou bien maillage) du modèle géométrique. Le domaine initial  $\bar{\Omega}_0$  est alors remplacé par la réunion d'un ensemble d'éléments  $\bar{\Omega}_0^e$ . Chacun de ces éléments est lui-même défini par des nœuds dont le

nombre varie selon le type d'élément choisi. Ainsi, le problème ne consiste plus à effectuer une approximation de  $\mathbf{u}$  sur l'ensemble du domaine mais sur chaque élément de la discrétisation spatiale.

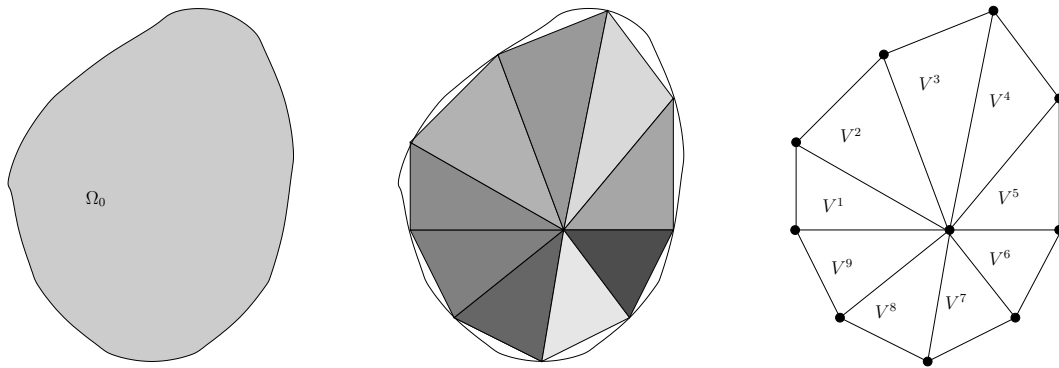


FIG. 1.3 – Discrétisation spatiale d'un milieu continu

Nous optons ici pour la méthode d'approximation par éléments finis qui présente les particularités suivantes :

- chaque approximation  $\mathbf{u}^e$  ne dépend que des variables attachées à des nœuds de  $\Omega_0^e$ ,
- chaque approximation  $\mathbf{u}^e$  est construite de manière à être continue sur  $\Omega_0^e$  et à satisfaire les conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

Le découpage d'un domaine quelconque  $\Omega$  en un ensemble de sous-domaines  $\Omega^e$  est régi par les règles suivantes :

- il ne peut y avoir de partie commune à deux éléments de la discrétisation autre que des points de leur frontière respective,
- l'union des sous-domaines doit être le plus proche possible du domaine  $\overline{\Omega}_0$ .

**Remarque :** Nous appelons « erreur de discrétisation » la différence qui existe entre le domaine d'origine et la réunion des sous-domaines. Elle se produit plus particulièrement lorsque que le domaine est définie par des courbes. En effet, il est alors impossible de reproduire exactement le domaine à l'aide d'éléments à arête droite.

Les différents éléments dont nous disposons dans le code de calcul FER/Impact sont présentés sur les figures 1.4 à 1.7.

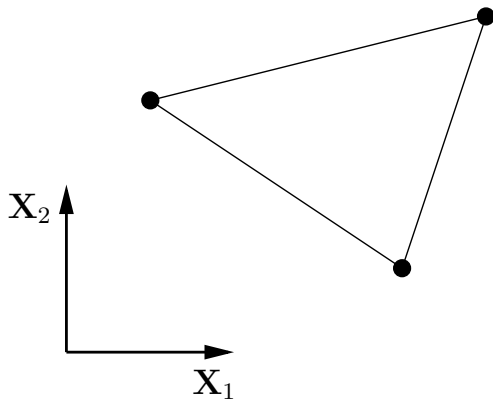


FIG. 1.4 – Élément T3

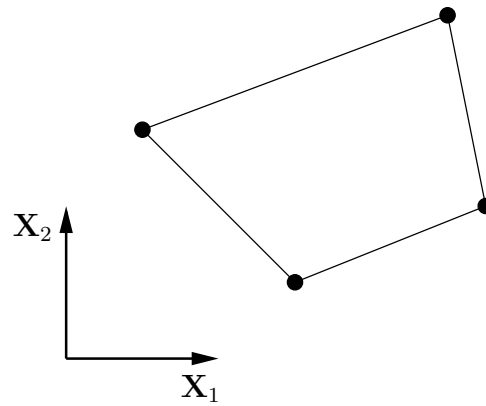


FIG. 1.5 – Élément Q4

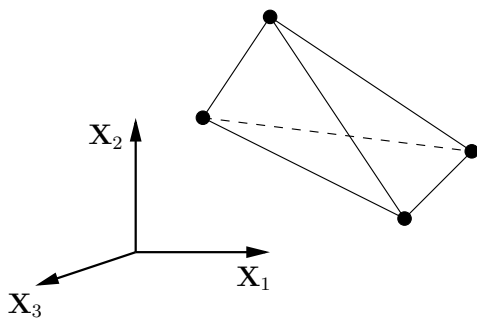


FIG. 1.6 – Élément T4

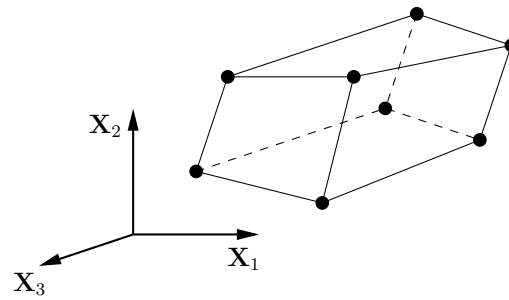


FIG. 1.7 – Élément H8

Sur chaque élément, nous adoptons l'approximation nodale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}) &= \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{u}^e, \\ \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) &= \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}^e, \end{aligned} \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme et  $\mathbf{u}^e$  est le vecteur des déplacements nodaux.

D'après la définition du tenseur des déformations de Green-Lagrange (1.16 et 1.17), il est possible d'exprimer ce dernier comme la somme d'une partie linéaire avec une partie non-linéaire en déplacement.

Nous posons donc :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \left( \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}^e) \right) \cdot \mathbf{u}^e. \quad (1.38)$$

À partir de cette nouvelle écriture, nous pouvons obtenir la définition de  $\delta \mathbf{E}$  :

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}^e)) \cdot \delta \mathbf{u}^e. \quad (1.39)$$

La formulation intégrale (1.33) est une formulation continue qui est définie sur l'ensemble du domaine  $\bar{\Omega}_0$ . Après discrétisation spatiale de ce domaine par la méthode des éléments finis, nous pouvons écrire que cette égalité reste vraie sur chacun des éléments créés :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\sigma^e} \bar{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u}^e \, d\delta\Omega - \int_{\bar{\Omega}_0^e} \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \cdot \delta \mathbf{u}^e \, d\Omega \\ + \int_{\bar{\Omega}_0^e} \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u}^e \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_0^e} \rho (\mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^e)^T \cdot \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u}^e \, d\Omega \end{aligned} \quad (1.40)$$

Il est intéressant de détailler ici la construction du tenseur des déformations de Green-Lagrange défini dans (1.17) et réécrit sous une seconde forme dans (1.38). Pour cela, nous calculons tout d'abord chaque terme de l'approximation nodale du gradient de déplacement défini dans (1.12) :

$$\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial X_1}; \frac{\partial u_2}{\partial X_1}; \frac{\partial u_3}{\partial X_1}; \frac{\partial u_1}{\partial X_2}; \frac{\partial u_2}{\partial X_2}; \frac{\partial u_3}{\partial X_2}; \frac{\partial u_1}{\partial X_3}; \frac{\partial u_2}{\partial X_3}; \frac{\partial u_3}{\partial X_3}; \right\}^T = \mathbf{G} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \dots \\ \dots \\ u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{array} \right\}, \quad (1.41)$$

où  $n$  est le nombre de nœuds qui composent l'élément et :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_1} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_2} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_2} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_3} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_3} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1(X)}{\partial X_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n(X)}{\partial X_3} \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

où  $N_1, N_2, \dots, N_n$  sont les fonctions de forme qui permettent d'effectuer l'approximation nodale sur l'élément considéré.

Nous pouvons maintenant sortir le terme  $\delta \mathbf{u}^e$  de chaque intégrale élémentaire en soulignant que c'est bien évidemment un terme constant sur l'élément. De même, il est possible de faire sortir le terme des accélérations nodales  $\ddot{\mathbf{u}}^e$  afin d'obtenir, après transposition, la formulation matricielle élémentaire du problème :

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{T}} \, d\delta\Omega - \int_{\bar{\Omega}_0^e} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})^T \cdot \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega = \left( \int_{\bar{\Omega}_0^e} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \, d\Omega \right) \cdot \ddot{\mathbf{u}}^e. \quad (1.43)$$

L'équation 1.43 peut s'écrire sous la forme contractée :

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}_{ext}^e - \mathbf{F}_{int}^e, \quad (1.44)$$

où  $\mathbf{M}^e$  est la matrice de masse élémentaire,  $\mathbf{F}_{int}^e$  est le vecteur élémentaire des forces internes

et  $\mathbf{F}_{ext}^e$  est le vecteur élémentaire des forces externes. Nous avons :

$$\mathbf{M}^e = \int_{\bar{\Omega}_0^e} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \, d\Omega, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{F}_{int}^e = \int_{\bar{\Omega}_0^e} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})^T \cdot \mathbf{S} \, d\Omega, \quad (1.46)$$

$$\mathbf{F}_{ext}^e = \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{T}} \, d\delta\Omega + \int_{\bar{\Omega}_0^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega. \quad (1.47)$$

Dans certains cas, il peut être intéressant d'introduire la dissipation d'énergie provoquée par les frottements à l'intérieur même du matériau (viscosité). Pour cela, nous pouvons ajouter au système (1.44) un terme dissipatif directement relié à la vitesse instantanée. Le système à résoudre devient alors :

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{F}_{ext}^e - \mathbf{F}_{int}^e. \quad (1.48)$$

À ce stade du développement, nous introduisons la notion d'élément de référence. Cette dernière permet de simplifier considérablement la définition analytique des différents éléments composant le maillage. Pour chaque type d'élément, nous définissons dans un espace de référence  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  un élément de référence (noté  $\bar{\Omega}^e$ ) de forme simple pouvant être transformé en tout élément du même type par transformation géométrique. Cette opération peut tout à fait être interprétée comme une opération de changement de variable. Les éléments de référence correspondants aux éléments utilisés dans notre étude sont présentés sur les figures 1.8 à 1.11.

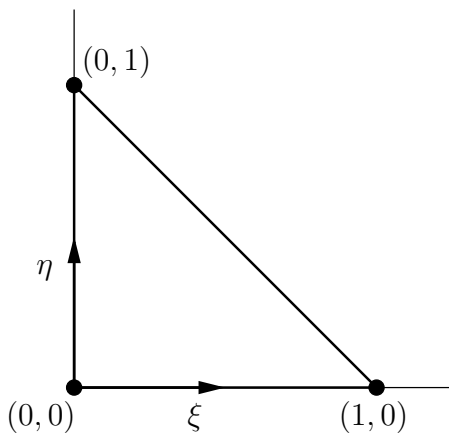


FIG. 1.8 – Élément de référence pour T3

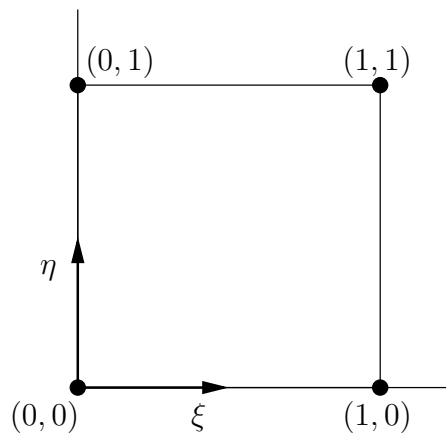


FIG. 1.9 – Élément de référence pour Q4

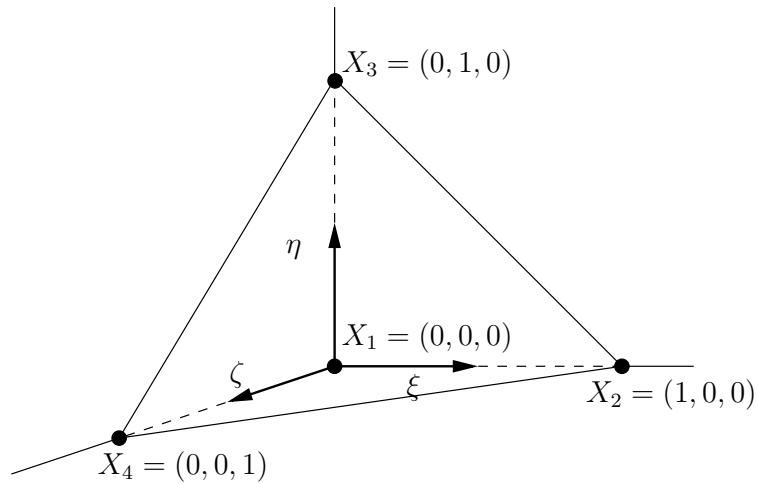


FIG. 1.10 – Élément de référence pour T4

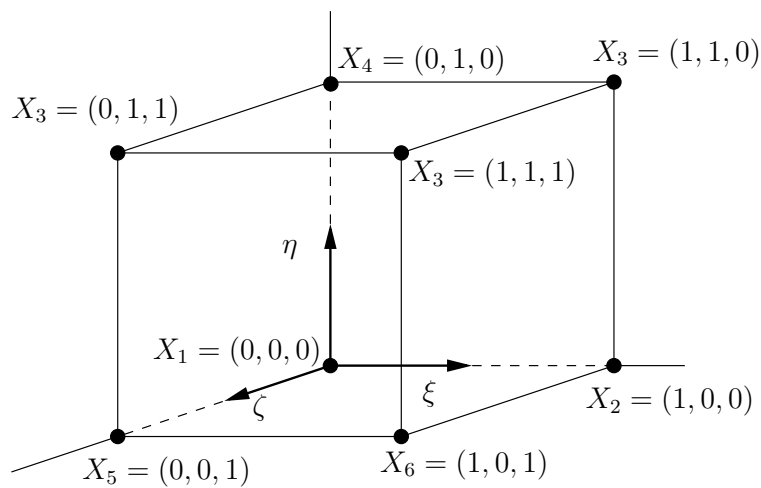


FIG. 1.11 – Élément de référence pour H8

Sur l'élément de référence, l'interpolation nodale s'écrit :

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{u}^e(\boldsymbol{\xi}), \quad (1.49)$$

avec :

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1(\boldsymbol{\xi}) & 0 & 0 & \dots & \bar{N}_n(\boldsymbol{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1(\boldsymbol{\xi}) & 0 & \dots & 0 & \bar{N}_n(\boldsymbol{\xi}) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_1(\boldsymbol{\xi}) & \dots & 0 & 0 & \bar{N}_n(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Les tableaux 1.1 et 1.2 récapitulent l'expression des fonctions de forme pour chacun des éléments utilisés dans FER/Impact.

TAB. 1.1 – Fonctions de forme pour les éléments T3, Q4 et T4

	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$	$\bar{N}_3$	$\bar{N}_4$
Élément T3	$1 - \xi - \eta$	$\xi$	$\eta$	–
Élément Q4	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$
Élément T4	$1 - \xi - \eta - \zeta$	$\xi$	$\eta$	$\zeta$

TAB. 1.2 – Fonctions de forme pour l'élément H8

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad \bar{N}_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$\bar{N}_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad \bar{N}_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$\bar{N}_5 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \quad \bar{N}_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$\bar{N}_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad \bar{N}_8 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

Afin de construire le tenseur des déformations tel qu'il est défini dans (1.41), nous devons procéder à une transformation de l'opérateur de dérivation. Nous considérons ainsi l'opéra-



tion :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi} & \frac{\partial X_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \eta} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta} & \frac{\partial X_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial X_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial X_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{Bmatrix}. \quad (1.51)$$

La nouvelle matrice définie dans (1.51) sera notée  $\mathbf{J}$ . De la même manière, nous pouvons définir la matrice  $\mathbf{j}$  permettant d'effectuer le passage inverse :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial X_1} & \frac{\partial \eta}{\partial X_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial X_2} & \frac{\partial \eta}{\partial X_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial X_3} & \frac{\partial \eta}{\partial X_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial X_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}. \quad (1.52)$$

Il est utile de noter que nous avons la relation :

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}^{-1}. \quad (1.53)$$

La construction de la matrice  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$  se fait de la manière suivante :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{N}_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \bar{N}_n(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{N}_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{N}_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \bar{N}_n(\boldsymbol{\xi})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \bar{N}_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} & \frac{\partial \bar{N}_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial \bar{N}_n(\boldsymbol{\xi})}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^n & X_2^n & X_3^n \end{Bmatrix}. \quad (1.54)$$

Ainsi, les termes utilisés dans l'équation (1.41) sont calculés à l'aide des dérivées des fonctions de forme par rapport aux variables de référence et de la matrice  $\mathbf{j}$  via l'équation (1.52).

Par ailleurs, il est nécessaire d'effectuer le même type de transformation concernant l'opération d'intégration sur le volume  $\bar{\Omega}^e$  qui est effectuée dans l'équation (1.43). Nous pouvons écrire pour cela :

$$\int_{\bar{\Omega}^e} f(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\bar{\Omega}^r} f(\boldsymbol{\xi}) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})) d\Omega. \quad (1.55)$$

Pour effectuer ces intégrations, nous utilisons la méthode d'intégration de Gauss qui consiste

à écrire :

$$\int_{\bar{\Omega}^r} f(\boldsymbol{\xi}) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_i)) w_i, \quad (1.56)$$

où les  $\boldsymbol{\xi}_i$  et les  $w_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont respectivement les points de Gauss et les poids qui leur sont alloués dans l'intégration. La précision de la méthode dépend du nombre de points de Gauss utilisé. Les coordonnées des  $m$  points de Gauss et la valeur des poids correspondants sont déterminées de telle sorte qu'elles intègrent exactement tous les polynômes d'ordre inférieur à  $2m - 1$ .

Pour notre travail, nous avons opté pour les caractéristiques suivantes :

TAB. 1.3 – Définition des points de Gauss

élément	nombre de points	coordonnées des points	poids $w_i$
T3	1	$(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$
Q4	4	$(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$	1
T4	1	$(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$	$\frac{1}{6}$
H8	8	$(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$	1

Ayant défini toutes les quantités nécessaires pour le calcul des différents termes de (1.44), nous procédons à la phase d'assemblage qui mène à la formulation globale du système :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}, \quad (1.57)$$

où :

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{M}^e \quad \text{matrice de masse globale,} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{C}^e \quad \text{matrice globale d'amortissement,} \quad (1.59)$$

$$\mathbf{F}_{int} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_{int}^e \quad \text{vecteur global des forces internes,} \quad (1.60)$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_{ext}^e \quad \text{vecteur global des forces externes.} \quad (1.61)$$

### 1.3.2 Linéarisation des forces internes

Le système (1.57) étant non-linéaire, il est nécessaire de mettre en place une procédure itérative de Newton-Raphson pour le résoudre. Nous effectuons donc une linéarisation du vecteur des forces internes par le biais d'un développement limité en série de Taylor :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^{i+1} &= (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i + \frac{\partial (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i}{\partial \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i} (\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i) \\ &= \mathbf{F}_{int}^i - (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} \end{aligned} \quad (1.62)$$

où les indices  $i$  et  $i+1$  réfèrent à l'itération considérée dans le processus de Newton-Raphson. La matrice  $\mathbf{K}_T$  est la matrice tangente de rigidité du système.

Nous obtenons alors la boucle récursive d'équilibre de Newton-Raphson, qui permet de déterminer la configuration  $\mathbf{C}_{t+\Delta t}$  à partir de la configuration d'équilibre précédente  $\mathbf{C}_t$  :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} = (\mathbf{F}_{ext})_{t+\Delta t} - (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i - (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{cases} \quad (1.63)$$

Cette boucle est répétée jusqu'à ce que le critère de convergence choisi soit vérifié. Dans notre étude, nous avons choisi d'effectuer un contrôle combiné sur les forces internes et sur les incréments de déplacement. Pour sortir de la boucle d'équilibre, le résultat du calcul doit donc vérifier :

$$\frac{|(\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^{i+1} - (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i|}{|(\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i|} \leq \epsilon_1 \quad \text{et} \quad \frac{|\Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i|}{|\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}|} \leq \epsilon_2. \quad (1.64)$$

Après intégration par un schéma implicite classique (Newmark, Houbold, HHT, ...), le sys-

tème à résoudre (2.27) se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1} \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i = \widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} \\ \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i \end{cases} \quad (1.65)$$

où  $\widehat{\mathbf{M}}$  et  $\widehat{\mathbf{F}}$  sont respectivement la matrice de masse effective et le vecteur effectif des efforts extérieurs. Leur construction dépend du schéma adopté et sera développée en détail dans le chapitre 3.

Nous présentons sur la figure 1.12 l'algorithme principal d'un calcul par la méthode des éléments finis pour un problème en grandes perturbations. Nous y retrouvons les deux boucles principales imbriquées : la boucle en équilibre (Newton-Raphson) à l'intérieur de la boucle en temps. La définition (1.46) du vecteur des forces internes, ramenée au niveau élémentaire, permet d'écrire :

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{\overline{\Omega}_0} \left( \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}^T}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{S} + (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})^T \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \right) d\Omega \quad \text{avec} \quad \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}_T. \quad (1.66)$$

De plus, en utilisant les équations (1.23) et (1.39), nous pouvons écrire :

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \cdot \delta \mathbf{u}^e. \quad (1.67)$$

Ainsi, nous pouvons écrire la matrice tangente de rigidité comme la somme de trois termes : la matrice de rigidité élastique  $\mathbf{K}_e$ , la matrice de rigidité géométrique  $\mathbf{K}_\sigma$  (ou matrice de rigidité de contraintes initiales) et la matrice de rigidité de déplacements initiaux  $\mathbf{K}_u$  :

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}_e^e + \mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e, \quad (1.68)$$

où

$$\mathbf{K}_e^e = \int_{\overline{\Omega}_0} \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_L d\Omega, \quad (1.69)$$

$$\mathbf{K}_u^e = \int_{\overline{\Omega}_0} (\mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{NL}) d\Omega, \quad (1.70)$$

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \int_{\overline{\Omega}_0} \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}^T}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{S} d\Omega. \quad (1.71)$$

Les matrices définies  $\mathbf{K}_e^e$  et  $\mathbf{K}_u^e$  peuvent être directement calculées à l'aide des deux parties (linéaire et non-linéaire) du tenseur des déformations  $\mathbf{E}$  et de la matrice  $\mathbf{D}$ . C'est donc en développant le calcul du vecteur des forces internes que nous faisons intervenir la loi de comportement du matériau considéré en faisant apparaître la matrice  $\mathbf{D}$ . Dans le paragraphe

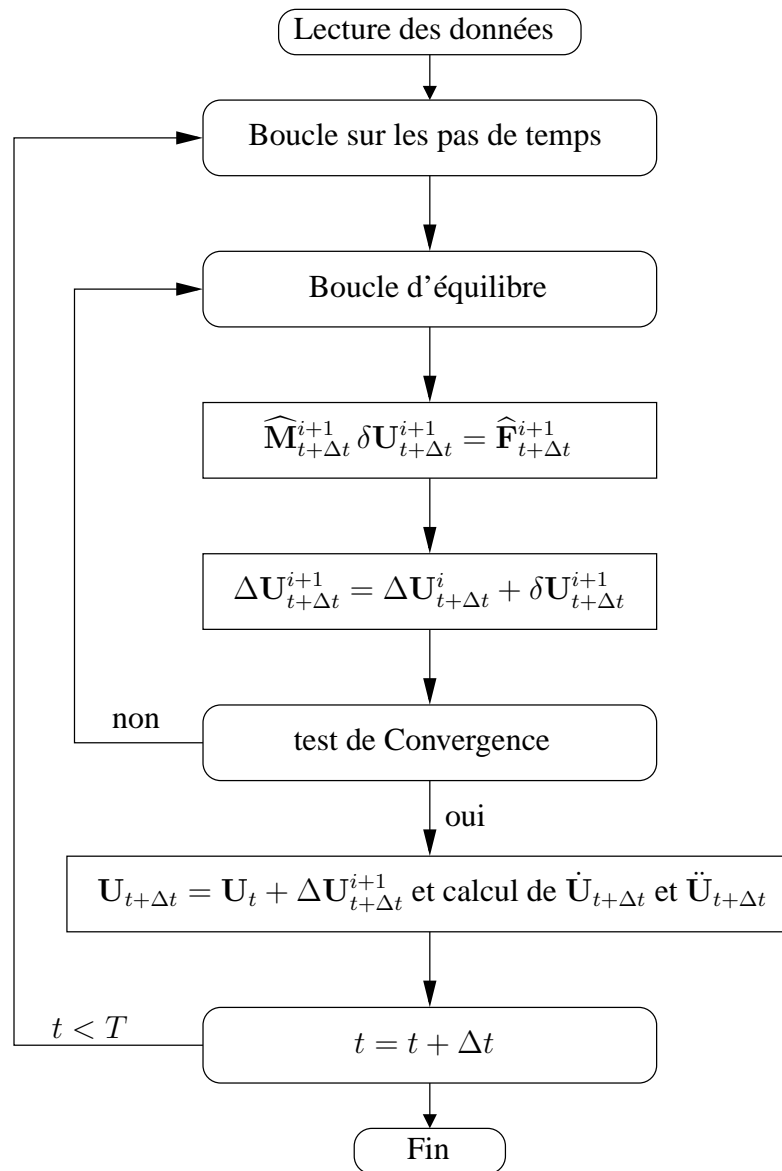


FIG. 1.12 – Algorithme principal de résolution sans contact

suisant, nous verrons comment implanter différentes lois de comportement hyperélastiques au sein du calcul de  $\mathbf{F}_{int}$  et  $\mathbf{K}_T$ . Ces différentes lois nous seront utiles par la suite pour étendre le champ d'application de notre code de calcul.

En ce qui concerne le dernier terme de la matrice tangente  $\mathbf{K}_T^e$  défini dans (1.71), nous utilisons le développement apporté dans [ZT91]. Il aboutit à :

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \int_{\bar{\Omega}_0} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{G} d\Omega, \quad (1.72)$$

où  $\mathbf{G}$  est défini dans 1.42 et où :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} S_{11} \mathbf{Id} & S_{12} \mathbf{Id} & S_{13} \mathbf{Id} \\ & S_{22} \mathbf{Id} & S_{23} \mathbf{Id} \\ Sym & & S_{33} \mathbf{Id} \end{bmatrix}. \quad (1.73)$$

### 1.3.3 Prise en compte des non-linéarités matérielles

Les propriétés mécaniques des élastomères et des caoutchoucs permettent d'atteindre des déformations de 500 %, voir de 1000 % dans certains cas. Bien entendu, la loi de Hooke ne permet pas d'aborder de tel comportement et il est nécessaire de développer des lois matériaux spécifiques. Dans ce paragraphe, nous aborderons le domaine des matériaux hyperélastiques. Pour cela, nous développerons en détail l'implantation des lois néo-Hookéenne, de Mooney-Rivlin et de Blatz-Ko dans un code de calcul par éléments finis.

Les différents développements effectués au sein de ce paragraphe utilisent l'écriture tensorielle des grandeurs physiques : tenseurs des contraintes  $\mathbf{S}$  et des déformations  $\mathbf{E}$  et tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$ . Les résultats doivent ensuite être mis sous forme matricielle à l'aide de (1.34) et (1.35) pour être conformes à l'écriture du problème développé dans le paragraphe 1.3.2.

Nous nous limiterons au domaine des matériaux isotropes. Les différentes lois de comportement proposées dans la suite respectent les deux règles suivantes :

- **principe d'objectivité** : la loi de comportement est invariante pour tout changement de repère,
- **condition d'isotropie** : le matériau a les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions.

De plus, un milieu hyperélasticité est défini dans [Lai98, LVF99] par les trois conditions suivantes :

- il existe une configuration de référence à l'état naturel où les contraintes sont nulles,
- les propriétés mécaniques du matériau sont décrites par une énergie libre spécifique, fonction des déformations,
- le matériau ne dissipe pas d'énergie.

Pour ce type de matériau, il est donc possible de définir une densité d'énergie de déformation  $W$  fonction de  $\mathbf{E}$ . Ainsi, la loi de comportement d'un matériau hyperélastique peut être écrite sous la forme d'une relation classique contrainte-déformation :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (1.74)$$

Pour des raisons de calcul, il est souvent préférable d'effectuer la dérivation par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit. Nous obtenons alors :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (1.75)$$

En effet, l'hypothèse d'isotropie du matériau permet d'écrire que le potentiel  $W$  ne dépend que des trois invariants de  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} W = W(I_1, I_2, I_3) \quad \text{où} \quad I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}), \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)), \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Les relations (1.76) conduisent à :

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right). \quad (1.77)$$

En utilisant les règles de calcul de l'algèbre tensoriel ainsi que le théorème de Caley-Hamilton, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{Id}, \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{Id} - \mathbf{C}, \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1}. \quad (1.80)$$

Après réarrangement des différents termes de 1.76, nous obtenons :

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{Id} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (1.81)$$

Cette dernière écriture sera celle utilisée par la suite pour déterminer le tenseur des contraintes. Par la suite, il est nécessaire de déterminer le tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$  qui entre en jeu dans le calcul de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_T^e$  (1.68 - 1.71). Pour cela, il est nécessaire de calculer la dérivée seconde du potentiel  $W$  par rapport à  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} = 4 \frac{\partial^2 W(I_1, I_2, I_3)}{\partial \mathbf{C}^2}. \quad (1.82)$$

Ainsi, la définition d'une densité d'énergie élastique  $W$  et l'application des équations (1.81) et (1.82) permettent d'intégrer complètement une loi de comportement d'un matériau hyperélastique dans un code de calcul par éléments finis. Nous allons maintenant étudier les cas particuliers de trois densités d'énergie parmi les plus utilisées dans les codes industriels.

### 1.3.3.1 Loi matériau de type Néo-Hookéen

Cette loi matériau est la plus simple à implanter et est applicable pour des taux de déformation allant jusqu'à 20%-30% [ANS]. La densité d'énergie élastique  $W$  qui est proposée pour cette loi ne fait pas intervenir l'invariant  $I_2$  :

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{G}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{d}(\sqrt{I_3} - 1)^2. \quad (1.83)$$

Nous avons donc besoin de deux constantes pour caractériser un tel matériau :

- $G$  : le module de cisaillement du matériau,
- $d$  : le paramètre d'incompressibilité du matériau.

De manière générale, le paramètre d'incompressibilité est lié au module de compressibilité  $K$  par la relation :

$$K = \frac{2}{d}. \quad (1.84)$$

En dérivant la densité d'énergie (1.83) par rapport aux trois invariants définis précédemment, nous obtenons :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{G}{2} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{1}{d} \frac{(\sqrt{I_3} - 1)}{\sqrt{I_3}}. \quad (1.85)$$

En reportant ces résultats de (1.85) dans (1.81), nous obtenons la définition du tenseur des contraintes d'un matériau de type Néo-Hookéen :

$$\mathbf{S} = G \mathbf{Id} + \frac{2\sqrt{I_3}}{d}(\sqrt{I_3} - 1)\mathbf{C}^{-1}. \quad (1.86)$$



D'après la définition (1.16) du tenseur des déformations de Green-Lagrange, nous pouvons réécrire 1.86 sous la forme :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = G \mathbf{Id} + \frac{2J(J-1)}{d} (2\mathbf{E} + \mathbf{Id})^{-1} \quad \text{avec} \quad J = \sqrt{\det(2\mathbf{E} + \mathbf{Id})}. \quad (1.87)$$

Nous cherchons maintenant la matrice d'élasticité  $\mathbb{D}$  d'un matériau Néo-Hookéen :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= 4 \frac{\partial^2 W(I_1, I_2, I_3)}{\partial \mathbf{C}^2} \\ &= \frac{4}{d} \left( \frac{\partial \sqrt{I_3} (\sqrt{I_3} - 1)}{\partial I_3} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \sqrt{I_3} (\sqrt{I_3} - 1) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \\ &= \frac{4}{d} \left( \sqrt{I_3} (\sqrt{I_3} - \frac{1}{2}) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \sqrt{I_3} (\sqrt{I_3} - 1) \mathbf{C}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} \right), \end{aligned} \quad (1.88)$$

où :

$$(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{jl} + \mathbf{A}_{il} \mathbf{B}_{jk}) \quad \text{et} \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{kl}. \quad (1.89)$$

### 1.3.3.2 Loi matériau de type Mooney-Rivlin

Cette deuxième loi matériau a été développée par Mooney [Moo40] afin de modéliser le comportement des caoutchoucs. Pour cela, il a établi le postulat suivant :

- le matériau est incompressible et isotrope dans l'état non-déformé,
- la relation entre contraintes et déformations de cisaillement est linéaire.

Il propose ainsi le potentiel d'énergie élastique :

$$W(I_1, I_2) = a_{01}(I_1 - 3) + a_{10}(I_2 - 3). \quad (1.90)$$

Plus tard, Rivlin [Riv48] a développé, d'un point de vue mathématique, un modèle plus large :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \quad (1.91)$$

où  $i$  et  $j$  varie de 0 à  $\infty$  et  $a_{00} = 0$ . En ne considérant que les termes du premier ordre, nous obtenons le modèle (1.90), d'où le nom de Mooney-Rivlin.

Dans notre cas, nous utilisons une expression légèrement différente qui fait intervenir les trois invariants du tenseur  $\mathbf{C}$ . Ce modèle nécessite l'utilisation de trois constantes : les deux premières définissent les caractéristiques mécaniques du matériau et la dernière contrôle

l'incompressibilité du matériau. Ce potentiel s'écrit sous la forme :

$$W(I_1, I_2, I_3) = a_{01}(I_1 - 3) + a_{10}(I_2 - 3) + \frac{1}{2}K(I_3 - 1)^2. \quad (1.92)$$

Comme pour la loi matériau précédente, nous calculons les dérivées partielles de ce nouveau potentiel par rapport aux trois invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = a_{01} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = a_{10} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = K(I_3 - 1). \quad (1.93)$$

En reportant ces résultats dans l'équation (1.81), nous arrivons à l'expression du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S} = 2 \left( K I_3 (I_3 - 1) \mathbf{C}^{-1} + (a_{01} + a_{10} I_1) \mathbf{I} - a_{10} \mathbf{C} \right). \quad (1.94)$$

Dans ce cas précis, nous n'aboutissons pas à une formulation du type  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$  mais cela n'est pas nécessaire au niveau de la programmation de la méthode des éléments finis. En effet, il est tout aussi simple de calculer les trois invariants à partir du tenseur  $\mathbf{C}$  que de calculer  $\mathbf{E}$  à l'aide de  $\mathbf{C}$ .

Nous déterminons maintenant la matrice d'élasticité  $\mathbb{D}$  en dérivant le tenseur des contraintes par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\mathbb{D} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2}. \quad (1.95)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & 4 \left( K I_3 (2I_3 - 1) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right. \\ & \left. - K I_3 (I_3 - 1) \mathbf{C}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{C}^{-1} + a_{10} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - a_{10} \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (1.96)$$

### 1.3.3.3 Loi matériau de type Blatz-Ko

La loi matériau de Blatz-Ko [BK62] est utilisée pour modéliser le comportement mécanique de mousse élastomère ou de caoutchouc en polyuréthane. Pour exemple, nous retrouvons ce type de matériau dans les sièges automobiles pour améliorer leur confort. Ce dernier a un comportement compressible et le potentiel d'énergie de déformation proposé est :

$$W = \frac{G}{2} \left[ \frac{I_1}{I_2} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right]. \quad (1.97)$$

Contrairement aux deux potentiels précédemment présentés, il n'y a pas de constante d'incompressibilité qui contrôle le terme dépendant de  $I_3$ . En dérivant le potentiel (1.97) par rapport aux trois invariants du tenseur  $\mathbf{C}$  :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{G}{2} \frac{1}{I_3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{G}{2} \left[ -\frac{I_1}{I_3^2} + \frac{1}{\sqrt{I_3}} \right]. \quad (1.98)$$

Nous pouvons maintenant reporter ces résultats dans la formulation (1.81) du tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$ , nous obtenons :

$$\mathbf{S} = G \mathbf{F}^{-1} \left\{ \sqrt{I_3} \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right\} \mathbf{F}^{-T}. \quad (1.99)$$

Le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  peut également être écrit en fonction du tenseur  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = G \left\{ J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} - (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-2} \right\}. \quad (1.100)$$

Nous pouvons maintenant déterminer le tenseur d'élasticité  $\mathbb{D}$  en dérivant la seconde formulation de  $\mathbf{S}$  par rapport à  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{aligned} D_{ijkl} = G \left\{ -2J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1} + J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lk}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} \right. \\ \left. + 2 \left[ (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-2} + (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-2}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

**Remarque 1 :** L'utilisation de cette loi de comportement hyperélastique peut entraîner, dans certains cas, des difficultés d'ordre numérique. En effet, il arrive que la condition de préservation de l'orientation ne soit pas respectée ce qui entraîne la divergence de l'algorithme de résolution de Newton-Raphson [PL01, Pey03].

**Remarque 2 :** Notons également que l'utilisation de cette loi matériau pour la simulation de problèmes de contact en statique a fait l'objet de plusieurs travaux dans le cadre du développement de la méthode du bi-potential [FPL03, Pey04].

### 1.3.4 Calcul de l'énergie totale du système

Nous verrons dans la suite de ce mémoire que le contrôle de l'énergie totale du système mécanique joue un rôle important pour assurer la convergence d'un calcul d'impact ou de choc. Nous présentons ici les éléments nécessaires au calcul de l'énergie cinétique, de l'énergie élastique et de l'énergie du système.

### 1.3.4.1 Énergie cinétique

Par définition, l'énergie cinétique d'un milieu continu  $\mathcal{B}$  s'exprime sous la forme d'une intégrale :

$$E_c(\mathcal{B}) = \int_{\bar{\Omega}_0} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) d\Omega. \quad (1.102)$$

Après discrétisation spatiale en  $n_{el}$  éléments finis, utilisons l'interpolation nodale du vecteur vitesse sur chaque élément :

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^e, \quad (1.103)$$

pour réécrire (1.102) sous la forme d'une somme discrète :

$$\begin{aligned} E_c(\mathcal{B}) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\bar{\Omega}_0^e} \frac{1}{2} \rho (\mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^e)^T \cdot (\mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^e) d\Omega \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{1}{2} \rho \int_{\bar{\Omega}_0^e} (\dot{\mathbf{u}}^e)^T \cdot \mathbf{N}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^e d\Omega \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^e)^T \cdot \mathbf{M}^e \cdot \dot{\mathbf{u}}^e. \end{aligned} \quad (1.104)$$

L'énergie cinétique peut aussi être calculée au niveau global par :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{U}}. \quad (1.105)$$

### 1.3.4.2 Énergie élastique de déformation

L'énergie élastique du solide (discrétisé en  $n_{el}$  éléments finis) est obtenue par la relation suivante :

$$E_e(\mathcal{B}) = \int_{\bar{\Omega}_0} W d\Omega = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\bar{\Omega}_0^e} W d\Omega.$$

Nous devons donc effectuer une somme sur l'ensemble des éléments de l'énergie potentielle de déformation définie dans (1.3.3).

### 1.3.4.3 Énergie totale

Finalement, l'énergie totale du système correspond à :

$$E_t(\mathcal{B}) = E_e(\mathcal{B}) + E_c(\mathcal{B}). \quad (1.106)$$

Les cas traités dans la suite sont, pour la plupart, des problèmes de type Neumann homogène, caractérisés par aucun déplacement imposé sur la frontière et aucun chargement extérieur. En outre, si le contact est considéré sans frottement, l'énergie totale doit être conservée. Ainsi, nous disposons d'un élément fiable pour vérifier avec précision la validité de la méthode développée.

## 1.3.5 Techniques de programmation utilisées

Nous allons maintenant aborder de manière brève la programmation proprement dite de la méthode des éléments finis développée jusqu'ici. Nous abordons ce sujet dans le seul but de définir le plus précisément possible les outils que nous avons utilisés.

### 1.3.5.1 Langage de programmation

Pour nos travaux, nous utilisons le langage de programmation C++ qui a l'avantage par rapport au FORTRAN de permettre la création de classes d'objets vecteur et matrice. Ces dernières, combinées avec la possibilité de surcharger les opérateurs, améliorent considérablement l'agrément de programmation et la lisibilité du code source [FC02].

### 1.3.5.2 Condition aux limites sur $\Gamma_u$

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que les conditions aux limites de type Neumann sont intégrées au système à résoudre au moment de l'intégration par parties menant à la formulation faible de l'équation d'équilibre. Ce n'est pas le cas des conditions aux limites de type Dirichlet (sur  $\Gamma_u$ ) qui nécessitent un traitement spécial.

Dans notre cas, nous avons choisi d'utiliser la méthode de suppression des équations. En effet, cette dernière présente l'avantage de réduire la taille du système à résoudre en éliminant les équations des degrés de liberté imposés. De plus, elle ne nécessite pas l'introduction de paramètre de raideur (méthode du terme diagonal dominant) défini par l'utilisateur. Ce dernier constitue toujours un point sensible pour la stabilité de la méthode lorsqu'il intervient dans un problème de dynamique.

### 1.3.5.3 Stockage des matrices

Les matrices globales étant susceptibles d'atteindre des tailles considérables pour des applications industrielles, nous apportons une attention particulière à l'optimisation de leur utilisation. En effet, bien que de grande dimension, ces matrices sont essentiellement remplies de zéros et un bon maillage consiste, entre autre, à faire en sorte de regrouper les données utiles autour de la diagonale. Ainsi, il est possible de ne stocker que les quantités utiles à la résolution du système via la méthode de stockage « ligne de ciel » présentée dans [DT84]. Cette technique est utilisée dans nos travaux.

### 1.3.5.4 Méthode de résolution du système global

Pour la résolution du système global à chaque itération d'équilibre, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'élimination de Gauss. Cette dernière, bien connue, consiste à transformer le système d'équations en un système triangulaire puis à résoudre le nouveau système en partant de la dernière équation.

## 1.4 Conclusions

Tout au long de ce premier chapitre, nous avons présenté les différents concepts de la méthode des éléments finis appliquée à la mécanique des milieux continus qui seront utilisés par la suite. Nous avons ainsi détaillé les méthodes numériques ainsi que les techniques de programmation utilisées au sein de notre code de calcul. Les développements qui ont été effectués constituent une base solide pour l'utilisation de la méthode des éléments finis dans le cadre des grandes perturbations : description lagrangienne totale, linéarisation des forces internes et lois de comportements hyperélastiques. Ce socle doit permettre de comprendre les développements apportés dans la suite pour l'analyse des problèmes de l'impact et du choc.



## Chapitre 2

# Résolution du problème de contact avec frottement

### 2.1 Introduction

Dans ce nouveau chapitre, nous allons introduire la résolution du problème du contact dans la méthode des éléments finis. Pour cela, nous procéderons comme suit :

- dans la première partie, nous effectuerons un rappel des notions de cinématique du contact,
- dans la deuxième partie, nous proposerons une revue des différentes méthodes qui sont le plus souvent utilisées pour intégrer la résolution du problème du contact dans la méthode des éléments finis,
- dans la dernière partie, nous présenterons en détail la méthode de résolution utilisée dans notre travail et que nous appelons de manière générale « méthode du bi-potentiel » (bi-potentiel de contact, résolution globale et locale, détection de contact ...).

Dans ce chapitre, nous conservons le cadre de travail défini précédemment : hypothèse des grandes perturbations et système de notation.

### 2.2 Cinématique du contact

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notions nécessaires à l'introduction du problème du contact dans la formulation d'un problème de mécanique. Pour une question de clarté, nous nous plaçons dans la situation dans laquelle deux corps seulement peuvent entrer en contact. La formulation de problèmes mettant en jeu un plus grand nombre de solides se fait par simple extension de la démarche présentée dans la suite.



### 2.2.1 Notations

Soient  $\mathcal{B}^1$  et  $\mathcal{B}^2$ , deux corps déformables (figure 2.1) occupant, à l'instant initial, les ensembles fermés  $\bar{\Omega}^\alpha \subset \mathbb{R}^3$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Par extension de ce qui avait été proposé dans le chapitre précédent, la frontière  $\partial\Omega^\alpha$  de chacun des deux corps est partitionnée en trois. Venant s'ajouter à  $\Gamma_u^\alpha$  et  $\Gamma_\sigma^\alpha$ , nous définissons  $\Gamma_c^\alpha$  qui est la zone potentielle de contact sur laquelle  $\mathcal{B}^1$  et  $\mathcal{B}^2$  peuvent éventuellement venir en contact à un instant  $t_c$ . Cette nouvelle décomposition de la frontière de chacun des deux solides doit vérifier :

$$\begin{aligned} \partial\Omega^\alpha &= \Gamma_u^\alpha \cup \Gamma_\sigma^\alpha \cup \Gamma_c^\alpha, \\ \emptyset &= \Gamma_u^\alpha \cap \Gamma_\sigma^\alpha = \Gamma_\sigma^\alpha \cap \Gamma_c^\alpha = \Gamma_u^\alpha \cup \Gamma_c^\alpha. \end{aligned} \quad (2.1)$$

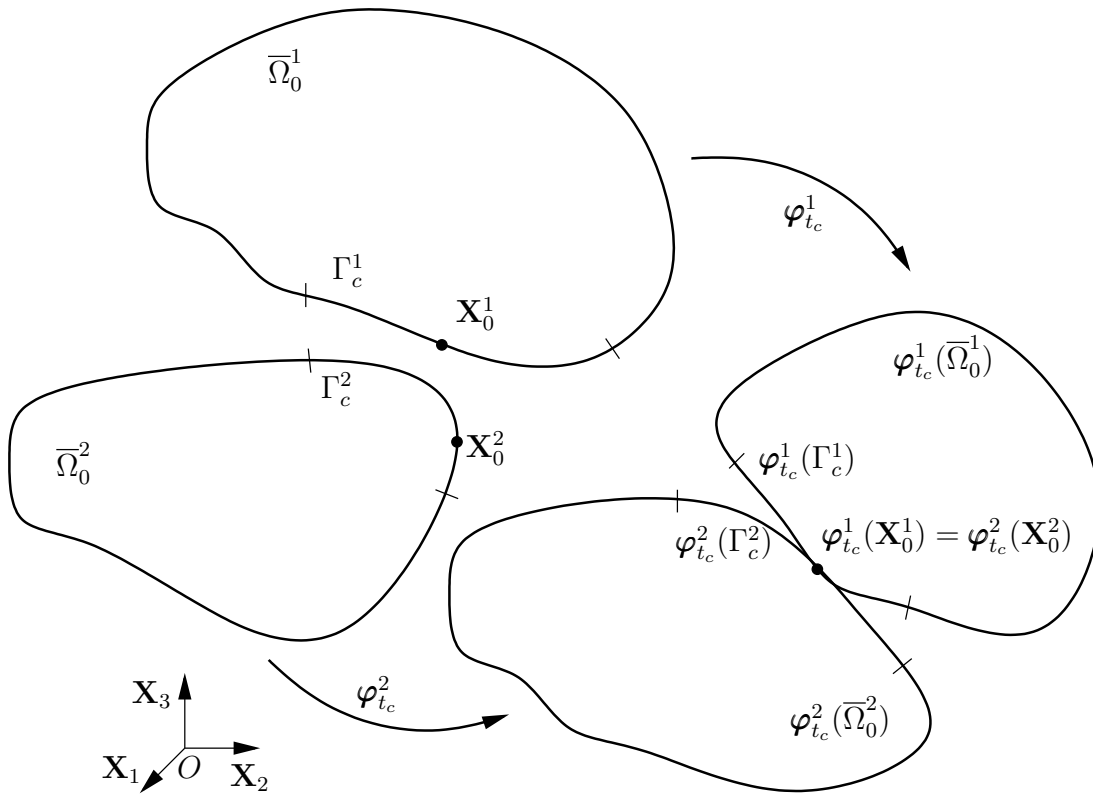


FIG. 2.1 – Cinématique du contact

Dans la suite, nous désignerons  $\mathcal{B}^1$  comme étant l'impacteur et  $\mathcal{B}^2$  comme étant l'obstacle. Ce choix est tout à fait arbitraire et la situation inverse est strictement équivalente pour la formulation continue du problème.

Les deux solides sont en contact à l'instant  $t_c$  si les éléments de frontières  $\varphi_{t_c}(\Gamma_c^1)$  et

$\varphi_{t_c}(\Gamma_c^2)$  ont une partie commune. Ce que l'on peut traduire par :

$$\varphi_{t_c}(\Gamma_c^1) \cap \varphi_{t_c}(\Gamma_c^2) \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

Il existe alors au moins un couple de points  $(\mathbf{X}_0^1, \mathbf{X}_0^2)$  tel que :

$$\varphi_{t_c}(\mathbf{X}_0^1) = \varphi_{t_c}(\mathbf{X}_0^2) \quad \mathbf{X}_0^1 \in \Gamma_c^1 \text{ et } \mathbf{X}_0^2 \in \Gamma_c^2. \quad (2.3)$$

En ce point commun aux deux frontières, nous pouvons définir une normale commune à  $\varphi_{t_c}(\Gamma_c^1)$  et  $\varphi_{t_c}(\Gamma_c^2)$ , noté  $\mathbf{n}$ . Nous choisissons de diriger  $\mathbf{n}$  vers l'extérieur de l'obstacle ( $\mathcal{B}^2$  dans notre cas). Nous construisons également le plan  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ , orthogonal à  $\mathbf{n}$ . Ce dernier est donc tangent à  $\varphi_{t_c}(\Gamma_c^1)$  et  $\varphi_{t_c}(\Gamma_c^2)$  en  $\mathbf{x}_{t_c}^c = \varphi_{t_c}(\mathbf{X}_0^1) = \varphi_{t_c}(\mathbf{X}_0^2)$  et permet de définir le repère local du contact  $R_c = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$  en  $\mathbf{x}_{t_c}^c$  (figure 2.2). Notons qu'en toute rigueur, le repère  $R_c$  et l'ensemble de ses composantes sont fonctions de  $t_c$  et de  $\mathbf{x}_{t_c}^c$  mais que par soucis de lisibilité nous omettons de faire apparaître cette dépendance.

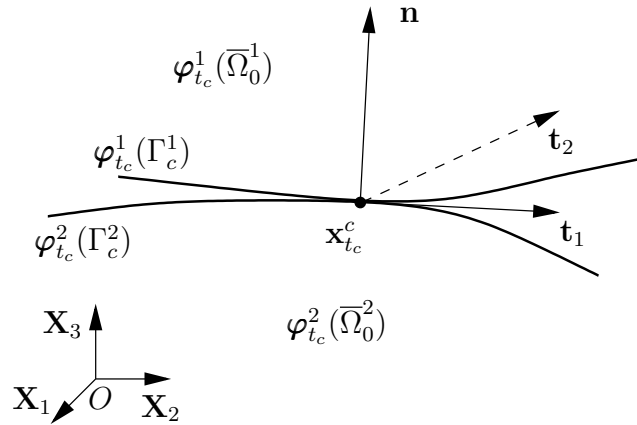


FIG. 2.2 – Repère local du contact

Afin de décrire le contact frottant qui a lieu, nous introduisons la notion de déplacement relatif par rapport à  $\mathcal{B}^2$  définie par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{t_c}^c) = \mathbf{u}_{t_c}(\mathbf{X}_0^1) - \mathbf{u}_{t_c}(\mathbf{X}_0^2), \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{u}_{t_c}(\mathbf{X}_0^1)$  et  $\mathbf{u}_{t_c}(\mathbf{X}_0^2)$  sont les déplacements de  $\mathbf{X}_0^1$  et  $\mathbf{X}_0^2$  définis dans (1.5).

Soit  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_{t_c}^c)$  la force de contact exercée en  $\mathbf{x}_{t_c}^c$  par  $\mathcal{B}^1$  sur  $\mathcal{B}^2$ . Le principe d'action-réaction nous permet d'écrire que le solide  $\mathcal{B}^2$  subit la réaction de contact  $-\mathbf{r}(\mathbf{x}_{t_c}^c)$ . Dans le repère

local du contact,  $\mathbf{u}_r$  et  $\mathbf{r}$  peuvent être décomposés de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + u_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{u}_t \in \mathbf{t}, \quad u_n \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_t + r_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_t \in \mathbf{t}, \quad r_n \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

## 2.2.2 Contact unilatéral

Considérons une configuration connue  $\mathcal{C}_t$  des deux solides (avec  $t \in \mathbf{I}$ ) pour laquelle il n'y a pas de contact (figure 2.3).

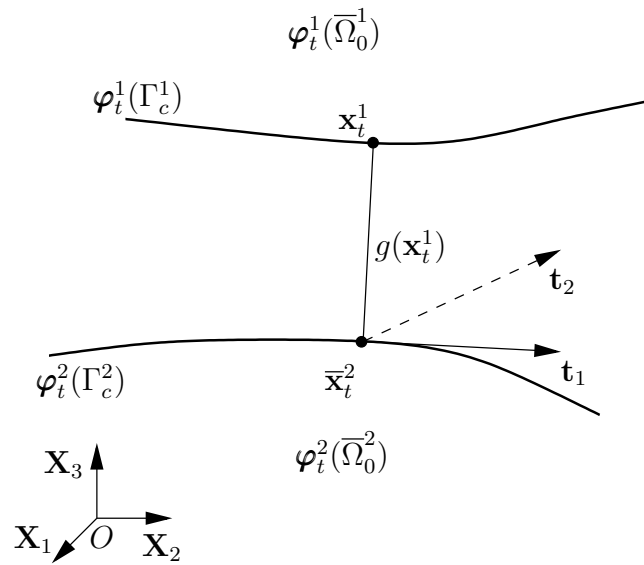


FIG. 2.3 – Définition du problème

Lors de la détermination de la configuration  $\mathcal{C}_{t+\Delta t}$ , nous devons nous assurer pour chaque élément  $\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1$  de  $\varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^1)$  que la loi de contact unilatéral est bien vérifiée. Cette dernière concerne uniquement la partie normale de la force de réaction (la partie tangentielle faisant l'objet de la loi de frottement). Dans le repère local du contact  $R_c = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ , la loi de contact unilatéral se présente sous la forme de trois inégalités (appelées conditions de Signorini) :

1. **condition de non-pénétration** : elle permet de s'assurer qu'aucune particule de  $\mathcal{B}^1$  ne pénètre dans le solide  $\mathcal{B}^2$ .

$$g(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1) = \min_{\mathbf{x}_{t+\Delta t}^2 \in \varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^2)} \left[ (\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1 - \mathbf{x}_{t+\Delta t}^2) \cdot \mathbf{n} \right] \geq 0. \quad (2.7)$$

La fonction  $g$  renvoie donc, pour tout point de  $\varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^1)$ , la distance qui le sépare du point le plus proche de  $\varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^2)$  affectée d'un signe indiquant s'il y a pénétration ou

pas. Nous noterons  $\bar{\mathbf{x}}^2$  le point de  $\varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^2)$  qui vérifie :

$$g(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1) = (\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1 - \bar{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}^2) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

En pratique, ce point résulte de la projection orthogonale de  $\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1$  sur la surface de contact  $\varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^2)$ ,

2. **condition de non-adhésion** : cette seconde condition traduit le fait que la réaction de contact exercée par  $\mathcal{B}^2$  sur  $\mathcal{B}^1$  est dirigée vers l'extérieur de  $\mathcal{B}^2$  et à donc pour effet de repousser  $\mathcal{B}^1$ . Avec la convention d'orientation adoptée pour  $\mathbf{n}$ , le non-adhérence s'écrit :

$$r_n(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1) \geq 0, \quad (2.9)$$

3. **condition complémentaire** : cette dernière condition assure qu'il ne peut y avoir une force de réaction entre  $\mathcal{B}^1$  et  $\mathcal{B}^2$  que s'il y a contact :

$$g(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1) \cdot r_n(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^1) = 0. \quad (2.10)$$

Sur la figure 2.4, nous percevons déjà la difficulté que représente la résolution du contact dans un calcul par éléments finis. En effet, la loi de contact n'est pas régulière dans le sens où elle n'est pas définie par une fonction bi-univoque : il n'est pas possible de définir une fonction  $f$  telle que  $r_n = f(g)$  pas plus qu'une autre fonction  $f'$  telle que  $g = f'(r_n)$ .

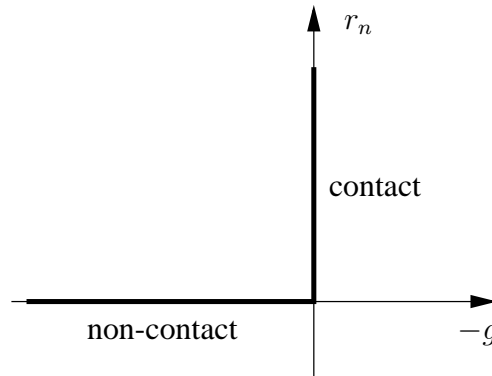


FIG. 2.4 – Loi de contact unilatéral

Notons  $g_0$  la distance initiale entre  $\mathbf{X}_0^1$  et  $\bar{\mathbf{X}}_0^2$  :

$$g_0(\mathbf{X}_0^1) = (\mathbf{X}_0^1 - \bar{\mathbf{X}}_0^2) \cdot \mathbf{n} \geq 0. \quad (2.11)$$

Les conditions de Signorini peuvent alors être réécrites sous la forme :

$$g_0 + u_n \geq 0 \quad , \quad r_n \geq 0 \quad , \quad (g_0 + u_n) \cdot r_n = 0 \quad \text{sur} \quad \varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^1). \quad (2.12)$$

Considérons maintenant le cas de deux solides initialement en contact sur une partie de  $\Gamma_c$ . Sur cette partie de  $\Gamma_c$ , les conditions de Signorini se réduisent à :

$$u_n \geq 0 \quad , \quad r_n \geq 0 \quad , \quad u_n \cdot r_n = 0 \quad \text{sur} \quad \varphi_{t+\Delta t}(\Gamma_c^1). \quad (2.13)$$

Ainsi, pour tout  $t \in \mathbf{I} = [t_0, t_1]$ , les surfaces potentielles de contact  $\varphi_t(\Gamma_c^\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) peuvent être découpées en deux parties distinctes :  $\varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^+$  sur laquelle les deux corps sont effectivement en contact et  $\varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^-$  pour laquelle il n'y a pas, à ce moment précis, de contact. Nous avons donc :

$$\varphi_t(\Gamma_c^\alpha) = \varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^+ \cup \varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^- \quad \text{et} \quad \varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^+ \cap \varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^- = \emptyset. \quad (2.14)$$

L'équation (2.13) traduit le fait que lorsque les deux solides sont en contact, seule une séparation est autorisée. Elle ne permet pas d'exprimer la mise en contact de nouvelles zones.

Dans le contexte de la dynamique, comme c'est le cas pour les problèmes d'impact, il est possible d'exprimer les conditions de Signorini en terme de vitesse :

$$\dot{u}_n \geq 0 \quad , \quad r_n \geq 0 \quad , \quad \dot{u}_n r_n = 0 \quad \text{sur} \quad \varphi_t(\Gamma_c^\alpha)^+. \quad (2.15)$$

Lorsque  $\dot{u}_n > 0$ , les deux solides se séparent alors qu'ils restent en contact pour  $\dot{u}_n = 0$ . Il est important de noter que cette dernière formulation n'est valable que si les deux solides sont initialement en contact.

### 2.2.3 Loi de frottement - modèle de Coulomb

Il est maintenant nécessaire de définir la loi qui permettra, lors des calculs, de déterminer la partie tangentielle des réactions de contact. Dans ce travail, nous ne considérons que les cas de frottement sec. En effet, le problème de frottement lubrifié fait intervenir un troisième corps, en l'occurrence un liquide, entre les deux solides et sort de notre domaine de recherche.

Dans cette loi de frottement, la force tangentielle appliquée au solide en contact doit dépasser un certain seuil pour qu'un glissement se produise. Le seuil à dépasser pour obtenir un glissement relatif entre les deux solides en contact est une constante, fixée a priori et qui dépend des matériaux présents aux surfaces. Afin de refléter ce qu'il a observé par expéri-

mentation, Coulomb a imposé une dépendance du seuil de glissement vis à vis de la réaction normale. Ainsi, la loi de frottement de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Si } \|\mathbf{r}_t\| < \mu r_n & \text{alors } \dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}, \\ \text{Si } \|\mathbf{r}_t\| = \mu r_n & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{\mathbf{u}}_t = -\lambda \frac{\mathbf{r}_t}{\|\mathbf{r}_t\|}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Comme les conditions de Signorini pour le contact unilatéral, le modèle de Coulomb définissant le frottement constitue une difficulté majeure pour la résolution. Là aussi, la relation entre la force tangentielle et le glissement relatif n'est pas définie par une fonction régulière comme le montre la figure 2.5.

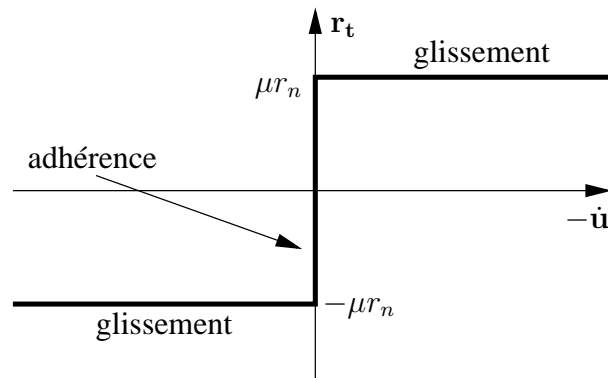


FIG. 2.5 – Loi de frottement de Coulomb

En couplant cette loi avec les conditions de Signorini, nous pouvons définir l'ensemble fermé et convexe  $\bar{K}_\mu$  des forces de réactions admissibles par :

$$\bar{K}_\mu = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|\mathbf{r}_t\| - \mu r_n \leq 0 \}. \quad (2.17)$$

La représentation graphique de l'ensemble  $\bar{K}_\mu$  (appelé cône de Coulomb) est proposée sur la figure 2.6. Nous y retrouvons les trois statuts de contact possibles : non-contact, contact sans glissement et contact avec glissement.

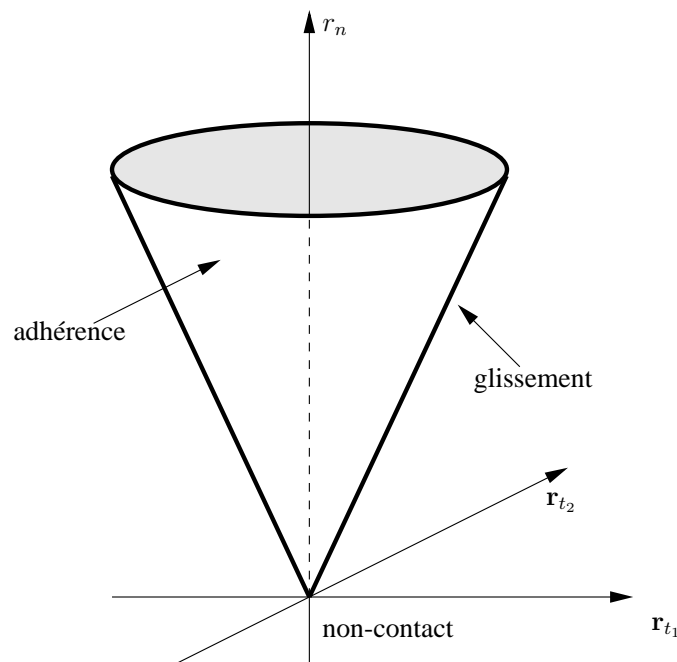


FIG. 2.6 – Cône de Coulomb

Il est possible de différencier le coefficient de frottement qui s'applique lors de la phase de glissement de celui qui sert de seuil lors de la phase d'adhérence. On parle alors de coefficient d'adhérence et de coefficient de frottement. En effet, les expérimentations montrent que la force nécessaire pour maintenir un glissement relatif entre deux solides est généralement plus faible que la « force seuil » qui a été nécessaire pour le provoquer. Dans notre travail, ce phénomène ne sera pas pris en compte bien qu'il ne présente pas de difficulté d'implantation majeure.

Certaines études récentes explorent le thème des lois de frottement anisotropes afin de prendre en compte une éventuelle direction de glissement préférentielle [HC93, MS94, AH95, HFSM04, FHSM06]. Ce phénomène peut intervenir, par exemple, lorsque l'on étudie le glissement relatif entre deux plaques obtenues par laminage.

Par ailleurs, la loi de Coulomb ne constitue pas la seule alternative pour introduire le phénomène du frottement. La tribologie est la science qui vise à étudier ce phénomène mécanique et de nombreux modèles peuvent être adaptés selon le cas étudié. Dans certains travaux s'inspirant du domaine de l'élastoplasticité, nous trouvons de nouveaux modèles de frottement qui permettent un mouvement relatif réversible des surfaces de contact. Ce type de loi prend en compte les déformations élastiques, au niveau microscopique, des aspérités de chacune des surfaces de contact [Cur84, Wri02].

## 2.2.4 Loi de contact avec frottement

Nous considérons à présent la loi de frottement de Coulomb présentée précédemment que nous allons coupler avec les conditions de Signorini afin d'obtenir une loi de contact avec frottement complète. Cette loi fera intervenir les trois statuts de contact possibles : l'absence de contact, l'adhérence et le glissement. La nature non-biunivoque et fortement non-linéaire de la loi qui en découle assure aux problèmes d'impact une place parmi les problèmes de mécanique les plus délicats à traiter.

Une manière élégante de mettre en avant les différents statuts de contact consiste à écrire la loi complète de contact avec frottement sous la forme d'une double boucle de type « Si ... alors ... sinon » (figure 2.7).

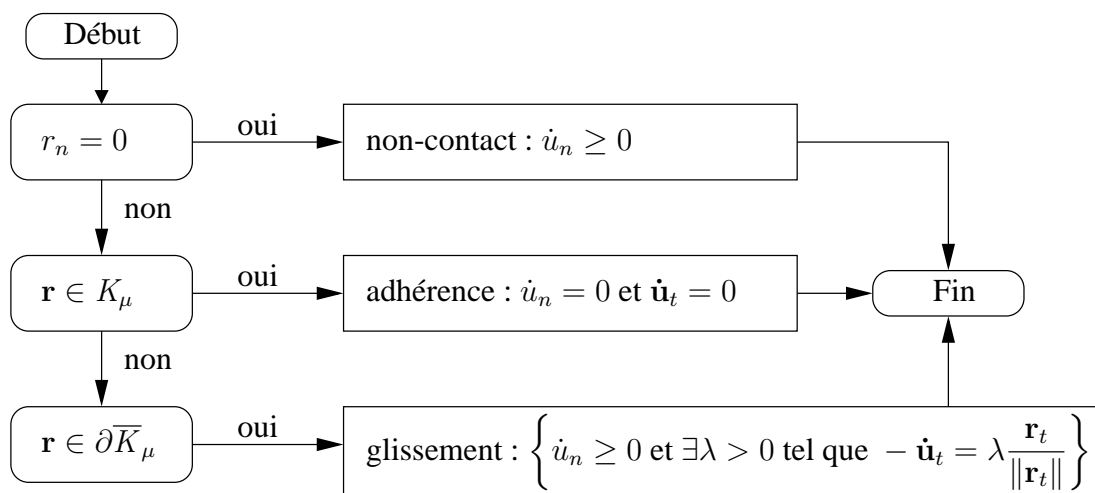


FIG. 2.7 – Loi de contact avec frottement

où  $K_\mu$  et  $\partial \bar{K}_\mu$  sont respectivement l'intérieur et le bord du domaine des réactions de contact admissibles  $\bar{K}_\mu$ .

La loi que nous venons de présenter permet de déterminer la vitesse relative  $\dot{\mathbf{u}}$  lorsque l'on connaît la force de réaction  $\mathbf{r}$ . La loi de contact inverse, *i.e.* la relation  $\mathbf{r}(-\dot{\mathbf{u}})$  peut également être mise sous la forme d'une double boucle (figure 2.8).



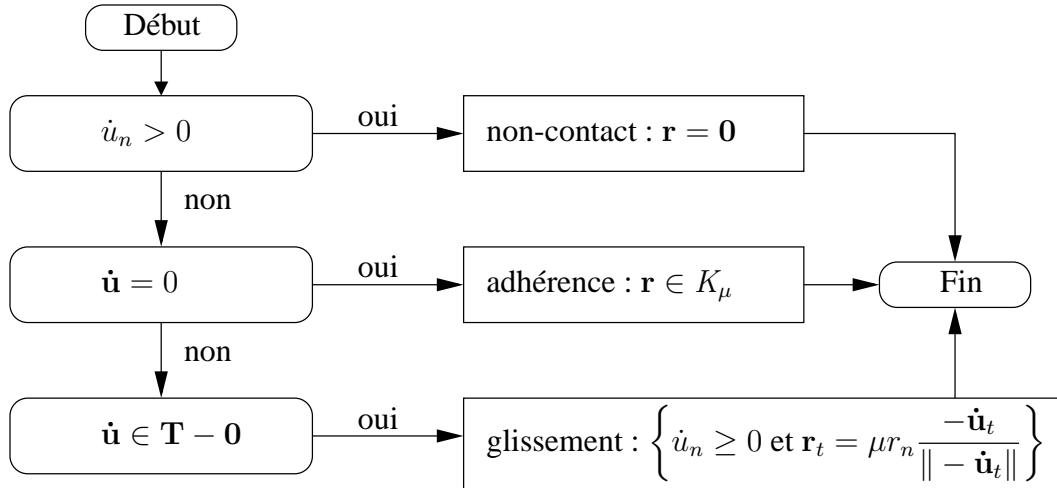


FIG. 2.8 – Loi inverse de contact avec frottement

## 2.2.5 Bi-potential de contact et lagrangien augmenté

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que pour chaque nœud de contact, la détermination des réactions de contact consiste en la recherche d'un couple  $(\dot{\mathbf{u}}; \mathbf{r})$  qui, d'une part, est solution de l'équation du mouvement et qui, d'autre part, vérifie l'équation de contact avec frottement.

Dans un premier temps, la démarche consiste à réécrire les équations de contact sous une forme subdifférentielle strictement équivalente à celle proposée au premier chapitre. Ainsi, de Sacxé et Feng [SF91, SF98] ont montré que le couple  $(\dot{\mathbf{u}}; \mathbf{r})$  satisfait la loi de contact avec frottement si et seulement s'il satisfait la loi suivante :

$$-(\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu \|\dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}) \in \partial \bigcup_{K_\mu} \mathbf{r}, \quad (2.18)$$

où  $\bigcup_{K_\mu} \mathbf{r}$  est la « fonction indicatrice » de l'ensemble convexe fermé  $K_\mu$  et est définie par :

$$\bigcup_{K_\mu}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{r} \in K_\mu, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.19)$$

D'après la définition de l'inclusion différentielle utilisée dans [SF91], l'équation (2.18) signifie :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad \bigcup_{K_\mu} \mathbf{r}' - \bigcup_{K_\mu} \mathbf{r} \geq -(\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu \|\dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (2.20)$$

Nous définissons le bi-potentiel de contact :

$$b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = \bigcup_{\mathbb{R}_-} (-\dot{u}_n) + \bigcup_{K_\mu} (\mathbf{r}) + \mu r_n \|\dot{\mathbf{u}}_t\| \quad \text{avec} \quad \mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]. \quad (2.21)$$

Cela va nous permettre de transformer le problème de contact en un problème de minimisation puisque de Saxcé et Feng ont montré que l'extremum de  $b_c$  vérifie la loi de contact (2.18). Ainsi, il va maintenant être possible de mettre en œuvre les techniques de minimisation classiques. En particulier, il sera très intéressant de se tourner vers la méthode du lagrangien augmenté. Sachant que  $\dot{u}_n \geq 0$  et  $\mathbf{r} \in K_\mu$ , la méthode du lagrangien augmenté aboutie à :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad \varrho \mu (r'_n - r_n) \|\dot{\mathbf{u}}_t\| + (\mathbf{r}' - (\mathbf{r} - \varrho \dot{\mathbf{u}})) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0. \quad (2.22)$$

Le paramètre de résolution de la méthode  $\varrho$  doit être strictement positif et choisi de manière à assurer la convergence du calcul. Dans notre cas (recherche de l'extremum de  $b_c$ ), l'expérience accumulée montre que choisir la valeur maximum de la diagonale de la matrice de rigidité de contact comme valeur de  $\varrho$  est tout à fait approprié.

En considérant les décompositions (2.5) et (2.6), l'équation (2.22) peut être réécrite sous la forme plus compacte :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0, \quad (2.23)$$

où le symbole  $\mathbf{r}^*$  représente la surface de « traction » augmentée définie par :

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \varrho (\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu \|\dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}). \quad (2.24)$$

L'inégalité (2.24) signifie que  $\mathbf{r}$  est la projection orthogonale de  $\mathbf{r}^*$  sur  $K_\mu$  :

$$\mathbf{r} = \text{proj}(\mathbf{r}^*, K_\mu). \quad (2.25)$$

Pour la résolution numérique de l'équation implicite (2.25), nous utilisons ici l'algorithme d'Uzawa. Ce choix mène à un processus itératif comprenant une étape de prédiction-correction :

$$\begin{cases} \text{Prédiction } \mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \varrho (\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu \|\dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}), \\ \text{Correction } \mathbf{r} = \text{proj}(\mathbf{r}^*, K_\mu). \end{cases} \quad (2.26)$$

Sur la figure 2.9, nous représentons la phase de correction ainsi que  $K_\mu^*$ , le cône dual de  $K_\mu$ .

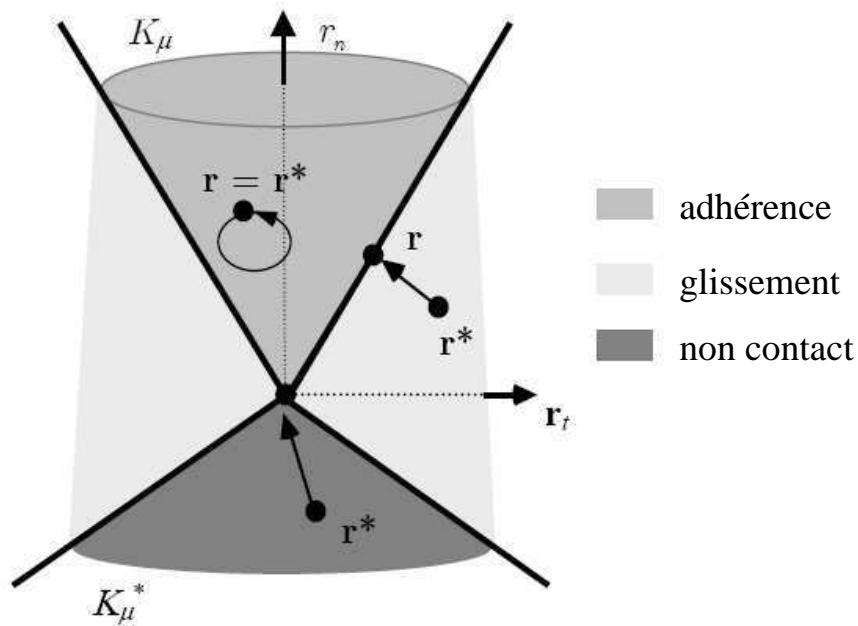


FIG. 2.9 – Représentation graphique de la phase de correction

La phase de correction permet de ramener la réaction de contact prédite  $\mathbf{r}^*$  sur le cône de Coulomb de la manière suivante :

- si  $\mathbf{r}^* \in K_\mu^*$  alors il y a non-contact et  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ,
- sinon, si  $\mathbf{r}^* \in K_\mu$  alors il y a adhérence et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$ ,
- sinon  $\mathbf{r}^* \in (\mathbb{R}^3 - K_\mu \cup K_\mu^*)$ , il y a glissement et  $\mathbf{r}$  est le résultat de la projection orthogonale de  $\mathbf{r}^*$  sur  $K_\mu$ .

Sur la figure 2.10, nous représentons cette phase de correction sous la forme d'une nouvelle double boucle. De plus, nous y rapportons l'expression analytique de la projection orthogonale de  $\mathbf{r}^*$  sur  $K_\mu$  pour le cas où  $\mathbf{r}^* \in (\mathbb{R}^3 - K_\mu \cup K_\mu^*)$ .

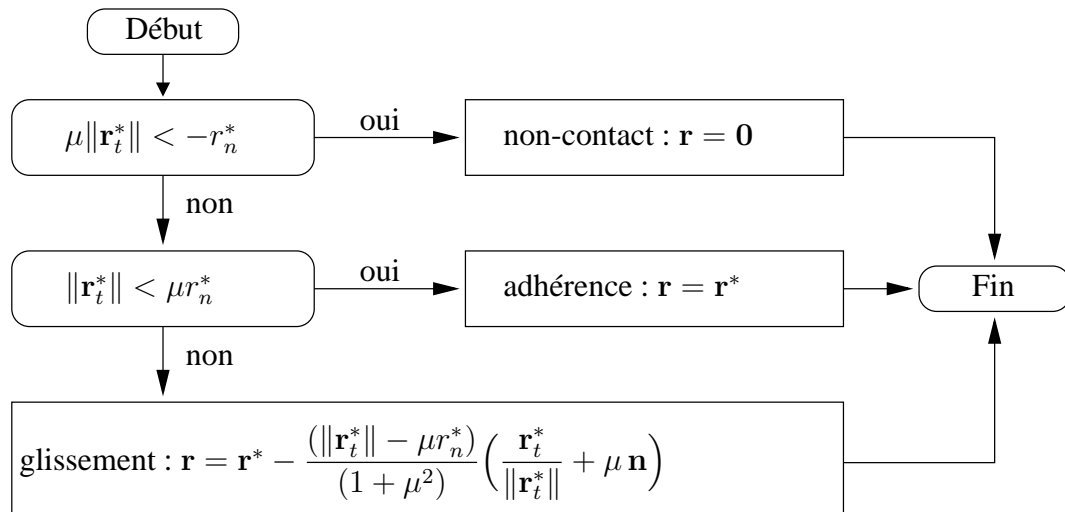


FIG. 2.10 – Algorithme de correction

## 2.3 Méthode de résolution du contact dans un calcul par éléments finis

### 2.3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'intégration des équations du contact à la formulation de notre problème. À ce jour, les méthodes couramment utilisées conjointement à la méthode des éléments finis sont :

- la méthode des multiplicateurs de Lagrange : dans cette méthode, les contraintes liées au contact unilatéral et au frottement sont introduites dans la formulation par le biais d'inconnues supplémentaires (les multiplicateurs de Lagrange). Cette méthode permet de vérifier exactement les conditions de contact mais elle a le désavantage d'augmenter la taille du système à résoudre. Nous trouvons quelques exemples d'utilisation de cette méthode dans [HTS<sup>+</sup>76, BN91, CTM91, PJ98, SP98],
- la méthode de pénalisation : dans cette autre méthode, la loi de contact unilatéral ainsi que la loi de frottement sont régularisées par l'intermédiaire de deux coefficients de pénalité [CT71, TY73, KS81, CB86, Par89]. Cette méthode a pour principal avantage sa simplicité d'implantation. Cependant, il faut souligner que cette méthode ne permet pas de vérifier avec exactitude les conditions de contact. L'importance de la pénétration autorisée dépend du choix (difficile) des coefficients de pénalité [Hun92] qui n'ont pas de signification physique et qui doivent être déterminés pour chaque cas étudié,
- la méthode du lagrangien augmenté : dans cette dernière méthode, les déplacements

et les réactions de contact sont déterminés simultanément [AC91, SL92, SF91, Kl92, SF98, CKPSN98]. Cette méthode présente l'avantage de fournir un résultat qui vérifie exactement les conditions de contact. De plus, le paramètre utilisé dans la méthode n'influe pas sur la précision du résultat mais seulement sur la vitesse de convergence de l'algorithme.

### 2.3.2 La méthode de condensation

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les équations de base qui entrent en jeu dans un calcul par éléments finis d'un problème d'impact. Pour les différentes méthodes de résolutions brièvement présentées, les équations de contact sont directement intégrées dans la formulation continue de l'équation d'équilibre selon une technique qui est propre à chacune d'entre elles. Dans notre travail, nous avons choisi de suivre une autre voie, celle de la méthode mixte, qui a été développée par Francavilla et Zienkiewicz [FZ75] pour les problèmes de contact sans frottement puis par Sachdeva *et al.* dans [SR81, SRR81]. Dans cette méthode, les forces de contact sont ajoutées à la formulation discrétisée du problème sans contact comme une seconde forme d'efforts extérieurs, inconnues à priori. Dans un premier temps, nous allons présenter les différents développements qui permettent d'aboutir à la formulation de cette méthode. Dans un second temps, nous présenterons le concept original de bi-potential de contact, proposé par de Saxcé et Feng [SF91, SF98], qui permet de résoudre efficacement les équations du contact avec frottement. Dans la suite, nous conservons le formalisme utilisé dans le chapitre précédent. Nous nous plaçons donc dans le cas d'un problème de dynamique dans lequel deux solides sont susceptibles d'entrer en contact. Nous considérons toujours le cadre des grandes perturbations (déplacements et déformations).

Comme nous venons de l'énoncer en introduction, l'idée centrale de cette méthode est d'intégrer les efforts de contact directement dans la formulation matricielle du problème. Nous définissons donc le vecteur  $\mathbf{R}_c(\mathbf{U})$  des forces de contact qui est inconnu du nouveau système :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} = (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i + (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} - (\mathbf{F}_{ext})_{t+\Delta t} + (\mathbf{R}_c(\mathbf{U}))_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{cases} \quad (2.27)$$

De la même manière que pour les problèmes sans contact, l'utilisation d'un schéma d'inté-

gration adéquate fournit le nouveau système :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1} \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{R}_c(\mathbf{U}))_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Il est important de noter que l'équation (2.28) est fortement non-linéaire par rapport aux déplacements nodaux  $\mathbf{U}$ . D'une part, le vecteur des réactions de contact  $\mathbf{R}_c$  dépend des déplacements de la structure qui détermine à la fois la surface de contact mais aussi la nature et l'intensité de la réaction. D'autre part, lorsque le matériau étudié a un comportement non-linéaire (hyper-élasticité, plasticité, ...), le terme des forces internes dépend lui aussi des déplacements.

Comme le montre la figure 2.11, l'algorithme principal de résolution du problème intègre maintenant le vecteur global des réactions de contact. Il n'est cependant pas possible de résoudre directement les équations sous cette forme car  $\delta \mathbf{U}$  et  $\mathbf{R}_c$  sont tous les deux inconnus. La méthode mixte consiste à déterminer, dans un premier temps, les efforts de contact par la méthode des forces. Dans un second temps, les déplacements sont calculés de manière classique (méthode des déplacements) en considérant les efforts de réactions comme des forces extérieures connues. Ainsi, le problème est en quelque sorte découplé et sa résolution devient possible. Le champ de déplacement doit vérifier les conditions aux limites sur  $\Gamma_u$  et la loi de contact avec frottement adoptée.

Afin de déterminer les réactions de contact, nous effectuons une décomposition du vecteur incrément des déplacements nodaux  $\delta \mathbf{U}$ . Ainsi, il est la somme de l'incrément de déplacement dû aux chargements externes et aux forces internes et de l'incrément de déplacement dû aux réactions de contact. Le premier terme, correspondant au déplacement subi par la structure en l'absence de contact, sera appelé déplacement libre et noté  $\delta \mathbf{U}_{lib}$ . Le second terme, engendré par les réactions de contact sera noté  $\delta \mathbf{U}_c$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} &= (\widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1})^{-1} \widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1})^{-1} (\mathbf{R}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ &= (\delta \mathbf{U}_{lib})_{t+\Delta t}^i + (\delta \mathbf{U}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

La figure 2.12 montre que la résolution du système (2.28) est alors décomposée en deux étapes. La première étape consiste à déterminer le vecteur des déplacements libres  $\delta \mathbf{U}_{lib}$  de manière classique. Dans la seconde étape, nous calculons  $\delta \mathbf{U}_c$  qui est la partie du déplacement engendrée par le contact.

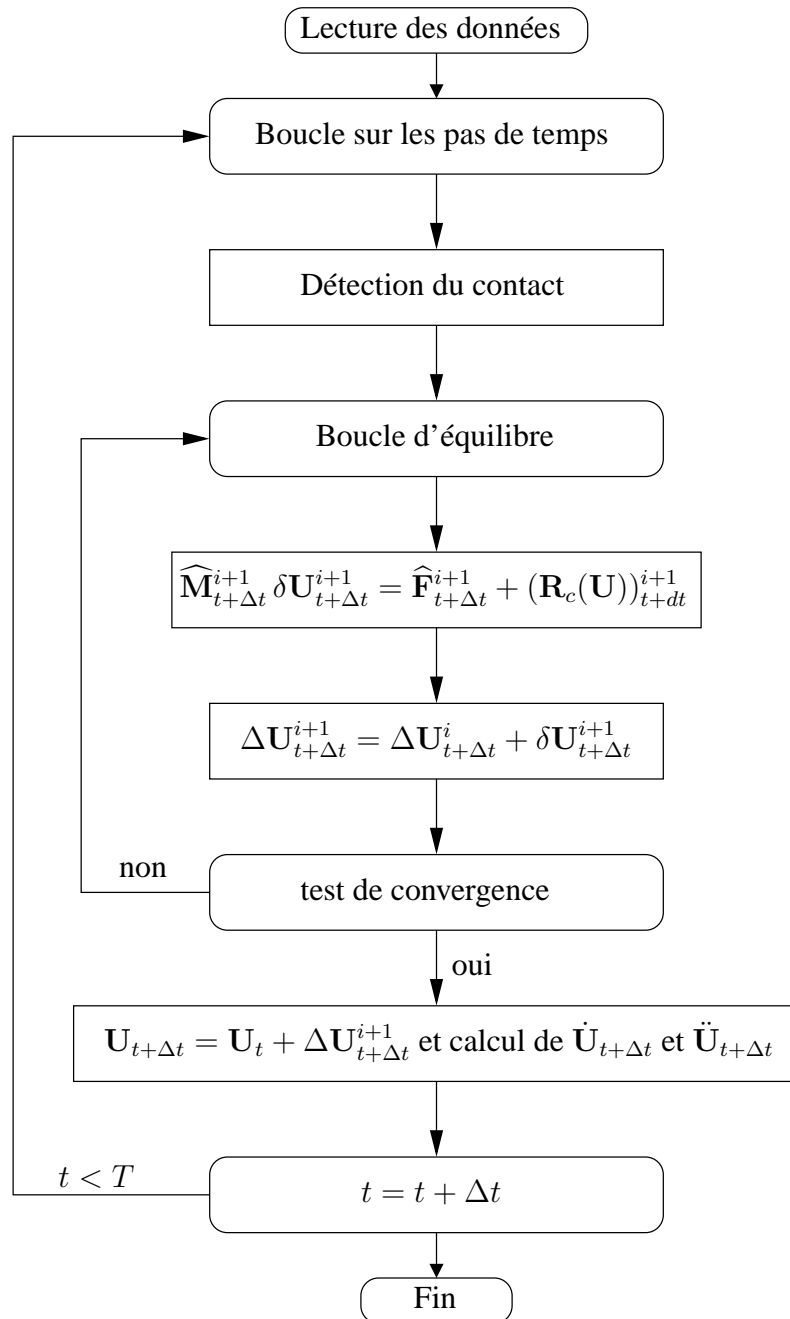


FIG. 2.11 – Algorithme principal de résolution avec contact

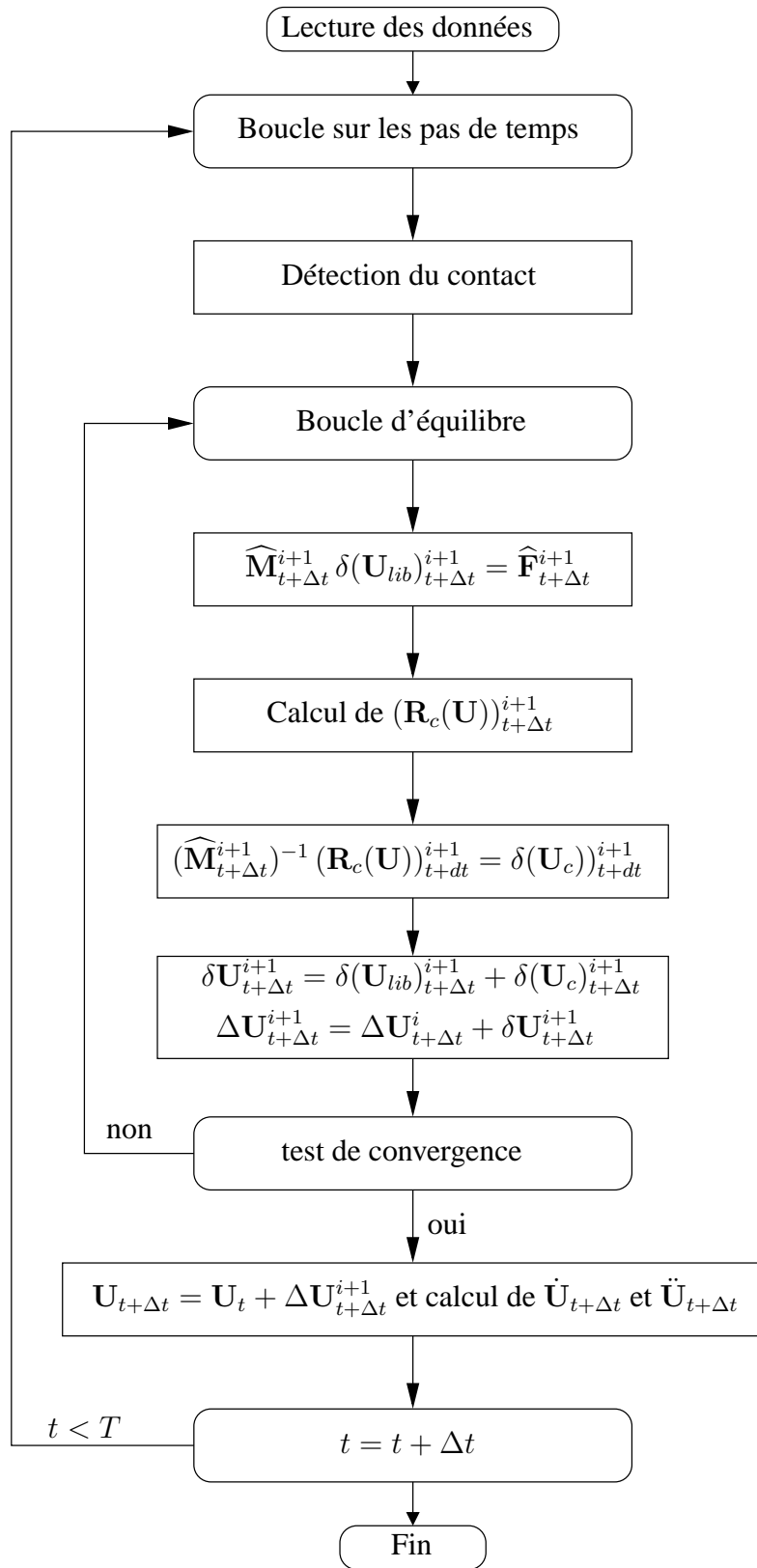


FIG. 2.12 – Algorithme de résolution global avec une méthode de condensation



### 2.3.3 Calcul de $\delta(\mathbf{U}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}$ :

La résolution du problème du contact revient maintenant à déterminer la partie des déplacements qui est dûe aux réactions de contact :  $\delta(\mathbf{U}_c)_{t+\Delta t}^{i+1}$ . Afin d'alléger les notations et de pouvoir faire apparaître les nouveaux indices relatifs à cette résolution, nous omettrons dans la suite les notations relatives au pas de temps ainsi que ceux relatifs à la boucle itérative de Newton-Raphson. Nous définissons  $N_c$  comme étant le nombre de nœuds de contact potentiels de l'impacteur ( $\mathcal{B}^1$  dans notre cas). Le problème du contact se traitant dans le repère local du contact  $R_c^\alpha$  de chaque nœud de contact ( $\alpha = 1, N_c$ ), nous définissons également la matrice de changement de repère  $\mathbf{H}^\alpha$  telle que :

$$\mathbf{R}_c^\alpha = \mathbf{H}^\alpha \mathbf{r}^\alpha \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{u}_c^\alpha = (\mathbf{H}^\alpha)^\top \delta \mathbf{U}_c^\alpha, \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{R}_c^\alpha$  et  $\delta \mathbf{U}_c^\alpha$  sont les vecteurs extraits de  $\mathbf{R}_c$  et  $\delta \mathbf{U}_c$  relativement au nœud de contact  $\mathbf{x}_\alpha^1$ .

En reportant (2.39) dans (2.29), nous faisons apparaître la matrice de flexibilité  $\mathbf{W}$  :

$$\delta \mathbf{u}_c = (\widehat{\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}^\top}) \mathbf{r} = \mathbf{W} \mathbf{r}. \quad (2.31)$$

Pour chaque point de contact et connaissant  $\delta \mathbf{u}_{lib}$ , nous cherchons donc à déterminer  $\delta \mathbf{u}_c$  qui est lié à  $\delta \mathbf{R}_c$  par la loi de contact et la loi de frottement. Définissons tout d'abord le vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}^\alpha$  tel que :

$$\tilde{\mathbf{u}}^\alpha = \mathbf{u}_{lib}^\alpha + \mathbf{u}_c^\alpha + \mathbf{g}_0^\alpha \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}_0^\alpha = (0, 0, g_0^\alpha)^\top. \quad (2.32)$$

Le problème local du contact peut se mettre sous la forme :

$$\text{Trouver } \boldsymbol{\chi} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{0}, \quad (2.33)$$

avec :

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_{N_c} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\chi}_\alpha = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^\alpha \\ \tilde{\mathbf{u}}^\alpha \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\chi}) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_c}(\boldsymbol{\chi}) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_\alpha(\boldsymbol{\chi}) = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^\alpha - \sum_{\beta=1}^{N_c} \mathbf{W}_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\beta - \mathbf{u}_{lib}^\alpha - \mathbf{g}_0^\alpha \\ \mathbf{r}^\alpha - \text{Proj}_{\mathbf{K}_\mu}(\mathbf{r}^{*\alpha}) \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous utilisons la méthode de Gauss-Seidel pour la

résolution de systèmes non-linéaire [JAJ98]. Le principe de cet algorithme est de décomposer le système global à résoudre ( $6 \times N_c$  équations) en  $N_c$  systèmes locaux de 6 équations. Pour cela, nous traitons chaque point de contact  $P^\alpha$  en supposant les réactions de contact connues sur l'ensemble des autres points de contact.

$$\mathbf{f}_\alpha(\boldsymbol{\chi}) = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^\alpha - \mathbf{W}_{\alpha\alpha}\mathbf{r}^\alpha - \tilde{\mathbf{u}}^{\alpha\beta} \\ \mathbf{r}^\alpha - \text{Proj}_{\mathbf{K}_\mu}(\mathbf{r}^{*\alpha}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{N_c} \mathbf{W}_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\beta + \mathbf{u}_{lib}^\alpha + \mathbf{g}_0^\alpha. \quad (2.37)$$

$\tilde{\mathbf{u}}^{\alpha\beta}$  représente le déplacement de la particule  $P^\alpha$  causé par les réactions de contact sur l'ensemble des autres nœuds de contact  $P^\beta$  ( $\beta = 1, N_c$  et  $\beta \neq \alpha$ ).

La procédure itérative est effectuée sur les points de contact  $P^\alpha$  ( $\alpha = 1, N_c$ ) jusqu'à convergence de la solution. Le critère de convergence porte sur la norme du vecteur des réactions de contact :

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{r}^{(k+1)}\|} \leq \varepsilon_g. \quad (2.38)$$

## 2.4 Détection du contact

Une des étapes les plus importantes dans le traitement des problèmes d'impact par la méthode des éléments finis consiste à détecter les zones de contact actives. Cette opération est effectuée en début de chaque pas de temps et son coût en temps de calcul peut être considérable. Il s'agit non seulement de définir les nœuds potentiels de contact qui sont actifs mais aussi de déterminer l'ensemble des données nécessaires au fonctionnement de l'algorithme de résolution proposé précédemment.

L'objectif du travail présenté ici ne portant pas sur l'optimisation de cette phase de détection, le code de calcul développé utilise un algorithme très simple à programmer mais pas optimisé. Toutefois, il est tout à fait suffisant pour les différents cas étudiés dans la suite pour lesquels le nombre de nœuds de contact est relativement faible.

Nous allons développer dans ce paragraphe l'ensemble de cet algorithme de détection et les différentes données nécessaires à son utilisation.

### 2.4.1 Définition de l'objet « zones de contact » :

Pour tout problème d'impact, nous définissons dans le fichier de données source une liste de zones potentielles de contact. La figure 2.13 montre quels sont les éléments constitutifs de chacune de ces zones de contact. Cette façon de déclarer au préalable les zones potentielles de contact a un désavantage : il faut avoir une idée assez précise de ce qui va se passer au cours de la simulation. Dans le cas contraire, il est nécessaire de déclarer toutes les zones de contact possibles.

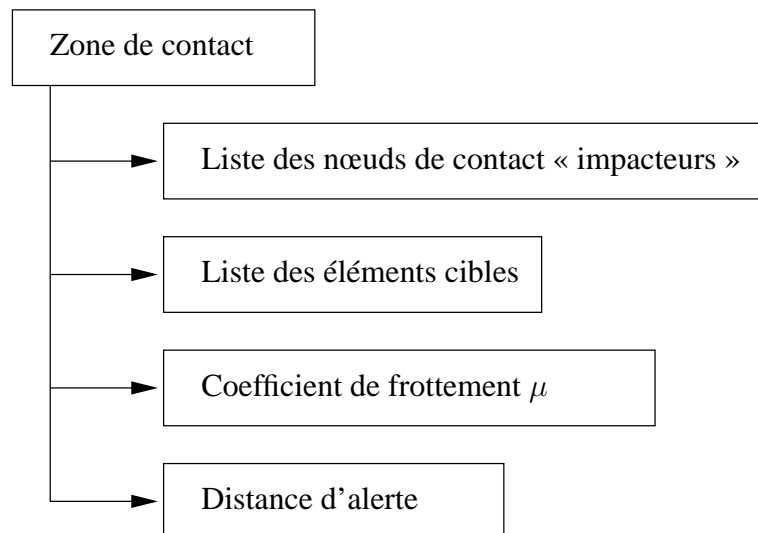


FIG. 2.13 – Composantes d'une zone de contact

Nous détaillons sur la figure 2.14 les données qui sont liées à chacun des nœuds de contact. Tous ces champs doivent être déterminés par l'algorithme de détection au début du pas de temps. La distance d'alerte définie pour chaque zone de contact permet de limiter le nombre de nœuds de contact sur chaque pas de temps. Elle permet en effet d'exclure du calcul de  $\mathbf{R}_c$  tous les nœuds potentiels de contact déclarés qui sont suffisamment éloignés de leur obstacle au début du pas de temps. Un nœud qui se trouve dans la zone d'alerte au moment de la détection est alors considéré actif. Cette opération permet de réduire la taille du système (2.33) en diminuant la valeur de  $N_c$ .

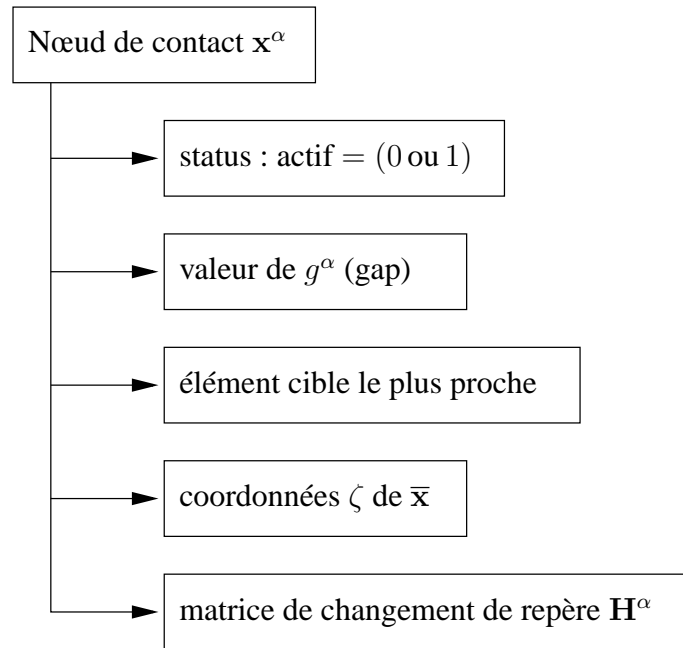


FIG. 2.14 – Composantes d'un nœud de contact

La figure 2.15 montre le type de configuration pour laquelle la distance d'alerte entre en jeu. Alors que l'impacteur comporte  $N_c$  nœuds de contact, la résolution se fera avec les quatre nœuds actifs uniquement. Le choix de la distance d'alerte qui définit la taille de la zone d'alerte doit être fait avec beaucoup de précautions. Il dépend à la fois de la vitesse relative entre l'impacteur et l'obstacle mais aussi de la valeur du pas de temps. Il faut que cette zone soit suffisamment petite pour être efficace mais suffisamment grande pour qu'un nœud de contact ne puisse pas la traverser entièrement en un seul pas de temps.

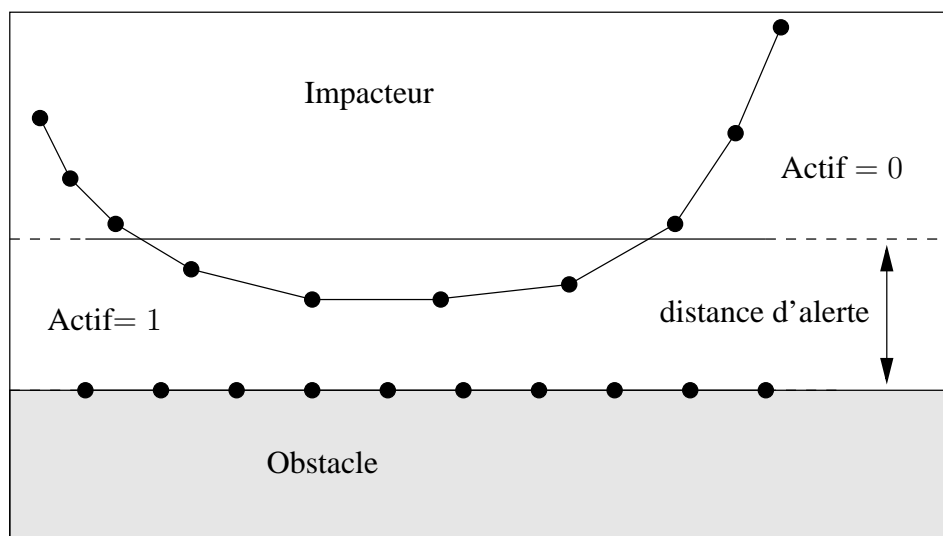


FIG. 2.15 – Utilisation d'une zone d'alerte

Par ailleurs, la désignation de l'impacteur et de l'obstacle peut avoir son importance dans

le cadre des géométries discrétisées utilisées dans la méthode des éléments finis. En effet, dans le cas de la figure 2.16, si le solide  $\mathcal{B}^1$  est désigné comme impacteur, l'algorithme de détection de contact renseignera que le nœud X est à l'intérieur de  $\mathcal{B}^1$ . Dans le cas contraire, où  $\mathcal{B}^2$  est désigné comme étant l'impacteur, l'algorithme ne détecte aucun nœud de  $\mathcal{B}^2$  à l'intérieur de  $\mathcal{B}^1$  et renseigne qu'il n'y a pas de contact. Cette difficulté peut aisément être traitée en effectuant deux passages de l'algorithme de détection de contact et en inversant les rôles des deux solides entre les deux passages. Toutefois, il est bon de noter qu'il est préférable de choisir l'objet ayant la surface la plus régulière comme obstacle.

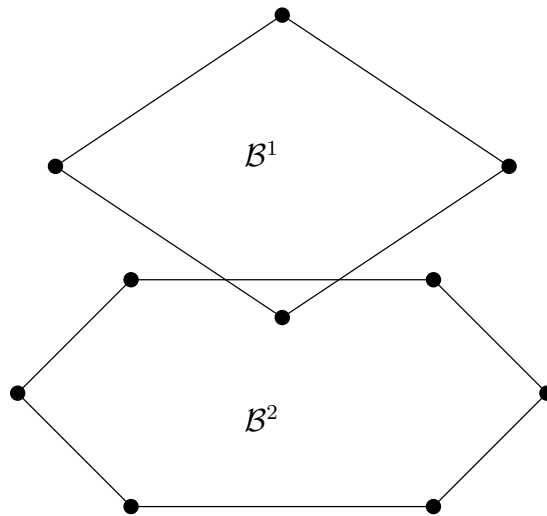


FIG. 2.16 – Erreur de détection du contact

Comme nous l'avons déjà énoncé précédemment, nous traitons le contact à l'aide d'une méthode nœud-contre-segment en 2D et nœuds-contre-facette en 3D.

Il existe plusieurs autres traitements du contact. En particulier, il est possible (et avantageux) d'adopter un formalisme de type nœud-contre-nœud sous l'hypothèse des petites perturbations. D'autre part, l'utilisation d'une méthode segment-contre-segment en 2D et segment-contre-facette en 3D permet d'éviter l'utilisation d'un algorithme à double passage pour traiter le problème défini sur la figure 2.16 [PL04].

Une autre forme très intéressante de déclaration de zone de contact est celle qui est adoptée lorsque le maillage utilise des éléments à arêtes quadratiques. Les éléments constituant l'obstacle (2D ou 3D) permettent alors de minimiser les erreurs de discrétisation géométrique pour les géométries complexes. En particulier, ce type de déclaration de zones de contact permet d'envisager de traiter un problème de rotule sans modification de la méthode de résolution.

### 2.4.2 Algorithme de détection

La figure 2.17 présente l'algorithme utilisé pour la phase de détection de contact. Il est constitué de deux boucles principales imbriquées qui se traduisent par : « pour chaque nœud de contact de chaque zone de contact, effectuer la détection ».

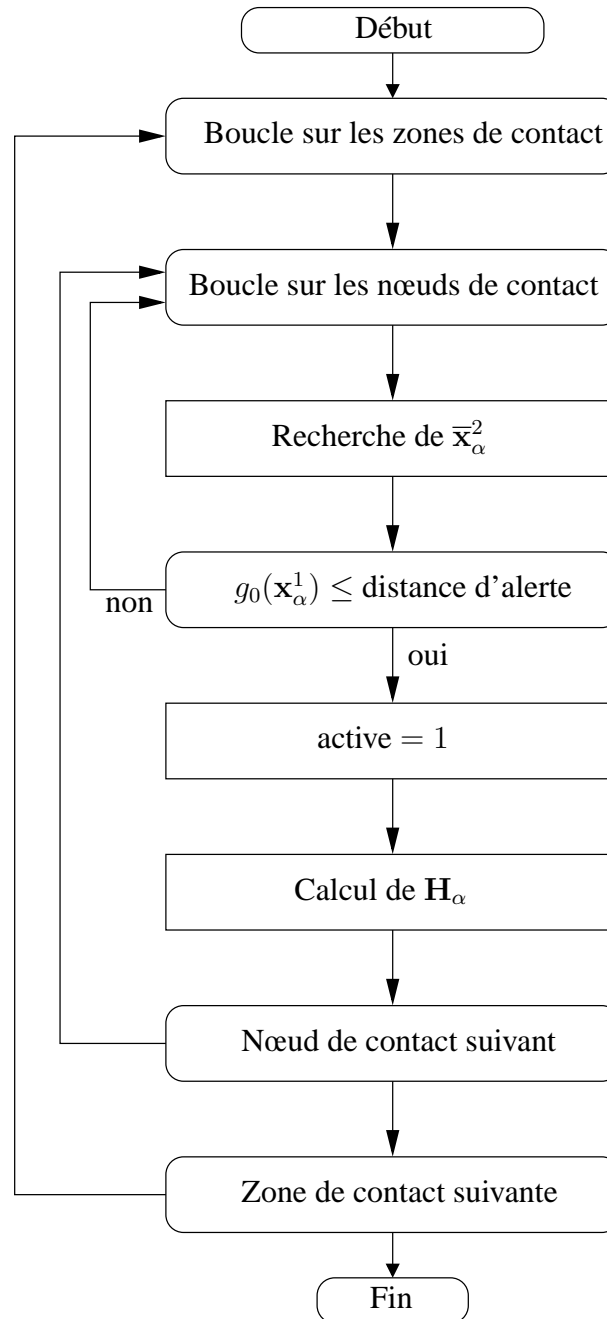


FIG. 2.17 – Algorithme principal de détection de contact

Considérons le traitement du nœud de contact  $\mathbf{x}_\alpha^1$  ( $\alpha = 1, N_c$ ). La première étape consiste à trouver le point  $\bar{\mathbf{x}}_\alpha^2$  défini dans les équations (2.7) et (2.8) comme le point le plus proche de  $\mathbf{x}_\alpha^1$  qui appartient à la cible. Nous détaillons sur la figure 2.18, la boucle secondaire mise en

place à cet effet.

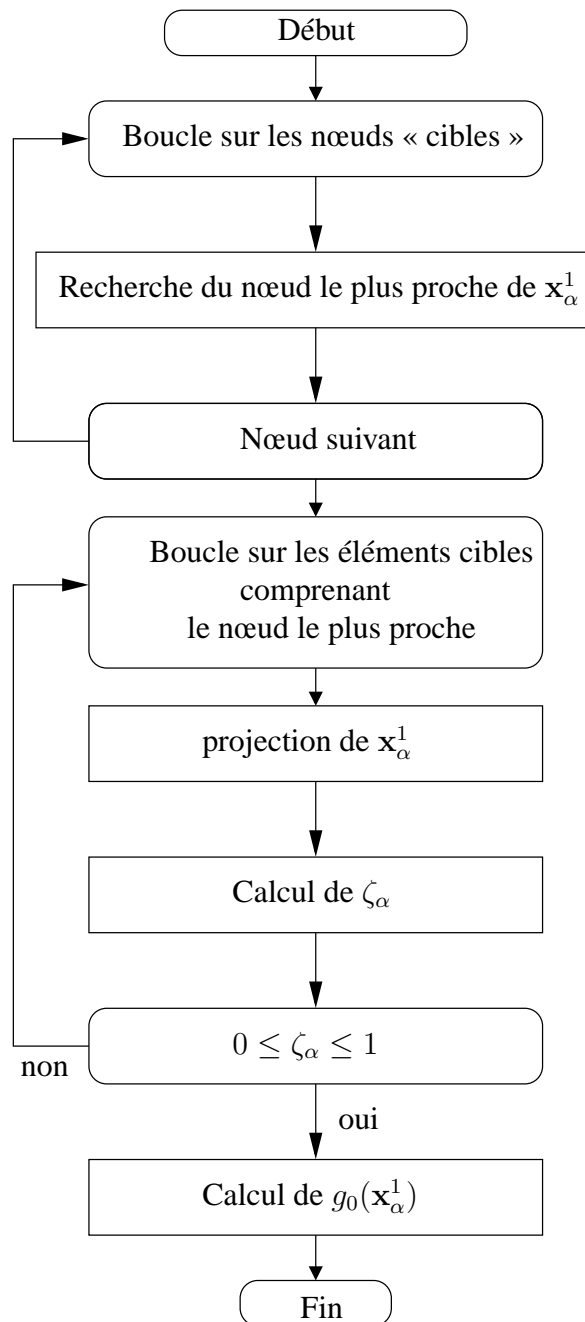
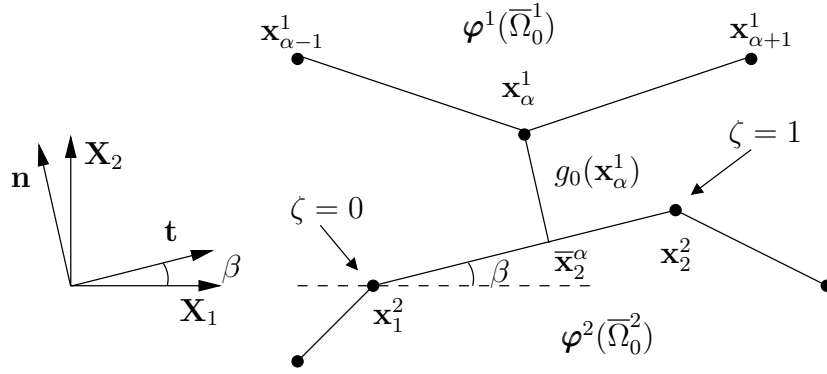


FIG. 2.18 – Algorithme principal de détection de contact

Ainsi, pour déterminer  $\bar{x}_\alpha^2$ , une première phase consiste à trouver le nœud le plus proche appartenant aux éléments cibles de la zone de contact. Le point  $\bar{x}_\alpha^2$  appartient alors à l'un des éléments cibles dont ce nœud fait partie. Nous effectuons une projection sur ces éléments jusqu'à trouver celui pour lequel  $0 \leq \zeta \leq 1$  (figure 2.19 pour un problème 2D).

FIG. 2.19 – Projection de  $\mathbf{X}_\alpha^1$  sur l'obstacle

Une fois  $\bar{x}_\alpha^2$  déterminé, il faut déterminer si le nœud de contact est actif. C'est alors seulement dans le cas où  $g_0(\mathbf{x}_\alpha^1) \leq \text{distance d'alerte}$  qu'il est nécessaire de déterminer la matrice de changement de base  $\mathbf{H}^\alpha$ .

En considérant l'exemple 2D proposé sur la figure 2.19, nous exprimons la matrice de changement de repère :

$$\mathbf{H}^\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

## 2.5 Conclusions

Au cours de ce deuxième chapitre, nous avons abordé la résolution des problèmes de contact avec frottement par la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, nous avons présenté les différents éléments nécessaires à la modélisation du contact dans un problème de mécanique des milieux continus : cinématique du contact, loi de contact unilatéral et loi de frottement. Ensuite nous avons effectué une brève revue des méthodes fréquemment utilisées pour traiter le contact dans la résolution d'un problème avec la méthode des éléments finis. Bien entendu, une plus large place a été faite à la méthode du bi-potentiel qui est utilisée dans la suite de ce travail. Pour finir, nous avons présenté la méthode intégrée au code FER/Impact pour assurer la détection du contact.





## Chapitre 3

# Traitement du contact en dynamique

### 3.1 Introduction

Au cours des deux premiers chapitres, nous avons présenté la méthode des éléments finis ainsi que la méthode du bi-potentiel utilisée dans nos travaux pour résoudre le problème du contact avec frottement. À ce stade de développement, le code de calcul obtenu peut résoudre de nombreux problèmes de mécanique du contact avec frottement dans le domaine quasi-statique. Dans ce nouveau chapitre, nous allons présenter le schéma d'intégration adopté pour étendre le champ d'application de notre algorithme aux problèmes d'impact, c'est-à-dire à la résolution de problèmes de contact avec frottement dans le domaine de la dynamique. C'est à la fois un enjeu important car il ouvre un immense champ d'application mais aussi une difficulté considérable tant la résolution du contact perturbe la stabilité des schémas de discrétisation classiques.

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la méthode des éléments finis appliquée à un problème de mécanique du solide en dynamique aboutit au système récursif suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i = (\mathbf{F}_{ext})_{t+\Delta t} - (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{R}_c(\mathbf{U}))_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans le deuxième chapitre, nous avons développé notre méthode de résolution du contact en supposant que le schéma d'intégration permet de transformer (3.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1} \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{R}_c(\mathbf{U}))_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le schéma d'intégration permet de préciser les termes  $\widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1}$  et  $\widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1}$  ainsi que la procé-

dure d'actualisation des termes de vitesse et d'accélération. À la fin de la boucle en équilibre de Newton-Raphson, lorsque la solution a convergé, nous avons :

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} \quad (3.3)$$

Pour les problèmes d'impact, le choix du schéma d'intégration qui permet de passer de (3.1) à (3.2) est d'une grande importance. La première question que nous pouvons nous poser concerne le type de schéma à employer : explicite [DS89] ou implicite [SD89]. Couramment, la réponse à cette question se fait en fonction du domaine d'application envisagé :

- **schémas explicites** : en dynamique rapide, la durée de l'impact est très courte et la propagation des ondes joue un rôle prépondérant. Nous parlons alors de problèmes de crash. Pour ces problèmes, les schémas explicites tels que le schéma du second ordre des différences centrées sont largement utilisés [CTM91, TP93, BCL05, BCL06]. Lorsqu'une matrice de masse diagonale est employée, ils sont particulièrement économiques en nombre d'opérations à effectuer par pas de temps. Cependant, leur stabilité conditionnelle impose l'utilisation d'un pas de temps très petit déterminé à l'aide de la condition C.F.L. (Courant - Friedrichs - Levy). Faisant intervenir la taille du plus petit élément du maillage, la condition C.F.L. est particulièrement pénalisante pour un problème d'impact. En effet, le maillage est souvent raffiné au niveau de la zone de contact pour rendre compte avec précision des actions mécaniques calculées. Parmi les codes de calculs commerciaux utilisant ce type de schéma, nous pouvons citer RADIOSS, PAM-CRASH et LS-DYNA,
- **schémas implicites** : ces schémas sont utilisés dans les problèmes de dynamique pour lesquels c'est l'effet des forces d'inertie qui prédomine. Ces schémas sont plus coûteux en terme de calcul puisqu'ils nécessitent une inversion de la matrice globale à chaque pas de temps. Pour les problèmes linéaires, ce désavantage est compensé par le fait qu'ils sont inconditionnellement stables et qu'ils peuvent donc être employés avec des pas de temps plus grands. Cependant, les schémas implicites perdent cette propriété pour les problèmes non-linéaires et donc pour les problèmes d'impact. De nombreux travaux portent sur l'adaptation de ce type de schéma pour les problèmes d'impact.

Dans nos travaux, nous nous intéressons à l'étude des problèmes d'impact à l'aide de schémas d'intégrations implicites. Dans un premier temps, nous proposons d'associer la méthode du bi-potential à un schéma de Newmark [New59] afin de cerner les difficultés inhérentes aux problèmes de choc. Nous évoquerons ainsi les difficultés qu'engendre son utilisation pour la résolution des problèmes d'impact et les travaux menés au sein de la communauté scientifique pour y remédier. Dans un second temps, nous présenterons un schéma du premier ordre utilisé dans ce travail pour contourner les difficultés évoquées précédemment. Nous présenterons un ensemble de cas tests permettant de juger de la qualité des

résultats obtenus avec ce nouvel algorithme.

## 3.2 Schéma de Newmark

### 3.2.1 Présentation du schéma

Le schéma d'intégration de Newmark est sans aucun doute le schéma implicite le plus utilisé pour les problèmes de dynamique. Il est basé sur les hypothèses suivantes :

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \right], \quad (3.4)$$

et :

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_t + \beta \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \right], \quad (3.5)$$

où  $\gamma$  et  $\beta$  sont des paramètres de l'algorithme desquels dépendent la stabilité et la précision du schéma d'intégration obtenu. Il a été démontré dans [GT72] que le schéma est inconditionnellement stable dans le cadre des petites perturbations si  $\gamma \geq 0,5$  et  $\beta \geq (2\gamma + 1)^2/16$ . Détaillons les couples de paramètres les plus utilisés :

- ( $\gamma = 0,0; \beta = 0,25$ ) : le schéma de Newmark est équivalent au schéma explicite des différences centrées,
- ( $\gamma = 0,5; \beta = 0,25$ ) : c'est la règle du trapèze. Le schéma est d'ordre 2,
- ( $\gamma = 0,5; \beta = \frac{1}{6}$ ) : c'est la règle de l'accélération linéaire à l'intérieur d'un pas de temps.

En insérant (3.4) et (3.5) dans (3.2), nous obtenons la définition de la matrice de masse effective et de la matrice effective des efforts extérieurs pour le schéma de Newmark :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i, \\ \widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} = (\mathbf{F}_{ext})_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_2 \dot{\mathbf{U}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{U}}_t) + \mathbf{C}(a_4 \dot{\mathbf{U}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{U}}_t) - (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i, \end{cases} \quad (3.6)$$

où :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \\ a_2 &= \frac{1}{\beta\Delta t}, & a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1, \\ a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1, & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Applications numériques

Nous allons maintenant confronter la méthode obtenue à une série de tests afin de déterminer sa capacité à traiter les problèmes d'impact et de choc. Pour cela, nous choisissons d'étudier deux cas simples pour lesquels nous avons suffisamment de données pour analyser de manière critique les résultats obtenus. Pour tous les cas, nous supposons qu'il n'y a pas d'amortissement, c'est-à-dire  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  dans l'équation (3.1).

#### 3.2.2.1 Impact longitudinal entre deux barres élastiques

Le premier test consiste à étudier le problème de l'impact entre deux barres élastiques en 2D. Ce test est très intéressant dans la mesure où il est tout à fait possible de comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la théorie 1D basée sur la propagation des ondes élastiques. Pour cela, un bref rappel de la théorie qui mène aux solutions analytiques est disponible en annexe A.

La configuration géométrique du problème, qui est la même dans les deux cas, est présentée sur la figure 3.1. Cet exemple, avec le jeu de données défini par la suite, est tiré des travaux de Hu [Hu97].

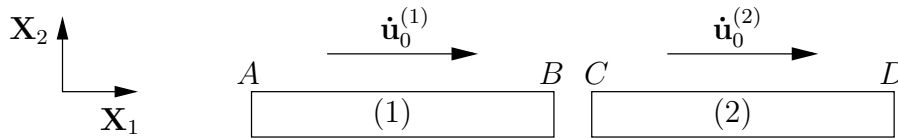


FIG. 3.1 – Impact longitudinal entre deux barres élastiques

Les deux barres sont identiques (dimensions et matériau constitutif) et sont animées d'une vitesse initiale égale en module et opposée en direction :

- longueur des barres :  $L = 10$ ,
- module de Young :  $E = 1000$ ,
- masse volumique :  $\rho = 0,001$ .

Nous imposons aux deux barres une vitesse initiale égale en module et opposée en direction :  $\dot{\mathbf{u}}_0^{(1)} = -\dot{\mathbf{u}}_0^{(2)} = (1, 0, 0, 0)$ . Initialement, les deux barres sont séparées par un interstice d'une longueur de 0,2.

La simulation porte sur une durée totale  $T = 0,04$  et nous adoptons le pas de temps  $\Delta t = 0,00001$ . Dans un premier temps, nous tentons d'utiliser le schéma de Newmark avec les paramètres classiques :  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$ .

Sur la figure 3.2, nous présentons les résultats obtenus pour le déplacement du point  $C$ . Nous observons que sur la première phase (rapprochement des barres avant impact), le résultat est tout à fait satisfaisant. Cela n'a rien d'étonnant puisqu'il s'agit là d'un calcul classique sans contact. En revanche, dès que l'impact a lieu, nous observons de fortes oscillations et le résultat numérique s'écarte très franchement du résultat escompté.

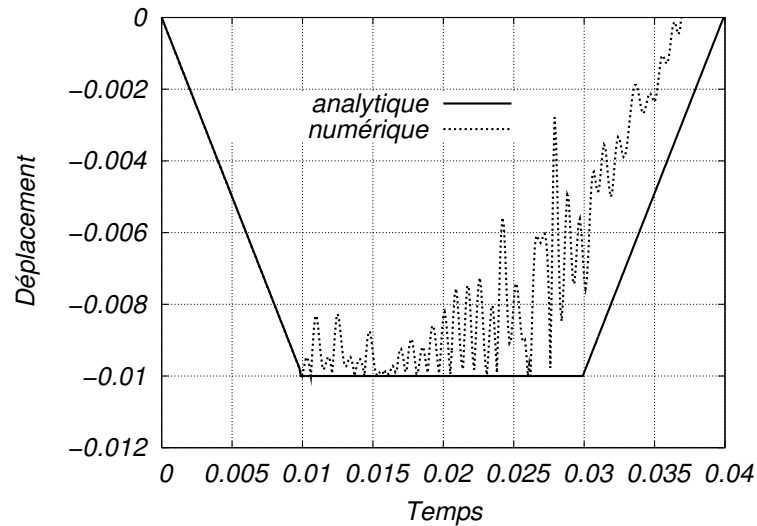


FIG. 3.2 – Déplacement du point  $C$  pour  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$

La figure 3.3 représente l'évolution de l'énergie du système (calculée au paragraphe 1.3.4) au cours du temps. Nous observons que le problème survient là encore pendant la durée du contact. En effet, le schéma conserve parfaitement l'énergie totale du système avant et après le contact. Par contre, cette même énergie croît de manière très sensible pendant le contact. Cette évolution n'est pas acceptable du point de vue de la physique et explique en grande partie l'échec de la simulation.

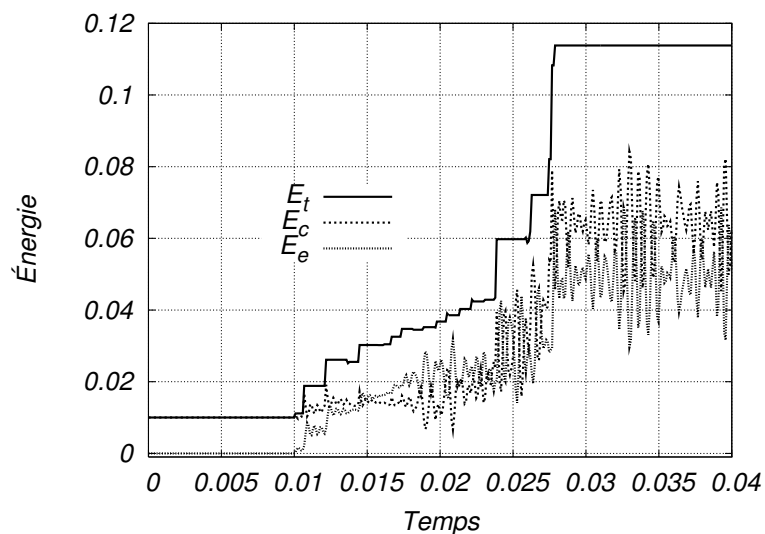


FIG. 3.3 – Évolution de l'énergie pour  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$

Dans les problèmes d'impact et de choc, l'enjeu semble donc être de contrôler l'énergie totale du système afin d'assurer la convergence du système. Une première solution consiste à introduire de la dissipation à l'intérieur du schéma d'intégration en changeant le jeu de paramètres appliqué.

Nous testons maintenant la solution proposée dans [CB86, BM88] pour améliorer les performances du schéma de Newmark en cas d'impact. Pour cela, les auteurs proposent de conserver l'ordre de précision du schéma en conservant  $\gamma = 0,5$  mais ils introduisent de la dissipation numérique en imposant  $\beta = 0,5$ . La figure 3.4 propose le déplacement du point  $C$  au cours du temps que nous obtenons en appliquant ce nouveau jeu de paramètres. Le résultat est tout à fait satisfaisant et seules quelques oscillations sont perceptibles durant le contact.

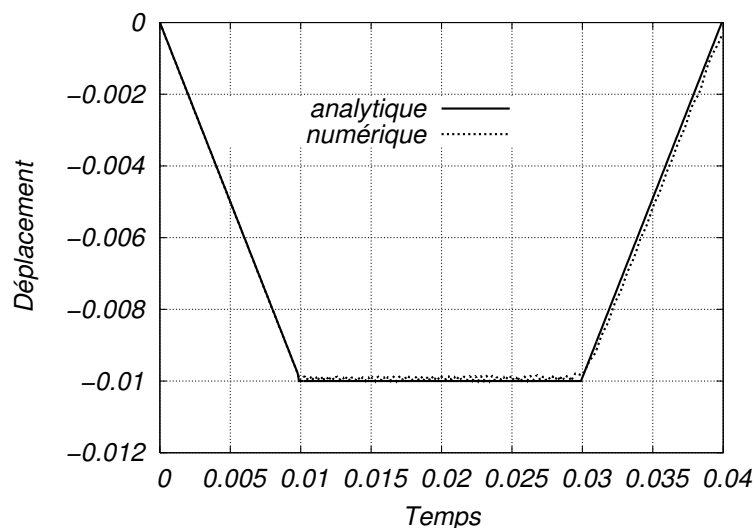


FIG. 3.4 – Déplacement du point  $C$  pour  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,5$

La figure 3.5 montre que cette amélioration des résultats est bien directement liée à la maîtrise de l'énergie du système. Pour cette nouvelle simulation, le schéma se comporte globalement très bien et l'énergie totale du système est contenue. L'énergie totale qui est à l'origine uniquement de l'énergie cinétique se transforme, durant le choc, en énergie potentielle élastique à travers la déformation des deux barres. Ensuite, les barres se séparent et l'énergie totale redevient essentiellement de l'énergie cinétique. Seules quelques vibrations résiduelles engendrent des déformations à l'intérieur des barres et donc de l'énergie élastique.

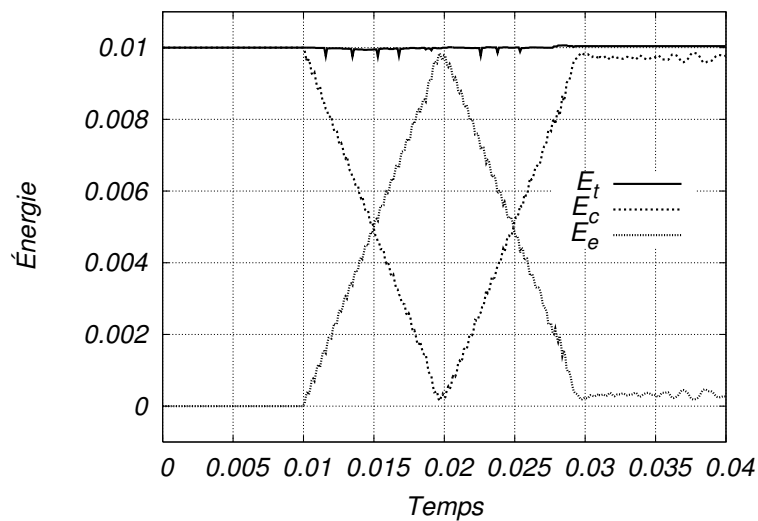


FIG. 3.5 – Évolution de l'énergie pour  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,5$

### 3.2.2.2 Impact oblique

Le second test, déjà étudié par Kwak *et al.* [KK92, KK96] en utilisant une méthode de programmation mathématique, propose d'étudier l'impact oblique d'une plaque contre une surface rigide. Notons que cet exemple avait également été retenu pour la journée  $\Phi^2AS$  intitulée « Traitement des contacts en implicite et explicite » [IPS99a, IPS99b].

La figure 3.6 présente à la fois la géométrie du problème et le maillage adopté pour les premières simulations (maillage M1). La géométrie de la plaque est entièrement définie par les trois paramètres suivants :

- largeur de la plaque :  $L = 0,04$  m,
- hauteur de la plaque :  $H = 0,08$  m,
- rayon de courbure :  $R = 0,101$  m,
- épaisseur de la plaque :  $e = 0,01$  m.

Les constantes matérielles appliquées à la plaque sont les suivantes :

- module de Young :  $E = 10^7$  Pa,
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0,25$ ,
- masse volumique :  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

La plaque est discrétisée à l'aide d'éléments 2D à 4 nœuds pour lesquels nous adoptons l'hypothèse des contraintes planes. La figure 3.6 montre le premier maillage adopté pour cette étude. Ce maillage est identique à celui proposé dans [KK96]. Il est composé de 37 éléments définis par un ensemble de 54 nœuds.



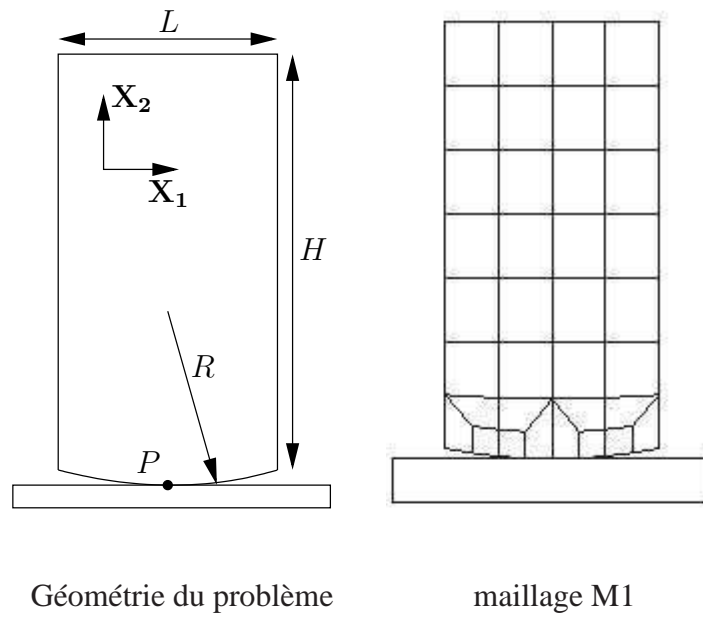
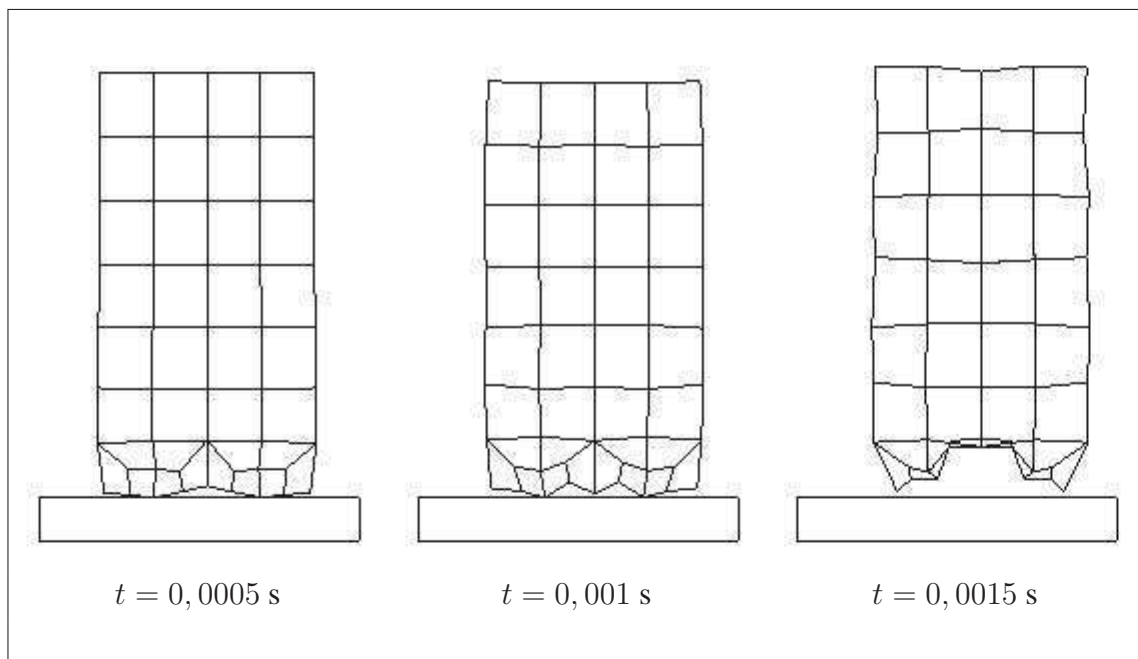


FIG. 3.6 – Impact oblique

Nous imposons à la plaque une vitesse initiale définie en m/s par :  $\dot{\mathbf{u}}_0 = (3, 0; -5, 0)$ . Pour cette première étude avec le schéma de Newmark, le contact entre la plaque et l'obstacle se fera sans frottement. La simulation porte sur une durée totale de  $3 \cdot 10^{-3}$  s et le pas de temps adopté est  $\Delta t = 10^{-5}$  s. La figure 3.7 présente l'état de déformation de la plaque au cours du temps obtenu en utilisant les paramètres  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$ .

FIG. 3.7 – Résultats obtenus avec  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$

À nouveau, nous pouvons conclure qu'il n'est pas possible d'étudier de manière satisfaisante les problèmes d'impact en utilisant ce jeu de paramètres. Ce résultat est confirmé par la figure 3.8 dans laquelle nous observons que l'énergie mécanique du système est une nouvelle fois mal maîtrisée.

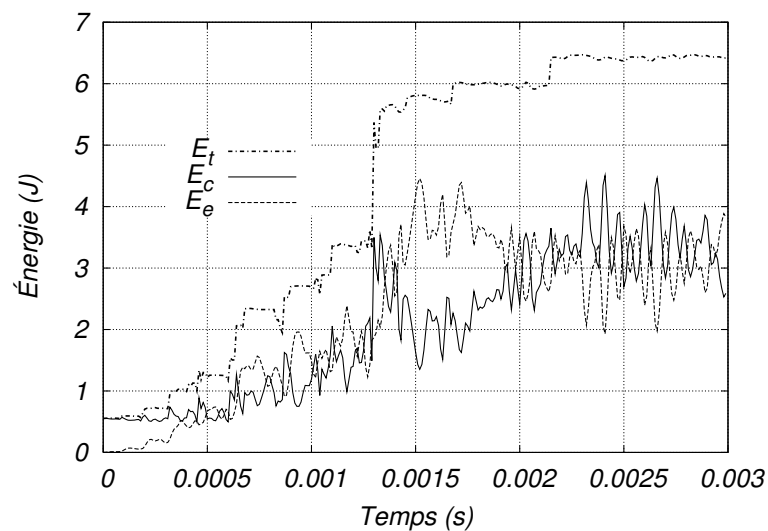


FIG. 3.8 – Évolution de l'énergie avec  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$

Nous utilisons maintenant le second jeu de paramètres proposé précédemment ( $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,5$ ) afin d'introduire, une nouvelle fois, de la dissipation numérique. Là encore, le résultat est positif puisque la simulation va à son terme. La figure 3.9 permet à la fois de suivre l'évolution de la plaque au cours du temps mais aussi celle du champ de contrainte de von Mises. Pour cette figure, les valeurs du champ de contrainte varient de 0 MPa et 1,141 MPa.

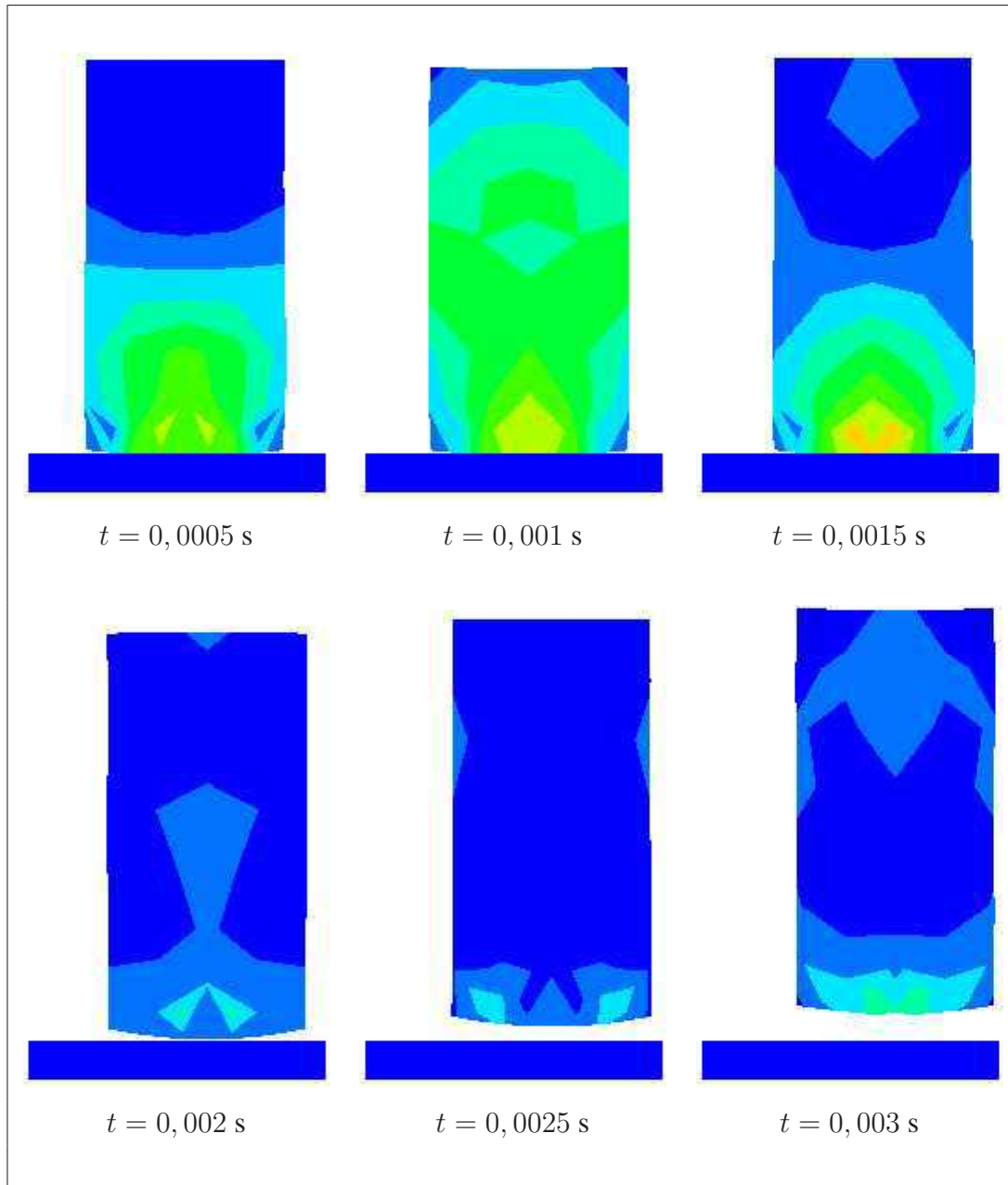


FIG. 3.9 – Contrainte de von-Mises ( $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,5$ )

Le mouvement global de la plaque est celui attendu pour une simulation sans frottement. Seulement, la figure 3.10 montre que certains problèmes persistent au niveau de la résolution du contact. Le point  $P$  perd le contact avec l'obstacle au cours du glissement de la plaque sur ce dernier. Cela démontre une certaine instabilité concernant la résolution du contact.

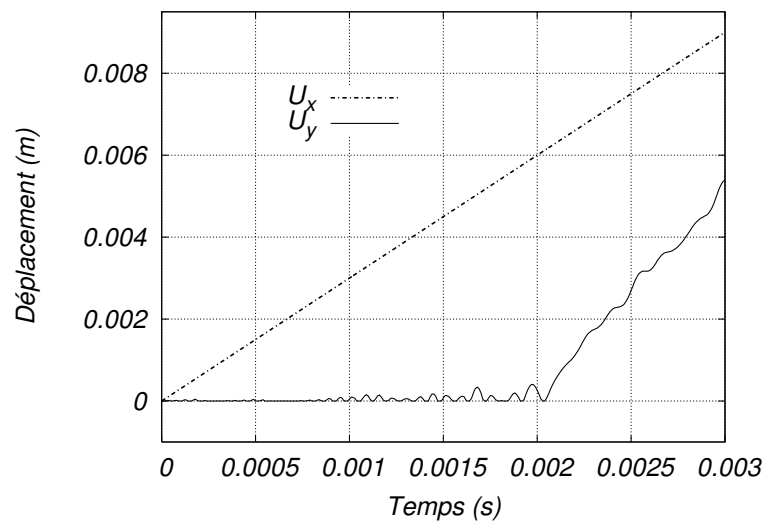


FIG. 3.10 – Déplacement du point  $P$  avec  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,5$

La figure 3.11 confirme les observations précédentes. La dissipation numérique a permis de limiter le problème de l'énergie totale en contenant son accroissement durant le contact. À noter que pour cet exemple, la dissipation numérique n'est pas suffisante pour assurer que l'énergie totale n'augmente pas. Cela pose le problème du choix des nouveaux paramètres : ils doivent être définis pour assurer la convergence du calcul sans fausser les résultats. Et ce choix doit être fait à chaque nouvel exemple étudié.

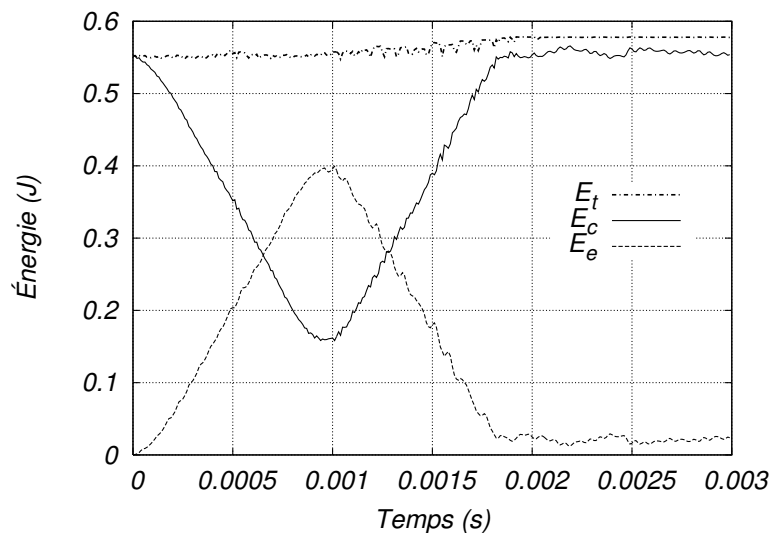


FIG. 3.11 – Évolution de l'énergie avec  $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,5$

### 3.2.3 Conclusions

Dans ce premier paragraphe, nous avons associé la méthode du bi-potentiel au schéma d'intégration de Newmark pour traiter les problèmes d'impact. Les résultats présentés montrent que la méthode obtenue n'est pas satisfaisante. Lorsque l'on utilise les paramètres de

la règle du trapèze ( $\gamma = 0,5$  et  $\beta = 0,25$ ) le processus diverge. Les conditions de contact sont satisfaites grâce à la méthode du bi-potentiel mais l'énergie totale du système n'est pas maîtrisée correctement. L'algorithme obtenu n'est pas stable.

Par la suite, nous avons considéré la solution consistant à modifier les paramètres du schéma de Newmark afin d'introduire de l'amortissement numérique. Cette voie a été largement explorée par la communauté scientifique. Ainsi, nous avons testé le jeu de paramètres ( $\gamma = 0,5; \beta = 0,5$ ). Bien que cela améliore considérablement le comportement du schéma pour le problème d'impact entre deux barres élastiques, il semble que cette modification ne soit pas suffisante pour traiter un large éventail de situation. Ceci est mis en évidence par le second test. Notons également que le jeu de paramètres ( $\gamma = 0,4; \beta = 0,7$ ) a été utilisé dans [WVVS90]. Malgré tout, la méthode consistant à faire varier les paramètres du schéma semble limitée à un nombre restreint d'application. Une profonde modification du schéma d'intégration de Newmark semble donc nécessaire pour aborder le domaine des problèmes d'impact.

Notons tout de même que dans certains cas particuliers, le schéma de Newmark peut être utilisé avec succès avec ses paramètres originaux. C'est le cas du test de Taylor qui a été traité par Feng dans [Fen99] avec ( $\gamma = 0,5; \beta = 0,25$ ). Cette particularité s'explique par le fait que dans cet exemple, il n'y a pas de changement de statuts de contact. La barre est initialement en contact et nous n'étudions pas le rebond.

### 3.3 Méthode du premier ordre

Notre réflexion porte à présent sur la pertinence du calcul de l'accélération et de son utilisation pour un problème d'impact. En effet, au moment de l'impact, le changement de vitesse des points de contact est brutal. Le champ de vitesse n'est donc pas continu mais seulement continu par morceau. L'accélération ne peut alors être définie au moment de l'impact comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps. De même, les hypothèses de base (équations (3.4) et (3.5) pour le schéma de Newmark) qui mènent à l'algorithme du second ordre ne sont pas vérifiées à cet instant.

L'idée est donc ici de contourner le problème en employant un schéma d'intégration qui ne nécessite pas le calcul de l'accélération. C'est ainsi que notre recherche s'est tout naturellement tournée vers les algorithmes du premier ordre [JT88, Jea89, Jea92, Jea99, VPJR98].

### 3.3.1 Présentation de l'algorithme

Dans ses travaux, Jean s'intéresse aux problèmes de chocs entre solides indéformables visant une application pour les milieux granulaires. Pour cela, il a développé un schéma d'intégration du premier ordre à partir d'une formulation du problème en terme de vitesse. Cela lui permet, après intégration des équations d'équilibre, de travailler avec des impulsions bien définies plutôt que des forces de choc. Afin de présenter la méthodologie proposée par Jean, nous réécrivons l'équation de la dynamique à un instant  $t$  (équation 3.1) sous la forme :

$$\mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} dt + \mathbf{F}_{int} dt = \mathbf{F}_{ext} dt + \mathbf{R}_c(\mathbf{U}) dt. \quad (3.8)$$

En intégrant cette équation sur l'intervalle de temps  $[t, \Delta t]$ , nous obtenons :

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{int} dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c(\mathbf{U}) dt. \quad (3.9)$$

L'algorithme proposé est basé sur l'approximation suivante ( $\theta$ -méthode) :

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t = \Delta t \left( (1 - \theta) \dot{\mathbf{U}}_t + \theta \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \right) \quad \text{où } 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.10)$$

Pour  $\theta = 0$ , nous obtenons la méthode d'Euler explicite tandis que  $\theta = 1$  aboutit à la méthode d'Euler implicite. La méthode est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ .

Nous appliquons également les approximations :

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M} d\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{M} \left( \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_t \right), \quad (3.11)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt = \Delta t \left( (1 - \xi) \mathbf{F}_t + \xi \mathbf{F}_{t+\Delta t} \right), \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{F}$  représente le vecteur global des forces internes ou le vecteur global des forces externes et  $0 \leq \xi \leq 1$ .

En ce qui concerne le terme relatif au contact, Jean [Jea92] propose deux schémas de résolution : l'un explicite et l'autre implicite. Nous adoptons la première formulation en écrivant :

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c dt = \Delta t (\mathbf{R}_c)_{t+\Delta t}. \quad (3.13)$$

Pour le processus itératif, les valeurs au temps  $t + \Delta t$  sont remplacées par les valeurs à

l'itération  $i+1$  ; soit par exemple,  $\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i+1}$ . L'approximation standard de  $\mathbf{F}^{i+1}$  donne :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^{i+1} &= (\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i + \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i}{\partial \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i} (\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i) \\ &\quad + \frac{\partial(\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^i} (\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^i), \\ &= \mathbf{F}_{int}^i - (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{C}^i \delta \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ainsi, nous retrouvons la forme recursive du problème en termes de déplacement :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1} \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} + (\mathbf{R}_c(\mathbf{U}))_{t+\Delta t}^{i+1}, \\ \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \end{cases} \quad (3.15)$$

où les différentes quantités effectives sont données par :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{t+\Delta t}^{i+1} = \xi (\mathbf{K}_T)_{t+\Delta t}^i + \frac{\xi}{\theta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\theta \Delta t^2} \mathbf{M}, \quad (3.16)$$

$$\widehat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{i+1} = (\bar{\mathbf{F}}_{acc})_{t+\Delta t}^i + \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^i, \quad (3.17)$$

$$(\bar{\mathbf{F}}_{acc})_{t+\Delta t}^i = -\frac{1}{\theta \Delta t^2} \mathbf{M} \left\{ \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{U}_t - \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t \right\}, \quad (3.18)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^i = (1 - \xi) ((\mathbf{F}_{int})_t + (\mathbf{F}_{ext})_t) + \xi ((\mathbf{F}_{int})_{t+\Delta t}^i + (\mathbf{F}_{ext})_{t+\Delta t}). \quad (3.19)$$

À la fin de chaque pas de temps, la vitesse est réactualisée par :

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{\theta \Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t). \quad (3.20)$$

En prenant  $\theta = \frac{1}{2}$ , ce schéma correspond à la règle du trapèze implicite, qui est également analogue à la méthode développée par Tamma et Namburu [TN90] dans laquelle l'accélération n'a pas besoin d'être calculée. Simo et Wong [SW91] ont montré que ce schéma préserve l'énergie totale et l'équilibre pour les problèmes dynamiques sans contact.

### 3.3.2 Applications numériques

Nous allons maintenant soumettre l'algorithme de résolution de contact obtenu à la série de tests utilisée pour le schéma d'intégration de Newmark. Nous commençons par l'étude d'impact longitudinal entre deux barres élastiques défini dans 3.2.2.1. Un second cas d'impact de barres est étudié pour lequel les barres ne sont plus identiques. Enfin, nous terminons

cette validation de la méthode par l'étude de l'impact oblique défini dans 3.2.2.2.

### 3.3.2.1 Impact longitudinal entre deux barres élastiques

Pour ce premier test de validation, nous reprenons exactement le problème défini au paragraphe 3.2.2.1. L'ensemble des données (géométrie, maillage, matériau et conditions initiales) est identique. Nous utilisons également le même pas de temps que pour le schéma de Newmark afin de pouvoir effectuer une comparaison la plus fiable possible des différents résultats obtenus. Par ailleurs, nous utilisons les paramètres  $\xi = \theta = 0,5$  pour le schéma d'intégration du premier ordre.

Sur la figure 3.12, nous retrouvons les courbes représentant le déplacement du point  $C$  au cours du temps. Nous pouvons estimer que la corrélation entre le résultat numérique et le résultat théorique est tout à fait remarquable. Les deux courbes sont quasiment superposées et nous n'observons pas d'oscillations de la position du point de contact durant le choc.

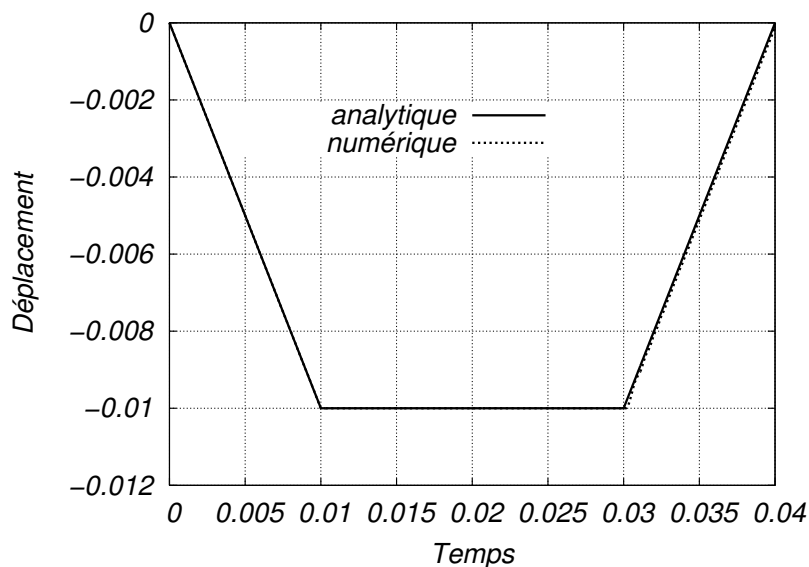


FIG. 3.12 – Déplacement du point  $C$  avec le schéma du premier ordre

Le bon comportement de la méthode se retrouve sur la courbe représentative de l'évolution des énergies du système (figure 3.13). Une nouvelle fois, le résultat est remarquable : l'énergie du système reste presque parfaitement constante tout au long de la simulation.



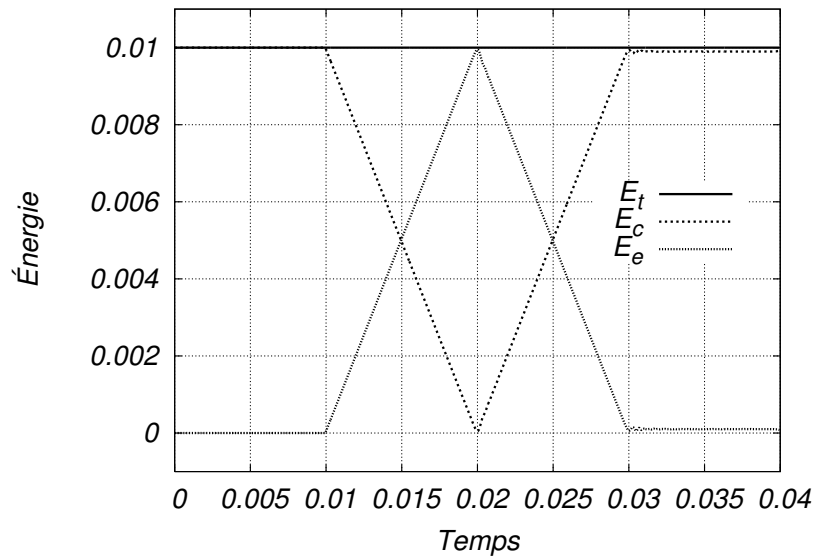


FIG. 3.13 – Évolution de l'énergie avec le schéma du premier ordre

Ces résultats favorables permettent d'envisager d'aller plus en avant dans l'analyse des résultats. Nous représentons sur la figure 3.14 l'évolution de la vitesse du point  $C$ , au cours du temps, calculée avec la formule :

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t}{\Delta t}. \quad (3.21)$$

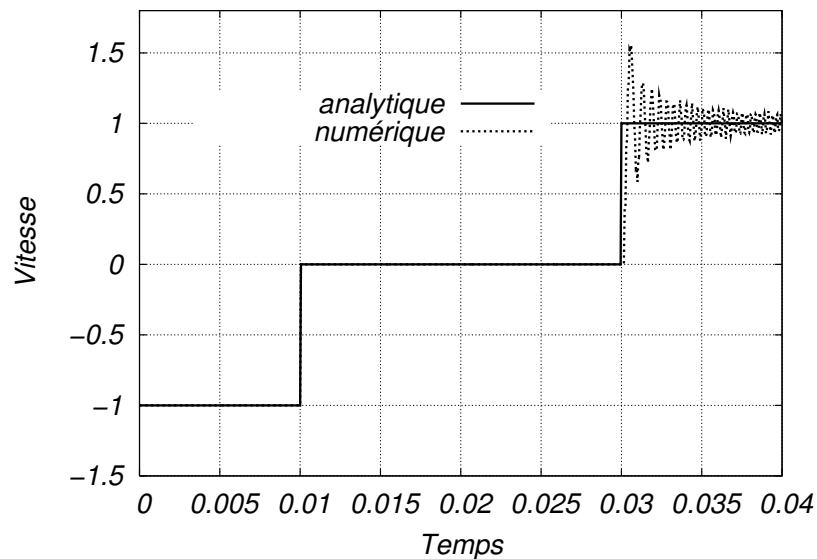


FIG. 3.14 – Vitesse du point  $C$  avec le schéma du premier ordre

Le résultat est encore une fois cohérent avec la prédiction analytique. Seules les oscillations de la vitesse obtenues par le calcul numérique après la perte de contact ne sont pas en accord avec la théorie 1D. Il n'est cependant pas évident que ce soit le schéma d'intégration

qui soit en cause dans cette divergence de résultats.

La dernier comparatif tiré de cette étude concerne la force de réaction calculée au point  $C$  (figure 3.15). Les résultats numériques sont très proches de la prédiction analytique et la encore, c'est au moment de la perte de contact que l'écart le plus grand est enregistré. Nous notons également un très léger bruit au niveau de l'entrée en contact de deux barres. Ce phénomène est difficilement évitable lorsque que les matériaux mis en jeu lors du choc sont aussi rigides.

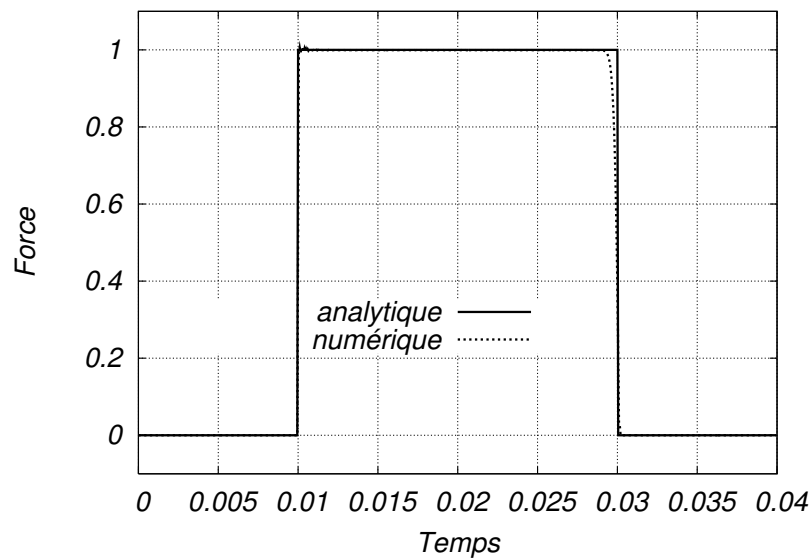


FIG. 3.15 – Réaction au point  $C$  avec le schéma du premier ordre

Nous nous proposons maintenant de changer quelque peu les conditions de l'impact entre les deux barres. Dans ce second cas, les deux barres sont de même dimension mais les matériaux constitutifs de chacune d'entre elles sont différents. Par ailleurs, seule la barre (1) possède une vitesse initiale (la barre (2) est initialement immobile). Pour cet exemple, le jeu de données est celui utilisé par Laursen et Love [LL02]. L'ensemble des données est fourni dans le tableau 3.1.

TAB. 3.1 – Propriétés matériaux et données géométriques

	barre (1)	barre (2)
$L$	100	100
$E$	10,000	80,000
$\rho$	100	200
$V_0$	0,1	0,0

La simulation porte cette fois-ci sur une durée totale  $T = 50,0$  et nous adoptons le pas

de temps  $\Delta t = 0,01$ . Par ailleurs, nous conservons le couple de paramètres précédemment utilisé concernant le schéma du premier ordre ( $\xi = \theta = 0,5$ ).

Contrairement à l'exemple précédent, le problème n'est pas symétrique et il est intéressant d'étudier le déplacement de chacune des extrémités des deux barres (figure 3.16). Les résultats obtenus avec la méthode proposée dans ce travail sont très proches de ceux proposés dans [LL02].

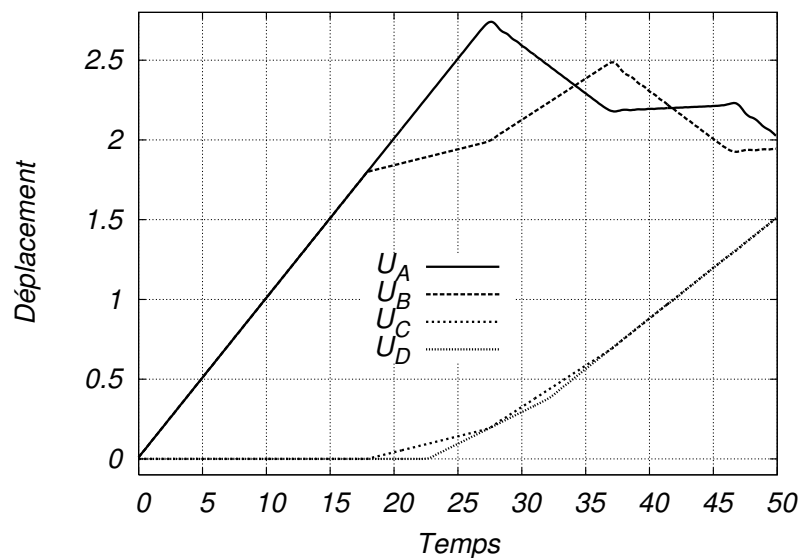


FIG. 3.16 – Déplacement des extrémités des deux barres

Pour cet exemple, nous choisissons d'étudier le transfert d'énergie qui a lieu durant le choc entre les deux barres. En effet, la barre (2) étant initialement immobile, la totalité de l'énergie mécanique du système est fournie par la barre (1). Ainsi, la figure 3.17 représente l'évolution de l'énergie mécanique du système ( $E_t$ ) qui est la somme de l'énergie mécanique de chacune des barres. Nous n'observons aucune variation significative de l'énergie totale du système sur l'ensemble de la simulation. La barre (1) transfère à la barre (2) une partie de son énergie mécanique ce qui a pour effet de mettre cette dernière en mouvement.

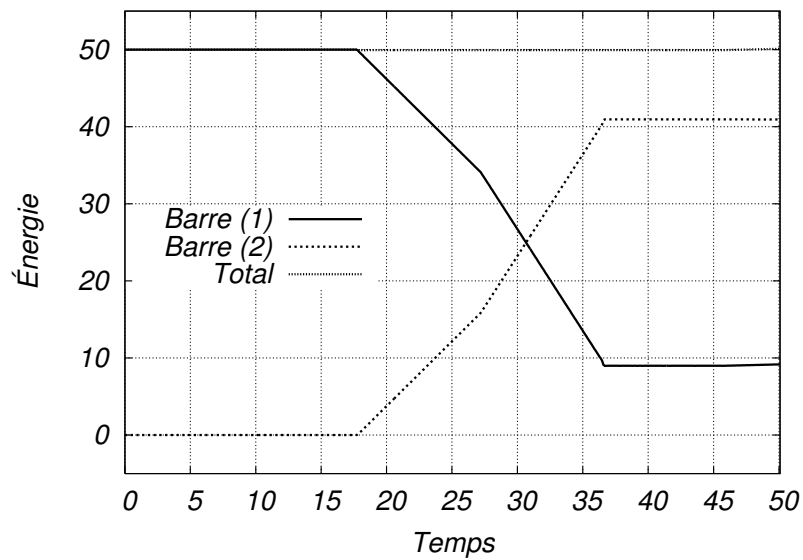


FIG. 3.17 – Évolution de l'énergie du système

Pour finir, la figure 3.18 présente l'évolution des vitesses des points  $C$  et  $B$  au cours du temps. À nouveau, le comportement global des points de l'interface de contact est en accord avec les précédentes études effectuées sur ce cas. Toutefois, nous constatons une nouvelle fois un pic de vitesse au moment de l'entrée en contact des deux barres ainsi qu'au moment de la perte de contact.

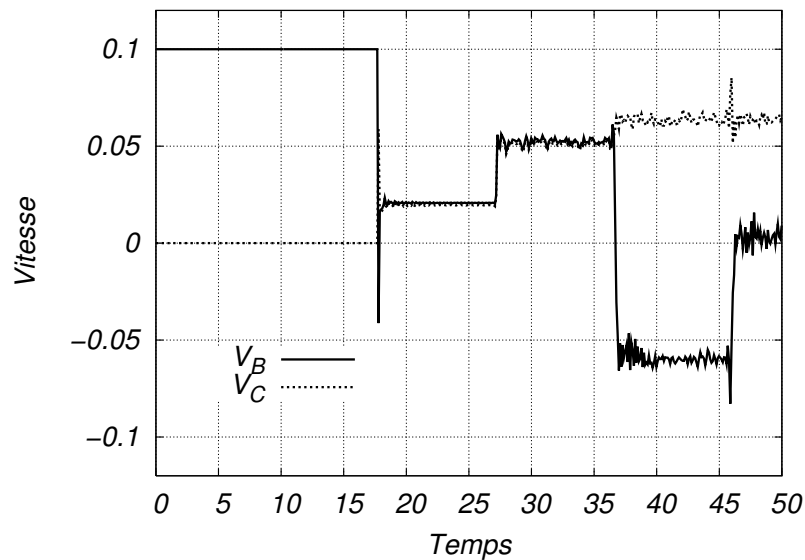


FIG. 3.18 – Vitesse des deux surfaces de contact

### 3.3.2.2 Impact oblique

Nous reprenons maintenant le problème de l'impact oblique entre une plaque et une fondation rigide défini au paragraphe 3.2.2.2. Nous conservons là encore la totalité des condi-

tions de calcul appliquées pour le schéma d'intégration de Newmark.

La figure 3.3.2.2 présente la répartition de la contrainte équivalente de von Mises à différents instants de la simulation. Pour cette figure, l'échelle des valeurs de la contrainte équivalente de von Mises varie de 0 MPa à 0,975 MPa. La valeur maximale enregistrée lors de cette simulation est donc très légèrement plus faible que celle obtenue à l'aide du schéma de Newmark dans les mêmes conditions. Cependant, le comportement global de la plaque est très proche dans les deux cas.

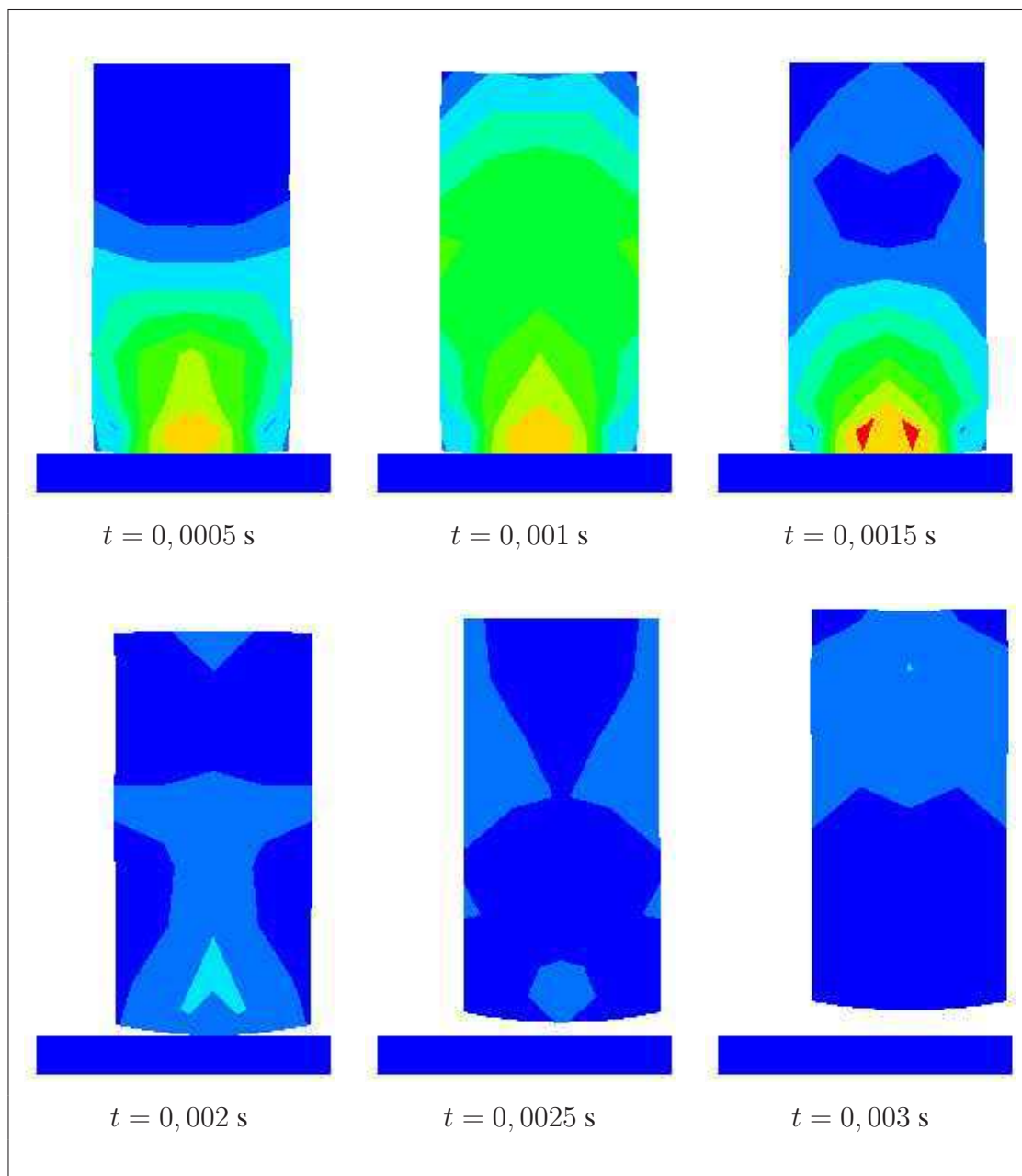


FIG. 3.19 – Contrainte de von Mises ( $\mu = 0,0$ )

La figure 3.20 représente l'évolution de l'énergie de la plaque au cours de la simulation. Une nouvelle fois, le schéma d'intégration adopté produit un résultat remarquable en ce qui concerne la capacité à maîtriser l'énergie du système durant le contact. Il n'y a ni augmentation ni dissipation (ou alors très faible) de l'énergie totale. Ce résultat est encore plus satisfaisant lorsque nous le comparons à ceux obtenus avec le schéma de Newmark (figures 3.8 et 3.11).

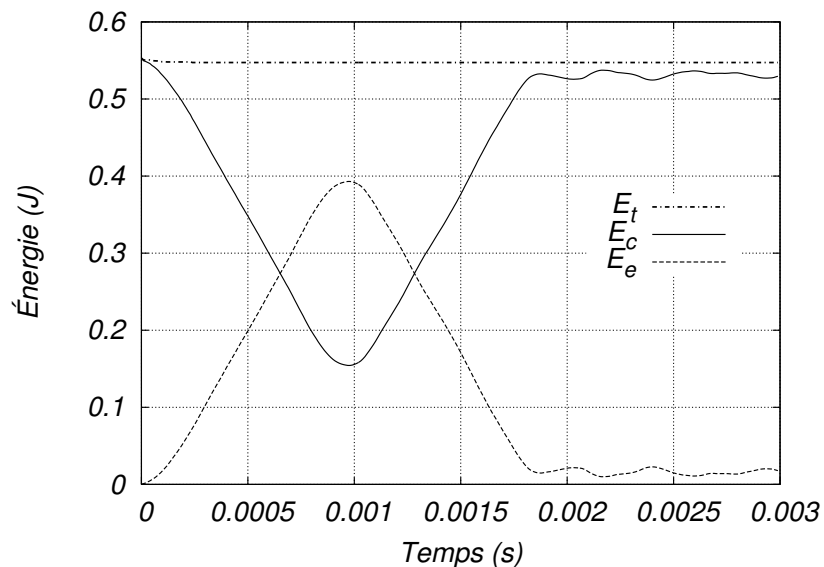


FIG. 3.20 – Évolution de l'énergie au cours du temps

Pour finir avec cette étude, nous nous intéressons au comportement du point de contact  $P$ . Nous traçons donc une nouvelle fois le déplacement de ce point au cours du temps (figure 3.21). Le résultat est probant : contrairement à ce qui se produit avec le schéma de Newmark (figure 3.10) il n'y a pas de perte de contact durant le choc.

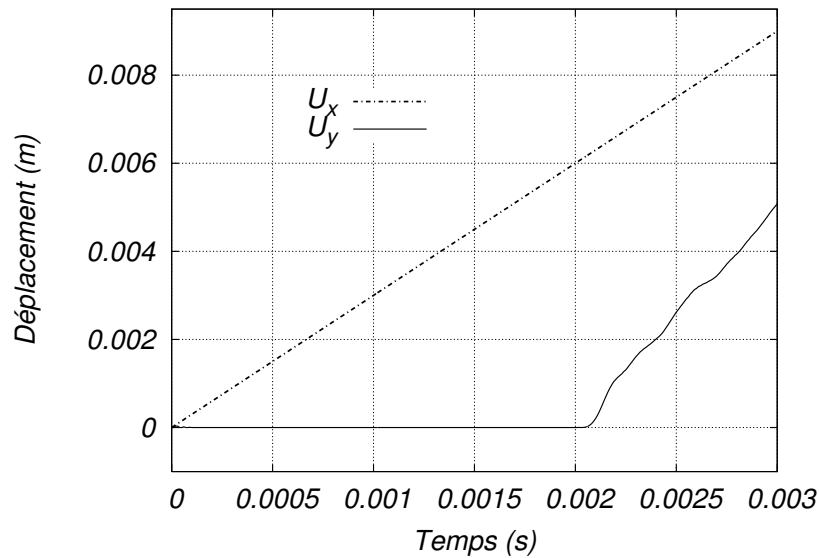


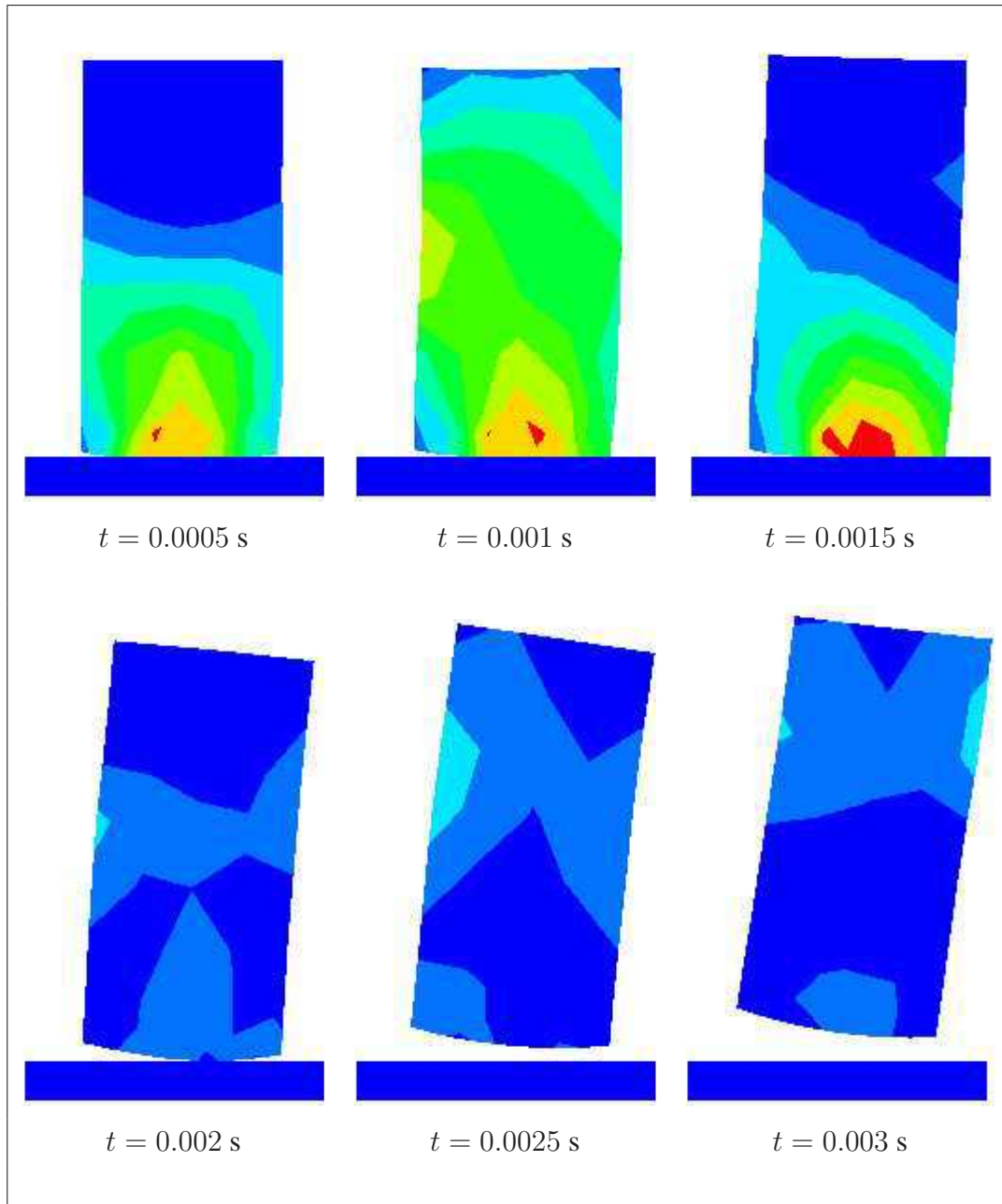
FIG. 3.21 – Déplacement du point  $P$  au cours du temps

### 3.3.3 Prise en compte du frottement

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude de problème d'impact avec frottement. En effet, les tests menés jusque là avaient pour but de valider la méthode proposée à l'aide de cas simples pour lesquels nous disposions de solutions de référence. Il est maintenant important de savoir si l'algorithme se comporte toujours aussi bien lorsqu'il y a du frottement entre les surfaces de contact.

Nous reprenons une nouvelle fois le problème de l'impact oblique étudié précédemment pour lequel nous définissons un frottement entre les deux surfaces de contact. Nous imposons donc le coefficient de frottement  $\mu = 0,2$  au niveau de la zone de contact.

La figure 3.3.3 rapporte différentes configurations de la plaque au cours du temps. Nous pouvons clairement identifier l'effet du frottement dans cette nouvelle simulation : la plaque est freinée dans son mouvement latéral et elle a un mouvement de bascule après le contact. Le champ de contrainte de von Mises est également représenté sur cette figure. Dans ce cas précis, les valeurs des contraintes varient entre 0 MPa et 0,96 MPa. Par ailleurs, nous observons une modification de la zone de contrainte maximale par rapport au cas sans frottement. Dans le cas avec frottement, cette dernière se situe au niveau de l'interface de contact. Les contraintes de cisaillement provoquées par le frottement à ce niveau là sont à l'origine de ce phénomène.

FIG. 3.22 – Contrainte de von-Mises ( $\mu = 0, 2$ )

La figure 3.23 montre clairement que l'énergie totale est dissipée par frottement. En effet, le fait que la méthode soit capable d'assurer la conservation de l'énergie mécanique pour le cas sans frottement assure que cette dissipation n'est pas numérique. Il est possible d'étudier cette dissipation d'énergie mécanique par frottement de manière quantitative.



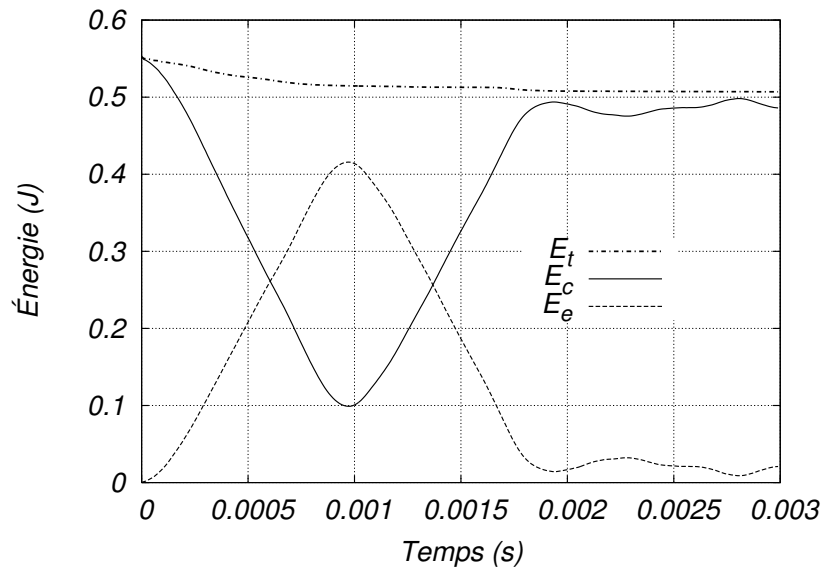


FIG. 3.23 – Évolution de l'énergie au cours du temps

Par ailleurs, il est peut-être intéressant de savoir si l'énergie dissipée est proportionnelle au coefficient de frottement. La simulation numérique montre que ce n'est pas le cas comme on peut le constater sur la figure 3.24. Ce résultat peut s'interpréter simplement. En effet, lorsque le coefficient de frottement augmente, les forces de frottement augmentent également, mais le glissement tangentiel va quant à lui diminuer. La dissipation d'énergie dépendant à la fois des forces de frottement et du glissement tangentiel au niveau des nœuds de contact traduit le comportement observé sur la figure 3.24.

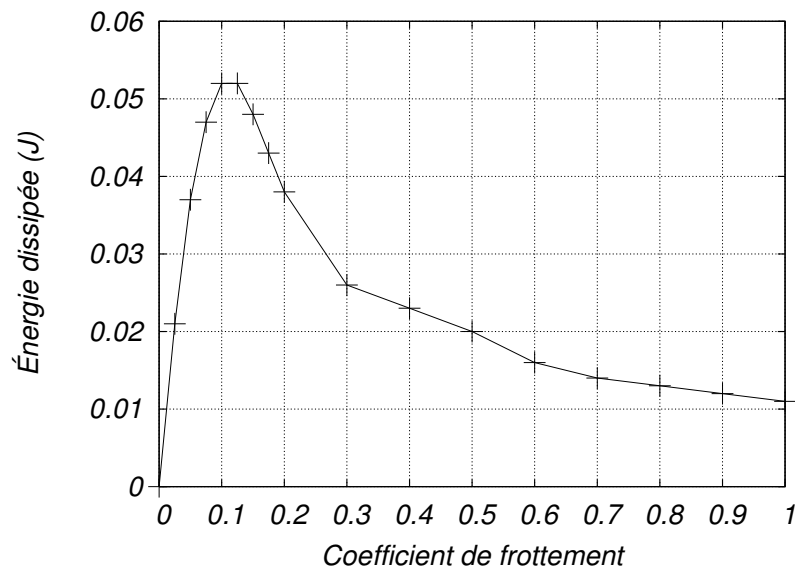


FIG. 3.24 – Variation de l'énergie dissipée en fonction du coefficient de frottement

À titre indicatif, les temps CPU de la méthode proposée et ceux obtenus par Kwak *et al.* sont reportés dans le tableau 3.2.

méthode	machine	temps CPU (s)
Ko & Kwak [KK92]	CRAY 2S/4-128	19 000
Kim & Kwak [KK96]	HP 720	430
Méthode proposée	PC Pentium 4/2.8 GHz	7

TAB. 3.2 – Comparaison des temps CPU

### 3.3.4 Influence des paramètres de l'algorithme

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence des différents paramètres du schéma et de la finesse du maillage sur les résultats fournis par la méthode. Là encore, nous utilisons le test de l'impact oblique.

#### 3.3.4.1 Influence du pas de temps $\Delta t$

Nous analysons tout d'abord l'influence du pas de temps sur les résultats. Dans un premier temps, nous analysons l'influence de la valeur du pas de temps sur le calcul du déplacement du point  $P$ . Pour cela, nous considérons les pas de temps suivants :  $\Delta t = 10^{-3}$  s (A),  $\Delta t = 10^{-4}$  s (B),  $\Delta t = 10^{-5}$  s (C) et  $\Delta t = 10^{-6}$  s (D). Les composantes ( $u_1, u_2$ ) de  $\mathbf{u}(P)$  (figure 3.6) sont tracées en fonction des différents pas de temps sur la figure 3.25. Globalement, nous ne constatons pas de différences importantes. Évidemment, lorsque le pas de temps devient grand, nous commençons à percevoir des différences sur la trajectoire.

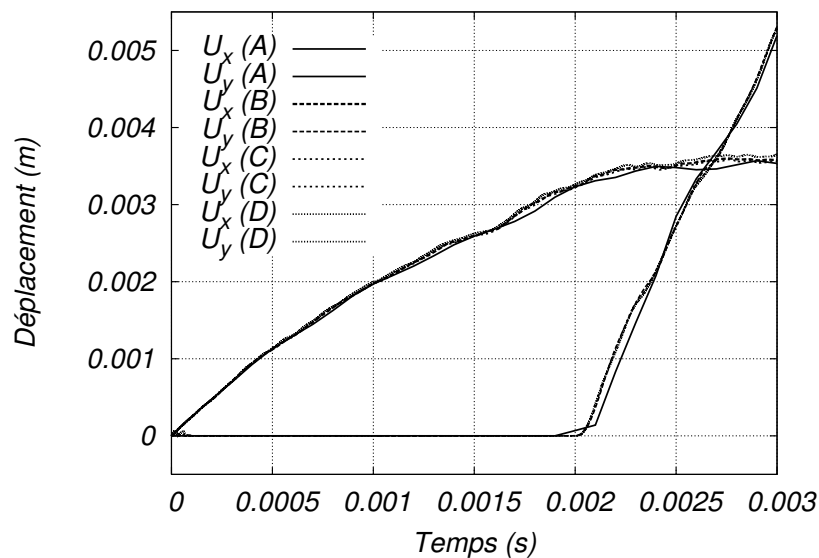


FIG. 3.25 – Influence du pas de temps sur les déplacements du point P

Dans un second temps, nous nous intéressons à l'influence de la valeur du pas de temps sur

le calcul de l'énergie totale du système. En effet, nous avons vu avec le schéma de Newmark que les problèmes de stabilité provenaient d'un accroissement non-physique de l'énergie totale au moment de l'impact. Les premiers résultats obtenus avec le schéma du premier ordre tendent à montrer que ce dernier est particulièrement adapté à ce type de problème puisque nous avons obtenu une conservation quasi parfaite de l'énergie totale pour chacun de tests effectués. La question que nous sommes en droit de nous poser : ce résultat n'est-il dû qu'au pas de temps que nous avons adopté.

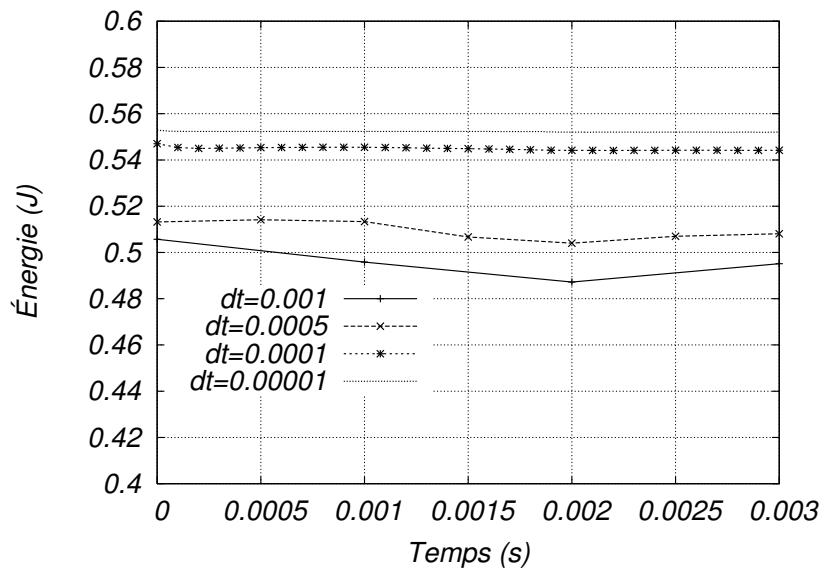


FIG. 3.26 – Influence du pas de temps sur l'énergie totale du système

La figure 3.26 montre l'évolution de l'énergie totale du système pour le problème de l'impact oblique sans frottement simulé avec différents pas de temps. Nous observons deux choses :

- la qualité du résultat concernant la conservation d'énergie est effectivement à relier avec la valeur du pas de temps. Comme nous pouvions nous y attendre, la dissipation d'énergie est négligeable si le pas de temps est suffisamment petit,
- quelque soit le pas de temps choisi, le résultat est meilleur que celui obtenu avec le schéma de Newmark. L'algorithme ne diverge pas même pour des pas de temps exagérément grands ( $\Delta t = 0,001$ ). Il n'y a pas d'accroissement dangereux de l'énergie totale.

En conclusion de cette étude, nous pouvons dire que ce schéma, même s'il n'est pas à proprement parlé conservatif, propose des propriétés très avantageuses pour l'étude des problèmes d'impact.

### 3.3.4.2 Influence du paramètre $\xi$

Pour assurer la stabilité inconditionnelle du schéma d'intégration, le paramètre  $\xi$  doit être supérieur ou égal à 0,5. Par ailleurs, les résultats précédents ont montré que pour  $\xi = \theta = 0,5$  et un pas de temps assez petit, le schéma préserve l'énergie totale du système. Nous allons maintenant étudier le comportement du schéma lorsque la valeur de  $\xi$  augmente.

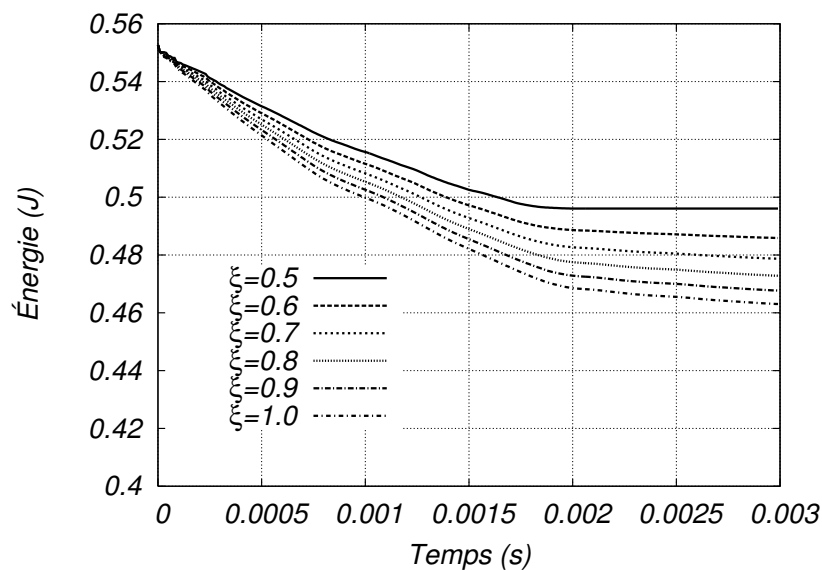


FIG. 3.27 – Influence du coefficient  $\xi$  sur l'énergie totale

Sur la figure 3.27, nous traçons l'évolution de l'énergie totale pour le problème de l'impact oblique avec  $\mu = 0,2$ . Nous observons que la dissipation d'énergie totale croît avec la valeur de  $\xi$ . Il y a donc de la dissipation numérique qui vient s'ajouter à la dissipation mécanique par frottement. Pour nos études à suivre, il sera donc souhaitable de conserver la valeur  $\xi = 0,5$  qui nous permet d'accéder à l'énergie dissipée par frottement de manière quantitative.

### 3.3.4.3 Influence du maillage

Enfin, nous nous intéressons à l'influence de la finesse du maillage. Pour cela, nous considérons un second maillage de la plaque, plus fin, que nous présentons sur la figure 3.28.

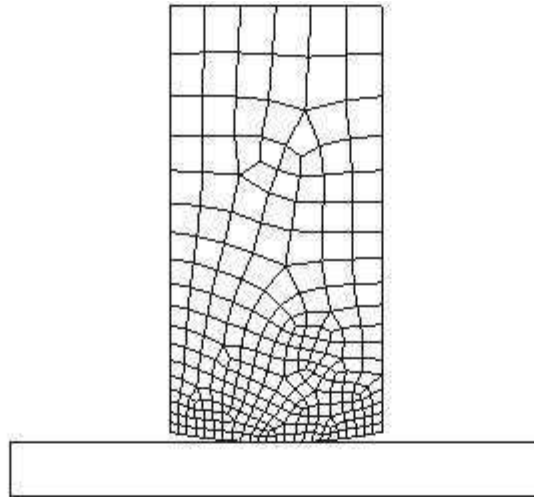
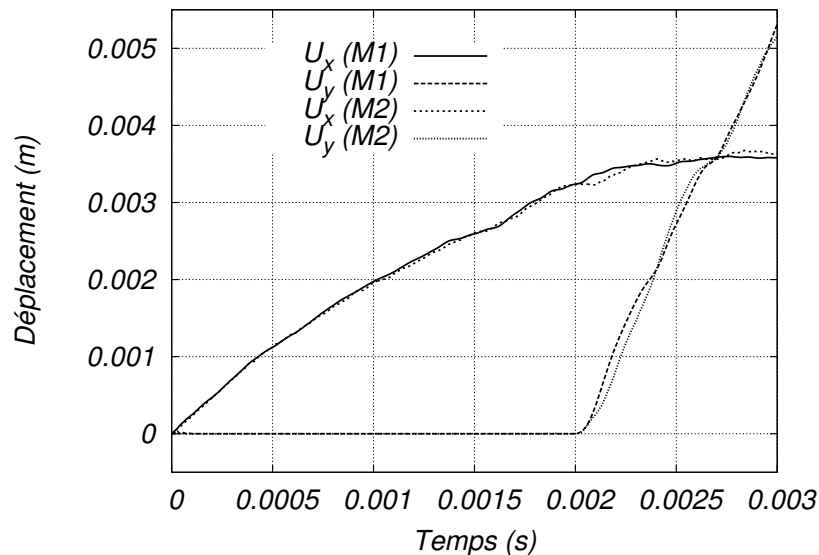


FIG. 3.28 – Maillage raffiné M2

Ce nouveau maillage (maillage M2) est constitué de 259 éléments 2D à 4 nœuds, soit un ensemble de 296 nœuds. Il est donc bien plus fin que le maillage M1 (figure 3.6) utilisé jusque là.

Les figures 3.29 et 3.30 représentent, pour le point  $P$ , respectivement les déplacements et les contraintes en fonction du maillage (M1 et M2).

FIG. 3.29 – Influence du maillage sur les déplacements du point  $P$ 

D'une manière générale, le comportement de l'algorithme fournit des résultats similaires pour les deux maillages. Nous observons toutefois quelques différences minimales au niveau du déplacement du point  $P$ . Cela peut être dû à la gestion du contact qui diffère légèrement comme le montre la figure 3.30. Le nombre de nœuds de contact étant supérieur pour le

maillage M2, la répartition des efforts de réaction est très légèrement différente. C'est ce que nous observons au niveau du point  $P$ .

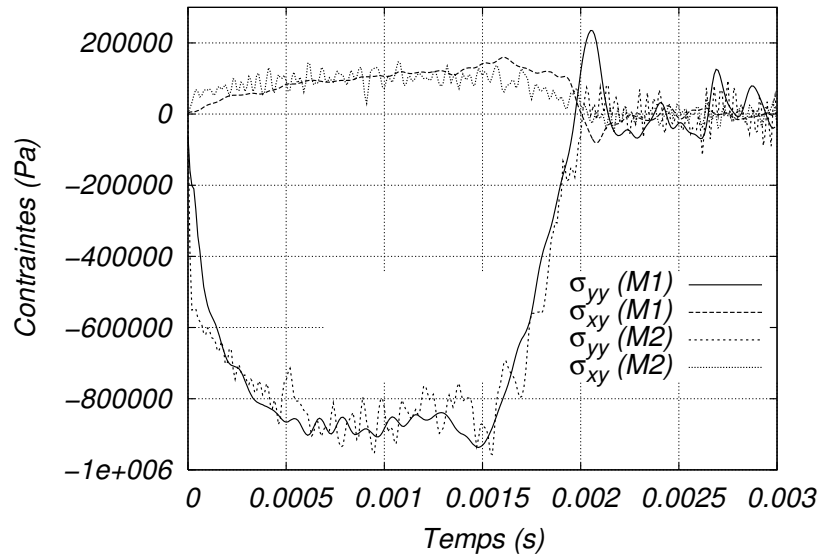


FIG. 3.30 – Influence du maillage sur les contraintes au point  $P$

Toutefois, les résultats sont très proches dans les deux cas et il ne semble pas que l'algorithme soit sensible à la finesse du maillage au delà de ce qui est accepté pour toute résolution utilisant la méthode des éléments finis.

### 3.3.5 Conclusions

Après avoir présenté le schéma d'intégration utilisé et son intégration dans la méthode du bi-potentiel, nous avons testé ses capacités à traiter les problèmes simples d'impact. Les résultats présentés montrent une nette amélioration du comportement global du code par rapport ce qui était observé avec l'utilisation du schéma de Newmark. Sans apporter aucune modification au schéma ni jouer sur les valeurs des paramètres, nous obtenons dans tous les cas de figures envisagés une excellente corrélation avec les résultats de référence trouvés dans la littérature. Nous avons également pu observer qu'en utilisant un pas de temps raisonnable, il est possible d'obtenir une conservation quasi parfaite de l'énergie totale du système étudié pour les problèmes sans frottement. C'est cette particularité de la méthode qui sera mise en avant dans les applications numériques proposées dans le chapitre suivant.

## 3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons abordé la question de l'intégration des équations du mouvement pour un problème d'impact. Le choix de la méthode de discrétisation temporelle est

en effet une question centrale pour ce type de problème. Une solution explorée avec succès par différents auteurs consiste à modifier les schémas existants afin d'obtenir un algorithme conservatif pour les problèmes d'impact. Dans notre travail, nous avons préféré utiliser un schéma d'intégration du premier ordre qui nous semblait plus adapté à ce type de situation. L'ensemble des résultats présentés dans la seconde partie de ce chapitre montrent que ce choix est pertinent.

Nous soulignons ici que les méthodes citées dans ce chapitre (modification du schéma de Newmark et schéma d'ordre inférieur) ne sont pas les seules proposées par la communauté scientifique. En particulier, les travaux de Le Tallec et Hauret [THR02, HT02, Hau04] ont basé leurs travaux sur le schéma d'intégration proposé par Gonzalez [Gon00].

# Chapitre 4

## Applications numériques

### 4.1 Introduction

Ce dernier chapitre est consacré à la présentation de plusieurs applications numériques permettant de mettre en évidence la robustesse et la précision du code de calcul FER/Impact. Pour cela, nous proposons de balayer un large éventail de scénarios d'impact au travers duquel les différentes composantes du travail effectué (résolution du problème du contact et intégration des équations du mouvement) seront sollicitées. Plusieurs configurations sont envisagées en fonction de la dimension du problème (2D ou 3D) et du type d'obstacle considéré (contact « déformable-rigide » ou « déformable-déformable »). Le dernier exemple diffère légèrement des précédents dans le sens où ce n'est pas un problème de dynamique. Il trouve cependant tout à fait sa place dans notre travail puisqu'il permet de montrer comment l'utilisation d'un code de calcul pour la dynamique règle le problème des modes rigides qui pose problème avec la méthode mixte en statique. Par ailleurs, nous y rencontrerons la situation assez particulière de l'auto-contact.

### 4.2 Jeu de billard

Ce premier exemple consiste à simuler l'impact de deux cylindres enfermés entre quatre murs rigides (exemple initialement étudié par Armero et Petocz [AP98]). Nous souhaitons ainsi tester les performances de notre méthode sur un problème présentant un enchaînement complexe de séquences de contact. La figure 4.1 présente les caractéristiques géométriques du problème étudié.



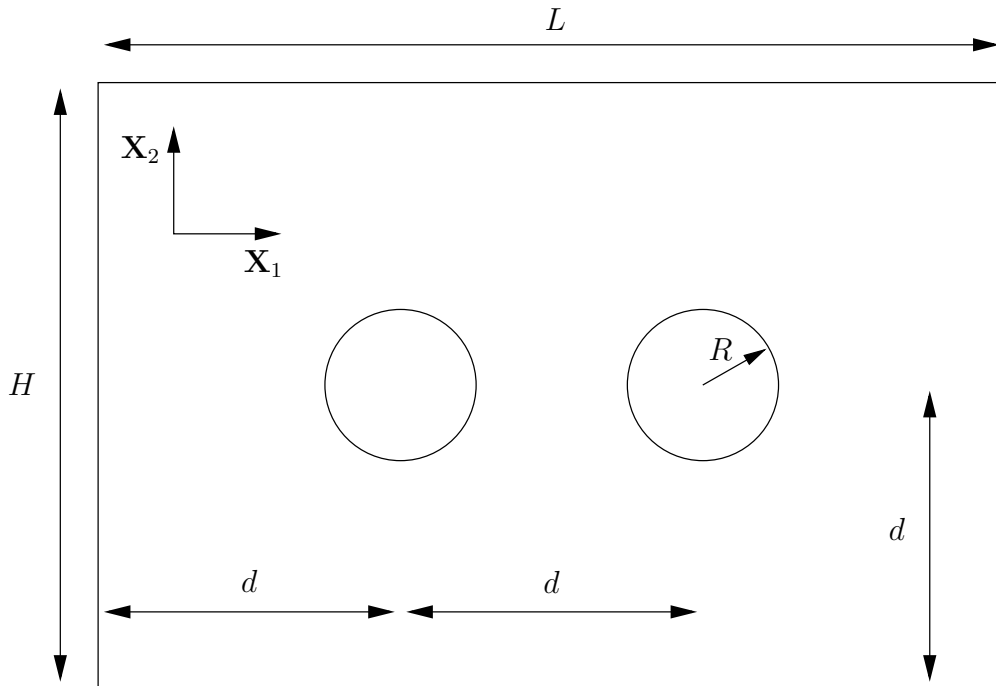


FIG. 4.1 – Impact entre deux cylindres

Initialement, le diamètre des deux cylindres est égal à  $R = 2$  m et leur positionnement à l'intérieur des obstacles rigides est défini par la distance  $d = 4$  m. Les « murs » sont définis par les dimensions  $L \times H = 12$  m  $\times$  8 m.

Nous considérons que le matériau constituant les deux cylindres vérifie le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (loi de Hooke étendue au domaine des grandes déformations) avec l'hypothèse des déformations planes. Les paramètres suivants sont appliqués :

- module de Young :  $E = 2700$  Pa,
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0,33$ ,
- masse volumique :  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup>.

Le cylindre de gauche se voit imposer une vitesse initiale  $\dot{\mathbf{u}}_0 = (1, 0; -1, 0)$  en m/s, de telle sorte qu'il vienne impacter le mur du bas puis, après un rebond, le cylindre de droite. La simulation s'étend sur une durée totale de 15 s avec un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$  s. Nous adoptons le couple de paramètres  $\xi = \theta = 0,5$  en ce qui concerne le schéma d'intégration.

Pour cette étude, nous utilisons les éléments 2D à 4 nœuds pour réaliser les maillages des cylindres. Nous obtenons ainsi, pour chacun des deux cylindres, un ensemble de 209 nœuds définissant 192 éléments.

Par la suite, nous proposons de mettre en parallèle les résultats obtenus pour deux cas

de figure. Dans le premier, il n'y a pas de frottement entre les différentes zones de contact tandis que l'on définit  $\mu = 0,2$  dans le second cas. Les figures 4.2 et 4.3 montrent les trajectoires définies par les deux cylindres pour ces deux cas de figure. Nous observons que le frottement joue un rôle considérable dans l'enchaînement de chocs qui se produit. Ainsi, les deux séquences sont fondamentalement différentes et cela est en partie dû à ce qui se passe durant le premier choc entre le cylindre 1 et l'obstacle du bas. En effet, le cylindre 1 rebondit de manière plus vertical dans le cas avec frottement et le choc qui suit avec le second cylindre est alors moins frontal. Le reste de la simulation est alors fortement modifié.

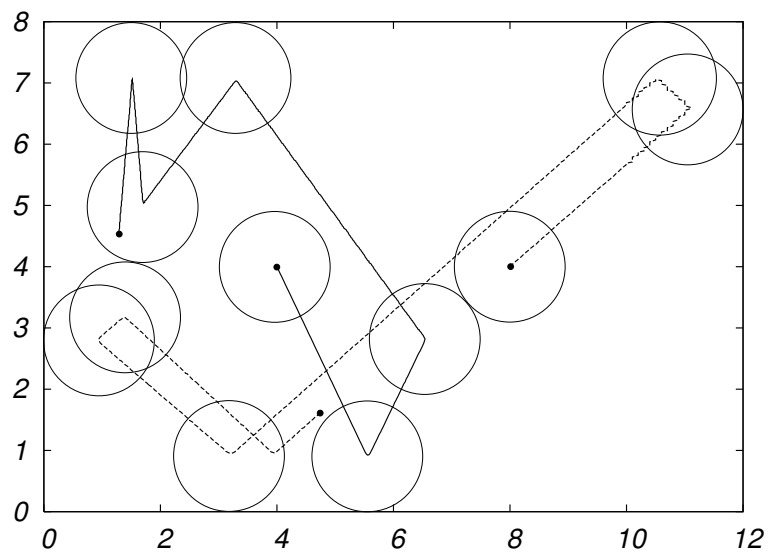


FIG. 4.2 – Déplacement des deux cylindres ( $\mu = 0, 0$ )

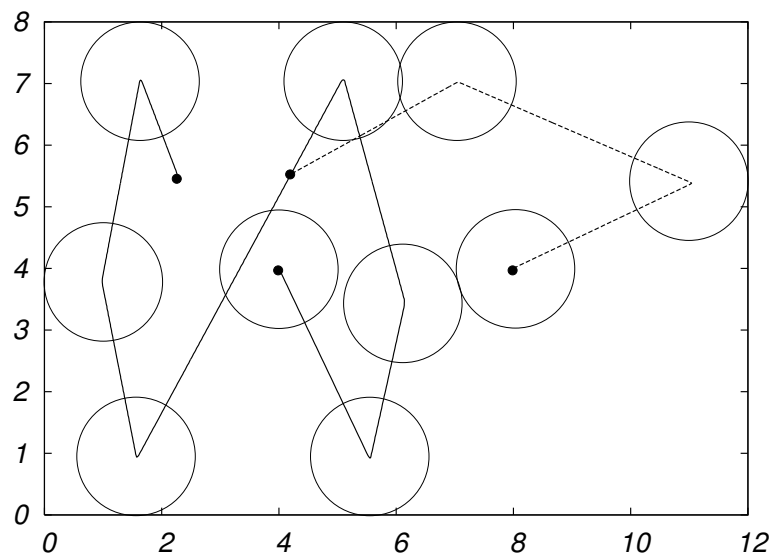


FIG. 4.3 – Déplacement des deux cylindres ( $\mu = 0, 2$ )

Nous proposons maintenant un ensemble de quatre figures qui permettent d'analyser ce

qui se passe lors du premier rebond pour les deux cas. Celui-ci se produit à  $t = 1,558$  s entre le cylindre 1 et l'obstacle du bas. Nous récapitulons dans le tableau 4.1 les différentes valeurs extrêmes atteintes pour chacun des deux cas.

TAB. 4.1 – Valeurs extrêmes des contraintes

	$\mu = 0,0$		$\mu = 0,2$	
	min	max	min	max
$\sigma_{11}$	-384 Pa	62 Pa	-375 Pa	87 Pa
$\sigma_{22}$	-440 Pa	54,5 Pa	-456 Pa	78,3 Pa
$\sigma_{12}$	-94 Pa	107,2 Pa	-81 Pa	105 Pa
von-Mises	0 Pa	313 Pa	0 Pa	277 Pa

La figure 4.4 est un comparatif de la répartition de la contrainte  $\sigma_{11}$  à l'intérieur du cylindre au moment du choc. Nous remarquons immédiatement que le champ de contrainte est parfaitement symétrique dans le cas sans frottement alors que ce n'est bien évidemment plus le cas avec frottement.

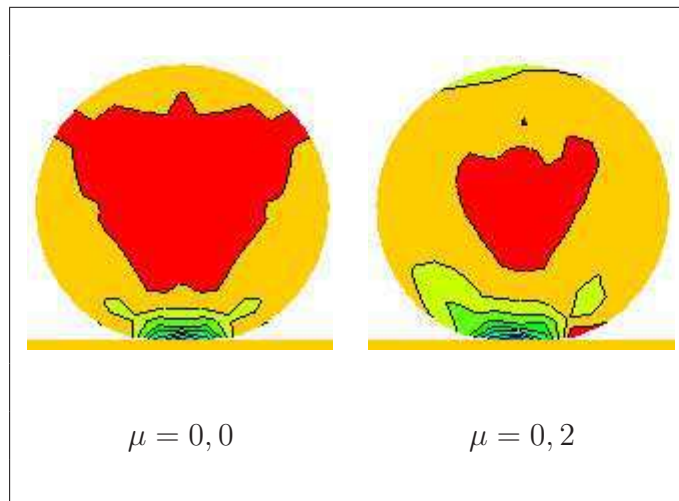
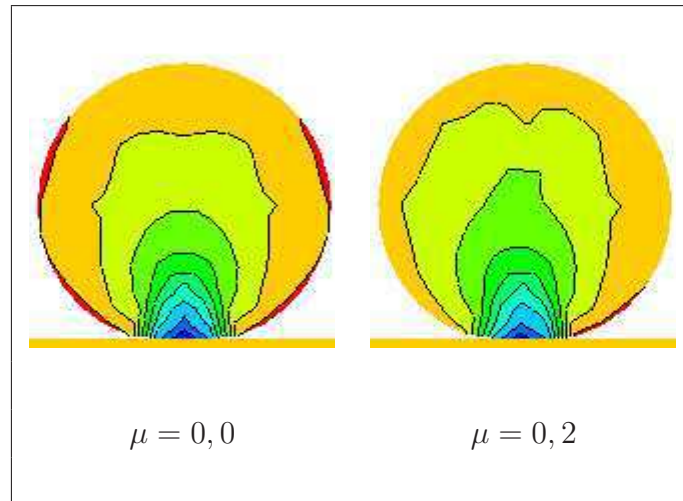
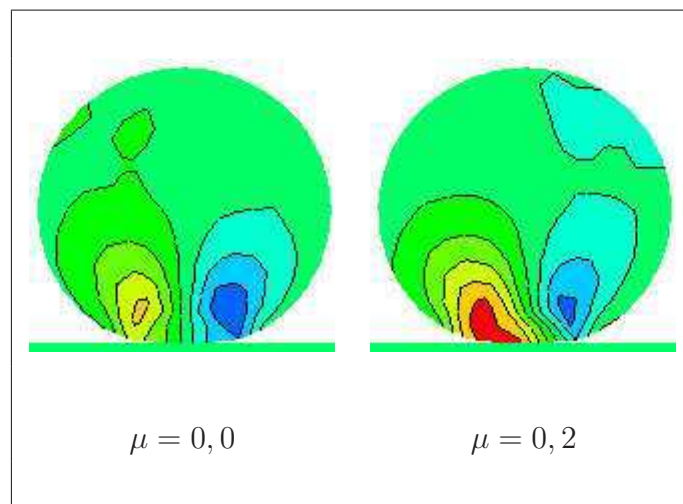


FIG. 4.4 – Contrainte  $\sigma_{11}$

Nous avons le même phénomène lorsque nous observons le champ de contraintes  $\sigma_{22}$  (figure 4.5) et le champ de contraintes  $\sigma_{12}$  (figure 4.6) pour les deux cas.

FIG. 4.5 – Contrainte  $\sigma_{22}$ FIG. 4.6 – Contrainte  $\sigma_{12}$ 

Sur la figure 4.7, la dernière comparaison propose d'étudier la répartition de la contrainte équivalente de von-Mises. Nous observons deux différences majeures :

- la valeur maximale atteinte dans le cas avec frottement est plus faible que celle obtenue dans le cas sans frottement (tableau 4.1),
- la localisation de cette valeur maximum est différente.

En effet, alors que la contrainte maximale est légèrement à l'intérieur du cylindre dans le cas sans frottement, elle est plus proche de la surface de contact lorsqu'il y a du frottement. C'est le poids que prend la contrainte de cisaillement dans le second cas qui agit en ce sens.

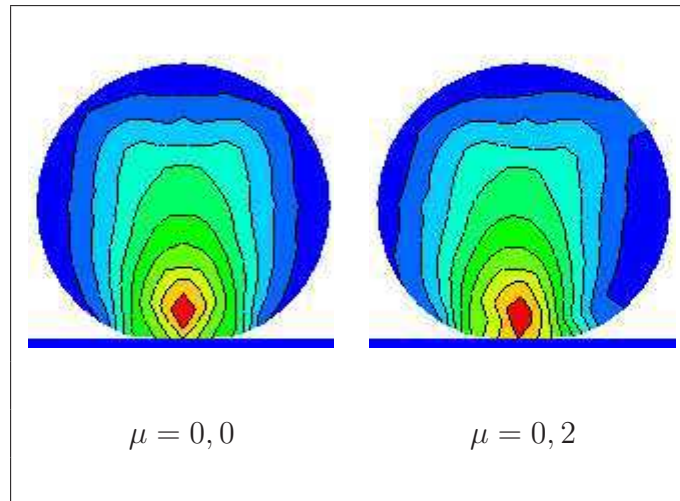


FIG. 4.7 – Contrainte de von-Mises

La figure 4.8 montre l'évolution de l'énergie cinétique  $E_c$ , de l'énergie potentielle élastique  $E_e$  et de l'énergie totale  $E_t$  pour le cas où le contact s'effectue sans frottement ( $\mu = 0$ ). Nous y observons très clairement la conservation de l'énergie totale tout au long du mouvement malgré l'évolution complexe de  $E_c$  et  $E_e$ . Au contraire (figure 4.9), dans le cas où le contact se fait avec frottement (ici  $\mu = 0,2$ ), il y a dissipation de l'énergie totale à chaque choc. Ainsi, l'énergie totale est dissipée par l'effet du frottement, comme nous pouvons l'espérer.

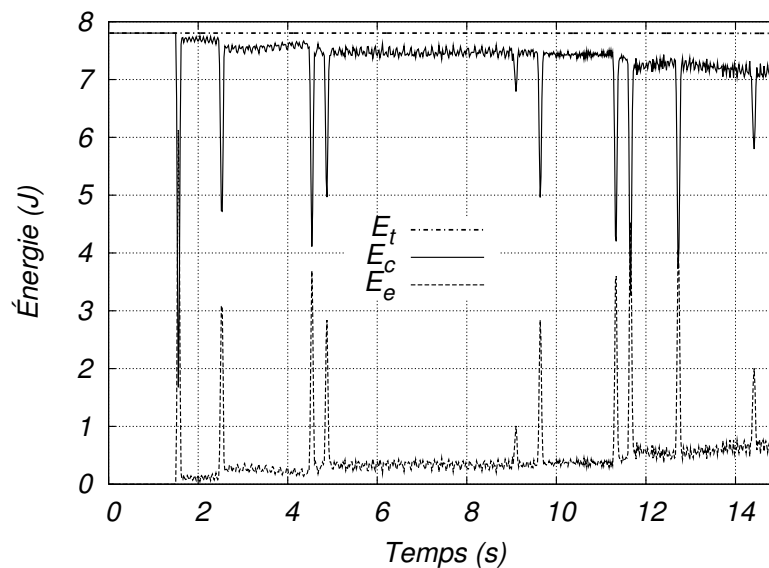


FIG. 4.8 – Évolution de l'énergie sans frottement

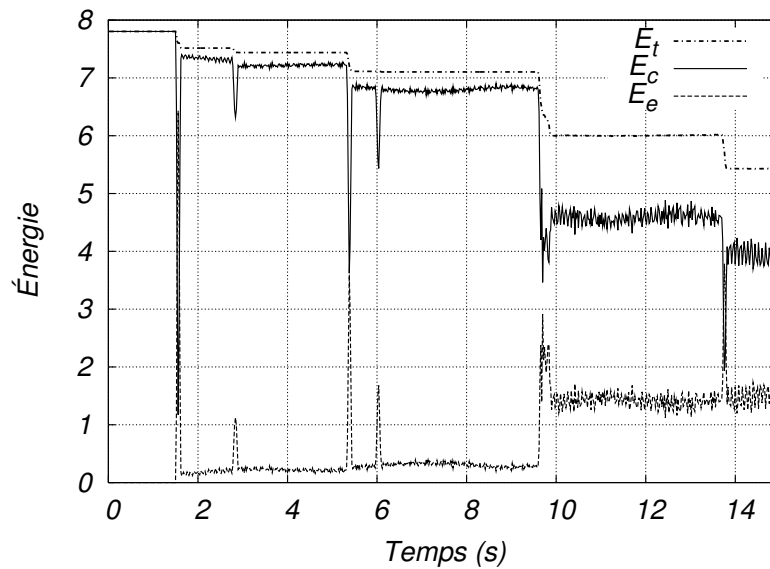


FIG. 4.9 – Évolution de l'énergie avec frottement

Il est intéressant de noter sur la figure 4.8 que le premier impact entre les deux cylindres se produit à l'instant  $t = 2,45$  s dans le cas sans frottement alors qu'il ne survient qu'à  $t = 2,8$  s (figure 4.9) s'il y a du frottement. Cela peut s'expliquer par le fait que les forces de frottement changent légèrement la direction suivant laquelle le premier cylindre rebondit contre le mur ; la distance entre les futurs points de contact, qui ne sont plus les mêmes, est alors plus longue. De même, le choc est moins important puisqu'il n'est plus parfaitement frontal, ce qui se traduit par une production d'énergie de déformation élastique moins importante lors de l'impact entre les deux cylindres (figures 4.8 et 4.9).

### 4.3 Impact « déformable-rigide » en 2D

Dans ce nouveau problème, inspiré de celui proposé par Wriggers dans [WVVS90], nous traitons le cas d'un cylindre entrant en contact avec deux parois obliques indéformables. La réunion de ces deux obstacles forme un « vé » dans lequel peut venir se bloquer le cylindre déformable (figure 4.10). Pour ce dernier, nous choisissons d'utiliser la loi matériau hyperélastique de Blatz-Ko présentée dans le paragraphe 1.3.3.3. Les constantes utilisées pour définir le comportement du matériau sont les suivantes :

- module de cisaillement :  $G = 3$  MPa,
- masse volumique :  $\rho = 700$  kg/m<sup>3</sup>.

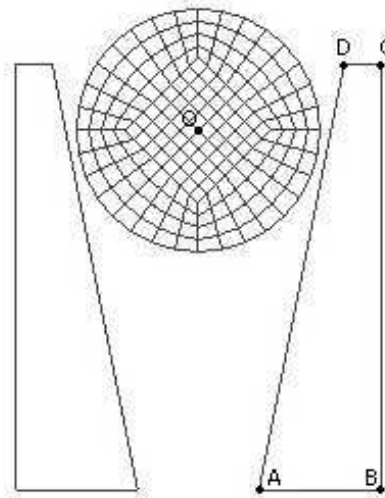


FIG. 4.10 – Impact « déformable-rigide » en 2D

En ce qui concerne les deux obstacles, nous nous assurons qu'ils ne se déforment pas en encastrant l'ensemble des nœuds qui les définissent. Ainsi, il n'est pas nécessaire de définir un second type de matériau pour les obstacles.

Les coordonnées des différents points définissant la partie droite de l'obstacle (figure 4.10) sont :  $A(0,005; 0,0)$ ,  $B(0,015; 0,0)$ ,  $C(0,015; 0,035)$  et  $D(0,012; 0,035)$ . La partie gauche de l'obstacle peut aisément être obtenue par symétrie de la partie droite par rapport à l'axe vertical passant par le point  $O$ . Par ailleurs, la géométrie du cylindre est définie par son centre et son rayon :

- centre du cercle :  $O(0,0; 0,03)$ ,
- rayon du cercle :  $R = 0,01$  m.

Pour ce problème, nous utilisons l'élément 2D à 4 nœuds (élément Q4) en prenant en compte l'hypothèse des déformations planes. Ainsi, chacune des deux parties de l'obstacle peut être maillée avec un seul élément. Pour sa part, le cylindre est modélisé par un ensemble de 192 éléments et 209 nœuds. L'opération de maillage du cylindre a été effectuée de telle sorte que la symétrie du problème soit conservée. C'est en effet une condition importante pour retrouver cette particularité dans les résultats de la simulation.

Les conditions initiales sont appliquées à l'ensemble des nœuds constituant le cylindre. Elles consistent à imposer une vitesse initiale verticale descendante au cylindre telle que :  $\dot{\mathbf{u}}_0 = (0, 0; -30, 0)$  en m/s.

En ce qui concerne les paramètres du schéma d'intégration, nous choisissons d'utiliser le couple de paramètres permettant d'avoir un schéma conservatif (paragraphe 3.3.2.2) :  $\xi = \theta = 0,5$ . De plus, nous choisissons un pas de temps égale à  $\Delta t = 10^{-5}$  s pour une durée totale de simulation de  $3 \cdot 10^{-3}$  s.

Nous considérons trois cas de figure mettant en évidence le rôle prédominant du frottement dans ce problème. Ces 3 cas sont différents l'un de l'autre uniquement par la valeur du coefficient de frottement qui est appliquée. Nous retrouvons dans le tableau 4.2 la dénomination de ces trois cas avec la valeur de  $\mu$  qui leur est associée :

TAB. 4.2 – Influence du coefficient de frottement

Cas	temps (ms)	$\sigma_{max}$ (MPa)	temps CPU (s)
A : $\mu=0,0$	0,87	8,192	62
B : $\mu=0,2$	0,70	4,523	77
C : $\mu=0,4$	0,61	4,396	83

**Remarque :** Les temps de calcul rapportés dans le tableau 4.2 sont ceux obtenus avec un PC équipé d'un processeur Intel Pentium 4/2.8 GHz. Les différences observées montre que la valeur du coefficient de frottement influe de manière sensible sur le temps de calcul. Plus précisément, nous observons que le nombre d'itérations effectuées pour la résolution du problème du contact (détermination de  $\mathbf{R}_c$ ) est plus important si le coefficient de frottement est élevé.

Ce tableau met également en évidence la différence de comportement du cylindre entre les trois cas considérés. En effet, la valeur maximale de la contrainte équivalente de von-Mises atteinte à l'intérieur du cylindre ainsi que le temps auquel cette valeur est atteinte diffèrent. Ces observations sont à mettre en relation avec la figure 4.11. Pour chacun des 3 cas, cette dernière propose la distribution du champ de contraintes de von-Mises à l'instant auquel le cylindre atteint sa position la plus basse. À ce moment précis, le cylindre a une vitesse nulle et l'énergie cinétique du système est nulle, résultat que nous pouvons retrouver sur les graphiques 4.14 à 4.16.

Nous observons de grandes différences concernant la valeur mais aussi dans la localisation de la contrainte maximale pour chacun des cas. Dans le cas où le frottement est nul (cas A), le cylindre atteint une position extrême plus basse. Du fait de l'inclinaison des deux parties de l'obstacle, c'est dans cette position que la déformation du cylindre est la plus importante. Si la valeur du coefficient de frottement est augmentée, le cylindre est freiné par les



forces de frottement qui s'opposent à son mouvement. Il atteint alors une position extrême moins basse et la déformation maximale qu'il subit est moins importante.

Par ailleurs, nous observons que le frottement influence la localisation de la contrainte maximale de von-Mises calculée. En effet, le phénomène de frottement induit l'apparition de contraintes de cisaillement au niveau de la surface de contact. Ces dernières s'ajoutant aux contraintes présentes sans frottement, la valeur maximale de la contrainte équivalente de von-Mises augmente au niveau de la surface de contact. Ainsi, la position de la contrainte maximale se déplace du centre du cylindre vers la zone de contact à mesure que  $\mu$  augmente.

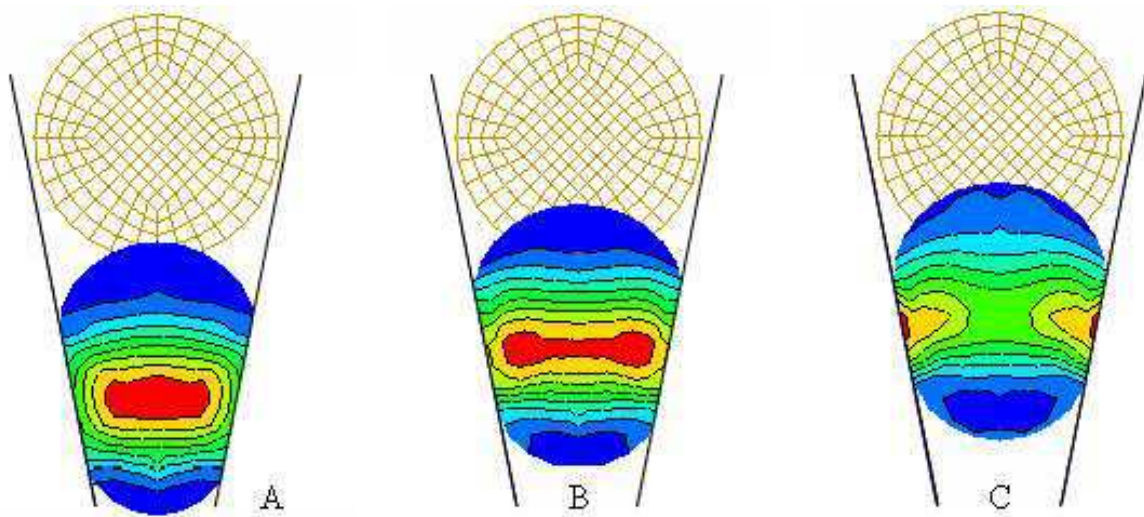
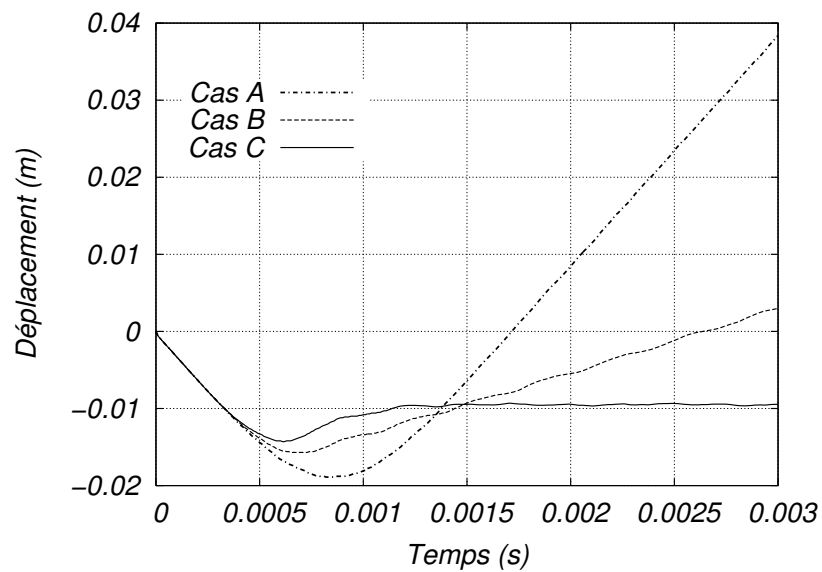
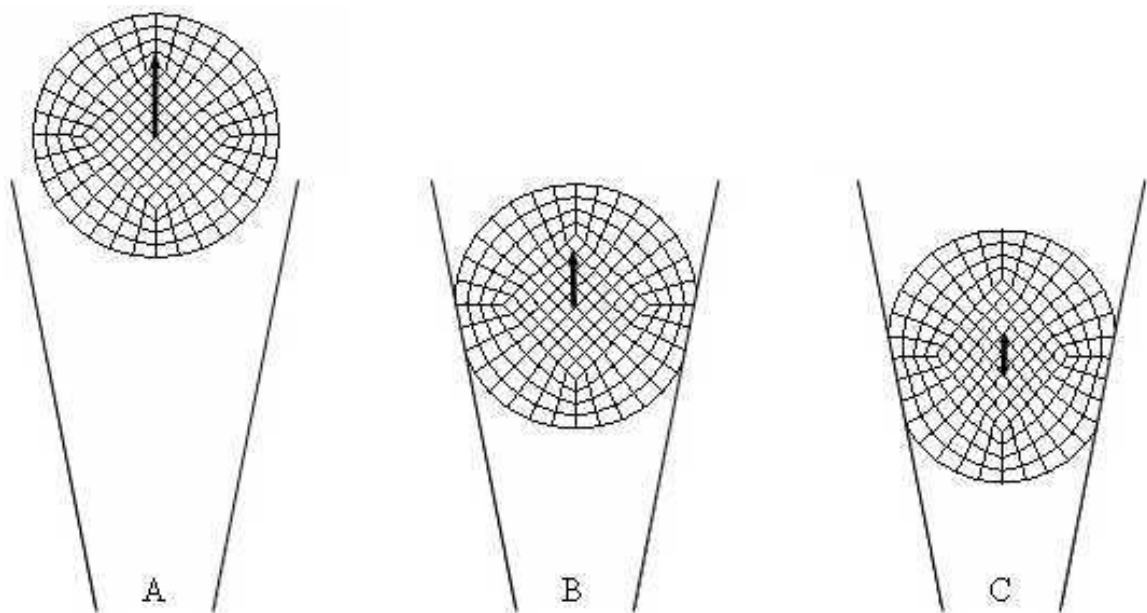


FIG. 4.11 – Contraintes équivalentes de von-Mises

La figure 4.12 propose l'évolution de la position du point  $O$  au cours du temps pour chacun des trois cas. Nous observons là encore l'effet du frottement sur le comportement du cylindre. En effet, dans le cas sans frottement, l'énergie élastique de déformation emmagasinée lors de la phase descendante est restituée sans opposition. Cela se traduit par un rebond et le cylindre repart vers le haut. Dans les deux autres cas, le mouvement est freiné par les forces de frottement qui s'exercent entre le cylindre et l'obstacle. Ce phénomène se produit à la fois lors de la phase descendante et lors du rebond. Cela a pour effet de réduire l'amplitude du mouvement observé : la position extrême est moins basse et le rebond est diminué. Le cas C montre même qu'un coefficient de frottement élevé peut supprimer la seconde phase. Le cylindre reste alors en équilibre entre les deux parties de l'obstacle.

FIG. 4.12 – Déplacement du centre  $O$ 

La figure 4.13 montre la position qu'occupe le cylindre au temps  $t = 2$  ms pour les trois cas étudiés. Cette dernière permet de mettre en images les conclusions présentées précédemment. En effet, à cet instant là de la simulation, les trois cas de figure proposent leur différence de comportement final (le sens du mouvement est indiqué par une flèche partant du point  $O$ ). Dans le premier cas, nous voyons que le cylindre n'est déjà plus en contact avec l'obstacle : il est dans sa phase ascendante de rebond. C'est également le cas pour la deuxième étude mais le frottement ayant freiné le mouvement du cylindre, ce dernier n'a pas encore quitté complètement l'obstacle. Dans le dernier cas, le cylindre est resté bloqué par les forces de frottement.

FIG. 4.13 – Configurations du cylindre pour  $t = 2$  ms

Nous nous proposons d'étudier également, à travers les figures 4.14 à 4.16, l'évolution de l'énergie au cours du temps. Pour chacun des trois cas, nous traçons donc les courbes représentatives de l'énergie cinétique  $E_c$ , de l'énergie potentielle élastique  $E_e$  et de l'énergie totale du cylindre  $E_t$  :

- dans l'étude pour laquelle le frottement est nul (cas A - figure 4.14), nous obtenons le résultat attendu. En effet, comme pour les essais effectués dans le chapitre précédent, il n'y a pas dissipation de l'énergie totale. Ce résultat montre une nouvelle fois la véracité du choix de l'algorithme d'intégration en temps. De même, nous observons que l'énergie cinétique retrouve sa valeur initiale après le rebond : cela montre que la totalité de l'énergie élastique de déformation emmagasinée lors du choc est restituée. Le cylindre repart avec la même vitesse que celle d'arrivée mais dans la direction opposée,
- dans le deuxième cas (cas B - figure 4.15), le cylindre rebondit aussi mais la vitesse finale est plus faible que la vitesse initiale. Il y a une dissipation de l'énergie totale du système sous l'effet du frottement,
- dans le dernier cas (cas C - figure 4.16), le cylindre reste bloqué entre les deux parois de l'obstacle. La vitesse de sortie (et donc l'énergie cinétique) est nulle à la fin de la simulation. Il y a une forte dissipation de l'énergie totale du système par frottement et la totalité de l'énergie restante se trouve sous la forme d'énergie élastique de déformation. Le cylindre reste en effet bloqué sous l'effet des forces internes qui exercent une pression sur les parois de l'obstacle. Nous remarquons également qu'avant de se stabiliser, le cylindre effectue un léger rebond mais que celui-ci est très vite stoppé. Ce rebond est à la fois visible sur le graphique représentant la position du point  $O$  au cours du temps (figure 4.12) mais aussi en suivant l'évolution de l'énergie cinétique sur la figure 4.16.

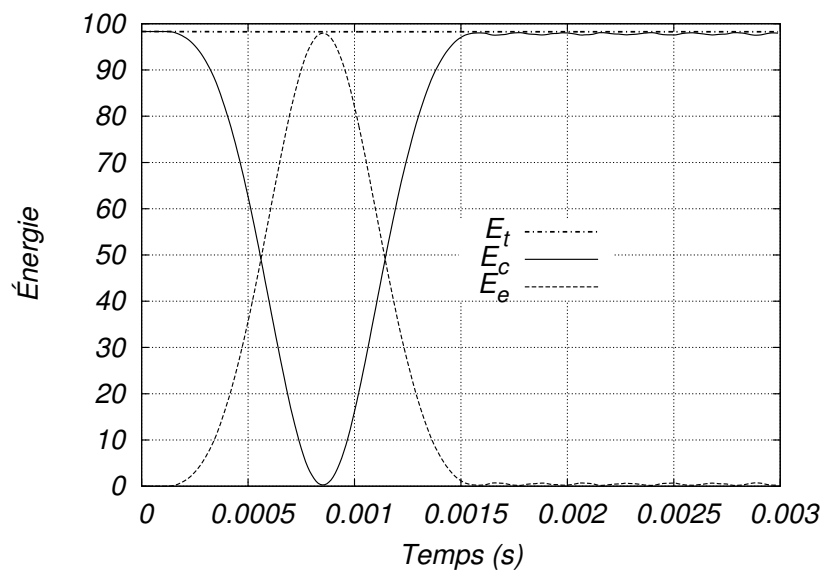
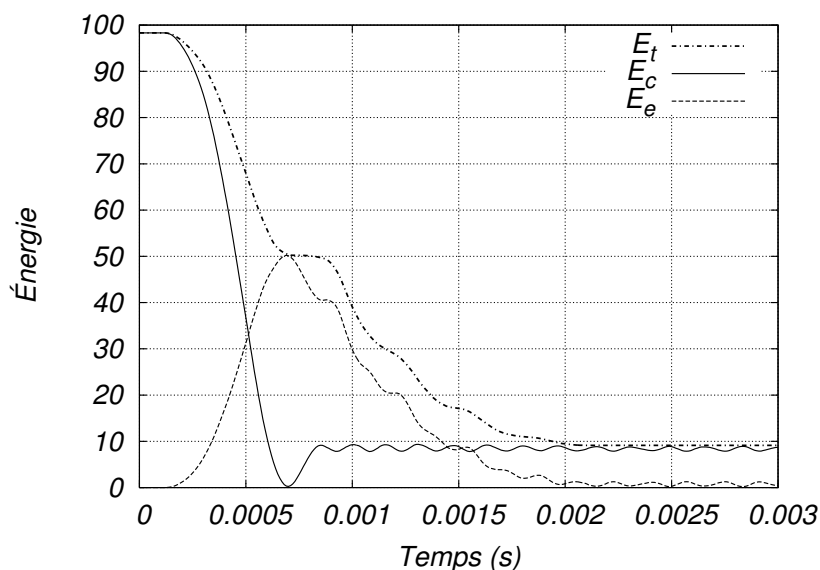
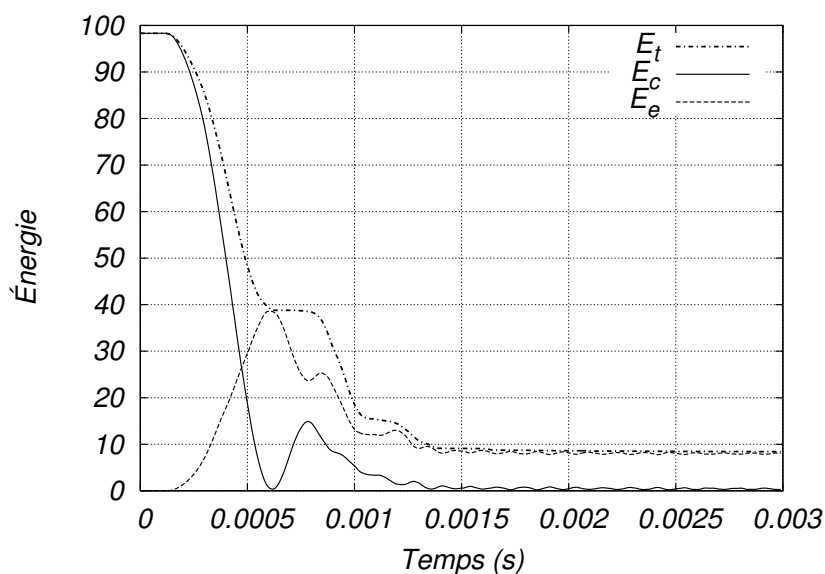


FIG. 4.14 – Évolution de l'énergie ( $\mu = 0,0$ )

FIG. 4.15 – Évolution de l'énergie ( $\mu = 0,2$ )FIG. 4.16 – Évolution de l'énergie ( $\mu = 0,4$ )

Dans cette simulation, nous voyons à nouveau l'intérêt d'un schéma conservatif pour l'analyse des problèmes d'impact. Outre le fait que cela assure un niveau confortable de stabilité, nous pouvons, dans les cas avec frottement, aborder de manière quantitative l'énergie mécanique dissipée par frottement. Et là encore, nous observons que la quantité d'énergie dissipée n'est pas proportionnelle à la valeur du coefficient de frottement appliquée. En effet, les cas B et C montrent qu'il est possible d'obtenir une même quantité d'énergie dissipée pour deux coefficients de frottement différents (figures 4.15 et 4.16). L'accroissement de la valeur du coefficient de frottement entraîne une augmentation des forces de frottement mais aussi une diminution des glissements tangentiels entre le cylindre et l'obstacle. Or, seul l'état de

contact glissant dissipe de l'énergie.

Il existe un autre résultat important à souligner. Bien que l'énergie mécanique soit dissipée en quantité comparable dans les cas B et C, les situations qui en découlent sont bien différentes. En effet, pour le cas B, la totalité de l'énergie restante l'est sous forme d'énergie cinétique : c'est le rebond du cylindre. Au contraire, pour le cas C, la totalité de l'énergie restante l'est sous forme d'énergie potentielle élastique : c'est le blocage du cylindre.

## 4.4 Impact « déformable-déformable-rigide » en 2D :

Dans cette nouvelle application, nous abordons un cas d'impact entre deux corps déformables et un corps rigide. Ce problème présente quelques similitudes avec celui étudié par Wronski dans [Wro94]. Ainsi, nous étudions le comportement d'un cylindre venant impacter un bloc reposant sur une fondation fixe. Le contact survient donc à la fois entre le cylindre et le bloc mais aussi entre le bloc et la fondation.

Tout comme dans la simulation précédente, la loi de comportement matériau utilisée est la loi de Blatz-Ko développée dans le paragraphe 1.3.3.3 page 31. Nous conservons également les mêmes caractéristiques du matériau :

- module de cisaillement :  $G = 3 \text{ MPa}$ ,
- masse volumique :  $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$ .

En ce qui concerne la fondation rigide, le traitement est le même que celui utilisé pour l'obstacle de l'exemple précédent. Les nœuds de l'élément constituant la fondation sont contraints en déplacement avec  $\mathbf{u}_0 = (0, 0; 0, 0)$  afin d'assurer la rigidité de la structure quelle que soient les propriétés matériaux utilisées. Ses dimensions n'ont pas d'influence sur le résultat de la simulation. Par ailleurs, le cylindre est centré par rapport à l'obstacle et il est initialement en contact avec celui-ci. Les dimensions du problème (figure 4.17) sont les suivantes :

- longueur du bloc :  $L = 0,16 \text{ m}$ ,
- hauteur du bloc :  $H = 0,06 \text{ m}$ ,
- rayon du cylindre :  $R = 0,025 \text{ m}$ .

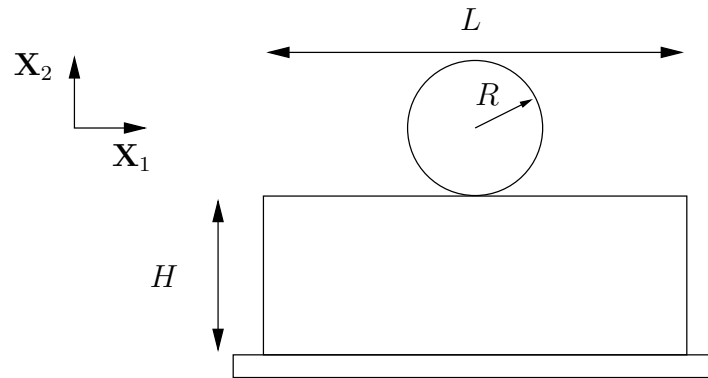


FIG. 4.17 – Géométrie du problème

Nous étudions à nouveau trois cas de figure qui diffèrent les uns des autres par la vitesse initiale appliquée au cylindre et la valeur du coefficient de frottement appliquée aux zones de contact. Le tableau 4.3 récapitule les différentes données utilisées par la suite.

TAB. 4.3 – Définition des trois cas d'étude

Cas	$\dot{u}_1$ (m/s)	$\dot{u}_2$ (m/s)	$\mu$
A	20,0	0,0	0,0
B	10,0	10,0	0,0
C	10,0	10,0	0,4

La discrétisation spatiale est effectuée à l'aide d'éléments 2D à 4 nœuds (figure 4.18) et nous adoptons l'hypothèse des déformations planes.

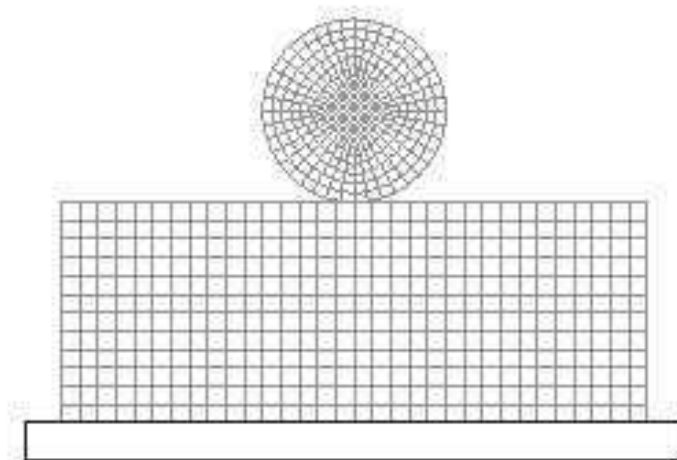


FIG. 4.18 – Maillage du problème

Notons qu'une nouvelle fois, le maillage est créé de telle sorte qu'il respecte la symétrie du problème. Il est composé d'un total de 794 nœuds constituant 725 éléments. De manière plus détaillée, nous avons :

- cylindre : 361 nœuds / 340 éléments,
- obstacle souple : 429 nœuds / 384 éléments,
- obstacle rigide : 4 nœuds / 1 élément.

Les paramètres appliqués au schéma d'intégration pour cette simulation sont similaires à ceux de l'exemple précédent. Nous avons donc toujours  $\xi = \theta = 0,5$ . La simulation porte sur une durée totale de  $5 \cdot 10^{-3}$  s et nous adoptons le pas de temps  $\Delta t = 10^{-5}$  s.

La figure 4.19 montre la distribution de la contrainte équivalente de von-Mises à différents instants de la simulation du cas A. Pour l'ensemble des figures, les valeurs des contraintes enregistrées varient entre 0 MPa et 1,63 MPa. Une nouvelle fois, la symétrie du problème (géométrie et conditions initiales) est respectée dans le sens où les résultats fournis par le code sont également symétriques. Nous observons également très clairement la propagation du front de contrainte à travers l'obstacle déformable. Celui-ci provoque un rebond vertical de l'obstacle à la fin de la simulation. Par ailleurs, nous observons toujours que la contrainte maximale se trouve bien légèrement à l'intérieur de ce dernier, au niveau de la zone de contact.

La figure 4.20 présente la distribution de la contrainte équivalente de von-Mises dans le cas B. Pour ce deuxième cas, les contraintes de von-Mises varient entre 0 MPa et 0,9 MPa.

Pour le cas C, nous présentons la distribution de la contrainte équivalente de von-Mises sur la figure 4.21. Dans ce dernier cas, les valeurs des contraintes varient entre 0 MPa et 1,276 MPa.

Cette nouvelle simulation a confirmé la capacité du code de calcul développé à simuler des problèmes complexes d'impact avec frottement en 2D. Les résultats observés sont en effet tout à fait conformes aux résultats attendus. De plus, il est bon de noter que les temps de calcul sont tout à fait raisonnables puisqu'ils sont d'environ 650 s sur un PC équipé d'un processeur AMD Athlon 2400 cadencé à 1.97 Ghz.

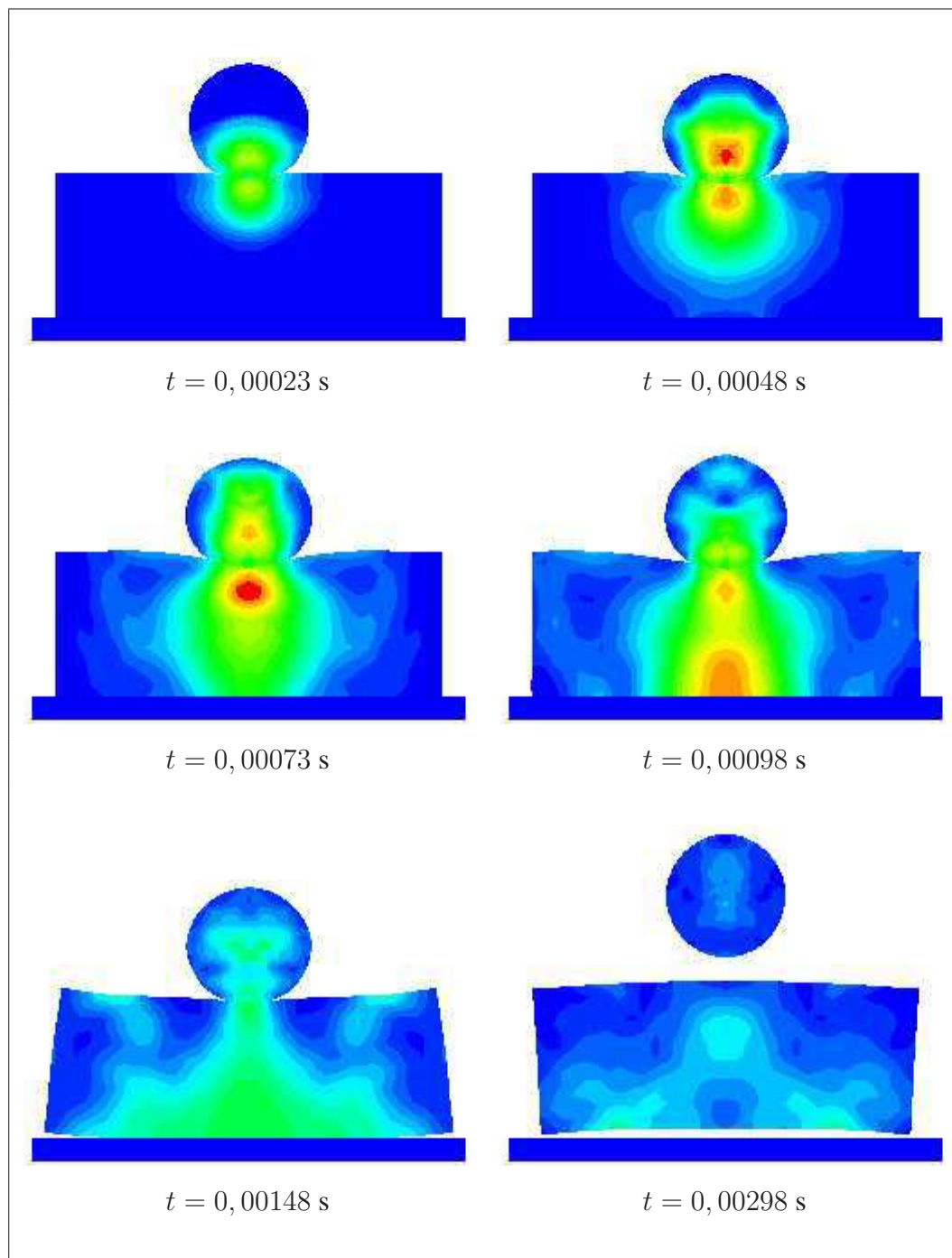


FIG. 4.19 – Contrainte de von-Mises (cas A)



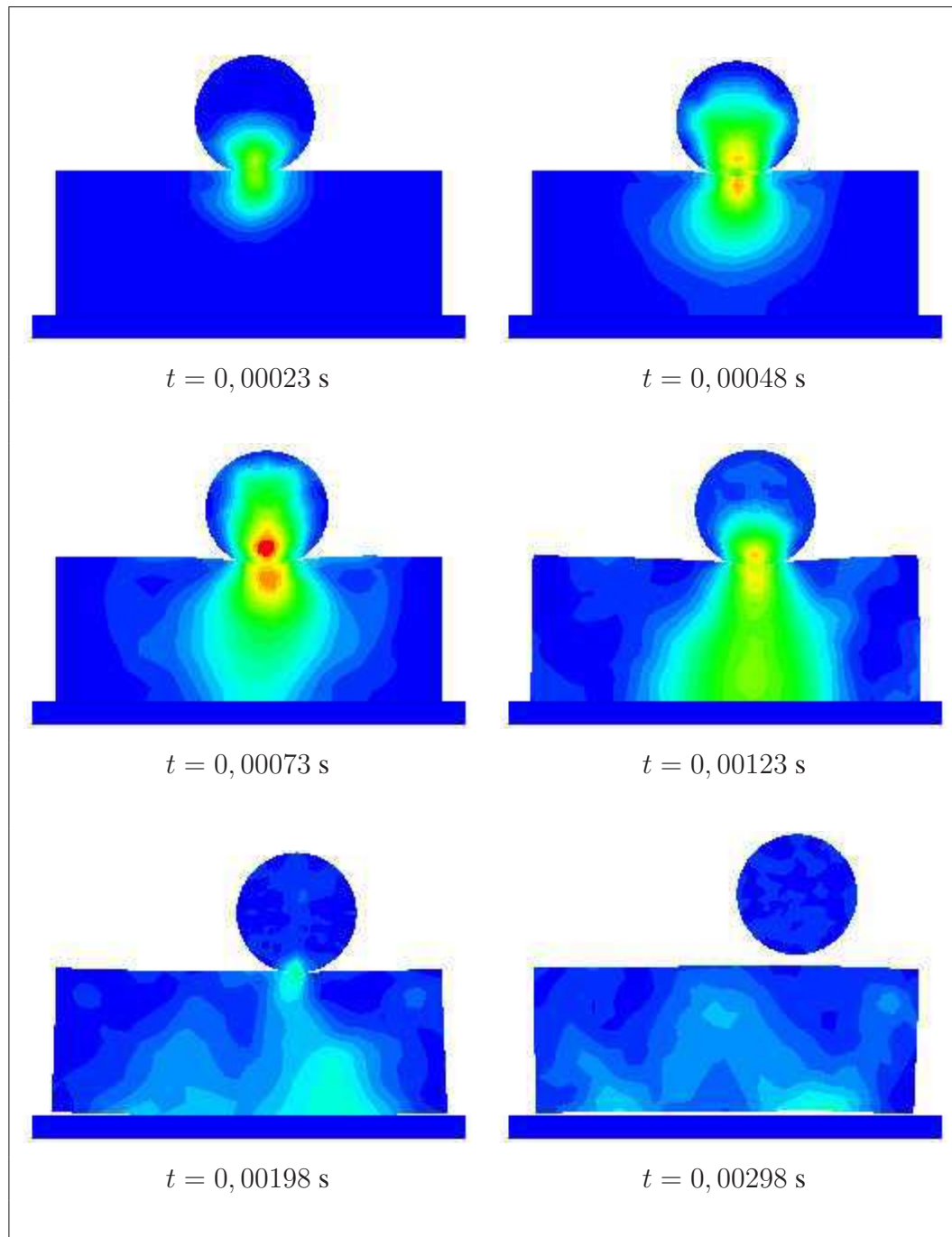


FIG. 4.20 – Contrainte de von-Mises (cas B)

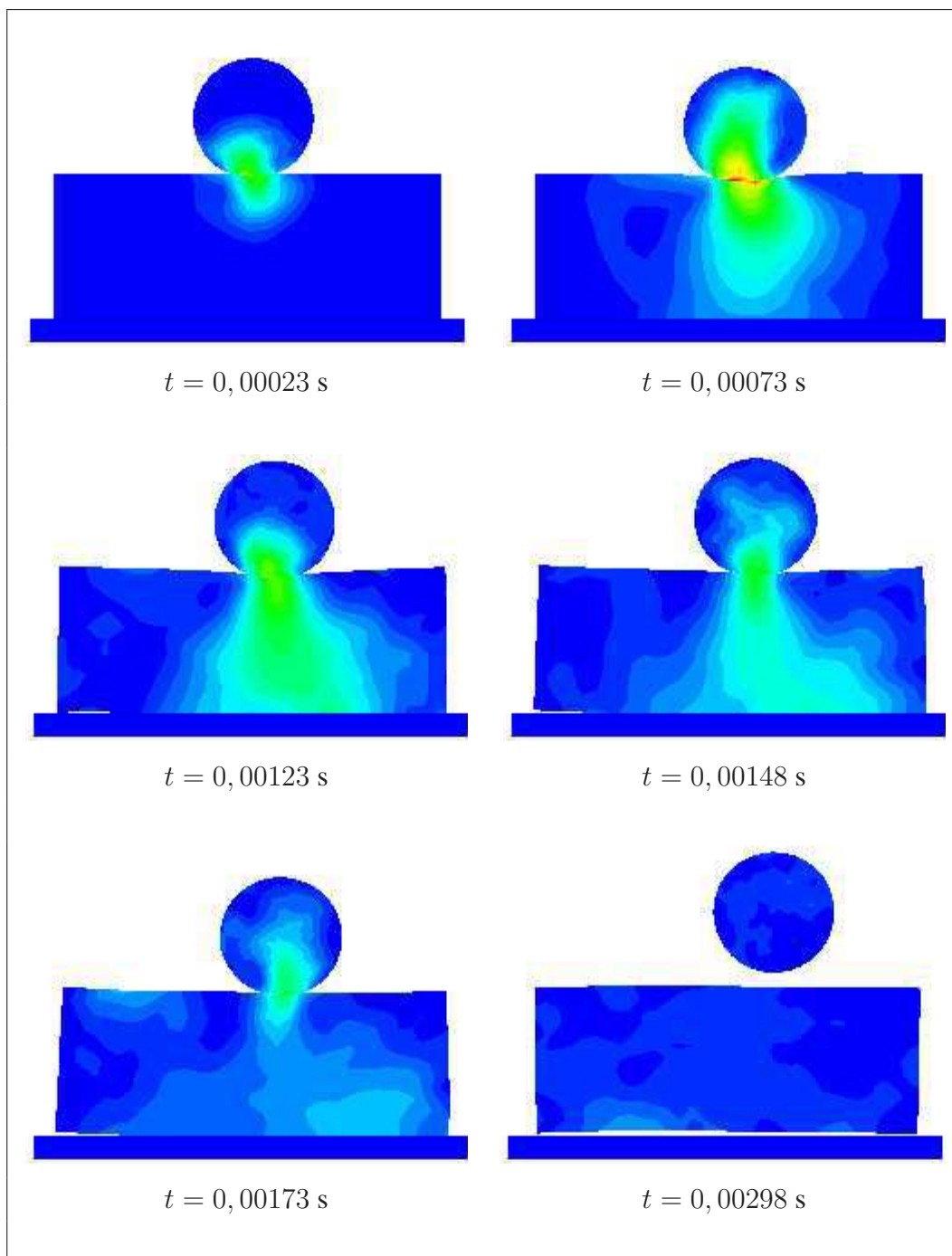


FIG. 4.21 – Contrainte de von-Mises (cas C)

## 4.5 Impact « déformable-déformable » en 3D

Dans ce nouveau cas de figure, nous allons tester le comportement du code de calcul face à un cas d'impact 3D. Pour cela, nous avons choisi de reprendre un cas d'étude initialement proposé par Love et Laursen dans [LL03]. Comme le montre la figure 4.22, il s'agit de simuler l'impact entre deux blocs hyperélastiques.

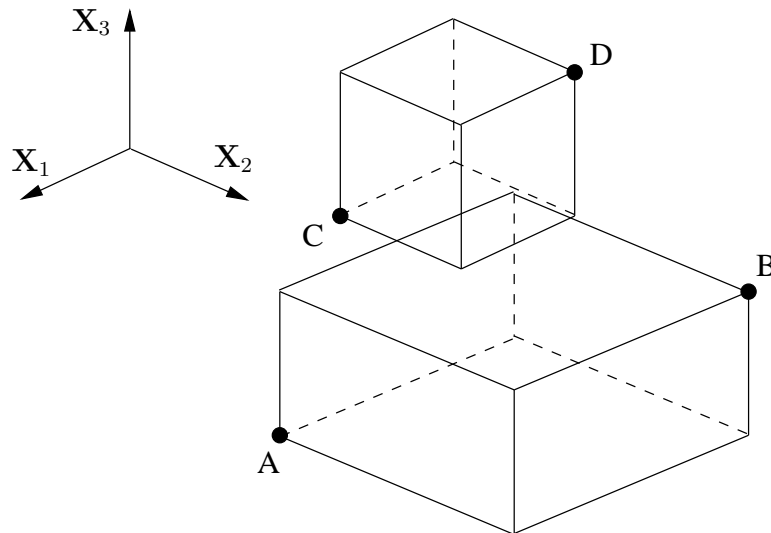


FIG. 4.22 – Géométrie du problème 3D

Les deux blocs sont définis (dimensions et positions) par les deux couples de points suivants :

- bloc inférieur :  $A(0, 0; 0, 0; 0, 0)$  et  $B(2, 0; 2, 0; 1, 0)$ ,
- bloc supérieur :  $C(0, 5; 0, 0; 1, 25)$  et  $D(1, 5; 1, 0; 2, 25)$ .

Afin de respecter au mieux les données proposées dans [LL03], nous utilisons ici le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff pour définir le comportement mécanique du matériau. Les paramètres utilisés sont :

- module de Young :  $E = 36\,000$  Pa,
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0,2$ ,
- masse volumique :  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup>.

Pour cette simulation, nous utilisons les éléments 3D à 8 nœuds (élément H8). Le maillage ainsi obtenu est présenté sur la figure 4.23.

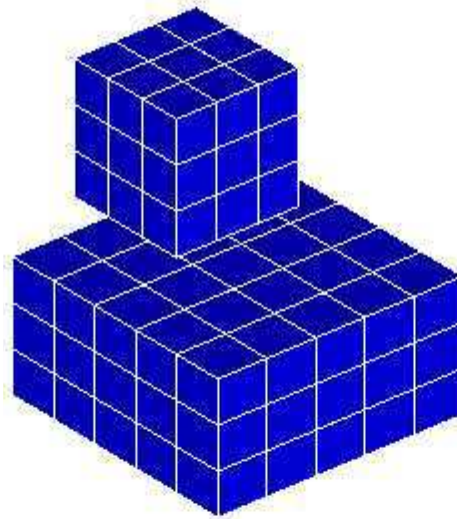


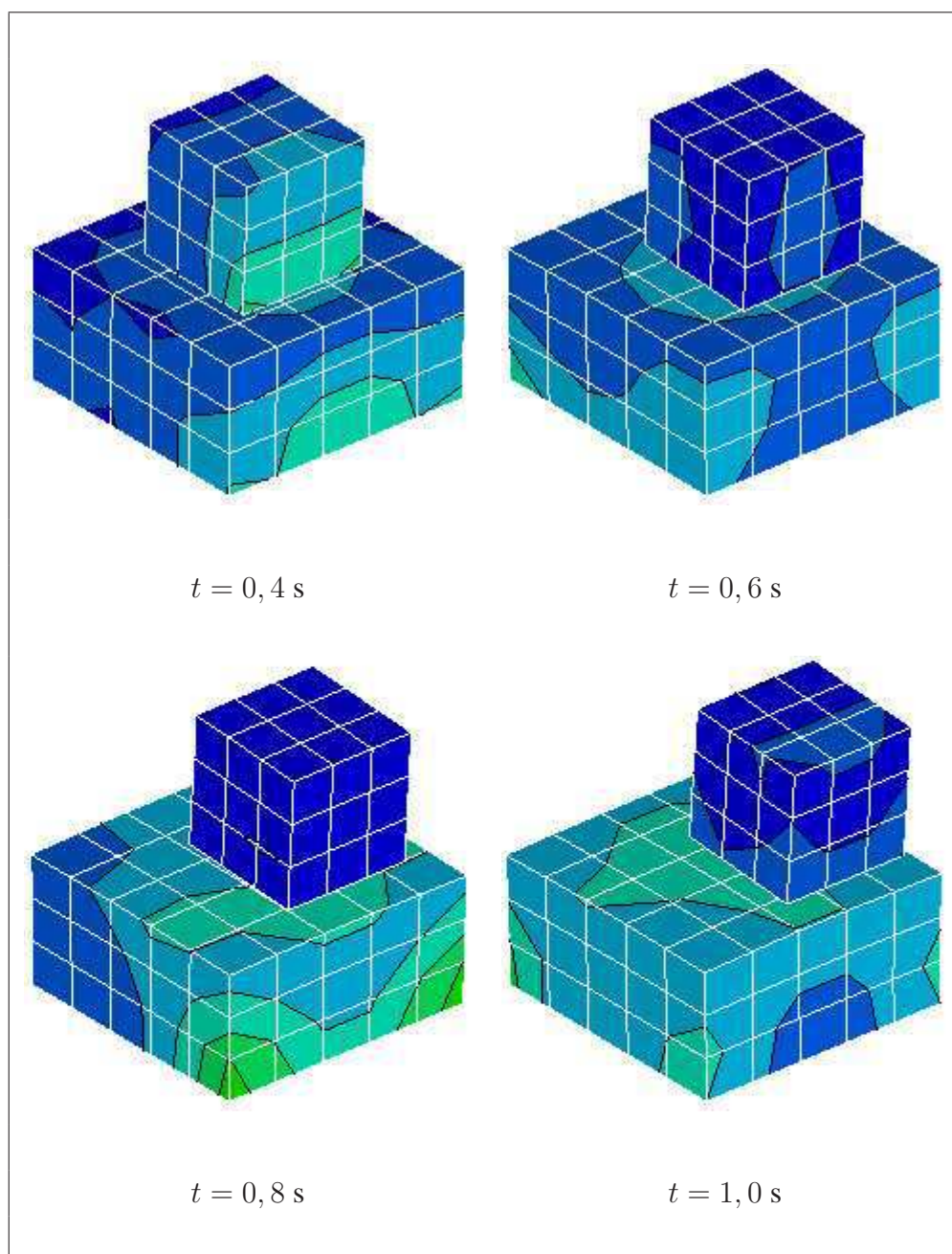
FIG. 4.23 – Maillage du problème 3D

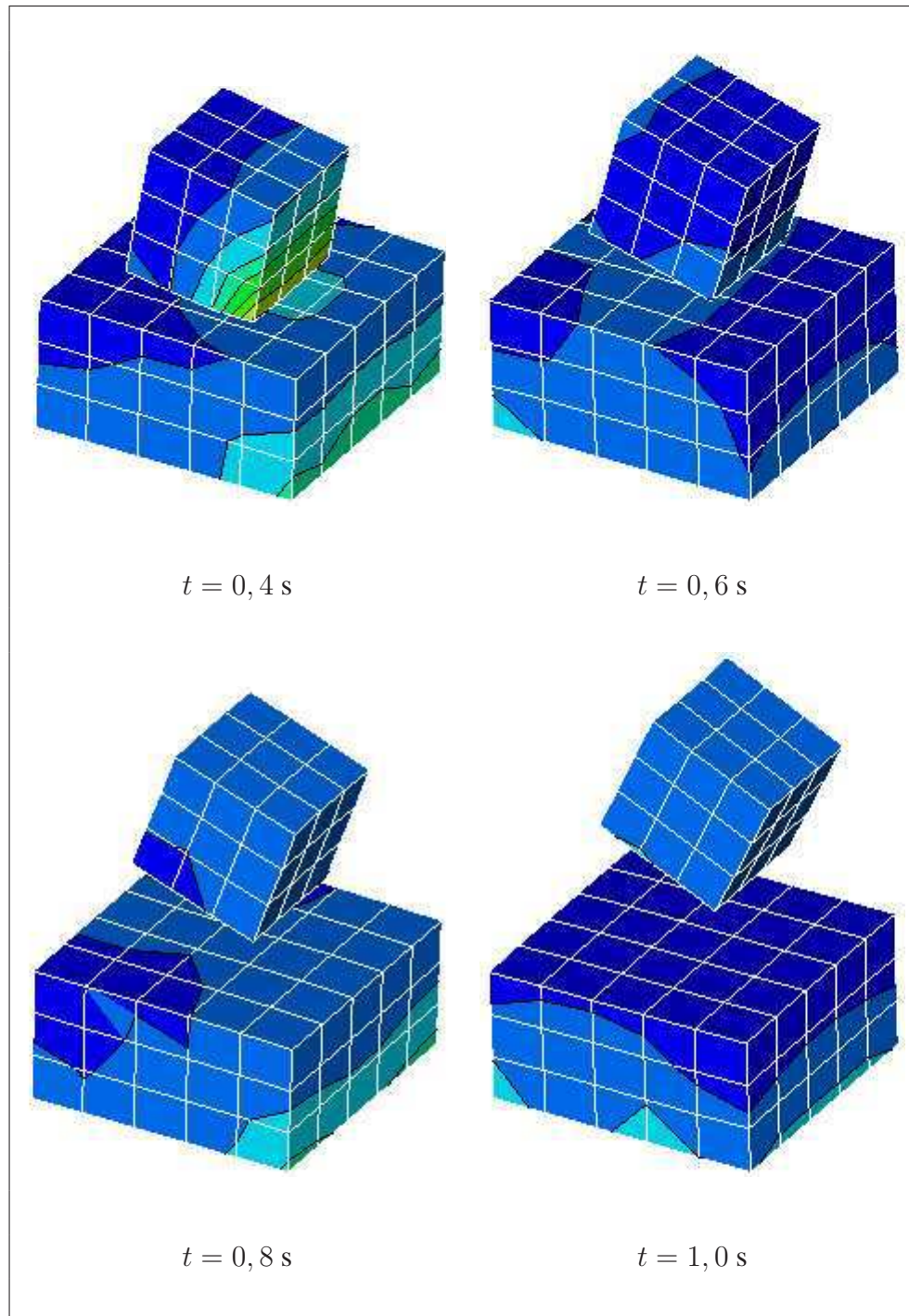
Le bloc inférieur est fixé au niveau de sa base. Pour cela, nous imposons une condition d'encastrement sur l'ensemble des nœuds qui la compose :  $\mathbf{u}_0 = (0, 0; 0, 0; 0, 0)$ . Par ailleurs, nous imposons au bloc supérieur une vitesse initiale définie par le vecteur :  $\dot{\mathbf{u}}_0 = (0, 0; 1, 5; -1, 0)$ .

Nous conservons une nouvelle fois les valeurs des paramètres du schéma d'intégration ( $\xi = \theta = 0, 5$ ) afin d'effectuer une étude quantitative précise de l'évolution de l'énergie au cours du temps. Par ailleurs, nous précisons que la simulation porte sur une durée totale de 1 s et que nous adoptons un pas de temps  $\Delta t = 10^{-5}$  s.

Deux cas sont analysés. Dans le premier, nous autorisons un glissement avec frottement du bloc supérieur sur la face du bloc inférieur. Pour cela, nous appliquons le coefficient de frottement  $\mu = 0, 2$  entre les deux surfaces de contact. Dans le second cas, nous tentons de simuler un contact sans glissement relatif possible en appliquant un coefficient de frottement plus important :  $\mu = 0, 8$ .

La figure 4.24 montre l'évolution de la contrainte équivalente de von-Mises au sein des deux blocs pour le premiers cas ( $\mu = 0.2$ ). La gestion du contact en 3D est parfaitement bien maîtrisée. Il n'y pas de pénétration entre les deux blocs. Le bloc supérieur rebondit sans changement significatif de son orientation. Ce n'est plus vrai dans le second cas. Sur la figure 4.25, nous voyons que le bloc supérieur bascule vers l'avant.

FIG. 4.24 – Contrainte de von-Mises ( $\mu = 0,2$ )

FIG. 4.25 – Contrainte de von-Mises ( $\mu = 0,8$ )

La figure 4.26 montre la position finale des deux blocs pour chacune des deux simulations. Elle permet de mettre encore plus en lumière l'effet des forces de frottement. Ainsi, dans le second cas, le rebond est quasiment vertical et le bloc supérieur à un mouvement de rotation sur lui même.

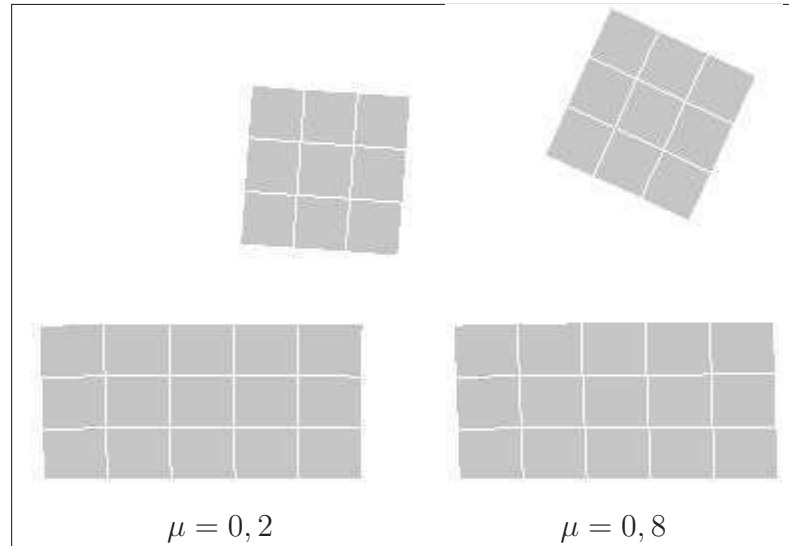


FIG. 4.26 – État final

Sur la figure 4.27, nous traçons l'évolution de l'énergie mécanique du système pour le premier cas ( $\mu = 0,2$ ). Nous distinguons clairement la période durant laquelle il y a contact entre les deux blocs : elle correspond à une dissipation significative de l'énergie totale. Les variations des énergies élastiques et cinétiques montrent que les deux blocs subissent des oscillations résiduelles après la perte du contact.

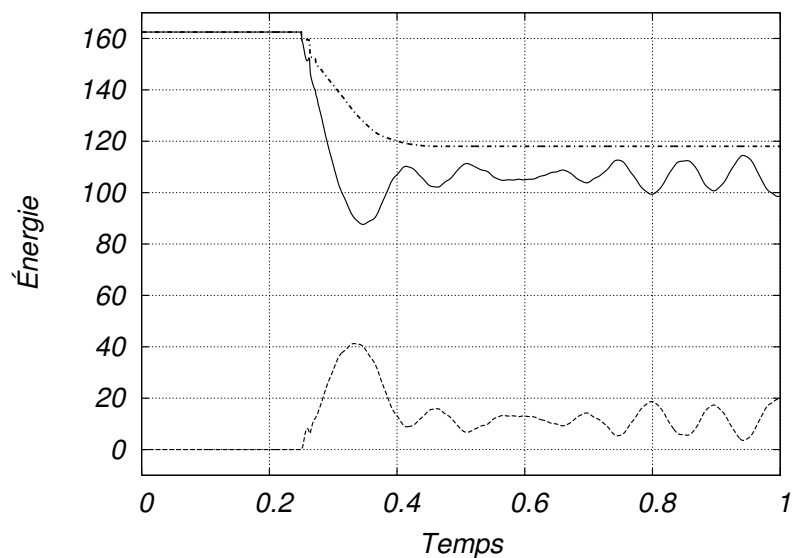


FIG. 4.27 – Variation de l'énergie pour  $\mu = 0,2$

Sur la figure 4.28, nous traçons à nouveau l'évolution de l'énergie mécanique du système mais pour le second cas cette fois. Les résultats diffèrent légèrement de ceux présentés dans [LL03]. En effet, pour une valeur du coefficient de frottement égale à 0,8, l'énergie totale du système est constante au cours du temps (contact adhérent uniquement). Ce n'est pas le cas dans les résultats que nous proposons. Le mouvement de bascule subi par le bloc supérieur induit une diminution de la pression normale sur l'arrière de la zone de contact. Le statut de contact est donc « contact avec glissement » bien que le coefficient de frottement soit élevé. Toutefois, la diminution de la quantité d'énergie dissipée par frottement par rapport au cas précédent montre que la proportion de contact adhérent a bien augmenté. Le choix d'un pas de temps différent peut être à l'origine des différences observées entre les résultats.

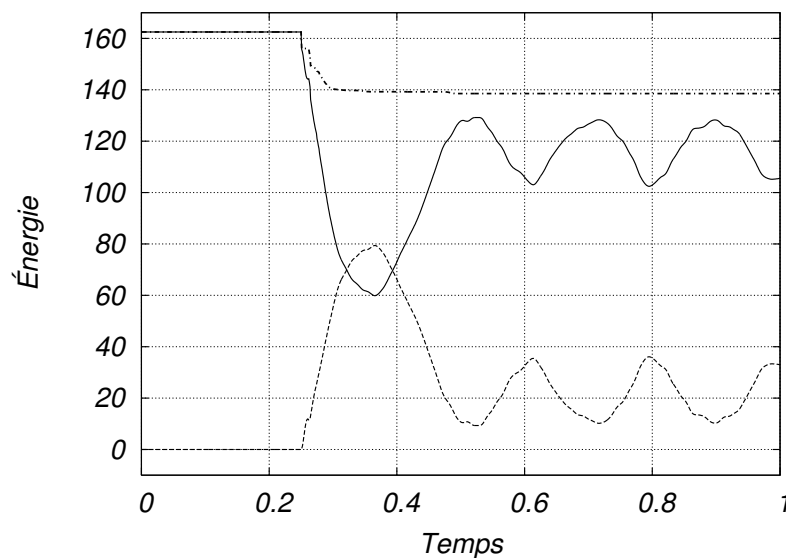


FIG. 4.28 – Variation de l'énergie pour  $\mu = 0,8$

## 4.6 Auto-contact en 2D :

Dans ce dernier exemple de simulation, nous allons montrer comment le code de calcul développé dans ce travail permet de résoudre le problème des modes rigides qui se pose dans certaines simulations de contact en statique. En effet, nous avons souligné dans le chapitre 3 que la méthode proposée nécessitait un traitement particulier en statique pour les cas où un des corps étudiés est libre de tout mouvement. La matrice de rigidité du problème est alors singulière et le calcul du vecteur des déplacements libres n'est pas possible. Bien évidemment, la solution la plus aboutie est celle qui consiste à mettre en oeuvre une méthode numérique permettant de traiter le problème des modes rigides en les filtrant. Nous proposons ici une seconde alternative qui consiste à utiliser la méthode de résolution de problèmes de dynamique. En effet, les termes d'inertie viennent dans ce cas s'ajouter à la formulation du problème et suppriment le problème de conditionnement du système à résoudre. Il suffit



alors d'adapter les déplacements imposés à la valeur du pas de temps pour que le mouvement engendré soit assimilable à une étude quasi-statique.

Pour mettre en évidence la validité de la démarche, nous nous proposons d'étudier un problème d'auto-contact disponible sur le site internet de la société ANSYS. Le problème consiste à prédire le comportement d'un corps hyperélastique que l'on écrase contre un coin indéformable. La géométrie du problème est présentée sur la figure 4.29.

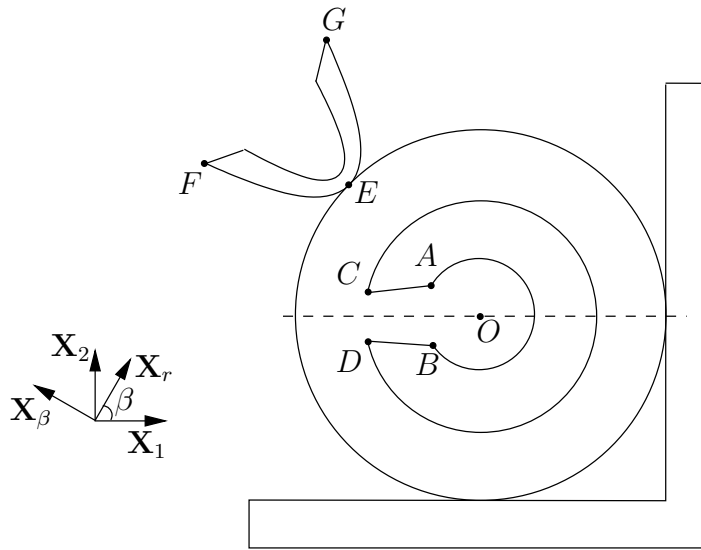


FIG. 4.29 – Géométrie du problème

Dans le tableau 4.4, nous récapitulons les différentes données nécessaires à la construction de la géométrie du problème. Pour cela, nous définissons la base  $(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_\beta)$  qui nous permet de positionner chaque point à l'aide de ses coordonnées cylindriques  $(r, \beta)$ . Nous écrivons alors :  $\mathbf{OM} = r\mathbf{X}_r$  avec  $\mathbf{X}_r = \cos(\beta)\mathbf{X}_1 + \sin(\beta)\mathbf{X}_2$ .

TAB. 4.4 – Données géométriques du problème

point	$r$	$\beta$
$O$	0,0	0,0
$A$	10,0	150,0
$B$	10,0	210,0
$C$	20,0	191,54
$D$	20,0	168,46
$E$	32,0	135,0
$F$	55,0	151,0
$G$	55,0	119,0

Pour cet exemple, nous utilisons la loi de comportement hyperélastique de Mooney-Rivlin à deux paramètres présentée dans le paragraphe 1.3.3.2. Nous appliquerons ainsi les données  $a_{01} = 0,418$  et  $a_{10} = 0,006$  au corps qui doit être déformé. Les deux obstacles sont quant à eux indéformables.

Le problème consiste à imposer un déplacement total  $d = u_1 = -u_2 = 33$  mm à l'obstacle mobile. Nous choisissons de le faire progresser à une vitesse de  $V = 0,1$  mm/s sur chacun des deux axes afin d'être conforme à l'hypothèse de problème quasi-statique. De plus, nous imposons d'effectuer le calcul en  $n = 3300$  pas de temps. Les paramètres de calcul sont alors définis comme suit :

1. temps total à simuler :  $T = \frac{d}{V} = 330$  s,
2. pas de temps :  $\Delta t = \frac{T}{n} = 0,1$  s,
3. déplacement imposé à chaque pas de temps :  $\Delta L = V \cdot \Delta T = 0,01$  mm.

Nous voyons ici le principal inconvénient de l'utilisation de cette méthode pour palier le problème des modes rigides en statique : le coût en temps de calcul est considérable par rapport à celui d'un calcul en statique.

Le maillage est réalisé à partir d'éléments 2D à 4 nœuds comme le montre la figure 4.30. Notons que nous avons choisi de raffiner le maillage au niveau de la zone de contact entre l'obstacle 1 et le corps déformable. En effet, sur ce type de géométrie (contact entre deux surfaces curvilignes), il est nécessaire d'effectuer cette opération si nous voulons obtenir un résultat précis. Dans le cas contraire, il est possible de perdre une quantité importante de surface de contact entre les deux corps.

Toujours sur la figure 4.30, nous représentons l'état de déformation du système à différents instants du processus. Tout d'abord, nous voyons que l'objectif fixé est atteint puisque nous avons réussi à simuler le problème posé avec le déplacement final souhaité. Ensuite, nous voyons que toutes les zones de contact définies ont correctement joué leur rôle puisque nous n'observons aucune pénétration.

Bien évidemment, ces seules observations ne suffisent pas pour affirmer que les résultats sont satisfaisants. Pour cela, nous allons comparer nos résultats avec ceux obtenus avec le code de calcul ANSYS. Nous rappelons que ANSYS peut, au choix, utiliser une méthode de pénalisation, une méthode des multiplicateurs de Lagrange ou bien une méthode de Lagrangien augmenté pour résoudre le problème du contact. C'est cette dernière qui a été

sélectionnée.

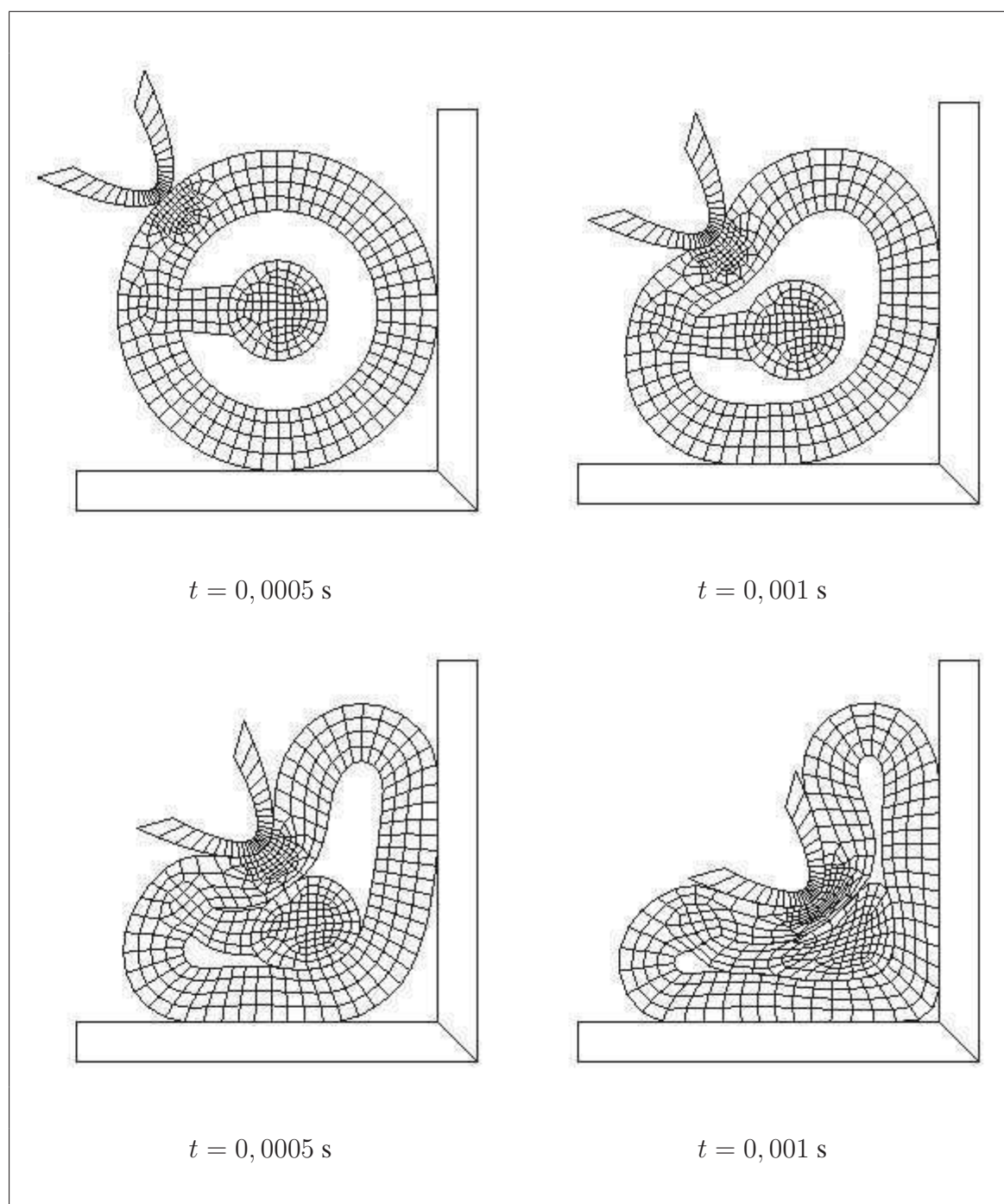
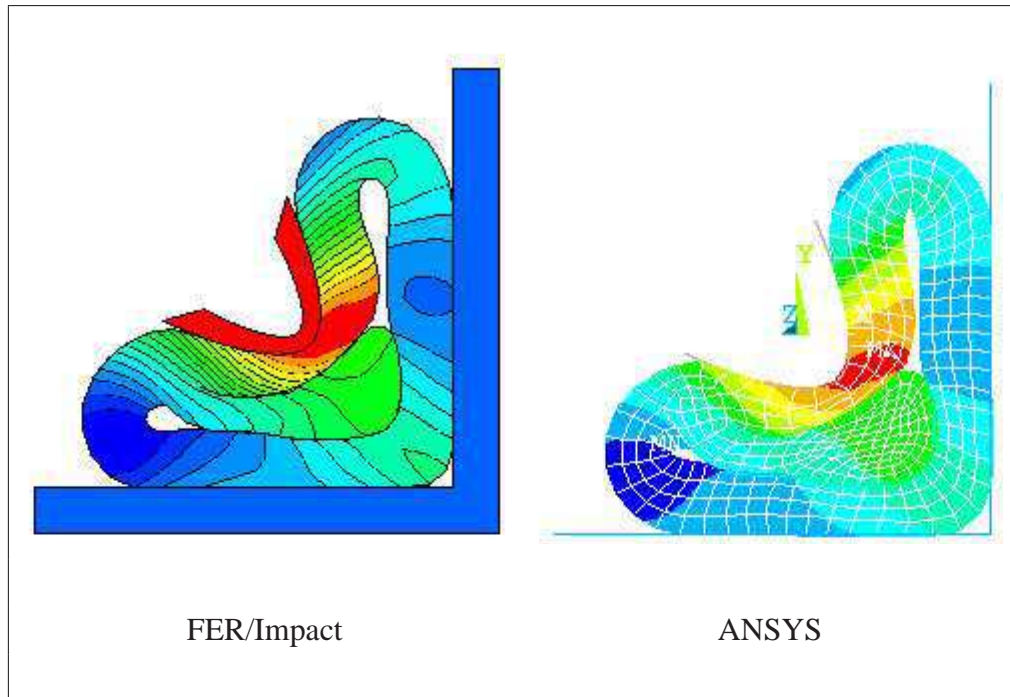
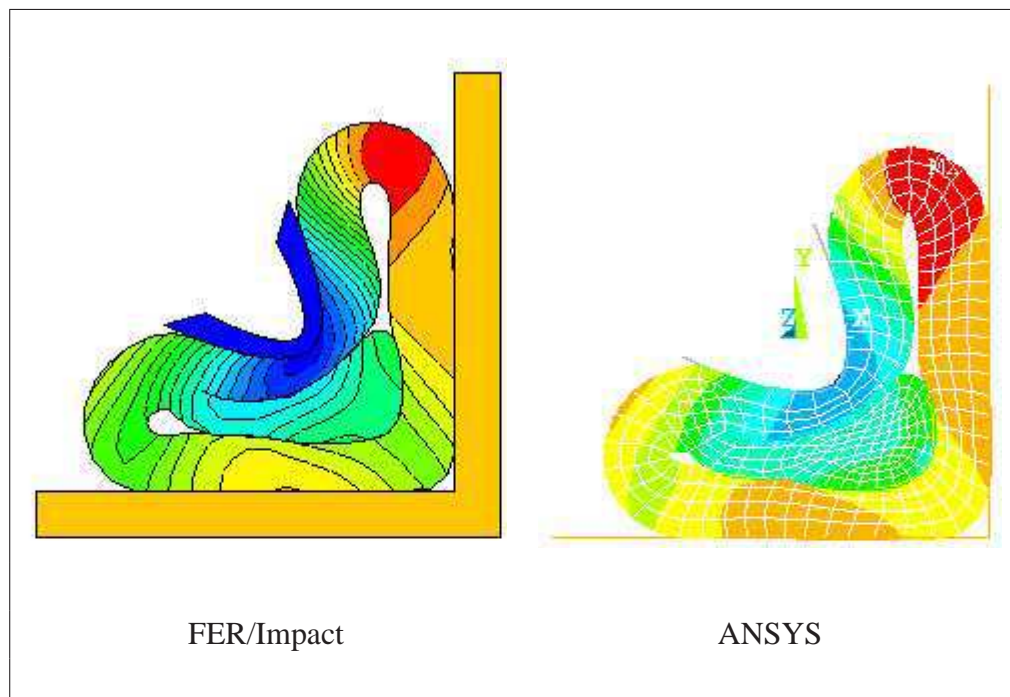


FIG. 4.30 – Évolution du maillage au cours du temps - FER/Impact

La figure 4.31 propose une comparaison du champ de déplacement  $u_1$  à l'état final obtenu avec FER/Impact et ANSYS. Bien entendu, l'échelle utilisée dans les deux cas varie de 0 mm à 33 mm. Nous observons clairement que les deux résultats sont très proches.

FIG. 4.31 – Champ de déplacement  $u_1$  à l'état final

La figure 4.32 présente la même comparaison pour le champ de déplacements  $u_2$ . Les valeurs de ce dernier varient entre 0 mm et  $-33$  mm. Là encore, nous atteignons un niveau de corrélation tout à fait remarquable entre les deux résultats proposés.

FIG. 4.32 – Champ de déplacement  $u_2$  à l'état final

La dernière comparaison que nous proposons ici est illustrée sur la figure 4.33. Nous y présentons le champ de contraintes de von-Mises à l'état final obtenu dans les deux cas.

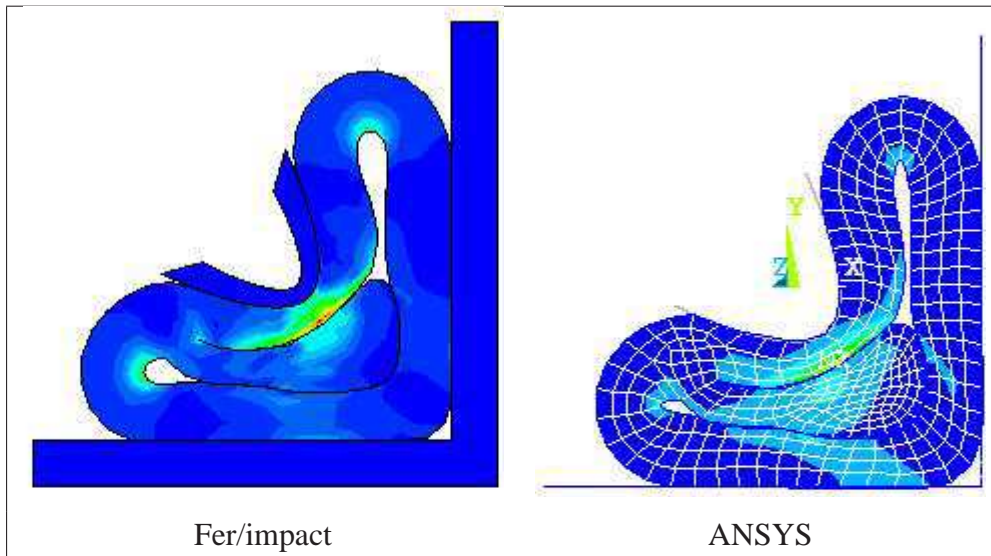


FIG. 4.33 – Contraintes de von-Mises en fin de simulation

Bien que les résultats obtenus par les deux codes de calcul utilisés soient très proches, nous notons tout de même que le résultat du code de calcul ANSYS ne satisfait pas parfaitement la condition de non-pénétration. La figure 4.34 illustre cette remarque en effectuant un zoom sur l'une des zones de contact. Nous y voyons clairement les zones de chevauchement du maillage.

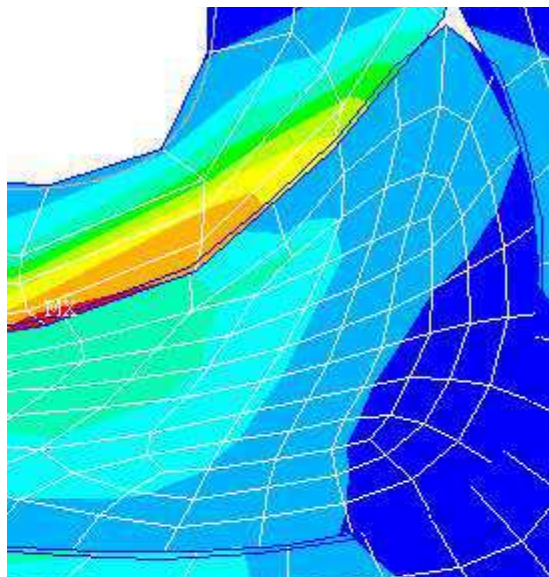


FIG. 4.34 – Erreur de résolution du contact - ANSYS

Ce n'est pas le cas du résultat obtenu avec FER/Impact (figure 4.35) dans lequel la condi-

tion de non-pénétration est respectée. Nous observons tout de même que nous nous trouvons, pour deux éléments cibles, dans la configuration décrite par la figure 2.16. Il y a donc pénétration de deux nœuds cibles mais à cause d'un problème de détection et non pas un problème de résolution.

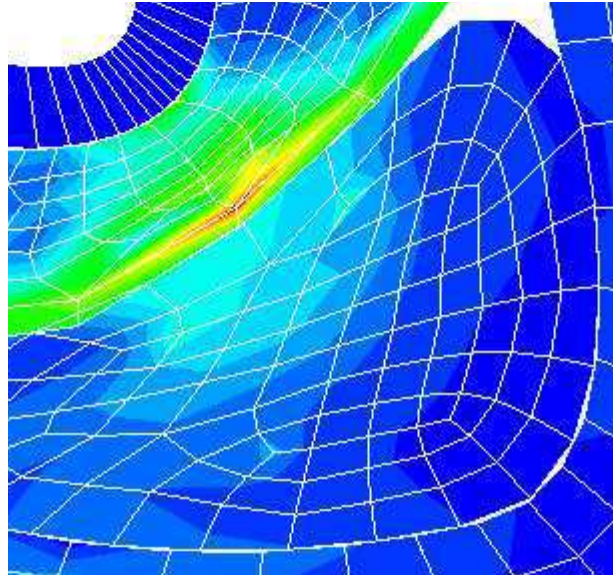


FIG. 4.35 – Résolution du contact - FER/Impact

## 4.7 Conclusions

Dans ce dernier chapitre, nous avons pu démontrer à travers la présentation de quatre applications numériques l'étendue du champ d'application de la méthode développée dans notre travail. Tous les résultats présentés confirment les observations faites dans le chapitre précédent : la méthode est robuste et précise. Nous avons également pu vérifier que la bonne gestion de l'énergie mécanique pour les cas sans frottement se confirme dans les cas complexes d'impact.



# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Le but de ce travail était de développer une méthode de calcul numérique basée sur la méthode des éléments finis et permettant d'appréhender la simulation des problèmes de l'impact et du choc. Cet objectif se justifie à la fois par le rôle important que joue le contact avec frottement dans de nombreuses applications industrielles et à la fois par les difficultés souvent rencontrées pour résoudre ce type de problème à l'aide des codes de calcul commerciaux disponibles à ce jour.

Tout au long de ce mémoire nous avons détaillé les points importants qui nécessitent un traitement particulier pour ce type de calcul. En résumé, nous pouvons définir deux problématiques pour lesquelles les solutions apportées dans ce travail sont originales :

- **le traitement du contact** : pour cette première partie, nous avons utilisé la méthode du bi-potentiel développée par De Saxcé et Feng pour la résolution des problèmes de contact avec frottement en statique.
- **l'intégration des équations du mouvement** : pour cette seconde partie, nous avons choisi d'utiliser un schéma du premier ordre afin de ne pas faire intervenir les termes d'accélération dans le calcul.

Comme nous avons pu le montrer dans les chapitres 3 et 4, l'association de ces deux outils aboutit à une méthode robuste et efficace pour le traitement des problèmes de contact en dynamique. Tout d'abord, elle conserve tous les avantages de la méthode du bi-potentiel pour le traitement du contact :

- résolution du contact dans un système réduit,
- pas de paramètre de pénalisation à définir,



- vérification de manière exacte des conditions de contact et de la loi de frottement de Coulomb,
- couplage du contact normal et du frottement dans une seule boucle de résolution.

Ensuite, l'utilisation de l'algorithme du premier ordre permet d'aborder ce type de problème sans développement spécifique visant à contrôler l'énergie mécanique du système. C'est de ce point de vue que le code FER/Impact nous semble le plus prometteur. Outre le fait que cela simplifie fortement l'implantation de la méthode, nous pouvons ainsi utiliser le code pour quantifier la perte d'énergie mécanique dissipée par frottement. Cette particularité offre des perspectives tout à fait novatrices que nous présentons dans la suite.

Cette combinaison a fourni des résultats remarquables sur l'ensemble des cas tests proposés dans ce travail. Ainsi, les nombreuses comparaisons effectuées avec les solutions analytiques pour le problème de l'impact longitudinal entre deux barres élastiques montrent la pertinence de la méthode développée. Les tests suivants montrent également que les capacités du code de calcul vont bien au delà des cas simples d'impact et que la simulation d'enchaînements complexes de chocs est abordable. En ce sens, nous pouvons estimer que l'objectif fixé est atteint.

## Perspectives

Les différents résultats obtenus avec la méthode développée dans ce travail nous encouragent fortement à poursuivre dans cette voie. De nombreuses modifications peuvent être envisagées à plus ou moins court terme dans le but d'étendre encore plus le champ d'application du code de calcul FER/Impact. Ces recherches à venir peuvent être regroupées en deux branches indépendantes : l'optimisation du code et l'implantation de nouveaux comportements matériaux.

Dans la première branche, nous devons nous intéresser à toutes les évolutions que nous pouvons apporter à la méthode actuelle dans le but d'améliorer les temps de calculs. En effet, bien que les machines soient toujours plus puissantes, il est intéressant de diminuer les temps de calcul pour avoir accès à des modèles plus gros ou bien des séquences d'impact plus complexes. Plusieurs axes de recherche sont à l'étude pour atteindre cet objectif :

- **la détection de contact** : nous avons vu dans le chapitre 2 que l'algorithme de détection de contact utilisé pour FER/Impact peut être très coûteux si le nombre de nœuds

de contact et d'objets cibles deviennent importants [BL87, Nea89].

- **la parallélisation du code** : afin de profiter au mieux de la puissance des calculateurs parallèles, il est possible d'agir sur le code à deux niveaux. Tout d'abord, nous pouvons paralléliser la phase de détection en assignant chaque zone de contact à des processeurs différents. Ensuite, la phase de résolution du système global elle-même peut être parallélisée pour obtenir un gain de temps [HF03, AAB<sup>+</sup>99, BAV01, CG02, BCL06].
- **l'optimisation de la bibliothèque d'objets** : au cours de nos nombreuses simulations numériques, nous avons pu déterminer que l'utilisation de notre bibliothèque d'objets couplée à la surcharge des opérateurs est très coûteuse en l'état. En effet, elle nécessite de nombreuses copies d'objets temporaires à chaque calcul. Pour régler ce problème, nous envisageons de faire évoluer notre bibliothèque par le biais des templates [Rei98].

À ce jour, ces différentes évolutions paraissent indispensables si nous voulons aborder des problèmes aussi complexes que le frottement d'un pneu sur l'asphalte. En effet, l'obligation de garder un pas de temps raisonnablement petit pour assurer la convergence pose problème dans les cas où le nombre de degrés de liberté total devient important.

Dans le second axe de recherche, nous envisageons d'étendre le champ d'application du code FER/Impact. Ces nouvelles possibilités peuvent être issues de développements très variés :

- **lois de frottement** : nous avons vu dans le paragraphe 2.2.3 que de nombreux développements peuvent être apportés au niveau du choix de la loi de frottement. En effet, il n'est pas envisageable de prédire de manière satisfaisante l'infinité des cas d'impact que la nature propose si l'on ne dispose que d'une seule loi de frottement. Chaque domaine d'application propose ses spécificités et il est nécessaire d'adapter au mieux notre modélisation au cas étudié. Un premier pas a été fait dans ce sens via l'implantation d'une loi de frottement orthotrope avec une règle de glissement non-associée.
- **comportement matériau** : dans notre travail, nous avons orienté nos efforts vers le domaine des matériaux hyperélastiques. Pour cela, nous avons implanté différentes lois de comportement (Néo-hookéen, Mooney-Rivlin et Blatz-Ko). Dans ce sens, nos recherches s'orientent plus volontiers vers l'industrie des pneumatiques ou bien des joints en caoutchouc. Cependant, il existe bien d'autres domaines industriels pour lesquels l'étude des impacts et des chocs est essentielle. C'est le cas de la balistique ou bien des crash-tests automobiles. Pour accéder à ces champs d'application, il sera nécessaire

d'implanter la prédiction du comportement élasto-plastique [Chr02] mais aussi du phénomène de rupture.

- **couplage frottement/thermique** : comme nous l'avons énoncé, un des avantages de la méthode est que l'énergie dissipée par frottement est évaluée de manière quantitative. Il est donc tout à fait envisageable d'étudier la possibilité d'un couplage avec un calcul thermique en postulant que l'énergie dissipée par frottement l'est par production de chaleur [WM94, Str99, PBB00, XM02]. Il serait alors envisageable d'étudier, par exemple, l'échauffement des systèmes de freinage (disque+étrier) utilisés dans l'industrie automobile.

Nous voyons que le travail présenté ici constitue une solide base à de futures recherches dans le domaine de l'impact. L'éventail des évolutions à apporter à notre code est aussi large que les domaines d'applications envisagés. De nombreuses spécialités sont concernées : tribologie, rhéologie ou bien thermique pour la partie mécanique mais aussi programmation et mathématiques appliquées pour la partie numérique.

## Annexe A

# Impact longitudinal entre deux barres élastiques

Dans cette première annexe, nous effectuons un rappel de la théorie de la propagation des ondes qui permet d'obtenir un résultat analytique pour le problème de l'impact longitudinal entre deux barres élastiques. Nous rappelons sur la figure A.1 la configuration étudiée dans notre travail.

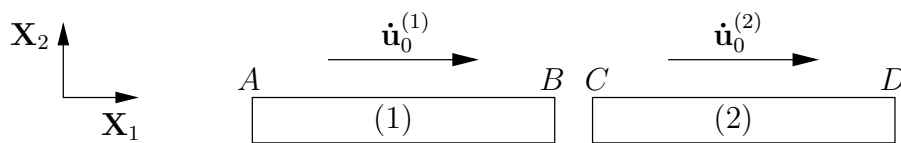


FIG. A.1 – Impact longitudinal entre deux barres élastiques

Les deux barres sont supposées homogènes et de même section  $S$ . Nous nous bornons ici au cas de deux barres constituées du même matériau et de même longueur. De plus, nous supposons que les sections droites restent planes durant la déformation et que nous pouvons nous limiter à la prise en compte des ondes unidimensionnelles.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= X \cdot \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) &= u(X, t) \cdot \mathbf{X}_1, \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) &= \dot{u}(X, t) \cdot \mathbf{X}_1. \end{aligned} \tag{A.1}$$

L'équation des ondes que doit vérifier le déplacement de tout point s'écrit :

$$E S \frac{\partial^2 u(X, t)}{\partial X^2} - \rho S \frac{\partial^2 u(X, t)}{\partial t^2} = 0. \tag{A.2}$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$u(X, t) = f(X - ct) + g(X + ct) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{A.3})$$

où  $c$  est la célérité des ondes se propageant dans chacune des deux barres. Cette formule traduit le fait qu'au moment du choc, deux ondes naissent à l'interface : la première se propage avec la célérité  $+c$  dans la barre (2) et la seconde avec la célérité  $-c$  dans la barre (1).

Nous supposons que le choc entre les deux barres a lieu à l'instant  $t = 0$ . Avant cet instant, le mouvement des deux barres vérifie en effet les conditions initiales qui leur sont imposées et il n'est pas utile pour le développement du calcul de faire intervenir cette partie du processus. Les conditions initiales sont donc :

$$\begin{cases} u^{(1)}(X, 0) = u^{(2)}(X, 0) = 0, \\ \dot{u}^{(1)}(X, 0) = \dot{u}_0^{(1)}, \\ \dot{u}^{(2)}(X, 0) = \dot{u}_0^{(2)}. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Nous fixons l'origine des deux barres au niveau de l'interface de contact. Durant la phase de contact, les déplacements et vitesses sont de la forme :

$$\begin{cases} u^{(1)}(X, t) = \dot{u}_0^{(1)} t + g^{(1)}(X + ct), \\ \dot{u}^{(1)}(X, t) = \dot{u}_0^{(1)} + c \dot{g}^{(1)}(X + ct), \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

et

$$\begin{cases} u^{(2)}(X, t) = \dot{u}_0^{(2)} t + g^{(2)}(X + ct), \\ \dot{u}^{(2)}(X, t) = \dot{u}_0^{(2)} + c \dot{g}^{(2)}(X + ct). \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Pendant la durée du contact, les déplacements, vitesses et contraintes longitudinales sont continues au niveau de l'interface de contact. Ces conditions de continuité s'écrivent :

$$\begin{cases} u^{(1)}(0, t) = u^{(2)}(0, t), \\ \dot{u}^{(1)}(0, t) = \dot{u}^{(2)}(0, t), \\ \sigma_{11}^{(1)}(0, t) = \sigma_{11}^{(2)}(0, t). \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

En reportant les équations (A.5) et (A.6) dans (A.7), nous obtenons :

$$\begin{cases} g^{(1)}(ct) = f^{(2)}(ct), \\ \dot{u}_0^{(1)} + c \dot{g}^{(1)}(ct) = \dot{u}_0^{(2)} - c \dot{f}^{(2)}(-ct), \\ \dot{g}^{(1)}(ct) = \dot{f}^{(2)}(-ct). \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

La résolution de ce système conduit à :

$$f^{(2)}(s) = g^{(2)}(s) = \frac{\dot{u}_0^{(2)} - \dot{u}_0^{(1)}}{2c} s + cste. \quad (\text{A.9})$$

Les conditions initiales sur les deux barres permettent d'écrire :  $cste = 0$ . En reportant le résultat (A.9) dans (A.5) et (A.6), nous pouvons écrire que dans la zone comprimée :

$$\dot{u}^{(1)}(X, t) = \dot{u}^{(2)}(X, t) = \frac{\dot{u}_0^{(1)} + \dot{u}_0^{(2)}}{2}. \quad (\text{A.10})$$

La vitesse est donc identique dans les parties comprimées de chacune des deux barres. Nous pouvons également observer que si les deux barres ont des vitesses égales en norme et opposées en direction, l'interface de contact a une vitesse nulle tout au long du contact.

À l'instant  $t_1 = \frac{l}{c}$  où  $l$  est la longueur des barres, chacune des deux ondes de compression arrive à l'extrémité libre de sa barre. Elles sont alors, toutes les deux, réfléchies sous la forme d'ondes de traction. Les déplacements prennent alors la forme :

$$\begin{cases} u^{(1)}(X, t) = \dot{u}_0^{(1)} t + \frac{\dot{u}_0^{(2)} - \dot{u}_0^{(1)}}{2c} (X + ct) + f^{(1)}(X - ct), \\ u^{(2)}(X, t) = \dot{u}_0^{(2)} t + \frac{\dot{u}_0^{(2)} - \dot{u}_0^{(1)}}{2c} (X - ct) + g^{(2)}(X + ct), \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

et :

$$\begin{cases} \dot{u}^{(1)}(X, t) = \frac{\dot{u}_0^{(1)} - \dot{u}_0^{(2)}}{2} - c \dot{f}^{(1)}(X - ct), \\ \dot{u}^{(2)}(X, t) = \frac{\dot{u}_0^{(2)} - \dot{u}_0^{(1)}}{2} + c \dot{g}^{(2)}(X + ct). \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

La condition de contrainte normale aux extrémités libres fournissent :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(X = -l) = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{f}^{(1)}(-l_1 - ct) = \frac{\dot{u}_0^{(1)} - \dot{u}_0^{(2)}}{2c}, \\ \sigma_{11}(X = l) = 0 \quad \text{donc} \quad \dot{g}^{(2)}(l_1 + ct) = \frac{\dot{u}_0^{(2)} - \dot{u}_0^{(1)}}{2c}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

En considérant l'état des deux barres à l'instant  $t_1$ , nous avons :

$$\begin{cases} f^{(1)}(X - ct) = \frac{\dot{u}_0^{(1)} - \dot{u}_0^{(2)}}{2c} (X - l_1 - c(t - t_1)), \\ g^{(2)}(X + ct) = \frac{\dot{u}_0^{(2)} - \dot{u}_0^{(1)}}{2c} (X - l_1 + c(t - t_1)). \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Après le passage des ondes de traction dans les barres, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{u}^{(1)}(X, t) = \dot{u}_0^{(2)}, \\ \dot{u}^{(2)}(X, t) = \dot{u}_0^{(1)}. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Les deux barres se séparent au moment où les deux ondes de traction arrivent à l'interface de contact, c'est-à-dire à  $t_2 = \frac{2l}{c}$ .

En ce qui concerne l'intensité de l'onde de compression générée par le choc, nous utilisons la formule :

$$\sigma_{11} = \frac{\rho c \dot{u}_0}{2}. \quad (\text{A.16})$$

En multipliant cette valeur par la section de la barre, nous obtenons la force de contact à l'interface.

## Annexe B

# Code de calcul FER/Impact

Dans cette seconde annexe, nous récapitulons les différentes fonctionnalités du code de calcul FER/Impact qui est le résultat de ces trois années de recherche. Celui-ci constitue le dernier élément en date de la famille de code de calcul par éléments finis FER (Finite Element Research) développée par le groupe MDS (Modélisation en Dynamique des Structures) du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE) [Fen00]. Ce programme, d'environ 4 000 lignes, permet d'aborder les problèmes de choc et d'impact entre corps déformables. Nous résumons ici les caractéristiques de ce programme :

1. **domaine d'application** : le code de calcul a été développé dans le contexte des grandes perturbations. Pour cela, une description lagrangienne totale a été adoptée. De plus, plusieurs lois matériaux hyperélastiques (néo-hookéen, Mooney-rivlin et Blatz-Ko) ont été implantées. Pour nos simulations, nous disposons de quatre types d'éléments : deux types pour les problèmes  $2D$  ( $T3$  et  $Q4$ ) et deux autres types pour les problèmes  $3D$  ( $T4$  et  $H8$ ),
2. **méthodes numériques** : la résolution des systèmes linéaires d'équations se fait par la méthode du pivot de Gauss. Quand aux intégrations sur les éléments de surface et de volume, la méthode de Gauss par points est utilisée,
3. **partie programmation** : le code FER/Impact est principalement écrit en C++ suivant un modèle de programmation orienté objet. Notons également que le programme utilise la méthode de stockage des matrices en « ligne de ciel » afin d'optimiser ses performances globales,
4. **résolution du contact avec frottement** : le code FER/Impact utilise une méthode de condensation couplée à un bi-potential de contact pour résoudre ce problème. Cette



méthode fait appel à plusieurs outils numériques tels que l'algorithme de Gauss-Seidel, l'algorithme d'Uzawa. La méthode du lagrangien augmenté est également utilisée pour traiter les potentiels non-différentiables liés à la loi de contact avec frottement. Le modèle de frottement implanté dans le code est celui de Coulomb,

5. **intégration des équations du mouvement** : le schéma d'intégration en temps implanté dans FER/Impact est un schéma implicite du premier ordre. Le choix et l'implantation de ce schéma est l'objet de ce travail. Le schéma de Newmark a également été implanté dans le but de procéder à une série de tests comparatifs.

Le post-traitement des résultats obtenus se fait à l'aide du logiciel de visualisation FER/View [FF04]. De nombreux exemples de résultats obtenus avec le code FER/Impact et une version de démonstration du logiciel de visualisation sont disponibles sur le site internet du laboratoire [Fen00].

## Références bibliographiques

- [AAB<sup>+</sup>99] K. Ach, P. Alart, M. Barboteu, F. Lebon, and B. MBodji. Parallel frictional contact algorithms and industrial applications. *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, 177 :169–181, 1999.
- [AC91] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 92, :353–375, 1991.
- [AH95] P. Alart and A. Heege. Consistent tangent matrices of hybrid curved contact operators involving anisotropic friction. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 4 :183–207, 1995.
- [ANS] ANSYS. *Theory Manual*, twelfth edition.
- [AP98] F. Armero and E. Petocz. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 158, :269–300, 1998.
- [Bar06] M. Barboteu. An energy-conserving algorithm for nonlinear elastodynamic contact problems - Extension to a frictional dissipation phenomenon. In P. Wriggers and Nackenhorst U., editors, *Analysis and Simulation of Contact Problems*, volume 27 of *Lecture notes in applied and computational mechanics*, pages 71–78. Springer, 2006.
- [BAV01] M. Barboteu, A. Alart, and M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, 190 :4785–4803, 2001.
- [BCL05] B. Bourel, A. Combescure, and Di Valentina L. Gestion du contact dans les simulations multi-domaines de crashes automobiles. In *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2005.
- [BCL06] B. Bourel, A. Combescure, and Di Valentina L. Handling contact in multi-domain simulation of automobile crashes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :766–779, 2006.
- [BK62] P.J. Blatz and W.L. Ko. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 6 :223–251, 1962.

- [BL87] T. Belytschko and JI. Lin. A three-dimension impact-penetration algorithm with erosion. *Computers & Structures*, 25(1) :95–104, 1987.
- [BLM00] T. Belytschko, WK. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [BM88] KJ. Bathe and S. Mijailovich. Finite element analysis of frictional problems. *Journal de Mécanique théorique et Appliquée*, 7(Spécial issue - supplément n°1) :30–45, 1988.
- [BN91] T. Belytschko and MO. Neal. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 31 :547–572, 1991.
- [Bou85] J. Boussinesq. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [CA88] A. Curnier and P. Alart. A generalized Newton method of contact problems with friction. *J. Theor. Appl. Mech*, 7 :145–160, 1988.
- [CB86] AB. Chaudhary and KJ. Bathe. A solution method for static and dynamic analysis of three dimensional contact problems with friction. *Computers & Structures*, 24(6) :855–873, 1986.
- [CG02] A. Combescure and A. Gravouil. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear analysis. *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, 191 :1129–1157, 2002.
- [Chr02] PW. Christensen. A semi-smooth newton method for elasto-plastic contact problems. *Int. J. Solids Structures*, 39 :2323–2341, 2002.
- [CKPSN98] PW. Chritensen, A. Klarbring, S. Pang, and N. Strömberg N. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 42 :145–173, 1998.
- [CMV88] A. Combescure, A. Millard, and P. Verpeaux. Numerical methods in the CASTEM system for the traitment of contact problems involving friction. *Journal de Mécanique théorique et Appliquée*, 7(Spécial issue - supplément n°1) :249–261, 1988.
- [Cri91] MA. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solid and structures - Volume 1 : Essentials*. Wiley, 1991.
- [Cri97] MA. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solid and structures - Volume 2 : Advanced Topics*. Wiley, 1997.
- [CT71] SH. Chan and IS. Tuba. A finite element method for contact problems of solid bodies. *Int. J. Mech. Sci.*, 13 :615–639, 1971.
- [CTM91] NJ. Carpenter, RL. Taylor, and Katona MG. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 32 :103–128, 1991.

- 
- [Cur84] A. Curnier. A theory of friction. *Int. J. Solids Structures*, 20(7) :637–647, 1984.
- [DL72] G. Duvaut and JL. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, 1972.
- [DS89] MA. Dokainish and K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics - I. explicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1371–1386, 1989.
- [DT84] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Éditeur, deuxième édition, 1984.
- [FC02] ZQ. Feng and JM. Cros. FER/SubDomain : an integrated environment for finite element analysis using object-oriented approach. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(5) :773–781, 2002.
- [FCM05] ZQ. Feng, JM. Cros, and B. Magnain. Un algorithme efficace pour les problèmes d’impact avec frottement. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 14(1) :65–86, 2005.
- [Fen99] ZQ. Feng. Modélisation du contact avec frottement en grandes déformation par une méthode implicite du bi-potentiel. In *Journée  $\Phi^2$  AS - IPSI Traitement des contacts en implicite et en explicite*, 1999.
- [Fen00] ZQ. Feng. <http://gmfe16.cemif.univ-evry.fr:8080/~feng/fersystem.html>, 2000.
- [FF04] ZQ. Feng and Z. Feng. FER/View - An interactive finite element post-processor. In Z.-H. Yao, M.-W. Yuan, and W.-X. Zhong, editors, *Computational Mechanics, WCCM VI in conjunction with APCOM04*. Tsinghua University Press, Springer, 2004.
- [FHMC05] ZQ. Feng, QC. He, B. Magnain, and JM. Cros. On the modelling of contact/impact problems between rubber materials. In *Contact Mechanics International Symposium (CMIS), Hannovre*, 2005.
- [FHMC06] ZQ. Feng, QC. He, B. Magnain, and JM. Cros. On the modeling of contact/impact problems between rubber materials, analysis and simulation of contact problems. In P. Wriggers and Nackenhorst U., editors, *Analysis and Simulation of Contact Problems*, volume 27 of *Lecture notes in applied and computational mechanics*, pages 87–94. Springer, 2006.
- [FHSM06] ZQ. Feng, M. Hjjaj, G. de Saxcé, and Z. Mróz. Effect of frictional anisotropy on the quasistatic motion of a deformable solid sliding on a planar surface. *Computational Mechanics - Special Issue Valliappan*, 37 :349–361, 2006.
- [FJCM05] ZQ. Feng, P. Joli, JM. Cros, and B. Magnain. The bi-potential method applied for the modeling of dynamic problems with friction. *Computational Mechanics*, 36(5) :375–383, 2005.

- [FMC05] ZQ. Feng, B. Magnain, and JM. Cros. FER/Impact : logiciel de simulation numérique des problèmes d'impact. In *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2005.
- [FMC06a] ZQ. Feng, B. Magnain, and JM. Cros. FER/Impact : logiciel de simulation numérique des problèmes d'impact. *Revue Européenne de Mécanique Numérique, numéro spécial Giens 2005*, 15(1-2-3) :175–186, 2006.
- [FMC06b] ZQ. Feng, B. Magnain, and JM. Cros. Solution of large deformation impact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies. *International Journal of Engineering Science*, 44(1-2) :113–126, 2006.
- [FPL03] ZQ. Feng, F. Peyraut, and N. Labed. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies. *Int. J. Engn. Science*, 41 :2213–2225, 2003.
- [FZ75] A. Francavilla and OC. Zienkiewicz. A note on numerical computation of elastic contact problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 9 :913–924, 1975.
- [Gar02] J. Garrigues. *Mécanique de milieux continus en déformations finies*. École Supérieure de Mécanique de Marseille, 2002.
- [Gon00] O. Gonzalez. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, 190 :1763–1783, 2000.
- [GT72] GL. Goudreau and RL. Taylor. Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics. *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng*, 2 :69–97, 1972.
- [Hau04] P. Hauret. *Méthode numérique pour la dynamique des structures non-linéaires incompressibles à deux échelles*. PhD thesis, École Polytechnique, 2004.
- [HC93] QC. He and A. Curnier. Anisotropic dry friction between two orthotropic surface undergoing large displacements. *Eur. J. of Mech. - A/Solids*, 12 :631–666, 1993.
- [Her82] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *J. f. Math.*, 92, 1882.
- [HF03] J. Har and RE. Fulton. A parallel finite element procedure for contact-impact problems. *Engineering with Computers*, 19 :67–84, 2003.
- [HFSM04] M. Hjjaj, ZQ. Feng, G. de Saxcé, and Z. Mróz. Three-dimensional finite element computations for frictional contact problems with non-associated sliding rule. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, 60 :2045–2076, 2004.
- [HT02] P. Hauret and P. Le Tallec. Conservation analysis for integration schemes in quasi-incompressible non-linear elastodynamics. Technical Report 499, CMAP, 2002.

- 
- [HTS<sup>+</sup>76] TJR. Hughes, RL. Taylor, JL. Sackman, A. Curnier, and W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 8 :249–276, 1976.
- [Hu97] N. Hu. A solution method for dynamic contact problems. *Computers & Structures*, 63(6) :1053–1063, 1997.
- [Hug87] TJR. Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publication, Inc., 1987.
- [Hun92] I. Huněk. On a penalty formulation for contact-impact problems. *Computers & Structures*, 48(2) :192–203, 1992.
- [IPS99a] IPSI, editor. *Traitement des contacts en explicite et en implicite*, volume XXIII - 1, 1999.
- [IPS99b] IPSI, editor. *Traitement des contacts en explicite et en implicite - Autour des tests*, volume XXIII - 1 bis, 1999.
- [JAJ98] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean. A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 155 :31–47, 1998.
- [Jea89] M. Jean. Dynamics with partially elastic shocks and dry friction : double scale method and numerical approach. In *4th Meeting on unilateral problems in structural analysis*, 1989. Capri.
- [Jea92] M. Jean. Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement. In *Matériaux et techniques - Journées de la société tribologique française*, 1992.
- [Jea99] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 177 :235–257, 1999.
- [JT88] M. Jean and G. Touzot. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems. *J. Theor. Appl. Mech.*, 7 :145–160, 1988.
- [Khe05] HB. Khenous. *Problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en élastostatique et élastodynamique. Étude mathématique et résolution numérique*. PhD thesis, I.N.S.A de Toulouse, 2005.
- [KK92] SH. Ko and B. Kwak. Frictional dynamic contact analysis using finite element nodal displacement description. *Computers & Structures*, 42 :797–807, 1992.
- [KK96] JO. Kim and B. Kwak. Dynamic analysis of two-dimensional frictional contact by linear complementarity problem formulation. *Int. J. Solids and Structures*, 33 :4605–4624, 1996.
- [Kla92] A. Klarbring. Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems. In Curnier A, editor, *Contact Mechanics Int. Symp.*, 1992. PPUR.

- [KO88] N. Kikuchi and JT. Oden. *Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite elements*. Philadelphia : SIAM, 1988.
- [KS81] N. Kikuchi and YJ. Song. Penalty/finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, 39 :1–22, 1981.
- [Lai98] E. Lainé. *Lois de comportement isotropes non-linéaire en grandes déformations. Applications aux caoutchouc*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1998.
- [LC97] TA. Laursen and V. Chawla. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, 40 :863–886, 1997.
- [LL02] TA. Laursen and GR. Love. Improved implicit integrators for transient impact problems geometric admissibility within the conserving framework. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 53, :245–274, 2002.
- [LL03] GR. Love and TA. Laursen. Improved implicit integrators for transient impact problems-dynamic frictional dissipation within an admissible conserving framework. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192 :2223–2248, 2003.
- [LVF99] E. Lainé, C. Vallée, and D. Fortuné. Nonlinear isotropic constitutive laws : choice of the three invariants, convex potentials and constitutive inequalities. *Int. J. Engng. Science*, 37 :1927–1941, 1999.
- [MFC05a] B. Magnain, ZQ. Feng, and JM. Cros. Extension de la méthode du bi-potentiel à l’analyse des problèmes d’impact. In *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2005.
- [MFC05b] B. Magnain, ZQ. Feng, and JM. Cros. Modélisation des problèmes d’impact avec dissipation d’énergie par frottement. *C. R. Mécanique*, 333(419-424), 2005.
- [Moo40] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11 :582–592, 1940.
- [MS94] Z. Mróz and S. Stupkiewicz. An anisotropic friction and wear model. *Int. J. Solids and Structures*, 31(8) :1113–1131, 1994.
- [Nea89] MO. Neal. *Contact-impact by the pinball algorithm with penalty, projection and augmented lagrangian methods*. PhD thesis, Northwestern University, 1989.
- [New59] NM. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *J. Eng. Mech. Div.*, 85 :67–94, 1959.
- [Par89] HA. Parisch. Consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28 :1803–1812, 1989.

- 
- [PBB00] D. Pantuso, KJ. Bathe, and PA. Bouzinov. A finite element procedure for analysis of thermo-mechanical solids in contact. *Computers & Structures*, 75 :551–573, 2000.
- [Pey03] F. Peyraut. Orientation preservation and Newton-Raphson convergence in the case of an hyperelastic sphere subjected to an hydrostatic pressure. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192(9-10) :1107–1117, 2003.
- [Pey04] F. Peyraut. *Étude numérique du modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko en mécanique non-linéaire*. HDR, Université de Franche-Comté, 2004.
- [PJ98] P. Papadopoulos and Solberg JM. A Lagrange multiplier method for the finite element solution of frictionless contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28 :373–384, 1998.
- [PL01] F. Peyraut and N. Labed. Préservation de l’orientation et convergence de Newton-Raphson avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 10(5) :595–605, 2001.
- [PL04] MA. Puso and TA. Laursen. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 193 :601–629, 2004.
- [Pon95] JP. Ponthot. *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Université de Liège, 1995.
- [Rei98] G. Dos Reis. Vers une nouvelle approche du calcul scientifique en C++. Technical Report 3362, INRIA, février 1998.
- [Riv48] RS. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 240 :491–508, 1948.
- [Sax00] G. de Saxcé. *Cours de D.E.A : Mécanique des Solides Approfondie - Grandes Déformations*. Université de Lille I, 2000.
- [SD89] K. Subbaraj and MA. Dokainish. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics - II. implicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1387–1401, 1989.
- [SF91] G. de Saxcé and ZQ. Feng. New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach. *Mech. Struct. & Mach.*, 19 :301–325, 1991.
- [SF98] G. de Saxcé and ZQ. Feng. The bi-potential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and Computer Modeling*, 28(4-8) :225–245, 1998. special issue Recent Advances in Contact Mechanics.



- 
- [SL92] JC. Simo and TA. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42, :97–116, 1992.
- [SP98] AM. Solberg and P. Papadopoulos. A finite element method for contact/impact. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30 :297–311, 1998.
- [SR81] TD. Sachdeva and CV. Ramarkrishnan. A finite element solution for the two-dimensional elastic contact problems with friction. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 17 :1257–1271, 1981.
- [SRR81] TD. Sachdeva, CV. Ramarkrishnan, and Natarajan R. A finite element method for the elastic contact problems. *Transactions of the ASME*, 103 :456–461, 1981.
- [Str99] N. Strömberg. Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 177 :441–455, 1999.
- [SW91] JC. Simo and KK. Wong. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 31 :19–52, 1991.
- [THR02] P. Le Tallec, P. Hauret, and A. Rezgui. Efficient solvers for dynamic analysis of nonlinear multiscale structures. In *Proceedings of the Fifth World Congress Computational Mechanics WCCM V*, 2002.
- [TN90] KK. Tamma and RR. Namburu. A robust self - starting explicit computational methodology for structural dynamic applications : architecture and representations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 30 :1441–1454, 1990.
- [TP93] RL. Taylor and P. Papadopoulos. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 36 :2123–2140, 1993.
- [TY73] T. Tsuta and S. Yamaji. Finite element analysis of contact problem. In Tokyo seminar on element analysis, editor, *Theory and practice in finite element structural analysis*, pages 178–194, 1973.
- [VPJR98] D. Vola, E. Pratt, M. Jean, and M. Raous. Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementary techniques. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 7(1-2-3) :149–162, 1998.
- [WM94] P. Wriggers and C. Miehe. Contact constraints within coupled thermomechanical analysis - a finite element model. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 113 :301–3109, 1994.
- [Wri02] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. John Wiley & Sons, 2002.
- [Wro94] M. Wronski. *Couplage du contact et du frottement avec la mécanique non linéaire des solides en grandes déformations, application à l'étude des blocs de mousses en polyuréthane*. PhD thesis, UTC, 1994.

- [WST85] P. Wriggers, JC. Simo, and RL. Taylor. Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems with friction. In *Proceeding of the NUMETA '85 Conference*, 1985.
- [WVVS90] P. Wriggers, T. Vu Van, and E. Stein. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers & Structures*, 37(3) :319–331, 1990.
- [XM02] HL. Xing and A. Makinouchi. Three dimensional finite element modeling of thermomechanical frictional contact between finite deformation bodies using  $r$ -minimum strategy. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 191 :4193–4214, 2002.
- [ZT91] OC. Zienkiewicz and RL. Taylor. *The finite element method - Volume 2 : Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity*. McGraw-Hill Book Company, 1991.
- [ZT00] OC. Zienkiewicz and RL. Taylor. *The finite element method - Volume 1 : The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.

## **Résumé :**

Dans beaucoup de problèmes de mécanique des solides, la prise en compte du contact avec frottement joue un rôle prépondérant. La bonne prédiction des effets du contact avec frottement devient un enjeu majeur pour les industriels. Malheureusement, très peu de problèmes peuvent être traités de manière analytique. Il est donc nécessaire de développer des méthodes numériques adaptées à ce type de problèmes. Dans ce travail, nous proposons une extension de la méthode du bi-potentiel, proposée par de Saxcé et Feng, pour l'analyse des problèmes d'impact entre plusieurs corps déformables dans le cadre des grandes déformations. Pour cela, nous optons pour un schéma d'intégration du premier ordre à la place d'un schéma plus classique du second ordre (Newmark, HHT, . . .). Ce choix permet de ne pas faire intervenir l'accélération, non définie au moment du choc, dans les calculs. Le modèle ainsi développé combine la méthode du bi-potentiel pour la résolution du problème du contact et un schéma du premier ordre pour la discrétisation temporelle. Ce travail a abouti au code de calcul par éléments finis FER/Impact. Les différentes applications numériques proposées mettent en évidence la validité et l'efficacité de la méthode. Une attention particulière est portée à la quantification de la dissipation d'énergie par frottement.

**mots clés :** contact - impact - dynamique - méthodes numériques - éléments finis

## **Abstract :**

In many problems of solid mechanics, taking into account the frictional contact plays an important role. Good prediction of the results of contact with friction becomes then a prevailing element for the industry. However, few problems can be solved analytically. It is then necessary to develop numerical methods adapted to such issues. In this work, an extension of the bi-potential method, proposed by de Saxcé & Feng, is presented for the modeling of impact problems involving several deformable bodies within large deformations framework. To this purpose, we choose a first order time integrator instead of classical second order integrators (Newmark, HHT, . . .). This choice avoids to take account for the acceleration which is undefined at the impact instant. The model so developed combines the bi-potential method to solve contact problems and a first order scheme for the time integration. This work leads to develop the finite element code FER/Impact. Different numerical applications illustrate clearly the validity and efficiency of the method. A special attention is paid to the quantification of dissipated energy by friction.

**key words :** contact - impact - dynamic - numerical methods - finite element