



**HAL**  
open science

# Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires

David Le Touzé

► **To cite this version:**

David Le Touzé. Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2003. Français. NNT: . tel-00370200

**HAL Id: tel-00370200**

**<https://theses.hal.science/tel-00370200v1>**

Submitted on 23 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**

**MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL**

*Année 2003*

N° B.U. : ED 367-093

**Thèse de DOCTORAT**

***Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par

**DAVID LE TOUZÉ**

le 20 octobre 2003  
à l'École Centrale de Nantes

Traitant de

**METHODES SPECTRALES POUR LA MODELISATION NON-LINEAIRE  
D'ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE INSTATIONNAIRES**

**JURY**

<i>Président :</i>	M. Yves LECOINTE	Professeur, Université de Nantes
<i>Rapporteurs :</i>	M. Stéphan GRILLI	Professeur, University of Rhode Island (USA)
	M. Bernard MOLIN	H.D.R., École Supérieure d'Ingénieurs de Marseille
<i>Examineurs :</i>	M. John CHAPLIN	Professeur, University of Southampton (UK)
	M. Pierre FERRANT	Maitre de Conférences, École Centrale de Nantes
	M. Gérard DELHOMMEAU	Ingénieur de Recherche, École Centrale de Nantes







*à la mémoire de Maurizio Landrini*



# Remerciements

Je voudrais en tout premier lieu exprimer toute ma gratitude aux deux rapporteurs de cette thèse, Messieurs Stéphan Grilli et Bernard Molin, qui ont prêté une lecture attentive à ce manuscrit long et parfois laborieux, et m'ont fait profité de leurs commentaires avisés. Je suis de même très reconnaissant à Messieurs John Chaplin et Yves Lecointe d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Je sais aussi gré à Gérard Delhommeau d'avoir accepté d'encadrer officiellement cette thèse, ainsi que de son appui au long de son déroulement. Mes remerciements vont ensuite aux autres permanents de la Division Hydrodynamique Navale du Laboratoire : en l'occurrence la petite équipe formée de Bertrand Alessandrini, Lionel Gentaz et Alain Clément pour leur accueil tout d'abord, pour leur disponibilité, et surtout pour les diverses discussions scientifiques constructives –et même moins scientifiques– qu'on a pu avoir à bâtons rompus au cours de ces trois années. Enfin, je remercie Anne Lagatu, notre secrétaire, de son aide toujours efficace et de sa disponibilité constante.

Je voudrais maintenant déroger légèrement au chemin usuel et tout tracé des remerciements convenus, pour exprimer simplement mon ressenti de ces trois riches années (on va encore me taxer de plumitif!). Et, puisque ma réponse à la question de savoir si ma thèse au sein de notre petite équipe de recherche s'est bien déroulée, est sans hésitation un 'oui' franc, c'est aux gens à qui je dois une partie de ce 'oui' que je voudrais m'adresser ici.

Ainsi, si je dois la réussite de cette thèse à quelques uns, c'est en premier lieu à deux personnes que je pense. A Pierre Ferrant tout d'abord, qui a cru en moi depuis le début et n'a jamais cessé de m'aider et me soutenir tout au long de ce travail, se plaçant toujours dans une position de collaborateur avisé plus que dans celle d'un 'chef' impératif ou distant –même s'il est amicalement affublé, entre thésards, de ce surnom : 'Chef'. Je tiens à le remercier de m'avoir non seulement efficacement chapoté au long de cette thèse, mais aussi guidé et appuyé dans la stratégie (de publication entre autres) et les démarches *sine qua non* d'une poursuite espérée dans le domaine. Commenant par m'apporter une aide pratique lors de mon intronisation à la fois à l'hydrodynamique et au spectral, il m'a ensuite peu à peu accompagné vers une recherche en autonomie, éclairant çà-et-là de

sa connaissance de l'hydrodynamique les difficultés rencontrées, proposant foison d'idées (pas fructueuses à tout coup mais souvent étonnantes et novatrices), et veillant à toujours maintenir une orientation intéressante aux travaux menés. Quelque part, ce succès de notre collaboration est aussi dû à des similarités de nos deux tempéraments, ce côté un peu 'brouillon guilleret qui ne sait pas dire non' que nous partageons, je crois, notamment dans la gestion 'optimale' des délais impartis –ou négociés!– (c'est-à-dire une productivité à l'inverse du temps restant...), mais c'est surtout que Pierre a toujours eu le naturel ou la gentillesse de se rendre disponible pour répondre à mes différentes interrogations et requêtes, ce malgré ses multiples casquettes. Et pour être tout à fait complet, je lui dois aussi quelques virées à tire d'ailes vrombissantes de par le monde, qui ont joint l'agréable à l'utile. Donc vraiment merci, Pierre, de l'encadrement de ces trois années, en espérant que notre collaboration n'est pas terminée.

C'est ensuite à mon ami et collègue Félicien Bonnefoy –dit FéBô, FeB', Grand FeB', PhiB', Bonnefoïe, l'Agrégé Conseil, Deux Mètres, voire La Grande Gigue, pour ceux qui ne l'auraient pas reconnu tant son nom d'usage est, de fait, peu usité– confirmé de l'Église Catholique de naissance (ou presque), je sais qu'il ne m'en voudra qu'à demi de le révéler ici! Si notre 'Théoricien' comme nous l'appelons aussi est non seulement un 'fort en thème' précieux, c'est surtout compagnon de travail merveilleux : curieux, efficace, critique, rigoureux et qui ne rechigne pas à la tâche. Son œil avisé est pour beaucoup, je crois, dans le caractère fructueux de notre collaboration, y compris la justesse espérée de ce manuscrit. Bien sûr il faut le remonter de toutes pièces de temps à autre, les jours où son auto-dépréciation naturelle mais totalement induite le dégonfle comme une baudruche. Là encore, je porte le vif espoir que cette curieuse paire que nous formions au travail (et qui en a fait rigoler plus d'un, n'est-ce pas Fillette?) puisse se reconstituer dans l'avenir. Mais surtout FéBô, merci de ton amitié dévouée et plus encore de ton amitié tout court ; qui pourrait vraiment tomber sur quarante-trois minutes en soutenance, sans un bon canard précédé d'une soupe de bettes la veille? Et ce n'est qu'un exemple...

Naturellement, si ces années de vie –et non seulement de travail– ont été très agréables, ce n'est pas seulement grâce à un Pierre ou un FéBô, mais grâce à la petite bande toute entière ; son noyau de skieurs d'abord, avec en premier mon vieux compagnon de quatre ans de route Yann Andrillon (dit Yannou ou encore Andrilloniç), notre champion local toujours un œil au large, l'homme des codes soucoupes volantes (VOFNI-man), nouveau joueur de mots. Et toujours dans ce noyau on trouve Mathieu Doring, notre 'Matteo', le râleur enthousiaste, celui qui lâche des carrés de billes fluides toute la journée, et se retire le soir dans son carré flottant, notre commentateur sportif du midi ; il y a enfin mon CoB', Christophe Josset, 'The Joss', le grand sportif de la bande, planchou star, star du bad, son humour caustique, ses batailles Quichottiennes contre les moulins-à-vent du ministère, son magnétisme informatique...

Et puis ensuite le reste de la bande, les vieux d'abord : nos deux starlettes Fillette

(Karine) et son soleil rennais, et Gaëlle et ses clémentines du matin ; notre Fourier-Kochinman de Floride PEG (Pierre-Emmanuel) et ses quarante de fièvre en régates ; mon vieux Num (Régis), ses jeux de mots et ses poissons ; et son premier disciple Num2 (Alexander) et nos rigolades icamiennes ; mais aussi Dédé (Guillaume), Kostia, Eric. Et puis les plus jeunes : Babar (Aurélien) en tête, avec son pendule et son chat ; mon nouveau CoB' et jeune papa Jean-Marc ; Num3 (Alban) et son vélo ; et enfin les DEAs, nos nouveaux-nés, les 'Stars', les 'Dalton' et leurs bureaux rêvés, je veux bien sûr parler de nos trois rigolus préférés : Romulus (Romain), Jimmy (Jean-Christophe) et Michael (Mikaël). Un mot d'amitié aussi à celles et ceux de leurs compagnes et compagnons avec qui on a partagé de bons moments.

Je remercie tous ces gens(tits) d'avoir supporté bon gré mal gré les bons et mauvais jeux de mots, les facéties et autres absurdités dont je leur ai rebattu les oreilles sans retenue, et les remercie autant de ceux dont ils m'ont abreuvé eux-même.

Je veux aussi remercier mes proches qui m'ont toujours soutenu au long de cette thèse : ma compagne en particulier qui a su endurer le 'rush final', mes parents, mes frères, ainsi que la petite bande de mes ex-colocataires et amis.

Pour conclure, je voudrais dire qu'au cours de ces trois ans, je me suis senti de mieux en mieux au sein de notre petit bout de laboratoire, goûtant de plus en plus les récompenses de la recherche qui avance, au sein d'une équipe soudée, pleine d'idées et de partage.

En vrac enfin, je voudrais associer à ces remerciements quelques amis récurrents, de cœur ou d'esprit, et quelques compagnons de route à qui je dois des bons moments, du baume au cœur, des convictions ou de simples songes éthérés. Donc merci à vous aussi les p'tits zamis pour votre souffle d'équilibre et vos loupottes sensées sans lesquels je ne saurais faire de vagues... pêle-mêle et j'en oublie : Rabah Ameer-Zaimeche, Marc Aussitôt, Paul Auster, Bach, Beethoven, Benabar, Bertrand et Ludo d'Enjouez-vous, Julie Bertuccelli, Georges Brassens, Jacques Brel, André Brink, Carla Bruni, Laurent Cantet, Guy Carlier, Albert Camus, Jeanne Cherhal, Denis Cheissoux, le chirurgien de Grenoble et l'ambulancière de Termignon la Vanoise et mais pas les skis Tecno Pro, Frédéric Chopin, Pascale Clarck, Marie Colmant, Fedor Mikhaïlovitch Dostoïevski, Mabinti Fofana, Romain Gary, Serge Halimi, Amadou Hampâté Bâ, les hôtesse conciliantes de la Cité des Congrès, Paco Ibañez, les inventeurs du Uno et du Scrabble, Wassily Kandinsky, Paula Jacques, Bobby Lapointe, Georges de La Tour, David Lynch, Matthieu du Graslin, Henri Matisse, Philippe Meyer, 'Momo' du T.U., Nanni Moretti, Mozart, Edvard Munch, Les Ogres de Barback, Jean-Marie Pelt, François Pérusse, Patrick Pesnot, Pablo Picasso, Jacques Prévert, Ignacio Ramonet, Alain Rémond, Jacques Rivette, Le Petit Robert, la petite bande du Mumble's, Vincent Rocca, Erik Satie, Schubert, Amartya Sen, Michel Serre, Johann Sfar, Christian Sorg, John Surman, Henri Tachan, Danis Tanovic, La Tordue, Lewis Trondheim, Tryo,

Zoé Varier, Boris Vian, Vivaldi, Wim Wenders, Edward Yang, Agir Ici, Aide et Action, Amnesty International, Artisans du Monde Nantes, Le Canard Enchaîné, le Cinématographe, le Concorde, Courrier International, France Inter, Grain de Sable, Ingénieur Sans Frontière Nantes, le Katorza, la Maison des Citoyens du Monde, Le Monde Diplomatique, MoveOn, Réseau Solidarité, Télérama, Transnationales.org, Bourges, l'abbaye de Fontevreau, les chouettes coins visités de Loire-Atlantique et de Bretagne, la Crête, les Grands Lacs italiens, Kyoto, l'île de Miyajima, le Mont Saint-Michel, Nantes, Paris, Rome, la Savoie, Venise... bref merci à ce petit monde de bon sens et de beaux lieux, chaque jour plus acculés.





# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Méthodes Spectrales appliquées à l'Hydrodynamique Navale</b>	<b>9</b>
<b>I.1 Tour d'horizon bibliographique</b>	<b>11</b>
I.1.1 Positionnement de notre méthode . . . . .	12
I.1.2 Méthodes spectrales appliquées à la mécanique des fluides en général . .	15
I.1.3 Évolution méthodologique des techniques spectrales appliquées à l'hydrodynamique . . . . .	18
I.1.3.1 Approche dite 'mode-coupling' et équation de Zakharov . . . . .	18
I.1.3.2 Méthode 'directe' . . . . .	22
I.1.3.3 Modèles dits 'High-Order Spectral' . . . . .	23
I.1.3.4 Modèles utilisant un 'Dirichlet-Neumann Operator' . . . . .	26
I.1.3.5 Méthode volumique ' $\sigma$ -Transform' . . . . .	30
I.1.3.6 Autres méthodes instationnaires . . . . .	31
I.1.3.7 Premières extensions vers la génération . . . . .	32
I.1.3.8 Méthodes stationnaires et de reproduction de houle . . . . .	33
I.1.4 Applications traitées avec les techniques principales . . . . .	37
I.1.4.1 Modèles HOS . . . . .	37
I.1.4.2 Modèles DNO . . . . .	39
I.1.4.3 Modèles volumiques . . . . .	39
I.1.5 Aspects numériques . . . . .	40
<b>I.2 Généralités sur les méthodes spectrales utilisées</b>	<b>43</b>

I.2.1	Nature et propriétés des séries pseudo-spectrales . . . . .	44
I.2.1.1	Nature des séries . . . . .	44
I.2.1.2	Décroissance modale et taux de convergence associé . . . . .	45
I.2.2	Problème du repliement . . . . .	49
I.2.2.1	Repliement ‘artificiel’ . . . . .	49
I.2.2.2	Repliement ‘naturel’ . . . . .	53
I.2.3	Aides à la stabilité . . . . .	53
I.2.3.1	Lissage et filtrage . . . . .	53
I.2.3.2	Sur-détermination . . . . .	54
I.2.3.3	Extension du domaine pour le calcul des dérivées spatiales . . . . .	55
<b>II</b>	<b>Noyau de la Méthode et Validations</b>	<b>59</b>
<b>II.1</b>	<b>Formulations Employées et Mise en Œuvre Numérique</b>	<b>61</b>
II.1.1	Formulations du Noyau du Problème . . . . .	61
II.1.1.1	Formulation Générale . . . . .	61
II.1.1.2	Expressions en quantité surfaciques . . . . .	64
II.1.2	Expressions au second ordre . . . . .	65
II.1.3	Méthodes de résolution non-linéaires employées . . . . .	67
II.1.3.1	Méthode directe MD . . . . .	67
II.1.3.1.1	Développement spectral . . . . .	67
II.1.3.1.2	Résolution . . . . .	68
II.1.3.1.3	Stabilité de la technique MD . . . . .	70
II.1.3.2	Méthode HOS . . . . .	72
II.1.3.2.1	Principe de la méthode . . . . .	72
II.1.3.2.2	Résolution . . . . .	74
II.1.3.2.3	Problème spécifique du repliement . . . . .	76
II.1.3.2.4	Stabilité des techniques HOS . . . . .	78
<b>II.2</b>	<b>Validations du Noyau de la Méthode et Applications Liées</b>	<b>81</b>
II.2.1	Validations du noyau formulé au second ordre . . . . .	81

II.2.2	Validations du noyau en non-linéaire complet . . . . .	86
II.2.2.1	Propriétés numériques . . . . .	86
II.2.2.2	Comparaison de lâchers de surface libre . . . . .	89
II.2.2.3	Comparaisons de cas d'oscillations forcées . . . . .	89
<b>III</b>	<b>Extensions de la Méthode et Applications</b>	<b>97</b>
	Notion de potentiel additionnel . . . . .	99
<b>III.1</b>	<b>Bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre</b>	<b>103</b>
III.1.1	Formulation du problème . . . . .	105
III.1.1.1	Formulation générale . . . . .	105
III.1.1.2	Expressions au second ordre . . . . .	107
III.1.2	Recherche d'un potentiel additionnel . . . . .	109
III.1.2.1	Couplage à un noyau de méthode d'éléments aux frontières . . . . .	111
III.1.2.2	Potentiel additionnel spectral . . . . .	114
III.1.3	Mise en oeuvre numérique . . . . .	116
III.1.3.1	Géométrie du domaine de résolution additionnel . . . . .	118
III.1.3.2	Consistance des conditions sur le batteur unifié . . . . .	120
III.1.3.3	Absorption numérique et rampe en temps sur le batteur . . . . .	122
III.1.3.4	Dérivées spatiales de l'élévation de surface libre . . . . .	127
III.1.3.5	Calcul des volumes et des énergies . . . . .	128
III.1.3.6	Refonte du code et programmation efficace . . . . .	130
III.1.4	Propriétés numériques du modèle . . . . .	132
III.1.4.1	Condition de Courant et convergence temporelle . . . . .	132
III.1.4.2	Stabilité numérique et cumul d'erreurs . . . . .	135
III.1.4.3	Convergence modale . . . . .	136
III.1.4.4	Conservation du volume et bilan énergétique . . . . .	142
III.1.4.5	Temps de calcul et paramètres associés . . . . .	146
III.1.5	Validations et applications . . . . .	148
III.1.5.1	Comparaison à la solution analytique en régime établi . . . . .	148

III.1.5.2	Comparaison succincte à un signal de houle expérimental . . . . .	155
III.1.5.3	Application à l'étude de la zone utile selon le mouvement du batteur	157
III.1.5.4	Application à la suppression des ondes libres . . . . .	160
III.1.5.5	Application à l'étude d'un bassin muni d'un batteur partiel . . . . .	162
III.1.6	Conclusions relatives au modèle de bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre . . . . .	164
<b>III.2</b>	<b>Génération de Houles Complètement Non-Linéaires</b>	<b>167</b>
III.2.1	Formulation du modèle étendu . . . . .	169
III.2.1.1	Choix du potentiel additionnel . . . . .	169
III.2.1.2	Formulation associée . . . . .	170
III.2.1.3	Optimisation de la formulation du potentiel additionnel . . . . .	171
III.2.1.4	Extension à la génération de houle irrégulière et à la reproduction de houle cible . . . . .	174
III.2.2	Validation et Applications . . . . .	176
III.2.2.1	Comparaison de houles régulières à la solution en régime établi . . . . .	176
III.2.2.2	Génération de houles de spectre irrégulier et reproduction de houles cibles . . . . .	183
III.2.2.3	Premiers résultats tri-dimensionnels . . . . .	188
III.2.3	Conclusion sur la génération de houle non-linéaire . . . . .	190
<b>III.3</b>	<b>Application à la diffraction autour de corps</b>	<b>193</b>
III.3.1	Motivation . . . . .	195
III.3.2	Intérêts de ces modèles mixtes, et spécificité adéquate de la méthode spectrale . . . . .	196
III.3.3	Modèle de diffraction potentiel mixte spectral / BEM . . . . .	198
III.3.3.1	Formulation . . . . .	199
III.3.3.2	Mise en œuvre numérique de l'association avec champ incident spectral . . . . .	200
III.3.3.3	Exemple d'application à la diffraction de houles bi-dimensionnelles irrégulières sur un cylindre . . . . .	202
III.3.4	Modèle de diffraction <i>SWENSE</i> mixte spectral potentiel / RANSE visqueux	212
III.3.4.1	Formulation . . . . .	212

---

III.3.4.2 État actuel de la mise en œuvre . . . . .	214
III.3.5 Conclusion sur les modèles mixtes potentiel et visqueux . . . . .	215
<b>III.4 Vers un bassin de houle en non-linéaire complet ?</b>	<b>219</b>
III.4.1 Formalisme envisagé . . . . .	219
III.4.2 Résolution de type MD . . . . .	222
III.4.3 Résolution de type HOS . . . . .	223
<b>Conclusion</b>	<b>231</b>
<b>Annexes</b>	<b>233</b>
<b>A Validations du noyau par comparaison à d'autres modèles potentiels</b>	<b>235</b>
<b>B Tableau des entrées du code de calcul <i>SWEET</i></b>	<b>241</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>245</b>
Liste des publications associées . . . . .	255



# Liste des Sigles et Acronymes

BEM	<i>Boundary Element Method</i>
BIEM	<i>Boundary Integral Equation Method</i>
CCSL	<i>Condition Cinématique de Surface Libre</i>
CDSL	<i>Condition Dynamique de Surface Libre</i>
CFL	[condition de] <i>Courant-Friedrichs-Levy</i>
CLAROM	<i>CLub pour les Actions de Recherche sur les Ouvrages en Mer</i>
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
CSL	<i>Conditions de Surface Libre</i>
DF	<i>Différences Finies</i>
DNO	<i>Dirichlet-Neumann Operator</i>
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
ECN	<i>École Centrale de Nantes</i>
EF	<i>Éléments Finis</i>
EHTC	<i>Équations de Hilbert avec Transformation Conforme</i>
Fé.Bo.	<i>Félicien Bonnefoy</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
GMRES	<i>Generalized Minimal RESidual [method]</i>
HOS	<i>High-Order Spectral</i>
ICARE	code de calcul RANSE du LMF (auteurs : Alessandrini & Gentaz)
iFFT	<i>inverse Fast Fourier Transform</i>
iTF	<i>Transformée de Fourier inverse</i>
ITTC	<i>International Towing Tank Conference</i>
JONSWAP	<i>JOint North Sea WAve Project</i>
KdV	<i>Korteweg-de Vries [equation]</i>
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
LMF	<i>Laboratoire de Mécanique des Fluides [de l'ECN]</i>

LU	<i>Lower-Upper</i> [decomposition]
MCA	<i>Mode-Coupling Approach</i>
MD	<i>Méthode Directe</i>
MEL	<i>Mixed Euler-Lagrange</i> [method]
MMPSI	<i>Méthode Mixte Pseudo-Spectrale Intégrale</i>
NLS	<i>Non-Linear Schrödinger</i> [equation]
NWT	<i>Numerical Wave Tank</i>
PSME	<i>Pseudo-Spectral Matrix Element</i> [method]
PSST	<i>Pseudo-Spectral Sigma-Transform</i> [method]
RANSE	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations</i>
RK4	<i>4<sup>th</sup>-order Runge-Kutta</i> [scheme]
SL	<i>Surface Libre</i>
SPH	<i>Smooth Particle Hydrodynamics</i> [method]
ST	<i>Sigma-Transform</i> [method]
SWEET	<i>Spectral Wave Evolution in the ECN Tank</i> (code de calcul spectral)
SWENSE	<i>Spectral-Wave Explicit Navier-Stokes Equations</i>
TF	<i>Transformée de Fourier</i>
TS	<i>Technique Spectrale</i>
VF	<i>Volumes Finis</i>
VOF	<i>Volume Of Fluid</i> [method]
XWAVE	code de calcul BEM du LMF (auteur : Ferrant)





# Introduction

Si l'on devait résumer de deux mots ce qu'est un problème d'hydrodynamique navale, on pourrait choisir ceux-ci : 'vagues' et 'bateaux', ou plus précisément : un écoulement à surface libre sur laquelle se propagent des ondes sous l'action de la gravité, et des structures de natures variées. Parmi ces différentes natures on compte toutes les structures présentes en mer : fixes (barges, plate-formes, éoliennes, systèmes de récupération de l'énergie de la houle, etc.) ou mobiles (bateaux, corps dérivants, etc.), voire déformables. À quoi s'ajoutent les côtes et les structures qui y sont implantées, ainsi que des parois internes aux structures marines (comme les citernes ou encore les superstructures et les cales en cas d'eau embarquée respectivement sur les ponts ou par voie d'eau). Quant à l'écoulement de surface libre, il se caractérise principalement par les ondes de gravité qui s'y propagent (houle, ondes diffractées ou radiées, ou encore ondes de ballonnement en cuves), incluant potentiellement le déferlement de la surface et l'interaction avec d'autres fluides (air pour le déferlement, mais aussi pétrole par exemple). Le but ultime est toujours d'obtenir des estimations précises des interactions entre cet écoulement de surface libre et les structures, pour pouvoir dimensionner ces structures, étudier leur fatigue ou leur comportement sous conditions extrêmes, ou bien encore leur efficacité (résistance à l'avancement des navires, intégrité à long terme de structures au large, rendement de récupérateurs houlomoteurs, etc.). Pour compléter cette brève description il est besoin de mentionner que lors de ces interactions, outre les phénomènes gravitaires et inertiels, l'influence de la viscosité du fluide peut intervenir de manière non négligeable. Parmi ces problèmes, on s'intéressera ici principalement à ceux pour lesquels intervient un état de mer.

Afin d'obtenir ces estimations deux options sont offertes, soit celle de les quantifier par des mesures expérimentales, soit d'y accéder au moyen de techniques numériques modélisant au mieux les différents phénomènes mis en jeu.

Si on fait le choix de la voie expérimentale, l'instrumentation directe des structures étant rendue difficile par leur taille surtout, mais aussi par les complications et surcoûts liés à leur environnement (violence des conditions naturelles, corrosion saline, etc.), on

fera généralement appel à des essais sur modèles réduits et en eau douce. Cela sera de plus nécessairement le cas s'il s'agit d'effectuer des pré-études lors de la conception de structures, dont le coût de construction à échelle réelle justifie bien souvent d'avoir recours à ces essais préalables. Par cette réduction d'échelle on aura alors effectivement gagné en simplicité sur le plan de la mesure des grandeurs lors des essais –ils nécessiteront néanmoins toujours un savoir-faire bien spécifique qui forme à lui seul un domaine de compétence complet. Cependant, on se sera aussi ajouté deux difficultés non négligeables qui ont trait, d'une part à l'extrapolation des résultats des essais à l'échelle réelle au moyen de similitudes partielles, et d'autre part à la reproduction en bassin de conditions réelles. Et par delà, il faut aussi conserver à l'esprit que le coût global des expériences demeure élevé (coûts d'investissement de départ et d'entretien, coût des matériels technologiques de mesure, coût humain), d'autant plus critique si on veut procéder à des séries d'essais systématiques. On s'est donc tourné, avec l'avènement des moyens informatiques, vers la modélisation numérique des écoulements. L'inter-dépendance des deux approches reste forte néanmoins, puisqu'on ne saurait créer de modèles numériques sans les comparer à la réalité, et en mécanique des fluides les différents modèles sont encore loin d'être à même de reproduire précisément tous les phénomènes à la fois dans le cas d'un corps soumis à la houle par exemple. A l'inverse, on est désormais capable de développer des outils numériques qui peuvent être une aide à l'utilisation des moyens expérimentaux, de par leur flexibilité, leur rapidité et leur facilité d'utilisation ; c'est par exemple le cas du code *SWEET* développé au cours de cette thèse (cf. chapitre III.1).

Si l'on opte pour une modélisation numérique des interactions hydrodynamiques d'un corps soumis à un état de mer, il est besoin notamment de recréer avec précision (et si possible à coût de temps de calcul restreint) la houle qui arrive sur le corps, ce qui inclut sa génération au loin et sa propagation jusqu'au corps. De plus, la présence d'un corps rend de prime abord naturelle l'utilisation d'un modèle tenant compte de la viscosité du fluide. Cependant, du fait de la dissipation numérique inhérente à ces modèles de fluide réel ils sont encore, avec les moyens actuels, inaptes à propager de la houle sans la dissiper, du moins dans la pratique (*i.e.* à temps de calcul non prohibitif). À l'inverse la théorie potentielle, développée historiquement en hydrodynamique navale, notamment pour tirer au mieux avantage des moyens informatiques au départ très restreints, est intrinsèquement conservative et donc bien adaptée à la propagation de houle qui, hors la présence de corps, dépend très peu des effets visqueux. *A contrario* bien entendu, en appliquant ces méthodes potentielles à des calculs incluant la présence de corps, les effets visqueux négligés peuvent se traduire, selon le corps, par des différences marquées entre leurs prédictions, mêmes précisément calculées, et des mesures réelles (les résistances de frottement et de vagues d'une carène sont par exemple du même ordre). Survient alors l'idée attractive d'employer les deux approches simultanément. La première possibilité en ce sens est de coupler les deux modèles à travers une surface de raccord entre un domaine proche du corps traité en fluide visqueux, et un domaine extérieur traité en fluide parfait chargé d'amener la houle et de propager loin du corps les ondes radiées et diffractées. Cela

a par exemple été développé par Guillermin [65] à partir du code Navier-Stokes *ICARE* du Laboratoire. Mais ce type de couplage, de mise en œuvre relativement complexe, demeure jusqu'à présent réduit à la prise en compte d'une surface libre linéarisée dans le domaine potentiel, restreignant le réalisme du modèle à des houles de faibles cambrures ; de surcroît, outre le modèle de Hamilton & Yeung [67] limité lui à un corps cylindrique, on ne connaît pas d'exemple d'application de ces modèles au calcul de la diffraction autour de corps en conditions incidentes complètement instationnaires. D'autres modèles dits de 'décomposition de domaine', comme celui de Greco, Faltinsen & Landrini [58], associent aussi un modèle potentiel (dans une zone de calcul où l'écoulement possède une dynamique relativement modérée), à un modèle de fluide réel (dans une zone de dynamique violente). Néanmoins, il s'agit plus là de pouvoir traiter la violence de la dynamique de l'écoulement seul que de calculer les effets visqueux autour d'un corps ; dans cette même optique, des modèles couplés en écoulement potentiel existent aussi, comme celui de Brandini & Grilli [13] dans lequel les deux domaines ne sont plus séparés par une frontière spatiale mais par une frontière temporelle. Pour revenir à la modélisation de corps dans la houle, l'autre possibilité d'association des approches potentielle et visqueuse est de réaliser un changement de variable visant à reformuler le modèle visqueux en variables diffractées, technique originale nouvellement développée au Laboratoire (cf. chapitre III.3). Elle permet au code 'fluide réel' de calculer l'écoulement diffracté seul (qui est avantageusement confiné dans un domaine proche du corps), alors que le champ incident, pré-calculé par une méthode potentielle hors la présence du corps, agit en tant que termes de forçage connus lors de la résolution en fluide visqueux. Comme on le détaillera plus avant dans ce même chapitre, ce type de formulation présente nombre d'avantages mais il requiert la spécificité que le champ incident potentiel soit connu continûment à travers la surface libre incidente, ce qui limite fortement les méthodes potentielles candidates (excluant la BEM par exemple). En écoulement potentiel pur, ce même changement de variable peut aussi servir à réduire drastiquement le coût d'un calcul de diffraction autour d'un corps tri-dimensionnel soumis à une houle bi-dimensionnelle, mais toujours avec la même spécificité restrictive.

C'est dans ce triple contexte de recherche d'un modèle potentiel :

- capable de générer et propager de la houle de manière précise à moindre coût,
- donnant ainsi l'occasion de créer un outil apte à reproduire toutes les caractéristiques d'un bassin de houle physique tel que celui dont s'est récemment doté le Laboratoire,
- et fournissant aussi une description continue de la solution à travers la surface libre,

qu'il a paru intéressant d'explorer les possibilités des méthodes spectrales qui sont réputées pour leur précision et leur rapidité de calcul. L'objet de ce travail de thèse a donc été d'investiguer l'application d'une telle approche spectrale au problème de la génération de houle non-linéaire.

Afin de mieux situer les réalisations présentées dans ce mémoire, il peut être utile de préciser qu'elles ne s'inscrivent pas dans une ligne pré-existante de développement de techniques spectrales au sein du Laboratoire. Il s'agit donc au départ d'un travail plus prospectif qu'appliqué, même si certains résultats sont originaux et d'intérêt. L'objectif affiché initialement était d'étudier l'application de ces techniques à notre problème de la génération de houle sous le plus large éventail d'angles de vue possible, sans se restreindre *a priori* à des orientations déterminées. La motivation qui a présidé à ce choix a procédé d'une volonté d'acquérir une relative maîtrise de ces méthodes dans leurs différents aspects, avant d'en dégager les intérêts pratiques à l'issue de l'expérience acquise, plutôt que de se lancer directement dans une utilisation exhaustive mal contrôlée. Ces techniques étant en effet relativement différentes des autres méthodes utilisées plus classiquement en écoulement potentiel (méthodes intégrales en particulier), tant dans leur mise en œuvre que dans les réflexes numériques associés, il a paru plus naturel de commencer par bien se familiariser avec elles. Le fait que ces méthodes ont jusqu'à présent encore été peu appliquées à l'hydrodynamique, et pratiquement pas à la *génération* de houle, justifie aussi ce choix.

Au cours de ce travail prospectif, on a donc porté un intérêt particulier à la littérature traitant de ces méthodes, en se limitant principalement à leur application à l'hydrodynamique et à quelques sources théoriques, du fait de l'étendue de leur utilisation par ailleurs. Le premier chapitre I.1 de ce mémoire présente un résumé de cette bibliographie, regroupée en différentes sous-classes des méthodes spectrales employées jusqu'à présent en hydrodynamique navale ; les applications pratiques présentées dans les différents articles étudiés et les remarques d'intérêt qui y sont formulées quant à l'utilisation de ces techniques spectrales sont aussi recensées dans ce chapitre. Précisons que cette étude bibliographique a été menée tout au long de ce travail de doctorat et non seulement au début, on l'a de la sorte étendue à mesure de l'approfondissement de notre compréhension des méthodes, ce qui a permis de réaliser des corrélations et d'en tirer de nouveaux enseignements. Ainsi, la mise en œuvre de méthodes du type High-Order Spectral, par exemple, n'est finalement intervenue qu'assez tard, après qu'on a pu bien entrevoir à la fois l'intérêt et la possibilité de cette implémentation pour notre type de problème ; même si là-encore, les développements en cours d'autres aspects de l'approche spectrale ne laissaient pas non plus nécessairement le temps de s'y consacrer véritablement avant. À ce premier chapitre est adjoint, pour constituer la première partie de ce manuscrit, un court deuxième chapitre I.2 qui recense quelques éléments théoriques directement liés aux méthodes spectrales qui sont ici mises en œuvre, ce dans l'optique de faciliter la compréhension de leurs développements, exposés dans les chapitres qui suivent.

Après cette première partie principalement extraite de la littérature, on présente dans une seconde partie les noyaux des différentes formulations spectrales employées au cours de cette thèse. Des aspects théoriques et de mise en œuvre pratique sont discutés dans un premier chapitre II.1, et la spécificité des modélisations développées par rapport à celles déjà existantes est mise en lumière. L'étude des propriétés numériques de convergence et de stabilité des modèles est aussi menée. Dans un deuxième chapitre II.2, des applications

directes de ces noyaux sont présentées, d'abord à but de validation par comparaison à d'autres solutions analytiques et numériques, et aussi pour illustrer les quelques cas pratiques qu'ils permettent de traiter. Ces applications des noyaux restent néanmoins limitées principalement au mouvement forcé de cuves hors la présence du déferlement, ce qui demeure d'un intérêt pratique restreint ; en fournissant toutefois des résultats qui peuvent servir de référence sur de telles configurations.

C'est pour pallier ces restrictions qu'on a concentré les efforts vers la recherche de possibilités d'extension de notre modélisation spectrale. Le résultat en est présenté dans une troisième partie où les différents chapitres traitent des extensions réalisées par thèmes, fournissant à chaque fois la formulation, l'étude des propriétés et les résultats d'application. La première de ces applications (chapitre III.1) est l'obtention du modèle *SWEET* déjà mentionné, qui reproduit au second ordre l'évolution instationnaire du processus complet de génération et de propagation de la houle en bassin tri-dimensionnel. En particulier, y sont intégrées les différentes caractéristiques relatives au mouvement quelconque du batteur ou à la présence d'absorption dans un bassin réel, tel que le nouveau bassin de houle de l'ECN. L'étude complète des propriétés de ce modèle ainsi qu'une validation fine de ses résultats sont menées, avant d'illustrer ses possibilités sur quelques exemples. Dans un deuxième chapitre III.2, le problème de la génération de houle complètement non-linéaire est abordé. Une utilisation de doublets tournants 'optimisés' à cette fin est proposée, et des résultats sur houles régulières et irrégulières sont présentés et validés. Enfin, on s'attache dans un troisième chapitre III.3 à montrer l'intérêt d'une telle génération de houle au moyen de cette technique spectrale, en vue de l'apporter comme champ incident à des modèles de diffraction formulés en changement de variables. Dans ce contexte, on présente d'abord la formulation de notre modèle potentiel mixte original, associant la technique spectrale pour générer la houle au code BEM *XWAVE* du Laboratoire pour calculer le champ diffracté, ainsi que les résultats obtenus sur des cas de diffraction autour de corps. Enfin, on développe la formulation novatrice d'un autre modèle mixte, nommé *SWENSE*, du même type mais qui associe notre méthode spectrale au code de calcul *ICARE* du Laboratoire, donc en écoulement visqueux cette fois. Ce modèle mixte, validé sur houle régulière, est actuellement en cours d'extension à la houle irrégulière. Dans un court et ultime chapitre III.4, on fait état de la prospection qu'on a menée en vue d'étendre les techniques spectrales présentées dans ce manuscrit au formalisme d'un modèle de bassin de houle, toujours tri-dimensionnel, mais cette fois en non-linéaire complet. Outre cette direction d'évolution future, quelques perspectives supplémentaires de développements et applications sont mentionnées dans la conclusion de ce mémoire.

En dernier lieu, il faut préciser qu'une partie de ce travail de doctorat a été réalisée en étroite collaboration avec Félicien Bonnefoy, dont la thèse porte sur le sujet plus spécifique de la génération de houle en bassin (à tous niveaux : analytique, numérique et expérimental), toujours sous la direction de Pierre Ferrant. Cette réalisation commune est en l'occurrence le modèle *SWEET* qu'on vient d'évoquer (chapitre III.1). Dans ce type de

situation, il n'est jamais aisé de discerner le travail du candidat de celui de son équipier, aussi a-t-on pris le parti de distinguer clairement, tout au long de ce chapitre, les 'paternités' des différents éléments de la mise en œuvre de ce modèle et de sa validation. Je veux aussi dire combien ce travail d'équipe a été stimulant, enrichissant et efficace, à mon sens du moins, donnant lieu à des échanges permanents qui ont souvent permis d'éliminer d'emblée, par simple confrontation des points de vue, quantité de travail inutile.





Première partie

Méthodes Spectrales appliquées à  
l'Hydrodynamique Navale



# Chapitre I.1

## Tour d'horizon bibliographique

Comme de nombreuses dénominations scientifiques, le terme de ‘spectre’ nous vient d’un aller-retour du latin ou de l’ancien français vers l’anglais, puis de l’anglais vers le français. C’est en effet Newton qui introduisit en 1671 ce terme de ‘spectrum’ dans le langage scientifique après qu’il eut décomposé la lumière au moyen d’un prisme, choisissant ce qualificatif probablement parce qu’il pouvait ainsi *observer à travers* (la lumière), ce qui en est la signification étymologique (aussi à l’origine de l’acceptation courante ‘fantomatique’ de ce même mot spectre, elle plus ancienne). Ce terme a donc été attribué en premier lieu à la décomposition de la lumière en raies de différentes longueurs d’ondes ou fréquences, il est alors naturellement resté lié à la physique des ondes au cours de son évolution, et généralement à toute décomposition de type fréquentiel. Ces dernières sont représentées mathématiquement sous formes d’intégrales, ou de manière discrète, de *séries* ; à partir de quoi s’est encore étendu ce terme de ‘spectral’ pour recouvrir aussi les représentations de quantités au moyen de séries s’appuyant, pour rester général, sur des bases de fonctions *globales* de l’espace de définition de la quantité représentée, et qui vérifient des propriétés de convergence rapide. C’est dans ce dernier sens qu’on entend généralement l’utilisation de ‘méthodes spectrales’, une description plus précise en est donnée à la première section I.1.1 de ce chapitre. Les méthodes incluses dans cette catégorie s’appliquent elles-mêmes à un vaste éventail de problèmes de la physique. Rien qu’en mécanique des fluides, elles interviennent dans de multiples sous-domaines sur de nombreuses applications (on trouvera quelques exemples en I.1.2).

Tout ceci pour montrer que si, de ce fait, ‘travailler sur les méthodes spectrales’ ne suscite l’incompréhension de personne dans le domaine de la physique, ce qu’on met derrière ces mots demeure vaste et vague. On n’aura donc pas ici la prétention, ni les connaissances, ni même probablement les capacités pour mener à bien une revue bibliographique des méthodes spectrales. On va donc simplement tenter dans un premier temps, section I.1.1, d’utiliser quelques éléments de bibliographie pour dresser un cadre rapide à la méthode qu’on utilise ici ; il sera fait état, dans un chapitre séparé I.2 et un peu plus en détails, des éléments théoriques relatifs aux propriétés et difficultés spécifiques associées à notre

méthode. Une fois ce cadre établi, on pourra faire mention de quelques exemples d'utilisation de ces techniques en mécanique des fluides d'une manière générale, au I.1.2, pour finalement se centrer sur les seules applications à l'hydrodynamique navale dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels. Or on compte en définitive relativement peu de telles applications, on a donc cherché à en répertorier le plus grand nombre. La section I.1.3 propose ainsi une tentative de suivi de leur évolution et de répartition selon différentes classes méthodologiques. On s'est efforcé, dans un deuxième temps à la section I.1.4, de dresser un bilan succinct des applications qui ont été réalisées à leur moyen. Enfin, on trouvera dans une dernière section (I.1.5) un regroupement des remarques principales faites sur ces méthodes par les différents auteurs quant à leurs propriétés spécifiques escomptées et/ou constatées.

### I.1.1 Positionnement de notre méthode

Pour donner une idée de ce qu'on entend ici par 'méthodes spectrales', et pour situer celle utilisée au cours de ce travail, deux ouvrages principaux ont servi de référence. Au long de ce mémoire on se référera d'ailleurs régulièrement à eux comme appui théorique, et parfois pratique. Le premier des deux est un livre de 1988, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* par Canuto, Hussaini, Quarteroni & Zang [17], qui couvre tous les aspects de l'application des méthodes spectrales dans le domaine jusqu'à la date de parution, tant sur les plans théorique que pratique. Précisons que cet ouvrage est une synthèse et non une revue, en ce sens que si des résultats d'applications tirés de la mécanique des fluides y sont montrés, c'est à simple titre illustratif. Notre seconde référence, ouvrage de synthèse lui aussi, est plus spécifiquement dédié aux méthodes 'pseudo-spectrales', aussi dites 'de collocation', classe à laquelle la nôtre appartient. Ce livre plus récent, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods* (1995), est l'œuvre de Fornberg [53]; il présente l'avantage d'être d'un abord relativement aisé, même s'il est moins complet que l'ouvrage précédent et qu'il expose ces techniques sous un angle spécifique, comme étant la limite de méthodes de différences finies. De ce même auteur associé à Driscoll, on s'est aussi servi d'un article plus récent [54]. On peut enfin mentionner le chapitre de Lions & Magenes [86] (1972) traitant des méthodes spectrales, ainsi que l'article d'Orszag de 1971 [104] surtout pour le problème du repliement (cf. I.2); en revanche l'ouvrage de Huet [73] (1976) dédié à la théorie spectrale, pourtant en français, est de lecture difficilement abordable.

De toutes ces sources on peut extraire quelques éléments de présentation des méthodes spectrales que voici. Dans les applications pratiques, la résolution des équations aux dérivées partielles d'un problème aux limites ne peut être réalisée qu'au moyen de techniques numériques. Parmi ces dernières, les principales sont les éléments finis (EF), les volumes finis (VF) et les différences finies (DF), techniques toutes trois applicables à un large éventail de problèmes. Et plus récemment est apparue l'utilisation de techniques spectrales (TS), qui ne sont pas elles aussi largement applicables. Les deux critères principaux de

choix d'une approche numérique sont souvent, d'une part la complexité de la géométrie du domaine, et d'autre part le niveau de précision requis. La technique la plus adaptée pour les géométries les plus complexes est la méthode des éléments finis ; les différences finies quant à elles ont un comportement intéressant dans une large gamme de niveaux de précision requis, et pour des domaines pouvant être relativement complexes. Selon Fornberg, il existe une relation étroite entre les deux techniques EF et VF et les DF, avec lesquelles les TS sont encore plus intimement liées. Ces dernières techniques ne sont cependant applicables qu'à des résolutions dans des domaines de formes très simples (parallélépipèdes, sphères, cylindres, ou composition de ces géométries simples), où elles peuvent en revanche apporter des niveaux de précision supérieurs à toutes les autres méthodes.

Même si toutes ces approches sont en relation, une nette distinction sépare la TS des autres approches dans son application. En effet, les EF, VF et DF sont des méthodes *locales*, i. e. l'approximation des dérivées des quantités en un point du domaine n'est obtenue qu'à partir des valeurs dans un voisinage proche de ce point (par exemple les seuls points de part et d'autre du point considéré pour des DF d'ordre 2 d'une fonction simple). L'idée sous-jacente est que la dérivée d'une fonction étant une propriété justement définie localement (sur un voisinage de taille limite nulle), il est 'raisonnable' de reproduire cela dans des techniques numériques discrètes, l'information à l'autre bout du domaine n'étant d'aucune utilité. Or justement, les techniques spectrales prennent le contre-pied de ce raisonnement, car elles sont *globales* et l'idée qui préside à leur utilisation est tout à fait différente. Quand on travaille avec des méthodes locales, la géométrie du domaine ailleurs qu'à l'endroit où l'on se trouve ne revêt aucune importance. En revanche, pour les TS la géométrie du domaine est capitale, puisqu'elles reposent en effet sur un *changement d'espace* entre l'espace physique du domaine de calcul, et un espace de fonctions qui :

- sont définies sur tout le domaine de calcul ;
- sont connues analytiquement et le plus régulières possible, de manière à pouvoir être différenciées exactement ;
- et enfin, forment une base de représentation convergente des fonctions de l'espace physique.

Ainsi, une fonction  $f$  de l'espace physique peut-être exprimée sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N A_n \psi_n(x) \quad (\text{I.1.1})$$

où les  $\psi_n(x)$  seront par exemple des fonctions trigonométriques ou des polynômes de Tchebychev. Dans le contexte de la résolution d'équations aux dérivées partielles dépendantes du temps, cette approche présente des atouts notables :

- elle présente une erreur qui décroît rapidement avec  $N$ , jusqu'à un taux exponentiel pour les fonctions les plus régulières ;
- elle est virtuellement libre de toute erreur dissipative ou dispersive ;

- elle conserve un comportement remarquable dans le cas où la solution est non régulière, voire discontinue ;
- et spécialement dans un espace à plusieurs dimensions, des discrétisations relativement grossières lui suffisent à satisfaire des niveaux de précision requis élevés, permettant des simulations efficaces à coûts de calcul et de mémoire faibles.

Bien sûr, ces TS sont nettement limitées par la nécessité d'obtenir le jeu de fonctions de base précédent, qui est intimement dépendant de la simplicité et de la régularité géométriques du domaine de calcul. Les autres facteurs limitants de ces méthodes sont :

- l'impossibilité d'avoir des niveaux de résolution différents dans des parties différentes du domaine (pas de raffinement local de la discrétisation, d'augmentation locale du niveau de précision de la modélisation, etc.) ;
- une mauvaise tolérance aux chocs ;
- et une compréhension théorique encore seulement partielle.

Historiquement, ces méthodes n'ont connu un essor qu'à partir des années 1970, après que Cooley & Tukey [30] ont proposé en 1965 le premier algorithme (FFT) de résolution rapide des transformées de Fourier (TF).

Maintenant qu'on a exposé que ces techniques spectrales consistent en une décomposition en série sur une base de fonctions globales, restent à déterminer d'une part les classes de fonctions  $\psi_n$  qu'il est possible, et surtout intéressant d'utiliser ; et d'autre part de quelle manière on procédera pour obtenir les coefficients d'amplitude  $A_n$  affectés à cette base pour qu'elle représente notre fonction  $f$  dans l'espace physique. Pour ce qui est de la classe de fonctions choisie, elle doit être telle que :

- la série précédente (I.1.1) converge rapidement vers la fonction  $f(x)$  en tout point  $x$ , au moins pour des fonctions  $f$  suffisamment régulières ;
- les coefficients  $A_n$  étant donnés, on doit pouvoir calculer facilement des coefficients  $B_n$  tels que

$$\forall x, \quad \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^N A_n \psi_n(x) \right) = \sum_{n=0}^N B_n \psi_n(x) \quad (\text{I.1.2})$$

- et enfin, on doit pouvoir passer rapidement (à faible coût) des amplitudes  $A_n$ ,  $n = 0, \dots, N$  aux valeurs de la fonction  $f$  prise sur un ensemble de noeuds dans le domaine physique :  $f_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Dans la pratique, les classes de fonctions répondant à ces critères résident parmi celle des fonctions *orthogonales*, ce sont soit des fonctions trigonométriques pour des problèmes périodiques, soit des polynômes orthogonaux de Jacobi pour des problèmes plus généraux, tels ceux de Tchebychev ou de Legendre. Ensuite, pour ce qui est de la détermination des amplitudes  $A_n$ , il existe trois techniques principales, visant toutes à minimiser le résidu obtenu quand on substitue, dans les équations du problème, l'expansion en série précédente (I.1.1) à la fonction  $f$  exacte :

- la première méthode, dite *tau*, impose que les  $A_n$  soient choisis de telle manière que les conditions aux limites soient satisfaites, et rend le résidu orthogonal à autant de fonctions de base que possible ;
- la seconde, de *Galerkin*, combine les fonctions de base originales en un nouvel ensemble de manière à ce qu'elles satisfassent individuellement les conditions aux limites, puis impose de la même manière que le résidu soit orthogonal à autant de ces nouvelles fonctions de base que possible ;
- enfin, la technique de *collocation* est similaire à la méthode tau, mais au lieu de rendre le résidu orthogonal à des fonctions de base, elle impose qu'il soit *nul* en un maximum de points (adéquatement choisis) de l'espace physique.

Cette dernière approche est aussi nommée *pseudo-spectrale* après Orszag en 1972 (pour distinction d'avec la méthode de Galerkin à laquelle il s'est principalement consacré, cf. [104] par exemple). C'est à cette classe des méthodes pseudo-spectrales (de collocation) qu'appartient notre méthode, dans laquelle les fonctions de base employées sont trigonométriques. Par souci de simplicité, on utilisera cependant le simple qualificatif de 'spectral' à son propos dans les chapitres suivants.

On se limitera à cette rapide description pour placer la technique employée ici dans le cadre plus général des 'méthodes spectrales'. Un certain nombre de détails théoriques et pratiques quant à notre méthode seront mentionnés au chapitre suivant I.2, et on reviendra aussi sur les spécificités de cette approche par rapport à celles plus classiques (DF, VF et dans une moindre mesure EF) en hydrodynamique navale. Désormais, on va s'intéresser à la littérature traitant de ces techniques non plus de manière seulement théorique, mais appliquée à la mécanique des fluides.

## I.1.2 Méthodes spectrales appliquées à la mécanique des fluides en général

On va ainsi donner quelques exemples arbitrairement sélectionnés pour illustrer la variété du champ d'application de ces méthodes spectrales en mécanique des fluides, sans rentrer dans les détails. Fornberg [53] recense quatre domaines principaux d'application des méthodes spectrales : la modélisation de la turbulence, la simulation des équations des ondes non-linéaires en eau peu profonde, la prévision météorologique et l'exploration sismique qu'on n'évoquera pas.

Pour ce qui est de la turbulence, on trouve aussi beaucoup de références dans Canuto *et al.* [17]. Il s'agit toujours de simulations directes de la turbulence (DNS) ou ne conservant que les grandes structures (LES). Ainsi qu'on l'a évoqué plus haut, l'approche spectrale a connu son essor après l'apparition de la FFT, et c'est à la fin des années 1970 et au début des années 1980 que le nombre de modèles spectraux est allé croissant, profitant de la rapidité de convergence de ces méthodes sur des moyens numériques encore restreints. Ainsi,

on a vu apparaître dès le milieu des années 1980 des calculs de turbulence homogène, en écoulements tri-dimensionnels compressibles (Erlebacher *et al.* [42], 1987) et incompressibles (Erlebacher *et al.* [43], 1987). Un peu plus tard, des nombres de Reynolds plus élevés ont été simulés (Chen *et al.* [21], 1993); et des simulations en régime turbulent homogène sur des écoulements compressibles supersoniques sont apparues, toujours en trois dimensions (Karniadakis & Orszag [76], 1993), bénéficiant de l'émergence de supercalculateurs permettant des calculs parallèles à grand nombre de processeurs (512<sup>3</sup> noeuds de collocation en 1993!). Dès 1987, des calculs tri-dimensionnels de zones de mélange incluant une simulation directe de la turbulence retrouvent assez fidèlement les expériences (Metcalf *et al.* [93]). Des simulations en régime turbulent incluant la présence de parois (turbulence inhomogène donc) ont aussi été menés un peu plus tard (cf. Karniadakis & Orszag [76]).

L'approche spectrale a de même été beaucoup utilisée pour la simulation non-linéaire des ondes solitaires, soit la résolution des équations de Korteweg & de Vries (KdV) ou de Schrödinger non-linéaire (NLS) parmi d'autres exemples. De nombreux modèles spectraux ont ainsi été proposés dans ce sens, suivant une forte évolution notamment en ce qui concerne la manière de traiter l'avance en temps, entre celui de Fornberg & Whitham [55] de 1978, et celui d'Ablowitz *et al.* [2] par exemple. Sur ce type d'applications, les modèles spectraux se sont imposés à partir du début des années 1980, après que de multiples comparaisons aux techniques DF et EF se soient montrées très favorables.

Toujours selon Fornberg [53], c'est aussi ce qui a converti, à la même période, l'ensemble des pays industrialisés à utiliser ce type de méthode pour leurs modèles de prévision météorologique, supplantant les autres types de codes; ce qui constitue peut-être le fleuron des domaines d'application des méthodes spectrales en mécanique des fluides. Cependant si le noyau de ces codes est toujours spectral aujourd'hui, ils semblent qu'ils soient très complexes, incluant aussi nombre d'autres techniques numériques visant à modéliser tel ou tel effet météorologique d'intérêt (cf. Machenhauer & Haugen [69]&[91] pour la description de ces modèles spectraux).

Une autre approche spectrale qu'il faut évoquer, bien que provenant de la méthodologie des éléments finis, est celle des *éléments spectraux* (Patera [105], 1984), méthode dans laquelle les fonctions de base sur chaque élément sont définies en termes de polynômes orthogonaux d'ordres élevés qui, je cite Canuto *et al.* [17] sans être à même d'interpréter, '*sont les interpolants de Lagrange aux noeuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto relative à la fonction de poids de Tchebychev*'. Cette approche a été appliquée par exemple à l'équation de Navier-Stokes pour calculer l'écoulement bi-dimensionnel derrière un cylindre par Karniadakis *et al.* [75] dès 1986. Un exemple plus récent et tout à fait différent en est une résolution des équations tri-dimensionnelles de Stokes (bas Reynolds) par méthode intégrale, appliquée à des gouttes considérées comme déformables, toriques notamment (par Muldowney & Higdon [99], 1995).

On citera encore quelques exemples pour achever de montrer l'étendue des applications des méthodes spectrales hors de l'hydrodynamique navale. Par exemple, une méthode

pseudo-spectrale a été employée récemment pour calculer l'écoulement visqueux dans une cavité cylindrique fermée par un disque rotatif, permettant de mettre en lumière le passage d'un écoulement axisymétrique à un écoulement complètement tri-dimensionnel (Serre & Pulicani [116], 2001). Ou encore, en se rapprochant de l'hydrodynamique navale, les modélisations spectrales sont aussi utilisées en écoulements côtiers, par exemple pour calculer la diffraction des trains d'ondes à l'approche des côtes, modélisant en écoulement potentiel tri-dimensionnel la 'mild-slope equation' pour des fonds de bathymétrie variant lentement (cf. Chen & Liu [22] par exemple, 1994).

Enfin, on va s'attarder un peu plus en détails sur un dernier exemple, et ce pour deux raisons : premièrement il appartient à l'hydrodynamique navale même si la méthode utilisée s'applique à des écoulements visqueux, ce qui la rend tout de même assez différente des méthodes évoquées à la section suivante I.1.3. Deuxièmement, cette approche présente des caractéristiques communes (technique spectrale utilisée pour la diffraction sur un corps en écoulement visqueux) avec le modèle mixte potentiel spectral/RANSE visqueux qu'on proposera au chapitre III.3.4 ; on a donc trouvé intéressant de la décrire plus avant pour comparaison. Il s'agit du modèle de Hamilton & Yeung [67], dont le principe général est proche de celui employé par Guillerm [65], combinant un domaine extérieur où l'écoulement est considéré comme potentiel et un domaine intérieur où il est visqueux, au moyen d'une surface de couplage ('une enveloppe parfaitement transparente' dans la terminologie de Hamilton & Yeung) ; mais dans les détails ces deux couplages demeurent largement différents. En fait ce modèle couplé de [67] procède de la fusion de deux méthodes développées par cette équipe, alliant d'un côté la même approche couplée mais en écoulement potentiel (Hamilton & Yeung [66]), et de l'autre une technique spectrale originale sur un domaine annulaire en écoulement visqueux (Yeung & Yu [141]). L'intérêt bibliographique pour nous ici est qu'à chaque fois, toutes les techniques employées sont spectrales. En effet, dans le premier modèle potentiel évoqué, d'une part l'écoulement extérieur potentiel est résolu au moyen d'une méthode intégrale traitée par une méthode pseudo-spectrale, qui s'appuie sur la géométrie cylindrique de la surface d'intégration (l'enveloppe), avec pour fonctions de base une association de polynômes de Tchebychev et de fonctions trigonométriques. D'autre part, l'écoulement intérieur potentiel dont la modélisation est *a priori* indépendante de celle de l'écoulement extérieur, est obtenu dans [66] par une méthode pseudo-spectrale sur un anneau au moyen d'une résolution voisine de celle du domaine extérieur. De plus, dans leur modèle visqueux [141] lui aussi formulé sur un anneau (corps cylindrique), ils emploient une technique pseudo-spectrale en volume, donc assez coûteuse ; classe de méthodes dont on reparlera à la section suivante (I.1.3.5). Les comparaisons qu'ils montrent aux expériences pour ce modèle visqueux seul sont assez probantes, en revanche le nombre de nœuds de collocation utilisés (plus de 200000) laisse présager des temps de calcul finalement importants (qui ne sont pas fournis), et il n'est pas sûr que cette méthode soit en définitive compétitive par rapport à des méthodes RANSE classiques au vu des nombres de Reynolds finalement relativement faibles simulés. Enfin, le modèle couplé résultant [67] associant le domaine extérieur où l'écoulement potentiel est résolu par une

méthode pseudo-spectrale surfacique, et le domaine intérieur où la résolution de l'écoulement visqueux est pseudo-spectrale volumique, présente deux restrictions majeures : les équations de surface libre sont partout linéarisées, et le corps ne peut-être qu'axisymétrique.

On terminera là l'évocation du large éventail d'application des méthodes spectrales en mécanique des fluides, pour ne plus se consacrer qu'à celles qui s'apparentent à la nôtre, *i.e.* qui traitent d'ondes de gravité en écoulement potentiel, hors la présence de corps, et en modélisant les équations de surface libre *non-linéaires*.

### I.1.3 Évolution méthodologique des techniques spectrales appliquées à l'hydrodynamique

On a tenté de regrouper ici le plus grand nombre de ces méthodes, même si on ne prétend pas à l'exhaustivité. Puisqu'il n'est bien entendu pas possible de décrire chacune d'elles en détails dans ce résumé, on tentera simplement d'en dégager les caractéristiques dans la perspective d'en montrer l'évolution jusqu'à aujourd'hui. Dans le même souci de demeurer aussi concis que possible, on fera référence à la description de certaines de ces formulations développées plus en détails plus loin dans ce manuscrit. Enfin, quand cela aide la compréhension, on donnera le développement spectral du potentiel employé dans ces différentes modélisations. Le plus simple pour appréhender l'évolution de ces méthodes est peut-être d'en commenter les étapes marquantes rassemblées sur le schéma I.1.1. On a distingué sur ce schéma deux grandes catégories de techniques, les 'instationnaires' et les 'stationnaires'. On verra que la qualification de 'stationnaires' n'est pas parfaitement appropriée, néanmoins cette séparation différencie effectivement deux classes aux méthodologies bien distinctes. Enfin, sur cette figure, les traits pleins figurent les évolutions des méthodes à l'intérieur des classes que sont les différentes colonnes verticales, alors que les traits en tireté dénotent des origines lors de dérivations de méthodes nouvelles.

#### I.1.3.1 Approche dite 'mode-coupling' et équation de Zakharov

Historiquement, ces méthodes proviennent de l'étude de la génération de houle sous l'action du vent, et plus précisément de la transmission de l'énergie des ondes courtes gravitaires 'de capillarité' engendrées par ce vent, vers des ondes longues 'de gravité' propagatives, ainsi que le maintien de ces ondes longues dans un régime énergétique stable ; l'objectif étant la compréhension globale du processus de génération et d'évolution des houles océaniques, et du développement d'instabilités subséquent. C'est au début des années 1960 qu'est apparue l'approche dite de 'couplage modal' (*mode coupling approach* (MCA)) visant à modéliser un champ de vagues non-linéaires *interagissant faiblement*, avec Phillips [107] (1960), Longuet-Higgins [87] et Hasselmann [68] (1962). En effet, pour étudier les phénomènes océaniques précédents, il a alors paru pratique d'exprimer, dans

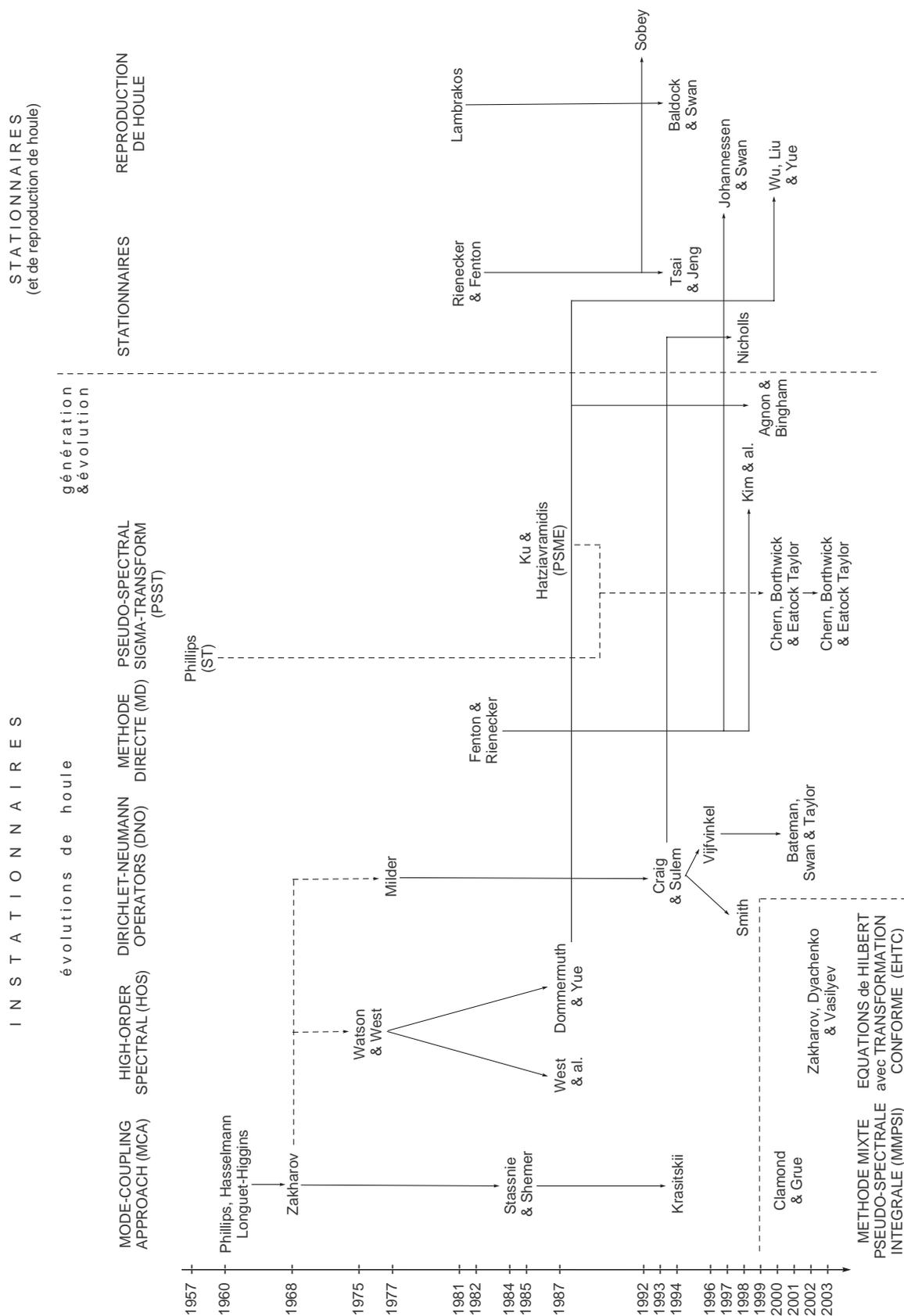


Figure I.1.1: Principales étapes de l'évolution des méthodes spectrales appliquées à l'hydrodynamique.

le cadre de la théorie potentielle, les déformées observables à la surface de l'océan et le potentiel associé en les développant en séries sur la base des fonctions propres du système linéarisé (*i.e.* aux équations de surface libre linéarisées). Ces fonctions sont de simples fonctions trigonométriques car le champ de vagues linéaire est harmonique, formant donc des séries de Fourier pour décrire le champ total. Là où réside l'idée sous-jacente à la méthode est que les coefficients de cette expansion en série sont constants pour un système linéaire (composantes *indépendantes*), mais varient quand il est non-linéaire. Ainsi, la surface libre non-linéaire est vue comme la conséquence de l'évolution d'un champ de vagues linéaire, où les non-linéarités sont interprétées comme la résultante des couplages (constructifs ou destructifs) entre les différentes composantes modales du champ linéaire (Hasselmann [68]); d'où le nom de cette approche. Ces interactions non-linéaires induisent des variations à la fois dans les phases et les amplitudes des vagues linéaires de départ. Pour un champ de vagues modérément non-linéaire, tel que celui d'ondes de gravité se propageant loin d'une zone de déferlement, ces variations induites sont beaucoup plus lentes que la variation harmonique du système linéarisé (cf. [107] et [87]).

De manière plus pratique, cette MCA procède de différentes étapes ; on trouve cette méthodologie dans Hasselmann [68] par exemple. En premier lieu, on considère le problème tri-dimensionnel non-linéaire classique en écoulement potentiel (II.1.10) incluant les deux conditions de surface libre, l'équation de Laplace dans le volume, et un fond de profondeur arbitraire, mais aucune frontière à l'extension horizontale. Ensuite ce problème est développé en série de perturbations, de la même manière qu'au II.1.2, mais jusqu'à un ordre arbitraire. Puis le passage dans l'espace modal s'effectue, à chaque ordre  $p$ , au moyen du développement en série de Fourier suivant, utilisé en  $z = 0$  :

$$\begin{aligned}\phi^{(p)}(x, y, z, t) &= \sum_{(n_x, n_y)} A_{n_x n_y}^{(p)}(t) \frac{\cosh[k_{n_x n_y}(z + h)]}{\cosh[k_{n_x n_y} h]} e^{i(k_{n_x} x + k_{n_y} y)} \\ \eta^{(p)}(x, y, t) &= \sum_{(n_x, n_y)} H_{n_x n_y}^{(p)}(t) e^{i(k_{n_x} x + k_{n_y} y)}\end{aligned}\tag{I.1.3}$$

On entrevoit aisément que la combinaison du développement en série de perturbations avec ce développement modal fait intervenir un nombre de termes important, nécessitant des troncatures à des ordres restreints. Ce qui est réalisé en pratique est de tronquer le développement en série de perturbations à un certain ordre, sans tronquer la série de Fourier. Simplement, pour conserver la cohérence de cet ordre de troncature, les interactions mode à mode (par paires, triplets, quartets, etc.) des coefficients de Fourier aux différents ordres ne sont prises en compte que jusqu'à cet ordre, en se rappelant que ces coefficients de Fourier sont indépendants hors ces interactions. Cette MCA a alors pour but de déterminer lesquelles de ces interactions mode à mode ont une influence sur l'évolution globale du système, et combien de composantes élémentaires associées sont mises en jeu dans les processus dominant cette évolution, notamment ses transferts énergétiques. Dans cette approche, les interactions *non-résonantes* sont écartées. On peut préciser que les résonances

d'un tel système non-linéaire sont toujours bornées, contrairement à celles d'un système linéaire.

Historiquement parlant maintenant, la MCA a connu une évolution qui s'étend jusqu'à aujourd'hui, comme on peut le voir sur la partie la plus à gauche de l'illustration I.1.1. Le premier à avoir étudié ces interactions modales entre ondes de gravité a été Phillips [107] en 1960, mettant en lumière un transfert d'énergie au troisième ordre lors de l'interaction de composantes élémentaires prises seules. Longuet-Higgins [87] a ensuite calculé deux ans plus tard le taux de croissance de l'onde d'interaction produite par le croisement de trains d'ondes mono-chromatiques. La même année Hasselmann [68] a proposé la première MCA pour un spectre continu, il a étudié les taux d'échanges intervenant dans l'énergie, prenant en compte des quartets de composantes dans les interactions mode à mode résonantes. Mais c'est en 1968 avec Zakharov [142] que la première MCA 'complète' a été produite, donnant cette fois non pas seulement le taux d'évolution de l'énergie du système, mais aussi directement les équations d'évolution des modes ('mode rate equations'). Là encore les ondes de gravité du champ faiblement non-linéaire sont décrites jusqu'aux non-linéarités cubiques (interactions de quartets de composantes). En proposant cette modélisation, Zakharov a notamment introduit l'expression des conditions de surface libre au moyen d'un potentiel de surface qui suit cette surface dans son mouvement (cf. les expressions (II.1.13)), idée qui a été reprise dans nombre de méthodes développées ensuite (MCA, High-Order Spectral (HOS) et Dirichlet-Neumann Operator (DNO) notamment), comme on va le voir. D'autre part, après Phillips [108] en 1966 c'est aussi l'une des premières formulations à exprimer le problème sous forme hamiltonienne, conservative donc, et qui assure de plus l'obtention d'une description déterministe de l'évolution du système (cf. West [134] par exemple). Cette formulation exprime les équations de surface libre comme dérivant toutes deux de manière canonique d'un Hamiltonien qui est simplement l'énergie totale  $E$  conservée du système :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \eta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \phi} \quad (\text{I.1.4})$$

Elle a été largement reprise dans la suite de l'évolution des méthodes. En plus de tout cela, cet article occupe aussi une place de choix dans l'histoire de l'hydrodynamique parce qu'il contient la première expression de la NLS appliquée à l'hydrodynamique. On s'est ensuite rendu compte que l'interaction de quintets de composantes élémentaires jouait aussi un rôle important dans l'évolution du champ de vagues faiblement non-linéaire, et Stiassnie & Shemer [120] ont porté en 1984 la formulation de Zakharov à l'ordre supérieur permettant de les prendre en compte. Néanmoins, dès 1975 Watson & West [133] ont montré que les interactions *non-résonantes* négligées dans la MCA contribuent substantiellement à renforcer les interactions résonantes, et ne doivent pas être omises (cf. aussi West [134], 1981). Il faut attendre Krasitskii [79] pour obtenir en 1994 une formulation dite 'réduite' de l'équation de Zakharov tenant compte de ces interactions non-résonantes, formulation au même ordre que celle de Stiassnie & Shemer [120], qui constitue l'ultime version de la MCA, et qui a été appliquée récemment par Annenkov & Shrira [5], 2001.

### I.1.3.2 Méthode ‘directe’

Par contraste avec la MCA, où le problème était développé en série de perturbations et les interactions non-linéaires limitées à un certain nombre de composantes, des modèles spectraux aptes à simuler le problème complètement non-linéaire sans autre hypothèse sont ensuite apparus. Le plus simple d’entre eux est une méthode introduite par Fenton & Rienecker [46] en 1982 ; on la qualifie ici de ‘directe’ (MD) parce que sa formulation consiste à développer directement le potentiel sous forme spectrale, avec pour fonctions de base les modes naturels du domaine. La déformée dans le domaine est supposée périodique de période sa longueur. En trois dimensions, cette méthode s’applique de même à un domaine parallélépipédique dans lequel la déformée est périodique dans les deux directions. Le développement dans ce domaine borné revêt donc exactement la même forme que celui exprimé dans la formulation de la MCA sur un domaine non-borné :

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{(n_x, n_y)} A_{n_x n_y}(t) \frac{\cosh[k_{n_x n_y}(z + h)]}{\cosh[k_{n_x n_y} h]} e^{i(k_{n_x} x + k_{n_y} y)} \quad (\text{I.1.5})$$

mais cette fois sans développement en série de perturbations, ce potentiel et ses dérivées seront par conséquent utilisés sur la position de la surface libre réelle en  $z = \eta$ . Le problème aux limites que satisfait ce potentiel périodique est alors simplement constitué de l’équation de Laplace dans le fluide et des deux conditions de surface libre non-linéaires de (II.1.10). Partant d’un état initial, on peut alors simuler son évolution temporelle en procédant à une résolution pseudo-spectrale en des nœuds de collocation répartis sur la surface, où l’on exprime ces deux conditions de surface libre. Connaissant  $\eta$  et  $\phi$  aux nœuds, la condition cinématique fournit la dérivée temporelle de  $\eta$  en chacun des nœuds, et la condition dynamique celle de  $\phi$  en ces mêmes nœuds. Par résolution pseudo-spectrale, on déduit alors de ces dérivées de  $\phi$  aux nœuds, les dérivées temporelles de chacune des amplitudes  $A_{n_x n_y}$ . On peut alors procéder à l’avance en temps simultanée de ces amplitudes et des élévations de surface libre aux nœuds.

Ce qu’il est important de remarquer est que cette résolution pseudo-spectrale s’opère sur la position instantanée de la surface libre, en conséquence les quantités  $\partial\phi/\partial t$  en particulier contiennent des rapports de fonctions cosinusoïdales hyperboliques, qui varient dans le temps puisqu’ils font intervenir  $\eta$ . L’obtention des grandeurs  $\partial A_{n_x n_y}/\partial t$  procède donc de la résolution d’un système qui n’est pas celui invariant de Fourier, mais qui doit être reconstruit à chaque fois, et qui surtout *ne peut être résolu au moyen de FFTs*. Ces techniques directes, si elles présentent l’avantage de conserver les conditions de surface libre exactes, sans aucun développement en ordres, payent donc la contrepartie de la résolution classique d’un système linéaire à chaque sous-pas de temps, qui est de coût  $O(kN^2)$  au mieux, *i.e.* par solveur itératif. Néanmoins, comparé aux autres méthodes spectrales, elles ont aussi l’atout d’une grande simplicité de mise en œuvre qui justifie qu’on s’est tourné vers elles en premier. Confrontées aux méthodes BEM, elles conservent, à coûts de résolution égaux, le bénéfice d’une convergence rapide avec le nombre de modes/nœuds de collocation utilisés.

Ainsi qu'on peut le constater sur la quatrième colonne du schéma I.1.1, cette approche n'a pas connu d'évolution depuis. Contrairement aux autres méthodes qu'on verra par la suite, elle a de plus été très peu appliquée pour simuler des évolutions instationnaires partant d'un état initial, à l'exception de ses auteurs, Fenton & Rienecker [46]. On a rencontré une autre application instationnaire de ces méthodes, par Kim *et al.* [78] en 1998, mais leur utilisation est différente puisqu'ils n'initialisent pas leur solution, mais *génèrent* un mouvement au moyen d'un potentiel additionnel, ce dont on reparlera plus loin (section I.1.3.7). Néanmoins, c'est surtout dans des modèles stationnaires ou de reproduction de houle que ces MD ont été utilisées (cf. ci-après section I.1.3.8).

### I.1.3.3 Modèles dits 'High-Order Spectral'

Ces modèles HOS constituent probablement les méthodes spectrales les plus utilisées à l'heure actuelle en hydrodynamique, ainsi qu'on le verra dans la section I.1.4 évoquant les applications. De plus, on reviendra largement sur ces modèles dans ce manuscrit (cf. chapitre II.1), on ne va donc pas trop les détailler ici. Si leur parution est due à deux équipes différentes : West *et al.* [135] et Dommermuth & Yue [38] de manière non concertée, donnant lieu à deux articles dans deux journaux différents la même année, la paternité en est à attribuer à West *et al.*. En effet, d'une part cette technique repose sur la décomposition proposée en 1975 par Watson & West [133], et d'autre part il semble que dès cette date West et son équipe aient formulé la technique HOS (dans un rapport interne non publié), puis l'aient mise en œuvre numériquement vers 1977, mais limités par les possibilités informatiques, ont attendu 1987 pour en présenter des résultats fournis. Pourtant, c'est la dénomination de Dommermuth & Yue, *High-Order Spectral* qui est restée, et c'est leur article qui a été par la suite principalement cité et appliqué, alors même qu'il présente une formulation légèrement distincte de celle de West *et al.*, et moins consistante comme on va le voir.

La décomposition proposée par Watson & West [133] comme alternative à la MCA s'appuie sur les équations de surface libre formulées à la manière de Zakharov [142] au moyen d'un potentiel de surface  $\phi^S$ . Ainsi qu'on peut le voir dans les équations (II.1.13), le seul terme non surfacique restant alors dans ces conditions de surface libre est la dérivée verticale du potentiel ; hormis ce terme les dérivées temporelles de l'élévation et du potentiel surfacique pourraient être directement avancées en temps. Plutôt que d'appliquer, comme en MCA, un développement en série de perturbation à ces équations pour obtenir les équations d'évolution modale, Watson & West ont alors l'idée de développer cette seule quantité non surfacique  $\partial\phi/\partial z$  en série de Taylor autour de  $z = 0$  :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, \eta, t) = \sum_n \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^{n+1}\phi}{\partial z^{n+1}}(x, y, 0, t) \quad (\text{I.1.6})$$

et ce de manière *séparée de la résolution du système* formé des équations de surface libre (II.1.13) et de l'équation de Laplace dans le fluide (*nota* : en réalité cette technique utilise

en plus un développement intermédiaire de  $\phi$  pour obtenir celui sur  $\partial\phi/\partial z$ , cf. II.1.3.2.1)). Dans les méthodes HOS [38]&[135], un développement formel de cette quantité non surfacique est en outre réalisé en parallèle :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \sum_p \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_p \quad (\text{I.1.7})$$

où les composantes d'indice  $p$  sont ordonnées selon les puissances du paramètre  $\eta$  du développement de Taylor. Ces composantes sont obtenues au moyen d'une résolution pseudo-spectrale itérative permettant d'accéder au final à  $\partial\phi/\partial z$  aux nœuds de la surface libre à partir de la connaissance initiale de  $\phi^S$  aux mêmes localisations (cf. II.1), et ce *de manière totalement décorrélée de l'avance en temps* ; *i.e.* au moment de l'avance en temps des conditions de surface libre,  $\partial\phi/\partial z(x, y, \boldsymbol{\eta}, t)$  est connu comme les autres quantités en la position exacte de la surface libre non-linéaire. Seulement, West *et al.* soulignent que pour garder la nature conservative hamiltonienne du système, ce développement de Taylor, tronqué à un certain ordre en puissances de  $\eta$ , doit l'être impérativement de manière cohérente. C'est-à-dire par exemple que la dérivée verticale du potentiel, qui apparaît au carré dans l'équation dynamique de surface libre de (II.1.13), doit non pas procéder de la simple élévation au carré de cette même quantité apparaissant à la puissance 1 dans l'équation cinématique, mais de la restriction de cette mise au carré à l'ordre de troncature choisi, etc. Or, ainsi que le remarque Tanaka [126] repris aussi par Annenkov & Shrira [5], le modèle proposé par Dommermuth & Yue [38] ne tient pas compte de cette 'homogénéisation' des ordres, celui de West *et al.* [135] doit donc lui être préféré. Les deux modèles diffèrent aussi dans leur manière d'éviter le repliement, mais on y reviendra plus amplement au chapitre II.1.

Pour ce qui est de la résolution, ces modèles supposent, comme la MD dont ils sont très proches hormis le développement (I.1.6), une périodicité dans les directions horizontales, de périodes les dimensions du domaine. Sur la surface libre de ce domaine sont disposés des nœuds de collocation sur lesquels s'appuie la résolution pseudo-spectrale itérative pour obtenir  $\partial\phi/\partial z$ . Une fois cette quantité obtenue par cette résolution à partir de la seule connaissance de  $\phi^S$ , on peut alors avancer en temps les conditions de surface libre. Toutefois, les deux modélisations ne procèdent pas exactement de la même manière là non plus. En effet, West *et al.* développent  $\partial\eta/\partial t$  et  $\partial\phi^S/\partial t$  sous forme modale, ils se retrouvent donc pour chaque équation de surface libre avec autant d'équations d'évolution modale que de points de discrétisation, et ils avancent chacun de ces modes par une évolution modale classique, séparant dans chaque équation modale une partie linéaire évoluant à sa propre période, d'une partie non-linéaire instationnaire avancée au moyen d'une méthode à pas de temps usuelle. En revanche, Dommermuth & Yue conservent telles quelles les équations de surface libre exprimées en chacun des nœuds de collocation, et opèrent directement l'avance en temps des quantités  $\partial\eta/\partial t$  et  $\partial\phi^S/\partial t$  à partir de leurs dérivées temporelles en chacun de ces nœuds, là aussi au moyen d'une méthode à pas de temps classique. Une autre légère distinction provient de ce que le modèle de West *et al.* n'est formulé qu'en profondeur infinie alors que celui de Dommermuth & Yue est formulé en profondeur

quelconque. Enfin, une ultime différence réside dans ce que Dommermuth & Yue voient le développement (I.1.7) comme un développement en ordres de perturbation, alors que West *et al.* le considèrent comme en ordres de la pente ; on discutera de cette nuance et de ses implications en comparant le HOS aux opérateurs Dirichlet-Neumann à la section suivante I.1.3.4. On appellera *l'ordre de pente m* l'ordre de troncature du développement HOS précédent (I.1.7).

Par rapport à la MCA, ces modélisations HOS ont pour premier avantage de lever la restriction à des non-linéarités faibles. En MCA en effet, comme dans tout développement en série de perturbations, la prise en compte de champs de vagues cambrés impose de conserver un nombre de plus en plus élevé d'ordres de perturbation. Or, comme le remarquent Dommermuth & Yue [38], ajoutée à la complexité croissante d'un tel développement avec les ordres, celle du développement modal des interactions mode à mode rend rapidement prohibitif l'extension de la MCA à des ordres élevés. À l'inverse en HOS, les équations des évolutions des modes qu'on peut déduire des équations de surface libre sont complètement non-linéaires. À cet argument West *et al.* [135] ajoutent le fait qu'aucune hypothèse n'est faite en HOS sur la nature des interactions modales, en particulier les interactions non résonantes dont ils ont prouvé l'importance en 1975 [133] sont bien contenues dans le modèle, ce qui n'était pas le cas des modélisations MCA en 1987. En fait, si ces méthodes HOS se sont positionnées vis-à-vis des MCA à leur introduction, pour des raisons historiques, c'est surtout des MD qu'elles sont proches puisqu'elles résolvent le même problème instationnaire avec les mêmes hypothèses non-linéaires. Toutefois, comparées à ces MD ou même à des modèles BEM ou autres, l'immense avantage que présentent ces techniques HOS réside dans ce que, pourvu que le développement en série de Taylor soit valide, et pourvu que la résolution pseudo-spectrale itérative converge, on a *un modèle d'une rapidité sans égal*. En effet, le fait d'avoir utilisé le développement en série de Taylor de Watson & West permet l'emploi de FFTs pour la résolution pseudo-spectrale itérative sur les nœuds de collocation, portant le coût global du calcul d'un sous-pas de temps de la méthode d'avance en temps à  $O(N \log N)$ , et non  $O(kN^2)$  comme impliqué par la résolution d'un système linéaire quelconque. De plus, tant que les déformées modélisées sont modérément cambrées, la convergence avec le nombre de modes/nœuds de collocation  $N$  conservés est très rapide (asymptotiquement exponentielle aux faible cambrures), et ne se dégrade que jusqu'à l'ordre 2 pour les vagues les plus cambrées.

Il faut toutefois nuancer, d'une part la rigidité géométrique déjà évoquée induit qu'on ne peut *a priori* introduire la présence de corps dans ce modèle (on verra une manière de contourner cela au III.3) ni d'un fond véritablement variable. D'autre part, ainsi qu'on l'a dit ces modèles sont périodiques horizontalement, leurs conditions aux frontières sont quelconques mais identiques en chaque extrémité (ce qui n'est pas le cas du nôtre, cf. II.1). Cette dernière caractéristique rend ces modèles purement *évolutifs*, au sens où ils nécessitent d'être initialisés pour ensuite simuler l'évolution temporelle *conservative* à partir de l'état initial ; en ce sens ils ne peuvent recéler *a priori* de générateur de houle. C'est en vue de pallier cette restriction qu'une bonne part des développements menés dans cette thèse ont

été réalisés. Ils n'ont donc pas la flexibilité d'un modèle de type éléments aux frontières (BEM) par exemple. Les différents types d'initialisation utilisés dans les modèles HOS actuels seront mentionnés quand on évoquera les applications au I.1.4. D'ailleurs cette initialisation des modèles HOS est elle-même un problème en soi, comme le montre un article récent de Dommermuth [37] où il propose un schéma d'ajustement pour éviter les instabilités hautes fréquences engendrées lors de l'initialisation de modèles HOS à partir de modèles d'ordres peu élevés.

On clôt ici le remplacement des modèles HOS dans leur 'contexte historique'. Puisqu'on a mis en œuvre un tel modèle, même si cela s'est fait finalement assez tard dans l'évolution de ce travail de thèse, tous les détails quant à sa formulation seront fournis ultérieurement, au chapitre II.1, ainsi qu'une discussion plus précise de ses avantages et inconvénients en comparaison de la méthode spectrale directe. On va désormais s'attacher à des modèles qu'on croit proches des techniques HOS, les modèles utilisant des opérateurs dits de 'Dirichlet-Neumann' (DNO).

### I.1.3.4 Modèles utilisant un 'Dirichlet-Neumann Operator'

L'évolution de ces modèles est résumée dans la troisième colonne du schéma I.1.1. Ils tirent leur nom du passage qu'ils permettent, de même qu'en HOS, entre la connaissance de la quantité  $\phi$  sur la surface libre (condition de Dirichlet) et celle de sa dérivée normale  $\partial\phi/\partial n$  sur cette même surface (condition de Neumann). On propose ici une interprétation un peu audacieuse de ce type de modèles, puisqu'on ne l'a trouvée nulle part dans la littérature. En effet, on a mené une étude assez approfondie de ces méthodes DNO, apparues après le HOS, par une lecture attentive des articles qui font les grandes étapes de leur évolution :

- Craig & Sulem [34] 1993 : opérateur  $G$ -2D ;
- Vijfvinkel [131] 1996 : opérateur  $G$ -2D accéléré ;
- Smith [117] 1998 : opérateur  $D_0$  pour un fond variable ;
- Bateman, Swan & Taylor [8] 2001 : opérateur  $G$ -3D (accéléré) ;
- Bateman, Swan & Taylor [9] 2003 : opérateurs  $H$ -3D et  $(H + H^2)$ -3D (accélérés) ;
- ainsi que l'étude de stabilité comparative incluant HOS et DNO menée par Nicholls & Reitich [101] en 2001.

L'intérêt qu'on a porté à ces méthodes provient de ce qu'elles montrent en apparence les mêmes caractéristiques que les méthodes HOS : résolution itérative par FFTs, avance en temps de quantités surfaciques, périodicité spatiale, initialisation nécessaire ; tout en ayant une formulation plus complexe qu'on va développer. Malheureusement, les auteurs de ces techniques DNO, après avoir brièvement justifié au départ l'intérêt de cette approche par rapport au HOS (Craig & Sulem [34]) ainsi qu'on le verra ci-après, n'ont ensuite plus rapproché leur méthode relativement novatrice des méthodes HOS déjà implantées, n'évoquant plus que la MD de Fenton & Rienecker [46] de 1982, donc antérieure au HOS. Or en

creusant ces techniques DNO, on en est venu à la conclusion qu'elles ne présentent dans leur application pratique *aucune différence avec l'approche HOS*. Cette affirmation est encore une fois un petit peu audacieuse et peut-être erronée puisque même Nicholls & Reitich [101] qui ont codé les deux modèles n'ont pas fait cette remarque. On va néanmoins tenter d'étayer cette thèse, quitte à entrer momentanément dans quelques détails techniques. Le premier élément qu'il faut préciser est que cette méthode DNO a connu une évolution dans sa mise en œuvre, lui permettant d'améliorer nettement la rapidité du calcul de sa méthode pseudo-spectrale itérative (évolution dénotée ci-avant par le qualificatif 'accéléré' accolé aux noms des différentes versions d'opérateur). Et c'est cette version accélérée qu'on estime équivalente au HOS, et non la première version de Craig & Sulem, nettement moins rapide. Or, c'est la version non accélérée que Nicholls & Reitich ont implémentée pour leur comparaison, et la relation avec le HOS y est beaucoup moins flagrante.

Avant de poursuivre, tentons de décrire un peu plus avant ces techniques DNO. Smith [117] fournit l'origine d'un tel opérateur comme provenant de la note de Milder [94] de 1977 qui fait suite à l'article de Miles [95] traitant de l'approche hamiltonienne de la houle. Dans cette courte note Milder introduit en effet un opérateur noté  $\hat{G}$  tel que  $\phi^S = \hat{G}\partial\eta/\partial t$ . Il décrit cet opérateur comme étant '*non-local, linéaire dans son effet sur  $\partial\eta/\partial t$  mais tenant compte de la dépendance non-linéaire en la déformée de surface  $\eta$* ', d'où la notation du type  $\hat{G}(\eta)$  employée par les utilisateurs des DNO. Milder définit ensuite l'opérateur inverse  $\hat{F}$  tel que  $\partial\eta/\partial t = \hat{F}\phi^S$ , et cet opérateur est exactement l'opérateur  $G(\eta)$  (noté plus haut  $G$ -2D) de Craig & Sulem [34] même s'ils ne citent pas cette origine. Expriment ensuite l'Hamiltonien du système (l'énergie totale) en fonction de cet opérateur  $\hat{F}$ , Milder remarque que la structure de ce Hamiltonien est '*principalement contenue dans l'opérateur linéaire  $\hat{F}$  dépendant de  $\eta$* '. En ce sens, la forme de  $\eta$  est donc à elle seule une traduction directe de l'ensemble des non-linéarités présentes dans le système. Décomposant ensuite cet opérateur en ordres de la pente ('slope expansion'), Milder en vient à la conclusion suivante à propos de ce même Hamiltonien : '*son expansion en ordres de la pente mène à une représentation de la dynamique de la houle dans laquelle les interactions non-linéaires sont clairement identifiées aux différents ordres de la pente de la surface, qui sont distincts des différents ordres de perturbation qui peuvent intervenir dans une solution donnée des équations du domaine*'. On a cité ce commentaire en entier pour éviter toute déformation avant qu'on ne tente de l'interpréter ; on pense en effet qu'il sous-tend la nature de ces méthodes HOS/DNO, et les différencie des méthodes de perturbation. Il fait de fait la distinction entre le développement d'une déformée non-linéaire en termes de cambrures (série de perturbation) ; et en termes de pentes ('slope expansion'). La nuance semble mince, mais si on l'a bien interprétée, elle revient en fait à détacher ou non l'élévation de surface libre de la longueur d'onde. Ainsi, à amplitude donnée, la cambrure d'une déformée est intrinsèquement liée à la longueur d'onde qu'on lui associe ; à élévation de surface libre donnée, et dérivée de cette élévation donnée (*i.e.* pente), le développement en ordres de perturbation dépendra donc de longueurs d'ondes associées, alors que le développement en ordres de pente en sera détaché.

Cette interprétation viendrait par exemple éclairer le seul commentaire fait par Craig & Sulem relativement au HOS, pour justifier la supériorité des DNO, qui est que les DNO ‘diffèrent des méthodes spectrales à la fois de West *et al.* [135] et Dommermuth & Yue [38], où chacune des quantités  $\eta$  et  $\phi^S$  sont supposées être  $O(\varepsilon)$ , et le développement n’est pas uniforme en nombres d’ondes’. Si l’on interprète ce commentaire en détails, sa première partie fait référence à l’utilisation, dans les méthodes HOS, d’un deuxième développement formel :

$$\phi = \sum_p \phi_p \tag{I.1.8}$$

réalisé en plus de (I.1.7), et qui implique notamment que la première étape de la résolution par méthode itérative s’écrit  $\phi^S = \phi_0$  (cf. II.1.3.2.1), d’où l’interprétation d’ordre 1’ dans le commentaire. Or, du fait de la linéarité des transformées de Fourier, ce second développement (I.1.8) est un pur artefact dans les méthodes HOS, dont la seule utilité est d’accélérer le processus de résolution. On peut très bien ré-écrire le triangle de résolution (II.1.32) du HOS sans faire ce développement, on aura alors toutes les quantités  $(\partial\phi/\partial z)_p$  directement reliées à  $\phi^S$ , exactement de la même manière que dans le développement du DNO de Craig & Sulem qui relie les composantes  $G_p(\eta)$  de l’opérateur à  $\phi^S$ . D’autre part, les versions suivantes des DNO utilisent justement, elles aussi, un développement artificiel tel que (I.1.8) avec la même initialisation, pour accélérer à l’identique la résolution itérative du DNO (après Vijfvinkel [131], 1996), comme on va le voir juste après. Les deux quantités  $\eta$  et  $\phi^S$  sont donc simplement surfaciques, et non linéarisées, et ce pour les DNO comme en HOS. Pour ce qui est de la seconde partie du commentaire, sur la non uniformité du développement en nombres d’ondes, elle serait à relier, dans notre interprétation de Milder, à la présence d’un développement en série de perturbations qui interviendrait dans le HOS selon Craig & Sulem, ce qui est confirmé par leur emploi de ‘ $O(\varepsilon)$ ’ dans la première partie du commentaire, qui est traditionnellement associé à ce type de développement. Or, si Dommermuth & Yue parlent effectivement du développement (I.1.7) comme d’un développement en série de perturbations sans donner plus de détails, ce n’est pas le cas de West *et al.* qui le qualifient de ‘développement formel’ ; Craig & Sulem utilisant quant à eux le vocable très proche de ‘développement homogène’ pour qualifier le développement identique qu’ils font de leur opérateur  $G(\eta)$  :

$$G(\eta) = \sum_p G_p(\eta) \tag{I.1.9}$$

avant d’appliquer à la relation définissant leur opérateur un développement de Taylor identique à (I.1.6). De plus, quand ils discutent ensuite de ce ‘développement formel’ (I.1.7), West *et al.* l’interprètent justement comme une ‘slope expansion’ comme Milder, et non un développement en série de perturbations, soulignant que son unique limitation réside dans la convergence formelle du développement de Taylor associé, et de la méthode itérative. Enfin, après ce commentaire de Craig & Sulem, Tsai & Yue [130] justifient de la validité du HOS, même quand des longueurs d’ondes très distinctes interviennent dans le système, en

s'appuyant sur la preuve par Brueckner & West [14] que même dans ce cas le développement (I.1.7) converge. West *et al.* discutent déjà ce problème en 1987, attribuant justement cette convergence à la 'slope expansion' dont ils fournissent alors une interprétation plus précise. Ainsi selon eux, puisque cette 'slope expansion' procède d'un simple développement en puissances de  $\eta$ , elle revient en fait à faire un développement sur la pente *en la position exacte de la surface libre*, sans la transporter sur la surface de référence ( $z = 0$ ) à l'inverse des séries de perturbations ; cette 'slope expansion' étant ainsi *indépendante* de la surface de référence, dont le niveau peut être changé arbitrairement. Ce n'est donc pas un développement *autour de  $z=0$*  comme en série de perturbations, mais sur la déformée elle-même.

Si on se résume, hormis le fait que ces développements s'appliquent dans la méthode de Craig & Sulem à un DNO général et non à la quantité particulière  $\partial\phi/\partial z$ , la démarche employée pour obtenir les équations de surface libre complètement non-linéaires, ainsi que celle pour déterminer cet opérateur ou cette quantité par méthodes itératives (utilisation du potentiel de Zakharov/développement de Taylor/développement 'formel' ou 'homogène'), semblent donc tout à fait semblables, malgré la remarque de Craig & Sulem. D'autre part, en observant plus avant le processus complet de résolution des méthodes DNO, on se rend compte que l'opérateur n'est en définitive appliqué qu'à la seule quantité  $\phi^S$ , son développement revient ainsi finalement au développement d'une quantité, en l'occurrence :  $G(\eta)\phi^S = \partial\phi/\partial n$ . Si on ajoute à cela que dans les versions suivantes de ce DNO, tri-dimensionnelles, que sont les opérateurs notés  $G$ -3D et  $H$ -3D de Bateman *et al.* [8]&[9], la quantité considérée est non plus  $\partial\phi/\partial n$  mais  $G(\eta)\phi^S = H(\eta)\phi^S = \partial\phi/\partial z$ , on se retrouve avec des développements identiques pour le HOS (I.1.7) et pour le DNO (I.1.9). Ce qui a achevé de nous convaincre de la similitude des deux méthodes réside dans les détails du processus itératif de résolution de cet opérateur  $G(\eta)$  appliqué à  $\phi^S$ , donné par Bateman *et al.* [8] en 2001 (après que Vijfvinkel [131] l'a accéléré en 1996) :

$$G_p(\eta)\phi^S = \sum_{n \leq p, n \text{ impair}} \frac{\eta^n D^{n+1}[\mu_{p-n}]}{n!} + \sum_{n \leq p, n \text{ pair}} \frac{\eta^n D^{n+1} \tanh(Dh)[\mu_{p-n}]}{n!}$$

$$\text{où } \mu_0 = \phi^S ; \quad \mu_{j>0} = - \sum_{1 \leq n \leq j, n \text{ pair}} \frac{\eta^n D^n[\mu_{j-n}]}{n!} - \sum_{1 \leq n \leq j, n \text{ impair}} \frac{\eta^n D^n \tanh(Dh)[\mu_{j-n}]}{n!}$$

où  $D^i$  et  $D^k \tanh(Dh)$  représentent les séries spectrales reconstruites après dérivations verticales d'ordres respectifs  $i$  pair ou  $k$  impair des quantités  $\mu_j$ . Après développements comparés, ces deux formules récursives *correspondent exactement* au processus itératif de la méthode HOS présenté dans les triangles de résolution (II.1.31) et (II.1.32), où les  $(\partial\phi/\partial z)_p$  du HOS équivalent ici aux  $G_p(\eta)\phi^S$ , et les  $\phi_j$  aux  $\mu_j$ . Le tableau fourni avec ces formules de récurrence dans [8], recensant les nombres totaux de FFTs utilisées en fonction de l'ordre de troncature  $M$  correspond là encore, pour les 'versions accélérées' de DNO, exactement aux nombres de FFTs utilisées en HOS pour le même ordre  $M$ .

En définitive, si les deux formalismes sont d'apparences différentes, on croit pouvoir affirmer qu'ils ne forment qu'une seule et même démarche, au moins une fois appliqués. Le formalisme par opérateur, tel qu'initialement proposé par Milder [94] semble toutefois apporter des justifications théoriques sous-jacentes qui n'apparaissaient pas complètement dans le développement proposé par West *et al.*, celui proposé par Dommermuth & Yue semblant quant à lui moins étayé formellement. On peut aussi mentionner l'étude faite par Nicholls & Reitich [101] comparant les noyaux stationnaires (pas d'avance en temps) du DNO original non accéléré de Craig & Sulem, et celui du HOS, à une troisième méthode en volume implémentée pour l'occasion (cf. I.1.3.5), étude qui ne montrait pas de différence significative entre les deux modèles (jusqu'à la dixième décimale environ), même si le HOS s'avérait très légèrement plus stable. Enfin, il faut préciser, même si on ne l'a pas étudié en détails, que l'opérateur  $H_2$  récemment introduit par Bateman *et al.* [9] en association à l'opérateur  $H$ , et qui permet de re-calculer la solution à des niveaux verticaux arbitraires dans le fluide sous la surface libre, semble tout à fait intéressant si l'on veut accéder avec précision aux vitesses sous cette surface. Son intégration dans une méthode HOS semble là encore pouvoir être réalisée à l'avenant.

Maintenant qu'on a développé les quatre grandes classes de méthodes spectrales instationnaires utilisées pour simuler les évolutions non-linéaires de champs initiaux donnés, on va évoquer quelques autres approches, toujours appliquées à l'hydrodynamique mais qui ont été moins utilisées, soit parce qu'elles sont plus spécifiques, soit parce qu'elles sont apparues dans un passé récent.

### I.1.3.5 Méthode volumique 'σ-Transform'

Un autre classe méthodologique distincte dans les approches spectrales est celle des techniques en volume. Ces méthodes ont été proposées et développées depuis quelques années en hydrodynamique à surface libre non-linéaire (cinquième colonne du schéma I.1.1) par Chern, Borthwick & Eatock Taylor, d'abord en deux dimensions dans une cuve rectangulaire [23] 1999, puis en trois dimensions sur un domaine cylindrique annulaire [24] 2001 ; à noter que Yeung & Yu [141] ont eux aussi développé une approche spectrale volumique en 2001 et sur ce même domaine tri-dimensionnel annulaire, mais en fluide visqueux et avec des conditions de surface libre linéarisées. Chern *et al.* situent l'origine de telles approches pseudo-spectrales en volume à 1985 avec la technique dite 'Pseudo-Spectral Matrix-Element' (PSME) proposée par Ku & Hatzivramidis [80] pour un problème bi-dimensionnel en fluide visqueux. Cette approche est aussi connue sous le nom de 'spectral-difference method' (cf. Cortes & Miller [32]). Contrairement aux modèles précédents, ces techniques sont appliquées sur un domaine fermé par des frontières latérales, le problème traité n'est donc pas supposé périodique.

L'idée de Chern *et al.* a été d'utiliser la transformation  $\sigma$  (Phillips 1957 [106]) pour se ramener, à tout instant, à un domaine de géométrie fixe à partir du domaine fluide tri-

dimensionnel s'étendant du fond à la surface libre exacte, déformée. Cette transformation revient donc à distordre verticalement le domaine réel de profondeur  $h$  :

$$\sigma(x, y, t) = \frac{z + h}{\eta(x, y, t) + h} \quad (\text{I.1.10})$$

pour qu'il se rapporte à la géométrie constante du domaine fluide au repos où  $\sigma(x, y, t)$  est la nouvelle coordonnée verticale. L'avantage de cette transformation est de pouvoir résoudre le problème sur une géométrie invariante, ce qui permet d'utiliser une méthode pseudo-spectrale rapide (outre des calculs initiaux effectués une seule fois) spécifiquement adaptée (type PSME). Malheureusement cette transformation trouve sa contrepartie dans le fait que l'équation de Laplace n'est alors plus valable dans le nouveau domaine, mais y est remplacée par une condition identique mais inhomogène (donc de Poisson). La conséquence en est qu'une résolution au moyen de nœuds de collocation disposés sur la seule surface libre ne suffit plus, mais qu'il est nécessaire d'en répartir dans tout le volume du domaine fixe. On se retrouve ainsi avec une direction supplémentaire de discrétisation, ce qui représente une forte augmentation du coût de ce modèle en comparaison de ceux précédemment évoqués.

Aussi, même si cette approche présente des avantages théoriques en termes de stabilité, et aussi de taux de convergence des méthodes spectrales employées, elle semble peu compétitive surtout par rapport à la méthode HOS, sauf peut-être pour des ondes très proches du déferlement. On évoquera au chapitre II.2 un peu plus en détails la comparaison des résultats obtenus par Chern *et al.* avec cette technique, à ceux fournis par le noyau des approches développées au cours de cette thèse. On peut toutefois noter que dans l'étude de Nicholls & Reitich [101] mentionnée à la section précédente, comparant le noyau stationnaire de cette méthode volumique à ceux des techniques HOS et DNO, les auteurs ont montré une stabilité accrue et une plus grande précision de la technique en volume (mais à des niveaux non utiles pratiquement (de l'ordre du dixième chiffre significatif)).

### I.1.3.6 Autres méthodes instationnaires

A ces cinq classes de méthodes, il faut rajouter deux méthodes récentes, auxquelles on ne s'est pas attaché très en détails, d'abord parce qu'elles sont compliquées et ensuite parce qu'elles ne semblent pas aisément pouvoir être étendues. La première de ces deux méthodes est due à Clamond & Grue [25] 2001, elle repose sur un noyau pseudo-spectral classique auquel est ajouté l'application d'intégrales aux endroits de la surface où sont présentes de fortes non-linéarités ('freak wave' par exemple), intégrales dont les noyaux ont une extension spatiale très restreinte autour de ces zones fortement non-linéaires. Cette méthode est bi-dimensionnelle pour le moment, et son extension à trois dimensions nécessiterait nombre d'aménagements, même si elle semble possible. D'autre part, cette méthode présente la spécificité d'utiliser *à la fois* une fonction de courant *et* le potentiel associé, qui insérés sous la forme de termes surfaciques dans les équations de surface libre formulées à la manière de Zakharov (II.1.13), permettent de ne plus se retrouver qu'avec des termes surfaciques dans

les conditions de surface libre, contrairement au HOS/DNO où le terme  $\partial\phi/\partial z$  subsiste. En contrepartie, outre une augmentation du nombre d'inconnues, un dénominateur apparaît dans ces équations, qui nécessite des traitements spécifiques. Sans être entré dans les détails, il semble néanmoins que des efforts multiples soient mis en œuvre pour s'assurer de la stabilité de la méthode, incluant notamment un soin particulier dans l'anti-repliement. En termes de résultats, ils parviennent sur l'un des exemples à engendrer des vagues isolées plus pentues (87% de pente locale maximale) que celles présentées par Dommermuth & Yue [38] ou par Brandini [12], mais limitées à deux dimensions contrairement à Brandini & Grilli [13] ou Bateman *et al.* [8].

En deuxième lieu, une méthode toute récente a été proposée par Zakharov, Dyachenko & Vasilyev [143] en 2002. Cette méthode semble complexe et l'article en donne peu de détails. Elle est basée sur l'association de la résolution d'équations différentielles de Hilbert par transformée de Fourier, à une transformation conforme du domaine, ce qui implique qu'elle ne doit pas pouvoir s'étendre en trois dimensions. Sans autres détails, ses auteurs semblent très confiants dans ses possibilités et ils présentent un cas de vague s'approchant de manière instationnaire du déferlement, jusqu'à obtenir une crête très marquée où la pente locale apparaît au moins égale à 1. Leur cas de 'freak wave' est en revanche moins impressionnant.

### I.1.3.7 Premières extensions vers la génération

Pour en conclure avec les méthodes instationnaires, on va mentionner ici les deux seuls articles qui ont à notre connaissance proposé des idées d'extension des méthodes précédentes pour y introduire la possibilité de *générer* des déformées de surface libre à partir du repos. En effet, ainsi qu'on l'a déjà évoqué, toutes les approches décrites jusqu'à présent dans cette section I.1.3 nécessitent une initialisation au moyen d'un champ initial dont elles simulent ensuite l'évolution temporelle de manière conservative. Or pour engendrer un champ de houle déterminé, et plus encore pour reproduire l'évolution dans un bassin de houle physique dans lequel interviennent notamment des phénomènes transitoires, il est nécessaire de pouvoir générer la houle. C'est d'ailleurs sur ce thème qu'a porté une grande partie des efforts au cours de cette thèse, développements qui ont été inspirés à l'origine par ces deux articles.

Le premier est un article par Kim *et al.* [78] de 1998, qui ont eu l'idée simple d'ajouter une singularité dans le fluide, en l'occurrence de type puits pour simuler une vidange. Cette singularité se présente sous la forme d'un potentiel analytique connu à tout instant, qu'on qualifie de *potentiel additionnel*  $\phi_{add}$ . Le problème incluant cette singularité est alors formulé pour le potentiel total formé du potentiel spectral solution recherché et de ce potentiel additionnel :  $\phi = \phi_{spec} + \phi_{add}$ . En injectant cette séparation des potentiels dans les équations du problème, on retrouve un problème formulé pour  $\phi_{spec}$  inconnu, mais dans lequel des termes de forçage issus de  $\phi_{add}$  apparaissent dans les seconds membres. Kim *et*

*al.* résolvent alors le système correspondant par une MD telle que présentée précédemment.

En 1999, dans un court article, Agnon & Bingham [3] ont eux aussi proposé l'utilisation d'un potentiel additionnel analytique, cette fois associé à une méthode HOS. En l'occurrence, il s'agissait d'un potentiel additionnel simulant la présence d'un batteur piston linéarisé (donc une condition de flux à travers la paroi fixe  $x = 0$ ) dans un domaine rectangulaire, sans condition sur la surface libre ; la solution est alors celle d'un écoulement de coin, connue analytiquement. Ensuite ce potentiel additionnel calculé analytiquement agissait de même en tant que termes de forçage dans les équations de surface libre non-linéaires.

Ces articles précurseurs achèvent de présenter les méthodes instationnaires, on va désormais évoquer brièvement les approches stationnaires et les approches de reproduction de houle à partir d'un signal cible qui en ont majoritairement émané, même si récemment des techniques de reproduction basées sur des méthodes instationnaires sont apparues.

### I.1.3.8 Méthodes stationnaires et de reproduction de houle

Ces approches stationnaires et dérivées sont résumées dans la partie droite du schéma I.1.1. Le but de ces méthodes est de déterminer la solution d'écoulements stationnaires non-linéaires telle que celle d'une houle régulière établie par exemple. L'idée sous-jacente à ces méthodes stationnaires est simple : on part de l'approximation linéaire connue de la solution, et on s'approche de la solution non-linéaire exacte inconnue au moyen d'une méthode de continuation, telle que la méthode itérative de Newton par exemple. Cette dernière technique consiste simplement à utiliser le premier ordre du développement en série de Taylor d'un système linéaire d'équations  $f_i = 0$ , développement qui permet d'obtenir à partir d'un vecteur solution approché  $x_k^n$ , l'estimation suivante  $x_k^{n+1}$  en résolvant :

$$f_i(x_k^{n+1}) = 0 = f_i(x_k^n) + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_k^n)[x_k^{n+1} - x_k^n] \quad (\text{I.1.11})$$

Rienecker & Fenton [109] ont eu les premiers l'idée d'employer une telle technique avec des méthodes spectrales ; il ne faut pas confondre cette approche avec celle instationnaire déjà mentionnée (dite de Fenton & Rienecker [46]). Ils ont ainsi proposé en 1981 une solution spectrale pour calculer le profil non-linéaire de la houle régulière de cambrure quelconque. Pour ce faire, ils suivent la houle dans son mouvement, elle a donc un profil permanent dans le domaine considéré. Ils partent du profil de la houle d'Airy à la cambrure choisie, et ils obtiennent ensuite les estimations successives par méthode de Newton. Le potentiel est exprimé sous la forme de son développement spectral direct (comme en MD mais sans intervention du temps) mais à travers l'emploi d'une fonction de courant, et les inconnues du système sont donc les amplitudes modales de la fonction de courant et les élévations de surface libre en des nœuds de collocation. Le système d'équations comprend outre les conditions de surface libre non-linéaires et l'équation de Laplace, quelques équations

supplémentaires telles que la spécification de la cambrure ou la conservation du volume ; cela permet de tenir compte d'inconnues supplémentaires incluant notamment la pulsation de la houle dont la solution non-linéaire est elle aussi différente de l'estimation linéaire de départ. On a utilisé cette solution de houle régulière au chapitre III.2, à fin de validation de notre modèle de génération instationnaire.

En 1994, Tsai & Jeng ont proposé la même approche pour rechercher la solution stationnaire dans une cuve bi-dimensionnelle rectangulaire. Cette solution est cette fois périodique et non permanente, il faut donc ajouter une discrétisation dans le temps ; on recherche alors l'ensemble des profils non-linéaires dans la cuve au cours d'une période et non plus un seul profil. Cette fois, les auteurs ont pris pour inconnue le potentiel lui-même, et non la fonction de courant ; en utilisant le développement spectral type MD qui prend la forme périodique suivante (amplitudes modales périodiques) :

$$\phi(x, z, t) = \sum_{(n_x, n_t)} A_{n_x n_t} \cos(k_{n_x} x) \sin(n_t t) \frac{\cosh[k_{n_x}(z + h)]}{\cosh[k_{n_x} h]} \quad (\text{I.1.12})$$

où les exponentielles spatiales se résument à leur seule partie cosinusoïdale du fait de la présence des murs latéraux, comme on le verra au chapitre suivant I.2. Les inconnues sont donc les élévations des différents profils, et les amplitudes  $A_{n_x n_t}$  correspondant aux différents instants de la période. Là encore des équations supplémentaires interviennent permettant d'obtenir notamment la valeur non-linéaire de cette période justement. La différence avec la solution précédente, outre la périodicité, réside aussi dans ce que celle de Tsai & Jeng est pour une cuve, donc en milieu fermé horizontalement. Cette solution a donc été particulièrement intéressante pour valider des aspects du noyau de nos méthodes, lui aussi formulé dans une cuve et non dans un domaine périodique ouvert répété à l'infini comme dans les méthodes précédemment évoquées (MD, HOS, etc) ; on l'a donc mise en œuvre elle aussi (cf. chapitre II.2). Il faut par ailleurs préciser que les méthodes de Newton qu'on utilise, si elles sont d'esprit très simple, peuvent devenir rapidement assez lourdes à mettre en place d'une part, et de résolution lente. En effet, elles impliquent de dériver toutes les équations par rapport à toutes les inconnues du système, puis de résoudre un système linéaire plein et mal conditionné, à chaque itération ; le nombre d'itérations nécessaire augmentant avec la difficulté à résoudre (la cambrure par exemple).

La dernière de ces méthodes stationnaires rencontrées est due à Nicholls [100] 1998, qui l'a appliquée à la recherche de houles régulières établies, mais cette fois tri-dimensionnelles. La méthode de continuation qu'il a employée est beaucoup plus complexe que la simple méthode de Newton, car la solution qu'il recherchait (celle de la houle hexagonale en l'occurrence) ne se trouve pas sur la branche principale en partant d'une déformée linéaire. Par ailleurs, sa résolution n'est pas basée sur la technique MD comme les précédentes, mais sur le noyau DNO de Craig & Sulem [34].

Si toutes ces solutions sont liées à des problèmes stationnaires particuliers, cette même technique de résolution non-linéaire itérative a aussi été employée d'une manière plus gé-

nérale pour reproduire des signaux de houle prescrits. L'objectif de ces modélisations en deux dimensions est alors, à partir d'un enregistrement connu sur une sonde, de durée déterminée, de retrouver une séquence correspondante d'évolution de houle non-linéaire dans un domaine spatial au voisinage de la sonde (respectivement sur plusieurs sondes en trois dimensions). Ainsi, ces modèles permettent par exemple à partir d'un simple relevé de surface libre, de ré-accéder à une dynamique réaliste de l'écoulement sous cette surface libre dans la zone de l'enregistrement. Le premier à avoir proposé une telle technique est Lambrakos [83] 1981, en utilisant le potentiel :

$$\phi(x, z, t) = - \sum_{(n_x, n_t)} [A_{n_x n_t} \cos(k_{n_x} x - \omega_{n_t} t) + B_{n_x n_t} \sin(k_{n_x} x - \omega_{n_t} t)] \cosh[k_{n_x} z] \quad (\text{I.1.13})$$

Cette forme est presque identique à celle de Tsai & Jeng (I.1.12) précédente, si ce n'est qu'elle recherche des composantes explicitement propagatives. Les deux résolutions sont de même très proches, impliquant toutes deux de distribuer des nœuds de collocation en temps et en espace ; la seule différence provient de ce que le critère précédent, de respect d'une amplitude maximale déterminée de la déformée stationnaire dans la cuve, est ici remplacé par l'obtention du signal prescrit au nœud positionné à l'endroit de la sonde, et ce à tous les instants discrétisés. La séquence de déformées initiales est déterminée par reconstruction linéaire de l'analyse des composantes spectrales présentes dans le signal cible.

Une solution alternative a été proposée par Sobey [118] en 1992, s'appuyant sur l'hypothèse de stationnarité locale de la houle dans un profil irrégulier. Il a ainsi découpé un signal de houle cible en petites bandes temporelles, pour chacune desquelles il a cherché au voisinage de la sonde un profil stationnaire correspondant, par la même méthode que Rienecker & Fenton [109] pour la houle régulière. Toutefois, Johannessen & Swan [74] ont mentionné les limites de cette approche, notamment pour reproduire des signaux transitoires.

Peu après, Baldock & Swan [7] ont proposé en 1994 une variante de la technique de Lambrakos, basée sur le même potentiel, mais présentant des aménagements visant à améliorer la convergence de la résolution itérative de Newton. En particulier, au lieu de considérer les conditions de surface libre séparément, ils prennent la moyenne quadratique des deux en chaque nœud pour procéder à la résolution itérative ; justifiant ce choix par des considérations de meilleure prise en compte de la dynamique locale de la solution. Toujours dans le but d'améliorer la convergence de la méthode, ils introduisent aussi une fonction de poids spécifique au nœud de surface localisé en la position de la sonde. Par cette méthode, ils parviennent à retrouver avec une bonne précision non seulement leur signal cible exemple (un paquet de vagues focalisé sur la sonde), mais aussi la vitesse dans le fluide sous ce paquet de vague, comparée à des expériences. Cette méthode paraît toutefois difficilement extensible à la reproduction non ponctuelle de la dynamique de l'écoulement. De plus, comme on le mentionnera au II.2, les possibilités de convergence de telles méthodes et leur coût spectral lié à l'utilisation de la MD ne permettent pas d'envisager la reproduction de signaux longs.

Plus récemment, dans cette même direction, Wu, Liu & Yue [139] ont proposé en

2000 une méthode similaire mais basée sur un noyau HOS plus rapide qui leur a permis de montrer un cas tri-dimensionnel avec deux sondes dans le domaine, en utilisant un processus d'optimisation non-linéaire nettement plus efficace que la méthode de Newton. Là encore, ils initialisent par des déformées dans tout le domaine et à tous les instants, qu'ils font toutes évoluer simultanément par optimisation, de manière à ce qu'elles vérifient à la fois les conditions de surface libre non-linéaires et à la fois les signaux sur les deux sondes placées dans le domaine. Outre l'utilisation d'un noyau spectral et d'un processus d'optimisation plus efficaces par rapport à Baldock & Swan, ils emploient de plus pour initialiser leurs déformées une approximation au second ordre, issue de Zhang *et al.* [144], ce qui réduit nettement le nombre de passes de l'optimisateur. Toutefois, si reproduire un tel cas tri-dimensionnel est impressionnant, il faut préciser que la déformée de courte durée obtenue avec deux sondes cibles était peu irrégulière, principalement mono-directionnelle, et mettait en jeu peu de longueurs d'ondes de houle dans le domaine. En effet, ainsi que le remarquent les auteurs, le nombre de degrés de libertés d'une telle méthode peut devenir rapidement très important, rendant difficile et très coûteux le processus d'optimisation. La complexité de la houle, la longueur des signaux cibles, ainsi que le nombre de ces signaux qu'on s'impose (nombre dont l'augmentation assurerait de reproduire effectivement la houle partout dans le domaine et non juste en les sondes) peuvent ainsi soulever rapidement des difficultés de convergence et un coût prohibitif de l'optimisateur. On peut de plus noter que toutes les techniques non génératives présentées jusqu'à présent dans cette sous-section ne permettraient pas, par exemple, de déterminer une loi de batteur apte à engendrer en bassin le champ de vagues adéquat pour reproduire un signal relevé en mer.

Enfin, on mentionnera le changement de technique de l'équipe de Swan, qui avec Johannessen [74] en 1997 a employé la méthode *instationnaire* MD de Fenton & Rienecker [46] décrite à la sous-section I.1.3.2, pour reproduire les mêmes paquets de vagues focalisés qu'en 1994 avec Baldock [7]. L'approche est donc différente, puisqu'il s'agit là d'imposer une déformée initiale contenant les composantes linéaires contenues dans le paquet de vague avant sa focalisation, et de simuler ensuite son évolution jusqu'à cet événement. Les auteurs tirent ainsi avantage de ce que bien avant la focalisation la déformée qui n'implique que des pentes faibles peut être considérée linéaire, l'initialisation linéaire étant alors justifiée. C'est donc une technique tout à fait différente de celles qui précèdent : on ne se donne pas des déformées initiales sur la durée du signal, qu'on optimise ensuite toutes à la fois en restant dans ce domaine temporel ; mais on procède à une analyse linéaire du signal, de laquelle on déduit des conditions initiales dans le domaine bien avant le début du signal, conditions qu'on fait ensuite évoluer de manière non-linéaire jusqu'à la fin de l'enregistrement. Telle quelle cette technique ne peut d'ailleurs reproduire fidèlement qu'un signal en conditions linéaires (faibles amplitudes) ; on évoquera au chapitre III.2 la possibilité de l'étendre à une reproduction de signaux en conditions non-linéaires. On a en effet utilisé un processus du même type pour obtenir aussi un paquet de vagues focalisé, mais en incluant sa génération

complète et au moyen d'une technique HOS nettement plus rapide.

On en termine donc ici avec les méthodes stationnaires et leurs dérivées appliquées à la reproduction de houles ; et cela clôt par la même occasion l'évocation de l'éventail des méthodes spectrales potentielles non-linéaires appliquées à l'hydrodynamique, dont l'architecture chronologique est résumée sur le schéma I.1.1. On avait d'abord cru que les approches dites 'multi-modales', dédiées à la simulation de cas de ballottement en cuve, entraient aussi dans cette catégorie ; mais en fait, si elles comprennent aussi des développements sur les modes propres du domaine, leur résolution est quant à elle basée sur des développements asymptotiques des interactions entre modes. Proposées à l'origine par Faltinsen [44] et dans leurs versions les plus récentes par Faltinsen & Timokha [45] par exemple ou bien La Rocca *et al.* [84], ces techniques n'utilisent donc pas les propriétés spectrales ou pseudo-spectrales, ni les résolutions associées ; d'ailleurs leurs auteurs n'utilisent pas cette terminologie. Maintenant qu'on a fourni quelques détails quant aux différentes classes de méthodes existantes, on peut mener un rapide inventaire de leurs applications. On laissera de côté les méthodes MCA qui ne sont pratiquement plus utilisées ; d'autre part, on a déjà évoqué les applications des méthodes spécifiques (stationnaires par exemple) ou isolées, on se consacrera donc aux seules méthodes générales HOS, DNO et volumiques.

## I.1.4 Applications traitées avec les techniques principales

### I.1.4.1 Modèles HOS

Ce sont les techniques spectrales qui ont été le plus utilisées dans le domaine. Si on revient aux deux articles fondateurs de ces méthodes, nombre d'applications y ont déjà été présentées. Dans celui de Dommermuth & Yue [38] de 1987, ils comparent d'abord leur modèle, sur le cas d'une houle se cambrant, à une méthode MEL du type de celle de Vinje & Brevig [132]. L'initialisation est faite au moyen d'une houle de Stokes et l'application d'une pression asymétrique sur la moitié de la longueur d'onde de la houle la conduit à se cambrer avec le temps. Le calcul dans lequel lissage et filtrage sont présents atteint une cambrure d'environ 90% de la limite de Stokes, avec une comparaison à la MEL très bonne puis qualitativement correcte à mesure qu'on s'approche de cette limite. Ils comparent ensuite à la MCA de Stiassnie & Shemer [121] sur un cas d'instabilité de type I de l'évolution d'un train d'ondes de Stokes. La comparaison est qualitativement correcte même si les évolutions des modes en présence présentent tout de même des différences d'amplitude. Ils confrontent ensuite leurs simulations à des expériences sur le cas de l'évolution d'un train d'onde irrégulier proche du déferlement ; là encore la comparaison est qualitativement correcte, ils font même l'interprétation de l'occurrence d'une brusque perte d'énergie totale

intervenant dans leurs simulations, comme correspondant à du déferlement observé au même instant dans les expériences. Enfin, ils appliquent leur modèle au croisement de trains d'ondes (bi-dimensionnels) de longueurs d'ondes différentes, et trouvent un bon accord avec les prédictions de Longuet-Higgins & Phillips [88]. Dans ces différentes simulations bi-dimensionnelles, le nombre de modes utilisé allait jusqu'à  $N_x = 513$ , et les ordres de pente choisis étaient  $m = 4$  ou  $6$ .

Dans leur article de la même année West *et al.* [135] présentent quant à eux de nombreux cas non seulement en deux mais aussi en trois dimensions, allant jusqu'à faire tourner sur leur Cray X-MP un cas comptant  $256 \times 512$  modes/nœuds de collocation sur la surface libre. Ils présentent d'abord des évolutions bi-dimensionnelles de solitons isolés de spectre large ou étroit, puis ils montrent l'interaction de deux solitons qui se croisent, en comparant favorablement aux résultats MCA de Cohen *et al.* [28]. Ils exposent ensuite des interactions non-linéaires d'ondes de longueurs différentes, puis ils passent aux résultats tri-dimensionnels : ils comparent d'abord l'influence d'un train d'onde bi-dimensionnel venant interagir avec un profil stationnaire tri-dimensionnel, et trouvent un bon accord qualitatif avec les expériences de Su [122]. Ensuite, ils montrent la création du dièdre de Kelvin par l'application d'une perturbation imposée sur la surface libre. Dommermuth & Yue [39] ont présenté ce même cas dans un article séparé l'année suivante, mais avec moins de modes que West *et al.*. Ces derniers montrent aussi la stabilité de la déformée tri-dimensionnelle d'une houle de Stokes oblique cambrée. Enfin, ils exposent une vue de houle aléatoire tri-dimensionnelle réaliste obtenue avec les 128000 modes précédemment évoqués. Dans les différentes simulations, un nombre  $m = 5$  ou  $6$  a été utilisé.

Le modèle HOS de Dommermuth & Yue a été utilisé depuis par Yasuda & Mori [140] en 1997 en deux dimensions pour reproduire eux aussi des instabilités de Benjamin-Feir, puis plus récemment [98] (2002) pour simuler l'évolution à long terme d'un spectre de type JONSWAP. Tanaka [126] lui aussi a mis en œuvre en 2001 le HOS, de West *et al.*, pour simuler l'évolution sur de longues durées de spectres de type JONSWAP et Pierson-Moskowitz en employant jusqu'à  $1024 \times 512$  modes, mais avec  $m = 3$  seulement. Il a notamment étudié par cette méthode la stabilité de la forme de ces spectres d'énergies au cours du temps.

Récemment, Brandini [12] a étudié dans sa thèse (2001), avec une méthode HOS du type de celle de Dommermuth & Yue, la formation de vagues 'scélérates' ('freak waves'), d'abord en utilisant des modulations de trains d'ondes de Stokes bi- puis tri-dimensionnels pour les faire apparaître. Puis, il a appliqué le même modèle à l'évolution à long terme d'un spectre de type JONSWAP, comme Tanaka mais en deux dimensions et pas dans le même but, et a mis en lumière l'apparition, 'naturelle' cette fois, de vagues isolées fortement cambrées après un long temps de simulation. L'intérêt de ce modèle est qu'il a ensuite été couplé au modèle de bassin de houle numérique (NWT) de Grilli *et al.* [59], modèle BEM-MEL pouvant simuler le déferlement jusqu'à l'impact. Dans leur modèle couplé, Brandini & Grilli [13] 2001 simulent l'évolution d'instabilités en utilisant une modulation tri-dimensionnelle

en HOS, puis quand la freak wave apparaît, le NWT prend le relais ; prenant ainsi avantage de la méthode HOS précise et rapide jusqu'à ses limites.

### I.1.4.2 Modèles DNO

Dans le premier article de Craig & Sulem [34], seuls des cas bi-dimensionnels peu cambrés et avec peu de modes sont montrés. Les premiers résultats intéressants apparaissent en 1998 avec Smith [117] qui a formulé le modèle de Craig & Sulem pour un fond variable. Des cas de trains d'ondes régulières passant au-dessus d'un haut fond sont simulés et comparés avec succès à des expériences par Dingemans [36] ; 512 modes sont utilisés. Il compare aussi des profils de houle s'approchant d'une plage à l'article de Grilli *et al.* [61] et trouve un bon accord qualitatif jusqu'à des pentes locales de 40% environ.

Le modèle DNO dans sa version accélérée (comparable au HOS) a ensuite été utilisé par Bateman *et al.* [8] en 2001 pour étudier l'évolution non-linéaire de paquets de vagues focalisés. Ils ont d'abord repris la même étude que Johannessen & Swan [74] évoquée précédemment (section I.1.3.8) sur le même cas de focalisation bi-dimensionnel. Puis ils ont étendu cette technique à trois dimensions, utilisant à nouveau la même boucle : choix d'un paquet de vague cible (dont ils ont imposé que les composantes respectent le spectre de Pierson-Moskowitz), analyse linéaire, création d'un champ de vague linéaire initial correspondant à un temps précédent la focalisation, puis simulation complètement non-linéaire incluant la focalisation. Le cas présenté utilise  $256 \times 256$  modes/nœuds de collocation sur la surface libre, et des pentes maximales de 40% environ sont mesurables lors de la focalisation du pic.

Plus récemment, ces mêmes auteurs [9] ont repris leur étude bi-dimensionnelle, en développant un nouvel opérateur pour accéder avec une plus grande précision aux vitesses sous la surface libre.

### I.1.4.3 Modèles volumiques

On rappelle qu'il s'agit là de modèles en milieu fermé contrairement aux précédents, *i.e.* sans s'imposer de conditions périodiques aux frontières. Ils ont d'abord été développés en deux dimensions (cf. Chern *et al.* [23]), et appliqués à des oscillations libres et forcées en cuves (cf. aussi Frandsen & Borthwick [56]). Une version tri-dimensionnelle sur un domaine annulaire a ensuite été développée (cf. Chern *et al.* [24]), qui pourrait être intéressante pour calculer la diffraction non-linéaire sur un cylindre, mais ses résultats n'ont été montrés que sur un lâcher de surface libre en conditions linéaires.

Cette méthode volumique originale, qui présente le désavantage d'un maillage volumique rendant coûteuse sa résolution, n'a donc pas encore montré son intérêt pratique, qui pourrait intervenir si elle parvenait à s'appliquer à des cas proches du déferlement, pour

lesquels les méthodes spectrales surfaciques voient leur taux de convergence nettement diminuer, contrairement à celle-ci théoriquement.

Pour conclure sur ces applications, on peut dire que les modèles HOS/DNO ont finalement encore été peu appliqués malgré leurs propriétés intéressantes, et qu'ils sont pour le moment nettement supérieurs aux autres modèles spectraux dans le domaine. Leur nouveau développement proposé dans cette thèse, en milieu fermé (pouvant donc être utilisé pour des cas d'oscillations libres et forcées) et avec une méthode permettant de générer la houle et non plus seulement de partir de profils initiaux, ce qui peut engendrer des instabilités (cf. Dommermuth [37]), devrait donc en constituer une avancée. Pour en terminer tout à fait avec cette étude bibliographique, on va maintenant évoquer quelques remarques ayant trait à des aspects numériques, faites par les auteurs dans ces différents articles, et qui pourront être utiles pour appréhender les développements et discussions des chapitres suivants.

## I.1.5 Aspects numériques

Il ne s'agit pas du tout ici de lister exhaustivement toutes les aspects numériques évoqués dans les articles sur les méthodes précédentes, mais simplement de rapporter quelques remarques d'intérêt faites par les auteurs et qui sont en rapport avec les modèles qu'on a développés dans cette thèse (MD et HOS). En ce qui concerne les MD, on citera simplement une remarque de Kim *et al.* [78] qui ont noté dans leur article que le sur-dimensionnement du système (*i.e.* considérer plus de nœuds de collocation que de modes) aidait à sa stabilité numérique.

Pour les modèles types HOS ou DNO, les différents auteurs [38],[135] remarquent que la propriété théorique de convergence spectrale exponentielle, qu'ils obtiennent bien pour des déformées peu cambrées dans leurs domaines périodiques, se perd avec l'augmentation des pentes locales contenues dans les déformées. Si cette diminution est attendue théoriquement (cf. chapitre suivant I.2), elle peut donner lieu à la non convergence du processus itératif HOS (avec  $m$ ) pour des cambrures trop fortes (cf. Dommermuth & Yue [38]). Clamond & Grue [25] affirment d'ailleurs dans leur discussion sur ces méthodes qu'elles sont limitées en non-linéarités car elles sont rapidement instables avec  $m$  dans la pratique. Si Dommermuth & Yue font une analyse tendant à montrer que le processus itératif HOS est particulièrement sensible au cumul d'erreur, notamment pour les modes les plus élevés, ils ne dressent cependant pas des conclusions aussi négatives sur la convergence avec  $m$ , et montrent des cas tests assez fortement non-linéaires, où  $m = 10$  est employé. Ils précisent en outre que la convergence rapide avec  $m$  implique que le choix  $m = 4$  est suffisant dans nombre de cas. Ainsi, ils observent une convergence très rapide avec  $m$  jusqu'à 80% de la limite de Stokes en houle régulière, puis plus pauvre entre 80% et 90%, pourcentage élevé qui semble constituer

leur limite de convergence. Ces auteurs notent toutefois que le taux de convergence lié à  $m$  diminue plus vite avec la difficulté de la déformée (la présence de pentes fortes) que celui lié à la série spectrale elle-même (donc à  $N_x$ ). En fait, de notre expérience, pour s'intéresser à la stabilité des simulations, ce critère  $m$  ne peut être décorrélé du nombre de modes  $N_x$  considéré. Dommermuth & Yue recommandent ainsi de d'abord choisir  $N_x$  suffisamment grand, puis de s'intéresser à la convergence en fonction de  $m$  en se donnant un critère d'arrêt. Ils soulignent en outre que ce problème de convergence, peu contraignant dans la pratique en deux dimensions, pourrait néanmoins le devenir en trois dimensions où les modules des modes en présence sont plus importants.

Pour West *et al.* [135], c'est l'anti-repliement qui est crucial et qui assure la stabilité du modèle, phénomène qu'ils séparent de la diminution effective du taux de convergence théorique avec l'augmentation des pentes dans la déformée ; Dommermuth & Yue évoquent aussi succinctement ce thème. Clamond & Grue ne sont toutefois pas convaincus de la validité de l'anti-repliement de Dommermuth & Yue car ils affirment que le filtrage modal qu'ils opèrent est rendu nécessaire à cause de ce problème de repliement justement (filtrage qui correspond d'après Dommermuth & Yue à un lissage spatial du type de celui introduit par Longuet-Higgins & Cokelet [89] pour stabiliser leur modèle MEL). Clamond & Grue n'ont d'ailleurs pas de filtrage dans leur méthode, ce qui est aussi le cas de West *et al.*. Ce filtrage est en revanche aussi employé par les auteurs du DNO (Craig & Sulem [34] et Bateman *et al.* [8]), qui eux énoncent explicitement qu'ils ne procèdent pas à des traitements d'anti-repliement de leur méthode, arguant de ce que pour eux le filtrage suffit à s'affranchir de ce problème. Seul Nicholls [100] quand il a repris l'opérateur DNO de Craig & Sulem, a opéré en plus du filtrage un anti-repliement partiel de la résolution itérative de l'opérateur, là où il estime le repliement être le plus présent. On reparlera plus en détails de ce thème qu'on estime important dans les chapitres suivants.

Par ailleurs, les auteurs utilisent le plus souvent une avance en temps de type Runge-Kutta du 4<sup>ème</sup> ordre, dont Fornberg [53] a montré l'extension de la zone de stabilité en comparaison de modèles type predictor-corrector par exemple. Dommermuth & Yue en font l'analyse de stabilité linéaire pour leur méthode, et parviennent à une condition type condition de Courant (CFL) qui stipule que :  $(\Delta t)^2 \leq 8/|k_{N_x}|$ .

Maintenant qu'on a replacé les deux techniques MD et HOS dans le contexte plus large des méthodes spectrales utilisées en hydrodynamique, et qu'on a évoqué leurs applications ainsi que quelques remarques numériques d'intérêt, on va pouvoir s'intéresser un peu plus en détails à leurs formulations. Pour ce faire, on va commencer par préciser dans un court chapitre qui suit quelques aspects théoriques généraux liés aux méthodes spectrales, ce qui pourra aider à l'appréhension des développements et des discussions qui interviendront dans les parties II et III de ce manuscrit.



## Chapitre I.2

# Généralités sur les méthodes spectrales utilisées

Ainsi qu'on l'a évoqué à la section I.1.1 du chapitre précédent, la spécificité des approches spectrales réside dans leur caractère *global*, qui implique finalement un changement complet des réflexes par rapport aux méthodes locales (DF, VF et EF) plus classiquement utilisées en hydrodynamique navale. Le meilleur moyen de saisir cette caractéristique est peut-être de considérer de manière irréaliste la discrétisation des équations sur un seul point. Avec une méthode locale classique, on obtiendrait ainsi la connaissance de la solution au point unique du maillage, elle serait inconnue partout ailleurs. En revanche, à l'aide d'une méthode spectrale on se retrouverait avec une unique fonction de base, d'amplitude inconnue à déterminer, qui nous serait fournie par la résolution appliquée au seul nœud de collocation. En conséquence de quoi la solution, pourtant résumée à cette seule fonction de base, serait néanmoins connue *dans tout le domaine*, et en l'occurrence proportionnelle à cette fonction. Cette différence de nature dans la discrétisation du problème peut sembler purement technique de prime abord, mais dans la pratique, tant les caractéristiques numériques de convergence et de stabilité par exemple, que l'interprétation physique (en termes de modes naturels, etc.) en sont complètement changées par rapport aux méthodes locales. Ainsi, les caractéristiques auxquelles on s'intéresse pour les approches spectrales sont principalement :

- le taux de décroissance des amplitudes modales,
- le taux de convergence associé des séries re-construites (qui seront nos valeurs locales),
- la présence de repliement indésirable dans les produits de ces séries tronquées,
- et des aides éventuelles à la stabilité, spécifiques (filtrage modal par exemple) ou non (lissage spatial par exemple).

On se fixe pour objectif dans ce court chapitre d'évoquer ces caractéristiques principales d'une manière générale, pour rendre ensuite plus aisée l'appréhension des formulations,

mises en œuvre et résultats numériques qui suivent.

## I.2.1 Nature et propriétés des séries pseudo-spectrales

### I.2.1.1 Nature des séries

Comme on l'a vu succinctement au chapitre I.1.1 précédent, les méthodes spectrales consistent en des développements en séries sur des bases de fonctions, qui sont choisies de manière à ce que la re-construction de ces séries vérifie des propriétés de convergence spécifiques d'intérêt. Les fonctions de base utilisées ici sont des fonctions trigonométriques, et les séries associées des séries de Fourier. Ces séries sont définies pour toute fonction  $\bar{f}$  définie sur  $[0, L_x]$  intégrable en moyenne quadratique au sens de Lebesgue, et qui appartient donc à l'espace de Hilbert  $L^2([0, L_x])$ . On ne rappellera ici que les propriétés dont on a besoin pour expliquer nos développements, pour plus de détails on pourra se référer à Canuto *et al.* [17] par exemple, ouvrage qui a servi de référence à la plupart des apports théoriques de ce chapitre. À leur suite, on entendra notamment par le terme 'périodique' pour une fonction  $f$  définie sur  $[0; L_x]$ , la condition :  $f(0^+) = f(L_x^-)$ .

Si on considère une telle fonction  $\bar{f}$  réelle définie sur  $[0, L_x]$ , régulière mais non périodique, elle possède alors une décomposition unique en série de Fourier sur cet intervalle :

$$\forall x \in [0, L_x], \bar{f}(x) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \left[ \bar{A}_{n_x} \cos\left(\frac{2n_x\pi x}{L_x}\right) + \bar{B}_{n_x} \sin\left(\frac{2n_x\pi x}{L_x}\right) \right] \quad (\text{I.2.1})$$

En opérant cette décomposition on a en fait implicitement répliqué la fonction sur tout l'espace  $\mathbb{R}$  en la considérant périodique de période  $L_x$ . Cette fonction étendue, définie sur  $\mathbb{R}$ , est alors *a priori* discontinue en  $x = 0 [L_x]$  et sa série de Fourier tronquée à un ordre  $\bar{N}_x/2$  compte  $\bar{N}_x + 1$  coefficients non nuls. Si on considère désormais une nouvelle fonction  $f$  définie sur  $[0, 2L_x]$  (ou de manière équivalente, sur  $[-L_x, L_x]$ ) comme un prolongement pair de  $\bar{f}$  :

$$f(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & \text{si } x \in [0, L_x] \\ \bar{f}(2\pi - x) & \text{si } x \in [L_x, 2L_x] \end{cases}$$

et qu'on la décompose en série de Fourier sur ce nouvel intervalle :

$$\forall x \in [0, 2L_x], f(x) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \left[ A_{n_x} \cos\left(\frac{n_x\pi x}{L_x}\right) + B_{n_x} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{L_x}\right) \right] \quad (\text{I.2.2})$$

les coefficients  $B_{n_x}$  se retrouveront tous nuls du fait de la parité de  $f$ . Si on tronque maintenant cette série à la même fréquence que celle prise pour  $\bar{f}$  (*i.e.* au terme  $A_{N_x} \cos(\bar{N}_x\pi x/L_x)$ ), on aura alors conservé  $N_x + 1 = \bar{N}_x + 1$  termes dans notre série, soit le même nombre que pour  $\bar{f}$ . Comme la fonction  $f$  est paire, on peut de plus restreindre l'intervalle de travail

au demi-domaine  $[0, L_x]$ , sur lequel  $f$  et  $\bar{f}$  sont identiques. En résumé, on retrouve bien à travers  $f$  notre fonction de départ  $\bar{f}$  sur notre intervalle de départ  $[0, L_x]$ , estimée par le même nombre de termes à une fréquence de troncature donnée, mais qui se réplique sur  $\mathbb{R}$  comme une fonction continue, comme le montre la figure I.2.1. On a donc finalement gagné un ordre de singularité (et donc un ordre de convergence comme on le verra plus loin). Si la fonction  $\bar{f}$  décrite est de plus telle que  $\bar{f}'(0) = \bar{f}'(L) = 0$ , sa réplification sur tout  $\mathbb{R}$  passera de non continue à  $C^1$ , faisant gagner deux ordres, etc. Dans le cas où la fonction

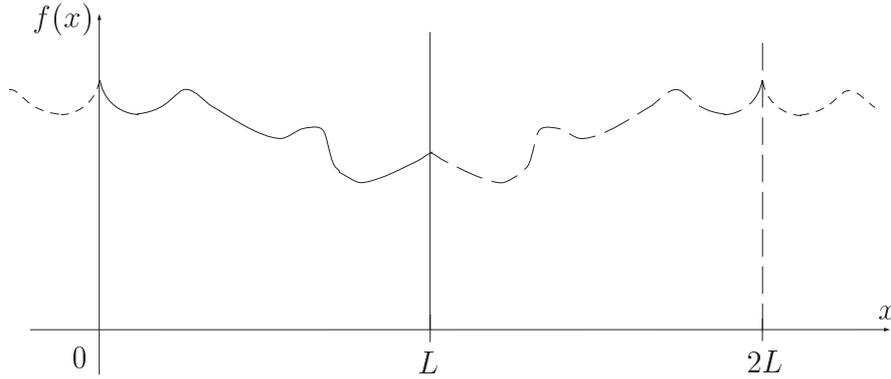


Figure I.2.1: Périodicité de la fonction développée en série de Fourier cosinoïdale.

est périodique de période  $L_x$ , ce ‘prolongement pair’ n’apporte en revanche plus rien à la décomposition (la fonction répliquée sur  $\mathbb{R}$  serait naturellement continue), ni ne la dégrade d’ailleurs sauf dans le cas particulier où la fonction a en plus ses valeurs aux bornes nulles, cet artifice devenant alors peu judicieux puisqu’il élimine de la base les sinus qui, de part leur nullité en ces bornes, forment la base naturelle pour décrire de telles fonctions (la fonction  $\bar{f}(x) = \sin(x)$  serait par exemple développée sur une infinité de termes cosinus). Cette décomposition de  $f$  en série de Fourier cosinoïdale, utilisant un prolongement pair intrinsèque (*i.e.* pratiquement : les modes utilisés seront donnés par  $2n_x\pi/(2L_x) = n_x\pi/L_x$  et non  $2n_x\pi/L_x$ ), est celle qu’on utilisera pour développer spectralement notre potentiel.

### I.2.1.2 Décroissance modale et taux de convergence associé

On trouve dans Canuto *et al.* [17] la justification théorique reliant le taux de décroissance des coefficients de Fourier (qui sont appelées amplitudes modales dans notre terminologie), à la régularité de la fonction  $f$ . On précise qu’ils considèrent eux des fonctions périodiques et s’intéressent de ce fait à la régularité de la fonction uniquement à l’intérieur du domaine. En raisonnant en terme de réplification à l’infini, on peut étendre ce raisonnement à tout le domaine pour peu qu’on prenne en compte aussi les irrégularités éventuelles induites sur les bords lors de la réplification de la fonction ; ainsi, une pente régulière dans le domaine de départ, décroissant de 1 à -1 par exemple, donc non périodique, sera vue avec le

prolongement pair précédent de la même manière qu'une fonction triangulaire symétrique dans le domaine (allant de 0 à 0 en passant par un sommet à 1), elle périodique. Cela revient en fait, si l'on considère cette fonction rendue paire répliquée à l'infini, à choisir le domaine décalé ou non de  $L_x/2$ .

Les taux de décroissance donnés par Canuto sont reliés directement à l'ordre de régularité  $C^p$  de la fonction :  $A_{n_x} = O\left(1/n_x^{(p+2)}\right)$ . Ainsi, pour une fonction périodique triangulaire dans le domaine, par exemple, les coefficients décroîtront comme  $1/n_x^2$  ; il en sera de même pour une pente régulière dans le domaine, non périodique, si on utilise le prolongement pair précédent. Si l'on considère maintenant comme fonction une alternance de houle régulière périodique dans le domaine, le taux de convergence de ces amplitudes modales  $A_{n_x}$  décroîtra alors d'un taux exponentiel (plus rapide que toute puissance de  $n_x$ ) pour une houle en conditions linéaires, à un taux de 2 pour de la houle cambrée à la limite de Stokes.

Le niveau suivant concerne la convergence des séries re-construites à partir de ces amplitudes modales de taux de décroissance déterminé, *i.e.* celui des quantités locales dans notre approche. Pour une série tronquée à un ordre  $N_x$ , on cherche ainsi le taux de convergence du reste  $R_{N_x}$  de la série après cet ordre de troncature, *i.e.* :

$$R_{N_x}(x) = \left| f^{\text{exacte}}(x) - \sum_{n_x=0}^{N_x} A_{n_x} \cos(n_x x) \right| \quad (\text{I.2.3})$$

où l'argument du cosinus est simplifié pour la clarté de la lecture (ce qui revient à faire un changement d'échelle en  $x$  transformant le domaine  $[0; L_x]$  en  $[0; \pi]$ ). Pour des séries de Fourier complètes telles que (I.2.1), ce reste évolue d'après Canuto *et al.* comme les amplitudes modales elles-mêmes, donc si les amplitudes modales décroissent comme  $1/n_x^3$  par exemple, la série re-construite convergera vers  $f$  à cette même vitesse (*i.e.* comme  $1/N_x^3$ ). Cette propriété est tout à fait intéressante ; ainsi nos fonctions de base induisent par nature qu'on ne perd pas un ordre, ce qui est pourtant classiquement le cas en sommant. Toutefois, cette caractéristique est limitée à l'*intérieur* du domaine, en effet sur les bords les fonctions de base prenant toutes une valeur constante quel que soit le mode considéré, on perd effectivement un ordre en re-construisant. Désireux de vérifier la validité de cette propriété donnée pour des séries de Fourier complètes, on l'a retrouvée pour nos séries cosinusoidales, *i.e.* pour un taux de décroissance modale de  $p$  on a cherché à majorer la quantité :

$$\left| \sum_{n_x=N_x+1}^{\infty} \frac{\cos(n_x x)}{n_x^p} \right|$$

En introduisant une transformation d'Abel, puis en majorant les termes obtenus et en utilisant finalement la relation :

$$\forall n, \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

on obtient  $\forall x \neq 0[\pi]$ , pour  $p = 2$  ici :

$$\left| \sum_{n_x=N_x+1}^{\infty} \frac{\cos n_x x}{n_x^2} \right| \leq \frac{1}{N_x^2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{\cos x/2}{2}}{\sin^2(x/2)} \right) = O\left(\frac{1}{N_x^2}\right) \quad (\text{I.2.4})$$

et pour les valeurs supérieures de  $p$  une récurrence est employée.

Enfin, on peut s'intéresser à un dernier taux de convergence qui est celui des quantités globales. Ces quantités sont obtenues par intégration spatiales des quantités locales aux nœuds de collocation. Leur convergence est donc liée à la fois à la convergence des quantités re-construites qu'on vient d'évoquer, et à la fois à celle de la méthode d'intégration. En effet, dans la méthode pseudo-spectrale on utilise autant de nœuds de collocation dans l'espace physique que de modes dans l'espace modal, par conséquent lorsqu'on augmente l'ordre de troncature de la série, on augmente aussi le nombre de nœuds de collocation distribués dans l'espace. La méthode d'intégration qu'on a utilisée est la simple méthode des trapèzes, qui converge théoriquement à l'ordre 2 avec le nombre de points  $N_x$ . Or nos quantités locales re-construites des séries spectrales auront toujours un ordre de convergence au minimum égal à 2 (fonctions continues), et le plus souvent supérieur. C'est par conséquent la méthode d'intégration qui sera le facteur limitant la convergence globale, qui sera ainsi généralement d'ordre 2. Toutefois, si à la fois la méthode d'intégration et les séries spectrales convergent à l'ordre 2, la convergence des quantités globales pourrait alors même perdre jusqu'à un ordre, pour se retrouver au pire d'ordre 1. Cependant, ce phénomène n'a jamais été observé, alors même qu'on a déjà rencontré des taux de convergence des séries spectrales seulement légèrement supérieurs à 2. A cela on peut trouver deux explications : la première est que l'intégrale d'une fonction périodique impaire dans le domaine est exacte par méthode des trapèzes (par compensation des erreurs), or certaines de nos quantités globales intégrées sont de ce type ; l'ordre de convergence de l'intégrale est alors simplement identique à celui de l'intégrand. Quand la forme de ce dernier n'est pas aussi favorable, celui-ci résulte tout de même de compositions de fonctions de nature cosinusoidale ; et, si on ne l'a pas vérifié théoriquement, il est néanmoins possible que cela ait une influence dans la conservation non escomptée de l'ordre de convergence des quantités intégrées ; de même que cette nature implique déjà que la reconstruction des séries conserve l'ordre de décroissance des amplitudes modales.

Si on se résume, quand on a une fonction  $f$  continue dans le domaine  $[0; L_x]$  dont la réplique jusqu'à l'infini après prolongement pair est  $C^p$ , alors :

- les amplitudes modales de la série de Fourier cosinusoidale, en laquelle  $f$  est développée de manière unique, décroissent comme  $1/n_x^{(p+2)}$  ;
- la re-construction de  $f$  de manière locale (ou de ses dérivées, etc.) converge avec l'ordre de troncature comme  $1/N_x^{(p+2)}$  ;
- les quantités globales intégrées à partir des valeurs locales re-construites de  $f$  convergent dans le cas usuel comme  $1/N_x^2$  (avec notre intégration par méthode des trapèzes).

En se rapprochant un peu plus de l'utilisation pratique de ces méthodes qui va suivre dans les prochains chapitres, l'analyse précédente signifie par exemple que la convergence de nos séries spectrales sera au pire d'ordre 2, ce pour des cas de lâcher de pente ou des houles à la cambrure de Stokes par exemple. Si ces déformées sont très régulières, comme le lâcher d'un mode en conditions linéaires dans la cuve, alors cette convergence est exponentielle, propriété connue sous le nom de *convergence spectrale*. Si les déformées sont nulles aux extrémités du domaine (comme dans le cas d'une houle propagée de l'intérieur du domaine et absorbée avant l'extrémité opposée, cf. chapitre III.2), alors la présence de murs en ces extrémités (qui rendent la déformée *a priori* non-périodique) n'aura plus d'influence négative sur le taux de convergence, puisque la réplication de la déformée devenue périodique sera alors localement  $C^\infty$  en ces extrémités. À noter qu'on corrèle ici le taux de convergence à la déformée de surface libre  $\eta$ , alors que c'est le *potentiel*  $\phi$  et lui seul qu'on décompose spectralement, mais les régularités de ces deux quantités sont liées l'une à l'autre (par exemple, si la déformée est nulle dans une zone il n'y a pas non plus de cinématique, et similairement, quand l'élévation de surface libre présente à l'inverse un fort gradient localement, la cinématique associée est elle aussi fortement variée); et plus en détails  $\eta$  est même directement assimilable à un développement spectral dès qu'on évaluera notre potentiel en  $z = 0$  (série de perturbations ou HOS), ce qu'on peut déduire des conditions de surface libres dans ces cas.

La caractéristique de convergence rapide des séries qu'on utilisera aura aussi pour effet notable que la convergence du calcul sera obtenue avant la convergence visuelle. En effet, comme on utilise autant de nœuds répartis sur la surface libre que de modes dans la solution, si la convergence modale est exponentielle, on aura des déformées convergées avec très peu de points, qui paraîtront donc 'saccadées' si on se contente de relier les points par des segments; pour cette raison il n'est pas rare qu'on fasse passer des splines d'interpolation *entre* les nœuds (les valeurs aux nœuds restant exactes) pour l'apparence visuelle des résultats.

Par ailleurs, puisque la convergence des grandeurs globales sera liée dans le cas général à celle de la méthode d'intégration, l'étude de la convergence sur ces quantités ne sera pas la plus intéressante, il sera préférable de s'attacher aux amplitudes modales elles-mêmes ou à aux quantités locales re-construites. Toutefois, le *niveau* de conservation des quantités globales (qui seront le volume, et l'énergie totale dans les cas sans génération de houle) demeure une bonne indication de la précision globale de la méthode.

Enfin, il est une remarque d'importance pour en conclure avec ces aspects de convergence, qui réside dans ce que l'analyse faite ci-avant est une analyse *asymptotique*. Ainsi, en admettant qu'on ait par exemple un profil de houle régulière dans le domaine, dont la longueur d'onde corresponde au mode 35 par exemple, alors la convergence évoquée précédemment (qui sera exponentielle dans ce cas), n'apparaîtra qu'*après* le pic localisé en  $n_x = 35$ . Cette remarque est d'importance puisqu'on va principalement utiliser ce modèle pour engendrer des houles, et qu'il faudra par conséquent séparer, pour s'attacher à la

convergence, une première partie principale de la série spectrale, de la partie convergente suivante.

## I.2.2 Problème du repliement

On séparera ici le repliement ‘artificiel’, qui répond à la définition classique du repliement introduit par le produit de deux séries de Fourier tronquées, du repliement ‘naturel’ lié à l’ordre de troncature.

### I.2.2.1 Repliement ‘artificiel’

Le problème du repliement constitue une difficulté inhérente aux méthodes spectrales. Avant que d’en donner les détails, on citera Fornberg [53] pour montrer son importance, qui précise à son propos que : ‘*l’erreur d’interpolation (repliement) est donc toujours plus importante que l’erreur de troncature (à moins que les deux ne soient exactement nulles)*’. Clamond & Grue [25] attribuent à ces seuls termes indûment repliés l’origine des phénomènes d’excitation des modes les plus hautes fréquences, visibles sous formes de ‘dents de scie’ apparaissant sur la surface libre quand les calculs divergent. Toutefois de notre expérience, si le repliement accroît ce phénomène, toute divergence de notre série spectrale se traduit toujours d’abord par une excitation induite des modes les plus courts, menant à ce phénomène; en accord avec l’analyse de Dommermuth & Yue [38] qui montrent que c’est sur ces modes les plus courts que le cumul d’erreur est le plus grand.

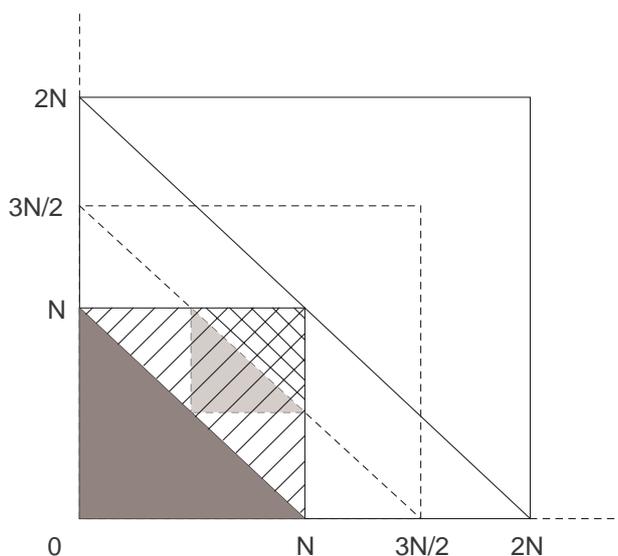


Figure I.2.2: Schématisation du repliement du produit de deux séries de Fourier tronquées à l’ordre  $N$ , et choix possibles pour l’anti-repliement.

L'origine de ce repliement est simple. De fait, le produit dans l'espace physique de deux grandeurs exprimées sous la forme de séries de Fourier tronquées à l'ordre  $N_x$  donne lieu à la génération de termes d'ordres supérieurs à cet ordre de troncature (jusqu'à  $2N_x$ ). Pour conserver la consistance entre l'ordre de troncature pour les grandeurs multipliées et celui pour le produit résultant, ce dernier est lui aussi exprimé à l'aide d'une série tronquée à l'ordre  $N_x$ . Les termes d'ordres supérieurs précédents sont donc indésirables car ils vont nécessairement se replier dans la série principale, au sens où leur ordre naturel n'étant pas présent ils vont se reporter sur les ordres inférieurs contenus dans la série avant  $N_x$ . L'origine du terme 'repliement' provient de ce que ces termes se replient en miroir dans la série, le terme  $N_x + 1$  en  $N_x - 1$ , et ainsi de suite jusqu'au terme  $2N_x$  qui se replie sur le mode 0. Le schéma I.2.2 présente ce phénomène ; chaque direction y figure l'une des deux séries du produit, et chaque localisation spatiale un produit individuel mode à mode, modes correspondant à l'abscisse et l'ordonnée. Ainsi, sans prendre de précautions particulières, le triangle hachuré se replie sur le triangle grisé principal.

À l'origine, ce problème du repliement a été discuté en détails dans l'article d'Orszag [104] de 1971 qui fait référence sur ce thème, même si la méthode spectrale qu'il utilisait était en l'occurrence de Galerkin. Cet auteur expose que parmi les choix qu'on peut faire pour traiter théoriquement de ces termes repliés, le choix le plus 'raisonnable' consiste à minimiser l'erreur du produit des deux séries au sens des moindres carrés, et que cela conduit à la suppression pure et simple de ces termes. Un moyen immédiat de réaliser cet *anti-repliement* serait donc de trier dans l'espace modal quels produits mode à mode sont repliés, et lesquels ne le sont pas, toutefois cette opération transforme immédiatement un produit spatial simple, de coût  $N_x$  pour l'ensemble des nœuds de collocation, en au mieux  $N_x^2$  produits et trois fois ce nombre de sommes, et  $N_x^4$  produits pour un produit spatial double, etc. Dans une méthode où l'objectif est d'utiliser les propriétés de la résolution par Transformées de Fourier rapides (FFTs) dont le coût est  $O(N_x \log_2 N_x)$ , cette technique directe paraît hors de propos.

On trouve dans Canuto *et al.* [17] l'idée qui va nous permettre de contourner cette difficulté (ils n'en sont pas pour autant les auteurs), après adaptation ; adaptation qui a consisté en une transposition de la méthode des séries de Fourier complexes vers nos séries cosinusoidales, et surtout en la vérification de la validité de cette transposition. Pour entrevoir le principe de cet anti-repliement, il faut d'abord s'attacher un peu plus en détails au produit des deux grandeurs développées en séries ; on le présente ici tel que Canuto *et al.* Considérons ainsi deux grandeurs  $f_j$  et  $g_j$  de l'espace physique connues aux nœuds de collocation  $j \in [0; N_x]$ , et dont les développements spectraux sont :

$$\begin{aligned}
 f_j &= \sum_{n_x=-N_x/2}^{N_x/2-1} \tilde{f}_{n_x} e^{\frac{i2\pi j n_x}{N_x}} \\
 g_j &= \sum_{n_x=-N_x/2}^{N_x/2-1} \tilde{g}_{n_x} e^{\frac{i2\pi j n_x}{N_x}}
 \end{aligned}
 \tag{I.2.5}$$

le tilde matérialisant ici les quantités de l'espace modal. Ajoutons maintenant arbitrairement des modes d'amplitudes nulles à ces séries entre  $N_x/2$  et  $M_x/2$ , et identiquement pour les valeurs négatives, en exprimant en parallèle ces séries toujours dans le même domaine physique, donc sur des nœuds plus resserrés ( $j \in [0; M_x]$ ). Le produit  $h_j = f_j g_j$  de ces deux séries en est inchangé, et s'écrit sous la forme :

$$h_j = \sum_{n_x=-M_x/2}^{M_x/2-1} \tilde{h}_{n_x} e^{\frac{i2\pi j n_x}{M_x}} \quad (\text{I.2.6})$$

Si on en regarde maintenant les amplitudes modales associées, elles s'expriment comme :

$$\tilde{h}_{n_x} = \sum_{m+p=n_x} \tilde{f}_m \tilde{g}_p + \sum_{m+p=n_x \pm M_x/2} \tilde{f}_m \tilde{g}_p \quad (\text{I.2.7})$$

où la deuxième somme est la partie qui va se replier. Certes elle va se replier, mais si on a bien choisi  $M_x$ , *i.e.* on a ajouté suffisamment de zéros, alors tous les termes contenus dans cette deuxième série qui sont indésirables, vont venir se replier entre  $N_x/2$  et  $M_x/2$ , le restant des termes indésirables étant déjà contenu dans cette bande dans la somme de gauche. L'intérêt est donc qu'aucun terme n'est venu se replier avant  $N_x/2$ . Le choix optimal pour  $M_x$  est donc  $3N_x/2$  ainsi qu'on peut le voir sur le schéma I.2.2. Pratiquement, on tire parti de ce fait en :

- opérant une transformation de Fourier sur  $N_x$  points pour obtenir les  $\tilde{f}_{n_x}$  et les  $\tilde{g}_{n_x}$  respectivement ;
- ajoutant à ces coefficients des coefficients nuls entre  $N_x/2$  et  $M_x/2$ , et respectivement pour les modes négatifs ;
- prenant leur Transformée de Fourier (TF) inverse (iTF) sur  $M_x$  points ;
- réalisant le produit  $h_j = f_j g_j$  sur ces  $M_x$  nœuds de l'espace physique ;
- opérant une nouvelle transformation de Fourier de  $h_j$  sur ces  $M_x$  nœuds ;
- et finalement ne retenant que les  $N_x$  composantes  $\tilde{h}_{n_x}$  obtenues pour revenir, par une dernière iFT sur  $N_x$  nœuds, à l'espace physique avec un produit  $h_j$  sans repliement sur ces  $N_x$  nœuds de départ.

L'application est immédiate avec des exponentielles, puisque tout produit d'exponentielle est simplement l'exponentielle de la somme des arguments ; donc par exemple, le terme  $e^{i[(3N_x/4)x]}$  d'une série tronquée à l'ordre  $\pm N_x$  qu'on élèverait au carré a pour valeur exacte  $e^{i[(3N_x/2)x]}$ , pour valeur repliée cette même valeur exacte sur le mode  $N_x/2$ , et pour valeur non repliée optimale 0. En revanche, si on fait la même analyse avec une série cosinoïdale, le terme  $\cos[(3N_x/4)x]$  d'une série tronquée à l'ordre  $N_x$  qu'on élèverait au carré a pour valeur exacte  $\cos^2[(3N_x/4)x] = (1 + \cos[(3N_x/2)x])/2$ , pour valeur repliée 1/2 plus  $\cos[(3N_x/2)x]/2$  sur le mode  $N_x/2$ , et pour valeur non-repliée optimale 1/2. Il a donc fallu vérifier en détails que l'analyse précédente de Canuto *et al.* était effectivement toujours

valable avec notre série cosinusoidale, cherchant en particulier à ré-obtenir une formulation du type de (I.2.7) sur laquelle repose le processus pratique de suppression du repliement décrit précédemment. En reprenant l'analyse avec utilisation de l'orthogonalité de notre série :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(px) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{si } p = m \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = m = 0 \end{cases} \quad (\text{I.2.8})$$

et de la 'propriété d'orthogonalité' associée :

$$\forall p, I(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(px) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases} \quad (\text{I.2.9})$$

puis en étudiant les différents cas de non-extinction des produits triples de cosinus qui apparaissent, on retrouve bien la même propriété, *i.e.* que pour une série définie de 0 à  $N_x$ , tout ce qui se trouve au-dessus de  $N_x$  dans le processus de suppression du repliement, par aller-retours entre les espaces physique et modal, correspond effectivement aux termes indésirables.

Par ailleurs, comme nos FFTs implémentées (à partir de [128]) sont en pratique codées pour un nombre de nœuds égal à une puissance de 2, on effectue l'anti-repliement en prenant  $M_x = 2N_x$  et non la valeur optimale de  $3N_x/2$ . Toutefois, il existe des FFTs plus évoluées qui peuvent s'opérer sur des nombres de points du type  $2^n 3^p$  ou même plus compliqué (cf. Temperton [127]), qu'il faudra donc implémenter dans l'avenir pour pouvoir employer cette valeur optimale de  $3N_x/2$ , et gagner ainsi légèrement en temps de calcul. À ce propos, il existe aussi pour nos FFTs actuelles en  $2^n$  des algorithmes nettement plus rapides que le nôtre (de [128]), comme en emploient Bateman *et al.* [8] ou Clamond & Grue [25] par exemples, qui annoncent un gain de rapidité de 60%.

Pour conclure tout à fait quant à ce problème du repliement et de sa suppression, il faut préciser que son importance relative est directement liée au taux de décroissance modale. En effet, si on considère la pente décroissante des amplitudes modales jusqu'à l'infini, et qu'on la replie en miroir à  $N_x$ , plus la pente est forte, moins les amplitudes relatives des modes repliés sont importantes par rapport à celles des modes principaux déjà présents naturellement avant  $N_x$ . Aussi, le repliement a donc un effet d'amplification de la difficulté ; de fait, là où dans l'espace physique on a présence d'une 'difficulté' (crête de houle très cambrée par exemple), alors le taux de décroissance des amplitudes va nettement diminuer, ainsi qu'on l'a vu à la sous-section précédente I.2.1.2, et donc l'importance relative du repliement augmentera, et s'étendra de plus en plus vers les modes longs du début de la série. Aussi, s'abstenir de traiter ce problème du repliement, surtout dans des méthodes où l'on procède à une résolution itérative à l'intérieur de la résolution principale (HOS/DNO) –ce qui va cumuler son effet– a de fortes chances de restreindre nettement le champ de

stabilité des modèles, voire d'en modifier sensiblement les résultats là où l'on se rapproche de cette zone de non convergence. On considère donc l'anti-repliement comme un point important, et contrairement aux auteurs des méthodes DNO (Bateman *et al.* [8]), on ne pense pas qu'un simple filtrage modal permet de s'abstenir de le traiter spécifiquement dans ce type de méthodes. On y a donc attaché un intérêt spécifique lors du développement de notre modèle HOS.

### I.2.2.2 Repliement ‘naturel’

Suivant Canuto *et al.* toujours, un autre phénomène lié au caractère discret des TF s'apparente à du repliement. Considérons ainsi le calcul des coefficients de Fourier d'une série discrète tronquée à l'ordre  $N_x$ , il est opéré par une simple sommation sur les nœuds de l'espace physique; somme qui est en fait l'approximation discrète d'une intégrale sur le domaine (intégration par méthode des trapèzes). Si on raffine la discrétisation (*i.e.* on augmente  $N_x$ ), l'approximation de l'intégrale par notre somme discrète va en être améliorée, les nouvelles valeurs des coefficients de Fourier vont donc être légèrement modifiées par rapport à ceux obtenus avant raffinement. En particulier, ce sont surtout des ‘petits détails’ de la fonction spatiale qui vont avoir été ajoutés dans l'intégration, la forme globale étant peu modifiée; en termes modaux, ce sont donc surtout les derniers coefficients avant l'ordre de troncature qui vont voir leur valeurs modifiées. On comprend ainsi que la troncature possède un effet sur les coefficients de Fourier *inclus* dans la série, et que cet effet se reporte surtout sur les modes les plus proches de cette troncature. Faisant l'analyse théorique de ce phénomène, Canuto *et al.* concluent à des effets sur la série spectrale tronquée qui sont identiques à ceux du repliement, d'où la qualification de ‘repliement naturel’ qu'on a donnée. Les conséquences en sont donc que l'amplitude des derniers modes avant troncature est augmentée significativement, et celle des autres de manière négligeable.

## I.2.3 Aides à la stabilité

Outre cet anti-repliement nécessaire qui aide à la stabilité, on va lister ici quelques techniques qui peuvent être utilisées dans ce sens. On précise néanmoins en préambule que les méthodes spectrales restent d'une manière générale assez rétives aux aides à la stabilité artificielles classiques.

### I.2.3.1 Lissage et filtrage

On peut néanmoins utiliser ‘à petite dose’ des lissages spatiaux ou des filtrages modaux qui sont équivalents (cf. Dommermuth & Yue [38]). On va s'attacher ici plutôt aux filtrages puisque les raisonnements avec des séries spectrales sont plus aisés dans l'espace

modal. Dans cet espace, ces filtres reviennent à exprimer les re-constructions de la série (les grandeurs locales) en utilisant moins de modes que le nombre dont on en use pour résoudre, *i.e.* par exemple : on résout le système de manière pseudo-spectrale avec 64 modes, et une fois les amplitudes modales obtenues, on re-construit notre potentiel en n'utilisant que les 50 premières. Toutefois, l'efficacité théorique de ce filtrage n'est pas évidente, ainsi Clamond & Grue [25] exposent par exemple qu'il n'est d'aucune utilité à la stabilité quand l'anti-repliement est convenablement réalisé, *i.e.* filtrer au moyen d'un filtre passe-bas idéal par exemple (qui vaut 1 jusqu'à une certaine valeur modale puis 0 jusqu'à la fin de la série) ne fait pas de différence en termes de stabilité avec simplement tronquer la série au dernier mode non filtré (qui serait 50 dans notre exemple précédent) et ne pas filtrer du tout. Même si on a en effet constaté dans notre expérience que ces filtrages étaient de peu d'efficacité (en comparant à une diminution équivalente de l'ordre de troncature), ils permettent tout de même de s'affranchir du repliement naturel précédent, même lorsqu'on opère un anti-repliement convenable des produits. En revanche, dans des simulations menées intentionnellement *sans* anti-repliement, on a pu constater l'amélioration induite par ce filtrage. Finalement, en pratique, on n'a donc pas employé ces filtrages, même si on a tout de même parfois utilisé une 'petite dose' de lissage sur 5 points (une fois tous les dix pas de temps par exemple), dans nos simulations MD les plus difficiles (on verra au II.1.3.1 qu'on ne peut éviter le repliement pour ces méthodes MD).

### I.2.3.2 Sur-détermination

Kim *et al.* [78] ont proposé, dans leur utilisation des méthodes MD, de répartir sur la surface libre plus de nœuds de collocation que de modes utilisés dans la résolution. Le système à résoudre est alors sur-déterminé et on peut employer une méthode de moindres carrés pour le résoudre. Cette technique qui consiste donc à minimiser l'erreur sur une discrétisation spatiale plus fine plutôt que d'avoir un résidu nul sur le nombre de points de départ, s'est avérée, à nombre des modes constant bien entendu, améliorer la stabilité de notre méthode MD. Toutefois, pour résoudre un tel système rectangulaire, on a utilisé la méthode directe de Householder qui est  $O(N_x^3)$  ( $N_x$  étant le nombre de modes), alors que pour résoudre un système carré par MD, on utilise une méthode itérative de type GMRES qui est  $O(kN_x^2)$ . Le sur-dimensionnement de notre problème, s'il offre un gain de stabilité, augmente donc aussi nettement le coût de la résolution. À noter qu'il existe peut-être des méthodes itératives pour résoudre des systèmes sur-déterminés, mais on ne les a pas recherchées. En effet, après avoir développé les MD, puis une méthode au second ordre, on travaille désormais surtout avec une méthode type HOS qui est environ  $O(N_x)$ , et pour laquelle l'utilisation d'un tel sur-dimensionnement est donc totalement exclue. Pour pallier cet accroissement du coût lié à la sur-détermination, on avait aussi tenté en MD de placer plus de nœuds de collocation que de modes, et de résoudre ensuite alternativement un système carré sur des sous-groupes de ces nœuds (alternativement les nœuds impairs et pairs par exemple), laissant les autres évoluer selon leur gradient temporel au sous-pas de

temps précédent ; mais cela s'est avéré instable.

### I.2.3.3 Extension du domaine pour le calcul des dérivées spatiales

Il ne s'agit pas là d'une technique de stabilisation surimposée à la résolution de base, comme celles qu'on vient d'évoquer, mais d'un artifice qui permet de s'affranchir partiellement du faible taux de convergence (potentiellement déstabilisateur) lié à la non-périodicité d'une fonction dans le domaine. Ainsi, quand on a une fonction  $f$  définie sur  $[0; L_x]$  telle que  $f(0) \neq f(L_x)$ , et qu'on cherche sa dérivée dans le domaine  $f'(x)$ . L'utilisation de notre technique spectrale pour calculer cette dérivée consiste d'abord à la développer en série cosinoïdale par TF, en utilisant un prolongement pair intrinsèque entre  $L_x$  et  $2L_x$ , qui rend sa réplication continue ; les amplitudes modales décroissent alors comme  $1/n_x^2$ . On dérive ensuite cette série dans l'espace modal, et on revient dans l'espace physique par iTF. La précision de la dérivée ainsi calculée par re-construction spectrale est directement liée au taux de décroissance précédent, ainsi qu'on l'a vu au I.2.1.2, et convergera donc à l'ordre 2.

On a alors eu l'idée d'utiliser une fonction étendue pour améliorer ce taux de convergence. En effet, si la fonction considérée est de variables indépendantes, on peut la prolonger à chaque extrémité, cette fois réellement en étendant le domaine (entre  $-L_x/2$  et  $3L_x/2$  par exemple) et non intrinsèquement du fait de la forme des modes (cf. schéma I.2.3). On utilise alors un raccord polynômial de chaque côté assurant un prolongement  $C^4$  de la

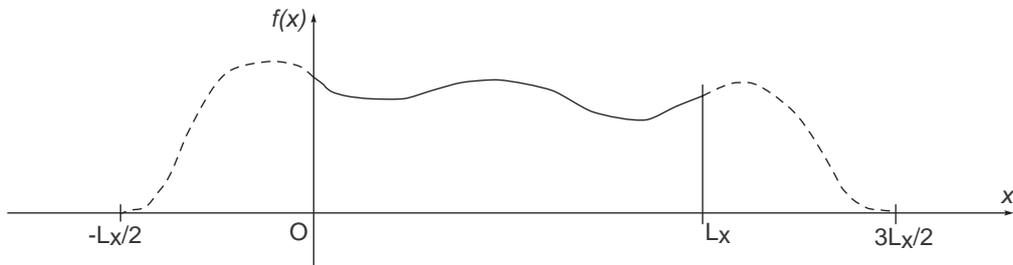


Figure I.2.3: Extension artificielle du domaine pour améliorer la précision du calcul des dérivées surfaciques

fonction en 0 et  $L_x$ , et aussi un raccord périodique au moins  $C^4$  en  $-L_x/2$  et  $3L_x/2$  lors de la réplication (dans la pratique on fait tendre le polynôme vers 0 de manière  $C^4$  en ces deux extrémités). On calcule ensuite notre TF puis notre iTF sur ce nouveau domaine, et on ne conserve finalement les valeurs de la dérivée obtenue qu'aux nœuds compris dans notre domaine réel  $[0; L_x]$ . Théoriquement, les valeurs de ces dérivées sont inchangées pour des séries infinies ; pratiquement, comme nos séries sont tronquées, on a dû utiliser deux fois plus de points mais on a gagné quatre ordres de convergence sur le calcul de cette dérivée, passant d'une décomposition spectrale d'une fonction  $C^0$  à celle d'une fonction  $C^4$ . À

noter que si on disposait de FFTs en  $2^n 3^p$ , on pourrait restreindre cette extension et ainsi gagner en temps. Sur les cas tests effectués, l'amélioration de la qualité de la solution est flagrante, notamment aux bords du domaine réel, *i.e.* en 0 et  $L_x$  où l'on ne perd plus non plus l'ordre de convergence supplémentaire lié à la présence d'une extrémité ; on est donc passé en ces deux points d'un taux de convergence d'ordre 1 à 6 au lieu de 2 à 6 ailleurs dans le domaine. Cette technique a été là présentée en deux dimensions, de même d'ailleurs que l'anti-repliement précédent, mais ils sont tous deux généralisés à trois dimensions dans notre modèle HOS.

Toutefois, il faut bien préciser pour conclure sur cette technique de calcul des dérivées, qu'elle ne s'applique qu'à des quantités *de variables indépendantes*, *i.e.* décorréelées de la solution dans le reste du domaine. En MD par exemple, le calcul de la dérivée  $\partial\phi/\partial x$  du potentiel sur la surface libre en  $z = \eta$ , *i.e.* le calcul de  $\partial\phi/\partial x(x, \eta(x, t), t)$  en deux dimensions, ne peut être mené par un tel aller-retour entre l'espace physique et l'espace modal. En revanche, le calcul de  $\partial\eta/\partial x(x, t)$  pourra lui être obtenu via un tel aller-retour.

On a donc évoqué dans ce chapitre les principaux aspects théoriques généraux de nos méthodes spectrales, et surtout leurs implications pratiques pour la mise en œuvre et l'étude des propriétés de nos modèles. Outre les caractéristiques théoriques de convergence de cette approche, on a notamment évoqué l'importance du problème du repliement. Des éléments pratiques de mise en œuvre et d'aide à la stabilité des modèles utilisant cette technique spectrale ont été mentionnés, et des remarques quant à l'utilisation numérique pratique de ces méthodes ont été faites. On peut désormais s'attacher aux formulations elles-mêmes des deux modèles qu'on a implémentés (MD et HOS), et à leur mise en place.





## Deuxième partie

### Noyau de la Méthode et Validations



# Chapitre II.1

## Formulations Employées et Mise en Œuvre Numérique

Dans ce chapitre on présente la formulation générale du noyau de la méthode, *i.e.* une cuve parallélépipédique sans la présence d'un générateur de houle. Les différentes formulations étendues à la génération de houle seront explicitées séparément dans chacun des chapitres de la partie III.

### II.1.1 Formulations du Noyau du Problème

#### II.1.1.1 Formulation Générale

La figure II.1.1 présente la géométrie du domaine fluide qu'on considère. Il s'agit d'une simple cuve parallélépipédique dans lequel la surface libre du fluide au repos se situe au niveau  $z = 0$ . Cette cuve a pour dimensions réelles  $\widetilde{L}_x \times \widetilde{L}_y \times \widetilde{h}$ . Dans la formulation présentée ici comme dans les codes de calcul, toutes les grandeurs sont adimensionnées par rapport à cette profondeur  $\widetilde{h}$ , et par rapport à l'accélération de la gravité  $\widetilde{g}$ , si bien que :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{h}} ; & y &= \frac{\widetilde{y}}{\widetilde{h}} ; & z &= \frac{\widetilde{z}}{\widetilde{h}} ; & L_x &= \frac{\widetilde{L}_x}{\widetilde{h}} ; & L_y &= \frac{\widetilde{L}_y}{\widetilde{h}} ; & h &= 1 \\ \eta &= \frac{\widetilde{\eta}}{\widetilde{h}} ; & \phi &= \frac{\widetilde{\phi}}{\sqrt{\widetilde{g}\widetilde{h}^3}} ; & t &= \widetilde{t}\sqrt{\frac{\widetilde{g}}{\widetilde{h}}} \end{aligned}$$

où toutes les quantités dimensionnelles sont représentées avec un tilde, et les quantités adimensionnelles sans.

Le fluide simulé dans nos problèmes sera toujours de l'eau, on peut donc le considérer incompressible. Partant des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement établies par Navier & Stokes pour un tel fluide réel incompressible, on néglige

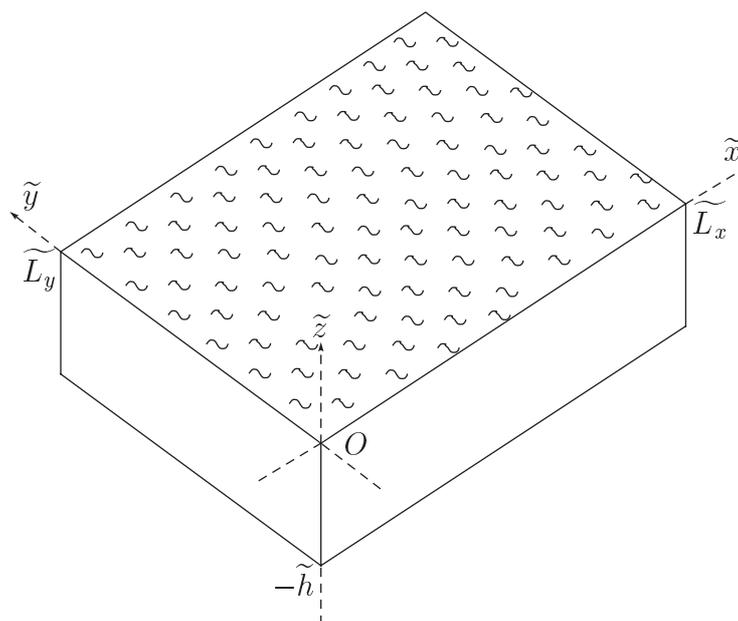


Figure II.1.1: Géométrie du domaine fluide.

d'abord la viscosité (équations d'Euler), puis on fait l'hypothèse supplémentaire d'irrotationnalité de l'écoulement. La vitesse  $\vec{V}$  dans le fluide, de divergence nulle, peut alors s'exprimer sous la forme du gradient d'un potentiel  $\phi$  :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad \text{dans } D \quad (\text{II.1.1})$$

Et l'équation de conservation de la masse prend ainsi pour simple expression la nullité du Laplacien de ce potentiel des vitesses dans le fluide d'écoulement irrotationnel :

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans } D \quad (\text{II.1.2})$$

La seconde équation de Navier-Stokes, qui traduit la conservation de la quantité de mouvement, se résume quant à elle à l'équation de Bernoulli instationnaire dans le fluide :

$$p + \frac{\partial \phi}{\partial t} + z + \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 = c(t) \quad \text{dans } D \quad (\text{II.1.3})$$

où  $c(t)$  est une constante instationnaire, dite 'de Bernoulli', dont le choix est arbitraire, souvent prise égale à la pression atmosphérique extérieure pour les écoulements à surface libre.

La surface libre est quant à elle considérée comme univoque, sa position peut donc être décrite par une grandeur univoque  $\eta(x, y, t)$ , et sa tension de surface est négligée ; le mouvement de cette surface a alors pour équation instantanée :

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (\text{II.1.4})$$

Cette surface, considérée comme une paroi déformable, contient le fluide à tout instant ; le flux instantané de matière qui la traverse est donc nul, soit pour tout point  $M(x, y, \eta(x, y, t), t)$  de vitesse  $\vec{U}$  de cette paroi déformable :

$$\frac{DF}{Dt}(M) = \frac{\partial F}{\partial t}(M) + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} F(M) = 0 \quad (\text{II.1.5})$$

Dit autrement, en tout point de cette surface repérée par  $F = 0$ , les vitesses normales du fluide et de la paroi déformable sont égales :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{II.1.6})$$

Géométriquement, un vecteur normal à cette surface a pour composantes :

$$\vec{n} \begin{vmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ -\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ 1 \end{vmatrix}$$

D'autre part, cette expression est aussi celle du gradient  $\vec{\nabla} F$  de l'équation instantanée (II.1.4) de la surface libre. En utilisant (II.1.6), la nullité du flux à travers la surface (II.1.5) peut donc s'écrire sous la nouvelle forme :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} F = 0 \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{II.1.7})$$

ou encore, en utilisant les expressions développées de  $\vec{V}$  et de  $F$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{II.1.8})$$

Cette condition est appelée condition *cinématique* de surface libre.

Pour que le problème soit décrit complètement, il faut lui adjoindre une condition *dynamique* de surface libre qui traduit la continuité de la pression à travers cette surface, soit à tout instant :

$$p = p_{atm} \quad \text{en } z = \eta$$

où  $p_{atm}$  représente la pression atmosphérique extérieure de répartition spatiale uniforme. En introduisant l'équation de Bernoulli précédente (II.1.3), cette condition devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 + c - p_{atm} \quad \text{en } z = \eta$$

ou encore, en considérant le choix usuel pour la constante de Bernoulli  $c = p_{atm}$ , cette condition instantanée devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{II.1.9})$$

En résumé, nos deux inconnues du problème vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= 0 && \text{dans } D \\
 \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla}\phi \right|^2 && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\
 \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\
 \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = 0, L_x; y = 0, L_y
 \end{aligned} \tag{II.1.10}$$

dans lequel les dernières conditions expriment la nullité du flux de matière à travers les parois solides de la cuve, qui se traduit par la nullité de la vitesse normale du fluide sur ces parois.

### II.1.1.2 Expressions en quantité surfaciques

Alternativement à cette formulation directe des équations de surface libre (II.1.10), on peut y faire apparaître des quantités surfaciques comme cela a été introduit par Zakharov [142]. C'est cette formulation en quantités surfaciques qui constituera la base au développement de la méthode de résolution HOS du problème. L'idée est de définir *un potentiel de surface* libre tel que :

$$\phi^S(x, y, t) = \phi(x, y, \eta(x, y, t), t) \tag{II.1.11}$$

qui, lié à la surface, ne dépend plus de  $z$  ; il est de ce fait de variables indépendantes. En prenant les dérivées partielles du potentiel total  $\phi$  en  $z = \eta$ , on obtient alors les relations suivantes reliant ce potentiel total au potentiel de surface  $\phi^S$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi^S}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial z} && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\
 \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\phi^S}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial z} && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\
 \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial\phi^S}{\partial t} - \frac{\partial\eta}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial z} && \text{en } z = \eta(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.1.12}$$

En introduisant ces différentes relations dans les deux conditions de surface libre précédentes de (II.1.10), il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\phi^S}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla}\phi^S \right|^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \left| \vec{\nabla}\eta \right|^2 \right) \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\
 \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \left( 1 + \left| \vec{\nabla}\eta \right|^2 \right) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\phi^S}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi^S}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} && \text{en } z = \eta(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{II.1.13}$$

## II.1.2 Expressions au second ordre

Si les déformations de la surface libre peuvent être assimilées à une faible perturbation de l'état de repos dans le domaine fluide, il est alors possible de traiter ordre par ordre le problème non-linéaire (II.1.10) précédent, qu'on aura développé en série de perturbations de Stokes. On validera cette résolution ordre par ordre du noyau au chapitre suivant (cf. II.2.1) par comparaison à une solution analytique, mais cette formulation sera surtout utilisée comme base de développement de notre modèle *SWEET* de bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre. Ce modèle fait l'objet d'un chapitre III.1 séparé où l'on pourra trouver les détails quant à la mise en œuvre de cette résolution par ordres.

Pour assurer sa convergence, un tel développement suppose deux choses distinctes : premièrement que le paramètre caractéristique des déformations soit petit devant 1. Dans la théorie de Stokes pour une houle régulière, ce paramètre  $\varepsilon$  appelé *cambrure* s'apparente au rapport d'aspect entre la hauteur crête-à-creux de la houle  $H = 2a$  (où  $a$  est l'*amplitude* de cette même houle) et sa *longueur d'onde*  $\lambda$ . Ce paramètre est le plus souvent défini au moyen du *nombre d'onde* de la houle  $k = 2\pi/\lambda$ , plutôt que directement à partir de sa longueur d'onde :  $\varepsilon = ka = \pi H/\lambda$ . Sous cette forme il correspond aussi à la pente maximale d'une houle régulière d'Airy (linéaire) de même amplitude. Dans une houle irrégulière, les différentes composantes présentes ont chacune leur propre cambrure qui relie alors leur amplitude à leur longueur d'onde intrinsèque ; le paramètre  $\varepsilon$  sera alors considéré comme petit si la pente maximale locale mesurée dans cette houle reste faible. Le deuxième élément nécessaire à une telle décomposition du problème en ordres de perturbation est de pouvoir afficher les différentes conditions de surface libre aux différents ordres sur une position commune connue. La position *réelle* de la surface libre est en effet inconnue puisqu'elle *résulte* de la superposition des solutions à tous les ordres. La surface commune choisie sera de manière optimale celle de la surface libre au repos, autour de laquelle oscillent les déformations. On procédera donc pour chacune des conditions de surface libre à un développement en série de Taylor autour de cette position moyenne, ce à chacun des ordres. Un tel développement nécessite que les déformations restent confinées dans son rayon de convergence ; dans la pratique, l'hypothèse de faible perturbation suffit à s'en assurer.

Même si on a utilisé ce développement en pratique surtout pour des simulations de houle, on l'a aussi employé sur un lâcher de surface libre pour validation. La notion de cambrure est alors là plus difficile à définir. Toutefois, notre domaine étant de longueur bornée, notre série spectrale consiste en fait en une somme de composantes qui ont chacune une longueur d'onde, fraction de la longueur totale du bassin. Elles ont de surcroît chacune une amplitude issue de la résolution du problème, on peut par conséquent leur définir une quantité équivalente à une cambrure. De plus, la longueur d'onde de ces différentes composantes décroît comme  $1/n_x$ , et ainsi qu'on l'a mentionné au chapitre précédent I.2, les amplitudes des composantes vont décroître asymptotiquement au moins comme  $1/n_x^2$ , soit plus vite que leurs longueurs d'ondes. En définitive, c'est donc la cambrure associée

aux modes situés avant cette décroissance asymptotique qui sera la plus forte : *i.e.* pour de la houle régulière, son pic ; et pour le lâcher d'une pente dont les amplitudes modales diminuent régulièrement, le premier mode. Dans ce dernier cas, le développement sera donc valable avec la simple condition que  $A/L_x$  soit petit, où  $A$  est l'amplitude de la pente lâchée.

Du point de vue de la formulation, ce développement de notre problème en série de perturbations va bien entendu le faire gagner en complexité, puisqu'on va se retrouver à chaque ordre avec un problème complet à résoudre, dont le nombre de termes croît rapidement. Cependant, on bénéficiera en retour de pouvoir exprimer les différentes conditions sur des surfaces fixes, ce qui se traduira par la possibilité de résoudre par FFTs (comme en HOS) le système, dont la matrice est invariante. On gagnera ainsi en temps de calcul, mais on verra au chapitre III.1 que cette résolution ordre par ordre permet surtout la relaxation pure et simple de l'impossibilité d'utiliser sans cela des méthodes spectrales pour résoudre le problème avec un batteur (impossibilité à première vue du moins, cf. III.4 pour la discussion). Enfin, l'étude séparée de chacun des ordres présents dans la solution mène souvent à des interprétations physiques plus aisées des différents phénomènes non-linéaires entrant en jeu dans la dynamique des ondes de gravité.

Cette justification étant établie, on peut désormais expliciter la formulation de notre problème qu'on limitera au second ordre de perturbation. Les deux quantités du problème sont donc développées suivant le petit paramètre  $\varepsilon$  précédent :

$$\begin{aligned}\phi &= \varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + O(\varepsilon^3) \\ \eta &= \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{II.1.14}$$

On réalise en parallèle un développement en série de Taylor de chacune des conditions de surface libre. Si  $E_i^{SL}$  représente l'une des deux conditions de surface libre précédente de (II.1.10) exprimée sous la forme  $E_i^{SL} = 0$ , alors ce développement prend la forme :

$$E_i^{SL}(z = \eta) = E_i^{SL}(z = 0) + \eta \frac{\partial E_i^{SL}}{\partial z}(z = 0) + \eta^2 \frac{\partial^2 E_i^{SL}}{\partial z^2}(z = 0) + O(\eta^3)\tag{II.1.15}$$

où tous les termes suivants ne contiendront que des quantités d'ordre supérieur à deux.

En conservant de manière homogène les termes de chaque ordre, le problème complètement non-linéaire précédent (II.1.10) se réduit au premier ordre de perturbations à :

$$\begin{aligned}\Delta\phi^{(1)} &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} &= -\eta^{(1)} && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = 0, L_x; y = 0, L_y\end{aligned}\tag{II.1.16}$$

et au second ordre à :

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi^{(2)} &= 0 && \text{dans } D \\
 \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t} &= -\eta^{(2)} - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla}\phi^{(1)} \right|^2 - \eta^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z\partial t} && \text{en } z = 0 \\
 \frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial y} \\
 &\quad - \eta^{(1)} \left( \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y^2} \right) && \text{en } z = 0 \\
 \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = 0, L_x; y = 0, L_y
 \end{aligned} \tag{II.1.17}$$

## II.1.3 Méthodes de résolution non-linéaires employées

### II.1.3.1 Méthode directe MD

#### II.1.3.1.1 Développement spectral

Si l'on considère le bassin parallélépipédique précédent, et qu'on veut appliquer un développement spectral au potentiel des vitesses  $\phi$ , il faut alors définir un jeu de fonctions de base  $\psi_{n_x n_y}(x, y, z)$  ainsi qu'on l'a mentionné au chapitre I.1.1. Ce potentiel aura alors pour expression sur la base de ces fonctions :

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}(t) \psi_{n_x n_y}(x, y, z) \quad \text{dans } D \tag{II.1.18}$$

Si l'on reprend les équations (II.1.10) de notre problème général, ce développement devra vérifier l'équation de Laplace dans le fluide et les conditions de flux nul sur les parois fixes du domaine. Puisque les fonctions  $\psi$  recherchées forment une base de la solution, elles doivent donc vérifier elles-mêmes ces équations de manière individuelle, soit le système :

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi_{n_x n_y} &= 0 && \text{dans } D \\
 \frac{\partial\psi_{n_x n_y}}{\partial x} &= 0 && \text{en } x = 0, L_x \\
 \frac{\partial\psi_{n_x n_y}}{\partial y} &= 0 && \text{en } y = 0, L_y \\
 \frac{\partial\psi_{n_x n_y}}{\partial z} &= 0 && \text{en } z = -1
 \end{aligned} \tag{II.1.19}$$

On peut alors rechercher une solution de ce problème par séparation des variables, ce qui conduit à :

$$\psi_{n_x n_y}(x, y, z) = \cos(k_{n_x} x) \cos(k_{n_y} y) \cosh[k_{n_x n_y}(z + 1)] \quad \text{dans } D \quad (\text{II.1.20})$$

avec

$$k_{n_x} = \frac{n_x \pi}{L_x} \quad ; \quad k_{n_y} = \frac{n_y \pi}{L_y} \quad \text{et} \quad k_{n_x n_y} = \sqrt{k_{n_x}^2 + k_{n_y}^2} \quad (\text{II.1.21})$$

Et ces solutions individuelles correspondent en fait aux différents modes propres naturels du bassin. On voit là un autre intérêt d'avoir transformé au chapitre précédent I.2.1.1 la série de Fourier complète en notre série cosinusoidale associée à un prolongement pair, qui de ce fait correspond exactement à un développement sur la base de ces modes propres naturels (en  $z = 0$ ). À noter que le mode 0 de déformée nulle est en fait à relier à la constante de Bernoulli  $c(t)$  définie précédemment, puisque si on la conserve dans la formulation, on se retrouve alors avec :  $c(t) = (dA/dt)_{00}(t)$ . Enfin, pour optimiser la stabilité numérique de la solution, on écrit ces fonctions de base plutôt sous la forme normalisée :

$$\psi_{n_x n_y}(x, y, z) = \cos\left(\overrightarrow{k_{n_x n_y}} \cdot \vec{e}_x x\right) \cos\left(\overrightarrow{k_{n_x n_y}} \cdot \vec{e}_y y\right) \frac{\cosh[k_{n_x n_y}(z + 1)]}{\cosh[k_{n_x n_y}]} \quad \text{dans } D \quad (\text{II.1.22})$$

où  $\overrightarrow{k_{n_x n_y}} = (k_{n_x}, k_{n_y})$  et  $k_{n_x n_y} = |\overrightarrow{k_{n_x n_y}}|$ . Grâce à cette normalisation en effet, les valeurs prises par les fonctions  $\psi$  et les amplitudes modales associées seront du même ordre de grandeur numérique.

La forme de ces fonctions de base étant établie, on peut maintenant les introduire dans la série précédente (II.1.18), puis remplacer, dans les équations (II.1.10) du problème non-linéaire, le potentiel  $\phi$  par le développement ainsi obtenu. Dans ces équations (II.1.10), les dérivées partielles spatiales de  $\phi$  sont obtenues directement par dérivation partielle analytique de l'expression précédente (II.1.22) des fonctions de base. Ainsi, la connaissance de  $\phi$  et de toutes ses dérivées partielles se ramène à la seule connaissance de ses amplitudes modales  $A_{n_x n_y}(t)$  et de leurs dérivées temporelles  $(dA/dt)_{n_x n_y}(t)$ .

### II.1.3.1.2 Résolution

Les fonctions de base précédentes étant telles que le potentiel vérifie intrinsèquement l'équation de Laplace et les conditions de non flux sur les parois solides, la résolution du système (II.1.10) se résume donc à celle de ses seules équations de surface libre. Formulées avec le développement spectral (II.1.18) précédent, et discrétisées sur le même nombre de nœuds  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$  que de composantes modales conservées dans ce développement, ces deux équations de surface libre ont alors pour jeu d'inconnues : les élévations de surface libre  $\eta_{ij}$  et leurs dérivées temporelles  $(\partial\eta/\partial t)_{ij}$  en chacun des nœuds de collocation, ainsi que les amplitudes modales précédentes et leurs dérivées temporelles.

Comme on vient de le mentionner, ces inconnues suffisent à décrire le potentiel et l'ensemble de ses dérivées, notamment spatiales. En revanche, il reste à expliciter l'obtention des dérivées spatiales de  $\eta$ . La première technique qu'on a employée pour les obtenir était une différence finie d'ordre élevé. Néanmoins, désireux d'avoir une formulation complètement spectrale, on a ensuite cherché à les exprimer à partir du potentiel. On a alors repris la condition dynamique de surface libre précédente (écrite en deux dimensions ici pour simplifier) en l'exprimant en fonction des seules variables horizontales :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, \eta(x, t), t) = -\eta(x, t) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] (x, \eta(x, t), t) \quad (\text{II.1.23})$$

puis en la dérivant par rapport à  $x$ , on obtient par dérivation composée :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}}{1 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}} \quad (\text{II.1.24})$$

Cette méthode a été implémentée aussi, mais elle n'est pas idéale car elle fait intervenir des dérivées temporelles du potentiel qui sont justement nos inconnues, on est donc obligé de décentrer en temps ces quantités, calculées à partir des valeurs précédentes des dérivées des amplitudes modales. Finalement, puisque les variables de  $\eta$  sont indépendantes, on peut en fait avantageusement calculer ces dérivées par un simple aller-retour dans l'espace modal, comme explicité précédemment au I.2.3.3. Suite à la mise en œuvre de notre modèle HOS récent, on a donc introduit dans notre modèle MD cette technique d'obtention de  $\partial \eta / \partial x$  et  $\partial \eta / \partial y$ .

On possède désormais tous les termes nécessaires pour procéder à une avance en temps classique des élévations de surface libre et des amplitudes modales, réduisant ainsi nos inconnues aux seules dérivées temporelles  $(\partial \eta / \partial t)_{ij}$  et  $(dA/dt)_{n_x n_y}(t)$ . L'avance en temps employée suit un schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre, dont le choix est étayé par les conclusions de Fornberg [53] quant à sa stabilité, et Dommermuth & Yue [38] quant à son emploi. On a par ailleurs vérifié sur deux cas tests (un lâcher non-linéaire d'un mode, et une génération de houle régulière) la convergence de ce schéma, qui s'est avérée d'une part très régulière dans les deux cas, et d'autre part d'un ordre supérieur à 4, plutôt plus proche de 5.

Pour ce qui est de la résolution en elle-même, connaissant les amplitudes modales et les élévations à un sous-pas de temps de la résolution, on peut obtenir directement les dérivées temporelles des élévations de surface libre en chacun des nœuds de collocation via la condition cinématique de (II.1.10). Pour les dérivées des amplitudes modales, ce n'est pas aussi immédiat ; l'ensemble des conditions dynamiques exprimées en chacun des points formant un système où ces dérivées sont les inconnues. À chaque sous pas de temps, on résout donc ce système carré par une méthode itérative de type GMRES de coût  $O(k(N_x N_y)^2)$ . On ne peut en effet résoudre par FFTs car la matrice  $\psi(\psi_{n_x n_y}(x_i, y_j, \eta_{ij}))$  de ce système n'est pas la matrice de Fourier puisque des cosinus hyperboliques *dépendant de  $\eta$*  (cf. expression

(II.1.22)) interviennent. De plus  $\eta$  étant instationnaire, cette matrice l'est aussi, on n'a donc pas intérêt à utiliser une méthode directe de résolution type LU. Néanmoins, on a vérifié les résultats de cette résolution itérative GMRES par comparaison à une méthode LU et on n'a trouvé aucune différence sensible pour peu bien sûr que la méthode itérative converge. À ce propos, on a constaté que l'augmentation du nombre d'itérations nécessaires à la méthode GMRES, qu'on peut suivre au cours du calcul, était synonyme, de manière non étonnante, de la présence de 'difficultés' dans le fluide (pentes locales fortes notamment). Et le nombre maximal d'itérations pour conserver une solution convergée se situe dans la pratique aux environs de 100. Pour finir, la résolution sur-déterminée (plus de nœuds de collocation que de modes) décrite à la section I.2.3.2 du chapitre précédent a parfois été employée, pour résoudre le même système, à la seule différence de l'utilisation d'un solveur adapté : moindres carrés type Householder  $O((N_x N_y)^3)$  au lieu de GMRES.

Pour ce qui est du choix du pas de temps, l'analyse du critère de stabilité linéaire réalisée par Dommermuth & Yue [38] les conduit à dériver une condition de Courant du type :  $(\Delta t)^2 \leq 8/|k_{N_x}|$  en deux dimensions. Physiquement, cette condition peut être rapprochée d'une condition de Shannon, en ce sens qu'elle impose en fait que  $\Delta t$  soit inférieur à la moitié de la période de la plus petite composante considérée (*i.e.* le dernier mode); en effet,  $T_{N_x}^2 \simeq (2\pi)^2/|k_{N_x}|$ , donc  $(\Delta t)^2 \leq T_{N_x}^2/4 \simeq \pi^2/|k_{N_x}| \simeq 9/|k_{N_x}|$ . D'autre part, si on ré-introduit la forme de  $k_{N_x} = N_x\pi/L_x$  dans cette condition CFL, elle relie alors directement le pas de temps à la finesse de discrétisation spatiale  $L_x/N_x$ . Ainsi, on entrevoit aisément qu'en trois dimensions il faudra considérer la plus petite des finesesses de discrétisation pour déterminer le pas de temps. Et d'une manière générale, puisque notre méthode s'appliquera à des bassins de houle, la discrétisation sera plus fine dans le sens de propagation principal, *i.e.* selon  $x$ .

### II.1.3.1.3 Stabilité de la technique MD

En ce qui concerne le problème du repliement qu'on a explicité au chapitre précédent I.2.2, la situation est un peu plus complexe ici du fait même que notre série spectrale n'est pas strictement celle de Fourier, mais que des cosinus hyperboliques y sont présents. La technique d'anti-repliement évoquée au I.2.2 ne peut donc être employée. Toutefois, il faut ici préciser que la résolution MD ne fait intervenir que des produits simples et que les termes non-linéaires résultants sont d'amplitude restreinte; l'effet du repliement sera donc modéré comparé à un modèle HOS par exemple, comme on pourra le voir lors de la validation du noyau au second ordre, où les mêmes types de produits interviennent et où l'on a comparé les résultats avec et sans repliement.

Une autre limitante numérique est, elle, théorique. En effet, dans les fonctions de base, aux grandes valeurs de  $k_{n_x n_y}$ , le rapport des cosinus hyperboliques est équivalent à  $e^{k_{n_x n_y} \eta}$ , qui diverge rapidement si  $\eta$  est positif. Respectivement, sous la surface libre ce rapport tendra très rapidement vers zéro. Les produits entre les amplitudes modales et ces rap-

ports hyperboliques feront donc intervenir des nombres d'ordres de grandeurs de plus en plus différents. Or on sait que numériquement ce type de produit conduit finalement à une introduction d'erreurs dans la solution. Pour pallier ce phénomène, on peut alors avoir l'idée de décaler la référence verticale arbitraire de normalisation de nos cosinus hyperboliques, en prenant par exemple comme nouveau dénominateur :  $\cosh [k_{n_x n_y} (1 + \eta_{max})]$  où  $\eta_{max}$  est le niveau maximal qu'on rencontrera au cours du calcul. On déplace ainsi la zone de convergence *théorique* de ce rapport du demi-espace  $z \leq 0$  au demi-espace  $z \leq \eta_{max}$ . Asymptotiquement néanmoins, cela revient à multiplier chaque rapport hyperbolique par la quantité  $e^{-k_{n_x n_y} \eta_{max}}$ , mais alors les amplitudes modales correspondantes sont, elles, chacune multipliée par  $e^{k_{n_x n_y} \eta_{max}}$ , pour conserver inchangée la solution par composante. La différence des ordres de grandeurs dans les produits n'aura alors pas varié. Ce problème est par conséquent plus lié numériquement à la différence des niveaux entre les élévations de surface libre les plus hautes et celles les plus basses, qu'au niveau moyen de référence  $z = 0$  lui-même. Par ailleurs, ce problème sera d'autant plus flagrant quand les dimensions du bassin seront restreintes par rapport à sa profondeur, *i.e.* quand on tend vers la profondeur infinie. De fait, les nombres d'ondes  $k_{n_x n_y}$  des modes étant définis par des rapports à  $L_x$  et  $L_y$ , si ces dernières valeurs diminuent, ces nombres d'ondes augmenteront plus vite, et on rencontrera ainsi le problème précédent pour un nombre total de modes conservés inférieur. En définitive, la méthode MD est donc limitée numériquement à un nombre de modes restreint, ce qu'on a vérifié dans nos simulations ; cela n'est pas forcément gênant, suivant la rapidité de la convergence des série spectrales ; toutefois on sait que ce taux de convergence diminue avec la cambrure par exemple. Cependant, il faut bien préciser que ce problème ne concerne que la MD, et non le HOS ou encore les développements en ordre de perturbations dont les évaluations sont toujours menées en  $z = 0$ . D'autre part, quand le bassin (ou la cuve) a des dimensions horizontales importantes par rapport à sa profondeur (comme un bassin de houle physique), ce phénomène est alors diminué. De notre expérience, il apparaît pour des nombres de modes compris entre 50 et 250 selon les cas qu'on a traités.

Pour terminer totalement avec cette méthode, on donne ici les expressions employées des volumes et énergies, dont les intégrations sont réalisées par simple méthode des trapèzes :

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta(x, y, t) \, dx dy \\
 Ec(t) &= \frac{1}{2} \int_{SL(t)} \phi \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \, dSL = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi(x, y, z = \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) \, dx dy \\
 Ep(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta^2(x, y, t) \, dx dy
 \end{aligned}
 \tag{II.1.25}$$

où  $SL(t)$  représente la surface libre.

### II.1.3.2 Méthode HOS

On va s'attacher ici à exposer le principe de la résolution par méthode HOS et ses points clefs, plutôt que de décrire en détail son implémentation qui, du fait de l'emploi simultané des techniques d'anti-repliement et d'extension artificielle du domaine pour calculer les dérivées, nécessite finalement une organisation relativement compliquée. On précise en outre que le développement de ce modèle est récent, les efforts ayant été concentrés au départ sur les MD plus simples, puis sur le développement du bassin de houle au second ordre (cf. III.1). L'expérience qu'on a de cette technique reste donc encore à développer. Par ailleurs, comme on a déjà discuté assez en détails de cette méthode aux sections I.1.3.3 et I.1.3.4 du chapitre I.1, on tentera ici de compléter ces éléments sans trop les reprendre.

#### II.1.3.2.1 Principe de la méthode

Si l'on reprend les conditions de surface libre (II.1.13) formulées au moyen du potentiel de surface  $\phi^S$ , et qu'on les compare aux équations de la MD, on peut noter deux différences. D'une part, le seul terme non surfacique dans ces équations est la dérivée verticale du potentiel total (non surfacique)  $\partial\phi/\partial z$ , qui sera la quantité traitée par une résolution pseudo-spectrale. D'autre part, une fois cette quantité connue, on pourra cette fois obtenir nos deux dérivées temporelles  $\partial\eta/\partial t$  et  $\partial\phi^S/\partial t$  directement, sans résolution de système. Toutefois, pour procéder à l'avance en temps de ces deux quantités  $\eta$  et  $\phi^S$  uniquement, il faut pouvoir en déduire au sous-pas de temps suivant toutes les grandeurs nécessaires au nouveau calcul de leurs dérivées partielles temporelles. Si l'on observe plus en détails les équations (II.1.13), on remarque qu'outre  $\partial\phi/\partial z$ , toutes les autres quantités sont soit connues directement ( $\eta$ ), soit sont des dérivées partielles spatiales ( $\partial\eta/\partial x$ ,  $\partial\phi^S/\partial x$ ,  $\partial\eta/\partial y$  et  $\partial\phi^S/\partial y$ ) de grandeurs qui sont de variables indépendantes. On peut donc obtenir chacune de ces dérivées partielles spatiales par un aller-retour dans l'espace modal où la dérivée spatiale est explicite. On utilise, pour améliorer la qualité de ces dérivations, une extension artificielle du domaine dans chaque direction horizontale, comme explicité en I.2.3.3.

La seule quantité qu'il ne paraît pas immédiat d'obtenir à partir des grandeurs  $\eta$  et  $\phi^S$  au sous-pas de l'avance en temps, est donc la dérivée verticale du potentiel total sur la surface libre. La technique HOS consiste à la calculer à partir de  $\phi^S$ , de manière complètement indépendante du reste de la résolution –de l'avance en temps notamment– au moyen d'un processus itératif qu'on pourrait qualifier d'« itérations non-linéaires ». Ainsi qu'on l'a déjà mentionné au I.1.3.3, ce processus repose sur l'idée de Watson & West [133] de réaliser un développement en série de Taylor de  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial z$  qu'on rappelle ici :

$$\begin{aligned}\phi(x, y, \eta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n}(x, y, 0, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, \eta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial z^{n+1}}(x, y, 0, t)\end{aligned}\tag{II.1.26}$$

On notera  $W_m$  ce deuxième développement tronqué à l'ordre  $m$ , de sorte que  $\partial\phi/\partial z = W_\infty$  ; et on introduit aussi le carré homogène en puissance de  $\eta$  de ce développement, noté  $(W^2)_m$  et tel que :

$$(W^2)_m = \sum_{p+q \leq m} W_p W_q \quad (\text{II.1.27})$$

Si l'on reporte ce développement dans les équations de surface libre précédentes (II.1.13), on obtient alors *en conservant une consistance nécessaire* (cf. I.1.3.3) *en puissance de  $\eta$*  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi^S}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi^S \right|^2 + \frac{1}{2} (W^2)_m + \frac{1}{2} (W^2)_{m-2} \left| \vec{\nabla} \eta \right|^2 & \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= W_m + W_{m-2} \left| \vec{\nabla} \eta \right|^2 - \frac{\partial\phi^S}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi^S}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} & \text{en } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1.28})$$

En respectant cette consistance en puissances de  $\eta$  on suit ainsi West *et al.* [135], et non Dommermuth & Yue [38] qui ne la réalisent pas. On peut remarquer que ces équations sont alors affichées en  $z = 0$  puisque le seul terme qui dépendait de  $z$ , en l'occurrence  $\partial\phi/\partial z$ , est calculé par un développement en série de Taylor en  $z = 0$ . Néanmoins, c'est là purement mathématique ; en effet, en conservant complet ce développement jusqu'à l'infini (ou pratiquement jusqu'à une valeur convergée de  $m$ ), ces conditions sont bien strictement équivalentes aux conditions de surface libre non-linéaires exactes, en  $z = \eta$  connu, de (II.1.13) ou de (II.1.10). On n'est donc pas du tout dans la situation d'un développement en série de perturbations où, dans le problème exprimé pour chaque ordre,  $\eta$  est inconnue et le développement de Taylor complet a disparu au profit des seuls termes de l'ordre résolu.

Pour résoudre ces nouvelles équations de surface libre (II.1.28), on introduit ensuite le double développement formel des quantités totales inconnues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z, t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_p(x, y, z, t) \\ \phi(x, y, z, t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \phi_p(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (\text{II.1.29})$$

Là encore ces développements ne sont pas du type de ceux des séries de perturbation puisqu'ils peuvent être considérés sans signification physique ; ils viennent juste accompagner le développement en série de Taylor précédent tronqué à un ordre arbitraire  $m$ . Puisque pour  $m = 0$  on retrouve les équations de surface libre linéaires, on peut néanmoins voir ces développements formels comme portant sur les non-linéarités (que West *et al.* [135] relie aux pentes présentes dans la déformée,  $m$  étant alors un ordre de pente). On introduit ensuite le développement en série de Taylor (II.1.26) dans ces développements, ainsi pour  $\phi$  pris en  $z = \eta$  on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} \phi^S &= \phi(x, y, \eta, t) \\ &= \phi_0(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial\phi_0}{\partial z}(x, y, 0, t) + \dots + \phi_1(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial\phi_1}{\partial z}(x, y, 0, t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.1.30})$$

Un processus itératif pour résoudre une telle équation peut s'exprimer par la formulation triangulaire suivante (où les quantités sont prises en  $z = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 \phi^S &= \phi_0 \\
 \phi_1 &= -\eta \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \\
 \phi_2 &= -\eta \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \\
 \phi_3 &= -\eta \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - \frac{\eta^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial z^3} \\
 &\dots \\
 \phi_p &= -\sum_{n=0}^{p-1} \frac{\eta^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} \phi_{p-1-n}}{\partial z^{n+1}}
 \end{aligned} \tag{II.1.31}$$

Les lignes de ce triangle représentent les itérations successivement menées. Un deuxième triangle peut alors être construit à partir de ce premier et du développement de Taylor (II.1.26) pour obtenir la quantité  $\partial\phi/\partial z$  recherchée ; il prend la forme :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 &= \frac{\partial\phi_0}{\partial z} \\
 \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_1 &= \frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \\
 \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_2 &= \frac{\partial\phi_2}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial z^3} \\
 &\dots \\
 \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_p &= \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\eta^n}{(n)!} \frac{\partial^n \phi_{p-n}}{\partial z^n}
 \end{aligned} \tag{II.1.32}$$

En sommant les composantes de ce deuxième triangle jusqu'à l'ordre  $m$  où le processus est convergé, on aura ainsi obtenu la valeur recherchée de  $\partial\phi/\partial z$  en  $z = \eta$ .

### II.1.3.2.2 Résolution

L'avantage principal d'avoir développé ce processus itératif est qu'on a ainsi pu obtenir une quantité en  $z = \eta$  à partir d'évaluations en  $z = 0$ . Ainsi, à chaque étape (chaque ligne de (II.1.31)), on résout l'équation affichée en  $z = 0$  par méthode pseudo-spectrale, où la série est cette fois bien une série de Fourier cosinusoidale du fait de la disparition du rapport hyperbolique. On peut donc employer nos FFTs cosinusoidales adéquates et obtenir

des amplitudes modales correspondant respectivement à  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ , etc. Chacune de ces séries spectrales peut de plus être dérivée par rapport à  $z$  explicitement dans l'espace modal, pour obtenir respectivement  $\partial\phi_0/\partial z$ ,  $\partial\phi_1/\partial z$ , etc. ; et à des ordres supérieurs dès que nécessaire pour les étapes suivantes de la résolution itérative. Si ces dérivations verticales conservent la possibilité d'employer les FFTs, cela est dû à ce que les termes supplémentaires qui en résultent, pris de nouveau en  $z = 0$ , sont du type  $k_{n_x n_y}$  ou  $k_{n_x n_y} \tanh(k_{n_x n_y})$  selon la parité de l'ordre de dérivation, et qu'ils sont donc *indépendants de l'espace* ; ils peuvent de ce fait être intégrés dans les amplitudes modales, permettant de retrouver la base cosinusoidale.

À chaque étape du processus itératif, après résolution, on dérivera ainsi d'un ordre supplémentaire toutes les quantités déjà obtenues, pour préparer l'itération suivante. Ensuite, une fois parvenu à l'ordre de pente  $m$  désiré, on assemble les quatre quantités  $W_m$ ,  $W_{m-2}$ ,  $(W^2)_m$  et  $(W^2)_{m-2}$  présentes dans les conditions de surface libre (II.1.28), et qui correspondent aux grandeurs  $\partial\phi/\partial z$  et  $(\partial\phi/\partial z)^2$  limitées de manière consistante aux termes en  $\eta_{(k \leq m)}^k$ . Il ne reste alors plus qu'à avancer directement les conditions de surface libre pour  $\eta$  et  $\phi^S$ , ce toujours au moyen d'un schéma de type Runge-Kutta du quatrième ordre. Finalement, on passe au sous-pas de temps suivant dont la première étape sera de résoudre les dérivées spatiales avec la technique d'extension du domaine. Pour donner une idée du temps de calcul global à  $N_x$  fixé, on quantifie, dans le tableau II.1.1 le nombre de FFTs utilisées globalement par sous-pas de l'avance en temps, en deux dimensions et en fonction de  $m$ . Ce tableau traduit aussi l'augmentation du coût numérique avec l'ordre de pente, puisque d'une part l'évaluation des FFTs constitue le coût CPU principal, et d'autre part le coût des autres opérations varie quant à lui moins rapidement avec  $m$ . On précise qu'on croit ce nombre de FFTs utilisées optimisé dans notre code ; les valeurs sont ici données sans opérer l'anti-repliement.

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$m$
FFTs	2	5	9	14	20	27	35	44	54	$\sum_{k=2}^{m+2} k$

Tableau II.1.1: Nombre de FFTs nécessaires par sous pas de temps en fonction de  $m$ , sans anti-repliement.

Il est à noter que par cette résolution HOS on a effectivement obtenu un potentiel solution du problème *complet*. En effet, le potentiel  $\phi$ , recomposé des  $\phi_p$ , vérifie à la fois l'équation de Laplace dans le domaine, les conditions de flux nul sur les parois solides et les deux conditions de surface libre. On a donc bien résolu intégralement notre problème complètement non-linéaire.

Par ailleurs, jusqu'à présent le modèle qu'on a décrit est identique à celui de West *et al.* [135], à cette différence significative près que notre modèle est formulé pour une cuve parallélépipédique, donc sans s'imposer de conditions sur les frontières verticales autres que la nullité du flux ; alors que le modèle de West *et al.* (de même que celui de Dommermuth & Yue [38]) est périodique, *i.e.* que les conditions d'entrée et de sortie aux extrémités du domaine sont identiques. Ainsi, notre modèle est adapté à l'optique de *générer* de la houle,

alors que le leur se contente de la faire évoluer à partir d'un état initial à se donner, champ initial qui satisfait de plus *a priori* difficilement d'emblée les conditions complètement non-linéaires du problème (hormis pour de la houle régulière). D'autre part, on peut aussi, avec notre formulation, utiliser ce modèle pour simuler des cas d'oscillations libres et forcées en cuve, tels que ceux présentés par MD au chapitre suivant II.2. En outre, par rapport à ces MD, on s'est affranchi des termes en cosinus hyperboliques dont on a vu à la section précédente II.1.3.1 qu'ils engendraient nombre de difficultés, notamment de stabilité pour des nombres de modes importants. Enfin, comme ce modèle est récent, on ne l'a pas encore validé exhaustivement, ce qui explique qu'il y sera peu fait mention dans le chapitre II.2 qui suit. S'il reste encore des tests à lui faire subir, il présente néanmoins déjà les propriétés et résultats escomptés en houle régulière par exemple (cf. III.2), pour laquelle on le considère comme validé.

### II.1.3.2.3 Problème spécifique du repliement

Pour terminer la présentation de notre modèle HOS, il faut évoquer le thème du repliement, qui a constitué finalement l'essentiel des efforts de mise en œuvre de ce modèle. En effet, d'une part le développement d'un processus d'anti-repliement qui soit à la fois consistant et optimal en temps, et d'autre part la gymnastique imposée par l'imbrication des trois techniques : résolution itérative/extensions pour le calcul des dérivées/anti-repliement, nécessitent de l'attention. On ne va donc pas ici donner les détails de cet anti-repliement, qui n'est finalement qu'une utilisation multiple du processus décrit au I.2.2, mais en évoquer les points clefs, notamment en terme de consistance.

Pour ce faire, il faut tout d'abord préciser que, contrairement à ce qu'on avait d'abord pensé,  $\eta$  doit faire partie intégrante de ce processus d'anti-repliement. En effet, si cette quantité n'est jamais écrite explicitement comme une série spectrale, l'étude des conditions de surface libre (II.1.28) nous montre que sa dérivée temporelle est elle égale à des compositions de séries spectrales, elle doit donc faire partie du processus d'anti-repliement, et en conséquence  $\eta$  aussi, qui est avancée en temps à son moyen. Le deuxième point préliminaire est que l'étude de toutes les quantités présentes mène, en raisonnant sur la parité des grandeurs et de leurs produits et dérivées, à la vérification heureuse que tous les produits traités contre le repliement peuvent l'être sur notre base cosinusoidale et non sur son pendant sinusoidal.

Ensuite, le plus simple est peut-être de s'intéresser à l'anti-repliement effectué par West *et al.* dans leur article. Considérant le triangle de re-construction de  $\partial\phi/\partial z$  précédent (II.1.32), ils font la remarque que ce triangle rassemblé jusqu'à l'ordre  $m$  pour estimer  $\partial\phi/\partial z$  (*i.e.*  $W_m$ ), contiendra des produits multiples d'ordre  $m - 1$  (faisant intervenir  $m$  quantités). Cela implique d'ailleurs qu'ils considèrent bien  $\eta$  comme une quantité à traiter dans ces expressions (II.1.32), sans quoi ils ne parleraient que de produits simples. Ils généralisent ensuite cette remarque aux conditions de surface libre elles-mêmes, où là

encore, ayant reporté les expressions type  $W_m$  issues du triangle (II.1.32), apparaissent des produits multiples jusqu'à l'ordre  $m - 1$ . Alors, ils proposent d'utiliser une méthode généralisée de celle décrite précédemment au I.2.2 qui consiste à effectuer l'anti-repliement de ces produits multiples en une seule passe en utilisant non plus  $M_x = 3N_x/2$  points (en deux dimensions), mais cette fois  $(m + 1)N_x$  points, ce qui assure effectivement de supprimer le repliement des produits jusqu'à l'ordre  $m - 1$ . On précise que s'ils peuvent mener cela à bien en une seule passe, c'est aussi parce que la somme de deux produits d'ordre quelconque contenant chacun du repliement, peut être traitée par l'anti-repliement de la somme.

L'inconsistance dans le raisonnement de West *et al.* précédent réside dans ce que, ce faisant, ils supposent que le processus de résolution successive ne modifie pas le repliement. En effet, pour obtenir les amplitudes modales de l'itération suivante dans le triangle (II.1.31), amplitudes dont le nombre est fixé dès le départ à  $N_x$ , on doit résoudre par FFTs un système de taille  $N_x$  pour être consistant dans l'ordre de troncature de la solution finale. Or, si on ne supprime pas le repliement avant chacune de ces résolutions, les termes repliés ne pourront plus être discernés après résolution des termes non repliés, du fait des dérivations qui interviennent de manière inhomogène sur les différents termes modaux. Il faut donc opérer un anti-repliement *au fil* de la résolution itérative. La solution optimale à ce problème qu'on propose ici, est de traiter de manière préliminaire séparée toutes les puissances de  $\eta$ , en même temps qu'on calcule les dérivées spatiales de cette quantité. Ensuite, à chaque itération, on ne se retrouve plus de ce fait dans le triangle (II.1.31), qu'avec des produits simples associant une puissance de  $\eta$  déjà traitée à une dérivée de  $\phi_p$ , dont on peut regrouper la somme pour opérer cet anti-repliement simple en une fois. Reste finalement un dernier anti-repliement simple à mener pour chacune des conditions de surface libre. Au final, on aura un peu plus que doublé le nombre de FFTs utilisées, ce qui reste raisonnable. On croit avoir ainsi développé un anti-repliement consistant et optimal du problème.

On a vu que ce n'était pas le cas de celui de West *et al.* [135], il est aussi peu probable que ce soit le cas de celui de Dommermuth & Yue [38], comme le supposent implicitement Clamond & Grue [25]. De fait, d'une part l'analyse précédente est largement basée sur la consistance en puissances de  $\eta$  dont Dommermuth & Yue ne tiennent pas compte, d'autre part ils mentionnent des anti-repléments de chaque produit simple sans évoquer de regroupement, ce qui rendrait le nombre de FFTs nécessaires presque prohibitif. Il est donc possible que ce procédé d'anti-repliement soit original. Quoi qu'il en soit, il apparaît nettement qu'un anti-repliement pas ou mal réalisé dans ces méthodes se répercutera de manière croissante dans la solution du fait des multiples produits spectraux impliqués dans la résolution itérative. Par ailleurs, cette possibilité d'éviter le repliement dans les méthodes HOS, même si elle y est beaucoup plus cruciale qu'en MD, en constitue un autre avantage par rapport à ces méthodes directes.

#### II.1.3.2.4 Stabilité des techniques HOS

En comparaison aux MD, le développement de Taylor intervenant dans le HOS permet de s'affranchir du caractère divergeant qui était impliqué par la présence du rapport des fonctions hyperboliques ; le HOS est ainsi *théoriquement* convergeant au contraire des MD. N'ayant pas encore une grande expérience pratique de cette méthode qu'on a développée relativement récemment, on s'en remettra principalement aux remarques des auteurs l'ayant proposé, remarques rassemblées au I.1.5. Pour ces auteurs [135]&[38], la seule limitation théorique provient de la convergence du développement de Taylor utilisé, convergence dont on sait qu'elle s'opère jusqu'à des cambrures proches du déferlement. Le caractère convergeant théorique du processus itératif de résolution HOS est confirmé par Tsai & Yue [130] après Brueckner & West [14], et ce même pour des rapports de longueurs d'ondes en présence importants (*i.e.* pour des grands nombres de modes). Toutefois, ainsi que le remarquent Dommermuth & Yue [38], l'utilisation dans la pratique de ces grands nombres de modes, et donc de rapports importants entre les longueurs d'ondes des plus grand et plus petit modes en présence dans la simulation, induit une augmentation des erreurs cumulées. Or en HOS justement, on n'a pas seulement une série modale pour décrire la solution comme en MD, mais une superposition de  $m + 1$  séries obtenues successivement ; le cumul d'erreur en sera donc d'autant augmenté, ce qui peut mener à la divergence numérique des simulations. Néanmoins, d'une part la convergence avec  $m$  étant rapide jusqu'à des cambrures importantes, cet effet cumulatif reste *a priori* restreint ; d'autre part, dans la pratique, Dommermuth & Yue [38] par exemple n'ont constaté numériquement ce caractère divergeant, dans leurs tests en houle régulière, que pour des cambrures de l'ordre de 90% de la limite de Stokes, avec des ordres de pente  $m > 10$  (en filtrant toutefois). Dans ce même article, ces auteurs soulignent cependant l'inévitable accroissement de ce cumul d'erreurs numérique avec le passage à trois dimensions (puisque les modes en présence ont une amplitude de module supérieur à celui de leurs composantes prises séparément). Néanmoins, ainsi qu'on vient de le mentionner, la qualité de l'anti-repliement opéré par ces auteurs reste sujette à question ; or de notre expérience, cette qualité permet d'accroître sensiblement la zone de convergence du HOS. Ainsi par exemple, dans nos premiers calculs HOS tri-dimensionnels (cf. section III.2.2.3) où 66000 modes sont mis en jeu, avec des cambrures non négligeables, on n'a pas rencontré de difficulté de stabilité, sans pourtant recourir à du filtrage ou du lissage. En définitive, on peut donc *a priori* conclure à une bonne stabilité des techniques HOS en pratique, surtout en comparaison aux MD rapidement limitées en nombre de modes.

En conclusion, on a détaillé dans ce chapitre les différentes formulations employées pour le noyau de notre résolution, les extensions qui en ont été faites seront présentées par thèmes dans la partie III. On va par conséquent pouvoir désormais s'intéresser aux validations et applications de ce noyau, qui concernent principalement la méthode MD sur laquelle on a travaillé à l'origine ; le modèle HOS récemment développé est quant à lui validé sur le seul cas de la génération de houle régulière pour le moment (cf. III.2).





## Chapitre II.2

# Validations du Noyau de la Méthode et Applications Liées

Ce chapitre a pour objectif de présenter les principaux cas tests de validation qui ont été menés sur le noyau de la méthode. Outre une comparaison avec une solution analytique dédiée à valider notre noyau au second ordre, les autres cas concernent principalement notre noyau MD à partir duquel on s'est fait l'expérience de ces approches spectrales (cf. chapitre III.2 pour une validation du modèle HOS pour la génération de houle).

À l'origine, par simplicité, ce noyau MD a d'abord été codé en linéaire en deux dimensions. Différents cas de validation ont alors été menés sur des lâchers de surface libre de type Cauchy-Poisson en deux puis trois dimensions, présentant une comparaison favorable en efficacité par rapport à la BEM. Ensuite cette version tri-dimensionnelle a été étendue au non-linéaire complet.

On peut de plus préciser que toutes les simulations présentées dans ce chapitre, comme dans l'ensemble de ce mémoire, ont été réalisées en double précision sur des machines scalaires mono-processeur : station de travail Compaq à 500MHz dans un premier temps, et PC Pentium III à 1GHz ensuite.

### II.2.1 Validations du noyau formulé au second ordre

La validation de ce noyau au second ordre procède d'une double motivation. La première provient de ce que ce noyau forme la base de résolution de notre modèle de bassin de houle au second ordre (cf. chapitre III.1), il est donc important de s'assurer de sa validité, séparément de notre formulation en non-linéaire complet. La seconde est qu'on dispose au second ordre de solutions analytiques sur des cas de lâchers de surface libre, ce qui autorise des comparaisons plus fines et fiables par rapport à une confrontation avec d'autres méthodes numériques.

On a d'abord comparé notre modélisation sur le cas simple de l'évolution de la déformée stationnaire dans la cuve bi-dimensionnelle, dont on trouve la formulation dans [124] par exemple. La solution consiste en la simple superposition du premier mode au premier ordre et du second mode au second ordre ; sa conservation, en développement spectral, n'est donc pas difficile, et on a bien retrouvé une parfaite stabilité dès qu'on incluait ces modes. Une solution beaucoup plus 'intéressante spectralement' est celle donnée par Cointe, Molin & Nays [29] pour le lâcher d'une surface libre initialement en pente rectiligne, en profondeur infinie, que Stassen [119] a utilisé dans sa thèse pour validation de son propre noyau intégral. Cette 'pente' lâchée, considérée initialement du premier ordre, est d'intérêt du point de vue spectral parce qu'elle contient une infinité de modes, en l'occurrence tous les modes impairs. Respectivement, au second ordre, les modes excités à partir du repos seront tous pairs. Cette solution analytique revêt la forme :

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(k_m x) \cos(\omega_m t) \\ \eta^{(2)}(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{4} [k_{mn}^+ \cos(k_{mn}^+ x) [\cos(\omega_m t) \cos(\omega_n t) - \cos(\omega_{mn}^+ t)] \\ &\quad - k_{mn}^- \cos(k_{mn}^- x) [\cos(\omega_m t) \cos(\omega_n t) - \cos(\omega_{mn}^- t)]] \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

où les  $k_m$  sont toujours les modes définis par  $m\pi/L_x$  ; les  $\omega_m$  sont les pulsations associées vérifiant la relation de dispersion linéaire en profondeur infinie :  $\omega_m^2 = k_m$ . Les  $k_{mn}^+ = k_m + k_n$  et  $k_{mn}^- = |k_m - k_n|$  correspondent quant à eux respectivement aux modes sommes et différences, avec  $\omega_{mn}^+ = \sqrt{k_{mn}^+}$  et  $\omega_{mn}^- = \sqrt{k_{mn}^-}$  les pulsations associées. Enfin les amplitudes modales  $a_m$  pour une pente initiale de valeur  $\alpha$  sont données par :

$$\forall m, a_m = 2\alpha L_x \frac{1 - \cos(m\pi)}{(m\pi)^2} \quad \text{ou encore} \quad \forall m \text{ impair}, a_m = \frac{4\alpha L_x}{m^2 \pi^2} \quad (\text{II.2.2})$$

Ces amplitudes modales du premier ordre ont donc un taux de décroissance théorique de 2. En outre, puisqu'on a des expressions en ordres de perturbation, la pente peut être choisie arbitrairement (1 à  $t = 0$  ici).

De même que Stassen [119], on a commencé par comparer les déformées dans la cuve au premier ordre, aux six mêmes instants (trois instants de la première période d'oscillation globale et trois de la cinquième période, période qui correspond environ à la période naturelle du mode 1). L'erreur maximale relative à la solution analytique observée a été de 0,02% sur les six instants, pour 500 modes dans la solution analytique et 513 dans notre formulation, ce qui est dans les deux cas largement suffisant à la convergence visuelle. Toujours en suivant Stassen, on a ensuite comparé les élévations au second ordre en trois localisations dans le bassin : au bord, au quart et au milieu de la cuve. La figure II.2.1 présente le résultat de cette comparaison pour 1025 modes dans la série spectrale et une troncature à l'ordre 1000 de la série analytique ; la convergence visuelle de cette solution analytique s'opérant vers 500 modes environ. Le tableau porté en haut de cette même

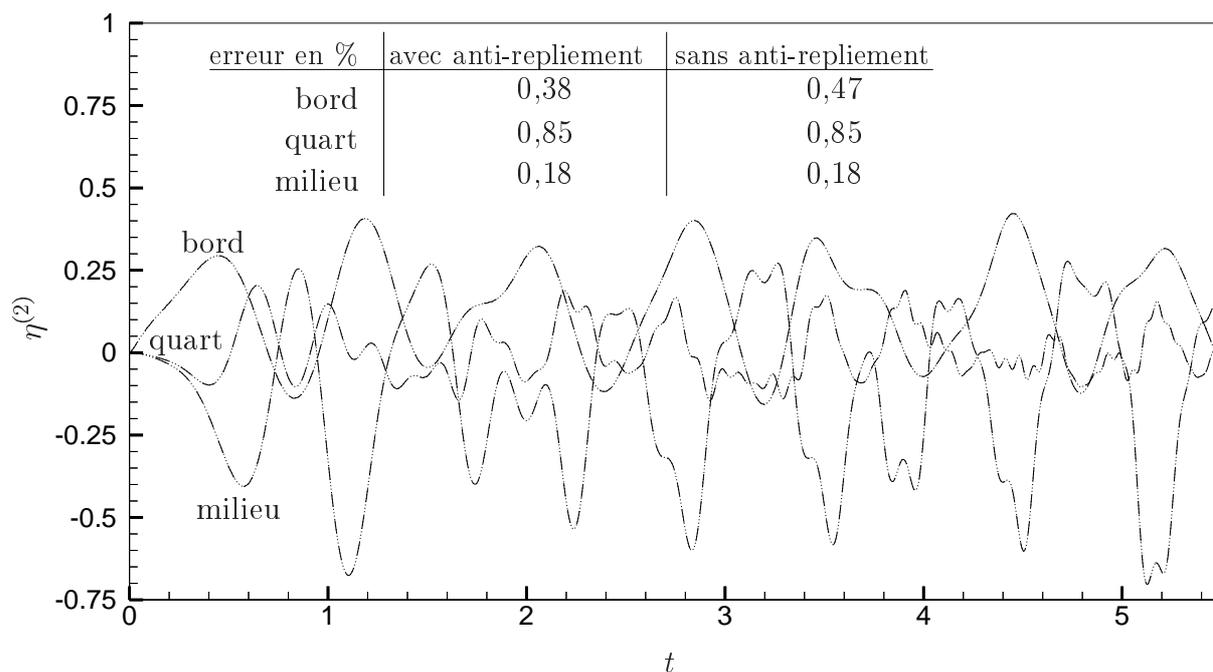


Figure II.2.1: Comparaison des signaux d'élévation au second ordre mesurés sur trois sondes dans la cuve, et erreurs associées; solution analytique (en tireté) et technique MD (en pointillé).

illustration II.2.1 donne les erreurs entre les deux solutions, qui sont indiscernables l'une de l'autre. On est donc beaucoup plus précis par exemple que Stassen, qui avec ses 500 nœuds de discrétisation trouvait encore des différences visibles avec la solution analytique (du même ordre que notre modèle avec 129 modes/nœuds de collocation); d'autant plus qu'il modifiait le contenu modal initial de sa solution (en ne considérant que peu de modes (100 environ) pour éviter des instabilités au départ). Il faut néanmoins préciser que ce type de simulation n'était pas l'objectif du modèle de bassin au troisième ordre de Stassen. Les temps de calcul associés dans nos simulations sont de moins d'une minute pour la simulation totale avec 129 modes, et environ dix minutes avec 1025 modes, sur un Pentium à 1GHz. Le pas de temps nécessaire utilisé pour 1025 modes est d'environ  $5 \cdot 10^{-3}$ , soit environ 1/3 du pas de temps CFL avec la définition de Dommermuth & Yue [38] (cf. II.1.3.1.2). À noter à propos de ces temps de calcul que celui nécessaire à l'obtention de la solution analytique avec le même nombre de composantes est nettement plus important que celui de la simulation spectrale (mais s'il n'a pas été optimisé).

Plus en détails, la vue II.2.2 montre les déformées de surface libre au second ordre dans la cuve, à deux instants. L'accord est très bon; si on fait un zoom sur la partie où les modes les plus courts contenus dans la solution sont bien visibles, on se rend néanmoins compte que la solution spectrale les surestime. On peut alors s'intéresser au contenu modal de cette solution, qui est présenté sur la figure II.2.3. En observant les amplitudes modales du deuxième ordre  $A_{n_x}^{(2)}$  à ces deux mêmes instants (pour 1025 modes), on constate en effet

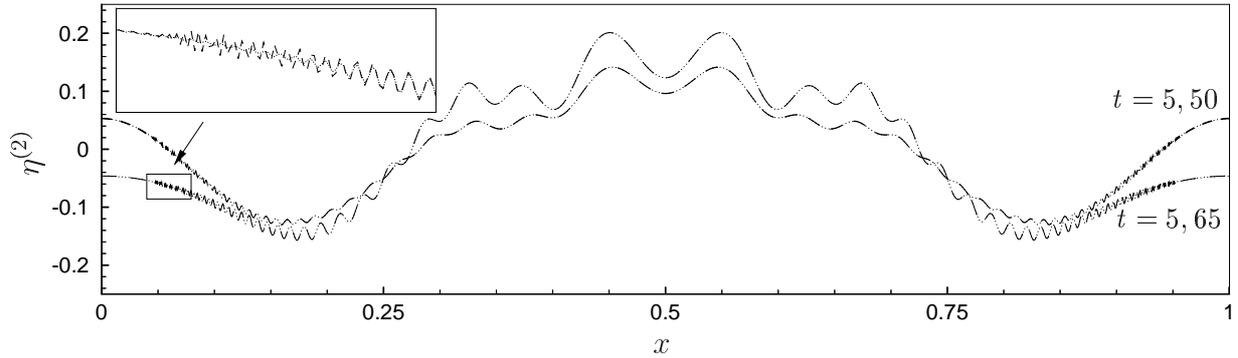


Figure II.2.2: Comparaison à deux instants des déformées au second ordre données par la solution analytique (en pointillé) et par le code spectral (en tirets).

que les modes les plus près de l'ordre de troncature sont surévalués. Or ainsi que le tableau de la figure II.2.1 le laissait déjà présager, l'application de l'anti-repliement aux produits simples contenus dans les expressions de la formulation à cet ordre (équations (II.1.17)), ne change pratiquement rien visuellement à cette décomposition modale. Cette surélévation des modes terminaux est donc typiquement ici ce qu'on a décrit comme étant du repliement 'naturel' (cf. section I.2.2.2); dont on ne s'étonne pas qu'il soit suffisamment élevé pour être visible du fait du faible taux de convergence de la série modale à cet ordre. En effet, même si on ne l'a pas vérifié dans les détails, il semble qu'en rassemblant par ordre les modes sommes et différences de la série au second ordre de (II.2.1), on se retrouve avec une décroissance modale théorique d'ordre restreint à 1 à cet ordre de perturbation. L'ordre mesuré correspondant de décroissance modale de la solution spectrale  $A_{n_x}^{(2)}$  est quant à lui d'environ 1,3 ainsi qu'on peut le constater sur les deux grandes vignettes de la partie inférieure de la figure II.2.3. Si l'on s'attache ensuite à une quantité reconstruite de cette série, telle  $\eta^{(2)}$  par exemple, elle doit théoriquement conserver l'ordre 1 de décroissance des amplitudes modales. La vignette en haut à droite de cette même illustration II.2.3 montre la convergence de cette quantité  $\eta^{(2)}$  avec le nombre total de modes  $N_x$  conservés dans cette série, quantité prise au quart du bassin et sur le pic vers  $t = 5$  de la vue temporelle II.2.1. On constate alors que cette solution reconstruite à ce second ordre de perturbation converge bien environ au même ordre que la série modale elle-même (1,8 pour la droite en tireté portée sur cette vignette). Au premier ordre maintenant (vignette en haut à gauche de cette même figure II.2.3) les amplitudes modales décroissent à un ordre de 2,6 contre 2 théoriquement (équation (II.2.1)). Les propriétés escomptées sont donc bien retrouvées globalement.

Enfin, pour ce qui est de l'effet de l'anti-repliement, on a déjà énoncé qu'il était négligeable pour 1025 modes, on peut en revanche l'observer légèrement quand on ne prend que 129 modes (zooms portés dans les deux vignettes inférieures de l'illustration II.2.3), même

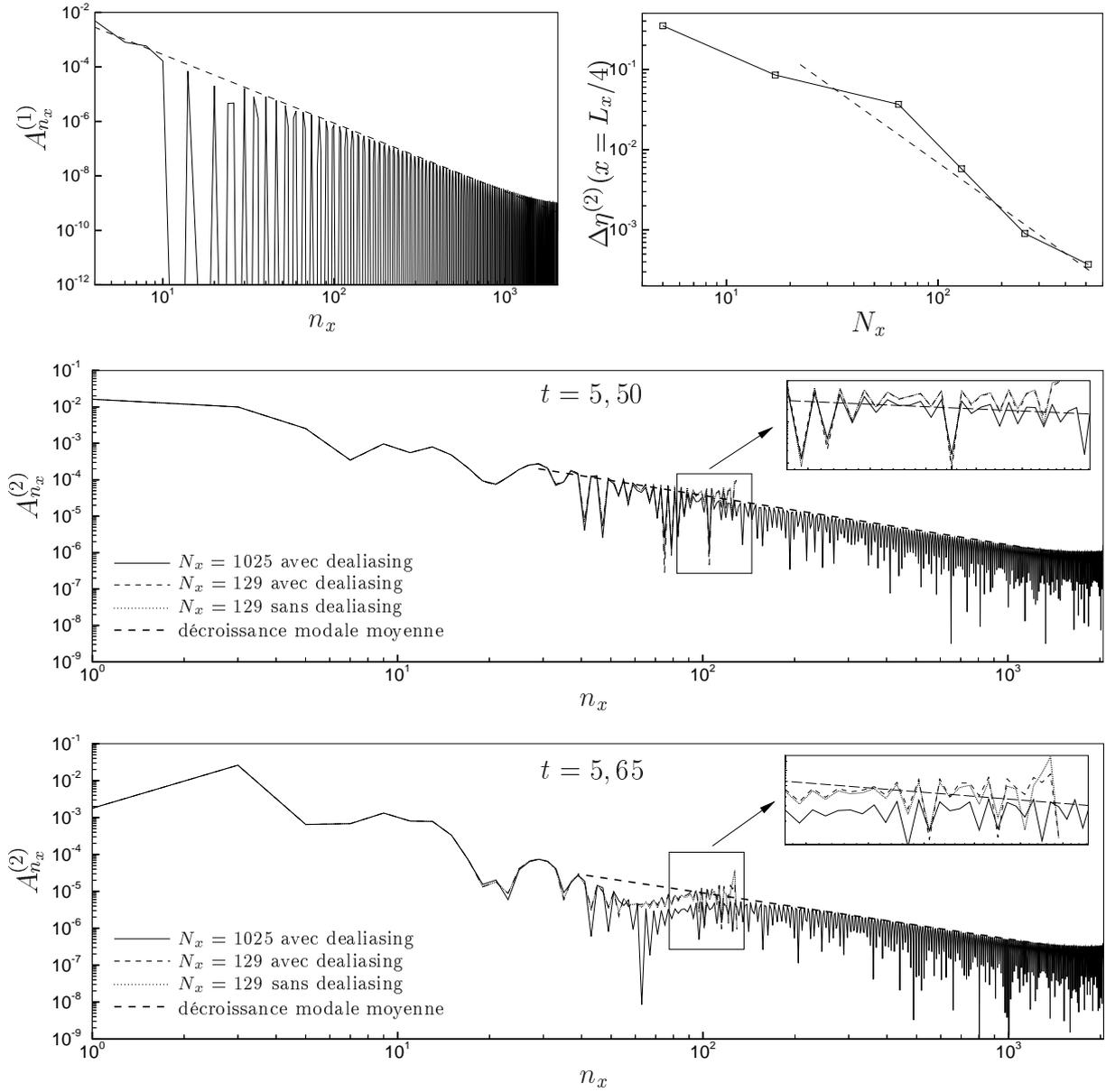


Figure II.2.3: Convergence modale de la solution spectrale aux deux ordres.

si là encore c'est le repliement naturel qui domine. Ainsi pour ce modèle au second ordre où seuls des produits simples interviennent, il ne semble pas vraiment nécessaire d'utiliser l'anti-repliement, puisqu'on aura peu de chances de se retrouver dans une situation spectrale plus défavorable que celle-ci. Cette conclusion vaudra pour notre modèle *SWEET* de bassin de houle au second ordre (cf. chapitre III.1) dans lequel cet anti-repliement n'a pas encore été implémenté.

La comparaison à cette solution analytique au second ordre s'avérant tout à fait probante, on peut maintenant s'attacher à la validité de notre noyau en non-linéaire complet.

## II.2.2 Validations du noyau en non-linéaire complet

### II.2.2.1 Propriétés numériques

Pour vérifier les propriétés numériques du noyau de notre modèle MD, on s'intéresse à l'évolution non-linéaire du lâcher d'un mode propre dans la cuve. On a choisi ici de lâcher le deuxième mode dans une cuve ( $L_x = 2$ ;  $h = 1$ ), pour deux rapports d'amplitudes  $a$  initiales  $2a/\lambda = 5\%$  et  $10\%$ . La figure II.2.4 expose les profils extrémaux successifs au cours des 10 premières périodes d'oscillation dans la cuve, pour le cas le plus non-linéaire ( $10\%$ ) ; la présence des effets des non-linéarités est clairement visible, avec une surélévation des creux et des crêtes allant jusqu'à  $45\%$  de l'amplitude initiale. La période globale demeure proche de celle du second mode initial dominant, qui est de  $3,552$ .

Sur ce cas, on peut s'intéresser en premier lieu à la convergence de la solution avec le nombre  $N_x$  de modes conservés dans la série spectrale. Pour ce faire, on a comparé l'élévation de la crête obtenue après 10 périodes en fonction du nombre de modes, à un calcul de référence avec 256 modes considérés. La figure II.2.5 montre l'erreur relative pour les deux rapports d'amplitude simulés. Pour le cas  $5\%$  plus faiblement non-linéaire, la convergence est bien spectrale (exponentielle) avec le nombre de modes conservés, alors que pour le cas plus non-linéaire elle se dégrade ainsi qu'on l'attend théoriquement ; elle est en l'occurrence d'ordre  $2,5$  environ. On retrouve donc bien les caractéristiques escomptées telles qu'explicitées au chapitre I.2. On peut aussi constater la précision de la méthode au

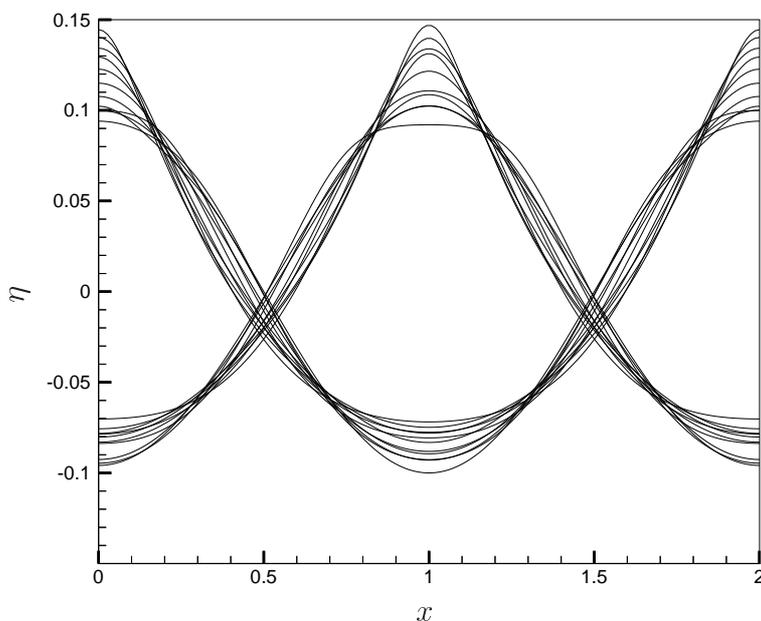


Figure II.2.4: Profils extrémaux non-linéaires sur les 10 premières périodes du lâcher du second mode dans la cuve.

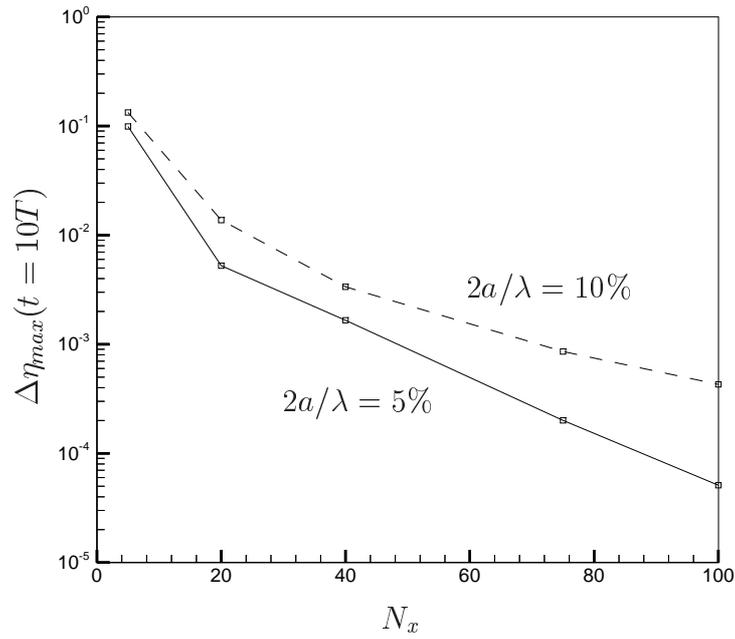


Figure II.2.5: Convergence de la solution sur la crête obtenue après dix périodes de simulation.

vu des niveaux restreints de cette erreur relative, même avec peu de modes.

Un autre aspect d'intérêt pour l'utilisation pratique de la méthode réside dans la sta-

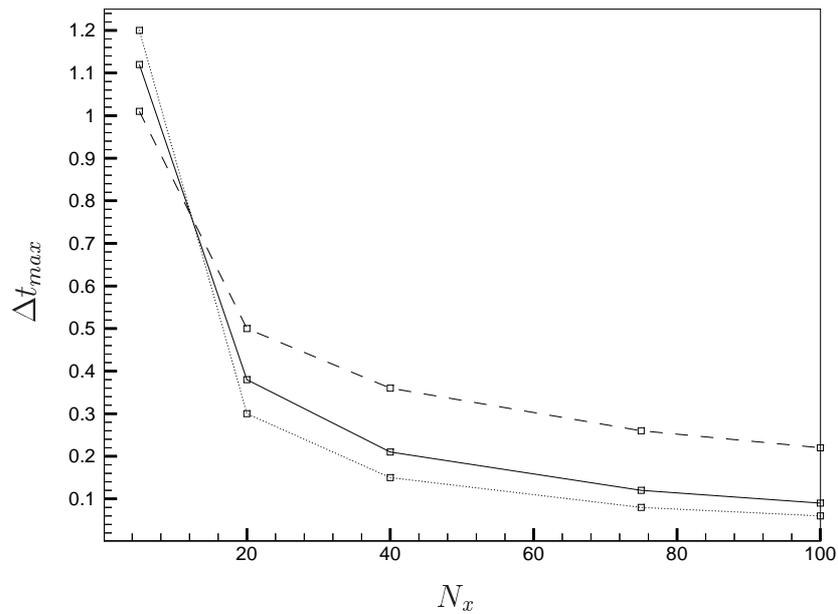
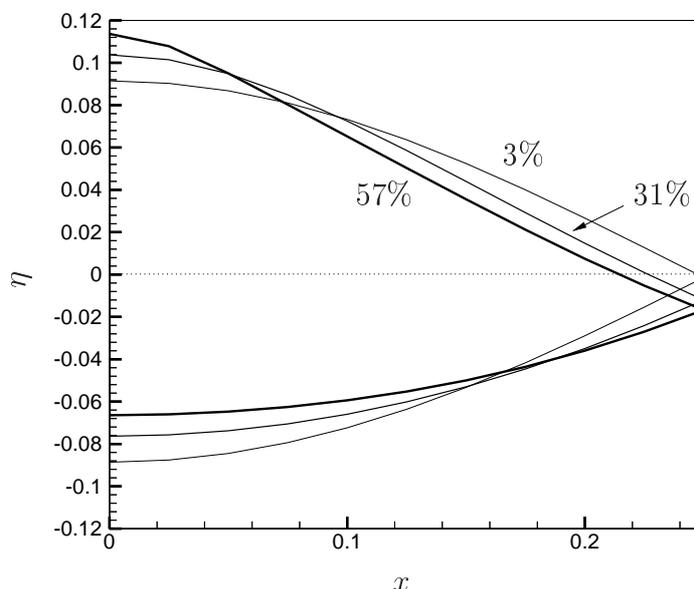


Figure II.2.6: Comparaison des pas de temps stables à ceux prédits par la condition CFL théorique.

bilité de l'avance en temps. On s'est ainsi attaché à rechercher les pas de temps maximaux stables (*i.e.* ne menant pas à des simulations divergentes) dans nos simulations, en fonction du nombre de modes conservés. On a vu au chapitre précédent II.1 l'expression théorique de cette condition CFL obtenue par analyse linéaire par Dommermuth & Yue [38]. La figure II.2.6 présente la comparaison des pas de temps maximaux stables dans notre simulation précédente '10%' (trait plein) à la condition CFL théorique de Dommermuth & Yue, en tireté. On a aussi porté en pointillé la forme qu'aurait une condition CFL classique du type  $\Delta t \leq c\Delta x$ . On constate que la stabilité observée suit une loi dont la tendance se place entre la décroissance théorique (qui procède d'une analyse linéaire), et la décroissance d'une condition classique. On obtient ainsi là encore une tendance proche de celle attendue.

Un autre test de convergence intéressant est utilisé par Dommermuth & Yue [38] pour vérifier les propriétés de leur modèle HOS : il s'agit d'étudier en fonction des deux paramètres  $N_x$  et  $m$  la convergence de la résolution itérative HOS décorrélée de l'avance en temps. Pour ce faire, ces auteurs utilisent une solution non-linéaire pour la houle régulière en régime établi, ce qui leur fournit à la fois le potentiel sur la surface libre qui est la grandeur d'entrée de la résolution itérative HOS, et à la fois la valeur théorique de sa dérivée verticale pour comparer à la sortie de la résolution HOS. Or on a justement codé la solution en régime établi de Rie-



necker & Fenton [109] qui nous permettrait de faire une telle comparaison, mais à la différence des autres auteurs utilisant le HOS, notre solution n'est pas supposée périodique et on a la présence de murs à travers lesquels le flux est nul, ce qui n'est pas le cas de tranches verticales de la houle progressive ; on ne peut donc faire cette comparaison. En revanche, on peut avoir l'idée de faire la même comparaison, non pas avec une solution en régime établi de houle progressive, mais avec celle d'une déformée stationnaire dans une cuve. C'est pourquoi on a implémenté tout récemment la résolution spectrale de Tsai & Jeng [129] pour un tel problème (cf. I.1.3.8), qui donne la solution stationnaire pour le mouvement dans une cuve à une cambrure quelconque jusqu'à la limite de déferlement, limite qui est plus élevée que pour la houle régulière (64% de cambrure contre 44% en houle régulière). La

Figure II.2.7: Profils extrêmes de la solution stationnaire dans une cuve (un quart de la cuve montrée)

figure II.2.7 présente les profils extrémaux obtenus pour différentes cambrures ; pour une meilleure comparaison ils sont tous rapportés à un crête-à-creux identique, celui du profil le plus cambré. Cette solution nous permettra ainsi d'étudier plus en détails la convergence de notre noyau HOS, ce qu'on n'a pas encore eu le temps de réaliser ; modèle HOS qui est toutefois validé pour la génération de houle au chapitre III.2.

### II.2.2.2 Comparaison de lâchers de surface libre

L'une des premières validations de notre modèle MD a été de reproduire l'ensemble des cas présentés dans l'article de Chern *et al.* [23] qui utilisent une méthode spectrale volumique de type  $\sigma$ -transform dans une cuve bi-dimensionnelle de dimensions ( $L_x = 2$ ;  $h = 1$ ). Nos résultats sur ces cas ont malencontreusement disparu avec feu notre station de travail ; on en a toutefois une version imprimée complète. Aussi, n'ayant pas eu le temps de les refaire, on les présente reproduits en annexe A, ce qui permet d'y accoler les reproductions des mêmes figures extraites des articles concernés, pour comparaison directe. On a choisi de montrer le cas le plus non-linéaire qui était présenté dans cet article, soit le lâcher du deuxième mode de longueur d'onde  $L_x$  avec une amplitude de 10% (31% de cambrure). Les figures A.4 présentent la comparaison entre les évolutions des élévations au centre et au bord du bassin obtenues par Chern *et al.* avec 41 modes horizontalement et 21 en verticalement, avec ceux obtenus par notre MD avec 41 modes (qui est une valeur convergée). L'accord visuel entre les deux solutions est très bon ; il en était de même pour tous les autres cas de cet article.

### II.2.2.3 Comparaisons de cas d'oscillations forcées

Pour simuler ces cas, on a simplement ajouté dans les équations de surface libre les termes liés à l'entraînement de notre repère sous l'effet de l'action d'excitation extérieure sur la cuve. De même, on a reproduit la plupart des (nombreux) cas bien documentés d'un article, par Wu, Ma & Eatock Taylor [138], qui ont simulé différentes configurations de cuves en excitation à des fréquences proches de la résonance, en utilisant une méthode d'éléments finis (EF). La comparaison effectuée sur les différents cas a montré un très bon accord entre leurs simulations et les nôtres, avec toujours l'avantage d'une convergence très rapide pour la méthode spectrale. Là encore nos simulations ont disparu avec la station de travail, on emploie donc la même méthode de reproduction de la version papier. On a choisi de montrer de cet article d'abord deux cas de dynamique violente, bi-dimensionnels. La comparaison des résultats entre leur méthode EF et notre modèle MD est présentée sur les vues A.1, A.2 et A.3. Le premier de ces deux cas correspond à l'excitation d'une cuve de dimensions ( $L_x = 8$ ;  $h = 1$ ) à la fréquence  $\omega = 0,998\omega_0$  avec une amplitude  $a = 0,0372$  et où  $\omega_0$  correspond à la pulsation linéaire du premier mode propre naturel du bassin. Des effets d'eau peu profonde interviennent ici mais la solution est aussi fortement non-linéaire, et la concordance visuelle (entre les illustrations A.1 et A.2) des deux méthodes est très

satisfaisante, que ce soit sur l'élévation sur un bord, les pressions sur les bords, ou les profils dans le bassin.

Ensuite, on a simulé un cas en eau encore moins profonde ( $L_x = 25; h = 1$ ), et qui est de dynamique encore plus violente, conduisant au déferlement (vue A.3). Là des différences sont observables, d'une part parce que la méthode spectrale MD s'arrête avant, et d'autre part parce qu'elle prédit des déformations plus marquées avant de s'arrêter. De la surdétermination a été employée pour stabiliser le calcul réalisé avec 61 modes et 301 points. L'apparition d'un front très cambré y est notable. Dans la vignette en haut à droite de la figure correspondant au calcul spectral, on montre l'évolution des volumes au cours du temps ; on y voit une brusque variation vers  $t = 23$  qui correspond à l'instant où on a une forte élévation sur le mur droit de la cuve. Or on sait d'expérience qu'une telle variation dans le volume est synonyme de mauvaise qualité de la solution, le pic physique présent dans la déformée vers  $t = 23$  (vue du bas), correspondant au pic en volume, est donc probablement mal résolu. Désireux d'explorer plus avant ce problème, on a codé une version Lagrangienne de nos équations de surface libre, permettant de suivre nos nœuds de collocation dans leur mouvement. La déformée correspondante (vue du bas) dans la cuve à l'instant du pic ( $t = 23,7$ ) en volume correspond à un non respect local du caractère univoque de la surface libre qui n'est bien entendu pas toléré par la méthode. Peu auparavant ( $t = 22$ ), les simulations semi-Eulérienne et Lagrangienne étaient encore confondues. De ce fait, il est difficile de déterminer si ce sont les EF qui atténuent la solution, ou les techniques spectrales qui surestiment la dynamique dans le fluide. Toutefois, le fait que le volume pour la simulation Lagrangienne (deuxième courbe s'arrêtant à environ  $t = 24$ ) soit bien conservé jusqu'au brusque arrêt du calcul est un indicateur de confiance dans cette simulation.

Enfin, on présente de cet article le cas tri-dimensionnel le plus violent qu'on ait simulé. Cependant, les vues montrées dans l'article sont toutes concentrées à un temps légèrement

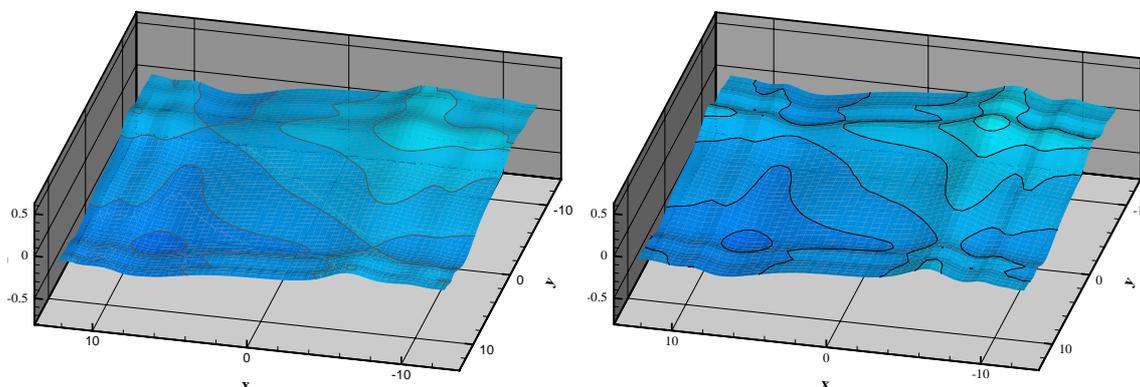


Figure II.2.8: Déformée de surface libre dans la cuve à  $t = 10$  ; calculs VOF à gauche et MD à droite.

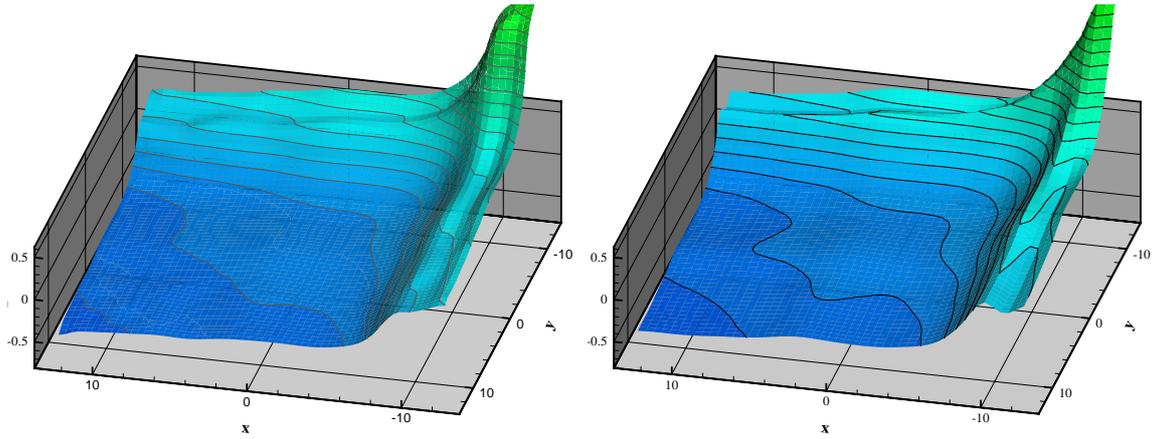


Figure II.2.9: Déformée de surface libre dans la cuve à  $t = 44, 1$ ; calculs VOF à gauche et MD à droite.

postérieur à l'apparition d'une violente déformée dans un coin du domaine ; instant qu'on ne peut dépasser qu'avec des lissages et un sur-dimensionnement tels qu'on perd confiance dans notre solution. On ne va donc pas sur ce cas comparer à ces auteurs eux-mêmes, mais à un code de technique Volume Of Fluid développé au laboratoire par Yann Andrillon [3], et qui traite ici les équations d'Euler, avec présence d'air au-dessus de la surface libre. Il s'agit d'un cas d'excitation diagonale d'une cuve tri-dimensionnelle en eau peu profonde ( $L_x = 25$ ;  $L_y = 25$ ;  $h = 1$ ) à une pulsation qui vaut 99,8% de la pulsation de résonance dans chaque direction, avec une amplitude de  $a = 1, 2$  dans les deux directions. Les figures II.2.8 et II.2.9 montrent la comparaison entre ces deux modèles à un instant au cours de la croissance des déformées dans le domaine, puis quand une déformation très cambrée apparaît dans un coin et que le calcul spectral s'arrête. Même si l'échelle verticale est dilatée, la hauteur de surface libre dans ce coin avoisine alors deux fois la profondeur. Néanmoins, que ce soit sur la première vue, et même sur la forme de cette crête violente quand elle apparaît, ces deux méthodes pourtant complètement différentes donnent des résultats tout à fait comparables. Les contours sur ces vues figurent des niveaux identiques dans les deux simulations. Pour une comparaison plus fine, on s'est intéressé à l'évolution des élévations dans les quatre coins de la cuve, montrées figure II.2.10. La première constatation qu'on peut faire est la bonne conservation de la symétrie diagonale dans chacun des modèles (élévations confondues sur la partie inférieure de la figure). D'autre part, les évolutions sont comparables entre le VOF et le spectral, mais une 'compression' du temps de l'ordre de 6% entre les deux méthodes crée un déphasage croissant. Cette différence est attribuée au fait que la simulation VOF n'est pas encore convergée dans ce calcul. On peut remarquer au passage que cette dernière continue bien au-delà, prenant notamment en compte des déferlements locaux intervenant ensuite. Ainsi qu'on l'a énoncé de prime abord, ce type d'applications n'est en effet pas ce à quoi sont utiles nos méthodes, même si elles peuvent fournir des solutions de référence jusqu'à des stades proches du déferlement, à coût restreint (40 minutes de simulation en HOS pour ce cas, contre plusieurs jours en VOF).

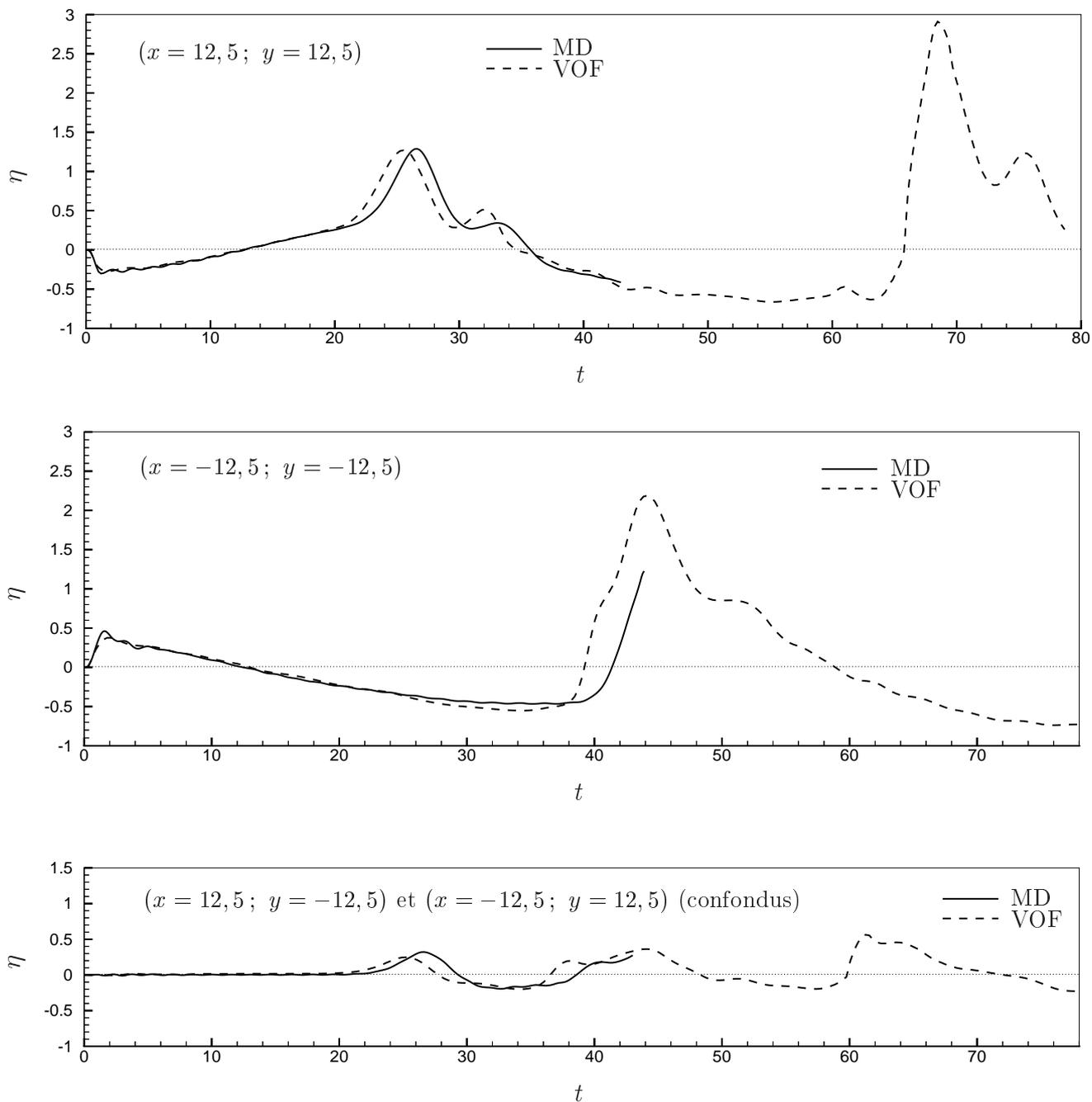


Figure II.2.10: Évolution temporelle des élévations de surface libre dans les quatre coins de la cuve.

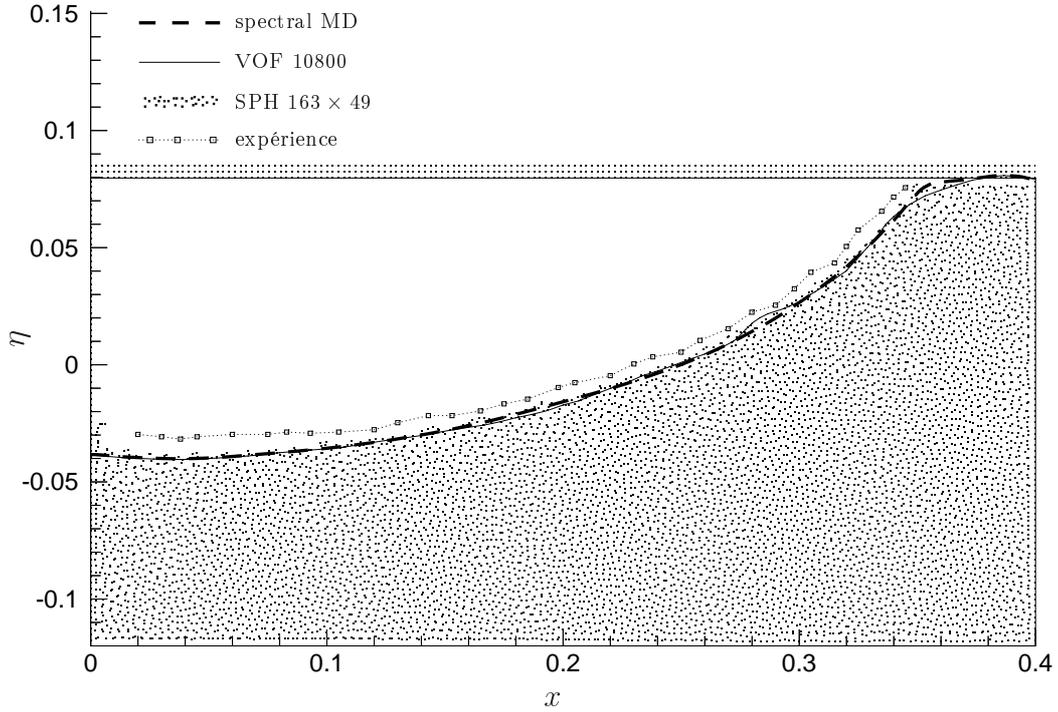


Figure II.2.11: Excitation horizontale d'une cuve fermée jusqu'à atteindre le plafond. Comparaison de calculs VOF, SPH et MD à un relevé expérimental, à l'instant du premier impact.

Pour finir, on présente un dernier cas qui est intéressant parce qu'on y fait non seulement la comparaison au modèle VOF précédent, mais aussi à un modèle SPH, et surtout à des expériences. Il s'agit de l'excitation d'une cuve bi-dimensionnelle fermée, conformément à l'expérience de Corrigan [31], où le mouvement alternatif horizontal conduit à toucher le plafond après plusieurs oscillations. L'illustration II.2.11 présente les déformées dans la cuve à cet instant, calculées par les méthodes MD (en tiret gras), VOF (en trait fin) et Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) (les points dans le volume) d'une part, et relevées expérimentalement (en petits carrés) d'autre part. La méthode SPH est celle développée par Mathieu Doring [41] au Laboratoire. Bien entendu, on n'a pas dans notre méthode spectrale la présence d'un plafond. On constate un très bon accord entre les trois méthodes numériques, et une bonne correspondance avec les expériences, même si le volume contenu dans la cuve semble y être différent de celui des simulations. Une comparaison un peu plus explicite est celle de l'élévation relevée sur un bord présentée figure II.2.12. Si l'on s'intéresse là encore plus spécifiquement à la comparaison du modèle spectral aux expériences, on voit qu'il en est très proche tout au long de la simulation avant que le plafond ne soit atteint.

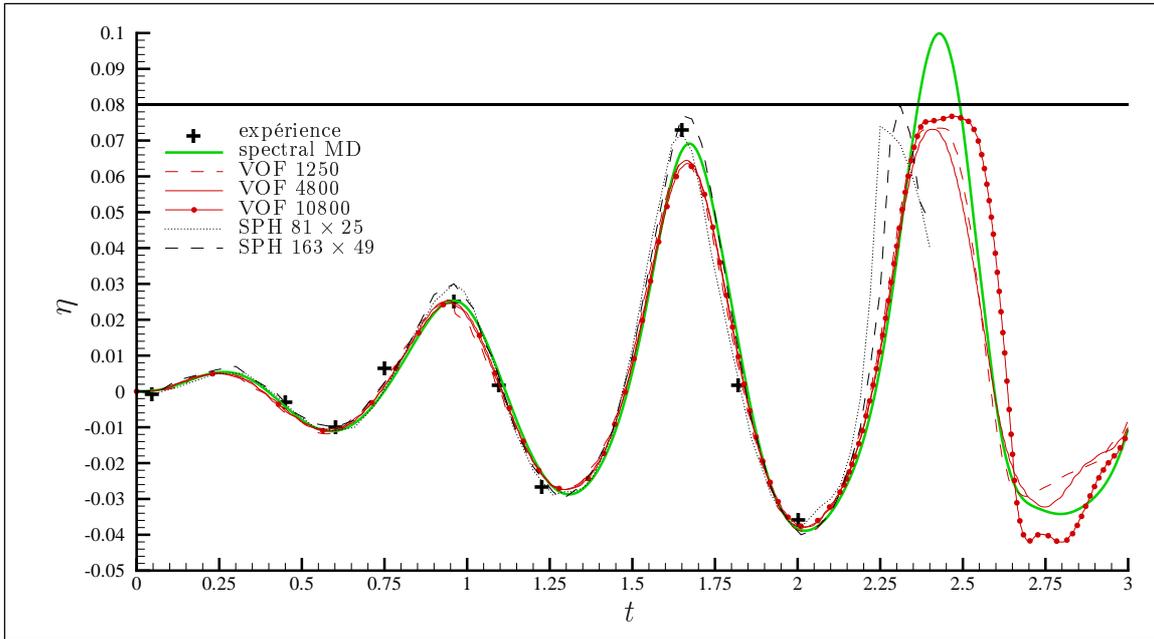


Figure II.2.12: Comparaison de calculs VOF, SPH et MD à des relevés expérimentaux. Évolution de la hauteur d'eau sur le mur gauche de la cuve.

En définitive, après avoir validé le noyau au second ordre de manière précise par rapport à une solution analytique, on a retrouvé les propriétés numériques attendues de notre modèle complètement non-linéaire et comparé ses résultats à diverses autres méthodes sur des cas d'oscillations libres et forcées en cuves. On a trouvé dans l'ensemble un très bon accord avec les méthodes variées de l'hydrodynamique auxquelles on a comparé, ainsi qu'avec des relevés expérimentaux. On a aussi pu vérifier que la MD était plus stable pour des cas tendant vers l'eau peu profonde (cf. section II.1.3.1.3), néanmoins elle permet tout de même d'utiliser un nombre raisonnable de modes pour des cas d'oscillations en cuve en eau plus profonde. Il faudra reprendre ces simulations dans l'avenir avec le modèle HOS, dont on vient juste de vérifier sur le cas tri-dimensionnel précédent qu'il présente un résultat similaire à celui de la MD.





Troisième partie

Extensions de la Méthode et  
Applications



# Notion de potentiel additionnel

Comme on l'a mentionné dans la seconde partie, la formulation du noyau de la méthode restreint intrinsèquement les applications à des calculs en bassins de géométries figées, ce qui présente un intérêt limité si on ajoute à cela l'hypothèse faite de non-déferlement de la surface libre. On a donc cherché à contourner cette limitation afin d'étendre les possibilités de la méthode à un champ d'applications plus large. La technique utilisée pour réaliser les différentes extensions a été toujours la même et repose sur la linéarité de l'équation de Laplace régissant l'écoulement dans le domaine fluide. En effet, si l'on considère le problème aux limites général sur un domaine fluide  $D$  quelconque :

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 && \text{dans } D \\ E_i(\phi, \eta) &= 0 && \text{sur } \partial_i D\end{aligned}$$

où les  $E_i$  représentent des équations aux dérivées partielles quelconques du temps et de l'espace, ce problème peut se séparer en la superposition de deux sous-problèmes (ou davantage). Chacun des deux 'sous-potentiels' solutions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  vérifie ainsi individuellement l'équation de Laplace dans le domaine, et la superposition est alors valable pour peu que les conditions  $E_i$  sur les frontières soient vérifiées *pour le potentiel complet*  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ .

Si l'on applique ce principe plus concrètement sur le cas de notre cuve parallélépipédique, en supposant qu'on ait remplacé dans les équations (II.1.10) du noyau une condition homogène sur un mur par une condition non-homogène, on a par exemple :

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 && \text{dans } D \\ E_i^{SL}(\phi, \eta) &= 0 && \text{sur la surface libre en } z = \eta(x, y, t) \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= g(y, z, t) && \text{sur la paroi en } x = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 && \text{sur les parois en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y\end{aligned}$$

où les  $E_i^{SL}$  ( $i=1,2$ ) représentent les deux conditions de surface libre, et  $g$  une fonction donnée sur la paroi. La solution de ce problème aux limites peut alors s'obtenir en résolvant d'abord

un sous-problème pour  $\phi_1$  tel que :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial n} &= g(y, z, t) && \text{en } x = 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y \end{aligned}$$

et aucune condition sur la surface libre. À noter que cette solution n'est pas nécessairement unique, mais cela est sans influence sur l'unicité de la solution totale  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ . Une fois ce premier sous-potentiel connu, on peut alors résoudre le sous-problème pour  $\phi_2$  tel que :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_2 &= 0 && \text{dans } D \\ E_i^{SL}(\phi_1 + \phi_2, \eta) &= 0 && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial n} &= g(y, z, t) - \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = 0 && \text{en } x = 0 \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial n} &= -\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = 0 && \text{en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y \end{aligned}$$

où les différentes conditions pour  $\phi_2$  sur les frontières sont bien déduites de leur expression pour le potentiel total  $\phi$ . Si l'on regarde plus avant ce deuxième sous-problème résolu, on peut vérifier aisément qu'on s'est en fait ramené à un problème aux limites du type exact de celui du noyau de la méthode, en s'affranchissant de la condition non-homogène sur la paroi en  $x = 0$ . En contrepartie, le sous-potentiel  $\phi_1$  apparaît en plus dans les conditions de surface libre sous la forme de simples termes de forçage connus. Cette technique peut être vue mathématiquement comme un simple changement de variable dans le deuxième sous-problème, auquel on adjoint un premier sous-problème nécessaire au calcul de la 'différence connue' du changement de variable (*i.e.* le terme différence permettant de définir la nouvelle inconnue à partir de l'ancienne).

C'est cette technique de décomposition du potentiel qui a permis d'étendre le noyau de la méthode à d'autres applications plus générales. Néanmoins, le premier sous-potentiel n'est pas nécessairement dédié à la prise en compte d'une condition aux limites non-homogène, il pourra aussi bien s'agir, par exemple, de l'influence d'une singularité placée dans le domaine fluide. Quoi qu'il en soit, dans tous les cas on résout d'abord un premier sous-problème aux limites pour obtenir le premier sous-potentiel qu'on appellera *potentiel additionnel*, noté  $\phi_{add}$ . Ensuite, on résout le sous-problème aux limites correspondant au noyau de notre méthode pour obtenir l'autre partie du potentiel total, ce deuxième sous-potentiel sera dénommé *potentiel spectral* dans la suite, noté  $\phi_{spec}$ . L'idée de ce recours à un potentiel additionnel pré-calculé est venue d'un court article de 1999 d'Agnon & Bingham [3], qui ont proposé le principe de cette décomposition alliée à une méthode HOS, mais en supposant le potentiel additionnel connu analytiquement. On sait que de telles solutions analytiques ne peuvent être trouvées que sur des cas très simples (une condition de flux sur

un bord, périodique et en deux dimensions dans leur cas), c'est pourquoi il est ici proposé de le calculer numériquement ce qui ouvre un horizon d'extensions nettement plus large.

Il faut cependant tempérer la portée de telles stratégies de potentiel additionnel : si ce contournement attractif lève effectivement certaines contraintes de la méthode, ce n'est pas le cas de toutes. En effet, dans l'exemple mentionné ci-dessus, on s'est bien affranchi d'une condition non-homogène, mais en conservant une position fixe de la paroi sur laquelle est affichée cette condition. De fait, même avec une telle technique, la prise en compte non-linéaire d'une paroi rigide en mouvement (ou même déformable) n'est *a priori* pas possible. Ainsi, dans leur recherche d'un potentiel additionnel analytique, Agnon & Bingham ont par exemple dû imposer une condition de flux sur la frontière  $x = 0$  pour approcher le mouvement d'un batteur piston, cela ne constitue cependant pas une condition non-linéaire exacte sur ce batteur. On discutera néanmoins un peu plus en détails au chapitre III.4 la possibilité de passer outre cette contrainte également, en vue de simuler à terme un bassin de houle en non-linéaire complet.



# Chapitre III.1

## Bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre

---

Ce chapitre a pour objet de présenter l'extension du noyau de notre méthode au développement d'un bassin de houle numérique formulé au second ordre en série de perturbations de Stokes. Cette formulation sera tout d'abord rappelée, avant d'évoquer la recherche d'un 'potentiel additionnel' apte à prendre en compte le caractère non-homogène de la condition sur le batteur. Une fois ce potentiel additionnel explicité, des aspects de mise en œuvre numérique du modèle seront abordés, et on étudiera ses propriétés de convergence, de précision et de rapidité de calcul. On listera aussi à cette occasion les différentes caractéristiques introduites dans le code pour représenter au mieux un bassin de houle physique.

Dans un deuxième temps, on se consacrera à la validation de ce modèle, notamment par comparaison à la solution analytique en régime établi de Félicien Bonnefoy [VII]. Des cas illustratifs de génération de houles droites et obliques seront discutés, et les extensions en cours mentionnées. On s'intéressera aussi à l'évolution des zones utiles aux premier et second ordres en fonction de différents mouvements d'un batteur de type serpent. Le problème des ondes libres et de leur suppression sera abordé. A titre d'exemple, on montrera enfin la comparaison des résultats du modèle à des signaux expérimentaux relevés dans le bassin de houle de l'École Centrale de Nantes.

---



*Nota* : C'est principalement sur les réalisations dont il est traité dans cette partie que ce travail a été réalisé conjointement avec Félicien Bonnefoy, comme évoqué en fin d'introduction. Il a ici été pris comme règle de signaler les éléments qui procèdent de ce travail d'équipe, et de ne pas décrire du tout la mise en oeuvre de ceux qui sont le seul fait de Félicien. Le plus simple est peut-être de replacer cette collaboration dans les grandes lignes du développement de notre bassin de houle au second ordre (code de calcul SWEET) :

- j'ai commencé à travailler sur ce thème à la fin de ma première année de thèse vers juin 2001 ; les étapes de la recherche d'un potentiel additionnel ont suivi, ainsi que la validation de ces différents potentiels sur le noyau second ordre d'abord, puis sur des cas simples de houle régulière bi-dimensionnelle, pour déboucher en janvier 2002 sur un modèle dont la structure se montrait alors pertinente mais encore imparfaite ;
- à compter de cette date, Félicien m'a rejoint et nous avons continué à développer le code de calcul en équipe, ce qui inclut : la mise en oeuvre de plusieurs formes de batteurs, un passage à trois dimensions, une amélioration de la rapidité de calcul, une qualification des propriétés de convergence, la mise en place d'une rampe en temps, d'une plage d'absorption numérique, le calcul des volumes et énergies, etc. ; le code a alors été baptisé de son acronyme 'SWEET' pour Spectral Wave Evolution in the ECN Tank ;
- la mise en oeuvre de mouvements du batteur plus complexes pour optimiser la houle produite quant à elle, ainsi que celle d'un mouvement batteur du second ordre pour éliminer les ondes libres sont le seul fait de Félicien ;
- en outre, à l'automne 2002, pour rendre plus pratique et étendre son utilisation, nous avons repensé et re-programmé intégralement le code ;
- enfin, au printemps de cette année 2003, après que nous avons envisagé ensemble la possibilité d'améliorer encore grandement la vitesse de calcul, j'ai opéré une nouvelle refonte du code ;
- de surcroît, dans ce qui est évoqué dans cette partie, les méthodes analytiques développées, les expériences menées ainsi que leur analyse sont à mettre au seul crédit de Félicien Bonnefoy (noté 'Fé.Bo.' par la suite).

## III.1.1 Formulation du problème

### III.1.1.1 Formulation générale

La figure III.1.1 illustre la géométrie du bassin qu'on cherche ici à modéliser, le type de batteur présenté ne constituant qu'un exemple. Les lettres 'SL' y dénotent la surface libre. La figure III.1.2, quant à elle, illustre la définition de la fonction de position  $X(y, z, t)$  du batteur dans une tranche verticale à  $y$  constant, sur ce même exemple de batteur serpent.

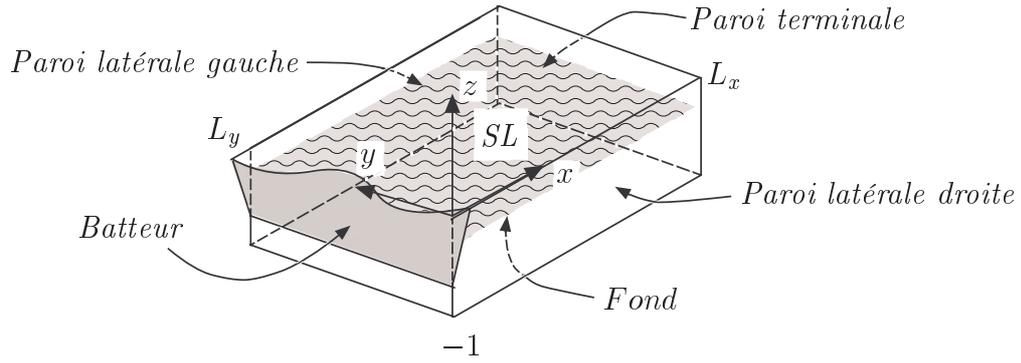


Figure III.1.1: Géométrie du bassin de houle.

Par rapport à la formulation de la Partie II pour une cuve fixe (équations (II.1.10)), la condition de glissement sur le mur en  $x = 0$  est remplacée, pour le bassin à houle, par une condition de glissement sur la position instantanée du batteur  $x = X(y, z, t)$ , soit :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n} \quad \text{en } x = X(y, z, t) \quad (\text{III.1.1})$$

On retrouve là le même type de condition que celle exprimée sur la surface libre (II.1.6) au chapitre II.1, mais dans laquelle  $\vec{U}$  et  $\vec{n}$  représentent cette fois respectivement la vitesse en un point  $M(X(y, z, t), y, z)$  de la paroi du batteur et la normale au batteur en ce point, et  $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$  la vitesse du fluide en ce même point. Un tel vecteur normal a alors pour composantes :

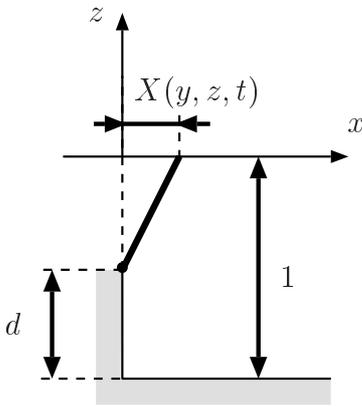


Figure III.1.2: Définition de la fonction de position du batteur.

$$\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{\partial X}{\partial y} \\ -\frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (\text{III.1.2})$$

L'équation instantanée décrivant le mouvement du batteur s'exprime comme :

$$G(x, y, z, t) = x - X(y, z, t) = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

Le flux à travers cette paroi déformable étant nul, on a pour tout point  $M(X(y, z, t), y, z, t)$  de vitesse  $\vec{U}$  de cette paroi :

$$\frac{DG}{Dt}(M) = \frac{\partial G}{\partial t}(M) + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} G(M) = 0 \quad (\text{III.1.4})$$

Si l'on remarque de plus que  $\vec{\nabla} G = \vec{n}$ , cette condition s'écrit aussi, en utilisant (III.1.1) :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} G = 0 \quad \text{en } x = X(y, z, t) \quad (\text{III.1.5})$$

ou encore, en utilisant les expressions développées de  $\vec{V}$  et de G :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{en } x = X(y, z, t) \quad (\text{III.1.6})$$

L'ensemble des équations vérifiées par le potentiel des vitesses et l'élévation de surface libre se résume donc à :

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} && \text{en } z = \eta(x, y, t) \\ \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} && \text{en } x = X(y, z, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y \end{aligned} \quad (\text{III.1.7})$$

On pourrait étendre sans difficulté cette formulation à la présence de batteurs sur plusieurs murs, mais on se contentera ici d'un batteur unique.

### III.1.1.2 Expressions au second ordre

Pour formuler le problème non-linéaire précédent jusqu'au second ordre en série de perturbations, on reprend la démarche employée au II.1.2, à cela près qu'on y adjoint désormais la présence du batteur. Par besoin de cohérence il faut aussi décomposer le mouvement de ce batteur en série de perturbations. L'affichage de la condition batteur aux différents ordres se fera alors naturellement autour de la position moyenne définie par un mur vertical en  $x = 0$ , avec cette fois le débattement du batteur comme petite quantité devant la longueur du bassin ( $\overline{\Delta X} = X_{max}/L_x$ ). Le mouvement qu'on impose au batteur sera quant à lui considéré comme au seul premier ordre en général, même si l'on peut *a priori* imposer un mouvement quelconque à chaque ordre, pourvu que les ordres de grandeur des amplitudes respectives de ces mouvements soient cohérentes avec la décomposition. On emploiera par exemple un tel mouvement correcteur à un ordre plus faible pour venir réaliser la suppression des ondes libres au second ordre (cf. III.1.5.4).

Malgré une légère complication de la formulation qui va se décliner en deux problèmes au lieu d'un, ce développement en série de perturbations permet en contrepartie d'exprimer les différentes conditions sur des surfaces fixes. Cela se traduit pour la surface libre par un gain considérable en temps de calcul, comme on le verra plus loin; et pour le batteur à la fois par un gain comparable en temps de calcul, et plus encore (cf. III.1.2) par la relaxation pure et simple de l'impossibilité (*a priori* : cf. III.4) d'utiliser des méthodes spectrales pour résoudre ce problème. Un tel développement présente aussi l'intérêt de pouvoir se

limiter à un ordre d'approximation de la solution donnée, et d'interpréter plus aisément les phénomènes intervenant à chaque ordre par rapport à un traitement complètement non-linéaire des équations.

À la suite de II.1.2, on peut expliciter la formulation de notre problème qu'on limitera au second ordre de perturbation. Les non plus deux mais cette fois trois quantités du problème sont donc développées suivant les petits paramètres choisis comme dans (II.1.14), soit pour le batteur :

$$X = \overline{\Delta X} X^{(1)} + \overline{\Delta X}^2 X^{(2)} + O(\overline{\Delta X}^3) \quad (\text{III.1.8})$$

On réalise ensuite en parallèle un développement en série de Taylor de chacune des conditions de surface libre (II.1.15) et de la condition sur le batteur *complètes*. Pour cette dernière condition notée  $E^B$ , ce développement prend la forme générale :

$$E^B(x = X) = E^B(x = 0) + X \frac{\partial E^B}{\partial x}(x = 0) + X^2 \frac{\partial^2 E^B}{\partial x^2}(x = 0) + O(X^3) \quad (\text{III.1.9})$$

Si l'on introduit maintenant la décomposition en ordres précédente (II.1.14)&(III.1.8) dans ces différentes conditions développées (II.1.15)&(III.1.9), et qu'on rassemble comme au chapitre II.1.2 les expressions en fonction des puissances de  $\varepsilon$  (petit paramètre générique pour la surface libre et le batteur), on obtient comme problème à résoudre au premier ordre :

$$\begin{aligned} \Delta \phi^{(1)} &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} &= -\eta^{(1)} && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial X^{(1)}}{\partial t} && \text{en } x = 0 \\ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y \end{aligned} \quad (\text{III.1.10})$$

et au second ordre :

$$\begin{aligned} \Delta \phi^{(2)} &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} &= -\eta^{(2)} - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi^{(1)} \right|^2 - \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} \\ &\quad - \eta^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y^2} \right) && \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} &= \frac{\partial X^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial X^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial X^{(1)}}{\partial z} \\
 &\quad - X^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} \qquad \text{en } x = 0 \\
 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} &= 0 \qquad \text{en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y
 \end{aligned}
 \tag{III.1.11}$$

### III.1.2 Recherche d'un potentiel additionnel

Tout l'intérêt d'avoir effectué la décomposition en série de perturbations qui précède réside dans le fait qu'elle a implicitement transformé notre domaine de calcul d'une géométrie variable à une géométrie figée. Notamment, la condition batteur n'est plus affichée sur sa position réelle mais sur la position fixe  $x = 0$  correspondant au mur de la cuve définie à la Partie II. En effet, la nature de notre résolution spectrale repose sur l'utilisation des modes naturels du bassin, dont l'obtention analytique évoquée au II.1.3.1.1 est directement liée au caractère parallélépipédique et figé de notre bassin. Néanmoins, le potentiel spectral obtenu reste limité non seulement à une telle géométrie fixe, mais aussi à des conditions de flux nulles sur toutes ses frontières ; on ne peut donc prendre en compte directement la condition non-homogène sur le batteur de (III.1.10) et (III.1.11).

On va donc employer une stratégie de potentiel additionnel dont le principe a été explicité au début de cette partie. Plus précisément, on se trouve ici exactement dans le cas pris pour exemple lors de cette explication. On va ainsi rechercher un potentiel additionnel qui sera tel qu'il vérifie l'équation de Laplace dans le fluide, la condition non-homogène sur le batteur, des conditions de flux nulles sur les autres parois, et *aucune condition spécifique sur la surface libre*. A chaque sous-pas de temps du calcul, on calculera alors successivement :

- le potentiel additionnel  $\phi_{add}^{(1)}$  satisfaisant à toutes les équations de (III.1.10) excepté les conditions de surface libre ;
- le potentiel spectral  $\phi_{spec}^{(1)}$  à partir du problème (III.1.10) complet exprimé pour  $\phi^{(1)} = \phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)}$ , et où tous les termes en  $\phi_{add}^{(1)}$  agiront comme simples termes de forçage connus, rendant notamment la condition batteur homogène pour  $\phi_{spec}^{(1)}$  ;
- puis de la même manière le potentiel additionnel  $\phi_{add}^{(2)}$  à partir du problème (III.1.11) sans conditions de surface libre, les termes du premier ordre étant pour le potentiel  $\phi^{(1)}$  complet ;
- enfin, on obtiendra  $\phi_{spec}^{(2)}$  comme  $\phi_{spec}^{(1)}$ , *i.e.* solution du système suivant (où tous les termes portés au second membre sont connus) :

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi_{spec}^{(2)} &= 0 && \text{dans } D \\
 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \phi_{spec}^{(2)}}{\partial z} &= -\frac{\partial(\phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)})}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial(\phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)})}{\partial y} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} \\
 &\quad - \eta^{(1)} \left( \frac{\partial^2(\phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)})}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \phi_{add}^{(2)}}{\partial z} && \text{en } z = 0 \\
 \frac{\partial \phi_{spec}^{(2)}}{\partial t} + \eta^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left| \vec{\nabla}(\phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)}) \right|^2 - \eta^{(1)} \frac{\partial^2(\phi_{spec}^{(1)} + \phi_{add}^{(1)})}{\partial z \partial t} - \frac{\partial \phi_{add}^{(2)}}{\partial t} && \text{en } z = 0 \\
 \frac{\partial \phi_{spec}^{(2)}}{\partial n} &= 0 && \text{en } \mathbf{x} = \mathbf{0}; z = -1; x = L_x; y = 0, L_y
 \end{aligned} \tag{III.1.12}$$

L'ensemble des termes additionnels qu'il faudra calculer pour résoudre les deux ordres se résume donc, sur la surface libre (en  $z = 0$ ), à :

$$\frac{\partial \phi_{add}^{(1)}}{\partial z}, \frac{\partial \phi_{add}^{(1)}}{\partial t}, \frac{\partial \phi_{add}^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{add}^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \phi_{add}^{(1)}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi_{add}^{(1)}}{\partial y^2}, \frac{\partial \phi_{add}^{(2)}}{\partial z}, \frac{\partial \phi_{add}^{(2)}}{\partial t} \tag{III.1.13}$$

et sur le batteur (en  $x = 0$ ), à :

$$\frac{\partial \phi_{add}^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial \phi_{add}^{(1)}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \phi_{add}^{(1)}}{\partial x^2}, \tag{III.1.14}$$

Ces derniers termes sur le batteur sont en effet contenus dans les termes en  $\phi^{(1)}$  complet nécessaires à l'expression de la condition batteur second ordre de (III.1.11). La forme du second membre de cette condition laisse d'ailleurs présager qu'une résolution analytique du sous-problème additionnel ne sera pas aisée, même pour des formes de batteur simples. De plus, comme on a pour but de conserver un modèle le plus largement applicable possible, on ne souhaite pas se donner de contraintes spéciales sur la fonction  $X$  de position du batteur. On se doute alors que l'obtention des potentiels additionnels ne sera pas aussi immédiate qu'on aurait pu le penser de prime abord, cela a en tout cas été le cas des différentes solutions qu'on a trouvées.

Toutefois, une solution simple *sans potentiel additionnel* nous était venue, chronologiquement entre les deux solutions proposées ci-après, mais n'a pas donné de résultats. Il s'agissait, plutôt que de séparer le potentiel en deux composantes, de transformer le domaine de calcul de manière à pouvoir ajouter des contraintes au potentiel spectral pour qu'il satisfasse *seul* à chacun des problèmes (III.1.10) et (III.1.11), conditions batteurs incluses. Cependant, comme énoncé précédemment, ces contraintes ne peuvent être affichées sur le mur où est situé le batteur. L'idée était donc de prolonger le domaine fluide de l'autre côté du batteur pour pouvoir inclure complètement le batteur dans ce domaine, comme l'illustre la figure III.1.3, permettant alors d'y prendre en compte une condition non-homogène. On a donc ajouté des points de collocation sur la surface  $x = 0$  pour y afficher la condition

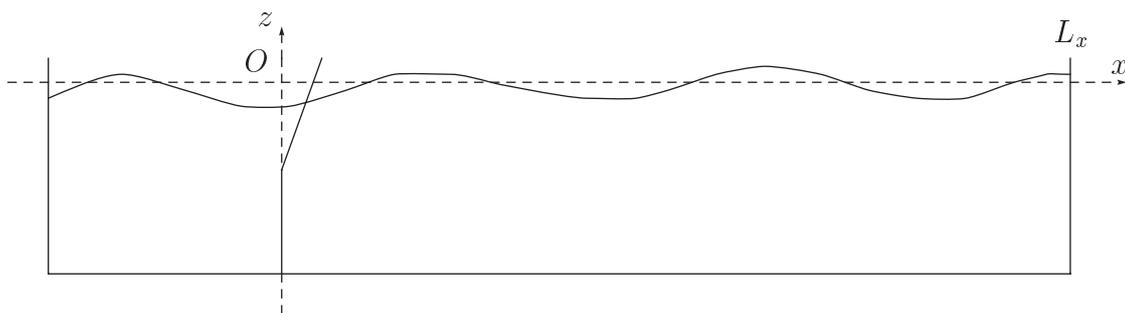


Figure III.1.3: Géométrie d'un bassin incluant le batteur dans le domaine fluide.

batteur, en plus de ceux déjà disposés sur la surface libre. Malheureusement, cette tentative s'est avérée infructueuse, la méthode ne convergeant pas même pour des très petits mouvements du batteur dans un bassin bi-dimensionnel, en partant du repos. Outre la discontinuité de la dérivée verticale du potentiel au niveau du batteur qu'implique cette solution, on peut probablement attribuer la divergence de la résolution à une inconsistance liée à la nature même de la décomposition spectrale (ici en deux dimensions, et présentée après dérivation pour aider à l'explication qui suit) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n n_x \sin(n_x x) \frac{\cosh[n_x(z+1)]}{\cosh n_x}$$

exprimée sur le bassin rallongé. En effet, si elle existe, cette décomposition doit satisfaire avec les mêmes modes aux conditions sur les deux surfaces (libre et du batteur) à la fois. En particulier, elle devrait pouvoir satisfaire à la condition sur le batteur, seule. Or cette surface sur laquelle on impose les conditions supplémentaires est verticale ; la position horizontale  $x$  y étant donc fixe cela se traduit dans l'expression précédente par une disparition des termes en *sinus* qui se résument à de simples constantes liées à chaque mode, indépendantes de la localisation sur la surface. Quand on résout la condition batteur du type  $\partial \phi / \partial x = f(z, t)$ , cela revient donc à décomposer la fonction  $f$  sur une série du type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \cosh[n_x(z+1)]$$

or ces fonctions hyperboliques *ne forment pas une base*.

### III.1.2.1 Couplage à un noyau de méthode d'éléments aux frontières

La première véritable idée de résolution qui est venue a été de coupler le modèle spectral au noyau d'une méthode d'éléments aux frontières (BEM) (issue du modèle *XWAVE* développé par Pierre Ferrant et dont il est question un peu plus en détails au chapitre III.3.3). La raison sous-jacente à cette idée est qu'un tel noyau permet d'obtenir, à partir de conditions sur la dérivée normale du potentiel sur des frontières, le potentiel sur les

autres frontières, et vice-versa. En particulier, on peut ainsi calculer le potentiel additionnel sur la surface libre à partir de la condition normale sur le batteur.

Toutefois, la configuration de notre sous-problème additionnel est différente de celle d'une résolution BEM classique, en ce sens que la seule donnée qu'on ait porte sur la dérivée du potentiel sur le batteur. On n'a de fait aucune condition sur la surface libre, ce qui nous laisse une latitude assez grande. En revanche, comme cela a été décrit au début de cette section, on a aussi beaucoup plus de termes à calculer que pour une résolution BEM classique ; il a donc fallu imposer un choix de potentiel sur la surface libre tel que ces termes puissent tous en découler de manière consistante. Le seul choix qui paraissait possible est le plus simple qui soit, *i.e.* considérer  $\phi_{add}$  nul sur cette surface  $z = 0$  à tout instant. Par voie de conséquence, ses dérivées temporelle et spatiales par rapport à  $x$  et  $y$  y sont elles aussi nulles à tout instant. Des huit termes additionnels sur la surface libre listés précédemment (III.1.13) ne subsistent donc que les dérivées verticales de  $\phi_{add}$  à chacun des deux ordres. Pour ce qui est des trois termes à calculer sur le batteur (III.1.14), les quantités surfaciques (dérivées par rapport à  $y$  et  $z$ ) peuvent être obtenues par différences finies à partir de la donnée du potentiel sur le batteur. Restent donc à calculer sur cette surface le potentiel

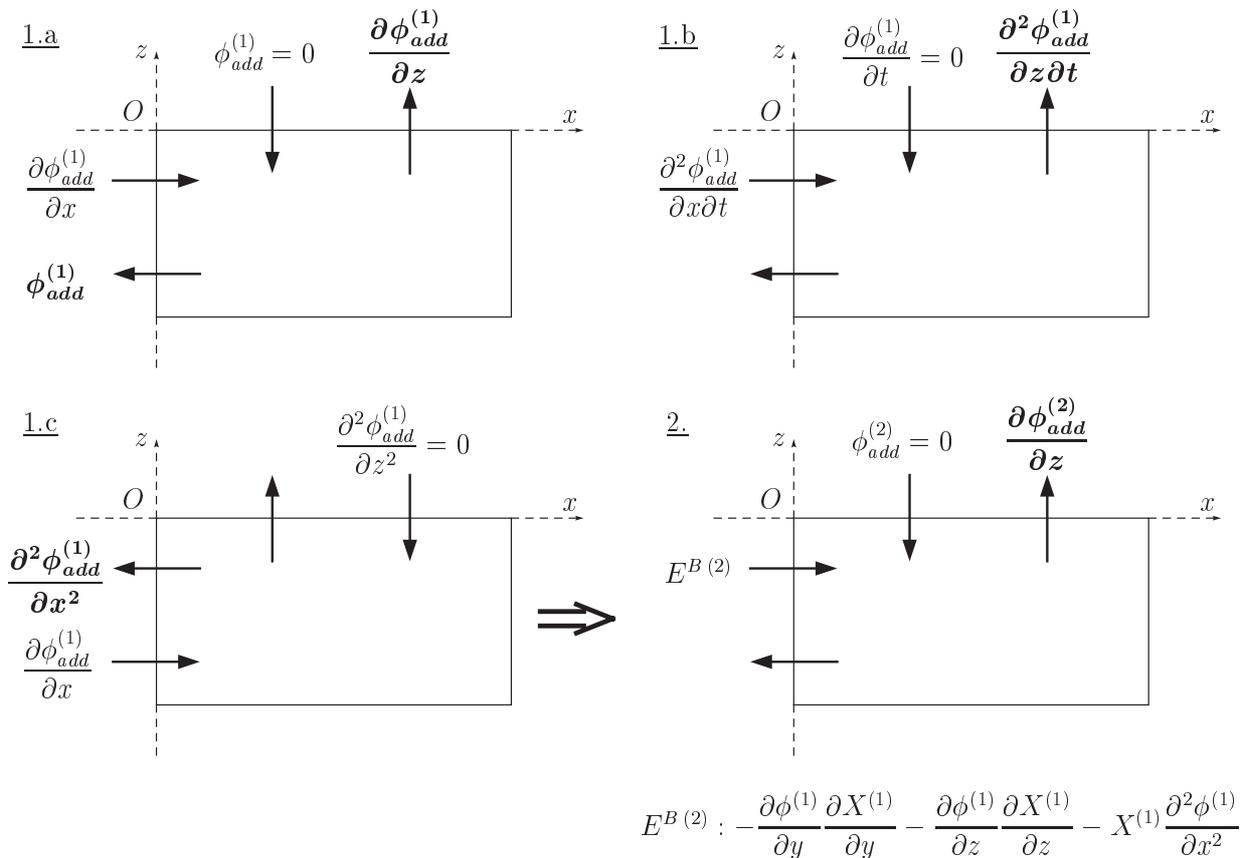


Figure III.1.4: Entrées et sorties sur les frontières du bassin (coupe à  $y$  constant) des résolutions successives des termes additionnels, au moyen du noyau d'une méthode type BEM.

additionnel au premier ordre, et sa dérivée seconde par rapport à  $x$ . La figure III.1.4 décrit les entrées et les sorties correspondantes du noyau de la méthode d'éléments aux frontières qui ont été utilisées. Y sont notées 1.a à 1.c les trois étapes fournissant toutes les quantités additionnelles du premier ordre, et 2. celle donnant la quantité additionnelle du second ordre ; la résolution du problème complet au premier ordre (III.1.10) pour obtenir  $\phi_{spec}^{(1)}$  s'insérant entre les deux (ce qui est matérialisé par le symbole ' $=>$ '). Sur ce schéma : les termes recherchés sont représentés en gras ; les flèches entrantes sont affectées aux données connues, et les sortantes aux inconnues ; les conditions en dérivée normale sont figurées à droite sur les surfaces libres, et en haut sur les batteurs, les autres respectivement à gauche et en bas ; les sorties inutilisées dans la méthode ne sont pas mentionnées. On peut remarquer que le terme  $\partial^2 \phi_{add}^{(1)} / \partial z^2$  constitue l'une des entrées de la résolution, il est nul d'après l'application du Laplacien et notre choix de potentiel sur la surface libre.

Ainsi, à l'aide de ces quatre résolutions par noyau BEM et grâce au choix réalisé sur la surface libre, on avait accès à toutes les quantités additionnelles (III.1.13)&(III.1.14) nécessaires à la résolution complète du problème telle qu'explicitée en début de section. Malheureusement cette méthode n'a pas fourni les résultats escomptés, s'avérant peu stable et peu précise, surtout au second ordre. Pourtant, on a d'abord comparé le résultat fourni par ce modèle à une théorie linéaire semi-analytique de génération de houle en bassin bi-dimensionnel (Dommermuth *et al* [40], version pour bassin fini de la théorie de Kennard [77] pour bassin semi-infini) ; et la comparaison se montrait probante, même si le nombre de points nécessaires était nettement plus élevé que pour la solution finalement retenue (cf. III.1.2.2).

En creusant plus avant pour tenter de mettre en lumière les raisons de la mauvaise qualité du modèle au second ordre, il est apparu que la résolution du noyau BEM s'avérait insuffisamment précise, notamment au raccord des deux surfaces (libre et batteur), ce qui avait pour conséquence de dégrader rapidement la solution, surtout au second ordre, logiquement. On était là confronté au problème bien connu de la présence d'une singularité à l'intersection du batteur et de la surface libre (cf. par exemple la revue par Grilli & Svendsen [62]). De plus, notre choix arbitraire de potentiel effectué sur la surface libre contribuait probablement aussi à la pauvreté de résolution ; peut-être même y a-t-il une inconsistance pure et simple sous-jacente à ce choix, mais un choix plus élaboré rendrait probablement inapplicable la succession des quatre résolutions précédentes. Quoi qu'il en soit, même si on avait réussi à réaliser un modèle robuste par ce biais de l'utilisation d'un noyau type BEM classique, il n'en reste pas moins qu'une telle résolution engendre un coup de calcul  $O(N^3)$  au départ puis  $O(N^2)$  à chaque sous-pas de temps. L'utilisation de nouvelles techniques de résolution BEM plus évoluées, telles les 'Fast Multipole' (cf. Fochesato, Dias & Grilli [51]), pourrait toutefois améliorer la rapidité de ce type de résolution ; néanmoins l'ordre de convergence de la solution resterait inférieur à celui des techniques spectrales. L'intérêt pratique d'utiliser des méthodes spectrales dans un tel modèle serait donc finalement demeuré relativement faible comparé à une résolution BEM pure ; il aurait au moins fallu dissocier le nombre de points d'appuis de la résolution additionnelle de ceux

de la résolution spectrale, en comptant sur le fait que la régularité des conditions batteurs suffise à ce que le noyau BEM puisse converger avec relativement peu de points.

### III.1.2.2 Potentiel additionnel spectral

L'abandon du modèle précédent n'a pas pour autant sonné le glas des tentatives sur ce thème, et c'est finalement une idée improbable qui s'est révélée être la bonne. Par souci de cohérence de la méthode, et toujours dans le but de créer un modèle rapide, l'orientation a été prise de chercher une solution au sous-problème additionnel qui soit elle aussi formulée de manière spectrale. La similitude entre le sous-problème additionnel et celui correspondant à notre noyau résident dans ce qu'ils présentent tous deux :

- des conditions homogènes sur toutes les surfaces sauf une,
- et une condition non-linéaire non-homogène sur une surface mobile ramenée à une position fixe.

La différence entre les deux est que, pour le noyau le problème est clos par l'ensemble de ces surfaces, alors que pour le sous-problème additionnel, rien n'est imposé sur la surface libre. L'autre différence se trouve dans le fait que la surface où s'applique la condition non-homogène est horizontale pour le noyau, et verticale pour le sous-problème additionnel. Pour que ces deux problèmes soient mathématiquement identiques à une rotation à  $90^\circ$  près, il faut donc rajouter au second une condition homogène sur une surface de fermeture à  $z$  constant. Or cela ne peut se faire sur la surface libre puisqu'on ne doit rien y imposer; l'idée est alors venue de positionner cette surface *au-dessus* de la surface libre. On se retrouve ainsi avec un 'bassin renversé' qui a une géométrie du même type que le bassin réel, à une rotation à  $90^\circ$  près. Ne reste plus à imposer que la géométrie sur la surface du batteur au-dessus de  $x = 0$ . La figure III.1.5 présente la géométrie du domaine finalement utilisé pour la résolution additionnelle. Afin d'assurer la conservation du volume dans ce

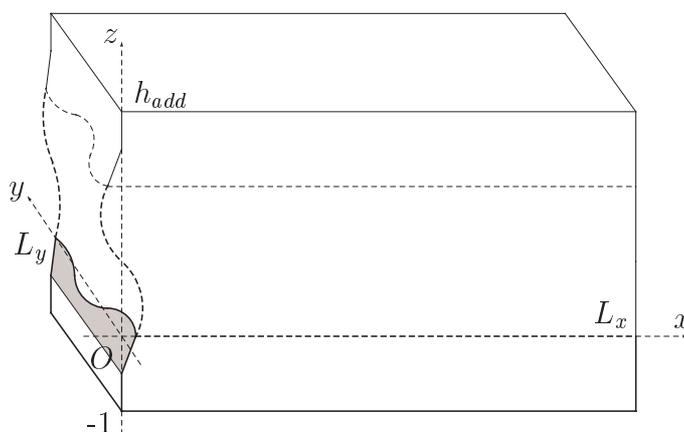


Figure III.1.5: Configuration du domaine de la résolution du sous-problème additionnel dans le code de calcul *SWEET*.

domaine, on utilise au-dessus du batteur un batteur symétrique issu d'une rotation à  $180^\circ$  autour de l'axe  $y$ . Néanmoins, si on se contentait d'apposer le bassin symétrique ainsi créé sur le bassin réel (entre  $z = 0$  et  $z = 1$  donc), on se retrouverait avec une discontinuité du batteur en  $z = 0$ . Pour éviter cela, on laisse un écart entre les deux, ce qui permet de relier les deux surfaces des batteurs (réel et symétrique) par une surface de raccord rendant régulier le 'batteur unifié' (batteur + symétrique + surface de raccord). De plus amples détails sur la façon dont est choisie cette surface sont fournis dans la section suivante traitant de la mise en œuvre numérique.

Maintenant que le domaine de la résolution additionnelle est défini, on peut expliciter le calcul du potentiel additionnel lui-même. De fait, on conçoit désormais aisément en considérant la rotation reliant les deux domaines (du noyau principal, et additionnel), que le potentiel additionnel peut être choisi du même type que celui du noyau : également exprimé en termes de modes de déformation, mais cette fois du batteur et non de la surface libre. Cependant, ces modes du batteur ne sont pas ceux du batteur physique seul, mais bien ceux du batteur unifié qu'on vient de décrire. Par ailleurs, même si on a présenté ce batteur unifié comme une surface géométrique pour bien laisser entrevoir sa construction, cette surface ne correspond pas, dans la résolution additionnelle, à la représentation du déplacement physique du batteur lui-même, mais bien à celle des *conditions batteur* des premier et second ordres. Le potentiel additionnel  $\phi_{add}$  satisfait donc, dans ce domaine additionnel complet, à l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{add}^i &= 0 && \text{dans } D_{add} \\ \frac{\partial \phi_{add}^i}{\partial n} &= E^{B(i)}(y, z, t) && \text{en } x = 0 \text{ (} z \in [-1; h_{add}]) \\ \frac{\partial \phi_{add}^i}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = L_x; y = 0, L_y \end{aligned} \quad (\text{III.1.15})$$

où  $h_{add}$  représente le niveau vertical adimensionnel du haut du domaine  $D_{add}$ ,  $i = 1, 2$  dénote l'ordre considéré du problème, et  $E^{B(i)}$  la condition correspondante sur le batteur décrite en (III.1.10) et (III.1.11) respectivement. De même que pour le potentiel spectral du noyau, on définit alors un potentiel spectral additionnel tel que :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \sum_{n_z=0}^{N_z} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_z n_y}^{add}(t) \psi_{add}(x, y, z) && \text{dans } D_{add} \\ \text{où } \psi_{add}(x, y, z) &= \cos\left(\overrightarrow{k_{n_z n_y}^{add}} \cdot \vec{e}_z (z + 1)\right) \cos\left(\overrightarrow{k_{n_z n_y}^{add}} \cdot \vec{e}_y y\right) \frac{\cosh\left(k_{n_z n_y}^{add} (-x + L_x)\right)}{\cosh\left(k_{n_z n_y}^{add} L_x\right)} \end{aligned} \quad (\text{III.1.16})$$

$$\text{avec } \overrightarrow{k_{n_z n_y}^{add}} = \left(0, \frac{n_y \pi}{L_y}, \frac{n_z \pi}{h_{add} + 1}\right) \quad \text{et } k_{n_z n_y}^{add} = \left| \overrightarrow{k_{n_z n_y}^{add}} \right|$$

où  $N_z$  est, de manière similaire, le nombre de nœuds de collocation sur le batteur. À chaque ordre, une fois résolu ce problème additionnel (III.1.15), le potentiel spectral principal  $\phi_{spec}$

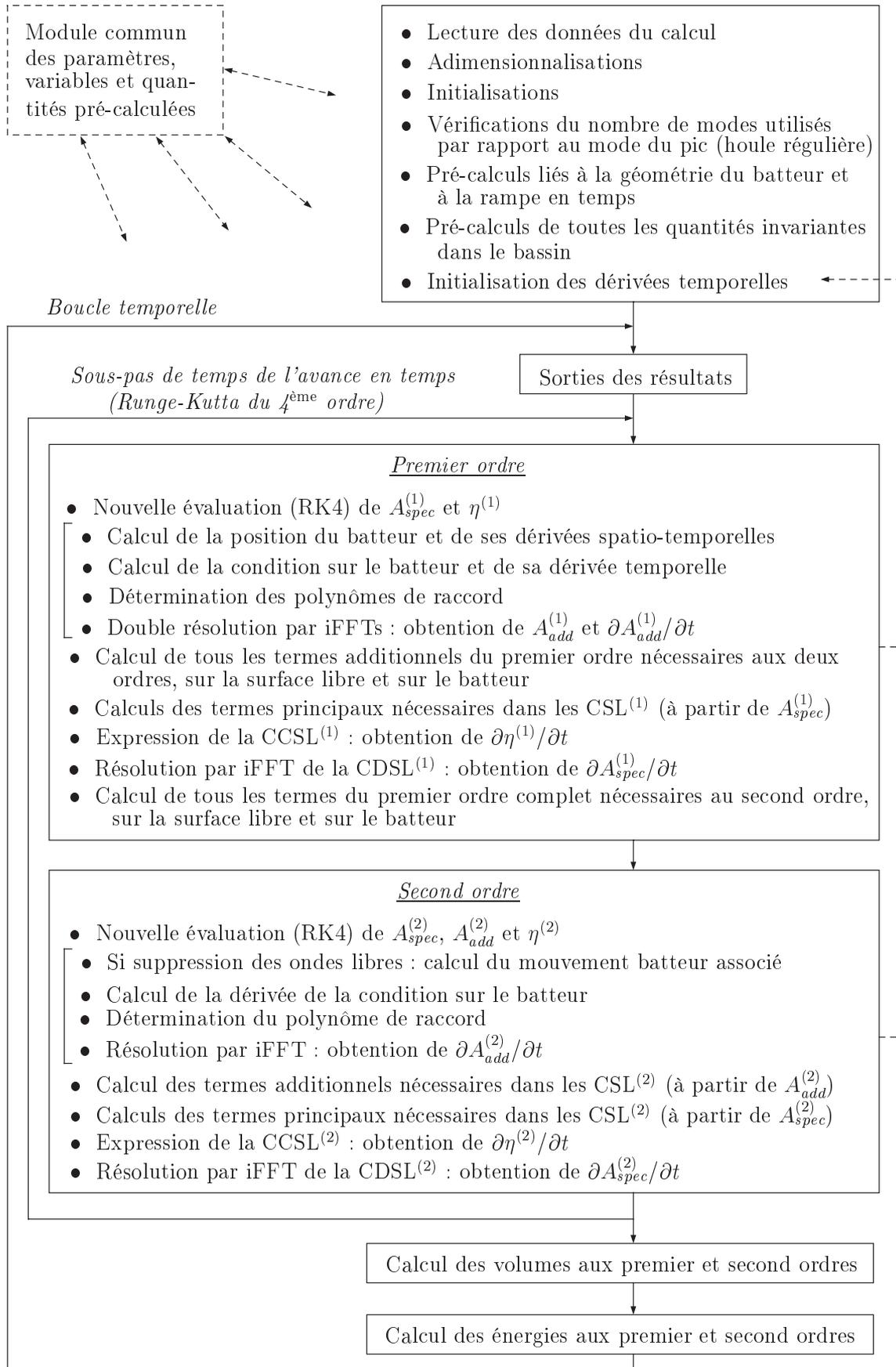
pourra alors être calculé en résolvant un problème du type de celui explicité pour le second ordre au début de la section (III.1.12). On peut ici préciser que l’obtention des douze quantités additionnelles (III.1.13)&(III.1.14) alors mentionnées ne soulève cette fois pas de difficulté, et ne requiert pas d’hypothèse supplémentaire contrairement à la solution envisagée au III.1.2.1. En effet, comme pour le potentiel principal, le potentiel additionnel ainsi exprimé sous forme spectrale voit ses dérivées découler analytiquement de la seule connaissance de ses modes.

Finalement, cette solution ‘renversante’ qui nous apparaissait un tantinet saugrenue de prime abord, s’est pourtant avérée donner des résultats probants comme on va le voir. Puisqu’elle possède de plus toutes les caractéristiques désirées pour rendre la méthode consistante en termes de formulation d’une part, mais surtout de convergence et de rapidité d’exécution, on n’a pas poursuivi plus avant la recherche de potentiels additionnels pour ce problème du bassin de houle formulé au second ordre.

### III.1.3 Mise en oeuvre numérique

Toutefois, entre l’émergence de cette idée (à l’automne 2001) et la version actuelle du code de calcul *SWEET*, nombreuses ont été les étapes de la mise en oeuvre numérique, de la compréhension des phénomènes et de la validation des résultats du code. Il ne s’agit bien sûr pas ici de détailler chaque ligne du code, mais d’évoquer les points clefs de sa construction. Le plus simple est peut-être d’en regarder rapidement la structure globale, pour venir se concentrer ensuite sur les éléments qui méritent une attention spécifique. La figure III.1.6 propose un organigramme fonctionnel de l’architecture de *SWEET* à l’heure actuelle. En complément, l’annexe B donne un exemple de fichier d’entrée du code où l’on retrouvera l’ensemble des paramètres du calcul laissés au choix de l’utilisateur. *A priori*, ce seul fichier suffit à tout contrôler, même si d’autres paramètres internes peuvent éventuellement être réglés en sus pour des utilisations spécifiques.

L’ossature générale du code date donc de l’automne 2001. A compter de début 2002, Fé.Bo. m’a rejoint sur ce thème de recherche, pour se consacrer au départ principalement au mouvement du batteur. A cette époque, le code encore bi-dimensionnel venait de connaître ses premières validations (cf. III.1.5) et disposait d’un batteur piston, d’un batteur volet et d’une plage numérique parabolique. Fé.Bo. y a d’abord ajouté les fonctions de transfert permettant de se donner des conditions de houle cible plutôt que directement le mouvement du batteur. Une fois réalisée la version tri-dimensionnelle du code, il a aussi implémenté un mode de mouvement du batteur plus élaboré, selon la méthode de Dalrymple (cf. III.1.5.3), et ajouté la possibilité de prendre en compte un batteur qui ne couvre que partiellement la largeur du bassin. Actuellement, il œuvre pour introduire un mouvement du batteur apte à générer un spectre directionnel dans le bassin. En outre, c’est lui aussi qui a récemment travaillé sur le calcul des énergies jusqu’au troisième ordre. Tous ces éléments ne seront pas détaillés ici. Pour le reste le code de calcul a évolué au rythme de notre travail d’équipe


 Figure III.1.6: Structure du code de calcul *SWEET*.

que j’ai trouvé véritablement moteur, Fé.Bo. s’attachant plus aux aspects liés au batteur, à la physique de la houle générée et aux comparaisons avec ses autres travaux (analytiques et expérimentaux) ; moi-même me consacrant plus volontiers aux aspects méthodologiques et numériques du code de calcul, et à son optimisation en vitesse, notamment en opérant plusieurs mutations importantes dans sa programmation.

Ce bref récapitulatif effectué, on peut maintenant revenir à l’organigramme III.1.6. Ses grandes lignes sont sans surprise, impliquant une résolution du problème à chacun des ordres successivement, insérée dans un schéma d’avance en temps de type Runge-Kutta du quatrième ordre (RK4), comme précédemment pour le noyau non-linéaire, et choisi pour les mêmes raisons. La seule spécificité est qu’on avance nos potentiels en temps par l’intermédiaire de leurs modes plutôt que dans l’espace physique, aussi comme pour la méthode non-linéaire directe sur le noyau et aussi pour les raisons alors invoquées. Au départ du calcul on impose sauf exception le repos du fluide et l’arrêt du batteur, et les dérivées temporelles initiales, liées à l’accélération du batteur, sont calculées au moyen d’une première résolution des deux ordres, externe à la boucle en temps. Ensuite, à chaque sous-pas de temps et à chaque ordre, on calcule d’abord les modes additionnels et leurs dérivées, dont on déduit toutes les quantités additionnelles nécessaires par la suite. Puis, on assemble les conditions de surface libre (‘CSL’ sur le schéma, et respectivement ‘CDSL’ pour la condition dynamique et ‘CCSL’ pour la cinématique) à partir des élévations de surface libre et des modes spectraux principaux. Les dérivées temporelles respectives de ces derniers procèdent alors de la résolution des CSL, et on peut dès lors réaliser une nouvelle évaluation des quantités de la méthode à pas de temps, après avoir calculé auparavant toutes les grandeurs désirées à cet ordre. Les sous-sections suivantes évoquent les points importants de ce processus de résolution général.

### III.1.3.1 Géométrie du domaine de résolution additionnel

Ainsi qu’il a été évoqué à la sous-section III.1.2.2, la spécificité du modèle réside dans la résolution additionnelle, et plus spécialement dans la géométrie du domaine sur lequel on l’opère. Outre les murs fixes en  $z = -1$ ,  $z = h_{add}$  et  $y = 0$ ,  $y = L_y$ , ce n’est que sur la forme du batteur unifié qu’il subsiste une certaine latitude. La conservation du volume qu’on s’est imposée ne laisse finalement le choix que de l’écart entre le batteur et son symétrique, écart à l’intérieur duquel on se donnera une surface de raccord nécessaire à assurer la continuité du batteur unifié. La figure III.1.7 présente la géométrie qu’on utilise pour les conditions sur le batteur (ici dérivées en temps et aux deux ordres). En sombre figure la zone correspondant au batteur réel, en ton moyen celle correspondant à son symétrique, et en clair la surface de raccord. On peut remarquer au passage la forme des conditions sur le batteur serpent, sur cet exemple qui correspond à un instant de la génération de houle oblique régulière par méthode de Dalrymple (cf. III.1.5.3), on y retrouve bien les trois ‘morceaux de batteur’ (dans la direction  $y$ ) typiques de cette méthode. L’écart précédent, qui correspond à la hauteur de la zone claire sur le schéma, est à la discrétion de l’utilisateur

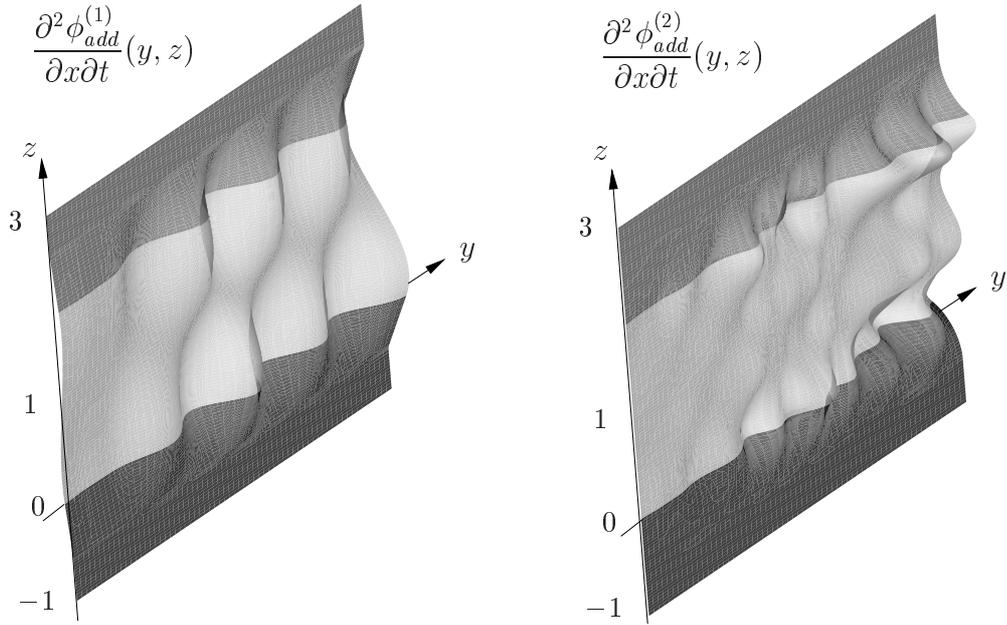


Figure III.1.7: Exemple de géométrie instantanée des conditions sur le batteur unifié dans la résolution additionnelle, aux deux ordres.

dans le code de calcul (paramètre interne). L'indépendance des résultats par rapport à son choix a été vérifiée (si tant est que ce choix soit 'raisonnable', *i.e.* ni  $1/10^{\text{ème}}$  de la hauteur du bassin réel, ni 10 fois sa hauteur à l'inverse). Dans les calculs présentés, l'axe de symétrie centrale du batteur unifié est placé en  $z = 1$ , comme sur les figures III.1.5 et III.1.7, soit  $h_{add} = 3$ .

D'autre part, puisque le batteur symétrique est issu du batteur réel par une symétrie centrale, il est possible de séparer les variables  $y$  et  $z$  pour définir la surface de raccord. Dans la direction  $y$  la surface épouse la forme prise en haut du batteur en  $z = 0$ , puis est multipliée par une fonction verticale assurant le passage d'un batteur à l'autre et s'annulant en  $z = 1$ . Puisque les conditions sur le batteur sont au mieux  $C^0$  pour les batteurs qu'on utilise le plus couramment (serpent) du fait de la présence de l'axe de rotation du batteur réel, le choix d'un polynôme du troisième ordre comme fonction verticale de raccord a paru suffisant, assurant un raccord  $C^1$  en  $z = 0$  et  $z = 2$ . Pour être tout à fait précis, le terme en  $\partial X^{(1)}/\partial z$  apparaissant dans la condition batteur au second ordre (III.1.11) introduit même, au second ordre, une discontinuité sur cet axe de rotation réel. Celle-ci reste toutefois d'un faible ordre de grandeur (elle est par exemple présente mais non visible sur la partie droite de la figure III.1.7), on avait donc aussi conservé pour la résolution à cet ordre un polynôme d'ordre 3 comme fonction verticale de raccord. Cependant, on s'est rendu compte qu'un tel polynôme engendrait une surface de raccord fortement déformée par rapport à la déformation sur le batteur réel lui-même, on a alors opté, au second ordre, pour un polynôme d'ordre 5 (assurant un raccord  $C^2$ ) qui élimine ce problème, comme on peut le vérifier sur la partie droite de la figure III.1.7.

Par ailleurs, d'un point de vue numérique, l'imparité de la fonction verticale de raccord choisie, par rapport au centre  $z = 0$  de son domaine d'application, entraîne la nullité d'un terme sur deux dans le développement spectral (III.1.16) dans cette direction  $z$ . On profite de ce fait pour ne traiter les conditions sur le batteur unifié que pour les modes non nuls (on gagne un facteur deux sur  $N_z$ ). De surcroît, cette imparité autorise aussi à ne distribuer des points de collocation que sur la moitié du batteur unifié, sans perdre d'information : les conditions sur le batteur sont donc traitées pratiquement dans le code sur le domaine compris entre  $z = -1$  et  $z = 1$ .

Sur l'illustration III.1.7 il est aussi clairement visible que le batteur est considéré comme continu dans la direction  $y$  (même s'il s'agit là, encore une fois, d'une condition sur le batteur, et non de sa déformée réelle), or dans notre bassin réel par exemple, on dispose d'un batteur segmenté. Cette approximation de continuité est valable pourvu que l'influence de la segmentation reste faible, *i.e.* d'une part qu'on ne s'intéresse pas au champ très proche du batteur, qui est perturbé au réel, notamment par les phénomènes de déversement local par les joints entre les différents segments ; et d'autre part qu'on ne génère pas de houle à un angle trop grand par rapport à l'axe  $x$ . En effet, la longueur d'onde générée à un angle  $\theta$  et la longueur d'onde sur le batteur sont reliées par  $\lambda^B = \lambda / \sin \theta$  pour un mouvement serpent pur, et donc les segments ont une largeur relative à  $\lambda^B$  de plus en plus grande à mesure que  $\theta$  augmente.

La géométrie de ce domaine de résolution additionnel ainsi déterminée, on devait être à même de résoudre, à chaque sous-pas de temps, toutes les conditions voulues sur le batteur de manière indépendante. En réalité, cela s'est avéré légèrement plus compliqué.

### III.1.3.2 Consistance des conditions sur le batteur unifié

Ce problème de consistance n'est pas apparu clairement dès les débuts de la mise en œuvre du modèle. Ce n'est en effet qu'après que Fé.Bo. eut avancé suffisamment dans sa formulation analytique du problème pour qu'on puisse introduire dans le code de calcul *SWEET* la suppression des ondes libres (cf. III.1.5.4), que s'est révélée cette difficulté à la suite de comparaisons fines. Elle se manifestait alors par une mauvaise convergence, sur le calcul des ondes libres principalement, entre les résultats fournis par le code et la solution analytique. Si l'on sait que ces ondes libres représentent dans le cas général une part faible de l'élévation du second ordre, elle même de faible amplitude face au premier ordre, on peut comprendre que, dans les premières validations sur les résultats globaux du code, on n'avait pas attribué la faible différence observée à un problème de consistance de la méthode.

Pour bien entrevoir de quoi il retourne, il est peut-être nécessaire de rappeler au préalable la manière dont on traitait les résolutions additionnelles sans précautions. Tel qu'on l'a décrit au début de la section III.1.2, à chaque fois qu'on a besoin de quantités additionnelles, on les pré-calculait de manière décorrélée du reste, avant de résoudre le problème

principal. Or on a aussi vu à ce même endroit que les résolutions principales à chaque ordre nécessitent la connaissance des potentiels additionnels de chaque ordre, et de leurs dérivées spatiales et *temporelles* (III.1.13)&(III.1.14). Pratiquement, à chaque nouvelle passe du schéma en temps, on doit donc d'abord trouver les modes de  $\phi_{add}^{(1)}$  et  $\phi_{add}^{(2)}$  respectivement, *ainsi que leur dérivées temporelles*. Pour ce faire, le processus naturel, *décorrélé de l'avance en temps*, était de :

1. assembler la condition batteur du premier ordre de (III.1.10) ;
2. calculer la surface de raccord correspondante ;
3. résoudre le problème aux limites (III.1.15) au premier ordre, dans le domaine additionnel, et obtenir les modes  $A_{add}^{(1)}$  ;
4. dériver le problème aux limites (III.1.15) en entier par rapport au temps, il se ramène alors à un problème de même forme mais avec : pour condition sur le batteur la dérivée en temps de la précédente, et pour solution  $\partial\phi_{add}^{(1)}/\partial t$  au lieu de  $\phi_{add}^{(1)}$  lui-même ;
5. assembler cette nouvelle condition dérivée sur le batteur ;
6. calculer la surface de raccord correspondante ;
7. résoudre ce nouveau problème aux limites dans le domaine additionnel, et obtenir les dérivées temporelles des modes  $\partial A_{add}^{(1)}/\partial t$  ;

et procéder de même au second ordre. Seulement, ce faisant on suppose implicitement que le problème aux limites formulé pour  $\partial\phi_{add}^{(1)}/\partial t$ , qu'on résout pratiquement *sur le domaine additionnel étendu* (i.e. contenant le batteur unifié), est effectivement de manière consistante la dérivée temporelle du problème aux limites formulé pour  $\phi_{add}^{(1)}$  *sur ce même domaine* ; c'est-à-dire qu'il faut être sûr que les étapes 2. et 6. n'introduisent pas d'inconsistance mathématique. Or cela n'est vérifié qu'à la condition expresse que l'extension verticale, à laquelle on procède, de la condition au-dessus du batteur puisse se faire à variable séparée, soit pratiquement s'il est possible d'écrire pour chacun des ordres :

$$E^{B(i)}(y, z, t) = f^{(i)}(y, t) * g^{(i)}(z)$$

ce qui est *a priori* assez contraignant. En effet, à l'étape 2. on introduit à partir de la fonction  $E^{B(i)}(y, z, t)$  définie sur  $z = [-1; 0]$ , une nouvelle fonction  $F_1(y, z, t)$  définie par prolongement *géométrique* sur  $z = [-1; h_{add}]$ , et ce, à chaque pas de temps. Or cette fonction  $F_1$  doit, pour être consistante avec la même fonction  $F_2$  définie à l'étape 6. comme le prolongement *géométrique* de la dérivée en temps de  $E^{B(i)}$ , avoir  $F_2$  pour dérivée temporelle ; i.e. il faut que les variables  $z$  et  $t$  soient séparables dans  $F_1$  et par conséquent dans  $E^{B(i)}$ . Toutefois, dans le cas général, les batteurs physiques sont effectivement conçus de telle sorte que leur position  $X(y, z, t)$  se mette sous la forme  $f(y, t) * g(z)$  précédente. Si l'on se penche maintenant sur la forme des conditions sur le batteur de (III.1.10) et (III.1.11), on constate alors que la condition précédente de séparation de la variable  $z$  est bien vérifiée au premier ordre, grâce à la forme de  $X^{(1)}$ . En revanche, certains termes présents dans cette même condition batteur au second ordre, qui fait notamment intervenir  $\phi^{(1)}$ , ne satisfont pas à une telle condition de séparation.

Le processus de résolution additionnelle décrit précédemment était par conséquent inconsistent au second ordre. Il a donc fallu trouver un autre moyen de procéder ; l'idée est alors venue de re-corréler la résolution additionnelle à l'avance en temps. En termes plus précis, il s'agit d'avancer en temps les modes additionnels du second ordre comme on le fait des modes principaux (*i.e.* au moyen du schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre, en parallèle de ces modes principaux), ce qui permet dès lors de ne résoudre qu'*un seul problème aux limites additionnel* sur la dérivée temporelle de  $\phi_{add}^{(2)}$ . Ce problème aux limites est exactement le même que celui formulé à l'étape 4. précédente, mais l'extension verticale qu'on réalise ensuite en 6. n'impose cette fois rien sur les modes  $A_{add}^{(2)}$  eux-mêmes, qui procèdent désormais uniquement de l'avance en temps liée au seul calcul de leurs dérivées temporelles  $\partial A_{add}^{(2)}/\partial t$ . En conséquence, on a procédé à la re-programmation de *SWEET* en ce sens, et cela a résolu le problème de convergence sur les ondes libres. Bien sûr, cette nouvelle manière de faire introduit dans le potentiel additionnel l'erreur relative à la méthode à pas de temps, mais cela ne change *a priori* en rien la précision globale qui est déjà pour partie liée à cette erreur. Il faut toutefois mentionner que cela implique aussi de tenir compte désormais d'une condition de Courant qui n'existait pas auparavant, mais qui n'est en pratique pas contraignante comme on le verra à la section suivante. Enfin, il a paru préférable de maintenir telle quelle la résolution au premier ordre, même si cela imposait finalement de conserver une résolution de plus qu'à l'ordre deux.

Cette dernière remarque achève d'explicitier la structure du code de calcul *SWEET* dans sa forme actuelle, telle que présentée sur l'organigramme III.1.6. Confiant dans le fait que le modèle est cette fois bien consistant, on va donc pouvoir laisser de côté la résolution additionnelle pour s'attacher au reste de la mise en œuvre numérique, de caractéristiques plus classiques.

### III.1.3.3 Absorption numérique et rampe en temps sur le batteur

Dans un bassin de houle, quand on cherche à reproduire dans la zone de mesure un régime de houle désiré, on doit prendre en compte deux éléments liés à la structure même du bassin : premièrement qu'un essai y démarre *a priori* du repos, deuxièmement que le bassin est un milieu confiné. La première caractéristique implique que lors de tout essai est engendré un champ de vagues transitoire, la seconde que des réflexions s'opèrent sur les murs, deux phénomènes indésirables pour l'utilisateur. Il faudrait aussi ajouter à cela d'autres phénomènes spécifiques à la génération par un batteur en comparaison de conditions naturellement établies, mais on les évoquera plus loin.

Pour ce qui est des réflexions sur les murs latéraux, on peut en tenir compte dans le mouvement batteur pour améliorer la qualité de la houle dans une zone spécifique (cf. III.1.5.3). Concernant les réflexions sur le mur terminal du batteur (qui sont généralement celles du plus grand ordre de grandeur puisqu'on génère le plus souvent des houles de direction concentrée autour de la direction  $x$ ), des plages physiques sont généralement

disposées contre ce mur pour les atténuer. Ces plages, de par leurs formes et longueurs, sont calibrées de manière à présenter un coefficient d'absorption suffisant (entre 90% et 95% en amplitude et vers 99% en énergie) autour de la fréquence de houle qui sera la fréquence moyenne des houles générées dans le bassin. Plus les ondes sont courtes, plus elles seront absorbées par ce type de plage. Dans ce qui est tout de même réfléchi, un transfert s'opère vers des longueurs d'ondes plus courtes, et donc plus lentes. En revanche, ces plages perdent beaucoup de leur efficacité pour des longueurs d'ondes de l'ordre de leur longueur ou supérieures. En particulier elles sont très peu efficaces pour absorber de grandes longueurs d'ondes. Or quand on met en route le batteur, on génère de tels modes longs, qui se propagent de plus à grande vitesse ( $\sqrt{gh}$  en dimensionnel); ces modes ne seront donc que très faiblement absorbés et feront des allers-retours dans le bassin, perturbant la mesure. En revanche, ces modes dépendent aussi de la rampe en temps qu'on impose au mouvement batteur pour passer du repos au régime désiré, comme on va le montrer. C'est pourquoi on a ici rassemblé ces deux thématiques qui visent toutes deux à éliminer des ondes indésirables. Une solution physique et/ou numérique pour absorber ces modes longs est d'ajouter en bout de bassin un absorbeur mécanique, un 'anti-batteur' en quelque sorte. Clément [26] a montré en deux dimensions l'efficacité de l'association d'un tel absorbeur pour les ondes longues, à une zone de dissipation numérique pour les ondes plus courtes. Toutefois dans le bassin physique tri-dimensionnel de l'ECN, ce dispositif n'existe pas. Une autre solution consiste à évaluer par le calcul les caractéristiques des ondes longues générées lors de la phase transitoire, puis à en déduire une modification adéquate du mouvement du batteur permettant de les atténuer; ainsi que l'a proposé Molin [96] qui a quantifié ces ondes et montré l'efficacité de la correction associée du mouvement batteur lors d'expériences. Enfin, d'autres techniques de contrôle actif du batteur en fonction de mesures sur sa paroi existent aussi, permettant par exemple de prendre en compte les ondes réfléchies sur un corps positionné dans le bassin, mais ce n'est pas l'objet ici.

Numériquement, la rampe en temps sur le mouvement du batteur est simplement reproduite à l'identique, en revanche il est moins aisé *a priori* de mettre une plage absorbante dans le fluide. Pour ce faire, on ajoute classiquement des 'coefficients absorbeurs' dans les conditions de surface libre : ils sont nuls là où la plage réelle n'est pas présente et leurs valeurs augmentent à mesure qu'on s'approche du mur terminal, dans la zone de dissipation. On peut appréhender cette idée en observant que la solution d'une équation de type  $\partial f(x, t)/\partial t = -\nu(x)f(x, t)$  est une exponentielle décroissante en temps là où  $\nu(x) > 0$ . Plus formellement, si l'on exprime les conditions de surface libre sous-forme hamiltonienne (conservative en énergie), on peut montrer (cf. par exemple Westhuis [136]) que leur ajouter des coefficients positifs  $\nu(x)$  et  $\mu(x)$  tels que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= E_{2nd\ mb}^{CDSL} - \nu(x)E_{2nd\ mb}^{CCSL} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= E_{2nd\ mb}^{CCSL} - \mu(x)E_{2nd\ mb}^{CDSL} \end{aligned} \tag{III.1.17}$$

(où les  $E_{2nd\ mb}^{CCSL}$  et  $E_{2nd\ mb}^{CDSL}$  figurent les seconds membres respectifs des conditions cinématique

et dynamique de surface libre de (III.1.7)) conduit à une perte d'énergie du système là où ces coefficients sont non nuls ( $>0$ ). Dès lors de nombreux choix de ces deux coefficients peuvent exister, Grilli & Horillo [60] ont par exemple proposé une méthode élaborée où ils sont déterminés dynamiquement sur la base du flux d'énergie entrant dans la zone de dissipation. Pour notre modèle, dont on sait par expérience qu'il est fortement dépendant de la conservation du volume, on a cherché à s'assurer le plus possible cette conservation. A ce propos, Westhuis [136] montre que si l'on conserve la condition cinématique de surface libre inchangée et qu'on se contente de redéfinir localement la pression atmosphérique dans la zone de dissipation, on est sûr de cette conservation de la masse. On n'avait d'ailleurs pas fait ce choix initialement, prenant  $\mu(x)$  non nul, et cela résultait en une augmentation induite du volume au second ordre, qu'on ne parvenait alors pas à expliquer. Cette re-définition prend donc la forme :

$$p(x, t) = \nu(x)E_{2nd\ mb}^{CCSL} = \nu(x)\frac{\partial\phi}{\partial n}\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_y^2}$$

dont cet auteur montre qu'elle peut se ramener de manière consistante équivalente à  $p(x, t) = \nu(x)\partial\phi/\partial z$ , ce qui a été mis en place dans *SWEET*. Pratiquement, on a considéré ce coefficient  $\nu(x)$  d'ordre zéro, et on a appliqué au terme correctif  $p(x, t)$  les deux étapes (II.1.14) et (II.1.15) du développement en série de perturbations, pour finalement trouver :

$$p^{(1)}(x, t) = \nu(x)\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} = \nu(x)\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t} \quad \text{et} \quad p^{(2)}(x, t) = \nu(x)\frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial t} \quad (\text{III.1.18})$$

Suite à des développements antérieurs, il est aussi possible, dans le code de calcul, d'opter pour le même coefficient  $\nu(x)$  mais s'appliquant sur  $\phi$  lui-même au lieu de sa dérivée verticale ; toutefois ce choix s'est montré globalement moins efficace dans nos tests.

Ensuite, il a été nécessaire de calibrer la plage, non pas forcément pour qu'elle absorbe toutes les ondes incidentes, mais plutôt pour qu'elle reproduise les caractéristiques de la plage réelle, dans l'optique de comparaisons à venir entre les résultats du modèle *SWEET* et des essais dans le bassin de l'ECN. Trois paramètres sont alors à choisir : la longueur  $L_{abs}$  de la plage numérique positionnée dans le bassin entre  $L_x - L_{abs}$  et  $L_x$ , la forme du coefficient d'absorption  $\nu(x)$ , et l'amplitude maximale qu'on lui donne sur le mur terminal du bassin, notée  $\underline{\nu}$ . A l'été 2002, Fé.Bo. a mené dans le bassin de houle de l'ECN une étude rapide des taux de réflexion de la plage réelle en houle droite. Sur une longueur d'onde moyenne de  $\lambda = 5m$  (pour un bassin de  $50m \times 30m \times 5m$ ), le taux de réflexion était d'environ 10% en amplitude, taux déterminé par Fé.Bo. au moyen de la méthode à trois sondes de Mansard & Funke [92]. A l'époque, la même analyse menée pour une plage de forme parabolique dans *SWEET*, avait fourni comme coefficients de calage adéquats :  $\underline{\nu} = 1$  et  $L_{abs} = 10m = 2\lambda$ , ce qui paraît un peu élevé, cependant on ne disposait pas alors de la version du code consistante en résolution additionnelle. Dans une étude numérique plus récente, Fé.Bo. a ainsi obtenu sur un cas comparable une réflexion limitée à 5% en amplitude avec les paramètres  $\underline{\nu} = 0,75$  et  $L_{abs} = \lambda$ . D'une manière générale, pour reproduire le bassin réel de l'ECN, on utilise une plage de la même longueur qu'au réel

(environ  $15m$ ) qui correspond à au moins une fois la longueur d'onde moyenne utilisée dans les essais courants. Le coefficient  $\underline{\nu}$  est quant à lui classiquement pris dans l'intervalle  $[0,5;1]$ . On a aussi comparé brièvement les résultats pour une plage parabolique à ceux obtenus pour une plage décrite par un polynôme d'ordre 3. La dérivée de ce dernier était prise nulle en  $x = L_x - L_{abs}$ , toujours pour assurer une absorption progressivement imposée, et prise nulle aussi en  $x = L_x$  afin de maximiser l'aire sous ce polynôme là où l'absorption est de niveau important (proche du mur). Or, contre toute attente, c'est la plage parabolique qui s'est avérée la plus efficace, à  $\underline{\nu}$  fixé ; on l'a donc toujours conservée par la suite. Pour finir, on pourra noter en observant les entrées du code de calcul (annexe B.) qu'un choix de plages latérales est proposé. Ces plages ont été mises en place pour mener des études où le batteur n'occupe que partiellement la largeur du bassin, comme dans le cas montré au III.1.5.5. Ces différentes plages ont été introduites identiquement à la plage terminale, avec des coefficients  $\underline{\nu}$  et  $L_{abs}$  distincts, associés à chacune d'entre elles.

Par ailleurs, suite à des discussions relatives à l'absorption des modes longs transitoires qui sont d'amplitude faible, on avait introduit dans le code la possibilité de séparer l'absorption au premier ordre de celle au second ordre, afin de pouvoir supprimer cette seconde soupçonnée d'absorber ces modes longs alors que ce n'est quasiment pas le cas en bassin réel. Molin [96] a montré l'importance de ces modes longs en bassin expérimental, menant à conclure qu'on ne peut négliger la perturbation due à ces ondes longues indésirables dans la mesure du train d'onde étudié. Cependant, après la refonte opérée du code, cette possibilité de suppression de l'absorption au second ordre a finalement été abandonnée. En effet, Fé.Bo. a mené une étude (sur un seul cas test, il faut préciser) de ces modes longs dans notre modèle, ce en générant de la houle pendant un temps court puis en arrêtant le batteur et en laissant la houle être absorbée par notre plage numérique parabolique aux deux ordres. Il a ensuite comparé la houle résiduelle dans le bassin après un temps long à la théorie de Molin [96], et il est parvenu aux conclusions suivantes :

- on retrouve bien dans nos résultats les modes longs prédits par cette théorie, et à terme il ne reste effectivement que le mode 1 dans le bassin qui oscille bien à sa fréquence propre ;
- on retrouve non seulement les longueur d'onde et fréquence prédites par Molin, mais aussi l'amplitude au second ordre avec un très bon accord ; on peut donc en conclure que la plage numérique au second ordre n'absorbe pas ces modes de longueur d'onde bien supérieure à sa propre longueur ;
- d'autre part ces modes longs du deuxième ordre ne sont pas affectés par une éventuelle rampe sur le mouvement du batteur, mise en place à l'initialisation de la génération ;
- néanmoins, on trouve aussi dans nos résultats la présence de ces mêmes modes longs au premier ordre de perturbation ; de plus l'amplitude de ces modes longs à cet ordre est elle nettement dépendante de la mise en place d'une rampe en temps, décroissant d'un facteur 10 sans puis avec rampe ; enfin, pour le cas simulé

de cambrure 31%, cette amplitude des modes longs au premier ordre est bien supérieure à celle de ceux du deuxième ordre sans rampe, et inférieure avec.

Par ailleurs, la plage introduite dans le code est ‘géométriquement semblable’ à la plage réelle du bassin de l’ECN : de même longueur et parabolique, et elle possède des caractéristiques d’absorption et de non-absorption en fonction de la longueur d’onde qui sont, à première vue, globalement assez proches de celles de la plage réelle (une étude plus exhaustive devra être conduite). Enfin, notre condition d’absorption est à l’origine directement exprimée dans la condition complètement non-linéaire qui représente au mieux le bassin réel, et sa présence en émanant au second ordre permet de conserver une formulation théoriquement consistante.

Outre son influence sur ces modes longs, on peut s’intéresser d’une manière plus générale à l’influence de la rampe en temps sur le mouvement du batteur, caractéristique qui présente l’avantage d’agir *a priori* à l’identique au réel et numériquement. La figure III.1.8 montre, sur un cas bi-dimensionnel usuel, l’effet des deux paramètres ajustables : la durée de la rampe utilisée et sa régularité. Ces deux influences sont étudiées sur le relevé d’élévation de

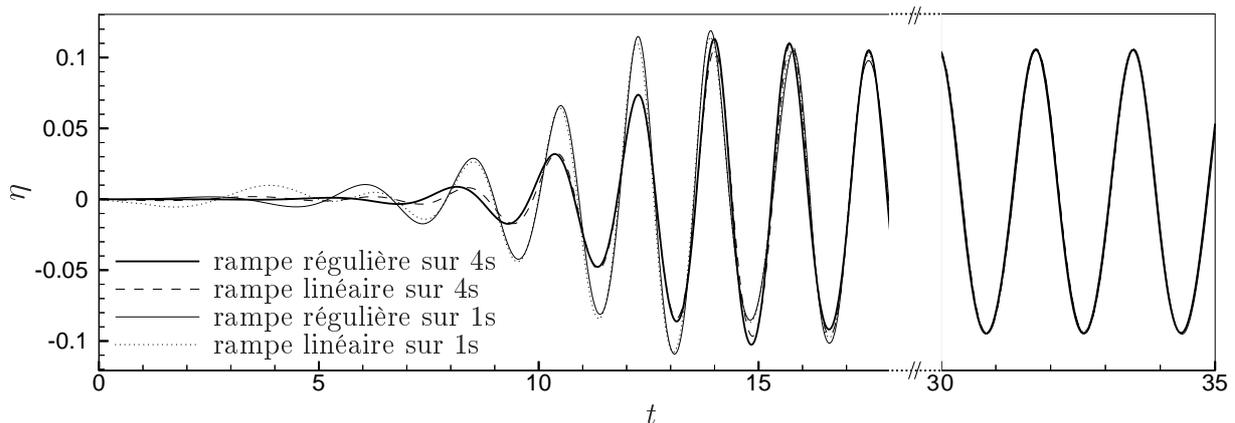


Figure III.1.8: Influence de la régularité et de la durée de la rampe en temps appliquée au mouvement du batteur, sur les amplitudes du front d’onde.

surface libre d’une sonde placée à quelques longueurs d’ondes du batteur. On peut noter en premier lieu que les différentes configurations testées n’ont bien ni d’influence sur le champ établi (partie droite de la figure, après la rupture d’échelle horizontale), ni sur la position du pic maximal du front d’onde (partie gauche de la figure). En revanche elles ont une emprise marquée sur la forme du front d’onde précédant le pic, et plus légère sur les premières longueurs d’onde le suivant, légèrement modifiées. Le critère le plus influant est la durée de la rampe, qui diminue le nombre et les amplitudes des pics présents dans le front d’onde (ainsi que l’amplitude des modes longs du premier ordre, comme on l’a déjà mentionné). On remarquera que les premiers pics du front d’onde ont une période beaucoup plus grande que la houle générée, ces longs modes au moins partiellement issus du transitoire seront donc difficilement absorbés par la plage. La régularité de la rampe accentue quant à elle les effets de son allongement temporel, diminuant encore l’amplitude

de ces premiers pics de grande période. On peut ainsi constater qu'une rampe adéquatement choisie réduit nettement les effets du transitoire. Même si cette conclusion ne vaut ici que pour un cas de houle régulière bi-dimensionnel, elle doit pouvoir être étendue sans obstacle à des cas plus complexes. Pour ce genre de pré-études succinctes il est d'ailleurs utile de disposer d'un outil numérique, qui sera apte à apporter rapidement une optimisation relative des paramètres (en quelques heures au plus pour un cas tri-dimensionnel), là où elle aurait nécessité en bassin réel toute une mise en place expérimentale et des essais répétés avec passage par le repos entre chaque essai. Pour en conclure avec la rampe en temps, il convient de préciser que le terme 'régulière' désigne ici une rampe  $\alpha(t)$  telle que :

$$\alpha(0) = 0; \alpha(T_{rampe}) = 1; \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0) = 0; \frac{\partial\alpha}{\partial t}(T_{rampe}) = 0$$

ce qui permet à la position du batteur définie par  $\alpha(t)X(y, z, t)$  et à sa vitesse, de passer régulièrement de valeurs nulles à leurs valeurs de consigne pendant la durée de la rampe.

### III.1.3.4 Dérivées spatiales de l'élévation de surface libre

Si l'on fait un bilan des quantités présentes dans les problèmes aux limites (III.1.10) et (III.1.11) auxquels on adjoint l'absorption précédente (III.1.18), vient la conclusion que les seules grandeurs qui ne découlent :

- ni directement du schéma d'avance en temps :  $\eta^{(i)}$ ,  $\phi_{spec}^{(i)}$  et leurs dérivées temporelles respectives, ainsi que  $\phi_{add}^{(2)}$  ;
- ni des résolutions additionnelles :  $\phi_{add}^{(1)}$  et sa dérivée temporelle, ainsi que la dérivée temporelle de  $\phi_{add}^{(2)}$  ;
- ni d'expressions analytiques : les dérivées spatiales de  $\phi_{spec}^{(i)}$  et  $\phi_{add}^{(i)}$ ,  $X^{(1)}$  et toutes ses dérivées, ainsi que les  $\nu$  des différentes plages ;

sont les dérivées spatiales de l'élévation de surface libre du premier ordre. C'est pourquoi on explicite ici leur calcul.

Si l'on reprend les expressions de ces dérivées en non-linéaire complet, telles que (II.1.24), établies à partir de la CDSL, leur restriction au premier ordre se résume respectivement à :

$$\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial x\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y\partial t}$$

Cependant, on a depuis ajouté à la condition dynamique un terme d'absorption en  $p(x, t) = \nu(x)\partial\phi/\partial z$  pour simuler la plage terminale (et  $p(y, t) = \nu(y)\partial\phi/\partial z$  respectivement pour une plage latérale). Si on dérive ce terme à l'identique, il vient sur l'exemple de la plage terminale :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)$$

Soit finalement au premier ordre des dérivées spatiales de  $\eta$  exprimées comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x \partial z} & \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y \partial t} & \text{en } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1.19})$$

dans le cas de la présence d'une plage terminale, et comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x \partial t} & \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y \partial t} - \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y \partial z} & \text{en } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1.20})$$

pour une plage latérale.

### III.1.3.5 Calcul des volumes et des énergies

**Volume.** Afin de calculer le volume instantané aux deux ordres, on reprend son expression (II.1.25) en non-linéaire complet donnée au II.1.3.1.1, et on développe ce terme en série de perturbations, en tenant compte de la présence supplémentaire du batteur. Pour ce faire, on sépare d'abord les contributions liées aux déformations du batteur et de la surface libre, de celle du domaine moyen :

$$V = \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_{-1}^0 dz - \int_0^X dx \int_0^{L_y} dy \int_{-1}^0 dz - \int_0^X dx \int_0^{L_y} dy \int_0^\eta dz + \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^\eta dz$$

puis on applique la même décomposition en ordre (II.1.14)&(III.1.8) que précédemment, toujours associée à des développements de Taylor autour des positions moyennes de la surface libre (II.1.15) et du batteur (III.1.9). En ordonnant selon les puissances du petit paramètre  $\varepsilon$ , on obtient finalement, à tout instant :

$$\begin{aligned} V &= L_x L_y + \varepsilon \left( \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta^{(1)}(x, y) dx dy - \int_0^{L_x} \int_{-1}^0 X^{(1)}(y, z) dy dz \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \eta^{(2)}(x, y) dx dy - \int_0^{L_y} X^{(1)}(y, 0) \eta^{(1)}(0, y) dy \right) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{III.1.21})$$

La conservation du volume  $L_x L_y$  initial impose qu'à chacun des deux ordres le terme issu de la déformée de surface libre (à gauche dans l'expression (III.1.21)) compense le terme issu de la position du batteur (à droite).

**Énergie.** Pour ce qui est des énergies les choses se compliquent un petit peu. Tout d'abord, il ne s'agira pas ici d'une conservation à proprement parler puisqu'on part du repos et qu'on introduit ensuite de l'énergie dans le système au moyen du batteur, et enfin qu'on

en retire par l'action de la plage numérique. On va donc plutôt procéder en terme de bilan énergétique instantané, en vérifiant que la somme des énergies cinétique et potentielle présentes dans le domaine résulte bien de l'intégrale des travaux des forces appliquées par le batteur, et par la pression atmosphérique modifiée dans la zone de dissipation, soit :

$$\iiint_{Vol} \left( z + \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 \right) dVol = - \int_0^t \left( \int_{S^B} p \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dS^B + \int_{S^{abs}} p \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dS^{abs} \right) dt \quad (\text{III.1.22})$$

où  $Vol$  représente le volume du domaine,  $S^B$  la surface du batteur et  $S^{abs}$  la surface libre dans la zone de dissipation. La formulation de ce bilan énergétique en ordres de perturbation, et sa mise en œuvre dans le code de calcul, ont toutes deux été récemment réalisées par Fé.Bo., on se contentera donc ici de donner sans détails les expressions finales qu'il a obtenues.

Auparavant, une précision est toutefois nécessaire à leur compréhension. En faisant, une analyse de ce bilan ordre par ordre, on se rend compte qu'au second ordre en  $\varepsilon$  les quantités impliquées sont toutes du premier ordre de perturbation ; de même, au troisième ordre en  $\varepsilon$  de ce bilan, les grandeurs en jeu sont toutes des premier et deuxième ordres de perturbation. Notre formulation au second ordre est donc exacte en énergie jusqu'au troisième ordre (au-delà des grandeurs du troisième ordre apparaissent). On va donc s'intéresser aux bilans énergétiques à ces ordres deux et trois en  $\varepsilon$ , l'ordre 1 étant trivial.

Les expressions trouvées à chacun des ordres sont rassemblées ci-dessous, présentées en bi-dimensionnel par souci de légèreté(!) des écritures. Pour la même raison, les intégrands des intégrales sur  $x$  sont implicitement pris en  $z = 0$ , et symétriquement les intégrands des intégrales verticales sont implicitement considérés en  $x = 0$  ; les termes en dehors de ces intégrales sont quant à eux pris à la fois en  $x = 0$  et en  $z = 0$ . Soit, au second ordre en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \int_0^{L_x} \left( (\eta^{(1)})^2 + \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right) dx - \int_{-1}^0 \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} dz \right] = \\ - \int_0^t \left[ \int_{-1}^0 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial X^{(1)}}{\partial t} dz + \int_0^{L_x} \nu \left( \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 dx \right] dt \quad (\text{III.1.23}) \end{aligned}$$

au troisième ordre en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[ X^{(1)} (\eta^{(1)})^2 + \phi^{(1)} \left( \eta^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + X^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \\ + \int_0^{L_x} \left( \eta^{(1)} \eta^{(2)} + \frac{1}{2} \left[ \eta^{(1)} \left( \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \eta^{(1)} \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - \phi^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} + \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \phi^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right] \right) dx \\ -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left[ X^{(1)} \left( \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + X^{(1)} \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} - \phi^{(1)} \frac{\partial X^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} + \phi^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right] dz = \\ - \int_0^t \left[ \eta^{(1)} \frac{\partial X^{(1)}}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} - \frac{\eta^{(1)}}{2} \right) + \int_{-1}^0 \frac{\partial X^{(1)}}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi^{(1)} \right|^2 + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + 2X^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x \partial t} \right) dz \right. \\ \left. - \nu X^{(1)} \left( \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + 2 \int_0^{L_x} \nu \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) dx \right] dt \quad (\text{III.1.24}) \end{aligned}$$

### III.1.3.6 Refonte du code et programmation efficace

Comme on l'a évoqué précédemment, notre code de calcul a connu plusieurs évolutions dont la dernière a donné naissance à une version complètement nouvelle (*SWEET*), intégralement re-programmée dans l'optique d'optimiser les temps de calcul. Outre la nécessité de remettre au clair le codage avant d'y introduire de nouvelles caractéristiques (liées à l'absorption, au mouvement du batteur, à la suppression des ondes libres, etc.), on s'était en effet rendu compte que le code ne démontrait pas la vitesse de calcul qu'on pouvait espérer, la résolution rapide des systèmes par iFFTs ne comptant finalement que pour une faible part dans le temps de calcul total. Une refonte a donc été jugée utile.

Sa première phase a été d'estimer plus en détails les coûts dédiés aux différentes étapes des calculs, on a notamment constaté que l'appel des fonctions hyperboliques et cosinoïdales était un facteur important du coût global (chaque évaluation coûtant environ 100 multiplications). En conséquence, il a paru crucial d'en stocker le plus possible en rejetant leur détermination à la phase initiale. Dans le même ordre d'idée, toutes les boucles ont été repensées pour réduire le nombre de multiplications au maximum, rejetant là encore le plus possible d'opérations dans la phase initiale. Enfin, on s'est consacré à ré-organiser le code de manière à ré-introduire des FFTs directes partout où cela était possible. La contrepartie de cette optimisation, qui remplaçait des évaluations par des stockages, était la forte augmentation associée de la mémoire vive à allouer, qui devenait prohibitive pour des calculs tri-dimensionnels. Mais on a là aussi contourné ce problème, en séparant dans nos grandeurs spectrales les variables modales et spatiales selon leurs deux directions (ex. :  $x$  et  $y$  sur la surface libre), auparavant traitées au moyen de vecteurs uniques bi-dimensionnels. Cela a permis au final de ne stocker que des tableaux à trois indices d'ordre  $N$  ( $N = N_x$ ,  $N_y$  ou  $N_z$ ) au lieu de tableaux à deux indices d'ordre  $N^2$ . Mais tout cela sera mieux compris sur un exemple simple : prenons celui du potentiel  $\phi_{spec}$ , exprimé sur la surface libre par :

$$\forall ij \in [0; N_x N_y], \quad \phi_{spec}((x, y)_{ij}, 0, t) = \sum_{n_x n_y=0}^{N_x N_y} A_{n_x n_y}^{spec}(t) \psi_{n_x n_y}((x, y)_{ij}, 0) \quad \text{en } z = 0$$

Si on sépare maintenant les variables selon leurs directions, on se retrouve avec, sur la surface libre :

$$\begin{aligned} & \forall i \in [0; N_x], \forall j \in [0; N_y], \\ \phi_{spec}(x_i, y_j, 0, t) &= \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}^{spec}(t) \cos(k_{n_x}^{spec} x_i) \cos(k_{n_y}^{spec} y_j) \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

et de manière identique, sur le batteur :

$$\begin{aligned} & \forall i \in [0; N_z], \forall j \in [0; N_y], \\ \phi_{spec}(0, y_j, z_i, t) &= \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} A_{n_x n_y}^{spec}(t) \cos(k_{n_y}^{spec} y_j) \frac{\cosh\left(k_{n_x n_y}^{spec} (1 + z_i)\right)}{\cosh(k_{n_x n_y}^{spec})} \quad \text{en } x = 0 \end{aligned}$$

où  $k_{n_x}^{spec} = \overrightarrow{k_{n_x n_y}^{spec}} \cdot \vec{e}_x$  et  $k_{n_y}^{spec} = \overrightarrow{k_{n_x n_y}^{spec}} \cdot \vec{e}_y$ . Sans compter les appels des fonctions mathématiques, une évaluation directe de ces deux dernières séries en tous les points  $(i, j)$  serait respectivement de l'ordre de  $N_x^2 N_y^2$  et  $N_x N_y^2 N_z$  opérations. Comme on a gardé séparées les quatre variables  $i, j, n_x$  et  $n_y$ , apparaissent des simplifications (disparition de cosinus et cosinus hyperboliques, et introduction de nombre d'ondes  $k_{n_x}$  et  $k_{n_y}$  à un seul indice). Il est donc possible, pour la première de ces deux séries, d'utiliser simplement une FFT bi-directionnelle ; et pour la seconde, de pré-calculer le rapport des fonctions hyperboliques en le stockant dans un vecteur à 3 indices  $(n_x, n_y$  et  $i)$ , puis d'évaluer la série au moyen de :  $N_x N_y$  produits simples de cette fonction stockée avec les amplitudes modales temporelles, et une FFT dans la direction  $y$ .

Bien sûr, toutes nos quantités spectrales ne sont pas aussi simples que dans cet exemple ; néanmoins l'analyse précédente reste valable et, quelle que soit la quantité traitée, son évaluation se résume à :

- $N^2$  produits simples et une FFT bi-directionnelle sur sa 'surface horizontale' (*i.e.* la surface libre pour une quantité spectrale principale, et le batteur pour une quantité additionnelle), soit un coût total  $O(N^2 \log_2 N^2)$  ; avec le stockage associé d'un tableau  $N \times N$  ;
- $N^3$  produits simples et une FFT mono-directionnelle sur sa 'surface verticale' (*i.e.* cette fois, le batteur pour une quantité spectrale principale, et la surface libre pour une quantité additionnelle), soit un coût total  $O(N^3)$  ; avec le stockage associé d'un tableau  $N \times N \times N$ .

En réalité, les nombres de modes  $N_x, N_y$  et  $N_z$  étant distincts, cette estimation des coûts demeure grossière et n'est donc qu'indicative. Précisons que le nombre de modes le plus déterminant est  $N_y$  puisqu'il intervient à la fois dans les décompositions spectrales principales et additionnelles.

Il faut aussi noter qu'à l'intérieur du schéma en temps, aucun appel à aucune fonction mathématique n'est désormais nécessaire. Elles sont toutes pré-calculées initialement, de plus les rapports des fonctions hyperboliques sont transformés en exponentielles pour pallier les explosions numériques. Une dernière différence introduite par cette refonte du code est qu'on a décorrélé  $N_z$  de  $N_x$ , après s'être aperçu que les critères présidant à leur choix ne leur sont pas communs (cf. III.1.4).

Finalement, pour un nombre de modes/noeuds total de  $M = N^2$ , la méthode ainsi codée devrait avoir un coût à peu près proportionnel à  $M \log_2 M$  pour les résolutions de système, et  $M(\sqrt{M} + \log_2 M)$  pour les re-constructions spectrales. La vitesse réelle de calcul du code est étudiée plus précisément à la section III.1.4.5 ; le gain par rapport à l'ancienne version, qui était  $O(M^2)$  dans la pratique, est bien visible sur la figure III.1.14. Le tableau III.1.1 donne un exemple parlant des gains réalisés sur un Pentium III à 1GHz.

Ces dernières explications viennent clore la description des éléments soit spécifiques à la méthode, soit faisant l'objet d'une attention particulière dans la mise en œuvre numérique du modèle proposé de simulation d'un bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre.

$M = (N_x + N_z)N_y$	126	1650	25026
temps CPU en $s$ (ancienne version)	0,0895	17,2	/
temps CPU en $s$ ( <i>SWEET</i> )	0,0058	0,118	4,01
Mémoire vive utilisée en Mo (ancienne version)	1,12	46,3	>swap (=256Mo)
Mémoire vive utilisée en Mo ( <i>SWEET</i> )	0,16	2,31	93,0

Tableau III.1.1: Comparaison des rapidités de calcul et requêtes mémoire de *SWEET* et de son ancienne version.

À présent assuré de la consistance de ce modèle, on va désormais pouvoir en étudier les propriétés numériques.

### III.1.4 Propriétés numériques du modèle

#### III.1.4.1 Condition de Courant et convergence temporelle

De même que dans la formulation du noyau, la convergence temporelle du modèle procède de deux éléments : d'abord un critère de stabilité fourni par la condition de Courant, puis, une fois ce critère vérifié, une convergence temporelle associée au schéma d'avance en temps choisi, qui est toujours du type Runge-Kutta du quatrième ordre. La seule différence avec l'analyse réalisée au chapitre II.2 est qu'on est désormais en présence de deux séries spectrales (additionnelle et principale) au lieu d'une seule, on devra donc tenir compte d'une double condition de Courant. Comme on l'a précisé auparavant, dans nos calculs la condition de Courant liée à  $N_x$  prédomine toujours sur celle qui découle de  $N_y$  ('discrétisation' spatiale plus fine selon  $x$ ), la comparaison de cette première condition  $CFL_x$  à celle associée à  $N_z$  sera donc suffisante à déterminer la condition de Courant globale de la résolution :  $\Delta t_{CFL} = \min(\Delta t_{CFL_x}, \Delta t_{CFL_z})$ ; on peut donc se contenter d'une étude en deux dimensions, plus aisée. Comme on l'a déjà montré précédemment (cf. II.1), ce sont en fait les rapports  $N_x/L_x$  et  $N_z/(1 + h_{add})$  qui sont à comparer, le plus grand des deux déterminant la condition de Courant à conserver. Si l'on examine ces rapports, on sait qu'on aura toujours  $1 + h_{add} = 4$  et que cette valeur demeurera *a priori* inférieure à  $L_x$  (bassin long), toutefois  $N_x$  sera aussi plus grand que  $N_z$  dans la pratique, la comparaison de ces deux finesses de 'discrétisation spatiale' n'est donc pas déterminée *a priori*. Il paraît ainsi nécessaire de mener une étude croisée des influences de  $N_x$  et  $N_z$ , réalisée sur un cas typique, en deux dimensions puisqu'on n'est pas intéressé par l'influence de  $N_y$ . D'autant plus que comme les résolutions additionnelles et principales sont imbriquées, il n'est pas sûr que la condition de Courant globale résulte directement du simple choix de l'une ou l'autre des conditions  $CFL_x$  et  $CFL_z$  considérées séparément.

On précise que la notion de 'stabilité numérique' du critère précédent est ici entendue au

$N_x \rightarrow$	9	17	33	65	129	257	513	1025
$N_z \downarrow$	1,682	1,224	0,878	0,626	0,444	0,315	0,223	0,158
<i>9</i> <i>1,064</i>	<i>1</i> <u>1</u>	<i>3</i> <u>3</u>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>12</i>	<i>18</i>	<i>25</i>	<i>36</i>
<i>17</i> <i>0,774</i>	<i>1</i> <u>2</u>	<i>3</i> <u>3</u>	<i>5</i> <u>6</u>	<i>8</i>	<i>12</i>	<i>18</i>	<i>25</i>	<i>36</i>
<i>33</i> <i>0,556</i>	<i>1</i> <u>3</u>	<i>2</i> <u>4</u>	<i>4</i> <u>6</u>	<i>8</i> <u>8</u>	<i>12</i>	<i>18</i>	<i>25</i>	<i>36</i>
<i>65</i> <i>0,396</i>	<i>1</i> <u>4</u>	<i>1</i> <u>3</u>	<i>3</i> <u>6</u>	<i>5</i> <u>8</u>	<i>11</i> <u>12</u>	<i>18</i>	<i>25</i>	<i>36</i>
<i>129</i> <i>0,281</i>	<i>1</i> <u>6</u>	<i>1</i> <u>4</u>	<i>2</i> <u>6</u>	<i>4</i> <u>9</u>	<i>8</i> <u>13</u>	<i>16</i> <u>18</u>	<i>25</i>	<i>36</i>
<i>257</i> <i>0,199</i>	<i>1</i> <u>8</u>	<i>1</i> <u>6</u>	<i>2</i> <u>9</u>	<i>3</i> <u>9</u>	<i>6</i> <u>13</u>	<i>11</i> <u>17</u>	<i>23</i> <u>26</u>	<i>36</i>

Tableau III.1.2: Influence des nombres de modes  $N_x$  et  $N_z$  sur le choix de la condition de Courant et du pas de temps associé.

sens d'une poursuite du calcul sur plusieurs périodes. On a en effet constaté dans la pratique qu'il existait, pour chaque configuration de paramètres, un pas de temps limite séparant de manière nette : d'une part les simulations 'instables' qui divergent très rapidement (dans les toutes premières périodes), et d'autre part les simulations 'stables' qui se poursuivent, elles, sans encombre sur de multiples périodes. On s'intéresse donc ici à ce pas de temps limite, dont on tente de vérifier s'il correspond effectivement à celui prédit par la condition de Courant associée (cf. section II.1.3.1.2). Il faut ajouter que ce pas de temps limite empirique n'est néanmoins pas suffisant à s'assurer de la *convergence* en temps des simulations dites 'stables'. Toutefois, de notre expérience et ainsi qu'on l'évoquera plus en détail plus loin dans ce mémoire, ce pas de temps limite est du même ordre que le pas de temps convergé qu'on utilise pratiquement (un facteur 1/3 à 1/2 est généralement suffisant pour obtenir ce dernier).

Le tableau III.1.2 présente les résultats de cette étude sur le cas d'une houle régulière de  $5m$  dans un bassin de  $L_x = 50m \times h = 5m$ , le pic fréquentiel principal au premier ordre correspond donc au vingtième mode horizontal, et au quatre-vingtième au second ordre. Les deux lignes verticales en gras au milieu du tableau symbolisent la séparation entre les nombres totaux de modes horizontaux  $N_x$  qui incluent ou non chacun de ces pics. Nombre d'autres informations sont contenues dans ce tableau, en voici les détails :

- toutes les quantités en italique sont associées à la condition de Courant  $CFL_z$  verticale (liée à  $N_z$ ), et toutes les quantités en police droite ont à l'inverse trait à la condition de Courant  $CFL_x$  découlant de  $N_x$  ;

- dans la ligne supérieure du tableau et la première colonne sont reportés les nombres de modes, respectivement  $N_x$  et  $N_z$ , et les pas de temps des conditions de Courant correspondantes,  $\Delta t_{CFL_x}$  et  $\Delta t_{CFL_z}$  ;
- dans toutes les autres cases du tableau, l'entier présent dans le haut de la case est le diviseur minimal nécessaire à appliquer à ces pas de temps  $CFL$  pour que le calcul soit stable, et le réel porté en parties inférieures des cases est le pas de temps correspondant après division, *i.e.* la plus grande fraction du pas de temps  $CFL$  telle que le calcul soit stable ;
- dans ces mêmes cases, si la police est italique, cela signifie que les nombres de modes  $N_x$  et  $N_z$  sont tels que la condition  $CFL_z$  est la plus restrictive, et est donc choisie pour base dans l'étude du pas de temps ; à l'inverse, la police droite signifie que  $\Delta t_{CFL_x}$  sera le pas de temps de base du cas considéré ; cela résulte en une limite diagonale séparant ces deux types de cas ;
- en surajout dans les cases déterminées par la Condition  $CFL_z$ , est porté en petite police droite le diviseur correspondant au même pas de temps final stable, mais si on avait pris pour base la condition  $CFL_x$  ; la raison en est fournie ci-après, ainsi que l'explication du soulignement ou non de ces petits nombres.

A l'étude de ce tableau vient la première remarque que la stabilité du calcul liée à la condition de Courant ne dépend pas d'une description correcte de la houle physique générée, en ce sens que le fait de prendre suffisamment de modes pour s'assurer d'avoir au moins présents, dans les modes conservés, ceux correspondants respectivement aux pics fréquentiels des premier et second ordres, est sans influence sur la stabilité : les deux lignes verticales dessinées en gras ne délimitent aucune séparation spéciale dans les valeurs du tableau. Du point de vue des pas de temps maximaux stables eux-mêmes maintenant, il apparaît clairement que la simple prise en compte de la condition de Courant est en moyenne largement insuffisante à assurer la stabilité du calcul. Une analyse plus précise montre que le modèle présente un comportement nettement différent devant la variation de  $N_x$  ou celle de  $N_z$ . En fait, le tableau est globalement invariant par lignes et le pas de temps stable ne dépend presque que de la colonne, c'est-à-dire de  $N_x$ . Cela est confirmé si l'on observe les diviseurs de  $\Delta t_{CFL_x}$  (petits nombres en police droite) dans la partie où c'est théoriquement la  $CFL_z$  qui impose le choix. On a figuré par un soulignement ceux de ces diviseurs qui abondent dans ce sens. Les autres correspondent à un nombre de mode  $N_x$  nettement insuffisant et ne sont donc pas très significatifs. Si on résume, le pas de temps maximal stable :

- est imposé par la seule condition de Courant liée à  $N_x$ ,
- et résulte de la division du pas de temps correspondant  $\Delta t_{CFL_x}$  par un nombre croissant avec  $N_x$

On peut expliquer partiellement ce phénomène en se remémorant que de nos deux résolutions additionnelles à chaque sous-pas de temps, seule celle au second ordre est liée à l'avance en temps ; au premier ordre elle en est indépendante. En revanche, l'avance en

temps des modes spectraux principaux résulte d'une résolution qui est elle corrélée, aux deux ordres, au schéma d'avance en temps, et aux résultats des résolutions additionnelles préalables qui plus est. Si l'on scrute un peu plus finement la progression des diviseurs avec  $N_x$ , on s'aperçoit qu'elle évolue à peu près comme  $\sqrt{N_x}$ , ce qui se traduit, si l'on reporte cela dans la forme de la condition de Courant, par un pas de temps  $CFL \Delta t_{CFL}$  qui évoluera comme  $1/N_x$ . On retrouve ainsi au final une condition de Courant classique du type  $c\Delta t \leq \Delta x$  (cf. [1] par exemple). On vérifie bien cette caractéristique en observant, dans le tableau III.1.2, l'évolution du pas de temps maximal stable en fonction de  $N_x$ . Une précision tout de même vis-à-vis de cette dernière remarque : dans une étude similaire menée sur un bassin deux fois plus court, on a trouvé une évolution des diviseurs comme  $\sqrt{N_x}/2$ . La conclusion n'est donc pas aussi nette, il semble qu'il faille en plus tenir compte du rapport d'aspect longueur/profondeur du bassin, qui, à nombre de modes égaux, tend à imposer un pas de temps plus petit à mesure qu'il diminue.

Si l'on reporte finalement cette décroissance nécessaire du pas de temps en  $1/N_x$ , on se retrouve, à partir d'une méthode de coût global  $O(N \log_2 N \simeq N)$  à une méthode  $O(\simeq N^2)$ . Néanmoins, ce coût passe avec la même analyse à  $O(\simeq M^{3/2})$  en trois dimensions, toujours puisque la condition  $CFL_y$  n'impose rien de plus contraignant que la condition  $CFL_x$ . De plus l'augmentation du nombre de modes sur le batteur, qui compte *a priori* pour moitié n'a, elle, aucune influence (même si, pratiquement, on augmente moins  $N_z$  que  $N_x$  en raffinant). Et ce qui tempère aussi ce fait réside dans ce que, si l'on diminue le pas de temps du fait de la condition de Courant, on diminue aussi l'erreur du schéma d'avance en temps. Les diviseurs appliqués aux pas de temps imposés par la condition de Courant sont d'ailleurs tels que les niveaux des pas de temps stables résultants sont, dans les cas pratiques, nettement suffisants à estimer convergé ce schéma en temps. Ainsi, sur ce même cas, pour  $N_x = 257$  et  $N_z = 33$  par exemple, l'erreur relative constatée sur la hauteur d'une crête prise au hasard dans le fluide après quelques périodes, est de  $1,7 \cdot 10^{-4}\%$  au premier ordre et  $1,6 \cdot 10^{-3}\%$  au second ordre, entre un calcul réalisé avec le pas de temps stable maximal  $\Delta t = \Delta t_{CFL}/18$ , et un calcul effectué avec ce même pas de temps stable divisé par 64.

Par conséquent, dans la suite des calculs montrés, l'obtention d'un diviseur du pas de temps  $\Delta t_{CFL_x}$  adéquat à l'obtention d'un calcul stable constituera un critère jugé suffisant pour présider au choix du pas de temps utilisé, qui correspondra donc à un pas de temps stable maximal comme défini précédemment. Cela étant fixé, on pourra donc étudier la convergence modale à l'exclusion de l'avance en temps. Auparavant, on va lister les sources d'instabilités et d'erreurs possibles.

### III.1.4.2 Stabilité numérique et cumul d'erreurs

Si elles ne sont pas liées à un non respect du critère de stabilité lié à la condition de Courant discuté au III.1.4.1, des instabilités pourraient survenir du fait de l'évaluation des

fonctions hyperboliques sur des grands nombres. Cependant, puisqu'on ne dépasse pas le niveau  $z = 0$  (respectivement  $x = 0$  sur le batteur) grâce au développement en série de perturbation, les rapports de fonctions hyperboliques, transformés en exponentielles comme mentionné au III.1.3.6, se ramènent à l'évaluation de seules exponentielles négatives non divergentes. Cette même caractéristique a été déjà rencontrée avec les méthodes HOS (cf. II.1.3.2.2), cependant elle trouvait alors sa contrepartie négative dans le cumul des erreurs associé à cette méthode, imposant notamment d'opérer un anti-repliement soigné. Ici, toutes nos séries étant simples (non développées en sous-ordres comme en HOS), on ne rencontre pas ce problème, même si les erreurs aux deux ordres sont bien entendu corrélées. On a de plus vu au chapitre II.2 que l'anti-repliement n'est pas vraiment nécessaire dans notre code de calcul au second ordre.

Un ultime paramètre influant sur la stabilité est la présence d'une rampe en temps, afin d'éviter le développement d'un régime transitoire trop violent découlant d'une mise en mouvement du batteur insuffisamment progressive. Sans cette rampe, il faut encore diminuer légèrement le pas de temps stable maximal précédent pour assurer la stabilité. Cela excepté, une fois le pas de temps stable choisi, l'erreur globale de la méthode n'est finalement plus liée qu'à la convergence modale du modèle à laquelle on s'intéresse désormais.

### III.1.4.3 Convergence modale

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné au chapitre I.2, l'ordre de convergence se situe à trois niveaux pour les méthodes spectrales : tout d'abord à celui des amplitudes modales elles-mêmes, ce qui est spécifique à ces techniques ; puis à celui des quantités globales reconstruites sur la base de ces modes, tel le potentiel par exemple, ou des grandeurs en dérivant, comme l'élévation de surface libre ; et enfin à celui des quantités résultant d'intégrales de ces grandeurs globales tels les volumes et énergies. On va ici s'intéresser aux deux premiers types de convergence, laissant la convergence des quantités intégrées pour la section suivante III.1.4.4 traitant des bilans volumique et énergétique.

Comme on l'a vu dans les généralités sur cette approche spectrale (cf. I.2), le fait de prendre en compte une déformée *a priori* quelconque dans notre domaine spectral principal induit un ordre de décroissance des amplitudes modales théoriquement égal à deux ou supérieur. La nouveauté ici est qu'on a ajouté un domaine additionnel qui possède lui-même une surface de fermeture : le 'batteur unifié' du III.1.3.1. Dans cette même section, on avait aussi exposé que les conditions batteur qui déterminent cette surface sont au moins  $C^0$  au premier ordre de perturbation, et légèrement discontinue au deuxième ordre pour un batteur à axe rotatif (type 'serpent' par exemple). En revanche pour ce type de batteur, la réplique périodique de cette surface, réalisée intrinsèquement par la décomposition spectrale, est par contre  $C^\infty$  aux bords du domaine ( $z = -1$  et  $z = 3$ ) puisque l'absence de déformée du batteur (partie fixe entre  $z = -1$  et l'axe de rotation) y induit des conditions homogènes. A l'inverse, si l'on se place dans le cas d'un batteur piston, qui se déplace lui

jusqu'au fond du bassin, la réplication périodique de la condition correspondante sur le batteur unifié au second ordre ne sera alors que  $C^0$  aux bords du domaine (en  $z = -1$  et  $z = 3$ ). Par contre, ce type de batteur n'ayant pas d'axe de rotation, il n'y a pas de rupture de pente dans sa géométrie, et l'ordre de singularité des conditions sur le batteur unifié ne dépendent que du raccord choisi pour le batteur unifié, soit  $C^1$ . La condition répliquée au second ordre est donc  $C^0$  ( $C^1$  au premier ordre), la décroissance modale du potentiel additionnel associée doit donc théoriquement être d'ordre au moins égal à 2. Si l'on revient maintenant aux batteurs à axe rotatif qui nous intéressent plus, les conditions répliquées sur le batteur sont globalement  $C^0$  au premier ordre et légèrement discontinues au second, à cause de la rupture de pente dans la géométrie du batteur. Les ordres de décroissance théoriques des amplitudes modales additionnelles correspondantes sont donc de deux pour le premier ordre, et de un seulement pour le second. Toutefois, la légère singularité due à cette rupture de pente ne se traduit pas dans la pratique par un ordre de décroissance aussi pauvre. On peut avancer deux hypothèses pour expliquer cela, qui restent du domaine de la spéculation n'ayant eu le temps de les explorer plus avant. Premièrement, cette singularité est d'amplitude restreinte (surtout au second ordre pour lequel on avait illustré au III.1.3.1 qu'elle n'est pas visible à l'oeil sur la condition globale sur le batteur à cet ordre). Deuxièmement, purement numériquement, cela est peut-être lié à la distribution des noeuds de collocation sur le batteur, qui restent en nombre finalement assez restreint dans nos simulations. Plus clairement par exemple, tant qu'on ne dispose pas un noeud exactement sur l'axe de rotation du batteur, la discontinuité de pente est discrétisée de la même manière qu'un angle arrondi dont le rayon de courbure diminuerait avec le raffinement de la discrétisation. Quoi qu'il en soit, cette meilleure décroissance est très probablement liée à des aspects numériques, et on ne se plaindra pas qu'elle apparaisse dans la gamme de modes qu'on utilise.

Cette petite précision effectuée quant à la décroissance des amplitudes modales, il convient d'en donner une autre ayant trait à la convergence des quantités reconstruites. En effet, on avait dans un premier temps étudié cette convergence séparément selon les modes spectraux principaux et les modes additionnels, *i.e.* en fixant  $N_z$  à une valeur suffisante pour s'assurer la convergence de ce paramètre et en observant l'influence de  $N_x$ , et réciproquement. Toutefois, cela ne fournissait pas les tendances attendues alors même que les grandeurs intégrées convergeaient elles dans les proportions escomptées. De fait, les deux résolutions étant imbriquées dans l'avance en temps et les grandeurs principales procédant à chaque sous-pas de temps des résolutions additionnelles préalables, pour être consistante l'étude de la convergence des grandeurs globales reconstruites –qui incluent à la fois des termes principaux et des termes additionnels– doit être menée de pair pour les deux séries modales. Ainsi, l'analyse qui suit est réalisée sur la base de nombres de modes  $N_x$  et  $N_z$  conservés dans la même proportion dans les différents essais. En revanche, l'étude des quantités additionnelles pré-résolues seules converge bien, elle, avec  $N_z$ . Précisons aussi que l'influence de  $N_y$  n'est pas présentée, d'une part parce qu'il n'est pas d'obstacle à l'extension à trois dimensions des conclusions dérivées de cette analyse bi-dimensionnelle, et

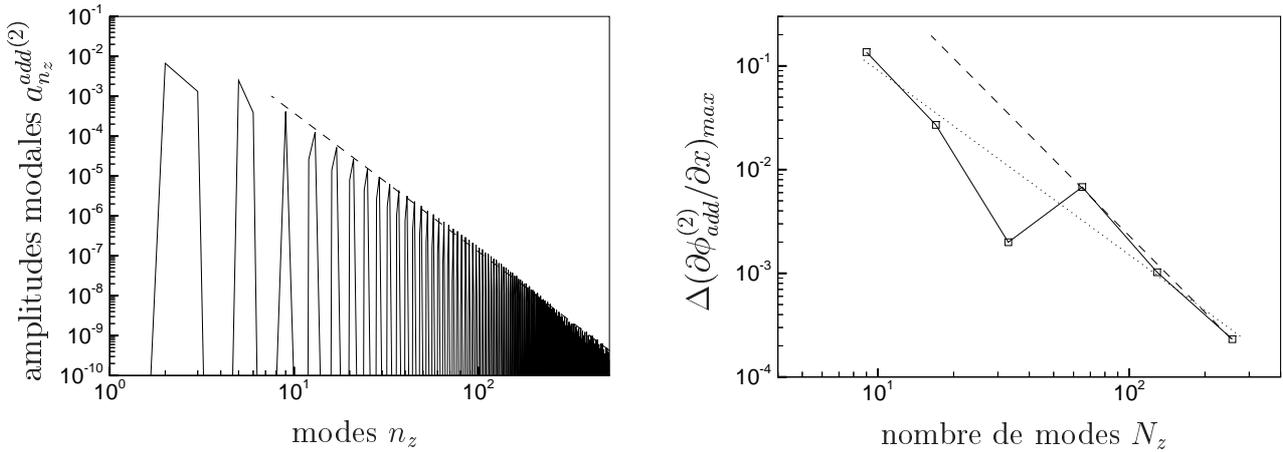


Figure III.1.9: Composition modale et convergence du potentiel additionnel au second ordre.

d'autre part parce qu'il est plus facile de réaliser l'étude en deux dimensions.

Cette étude a été menée sur le cas d'une houle de cinq mètres dans un bassin de  $25m \times 5m$ , le batteur est de type volet accroché à  $2,147m$  du fond. Une amplitude cible arbitraire de  $0,2m$  est choisie, elle déterminera le rapport entre les déformées aux premier et second ordres, dont on peut déduire ensuite sans calcul les résultats pour n'importe quelle amplitude (par proportion linéaire au premier ordre, et quadratique au second), ce qui est un autre avantage inhérent au développement en série de perturbations. Une rampe en temps régulière de  $4s$  est appliquée, et une absorption quadratique est mise en oeuvre sur une longueur d'onde en bout de bassin, avec un coefficient  $\underline{\nu} = 0,7$ . Pour éviter tout effet émanant du schéma d'avance en temps, on se place dans tous les essais à un pas de temps fixe qui est le plus petit imposé sur l'ensemble de ces essais, *i.e.* celui imposé par l'essai mettant en jeu le plus grand nombre de modes, soit finalement  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$  en adimensionnel.

En premier lieu, on peut s'intéresser au potentiel additionnel seul, et spécialement au second ordre de perturbation où la condition sur le batteur, d'une part ne dépend pas du seul mouvement du batteur connu analytiquement contrairement au premier ordre, et d'autre part présente la légère discontinuité qu'on vient d'évoquer. La figure III.1.9 présente, dans sa partie gauche, la composition modale du potentiel additionnel à cet ordre pour  $N_z = 513$ , ici considérée à  $t = 35$ . A droite, l'ordre de décroissance de la dérivée horizontale de ce même potentiel en fonction du nombre de modes additionnels  $N_z$  est figurée, prise en  $z = 0$  sur le batteur à ce même instant, instant qui correspond à un pic pour cette grandeur. La valeur de  $N_x = 513$  est conservée dans tous ces essais. Tel qu'on peut le voir sur la partie gauche de cette figure, la décroissance des amplitudes modales est d'un ordre bien supérieur à l'ordre un escompté, en fait proche de  $3,5$ . De plus, cette décroissance a été trouvée faiblement fluctuante autour de cette valeur en fonction de l'instant choisi (variant entre  $3$  à  $3,6$ ). Ainsi qu'établi au I.2.1.2, cela se traduit théoriquement par une

convergence des grandeurs locales, reconstruites des séries, au même ordre en fonction du nombre de modes total conservé. Sur la partie droite de la figure, cette décroissance est montrée (en trait plein) sur  $\partial\phi_{add}^{(2)}/\partial x$  en erreur relative par rapport au calcul pour  $N_z = 1025$  considéré comme convergé. On constate une cassure inattendue au milieu de cette décroissance qui reprend au même rythme ensuite. Après exploration de ce phénomène, on a pu le relier à l'apparition d'un noeud de collocation très légèrement au-dessus de l'axe de rotation où est localisée la discontinuité de la condition batteur à cet ordre. Ce noeud est ensuite maintenu pour des nombres de modes plus élevés puisqu'on raffine par puissances de deux. Après cet 'incident', l'ordre de convergence est de 2,5 environ, ordre d'ailleurs environ identique avant l'incident'. Il paraît donc plus valable de considérer ce taux de décroissance matérialisé par la droite en tireté sur la figure, plutôt de faire une moyenne qui semble un peu artificielle (en pointillé) qui résulterait en une décroissance d'ordre 1,8 environ. Conservant donc cette valeur de 2,5 on peut faire les deux conclusions suivantes : d'abord qu'on a indûment perdu entre un demi et un ordre de décroissance en reconstruisant la grandeur, mais surtout qu'on obtient un ordre de décroissance supérieur à deux, malgré la légère discontinuité de la condition sur le batteur. La première des deux conclusions n'est pas très heureuse et se retrouve souvent dans nos reconstructions, probablement pour des raisons numériques fines. Mais cette remarque est tempérée par la seconde conclusion qui est elle très positive. On remarquera aussi que l'erreur relative est inférieure au pour cent dès 33 modes conservés. Il convient d'ajouter en exergue que, d'une manière générale, si l'on s'intéresse à des dérivées des potentiels plutôt qu'à ces potentiels eux-même, c'est parce que ce sont ces grandeurs qui sont utilisées dans notre résolution et non pas les potentiels.

Ensuite, on a porté notre attention sur les grandeurs globales qui nous intéressent le plus au final, c'est-à-dire les élévations de surface libre. De plus, elles résultent du calcul de tous les autres termes via les conditions de surface libre, leur convergence est donc signifi-

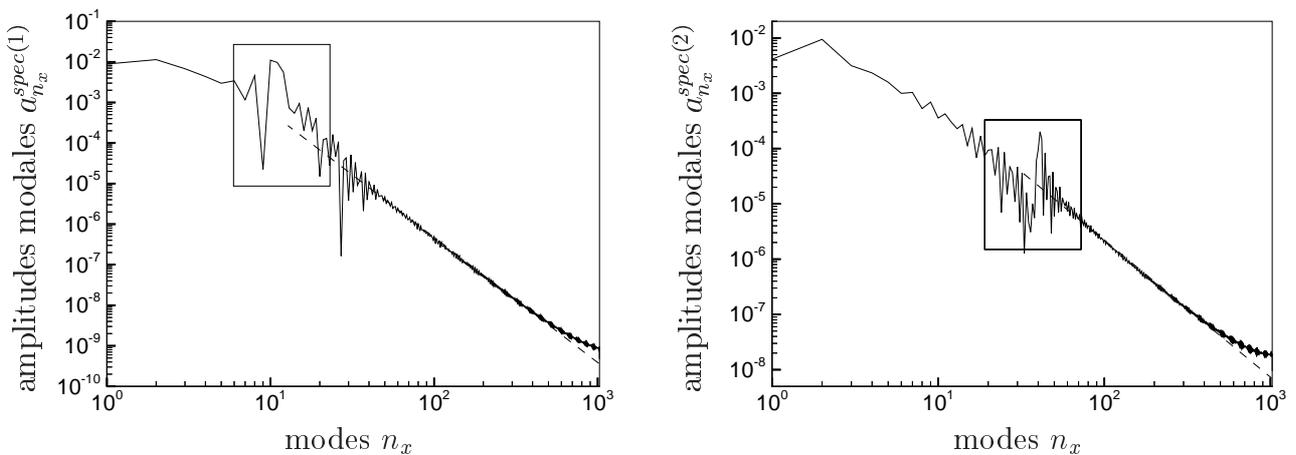


Figure III.1.10: Composition modale du potentiel spectral principal aux deux ordres de perturbation.

cative. Ainsi qu'on l'a mentionné plus haut, on a mené cette analyse en maintenant corrélés les nombres de modes additionnels et principaux utilisés, partant de  $(N_x = 33, N_z = 9)$  pour aller jusqu'aux valeurs élevées de  $(N_x = 2049, N_z = 513)$ . Ce dernier cas a servi de référence et les erreurs relatives montrées sont calculées par rapport à cette valeur. Sur la figure III.1.10 sont présentées les amplitudes modales aux deux ordres à  $t = 50$  sur le cas  $(1025, 257)$ . Après les présences bien visibles des pics aux valeurs théoriques des modes 10 au premier ordre et 20 (lié) ainsi que 40 (libre) au second (cf. III.1.5.1 pour la distinction entre libre et lié), on observe une décroissance régulière avec une légère déviation finale due à la troncature. Les ordres mesurés de ces deux décroissances sont de 3,1 au premier ordre et 2,5 au second. Là encore, de légères fluctuations de ces ordres de décroissance sont constatées en fonction de l'instant choisi, surtout au second ordre de perturbation où la valeur descend parfois jusqu'à 1,9. Si l'on s'attache maintenant aux grandeurs globales, on trouve sur la figure III.1.11 la convergence sur les élévations de surface libre aux deux ordres à l'instant  $t = 50$ , on se situe alors en régime établi. La houle montrée présente les caractéristiques de régularité attendues, et au second ordre on retrouve bien un signal stable de longueur d'onde deux fois plus courte dans lequel l'influence des ondes libres est nettement visible, notamment dans les creux. Visuellement, on peut noter une convergence rapide des déformées vers leurs valeurs de référence. Il faut mentionner que le cas  $(33, 9)$  n'est pas porté au second ordre puisque le pic du train d'ondes libres au second ordre se trouvant à la valeur supérieure de 40, ce calcul n'est pas consistant. On a ensuite étudié plus précisément cette convergence sur le creux (au premier ordre) et le pic (au second ordre) présents en  $x = 1,4$  environ, position qui détient l'avantage de présenter un noeud de collocation pour tous les nombres de modes  $N_x$  utilisés. Les décroissances mesurées sont présentées dans les deux vignettes en bas de la figure III.1.11, en valeurs relatives au calcul de référence  $(2049, 513)$ . Les convergences mesurées sont d'un ordre 2,2 au premier ordre de perturbation, et d'un ordre même légèrement supérieur de 2,4 au second, pour lequel on n'a donc pratiquement pas perdu à la reconstruction, étonnamment. Outre ces ordres satisfaisants, il faut aussi s'intéresser aux niveaux de précision, qui tombent sous le pour cent d'erreur relative dès  $(129, 33)$  modes au premier ordre de perturbation, et  $(257, 65)$  au second.

En définitive, sur l'ensemble des grandeurs globales reconstruites auxquelles on s'est attaché, on a constaté une convergence d'ordre au moins égal à deux à chacun des ordres de perturbation, avec des niveaux de précision associés permettant des calculs avec relativement peu de modes et donc peu coûteux en temps. Ces tendances satisfaisantes découlent de décroissances des amplitudes modales qui sont supérieures à celles qu'on pouvait appréhender de prime abord théorique, notamment la singularité de la condition sur le batteur au second ordre ne ralentit pas cette décroissance. Par ailleurs, si les quantités additionnelles prises séparément convergent rapidement avec  $N_z$  (0,1% d'erreur relative au second ordre pour seulement 129 modes), ce paramètre  $N_z$  doit toutefois être choisi précautionneusement pour assurer la consistance de la convergence globale au second ordre. L'explication la plus probable en est que les quantités globales du premier ordre impliquées dans la condition

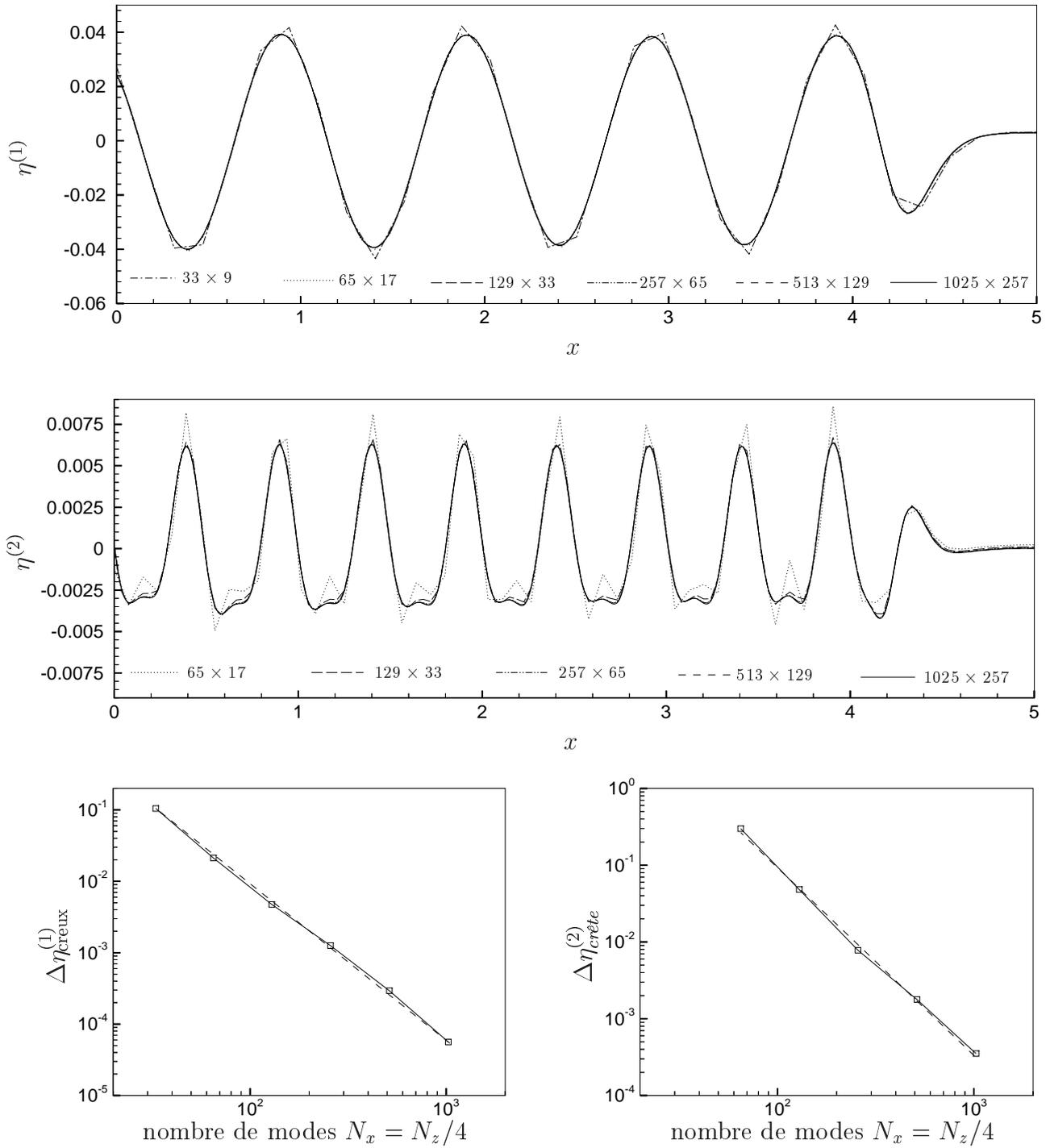


Figure III.1.11: Convergence sur les élévations de surface libre aux premier et second ordres.

batteur au second ordre ne peuvent pas être considérées comme seulement dépendantes de  $N_x$ , et donc une étude de convergence à cet ordre, sur  $N_x$  à  $N_z$  fixé, n'est pas consistante. A l'inverse cependant, la décroissance rapide des amplitudes modales additionnelles qui s'opère régulièrement dès les premiers modes (et non après un pic correspondant au spectre de houle généré comme pour les modes principaux), laisse à penser que si maintenir des nombres de modes  $N_x$  et  $N_z$  corrélés est une bonne chose, cela peut se faire dans un ratio important (plus important même que le ratio  $N_z = N_x/4$  utilisé dans l'analyse précédente). On voit là l'intérêt d'avoir séparé ces deux nombres lors de la refonte du code, permettant de régler ce paramètre. Comme toute dernière remarque avant que de passer aux quantités intégrées, on rappelle que même si une convergence d'ordre légèrement supérieur à deux n'est pas 'mirobolante', ce n'est pas non plus une convergence pauvre ; et l'utilisation associée des FFTs de coût  $O(N \log_2 N)$  place ce modèle dans la catégorie des modèles rapides pour les niveaux de précision constatés.

### III.1.4.4 Conservation du volume et bilan énergétique

L'intégration utilisée pour calculer les différentes composantes du volume et de l'énergie est une simple méthode des trapèzes, qui converge à l'ordre  $p$  égal à deux pour une fonction régulière. L'ordre de convergence de quantités intégrées par cette méthode est donc égal à  $\min(p, q)$ , où  $q$  est l'ordre de convergence de l'intégrand (cf. section I.2.1.2). Or on a vu à la section précédente III.1.4.3 que nos intégrands étaient eux-même d'ordre deux ou légèrement supérieur, on devrait donc théoriquement retrouver, après intégration, des volumes et énergies convergeant à des ordres eux aussi voisins de deux. Leur étude est ici présentée sur le même cas bi-dimensionnel qu'à la section précédente.

**Volume.** Comme on l'a mentionné au chapitre III.1.4.4 où l'on a présenté les bilans volumique et énergétique, la conservation du volume initial  $L_x$  va s'opérer, à tout instant, au moyen d'une compensation du volume déplacé par le batteur  $V_B^{(i)}$ , par une élévation correspondante du niveau moyen de la surface libre, et ce à chaque ordre. On va donc s'intéresser à ces deux sous-volumes  $V_B^{(i)}$  et  $V_{SL}^{(i)}$  à chaque ordre, et à leur différence. La figure III.1.12 présente le bilan de cette étude, menée comme précédemment en augmentant en proportion le nombre de modes  $N_z$  sur le batteur et  $N_x$  sur la surface libre, qui sont aussi les nombres de points des intégrations spatiales. Dans le quadrant a) en haut et à gauche, sont présentées les évolutions des volumes aux premier et second ordre, avec en tirets les parties associées aux élévations de surface libre  $V_{SL}^{(i)}$ , et en pointillés celles provenant du déplacement du batteur  $V_B^{(i)}$ . Les différences  $V^{(i)}$  de ces deux quantités à chaque ordre sont portées en traits pleins, elles ne se distinguent pas visuellement du zéro pour ce cas convergé où ( $N_x = 1025, N_z = 257$ ). Les deux quadrants du bas c) et d) montrent plus précisément les évolutions temporelles de ces volumes résultant  $V^{(i)}$  à chacun des deux ordres, en fonction des nombres de modes évoluant par puissances de deux de ( $N_x = 33, N_z = 9$ ) à ( $N_x = 1025, N_z = 257$ ), comme à la section précédente. Au premier ordre de perturbation, la différence  $V^{(1)}$  se présente comme une simple oscillation à  $\omega$  dont l'amplitude converge

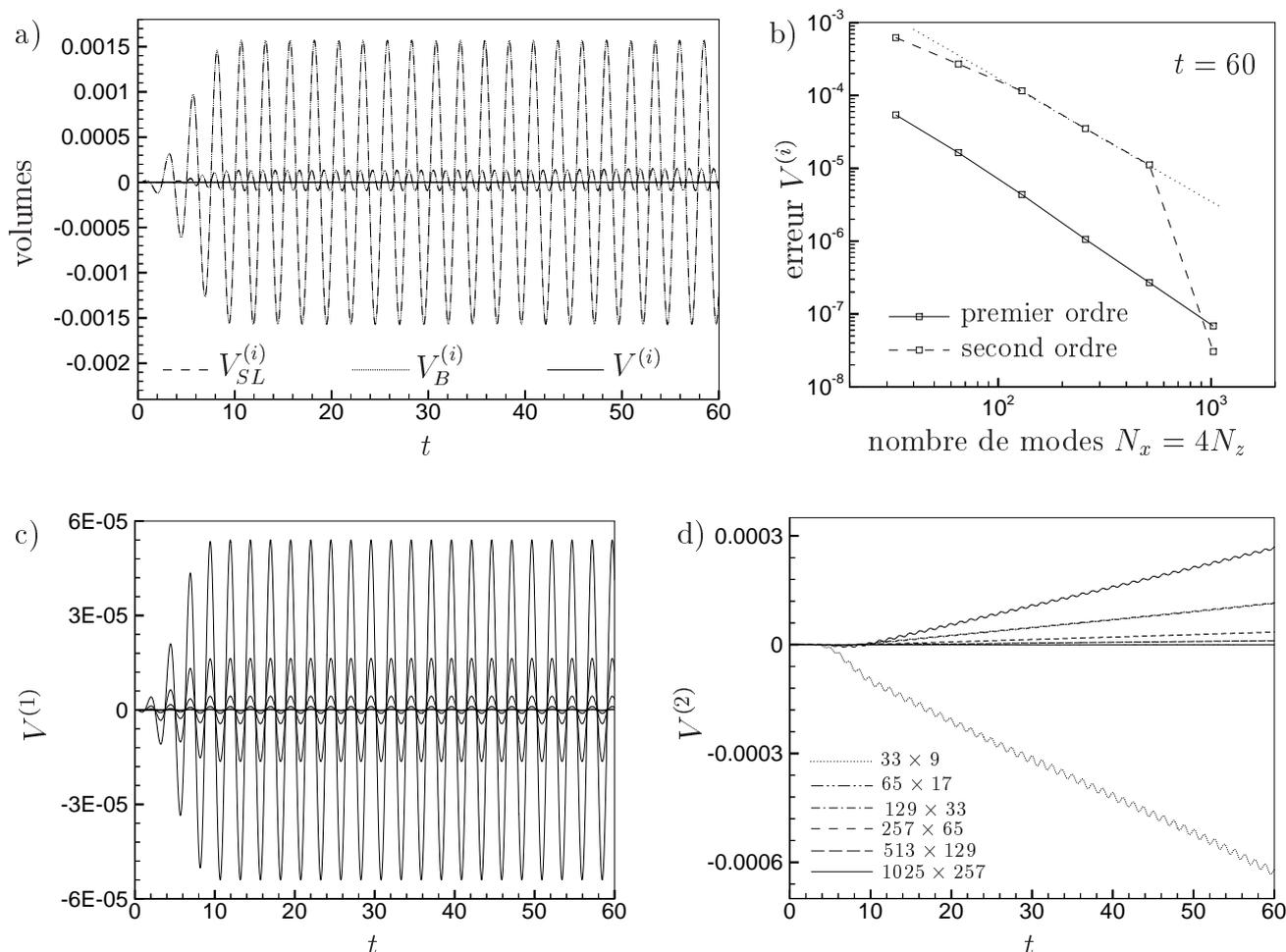


Figure III.1.12: Convergence des volumes aux premier et second ordres.

régulièrement vers zéro avec le nombre de modes ; l'ordre de décroissance est mesuré sur le pic à  $t = 50$ . Au second ordre, c'est surtout une dérive constante qui domine, convergeant elle aussi. Afin d'étudier l'ordre de convergence, on a choisi de considérer la valeur de cette dérive au dernier instant ( $t = 60$ ). L'ordre de cette décroissance est analysé dans le dernier quadrant b) en haut à droite, aux deux ordres de perturbation. Au premier ordre de perturbation, l'amplitude des oscillations de  $V^{(1)}$  converge à un ordre deux presque parfait. Au second ordre, la situation est un peu moins nette, avec une forte accélération de la convergence pour le nombre de modes le plus élevé (dont on a vérifié qu'elle n'est pas due au hasard d'une convergence en temps qui ne serait pas encore établie à ce nombre de modes). Cependant, la convergence est au minimum de la pente de la droite figurée en pointillés –soit 1,7– et bien supérieure si on inclut le dernier point. En définitive, on peut donc conclure à une convergence d'ordre deux sur l'évolution des volumes aux deux ordres de perturbation. Sur ces mêmes graphes de convergence portés en b) on remarquera aussi les faibles niveaux des erreurs sur le volume, qui sont déjà inférieurs à  $10^{-3}$  pour le nombre de modes le plus faible ( $N_x = 33$ ). Qui plus est, la stabilité des signaux présentés

une fois la rampe en temps dépassée est notable, on ne décèle par exemple quasiment pas de perturbations associées à l'entrée en action de la plage absorbante vers  $t = 30$ .

**Énergie.** On mène ensuite une étude similaire sur les énergies. Comme il a été décrit à la section III.1.4.4, le bilan énergétique limité aux ordres un et deux du développement en série de perturbation se décline en deux niveaux d'approximation distincts :  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon^3$  correspondant aux bilans (III.1.23) et (III.1.24), qu'on appellera par analogie : 'premier ordre' et 'second ordre' car le premier des deux ne fait intervenir que des termes du premier ordre, et le second des termes des deux ordres (*stricto sensu* ces dénominations sont impropres puisqu'elles correspondent respectivement aux puissances deux et trois de  $\varepsilon$ ). La figure III.1.13 présente les évolutions temporelles des termes (regroupés) de ces bilans, et l'analyse de convergence afférente.

Au 'premier ordre' on observe, sur la première partie a) de cette illustration, les trois phases du développement du train d'onde : introduction d'énergie pendant la mise en mouvement progressive du batteur par la rampe en temps, puis pendant que le train d'ondes progresse jusqu'à la plage absorbante, et enfin stabilisation du bilan énergétique moyen par équilibre entre l'énergie fournie par le batteur et celle absorbée par la plage. Un léger accroissement néanmoins de l'énergie totale  $E^{(1)}$  dans cette dernière phase établie traduit le fait que l'absorption est imparfaite. Ce premier graphe a) est montré pour le nombre de modes utilisé le plus élevé ( $N_x = 1025, N_z = 257$ ). Par souci de clarté, on n'a pas tracé le travail de la force exercée par le batteur, mais uniquement sa différence  $\Delta E^{(1)}$  à l'énergie totale  $E^{(1)}$ , qui représente la somme des autres énergies : potentielle, cinétique (incluant aussi le travail de la plage absorbante). L'étude de la convergence avec le nombre de modes aurait logiquement dû être illustrée sur cette quantité  $\Delta E^{(1)}$ , mais on s'est aperçu qu'on obtenait effectivement une décroissance d'ordre 2, mais vers un résidu non nul et d'emblée d'un niveau très faible ( $6 \cdot 10^{-4}\%$  de l'énergie totale, dès le plus faible nombre de modes utilisé), oscillant régulièrement à  $\omega$ . Toutefois, on a pu vérifier que ce résidu, déjà presque négligeable, converge bien vers zéro avec le pas de temps. Néanmoins, il a paru préférable de montrer la convergence sur l'énergie totale  $E^{(1)}$  elle-même plutôt que sur ce résidu, en traçant l'erreur relative par rapport à la valeur pour le plus grand nombre de mode, considérée comme convergée. La partie c) de la figure III.1.13 illustre cette convergence, et montre la décroissance en fonction du nombre de modes prise en  $t = 60$ . Cette décroissance est régulière, d'ordre 2,2.

Au 'second ordre', on applique la même démarche. Les composantes de l'énergie sont cette fois de moyenne nulle au cours de l'apparition du train d'onde et de sa progression, le batteur n'introduit donc pas d'énergie à cet ordre en moyenne. Là aussi, on décèle aisément dans les signaux le début du régime établi où l'absorption s'opère. Cette fois, la différence  $\Delta E^{(2)}$  entre le travail du batteur et les autres énergies en présence n'est pas un résidu d'emblée négligeable, mais une légère dérive qui converge régulièrement avec le nombre de modes (partie d) de la figure III.1.13). On a donc analysé la décroissance de l'erreur sur cette quantité prise à son maximum, en  $t = 60$ , décroissance dont on peut voir sur

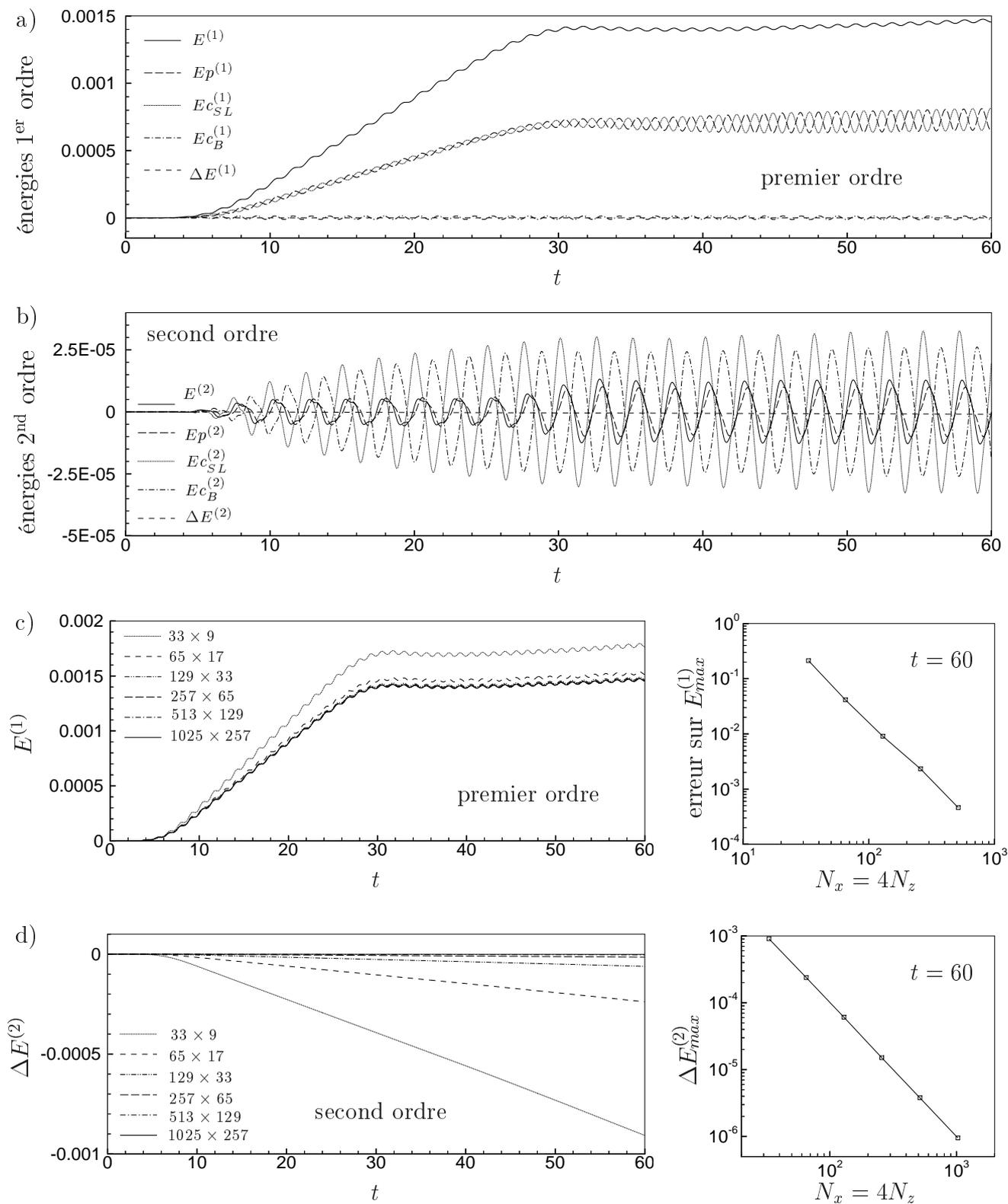


Figure III.1.13: Convergence des énergies aux premier et second ordres.

la partie droite de d) qu'elle est régulière, d'ordre deux presque exactement. Le niveau de cette erreur est là encore à noter, inférieur à 0,1% dès le plus petit nombre de modes utilisé ( $N_x = 33, N_z = 9$ ).

En conclusion, l'étude de ces bilans énergétiques, qui constitue un critère global significatif de la fiabilité du modèle, a d'une part montré la stabilité et le faible niveau d'erreur de l'approche employée, et a permis d'autre part de retrouver la convergence à l'ordre deux escomptée. Après ces vérifications, on peut désormais aborder le sujet de l'efficacité globale du modèle, déterminée par les temps de calcul mis en jeu.

### III.1.4.5 Temps de calcul et paramètres associés

Suite au constat d'un modèle trop lent par rapport aux caractéristiques escomptées, on a opéré à la refonte détaillée au III.1.3.6 dont on peut mesurer l'effet sur la figure III.1.14 qui compare le temps de calcul global d'un pas de temps entre l'ancienne version et la nouvelle, *SWEET*. Il apparaît clairement que l'ancienne version était  $O(M^2)$  (courbe

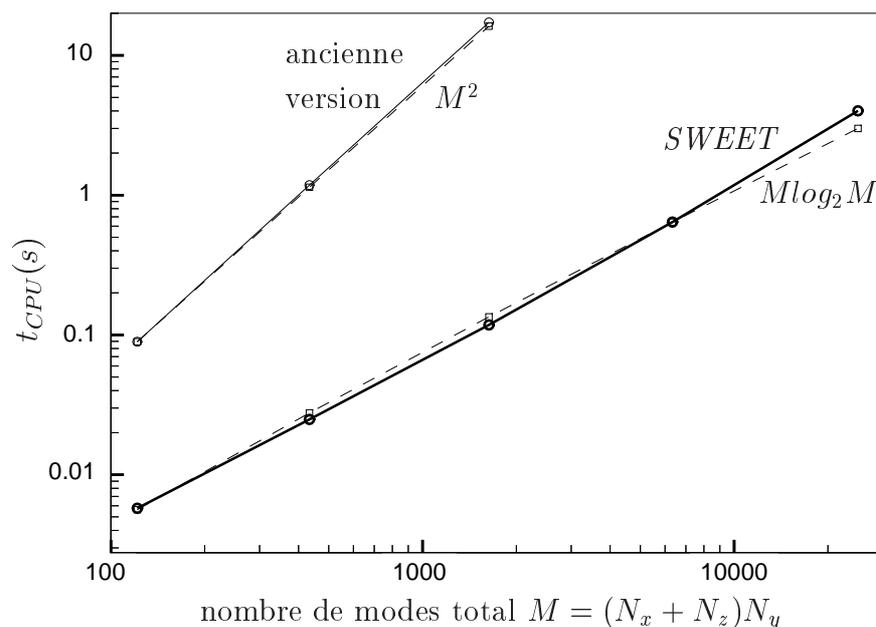


Figure III.1.14: Temps de calcul global d'un pas de temps en fonction du nombre de modes total.

figurée en tirets). La nouvelle version quant à elle est globalement  $O(M \log_2 M)$  (autre courbe en tirets) dans la gamme des nombres de modes utilisée usuellement (jusqu'à 25000). L'influence du  $\sqrt{M}$  prédite au III.1.3.6 par une analyse rapide du coût global (alors évalué grossièrement à  $M(\sqrt{M} + \log_2 M)$ ) ne se fait donc pas ressentir pleinement dans cette gamme, ce dont on ne se plaindra pas. En définitive, on profite cette fois complètement des caractéristiques des FFTs liées à la méthode spectrale employée.

Par delà le taux de convergence, c'est aussi aux niveaux absolus des temps de calcul qu'il faut porter attention, ils sont exprimés en secondes sur un Pentium III 1GHz. Une simulation fine bi-dimensionnelle ( $N_x = 513, N_z = 65$ ) verra ainsi un pas de temps complet calculé en 0,04s environ, soit de l'ordre d'un quart d'heure de calcul au total, avec une prise en compte de longueurs d'ondes jusqu'à  $1/250^{\text{ème}}$  de la longueur du bassin. Pour un cas tri-dimensionnel qu'on utilise fréquemment ( $N_x = 129, N_y = 33, N_z = 33$ ), le calcul d'un pas de temps global prend environ 0,6s, soit de l'ordre d'une heure de calcul pour une simulation complète; alors que le plus gros calcul tri-dimensionnel qu'on ait réalisé ( $N_x = 257, N_y = 129, N_z = 65$ ) tourne en une nuit.

On peut ensuite s'intéresser plus précisément à cette même évolution des coûts du calcul d'un pas de temps, mais cette fois séparément en fonction des nombres de mode dans chaque direction. La figure III.1.15 montre les tendances obtenues sur le même cas

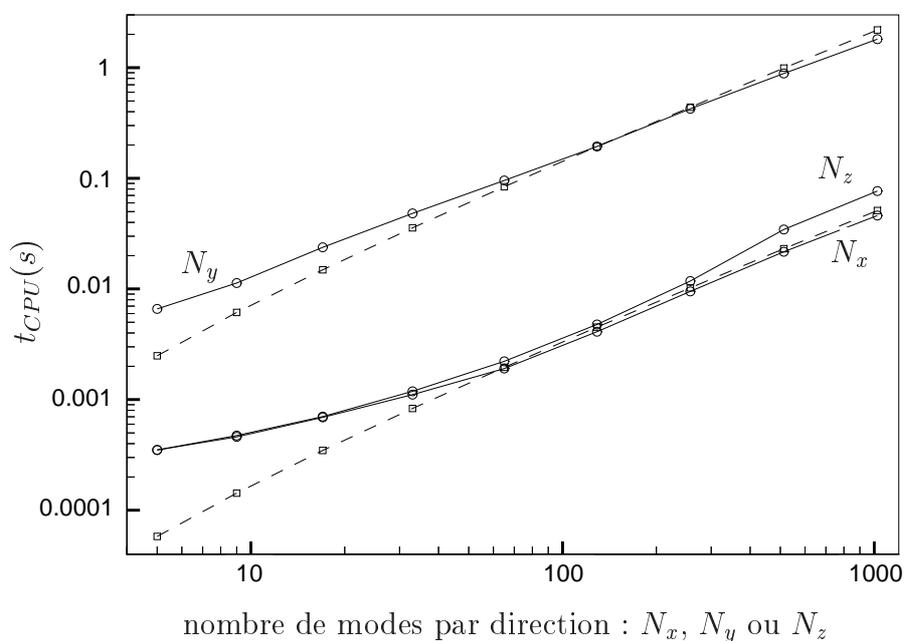


Figure III.1.15: Temps de calcul global d'un pas de temps en fonction des influences des nombres de modes par direction.

qu'au III.1.4.1, considéré bi-dimensionnel pour  $N_x$  et  $N_z$  (avec respectivement des nombres de modes totaux  $M = N_x \times 1 \times 9$  et  $M = 5 \times 1 \times N_z$ ), et nécessairement tri-dimensionnel pour  $N_y$  ( $M = 17 \times N_y \times 9$ ) pour lequel les temps  $CPU$  tracés sont par conséquent d'un niveau supérieur. Les droites en tirets figurent des évolutions en  $N \log_2 N$ . Globalement, si on excepte un petit résidu initial pour des nombres de modes très faibles (probablement dû à de petits calculs annexes et à la gestion interne à Windows), les évolutions pour  $N_x$  et  $N_z$  suivent bien une tendance proche de  $N \log_2 N$ . En revanche, pour  $N_y$  (où le résidu précédent n'apparaît pas du fait d'un nombre de modes total plus élevé, suite à la présence d'une troisième dimension) la tendance est d'un ordre inférieur à  $N \log_2 N$ , en fait proche de  $N$ . Cette différence dans les tendances peut s'expliquer par le fait que, contrairement

à  $N_x$  et  $N_z$ ,  $N_y$  intervient dans toutes les séries, et fait toujours l'objet d'une évaluation par FFT et non par produit (*i.e.* est toujours inclus à la fois dans les FFTs mono- et bi-directionnelles telles que définies à la sous-section III.1.3.6). Cependant, cela devrait plutôt résulter en ce que  $N_y$  suive effectivement une évolution  $N \log_2 N$ , et que ce soit  $N_x$  et  $N_z$  qui aient une évolution d'ordre légèrement supérieure (cf. III.1.3.6). Cette obtention de performances globales meilleures que celles escomptées n'est pas expliquée à ce jour, hormis par l'hypothèse qu'elle serait simplement due à une meilleure optimisation à la compilation des grands nombres d'opérations impliqués dans les calculs avec beaucoup de modes.

Finalement, on peut donc considérer atteint l'objectif de disposer d'un modèle rapide, avec des performances sur un PC même légèrement meilleures qu'attendues. L'exploration de la convergence spectrale du modèle a parallèlement fourni les balises nécessaires à une utilisation maîtrisée de ce code. Ainsi, une fois le pas de temps précautionneusement choisi comme détaillé au III.1.4.1, on dispose désormais *a priori* des outils de compréhension des phénomènes numériques nécessaires à une mise en application pertinente du modèle.

### III.1.5 Validations et applications

Ces caractéristiques numériques établies, on va désormais se consacrer à montrer les résultats des validations qui ont été conduites, et les applications qu'on peut obtenir de ce modèle. Une comparaison à une théorie analytique a déjà servi au II.2.1 de validation de son noyau au second ordre, *i.e.* le problème principal sans potentiel additionnel dans le domaine sans batteur. Chronologiquement, l'étape suivante a été d'effectuer la même comparaison à la solution d'Hudspeth & Sulisz [72] en régime établi, que Stassen a réalisée [119] dans sa thèse. Puisque Fé.Bo. a ensuite développé une théorie analytique tri-dimensionnelle au second ordre (cf. III.1.5.1), d'une part plus évoluée, et à notre entière disposition d'autre part, on n'a pas jugé utile de reproduire ici les résultats de cette comparaison. On peut simplement mentionner qu'on obtenait, avec une discrétisation plus légère que celle de Stassen ( $N_x = 513$  contre 800 segments sur la surface libre), des résultats sensiblement plus précis aux deux ordres. Mais il faut préciser néanmoins que le modèle de Stassen [119] basé sur une méthode intégrale, s'il n'est que bi-dimensionnel et selon toute probabilité moins rapide que celui présenté ici, est formulé pour sa part jusqu'au troisième ordre. Ce petit éclaircissement réalisé, on peut désormais développer les comparaisons menées à la solution analytique en régime établi dont on dispose.

#### III.1.5.1 Comparaison à la solution analytique en régime établi

L'étude analytique aux premier et second ordres du fonctionnement en régime établi de bassins de houle a connu finalement peu d'avancées entre la première théorie linéaire de Havelock de 1929 [71], pour une houle régulière en bassin bi-dimensionnel semi-infini, et les

années 1980. Dans l'intervalle, on peut néanmoins signaler les travaux des Français Biésel [10] qui introduisit en 1954 le principe d'imposer un mouvement 'serpent' à un batteur tri-dimensionnel pour générer de la houle avec un angle, et Fontanet [52] qui proposa une des premières approches au second ordre pour un batteur piston, mais sans prendre en compte les modes évanescents. Avant de poursuivre dans ce bref historique de ces méthodes analytiques, il est peut-être plus simple d'en lister les caractéristiques pour pouvoir ensuite les classer plus aisément, le but étant ici de positionner la méthode développée par Fé.Bo. [VII] à laquelle on compare notre modèle, et non de mener une revue exhaustive (pour cela, se référer à Svendsen [125] pour le premier ordre, et à l'introduction de Schäffer [111] pour le second). En conséquence, seules les grandes étapes seront mentionnées ici. Ainsi, il est possible de distinguer ces approches par les niveaux de complexité suivants :

leur ordre d'approximation tout d'abord :

1. théorie linéaire,
2. ou théorie formulée au second ordre (jusqu'à présent) ;
3. et ce, pour une houle régulière,
4. ou une houle irrégulière ;

avec aux deux ordres :

5. la prise en compte des modes évanescents et des interactions associées ;

et au second ordre seul :

6. la possibilité de supprimer des ondes libres.

Et ensuite, on peut séparer :

7. les théories bi-dimensionnelles,
8. des théories tri-dimensionnelles ;

avec pour ces dernières les possibilités suivantes :

9. la prise en compte des murs latéraux,
10. l'utilisation des réflexions sur ces mêmes murs pour optimiser la qualité de la houle dans une 'zone utile' agrandie,
11. et enfin l'étalement directionnel de la houle générée si elle est irrégulière.

Pour plus de précision il faudrait détailler, pour les théories bi-dimensionnelles, si le batteur est de type piston ou à axe rotatif. De plus, hormis pour ce qui est de la prise en compte des modes évanescents, ne sont ici citées que des théories 'complètes', *i.e.* sans hypothèses simplificatrices supplémentaires telles que : bassin en eau peu profonde, spectre irrégulier à bande étroite, etc.

Ainsi, la théorie précédente de Havelock [71] est à classer dans les approches linéaires (1) bi-dimensionnelles (7) pour simuler des houles régulières (3), avec pour seule caractéristique de prendre en compte les modes évanescents (5). De même l'approche de Biésel [10] citée entre dans le même cadre, mais en trois dimensions (1-3-5-8), alors que celle au second ordre de Fontanet [52] vérifie les propriétés (2-3-7) mais pas (5). A compter du début des années 1980, les méthodes ont évolué dans plusieurs directions. En deux dimensions, d'abord Flick & Guza [50] ont montré en 1980 l'importance des ondes libres générées au second ordre en houle régulière, et Sand & Donslund [110] ont proposé en 1985 une

approche second ordre permettant de les supprimer (2-3-6-7). Mais il faut attendre 1991 avec Hudspeth & Sulisz [72] pour avoir la première théorie complète au second ordre en houle régulière, *i.e.* prenant pleinement en compte les modes évanescents et les interactions associées (2-3-5-6-7). Puis en 1996, Schäffer [111] a apporté la même méthode complète pour une houle irrégulière (2-4-5-6-7). En trois dimensions maintenant, la technique de la génération serpent de Biésel pour des bassins semi-infinis sans murs latéraux a été étendue au second ordre par Wu en 1985 en houle régulière (2-3-8), puis Suh & Dalrymple [123] pour un spectre directionnel en 1987 (2-4-8-11). Plus récemment des théories complètes incluant les modes évanescents et la suppression des ondes libres sont apparues : en 2000 avec Li & Williams [85] pour une houle régulière avec présence de murs latéraux, toujours avec une génération de type serpent non modifiée (2-3-5-6-8-9) ; et Schäffer & Steenberg [112] en 2003 pour un champ directionnel irrégulier mais sans murs latéraux (2-4-5-6-8-11). Enfin, une troisième direction plus spécifiquement tournée vers la pratique d'expériences en laboratoire, a été celle de s'attacher à déterminer un mouvement du batteur apte à agrandir la zone utile à la mesure, dans un bassin tri-dimensionnel, en utilisant au mieux les réflexions sur les murs. Ces techniques ont été dérivées en houle régulière linéaire par Dalrymple [35] d'abord en 1989, pour optimiser la houle sur une ligne parallèle au batteur à une certaine distance, puis Molin et Boudet & Pérois [11] ont plus récemment (2001) étendu la méthode à l'optimisation sur des zones de formes variées telles des cercles, ellipses, etc. (1-3-5-8-9-10).

Parmi toutes ces approches analytiques en régime établi, on peut maintenant positionner celle développée par Fé.Bo. [VII] en 2002-2003, à laquelle on va comparer les résultats de notre modèle. Cette théorie complète permet de prendre en compte au second ordre la génération de houle régulière dans un bassin tri-dimensionnel avec des murs latéraux, avec la possibilité d'optimiser la houle au premier ordre à une distance (méthode de Dalrymple [35]), et de supprimer les ondes libres au second (2-3-5-6-8-9-10). La même technique permettant de générer un spectre directionnel irrégulier est aussi en passe d'être achevée (2-4-5-6-8-9-11).

Dans ce type de solution analytique, on sépare les potentiels en différents constituants, incluant deux composantes au premier ordre qui satisfont chacune au problème (III.1.10), mais avec une condition de radiation à l'infini en  $x$  et formulé en régime établi :

- la première est un potentiel d'ondes progressives (houles d'Airy), qui sont associées aux nombres d'ondes solutions réelles de l'équation de dispersion ;
- et la deuxième est un potentiel de modes évanescents, ondes longues non progressives dont l'amplitude décroît avec  $x$  à partir de la localisation du batteur, et qui correspondent aux nombres d'ondes solutions imaginaires de l'équation de dispersion.

Ces modes évanescents sont dus à l'inadéquation entre la forme du batteur et la cinématique de la houle générée. Sur l'exemple de la houle régulière, on sait en effet que les trajectoires des particules fluides dans le passage de la houle qui se propage sont des ellipses de grand

axe horizontal qui s'aplatissent de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne de la surface libre. Parallèlement, l'amplitude de ces ellipses décroît comme un cosinus hyperbolique avec la profondeur, un batteur parfait (sans modes évanescents) serait donc un batteur déformable dont la forme reproduirait à tout instant cette fonction hyperbolique (et il faudrait superposer les déformées associées à chaque fréquence en houle irrégulière). Un batteur de type volet articulé sera ainsi mieux adapté à la génération d'ondes courtes (devant la profondeur du bassin) qu'un batteur piston. Néanmoins, pour des ondes vraiment courtes dont la cinématique est confinée dans une petite zone proche de la surface libre, ce même batteur volet sera lui aussi largement inadapté. De même, pour des ondes très longues (donc en régime d'eau peu profonde) dont la cinématique tend vers une mise en mouvement uniforme des particules fluides sur toute la profondeur, le batteur volet s'avérera aussi inadapté. Cette 'inadaptation' doit être comprise dans le sens de l'engendrement de modes évanescents qui seront alors d'amplitude non négligeable face à celle de la houle progressive générée, et non dans celui d'une altération de l'amplitude de cette même houle. Précisons de plus que ces modes évanescents du premier ordre jouent un rôle important dans la génération d'ondes libres progressives parasites au second ordre. À cet ordre justement, la solution analytique se constitue de quatre composantes distinctes ; tout d'abord le potentiel solution à cet ordre est classiquement séparé en un potentiel d'ondes 'liées' et un potentiel d'ondes 'libres'. Le potentiel lié satisfait à la condition de surface libre de (III.1.11), mais à aucune condition sur le batteur ; dans cette condition de surface libre, les termes de forçage non-linéaires issus du premier ordre résultent alors en une composante évanescente de ce potentiel lié et une composante propagative, qui correspond à la correction de Stokes du second ordre. Ces derniers termes propagatifs sont harmoniques de pulsations doubles et de longueurs d'ondes divisées par deux par rapport à celles du premier ordre ; ils progressent de manière 'liée' à la houle progressive linéaire, et donc à sa vitesse. En plus de ses deux composantes évanescente et propagative, le potentiel lié contient aussi des termes indépendants du temps dont on ne se préoccupe pas. D'autre part, au second ordre, la solution analytique est composée d'un deuxième potentiel, dit 'libre'. Ce potentiel résulte pour partie des termes de forçage non-linéaires issus du premier ordre (propagatif et évanescent) et qui sont contenus dans la condition sur le batteur de (III.1.11). Et pour seconde partie, il provient de termes de forçage dus aux ondes liées (donc vérifiant la condition non-linéaire de surface libre). Comme au premier ordre, il est composé de termes évanescents (solutions imaginaires de l'équation de dispersion), et de même de termes progressifs, eux aussi à la pulsation double, mais qui vont progresser cette fois 'librement' à leur vitesse de phase propre (associée à cette fréquence double). Ces termes de pulsations doubles possèdent aussi leurs longueurs d'ondes naturelles issues de la relation de dispersion, soit environ un quart de celles au premier ordre, et non la moitié comme pour le potentiel lié ; d'où la présence de deux pics au second ordre, comme sur la figure III.1.10 par exemple. C'est cette séparation en ondes libres et liées dans la solution analytique qui sera utilisée pour supprimer les ondes libres dans notre modèle (cf. III.1.5.4).

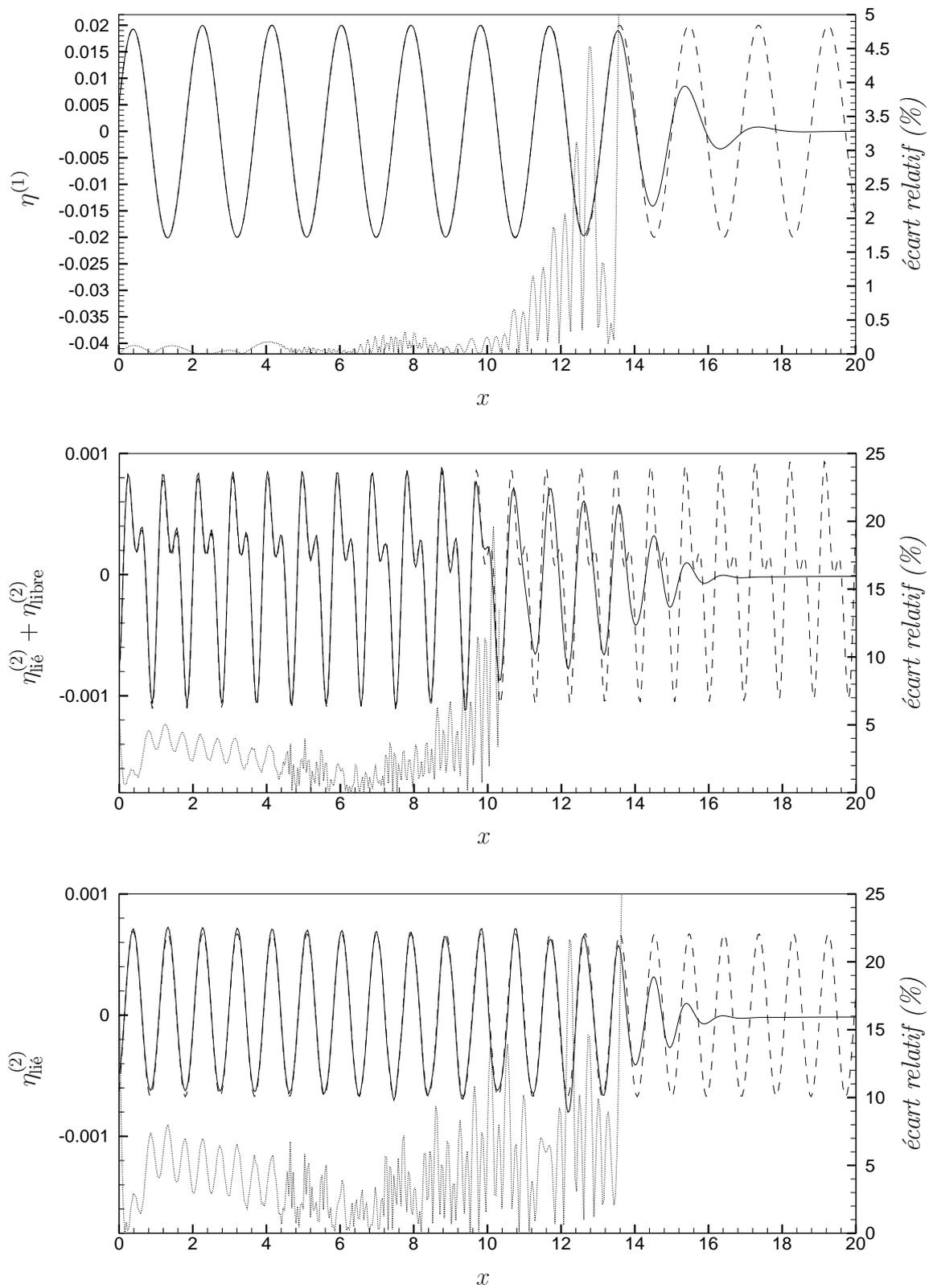


Figure III.1.16: Comparaison à la solution analytique en régime établi, aux deux ordres sur un cas bi-dimensionnel.

Après cette longue introduction clarifiant la nature de la méthode analytique ainsi que son positionnement parmi les approches similaires, on peut désormais lui comparer les résultats de notre modèle spectral. En deux dimensions tout d'abord, on présente sur la figure III.1.16 un cas bi-dimensionnel où la solution analytique figure en tiretés, le calcul instationnaire en traits pleins, et l'écart relatif entre les deux en pointillés, écart figuré en pour cents sur l'échelle à droite des courbes. Ce cas correspond à une houle régulière de  $4,72m$  dans un bassin de  $100m \times 5m$ , le pas de temps sélectionné est de  $10^{-2}$ . Les nombres de modes utilisés dans notre modèle sont ( $N_x = 513, N_z = 65$ ). Pour le calcul réalisé avec *SWEET* (traits pleins), les différentes vues montrent les houles en cours d'établissement dans le bassin : on peut ainsi distinguer nettement le front d'onde (partie droite des figures, pour  $10 \leq x \leq 17$  environ) du train d'onde en régime établi (partie gauche,  $x \leq 10$ ). Sur la vue du haut qui correspond au premier ordre, l'écart relatif entre ce calcul et la solution analytique en régime établi est inférieur à  $0,2\%$ . Les deux vues suivantes présentent respectivement les trains d'ondes au second ordre sans, puis avec la suppression des ondes libres. Sur la vue du milieu, on voit nettement, après le front des ondes liées qui avancent avec le premier ordre, la présence de celui des ondes libres qui avancent deux fois moins vite, à leur propre vitesse de phase. On constate d'ailleurs que l'amplitude des ondes libres est importante, d'un ordre proche de celle des ondes liées. Une fois les deux fronts d'ondes passés ( $x \leq 8$  environ), l'écart relatif en régime établi est inférieur à  $5\%$  et diminue en s'éloignant du batteur. Cette erreur plus élevée qu'au premier ordre s'explique par le fait que les longueurs d'ondes ici présentes correspondent à des modes principaux plus élevés (42 et 84 au second ordre contre 21 au premier), la solution converge donc plus tard au second ordre. Si l'on supprime maintenant les ondes libres, en anticipant un peu sur la section III.1.5.4 à venir, l'écart maximal est porté à environ  $8\%$  et décroît de même à mesure que  $x$  augmente. Ces niveaux sont satisfaisants, et sont améliorés en prenant un nombre de modes un peu plus grand de (1025, 129) (environ  $2\%$  d'écart relatif maximal) ; on a en effet vérifié que la solution fournie en régime établi par le code instationnaire *SWEET* converge sans obstacle vers le modèle analytique à une grande précision, comme c'est déjà le cas au premier ordre avec 513 modes (vue du haut). Cette validation s'avère par conséquent très probante en définitive.

On peut ensuite s'intéresser à un cas tri-dimensionnel, tel celui présenté sur la figure III.1.17. Cette illustration montre la déformée au premier ordre à  $t = 60$  fournie par le modèle instationnaire ; en dégradés de gris sur cette surface sont portées en pour cents les erreurs relatives à la solution analytique en régime établi. Il s'agit d'un cas de houle régulière oblique à  $20^\circ$ , de longueur d'onde  $5m$  dans le bassin de l'ECN ( $50m \times 30m \times 5m$ ). Le pas de temps utilisé est de  $10^{-2}$ . Les ondes libres sont présentes dans le calcul, on peut en revanche remarquer la qualité de la houle à cet ordre dans une zone étendue du bassin, cela est dû à l'utilisation d'une génération par méthode de Dalrymple (cf. III.1.5.3). Les nombres de modes utilisés sont de ( $N_x = 257, N_y = 65, N_z = 17$ ). Là encore on a choisi de montrer une vue en cours d'établissement où le front d'onde est bien visible dans la partie droite. Derrière ce front d'onde, le champ établi montre une différence à la solution analytique

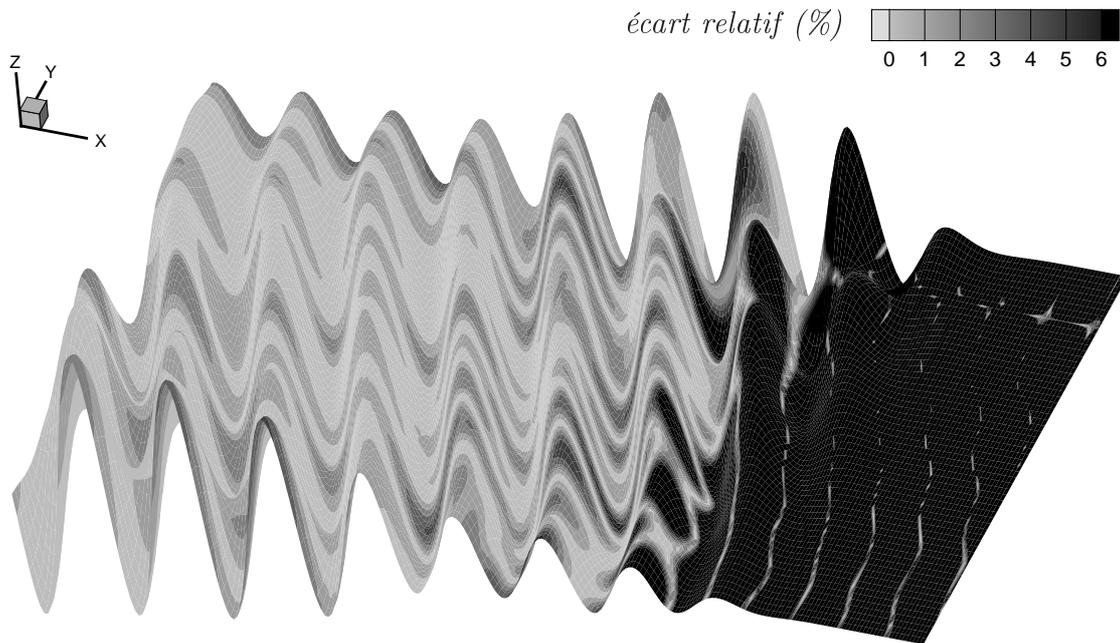


Figure III.1.17: Comparaison à la solution analytique en régime établi, au premier ordre à  $t = 60$ .

de 1% en moyenne, avec un écart maximal inférieur à 5% localisé dans une toute petite zone sur une crête du mur latéral droit, où sont le plus présentes les ondes libres. Cet écart est donc satisfaisant étant donné le nombre de modes relativement modéré utilisé, surtout pour  $N_z$ . La même vue au second ordre n'est pas montrée ici pour deux raisons : d'une part les écarts constatés y étant logiquement plus forts (distribution assez similaire avec une moyenne autour de 8% dans la zone établie, et des écarts maximaux proches de 20% relevés aux mêmes endroits qu'au premier ordre), un calcul plus fin devait être lancé. Mais d'autre part, la solution analytique qui fait intervenir des sommes quadruples nécessite des calculs relativement coûteux pour un tel cas tri-dimensionnel, et ses résultats n'étaient pas considérés comme totalement convergés sur ce cas au moment de cette comparaison réalisée tout dernièrement. On a donc préféré réserver cette carte à un futur proche où l'on sera sûr de la solution de référence. On peut faire le constat singulier, au passage, que la solution analytique sur ce cas a un coût pratique au moins aussi élevé qu'un calcul instationnaire complet. Ajoutons en exergue que sur les deux discrétisations différentes qu'on a utilisées dans *SWEET* sur ce cas, les résultats convergeaient bien, à un ordre voisin de deux (écart divisé par quatre environ pour un nombre de modes multiplié par deux). Pour compléter cette validation, on peut montrer un autre cas dont le calcul date d'avant la refonte du code, et qui mériterait d'être ré-étudié. Il s'agit du même cas que le précédent, mais avec une longueur d'onde générée différente ( $\lambda = 12,5m$ ). La figure III.1.18 présente les résultats obtenus avec *SWEET* (en haut) et ceux provenant de la solution analytique (en bas). Malgré le faible nombre de modes utilisé à l'époque sur ce cas ( $N_x = 65, N_y = 17, N_z = 17$ ),

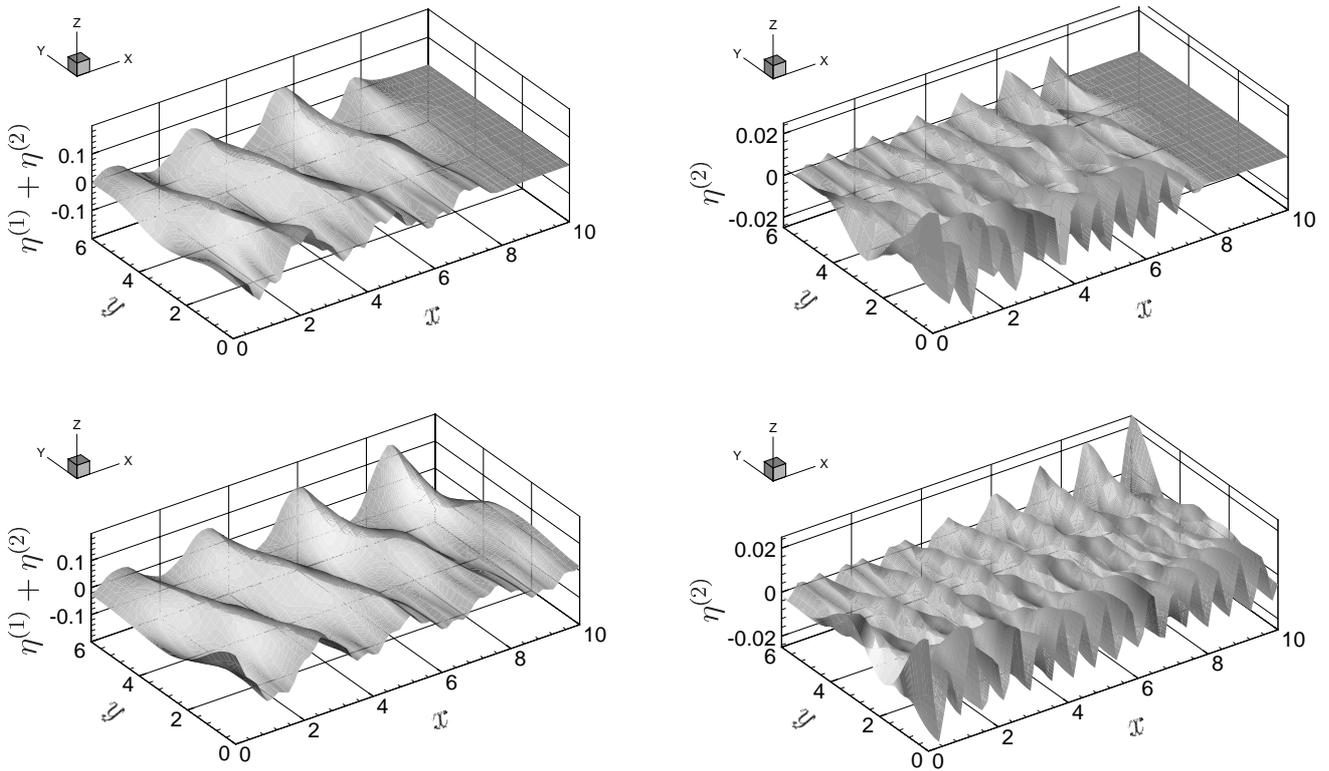


Figure III.1.18: Comparaison de *SWEET* (en haut) à la solution analytique en régime établi (en bas).

on trouve un très bon accord visuel entre les deux solutions, tant sur la déformée totale à gauche, que sur le second ordre seul à droite.

Finalement, cette comparaison à la solution analytique du domaine fréquentiel s'est montrée globalement probante, même si l'étude est à poursuivre ; on demeure néanmoins assez confiant dans le fait qu'elle confortera les conclusions satisfaisantes déclinées ici.

### III.1.5.2 Comparaison succincte à un signal de houle expérimental

Comme l'indique le titre de cette section, il ne s'agit pas ici de réaliser une comparaison précise et exhaustive avec une campagne expérimentale, mais plutôt d'illustrer sur un exemple concret la consistance de notre modèle par rapport à un signal mesuré dans le bassin de houle de l'ECN. En effet, on ne dispose pas encore actuellement de campagnes suffisamment précises et fiables, du fait de la relative jeunesse de ce bassin de houle et du temps finalement assez restreint que Fé.Bo. a pu s'accorder pour qualifier ses caractéristiques (absorption, etc.), programmer des mouvements batteurs spécifiques, et mettre en place des systèmes de mesure ainsi que des processus d'analyse de ces mesures. Lors des derniers essais menés, dont est extrait le signal montré sur la figure III.1.19, il s'est notamment rendu compte d'un problème de flexibilité des sondes à houle induisant une va-

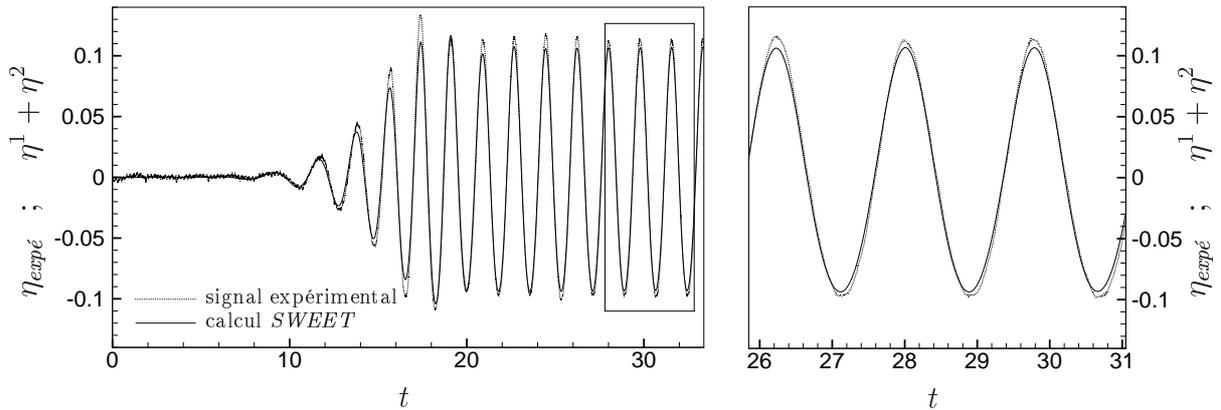


Figure III.1.19: Comparaison à un signal expérimental mesuré dans le bassin de l'ECN.

riation dans les amplitudes mesurées. Précisons encore qu'il s'agit là d'une toute première comparaison, sur un signal extrait au hasard dans ces essais récents en cours d'analyse. On vise donc plus ici à valider globalement notre modèle, plutôt qu'à décrire précisément l'influence des hypothèses prises dans sa théorie, ou à l'inverse, l'influence de telle ou telle source d'inexactitude de mesure.

Cet essai présenté sur l'illustration III.1.19, correspond à un cas de houle droite (donc bi-dimensionnel dans notre modèle) mené dans le bassin de l'ECN qui est de dimensions  $50m \times 30m \times 5m$ . La houle régulière générée a pour longueur d'onde  $5m$ , et une cambrure relativement faible de  $ka = 13\%$  du fait de la hauteur de mesure limitée sur les sondes dans cet essai. Les ondes libres sont incluses. La sonde est positionnée en  $x = 12,79m$ . Une rampe linéaire en temps de  $4s$  est imposée, et dans *SWEET* on dispose une plage absorbante de la même longueur qu'au réel, avec un coefficient  $\nu = 0,5$ . Dans le modèle numérique, les nombres de modes sélectionnés sont ( $N_x = 1025, N_z = 129$ ). Une différence d'amplitude est notable entre les deux signaux, de l'ordre de 5 à 10% en régime établi (partie zoomée, à droite sur la figure). Dans cette même partie, on constate que la mesure expérimentale fluctue assez nettement par rapport au comportement très stable du signal calculé. Un oeil attentif permet même de se rendre compte de la dissymétrie des crêtes et surtout des creux, qui est probablement due à la flexion évoquée de la sonde. Les phases des deux signaux sont en revanche en très bon accord. Une autre différence est visible au niveau du front d'onde qui a une forme assez distincte entre l'expérience et le calcul, mais il faut préciser qu'on n'est pas sûr de contrôler complètement la nature de la rampe en temps sur le batteur du bassin, qui influe sur ce front d'onde comme on l'a vu à la section III.1.3.3. En définitive, cette comparaison constitue globalement un indice de validité du modèle, mais une étude exhaustive avec des paramètres expérimentaux maîtrisés reste à conduire.

Maintenant qu'on a validé notre modèle, on va se consacrer à donner quelques exemples d'études auxquelles il peut servir. Ces études visent surtout à améliorer la compréhension

des bassins de houle réels, et à pouvoir en déterminer ‘exhaustivement’ certaines caractéristiques à moindre coût, permettant ainsi de réaliser dans le bassin moins d’essais, aux conditions mieux maîtrisées et aux résultats mieux analysés. Il ne s’agit de fait pas de remplacer complètement ces bassins dont l’essence est justement de mesurer la physique réelle, sans hypothèse. On verra ainsi à titre d’illustration dans les deux sections suivantes, comment notre modèle peut servir à évaluer *a priori* l’efficacité du choix de tel ou tel mouvement du batteur pour générer au mieux la houle prescrite dans un essai, en aidant par exemple à déterminer les étendues afférentes des zones utiles dans le bassin. Ces ‘zones utiles à la mesure’, comme leur nom l’indique, sont elles-mêmes déterminantes pour savoir où placer une maquette et l’instrumentation de mesure associée, et quelle taille cette maquette pourra avoir, par exemples. Le modèle donnera aussi une idée de la dégradation de la houle qu’on peut escompter hors cette zone, ou encore de son évolution avec le temps, liées aux réflexions dans le bassin. Plus en amont, ce modèle pourra également être utilisé comme outil de pré-étude, ainsi qu’on le verra à la section III.1.5.5, fournissant des données sur des installations non encore existantes dont on tente d’évaluer avant construction la nature des expérimentations qu’elles permettraient, et la gamme associée des conditions de houle possibles.

### III.1.5.3 Application à l’étude de la zone utile selon le mouvement du batteur

Ainsi qu’on l’a évoqué au III.1.5.1, l’une des directions de l’étude analytique des bassins de houle tri-dimensionnels, dans les quinze dernières années, a été de rechercher des mouvements du batteur spécifiques permettant d’étendre la zone utile dans le bassin. Ces théories analytiques sont du premier ordre, et elles s’appliquent à la génération de houle oblique en bassin réel classique (on entend par là un bassin tri-dimensionnel muni d’un batteur de type serpent sur un bord). En effet, comme on peut le constater sur la vignette en bas à droite de la figure III.1.20, si on se contente d’utiliser le principe du serpent proposé par Biéssel [10] pour générer une telle houle oblique, la zone utile se restreint à un triangle devant le batteur. Cette illustration présente de fait, au premier ordre, deux vues en régime établi d’une houle d’5m générée avec un angle de 20° dans le bassin de l’ECN, l’une par la méthode de Dalrymple et l’autre par utilisation directe du principe du serpent. La partie basse de la figure montre les amplitudes correspondantes obtenues par analyse glissante de Fourier sur une période (réalisée par Fé.Bo.). La restriction de la zone utile à cette faible surface triangulaire est due aux réflexions indésirables sur les murs du bassin qui dégradent rapidement la qualité de la houle, comme cela est bien visible sur la déformée au premier ordre figurée en haut à droite de cette même illustration. Cette caractéristique est d’autant plus ennuyeuse qu’il s’agit justement de la zone où sont présents les modes évanescents qu’on ne tient pas à voir se retrouver dans les mesures. Des théories fréquentielles visant à contourner cette difficulté sont donc apparues, dont l’idée sous-jacente est précisément d’utiliser ces réflexions pour repousser la zone utile à

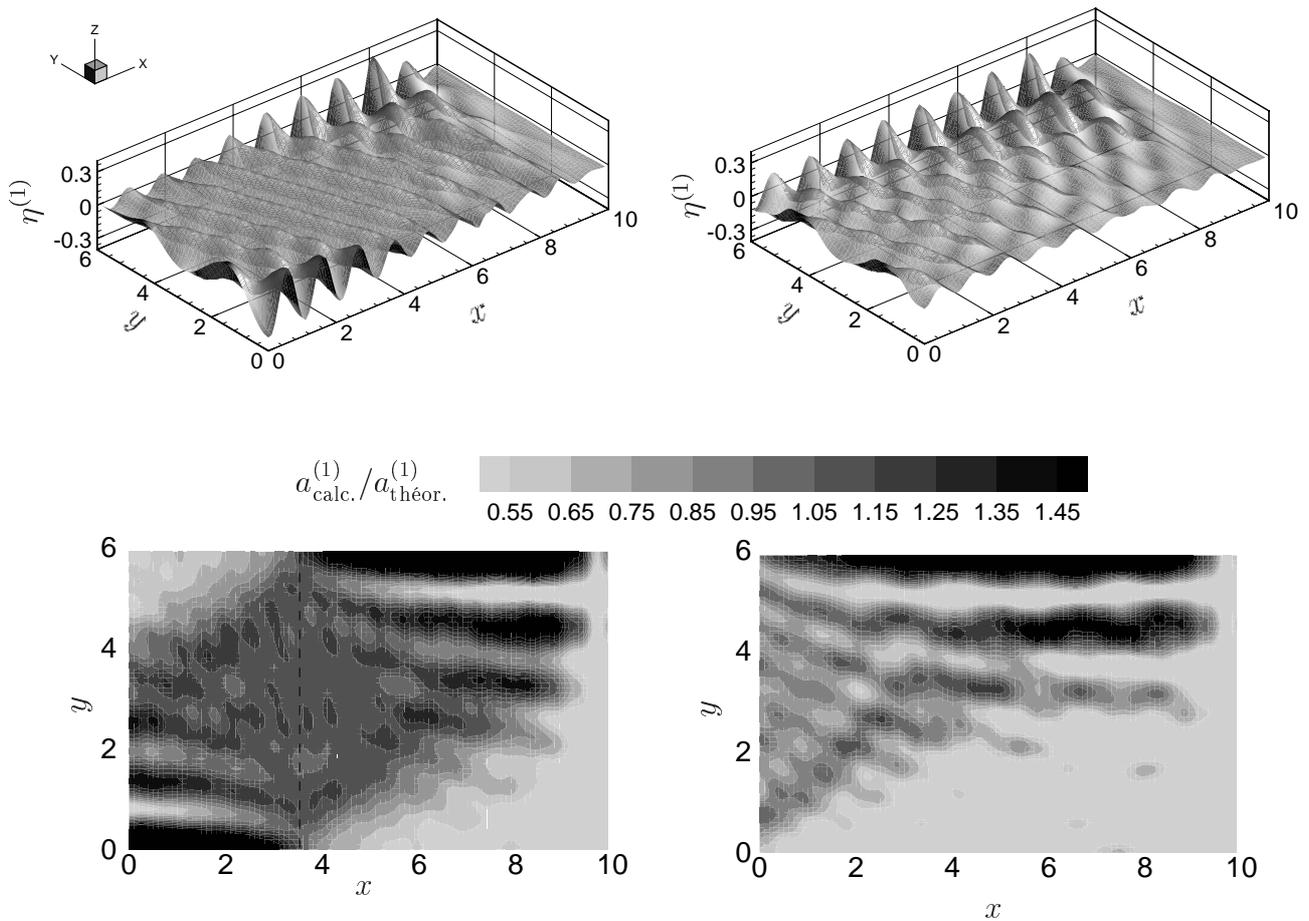


Figure III.1.20: Génération de houle oblique par méthode de Dalrymple (à gauche), et principe du serpent (à droite). Déformées au premier ordre (en haut) et comparaisons à l'amplitude cible (en bas).

une certaine distance prescrite du batteur, en en augmentant qui plus est la surface si possible. Dalrymple [35] est le premier à avoir proposé une telle approche, fournissant le mouvement du batteur re-calculé de manière à optimiser au premier ordre la houle sur une ligne parallèle au batteur, de la largeur du bassin, et dont la distance au batteur est librement choisie par l'utilisateur. C'est cette technique que Fé.Bo. a insérée dans notre modèle sous la forme de routines de calcul des positions, vitesses et accélérations adéquates du batteur au cours du temps. Ainsi qu'on l'a évoqué précédemment, d'autres techniques plus évoluées travaillant cette fois sur des surfaces d'optimisation ont été proposées depuis (cf. Boudet & Pérois [11] par exemple), mais n'ont pas été mises en œuvre dans *SWEET* jusqu'à présent, cela ne poserait toutefois pas de difficulté supplémentaire. Si l'on revient à la figure III.1.20, l'efficacité de cette méthode de Dalrymple au premier ordre apparaît nettement, tant sur l'analyse des amplitudes que visuellement sur les déformées en régime établi. On retrouve bien la forme de losange qui correspond à la surface optimale théorique qu'on obtient avec cette méthode, la ligne en tirets marquant la distance cible prescrite.

Précisons là encore que ces calculs ont été menés avant la refonte du code avec un nombre de modes faibles ( $N_x = 129, N_y = 17, N_z = 17$ ), et mériteraient donc d'être repris avec des nombres de modes plus élevés. En évitant notamment le 'bosselage' des crêtes lié à une discrétisation trop faible, qui est probablement la cause des changements très localisés dans les cartes d'amplitudes ('petits ronds'), on se rapprocherait encore nettement de la théorie selon toute vraisemblance. Il faut mentionner cependant que sur ces figures, des élévations de surface libre ont été re-calculées *exactement, a posteriori*, entre les noeuds de collocation, ainsi qu'une telle méthode spectrale au second ordre permet de le faire à partir de la seule connaissance des amplitudes modales (chose qu'on n'a plus besoin de réaliser avec les nombres de modes qu'on utilise depuis la refonte).

Puisqu'on dispose d'un modèle au second ordre, il semble intéressant de regarder comment cette optimisation, issue d'une théorie linéaire, se traduit à cet ordre. Dans la nature (en milieu infini), on ne trouve à cet ordre que la correction de Stokes qui correspond pour nous aux seules ondes liées évoquées précédemment ; l'amplitude 'cible' sera donc ici l'amplitude de ces ondes liées qui vaut théoriquement en houle régulière de nombre d'onde  $k$  (en adimensionnel) :

$$a_{\text{lié}}^{(2)} = \frac{k}{4 \tanh(k)} \left( 2 + \frac{3}{\sinh^2(k)} \right)$$

Par nature, ces ondes liées présenteront la même configuration de zone utile que les ondes du premier ordre avec lesquelles elles progressent, le taux de présence d'ondes libres dans cette zone y déterminera donc le niveau de parasites. La figure III.1.21 expose la déformée au second ordre au cours de l'établissement de la houle, et l'analyse afférente de son amplitude sur une période, obtenues avec la méthode de Dalrymple toujours sur le même cas. On ne retrouve pas la configuration optimale du premier ordre, loin de là. Les ondes libres, dont le front d'onde se situe en  $x = 4,5$  environ, sont en effet à cet instant en train de 'brouiller' la zone utile en losange (portée en tirets) des ondes liées. De plus l'amplitude de ces ondes libres est loin d'être faible, et en se rapprochant du mur latéral droit elle est

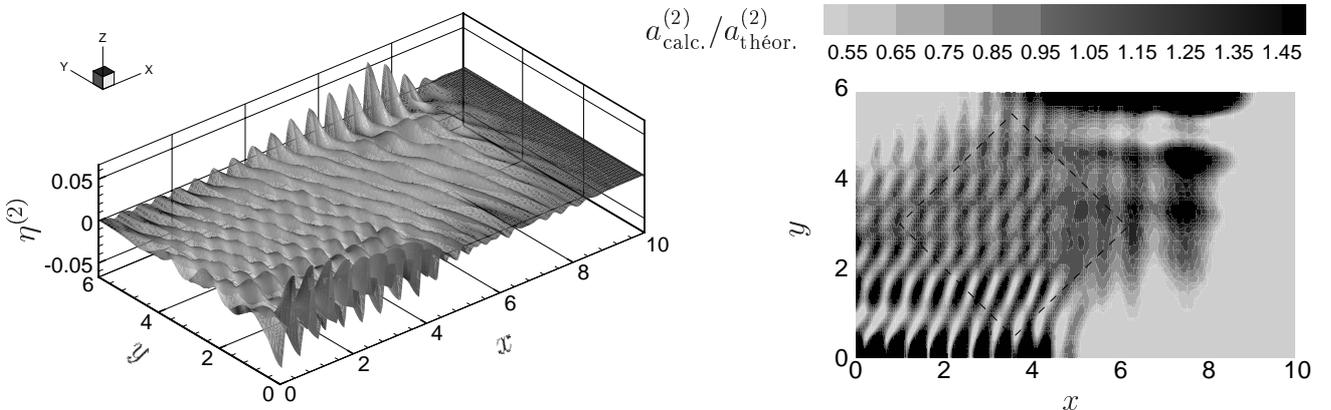


Figure III.1.21: Génération de houle oblique par méthode de Dalrymple. Déformée et comparaison à l'amplitude liée théorique au second ordre.

même plus importante que celle des ondes liées. La dégradation engendrée par les ondes libres est donc loin d'être négligeable, même sur la déformée totale (cf. figure III.1.18 par exemple). Par acquis de conscience, on s'est alors intéressé à cette même amplitude des ondes libres, mais dans le cas d'une génération par utilisation du simple principe du serpent. Et cette amplitude s'est alors révélée nettement moins importante que pour la génération par méthode de Dalrymple, de maximum inférieur à 50% de  $a_{liée}^{(2)}$ , et qui plus est dans une zone confinée à l'extérieur de la zone utile, restant inférieure à 25% dedans. Cela ne conduit bien entendu pas à conclure que le principe simple du serpent en devient mieux adapté, mais simplement à exprimer que les optimisations des théories linéaires fréquentielles utilisant les réflexions sur les murs sont nettement moins valable dès qu'on inclut le second ordre. Toutefois, cette conclusion négative pourra être levée si on peut supprimer ces mêmes ondes libres, ce dont traite la section suivante.

En définitive, on a montré sur cette exemple qu'un tel modèle permet d'étudier les zones utiles aux deux ordres dans le bassin et leur évolution temporelle. Par la même occasion on a déterminé que l'utilisation de techniques de pilotage optimal du batteur pour générer de la houle oblique, qui sont basées sur des théories fréquentielles linéaires, ne s'avèreraient pas véritablement probantes au réel si on ne traite pas spécifiquement les ondes libres qui leur sont inhérentes au second ordre.

#### III.1.5.4 Application à la suppression des ondes libres

On vient de montrer l'intérêt que pourrait présenter la suppression des ondes libres, cela constituera donc le deuxième exemple de pré-analyses qu'on peut mener avec ce modèle avant de se lancer dans une campagne d'expériences. Le principe de cette suppression repose sur la solution analytique de Fé.Bo. En effet, dans la détermination de cette solution au second ordre, les ondes libres et liées sont calculées séparément, et explicitement, ainsi qu'on l'a énoncé au III.1.5.1. Fé.Bo. a donc introduit dans *SWEET* un module issu de son modèle analytique, qui pré-calculé l'amplitude des ondes libres de l'essai. Précisons que pour le moment, cette solution n'est disponible qu'en houle régulière mais la version irrégulière est en passe de l'être aussi. Pour ce qui est des ondes libres, on avait mentionné qu'elles sont de pulsation double et que, vérifiant la relation de dispersion, elles progressent à leur vitesse de phase naturelle. On peut donc ajouter un mouvement au batteur à cette fréquence double, générant le même train d'ondes mais en opposition de phase, ce qui résulte théoriquement à leur ordre en leur annulation par superposition. Cet ordre est nécessairement le second pour rester consistant avec la nature de ces ondes libres. On rajoute donc au batteur un mouvement au second ordre  $X^{(2)}$  à la pulsation double. Ce terme apparaît alors au second ordre dans la condition batteur de (III.1.11), suivant le même terme que celui impliquant  $X^{(1)}$  dans la condition batteur au premier ordre de (III.1.10), soit l'apparition de la vitesse du batteur à cet ordre.

La validité de cette technique d'onde opposée a déjà été prouvée sur le cas bi-dimensionnel

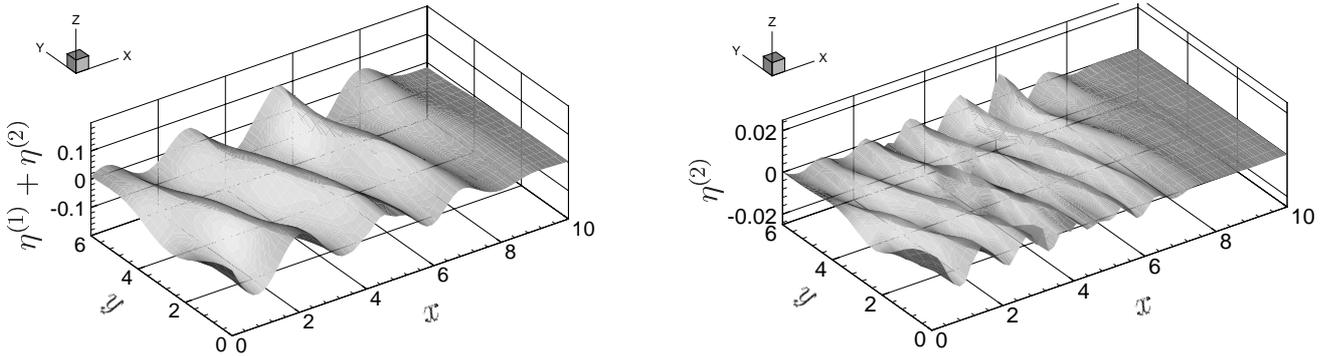


Figure III.1.22: Houle oblique tri-dimensionnelle générée par la méthode de Dalrymple avec suppression des ondes libres.

présenté sur la figure III.1.16 de III.1.5.1, sur laquelle l'efficacité de la suppression des ondes libres, dont l'amplitude était alors voisine de celle des ondes liées, était nettement visible, induisant une erreur relative juste légèrement supérieure à celle obtenue sur le même cas sans les supprimer. La figure III.1.22 reprend quant à elle le cas tri-dimensionnel montré sur l'illustration III.1.18 de III.1.5.1, où l'on pouvait clairement constater que les ondes libres du second ordre étaient, dans cet essai, d'une amplitude telle qu'elles perturbaient sensiblement la déformée *totale* dans une large bande le long du mur latéral droit. Précisons de plus que la cambrure arbitrairement choisie sur ce cas se situait tout à fait dans une gamme réaliste, elle est même assez modérée ( $ka^{(1)} \simeq 13\%$ ). Il était donc crucial, pour bénéficier de l'optimisation apportée par la méthode de Dalrymple, de supprimer là les ondes libres. L'illustration III.1.22 montre de manière probante le résultat de la même simulation avec un mouvement batteur au second ordre visant justement à les supprimer. Même avec ce nombre de modes restreint l'amélioration est flagrante, ne laissant plus déceler visuellement la présence d'ondes libres dans la déformée totale (à gauche). Au second ordre (à droite), il en reste quelques traces à l'avant du train d'ondes, qui sont liées à la queue du front d'ondes libres, le champ de vagues n'étant pas encore complètement établi dans le domaine ; il faut en effet se rappeler que la suppression des ondes libres issue de la théorie analytique n'est valable qu'en régime établi. On aura ainsi retrouvé la zone utile en forme de losange, cette fois *aux deux ordres* ; ce qui, si on reste dans des cambrures relativement modérées, laisse envisager une qualité de mesure appréciable dans cette zone au réel à condition d'imposer cette même correction au batteur. Fé.Bo. a mené de tels essais dans le bassin de houle physique de l'ECN avec suppression des ondes libres ; leur analyse est en cours, on a toutefois déjà pu mesurer visuellement l'efficacité de cette suppression lors de ces expériences.

Ainsi, sur cet exemple et sur celui qui précède traitant des liens entre les mouvements du batteur et les zones utiles, on aura donné un aperçu de l'intérêt de disposer d'un tel modèle comme aide à la préparation et à l'analyse de campagnes expérimentales en bassin physique. L'association de la fiabilité du modèle, de sa rapidité d'exécution et de son intégration du second ordre de perturbation, en font un outil qu'on estime valable pour

une telle aide à l'expérimentation. On va maintenant établir sur un autre exemple que ce modèle n'est cependant pas nécessairement dédié à ce seul usage, et peut notamment servir à caractériser les évolutions de houles dans un bassin quelconque, au stade de sa pré-étude avant construction.

### III.1.5.5 Application à l'étude d'un bassin muni d'un batteur partiel

On nous a en effet commandé une étude qui est menée par Fé.Bo. et qui est toujours en cours actuellement, les dimensions réelles et échelles ne sont donc intentionnellement pas mentionnées ; on précisera juste qu'il s'agit d'un bassin dont le rapport d'aspect est inversé par rapport aux bassins de houle classiques. On y étudie les caractéristiques de la houle qui serait générée par un batteur partiel sur la moitié de sa largeur. Une plage de même largeur lui fait face sur le mur opposé, et deux autres plages absorbantes sont disposées à chacune des extrémités latérales du bassin. Le taux d'absorption frontal est prescrit pour les différents cas.

La figure III.1.23 présente un cas de houle droite en régime établi et un cas de houle oblique en cours d'établissement puis en régime établi. Puisqu'on n'a cette fois pas de murs latéraux à proximité directe du batteur, on utilise le simple principe du serpent pour générer cette houle oblique. On pourra noter la capacité d'un tel batteur serpent à générer sans encombre une houle avec un fort angle ; on rappelle néanmoins que dans la réalité ce batteur est segmenté et que cette segmentation voit son effet augmenter avec l'angle. Sur le cas en houle droite, la radiation aux extrémités de ces 'vagues de largeur partielle' est bien visible. Cette radiation reste toutefois confinée et ne provoque pas d'affaissement sensible de la houle dans une large zone. L'efficacité des plages absorbantes se traduit quant à elle, dans les deux cas, par un champ de vague bien régulier dans la zone comprise entre le batteur et la plage opposée.

Pour ce qui est de la modélisation numérique maintenant, les nombres de modes utilisés dans chacun des deux cas sont de  $(N_x = 33, N_y = 257, N_z = 33)$ . Même si ce type de géométrie est défavorable en coût de calcul pour notre modélisation (car c'est  $N_y$  qui est le plus grand et il intervient dans les deux séries modales), les différentes simulations ne prennent finalement qu'environ deux heures de calcul au total, incluant une période assez longue de régime établi. Ce coût raisonnable permet d'analyser le large panel des conditions de houle qu'il sera possible d'obtenir dans ce bassin, en fonction de la zone considérée, et les effets des taux prescrits de réflexion sur les évolutions de ces houles.

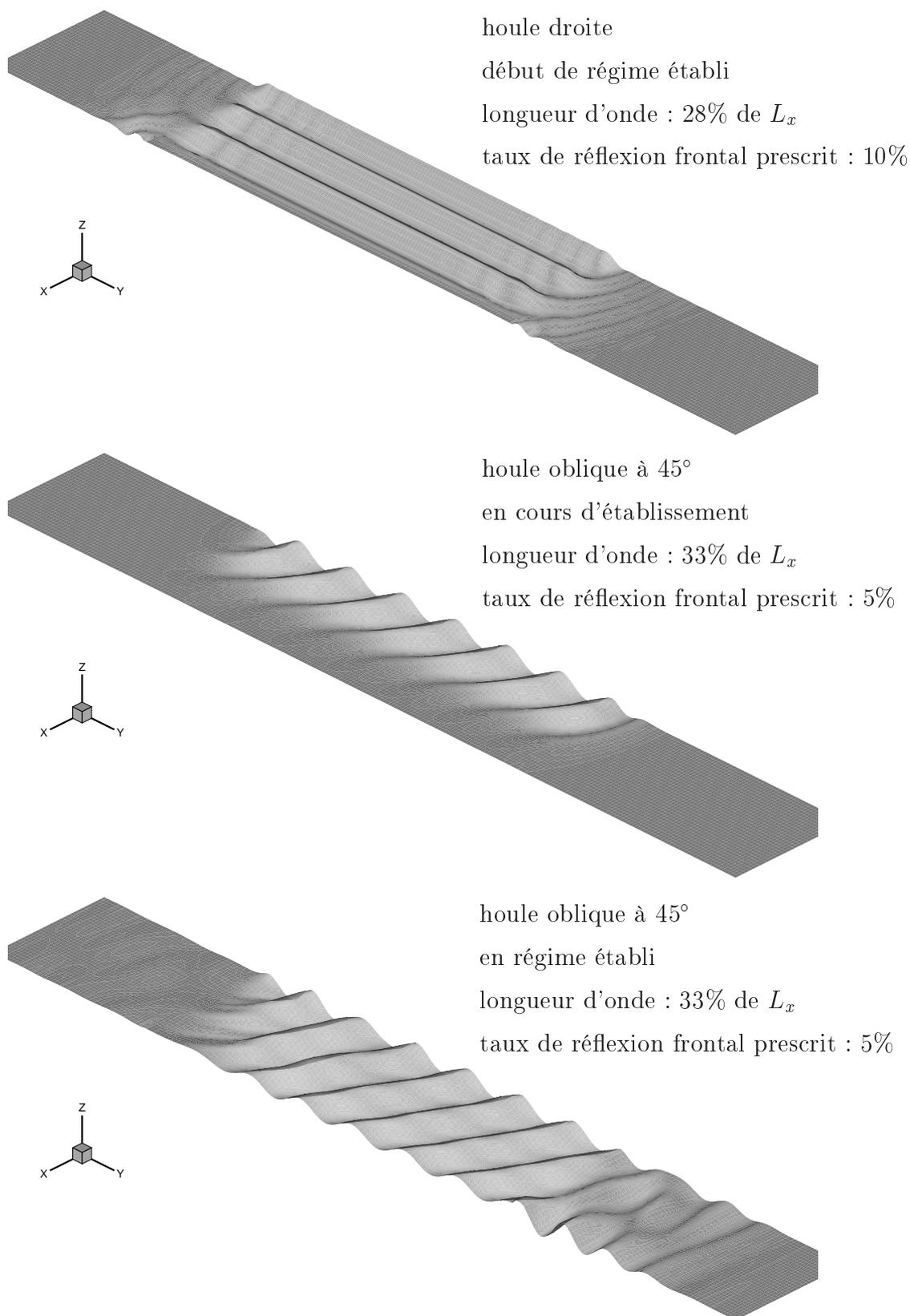


Figure III.1.23: Génération de houle par batteur partiel dans un bassin large.

### III.1.6 Conclusions relatives au modèle de bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre

Pour conclure quant à cette réalisation spécifique d'un modèle complètement spectral de bassin de houle tri-dimensionnel au second ordre incluant toutes les caractéristiques d'un bassin de houle physique, on précisera d'abord qu'il est sans équivalent à notre connaissance (comme modèle spectral en tout cas). D'autre part, ses performances sont estimées *a priori* supérieures à celles des modélisations équivalentes par méthodes intégrales qui pourraient exister, de par ses caractéristiques de précision et de temps de calcul alliées à une grande stabilité.

On peut aussi discuter de l'intérêt d'un tel modèle alors qu'on dispose maintenant de théories au second ordre en régime établi de plus en plus évoluées. Plusieurs arguments viennent naturellement défendre ce modèle : tout d'abord sa nature instationnaire évidemment, qui permet de prendre en compte plusieurs caractéristiques déterminantes de l'évolution de la houle en bassin physique, telles que les modes longs transitoires inhérents à la mise en vitesse du batteur, l'évolution des fronts d'ondes (premier ordre/second ordre lié, et second ordre libre), ainsi bien sûr que la modélisation des réflexions et la modification associée du champ établi notamment dans la zone utile. Toutefois, ce dernier élément ayant trait à la qualification de l'évolution de la zone utile du fait de réflexions dans le bassin, dont on maîtriserait suffisamment les paramètres pour être sûr qu'elles reproduiraient fidèlement les réflexions réelles, reste à explorer. Outre cette distinction d'instationnarité avec les théories analytiques, qui sont de plus formulées au mieux pour des bassins semi-infinis en  $y$ , notre modèle est étayé par le fait surprenant que les temps de calcul qu'il nécessite sont compétitifs avec ceux de telles théories analytiques, ainsi qu'on l'a déjà évoqué. Néanmoins, il ne s'agit pas ici de tenter d'écarter complètement ces approches analytiques qui présentent toute leur utilité, comme on s'en est par exemple rendu compte pour la suppression des ondes libres dans le bassin ; d'ailleurs cette possibilité est intégrée en interne à notre modèle *SWEET*, justement au moyen d'un module de calcul analytique de l'amplitude à donner à la correction second ordre adéquate. La dernière différence qui vient soutenir le modèle numérique est sa flexibilité, ainsi qu'on a pu le constater sur l'exemple de la génération par batteur partiel, qui n'a nécessité d'autre modification dans notre modélisation que celle d'ajouter une rampe spatiale sur le mouvement du batteur.

Si l'on veut maintenant situer cette technique par rapport à la physique réelle d'un bassin, il est clair que pour des cambrures importantes, cette modélisation au second ordre sera insuffisante à décrire précisément tous les phénomènes, même si elle en restera une bonne estimation globale. De plus, ce modèle en écoulement potentiel exclut évidemment toute approche des phénomènes déferlant dans le bassin, y compris ceux qui se produisent sur la plage absorbante, qu'on ne peut par conséquent modéliser qu'à travers ses effets globaux intervenant dans les différences entre les houles incidente et réfléchie. Enfin, même si on peut aujourd'hui introduire un nombre de modes non négligeable dans nos simulations,

on n'est pas encore à même de simuler les phénomènes aux échelles les plus petites telles des petites déformations de quelques centimètres de longueur dans un bassin de 50m de long.

Néanmoins, on pense avoir montré au long de ce chapitre la validité du modèle comme aide préalable à la tenue de campagnes expérimentales en bassin, permettant à coût restreint de mieux maîtriser par avance les phénomènes qui interviendront dans les mesures. Ce modèle peut aussi servir à évaluer de manière 'exhaustive' l'effet de paramètres précis pour en chercher l'optimal ; on peut citer à titre d'exemple les tests qu'on a menés sur les effets de la rampe en temps sur le batteur en fonction de sa nature et de sa durée. Deuxièmement, notre approche spectrale a aussi prouvé son intérêt et une certaine flexibilité en tant qu'outil de pré-étude d'installations non encore existantes, pouvant éventuellement présenter des géométries un peu atypiques.

Si des évolutions doivent maintenant intervenir, c'est en premier lieu dans la direction de la génération de spectres directionnels irréguliers, ce qui est cours d'implémentation. A plus long terme, on pourrait songer à pousser le développement en série de perturbation jusqu'au troisième ordre ; mais il paraît plus judicieux de s'atteler directement au passage en non-linéaire complet, toujours sur la base de cette modélisation complètement spectrale avec potentiel additionnel 'renversé'. Le chapitre III.4 donne quelques jalons sur ce thème ; une telle réalisation serait alors à la jonction de tout ce qui a été effectué au cours de ce travail de thèse. Enfin, ainsi qu'on l'a signalé de-ci de-là au long de ce chapitre, des études plus poussées restent à mener sur ce modèle dans sa forme actuelle, incluant notamment des comparaisons fines avec des expériences conduites dans le bassin de houle de l'ECN.



## Chapitre III.2

# Génération de Houles Complètement Non-Linéaires

---

Ce chapitre présente l'extension du noyau de la méthode qu'on a réalisée afin de générer et de propager des houles complètement non-linéaires. Dans un premier temps, on développe la formulation du potentiel additionnel choisi à cet effet, sous forme de doublets tournants instationnaires. Ces doublets sont optimisés à partir de la théorie fréquentielle dans le but de générer de la houle mono-directionnelle. Ensuite, la mise en œuvre d'un processus apte à reproduire un signal de houle cible à une distance est exposée.

Cette modélisation est alors validée sur des cas de houle régulière en comparaison à la solution non-linéaire en régime établi. À cette occasion, la validité de notre récent modèle HOS est démontrée, et ses propriétés étudiées. Les possibilités du modèle sont ensuite illustrées, d'abord sur des cas de génération de houle irrégulière de spectre JONSWAP. Puis la reproduction d'un paquet de vagues cible focalisé à une distance donnée est présentée, et l'évolution des non-linéarités associées commentée. L'influence de l'immersion de ces doublets sur la qualité de la houle générée est aussi étudiée. Enfin, les premiers résultats tri-dimensionnels sont exposés sur l'application du croisement de deux trains d'ondes non-linéaires.

---



## III.2.1 Formulation du modèle étendu

### III.2.1.1 Choix du potentiel additionnel

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné, notre méthode spectrale est intrinsèquement restreinte à une résolution sur un domaine de géométrie figée (en dehors de la surface libre). On a vu au chapitre précédent comment tirer avantage du développement en série de perturbations pour demeurer dans le cadre fixé par cette contrainte, mais la prise en compte du mouvement complètement non-linéaire d'une paroi (présence d'un batteur par exemple) reste *a priori* difficile (cf. chapitre suivant III.4). Une solution, proposée par Agnon & Bingham [3] en 1999 pour le cas d'un batteur piston, est d'imposer une condition de flux sur la paroi  $x = 0$ , ainsi qu'on l'a évoquée en début de partie. Néanmoins, d'une part le caractère analytique du potentiel additionnel qu'ils ont utilisé sur ce cas simple n'est pas extensible à des cas plus complexes (batteur serpent par exemple); et d'autre part, cette condition de flux revient à considérer un batteur linéarisé.

Pour générer de la houle complètement non-linéaire, c'est-à-dire en conservant exactes les conditions de surface libre non-linéaires de (II.1.10), on s'est donc tourné vers la recherche de potentiels additionnels capables d'opérer cette génération depuis *l'intérieur* du domaine, et qui respecteraient alors eux-mêmes les conditions de nullité du flux à travers les murs bornant ce domaine. Un tel potentiel a été proposé par Kim *et al.* [78] qui ont introduit une singularité immergée de type puits dans leur domaine de profondeur infinie, pour simuler une vidange. Même si la technique spectrale n'était peut-être pas la plus adaptée pour simuler cet écoulement de vidange dont le niveau moyen est instationnaire, l'idée était intéressante. On a alors songé à utiliser la même méthode mais avec des singularités de type source ou doublet, dont on sait qu'elles génèrent en deux dimensions des champs de vagues à leurs fréquences, respectivement symétrique et dissymétrique. Mais plutôt que ces singularités classiques, on a choisi d'utiliser des 'doublets tournants' proposés initialement par Clément [27] en 1999; en effet, ces singularités ont la propriété affichée de générer de la houle principalement dans une direction. Leur qualification de 'tournant' provient du fait que ces doublets peuvent être vus comme de direction variable, leur moment décrivant un mouvement rotatif dans le temps, à la fréquence du doublet. On en propose ici une version 'optimisée' (cf. section III.2.1.3) qui assure dans la pratique une génération presque parfaitement mono-directionnelle, pour toutes les longueurs d'ondes et cambrures contenues dans la houle générée, comme on pourra le constater sur nos différents essais. Ce choix de singularité comme potentiel additionnel, dont la caractéristique de mono-directionnalité permet de reproduire un batteur en approchant la singularité de la paroi du bassin, nous a donc paru particulièrement adapté pour générer une houle quelconque, au moins en deux dimensions. En outre, ces singularités ont un flux nul, ce qui est aussi tout à fait intéressant pour notre méthode spectrale qui est assez sensible à la conservation du volume'.

### III.2.1.2 Formulation associée

La forme de ce type de potentiels de singularité est connue analytiquement, le problème est donc de formulation plus simple que pour le bassin de houle au second ordre, puisqu'il ne nécessite pas de résolution additionnelle. Ainsi, le potentiel additionnel connu intervient directement en tant que termes de forçage dans les équations du problème, qui prennent donc la forme générale (dans les mêmes notations qu'au chapitre précédent) :

$$\begin{aligned}
 \Delta (\phi^{spec} + \phi^{add}) &= 0 && \text{dans } D \\
 \frac{\partial (\phi^{spec} + \phi^{add})}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} (\phi^{spec} + \phi^{add}) \right|^2 && \text{en } z = \eta \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial (\phi^{spec} + \phi^{add})}{\partial z} - \frac{\partial (\phi^{spec} + \phi^{add})}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial (\phi^{spec} + \phi^{add})}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} && \text{en } z = \eta \\
 \frac{\partial (\phi^{spec} + \phi^{add})}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = 0, L_x; y = 0, L_y
 \end{aligned}$$

Pour s'assurer de conserver des conditions de Neumann homogènes sur les parois solides du domaine, on met en œuvre la 'méthode des images', classique quand on utilise des singularités. Cette méthode consiste à remplacer, pour obtenir le potentiel de ces singularités, la présence de parois solides par l'influence de singularités images de mêmes intensités. Ainsi, si l'on cherche par exemple le potentiel d'une seule singularité positionnée en  $(x_s, -z_s)$ , la présence du fond peut directement être prise en compte en ajoutant au potentiel de la singularité principale celui d'une singularité de même intensité positionnée en  $(x_s, -2+z_s)$ . Dans notre cas, on a en deux dimensions la présence non seulement du fond, mais aussi de deux murs latéraux, cela se traduit donc par la nécessité de considérer deux rangées d'images, d'extension horizontale infinie, et symétriques par rapport au fond. En trois dimensions, on se retrouve de même avec deux nappes horizontales infinies d'images, toujours symétriques par rapport au fond. Fort heureusement, le potentiel de nos singularités décroissant comme  $1/r$ , où  $r$  est la distance entre la singularité et le point considéré, un nombre fini d'images suffit (typiquement, on considère pour chacune des deux rangées 8 à 10 images de part et d'autre de la singularité placée dans le domaine réel). Enfin, dans notre cas toujours, nos singularités ont la spécificité d'être 'orientées' (les doublets tournants ont un sens de rotation), ce dont il faut donc tenir compte dans le calcul du potentiel, une image sur deux étant symétrique et l'autre anti-symétrique.

En incluant ces images, et la nature potentielle de notre champ additionnel, le problème principal à résoudre à chaque instant pour  $\phi^{spec}$  et  $\eta$  se résume à :

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi^{spec} &= 0 && \text{dans } D \\
 \frac{\partial \phi^{spec}}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} (\phi^{spec} + \phi^{add}) \right|^2 - \frac{\partial \phi^{add}}{\partial t} - \nu \frac{\partial (\phi^{spec} + \phi^{add})}{\partial z} && \text{en } z = \eta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi^{spec}}{\partial z} - \frac{\partial \phi^{spec}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi^{spec}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]^{add} && \text{en } z = \eta \\ \frac{\partial \phi^{spec}}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = 0, L_x; y = 0, L_y \end{aligned} \quad (III.2.1)$$

où les termes additionnels subsistants sont obtenus analytiquement à partir de l'expression de  $\phi^{add}$  incluant l'influence des images. Une fois ces termes calculés, la résolution s'opère exactement comme dans le cas du noyau hors la présence de générateur.

Une distinction avec ce noyau cependant, est l'ajout d'un terme d'absorption de coefficient  $-\nu(x, y)$  à la première de ces deux conditions de surface libre (dynamique), dans le but d'éviter les réflexions aux extrémités du bassin. Cette absorption est identique à celle utilisée dans le modèle au second ordre précédent, à cette différence qu'on utilise aussi ici une plage positionnée *avant* le générateur, même si on verra que la qualité de la mono-directionnalité du champ généré la rend pratiquement inutile.

### III.2.1.3 Optimisation de la formulation du potentiel additionnel

En deux dimensions, le potentiel d'un doublet tournant mono-chromatique de pulsation  $\omega$ , comme introduit par Clément [27], a pour expression générale (en milieu infini) :

$$\phi^d(x, z) = \frac{\mu_x \cos(\omega t)(x - x_d) + \mu_z \sin(\omega t)(z - z_d)}{2\pi [(x - x_d)^2 + (z - z_d)^2]} \quad \text{dans } D \quad (III.2.2)$$

où  $(x, z)$  est la position du point courant, et  $(x_d, z_d)$  celle du doublet. On peut aussi écrire cette relation sous la forme :

$$\phi^d = \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2} \quad \text{dans } D \quad (III.2.3)$$

où  $\vec{\mu}$  représente alors le moment vectoriel du doublet, et  $\vec{r}$  le vecteur distance entre le point courant et le doublet. Pour que ce doublet soit complètement défini, il reste alors à choisir ce moment vectoriel. Il faut en fait simplement fixer la relation qui relie ses moments horizontal  $\mu_x$  et vertical  $\mu_z$ , le paramètre restant déterminera l'amplitude de la houle régulière générée, à la fonction de transfert près. La solution la plus simple serait évidemment de choisir  $\mu_x = \mu_z$ , ce qui correspondrait à un mouvement circulaire du moment vectoriel au cours du temps. Cependant, en utilisant une approche heuristique basée sur la cinématique de la houle au passage d'un train d'ondes régulier, Clément a proposé de faire reproduire au moment du doublet la trajectoire elliptique des particules. Le moment vectoriel  $\vec{\mu}$  était par conséquent choisi tel que  $\mu_z = \mu_x \tanh[k(z_d +$

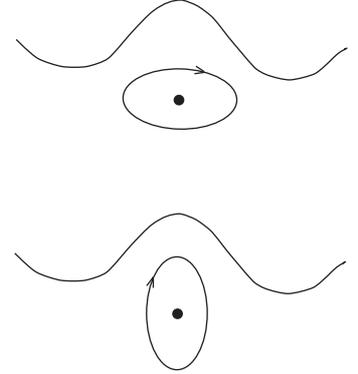


Figure III.2.1: Trajectoire du moment vectoriel d'un doublet tournant mono-chromatique, avant (haut) et après optimisation (bas).

1)], et l'extrémité de ce vecteur décrivait ainsi dans le temps une ellipse de grand axe horizontal, ce qui est illustré dans la partie haute du schéma III.2.1.

Or avec ce choix de moment vectoriel, il subsistait tout de même dans nos simulations des ondes indésirables se propageant vers la gauche du doublet, en fonction de la fréquence, et ce même à des amplitudes faibles. On a alors eu l'idée de s'intéresser au champ de vague en régime établi prédit par la théorie fréquentielle pour un doublet de *Kelvin*, placé au même endroit que notre doublet de Rankine. Ce type de singularités, de Kelvin, tient directement compte de la présence supplémentaire de la surface libre linéaire. Le potentiel d'un tel doublet dans le domaine fréquentiel (matérialisé par un tilde), et en profondeur finie, est par exemple donné par Guével *et al.* [64] :

$$\tilde{\phi}^d = \tilde{\vec{\mu}} \cdot \overrightarrow{\nabla_{M_d}} \tilde{F}(M, M_d) \quad \text{en } M \in D \quad (\text{III.2.4})$$

où  $M$  est un point courant du domaine fluide, et  $M_d(x_d, z_d)$  la localisation du doublet. La fonction fréquentielle complexe  $\tilde{F}$  s'écrit quant à elle :

$$\tilde{F}(M, M_d) = -i \frac{k^2 - \omega^4}{k(k^2 - \omega^4 + \omega^2)} \cosh[k(z + 1)] \cosh[k(z_d + 1)] e^{ik|x-x_d|} + \tilde{F}_{evan}(M, M_d) \quad (\text{III.2.5})$$

dans laquelle  $k$  est le nombre d'onde associé à  $\omega$  par la relation de dispersion linéaire  $\omega^2 = k \tanh(k)$ , et  $\tilde{F}_{evan}$  une fonction représentant le champ évanescent qu'on néglige puisqu'on ne s'intéresse pas ici au champ au voisinage du doublet. La déformée de surface libre associée est donnée par  $\tilde{\eta} = i\omega \tilde{\phi}^d$ . Toujours en vue d'obtenir une génération mono-directionnelle, on peut alors imposer :

$$\tilde{\eta} = i\omega \left( \tilde{\mu}_x \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_d} + \tilde{\mu}_z \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z_d} \right) = 0 \quad \text{pour } x < x_d \quad (\text{III.2.6})$$

dans l'optique de faire apparaître une condition adéquate sur le moment du doublet. En reportant dans cette expression celle de  $\tilde{F}$ , il vient une telle condition :

$$\tilde{\mu}_x = i\tilde{\mu}_z \tanh[k(z_d + 1)] \quad (\text{III.2.7})$$

ce qui met les composantes  $\mu_x$  et  $\mu_z$  dans le rapport inverse par rapport à la solution heuristique précédente. Ainsi, la théorie fréquentielle linéaire nous indique que la trajectoire optimale du moment vectoriel de notre doublet de Rankine est une ellipse de même rapport d'aspect que précédemment, mais de grand axe *vertical*, étonnamment, ce qu'illustre la partie basse du schéma III.2.1. Avec un tel doublet tournant, cette théorie prédit, champ évanescent mis à part, une génération nulle à gauche du doublet et un train d'onde linéaire régulier se propageant vers l'infini à sa droite.

Cette théorie fréquentielle fournit en outre l'amplitude de ce champ de vagues généré par le doublet de Kelvin en fonction de la fréquence, *i.e.* la fonction de transfert du doublet. Avec notre choix de moment, cette amplitude vaut théoriquement :

$$A(\omega) = 2\mu_z \omega \frac{k^2 - \omega^4}{k^2 - \omega^4 + \omega^2} \cosh[k] \sinh[k(z_d + 1)] \quad (\text{III.2.8})$$

Pour confirmer à la fois la validité de notre analyse, et celle de notre modèle de génération, on a alors réalisé une série de simulations linéaires. Un bassin long bi-dimensionnel  $L_x = 50 \times h = 1$  a été considéré, dans lequel on a positionné un doublet en  $(x_d = L_x/10; z_d = -0,4)$ . On a donné à  $\mu_z$  une amplitude faible pour s'assurer de générer un train d'ondes dans des conditions linéaires, et à  $\mu_x$  la valeur optimale issue de (III.2.7). Ces simulations ont été réalisées pour différentes fréquences du doublet, sur des durées suffisamment longues pour que la houle régulière s'établisse ; on a alors constaté que la génération était effectivement parfaitement mono-directionnelle (aucune onde propagée vers la gauche). La figure III.2.2 montre la comparaison des amplitudes relevées dans ces simu-

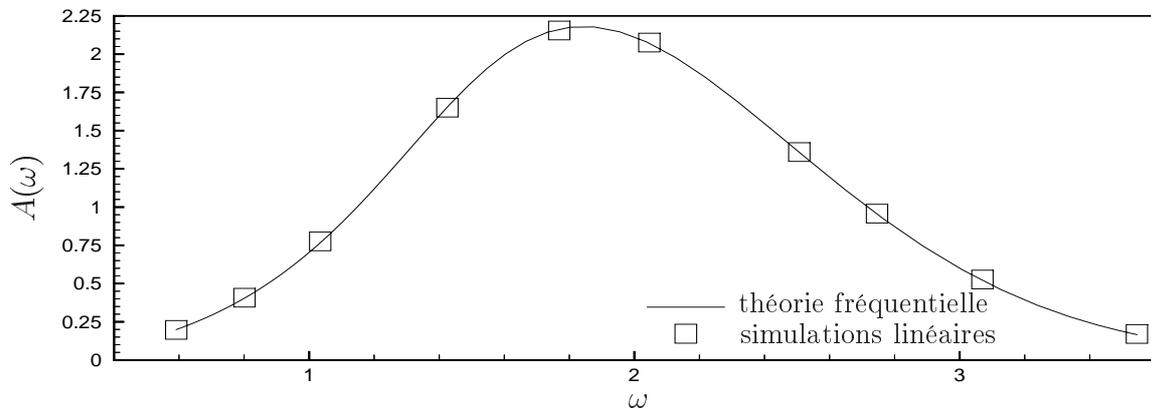


Figure III.2.2: Amplitude linéaire de la houle générée par un doublet monochromatique.

lations à la prédiction de la théorie fréquentielle précédente donnée par l'équation (III.2.8) ; l'accord obtenu est tout à fait satisfaisant. On voudrait re-préciser que les deux amplitudes présentées sur cette figure sont obtenues de manières tout à fait différentes. Dans un cas, elles émanent de la prédiction d'une théorie fréquentielle qui donne la solution stationnaire, en milieu infini horizontalement, du champ de vague généré par un doublet de Kelvin, qui tient intrinsèquement compte de la présence de la surface libre linéarisée. Dans l'autre cas, elles découlent de l'utilisation d'un simple doublet de Rankine, qui ne tient donc pas compte de la surface libre, et dont le potentiel agit en tant que termes de forçage instantanés dans un modèle instationnaire de génération de houle dans un bassin borné, où une méthode d'images est mise en œuvre. De plus, dans notre modèle instationnaire, les conditions de surface libre sont complètement non-linéaires, on pourra donc par cette même technique générer et propager une houle quelconque et non-linéaire.

### III.2.1.4 Extension à la génération de houle irrégulière et à la reproduction de houle cible

Pour modéliser des états de mer réalistes, on a souvent recours à l'utilisation de spectres décrivant la répartition fréquentielle de l'énergie contenue dans la houle (cf. Molin [97] par exemple). Ces spectres (ITTC, Pierson-Moskowitz, JONSWAP, etc.) sont basés sur des considérations théoriques et sur l'analyse de relevés en mer en fonction de différents paramètres (vitesse du vent, période et hauteur moyennes perceptibles, etc.). En découpant ces spectres en petites bandes de fréquences on peut déterminer les amplitudes de chaque composante fréquentielle de la déformée de surface libre associée. Si l'on superpose alors ces composantes, à chacune desquelles on attribue une phase aléatoire, on peut reproduire un état de mer réaliste. Pour généraliser notre méthode de génération de houle par doublet tournant à des houles irrégulières, la première idée a donc été d'utiliser une superposition de doublets mono-chromatiques dans le but de générer un tel état de mer. L'intensité du doublet à chaque fréquence doit tenir compte à la fois de l'amplitude correspondante déterminée à partir du spectre, et à la fois de la fonction de transfert précédente du doublet. Un exemple d'une telle génération sera montré à la section III.2.2.2.

Un autre but peut être de reproduire non pas un état de mer de spectre connu, mais un signal  $\eta_C(t)$  de houle pré-déterminé en une sonde, qui peut être un relevé enregistré en mer, un paquet de vagues focalisé, etc. Dans ce cas, on cherche à générer une séquence de houle dans notre domaine qui, quand elle arrivera au niveau de la sonde placée à une distance, donnera lieu au même enregistrement. Pour ce faire, en linéaire, on analyse d'abord par Transformée de Fourier les composantes présentes dans le signal cible ; à partir de la quantité fréquentielle obtenue  $\tilde{\eta}_C$ , on peut alors déterminer le moment fréquentiel d'un doublet adéquat en tenant compte de la fonction de transfert et de la distance  $\overline{\Delta x}$  entre le générateur et la cible :

$$\tilde{\mu}_z(i\omega) = \tilde{\eta}_C(i\omega) / \left( A(\omega) e^{-k\overline{\Delta x}} \right) \quad (\text{III.2.9})$$

avec le  $\tilde{\mu}_x(i\omega)$  correspondant, après (III.2.7). Quand on revient à l'espace temporel par Transformée de Fourier inverse, on se retrouve alors avec un doublet, toujours optimisé, mais devenu *instationnaire*, *i.e.* dans l'expression précédente (III.2.2) pour un doublet régulier, les composantes horizontale  $\mu_x \cos(\omega t)$  et verticale  $\mu_z \sin(\omega t)$  sont à remplacer par les nouvelles composantes instationnaires  $\mu_x(t)$  et  $\mu_z(t)$  re-composées du domaine fréquentiel. La figure III.2.3 montre l'exemple de la trajectoire décrite au cours du temps par l'extrémité du moment vectoriel d'un tel doublet tournant instationnaire dans le cas de la

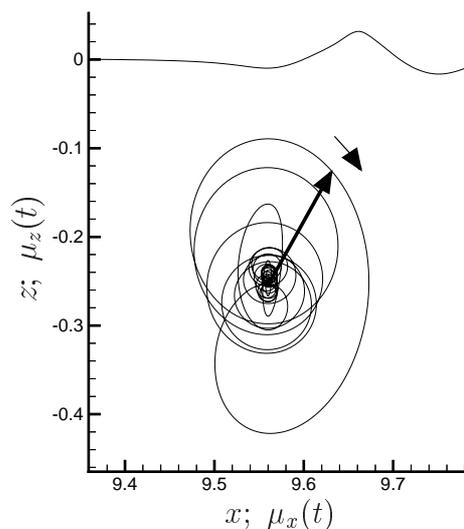


Figure III.2.3: Trajectoire du moment vectoriel d'un doublet tournant instationnaire.

génération d'un paquet de vague focalisé cible ; le doublet  $y$  est montré à sa position sous la surface libre dans le bassin. On peut remarquer que la trajectoire présente là encore une forme allongée verticalement.

Toutefois, ce processus usant d'un passage dans le domaine fréquentiel ne permet de reproduire le signal cible choisi qu'en conditions linéaires. En effet, les interactions non-linéaires se produisant au cours de la propagation entre le générateur et la cible auront sans cela une influence sur la déformée enregistrée à l'endroit de la cible. Pour ré-obtenir la cible en non-linéaire complet, on peut alors penser à utiliser un processus itérant sur la différence obtenue à la cible visée, ce qu'on n'a pas encore mis en œuvre. C'est-à-dire qu'on re-construirait à chaque étape un nouveau signal cible composé de la cible initiale ajoutée de la différence enregistrée dans la simulation précédente. Cela pourrait constituer une alternative aux processus d'optimisation employés par Baldock & Swan [7] et plus récemment par Wu, Liu & Yue [139]. Dans ces méthodes, ils ne génèrent pas la houle mais ils l'initialisent avec la déformée linéaire, dans le domaine spatial *et à tous les instants de la durée de l'enregistrement*. Puis ils optimisent l'ensemble de ces déformées à la fois pour qu'elles vérifient d'une part les conditions de surface libre non-linéaires partout dans le domaine spatial, et d'autre part le ou les enregistrements prescrits en des localisations précises dans ce domaine. Le premier ordre d'optimisation, qui correspond au second ordre en cambrure, peut-être obtenu analytiquement (cf. Zhang *et al.* [144]), puis un schéma d'optimisation est utilisé pour passer au non-linéaire complet. Toutefois, le nombre de degrés de liberté mis en jeu est important (surtout en trois dimensions), et augmente avec la longueur de l'enregistrement, rendant l'optimisation rapidement très coûteuse. D'autre part, un tel processus d'optimisation ne permet pas, à partir d'un signal relevé en mer par exemple, de le ré-obtenir à l'échelle par génération dans un bassin. Il sera donc intéressant de tenter d'itérer sur la différence non-linéaire dans notre modèle de génération ; en attendant on peut néanmoins étudier l'influence des non-linéarités sur la forme du signal enregistré à l'endroit de la cible. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce problème de focalisation non-linéaire au cours de la dernière décennie, ainsi Chaplin [18] a mené en 1996 une série d'expériences de pic focalisés de différentes amplitudes, s'intéressant notamment aux effets induits par les non-linéarités dans les amplitudes et vitesses de phases générées, et comparant à des simulations numériques réalisées par une méthode de type Baldock & Swan [7] (cf. I.1.3.8). Johannessen & Swan [74] ont aussi comparé en 1997 leur modèle de reproduction de houle (cf. I.1.3.8) à des expériences de pic focalisé, dont ils ont étudié les effets de l'augmentation de l'amplitude. Plus récemment Kuehnlein, Clauss & Hennig [81] ont mené une étude expérimentale de ces effets non-linéaires lors de la focalisation, et ont proposé une méthode de génération apte à reproduire un signal non-linéaire à une distance donnée dans un canal à houle physique.

## III.2.2 Validation et Applications

### III.2.2.1 Comparaison de houles régulières à la solution en régime établi

Ainsi qu'on l'a énoncé à la section III.2.1.3 précédente, on a commencé par vérifier la validité de notre modèle de génération en comparant ses résultats à la théorie linéaire. Cette étape s'étant avérée concluante, on a ensuite voulu valider ses résultats pour des conditions non-linéaires. On montre ici la comparaison de notre modèle à une solution bi-dimensionnelle de houle régulière en régime établi, à des cambrures où les non-linéarités ont une influence marquée sur la solution. On a d'abord mené ces comparaisons pour notre première technique de résolution MD, mais on les présente ici principalement pour notre modèle HOS récent, dont c'est l'occasion de prouver la validité.

La solution en régime établi est celle de Rienecker & Fenton [109], qu'on a succinctement décrite dans le chapitre bibliographique I.1.3.8. Elle repose sur un processus d'optimisation de Newton appliqué à un noyau spectral de type MD, et cherche à obtenir le profil permanent de la houle régulière suivie dans son mouvement, à la cambrure choisie. Cette technique est du même type que celle de Tsai & Jeng pour la solution stationnaire dans une cuve, qu'on a utilisée au chapitre II.2, mais sans la dimension temporelle, ce qui simplifie la résolution. On a disposé ici de cette solution déjà codée par Pierre Ferrant ; la figure III.2.4 présente les profils de houle régulière obtenus par cette méthode, tous les 1,5% de cambrure, jusqu'à la cambrure de 44,14% très proche de la limite de Stokes (44,35% cf. Schwartz [114]). Même si avec la cambrure augmentant, la convergence modale d'une telle approche tend théoriquement vers l'ordre deux (par valeurs supérieures), les 64 modes considérés dans une seule période assurent tout de même une grande précision de cette solution, du moins avant les toutes dernières cambrures qui présentent véritablement une crête anguleuse. On pourra donc considérer les résultats obtenus par cette approche comme une référence à laquelle comparer.

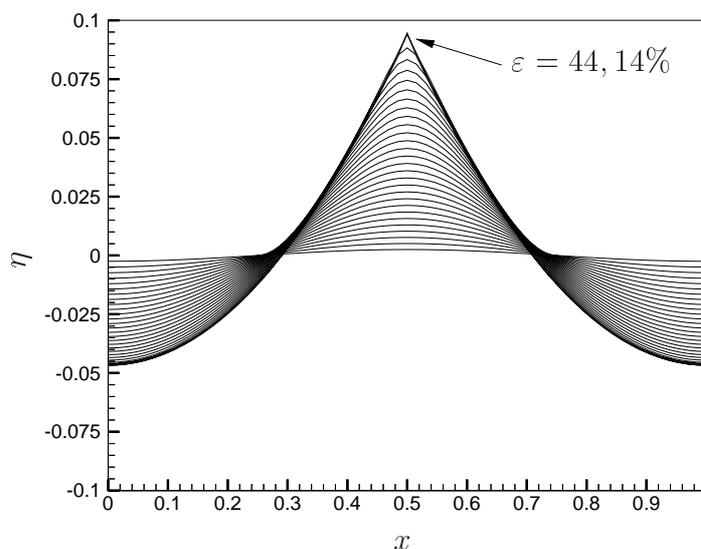


Figure III.2.4: Profils de houle régulière en régime établi, jusqu'à la limite de Stokes.

Pour valider notre modèle HOS, on va montrer ici ses résultats pour deux cambrures

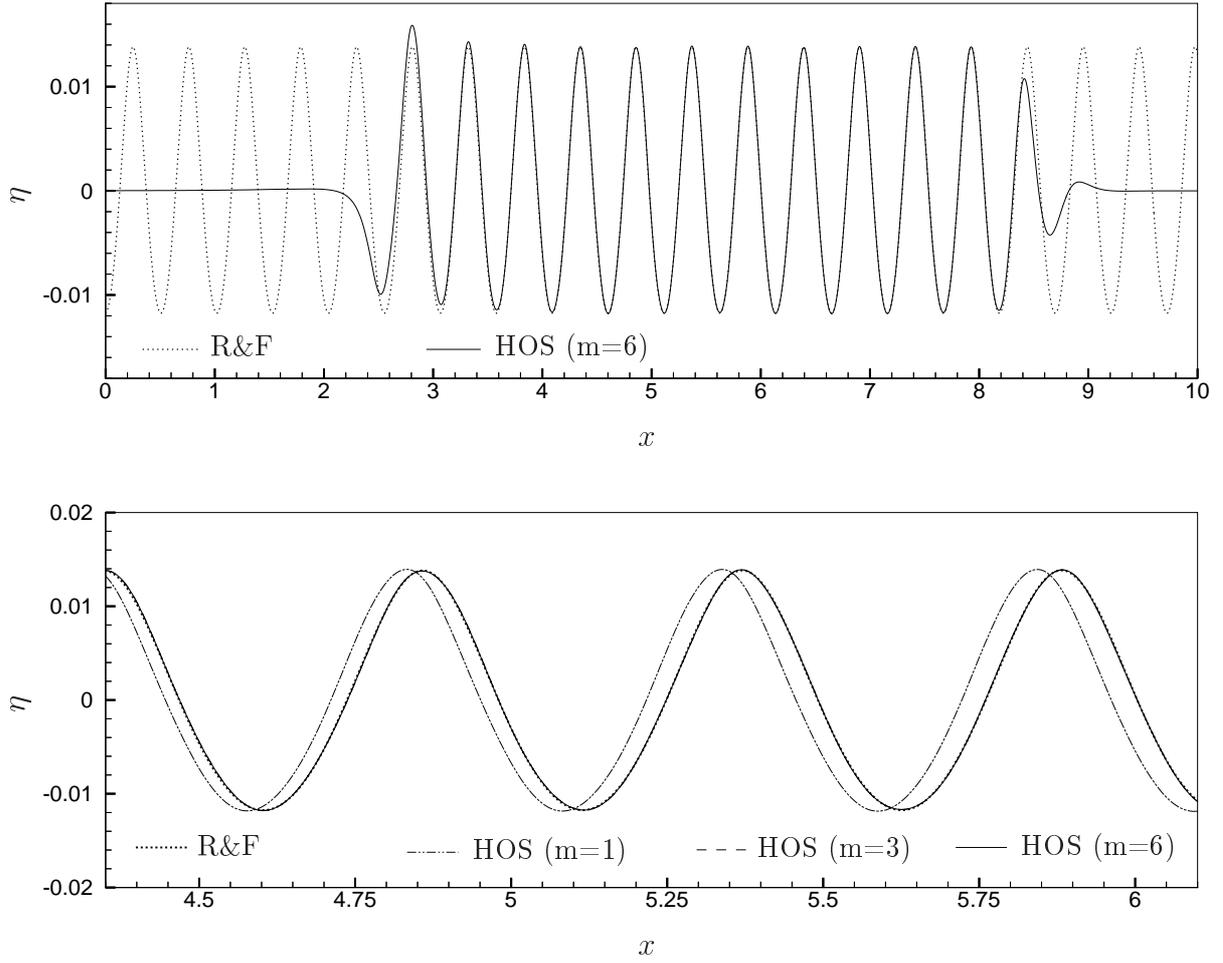


Figure III.2.5: Comparaison du modèle HOS à la solution en régime établi ;  $\varepsilon = 15,7\%$ .

non-linéaires :  $\varepsilon = 15,7\%$  ( $H/\lambda = 0,05$ ) et  $\varepsilon = 25,1\%$  ( $H/\lambda = 0,08$ ) ; au-delà de cette dernière cambrure, ces simulations HOS dans lesquelles aucun traitement n'est appliqué (ni filtrage, ni lissage de la surface libre) commencent à devenir instables pour des grands nombres de modes, notamment à cause de l'apparition d'ondes libres un peu plus fortes, dont la discussion est menée à la section III.2.2.2. Ce modèle étant récent on n'a pas encore beaucoup travaillé à sa stabilité, néanmoins on devrait pouvoir atteindre sans trop de difficultés des cambrures supérieures à 30%, notamment en diminuant le taux d'ondes libres. Dans les simulations présentées, on a choisi une longueur d'onde  $\lambda = 0,5$  dans un bassin de longueur  $L_x = 10$  pour une profondeur 1, le doublet est positionné en  $(x_d = 2,5; z_d = -0,25)$ . Deux plages numériques sont actives entre  $x = 0$  et  $x = 1$ , ainsi que de  $x = 8$  à  $x = 10$ .

La figure III.2.5 présente la comparaison de la déformée dans le bassin pour la cambrure  $\varepsilon = 15,7\%$ , avec le profil de houle établie de Rienecker & Fenton (légendé 'R&F').  $N_x = 513$

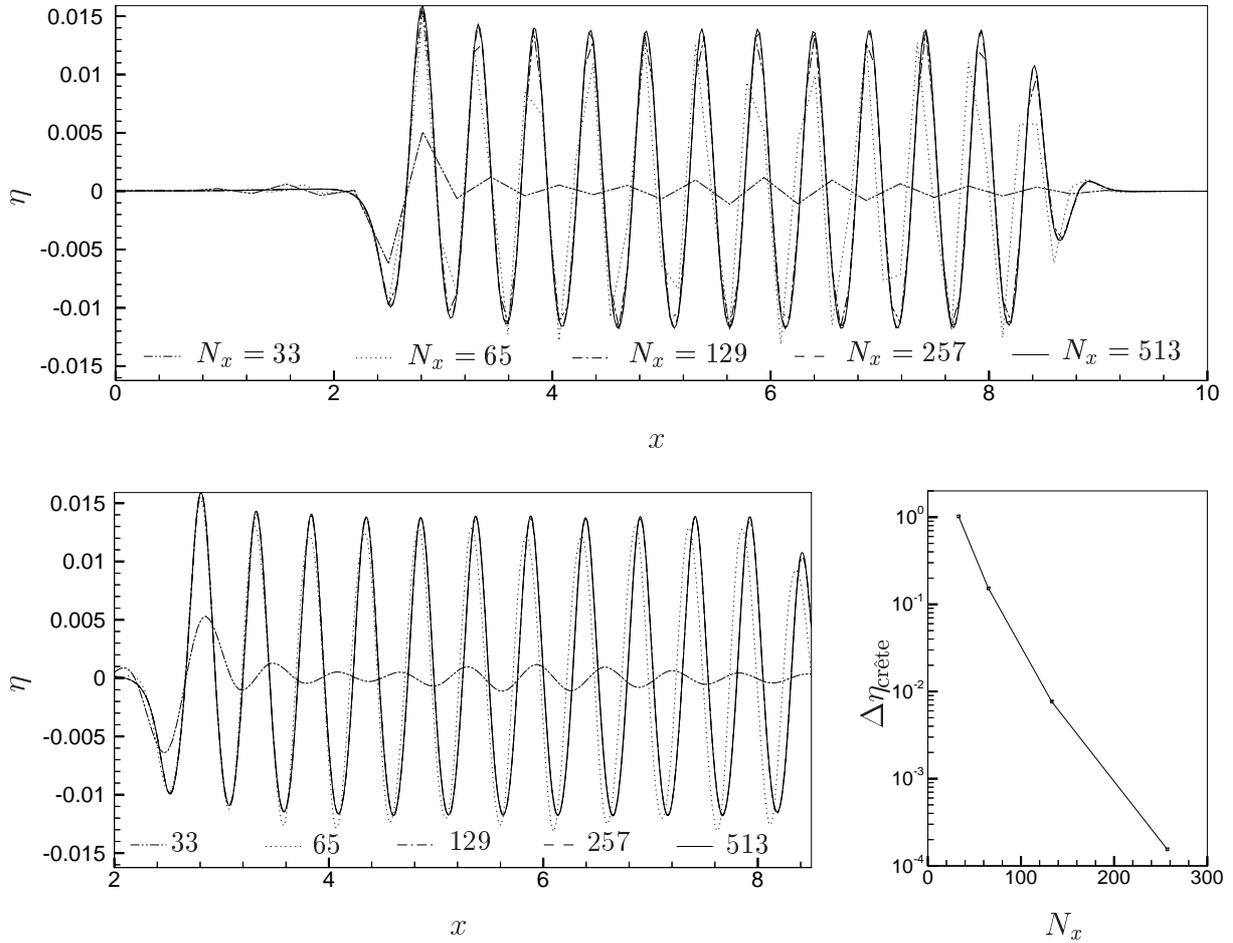


Figure III.2.6: Convergence modale du modèle de génération (HOS ici).

modes ont été utilisés (on verra ci-après que cette valeur est largement suffisante) et un pas de temps de  $1,25 \cdot 10^{-2}$  employé. On pourra noter de prime abord l'inutilité de la plage à gauche du doublet, le caractère mono-directionnel de la génération étant très bien conservé même avec la présence des non-linéarités (la même remarque peut être faite sur les figures suivantes où la houle est encore plus non-linéaire). Pour ce qui est du profil lui-même, on constate un accord visuel presque parfait entre la houle générée et la solution établie ; la partie haute de la figure montre la déformée dans le bassin complet, et la partie inférieure un zoom de la partie centrale. Le caractère non-linéaire de la houle est visible dans la surélévation des crêtes et des creux notamment. Dans la moitié basse de la figure, les résultats de la technique HOS sont présentés pour différents ordres de pente ( $m = 1; 3; 6$ ) ; on peut noter que si l'ordre 1 est insuffisant pour retrouver la solution à cette cambrure, les solutions pour les ordres de pente 3 et 6 ne sont pas discernables visuellement. L'ordre de pente  $m = 3$  est donc suffisant dans ce cas ; la convergence sur ce paramètre  $m$  est montrée ci-après figure III.2.8.

On peut s'intéresser en parallèle à la convergence modale de ce modèle de génération pseudo-spectral HOS, qui est présentée sur la figure III.2.6 au même instant que sur l'illustration précédente III.2.5. Pour ce faire, l'ordre de pente convergé  $m = 4$  a été sélectionné. Sur la partie haute on peut observer la convergence rapide avec le nombre de modes  $N_x$  considérés une fois que ce nombre inclut le 40<sup>ème</sup> mode, qui correspond à la longueur d'onde de la houle générée. Dans la partie inférieure, on montre la portion centrale de la même vue, mais où l'on a fait passer une spline d'interpolation entre les nœuds de collocation, les valeurs aux nœuds restant inchangées. S'il était difficile, sans cette interpolation, de décider à partir de combien de modes on pouvait considérer la solution comme convergée, on le voit mieux sur cette vue. En effet, la convergence est tellement rapide qu'un faible nombre de nœuds de collocation par longueur d'onde (inférieur à 10) est présent dans la solution convergée, donnant une impression de discontinuité. Sur ces vues interpolées donc, on ne constate presque aucune différence entre la solution pour 129 modes et les solutions plus fines (moins de 1% d'erreur relative, cf. vignette de droite), qui sont elles indiscernables ( $N_x = 257$  de  $N_x = 513$ ). Sur le graphe en bas à droite de cette illustration III.2.6, on a tracé l'erreur relative par rapport à la solution pour 513 modes, mesurée sur la crête en  $x = 4,2$  environ, où un nœud de collocation commun à toutes les simulations est présent. On voit que cette erreur décroît pratiquement exponentiellement (échelle horizontale *non* logarithmique), ce qui est bien entendu une caractéristique très intéressante. Contrairement au modèle second ordre, on bénéficie ici en effet d'avoir des déformées nulles aux deux extrémités du bassin, la réplication à l'infini de la déformée dans le bassin induite par la résolution spectrale est donc cette fois  $C^\infty$  en ces bords, n'engendrant pas de diminution du taux de convergence. Comme de plus la déformée dans le bassin est encore assez loin de crêtes anguleuses  $C^0$ , on obtient ce taux de convergence très intéressant.

On peut ensuite se consacrer à un cas un peu plus non-linéaire, ainsi qu'il est visible sur la figure III.2.7 où le profil de houle, décentré vers le haut, a perdu sa forme sinusoïdale, les crêtes s'affinant à l'inverse des creux qui s'élargissent. Cette figure est identique à la figure III.2.5 précédente, mais cette fois pour une cambrure de  $\varepsilon = 25,1\%$  au lieu de  $15,7\%$ . Là encore, on constate un bon accord entre la simulation du modèle de génération HOS et la solution en régime établi. Toutefois, de légères différences commencent à apparaître çà et là, ce qui est mieux visible dans la partie basse de la figure. Ces variations dans le profil ne sont pas des défauts de convergence du modèle, mais plutôt des ondes libres qui apparaissent du fait de la non-linéarité des termes de forçage liés au potentiel additionnel, et dont l'intensité augmente donc avec la cambrure de la houle générée ; on mettra leur présence mieux en évidence à la section III.2.2.2. Du fait de l'augmentation de la cambrure, on peut aussi observer un très léger écart entre la solution pour  $m = 3$  et celle pour  $m = 6$ , dont on a vérifié qu'elle est en revanche confondue avec celle pour  $m = 4$  qui constituerait donc ici le choix le mieux adapté. On peut justement s'intéresser un peu plus précisément à la convergence en fonction de ce paramètre d'ordre de pente  $m$ , ce qu'expose la figure III.2.8. L'erreur relative mesurée sur la crête à environ  $x = 5$  y est tracée, toujours à

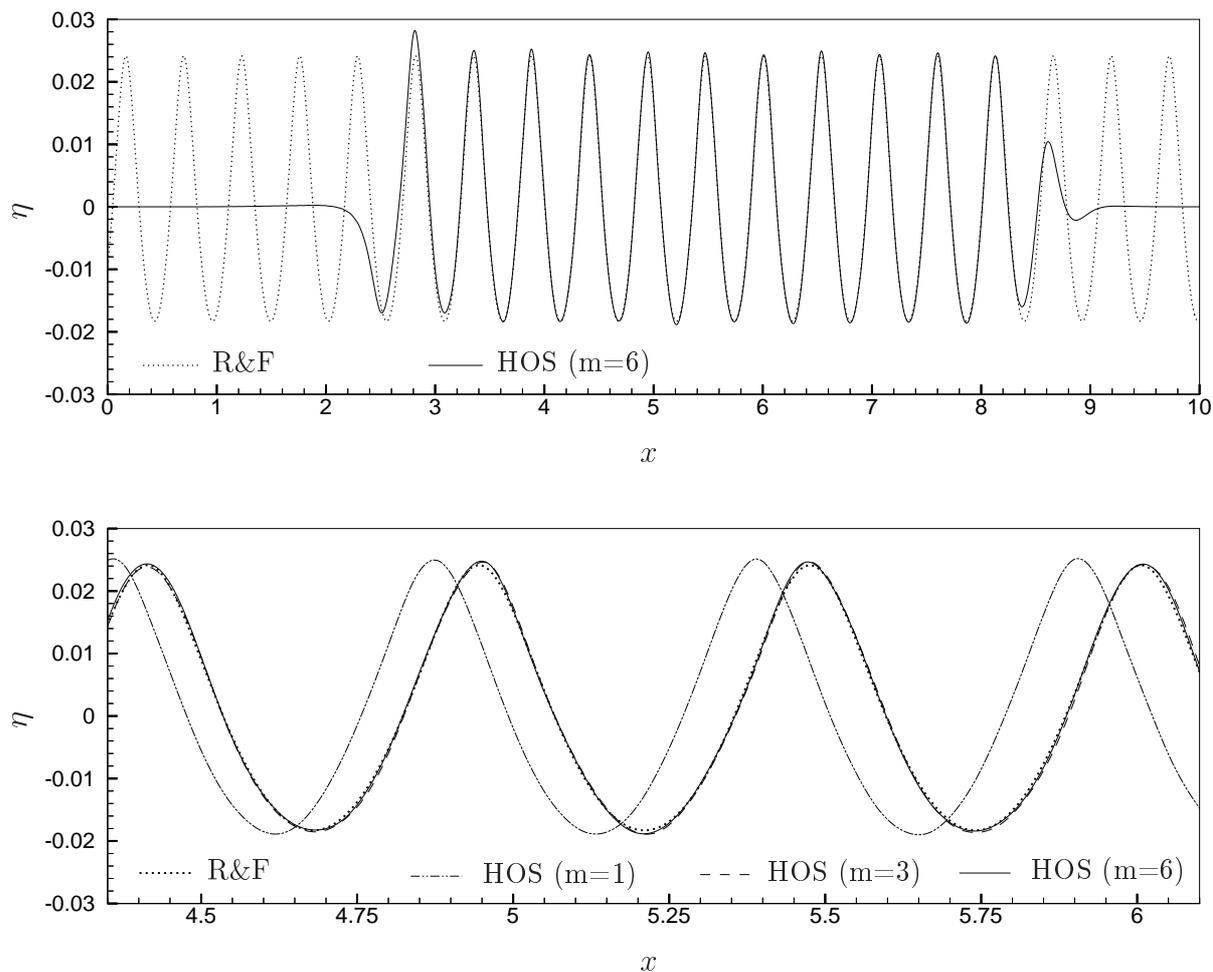


Figure III.2.7: Comparaison du modèle HOS à la solution en régime établi ;  $\varepsilon = 25,1\%$ .

l'instant montré sur les vues précédentes, en prenant la solution pour  $m = 6$  comme référence. On notera là encore que l'échelle horizontale est non logarithmique, pour la plus faible des deux cambrures cette convergence est donc exponentielle, ce qu'on escomptait aux faibles cambrures mais qui est là encore une propriété tout à fait intéressante de la méthode. Comme déjà constaté par Dommermuth & Yue [38], quand on augmente la cambrure, cette convergence devient moins rapide, ainsi pour notre cas  $\varepsilon = 25,1\%$ , elle est d'ordre 3,2 environ, ce qui reste rapide. En se rapprochant nettement plus de la limite de Stokes, la méthode HOS nécessiterait alors de considérer des ordres de pente pouvant atteindre la dizaine voire plus ; cependant, dans les deux cas étudiés ici où les non-linéarités sont déjà bien présentes, les ordres  $m = 3$  et  $m = 4$  sont tout à fait suffisants.

On peut aussi porter attention à la traduction de ce choix de paramètres  $N_x$  et  $m$  du HOS sur le temps de calcul global de la solution ; le tableau III.2.1 donne les temps CPU par pas de temps correspondants, portés en secondes pour un Pentium à 1GHz. Ainsi qu'at-

$N_x$ ( $m = 3$ )	33	65	129	257	513	1025	
$t_{CPU}(s)$	0,007	0,012	0,024	0,051	0,109	0,254	
$m$ ( $N_x = 257$ )	1	2	3	4	5	6	7
$t_{CPU}(s)$	0,023	0,032	0,040	0,051	0,063	0,076	0,091

Tableau III.2.1: Temps de calcul d'un pas de temps du modèle HOS, en fonction du nombre de modes et de l'ordre de pente.

tendu du fait de l'emploi des FFTs, le coût CPU évolue bien environ linéairement avec  $N_x$  (théoriquement  $O(N_x \log_2 N_x)$ ); et cela semble aussi être le cas de son évolution avec  $m$ , ce qu'il était plus difficile de prédire et qui est une caractéristique tout à fait satisfaisante. Les coûts des simulations précédentes, convergées respectivement avec ( $N_x = 129; m = 3$ ) et ( $N_x = 129; m = 4$ ), sont donc de 0,024s et 0,03s CPU environ par pas de temps, soit environ une minute pour l'ensemble de la simulation, toujours sur ce Pentium à 1GHz.

On terminera sur ces cas de validations en houle régulières en montrant une cambrure légèrement plus élevée de 29,1%, toujours avec la même longueur d'onde, obtenue par méthode directe avec 193 modes et l'emploi d'une sur-détermination (soit 385 nœuds de collocation) qui explique la stabilité du calcul. Des cambrures encore plus élevées ont été simulées avec cette MD sur-déterminée (jusqu'à 34% environ) mais la présence d'ondes libres plus intenses rend la comparaison avec la solution en régime établi difficile et peu probante; la mesure de la cambrure devenant ardue notamment, du fait des variations associées dans le profil. Il faut

en effet préciser que la cambrure obtenue n'est pas linéaire avec l'amplitude donnée au doublet, puisque l'amplitude de la houle croît avec cette amplitude, mais sa longueur d'onde aussi du fait des non-linéarités; ainsi, en attribuant au doublet 10 fois l'amplitude donnée pour une cambrure de 3,2% on n'obtient qu'une cambrure de 29,1% et non 32%. Par cette MD, toujours sans lisser ni filtrer, on parvient donc à obtenir des simulations stables pour de plus forte cambrures, mais l'utilisation de la sur-détermination associée, qui implique une résolution  $O(N_x^3)$ , augmente fortement le coût de calcul : environ deux heures pour une simulation complète avec  $N_x = 193$  modes ( $m$  est par contre intrinsèquement

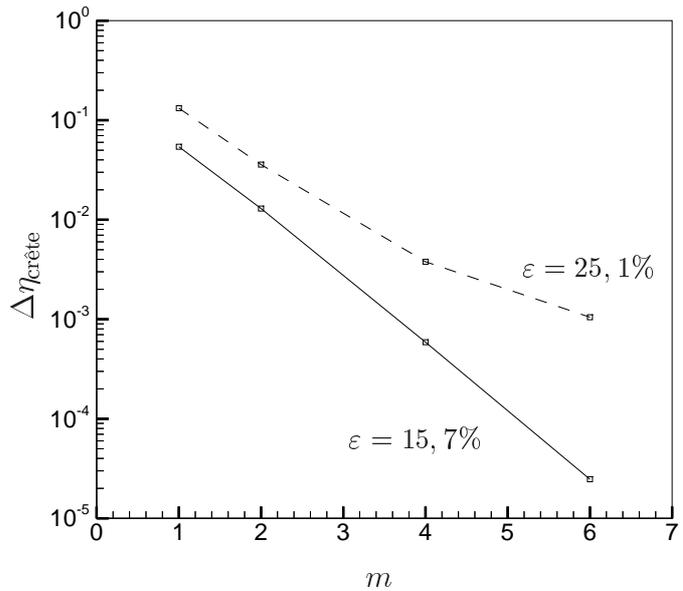


Figure III.2.8: Convergence de la solution HOS avec l'ordre de pente  $m$ .

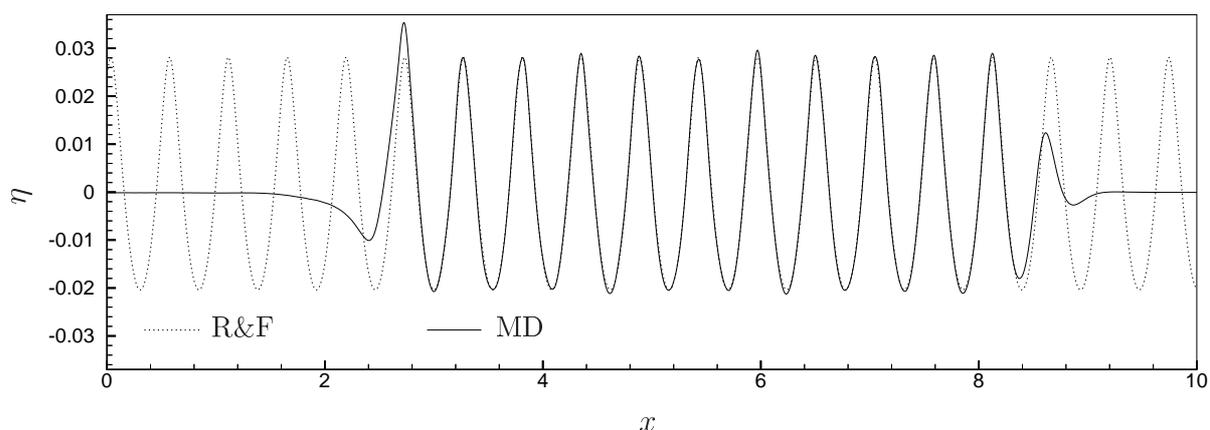


Figure III.2.9: Comparaison du modèle MD à la solution en régime établi ;  
 $\varepsilon = 29,1\%$ .

$\infty$  dans la MD), ce qui serait prohibitif en trois dimensions. Précisons toutefois que pour des cambrures inférieures la sur-détermination n'est pas nécessaire, permettant d'utiliser la méthode itérative GMRES moins coûteuse, mais alors la technique HOS est à même de fournir un résultat identique encore nettement plus rapidement. Pour revenir à la validation de ce modèle de génération par MD, la figure III.2.9 illustre le résultat de la comparaison à la solution de Rienecker et Fenton pour une cambrure de 29,1% ; là encore on retrouve un bon accord entre les deux solutions, avec toujours aucune propagation vers la gauche. On note en revanche dans les fluctuations des hauteurs des crêtes et des creux la présence plus importante des ondes libres.

En définitive, cette comparaison pour différentes cambrures de la solution en régime établi de Rienecker & Fenton [109] aux profils de houle régulière fournis par nos modèles s'avère très concluante, validant le processus de génération mono-directionnelle et de propagation non-linéaire de houle par notre méthode spectrale avec doublet tournant optimisé. Par la même occasion, on aura pu montrer la validité et l'efficacité de notre modèle de génération HOS, dont les intéressantes propriétés numériques escomptées ont bien été retrouvées. C'est donc avec une certaine confiance qu'on a utilisé ce modèle pour générer des houles bi-dimensionnelles irrégulières, puis tout récemment tri-dimensionnelles. Comme le modèle HOS n'a été développé qu'il y a peu de temps, les résultats en houle irrégulière et de reproduction de houles cibles présentés dans la suite ont été réalisés par MD, ce qui n'est par contre pas le cas de la simulation tri-dimensionnelle présentée en dernier lieu. Par ailleurs, dans toutes ces simulations on a observé une très bonne conservation du volume, et une stabilité de l'énergie totale en régime établi, ce qui sera illustré sur un exemple appliqué, au chapitre suivant III.3.

### III.2.2.2 Génération de houles de spectre irrégulier et reproduction de houles cibles

On a d'abord étendu cette méthode à la génération de houle irrégulière de spectre connu en superposant des doublets mono-fréquentiels, comme expliqué précédemment section III.2.1.4. Le spectre choisi est de type JONSWAP, de fréquence de pic 0,171 et de coefficient  $\gamma = 3,3$ . La figure III.2.10 montre l'exemple d'un profil de houle notablement irrégulier obtenu dans le bassin au cours de la propagation d'ondes générées par une telle technique. Le spectre est découpé en 400 bandes entre  $\omega = 0,35$  et  $\omega = 4,35$ ; 400 doublets mono-chromatiques optimisés sont donc employés, avec chacun une phase aléatoire. Ils sont positionnés en  $(x_d = 2,5; z_d = -0,4)$ . Le pas de temps employé est  $\Delta t = 0,05$  et 250 modes sont utilisés. Ce type de houle irrégulière a notamment été utilisé dans le cadre de notre modèle mixte spectral/BEM (cf. III.3).

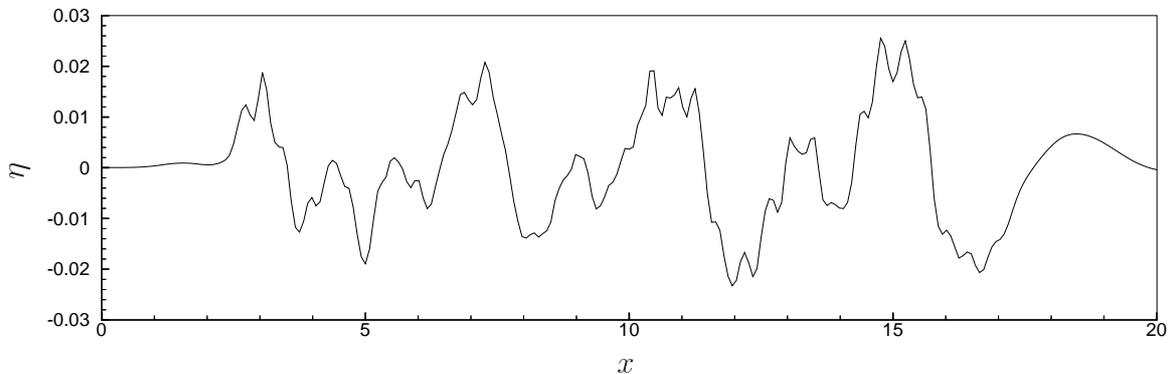


Figure III.2.10: Déformée dans le bassin au cours de la propagation d'une houle de spectre JONSWAP.

Ensuite, on s'est intéressé à la reproduction d'une houle cible à une distance donnée. L'objectif est donc ici de générer une houle telle qu'elle reproduise un signal temporel enregistré sur une sonde positionnée à une distance du générateur. Pour ce faire on utilise le processus d'aller-retour dans le domaine fréquentiel décrit section III.2.1.4. Cela nous permet de déterminer le moment instationnaire de notre doublet tournant, unique à la différence de la reproduction de spectre précédente, mais 'poly-chromatique' et instationnaire. On a choisi de reprendre pour signal cible celui d'un paquet de vagues focalisé qui avait été étudié dans le cadre du projet 'Résonances hautes fréquences des structures offshore' de CLAROM, mais en faisant varier son amplitude qui correspondait dans ces expériences à la seule superposition linéaire. On peut voir sur la figure III.2.11 la partie du signal cible correspondant au passage du pic, ailleurs dans ce signal qui s'étend de  $t = 0$  à  $t = 36$ , l'élévation de surface libre enregistrée est nulle. Le bassin qu'on simule correspond à celui utilisé dans les expériences de ce projet, avec une cible à 30m du générateur de houle dans un bassin de profondeur 2,90m. Dans notre bassin, la cible est positionnée en  $x = 20$  et le

doublet utilisé est quant à lui localisé à l'abscisse  $x_d = 9,6$ , pour respecter cette distance de  $30m/2,90m$  imposée entre le générateur et la cible, et à la profondeur  $z_d = -0,4$ . Là encore, des plages absorbantes numériques sont appliquées aux deux extrémités du bassin. 193 modes sont employés et la résolution par MD se fait par méthode itérative de type GMRES, induisant des simulations longues de 20 minutes environ sur un Pentium à 1GHz ; le pas de temps est calé sur  $1/20^{\text{ème}}$  de la période de la plus petite longueur d'onde générée, ce qui est bien en-dessous du pas de temps  $CFL$ . Pour obtenir le moment instationnaire du doublet, 6000 fréquences sont employées dans la bande  $[\omega = 0,25; \omega = 6]$ . La trajectoire correspondante de son moment vectoriel dans le domaine temporel est celle qui a été montrée sur la figure III.2.3. On peut vérifier que cette bande de fréquence choisie est suffisante par le fait qu'on retrouve parfaitement la cible en conditions linéaires (très faibles amplitudes), ce qui est visible sur la figure III.2.11. Cela montre d'ailleurs non seulement la validité de ce choix de fréquences, mais plus généralement celle du processus complet : analyse de Fourier du signal/détermination du moment instationnaire du doublet/génération et propagation de la houle jusqu'à la sonde. L'évolution de la focalisation correspondante dans le bassin est présentée sur l'illustration III.2.12 (pour le cas le plus non-linéaire montré) ; on y voit les différentes phases de la génération : ondes successivement courtes puis longues, qui se rassemblent ensuite en la position de la sonde et se dispersent enfin. Sur ces vues, la cible est matérialisée par une ligne verticale en pointillé positionnée en  $x = 20$ , et la position du doublet par une demi-ligne verticale en  $x = 9,6$ . On pourra constater une fois encore la mono-directionnalité des ondes générées par le doublet optimal, même pour ce cas non-linéaire instationnaire.

Une fois le processus validé en conditions linéaires, on a ensuite pu étudier l'influence de l'accroissement des interactions non-linéaires sur la forme et l'emplacement du pic. Ainsi, sur la figure III.2.11, où les différents signaux sont tous rapportés à l'échelle du cas le plus non-linéaire, on peut voir l'évolution du signal enregistré à l'emplacement de la sonde avec l'augmentation de l'amplitude. Les différents cas sont repérés par la valeur

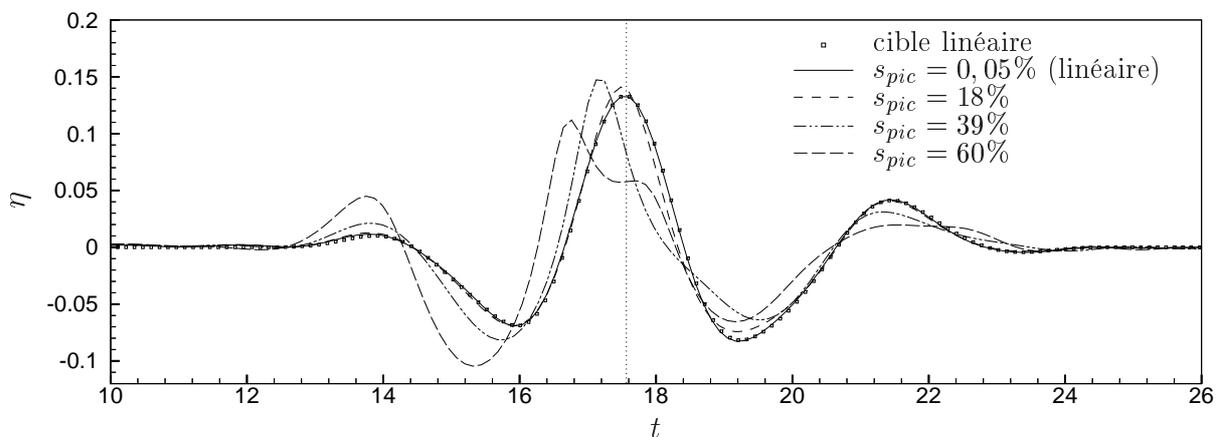


Figure III.2.11: Paquets de vague cible, linéaire et non-linéaires enregistrés sur la sonde.

de la pente maximale mesurée dans le pic à l'endroit où il est le plus haut (localisation qui se déplace aussi avec les non-linéarités, comme on va le voir). On constate sur ces enregistrements une influence importante des interactions non-linéaires ; on retrouve ainsi notamment la constatation expérimentale faite par Kuehnlein *et al.* [81] d'une arrivée de plus en plus précoce du pic sur la sonde, avec l'augmentation de l'amplitude et donc des non-linéarités. D'autre part, ces dernières modifient complètement la forme du pic vu par la sonde, engendrant même une diminution de sa hauteur relative pour notre cas le plus non-linéaire. En fait, ce pic n'a pas diminué d'amplitude mais s'est décalé spatialement comme on peut le voir sur la figure III.2.13, où les déformées sont là aussi portées à l'échelle de la plus forte d'entre elles ; ce constat est là encore conforme aux observations et aux simulations de Chaplin [18]. On sait en effet qu'à fréquence égale, les non-linéarités ont pour effet d'allonger les longueurs d'ondes produites, il n'est donc pas étonnant de se retrouver

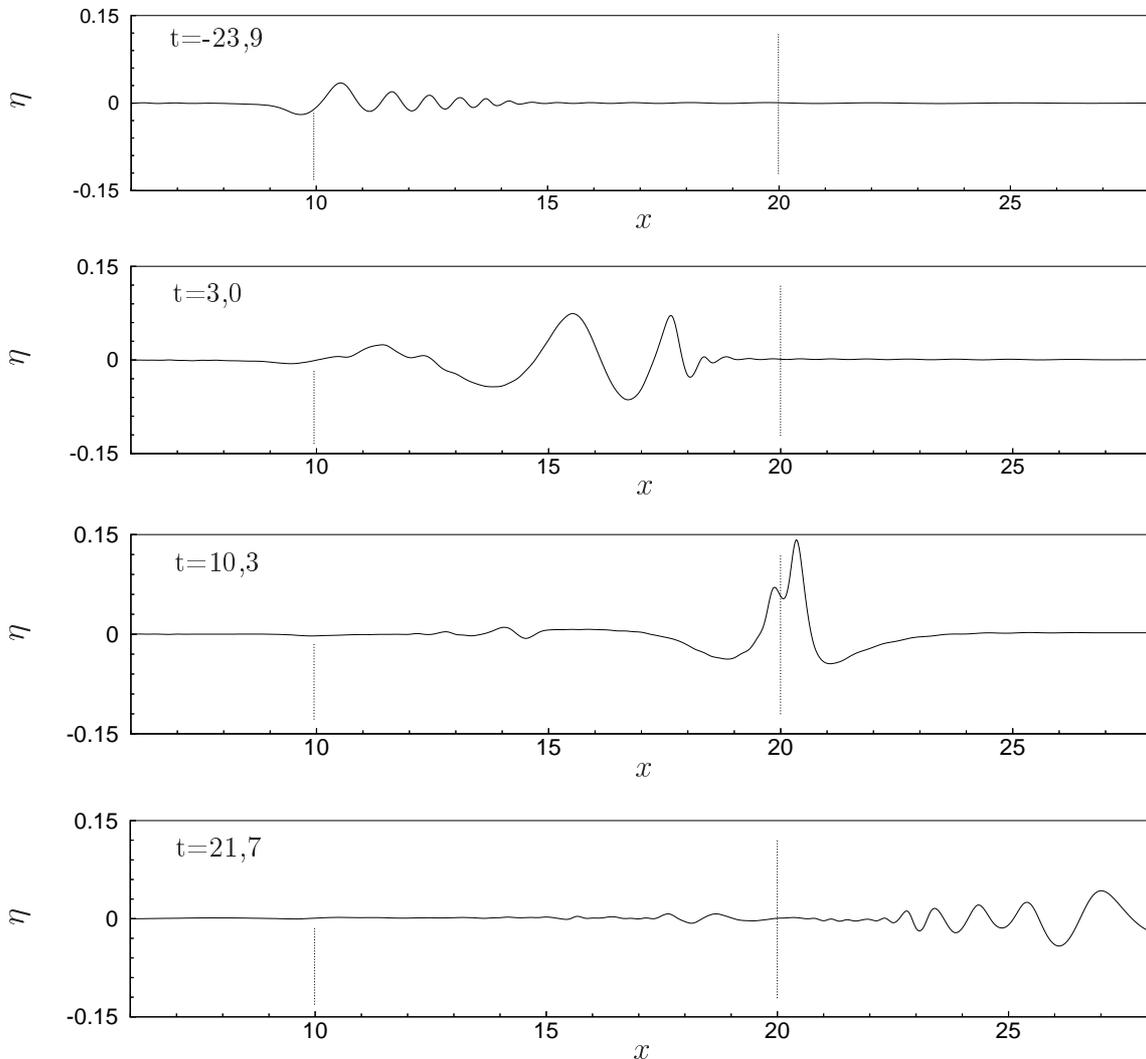


Figure III.2.12: Déformées de surface libre dans le bassin au cours de la génération du paquet de vague focalisé ;  $s_{pic} = 60\%$ .

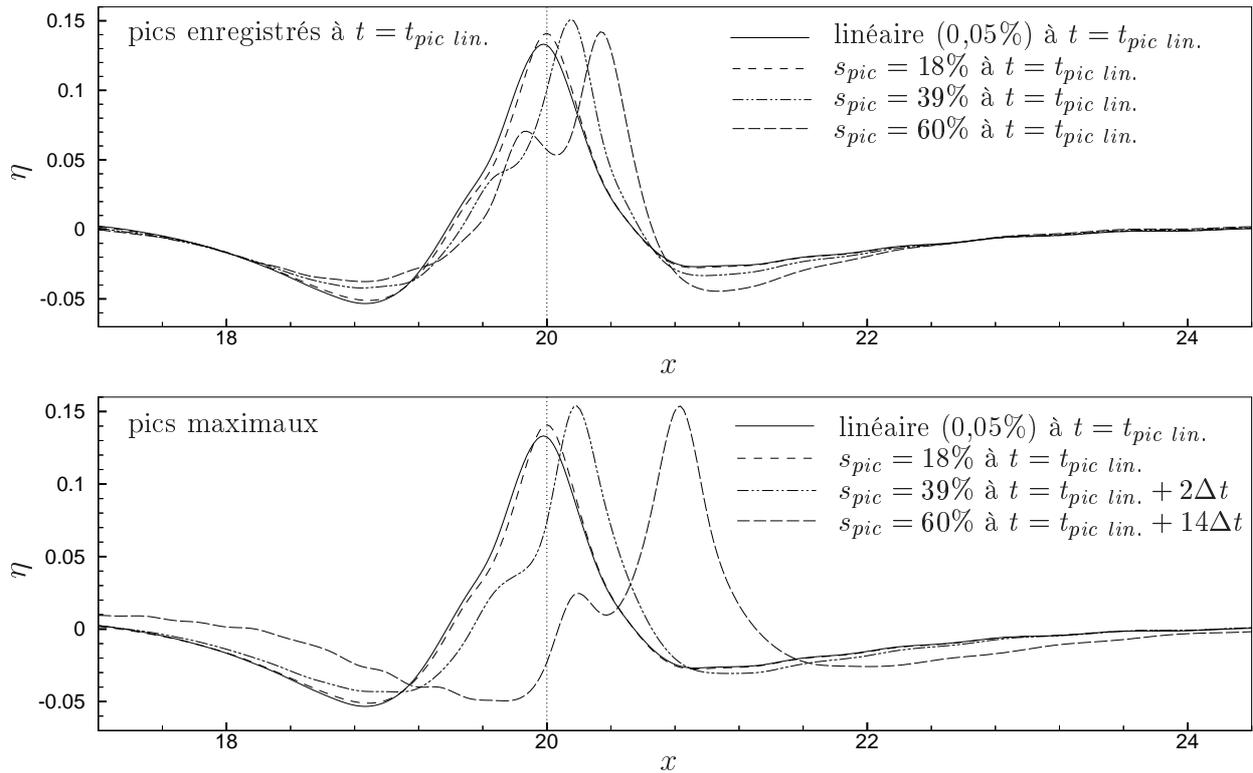


Figure III.2.13: Formes spatiales des pics les plus hauts lors de la focalisation.

avec un pic se focalisant après la sonde. Sur cette illustration III.2.13, on montre dans la partie haute la forme du pic à l'instant où il est censé se former d'après l'analyse linéaire, et dans la partie inférieure, la forme des pics les plus hauts effectivement mesurés dans le bassin. On constate ainsi qu'avec les non-linéarités, le pic se retrouve décalé non seulement spatialement mais aussi dans le temps ; celles-ci augmentant, sa forme s'éloigne de plus en plus de celle du pic cible, même là où il se produit effectivement. Un autre fait qui traduit la présence de fortes non-linéarités réside dans la mesure des pentes maximales locales mesurées sur ces pics maximaux (visibles sur la partie inférieure de la figure III.2.13), qui atteignent  $s_{pic} = 60\%$  pour le cas de plus forte amplitude montré. On a même simulé des cas d'amplitudes encore plus fortes, où des pentes locales de 98% ont été notées, cependant on constatait aussi la présence d'ondes libres de forte amplitude perturbant les déformées à ces amplitudes, qu'on ne montre donc pas.

Si l'on observe attentivement la figure III.2.12 qui montre l'évolution du train d'ondes dans le bassin pour le cas le plus non-linéaire montré ( $s_{pic} = 60\%$ ), on constate deux types de perturbations qui commencent à apparaître. Les premières sont de très faibles amplitudes et se propagent avant le train d'onde focalisé, elles sont engendrées tout au début de la génération, en même temps que les ondes les plus courtes pour lesquelles le champ évanescit (théoriquement non-propagatif) est de forte amplitude relative ; ce qui est dû à la trop grande profondeur du doublet pour ces ondes les plus courtes, augmen-

tant l'inadéquation entre la cinématique verticale du générateur et la cinématique de la houle générée. Cette légère perturbation apparaît quelle que soit l'amplitude générée, donc même en linéaire. En revanche, on voit aussi apparaître sur ces vues un deuxième type de perturbations, qui se propagent elles plus lentement que le train focalisé, d'abord parmi ce train d'onde, puis derrière. Outre qu'elles soient plus lentes que les ondes générées (comme les ondes libres dans un bassin avec batteur physique), ces ondes parasites ont aussi une amplitude fortement dépendante de l'amplitude du pic cible. Elles sont donc associées aux non-linéarités (comme les ondes libres), et on ne les a effectivement pas rencontrées du tout en conditions linéaires. Elles présentent par conséquent les mêmes caractéristiques que des ondes libres en bassin avec batteur physique, auxquelles on les assimilera donc, même si on n'a pas dans notre problème de 'condition batteur' à proprement parler, dont le caractère non-linéaire est la source de ces ondes libres en bassins physiques. On peut noter en revanche que le champ évanescents qu'on constate quelles que soient les non-linéarités était déjà lui bien présent dans la théorie linéaire de Kelvin ( $\tilde{F}_{evan}$  dans l'équation (III.2.5)).

Pour tenter de diminuer l'amplitude de ces ondes parasites (tant apparaissant avant qu'après le paquet de vagues), on a d'abord travaillé sur la profondeur du doublet. Le résultat en est qu'un compromis est à trouver entre une position trop profonde, qui va fortement augmenter l'amplitude des modes évanescents pouvant induire la création d'ondes parasites propagatives précédant le train d'ondes voulu; et une position trop proche de la surface qui, à ondes générées identiques, augmente fortement la déformée locale au-dessus

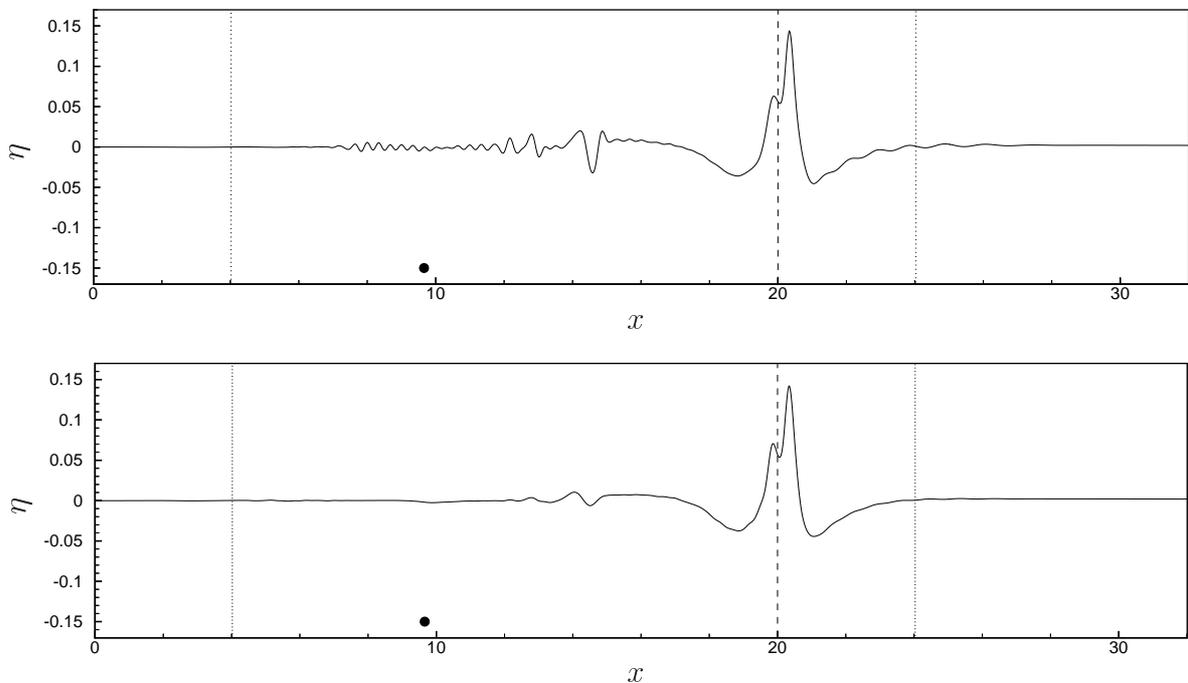


Figure III.2.14: Influence de la séparation en deux de la bande de fréquences, et de la génération associée au moyen de deux doublets de profondeurs distinctes.

du doublet, renforçant les parasites propagatifs du type ondes libres. À noter qu'en considérant le champ évanescent seul sans tenir compte des ondes libres, une profondeur optimale pourrait être trouvée à partir de la théorie linéaire précédente où le terme  $\tilde{F}_{evan}$  est explicite. Outre cette recherche d'une profondeur adéquate, on a eu ensuite l'idée de séparer la bande de fréquences en deux sous-bandes : une bande hautes fréquences  $[\omega = 2,5; \omega = 6]$  qui est générée par un doublet 'haut' positionné à la profondeur  $(z_d^{HF} = -0,1)$ , et une bande basses fréquences  $[\omega = 0,25; \omega = 2,5]$  générée par un doublet 'bas' en  $(z_d^{BF} = -0,9)$ . La figure III.2.14 expose la nette diminution des ondes parasites obtenue grâce à cette séparation ; le point noir y matérialise le (en haut) ou les (en bas) doublets, mais pas à leurs vraies profondeurs ( $z_d = -0,25$  pour le doublet seul), et les lignes verticales figurent les positions respectives de la sonde et des débuts de zones absorbantes. Cette amélioration flagrante laisse présager que l'extension à plusieurs bandes de cette technique de séparation permettra de rendre négligeables ces ondes parasites.

En conclusion, l'extension de l'utilisation de doublets tournants optimisés à la génération de houles non régulières s'est montrée concluante, permettant notamment de générer des houles de spectre prescrit, par superposition de doublets mono-chromatiques. Par ailleurs, on a validé le processus d'analyse d'un signal cible et de re-création, par doublet instationnaire optimisé, d'une séquence de houle apte à le reproduire sur une sonde placée dans le bassin, dans des conditions linéaires ; cette technique devra être étendue, par exemple en itérant sur la différence à la cible, de manière à ré-obtenir le signal prescrit quelles que soient les non-linéarités en présence. Pour démontrer plus avant les possibilités de ce modèle de génération, on peut maintenant mentionner ses premiers résultats en trois dimensions.

### III.2.2.3 Premiers résultats tri-dimensionnels

On va ici illustrer sur un exemple les tout premiers résultats obtenus avec notre modèle de génération tri-dimensionnel HOS. Il s'agit du croisement de deux trains d'ondes perpendiculaires dans un bassin tri-dimensionnel rectangulaire  $L_x = 10 \times L_y = 5 \times h = 1$ . Dans chaque direction, on génère un morceau de train d'ondes régulières long de sept périodes, avec une rampe croissante sur les deux premières et décroissante sur les deux dernières. Le train d'ondes dans la direction  $x$  a pour longueur d'onde  $\lambda_x = 0,5$ , pour cambrure  $\varepsilon_x = 23,6\%$  et il est engendré par un doublet positionné en  $(x_d = 1,5; z_d = -0,25)$ . Le train d'ondes dans la direction  $y$  quant à lui démarre après un léger délai, il a comme longueur d'onde  $\lambda_y = 0,35$ , comme cambrure  $\varepsilon_x = 20,4\%$  et il est généré au moyen d'un doublet localisé en  $(y_d = 0,75; z_d = -0,25)$ . Ce cas d'interaction, qui fait intervenir la superposition des deux ondes est donc assez fortement non-linéaire.

La figure III.2.15 présente la surface libre dans le bassin à deux instants, d'abord au début de la propagation des deux trains d'ondes (partie supérieure de la figure), et ensuite

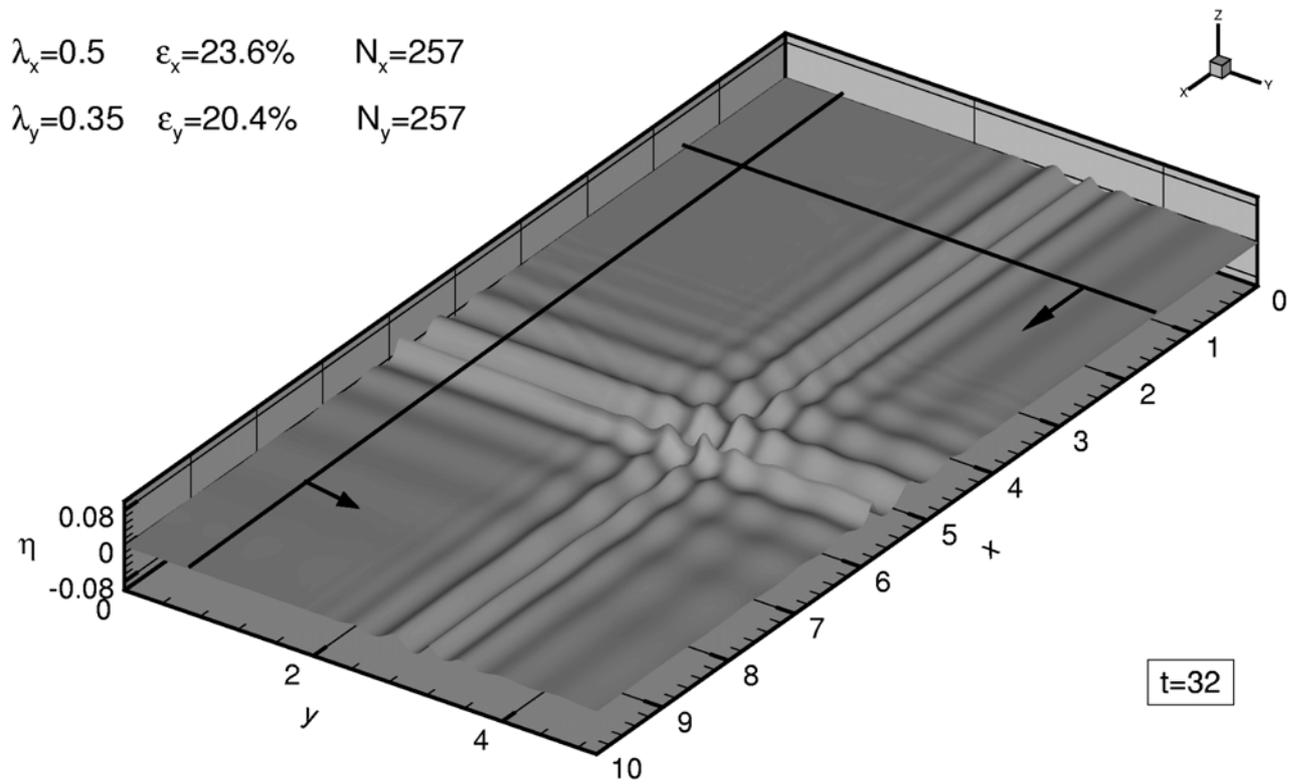
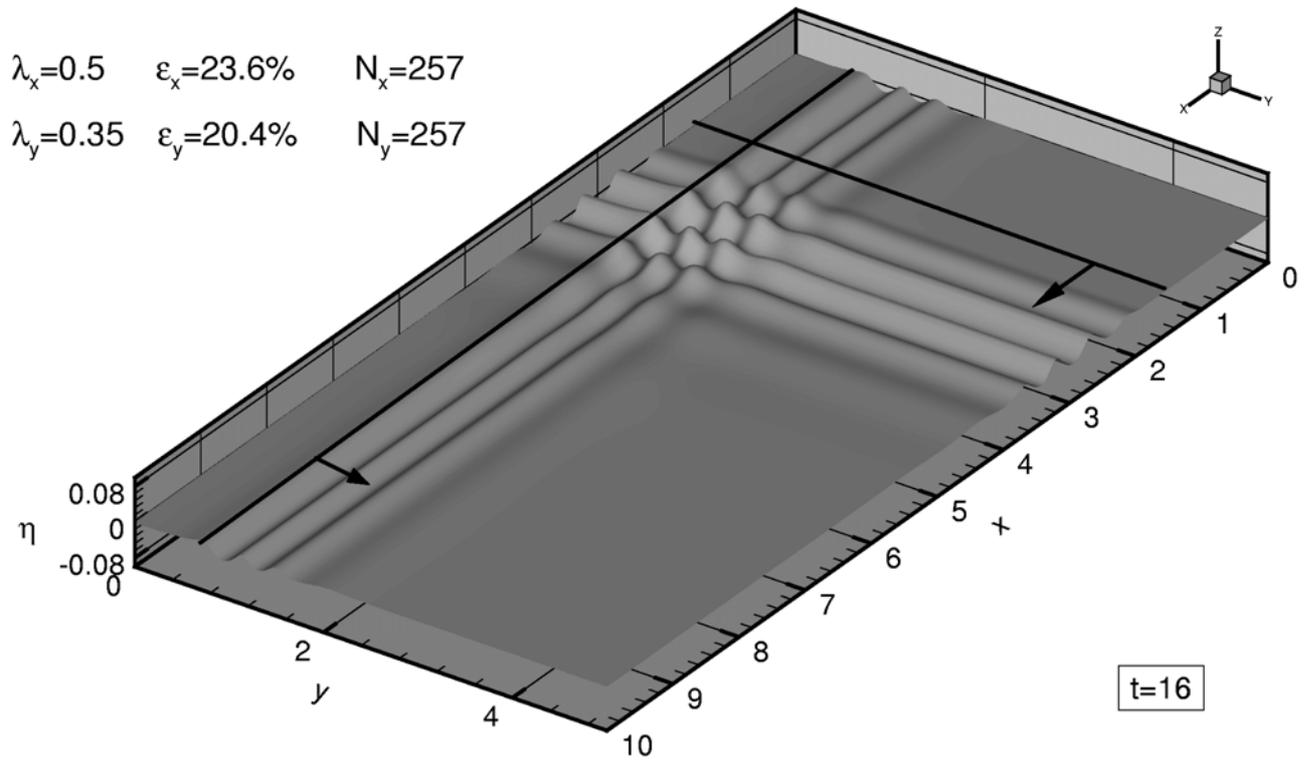


Figure III.2.15: Croisement de deux trains d'ondes.

juste avant que le calcul ne s'arrête du fait du surgissement d'une crête fortement cambrée qu'on voit apparaître au milieu du champ d'interaction (partie inférieure). On précise toutefois qu'il s'agit là des premiers résultats HOS, et que donc rien n'a été mis en œuvre pour tenter de prolonger la durée de cette simulation, qui devra être étudiée plus en détails ; l'objectif étant de retrouver en trois dimensions des caractéristiques d'interaction non-linéaire des trains d'ondes telles celles décrites en deux dimension par Longuet-Higgins [87] par exemple.

Cette simulation aura nécessité environ une journée de calcul sur un Pentium III à 1GHz, toutefois on a employé un nombre de modes/nœuds de collocation important ( $N_x = N_y = 257$  modes, soit 66000 modes/nœuds de collocation sur la surface libre) dans le but de prouver les possibilités de la méthode ; l'ordre de pente  $m$  vaut quant à lui 4. En appliquant à notre configuration les conclusions dérivées à la section III.2.2.1, on doit obtenir un résultat convergé de précision élevée pour 2 fois moins de modes dans chaque direction. De plus, le pas de temps employé ( $\Delta t = 10^{-2}$ ) doit pouvoir être multiplié par un facteur 3. Finalement, ce calcul convergé ne nécessite probablement que quelques heures sur un simple PC.

### III.2.3 Conclusion sur la génération de houle non-linéaire

On a présenté dans ce chapitre un modèle spectral de génération utilisant un potentiel additionnel analytique sous forme de doublets tournants. Le moment de ces doublets a d'abord été optimisé en utilisant la théorie fréquentielle pour obtenir une génération purement mono-directionnelle, et cette propriété s'est avérée être conservée ensuite dans tous nos cas de génération, quelles qu'en soient l'instationnarité et les non-linéarités.

La comparaison en houle régulière, à fin de validation de ce modèle de génération, à la solution en régime établi de Rienecker & Fenton [109] s'est avérée tout à fait concluante. À cette occasion la validité de notre modèle de génération HOS récent a été démontrée, et ses caractéristiques théoriques de précision et de rapidité d'exécution ont été retrouvées.

On a donc ensuite pu étendre notre approche à la génération de houles irrégulières bi-dimensionnelles, d'abord en engendrant une houle de spectre déterminé par superposition. Ensuite, on s'est attaché à reproduire des signaux de houles prescrits sur une sonde dans le bassin ; le processus employé faisant appel à un doublet tournant instationnaire optimisé a été validé en conditions linéaires, et l'influence des interactions non-linéaires a été étudiée. Cette technique devra être étendue en itérant sur la différence à la cible en conditions non-linéaires. Un intérêt particulier a été porté en parallèle à la réduction des ondes parasites engendrées avec l'accroissement des non-linéarités.

Enfin, un premier résultat de calcul tri-dimensionnel encourageant a été présenté sur l'exemple du croisement de deux trains d'ondes ; on devra poursuivre dans cette direction, notamment en songeant à la manière d'adapter notre potentiel de doublets dans l'optique

de générer une houle véritablement multi-directionnelle.



## Chapitre III.3

# Application à la diffraction autour de corps

---

Ce chapitre a pour objectif de montrer l'intérêt d'associer le modèle spectral non-linéaire précédent à des modèles de diffraction autour de corps. La formulation en changement de variables nécessaire à cette association, séparant les champs incident et diffracté, est présentée. Ses avantages sont mis en lumière, et il est fait mention de l'adaptation spécifique des méthodes spectrales à fournir le champ incident dans le cadre de tels modèles mixtes.

On présente ensuite la mise en œuvre et les premiers résultats obtenus sur houle irrégulière d'un modèle potentiel mixte original, alliant une génération de houle spectrale à un calcul de diffraction par méthodes d'éléments aux frontières. Enfin, des détails sont fournis quant à la création en cours d'un modèle mixte entre ce même modèle spectral et un modèle de diffraction en écoulement visqueux, dont les premiers résultats sur houle régulière se montrent encourageants.

---



### III.3.1 Motivation

Ainsi qu'on l'a énoncé dès le chapitre traitant de la mise en œuvre théorique de notre modélisation spectrale, elle est intrinsèquement liée à la géométrie du domaine fluide, dont elle nécessite la connaissance des modes propres de manière analytique. Cette caractéristique restrictive ne permet donc pas d'introduire un corps dans le domaine fluide, du moins si on exclut les rares 'cas d'école' où l'on peut obtenir une formulation analytique des modes propres sur la géométrie du nouveau domaine fluide à corps inclus (exemple : sur un anneau de fluide autour d'un cylindre vertical, une formulation spectrale basée sur des polynômes de Jacobi peut être trouvée). Si l'on excepte son application spécifique à un bassin de houle (chapitre III.1) qui possède son intérêt propre, il paraît dommage de disposer d'un tel modèle spectral, dont on a montré au chapitre précédent l'efficacité pour générer des houles non-linéaires, sans pouvoir faire interagir ces houles avec des corps. On s'est donc rapidement tourné vers des associations de cette technique spectrale à d'autres modèles, qui seront eux à même de prendre en compte la présence d'un corps, tout en bénéficiant des potentialités de notre approche pour amener une houle non-linéaire précise au voisinage de ce même corps. Ces 'associations' ne revêtent pas à proprement parler la forme de 'couplages', qui impliqueraient que les modélisations soient inter-dépendantes au cours de la simulation (comme dans le cas de couplages fluides-structures par exemple); elles n'utilisent pas non plus la technique spectrale comme modèle d'apport de conditions initiales, ainsi que les méthodes HOS classiques en nécessitent (cf. I.1.3.3). En fait, elles reposent sur un *changement de variables* séparant, dans le modèle principal (non spectral), les différentes grandeurs selon une composante *incidente* connue résultant du modèle spectral, et une composante *diffractée* inconnue à calculer. Mathématiquement parlant, cette 'association' prend donc exactement la même forme que la séparation explicitée au début de la partie III entre notre potentiel spectral inconnu et un potentiel additionnel connu. La partie incidente sera ainsi pré-calculée 'spectralement', et agira sous forme de termes de forçage connus, à chaque pas de temps, dans la résolution principale non spectrale exprimée pour les quantités totales, ce qui permettra l'obtention des inconnues restantes (champ diffracté).

Ce principe de changement de variables mettant en œuvre des quantités incidentes et diffractées a été largement validé par Pierre Ferrant dans son code instationnaire *XWAVE* [47], basé sur une méthode d'éléments aux frontières (BEM) et modélisant les conditions de surface libre de manière complètement non-linéaire. Ne résolvant que le champ diffracté, ce modèle s'appuyait jusqu'à présent, pour décrire explicitement le champ incident, sur l'approche spectrale stationnaire de Rieneker & Fenton [109] (utilisée au chapitre précédent III.2) permettant de générer des houles régulières en régime établi. D'autres exemples de ce type de modélisations incluent celle de Lalli *et al.* [82], et plus récemment celle de Schönberg & Chaplin [113]. L'intérêt et l'efficacité d'un tel modèle BEM formulé en changement de variables a été démontrée sur des cas sans la présence de courant d'abord (Ferrant, Molin & Malenica [49]), puis avec (Ferrant [48]), par comparaisons fines à des théories analytiques

au troisième ordre [49], et des calculs avec courant issus d'une formulation au second ordre de Büchmann & Skourup (cf. ces auteurs & Ferrant [16]). L'approche spectrale de Riencker & Fenton se limitant à des houles régulières établies, il a paru naturel de la remplacer ensuite par le modèle spectral décrit au chapitre précédent, permettant d'inclure dans le code de diffraction *XWAVE* une houle incidente quelconque. La section III.3.3 présente le principe d'une telle modélisation et illustre sa validité sur quelques exemples.

Plus récemment, l'idée est venue au sein du Laboratoire de réaliser la même démarche, mais cette fois avec le code Navier-Stokes *ICARE* d'Alessandrini (Alessandrini & Delhommeau [4]) et Gentaz, pour la version bi-dimensionnelle (Gentaz *et al.* [57]). La motivation réside en plus ici dans ce que les modélisations en écoulements visqueux sont mal adaptées à la propagation de houle sans dissipation, du moins à coût raisonnable; et à l'inverse, les effets visqueux dans un train d'ondes progressif non déferlant sont très faibles. Cette même technique de changement de variables séparant un champ incident qui amène la houle, connu explicitement par méthode spectrale potentielle, du champ diffracté visqueux vérifiant les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds (RANSE), paraissait donc d'autant plus attractive. À notre connaissance, elle était inédite pour des écoulements de fluide visqueux, elle a par conséquent été baptisée, de l'acronyme *SWENSE* pour 'Spectral Wave Explicit Navier-Stokes Equations' (cf. [I] et [IX]). La section III.3.4 en donne le principe et fait le point sur l'état actuel de sa mise en œuvre.

Toutefois, avant de se consacrer en détails à ces approches, on va tenter d'en dégager les principaux intérêts, montrant aussi à cette occasion en quoi la technique spectrale est spécifiquement adaptée pour servir de champ incident dans ces modèles formulés en changement de variables. Pour améliorer la fluidité de l'expression, ce qui ne sera pas superflu on en convient, on qualifiera par la suite ces modèles de diffraction de 'mixtes', en remplacement de la dénomination un peu longue de 'formulés en changement de variables'.

### III.3.2 Intérêts de ces modèles mixtes, et spécificité adéquate de la méthode spectrale

On sait que le champ issu de la diffraction sur un corps soumis à la houle s'étend radialement autour de ce corps, progressant vers l'infini de manière isotrope. L'extension surfacique de ce champ à mesure qu'il s'éloigne du corps induit une décroissance rapide de son amplitude; les élévations de surface libre non négligeables associées à la diffraction sont donc confinées dans un espace restreint autour du corps. De même, les effets visqueux afférents à la diffraction voient leur intensité concentrée principalement au voisinage du corps. Aussi, si l'on sépare les champs incident et diffracté, au moyen d'un changement de variables, il n'est pas nécessaire de calculer la partie diffractée dans tout le domaine de calcul du champ incident. De surcroît, on sait également que pour établir artificiellement de la houle (que ce soit numériquement ou en bassin), la présence d'un générateur induit

localement la création de modes évanescents indésirables ; une distance est donc nécessaire entre le générateur et le corps, d'autant plus que le générateur engendre aussi des ondes libres progressives moins rapides, et si on cherche à réaliser une mesure avant leur arrivée, le temps dont on disposera sera d'autant allongé qu'on accroîtra la distance entre le corps et le générateur. Enfin, pour obtenir numériquement un train de houle établi sur un corps, il faut aussi destiner une part du domaine à absorber les ondes après leur passage au voisinage du corps, afin d'éviter que des réflexions ne viennent perturber *a posteriori* le champ dans le domaine d'intérêt. Si on se résume, il apparaît clairement que les tailles du domaine où il faudra calculer le champ incident, et de celui où la présence du champ diffracté est significative, ne sont pas du même ordre de grandeur ; de la même manière, les échelles des phénomènes associés aux champs incident et diffracté sont nettement distinctes. La solution adoptée dans les simulations classiques, qui ont pour seules inconnues les quantités totales (incidentes plus diffractées non distinguées), est de raffiner le maillage au voisinage du corps, *i.e.* seulement là où les phénomènes liés à la présence de ce corps interviennent de manière non-négligeable. En effet, le coût des simulations numériques est directement lié au nombre d'inconnues, et donc à la taille du domaine et à la finesse de sa discrétisation. Néanmoins, on comprend aisément que si on peut séparer les champs incident et diffracté en deux domaines de calculs complètement distincts maillés au moyen de discrétisations adaptées, on gagnera en efficacité. S'il est en plus possible de choisir pour la génération du champ incident une méthode spécifiquement adaptée, fiable et rapide, le gain sera alors considérable, surtout si le modèle de diffraction est formulé en écoulement visqueux –pour les raisons invoquées à la section précédente. Et il est un ultime argument abondant dans le sens de ces modèles mixtes, qui réside dans la possibilité de procéder à des calculs de diffraction de houle *bi-dimensionnelle* sur une structure *tri-dimensionnelle*, induisant une nette diminution supplémentaire du coût de calcul de la partie incidente. Ce dernier type de simulations présente un intérêt pratique puisque les houles établies, au large, progressent souvent selon une direction principale peu fluctuante localement.

Le principe théorique de calculer séparément ces deux champs paraît donc attrayant, et les méthodes spectrales comme choix de solution pour générer et propager la houle sont bien adaptées, ainsi qu'on l'a établi au chapitre précédent. Mais elles présentent une autre caractéristique qui rend ce choix définitivement adéquat. En effet, si les modèles mixtes ont été décrits d'une manière légèrement 'idyllique' au paragraphe précédent,

il existe *a priori* une restriction de taille à leur mise en application. De fait, le calcul du champ diffracté va nécessairement s'opérer en résolvant, dans le domaine principal, les équations pour le problème *complet*, dans lequel les quantités incidentes, connues, agiront

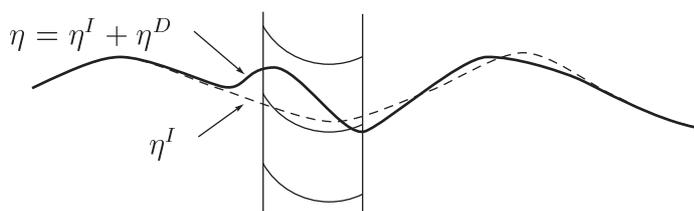


Figure III.3.1: Composantes de l'élévation de surface libre au voisinage d'un corps.

en tant que termes de forçage. La résolution va donc être prise sur la surface libre *réelle* correspondant au champ complet, or cette surface libre ‘totale’ n’aura pas au voisinage du corps la même position que la surface libre incidente (qui, elle, ne voit pas la présence du corps), et se retrouvera potentiellement *au-dessus de celle-ci* ainsi que l’illustre la figure III.3.1, soit *hors du domaine fluide incident*. L’accès à ces quantités incidentes (le potentiel et ses dérivées) hors de leur domaine de calcul paraît de prime abord malaisée, sauf à utiliser localement des méthodes de continuation spécifiques, qui complexifieraient nettement la méthode et de surcroît, se traduiraient probablement par une augmentation significative de son coût global et une diminution de sa précision. Le modèle perdrait alors nettement de son attrait ; on ne connaît ainsi pas d’exemple de simulations BEM alliant une génération incidente BEM bi-dimensionnelle, à un calcul de diffraction BEM tri-dimensionnel formulé en changement de variables, avec une méthode de continuation adéquate. Or justement, ce qui rend tout à fait idoines les méthodes spectrales à servir de modèles de champ incident, est qu’elles sont, elles, *continues à travers la surface libre*, qui n’est pas une surface de séparation explicite dans leur formulation. En effet, dans notre formulation le potentiel ‘ne voit pas la surface libre’ et est décrit continûment dans l’espace vertical ; sa seule surface de ‘séparation’ est la surface horizontale à  $z = 0$ , qui sépare dans la méthode directe la zone toujours convergente de la série de la zone divergente (cf. II.1.3.1). Ou encore, si on applique une méthode de type HOS où les évaluations sont menées en  $z = 0$ , cette surface horizontale ne représente que le centre du domaine de convergence du développement en série de Taylor. Toujours est-il que pour nos méthodes, le critère d’intérêt est la hauteur relative du point de calcul au-dessus de  $z = 0$  (à laquelle est liée la convergence), et non la présence physique de la surface libre à tel ou tel endroit. En plus de leur relative efficacité, ces méthodes spectrales, qu’elles soient stationnaires comme celle de Rienecker & Fenton [109], ou instationnaires comme la nôtre, sont donc spécifiquement adaptées à fournir le champ incident dans le cadre de modèles de diffraction mixtes.

### III.3.3 Modèle de diffraction potentiel mixte spectral / BEM

Ainsi qu’on l’a évoqué depuis le préambule, cette thèse est plus de nature exploratoire qu’appliquée ; les applications montrées ici ont donc pour objectif principal d’apporter une validation de l’emploi d’un tel modèle mixte, plutôt que de fournir des données pratiquement utilisables. Ainsi, des comparaisons fines à des résultats numériques et expérimentaux sont laissées à des études postérieures, qui impliqueront notamment de mettre en place des traitements spécifiques dans le code *XWAVE*, pour étendre son domaine de stabilité sur ce type de cas de houles mettant en jeu des cambrures locales importantes sur le cylindre.

### III.3.3.1 Formulation

On va ici présenter un résumé de la formulation de *XWAVE*, modèle de calcul de la diffraction sur un corps soumis à la houle, exprimé en changement de variables. Cette méthode de type BEM inclut les équations de surface libre complètement non-linéaires, avec la même formulation semi-Lagrangienne que celle de notre modèle spectral (marqueurs fixes dans le plan horizontal et libres verticalement). Numériquement, la modélisation est basée sur des éléments iso-paramétriques triangulaires répartis sur les frontières du domaine, sur lesquelles la solution, linéaire par facette, varie continûment. Les normales aux parois sont de même continues, et aux intersections entre parois des nœuds de collocation multiples sont spécifiés. La résolution afférente du système linéaire variant dans le temps est opérée par méthode itérative GMRES, associée à un schéma en temps de type Runge-Kutta du quatrième ordre. Pour de plus amples détails quant à la mise en œuvre numérique et à la validation extensive de ce modèle sur houles régulières, avec et sans la présence de courant, se référer à [47], [49] et [48].

Dans cette modélisation BEM, la solution vérifie la théorie potentielle, soit l'équation de Laplace dans tout le domaine fluide, et les conditions de surface libre non-linéaires de (II.1.10) établies au II.1.1. Le changement de variables séparant les champs incident et diffracté est ensuite réalisé :

$$\phi = \phi^I + \phi^D \quad \text{dans } D \quad (\text{III.3.1})$$

On suppose de plus que le champ incident vérifie lui aussi la théorie potentielle. Reportant cette hypothèse et la décomposition précédente dans les équations générales du problème, exprimées pour les quantités *totales* dans le domaine fluide *réel*, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta \phi^D &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi^D}{\partial t} &= -(\eta^I + \eta^D) - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi^I + \vec{\nabla} \phi^D \right|^2 + \frac{\partial (\eta^I + \eta^D)}{\partial t} \frac{\partial \phi^D}{\partial z} - \frac{\partial \phi^I}{\partial t} && \text{en } z = \eta^I + \eta^D \\ \frac{\partial \eta^D}{\partial t} &= \frac{\partial (\phi^I + \phi^D)}{\partial z} - \vec{\nabla} (\phi^I + \phi^D) \cdot \vec{\nabla} (\eta^I + \eta^D) - \frac{\partial \eta^I}{\partial t} && \text{en } z = \eta^I + \eta^D \\ \frac{\partial \phi^D}{\partial n} &= -\frac{\partial \phi^I}{\partial n} && \text{sur la paroi du corps} \end{aligned} \quad (\text{III.3.2})$$

Le corps fixe est placé au centre du domaine ; à l'infini, on impose la condition de radiation signifiant l'extinction du champ diffracté :

$$\phi^D \longrightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow \infty \quad (\text{III.3.3})$$

où  $R$  est la distance radiale au corps.

Le domaine fluide considéré dans les simulations est cylindrique de rayon  $R_D$ , entourant le corps localisé en son centre. Son extension finie nécessite d'absorber les ondes diffractées

sur son pourtour ; pour ce faire des termes en  $-\nu(R)\phi^D$  et  $-\nu(R)\eta^D$  sont ajoutés aux seconds membres des conditions, respectivement dynamique et cinématique, de surface libre de (III.3.2). Le coefficient  $\nu(R)$  est nul dans la partie centrale du domaine, puis il augmente de façon parabolique de 0 à 0,5 entre un rayon de début d'absorption  $R = R_{abs}$  et le bord du domaine  $R = R_D$ . Les surfaces maillées sont celles du corps, de la surface libre, et de la paroi cylindrique verticale extérieure du domaine. Le fond est pris en compte implicitement par symétrie sur les coefficients d'influence, et si le corps est lui-même symétrique par rapport au plan  $y = 0$  et qu'il est soumis à une houle bi-dimensionnelle progressant selon l'axe  $x$ , alors une nouvelle symétrie est appliquée par rapport à ce plan, réduisant la taille du domaine d'un facteur deux. Enfin, au début du calcul le fluide est considéré au repos dans le domaine.

### III.3.3.2 Mise en œuvre numérique de l'association avec champ incident spectral

Pour l'élaboration pratique de notre modèle mixte, on a disposé du code *XWAVE* fourni par Pierre Ferrant, et le travail a consisté en le remplacement du modèle spectral stationnaire de Rieneker & Fenton [109] par celui qu'on a présenté au chapitre précédent. Il existe trois grandes différences entre ce modèle stationnaire et le nôtre :

- la principale est que notre modèle est instationnaire, on ne dispose donc pas d'un simple jeu d'amplitudes modales invariantes, apte à décrire l'écoulement incident à tout instant, mais d'un jeu complet à chaque pas de temps de calcul ;
- la seconde distinction réside dans ce que, dans le modèle stationnaire, il est possible d'exprimer aussi les élévations de surface libre au moyen d'une série modale d'amplitudes invariantes, cela permet notamment de les calculer, ainsi que leurs dérivées surfaciques, en un point *de coordonnées quelconques* ;
- enfin, notre solution spectrale est générée, propagée et absorbée dans un domaine fini, alors que celle de Rieneker & Fenton est permanente, disponible sur une tranche d'une longueur d'onde de la houle régulière, répétée à l'infini.

Pour ces raisons, l'introduction de notre modèle instationnaire dans *XWAVE* est un peu plus compliquée que le simple remplacement du modèle stationnaire existant.

Reprenons dans l'ordre inverse les trois différences soulignées ci-dessus. La troisième implique que le domaine de calcul du champ diffracté de *XWAVE* soit *inclus* dans celui du modèle spectral, puisqu'on doit en effet pouvoir disposer des quantités incidentes en *n'importe quel point* du maillage du modèle de diffraction. On peut même préciser qu'il faut que ce dernier maillage soit inclus dans la zone du domaine spectral où la houle incidente est établie, soit suffisamment après son lieu de génération, et avant son lieu d'absorption. D'ailleurs, cette nécessité d'une taille beaucoup plus grande pour le domaine spectral est physiquement cohérente si on se réfère à ce qui a été énoncé à la section III.3.2. À titre d'exemple, le schéma III.3.2 illustre la disposition des deux domaines sur le

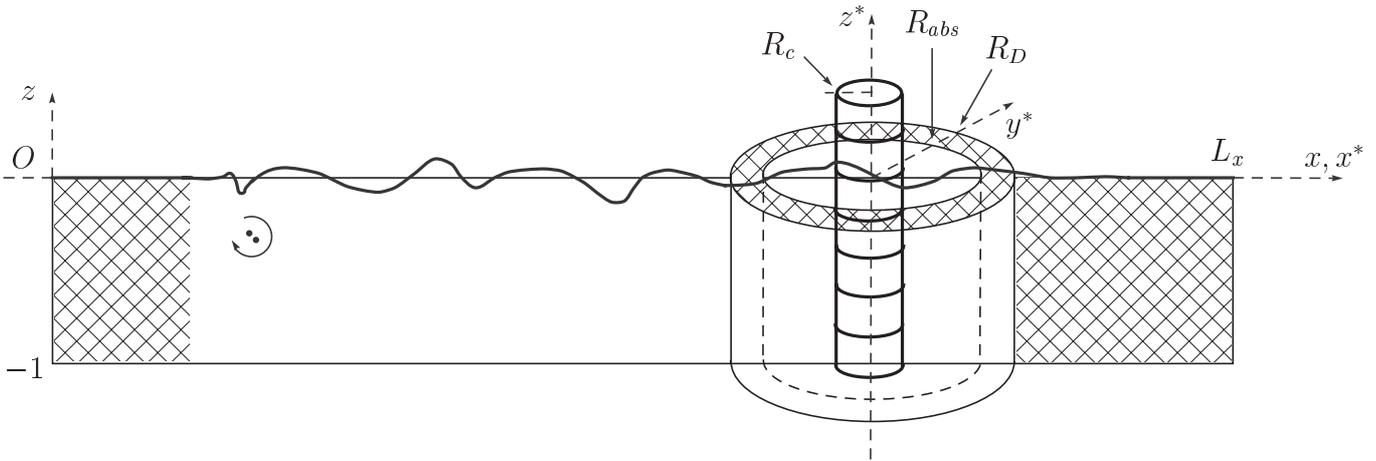


Figure III.3.2: Principe de disposition des domaines du modèle potentiel mixte.

cas d'une houle bi-dimensionnelle se diffractant sur un corps cylindrique tri-dimensionnel, exemple d'application dont on montrera les résultats à la sous-section suivante. Le domaine spectral bi-dimensionnel est figuré par un rectangle dans lequel est positionné le générateur et des zones d'absorption à chaque extrémité (en hachuré). Le domaine tri-dimensionnel de *XWAVE* est quant à lui figuré par les trois cylindres verticaux qui délimitent respectivement le corps, le début de la zone d'absorption, et le bord du domaine. Les repères et dimensions caractéristiques des deux domaines sont aussi portés sur la figure. Ce qu'il faut noter sur cette illustration même si cela n'est pas explicitement représenté, c'est que du fait des géométries respectives des domaines, quelle que soit la manière dont sera maillée la surface libre du domaine tri-dimensionnel, les abscisses  $x$  de ses nœuds ne pourront toutes correspondre à des abscisses de nœuds de collocation du domaine spectral.

Ceci étant établi, on peut revenir sur la deuxième distinction mentionnée ci-avant, qui concerne le calcul des élévations de surface libre. En effet, dans notre modélisation spectrale non-linéaire, ces élévations ne sont connues qu'aux nœuds de collocation et ne peuvent être reconstruites explicitement en un point quelconque, via la série spectrale. Pour pouvoir obtenir ces élévations de surface libre incidentes aux abscisses des nœuds du maillage tri-dimensionnel, on stocke donc ces mêmes élévations calculées aux nœuds de collocation par le modèle spectral, puis on les interpole entre ces nœuds dans *XWAVE* au moyen de splines. On procède de même avec leurs dérivées horizontales.

Enfin, pour ce qui est de la première différence à la méthode de Rienacker & Fenton, soit l'instationnarité de notre modèle, on a d'abord fait le choix de faire correspondre des pas de temps du modèle spectral avec les sous-pas de temps de l'avance en temps d'*XWAVE*, ce qui est un peu contraignant mais présente l'avantage d'éviter une interpolation temporelle. Ainsi, à chacun de ces pas de temps de la simulation spectrale, sont stockés dans des fichiers à accès direct (pour optimiser leur re-lecture dans *XWAVE*) les amplitudes modales

et leurs dérivées temporelles, ainsi que les élévations de surface libre et leurs dérivées horizontales, comme on vient de le mentionner. Des deux premières grandeurs on se sert pour reconstruire ‘spectralement’, en tout point du maillage du modèle de diffraction et cette fois *sans interpolation*, toutes les quantités incidentes de (III.3.2) requises dans ce modèle qui sont liées au potentiel, soit  $\partial\phi^I/\partial x$ ,  $\partial\phi^I/\partial y$ ,  $\partial\phi^I/\partial z$  et  $\partial\phi^I/\partial t$ , ainsi que  $\partial\eta^I/\partial t$  via la condition cinématique de surface libre (II.1.8) vérifiée par le champ incident. Des secondes, on obtient par l’interpolation de type spline évoquée, les mêmes quantités  $\eta^I$  et  $\partial\eta^I/\partial x$  en tout point du maillage de *XWAVE*.

Avant de donner quelques exemples d’application de cette association de notre modèle avec *XWAVE*, on voudrait préciser que mises à part les trois distinctions d’ordre purement technique qu’on vient de mentionner, cette association ne présente aucune différence théorique avec celle utilisant le modèle spectral stationnaire de Rienecker & Fenton [109]. En ce sens, les validations précises menées avec le modèle stationnaire (cf. Ferrant *et al.* [48]&[49] par exemples) resteront valables pour l’association avec le modèle spectral instationnaire, pourvu que la houle pure générée par ces deux modèles soit comparable. Or on a montré au chapitre précédent III.2 que les modèles spectraux présentés dans ce travail retrouvait effectivement bien le modèle stationnaire de Rienecker & Fenton en houle régulière, avec une bonne précision. Ainsi, les associations de l’un ou l’autre des modèles spectraux à *XWAVE* sont-elles pratiquement identiques en houle régulière. En houle irrégulière, des comparaisons fines à d’autres modèles et à des expériences devront être menées (on pense au projet ‘Résonances hautes fréquences des structures offshore’ de CLAROM, ou à l’étude réalisée par Chaplin *et al.* [20], par exemples); toutefois, on devrait retrouver le fait que la validation de la houle seule d’abord, et la vérification de la stabilité du calcul par *XWAVE* ensuite, devraient être suffisantes à assurer la validité des résultats de notre modèle instationnaire mixte spectral/BEM.

### III.3.3.3 Exemple d’application à la diffraction de houles bi-dimensionnelles irrégulières sur un cylindre

*Nota* : Pour la première application présentée, les résultats et données des figures ont malheureusement là-encore disparu, cette fois avec le disque d’une autre station de travail sur lequel ils résidaient. Ces figures extraites de [II] n’ont donc pu être reprises, c’est pourquoi leur style, qui inclut notamment des légendes en langue anglaise, ne fait pas complètement partie intégrante de celui (à peu près) unifié des autres figures; et on n’a malheureusement pas eu le temps de reproduire ces calculs une seconde fois pour remédier à cela. De plus, ces illustrations montrent probablement plus de vues qu’il n’est nécessaire dans ce travail de synthèse, on s’en excuse auprès du lecteur.

La première application qu’on ait donc menée avec ce modèle mixte date d’avant l’in-

introduction dans le modèle spectral d'un moyen de générer de la houle. L'idée qu'on a eu à ce moment pour tester la validité de cette modélisation mixte, a été de lâcher une déformée initiale de type Cauchy-Poisson localisée sur l'extrémité gauche du domaine (elle a d'ailleurs été utilisée aussi depuis dans le même but par Hamilton, Yeung & Yu [66],[141]). Comme on n'avait pas encore mis en place non plus l'absorption en bout de bassin dans la modélisation d'alors, un bassin très long a été employé :  $L_x = 80$ . La déformée initiale est définie par :

$$\begin{aligned}
 \eta_0(x) &= \gamma \left( e^{-x^2} - e^{-16} \right) - k_\gamma \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi x}{4} \right) \right) && \text{pour } 0 \leq x \leq 4 \\
 \eta_0(x) &= 0 && \text{pour } x > 4
 \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est un coefficient d'amplitude de cette déformée, et  $k_\gamma$  un coefficient correcteur calculé de manière à obtenir une intégrale nulle de cette déformée sur  $x = [0; 4]$ , afin de respecter un niveau moyen initial de  $z = 0$ , comme au repos. La figure III.3.3 montre l'évolution tem-

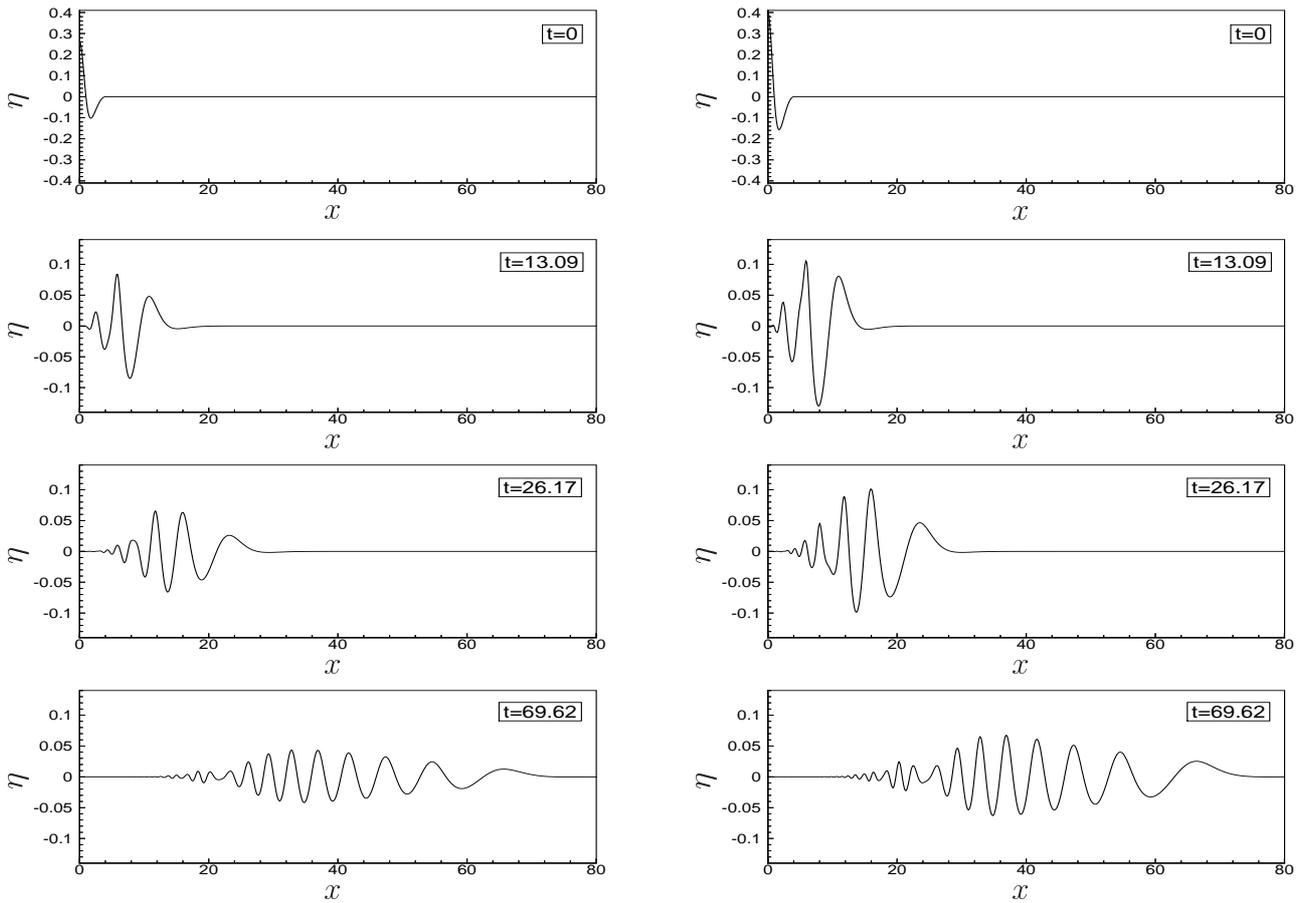


Figure III.3.3: Évolution du train d'onde incident dans le bassin à partir d'une déformée initiale de type Cauchy-Poisson, sur les cas '4%' (à gauche) et '6%' (à droite).

porelle de l'élévation de surface libre à mesure que le train d'onde issu de la 'bosse' initiale progresse en se dispersant dans le bassin. Deux amplitudes distinctes sont présentées, l'une labélisée '4%' à gauche, et l'autre '6%' à droite ; ces labels quantifient en fait le rapport du crête-à-creux sur la longueur d'onde de la vague la plus haute passant à l'endroit où se situera le corps cylindrique, en  $x = 10$  ; il s'agit donc d'une cambrure locale mais définie avec un facteur multiplicatif de  $1/\pi$  par rapport à la définition prise depuis le début de ce mémoire. Ces vagues sur lesquelles sont mesurées ces rapports de 4% et 6% sont visibles sur les signaux temporels d'élévation enregistrés justement à la future position du cylindre (figure III.3.4). Ainsi qu'on peut l'entrevoir sur la figure III.3.3, ces valeurs de 4% et 6% mesurées en  $x = 10$  ne correspondent pas en réalité aux plus fortes cambrures qui sont présentes dans les déformées au cours de la progression du train d'onde ; ces cambrures maximales apparaissent en effet pour des abscisses inférieures. Sur ces deux illustrations III.3.3 et III.3.4 il est aussi des distinctions notables entre les évolutions des deux cas, différences qui proviennent de l'accroissement des non-linéarités entre le cas '4%' et le cas '6%'. On retrouve les caractéristiques de la présence de ces non-linéarités sur la figure III.3.4 dans l'amointrissement de la largeur des crêtes face à celle des creux, et dans la surélévation commune à ces crêtes et à ces creux. Pour ce qui est de la partie numérique, liée toujours au modèle spectral, ces calculs ont été menés avec la méthode directe dont on disposait seule à l'époque, les nombres de modes utilisés dans ces deux simulations sont de 301, avec un sur-dimensionnement choisi de deux (soit 601 nœuds de collocation). Précisons que ce sur-dimensionnement n'était pas nécessaire pour ces deux amplitudes, il l'a été uniquement pour le calcul mené avec succès sur le cas plus cambré '10%', dont on ne présente pas ici les résultats pour les raisons évoquées ci-après ; néanmoins ce sur-dimensionnement avait été conservé comme manière aisée d'obtenir des déformées définies en un plus grand nombre

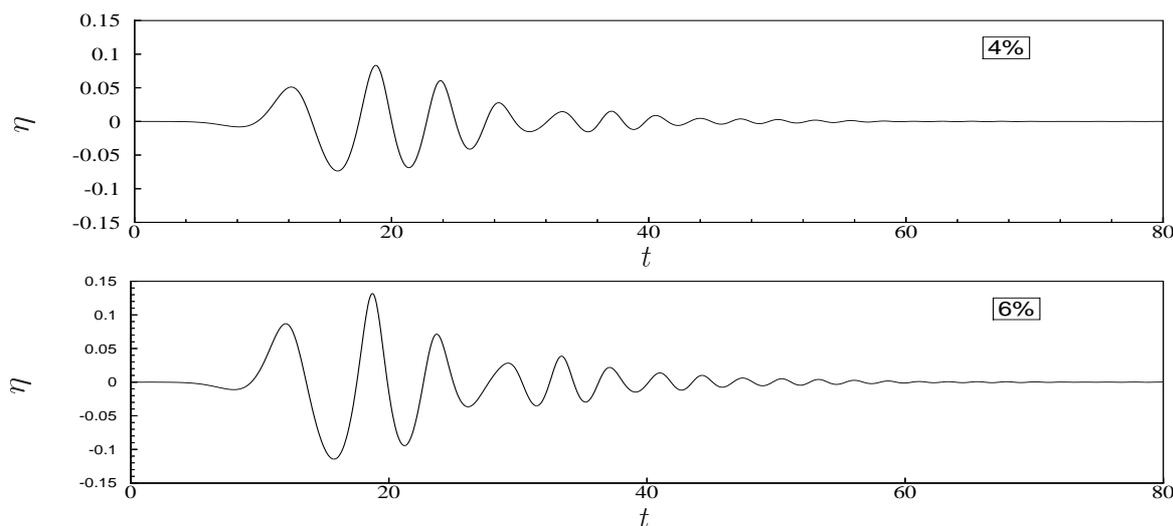


Figure III.3.4: Évolution temporelle de l'élévation de surface libre incidente à la position du cylindre, sur les cas '4%' et '6%'.

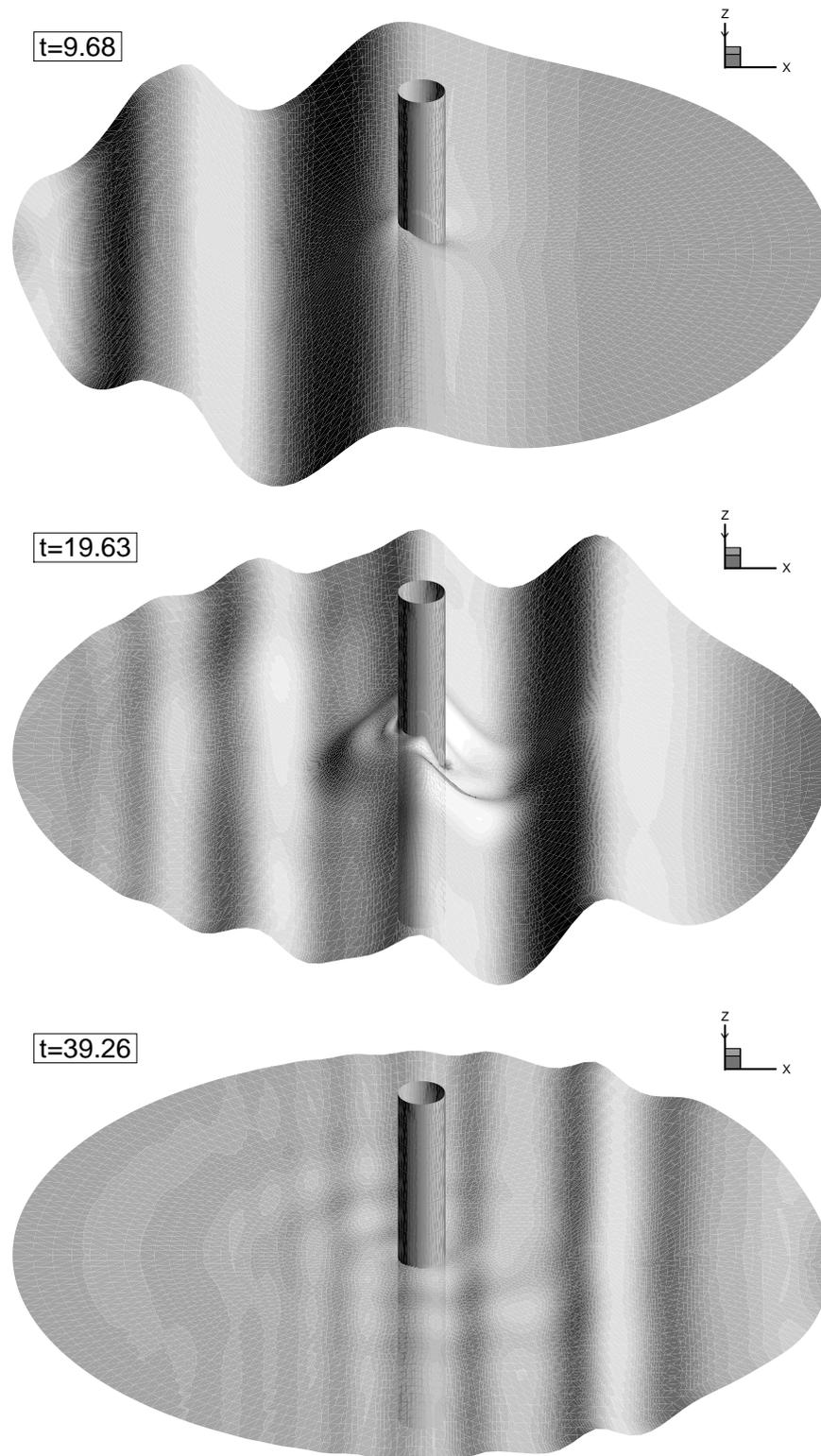


Figure III.3.5: Déformées de la surface libre totale dans le domaine tri-dimensionnel, à trois instants de la progression du train d'onde bi-dimensionnel et sur le cas '6%'.

de points sans l'utilisation de splines d'interpolation, alors même qu'il rallonge nettement les simulations (quelques heures) qui emploient alors une résolution par méthode de Householder au lieu de GMRES, ainsi qu'on l'a déjà mentionné. Les pas de temps utilisés ont été de  $2,62 \cdot 10^{-2}$  pour le cas '4%', et moitié moins pour le cas '6%', ils sont liés à celui employé dans *XWAVE* (deux fois plus grand) comme on l'a expliqué à la section précédente, et en l'occurrence ce lien les détermine complètement. Les variations relatives des volumes et énergies n'ont pas excédé  $10^{-5}\%$  de leurs valeurs initiales, faibles ratios significatifs de la qualité du train d'onde passant sur le cylindre.

Maintenant qu'on a décrit la simulation spectrale, on peut s'intéresser au calcul de la diffraction autour du cylindre, effectué par *XWAVE*. Précisons que dans la pratique, on a mené les deux calculs de front à chaque simulation, le modèle spectral étant en effet plus rapide, il est déjà en train de calculer un pas de temps ultérieur quand *XWAVE* a besoin de ses résultats à un pas de temps donné. Le centre du cylindre de rayon  $R_c = 0,5$  est donc localisé en  $x = 10$  dans le domaine spectral, et en  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  dans *XWAVE* comme le montrait le schéma III.3.2. Le domaine de calcul du champ diffracté s'étend quant à lui jusqu'à un rayon  $R_D = 8$  autour du cylindre (soit entre  $x = 2$  et  $x = 18$  dans le domaine spectral), et l'absorption débute à partir de  $R_{abs} = 4,5$ . Le maillage tridimensionnel compte 11600 panneaux, la figure III.3.9 donne un aperçu d'un tel maillage, mais sur l'exemple décrit après celui-ci où le cylindre est plus fin. La figure III.3.5 expose les déformées de la surface libre totale (incidente plus diffractée) à trois instants du passage du train d'onde sur le cylindre dans le cas '6%' : à l'arrivée du front d'onde, pendant le passage de la plus haute vague, et pendant celui de la queue de dispersion finale. Même si l'échelle verticale est nettement distendue, la figure de diffraction est bien visible sur ces vues, se créant au passage des vagues les plus cambrées puis s'étendant ensuite radialement autour du corps en s'atténuant. La dernière illustration sur ces simulations III.3.6 présente pour sa part les runups mesurés dans *XWAVE* aux points amont en  $x^* = -8$  et aval en  $x^* = 8$  de la circonférence du cylindre, pour les deux cas '4%' et '6%'. L'amplitude non-négligeable du champ diffracté y apparaît clairement, avoisinant celle du champ incident. Ces deux champs sont presque parfaitement en phase à l'amont du cylindre, engendrant une forte augmentation de l'amplitude de l'élévation totale en ce point ; à l'aval du cylindre, ces champs sont en revanche nettement déphasés, induisant une amplitude de l'élévation totale de l'ordre de celle du champ incident seul. La comparaison des deux cas montre aussi un accroissement relatif escompté de l'amplitude du champ diffracté par rapport à celle du champ incident, avec l'augmentation de la cambrure. Il faut enfin faire une dernière remarque : sur le cas '6%' on peut en effet noter l'apparition d'instabilités légères dans l'élévation de surface libre diffractée, qui se traduit aussi sur l'élévation totale. Après exploration, ces instabilités proviennent du comportement dynamique excessif de quelques facettes sur la première rangée le long du cylindre, au passage des vagues les plus cambrées. Ce problème n'étant pas lié directement à la méthode spectrale, on ne s'est pas penché beaucoup plus avant dessus, sauf à avoir tenté d'implémenter dans *XWAVE* un lissage circulaire par FFT sur les premières rangées, en tronquant les hautes fréquences traduisant

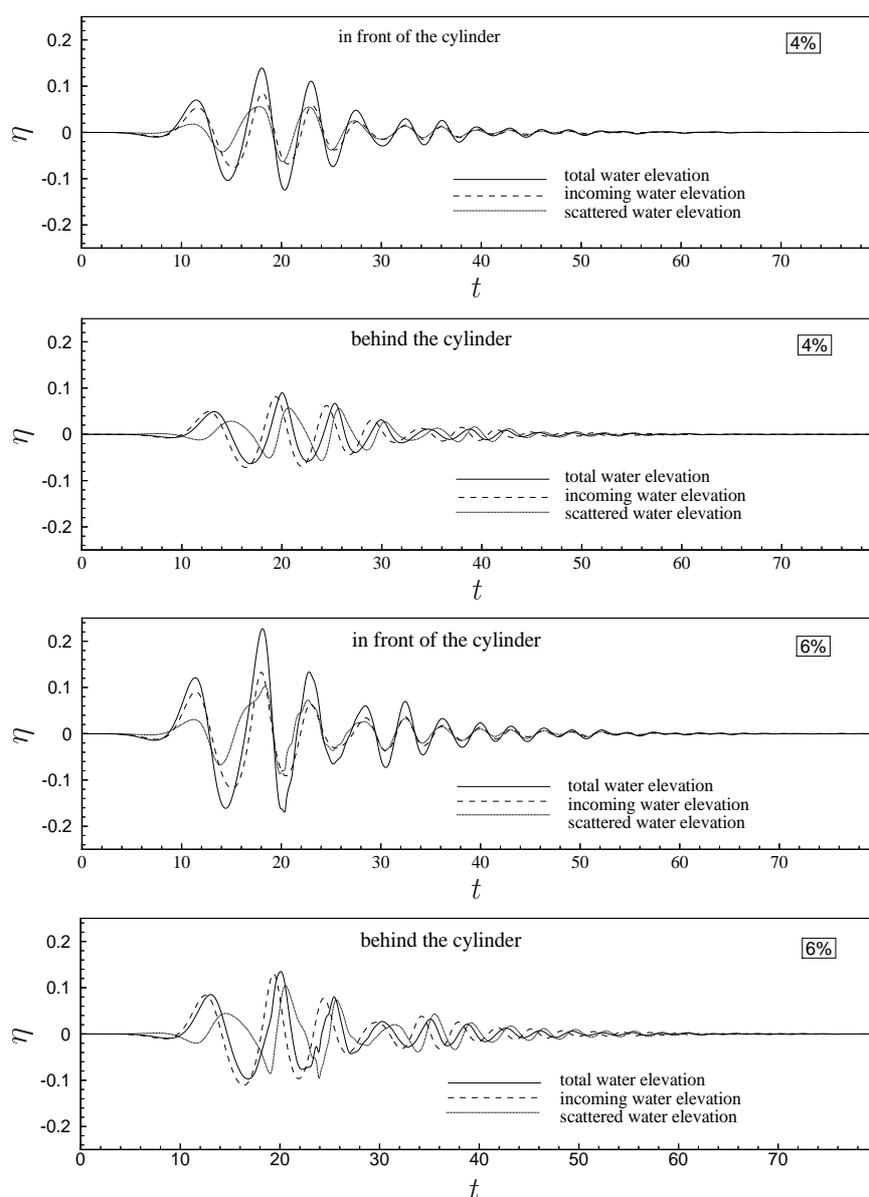


Figure III.3.6: Runups mesurés sur les points amont et aval du cylindre, sur les cas '4%' et '6%'.

des changements d'élévations facette à facette, mais cela n'a rien donné de très probant. Il faut considérer que la cambrure locale peut être bien supérieure à celle de la houle incidente seule (dans un rapport voisin de 2). Bien que cela n'ait pas encore été vérifié sur ce calcul il est ainsi probable qu'on se soit rapproché localement de la limite de déferlement de Stokes, ce qui met en défaut le principe de modélisation de la surface libre adopté dans *XWAVE*. C'est du fait de ce phénomène que les cas '8%' et '10%', qui avaient également été simulés par le modèle spectral et montraient les mêmes tendances non-linéaires avec l'augmentation de la cambrure, ne sont pas présentés ici.

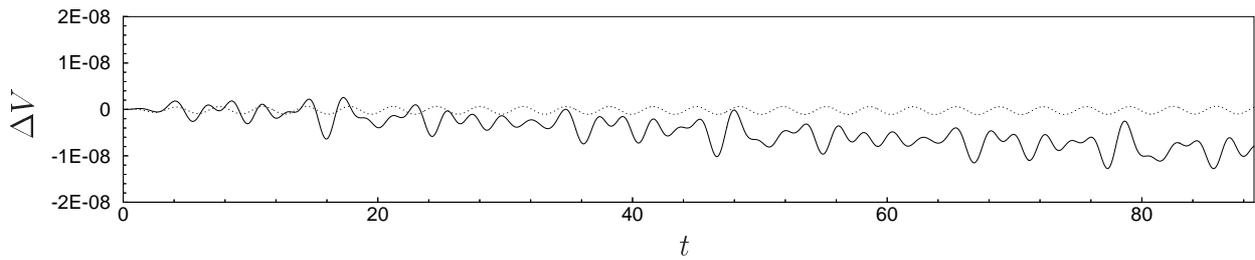


Figure III.3.7: Erreur relative sur le volume lors de la génération de houles régulière (en pointillé) et de spectre ITTC (en trait plein).

Le second exemple d'application choisi a été celui de la diffraction, toujours autour d'un cylindre (pour montrer la validité du modèle, la forme de corps choisi importe peu *a priori*) mais cette fois soumis à une houle irrégulière, de spectre ITTC, comme on en a montré un exemple au chapitre III.2. Dans cette application le rapport entre la longueur d'onde moyenne de la houle et le diamètre du cylindre (environ 10) est nettement augmenté par rapport à l'application précédente, ce qui rapproche ce calcul d'une situation réelle sur une pile verticale de structure au large. Néanmoins, toujours par souci d'éviter le 'problème' mentionné juste auparavant, l'amplitude de cette houle et le nombre de composantes fréquentielles utilisées pour la générer (11) restent modérées ; elle est donc moins irrégulière que la houle de spectre JONSWAP montrée au chapitre précédent (cf. figure III.2.10). Les phases de ces onze bandes demeurent aléatoires. La hauteur significative du spectre est de  $2,585m$  pour une profondeur d'eau de  $50m$ . Le bassin choisi pour générer la houle a pour dimensions  $L_x = 1000m \times h = 50m$ , avec un générateur situé au huitième de sa longueur. L'absorption dans le bassin est réalisée au moyen de deux plages numériques de type parabolique dans le premier dixième et le dernier cinquième du bassin, et une rampe en temps est appliquée sur environ cinq périodes moyennes de la houle. Numériquement, le nombre de modes utilisé est toujours de 301 pour 601 nœuds de collocation, et le pas de temps vaut  $9,86 \cdot 10^{-3}$  correspondant là aussi à la moitié du pas de temps pour *XWAVE*. Pour le calcul spectral seul, plutôt que de répéter les figures précédentes, on va cette fois plutôt présenter les évolutions temporelles du volume et de l'énergie totale au cours de la simulation (on trouvera toutefois l'élévation incidente au niveau du cylindre sur la figure III.3.11 montrant les runups). La figure III.3.7 représente les erreurs relatives sur le volume au cours du temps lors de la génération de cette houle irrégulière, et dans le cas d'une simulation de houle régulière d'amplitude voisine, pour comparaison. La première constatation est que le niveau de ces erreurs est très modéré, de l'ordre de  $10^{-6}\%$  du volume total. Outre une légère dérive dans le cas de la houle irrégulière, on notera aussi que ces volumes présentent une erreur qui semble suivre la forme de la houle générée, de manière peu étonnante si l'on considère que les sources d'erreurs sont principalement liées à la création et à l'absorption de la houle, qui suivent elles cette même évolution. Pour ce qui concerne l'énergie totale, on remarque en premier lieu sur l'illustration III.3.8 la régularité de son évolution dans le cas de la houle monochromatique, présentant une grande stabilité au cours des trois phases attendues : augmentation progressive de l'énergie totale lors de la rampe en temps, puis

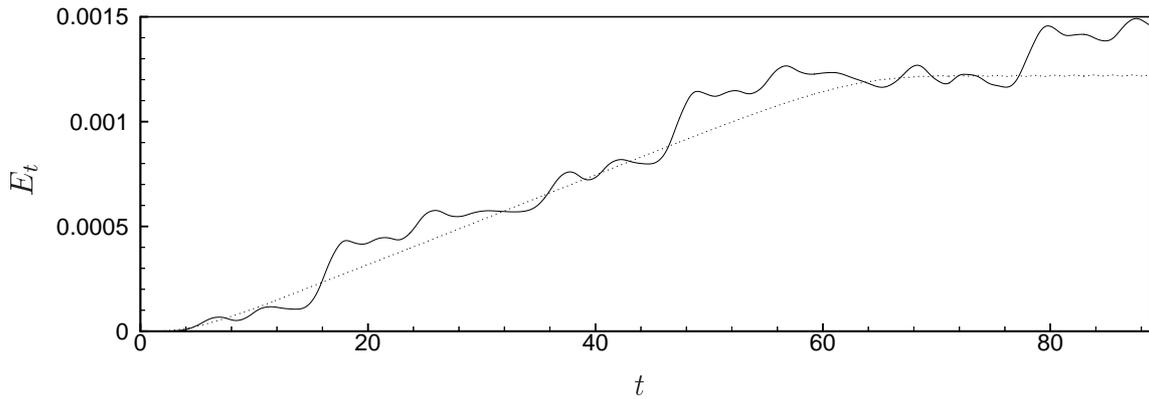


Figure III.3.8: Progression de l'énergie totale au cours de l'évolution de houles régulière (en pointillé) et de spectre ITTC (en trait plein) dans le bassin.

augmentation constante jusqu'au début de l'absorption, et enfin stabilisation par équilibre entre la génération et l'absorption. Dans le cas de la houle irrégulière, ces trois phases sont toujours bien visibles, mais la nature irrégulière de la houle, induisant une génération et une absorption non cycliques, se traduit bien entendu par une fluctuation de l'énergie moyenne présente dans le bassin.

Pour ce qui est du calcul de diffraction maintenant, le corps est placé en  $x = 11$  dans le domaine spectral, soit à  $550m$  de l'extrémité gauche du bassin. Le domaine tri-dimensionnel s'étend quand à lui sur un rayon  $R_D = 250m$  autour du corps de rayon  $R_c = 5m$ , avec une zone absorbante débutant en  $R_{abs} = 125m$ . Le maillage, qui compte toujours 11600 facettes est visible sur la figure III.3.9, on peut remarquer sa forte densification auprès du corps. La vue III.3.10 illustre quant à elle la déformation de ce maillage au moment où la vague la plus haute atteint le cylindre, en  $t = 44$  (cf. figure III.3.11 pour le signal de houle).

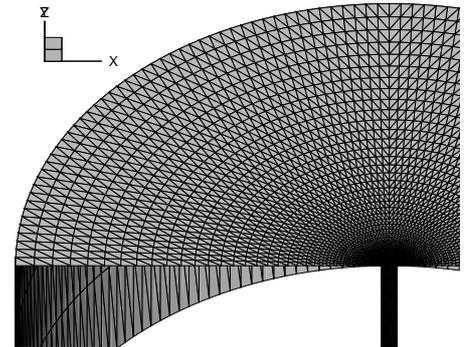


Figure III.3.9: Maillage du modèle de diffraction.

Sur cette déformée de la surface libre totale sont portées en dégradé de gris les élévations diffractées seules (en clair, les élévations positives ; en sombre, les négatives), qui résultent en un accroissement de l'amplitude de la crête à l'amont du cylindre. Et cette fois, un tel accroissement dû au champ diffracté (du creux en l'occurrence) est aussi effectif au point aval du cylindre, contrairement à l'application précédente où le champ diffracté n'amplifiait pas le signal incident à l'aval du cylindre (figure III.3.6). Cette dissemblance de comportement est à attribuer surtout à la différence des ratios qu'on a dans les deux cas entre la longueur d'onde moyenne et le diamètre du cylindre (environ 3 dans le premier cas, et 10 ici). La figure III.3.11 expose d'ailleurs les runups mesurés au point amont du cylindre (en  $x^* = -0,1$ ), où l'on retrouve les évolutions en phase des champs incident et diffracté ; là encore l'élévation diffractée  $y$  est non-négligeable. Enfin, sur l'illustration III.3.12 on trouvera l'effort horizontal subi

par le cylindre sous cette houle relativement peu cambrée (environ 20% de pente locale maximale mesurée sur le cylindre). Pour comparaison, est aussi porté en pointillé sur cette

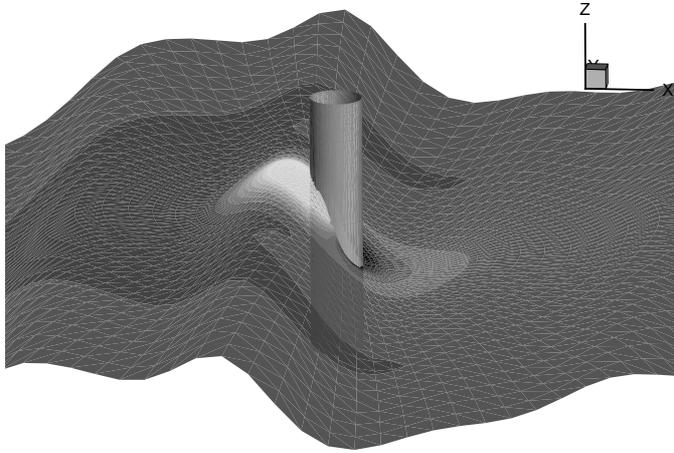


Figure III.3.10: Déformation de la surface libre totale à  $t = 44$ , et répartition de l'élévation du champ diffracté (en contours).

figure l'effort du cas en houle régulière d'amplitude voisine. Ce dernier permet d'ailleurs de mieux mettre en lumière l'irrégularité de la période de la houle dans le cas du spectre ITTC. Ces efforts sont calculés *a posteriori* dans *XWAVE*, par intégration de la pression sur le maillage du corps. Leur estimation est déterminante dans la conception de structures marines, tant pour s'assurer d'un dimensionnement capable de résister aux événements les plus violents, que pour étudier sa tenue à la fatigue.

En dernier lieu, on montrera simplement deux figures illustrant les résultats obtenus pour un paquet de vagues focalisé sur le cylindre, correspondant au cas ' $s_{pic} = 60\%$ ' de III.2.2.2, section où toutes les caractéristiques de la génération de cette houle sont décrites (une fois encore on n'a pas choisi le cas le plus cambré pour s'affranchir de toute instabilité dans le calcul de la diffraction). Le maillage du modèle de diffraction est quant à lui demeuré le même que dans la précédente application. La figure III.3.13 présente la déformée de surface libre totale dans le domaine tri-dimensionnel au moment où le paquet de vagues se focalise sur le cylindre, et plus tard alors qu'il se disperse à l'aval du cylindre, et que la diffraction due au passage du pic se propage. Sur le premier instant (à gauche), on voit nettement apparaître la diffraction sous la brusque déformation liée à l'arrivée du pic ; elle

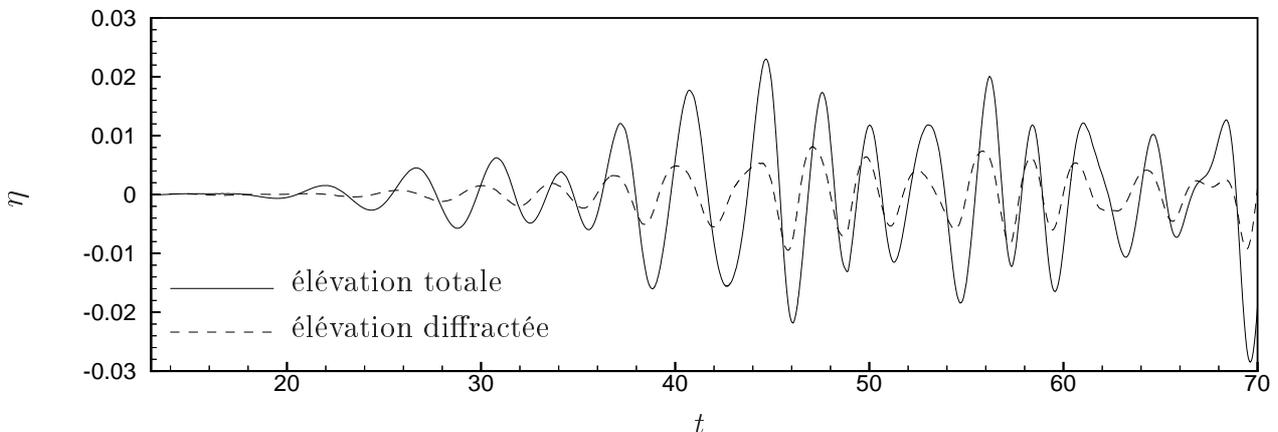


Figure III.3.11: Runups mesurés au point amont du cylindre.

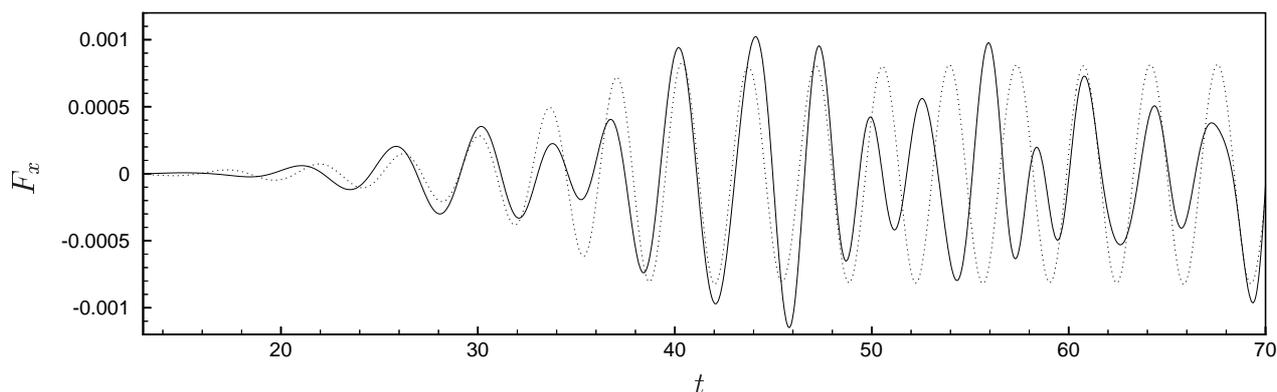


Figure III.3.12: Efforts horizontaux sur le cylindre soumis à des houles régulière (en pointillé) et de spectre ITTC (en trait plein).

se traduit notamment à l'amont du cylindre par une langue de fluide remontant haut sur ce corps qui fait obstacle à la houle, langue qui est déjà en train de commencer à retomber. Puis quand cette vague, focalisée au niveau du cylindre, est passée, le fort champ diffracté engendré localement se disperse radialement autour du corps là encore (vue de droite), répartissant son énergie dans l'espace. Les ondes bi-dimensionnelles de faible amplitude présentes sur la partie de gauche de cette vue sont des ondes libres liées à la génération, ce calcul ayant en effet été réalisé avec un seul doublet, donc avant qu'on œuvre à supprimer ces ondes libres en utilisant plusieurs doublets (cf. III.2.2.2). Enfin, l'évolution temporelle de l'effort horizontal correspondant subi par le cylindre est présenté sur la figure III.3.14. Il est bien entendu entièrement lié au pic dont on retrouve à peu près la forme dans ce signal ; les brusques inversions de pentes traduisant la violence de son passage sur le cylindre.

Ce dernier exemple clôt la présentation des applications qu'on a menées dans le but de valider le modèle potentiel mixte spectral/BEM, apte à calculer la diffraction en écou-

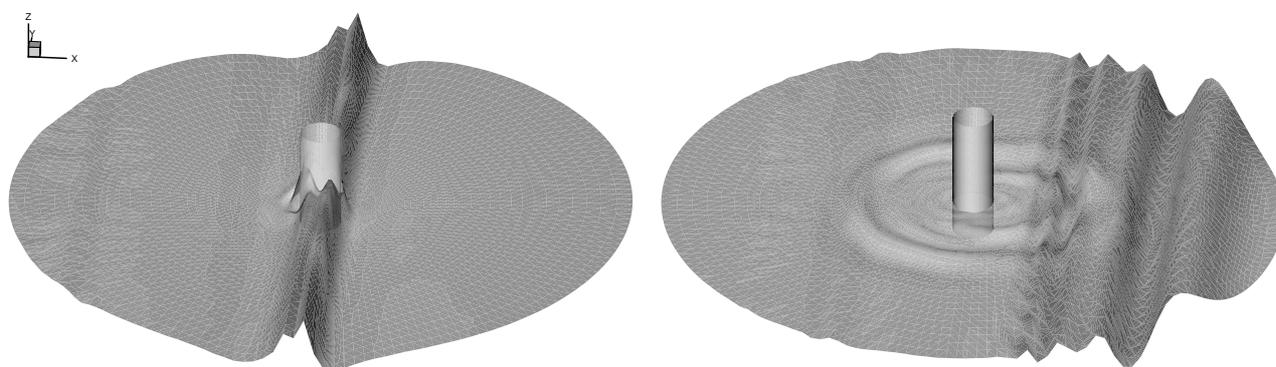


Figure III.3.13: Déformées de la surface libre totale à deux instants du passage d'un paquet de vagues focalisé sur le cylindre.

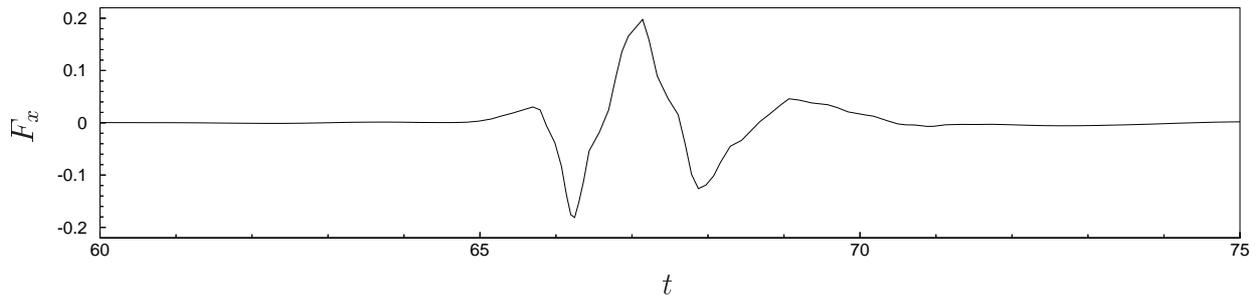


Figure III.3.14: Efforts horizontaux sur le cylindre soumis à un paquet de vagues focalisé à sa position.

lement potentiel sur une houle quelconque. Si les résultats semblent globalement positifs, une utilisation plus exhaustive et des comparaisons à des résultats numériques validés ou expérimentaux seront nécessaires dans l'avenir pour valider pleinement ce modèle. Néanmoins, on pense avoir démontré l'efficacité d'une telle approche mixte, et sa simplicité relative par rapport à des approches couplées, qui font intervenir un domaine intérieur où il y a interaction avec le corps (maillage fin, simulation 'lente'), couplé à un domaine extérieur où l'on emploie une technique de résolution 'rapide' sur une discrétisation plus grossière. Le défaut de ces approches couplées, outre la complexité de la mise en œuvre liée au travail nécessaire pour transmettre les informations à travers la surface de couplage, est que les équations de surface libre sont en général linéarisées dans le domaine extérieur, ce qui ne permet pas d'apporter avec précision une houle cambrée réaliste. Un exemple d'un tel modèle potentiel couplé est celui d'Hamilton & Yeung [66] (2002) décrit au I.1.2, qui même s'il présente l'avantage d'être complètement spectral, modélise les équations de surface libre de manière linéaire dans les deux domaines, et est de plus limité à des corps verticaux cylindriques. Précisons que cette approche doit néanmoins plus être vue comme une simple étape vers leur modèle couplé potentiel/visqueux qu'on évoquera ci-après au III.3.5. Les potentialités de notre modèle potentiel mixte étant établies, on va désormais s'attacher à exposer la mise en œuvre d'un modèle de même structure, mais calculant cette fois le champ diffracté en écoulement visqueux ; ce modèle en cours de mise en œuvre n'a au moment présent été appliqué qu'à des houles régulières, mais l'extension à un champ irrégulier est prête.

### III.3.4 Modèle de diffraction *SWENSE* mixte spectral potentiel / *RANSE* visqueux

#### III.3.4.1 Formulation

On opère le même changement de variable que dans le modèle potentiel mixte, avec cette fois pour inconnues, en plus de l'élévation de surface libre, les grandeurs usuelles des

méthodes RANSE que constituent la pression et les vitesses :

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^I + u_\alpha^D \\ p &= p^I + p^D \\ \eta &= \eta^I + \eta^D \end{aligned} \quad (\text{III.3.4})$$

où  $\alpha = x, z$  représente la direction de la composante de la quantité correspondante. Pour plus de simplicité, la formulation est exprimée en deux dimensions  $(x, z)$ , et par exception à la règle qu'on s'est fixée, au moyen de quantités dimensionnelles.

On suppose en outre simplement que le champ incident vérifie la théorie des écoulements potentiels (équations d'Euler à rotationnel du champ de vitesses nul, et non les équations de Navier-Stokes complètes). Quand on introduit cette hypothèse et la décomposition précédente dans les équations de Navier-Stokes, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit, pour chacune des composantes  $\alpha$  :

$$\frac{\partial u_\alpha^D}{\partial t} + (u_j^I + u_j^D) \frac{\partial u_\alpha^D}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_\alpha^D}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^D}{\partial x_\alpha} = -u_j^D \frac{\partial u_\alpha^I}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_\alpha^I}{\partial x_j^2} \quad (\text{III.3.5})$$

dans laquelle  $\nu$  et  $\rho$  représentent bien entendu la viscosité cinématique du fluide et sa masse volumique, et où la sommation implicite sur les indices  $j$  est employée avec  $x_j = (x, z)$ . La conservation de la masse prend quant à elle la simple forme :

$$\frac{\partial u_j^D}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{III.3.6})$$

Et les conditions de surface libre s'expriment comme, pour la condition cinématique d'abord :

$$\frac{\partial \eta^D}{\partial t} + u_x^D \frac{\partial \eta^I}{\partial x} + (u_x^I + u_x^D) \frac{\partial \eta^D}{\partial x} = u_z^D \quad (\text{III.3.7})$$

puis pour les conditions dynamiques normale :

$$p^D = \rho g \eta^D + 2\rho \nu \frac{\partial (u_j^I + u_j^D)}{\partial x_j} n_i n_j \quad (\text{III.3.8})$$

et tangentielle :

$$(n_j t_i + n_i t_j) \frac{\partial (u_i^I + u_i^D)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{III.3.9})$$

avec à chaque fois une deuxième sommation implicite sur l'indice  $i$ .

Il est à noter que ces expressions correspondent au régime laminaire, la prise en compte de la turbulence via la viscosité turbulente sera ajoutée sans difficulté spéciale qui serait liée au changement de variable.

Le domaine fluide quant à lui est centré autour du corps, de même que pour le modèle potentiel mixte. Mais on profite cette fois de la dissipation 'naturelle' des schémas numériques en écoulement visqueux, pour réaliser l'absorption de la houle au bord du domaine en se contentant d'agrandir fortement la taille des éléments du maillage qui se trouvent dans cette zone.

### III.3.4.2 État actuel de la mise en œuvre

Dans un passé récent, ce modèle *SWENSE* a été mis en œuvre en deux dimensions par Lionel Gentaz qui a transformé la version correspondante d'*ICARE*, en incluant le modèle de houle régulière spectral de Rienecker & Fenton [109]. *ICARE* est un code RANSE à suivi d'interface, utilisant une formulation complètement couplée originale [4], impliquant à chaque pas de temps la résolution d'un système linéaire creux unique, par algorithme bi-CGSTAB avec pré-conditionnement LU partiel. Les résultats obtenus jusqu'à présent, sur des cas de barreaux immergés de sections carrée [I] et cylindrique [90], sont très concluants. Pour le barreau de section carrée d'abord, la comparaison au modèle visqueux d'Armenio & Favretto [6] s'est avérée favorable, montrant les mêmes tendances mais avec un comportement sensiblement plus stable [I]. Et tout récemment, la comparaison menée par Gentaz & Luquet, tant aux résultats du modèle potentiel mixte de Schønberg & Chaplin [113], qu'aux expériences menées de front par Chaplin [19] sur un même cas de barreau cylindrique immergé, se sont là encore montrées tout à fait satisfaisantes (cf. Luquet *et al.* [90]).

A l'heure actuelle, ce modèle *SWENSE* vient d'être étendu à la version tri-dimensionnelle d'*ICARE*, et des validations sont en cours sur des cas de cylindres semi-immersés, toujours soumis à la houle régulière. Des cas de diffraction bi- et tri-dimensionnels sur houle irrégulière sont prévus pour septembre 2003, avec pour modèle de champ incident celui décrit au chapitre précédent. De ce 'côté spectral', une routine a donc été réalisée permettant de fournir toutes les données nécessaires à ce que *SWENSE* puisse résoudre les équations précédentes (III.3.4)-(III.3.9) pour le champ diffracté sur houle quelconque. Cette routine est basée sur le même principe que pour le modèle potentiel mixte spectral/*XWAVE*, mettant en œuvre des reconstructions adaptées à partir de fichiers stockant les élévations et amplitudes modales sur la discrétisation spatio-temporelle de la simulation spectrale. La seule différence avec le modèle potentiel mixte précédent est, d'une part qu'on est cette fois en présence d'un maillage volumique, et d'autre part que ce maillage peut se déformer dans toutes les directions. Le choix a donc été pris de coder une petite routine dont les entrées sont l'ensemble des positions des nœuds du maillage et le temps courant, et qui ressort sur l'ensemble des nœuds : les vitesses incidentes, leurs dérivées, la pression incidente, l'élévation incidente de surface libre et sa dérivée horizontale. Il est ainsi besoin de calculer quelques grandeurs supplémentaires par rapport au modèle potentiel mixte ; elles découlent directement de reconstructions spectrales qui ne présentent pas de difficulté, sauf pour la pression qui est calculée au moyen de l'équation de Bernoulli (en adimensionnel) :

$$p^I = -z - \frac{\partial \phi^I}{\partial t} - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \phi^I \right|^2 \quad (\text{III.3.10})$$

Les élévations de surface libre et leurs dérivées horizontales sont toujours calculées par interpolations de type splines à partir de la discrétisation de la simulation spectrale. La 'nouveau-té' est qu'on ne s'impose plus cette fois la concordance des pas de temps ; à un instant quelconque les valeurs sont donc interpolées linéairement (pour le moment) à partir

des instants stockés voisins. Le plus simple aurait été d'apporter une routine qui aurait fourni directement toutes les grandeurs incidentes en un point donné quelconque, mais cela n'est pas judicieux en coût de reconstructions des séries spectrales associées, mieux vaut calculer sur l'ensemble des nœuds en une seule fois du fait des fonctions, notamment hyperboliques, à évaluer.

### III.3.5 Conclusion sur les modèles mixtes potentiel et visqueux

On espère avoir démontré dans ce chapitre l'intérêt et l'efficacité d'utiliser le changement de variables séparant les champs incident et diffracté, pour calculer la diffraction autour de corps soumis à une houle quelconque, tant en écoulements potentiel que visqueux. La réduction importante des coûts de calcul dans le modèle de diffraction, afférente à cette formulation, ainsi que la possibilité de procéder à des calculs de diffraction tri-dimensionnels sur houle bi-dimensionnelle en sont deux atouts majeurs, et l'utilisation spécifiquement adaptée d'une méthode spectrale pour générer efficacement la houle en accroît d'autant l'attrait. De plus, la mise en œuvre de ce type de modèles demeure relativement aisée. Ainsi qu'on l'a exposé, ces modèles appliqués à des houles irrégulières sont cependant encore en cours de mise en œuvre ou de validation, à l'heure actuelle.

Pour ce qui est du modèle potentiel mixte qu'on a déjà appliqué à de la houle irrégulière et à un paquet de vagues focalisé sur la structure, ces premiers résultats sont encourageants. Un aménagement spécifique stabilisateur reste à mettre en place dans le code de diffraction, et des validations plus fines à mener. Néanmoins, on est assez confiant dans ce que ces comparaisons à des résultats validés s'avéreront concluantes dans un avenir proche, et le modèle non-linéaire original dont on disposera alors présente des caractéristiques de précision et de rapidité d'exécution, qui sont des atouts d'importance en vue de son utilisation extensive sur une gamme étendue d'applications réalistes.

En ce qui concerne l'idée nouvelle d'un modèle mixte spectral/RANSE, on ne dispose présentement que des premiers résultats sur houle régulière, qui sont toutefois concluants. L'extension à la houle irrégulière est actuellement mise en œuvre. En plus des intérêts communs au modèle potentiel mixte qu'on vient de mentionner, la possibilité de se soustraire à la difficulté de propager de la houle de manière non dissipative dans le modèle RANSE est un avantage supplémentaire considérable. Cela nous permet d'espérer grandement de ce modèle assez novateur, qui devrait s'appliquer efficacement à terme à nombre de cas réels, à effets visqueux inclus cette fois. Par exemple, il devrait montrer une comparaison favorable, et surtout une grande flexibilité, par rapport à l'une des rares approches spectrales pour calculer la diffraction en écoulement visqueux, modèle récent de Yeung, Yue & Hamilton [141],[67] décrit en I.1.2. Ainsi qu'on l'a alors mentionné, leur formulation relativement complexe est en effet restreinte aux équations de surface libre linéarisées, et n'est

pas *a priori* extensible à d'autres géométries de corps qu'axisymétriques, contrairement à la nôtre. Plus généralement, le modèle mixte proposé ici devrait présenter des caractéristiques d'efficacité et de simplicité de mise en œuvre intéressantes par rapport aux couplages existant (celui qu'on vient de citer mais aussi celui de Guillerm [65] par exemple), et surtout, contrairement à ces approches couplées, il inclut la prise en compte des équations de surface libre *complètement non-linéaires* permettant des calculs sur houles irrégulières réalistes.





## Chapitre III.4

# Vers un bassin de houle en non-linéaire complet ?

Le but de ce court chapitre est de donner les conclusions quant à la possibilité d'étendre notre méthode spectrale à la création d'un modèle de bassin de houle identique à *SWEET*, mais en conservant une formulation complètement non-linéaire. Plus précisément, on fait ici état de la tentative de prolonger dans cette direction les méthodes spectrales présentées auparavant ; d'autres idées devront être trouvées. Pour simplifier l'exposé des idées qu'on a eues et les expressions afférentes, tout est présenté en deux dimensions dans ce chapitre ; l'ajout d'une troisième dimension ne présenterait néanmoins aucune difficulté supplémentaire, ni formulatoire ni de mise en œuvre.

### III.4.1 Formalisme envisagé

On rappelle ici en deux dimensions le système des équations (III.1.7) vérifiées par le potentiel et l'élévation de surface libre dans ce bassin de houle non-linéaire :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla}\phi \right|^2 && \text{en } z = \eta(x, t) \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} && \text{en } z = \eta(x, t) \\ \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} && \text{en } x = X(z, t) \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = L_x \end{aligned} \tag{III.4.1}$$

Dans ce système, on a donc trois équations non-linéaires, qui sont toutes les trois affichées sur des surfaces *mobiles*, notamment la surface du batteur. Or ainsi qu'on l'a déjà men-

tionné à plusieurs reprises, notre méthode spectrale est basée sur les modes naturels du domaine parallélépipédique, qui sont eux même directement liés au caractère invariant de la géométrie des parois solides de ce domaine. Par conséquent, si l'on veut conserver à la fois une résolution spectrale et à la fois une condition non-linéaire sur une paroi solide mobile, on sera contraint de considérer deux domaines distincts, l'un pour tenir compte de la géométrie réelle déformée, et l'autre de géométrie figée pour pouvoir employer la résolution pseudo-spectrale. En effet, puisqu'on ne développe plus ici ce problème en série de perturbations (contrairement à ce qu'on a réalisé précédemment au III.1 pour établir le modèle *SWEET*), le domaine de calcul réel possède une géométrie instationnaire et n'est plus rapporté à un simple parallélépipède invariant, et ce y compris avec une méthode de type HOS comme on le verra ci-après à la section III.4.3. Et cette séparation en deux domaines de calcul de géométries distinctes va venir nettement compliquer le processus de résolution.

La première idée qui vient intuitivement est peut-être celle d'inclure le domaine réel  $D^r$  dans un domaine spectral  $D$  plus grand qui le contient, le batteur étant alors vu comme une frontière interne délimitant deux sous-domaines fluides distincts, l'un réel  $D^r$  où l'écoulement solution nous intéresse, et l'autre fictif  $D^f$  où la solution est sans intérêt. Ainsi que le montre le schéma III.4.1 on tentera *a priori* de réduire au maximum la taille

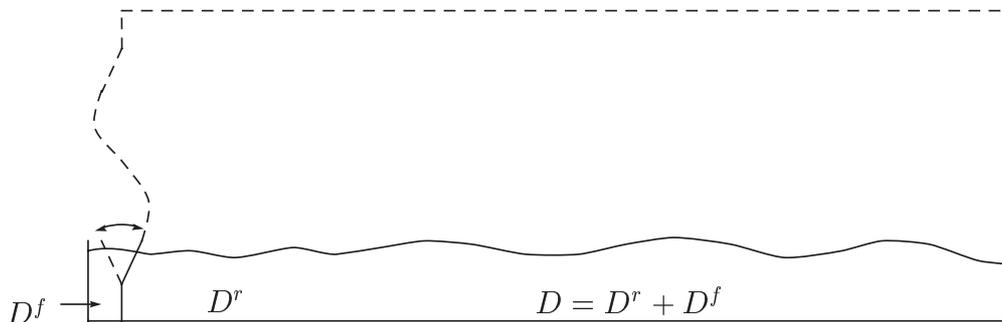


Figure III.4.1: Géométrie envisagée pour le modèle de bassin de houle complètement non-linéaire.

de ce domaine fictif  $D^f$  'inutile'. S'étant fixé ce type de géométrie, le plus simple semble de rajouter directement des nœuds de collocation sur la surface du batteur qui est interne à  $D$ , permettant d'y imposer la condition batteur non-linéaire sur sa position réelle instantanée ; ces nœuds se déplaceraient alors selon la direction  $x$  de même que ceux sur la surface libre se déplacent librement selon  $z$ . Toutefois, comme on l'a souligné au début de la section III.1.2 du chapitre sur le modèle *SWEET*, l'imposition de cette condition sur une surface dont la moyenne est verticale induit une inconsistance dans la résolution (ou plus précisément sa non-unicité), ce qui s'est toujours traduit par une explosion numérique immédiate lors d'essais menés dans cette direction.

On peut alors reprendre l'idée d'une solution utilisant un potentiel additionnel 'renversée'. Si l'on résume la démarche de résolution explicitée au III.1.2.2, celle-ci consistait à chaque sous pas de l'avance en temps à obtenir d'abord les dérivées temporelles des amplitudes modales du potentiel additionnel  $\phi^{add}$ , au moyen de la résolution d'un problème additionnel. Ce problème incluait une condition sur le batteur, rapporté à la surface  $x = 0$ , dans laquelle les termes liés à la partie principale  $\phi^{spec}$  du potentiel *étaient connus*, issus soit du pas de temps précédent, soit de la résolution à l'ordre précédent. Ensuite, ce problème additionnel résolu, on pouvait procéder à la résolution du problème principal dans lequel le potentiel additionnel apparaissait en tant que termes de forçage, *devenus connus*, dans les conditions de surface libre. La raison sous-jacente à cette situation avantageuse était que les deux surfaces d'affichage de la condition batteur et de la condition de flux nulle sur la paroi en  $x = 0$  du domaine principal étaient confondues, ce qui permettait de bénéficier, lors de la résolution additionnelle de la quantité  $\partial^2 \phi / \partial x \partial t$  sur le batteur, de l'annulation de sa composante principale *a priori* inconnue :

$$\frac{\partial^2 \phi^{spec}}{\partial x \partial t} (x = 0) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi^{spec}}{\partial n} \right) (x = 0) = 0$$

Malheureusement, ces deux surfaces de calcul étant désormais distinctes, on ne va plus retrouver cette caractéristique intéressante ; *i.e.* on aura à la fois des termes de forçage dépendant de  $\phi^{add}$  dans les conditions de surface libre qu'on résout pour obtenir la partie principale  $\phi^{spec}$  du potentiel, et à la fois des termes de forçage dépendant de  $\phi^{spec}$  dans la condition batteur qu'on résout pour obtenir la partie additionnelle  $\phi^{add}$  du potentiel. On sera donc contraint d'employer un processus itératif (schéma III.4.2) menant la recherche de la solution des deux parties du potentiel à la fois, ce qui implique de résoudre successivement : le problème additionnel, le problème principal, le problème additionnel, etc. Il

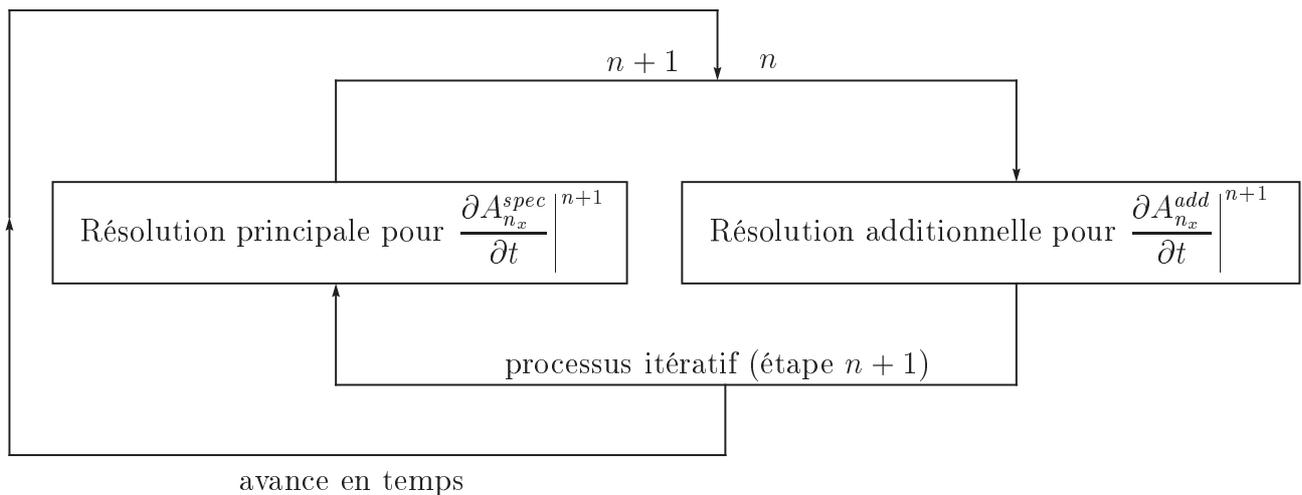


Figure III.4.2: Principe de résolution du modèle de bassin non-linéaire.

faudrait vérifier qu'un tel processus converge effectivement et se donner un critère d'arrêt, ainsi que des valeurs initiales qu'on pourrait prendre égales à la solution au sous-pas de temps précédent. Enfin, l'emploi de cette solution 'renversante' est rendu possible aussi grâce à la propriété de continuité de la solution spectrale additionnelle, qui sera ainsi disponible sur la surface libre dans  $D^f$ , soit hors du domaine de résolution additionnelle (à sa gauche), de la même manière qu'on pouvait l'obtenir au-dessus de la surface libre dans les modèles mixtes du chapitre précédent. Néanmoins, ce besoin de continuité de la solution additionnelle constitue un autre argument à la minimisation de la taille de  $D^f$ , pour raisons de stabilité numérique.

### III.4.2 Résolution de type MD

D'autre part, ainsi qu'on l'a développé à la section III.1.3.2 du chapitre sur *SWEET*, ce choix de résolution additionnelle à laquelle on associe un domaine étendu (comme porté en tireté sur le schéma III.4.1), en construisant notamment un 'bateur unifié', impose d'avancer en temps le potentiel additionnel pour être consistant. De même que dans le modèle au second ordre, on supposera donc connues les amplitudes modales de ce potentiel additionnel et on cherchera uniquement leurs dérivées temporelles ; on travaillera ainsi dans la résolution additionnelle sur la seule dérivée de la condition bateur  $E^B$  de (III.4.1) et non sur cette condition elle-même. Si on dérive cette condition  $E^B$  :

$$\frac{dE^B}{dt} = \frac{\partial E^B}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial E^B}{\partial x} \quad \text{en } x = X(z, t) \quad (\text{III.4.2})$$

il vient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad \text{en } x = X(z, t) \quad (\text{III.4.3})$$

où l'on a rassemblé dans le premier membre les quantités faisant intervenir des dérivées temporelles du potentiel. On peut remarquer ici que les quantités faisant intervenir une dérivée temporelle du potentiel ne peuvent être rassemblées sous une dérivée partielle unique à cause du terme  $\partial X/\partial z$ . Néanmoins, en injectant dans cette condition le développement spectral (II.1.18) de la MD, on peut ensuite rentrer ce terme spatial sous la série spectrale qu'il multiplie, puis rassembler la série pour  $\partial^2 \phi/\partial x \partial t$  avec celle pour  $(\partial X/\partial z)(\partial^2 \phi/\partial z \partial t)$ . En conséquence, la matrice  $A$  du système résultant  $AX = B$  n'aura plus la simple forme d'un produit d'une fonction trigonométrique avec une fonction hyperbolique, comme dans (II.1.22). Toutefois, comme on résolvait déjà en MD cette matrice par une méthode itérative classique de type GMRES, cela restera possible, avec pour inconnue du système, le vecteur  $B$  des dérivées des amplitudes modales. Il faudra alors avancer les amplitudes modales en temps, comme dans *SWEET*, pour les raisons de consistance précédemment évoquées (cf. III.1.3.2). Ainsi, on connaîtra toute la solution additionnelle, qui pourra agir en tant que termes de forçage dans le problème principal. Il sera donc possible d'opérer le

processus itératif décrit par le schéma III.4.2. Il faudra alors vérifier qu'il converge. Pour la résolution principale, on pourra conserver l'approche HOS plus efficace, puisqu'on a vu au II.1.3.2.2 qu'elle fournit une solution complète. Par ailleurs, la condition sur le batteur unifié étant une fonction de forme relativement simple, la méthode MD devrait converger sans difficulté avec relativement peu de modes, évitant ainsi les éventuels problèmes de stabilité intrinsèques aux MD.

### III.4.3 Résolution de type HOS

On peut alors tenter de faire apparaître des termes de surface à la manière de Zakharov, puisque cette technique a justement la propriété de transformer les dérivées dans le plan moyen de la surface ( $\partial\phi/\partial z$  ici) en la dérivée normale à ce plan moyen ( $\partial\phi/\partial x$  ici) ; cela pourrait donc à la fois nous aider à obtenir une forme plus sympathique de la condition précédente, et à la fois nous ouvrir une résolution de type HOS, qui serait impérative pour garder une méthode d'intérêt pratique en trois dimensions. Il est à noter que l'emploi d'une telle méthode HOS ne nous affranchirait nullement du processus itératif précédemment envisagé. En effet, si l'évaluation des quantités serait bien réalisée sur une surface verticale invariante (qu'on pourrait sans cela favorablement positionner en  $x = 0$ ) dans la résolution interne d'une telle approche, la condition batteur serait quant à elle exprimée *en sa position exacte instationnaire*, de même qu'on l'a vu au II.1.3.2 pour la condition de surface libre. On aurait donc effectivement besoin des quantités principales en cette position exacte, et par conséquent la séparation géométrique des domaines spectral et réel resterait nécessaire, impliquant d'avoir recours au processus itératif du schéma III.4.2.

Cependant, du fait de la complexité de l'expression précédente (III.4.3), cette idée paraît là encore difficile à mettre en œuvre. En effet, si l'on introduit le potentiel de surface  $\phi^B(z, t) = \phi(X(z, t), z, t)$ , et qu'on utilise les dérivées suivantes exprimées pour le faire apparaître :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi^B}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi^B}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{en } x = X(z, t) \quad (\text{III.4.4})$$

alors cette équation (III.4.3), dérivée de la condition sur le batteur, prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \left(1 + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) - 2 \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial \phi^B}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial z \partial t} = 0 \quad \text{en } x = X(z, t) \end{aligned} \quad (\text{III.4.5})$$

Cela ne nous fournit cependant pas une équation d'évolution pour  $\phi^B$ , et même si c'était le cas on ne saurait pas comment initialiser la résolution interne de type HOS pour obtenir non seulement  $\partial\phi/\partial x$  mais aussi  $\partial^2\phi/\partial x \partial t$ .

On peut alors avoir l'idée de considérer comme quantité surfacique plutôt la dérivée du potentiel  $(\partial\phi/\partial x)^B(z, t) = \partial\phi/\partial x(X(z, t), z, t)$ , sur laquelle on travaillait déjà dans *SWEET* pour résoudre cette condition (III.4.3). On obtient alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^B \right] - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \\ + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^B \right] \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial t} = 0 \quad \text{en } x = X(z, t) \end{aligned} \quad (\text{III.4.6})$$

On se rapproche là déjà plus d'une formulation HOS, avec possibilité d'avancer en temps la quantité surfacique, et d'obtenir par résolution interne sa dérivée dans la direction normale au plan moyen de la surface,  $(\partial^2\phi/\partial x^2)$ . Seulement, deux termes supplémentaires subsistent :  $\partial\phi/\partial z$ , et sa dérivée temporelle  $\partial^2\phi/\partial z \partial t$ . Le premier de ces deux termes peut s'obtenir simplement en ré-insérant la condition batteur de (III.4.1), non dérivée, soit :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial X} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^B - \frac{\partial X}{\partial t} \right] \quad \text{en } x = X(z, t) \quad (\text{III.4.7})$$

En revanche, il nous manque le calcul du terme  $\partial^2\phi/\partial z \partial t$  qu'on ne sait pas comment obtenir jusqu'à présent.

Les deux autres possibilités de choix de quantité surfacique qu'on a envisagées sont d'une part  $(\partial\phi/\partial z)^B(z, t)$ , mais on se retrouve alors avec plus de termes inaccessibles que pour la solution précédente ; et d'autre part de considérer l'ensemble  $G^B = (\partial\phi/\partial x - \partial X/\partial z \cdot \partial\phi/\partial z)^B(z, t)$  mais il vient alors avec la tautologie inutilisable :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = G^B \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} [G^B] \quad \text{en } x = X(z, t)$$

Admettons qu'on parvienne toutefois à trouver une méthode pour traiter le terme  $\partial^2\phi/\partial z \partial t$  précédent, on serait alors à même de pouvoir avancer en temps notre quantité surfacique  $(\partial\phi/\partial x)^B$ , et par résolution interne HOS de  $\partial^2\phi/\partial x^2$ , d'obtenir les amplitudes modales du potentiel additionnel, de la même manière que pour  $\partial\phi/\partial z$  sur la surface libre dans notre résolution HOS principale (ainsi qu'explicitée au chapitre II.1). Ces amplitudes modales connues, on dispose par reconstruction *n'importe où dans le domaine additionnel*, d'un potentiel qui satisfait l'équation de Laplace dans le domaine, la condition batteur, et des conditions de flux nul sur les parois solides, on a donc un potentiel solution de notre problème additionnel, qu'on peut venir injecter en tant que termes de forçage dans les conditions de surface libre. Cependant, dans ces conditions on a besoin non seulement de ce potentiel et de ses dérivées spatiales, qu'on peut reconstruire, mais aussi de sa *dérivée temporelle*, qu'on ne peut pas. Il serait alors possible d'avoir recours à un niveau de

dérivation supérieur de la condition batteur, soit :

$$\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right)^B \right] + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 X}{\partial z \partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial t^2} = 0 \quad \text{en } x = X(z, t) \quad (\text{III.4.8})$$

où l'on doit prendre garde que la quantité  $(\partial^2 \phi / \partial x \partial t)^B$ , qui est notre nouvelle quantité surfacique, n'est pas égale à la dérivée temporelle de la précédente  $(\partial \phi / \partial x)^B$ . Là encore, on peut se débarrasser de  $\partial \phi / \partial z$  et  $\partial^2 \phi / \partial z \partial t$  en utilisant les niveaux de dérivation inférieurs, mais il restera une nouvelle quantité  $\partial^3 \phi / \partial z \partial t^2$  à laquelle on ne sait pas non plus accéder. Mais il est une autre difficulté soulevée par ce processus. En effet, on aura ainsi séparé la résolution des amplitudes modales additionnelles de celle de leurs dérivées temporelles, utilisant deux conditions distinctes sur le batteur, or on a vu que le prolongement qu'on aura fait pour obtenir notre batteur unifié sera non consistant entre ces deux conditions, et ce malgré l'avance en temps des quantités surfaciques liée à la technique HOS. L'emploi d'une telle approche pour résoudre le problème additionnel soulèverait donc également cette difficulté.

En définitive, seule l'association d'une résolution additionnelle par MD avec une résolution dans le domaine principal par technique HOS paraît envisageable, tout au moins en ré-utilisant le potentiel additionnel proposé à l'occasion du développement du code second ordre *SWEET*. Une autre solution en direction du non-linéaire complet serait bien sûr de s'atteler à formuler ce code second ordre à un ordre de perturbation supérieur, puisqu'on est confiant dans la consistance de ce modèle. Enfin, une dernière méthode à laquelle on pourrait penser consisterait à développer en ordres la solution additionnelle autour de  $x = 0$ , tout en conservant la résolution principale complètement non-linéaire. Sa mise en œuvre nécessiterait alors vraisemblablement l'usage d'un processus itératif tel que celui décrit sur le schéma III.4.2. Cette idée n'a toutefois pas encore été creusée ; de ce fait, même si l'on estime qu'elle a de bonnes chances d'être valable, permettant ainsi de s'affranchir de l'utilisation d'une MD coûteuse, elle conduit peut-être néanmoins elle aussi à un formalisme non applicable.



# Conclusion et Perspectives

En premier lieu, on invite le lecteur qui voudrait prendre connaissance de l'essentiel de cette thèse à se référer aussi aux conclusions intermédiaires des chapitres principaux, qu'on ne va pas toutes reprendre ici.

Cette thèse de doctorat avait pour objectif principal d'étudier l'opportunité de l'utilisation de techniques spectrales dans le cadre de modélisations de problèmes pratiques de l'hydrodynamique navale. Une exploration des différentes techniques spectrales existant dans le domaine a donc été conduite, ce qui fait l'objet de la première partie de ce manuscrit. Une revue succincte de la littérature associée a ainsi été menée, présentée au chapitre I.1, et on a dégagé les aspects numériques spécifiques à ces méthodes, qui sont discutés au cours des chapitres suivants. Les questions importantes ayant trait au taux de convergence spectrale, et au repliement des spectres notamment, sont abordées plus en détails au chapitre I.2.

Parmi ces techniques spectrales, deux d'entre elles, la méthode directe (MD) et une méthode dite 'High-Order Spectral' (HOS), ont été mises en œuvre sur le noyau de notre méthode, *i.e.* l'écoulement potentiel à surface libre non-linéaire dans une cuve parallélépipédique. La deuxième partie de ce manuscrit est consacrée à ce noyau, qui constitue la colonne vertébrale de tous les développements réalisés. Les formulations de ces deux techniques MD et HOS sont développées dans le chapitre II.1, et leur mise en œuvre numérique exposée. Leurs propriétés numériques ont aussi été étudiées, et on a alors pu dresser un bilan des avantages et inconvénients de ces deux techniques, ainsi que de leurs limitations. En particulier, les propriétés de rapidité d'exécution de la technique HOS ont été mises en lumière, même si une plus grande rigidité de ces méthodes ne permet pas d'y inclure d'aides numériques à la stabilisation comme on peut le faire dans la méthode directe, qui est en revanche nettement plus lente. Ces méthodes HOS sont donc pour le moment restreintes à des simulations de déformées légèrement moins proches de la limite de déferlement, mais demeurent indispensables pour mener à bien des calculs tri-dimensionnels en conservant les avantages de rapidité et de précision de l'approche spectrale.

Dans un deuxième temps, différentes validations de ce noyau de notre formulation ont été menées (cf. chapitre II.2), sur des applications d'oscillations libres et forcées dans des cuves. Ainsi, on a d'abord montré, sur un cas de lâcher de surface libre au second ordre, un parfait accord avec la théorie analytique. Ensuite, en non-linéaire complet, les comparaisons à diverses autres méthodes en écoulement potentiel (éléments finis, solution spectrale stationnaire, méthodes spectrales ' $\sigma$ -transform') se sont là encore avérées probantes. Des simulations comparatives à des modèles en écoulement visqueux et à des expériences ont aussi été accomplies. À chaque fois, les modèles spectraux employés se sont montrés aptes à fournir, au moyen de simulations rapides, des évolutions de surface libre précises et pouvant s'approcher de près de pentes déferlantes. Même si les résultats de ce noyau peuvent ainsi servir de solutions de référence pour ces cas d'oscillations libres et forcées en cuve, la limitation intrinsèque de notre méthode à des écoulements non déferlants dans une cuve parallélépipédique ouverte n'en fait pas un outil général adapté à la simulation de telles applications.

On a alors cherché à étendre notre modélisation spectrale vers la génération de houle non-linéaire, qui reste un domaine où le besoin de modèles tri-dimensionnels qui soient fiables et rapides demeure encore à combler, même en écoulement potentiel. L'effet de la viscosité étant faible hors la présence de corps, cette approche potentielle est bien adaptée ; de plus, les modèles en écoulement visqueux sont trop diffusifs pour propager précisément de la houle à coût raisonnable, à ce jour. L'autre motivation à cette extension de notre formulation en direction de la génération de houle réside dans ce que les différentes techniques spectrales utilisées jusqu'à présent, incluant toutes les méthodes rapides (HOS, DNO, etc.), ne sont capables que de faire évoluer la houle, et non de la générer. C'est-à-dire qu'elles nécessitent d'être initialisées au moyen d'un champ de houle pré-existant, et qui plus est rarement complètement non-linéaire, ce qui peut introduire des instabilités au départ. Cette 'spécificité génératrice' de notre modélisation devrait nous permettre, à terme, d'être capable de reproduire de manière complètement non-linéaire tout type de houle physique, que ce soit en mer ou en bassin.

On a donc développé des techniques d'extension de notre formulation à l'aide de différents 'potentiels additionnels' ; une troisième partie présente les modèles engendrés à partir de ces approches étendues. Ainsi, on a créé un modèle au second ordre de perturbations, qui reproduit le processus complet de génération et propagation de houle en bassin tri-dimensionnel (chapitre III.1). Son développement a fait l'objet d'une attention particulière, pour parvenir finalement à une version optimisée en temps de calcul qui vérifie toutes les propriétés numériques spectrales escomptées. D'autre part, on a inclus dans ce modèle les différentes caractéristiques physiques d'un bassin réel, *i.e.* les formes et mouvements spécifiques du batteur ainsi que la possibilité d'absorber la houle générée. Des exemples d'études appliquées, notamment à la suppression des ondes libres générées dans le bassin, ont montré la fiabilité de ce modèle, et son intérêt dans l'optique d'une utilisation intensive en tant qu'outil d'aide préparatoire et d'analyse d'expériences menées en bassin de houle réels, tel que le bassin de l'ECN doté d'un batteur serpent. L'opportunité de son utilisation

en tant qu'outil de pré-étude, préluant à la construction de moyens d'essais spécifiques, a été illustrée sur un autre exemple mettant en œuvre un batteur partiel.

En non-linéaire complet, une autre type de potentiel additionnel a été développé sous la forme de 'doublets tournants' optimisés de manière à assurer la génération monodirectionnelle d'un spectre quelconque (chapitre III.2). La validité de cette technique est démontrée sur houle régulière par comparaison à la solution spectrale non-linéaire en régime établie. Ensuite, on présente son application à la génération et à la propagation d'un spectre irrégulier, et à la reproduction du signal cible d'un paquet de vague focalisé à une distance du générateur. La reproduction fidèle de ce paquet de vagues aux faibles cambrures établit là encore la validité du modèle, et une étude de l'évolution non-linéaire de ce paquet de vague est menée. Enfin, on montre sur un exemple de croisement de deux trains d'onde, les résultats des premiers calculs tri-dimensionnels menés avec la version récente HOS de ce modèle de houle non-linéaire.

Dans un troisième chapitre III.3, on expose l'adaptation spécifique d'une telle approche spectrale dans le cadre de modèles mixtes de diffraction novateurs, en cours de développement au laboratoire. Il s'agit de modèles associant la génération d'une houle incidente par méthode potentielle spectrale, au calcul de la diffraction de cette houle sur un corps dans un domaine confiné autour de ce corps, au moyen de modèles de diffraction formulés en changement de variables, en écoulements potentiel ou visqueux. Outre ses propriétés de précision et de rapidité, la continuité de la solution spectrale à travers la surface libre de la houle incidente est une caractéristique clef dans la formulation de ces modèles mixtes. Ainsi, un modèle potentiel mixte spectral/BEM (code *XWAVE*) a été développé, puis appliqué sur quelques cas de diffraction de houle non-linéaire irrégulière bi-dimensionnelle sur un corps tri-dimensionnel ; cette possibilité de pouvoir opérer un calcul bi-dimensionnel de la houle, tout en obtenant ensuite la diffraction sur un corps tri-dimensionnel est aussi un atout spécifique à ces nouveaux modèles mixtes. Actuellement, un autre modèle mixte (*SWENSE*) est en cours de mise en œuvre au Laboratoire, associant notre modélisation spectrale, qui apporte la houle incidente, à un modèle RANSE (*ICARE*) calculant la diffraction autour d'un corps en incluant les effets visqueux. Les premiers résultats de ce modèle mixte potentiel/visqueux sur houle régulière se sont avérés tout à fait probants. De tels modèles originaux, alliant la rapidité des méthodes spectrales à celle des calculs de diffraction sur un domaine restreint, devraient être à même de s'appliquer dans un avenir proche à un large éventail de situations réalistes de l'hydrodynamique navale.

Enfin, on a étudié dans un ultime chapitre III.4 la possibilité d'étendre les techniques employées aux chapitres III.1 et III.2 pour développer le formalisme d'un bassin de houle traité en non-linéaire complet ; cette extension devrait être possible au moyen d'une association entre une technique MD pour la résolution additionnelle, et une approche HOS dans le domaine principal. Alternativement un développement en ordres de perturbation

du batteur seul pourrait être envisagé, toujours avec une résolution principale de type HOS.

Si l'on doit maintenant évoquer l'avenir de ce travail et ses débouchés, c'est probablement dans les nouveaux modèles mixtes qu'on vient de mentionner que sont à trouver les plus fortes potentialités de notre méthode. On porte en particulier beaucoup d'espoirs dans le modèle *SWENSE* mixte spectral/RANSE, qui allie tous les atouts qu'on a pu mettre en lumière de la technique spectrale potentielle, à la possibilité de calculer le champ diffracté en écoulement visqueux à coût nettement restreint, et donc avec une grande précision ; les résultats encourageants sur houle régulière laissant augurer de progrès rapides de la version en houle irrégulière, qui en cours de mise en œuvre. Une utilisation extensive du modèle mixte potentiel spectral/BEM est aussi envisagée, notamment pour traiter les problèmes d'excitation résonnante de structures soumises à la houle, tels qu'on les rencontre en mer.

Pour étendre le champ d'application de l'un comme de l'autre de ces modèles mixtes, la génération de houle complètement non-linéaire devra être développée plus avant, grâce au modèle HOS récemment implémenté. En deux dimensions, on pourra améliorer encore le potentiel additionnel dans la direction de la suppression des ondes libres, et ajouter un processus itératif ou d'optimisation sur les interactions non-linéaires pour la reproduction de signaux de houle cibles. En trois dimensions le potentiel additionnel utilisé devra être adapté à la génération multi-directionnelle. Une autre piste de développement réside dans l'éventualité d'étendre notre formulation à un bassin de houle complètement non-linéaire, qui serait alors aussi apte à générer une houle quelconque, de la même manière que notre modèle de bassin de houle au second ordre. Dans ce dernier modèle *SWEET*, la possibilité de traiter des cas de houle irrégulière multi-directionnelle devra être ajoutée et les résultats étudiés de manière plus exhaustive ; cette extension est d'ores et déjà en cours de mise en œuvre là aussi (par Félicien Bonnefoy).

En définitive, on croit pouvoir considérer comme atteint l'objectif fixé d'appréhension des techniques spectrales et d'étude de l'opportunité de leur application aux problèmes hydrodynamiques entrant dans la thématique du laboratoire. À cette occasion, des modèles nouveaux ont été développés et illustrés sur quelques exemples d'intérêt, néanmoins ils restent souvent à approfondir et à étendre. On porte l'espoir que ce travail de doctorat constituera une base valable à ces futurs développements, et que ses conclusions seront à même d'étayer les choix associés.





# Annexes



## Annexe A

# Validations du noyau par comparaison à d'autres modèles potentiels

Figure A.1: Cas d'excitation proche de la résonance d'une cuve bi-dimensionnelle en eau peu profonde de dimensions ( $L_x = 8$ ;  $h = 1$ ). Résultats EF de Wu *et al.* [138].

Figure A.2: Cas d'excitation proche de la résonance d'une cuve bi-dimensionnelle en eau peu profonde de dimensions ( $L_x = 8$ ;  $h = 1$ ). Technique spectrale MD.

Figure A.3: Cas d'excitation proche de la résonance d'une cuve bi-dimensionnelle en eau peu profonde de dimensions ( $L_x = 8$ ;  $h = 1$ ). Résultats EF de Wu *et al.* [138] (haut), et technique spectrale MD (bas).

Figure A.4: Cas de lâcher du deuxième mode dans une cuve bi-dimensionnelle de dimensions ( $L_x = 2$ ;  $h = 1$ ); relevés des élévations au centre de la cuve et sur le mur. Techniques spectrales volumique  $\sigma$ -transform de Chern *et al.* [23] (haut), et surfacique MD (bas).





## Annexe B

### Tableau des entrées du code de calcul *SWEET*

dimensions du bassin		
50.d0	xlen	longueur(m) du bassin
30.d0	ylen	largeur(m) du bassin
5.d0	h	profondeur(m) du bassin
30.d0	ywmk	largeur(m) du batteur (utile pour ibat=4 : batteur partiel)
0.d0	yl	largeur(m) de la partie à gauche du batteur (si ibat=4)
0.d0	yr	largeur(m) de la partie à droite du batteur (si ibat=4)
caratéristiques du batteur		
0.3d0	ampFB	amplitude(m) de la houle désirée
2.5d0	nuFB	pulsation(/s) de la houle désirée
20.d0	thetaFB	angle de propagation(deg) par rapport à l'axe $x$
0.d0	phFB	phase(rad) initiale du train d'onde
2	iramp	rampe en temps : 0. aucune   1. rampe régulière   2. rampe du bassin réel
0	nTrmp	durée de la rampe si iramp=1 : en nombre de périodes
4.d0	Tramp	durée de la rampe si iramp=2 : en secondes
1	ifree	correction des ondes libres (0 ou 1)
2	igeom	type de batteur 1. piston   2. serpent
3	ibat	si igeom=2 : 2. méthode serpent   3. méthode de Dalrymple   4. batteur partiel
Valeur	Variable	Description

partiel caractéristiques du batteur (suite)		
20.d0	xdFB	si ibat=3 : distance cible de la méthode de Dalrymple
2.147d0	dFB	hauteur(m) de l'axe de rotation du batteur si igeom=2
0.d0	y_rmp	si ibat=4 : longueur de la rampe régularisant les bords du batteur partiel (en % de la largeur du bassin)
plage numérique		
0	iabs	absorption au premier ordre sur $\phi$ (0 ou 1)
0	iabs2nd	absorption au second ordre sur $\phi$ (0 ou 1)
1	iabsnb	absorption aux deux ordres sur $\partial\phi/\partial z$ (0 ou 1)
0.85d0	xabsf	début de la plage terminale (en proportion de la longueur du bassin (ex. : 0.8))
0.d0	yabsl	début de la plage latérale gauche (en proportion de la largeur du bassin (ex. : 0.8))
0.d0	yabsr	fin de la plage latérale droite (en proportion de la largeur du bassin (ex. : 0.2))
0.7d0	coeffabsf	coefficient d'absorption sur la plage terminale
0.d0	coeffabsl	coefficient d'absorption sur la plage latérale gauche
0.d0	coeffabsr	coefficient d'absorption sur la plage latérale droite
relevés sur sondes		
1	iprob	relevés d'amplitudes sur des sondes (0 ou 1)
5	nprob	nombres de sondes désirées ( $\leq 100$ )
discrétisation		
0.003d0	delt	pas de temps (adimensionnel)
8000	ntime	nombre de pas de temps total
80	nprint	écriture des données tous les ? pas de temps
257	n1	(en $2^n + 1$ ) nombre de modes(/noeuds) utilisés dans la direction $x$
65	n2	(en $2^n + 1$ ) nombre de modes(/noeuds) utilisés dans la direction $y$
17	n3	(en $2^n + 1$ ) nombre de modes(/noeuds) utilisés sur le batteur physique : direction $z$ (résolution additionnelle sur $2*n3$ modes)
sorties		
0	iCPUtime	sortie des temps CPU par routines (0 ou 1)
1	i3d	sorties des surfaces libres (0 ou 1)
1	imodes	sorties des valeurs modales
Valeur	Variable	Description





# Bibliographie

- [1] ABBOTT M.B. & BASCO D.R. *Computational Fluid Dynamics*, Ed. Longman Scientific & Technical, Royaume-Uni. (1989).
- [2] ABLOWITZ M.J., HERBST B.M. & SCHOBER C.M. On the numerical solution of the sine-Gordon equation. II. Performance of the numerical schemes. *J. Comput. Phys.*, **131**, 354–367. (1997).
- [3] AGNON Y. & BINGHAM H.B. A non-periodic spectral method with applications to nonlinear water waves. *Eur. J. Mech. B/ Fluids*, **18**, 527–534. (1999).
- [4] ALESSANDRINI B. & DELHOMMEAU G. A multigrid velocity-pressure-free surface elevation fully coupled solver for calculation of turbulent incompressible flow around a hull. *Proc. of the 9<sup>th</sup> Int. Conf. Num. Meth. Laminar and Turbulent Flows*, Atlanta, États-Unis, 1173–1184. (1995).
- [5] ANNENKOV S.Y. & SHRIRA V.I. Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation. *J. Fluid Mech.*, **449**, 341–371. (2001).
- [6] ARMENIO V. & FAVRETTO M. Development of a viscous numerical wave tank and numerical evaluation of dynamic wave loads on submerged bodies at small KC numbers. *Proc. of the 7<sup>th</sup> Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, Honolulu, États-Unis, Vol. III, 98–105. (1997).
- [7] BALDOCK T.E. & SWAN C. Numerical calculations of large transient water waves. *Appl. Ocean Res.*, **16**, 101–112. (1994).
- [8] BATEMAN W.J.D., SWAN C. & TAYLOR P.H. On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves. *J. Comput. Phys.*, **174**, 277–305. (2001).
- [9] BATEMAN W.J.D., SWAN C. & TAYLOR P.H. On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionally spread wavefield. *J. Comput. Phys.*, **186**, 70–92. (2003).
- [10] BIÉSEL F. Wave machines. *Proc. of the 1<sup>st</sup> Conf. on Ships and Waves*. (1954).
- [11] BOUDET L. & PÉROIS J.P. Nouvelles techniques de pilotage d'un batteur segmenté pour la génération de houle oblique. *Actes des 8<sup>èmes</sup> Journées de l'Hydrodynamique*, Nantes, France, 295–308. (2001).
- [12] BRANDINI C. *Nonlinear interaction processes in extreme waves dynamics*, Univ. di Firenze, Florence, Italie. (2001).

- [13] BRANDINI C. & GRILLI S.T. Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT. *Proc. of the 11<sup>th</sup> Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, Stavanger, Norvège, Vol. III, 124–131. (2001).
- [14] BRUECKNER K.A. & WEST B.J. Vindication of mode-coupled descriptions of multiple-scale water wave fields. *J. Fluid Mech.*, **196**, 585–592. (1988).
- [15] BÜCHMANN B. *A 2-D numerical wave flume based on a third order boundary element model*, M.Sc. Thesis, Tech. Univ. of Denmark, Lyngby, Danemark. (1995).
- [16] BÜCHMANN B., FERRANT P. & SKOURUP J. Run-up on a body in waves and current : fully nonlinear and finite order calculations. *Appl. Ocean Res.*, **22**, 349–360. (2000).
- [17] CANUTO C., HUSSAINI M.Y., QUARTERONI A. & ZANG T.A. *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer, New York, États-Unis. (1988).
- [18] CHAPLIN J.R. On frequency-focusing unidirectional waves. *Int. J. Offshore Polar Engng.*, **6-2**, 131–137. (1996).
- [19] CHAPLIN J.R. Non-linear wave interactions with a submerged horizontal cylinder. *Proc. of the 11<sup>th</sup> Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, Stavanger, Norvège, Vol. III, 272–279. (2001).
- [20] CHAPLIN J.R., RAINEY R.C.T & YEMM R.W. Ringing of a vertical cylinder in waves. *J. Fluid Mech.*, **350**, 119–147. (1997).
- [21] CHEN S., DOOLEN G.D., KRAICHNAN R.H. & SHE Z.S. On statistical correlation between velocity increments and locally averaged dissipation in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, A **5**, 458–463. (1993).
- [22] CHEN Y. & LIU P.L.F. A pseudospectral approach for scattering of water waves. *Proc. R. Soc. Lond.*, A **445**, 619–636. (1994).
- [23] CHERN M.J., BORTHWICK A.G.L. & EATOCK TAYLOR R. A pseudospectral  $\sigma$ -transformation model of 2D nonlinear waves. *J. Fluids and Struct.*, **13**, 607–630. (1999).
- [24] CHERN M.J., BORTHWICK A.G.L. & EATOCK TAYLOR R. Simulation of non-linear free surface motions in a cylindrical domain using a Chebyshev-Fourier spectral collocation method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **36**, 465–496. (1999).
- [25] CLAMOND D. & GRUE J. A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *J. Fluid Mech.*, **447**, 337–355. (2001).
- [26] CLÉMENT A.H. Coupling of two absorbing conditions for 2d time-domain simulations of free-surface gravity waves. *J. Comput. Phys.*, **126**, 139–151. (1996).
- [27] CLÉMENT A.H. The spinning dipole : an efficient unsymmetrical numerical wavemaker. *Proc. of the 14<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Port Huron (MI), États-Unis, 29–32. (1999).
- [28] COHEN B.I., WATSON K.M. & WEST B.J. Some properties of deep water solitons. *Phys. Fluids*, **19**, 345–354. (1976).

- 
- [29] COINTE R., MOLIN B. & NAYS P. Nonlinear and second-order transient waves in a rectangular tank. *Proc. of the 1988 Behavior of Offshore Structural Systems Conf.*, Trondheim, Norvège. (1988).
- [30] COOLEY J.W. & TUKEY J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.*, **19**, 297–301. (1965).
- [31] CORRIGNAN P. *Analyse physique des phénomènes associés au ballonnement de liquide dans des réservoirs (sloshing)*, École Centrale de Nantes, France. (1994).
- [32] CORTES A.B. & MILLER J.D. Solution of the Navier-Stokes equations by the spectral-difference method. *Numer. Meth. for Partial Difference Equations*, **10**, 345–368. (1994).
- [33] CRAIG W. & NICHOLLS D.P. Traveling water waves in two and three dimensions. *Eur. J. Mech. B/ Fluids*, **21**, 615–641. (2002).
- [34] CRAIG W. & SULEM C. Numerical simulation of gravity waves. *J. Comput. Phys.*, **108**, 73–83. (1993).
- [35] DALRYMPLE R.A. Directional wavemaker theory with sidewall reflection. *J. Hydraulic Res.*, **27-1**, 23–34. (1989).
- [36] DINGEMANS M.W. *Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements*, Rep. H1684.12, Delft Hydraulics, Pays-Bas. (1994).
- [37] DOMMERMUTH D.G. The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme. *Wave motion*, **32**, 307–317. (2000).
- [38] DOMMERMUTH D.G. & YUE D.K.P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **184**, 267–288. (1987).
- [39] DOMMERMUTH D.G. & YUE D.K.P. The nonlinear three-dimensional waves generated by a moving surface disturbance. *Proc. of the 17<sup>th</sup> ONR Symp. on Naval Hydrodynamics*, La Hague, Pays-Bas, 523–539. (1988).
- [40] DOMMERMUTH D.G., YUE D.K.P., LIN W.M., RAPP R.J., CHAN E.S. & MELVILLE W.K. Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments. *J. Fluid Mech.*, **189**, 423–442. (1988).
- [41] DORING M., ANDRILLON Y., FERRANT P. & ALESSANDRINI B. SPH free surface flow simulation. *Proc. of the 18<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, 53–56. (2003).
- [42] ERLEBACHER G., HUSSAINI M.Y., SPEZIALE C. & ZANG T.A. Towards the Large-Eddy Simulation of compressible, turbulent flow. *ICASE Rep. N° 87-20*, NASA Langley Res. Center, Hampton (VA), États-Unis. (1987).
- [43] ERLEBACHER G., ZANG T.A., & HUSSAINI M.Y. Spectral multigrid methods for the numerical simulation of turbulence. In *Multigrid methods*, Eds. S. McKormick and K. Stuben, Marcel Decker Ed., New York, États-Unis. (1987).
- [44] FALTINSEN O.M. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. *J. Ship Res.*, **18-4**, 224–241. (1974).

- [45] FALTINSEN O.M. & TIMOKHA A.N. Adaptative multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank. *J. Fluid Mech.*, **432**, 167–200. (2001).
- [46] FENTON J.D. & RIENECKER M.M. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems : application to solitary-wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **118**, 441–443. (1982).
- [47] FERRANT P. Simulation of strongly-nonlinear wave generation and wave-body interaction using a 3D MEL model. *Proc. of the 21<sup>st</sup> ONR Symp. on Naval Hydrodynamics*, Trondheim, Norvège, 93–109. (1996).
- [48] FERRANT P. Run-up on a cylinder due to waves and a current : potential flow solution with fully nonlinear boundary conditions. *Int. J. Offshore and Polar Engng.*, **11-1**, 33–41. (2001).
- [49] FERRANT P., MOLIN B., & MALENICA Š. Nonlinear wave loads and runup on a vertical cylinder. In *Nonlinear water wave interaction*, Eds. O. Mahrenholtz and M. Markiewicz, WIT Press, Southampton, Royaume-Uni, 101–135. (1999).
- [50] FLICK R.E. & GUZA R.T. Paddle generated waves in laboratory channels. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **106-WW1**, 79–97. (1980).
- [51] FOCESATO C., DIAS F. & GRILLI S.T. Modèle numérique tridimensionnel pour les ondes de surface sur un fond quelconque. *Actes des 9<sup>èmes</sup> Journées de l'Hydrodynamique*, Poitiers, France, 355–367. (2003).
- [52] FONTANET P. Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan. *La Houille Blanche*, **16**, 3–31. (1961).
- [53] FORNBERG B. *A practical guide to pseudospectral methods*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Royaume-Uni. (1995).
- [54] FORNBERG B. & DRISCOLL T.A. A fast spectral algorithm for nonlinear wave equations. *available online improved version of 1999's J. Comput. Phys.*, **155**, 456–467. (2000).
- [55] FORNBERG B. & WHITHAM G.B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. *Phil. Trans. R. Soc. London, A* **289**, 373–404. (1978).
- [56] FRANDBSEN J.B. & BORTHWICK G.L. Free and forced sloshing motions in a 2-D numerical wave tank. *Proc. of the 21<sup>st</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Engng.*, Oslo, Norvège, OMAE2002-28105. (2002).
- [57] GENTAZ L., MAURY C., ALESSANDRINI B. & DELHOMMEAU G. Numerical simulation of a two-dimensional wave tank in viscous fluid. *Int. J. Offshore and Polar Engng.*, **10-1**, 1–9. (2000).
- [58] GRECO M., FALTINSEN O.M. & LANDRINI M. Numerical simulation of heavy water shipping. *Proc. of the 17<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Cambridge, Royaume-Uni, 45–48. (2002).
- [59] GRILLI S.T., GUYENNE P. & DIAS F. A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **35-7**, 829–867. (2001).

- [60] GRILLI S.T. & HORILLO J. Numerical generation and absorption of fully nonlinear periodic waves. *J. Eng. Mech.*, **123**-10, 1060–1069. (1997).
- [61] GRILLI S.T., SUBRAMANYA R., SVENDSEN I.A. & VEERAMONY J. Shoaling of solitary waves on plane beaches. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **120**, 609–628. (1994).
- [62] GRILLI S.T. & SVENDSEN I.A. Corner problems and global accuracy in the Boundary Element solution of nonlinear wave flows. *Engng. Analysis with Boundary Elements*, **7**-4, 178–195. (1990).
- [63] GRUE J. & HUSEBY M. On the occurrence of strong higher harmonic wave forces and induced ringing loads on vertical cylinders. *Proc. of the 21<sup>st</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Engng.*, Oslo, Norvège, OMAE2002-28526. (2002).
- [64] GUÉVEL P., CLÉMENT A., DELHOMMEAU G., KOBUS J.M., SPIRIDAKIS M., DAUBISSE J.C. & HONG D.C. La récupération de l'énergie des vagues. In *Sciences et Techniques de l'Armement - Mémorial de l'Artillerie Française*, **60**-232, 17–207. (1986).
- [65] GUILLERM P.-E. *Application de la méthode de Fourier-Kochin au problème du couplage fluide visqueux-fluide parfait*, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Nantes, France. (2001).
- [66] HAMILTON J.A. & YEUNG R.W. A perfectly transparent spectral shell for unsteady wave-body interactions. *Proc. of the 21<sup>st</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Engng.*, Oslo, Norvège, OMAE2002-28533. (2002).
- [67] HAMILTON J.A. & YEUNG R.W. Viscous-inviscid matching for surface-piercing wave-body interaction problems. *Proc. of the 18<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, 77–80. (2003).
- [68] HASSELMANN K. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J Fluid Mech.*, **12**, 481–500. (1962).
- [69] HAUGEN J.E. & MACHENHAUER B. A spectral Limited-Area Model formulation with time-dependent boundary conditions applied to the shallow-water equations. *Monthly Weather Rev.*, **121**, 2618–2630. (1993).
- [70] HAVELOCK T.H. Periodic irrotational waves of finite height. *Proc. R. Soc. Lond.*, A **95**, 38–51, (1919).
- [71] HAVELOCK T.H. Forced surface waves on water. *Phil. Mag.*, **8**, 569–576, (1929).
- [72] HUDSPETH R.T. & SULISZ W. Stokes drift in two-dimensional wave flumes. *J. Fluid Mech.*, **230**, 209–229. (1991).
- [73] HUET D. *Décomposition spectrale et opérateurs*, Presses Univ. de France, Paris, France. (1976).
- [74] JOHANNESSEN T.B. & SWAN C. Nonlinear transient water waves – part I. A numerical method of computation with comparisons to 2-D laboratory data. *Appl. Ocean Res.*, **19**, 293–308. (1997).

- [75] KARNIADAKIS G.E., BULLISTER E.T. & PATERA A.T. A spectral element method for solution of the two- and three-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. In *Proc. of the Europe-U.S. Conf. on Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Eds. P. Bergan and K.J. Bathe, Springer, New York, États-Unis. (1986).
- [76] KARNIADAKIS G.E. & ORSZAG S.A. Nodes, modes and flow codes. *Phys. Today*, March issue, 32–42. (1993).
- [77] KENNARD E.H. Generation of surface waves by a moving partition. *Quart. Appl. Math.*, **7-3**, 303–312. (1949).
- [78] KIM M.J., MOON H.T., LEE Y.B., CHOI S.K., KIM Y.K., NAM H.Y. & CHO M. A spectral method for free surface flows of inviscid fluids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **28**, 267–288. (1998).
- [79] KRASITSKII V.P. On reduced Hamiltonian equations in the nonlinear theory of water surface waves. *J. Fluid Mech.*, **272**, 1–20. (1994).
- [80] KU H.C. & HATZIAVRAMIDIS D. Solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equations by Chebyshev expansion methods. *Computers & Fluids*, **13**, 99–113. (1985).
- [81] KUEHNLEIN W.L., CLAUSS G.F. & HENNIG J. Tailor made freak waves within irregular seas. *Proc. of the 21<sup>st</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engng.*, Oslo, Norvège, OMAE2002-28524. (2002).
- [82] LALLI F., DI MASCIO A. & LANDRINI M. Nonlinear diffraction effects around a surface-piercing structure. *Int. J. Offshore and Polar Engng.*, **6-2**, 104–111. (1996).
- [83] LAMBRAKOS K.F. Extended velocity potential wave kinematics. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engng.*, **107**, 159–174. (1981).
- [84] LA ROCCA M., SCIORTINO G. & BONIFORTI M.A. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container. *J. Fluids Struct.*, **27**, 23–52, (2000).
- [85] LI W. & WILLIAMS A.N. Second-order waves in a three-dimensional wave basin with perfectly reflecting sidewalls. *J. Fluids Struct.*, **14-4**, 575–592, (2000).
- [86] LIONS J.L. & MAGENES E. *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*, Vol. 1, Springer, Berlin, Allemagne. (1972).
- [87] LONGUET-HIGGINS M.S. Resonant interactions between two trains of gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **12**, 321–332. (1962).
- [88] LONGUET-HIGGINS M.S. & PHILLIPS O.M. Phase velocity effects in tertiary wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **12**, 333–336. (1962).
- [89] LONGUET-HIGGINS M.S. & COKELET E.D. The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation. *Proc. R. Soc. Lond.*, A **350**, 1–26. (1976).
- [90] LUQUET R., ALESSANDRINI B., FERRANT P. & GENTAZ L. RANSE analysis of 2D flow about a submerged body using explicit incident wave models. *Proc. of the 6<sup>th</sup> Numer. Towing Tank Symp.*, Rome, Italie. (2003).

- 
- [91] MACHENHAUER B. Spectral methods. In *Numerical methods on atmospheric models*, Vol. 1, European Center for Medium Range Weather Forecast, Reading, Royaume-Uni. (1991).
- [92] MANSARD E. & FUNKE E. The measurement of incident and reflected spectra using a least square method. *Proc. of the 17<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Engng.*, Sydney, Australie, Vol. 1, 154–172. (1980).
- [93] METCALFE R.W., ORSZAG S.A., BRACHET M.E., MENON S. & RILEY J.J. Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.*, **184**, 207–243. (1987).
- [94] MILDER D. M. A note regarding ‘On Hamilton’s principle for surface waves’. *J. Fluid Mech.*, **83**, 159–161. (1977).
- [95] MILES D. M. On Hamilton’s principle for surface waves. *J. Fluid Mech.*, **83**, 153–158. (1977).
- [96] MOLIN B. Numerical and physical wavetanks : making them fit. *22<sup>nd</sup> Georg Weinblum Memorial Lecture, Hambourg, Allemagne, 2000*, Publ. in *Ship Tech. Res.*, **48-1**, 2–22. (2001).
- [97] MOLIN B. *Hydrodynamique des structures offshore*, Éditions Technip, Paris, France. (2002).
- [98] MORI N. & YASUDA T. Effects of high order nonlinear interactions on unidirectional wave trains. *Ocean Engng.*, **29**, 1233–1245. (2002).
- [99] MULDOWNNEY G.P. & HIGDON J.J.L. A spectral boundary element approach to three-dimensional Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, **298**, 167–192. (1995).
- [100] NICHOLLS D.P. Traveling water waves : spectral continuation methods with parallel implementation. *J. Comput. Phys.*, **143**, 224–240. (1998).
- [101] NICHOLLS D.P. & REITICH F. Stability of high-order perturbative methods for the computation of Dirichlet-Neumann Operators. *J. Comput. Phys.*, **170**, 276–298. (2001).
- [102] ÖLMEZ H.S. & MILGRAM J.H. Numerical methods for nonlinear interactions between water waves. *J. Comput. Phys.*, **118**, 62–72. (1995).
- [103] ÖLMEZ H.S. & MILGRAM J.H. Nonlinear energy transfer to short gravity waves in the presence of long waves. *J. Fluid Mech.*, **289**, 199–226. (1995).
- [104] ORSZAG S.A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries : accuracy. *J. Fluid Mech.*, **49**, 75–112. (1971).
- [105] PATERA A.T. A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, **54**, 468–488. (1984).
- [106] PHILLIPS N.A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteorology*, **14**, 184–185. (1957).

- [107] PHILLIPS O.M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.*, **9**, 193–217. (1960).
- [108] PHILLIPS O.M. *The dynamics of the upper ocean*, Cambridge Univ. Press, New York, États-Unis. (1966).
- [109] RIENECKER M.M. & FENTON J.D. A Fourier approximation for steady water waves. *J. Fluid Mech.*, **104**, 119–137. (1981).
- [110] SAND S.E. & DONSLUND B. Influence of wave board type on bounded long waves. *J. Hydraulic Res.*, **23**, 147–163. (1985).
- [111] SCHÄFFER H.A. Second-order wavemaker theory for irregular waves. *Ocean Engng.*, **23-1**, 47–88. (1996).
- [112] SCHÄFFER H.A. & STEENBERG C.M. Second-order wavemaker theory for multi-directional waves. *Ocean Engng.*, **30**, 1203–1231. (2003).
- [113] SCHØNBERG T. & CHAPLIN J.R. Computation of non-linear wave reflections and transmissions from a submerged horizontal cylinder. *Int. J. Offshore Polar Engng.*, **13-1**, 29–37. (2003).
- [114] SCHWARTZ L.W. Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **62-3**, 553–578. (1974).
- [115] SCOLAN Y.M., LE BOULLUEC M., CHEN X.B., DELEUIL G., FERRANT P., MALENICA Š. & MOLIN B. Some results from numerical and experimental investigations on the high frequency responses of offshore structures. *Proc. of the 8<sup>th</sup> Int. Conf. on the Behaviour of OffShore Struct.*, Delft, Pays-Bas, 127–142. (1997).
- [116] SERRE E. & PULICANI J.P. A three-dimensional pseudospectral method for rotating flows in a cylinder. *Computers & Fluids*, **30**, 491–519. (2001).
- [117] SMITH R.A. An operator expansion formalism for nonlinear surface waves over variable depth. *J. Fluid Mech.*, **363**, 333–347. (1998).
- [118] SOBEY R.J. A local Fourier approximation method for irregular wave kinematics. *Appl. Ocean Res.*, **14**, 93–105. (1992).
- [119] STASSEN Y. *Simulation numérique d'un canal à houle bi-dimensionnel au troisième ordre d'approximation par une méthode intégrale*, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Nantes, France. (1999).
- [120] STIASSNIE M. & SHEMER L. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **143**, 47–67. (1984).
- [121] STIASSNIE M. & SHEMER L. Energy computations for evolution of class I and class II instabilities of Stokes waves. *J. Fluid Mech.*, **174**, 299–312. (1987).
- [122] SU M.Y. Three-dimensional deep-water waves. I. Experimental measurement of skew and symmetric wave patterns. *J. Fluid Mech.*, **124**, 73–108. (1982).
- [123] SUH K. & DALRYMPLE R.A. Directional wavemaker theory : a spectral approach. *Proc. of the IAHR seminar*, Lausanne, Suisse, 389–395. (1987).

- 
- [124] SVENDSEN I.A. & JONSSON I.G. *Hydrodynamics of coastal regions*, Tech. Univ. of Denmark, Lyngby, Danemark. (1980).
- [125] SVENDSEN I.A. Physical modelling of water waves. In *Physical modelling in ocean engineering*, Ed. A.A. Balkema, Rotterdam, Pays-Bas. (1985).
- [126] TANAKA M. A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dynamics Res.*, **28**, 41–60. (2001).
- [127] TEMPERTON C. Self-sorting mixed-radix real Fourier transforms. *J. Comput. Phys.*, **52**, 1–23. (1983).
- [128] TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. & FLANNERY R.P. *Numerical recipes in Fortran, Deuxième édition*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Royaume-Uni. (1992).
- [129] TSAI C.P. & JENG D.S. Numerical Fourier solutions of standing waves in finite water depth. *Appl. Ocean. Res.*, **16**, 185–193. (1994).
- [130] TSAI W.T. & YUE D.K.P. Computation of nonlinear free-surface flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **28**, 249–278. (1996).
- [131] VIJFVINKEL E.M. *Focused wave groups on deep and shallow water*, M.Sc. Thesis, Univ. of Groningen, Pays-Bas. (1996).
- [132] VINJE T. & BREVIG P. Nonlinear ship motions. *Proc. of the 3<sup>rd</sup> Int. Symp. on Numer. Ship Hydrodynamics*, Paris, France. (1981).
- [133] WATSON K.M. & WEST B.J. A transport-equation of nonlinear ocean surface wave interactions. *J. Fluid. Mech.*, **70**, 815–826. (1975).
- [134] WEST B.J. *Deep water gravity waves*, Springer, New York, États-Unis. (1981).
- [135] WEST B.J., BRUECKNER K.A., JANDA R.S., MILDNER M. & MILTON R.L. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, **92**, 11803–11824. (1987).
- [136] WESTHUIS J.H. *The numerical simulation of nonlinear waves in a hydrodynamic model test basin*, Ph.D. Thesis, MARIN, Wageningen, Pays-Bas. (2001).
- [137] WU Y.C. *Directional wavemaker : theory and experiment*, Ph.D. Thesis, Univ. of Delaware, Newark, États-Unis. (1985).
- [138] WU G.X., MA Q.W. & EATOCK TAYLOR R. Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method. *Appl. Ocean Res.*, **20**, 337–355. (1998).
- [139] WU G., LIU Y. & YUE D.K.P. Numerical reconstruction of nonlinear two- and three-dimensional wave fields. *Proc. of the 15<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Dan Caesarea, Israël, 191–194. (2000).
- [140] YASUDA T. & MORI N. Role of sideband instability and mode coupling in forming a water-wave chaos. *Wave motion*, **26-2**, 163–185. (1997).
- [141] YEUNG R.W. & YU X. Three-dimensional free-surface flow with viscosity : a spectral solution. *Hydrodynamics in ship and ocean engineering*, RIAM, Kyushu Univ. Publ., Japan, 87–114. (2001).

- [142] ZAKHAROV V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **9**, 190–194. (1968).
- [143] ZAKHAROV V.E., DYACHENKO A.I. & VASILYEV O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **21**, 283–291. (2002).
- [144] ZHANG J., YANG J., WEN J., PRISLIN I. & HONG K. Deterministic wave model for short-crested waves. Part I : theory and numerical scheme. *Appl. Ocean Res.*, **21**, 167–188. (1999).

## Liste des publications associées

(dans l'ordre chronologique inverse)

- [I] FERRANT P., GENTAZ L., ALESSANDRINI B. & LE TOUZÉ D. A potential / RANSE approach for regular water wave diffraction about 2D structures. *Ship Tech. Res. / Schiffstechnik*, **50**-4, 165–171. (2003).
- [II] FERRANT P., LE TOUZÉ D. & PELLETIER K. Nonlinear time domain models for irregular wave diffraction about offshore structures. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **43**-10, 1257–1277. (2003).
- [III] LE TOUZÉ D., ANDRILLON Y., FERRANT P. & ALESSANDRINI B. Comparison of VOF and Spectral-potential models on three-dimensional sloshing. *Proc. of the 6<sup>th</sup> Numer. Towing Tank Symp.*, Rome, Italie. (2003).
- [IV] FERRANT P., LE TOUZÉ D. & BONNEFOY F. Génération de houle directionnelle au second ordre en bassin. *Actes du 16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Nice, France. (2003).
- [V] BONNEFOY F., LE TOUZÉ D. & FERRANT P. A non-linear spectral model for gravity waves generation and propagation in a bounded domain. *Proc. of the 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Math. and Numer. Aspects of Wave Propagation*, Jyväskylä, Finlande, 523–528. (2003).
- [VI] LE TOUZÉ D. & FERRANT P. On the optimal use of submerged dipoles for the generation of unsteady nonlinear waves. *Proc. of the 18<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, 109–112. (2003).
- [VII] BONNEFOY F., LE TOUZÉ D. & FERRANT P. Second-order directional wavemaker theory : prediction and control of free waves. *Proc. of the 18<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, 17–20. (2003).
- [VIII] LE TOUZÉ D. & FERRANT P. Approche spectrale non-linéaire pour la simulation des écoulements instationnaires à surface libre. *Actes des 9<sup>èmes</sup> Journées de l'Hydrodynamique*, Poitiers, France, 341–354. (2003).
- [IX] FERRANT P., GENTAZ L. & LE TOUZÉ D. A new potential / RANSE approach for water wave diffraction. *Proc. of the 5<sup>th</sup> Numer. Towing Tank Symp.*, Pornichet, France. (2002).
- [X] FERRANT P., GENTAZ L. & LE TOUZÉ D. Combination of potential and viscous flow models for wave interaction with a 2D breakwater. *Proc. of the 28<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Engng.*, Cardiff, Royaume-Uni, Vol. 2, 1650–1660. (2002).
- [XI] FERRANT P. & LE TOUZÉ D. Fully-nonlinear spectral/BEM solution for irregular wave interactions with a 3D body. *Proc. of the 21<sup>st</sup> Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Engng.*, Oslo, Norvège, OMAE2002-28521. (2002).
- [XII] LE TOUZÉ D., BONNEFOY F. & FERRANT P. Second-order spectral simulation of directional wave generation and propagation in a 3D tank. *Proc. of the 12<sup>th</sup> Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, Kitakyushu, Japon, Vol. 3, 173–179. (2002).

- [XIII] FERRANT P., LE TOUZÉ D. & PELLETIER K. Nonlinear time domain models for irregular wave diffraction about offshore structures. *Proc. of the Comput. Fluid Dynamics Conf. of the Eur. Congress on Comput. Meth. in Appl. Sc. and Engng*, Swansea, Royaume-Uni. (2001).
- [XIV] FERRANT P. & LE TOUZÉ D. Simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a pseudo-spectral method. *Proc. of the 16<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Hiroshima, Japon, 37–40. (2001).







**Résumé**

Les méthodes spectrales sont connues pour leurs propriétés de convergence rapide et de précision. Cependant, leur application à l'hydrodynamique navale reste encore aujourd'hui peu étendue. Le but de ce doctorat est d'étudier les possibilités de leur application à la génération et propagation de houle, dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels.

Un bilan des différentes approches spectrales employées jusqu'à présent en hydrodynamique navale est d'abord dressé, étayant le choix des techniques développées au cours de ce travail. L'étude des propriétés de ces techniques est ensuite réalisée sur le 'noyau' de la méthode, i.e. une cuve tri-dimensionnelle de géométrie figée. En particulier, différentes techniques High-Order Spectral sont comparées entre elles et à la méthode directe, et une nouvelle variante est proposée. Des validations sur des cas de lâchers de surface libre et d'oscillations forcées de surface libre sont présentées et confrontées à diverses méthodes.

L'approche est ensuite étendue, à partir de ce 'noyau' et au moyen de stratégies de 'potentiel additionnel', donnant lieu au développement de divers modèles. Ainsi, des houles non-linéaires sont modélisées à l'aide de doublets tournants instationnaires spécifiquement développés. Des cas de reproduction de signaux temporels cibles à une distance, et de génération et propagation de houle irrégulière sont présentés. De plus, une caractéristique avantageuse d'une telle approche spectrale est exploitée pour proposer des modèles originaux de diffraction autour de corps. Ceux-ci allient une génération de houle par méthode spectrale à des modèles de diffraction en fluide parfait ou visqueux, formulés en changement de variable. Des exemples illustratifs de diffraction de cette houle autour de corps bi- ou tri-dimensionnels sont proposés.

Enfin, un modèle original de simulation complète, au second-ordre, du processus de génération et propagation en bassin de houle tri-dimensionnel est réalisé. Il inclut la modélisation de différents batteurs, ainsi qu'un modèle d'absorption, permettant notamment de reproduire les caractéristiques complètes du nouveau bassin de houle de l'École Centrale de Nantes. Ce modèle est validé par comparaison à une solution analytique en régime établi et ses propriétés numériques sont étudiées. L'investigation des ondes libres et leur suppression, ainsi que la caractérisation de zones utiles sont proposées à titre d'application.

**Mots-clés :** méthodes spectrales, écoulements instationnaires, surface libre, écoulements potentiels, High-Order Spectral, génération et propagation de houle non-linéaire, bassin de houle numérique.

## SPECTRAL METHODS FOR MODELLING NON-LINEAR UNSTEADY FREE SURFACE FLOWS

**Abstract**

Spectral methods are well known for their specific rapid convergence and accuracy features. However, their application to naval hydrodynamics remains rather limited up to now. The aim of this PhD is to investigate the possibilities offered by their application to the gravity wave generation and propagation process, in the frame of potential theory.

A review of the various spectral approaches used in the field of naval hydrodynamics is first drawn up, backing up the choice of techniques developed during this work. Investigation of the properties of these techniques is then handled on the 'kernel' of the method, i.e. a three-dimensional tank of fixed geometry. In particular, several different Higher-Order Spectral techniques are compared one to another as well as to the direct method, and a new variant is proposed. Validations on free and forced free surface oscillations are presented and compared to various methods.

Then, from that 'kernel' and by implementing 'additional potential' strategies, the approach is extended resulting in the development of several models. This way, fully non-linear gravity waves are modelled by means of specifically designed unsteady spinning dipoles. Cases of target time signals reproducing, and irregular waves generation and propagation are presented. Moreover, a favourable feature of such a spectral approach is exploited to propose original models for calculating diffraction around bodies. These combine the spectral method for generating waves, to viscous or potential flow diffraction models, formulated with modified variables. Illustrative examples of wave diffraction around two- and three-dimensional bodies are proposed.

Eventually, an original model simulating, at second order, the whole generation and propagation process in a three-dimensional wave tank is realized. It includes the modelling of various wavemakers, together with an absorption model, allowing for instance to reproduce all the characteristics of the new wave basin of the École Centrale of Nantes. This model is validated by comparison to a steady analytical solution and its numerical properties are studied. The investigation of free waves and their cancellation, as well as the characterization of 'usable areas' are proposed by way of applications.

**Key words:** spectral methods, time domain, free surface, potential flow, High-Order Spectral, non-linear gravity wave generation and propagation, numerical wave tank.