



**HAL**  
open science

# Estimation de l'attitude et commande bornée en attitude d'un corps rigide : application à un mini hélicoptère à quatre rotors

Fermi Guerrero Castellanos

► **To cite this version:**

Fermi Guerrero Castellanos. Estimation de l'attitude et commande bornée en attitude d'un corps rigide : application à un mini hélicoptère à quatre rotors. Automatique / Robotique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT: . tel-00370222

**HAL Id: tel-00370222**

**<https://theses.hal.science/tel-00370222>**

Submitted on 23 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Université Joseph Fourier - Grenoble I

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## THESE

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER**

***Spécialité : AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE***

préparée au Département Automatique de GIPSA-lab Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale :

**Électronique, Électrotechnique, Automatique, Traitement du Signal**

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**José Fermi GUERRERO CASTELLANOS**

*le 11 Janvier 2008*

**Titre :**

**ESTIMATION DE L'ATTITUDE ET COMMANDE BORNEE  
EN ATTITUDE D'UN CORPS RIGIDE : APPLICATION A  
UN MINI HELICOPTERE A QUATRE ROTORS**

*Directeurs de thèse :*

Suzanne LESECQ (GIPSA-lab-UJF)  
Nicolas MARCHAND (GIPSA-lab-INPG)

**JURY :**

Sophie TARBOURIECH	Président
Philippe BONNIFAIT	Rapporteur
Tarek HAMEL	Rapporteur
Mazen ALAMIR	Examineur
Jérôme DELAMARE	Invité
Agnès LUC-BOUHALI	Invité
Andrea VASSILIEV	Invité



*« Le plus grand phénomène de la Nature,  
le plus merveilleux, est le mouvement. »*

**Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)**



## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Département d'Automatique du laboratoire Grenoblois de l'Image, de la Parole, du Signal et de l'Automatique (GIPSA-Lab). Je tiens à remercier M. Jean-Marc Chassery, directeur de GIPSA-Lab, et M. Didier Georges, directeur du département d'automatique, de m'avoir accueilli et permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions. Je remercie également M. Christian Commault, directeur de l'école doctorale EEATS.

Je tiens à adresser ma sincère et profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse, dont j'ai reçu un soutien et une amitié constante. Que Suzanne Lesecq trouve ici l'expression de mon plus grand respect. Son dynamisme et sa discipline sont des qualités qui ont rythmé ce travail de recherche. Je remercie également Nicolas Marchand pour sa perspicacité, son esprit critique, son optimisme et pour les réflexions qui ont été toujours riches en enseignements. Merci également à Jérôme Delamare, pour sa participation tout au long de ce travail et dont ses qualités intuitives et pratiques de concevoir la science restera pour moi un exemple.

Je tiens à remercier les membres du Jury, qui ont accepté de juger mon travail: Madame Sophie Tarbouriech pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance, Monsieur Philippe Bonnifait et Monsieur Tarek Hamel pour avoir accepté d'examiner en profondeur ce travail ainsi que pour tous leurs commentaires constructifs. Que Madame Agnès Luc-Bouhali et Monsieur Andrea Vassiliev trouvent ici mes remerciements pour la lecture méticuleuse qui ont fait de ce mémoire et pour les commentaires faits lors de ma soutenance.

Les aventures scientifiques ne peuvent se concevoir sans le partage du savoir, c'est pourquoi je remercie les membres de l'équipe des systèmes non linéaires et complexité (SYSCO) de GIPSA-Lab et principalement à son responsable Monsieur Mazen Alamir. Ses grandes qualités scientifiques et humaines sont un exemple à suivre.

Je voudrais remercier Madame Sylviane Gentil avec qui j'ai eu le plaisir de discuter à plusieurs reprises, et dont sa sagacité intellectuelle m'a toujours surpris. Un grand merci à Monsieur Alain Barraud qui m'a fait toujours confiance pour les enseignements.

De même, je remercie tout le personnel qui rend la vie des thésards plus agréable. Mes remerciements les plus sincères à Marie-Thérèse, Marielle, Virginie, Marie-Rose et à Patricia pour son aide bibliographique. Je tiens aussi à remercier l'équipe Technique : Olivier, Mattieu, Patrice, Pascal et les frères Blanc.

Un grand merci à mes collègues du laboratoire, avec lesquels j'ai partagé tant de choses et qui ont fait de ma vie à Grenoble une expérience inoubliable. Je pense notamment à Sameh Yacoub-Agha, Adib Al-Lahham, Ahmad Hably, Shadi Abras, Maher El Rafei, Do

Hieu Trinh, Melha Bitam, Kyarash Shahriari, Alexandrum Ticlea, Carmen Bratosin, Zhara Benayache, Gabriela Marin, Monica Matei, Alina Stroe, Sylvain Blanvillain, Joumana Hermassi et Hananne Ondella. Je remercie aussi mes formidables collègues de bureau : Lukas Zoubek, Shi Lee, Hoang Van Nguyen et Cédric Berbra. Je voudrais remercier tout particulièrement Hala Rifai, pour ses encouragements, ses discussions interminables et principalement pour son amitié.

Je remercie également les thésards et permanents de l'équipe de microsystemes du laboratoire G2ELab dont j'ai eu la chance de connaître, surtout lors des Miams. Un grand merci à Orphe Cugat et à Guylain Poulain.

Un grand remerciement aux personnes qui m'ont aidé à corriger l'avant dernière version de ma thèse : Cédric et Meriem Berbra et Delphine Chazot.

Je suis reconnaissant au Conseil National de la Science et de la Technologie du Mexique, CONACYT, pour l'attribution de la bourse qui m'a permis effectuer mes études de doctorat.

Je tiens également à remercier mes compatriotes : Marcos Orozco, Luisa Equihua, Jonathan Pecero, Patricia Domínguez, Alejandro Illescas, Alejandro Vargas et la Sra. Fadia et à toute la communauté mexicaine à Grenoble. Ainsi je remercie le soutien, les encouragements et la joie de vivre de Luis Olmos et ma prochaine compatriote Elena Mihalcea, Benito Salmeron, Carlos Aldana, Lizeth Torres, Michelle Alvarez, et particulièrement Esmeralda Sierra.

Enfin, je ne pourrai oublier mes parents, mes frères et ma grande mère, qui m'ont toujours encouragé, soutenu et sans lesquels je n'aurais jamais pu devenir ce que je suis. Je les remercie de tout mon cœur et je leurs dédie ce travail.





# Table des matières

Introduction générale	ix
<b>1 Préliminaires et état de l'art</b>	<b>1</b>
1.1 L'estimation de l'attitude	2
1.1.1 Représentation de l'attitude	2
1.1.2 Quelques exemples d'applications de l'estimation d'attitude	11
1.1.3 Capteurs généralement utilisés pour l'estimation d'attitude	20
1.1.4 Estimation de l'attitude : état de l'art	26
1.2 Commande d'attitude	30
1.2.1 Commande d'attitude d'un corps rigide : état de l'art	30
1.2.2 Commande de l'hélicoptère à quatre rotors : état de l'art	32
<b>2 Les drones : l'hélicoptère à quatre rotors</b>	<b>39</b>
2.1 Les catégories de drones	40
2.2 L'hélicoptère à quatre rotors	42
2.3 Architecture du prototype du GIPSA-Lab	43
2.4 Fonctionnement de l'hélicoptère à quatre rotors	46
2.5 Forces et Couples Aérodynamiques	48
2.6 Formulation d'un modèle général	56
2.7 L'actionneur, ses paramètres et sa commande	59
2.7.1 Modèle de l'actionneur	61
2.7.2 Commande en boucle ouverte	61
2.7.3 Commande en boucle fermée	62
2.8 Bilan du modèle de l'hélicoptère à quatre rotors	66
2.9 Conclusion	68
<b>3 Détermination de l'Attitude</b>	<b>69</b>
3.1 Introduction	69
3.2 Organisation du chapitre	70

3.3	Estimation de l'attitude à partir de vecteurs de mesures . . . . .	71
3.3.1	Modèle de mesures . . . . .	72
3.3.2	Enoncé du problème général . . . . .	73
3.3.3	Estimation de l'attitude en utilisant une décomposition SVD . . . . .	74
3.3.4	Estimation de l'attitude en utilisant un algorithme de projection . . . . .	76
3.3.5	Estimation de l'attitude : le cas quasi-statique . . . . .	79
3.3.6	Résultats en simulation . . . . .	81
3.4	Observateur non linéaire d'attitude . . . . .	85
3.4.1	Observateurs pour des systèmes non linéaires : forme générale . . . . .	86
3.4.2	Position du problème . . . . .	87
3.4.3	Observateur non linéaire de l'Attitude proposé . . . . .	88
3.4.4	Analyse de la dynamique de l'erreur : une approche basée sur la passivité . . . . .	92
3.4.5	Analyse de stabilité au sens entrée-état (ISS) . . . . .	95
3.4.6	Résultats en simulations . . . . .	101
3.5	Comparaison entre le FKE et l'observateur non linéaire . . . . .	105
3.6	Implantation en temps réel . . . . .	107
3.7	Conclusion . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Commande bornée en attitude</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	115
4.2	Organisation du chapitre . . . . .	117
4.3	Quelques rappels sur le modèle dynamique d'un corps rigide . . . . .	118
4.4	Enoncé du problème . . . . .	120
4.5	Stratégie de commande . . . . .	120
4.5.1	Quelques propriétés de la loi de commande . . . . .	125
4.6	Résultats en simulation . . . . .	129
4.7	Application à l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	134
4.7.1	Modèle dynamique . . . . .	136
4.7.2	Enoncé du problème . . . . .	137
4.7.3	Stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	138
4.8	Résultats expérimentaux . . . . .	140
4.8.1	Plate-forme expérimentale . . . . .	140
4.8.2	Description des expériences . . . . .	143
4.9	Conclusion . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Preuve du Théorème 3.3</b>	<b>153</b>

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	iii
<b>B Concepts sur la passivité</b>	<b>157</b>
<b>C Concepts sur l'ISS</b>	<b>159</b>
<b>D Interface de l'observateur d'attitude en temps réel</b>	<b>163</b>



# Table des figures

1	Diagramme bloc de la commande et de l'estimation d'attitude . . . . .	x
1.1	Repère inertiel et mobile d'un corps rigide . . . . .	2
1.2	Les angles d'Euler . . . . .	4
1.3	Les angles de Cardan . . . . .	5
1.4	Le gyroscope de Foucault . . . . .	12
1.5	Gyroscope à technologie MEMS . . . . .	12
1.6	Le tableau de bord d'un avion de tourisme . . . . .	13
1.7	L'attitude d'un avion . . . . .	14
1.8	The Predator, The Sikorsky, The Yamaha Rmax . . . . .	15
1.9	L'attitude d'un hélicoptère . . . . .	16
1.10	Exemple d'une structure articulée . . . . .	18
1.11	Système vestibulaire . . . . .	19
1.12	Principe de l'accéléromètre . . . . .	21
1.13	Principe du gyromètre . . . . .	23
1.14	Composantes du champ magnétique . . . . .	25
1.15	Architecture d'un véhicule type VTOL . . . . .	33
1.16	L'hélicoptère à quatre rotors de Bothezat . . . . .	34
1.17	L'hélicoptère " <i>Draganfly III</i> " . . . . .	34
2.1	Les catégories de drones . . . . .	41
2.2	Les catégories de micro-drones . . . . .	42
2.3	Architecture électronique du prototype de GIPSA-Lab . . . . .	45
2.4	Prototype de l'hélicoptère à quatre rotors de GIPSA-Lab . . . . .	45
2.5	Fonctionnement de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	46
2.6	Élément différentiel de la pale . . . . .	48
2.7	Vitesses tangentielle et perpendiculaire . . . . .	49
2.8	Composantes du couple résistant . . . . .	50
2.9	Composantes de la vitesses sur l'axe de l'actionneur . . . . .	52

2.10	Chaîne de Traction . . . . .	55
2.11	Paramètres aérodynamiques . . . . .	55
2.12	Corps de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	59
2.13	Boucle de commande pour le rotor . . . . .	60
2.14	Réponse du rotor en boucle ouverte (simulation) . . . . .	62
2.15	Réponse de l'actionneur en boucle fermée (simulation) . . . . .	65
2.16	Réponse de l'actionneur en boucle fermée (données réelles) . . . . .	65
2.17	Architecture du simulateur VFRS . . . . .	66
2.18	Simulateur de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	67
3.1	Les vecteurs de mesures et les vecteurs de référence . . . . .	73
3.2	Projections . . . . .	77
3.3	Idée fondamentale des projections . . . . .	77
3.4	Estimation du quaternion dans une période d'échantillonnage . . . . .	79
3.5	Module de capteurs . . . . .	80
3.6	Comparaison de performances : Lemme 1 et q-method . . . . .	84
3.7	Comparaison de performances : Lemme 2 et TRIAD . . . . .	84
3.8	Schéma de l'observateur d'attitude . . . . .	89
3.9	Structure de la dynamique de l'erreur d'attitude . . . . .	93
3.10	Dynamique de l'erreur d'attitude . . . . .	94
3.11	Structure de la dynamique de l'erreur d'attitude (avec des bruit) . . . . .	97
3.12	Estimation du quaternion d'attitude . . . . .	102
3.13	Estimation du quaternion d'attitude (zoom) . . . . .	103
3.14	Erreur de l'attitude estimée . . . . .	104
3.15	Estimation du biais dans un gyromètre . . . . .	104
3.16	Erreur de l'attitude estimée . . . . .	106
3.17	Estimation du biais dans les gyromètre . . . . .	106
3.18	Estimation de l'attitude de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	108
3.19	Estimation du quaternion d'attitude (données réelles) . . . . .	109
3.20	Estimation du quaternion d'attitude (données réelles) zoom . . . . .	109
3.21	Angles d'Euler estimés . . . . .	110
3.22	Angles d'Euler estimés (zoom) . . . . .	110
3.23	Estimation du biais dans les gyromètres . . . . .	111
4.1	Fonction de saturation . . . . .	121
4.2	Exemple de comportement de la boucle fermée . . . . .	124
4.3	Exemple de comportement de la boucle fermée avec saturation du gyromètre . . . . .	127
4.4	Exemple de l'évolution d'un corps rigide dans deux milieux . . . . .	128

4.5	Stabilisation du corps rigide à l'origine. . . . .	130
4.6	Stabilisation à l'origine et rejet de perturbations . . . . .	131
4.7	Suivi de trajectoire . . . . .	132
4.8	Les angles d'Euler . . . . .	133
4.9	Comportement du système sous la saturation des gyromètres . . . . .	134
4.10	Diagramme à bloc de la dynamique de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	137
4.11	Stratégie de contrôle . . . . .	137
4.12	Plate-forme expérimentale . . . . .	140
4.13	Architecture expérimentale . . . . .	142
4.14	Stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	144
4.15	Stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors (perturbations externes) . . . . .	145
4.16	Suivi de trajectoire . . . . .	146
4.17	Vol stationnaire de l'hélicoptère à quatre rotors . . . . .	146
C.1	Sous-systèmes (ISS) reliés en feedback . . . . .	161
D.1	Observateur non linéaire d'attitude sur Simulink . . . . .	164
D.2	Estimation en temps réel de l'attitude . . . . .	164
D.3	Observateur non linéaire d'attitude sur LabView . . . . .	165





# Introduction générale

Ces dernières années, l'intérêt pour les Véhicules Aériens Autonomes (Unmanned Aerial Vehicle, UAV), s'est constamment accru. Ces véhicules aériens, aussi appelés Drones (faux bourdons), ont été employés, au début, principalement dans le domaine militaire, dans des missions de reconnaissance, de surveillance et aussi dans un rôle offensif. Au fur et à mesure que les technologies informatiques, de conception de capteurs et d'actionneurs progressent, les drones se sont aussi perfectionnés. De nos jours, nous pouvons trouver des applications civiles telles que, par exemple, la surveillance de trafic routier, la surveillance et la protection de l'environnement, la recherche et le secours de blessés ou la gestion de grandes infrastructures telles que les lignes haute tension, les barrages et les ponts.

La recherche en robotique aérienne a principalement impliqué des hélicoptères et des architectures "VTOL" (Vertical Take-off and Landing). Le principal avantage de ces plateformes est leur manœuvrabilité et leur capacité à effectuer des vols stationnaires, ce qui est indispensable pour de nombreuses applications. L'hélicoptère à quatre rotors a attiré particulièrement l'attention dans la communauté robotique et automatique. Ce véhicule est capable d'atterrir et de décoller à la verticale et en raison de sa symétrie, il est simple à modéliser et à construire. Néanmoins, malgré une complexité moindre de cet engin par rapport aux hélicoptères conventionnels, la commande de l'hélicoptère à quatre rotors est un défi vraiment intéressant en raison des non-linéarités, des forces aérodynamiques et de son faible moment d'inertie. En général, la position dans l'espace de ce type d'engin est commandée par un opérateur (radio-pilotage). Faire voler un tel véhicule d'une façon stable et autonome est une tâche délicate qui nécessite des pilotes expérimentés. Afin de réduire la difficulté de piloter un tel engin, une commande d'attitude peut être ajoutée. Cette commande doit être implantée dans un calculateur embarqué et elle doit être capable de stabiliser automatiquement l'attitude de l'hélicoptère. Ainsi, le pilote ne doit plus fournir que la consigne d'attitude et la commande embarquée doit être capable d'amener le véhicule à cette position angulaire et la maintenir en dépit de l'existence de perturbations externes.

Cependant, la conception d'une commande performante a pour pré-requis la connaissance de l'attitude et de la vitesse angulaire. Puisque l'attitude n'est pas directement mesurable, une estimation s'avère nécessaire. En outre, l'estimation et la commande d'attitude

de l'hélicoptère à quatre rotors représentent un cas particulier d'un problème plus général d'estimation et de commande d'attitude d'un corps rigide.

Les problèmes de la commande et de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide ont été abordé par la communauté scientifique automatique depuis les années 1950, et ce pour des domaines applicatifs aussi variés que l'aérospatial, l'aéronautique, la robotique aérienne et terrestre. La commande d'attitude a pour objectif de maintenir l'attitude (orientation) désirée de l'engin, toujours soumis à des perturbations externes, afin qu'il puisse réussir sa mission. Le problème de l'estimation d'attitude consiste à déterminer l'orientation des axes principaux du véhicule par rapport à un système de coordonnées inertiel, et ceci à partir de mesures de différentes modalités.

La commande d'attitude d'un système quelconque est assurée par une boucle comme celle montrée dans la figure 1. Des capteurs fournissent une information indirecte (et parfois incomplète) sur l'attitude. En utilisant des modèles mathématiques pour les mesures (et dans certains cas, à partir du modèle dynamique du système) l'attitude peut être estimée. En utilisant l'attitude estimée et la vitesse angulaire, une loi de commande d'attitude est synthétisée afin de maintenir l'attitude désirée.

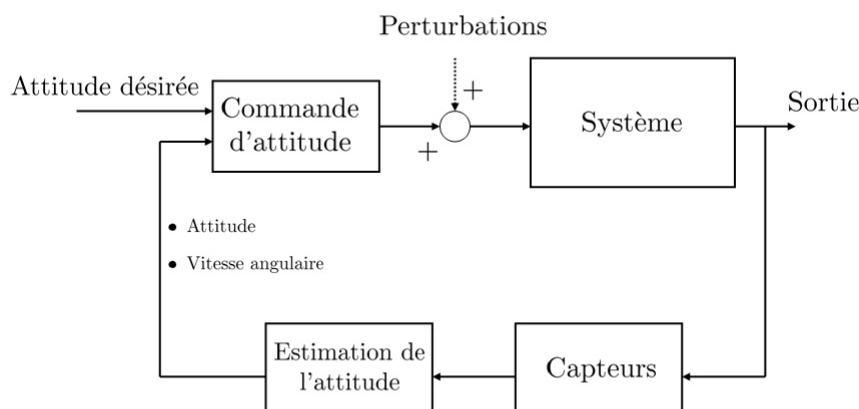


FIG. 1 – Diagramme bloc de la commande et de l'estimation d'attitude

Bien que les problèmes de l'estimation et de la commande de l'attitude soient intrinsèquement liés, ils peuvent être abordés de façon indépendante. C'est sur ces deux principaux axes que se situent les apports du travail présenté dans ce mémoire où l'application "drone à quatre rotors" a été le support pour analyser ces apports.

Le premier chapitre s'articule autour de deux grandes parties. La première partie concerne l'estimation de l'attitude (orientation). Nous commençons par présenter et discuter différentes paramétrisations du groupe orthogonal  $SO(3)$ . Ainsi, nous remarquons l'avantage d'utiliser le quaternion unitaire pour représenter l'attitude. Ensuite, nous introduisons le

problème général de l'estimation de l'attitude. Puis différentes applications de l'estimation d'attitude sont présentées afin de montrer l'intérêt et l'importance d'un tel sujet.

Les méthodes d'estimation d'attitude développées dans notre travail sont basées sur un modèle général des mesures et en conséquence elles sont génériques. Cependant, afin d'estimer l'attitude de l'hélicoptère à quatre rotors, nous nous intéressons aux mesures fournies par trois accéléromètres, trois magnétomètres et trois gyromètres. La technologie, les caractéristiques et les modèles mathématiques de ces capteurs sont présentés.

Nous passons ensuite en revue les différentes approches proposées dans la littérature pour l'estimation de l'attitude, notamment celles qui concernent le Filtre de Kalman Etendu (FKE) et les observateurs non linéaires.

Ensuite, toujours dans le cadre de l'étude de l'art, nous présentons le problème général de la stabilisation en attitude d'un corps rigide et différentes approches proposées dans la littérature. Nous mettons en évidence la nécessité d'une commande d'attitude qui soit bornée afin de maximiser le rendement des actionneurs sans mettre en péril la stabilité du système. Nous présentons les approches "commande bornée" proposées dans la littérature pour la stabilisation en attitude d'un corps rigide. La conclusion de ces approches est que les lois de commande proposées sont non continues ou très coûteuses numériquement, ce qui rend difficile, voire impossible, leur implantation en temps réel.

Enfin, le chapitre se clôt par une présentation d'un panorama général de la recherche dédiée à la plateforme "hélicoptère à quatre rotors". Nous présentons les groupes de recherche les plus connus dans ce domaine ainsi que leurs approches et leurs contributions. Remarquons que parmi les travaux aboutis, à notre connaissance, aucun ne concerne une commande d'attitude bornée, ce qui permet de valoriser notre contribution.

Le second chapitre est consacré à la description et à la modélisation de l'hélicoptère à quatre rotors. Nous commençons par décrire les différentes catégories de Véhicules Aériens Autonomes (UAV). Ensuite, nous concentrons notre attention sur le mini hélicoptère à quatre rotors considéré comme un Micro-UAV. Puis nous présentons le prototype d'hélicoptère à quatre rotors disponible au département d'automatique du laboratoire GIPSA-Lab. Une étude des forces et des couples aérodynamiques produits par chaque actionneur (moteur-hélice-réducteur) est menée. Certains des paramètres aérodynamiques apparaissant dans le modèle ont été identifiés expérimentalement et une loi de commande de vitesse pour chaque actionneur a été proposée.

La formulation du modèle général est donnée ; l'attitude est représentée par un quaternion unitaire et la modélisation de la dynamique s'appuie sur une approche de type Newton-Euler. Le modèle dynamique est intégré dans un simulateur numérique développé sous Matlab/Simulink, permettant par la suite, de tester les stratégies d'observation et de commande proposées.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide et en particulier l'estimation de l'attitude d'un corps rigide dans lequel un ensemble de capteurs GAM (gyromètres, accéléromètres et magnétomètres) est attaché.

Le premier apport sur cette thématique est issu d'une réflexion portant sur un modèle de mesure déterministe. Le modèle de mesures en question est de la forme  $\bar{H}q = 0$  où  $\bar{H}$  est une matrice qui dépend des vecteurs de mesures et  $q$  est le quaternion d'attitude à estimer. Ainsi, le problème de l'estimation d'attitude revient à déterminer le quaternion  $q$  qui appartient au noyau de la matrice  $\bar{H}$ . Nous proposons deux nouvelles méthodes pour l'estimation du quaternion d'attitude. La première méthode s'appuie sur une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice  $\bar{H}$ . La caractéristique principale de cette méthode est sa robustesse numérique. De plus, la contrainte de normalité du quaternion est naturellement satisfaite. La deuxième méthode est basée sur un algorithme séquentiel de la famille des algorithmes de projection. La caractéristique principale de cette seconde approche est son extrême simplicité. Cette caractéristique est primordiale dans l'objectif d'une implantation dans un système embarqué.

Les méthodes proposées sont développées pour  $n$  vecteurs de mesures. La seule condition est qu'au moins deux vecteurs de mesures soient non colinéaires. Comme cas particulier, nous utilisons les mesures fournies pour trois magnétomètres et trois accéléromètres montés en triaxe orthogonal dans un solide. Ainsi, l'attitude du solide par rapport au système de référence NED (North, East, Down) peut être estimée (dans le cas quasi-statique).

Ensuite, poursuivant notre étude sur l'estimation de l'attitude, les mesures fournies par trois gyromètres montés en triaxe orthogonal sont également prises en compte. Alors que les vecteurs d'observation (accéléromètre-magnétomètre) nous permettent d'estimer l'attitude à chaque instant, les mesures des gyromètres permettent la propagation de l'attitude dans le temps. Afin de fusionner les deux types d'information et de calculer une estimation de l'attitude la plus précise possible, nous proposons un observateur non linéaire, dont le principal avantage est la non linéarisation des équations, garantissant une convergence globale de l'erreur à zéro. A la différence des travaux portant sur l'observation non linéaire d'attitude et parus simultanément à notre recherche ([79], [65]), nous montrons qu'à partir d'une sortie virtuelle, la dynamique de l'erreur d'observation peut se décomposer en deux sous-systèmes reliés en "feedback". Ceci permet de montrer que l'observateur non linéaire proposé est passif. En se basant sur la propriété de passivité, nous montrons que la dynamique de l'erreur d'observation est stable au sens Entrée-Etat (ISS), par rapport à une entrée  $d$ , cette dernière pouvant être considérée comme une perturbation. Par rapport à la stabilité asymptotique traditionnelle, la contrainte liée à la propriété ISS est plus forte puisqu'il s'agit de garantir que l'erreur d'estimation de l'attitude et l'erreur d'estimation

du biais restent bornées en dépit d'une perturbation dans les mesures. En conséquence, l'analyse de stabilité au sens ISS peut être considérée comme une analyse de robustesse. L'observateur proposé a été validé avec des données simulées et il a été implanté en temps réel afin d'estimer l'attitude de l'hélicoptère à quatre rotors. Les résultats obtenus montrent la capacité et les performances de l'approche proposée pour estimer le quaternion d'attitude et les biais présents dans les mesures gyrométriques.

Le quatrième chapitre porte sur la conception d'une loi de commande bornée pour la stabilisation globale en attitude d'un corps rigide. Le schéma proposé est inspiré de l'approche donnée par Teel [101] pour la stabilisation d'un système linéaire utilisant une commande bornée basée sur des fonctions de saturation imbriquées. L'attitude est représentée par un quaternion unitaire. Cette modélisation est clairement distincte des approches qui utilisent une représentation à trois paramètres pour lesquelles une singularité géométrique inhérente à la représentation d'attitude choisie apparaît.

En plus des contraintes sur l'amplitude de la commande, la loi de commande permet de respecter des contraintes liées à la vitesse angulaire. Cette propriété est très importante, puisqu'en pratique, la vitesse angulaire est mesurée par des gyromètres qui ont une gamme de mesure donnée (saturation des capteurs).

En outre, la loi de commande proposée est indépendante du modèle du système : elle est donc robuste aux erreurs dans la connaissance des paramètres inertiels.

La principale caractéristique de l'approche proposée est son "extrême simplicité". Par conséquent, cette loi de commande peut être facilement implantée dans des systèmes embarqués où les capacités de calcul sont réduites.

Le modèle dynamique de l'hélicoptère à quatre rotors peut être décomposé en trois parties : translation, rotation et dynamique des actionneurs. En fait, la dynamique de rotation peut s'assimiler à celle d'un corps rigide. Ainsi, nous montrons que la commande bornée proposée peut stabiliser en attitude et de façon globale l'hélicoptère à quatre rotors. Grâce à sa simplicité et à des propriétés de régularité et de robustesse, la loi de commande est implantée en temps réel : l'hélicoptère à quatre rotors est stabilisé en attitude, sans intervention d'un pilote expérimenté.

Les chapitres 3 et 4 constituant nos contributions à l'estimation et la commande d'attitude ont été rédigés de telle sorte qu'ils puissent être lus de manière indépendante. Il y est seulement fait référence à des définitions données dans le chapitre 1 et au modèle de l'hélicoptère à quatre rotors donné dans le chapitre 2.

Un chapitre de conclusion résume nos principaux apports et ouvre quelques perspectives, que ce soit pour l'estimation ou la commande d'attitude.



# Chapitre 1

## Préliminaires et état de l'art

Nous présentons dans ce chapitre une étude de l'état de l'art du sujet qui est abordé dans cette thèse. Cette étude est présentée en deux parties. Tout d'abord, celle qui concerne l'estimation de l'attitude (orientation) dans laquelle nous introduisons le problème général de l'estimation de l'attitude, ainsi que les différentes représentations de l'attitude. Une attention particulière est portée au quaternion de rotation, qui est largement utilisé dans la suite de ce mémoire. Nous présentons également des applications de l'estimation de l'attitude et les capteurs inertiels et magnétiques généralement utilisés dans la robotique aérienne et l'aéronautique. Puis nous présentons les différentes approches proposées dans la littérature pour l'estimation de l'attitude.

Ensuite nous allons présenter le problème général de la commande d'attitude d'un corps rigide où nous mettons en évidence l'importance d'une commande bornée. Les différentes approches utilisées jusqu'à ce jour sont analysées et présentées.

Poursuivant cette étude, nous analysons le modèle dynamique des véhicules à voilures tournantes capables de décoller et d'atterrir à la verticale, connus sous l'appellation de véhicules VTOL. Nous remarquons que la dynamique de rotation des véhicules VTOL peut être assimilée à celle d'un corps rigide. Ainsi, nous énonçons que la commande en attitude des véhicules VTOL entre dans le cadre plus général de la commande d'attitude d'un corps rigide. Ensuite, nous présentons le concept de l'hélicoptère à quatre rotors et nous décrivons de manière succincte les travaux de différents groupes de recherche internationaux qui interviennent dans la modélisation et la commande de cet hélicoptère à quatre rotors.

## 1.1 L'estimation de l'attitude

### 1.1.1 Représentation de l'attitude

Lorsque nous analysons le mouvement d'un corps rigide dans l'espace, nous définissons deux systèmes de coordonnées comme ceux montrés dans la figure 1.1 :  $N(x_n, y_n, z_n)$  est un ensemble de trois vecteurs orthogonaux représentant le système de coordonnées inertiel et  $B(x_b, y_b, z_b)$  est un ensemble de trois vecteurs orthonormés représentant le système de coordonnées fixé au corps. En général, l'origine de  $B$  est choisie de telle sorte qu'elle coïncide avec le centre de gravité (CG) du corps. Pour les applications de commande et de guidage de véhicules (spatiaux, aériens, marins, terrestres, etc.), la direction de l'ensemble des axes  $(x_b, y_b, z_b)$  coïncide avec les principaux axes d'inertie du véhicule.

Dans le cas des applications qui nous concernent, le système de coordonnées inertielles le plus utilisé et le plus logique est le système de coordonnées NED (North, East, Down) défini à partir d'un plan tangent à la surface de la terre. Dans ce cas, les vecteurs unitaires  $(x_n, y_n, z_n)$  coïncident respectivement avec les directions Nord, Est et la pesanteur.

L'attitude d'un corps dans l'espace peut être donnée par différentes représentations, chacune ayant ses avantages et inconvénients. Le choix dépend directement de l'application envisagée. Un excellent aperçu des représentations de l'attitude est donné dans [91].

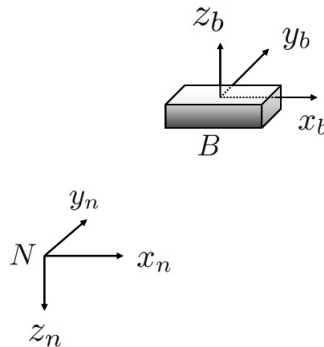


FIG. 1.1 – Repère inertiel et mobile d'un corps rigide

**Définition 1.1** (Rotation simple [35]). *Le mouvement d'un système de coordonnées  $B$  par rapport à un système de coordonnées  $N$  est appelé une simple rotation de  $B$  en  $N$ , s'il existe une droite  $L$ , appelée axe de rotation, dont l'orientation par rapport à  $B$  et  $N$  reste inchangée entre le début et la fin du mouvement.*

**Théorème 1.1** (Théorème d'Euler pour la rotation [35]). *Chaque changement dans l'orientation relative de deux corps rigides ou de deux systèmes de coordonnées  $B$  et  $N$  peut être produit par une simple rotation de  $B$  en  $N$ .*



# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

Soient  $\vec{b}$  et  $\vec{r}$  les coordonnées d'un vecteur  $\vec{x}$  exprimé dans  $B$  et  $N$  respectivement. Le vecteur  $\vec{b}$  peut être écrit en termes du vecteur  $\vec{r}$ . Soit  $\vec{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$  un vecteur unitaire colinéaire à l'axe de rotation  $L$  autour duquel  $B$  est tourné d'un angle  $\beta$ . En conséquence,  $\vec{b}$  est obtenu par :

$$\vec{b} = \cos \beta \vec{r} + (1 - \cos \beta) \vec{e} \vec{e}^T \vec{r} - \sin \beta \vec{e} \times \vec{r} \quad (1.1)$$

En effet, les coordonnées de  $\vec{b}$  et  $\vec{r}$  sont liées au moyen de la transformation linéaire suivante :

$$\vec{b} = C \vec{r} \quad (1.2)$$

La matrice  $C$  peut être interprétée comme un opérateur qui prend un vecteur fixe  $\vec{r}$  exprimé dans  $N$  et l'exprime dans  $B$ . De l'expression (1.1), il vient :

$$C = \cos \beta I_3 + (1 - \cos \beta) \vec{e} \vec{e}^T - \sin \beta [\vec{e}^\times] \quad (1.3)$$

où  $I_3$  représente la matrice identité de dimension trois et  $[\xi^\times]$  représente un tenseur anti-symétrique associé au vecteur  $\xi$ , dénoté par :

$$[\xi^\times] = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

La matrice  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  identifie complètement l'orientation du repère mobile  $B$  par rapport au repère inertiel  $N$  et elle permet de faire la transformation de coordonnées d'un vecteur d'un système de coordonnées à un autre. Cette matrice est appelée matrice de cosinus directeurs (**DCM**), matrice de rotation, matrice de passage ou encore matrice d'attitude.

### La matrice de rotation

La matrice de rotation  $C$  n'est pas quelconque, elle appartient au sous-espace des matrices orthogonales de dimension trois, appelé groupe orthogonal spécial, dénoté par  $S0(3)$  et défini par :

$$S0(3) = \{C \mid C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, C^T C = I_3, \det(C) = 1\} \quad (1.5)$$

Dans une matrice de rotation  $C$ , chaque élément  $c_{ij}$  est un cosinus directeur, tel que :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Soient :

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

En conséquence,

$$C = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) \quad (1.8)$$

où

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (1.9)$$

### La vitesse de rotation

Dans le cas où le système de coordonnées  $B$  tourne par rapport au repère  $N$  avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ , la matrice  $C$  devient variable dans le temps et elle est dénotée  $C(t)$ . La relation entre l'attitude du corps et la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  s'écrit :

$$\dot{C}(t) = [\vec{\omega} \times]C(t) \quad (1.10)$$

Notons que  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire du corps par rapport au système  $N$  exprimée dans  $B$ . L'équation précédente est connue comme l'équation cinématique, aussi nommée équation "Strapdown". Elle est utilisée dans les systèmes actuels de navigation.

### Les angles d'Euler (AE) et les angles de Cardan (AC)

La manière la plus simple de décrire une rotation dans l'espace à trois dimensions est d'utiliser les angles d'Euler ( $\psi, \theta, \varphi$ ). Cependant, il faut faire attention aux confusions car dans certains cas, les angles d'Euler sont confondus avec les angles Cardan.

En utilisant les angles d'Euler, le passage d'un système de coordonnées  $N(x_n, y_n, z_n)$  à un système de coordonnées  $B(x_b, y_b, z_b)$  s'effectue en 3 étapes (voir figure 4.8) :

1.  $N(x_n, y_n, z_n) \longrightarrow (x_1, y_1, z_1)$  (rotation de  $\psi$  autour de  $z_n$  avec  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ).
2.  $(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow (x_2, y_2, z_2)$  (rotation d'angle  $\theta$  autour de  $x_1$  avec  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ).
3.  $(x_2, y_2, z_2) \longrightarrow B(x_b, y_b, z_b)$  (rotation de  $\phi$  autour de  $z_2$  avec  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ).

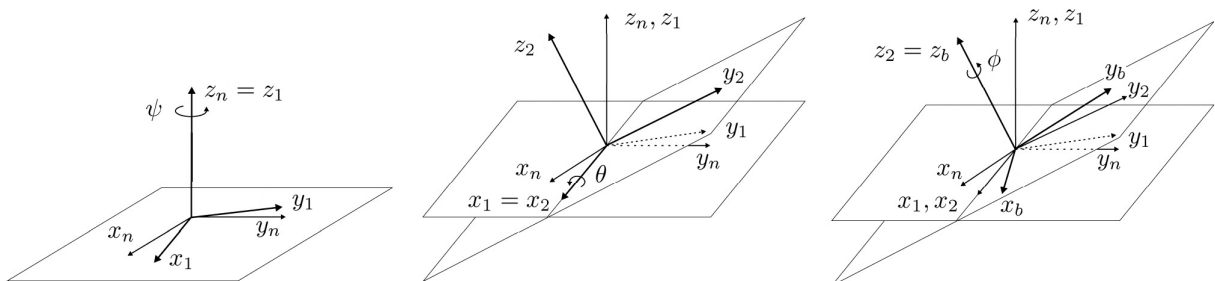


FIG. 1.2 – Les angles d'Euler

Les angles de Cardan décrivent quant à eux la séquence de rotations la plus utilisée dans l'aéronautique et la robotique. En utilisant les angles de Cardan, le passage d'un système de

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

coordonnées  $N(x_n, y_n, z_n)$  à un système de coordonnées  $B(x_b, y_b, z_b)$  s'effectue toujours en 3 étapes (voir figure 1.3) :

1. Rotation de  $\psi$  autour de  $z_b$  (angle de lacet avec  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ )
2. Rotation de  $\theta$  autour de  $y_b$  (angle de tangage avec  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ )
3. Rotation de  $\phi$  autour de  $x_b$  (angle de roulis avec  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ).

De la même façon, si nous allons du système de coordonnées  $B$  vers le système de coordonnées  $N$ , la séquence  $(\phi, \theta, \psi)$  doit être respectée. Les matrices de rotation qui représentent chaque

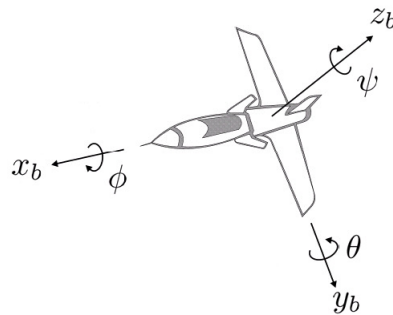


FIG. 1.3 – Les angles de Cardan

rotation sont données par :

$$C_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$C_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$C_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

En conséquence, la matrice de rotation  $C$  qui décrit le passage du système de coordonnées  $N$  au système de coordonnées  $B$  devient :

$$C = C_{z,\psi} C_{y,\theta} C_{x,\phi} = \begin{pmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\theta + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

où  $c \cdot = \cos(\cdot)$  et  $s \cdot = \sin(\cdot)$ .

La popularité des angles de Cardan est due au fait que cette représentation est la

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

plus simple et intuitive pour décrire une rotation dans l'espace. Néanmoins, elle a le désavantage de présenter des singularités géométriques lorsque  $\theta = \pm \frac{\theta}{2}$ . De plus, cette singularité géométrique introduit une singularité dans l'équation cinématique associée à cette représentation (voir l'équation (1.15)).

La singularité peut être éliminée si l'orientation du corps dans l'espace peut être limitée. Par conséquent, cette représentation n'est pas adéquate lorsque le corps évolue dans tout l'espace (toutes les orientations sont possibles).

Soit  $\vec{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  la vitesse angulaire du corps dans le système de coordonnées  $B$ , par rapport au système de coordonnées  $N$ . Alors, l'équation cinématique s'écrit [35] :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

### Quaternions

Une autre représentation de l'attitude est le quaternion unitaire aussi appelé paramètres d'Euler. Le quaternion est une solution alternative au théorème d'Euler, qui énonce qu'une rotation dans l'espace peut être réalisée par une simple rotation  $\beta$  autour d'un axe de rotation  $\vec{e}$ .

Le quaternion unitaire est composé d'un vecteur unitaire  $\vec{e}$ , nommé axe d'Euler et d'un angle de rotation  $\beta$  autour de cet axe. Il est défini par :

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \vec{e} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \quad (1.16)$$

où

$$\mathbb{H} = \{q \mid q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1, q = [q_0 \ \vec{q}^T]^T, q_0 \in \mathbb{R}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3\} \quad (1.17)$$

$\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  et  $q_0$  sont la partie vectorielle et la partie scalaire du quaternion. Le quaternion identité et le quaternion conjugué sont définis par :

$$q_{id} = [1 \ 0^T]^T \quad \bar{q} = [q_0 \ -\vec{q}^T]^T \quad (1.18)$$

Comme le quaternion est unitaire,  $q^{-1} = \bar{q}$ .

La multiplication de deux quaternions quelconques  $q_1 = [q_{1_0} \ \vec{q}_1^T]^T$  et  $q_2 = [q_{2_0} \ \vec{q}_2^T]^T$  est définie par :

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{pmatrix} q_{1_0} & -\vec{q}_1^T \\ \vec{q}_1 & I_3 q_{1_0} + [\vec{q}_1^\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{2_0} \\ \vec{q}_2 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

À l'aide de l'algèbre des quaternions, des rotations finies dans l'espace peuvent être traitées d'une façon simple et élégante. Soit  $b_q$  et  $r_q$  les quaternions associés aux vecteurs  $\vec{b}$

**CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART**  
1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

et  $\vec{r}$ , définis par :

$$b_q = [0 \ \vec{b}^T]^T \quad r_q = [0 \ \vec{r}^T]^T \quad (1.20)$$

Ces deux quaternions sont liés par la relation :

$$b_q = q \otimes r_q \otimes q^{-1} = q \otimes r_q \otimes \bar{q} \quad (1.21)$$

La matrice de rotation  $C$  peut être exprimée en termes de quaternion par :

$$C = C(q) = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})I_3 + 2(\vec{q} \vec{q}^T - q_0[\vec{q}^\times]) \quad (1.22)$$

d'où

$$C(q) = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

La relation entre les deux vecteurs  $\vec{b}$  et  $\vec{r}$  reste :

$$\vec{b} = C(q)\vec{r} \quad (1.24)$$

Avec la représentation quaternion, nous disposons de deux moyens pour exprimer la rotation : soit à partir de deux multiplications de quaternions en utilisant l'équation (1.21), soit à partir d'une multiplication d'une matrice et d'un vecteur en utilisant l'équation (1.24).

**Remarque 1.1.** De l'équation (1.22), il est clair que nous obtenons la même matrice  $C(q)$  pour le quaternion  $q$  et pour le quaternion  $-q$ , i.e.  $C(q) = C(-q)$ . En effet, les quaternions  $q$  et  $-q$  représentent la même attitude physique. Cependant pour  $q$ , la rotation est effectuée avec un angle  $\beta$  autour de  $\vec{e}$ , tandis que pour  $-q$  elle est effectuée avec un angle  $2\pi - \beta$ , autour du vecteur  $\vec{e}$ .

**Remarque 1.2.** Malgré la non bijection du quaternion avec le groupe  $SO(3)$ , la représentation de l'attitude en utilisant le quaternion est parfaitement adaptée car avec quatre paramètres et une contrainte, il est possible de représenter l'attitude d'un corps de façon globale et sans singularités.

Soit  $\vec{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  la vitesse angulaire du corps rigide dans le système de coordonnées  $B$  par rapport à  $N$ , exprimée dans  $B$ . Alors, l'équation cinématique (1.10) en termes de quaternion est :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\vec{q}^T \\ I_3 q_0 + [\vec{q}^\times] \end{pmatrix} \vec{\omega} \quad (1.25)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega}$$

### Les paramètres de Rodrigues

Les paramètres de Rodrigues peuvent être utilisés afin d'éliminer la contrainte de normalité associée à la représentation de l'attitude en utilisant des quaternions. De cette façon, le nombre d'éléments nécessaires pour décrire la cinématique est réduit de quatre à trois. Cette paramétrisation est donnée par la définition suivante :

$$\vec{\varrho} = \frac{1}{q_0} \vec{q} = \vec{e} \tan \frac{\beta}{2} \quad (1.26)$$

Le vecteur  $\vec{\varrho}$  est aussi connu dans la littérature comme le vecteur de Gibbs.

La matrice de rotation  $C$  est alors exprimée en termes de paramètres de Rodrigues par :

$$C(\vec{\varrho}) = I_3 + \frac{2}{1 + \vec{\varrho}^T \vec{\varrho}} ([\vec{\varrho}^\times][\vec{\varrho}^\times] - I_3) \quad (1.27)$$

En conséquence, l'équation cinématique peut prendre la forme suivante :

$$\dot{\varrho}_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2 \varrho_3 + \omega_3 \varrho_2 + \varrho_1 \sum_{i=1}^3 \varrho_i \omega_i) \quad (1.28)$$

$$\dot{\varrho}_2 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3 \varrho_1 + \omega_1 \varrho_3 + \varrho_2 \sum_{i=1}^3 \varrho_i \omega_i) \quad (1.29)$$

$$\dot{\varrho}_3 = \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1 \varrho_2 + \omega_2 \varrho_1 + \varrho_3 \sum_{i=1}^3 \varrho_i \omega_i) \quad (1.30)$$

A partir de l'équation (1.26) il est évident que les paramètres de Rodrigues peuvent être utilisés uniquement pour effectuer une rotation autour de l'axe  $\vec{e}$  lorsque  $\beta \neq \pi$ .

Malgré cette limitation, les paramètres de Rodrigues ont été utilisés dans certaines applications, en particulier dans le cadre de la commande d'attitude de satellites [104].

### Les Paramètres de Rodrigues modifiés

Dans la section précédente, nous avons observé que les paramètres de Rodrigues permettent d'éliminer la contrainte de normalité associée au quaternion. Cependant, lorsque  $q_0 = 0$ , les paramètres du vecteur de Gibbs partent à l'infini, i.e. il y a une singularité dans la représentation pour  $\beta = \pm\pi$ .

Une autre possibilité pour éliminer la contrainte de normalité associée au quaternion est d'utiliser le paramètre suivant, appelé paramètre de Rodrigues modifié :

$$\vec{p} = \frac{1}{1 + q_0} \vec{q} = \vec{e} \tan \frac{\beta}{4} \quad (1.31)$$

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

La matrice de rotation  $C$  peut être exprimée, en termes de paramètres de Rodrigues modifiés, par :

$$C(\vec{p}) = I_3 + \frac{4(1 - \vec{p}^T \vec{p})}{(1 + \vec{p}^T \vec{p})^2} [\vec{p}^\times] + \frac{8}{(1 + \vec{p}^T \vec{p})^2} [\vec{p}^\times]^2 \quad (1.32)$$

En conséquence, l'équation cinématique prend la forme suivante :

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_1 \tilde{p}}{2} - \omega_2 p_3 + \omega_3 p_2 + p_1 \sum_{i=1}^3 p_i \omega_i \right) \quad (1.33)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2 \tilde{p}}{2} - \omega_3 p_1 + \omega_1 p_3 + p_2 \sum_{i=1}^3 p_i \omega_i \right) \quad (1.34)$$

$$\dot{p}_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_3 \tilde{p}}{2} - \omega_1 p_2 + \omega_2 p_1 + p_3 \sum_{i=1}^3 p_i \omega_i \right) \quad (1.35)$$

avec  $\tilde{p} = 1 - p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ . Les paramètres dans l'équation (1.31) sont aussi connus comme les coordonnées stéréographiques du quaternion [104]. En effet, cette équation fait un lien entre la sphère unitaire dans un espace de dimension quatre et l'espace euclidien de dimension trois, où le point  $(-1,0,0,0)$  est utilisé comme point de base de la projection.

Cependant, l'équation (1.31) montre que les rotations autour de l'axe  $\vec{e}$  ne peuvent être toutes réalisées, puisque pour  $\beta = 2\pi$ , il y a présence d'une singularité.

### Erreur d'attitude

Considérons deux attitudes d'un corps rigide, paramétrées par les matrices de rotation  $C_1$  et  $C_2$  respectivement. Alors, l'attitude relative entre ces deux attitudes est calculée par :

$$C_r = C_1^{-1} C_2 \quad (1.36)$$

En fait,  $C_r$  représente un opérateur d'attitude qui fait tourner  $C_2$  en  $C_1$ . A partir de cette observation, en général, l'attitude relative est utilisée dans le cadre de l'estimation et de la commande d'attitude comme une mesure *d'erreur d'attitude*. Dans ce contexte considérons  $C_d = C_1$  l'attitude désirée du corps rigide et  $C = C_2$  l'attitude réelle du corps. En conséquence, l'erreur d'attitude est calculée par :

$$C_e = C_d^{-1} C \quad (1.37)$$

Si l'erreur d'attitude vaut zéro, alors,  $C_e = I_3$ .

Lorsque le quaternion unitaire est utilisé pour représenter l'attitude du corps, l'attitude relative entre  $q_1$  et  $q_2$  s'exprime par :

$$q_r = q_1^{-1} \otimes q_2 = \begin{pmatrix} q_{10} & \vec{q}_1^T \\ -\vec{q}_1 & I_3 q_{10} - [\vec{q}_1^\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{20} \\ \vec{q}_2 \end{pmatrix} = \bar{q}_1 \otimes q_2 \quad (1.38)$$

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

La métrique géodésique est donnée par l'expression suivante :

$$\beta_r = 2 |\arccos(q_{r_0})| \quad (1.39)$$

Cette métrique représente le plus petit angle de rotation entre l'attitude  $q_1$  et l'attitude  $q_2$ . La distance euclidienne entre les deux quaternions unitaires donne une approximation de la métrique géodésique :

$$\frac{2}{\pi} \beta_r \leq 2 \|q_1 - q_2\|_2 \leq \beta_r \quad (1.40)$$

De plus, dans le cas où  $\beta_r$  est petit, nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$\beta_r \approx 2 \|q_1 - q_2\|_2 \quad (1.41)$$

Dans le cadre de la commande d'attitude, si nous notons  $q_d = q_1$  l'attitude désirée du corps et  $q = q_2$  l'attitude réelle du corps, l'erreur d'attitude est représentée par :

$$q_e = q_d^{-1} \otimes q = \bar{q}_d \otimes q \quad (1.42)$$

Dans le cas où l'erreur d'attitude vaut zéro, le quaternion d'erreur a deux valeurs possibles :

$$q_e = [\pm 1 \ 0]^T \quad (1.43)$$

Ceci est dû à la non bijection du quaternion avec le groupe  $SO(3)$ .

### Commentaires à propos des représentations d'attitude

Dans les paragraphes précédents, nous avons abordé les différentes représentations de l'attitude. Nous pouvons remarquer que toutes les représentations à trois paramètres présentent des non linéarités associées à leurs équations cinématiques et dans tous les cas, il existe des singularités géométriques. Les deux représentations qui ne présentent pas de singularité sont le *quaternion unitaire* et la *matrice de rotation*. Néanmoins, ces représentations sont redondantes. La matrice de rotation a six paramètres redondants. Le quaternion a en outre une contrainte d'égalité. Notons que les équations cinématiques associées à la matrice de rotation et au quaternion, sont linéaires et universellement applicables.

Dans ce travail, la représentation de l'attitude avec le quaternion unitaire a été retenue. Tous les algorithmes développés pour la détermination de l'attitude ainsi que pour la commande d'attitude sont basés sur ce formalisme. Le choix de cette représentation est justifié par les points mentionnés précédemment. De plus, comme les applications envisagées sont en temps réel et embarquées, la représentation de l'attitude à partir de quaternions possède un grand avantage par rapport aux autres sur le plan de la stabilité numérique et du coût de calcul. Les angles de Cardan (lacet, roulis, tangage) sont les plus intuitifs et aussi les plus utilisés



dans la littérature, bien qu'ils soient souvent confondus avec les angles d'Euler (voir paragraphe 1.1.1). En conséquence, dans certaines situations de ce travail, nous ferons référence à des positions angulaires notées  $(\phi, \theta, \psi)$ =(lacet, roulis, tangage) et nous présenterons les résultats sous cette forme. De cette façon, le lecteur qui n'est pas familiarisé avec le quaternion pourra interpréter sans problème les résultats obtenus.

### 1.1.2 Quelques exemples d'applications de l'estimation d'attitude

Le problème de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide a conduit à de nombreux travaux depuis les années 1950 de la part de la communauté scientifique, dans les domaines aussi variés que l'aéronautique, l'aérospatiale, la commande et la robotique. La raison de cet intérêt est le fait que plusieurs systèmes tels que les satellites, les hélicoptères, les missiles, les robots manipulateurs, les véhicules marins et sous-marins, etc., requièrent une information précise de l'attitude afin de réaliser ce que nous appellerons par la suite "la commande d'attitude". La commande d'attitude a pour objectif de maintenir l'attitude (orientation) désirée de l'engin, toujours influencée par des perturbations externes, afin que l'engin puisse réussir les objectifs de sa mission. Cependant, la commande d'attitude a comme pré-requis naturel la connaissance précise de l'orientation du véhicule par rapport à un système de coordonnées inertiel donné. Le problème de détermination de l'attitude peut être défini comme suit.

**Définition 1.2** (Le problème de détermination de l'attitude). *Considérons un corps rigide dans l'espace tel que ses axes principaux coïncident avec les axes d'un système de coordonnées  $B$ . Le problème fondamental de la détermination d'attitude consiste à spécifier l'orientation (attitude) des axes de  $B$  par rapport à un système de coordonnées inertiel  $N$ .*

Dans les décennies passées, le gyroscope a été l'instrument le plus utilisé pour mesurer le mouvement angulaire et en conséquence l'attitude. Un gyroscope, du grec "qui regarde la rotation", est un appareil qui utilise le principe de la conservation du moment angulaire et son invention est attribuée au physicien français Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868). Le principe du dispositif est une roue tournant sur un axe qui, une fois lancée tend à résister aux changements de son orientation. La figure 1.4 montre la forme générale de ce système. Les gyroscopes peuvent être utilisés pour construire des compas gyroscopiques qui complètent ou remplacent les boussoles magnétiques dans les avions, navires et véhicules en général. Ils sont aussi utilisés pour mesurer l'attitude de différents systèmes tels que par exemple le télescope spatial Hubble. Cependant, les systèmes à gyroscopes sont lourds, encombrants extrêmement coûteux et ils consomment beaucoup d'énergie. En conséquence, suivant l'application, une autre technique doit être utilisée afin d'obtenir l'information la plus précise possible sur l'attitude, avec un plus faible coût, encombrement et poids.

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

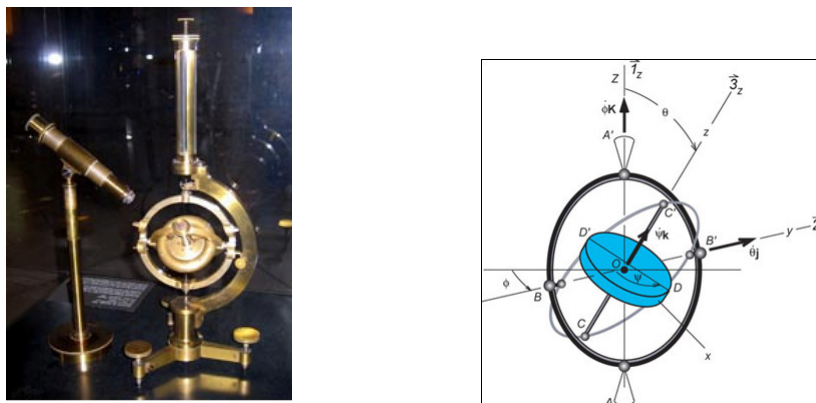


FIG. 1.4 – Le gyroscope de Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868)

Depuis quelques années, de nouveaux composants intégrés sur silicium ont été développés : les MEMS (Micro Electro Mechanical System) [7]. Fruits d'une technologie dérivée de la microélectronique, ils permettent de réaliser en grande quantité des capteurs performants et de dimensions micrométriques. Grâce aux fabrications en série, les coûts de ces systèmes sont faibles. Les informations fournies par ces capteurs peuvent être traitées afin de créer des systèmes inertiels d'attitude bas coût et peu encombrantes.

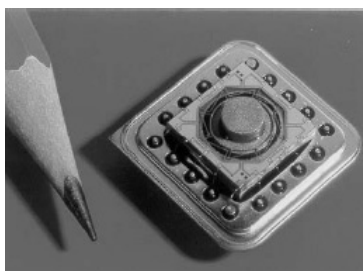


FIG. 1.5 – Gyroscope à technologie MEMS

Notons que le problème de la détermination (ou estimation) de l'attitude a été tout d'abord traité dans le domaine aérospatial. Cependant, grâce aux avancées technologiques, le problème de l'estimation de l'attitude a été abordé dans de nouveaux domaines tels que l'aéronautique, la robotique aérienne et terrestre, la capture de mouvement humain, la biomécanique, etc. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons donner un aperçu de quatre des principales applications de l'estimation de l'attitude, afin de montrer son importance et la nécessité de trouver des algorithmes fiables et robustes pour son estimation. Le commun dénominateur dans ces applications est l'utilisation de capteurs inertiels et magnétiques.

## Estimation de l'attitude dans l'aéronautique

En navigation aérienne, la mesure précise de l'attitude est une nécessité. En effet, cette information sert au pilote pour le maintien en vol de l'avion et à sa navigation. Les avions possèdent un tableau de bord avec de nombreux instruments servant au pilotage (vitesse, altitude, horizon artificiel), à la surveillance des paramètres moteur (compte-tour, jauge carburant, température) et à la navigation (compas, conservation du cap).

L'horizon artificiel est un instrument fondamental du tableau de bord indiquant au pilote l'attitude de son aéronef dans un espace à trois dimensions. Il est placé stratégiquement au centre du tableau de bord comme le montre la figure 1.6. L'horizon artificiel fait partie des instruments de vol primaires qui utilisent les gyroscopes. En effet, il s'agit d'un gyroscope à deux degrés de liberté. De cette façon, il permet de visualiser l'attitude de l'avion par rapport à ses axes de roulis et de tangage et plus précisément les angles entre le plan défini par  $x_b$  et  $y_b$  avec un plan horizontal : assiette et inclinaison (voir figure 1.7).



FIG. 1.6 – Le tableau de bord d'un avion de tourisme

Le conservateur de cap (appelé aussi directionnel) est également un instrument à gyroscope, permettant de donner une indication du cap magnétique. Il donne une information fiable par rapport au compas magnétique, en donnant une indication instantanée du cap même en virage.

Malheureusement et comme nous l'avons mentionné, tout ces instruments à gyroscope prennent de la place, sont lourds et très coûteux [16]. Depuis l'apparition des capteurs MEMS, il est possible de développer des systèmes d'attitude inertiels. Ces systèmes utilisent une technique nommée "Strapdown Inertial Navigation System" (Strapdown INS).

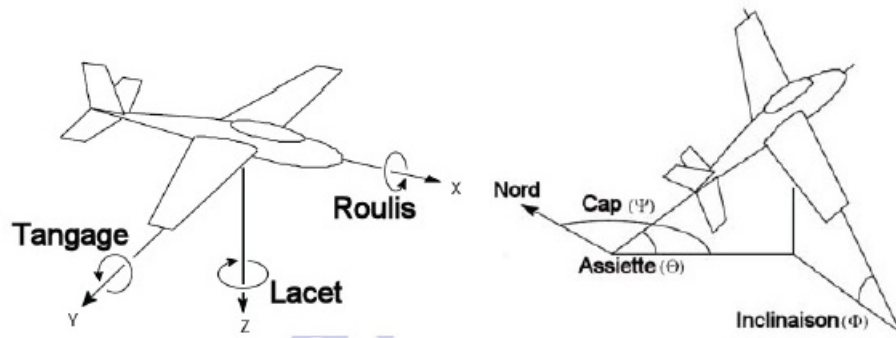


FIG. 1.7 – L'attitude d'un avion

Cela implique que le module de capteurs soit “attaché” au fuselage et qu’il soit alors capable de détecter les accélérations et les rotations du fuselage pour déterminer l’attitude de l’appareil. Ces systèmes permettent d’implanter les mêmes fonctions que les systèmes d’affichages mécaniques conventionnels. Les principaux avantages sont que les composants électroniques sont peu encombrants et qu’ils ne s’usent pas, ce qui élimine les problèmes de fiabilité associés aux systèmes mécaniques conventionnels. Ces modules contiennent trois gyromètres, trois accéléromètres et trois magnétomètres montés en tri-axe. Ils sont connus sous le nom de “centrale d’attitude et de cap” AHRS<sup>1</sup>. En réalité, ces systèmes sont des “estimateurs d’attitude” parce qu’il est nécessaire de fusionner toutes les données issues des trois modalités de mesure afin de connaître l’attitude. L’intégration des signaux des gyromètres (prenant en compte le taux de virage) est utilisée pour obtenir une attitude prédite. Il faut remarquer que les gyromètres ne mesurent pas l’attitude, mais seulement les variations d’attitude. Afin de fournir un affichage de l’attitude utilisable, l’attitude est corrigée par un détecteur de sens de la gravité via les mesures de trois accéléromètres. En fait, les accéléromètres mesurent l’accélération de gravité<sup>2</sup> et de cette façon, ils permettent de corriger l’erreur des angles de roulis et de tangage. Cependant, les accéléromètres ne donnent pas d’information sur la rotation autour de l’axe vertical du véhicule. Afin de corriger une possible erreur dans l’angle de lacet obtenu par intégration de la sortie des gyromètres, les magnétomètres sont utilisés en mesurant la direction du champ magnétique terrestre. A partir de ces six mesures complémentaires (accéléromètres, magnétomètres), l’algorithme (l’estimateur) peut corriger l’attitude obtenue par intégration.

Il existe sur le marché des systèmes AHRS (voir par exemple les constructeurs [28], [19], [110]) qui sont obtenus avec un prix à 5 chiffres en euros. En général, la fusion de données dans un système AHRS “Strapdown” est basée sur un *filtre de Kalman étendu* [18]. Par conséquent, ils requièrent d’être associés à des processeurs rapides pour traiter les calculs

<sup>1</sup>Attitude Heading Reference System

<sup>2</sup>On néglige les accélérations linéaires et centrifuges

nécessaires à la détermination de l'attitude. Lorsque toutes les données sont traitées et l'attitude est estimée, les données sont converties dans un format affichable. Ces informations peuvent être alors affichées sur un écran couleur avec des symboles et des signes parfaitement lisibles, donnant lieu à un "tableau de bord vitré" (Glass cockpit) [49].

### **L'estimation d'attitude dans la Robotique aérienne**

Compte tenu des récentes avancées technologiques, l'intérêt pour les Véhicules Aériens Autonomes (Unmanned Aerial Vehicle, UAV), aussi appelés Drones (faux bourdon) a augmenté.



FIG. 1.8 – (a)The Predator from General Atomics, (b)The Sikorsky's Dragon Warrior, (c)Yamaha Rmax

Au fur et à mesure que les technologies (informatique, conception de capteurs et d'actionneurs) progressent, les drones se perfectionnent. Ces plateformes beaucoup plus autonomes constituent aujourd'hui des systèmes qui permettent la transmission de l'information en temps réel ou quasi-réel. Cependant, le perfectionnement de ces véhicules implique différents problèmes concernant principalement la conception d'une commande performante et par conséquent des informations fiables sur son état dans l'environnement. Lorsque les états ne sont pas directement mesurables, une reconstruction ou estimation s'avère nécessaire. En général, on s'intéresse aux grandeurs suivantes :

- position (coordonnées géographiques et altitude) ;
- vitesse linéaire (selon les trois axes orthogonaux) ;
- vitesse angulaire (vitesse de rotation autour des trois axes orthogonaux) ;
- position angulaire ou attitude (roulis, tangage lacet) ;

En fonction de la mission imposée au drone et de sa taille, différents types de capteurs peuvent être embarqués. Les capteurs les plus courants utilisés sont le GPS, une centrale de mesure inertielle (IMU) composée de gyromètres et d'accéléromètres et dans certaines applications une caméra vidéo. Le principe consiste à intégrer les mesures fournies par les accéléromètres et les gyromètres afin d'obtenir l'attitude et la position du drone. Cependant cette intégration est "en boucle ouverte". Elle diverge rapidement et les informations (attitude et position) deviennent fausses après quelques secondes d'intégration. Afin d'éviter cette divergence, l'information de la vitesse du drone et de la position obtenue par intégration est

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

recalée grâce aux mesures obtenues via le GPS ou le système de vision. Les méthodes pour la fusion des données inertielles et du GPS (IMU/GPS) ont été développées depuis une dizaine d'années. Ces méthodes utilisent principalement le filtre de Kalman pour atteindre leur objectif [18]. Cependant, récemment des approches basées sur l'analyse par intervalles ont été aussi développées montrant des résultats très satisfaisants [39].

Les systèmes (IMU/GPS) sont fortement utilisés pour le déplacement extérieur (signal GPS disponible). De plus, en raison de la grande capacité de calcul nécessaire pour traiter et fusionner l'ensemble des données, des processeurs de signaux assez performants doivent être utilisés. En conséquence, ces systèmes sont généralement implantés dans des véhicules de grande taille et de grande capacité de charge utile.

En revanche, pour des drones de petite taille et de faible masse, la charge utile est une contrainte forte. Ces drones volent généralement à une altitude inférieure à 150 m ou en l'intérieur avec des actions ponctuelles et de courte durée. En comparaison avec le déplacement extérieur qui nécessite des qualités aérodynamiques de vol et une certaine rapidité, le vol intérieur demande de la stabilité, de la précision, de l'immobilité et une détection fine des obstacles.

Dans le cas des micro-drones, en pratique la position dans l'espace du véhicule est asservie par un pilote via un système de télécommande, alors que l'attitude (roulis, tangage, lacet) (figure 1.9) est stabilisée automatiquement par l'intermédiaire d'une commande automatique embarquée. Cette dernière permet le pilotage de ces aéronefs par des utilisateurs ou pilotes non-experts. De plus, du fait que ce type de systèmes ont un faible moment d'inertie, un contrôle d'attitude performant s'avère nécessaire et par conséquent leur orientation (attitude) doit être déterminée ou estimée avec précision. Dans ce type de systèmes, l'estimation de l'attitude est basée sur la technique "attachée" (strapdown) et de la même manière que les systèmes AHRS, le principe d'estimation consiste à recalibrer l'information de l'attitude obtenue par l'intégration des données de gyromètres en effectuant une mesure de l'attitude à partir des données fournies par les accéléromètres et les magnétomètres.

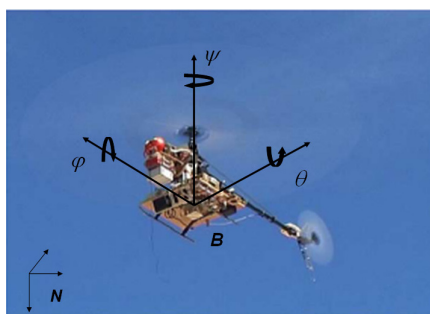


FIG. 1.9 – L'attitude d'un hélicoptère

## CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

### 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

Les méthodes classiques utilisées pour cette estimation de l'attitude sont basées sur le filtrage complémentaire et le filtre de Kalman. Cependant, à la différence des avions habités ou des drones de grande taille, les micro-drones embarquent des systèmes de mesure et de traitement avec un cahier des charges contraignant. Les systèmes embarqués utilisent généralement des microprocesseurs à basse consommation d'énergie ou des microcontrôleurs avec un espace mémoire limité, de l'ordre de quelques Ko maximum. Par conséquent, les méthodes d'estimation d'attitude qui impliquent des calculs coûteux ne peuvent pas être utilisées pour ce type de systèmes. A l'heure actuelle, différents constructeurs offrent des solutions à ce problème et les plus remarquables sont Xsens [115] et MicroStrain [74]. Cependant il existe encore des problèmes qui ne sont pas encore résolus (dérive dans le temps des estimées ou changement dramatique du signe du quaternion, cadence d'échantillonnage limitée) et des solutions doivent être proposées.

#### **Estimation de l'attitude dans la capture de mouvement humain**

La capture de mouvement, de façon générale, consiste à capter les mouvements d'un objet. Ainsi, les mouvements sont enregistrés et ils peuvent être restitués en temps réel ou différé. Les applications sont très variées et vont du domaine médical (chirurgie assistée par ordinateur) à celui de la réalité virtuelle (par exemple, des joysticks, des interfaces homme-machine, etc). Dans le cas de la capture de mouvement humain, ces systèmes mesurent la position et/ou l'orientation des membres d'un acteur réel selon une fréquence d'échantillonnage qui dépend du système de capture de mouvement utilisé. Les informations recueillies sont appliquées en temps réel ou en temps différé sur un personnage virtuel. Dans ce dernier cas, elles sont enregistrées et traitées par des logiciels spécifiques au système. Les systèmes de capture de mouvement se sont améliorés depuis leurs débuts en termes de précision et de résolution. De nos jours, leur diversité permet d'animer un personnage dans son intégralité : corps, visage et mains. Différents systèmes de capture de mouvement humain existent sur le marché. Ils diffèrent essentiellement par leur technologie. Il est possible de distinguer ainsi trois grands groupes : les systèmes optiques, mécaniques et magnétiques [87].

Les systèmes commerciaux de capture de mouvement tel que Vicon [77] ou Optotrak [102] sont souvent considérés comme des standards dans l'analyse du mouvement humain. Malgré la grande précision que ces systèmes offrent (erreurs  $\approx 1\text{mm}$ ), ils possèdent d'importantes limitations, en particulier, un coût élevé, la limitation de l'espace de mesure et les phénomènes d'écrantage. Cela a motivé le développement de systèmes portables et ergonomiques, basés sur des centrales de mesures inertielles [87].

La technique consiste à considérer le corps humain comme une structure articulée. Les structures articulées décrivent des objets possédant un mouvement global non rigide, mais dont chacune des parties constituantes se conforme isolément aux contraintes des mouvements



rigides. Elles constituent une chaîne de segments de longueur constante, reliés par des articulations possédant chacune un ou plusieurs degrés de liberté. Dans le cas du corps humain il s'agit d'une à trois rotations, physiologiquement contraintes en amplitude (et dont les axes ne sont pas toujours faciles à définir de façon précise). Ainsi, des modules contenant trois gyromètres, trois accéléromètres et trois magnétomètres montés en tri-axe, sont positionnés sur chaque articulation (ou à proximité). L'attitude pour chaque articulation est estimée. La combinaison de toutes ces informations conjointement à une connaissance a priori de l'anatomie du corps humain permet d'obtenir l'information sur la posture du corps (voir figure 1.10). Plusieurs travaux ont été récemment développés dans cette direction et on pourra consulter par exemple [87].



FIG. 1.10 – Exemple d'une structure articulée

### **Estimation de l'attitude dans le cerveau**

Pour un être vivant et en particulier pour un humain, le système vestibulaire est le système sensoriel principal de la perception du mouvement et de l'orientation par rapport à la verticale. Le rôle essentiel du système vestibulaire est de participer à l'équilibre en contrôlant et en coordonnant les mouvements réflexes de la tête, du cou, du tronc et des yeux. Les récepteurs sensoriels du système vestibulaire sont situés dans l'oreille interne. Les troubles du système vestibulaire peuvent conduire à des vertiges. Le système vestibulaire est constitué d'un organe sensoriel périphérique composé du labyrinthe postérieur (canaux semi-circulaires, utricule, et saccule), du nerf vestibulocochléaire et de ses noyaux encéphaliques (voir figure 1.11).

Les trois canaux semi-circulaires sont disposés selon les trois plans de l'espace, ils se présentent comme des tores (tubes creux circulaires) contenant un liquide, l'endolymphe. Lors d'un mouvement de rotation, la force de Coriolis entraîne un déplacement du liquide par rapport aux canaux qui est détecté par les cils des cellules cillées vestibulaires situés sur



# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

la paroi des canaux. La disposition orthogonale des trois canaux permet donc de détecter un mouvement quel que soit l'axe de la rotation. La perception des accélérations linéaires repose sur les autres cavités du système vestibulaire que sont l'utricule et le saccule, qui forment le système maculaire. La pesanteur terrestre (verticale et orientée vers le bas) est une accélération particulière qui est détectée par le système maculaire ce qui renseigne l'organisme sur son orientation dans l'espace.

L'information vestibulaire est transmise au cerveau via le nerf vestibulaire, puis le nerf vestibulocochléaire et un relais dans les noyaux vestibulaires.

Le système vestibulaire est un capteur inertiel 3D biologique qui permet de mesurer le mouvement angulaire ainsi que l'accélération linéaire de la tête. De cette façon, le système vestibulaire a la fonction de stabilisation du corps.

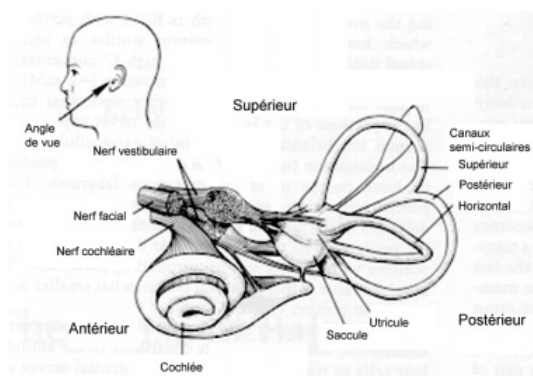


FIG. 1.11 – Système vestibulaire

Les avancées technologiques récentes et la miniaturisation des capteurs permettent le développement de prothèses afin d'aider ou de remplacer le système vestibulaire [109], [59]. Dans ce cas, trois gyromètres montés orthogonalement jouent le rôle des trois canaux semi-circulaires et des accéléromètres peuvent remplacer le système maculaire, formé par l'utricule et le saccule. Au moins deux catégories de prothèses peuvent être considérées et leur classification dépend de la façon de faire le "feedback". Une première approche consiste à envoyer l'information du mouvement de la tête directement au système nerveux au moyen d'une stimulation électrique à la filière vestibulaire neuronale [61]. Une autre approche consiste à transmettre l'information par stimulation sensorielle à travers d'autres systèmes sensoriels, tel que le système tactile, visuel ou auditif [108]. Ce type de systèmes s'inscrit dans le cadre plus général de la robotique d'assistance (Assistive Robotics) et de l'interaction de l'humain avec des robots (Human-Robot Interaction (HRI)). Malgré les bons résultats obtenus ces dernières années concernant les prothèses du système vestibulaire, il reste encore de nombreuses améliorations à apporter.

### 1.1.3 Capteurs généralement utilisés pour l'estimation d'attitude

Comme nous l'avons mentionné dans les paragraphes précédents, l'avancée technologique dans la construction et le développement de capteurs a permis d'aborder les problèmes d'estimation d'attitude dans différents domaines applicatifs. Les nouveaux composants intégrés sur silicium, les MEMS (Micro Electro Mecanical System), permettent de réaliser en grande quantité des capteurs performants à des dimensions micrométriques. Parmi la grande diversité de capteurs disponibles en technologie MEMS, nous pouvons citer les capteurs inertiels constitués par les accéléromètres et les gyromètres. Mais aussi nous pouvons trouver des capteurs qui permettent la mesure du champ magnétique terrestre, les magnétomètres. Le point fort de ce type de capteurs est leur taille, leur faible consommation énergétique et leur coût. Par conséquent, ils sont parfaitement adaptés pour les applications embarquées grand public.

L'ensemble de ces trois types de capteurs permet la conception de systèmes capables de fournir l'information nécessaire sur l'attitude d'un solide dans l'espace. Néanmoins, la fusion de toutes ces données est indispensable. Les méthodes de fusion des données issues de ces capteurs utilisent les modèles mathématiques correspondant à la sortie de chaque capteur. Dans les paragraphes suivants, nous allons décrire brièvement la technologie et les modèles de mesure des trois capteurs mentionnés précédemment, afin d'exploiter cette information dans la suite de ce travail.

#### Accéléromètre

Un accéléromètre est un capteur qui, fixé à un mobile, permet de mesurer l'accélération de ce dernier. Dans son principe physique, un accéléromètre peut être vu comme une masse d'épreuve attachée à un ressort qui est lui-même attaché à un repère fixe (voir figure 1.12). Le principe de tous les accéléromètres est basé sur la loi fondamentale de la dynamique  $F = ma$  où  $F$  est la force,  $m$  la masse d'épreuve et  $a$  l'accélération. Plus précisément, il consiste en l'égalité entre la force d'inertie de la masse sismique du capteur et une force de rappel appliquée à cette masse. En utilisant la deuxième loi de Newton, nous avons la contrainte  $F = ma = -kx$ . Donc une accélération  $a$  entraînera un déplacement  $|x| = \left| \frac{ma}{k} \right|$ . Or, si nous observons le déplacement  $x$  il est possible d'en déduire l'accélération par la relation  $a = -\frac{kx}{m}$ . De cette façon, connaître l'accélération consiste en réalité à connaître le déplacement de la masse attachée au ressort. Afin de mesurer l'accélération suivant différents axes, le système précédent doit être reproduit suivant les axes requis.

Les principaux paramètres d'un accéléromètre sont : l'étendue de mesure généralement donnée en  $g$  (accélération de la gravité standard au niveau de la mer pour une latitude de  $45^\circ$ ,  $g=9,80665 \text{ m/s}^2$ ), la bande passante (en Hz), la précision, la sensibilité (mV/g), la gamme de température d'utilisation (en  $^\circ\text{C}$ ), la masse du capteur, la sensibilité transver-

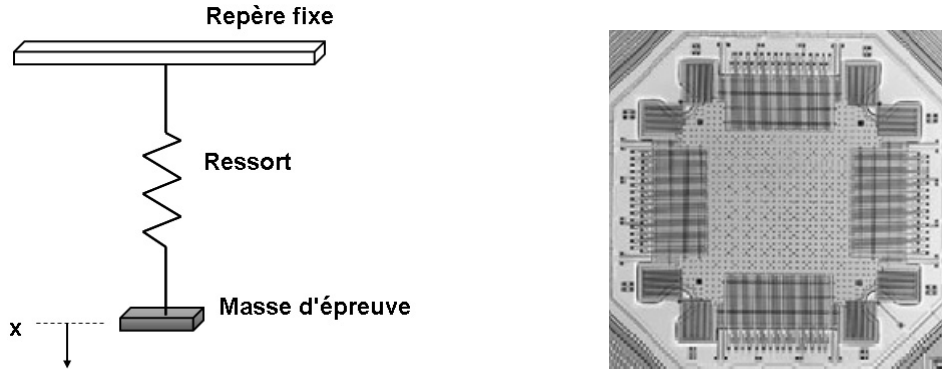


FIG. 1.12 – (a) Principe de l'accéléromètre, (b) Accéléromètre bi-axe ADXL202 (Analog Devices, Inc)

sale, le nombre d'axes (1 à 3 axes), la construction mécanique, l'électronique intégrée et bien sûr le prix. Le tableau 1.1 présente un exemple de caractéristiques souhaitées pour un accéléromètre dédié aux applications de navigation inertielle. La principale source de bruit mécanique présente dans un accéléromètre est due au mouvement Brownien des molécules de gaz autour de la masse d'épreuve et au mouvement Brownien du ressort. Le bruit résultant "TNEA" (the Total Noise Equivalent Acceleration) est donné en  $[m/s^2/\sqrt{Hz}]$  [7]. Toutes les caractéristiques qui interagissent et caractérisent un accéléromètre dépendent de la technologie et du procédé de fabrication. Différents types de transducteurs peuvent être utilisés pour la construction des accéléromètres. Les approches les plus utilisées sont à détection piézoélectrique, à détection capacitive, à jauge de contrainte/extensométrie (proche du type piézorésistif dans son principe), à poutre vibrante, à ondes de surface et à détection optique [7].

Paramètres	Spécifications
Étendue de mesure	$\pm 1 g$
Bande passante	0-100Hz
Précision	$< 4\mu g$
Sensibilité transversale	$< 0.1\%$
Gamme de température	-40°C à 80 °C

TAB. 1.1 – Caractéristiques d'un accéléromètre

**Modèle de mesure** : le signal de sortie d'un accéléromètre est décrit comme l'addition d'une accélération  $a$ , de la gravité  $g$  et d'un terme de bruit  $\eta_A$ , considéré blanc et gaussien :

$$b_A = a - g + \eta_A \quad (1.44)$$

Si trois accéléromètres sont montés en triaxe orthogonal dans un solide, avec leurs axes sensibles qui coïncident avec les principaux axes d'inertie du solide, la sortie des accéléromètres

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

peut être écrite comme le vecteur de mesures :

$$\vec{b}_A = C(q)\vec{r}_A + \vec{\eta}_A \quad (1.45)$$

avec  $\vec{r}_A = (\vec{a} - \vec{g})$ , où  $\vec{g} = [0 \ 0 \ g]^T$  et  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  représentent respectivement le vecteur de gravité et d'accélération propre du corps, donnés dans le système de coordonnées inertiel  $N$ .  $g$  est la constante gravitationnelle et  $\vec{\eta}_A \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de bruits supposés indépendants, blancs et gaussiens.

La matrice  $C(q)$  est une matrice de rotation associée au quaternion  $q$ , ce dernier caractérisant l'attitude du solide par rapport au repère inertiel  $N$ .

**Remarque 1.3.** *Si l'accélération  $\vec{a}$  est faible par rapport à la gravité,  $\|\vec{a}\| \ll \|\vec{g}\|$ , les mesures des accéléromètres donnent une projection du vecteur de gravité dans le système de coordonnées inertiel  $B$ . En conséquence  $\vec{r}_A \approx -\vec{g}$  et :*

$$\vec{b}_A = -C(q)\vec{g} + \vec{\eta}_A \quad (1.46)$$

*Dans ce cas,  $\vec{\eta}_A$  représente la somme du vecteur de bruit et des perturbations induites par des vibrations ou des accélérations parasites. Le vecteur  $\vec{\eta}_A$  ne peut pas alors être considéré comme un vecteur de bruits blancs et gaussiens. En l'absence d'accélération, les vecteurs de mesures sont supposés unitaires. Par conséquent, on prendra  $\vec{g} = [0 \ 0 \ g]^T / \|\vec{g}\| = [0 \ 0 \ 1]^T$ . En présence d'accélération  $\vec{a}$ , le vecteur de mesure sera normalisé par  $g$ .*

### Gyromètre

Un gyromètre ou gyroscope vibrant est un appareil permettant d'effectuer une mesure de la vitesse de rotation de son boîtier. Les phénomènes physiques utilisés pour réaliser ce type de capteurs sont essentiellement les propriétés inertielles de la matière.

Les gyromètres utilisent plusieurs éléments vibrants qui produisent des signaux sinusoïdaux identiques et d'amplitude constante lorsque le capteur est au repos. Lorsque celui-ci est soumis à un mouvement de rotation, les forces de Coriolis induisent une variation d'amplitude de ces signaux. Le fonctionnement du gyromètre vibrant à effet Coriolis est le suivant : il s'agit d'un diapason dont on entretient à la résonance le mode de flexion à l'aide de l'effet piézoélectrique indirect (utilisation d'un champ électrique pour créer des contraintes). Lorsque l'ensemble du capteur est soumis à une rotation, l'effet Coriolis crée un mouvement orthogonal d'amplitude proportionnelle (mode de torsion) que l'on détecte par l'effet piézoélectrique direct (apparition de charges sous l'effet d'une contrainte). Les principaux paramètres qui spécifient la performance d'un gyromètre sont la résolution, le biais, la sortie à vitesse nulle ZRO (Zero-Rate Output) et le facteur d'échelle. En l'absence de rotation, le signal de sortie d'un gyromètre est composé d'un bruit blanc et d'une fonction lentement variable [7]. Le bruit blanc influence la résolution du capteur et celle-ci est

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

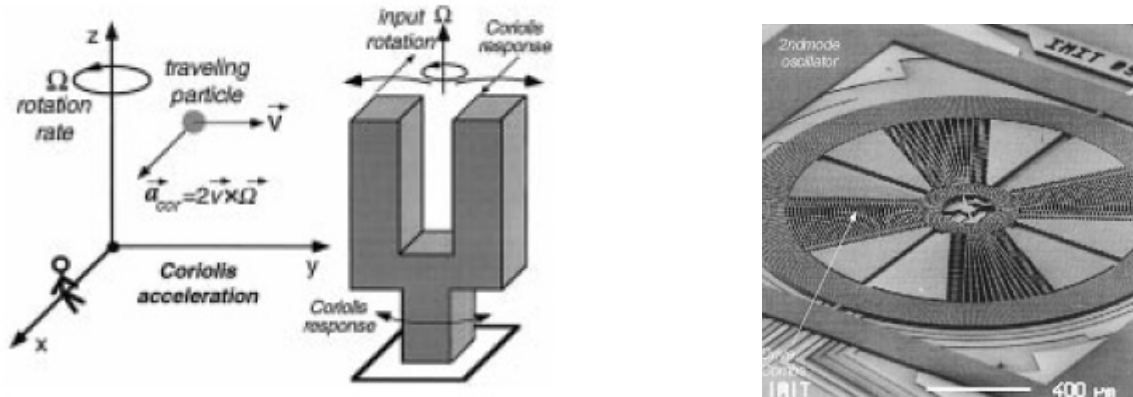


FIG. 1.13 – (a) Principe du gyromètre, (b) Surface d'un gyromètre mono-axe fabriqué au moyen d'un Bosch procédé

exprimée en termes d'écart type ou de vitesse de rotation divisée par la racine carré de la largeur de bande de détection  $[(^\circ/sec)/\sqrt{Hz}]$ . Le paramètre appelé "angle random walk" exprimé en  $[^\circ/\sqrt{Hz}]$  peut être aussi utilisé pour définir la résolution. La valeur de l'amplitude (peak-to-peak) de la fonction lentement variable représente le biais à court ou long terme du gyromètre et celui-ci est exprimé en  $(^\circ/sec)$  ou  $(^\circ/h)$ . Le facteur d'échelle représente le gain entre le signal de sortie et la vitesse de rotation, exprimé en  $[V/(^\circ/s)]$ . Le tableau 1.2 donne des caractéristiques standards des gyromètres utilisés dans la détermination de l'attitude et la navigation inertielle.

Paramètres	Spécifications
Etendue de mesure	$> 400 (^\circ/sec)$
Angle Random Walk	$< 0.001 (^\circ/\sqrt{Hz})$
Dérive	$< 0.01 (^\circ/h)$
Précision du facteur d'échelle	$< 0.001 (\%)$
Bande passante	0-100 (Hz )
Gamme de température	$-40^\circ$ à $80^\circ$

TAB. 1.2 – Caractéristiques d'un gyromètre

**Modèle de mesure :** Le signal de sortie du gyromètre est donné par :

$$\omega_G = \omega + \nu + \eta_G \quad (1.47)$$

où  $\omega$  est la vitesse réelle de rotation,  $\nu$  est une fonction lentement variable dans le temps et  $\eta_G$  est un bruit blanc lié à la résolution du capteur.

De l'équation (1.49), il est clair que lorsqu'il n'y a pas de rotation, le signal de sortie du gyromètre est composé d'un bruit blanc et d'une fonction lentement variable dans le temps.

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

La dynamique de cette fonction peut être modélisée par un processus de Gauss-Markov [18] décrit par l'équation :

$$\dot{\nu} = -\frac{1}{\tau}\nu + \eta_\nu \quad (1.48)$$

Si trois gyromètres sont montés en triaxe orthogonal dans un solide, tels que leurs axes sensibles coïncident avec les principaux axes d'inertie du solide, la sortie des gyromètres et l'évolution du biais deviennent :

$$\vec{\omega}_G = \vec{\omega} + \vec{\nu} + \vec{\eta}_G \quad (1.49)$$

$$\dot{\vec{\nu}} = -T^{-1}\vec{\nu} + \vec{\eta}_\nu \quad (1.50)$$

où les composantes des vecteur  $\vec{\eta}_G$  et  $\vec{\eta}_\nu \in \mathbb{R}^3$  sont supposées être des bruits blancs et gaussiens et  $T = \tau I_3$  est une matrice diagonale de constantes de temps.

**Remarque 1.4.** Afin de déterminer l'attitude d'un solide, les gyromètres sont utilisés pour mesurer les vitesses de rotation du corps. De cette manière, en intégrant l'équation cinématique à partir d'une condition initiale, il est possible d'obtenir la variation de l'attitude. Cependant, les sorties des gyromètres étant polluées par des biais, ceux-ci doivent être estimés et recalés au cours du temps.

### Magnétomètre

Parmi les instruments de navigation qui permettent de s'orienter par rapport à un système de référence absolu, nous trouvons le compas magnétique. Cet instrument utilise le champ magnétique terrestre comme référence, en conséquence il permet de suivre un cap.

Le champ magnétique terrestre interne trouve son origine au centre de la Terre où les atomes du magma portés à haute température (5000 °C) sont "dépouillés" d'une partie de leurs électrons et sont donc ionisés. Ce noyau liquide, riche en fer et en nickel, est donc conducteur. La rotation de la Terre met ce magma en mouvement ce qui constitue un gigantesque anneau de courant transformant la Terre en un immense solénoïde avec un champ magnétique. En surface, le champ magnétique varie d'un lieu à un autre. Cette variation est à l'origine des mouvements de l'aiguille de la boussole lorsque l'on se déplace. Elle permet également à certains animaux, comme les pigeons, de s'orienter.

Du point de vue théorique, le champ magnétique terrestre est orienté dans l'espace et présente deux composantes vectorielles en un point donné de la surface de la Terre : une composante d'induction magnétique  $\vec{B}_z$  dirigée verticalement et une composante horizontale  $\vec{B}_h$  (voir figure 1.14(a)). La résultante représente l'intensité du champ magnétique (ou le vecteur champ magnétique  $\vec{B}_M$ ). Aux pôles magnétiques la composante horizontale s'annule. L'angle formé par le champ magnétique  $\vec{B}_M$  et le plan horizontal est appelé l'inclinaison magnétique. Sa valeur augmente à mesure qu'on se rapproche des pôles et atteint 90° au pôle magnétique nord

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

( $-90^\circ$  au pôle Sud magnétique). L'angle  $D$  formé entre la direction du pôle nord géographique et du pôle nord magnétique est appelé déclinaison.

Le Champ Géomagnétique International de Référence (IGRF) et le Modèle Magnétique Mondial (WMM) sont les deux modèles les plus utilisés, notamment pour la navigation [3].

Dans des applications comme celles traitées dans ce document, la zone d'action représentée par un système inertiel NED est extrêmement petite par rapport à la surface de la Terre. Par conséquent, dans cette zone le champ magnétique peut être considéré constant. Dans le système inertiel NED, le champ magnétique est représenté par un vecteur  $\vec{r}_M = [r_{M_x} \ 0 \ r_{M_z}]^T$  tel que le montre la fig. 1.14 (b). La variation d'orientation du champ magnétique terrestre dans un système de coordonnées mobile peut être déterminée à partir de l'évolution des 3 composantes cartésiennes du champ dans ce système de coordonnées. Les méthodes de

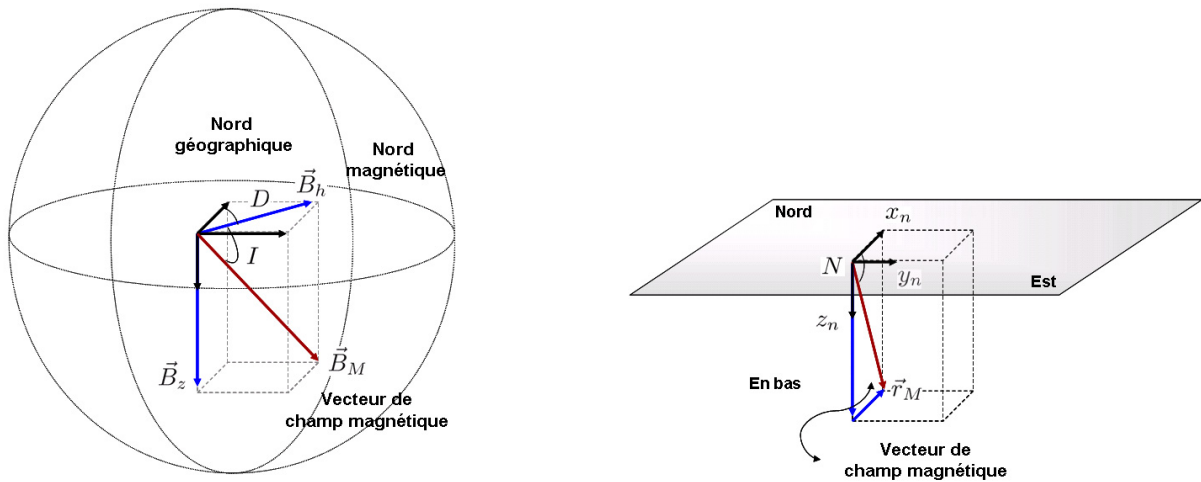


FIG. 1.14 – (a) Composantes du champ magnétique terrestre, (b) Composantes du champ magnétique dans un système de référence NED

mesure des champs magnétiques sont assez nombreuses et il existe plusieurs principes de capteurs magnétiques. Le tableau 1.3 résume les caractéristiques de différents types de capteurs de champ magnétique. En pratique, les capteurs à effets magnétorésistifs répondent au cahier des charges des applications embarquées en raison de leur performance, coût, taille et facilité de mise en œuvre.

**Modèle de mesure** : Le signal de sortie d'un magnétomètre est décrit comme la somme d'une projection du champ magnétique terrestre  $\vec{r}_M$  dans  $B$  et un terme de bruit  $\eta_M$  considéré blanc et gaussien. Si trois magnétomètres sont montés en triaxe orthogonal dans un solide, tels que leurs axes coïncident avec les principaux axes d'inertie du solide, la sortie du magnétomètre triaxe dans le système de coordonnées mobile peut être écrit sous la forme d'un vecteur de mesures :

$$\vec{b}_M = C(q)\vec{r}_M + \vec{\eta}_M \quad (1.51)$$

# CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

## 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

Type d'instrument	Etendue de mesure (mT)	Résolution (nT)	Bande passante (Hz)	Type d'application
Bobine d'induction	$10^{-10} - 10^6$	Variable	$10^{-1} - 10^6$	Champs variables uniquement
Fluxgate	$10^{-4} - 0.5$	0.1	$0 - 2 \times 10^3$	magnétomètre vectoriel
SQUID	$10^{-9} - 0.1$	$10^{-4}$	$0 - 5$	magnétomètre très haute sensibilité
Effet Hall	$0.1 - 3 \times 10^4$	100	$0 - 10^8$	pour champs $> 1\text{T}$
Magnétorésistance	$10^{-3} - 5$	10	$0 - 10^7$	moyen de gamme
Pompage optique	$0.01 - 0.1$	0.005	$0 - 5$	magnétomètre scalaire haute résolution

TAB. 1.3 – Caractéristiques de quelques capteurs magnétiques

Dans notre cas, un modèle théorique du champ magnétique, très proche de la réalité consiste à considérer le vecteur de champ magnétique unitaire avec un angle d'inclinaison  $I = 60^\circ$ . D'où nous avons :  $\vec{r}_M = [r_{M_x} \ 0 \ r_{M_z}]^T = [\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{3}}{2}]^T$ .

### 1.1.4 Estimation de l'attitude : état de l'art

Différentes approches ont été appliquées au problème de l'estimation de l'attitude, conduisant à une grande variété d'estimateurs. Ici, seuls les estimateurs utilisant le quaternion d'attitude sont présentés. Ces estimateurs peuvent être classés en deux principales familles :

**les estimateurs de quaternion “optimaux”** développés suivant deux approches :

- ceux basés sur des moindres carrés avec contraintes ;
- ceux basés sur le filtre de Kalman ;

**les observateurs non linéaires d'attitude** pour lesquels la preuve de convergence est réalisée par l'intermédiaire de l'analyse d'une fonction de Lyapunov.

Ces approches seront décrites brièvement dans les paragraphes suivants afin de donner un aperçu général de plus de 35 années de développement d'algorithmes et de permettre de situer notre travail et notre contribution dans ce domaine.

#### Les estimateurs de quaternion optimaux

Soient  $\vec{b}$  et  $\vec{r}$  les coordonnées d'un vecteur  $\vec{x}$  par rapport aux systèmes de coordonnées  $B$  et  $N$ , respectivement. Les coordonnées du vecteur  $\vec{r}$  dans le système inertiel  $N$  (par exemple le système NED) sont en général bien connues. Par contre, le vecteur  $\vec{b}$  représentant un vecteur de mesure du vecteur  $\vec{r}$ , obtenu à partir de capteurs dans le système de coordonnées mobile  $B$  (par exemple un magnétomètre ou accéléromètre, mesurant le champ magnétique ou le champ de gravité, respectivement) est en général entaché d'erreurs. Ces deux vecteurs sont liés via une matrice de rotation  $C$  et un terme de perturbation  $\vec{\eta}_i$ , conduisant à un



modèle de mesures tel que défini par (1.45) ou (1.51) :

$$\vec{b}_i = C\vec{r}_i + \vec{\eta}_i \quad (1.52)$$

Ce modèle de mesures est à la base du développement de différents algorithmes, notamment ceux basés sur les techniques de moindres carrés avec contraintes ou ceux basés sur le filtre de Kalman.

### Approches de moindres carrés

En 1965, Wahba [113] formule le problème de l'estimation d'attitude dans un contexte de moindres carrés avec contraintes. Cette formulation est résumée dans la définition ci-après.

**Définition 1.3** (Problème de Wahba). *Soient deux ensembles de  $n$  vecteurs chacun  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$  et  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  où chaque paire  $(\vec{r}_i, \vec{b}_i)$  correspond aux coordonnées d'un vecteur  $\vec{x}_i$  par rapport aux systèmes de coordonnées  $N$  et  $B$ , respectivement. Le problème consiste à trouver la matrice  $C$ , qui ramène le premier ensemble dans le second de façon à ce qu'ils coïncident le "mieux possible". En termes mathématiques, le problème consiste à trouver la matrice  $C$  qui minimise la fonction coût suivante :*

$$\hat{C} = \arg \min \sum_{i=1}^n \|\vec{b}_i - C\vec{r}_i\|^2 \quad (1.53)$$

sous la contrainte que  $C$  soit une matrice orthogonale.

La solution au problème de Wahba est une estimation d'attitude pour une simple rotation. Cette hypothèse apparaît naturelle tant que l'estimation d'attitude s'effectue à un instant donné unique. Une famille de solutions au problème de Wahba consiste à déterminer la matrice de rotation  $C \in S0(3)$ , alors qu'une autre famille concerne l'estimation du quaternion optimal  $q$  associé à la matrice  $C$ . Seule la seconde famille est présentée ici.

### Estimateurs de quaternion dans le cas d'une simple rotation

En 1968, Davenport propose une méthode afin d'estimer le quaternion unitaire optimal  $q$  qui représente une rotation. Comme reporté dans [25], Davenport montre que la fonction de Wahba (1.53) peut être transformée en une fonction quadratique du quaternion :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\vec{b}_i - C\vec{r}_i\|^2 = 1 - q^T K q \quad (1.54)$$

avec  $\|\vec{b}_i\| = 1$  et  $\|\vec{r}_i\| = 1$ , le vecteur de référence et le vecteur de mesures étant normalisés. En conséquence, le problème de Wahba est équivalent à un problème de maximisation d'une

## CHAPITRE 1. PRÉLIMINAIRES ET ÉTAT DE L'ART

### 1.1. L'ESTIMATION DE L'ATTITUDE

---

forme quadratique du quaternion  $q$ . La solution à ce problème a donné lieu à un algorithme connu dans la littérature sous le nom de “*q-method*”. Cet algorithme consiste à trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice  $K$  de l'équation (1.54). En fait, le quaternion optimal est le vecteur propre qui correspond à la plus grande valeur propre. Cet algorithme est devenu très populaire, conduisant à de nombreuses variantes telles que par exemple, *QUEST* [92], *ESOQ* [75], *ESOQ2* [76].

#### Filtrage de Kalman

Le filtre de Kalman est en quelque sorte l'extension des techniques des moindres carrés à l'estimation d'une inconnue variant dans le temps et dont on connaît une loi d'évolution. Dans le contexte de l'estimation d'attitude, le quaternion d'attitude est considéré comme le vecteur d'état. Le modèle du processus correspond à l'équation cinématique du quaternion :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \quad (1.55)$$

et le modèle de mesures est obtenu par la substitution de la matrice  $C(q)$  de l'équation (1.23) dans l'équation (1.52) :

$$\vec{b}_i = C(q)\vec{r}_i + \vec{\eta}_i \quad (1.56)$$

Supposons que la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est un vecteur obtenu à partir des mesures de trois gyromètres montés de façon orthogonale dans le mobile et noté  $\vec{\omega}_G$ . De cette manière, les entrées stochastiques de ce système sont un vecteur d'erreur  $\Delta\vec{\omega}$  dans la mesure de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  et un vecteur de bruit dans les vecteurs de mesures  $\vec{b}_i$ , noté  $\vec{\eta}_i$ . Le vecteur  $\vec{\eta}_i$  affecte l'équation de mesure (1.56) de façon additive. L'erreur  $\Delta\vec{\omega}$  opère quant à elle, de façon multiplicative dans l'équation (1.55). Une approche classique consiste à modéliser la dynamique du processus comme un processus stochastique de la forme suivante :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega}_G + \vec{\eta}_p \quad (1.57)$$

où le vecteur de bruit sur l'état  $\vec{\eta}_p \in \mathbb{R}^4$  prend en compte les imperfections dans la connaissance du modèle des mesures des gyromètres, à savoir, le biais et le bruit. L'équation (1.57) conjointement avec l'équation de mesures (1.56), donnent lieu à un modèle d'état variable dans le temps. Les propriétés statistiques du bruit sur l'état et du bruit de mesures doivent être utilisées afin de déterminer un filtre *optimal*.

De l'équation (1.23), nous constatons que le modèle de mesures est non linéaire en  $q$ . De plus si nous considérons le vecteur de biais présent dans les mesures des gyromètres, le modèle du processus devient aussi non linéaire. Afin d'aborder ce problème, un *filtre de Kalman étendu* (Extended Kalman Filter)(EKF) [18] a été largement utilisé pour l'estimation de l'attitude.

---

Aussi, pour l'estimation d'attitude, de nombreux travaux ont été développés et nous pouvons trouver des approches telles que le *filtre de Kalman étendu additif* (Additive Extended Kalman Filter (AEKF)) [5], [25] ou le *filtre de Kalman étendu multiplicatif* (Multiplicative Extended Kalman Filter (MEKF)) [57], [71].

Le filtre de Kalman a la capacité de fusionner des signaux acquis à partir de différentes modalités de mesures. Cette caractéristique a été exploitée dans l'estimation d'attitude à partir de capteurs GAM (Gyromètre, Accéléromètre, Magnétomètre). En général, l'idée consiste à l'implantation de filtres, telle que les mesures des accéléromètres et magnétomètres sont exploitées afin d'estimer l'attitude lorsque les mouvements à basse fréquence sont accomplis (i.e. l'accélération propre du solide est négligeable devant la gravité), alors que les mesures issues des gyromètres sont exploitées pour des mouvements à hautes fréquences. Le AEKF et le MEKF ont été utilisés dans divers domaines, tels que par exemple, la robotique aérienne et terrestre [85], [31], [68] la réalité virtuelle [48] et la capture de mouvement humain, [36], [63].

Dans le filtre de Kalman étendu (AEKF et MEKF), les erreurs dans les modèles d'état et de mesures sont supposées être des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle. Cependant, dans la pratique, cette hypothèse est fautive particulièrement pour  $\vec{\eta}_p$ . Par conséquent, le comportement du filtre sera sous-optimal. De plus, en raison d'une approximation linéaire du modèle non linéaire, on ne peut pas garantir la convergence globale du *filtre de Kalman étendu*.

Afin de résoudre les problèmes liés à la non linéarité et aux caractéristiques de bruit qui ne correspondent pas à celles requises pour un filtre de Kalman, de nouvelles approches ont été proposées, telles que le "Unscented Kalman Filter" (UKF) [27], le "Particle Filter" (PF) [23] ou le "Box Particle Filtering" [38]. Malheureusement, ces approches sont très difficiles à mettre en œuvre, voire impossible, pour les systèmes embarqués, tels que par exemple la robotique aérienne, car ils exigent des coûts de calculs incompatibles avec les processeurs qui généralement sont utilisés dans ces applications.

## Les Observateurs non linéaires

Récemment et en raison des non linéarités liées au problème de l'estimation d'attitude des approches issues de la théorie de l'automatique non linéaire ont donné lieu à *des observateurs non linéaires d'attitude*. Un des premiers travaux dans cette direction est celui de Salcudean [86] où un observateur non linéaire est proposé pour l'estimation des vitesses angulaires d'un corps rigide. Des travaux postérieurs ont été proposés principalement pour le calibrage des gyromètres dans les satellites et télescopes spatiaux [103] ou dans des systèmes de navigation maritime [107]. Dans ces travaux, l'attitude est représentée par un quaternion unitaire. En conséquence, ils ont pour objectif d'estimer le quaternion qui représente

l'attitude. Récemment, d'autres approches non linéaires se sont concentrées sur l'estimation de la matrice de rotation  $C \in SO(3)$  [84]. Les travaux développés dans [79], [65] sont très remarquables et leur originalité est due au fait qu'ils exploitent le groupe des matrices de rotation  $SO(3)$  et l'algèbre de *Lie* qui lui est associée. Cette approche a été développée afin d'estimer l'attitude et le biais présent dans les mesures des gyromètres, pour un drone de type "VTOL" (Vertical Take-off and Landing). Bien que pour les observateurs non linéaires de la matrice de rotation, on montre que l'erreur d'attitude converge à zéro de manière asymptotiquement globale, en pratique, le fait d'estimer une matrice de rotation oblige à estimer neuf composantes sous six contraintes. Ceci apporte des problèmes numériques, surtout pour une implantation dans de petits microcontrôleurs. L'avantage des approches non linéaires par rapport au filtre de Kalman étendu est qu'elles garantissent la convergence globale, assurée par l'intermédiaire d'une analyse basée sur la théorie de Lyapunov. De plus, la condition de bruit gaussien (en particulier ici pour l'état) n'est plus nécessaire. Dans ces approches, la condition d'optimalité doit être remplacée par une condition de robustesse. Néanmoins, l'analyse de robustesse dans ces observateurs a été très peu abordée.

## 1.2 Commande d'attitude

### 1.2.1 Commande d'attitude d'un corps rigide : état de l'art

De la même façon que l'estimation de l'attitude, le problème de la commande d'attitude d'un corps rigide a intéressé la communauté scientifique depuis le début des années 1950 car de nombreux systèmes tels que les satellites, les hélicoptères, les missiles tactiques, les véhicules marins et sous-marins, etc., entrent dans ce cadre, avec la nécessité d'une commande d'attitude.

Une façon traditionnelle de résoudre ce problème a été l'utilisation des lois de commande avec des techniques de linéarisation par retour d'état [114], [34] et des lois de commande de type proportionnelle-dérivée [111], [32], [104], [52]. Cependant, d'autres techniques plus complexes ont aussi été utilisées, telles que par exemple la commande prédictive, appliquée à un satellite dans [112] et dans un micro-satellite dans [46], la commande backsteeping [55] ou encore la commande backsteeping adaptative [93]. La commande robuste, elle aussi a été largement appliquée, par exemple dans la commande de missiles tactiques [94]. Il faut remarquer que cette liste n'est pas exhaustive mais qu'elle nous donne un aperçu des différentes approches pour résoudre le problème de la commande d'attitude.

Dans les approches mentionnées précédemment, les lois de commande les plus utilisées sont celles de linéarisation par retour d'état et celle de type proportionnelle-dérivée. La raison de leur popularité est leur simplicité et leur facilité d'implantation dans des systèmes réels. Cependant, lorsque l'erreur d'attitude ou de vitesse angulaire est assez grande, le signal

de commande produit par ces lois est grand lui aussi. Ce dernier effet est dans plusieurs situations indésirable, voire dangereux car le signal de commande risque de provoquer une saturation voire l'endommagement des actionneurs.

Bien que de nombreuses recherches soient consacrées à la résolution du problème de la stabilisation d'attitude d'un corps rigide, peu de travaux ont abordé le problème de la stabilisation lorsque le signal d'entrée est borné en amplitude. Récemment des travaux ont abordé ce problème. Par exemple, les auteurs de [105] étudient le problème de la stabilisation d'un corps rigide sous-actionné. Le principal point de ce travail est la représentation de l'attitude qui utilise une paire de coordonnées réelles et conjuguées  $(w, z)$ . Bien que cette représentation soit bien adaptée à l'antisymétrie du corps rigide considéré, ainsi qu'à de possibles défauts dans les actionneurs, l'utilisation conjointe de fonctions trigonométriques et de variables complexes rend difficile son implantation. De plus, cette loi est discontinue en raison d'une singularité dans la représentation de l'attitude. Dans [8], l'auteur propose une loi de commande qui dirige un véhicule sous-marin d'une région initiale à une région finale de l'espace d'état alors que le signal de commande et les états restent bornés. Son approche exploite les idées de l'analyse formelle des systèmes continus et hybrides que lui-même avait proposé dans [9]. Les auteurs de [12] étudient la stabilisation d'un satellite en présence de saturation dans le signal d'entrée. Leur loi de commande est basée sur une approche VSC "Variable Structure Control".

Malheureusement, ces approches, dites bornées, conduisent à des lois de commande qui ne sont pas continues, rendant leur mise en œuvre délicate pour des systèmes réels.

La commande optimale a aussi été largement appliquée au problème de la commande d'attitude et de nombreuses recherches ont été développées dans cette direction [89]. Cependant, lorsque la commande est sous contraintes, cela engendre une grande difficulté. En fait, afin de trouver la loi de commande, il est nécessaire de résoudre les équations de Hamilton-Jacobi. Par conséquent, le calcul de la commande est considéré impossible à mettre en œuvre en temps réel. Dans l'espoir d'appliquer la commande optimale, plusieurs travaux ont essayé de contourner le problème que représente la résolution des équations de Hamilton-Jacobi et les recherches se sont consacrées à utiliser une technique appelée "Méthode optimale inverse" (Inverse Optimal Method) [78], [56]. Néanmoins, afin d'appliquer la méthode optimale inverse, la connaissance d'une fonction de Lyapunov s'avère nécessaire.

Dans [56], les auteurs exploitent la structure d'interconnection en cascade qui existe entre l'équation dynamique et l'équation cinématique du corps rigide. Ainsi, une fonction de Lyapunov est construite en utilisant la méthode de backstepping. Cependant, la loi de commande résultant dépend des paramètres du modèle (matrice d'inertie) et les propriétés de robustesse ne sont pas étudiées. Dans le travail présenté dans [78], les auteurs proposent d'abord une fonction de Lyapunov. La loi de commande est ensuite construite à partir de la solution d'un

problème de programmation quadratique statique. Malheureusement, la loi de commande résultant n'est pas continue et comme nous l'avons mentionné auparavant, ce fait la rend peu intéressante pour des applications réelles.

Bien que de nombreuses techniques de commande et des analyses de stabilité aient été consacrées au sujet de la stabilisation de l'attitude d'un corps rigide, comme celles que l'on vient d'évoquer ici, le problème lié à un signal de commande d'entrée borné et continu, qui assure la stabilité globale et qui soit simple à mettre en œuvre, n'a pas été formellement abordé. De plus, les lois de commande rapportées dans la littérature (à l'exception de la commande optimale) ne prennent pas en compte les contraintes dans les vitesses de rotation. Ces contraintes sont nécessaires en pratique afin de prendre en compte une possible saturation dans les actionneurs et dans les capteurs, tels que les gyromètres.

### **1.2.2 Commande de l'hélicoptère à quatre rotors : état de l'art**

L'intérêt pour les Véhicules Aériens Autonomes (Unmanned Aerial Vehicle, UAV) s'est constamment accru ces dernières années et a conduit de nombreux travaux, notamment en ce qui concerne leur commande. La poursuite de cet objectif est possible grâce à l'évolution des technologies de l'information et de la communication et surtout grâce à la croissance exponentielle de la puissance de calcul des calculateurs.

Ces Véhicules Aériens Autonomes, aussi appelés "Drones" (faux bourdon), sont structurés principalement dans trois familles : ceux à voilures fixes, ceux à voilures tournantes et les aéronefs à ailes battantes (ornithoptères). Les drones ont été employés au début principalement dans le domaine militaire. Cependant, on peut trouver aussi des applications civiles telles que, par exemple, le secours et la recherche de blessés dans un désastre, la surveillance environnementale, la cartographie aérienne, la surveillance du trafic routier, la cinématographie ou encore l'anthropologie.

Une étude bibliographique montre que la recherche en robotique aérienne a principalement impliqué des véhicules à voilures tournantes capables de décoller et d'atterrir à la verticale. Ce type de plateformes est connu sous le nom de "VTOL" (Vertical Take-off and Landing). Le principal avantage de ces plateformes est leur manœuvrabilité. En outre elles permettent de maintenir le véhicule aérien en vol stationnaire, ce qui est indispensable pour de nombreuses applications. Parmi les véhicules qui permettent le décollage et l'atterrissage vertical, le véhicule le plus connu est sûrement l'hélicoptère standard [64], composé d'un rotor principal et d'un rotor de queue. Cependant, depuis quelques années, de nombreuses études sont menées sur d'autres véhicules, par exemple, l'hélicoptère birotor [30], les véhicules à voilures tournantes carénées [80] et l'hélicoptère à quatre rotors [45].

La modélisation de cette classe d'engins a été abordée dans de nombreux travaux. Ce-

pendant et comme l'ont récemment mentionné les auteurs dans [54], la description du mouvement dans toutes les architectures VTOL est très similaire. Le schéma général des architectures VTOL est montré dans la figure 1.15. Un véhicule VTOL est capable de générer une force de poussée  $F_3$  parallèle à l'axe  $z_n$  et trois couples indépendants  $\Gamma_{1,2,3}$ , autour de ses axes principaux d'inertie. Puisque les systèmes VTOL sont des systèmes sous actionnés, les déplacements sur les axes  $x_n$  et  $y_n$  dépendent directement de la force  $F_3$  et de l'orientation produite par les couples ( $\Gamma_{1,2,3}$ ). En utilisant une formulation de Newton-Euler, les équations qui décrivent le mouvement sont :

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{p}} \\ \dot{\vec{v}} \\ \dot{C} \\ \dot{\vec{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{g} - \frac{1}{m} C^T \vec{F} \\ C[\vec{\omega}^\times] \\ J^{-1}(-\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \Gamma_{1,2,3}) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

où  $\vec{p}$  et  $\vec{v}$  sont la position et la vitesse du centre de masse par rapport à un système de référence inertiel.  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire et  $C$  est la matrice de rotation qui permet le passage entre le repère inertiel et celui fixé au véhicule.  $\vec{F} = [0 \ 0 \ F_3]^T$  et  $\Gamma_i$  sont la force et les couples appliqués au véhicule.  $\vec{g}$  représente le vecteur de gravité et sa direction est vers le bas.

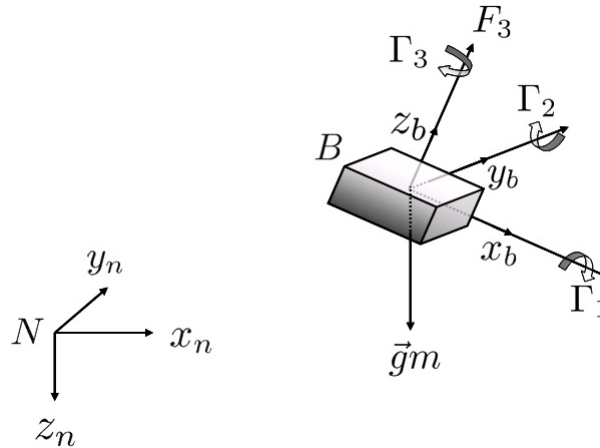


FIG. 1.15 – Architecture d'un véhicule type VTOL

Un exemple (peut-être le plus remarquable) d'aéronefs autonomes VTOL est l'hélicoptère à quatre rotors, connu sous les appellations de quadrotor, quatrecopter ou encore X4-flyer. Cet hélicoptère possède certains avantages par rapport aux hélicoptères conventionnels. En raison de sa symétrie, ce véhicule est dynamiquement élégant et simple à réaliser.

Le concept de l'hélicoptère à quatre rotors n'est pas nouveau. Le premier hélicoptère à quatre rotors a été dessiné et construit en 1922 par George de Bothezat. Il était destiné à l'armée américaine. Cet immense aéronef pesait 1600 kilogrammes et était propulsé par un

seul moteur (voir figure 1.16). Malgré le succès de son vol, les performances de cet appareil n'ont pas été celles attendues par l'armée et par conséquent, le projet a été abandonné.

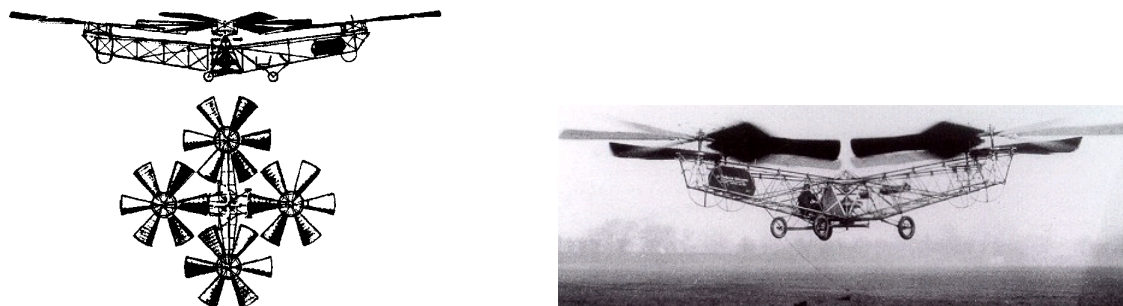


FIG. 1.16 – L'hélicoptère à quatre rotors de Bothezat

Depuis quelques années, ce même concept a commencé à être exploité, mais avec une taille réduite (figure 1.17). Depuis 2002, plusieurs centres de recherche et de groupes de spécialistes en aéronautique ont commencé à publier les premiers résultats à propos de la modélisation et de la commande de cet hélicoptère à quatre rotors. Un exemple de cet intérêt peut être trouvé par exemple dans [45], [1].



FIG. 1.17 – L'hélicoptère à quatre rotors "Draganfly III" de chez "Draganfly innovation, Inc" [29].

Dans les paragraphes suivants, nous allons décrire très succinctement, les travaux de différents groupes qui sont intervenus dans la modélisation et la commande de cet hélicoptère à quatre rotors. Il faut remarquer que cette liste n'est pas exhaustive.

**Université Nationale d'Australie** : cette équipe de recherche a été une des premières à aborder le problème de la stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors, [82]. Ensuite, ils se sont intéressés à donner une modélisation très détaillée (et les détails de conception) des hélicoptères à quatre rotors pour différentes tailles de modèles réduits [81].

**Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse** : ce groupe de recherche s'est intéressé à la conception du "hardware" embarqué dans des hélicoptères à quatre rotors, en utilisant différentes architectures, telles que par exemple des microcontrôleurs, des DSP et des FPGAs [13]. En ce qui concerne la commande, ils ont reporté l'application de lois de



commande de type PID et LQ pour la stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors [14]. Ensuite, ils ont appliqué des approches plus complexes, telles que la commande backstepping et la commande à modes glissants [15]. Différents résultats en simulation et en temps réel ont été montrés. Cependant un modèle linéaire pour l'attitude a été utilisé et les aspects de robustesse par rapport aux perturbations externes et aux incertitudes du modèle n'ont pas été abordés. De plus, les lois de commande ne sont pas bornées.

**Université de technologie de Compiègne, France** : bien que cette équipe ait réalisé une modélisation de l'hélicoptère à quatre rotors basée sur un formalisme de Lagrange le point fort de leur travail concerne la commande. La stratégie de commande reportée dans [22] consiste à ramener les équations qui représentent la dynamique du système à une chaîne d'intégrateurs et ensuite à appliquer une stratégie proposée dans [101] qui concerne la stabilisation des systèmes linéaires avec des commandes bornées. La plateforme expérimentale de cette équipe consiste en l'hélicoptère à quatre rotors "*Dranganfly III*" vendu chez "Dranganfly innovation, Inc" [29], un capteur électromagnétique appelé "Polhemus" (qui travaille dans un espace réduit d'environ 30 cm) permettant d'obtenir la position et l'orientation de l'engin, une télécommande du type Futaba Skysport 4, une carte d'acquisition de données et un PC. Il faut remarquer qu'ils ont conservé l'architecture électronique embarquée du fabricant. La télécommande et le PC sont connectés en utilisant la carte d'acquisition et la connexion est réalisée directement aux potentiomètres de la télécommande, ce qui permet la commande de la poussée principale, de l'angle de tangage, de roulis et de lacet. Les résultats obtenus expérimentalement sont très satisfaisants, compte tenu de la plateforme utilisée. Néanmoins, quelques remarques doivent être faites. Comme il est reporté dans [20], le système original du *Dranganfly III* possède trois gyromètres embarqués qui l'aident à se stabiliser. Si les gyromètres sont désactivés pour tester les lois de commande, la stabilisation est beaucoup plus difficile, voire impossible. Ainsi, la stabilisation de l'hélicoptère dépend directement de la boucle de commande interne implantée par le fabricant.

L'analyse de stabilité montre que la loi de commande stabilise le système de façon globale mais en pratique ce n'est pas le cas pour la raison suivante : la commande est en effet basée sur les dérivées des angles de Cardan (bien que dans leur document ils soient appelés angles d'Euler) qui sont assimilés aux vitesses angulaires de l'engin. Cette approximation n'est en fait valable que pour de petits angles (voir équation (1.15)). De plus, bien que la loi de commande soit formée de fonctions de saturation imbriquées, elle n'est pas bornée.

Récemment, une commande d'attitude bornée pour l'hélicoptère à quatre rotors a été proposée dans [21], où la loi de commande est obtenue en utilisant une technique backstepping. Néanmoins, les auteurs supposent un modèle linéaire pour la dynamique de la rotation.

Malgré ces remarques, ce groupe de recherche a été l'un des premiers à réaliser un vol autonome de l'hélicoptère à quatre rotors et ses résultats ont inspiré d'autres équipes.

**Projet ROBVOLINT, France** : Le travail réalisé dans ce projet est, peut être, le plus remarquable dans le cadre de la commande de l'hélicoptère à quatre rotors. Cela est dû au fait qu'ils ont mené en parallèle une démarche scientifique et technique. Le projet ROBVOLINT (ROBot VOLant d'INTérieur) a impliqué la collaboration conjointe des équipes de quatre laboratoires de recherche différents, afin d'exploiter les compétences de chacune :

1. L'équipe SAM d'I3S UNSA-CNRS : contrôle des engins volants à voilures tournantes, modélisation, asservissement visuel et reconstruction d'état ;
2. L'équipe Lagadic de l'IRISA INRIA : asservissement visuel, traitement d'images, vision par ordinateur, perception et localisation à partir d'images ;
3. L'équipe List du CEA-FAR : téléopération, IHM, architecture électronique, système embarqué et traitement d'images ;
4. L'équipe Robotique de l'IRCCyN : contrôle des engins volants à voilures tournantes, modélisation et asservissement visuel.

Le projet s'est consacré tout d'abord à mettre en place l'équipement (électronique, informatique et sensoriel) d'un hélicoptère à quatre rotors, afin d'obtenir un ensemble fonctionnel adapté à leur recherche. Dans ce projet, le *Draganfly IV* [29], a été utilisé comme architecture de base. Cependant, toute la mécanique et l'architecture électronique de l'appareil a été refaite : seules les pales et des pièces de la structure ont été conservées.

L'architecture électronique embarquée dans le drone a été développée au CEA. Cette architecture est modulaire et elle est constituée par quatre modules :

1. Module capteurs : Il consiste en une centrale inertielle constituée par trois accéléromètres, trois gyromètres et deux magnétomètres ;
2. Module commande de moteurs : l'objectif de ce module est l'asservissement en vitesse des quatre moteurs via un microcontrôleur ;
3. Module de commande : il est constitué par un DSP qui interagit avec les autres modules via une liaison série de type SPI. C'est dans le DSP que les algorithmes de fusion de données de la centrale inertielle et les algorithmes de commande sont implantés ;
4. Module de vision : il consiste en une caméra analogique fixée au centre de gravité du drone. La transmission des images est faite par voie hertzienne à un poste d'acquisition d'image, constitué par un PC.

En ce qui concerne la commande de cet engin, les travaux de l'équipe *SAM d'I3S* se sont consacrés au développement des stratégies de commande en utilisant principalement des informations visuelles. Ils ont exploité une technique très originale appelée IBVS (Image-Based Visual Servo) [44], [26]. Ils ont aussi conçu une commande semi-automatique

pour le drone [42]. Leurs analyses de stabilité exploitent la passivité du corps rigide et les fonctions de Lyapunov sont obtenues par des techniques de backtepping. Les algorithmes proposés ont été testés dans des simulations montrant de bonnes performances. Cependant, la principale difficulté dans leur approche consiste à mesurer la vitesse de translation. Leurs algorithmes ont été implantés dans un robot manipulateur afin de valider les techniques de localisation et d'asservissement visuel. Bien que la loi de commande semi-automatique [42] soit formée d'une fonction de saturation, elle borne l'orientation de l'engin mais pas le signal de commande.

Malgré ces remarques, les résultats obtenus dans ce projet et le travail mené par l'équipe *SAM d'I3S* est à l'heure actuelle un des plus remarquables au niveau international.

**L'université de l'ouest d'Ontario, Canada** . Le travail reporté par cette équipe concerne la stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors. L'approche proposée dans [100], appelée par les auteurs commande  $PD^2$ , est en réalité une commande obtenue par une application de la méthode de backstepping. Ici les auteurs exploitent la structure en cascade de la dynamique de rotation de l'hélicoptère. La loi de commande montre une stabilisation asymptotique globale et une stabilisation exponentielle locale. Malheureusement la loi de commande dépend du modèle du système et des aspects de robustesse paramétrique n'ont pas été abordés. De plus, puisque la loi de commande n'est pas bornée, elle s'avère ne pas être efficace lors de grandes erreurs d'attitude et de vitesse angulaire.



## Chapitre 2

# Les drones : l'hélicoptère à quatre rotors

Le recours à des machines volantes non pilotées n'est pas une nouveauté historique. Depuis les cerfs-volants et les ballons, en passant par les "bombes" volantes, utilisés dans plusieurs conflits dans l'histoire pour l'observation ou l'attaque, jusqu'aux aéronefs automatisés, ce sont des siècles d'innovations et d'efforts technologiques qui se sont écoulés. Avec les Véhicules Aériens Autonomes (UAV), un nouveau chapitre s'est ouvert pour l'aéronautique, la robotique et la commande, car il ne s'agit pas uniquement de machines contrôlées à distance, mais de véritables systèmes autonomes, capables de s'adapter à l'environnement dans lequel ils évoluent. L'évolution des UAV aussi appelés "Drones" (faux bourdon) est une évolution logique, résultant du progrès technologique, notamment dans le domaine de l'informatique et de la miniaturisation.

Dans ce chapitre nous allons commencer par décrire les différentes catégories de Véhicules Aériens Autonomes (UAV). Ensuite nous allons concentrer notre attention sur le mini hélicoptère à quatre rotors, considéré comme un Micro-UAV. Ce véhicule aérien est capable d'atterrir et de décoller à la verticale. Nous présenterons l'architecture générale du prototype d'hélicoptère à quatre rotors du département d'automatique du laboratoire GIPSA-Lab. Puis, nous présenterons les caractéristiques de l'hélicoptère à quatre rotors : les couples et les forces agissant sur le système ainsi que les différents types de vol. Ensuite et contrairement à la généralité des travaux concernant la commande de l'hélicoptère à quatre rotors, nous ferons une étude approfondie sur les forces et les couples aérodynamiques produits par chaque rotor. En particulier, nous avons déterminé expérimentalement certains paramètres aérodynamiques. La formulation du modèle général sera donnée, l'attitude sera représentée à l'aide du quaternion de rotation et la dynamique s'appuiera sur une approche de type Newton-Euler. Ensuite, poursuivant cette étude, nous allons nous intéresser aux groupes motopropulseurs. En étudiant les actionneurs (moteur-hélice-réducteur) et en fonction des

effets aérodynamiques, nous allons proposer une commande de vitesse pour chaque rotor. Cette commande de vitesse est basée sur une approche de modes glissants. Cette approche permet d'avoir une robustesse par rapport aux incertitudes du modèle du moteur, ainsi qu'à la variation des coefficients aérodynamiques des pales. Enfin, un résumé du modèle sera présenté. Ce modèle a été intégré dans un simulateur sous MATLAB-Simulink permettant, par la suite, de tester les stratégies de commande pour notre système.

## 2.1 Les catégories de drones

Si les drones sont à la portée de presque tous pour la conception la technologie et la production, les algorithmes de commande et d'observation relèvent des recherches évoluées. Ceci explique la majorité des projets déclarés, à l'étude ou déjà en phase de développement émanant des Etats-Unis, de la France, de la Suède, de l'Allemagne de l'Italie et du Royaume-Uni. En solo ou en coopération croisée, ces pays ont amorcé le virage vers le développement technologique et accordent une place croissante au concept de véhicule sans pilote et autonome.

Le panel de l'OTAN sur les drones les définit comme : *un véhicule aérien motorisé, qui ne transporte pas d'opérateur humain, utilise la force aérodynamique pour assurer sa portance, peut voler de façon autonome ou être piloté à distance, être non réutilisable ou récupérable et qui emporte une charge utile létale ou non létale.*

Il faut remarquer que les engins balistiques ou semi-balistiques, les missiles de croisière et les projectiles d'artillerie ne sont pas considérés comme des drones.

Les drones peuvent être classés en fonction de leur taille, de leur application ou des deux. C'est la taille qui constitue le critère dominant. Ces catégories sont résumées ci-après :

**Micro-UAV** : cette classe d'UAV est caractérisée par le fait qu'une seule personne suffit aux opérations. Ce type de drones est en général propulsé électriquement. Ainsi, ils permettent de faire des vols à l'intérieur. Le coût peu élevé des matériaux et des composants rend cette catégorie attractive pour réaliser des applications civiles peu coûteuses.

**Mini-UAV** : les opérations de cette classe de drones exigent une équipe plus fournie que celle de micro-UAV. Ces drones volent en général à une vitesse de 70 km/h à une altitude d'environ 3,5 km. Leur durée d'intervention est d'environ 4h avec une charge utile de 4 kg ;

**MALE/HALE** : Les drones MALE (Medium Altitude High Endurance) sont utilisés pour des vols de plus longue durée à une altitude opérationnelle de 10 à 15 Km. Les drones HALE (High Altitude High Endurance) volent à une altitude d'environ 20 km. Ces deux types de drones font partie de la classe de grande taille pouvant accomplir des

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.1. LES CATÉGORIES DE DRONES

missions atteignant 2 jours. Les représentants les plus connus sont le Predator (MALE) et le Global Hawk (HALE) des forces armées Nord-Américaines ;

**UCAV** : ce type de drones est celui qui se trouve entre les mains des forces armées jouant un rôle offensif. A l'heure actuel, ces drones se trouvent au stade des études ou de la réalisation de prototypes, par exemple le X-45 de Boeing.

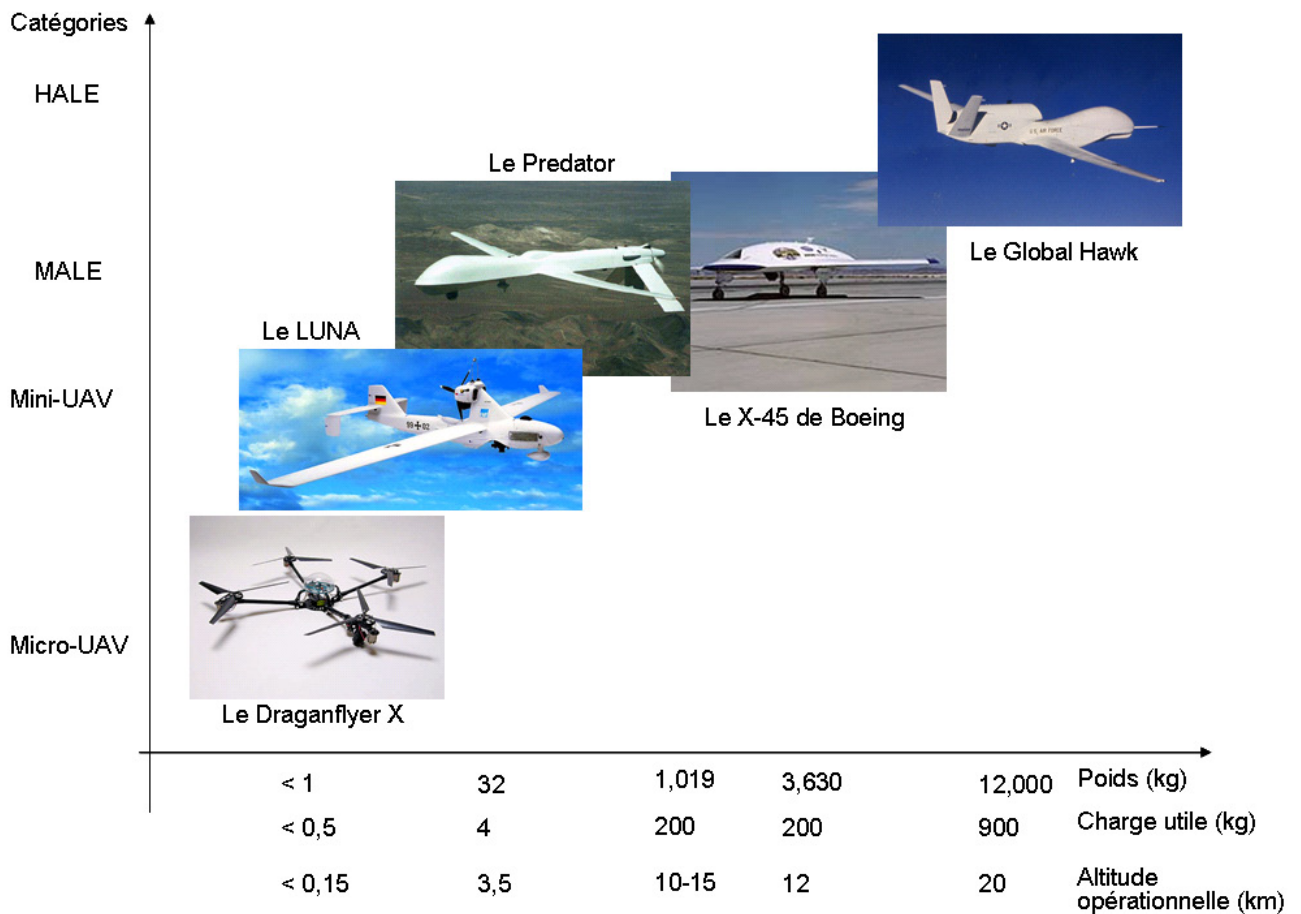


FIG. 2.1 – Les catégories de drones

Le fonctionnement aérodynamique fournit une autre possibilité de classification. Ainsi, les drones peuvent être structurés principalement en trois familles :

- ceux à voilures fixes ;
- ceux à voilures tournantes ;
- les aéronefs à ailes battantes (ornithoptères).

Une étude bibliographique montre que la recherche en robotique aérienne s'est principalement focalisée sur des drones à voilures tournantes : des hélicoptères et des architectures "VTOL" (Vertical Take-off and Landing). Ces véhicules capables de décoller et d'atterrir

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.2. L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

à la verticale, ont été employés pour des applications militaires et pour des applications civiles telles que, par exemple, le secours et la recherche de blessés dans un désastre, la surveillance environnementale, la cartographie aérienne, la surveillance du trafic routier, la cinématographie ou encore l'anthropologie.



FIG. 2.2 – Les catégories de micro drones

## 2.2 L'hélicoptère à quatre rotors

Parmi les véhicules capables de décoller et d'atterrir à la verticale, le plus connu est certainement l'hélicoptère standard qui est composé d'un rotor principal et d'un rotor de queue. Cependant, depuis quelques années, de nombreuses études sont menées sur d'autres véhicules aériens autonomes, tels que par exemple, l'hélicoptère à quatre rotors souvent appelé X4-Flyer. L'hélicoptère à quatre rotors possède certains avantages par rapport aux hélicoptères conventionnels. En raison de sa symétrie, ce véhicule est dynamiquement élégant, simple à dessiner et à construire. En fait, il est plus aisé de réaliser un vol stationnaire avec quatre forces de poussées opérant à une même distance du centre de masse qu'avec une seule force de poussée agissant sur le centre de masse. De plus, les pales peuvent être protégées par un carénage, ce qui rend leur utilisation plus sûre que celle des hélicoptères conventionnels, qui sont dangereux à utiliser dans des espaces réduits à cause des pales tournantes non protégées.



## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.3. ARCHITECTURE DU PROTOTYPE DU GIPSA-LAB

---

La miniaturisation des capteurs, des composants électroniques, l'augmentation des capacités de traitement des calculateurs et le progrès réalisé dans le développement des batteries à polymères de nouvelle génération rendent aujourd'hui possible l'implantation de systèmes embarqués, miniaturisés et autonomes.

Le Draganfly (voir figure 1.17 page 34) est un hélicoptère à quatre rotors, radio-commandé, disponible chez "Draganfly innovation, Inc" [29]. Cette plateforme est idéale pour comprendre certains concepts liés au vol de ce type d'aéronefs. Bien que le constructeur mentionne que cet aéronef soit beaucoup plus facile à piloter qu'un hélicoptère conventionnel (sur le site web on voit des personnes faisant voler le Draganfly), nous savons qu'il faut être un pilote expert pour réaliser un vol stationnaire avec cet engin.

Le travail présenté dans ce manuscrit a parmi ses objectifs, le développement d'algorithmes de commande qui permettent la commande en attitude (orientation) d'un hélicoptère à quatre rotors, d'une manière facile et transparente par l'utilisateur. L'objectif est que le véhicule puisse être facilement commandé par des opérateurs qui ne sont pas experts. En conséquence, l'hélicoptère doit être capable de commander automatiquement sa position angulaire, afin de faciliter le travail de l'opérateur. Une description plus exhaustive à propos de la commande sera présentée dans le chapitre 4 où nous développerons des stratégies pour la commande et la stabilisation du drone à quatre rotors.

### 2.3 Architecture du prototype du GIPSA-Lab

Le département d'automatique du laboratoire GIPSA-Lab possède un prototype expérimental d'hélicoptère à quatre rotors. A l'origine, ce prototype a été acheté [29] : le Draganfly est un système qui est utilisé par diverses équipes de chercheurs afin de tester des algorithmes de commande. Néanmoins, l'électronique de celui-ci est verrouillée, faisant de cette plateforme un système inexploitable.

Afin d'atteindre nos objectifs, toute l'architecture électronique de l'appareil a été reconstruite au laboratoire. La conception judicieuse de l'électronique de cet appareil a permis l'insertion et l'amélioration des capteurs indispensables à la stabilisation de l'appareil.

- Le cahier des charges dans cette architecture tient compte de deux points principaux :
- les contraintes physiques : esthétique correcte avec un faible encombrement et une faible masse ;
  - les contraintes techniques : alimentation par pile pour la partie au sol et pour la partie embarquée, alimentation par batterie. L'objet technique a été développé de façon à avoir une consommation "faible" (la plus réduite possible afin d'assurer une autonomie de l'engin).

Dans la nouvelle architecture électronique, nous pouvons identifier cinq modules princi-

---

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.3. ARCHITECTURE DU PROTOTYPE DU GIPSA-LAB

---

paux (voir figure 2.3, page 45) :

1. Module de capteurs d'attitude : ce module est constitué d'une centrale d'attitude [74], composée de neuf capteurs de technologie MEMS, à savoir, trois gyromètres, trois accéléromètres et trois magnétomètres. Ce module permet d'obtenir les neuf mesures, de calculer l'attitude (en utilisant un algorithme implanté par le fabricant) et de transmettre les données soit sous forme d'angles d'Euler ou sous forme de quaternions, au moyen d'une transmission série RS-232. Le module permet aussi de transmettre les neuf mesures "brutes", permettant d'implanter des algorithmes d'estimation de l'attitude plus performantes que celui du fabricant ;
2. Module de communication : le module radio SPM2-433-28 est un modem de communication qui fait le lien entre la partie embarquée et la station sol. Le modem dispose d'un débit de 28 Kbps/s avec système de correction d'erreur intégré de type "accusé de réception" ;
3. Module de contrôle : ce module est composé d'un microcontrôleur ( $\mu c$ ) Cygnal C8051F021 à 8 bits, qui opère avec un quartz de 22,1184 MHz. Dans ce microcontrôleur, les algorithmes de commande pour la stabilisation de l'attitude sont implantés. Le choix de ce composant est guidé par le gain de place important grâce à sa faible taille et à ses grandes capacités de calcul ;
4. Module de puissance : ce module convertit les signaux de commande en tensions à appliquer aux bornes des moteurs ;
5. Module actionneurs : il est composé par les actionneurs de l'hélicoptère qui sont constitués d'une hélice avec un angle de pas fixe, accouplée à un moteur à courant continu par l'intermédiaire d'un engrenage. De plus, nous avons un capteur optique associé à chaque actionneur. Cela permet via le microcontrôleur central de mesurer la vitesse de rotation de la pale, dans le but de l'asservir.

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.3. ARCHITECTURE DU PROTOTYPE DU GIPSA-LAB

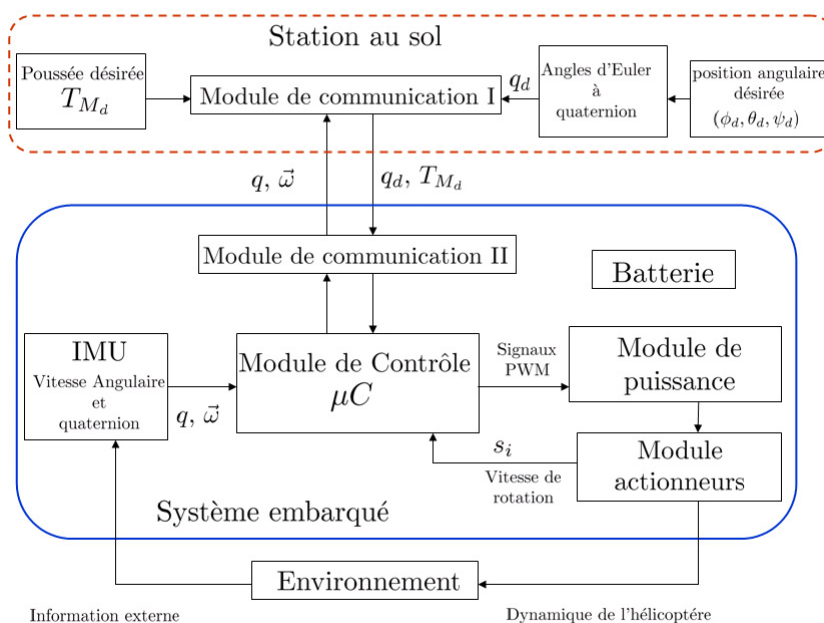


FIG. 2.3 – Architecture électronique du prototype de l'hélicoptère à quatre rotors de GIPSA-Lab



FIG. 2.4 – Prototype de l'hélicoptère à quatre rotors de GIPSA-Lab

## 2.4 Fonctionnement de l'hélicoptère à quatre rotors

Comme montré dans la figure 2.5, les moteurs arrière et avant ( $M_1, M_3$ ) tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsque les moteurs droit et gauche ( $M_2, M_4$ ) tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Chaque actionneur produit une force  $f_i$  parallèle à son axe de rotation, ainsi qu'un couple résistant<sup>1</sup>  $Q_i$  opposé au sens de rotation. La force totale ou poussée totale exercée sur l'hélicoptère (parallèle à l'axe  $z_b$ ) est la somme des quatre forces générées par chaque actionneur ( $F_T = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ ). La combinaison des forces  $f_i$  et des couples résistants  $Q_i$  donne origine aux mouvements angulaires autour des axes principaux de l'hélicoptère :

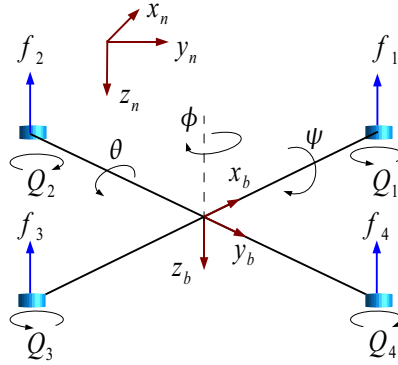


FIG. 2.5 – Fonctionnement de l'hélicoptère à quatre rotors

**mouvement de tangage** ( $\theta$ ) : ce mouvement est assuré par la différence des forces ( $f_1, f_3$ ) produites par les actionneurs avant et arrière. Cette différence de forces produit un couple  $\Gamma_\theta$  autour de l'axe  $y_b$  ;

**mouvement de roulis** ( $\phi$ ) : ce mouvement est assuré par la différence des forces ( $f_2, f_4$ ) produites par les actionneurs droit et gauche . Cette différence de forces produit un couple  $\Gamma_\phi$  autour de l'axe  $x_b$  ;

**mouvement de lacet** ( $\psi$ ) : ce mouvement est assuré pour la somme des couples de traînée ( $Q_i$ ) produits par les quatre actionneurs. Etant donné que les sens de rotation des actionneurs ( $M_1, M_3$ ) et ( $M_2, M_4$ ) sont opposés, nous pouvons régler la somme des quatre couples résistants. Quand les quatre rotors tournent à la même vitesse, ils sont soumis au même couple résistant dont la somme est nulle. Par conséquent, il n'y a pas de rotation autour de l'axe  $z_b$ <sup>2</sup>. Par contre, si nous provoquons une différence de vitesse

<sup>1</sup>Dans la littérature des hélicoptères, ce couple est connu sous le nom de "couple de traînée".

<sup>2</sup>L'ensemble moteur-hélice-réducteur (actionneur) représente un système pour lequel le moment cinétique autour de l'axe de rotation du rotor se conserve. Chaque hélice tournant à une certaine vitesse génère un couple résistant opposé au sens de rotation. Grâce à la symétrie de l'hélicoptère à quatre rotors, l'effet gyroscopique est annulé.

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.4. FONCTIONNEMENT DE L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

---

entre les moteurs tournant en sens opposé, les couples résistants provoquent un couple  $\Gamma_\psi$  autour de l'axe  $z_n$ , provoquant ainsi la rotation de l'engin.

Notons que la force de poussée  $F_T$  est celle qui garantit la sustentation de l'hélicoptère. Néanmoins, lorsque l'hélicoptère effectue une inclinaison ( $\theta \neq 0$  ou  $\phi \neq 0$ ), cette force donne lieu à une translation horizontale. En fait, l'hélicoptère à quatre rotors est un système mécanique sous-actionné, (SMS-A)<sup>3</sup>, *i.e.* le déplacement horizontal dépend directement de la position angulaire.

De manière générale et d'après la description des mouvements angulaires, nous pouvons classer trois principaux types de vols :

**le vol stationnaire** : en montée verticale et après avoir franchi le seuil définissant l'effet du sol (HES)<sup>4</sup>, l'hélicoptère peut rester en vol stationnaire à une certaine hauteur constante par rapport au sol en ayant une vitesse de translation nulle. La force de sustentation doit alors équilibrer le poids  $mg$  de l'hélicoptère. Cette force de sustentation correspond à une force de poussée  $F_T$  qui est orientée (en l'absence de perturbation) dans la direction de l'axe  $z_b$ . Dans ce mode de vol, l'hélicoptère a la liberté de faire des rotations autour de l'axe  $z_b$  qui, dans ce cas, coïncide avec l'axe  $z_n$  du système de coordonnées inertiel ;

**les translations verticales** : elles sont définies lorsque l'hélicoptère se déplace suivant l'axe  $z_n$ . En l'absence de perturbations, la force de poussée  $F_T$  est toujours verticale et en montée elle est toujours supérieure au poids de l'hélicoptère ( $F_T > mg$ ) tandis qu'en descente elle est inférieure ( $F_T < mg$ ). Comme nous l'avons mentionné précédemment, la combinaison de l'inclinaison ( $\theta \neq 0$  ou  $\phi \neq 0$ ) de l'hélicoptère et de la force de poussée  $F_T$  produit une composante de la force suivant l'axe  $x_n$  et/ou  $y_n$ . Cette force est connue comme la force de traction et celle-ci assure la translation du système dans la direction du vol souhaitée. Par conséquent, les translations verticales sont aussi définies quand l'hélicoptère se déplace dans deux directions simultanément, par exemple dans les plans  $x_n z_n$  ou  $y_n z_n$  ;

**les translations Horizontales** : elles sont définies de façon similaire aux translations verticales mais cette fois-ci dans le plan  $x_n y_n$ . Lorsqu'une translation est effectuée suivant la direction  $x_n$  et la force de poussée maintient le système à une hauteur constante par rapport au sol, le système effectue un vol connu dans la littérature sous le nom de "vol en palier".

---

<sup>3</sup> Le nombre de degrés de liberté d'un SMS-A est inférieur au nombre d'entrées de commande ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $m < n$ ).

<sup>4</sup>Lorsque l'hélicoptère est près du sol, l'air aspiré par les actionneurs (moteur-hélice-réducteur) forme une couche d'air comprimé entre le véhicule et le sol. Cet effet est connu sous le nom du effet de sol et en général il est considéré nul quand l'hélicoptère se trouve à une hauteur égale ou supérieure à son diamètre.

D'après la description des mouvements angulaires et des déplacements verticaux et horizontaux, nous pouvons remarquer que le déplacement de l'engin dépend directement de son orientation (attitude). De cette façon, le déplacement peut être commandé en commandant de façon performante l'orientation, donnant origine à une commande semi-automatique de la position.

Désormais, nous allons nous intéresser à la description des forces et couples et par conséquent du modèle dynamique qui gère le mouvement de l'hélicoptère à quatre rotors.

## 2.5 Forces et Couples Aérodynamiques

L'objectif principal de cette partie est la détermination des expressions des différents forces et couples aérodynamiques produits par chaque actionneur. Ils sont exprimés, principalement, en fonction de la vitesse de rotation du rotor du moteur à courant continu et de la géométrie de la pale. Nous considérons que les forces et couples de chaque actionneur sont indépendants. Comme les quatre actionneurs ont des caractéristiques similaires, on s'est intéressé à un seul.

L'analyse se base sur une décomposition de la pale en tranches élémentaires entre le pied de pale et la périphérie de l'actionneur. Ensuite, la force parallèle à l'axe de l'actionneur  $f$  (force de poussée) et la traînée  $Q$ , correspondant à chaque tranche sont calculées à partir des formules de base de l'aérodynamique [83]. Notons qu'il existe des modèles plus complexes et sophistiqués pour décrire l'aérodynamique des pales, mais les expressions obtenues sont en pratique difficilement exploitables pour notre application [4].

Considérons donc un élément différentiel de la pale comme celui montré sur la figure 2.6.

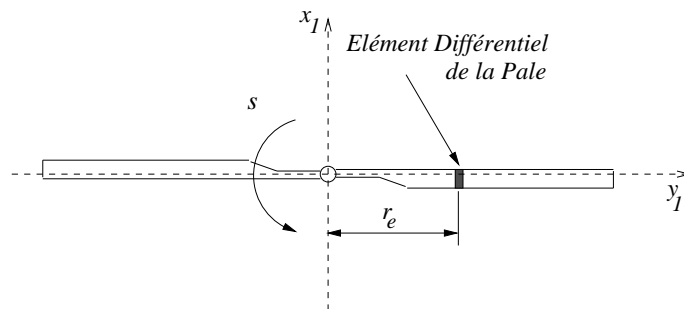


FIG. 2.6 – Élément différentiel de la pale

Pour cet élément, l'amplitude de la force de sustentation est donnée par [83] :

$$\Delta L = P_d c_l c_M \Delta r_e \tag{2.1}$$

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES

où  $\Delta L$  est l'incrément de force de sustentation,  $P_d = \frac{\rho}{2}V_T^2$  est la pression dynamique,  $c_l = a\alpha$  est le coefficient de sustentation,  $c_M$  est la longueur de la corde de la pale et  $\Delta r_e$  est l'incrément de distance radiale. L'équation (2.1) peut être écrite sous la forme :

$$\Delta L = \frac{\rho}{2}V_T^2 a \alpha c_M \Delta r_e \quad (2.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $V_T$  la valeur algébrique de la vitesse tangente à la corde de l'élément de la pale,  $a$  la pente de la courbe de la force de sustentation et  $\alpha$  l'angle d'attaque de l'élément de la pale. L'amplitude de la force de sustentation  $f$  pour une pale et pour une certaine valeur de l'angle d'azimut du rotor est donnée par :

$$f = \int_0^{R_M} \frac{\Delta L}{\Delta r_e} dr_e \quad (2.3)$$

La force de poussée totale dans un actionneur est égale au nombre de pales ( $N$ ) multiplié par la force moyenne de sustentation pour chaque pale :

$$f = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \frac{\Delta L}{\Delta r_e} dr_e d\gamma = \frac{N\rho a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} V_T^2 \alpha dr_e d\gamma \quad (2.4)$$

Nous considérons que  $\rho$  et  $a$  sont constantes dans la direction de la longueur de la pale et que  $c_M$  est constant suivant la largeur de pale. L'angle d'attaque  $\alpha$  de la pale est défini par :

$$\alpha = \varphi + \arctan\left(\frac{V_P}{V_T}\right) \quad (2.5)$$

L'angle de pas ou de tangage  $\varphi$  varie linéairement par rapport à la position radiale  $r_e$  selon la relation :

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{r_e}{R_M} \varphi_{tw} \quad (2.6)$$

où  $\varphi_0$  est l'angle de pas au voisinage de l'axe de l'actionneur et  $\varphi_{tw}$  est le coefficient de torsion.  $V_P$  est la valeur algébrique de la vitesse perpendiculaire à la pale dans le plan contenant l'axe de l'actionneur. Les vitesses  $V_T$  et  $V_P$  sont illustrées dans la figure 2.7.

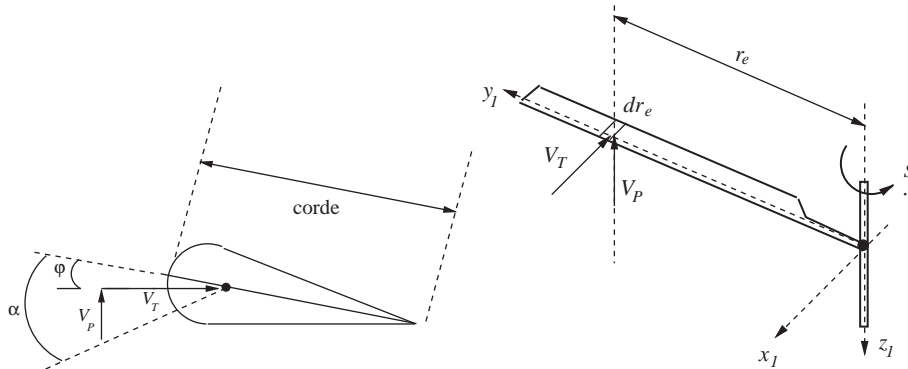


FIG. 2.7 – Vitesses tangentielle  $V_T$  et perpendiculaire  $V_P$

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES

En approximant  $\arctan\left(\frac{V_P}{V_T}\right) \approx \frac{V_P}{V_T}$ , nous pouvons écrire :

$$f = \frac{N\rho a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} [V_T^2 \varphi + V_T V_P] dr_e d\gamma \quad (2.7)$$

Considérons maintenant le cas du couple résistant ou couple de traînée de l'actionneur. De la même manière que précédemment, nous utilisons un élément différentiel de pale (voir figure 2.8) pour lequel le couple résistant est donné par :

$$\Delta Q = (\Delta D \cos(\iota_e) + \Delta L \sin(\iota_e)) r_e \quad (2.8)$$

où  $\Delta D \cos(\iota_e)$  représente l'incrément de force de traînée du profil de la pale,  $\Delta L \sin(\iota_e)$  représente l'incrément de force de traînée induit dû à l'inclinaison de la force de sustentation et  $\iota_e$  est l'angle d'incidence de l'élément de pale.

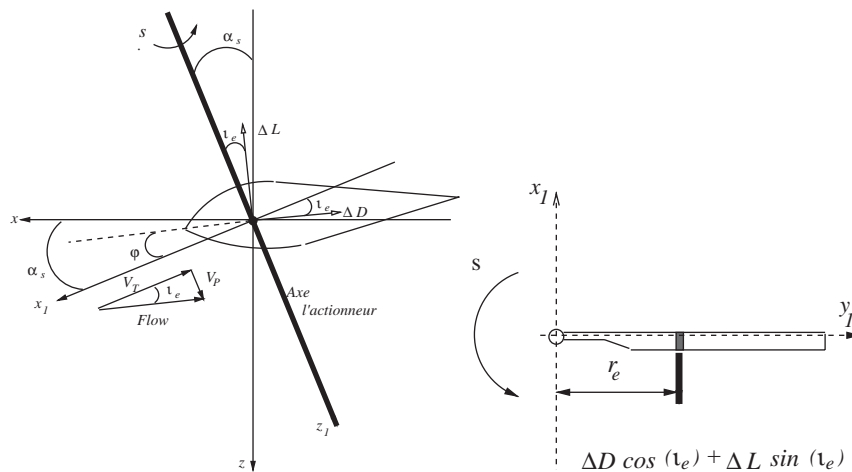


FIG. 2.8 – Composantes du couple résistant

L'équation (2.8) peut être écrite de la manière suivante :

$$\Delta Q = \left( \frac{\rho}{2} c_d c_M V_T^2 \Delta r_e + \frac{\rho}{2} c_l c_M V_T^2 \Delta r_e \frac{V_P}{V_T} \right) r_e \quad (2.9)$$

où  $c_d$  est le coefficient de traînée qui peut être approximé en fonction de l'angle moyen d'attaque et du nombre de Mach à 75 % de la longueur de la pale<sup>5</sup>. En considérant la

<sup>5</sup>Dans le cas d'un actionneur de l'hélicoptère à quatre rotors, le nombre de Mach  $M = \frac{V}{v_s} = \frac{sR_M}{v_s}$  (où  $v_s = 340.6 \text{ m/sec}$  est la vitesse du son au niveau de la mer) peut varier entre 0.0210 et 0.0273 pour le 75% mentionné et pour les amplitudes de vitesse de rotation entre 200  $\text{rad/sec}$  et 260  $\text{rad/sec}$ , ce qui donne un coefficient  $c_d = 0.01$  pour des angles d'attaque inférieurs à  $8^\circ$  [83], [4].



## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES

---

contribution totale en un tour tout au long des pales, le nombre de pales de l'actionneur, l'équation (2.5) et l'approximation  $\arctan\left(\frac{V_P}{V_T}\right) \approx \frac{V_P}{V_T}$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{N\rho a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} V_T^2 + V_T^2 \alpha \frac{V_P}{V_T} \right] r_e dr_e d\gamma \\
 &= \frac{N\rho a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} V_T^2 + V_T V_P \varphi + V_P^2 \right] r_e dr_e d\gamma
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les forces de traînées sur les actionneurs sont connues comme les forces horizontales ou plus simplement forces- $H$ . La force- $H$  est toujours perpendiculaire à l'axe de l'actionneur et son amplitude peut varier de façon importante lorsqu'il existe des petits changements des conditions au vol. Les forces- $H$  sont généralement des forces négligeables par rapport aux forces de poussée. Ces forces ne seront pas prises en compte dans la conception de la commande. Néanmoins, elles seront exploitées dans le modèle utilisé par notre simulateur afin de reproduire le plus fidèlement possible l'environnement du vol.

L'expression de la force- $H$  est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta F_H = (\Delta D \cos(\iota_e) + \Delta L \sin(\iota_e)) \sin(\gamma) \tag{2.11}$$

De façon similaire à l'équation pour le couple de traînée (2.10), la force  $H$  devient :

$$F_H = \frac{N\rho a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} V_T^2 + V_T V_P \varphi + V_P^2 \right] \sin(\gamma) dr_e d\gamma \tag{2.12}$$

Afin d'effectuer l'intégration des équations (2.7), (2.10) et (2.12), il est nécessaire de déterminer les vitesses  $V_P$  et  $V_T$ . En fait, ces vitesses peuvent être déterminées à partir de la figure 2.9.  $V$  représente le vecteur de vitesse relative de translation de l'hélicoptère dans l'espace à trois dimensions.  $V_{\parallel}$  est le vecteur de vitesse parallèle au plan de rotation de l'axe de l'actionneur,  $\alpha_s$  est considéré négatif lors d'une translation en montée ou lors d'un vol en palier.  $\delta$  est l'angle latéral de translation par rapport à l'axe longitudinal de l'hélicoptère. A partir de la figure 2.9, nous pouvons vérifier que :

$$V_T = |V| \cos(\alpha_s) \sin(\gamma - \delta) + s r_e \tag{2.13}$$

La vitesse  $V_P$  est composée de deux termes principaux :

$$V_P = -|V| \sin(\alpha_s) + V_{ind} \tag{2.14}$$

où  $|V| \sin(\alpha_s)$  est la composante perpendiculaire de la vitesse de translation et  $V_{ind}$ <sup>6</sup> est la vitesse du vent induite, considérée parallèle à l'axe de l'actionneur [33].

---

<sup>6</sup> $V_{ind} = \sqrt{-\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{mg}{2\rho A}\right)^2}} \text{ [m/sec]}$

**CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS**  
**2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES**

---

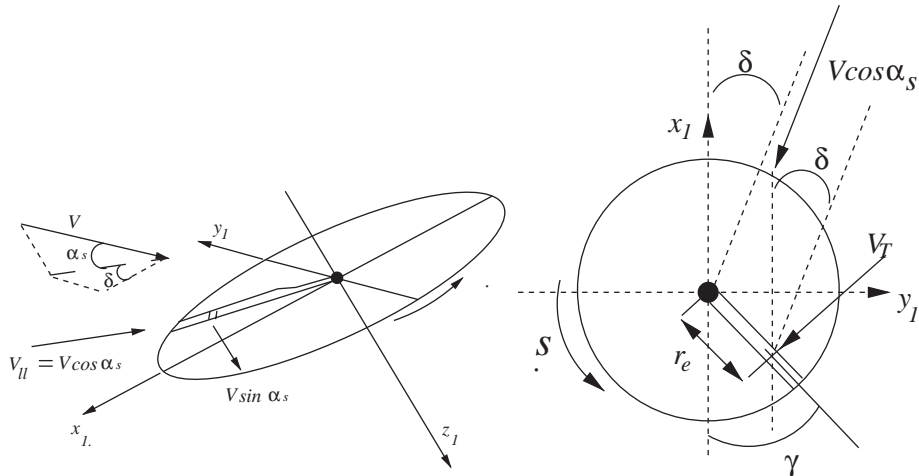


FIG. 2.9 – Composantes de la vitesse sur l'axe de l'actionneur

Maintenant, nous allons définir deux quantités adimensionnelles qui sont utilisées dans la littérature des hélicoptères [33]. Le premier facteur lie la vitesse du vent induit  $V_{ind}$  à la composante perpendiculaire de la vitesse de translation  $V_v = |V| \sin(\alpha_s)$  et à la vitesse de rotation  $s$ , de l'axe de l'actionneur. Il est défini par :

$$\lambda = \frac{V_{ind} - |V| \sin(\alpha_s)}{sR_M} \quad (2.15)$$

Une autre quantité adimensionnelle qui relie la vitesse de translation de l'hélicoptère à la vitesse de rotation de l'axe de l'actionneur est donnée par :

$$\mu = \frac{|V| \cos(\alpha_s)}{sR_M} = \frac{V_h}{sR_M} \quad (2.16)$$

Afin de réduire la complexité des calculs, nous allons considérer que le vol de translation de l'hélicoptère est un vol en palier [83]. Par conséquent, nous avons  $\alpha_s \approx 0$  et  $\delta \approx 0$ <sup>7</sup>. Les vitesses  $V_P$  et  $V_T$  sont données par :

$$\begin{aligned} V_P &= sR_M \lambda \\ V_T &= sR_M \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

La force de poussée totale générée par chaque actionneur peut être calculée en intégrant

---

<sup>7</sup>Le lecteur se reportera à [4] où les expressions générales pour la force et le couple sont données.

**CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS**  
2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES

---

l'équation (2.7), comme suit :

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{N\rho ac_M (sR_M)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right)^2 \left( \varphi_0 - \frac{r_e}{R_M} \varphi_{tw} \right) + \lambda \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right) \right] dr_e d\gamma \\
 &= N\rho ac_M s^2 R_M^3 \left[ \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu^2 \right) \varphi_0 - (1 + \mu^2) \frac{\varphi_{tw}}{8} - \frac{1}{4} \lambda \right] \\
 &= b_2 s^2 + b_1 s + b_0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 b_2 &= N\rho ac_M R_M^3 \left( \frac{1}{6} \varphi_0 - \frac{1}{8} \varphi_{tw} \right) \\
 b_1 &= -N\rho ac_M R_M^3 \frac{1}{4} \frac{V_{ind}}{R} \\
 b_0 &= N\rho ac_M R_M^3 \left( \frac{1}{4} \varphi_0 - \frac{1}{8} \varphi_{tw} \right) \frac{V_h^2}{R_M^2}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Le couple résistant ou couple de traînée généré par chaque actionneur est calculé en intégrant l'équation (2.10) :

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{N\rho ac_M (sR_M)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right)^2 + \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right) \left( \varphi_0 - \frac{r_e}{R_M} \varphi_{tw} \right) + \lambda^2 \right] r_e dr_e d\gamma \\
 &= N\rho ac_M s^2 R_M^4 \left[ \frac{1}{8a} (1 + \mu^2) c_d + \lambda \left( \frac{1}{6} \varphi_0 - \frac{1}{8} \varphi_{tw} - \frac{1}{4} \lambda \right) \right] \\
 &= \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \kappa_2 &= N\rho ac_M R_M^4 \frac{c_d}{8a} \\
 \kappa_1 &= -N\rho ac_M R_M^3 \frac{1}{4} \frac{V_{ind}}{R} \left( \frac{1}{6} \varphi_0 - \frac{1}{8} \varphi_{tw} \right) \\
 \kappa_0 &= -N\rho ac_M R_M^3 \left[ \frac{1}{4} \frac{V_{ind}^2}{R^2} \right]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour les actionneurs comme ceux de l'hélicoptère à quatre rotors, la vitesse moyenne de rotation peut atteindre une vitesse  $s = 250 \text{ rad/sec}$ . Dans les équations (2.18) et (2.23), nous observons que le terme quadratique de la vitesse de rotation est prédominant. Par conséquent, celles-ci peuvent être approximées par :

$$\begin{aligned}
 f &= b_2 s^2 \\
 Q &= \kappa_2 s^2
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES

---

Dans la suite, nous allons utiliser la notation  $b = b_2$  et  $\kappa = \kappa_2$ . Les valeurs de ces paramètres seront nécessaires dans la conception de la commande.

Maintenant, nous allons trouver l'expression de la force- $H$  qui a lieu dans chaque actionneur. De forme similaire à l'équation de la force de poussée et du couple, la force- $H$  peut être calculée en intégrant l'équation (2.12) :

$$\begin{aligned}
 F_H &= \frac{N\rho a c_M (sR_M)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[ \frac{c_d}{a} \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right)^2 + \left( \frac{r_e}{R_M} + \mu \sin \gamma \right) \left( \varphi_0 - \frac{r_e}{R_M} \varphi_{tw} \right) + \lambda^2 \right] \sin(\gamma) dr_e d\gamma \\
 &= N\rho a c_M s^2 R_M^4 \left[ \frac{1}{4} \mu c_d + \frac{1}{4} \lambda \left( \varphi_0 - \frac{\varphi_{tw}}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

### Identification des paramètres aérodynamiques

Afin de déterminer les valeurs des constantes aérodynamiques de l'équation 2.22, nous avons utilisé une chaîne de traction développée au sein du groupe microsystemes du laboratoire G2Elab. Le montage utilisé à cet effet est montré dans la figure 2.10. Ce montage comprend :

- un capteur de couple (*N.m*) ;
- un capteur de vitesse (*tr/min*) ;
- un capteur de traction (*gramme*).

Le montage comprend aussi un ordinateur, une carte d'acquisition au format PCMCIA et divers appareils électroniques associés qui permettent de piloter l'expérience, acquérir les signaux et traiter les données. Le logiciel utilisé pour piloter l'expérience est LabView, qui permet de recueillir toutes les données afin de faire un post-traitement.

Pour la série d'essais effectués, nous avons utilisé comme alimentation une batterie de voiture qui permet de simuler l'environnement réel de l'actionneur, ainsi que de fournir le courant demandé (pas de limitation de courant).

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, les paramètres aérodynamiques dépendent du nombre de pales et de leur rayon, de leur angle d'attaque et de la densité de l'air. L'expérience a été effectuée pour des conditions de vol stationnaire avec  $\alpha_s \approx 0$  et  $\delta \approx 0$ . On suppose que les expériences sont effectuées dans des conditions d'une atmosphère standard<sup>8</sup>.

L'expérience consiste à faire varier la vitesse de rotation du moteur et à enregistrer les données issues des trois capteurs. Les données obtenues sont montrées dans la figure 2.11. Une simple régression linéaire nous a permis de déterminer les valeur de  $b$  et  $\kappa$  (tableau 2.1).

---

<sup>8</sup>Une atmosphère standard au niveau de la mer concerne une température de 15° C décroissante de -2° C par mille et une pression de 101,325 kPa.

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.5. FORCES ET COUPLES AÉRODYNAMIQUES

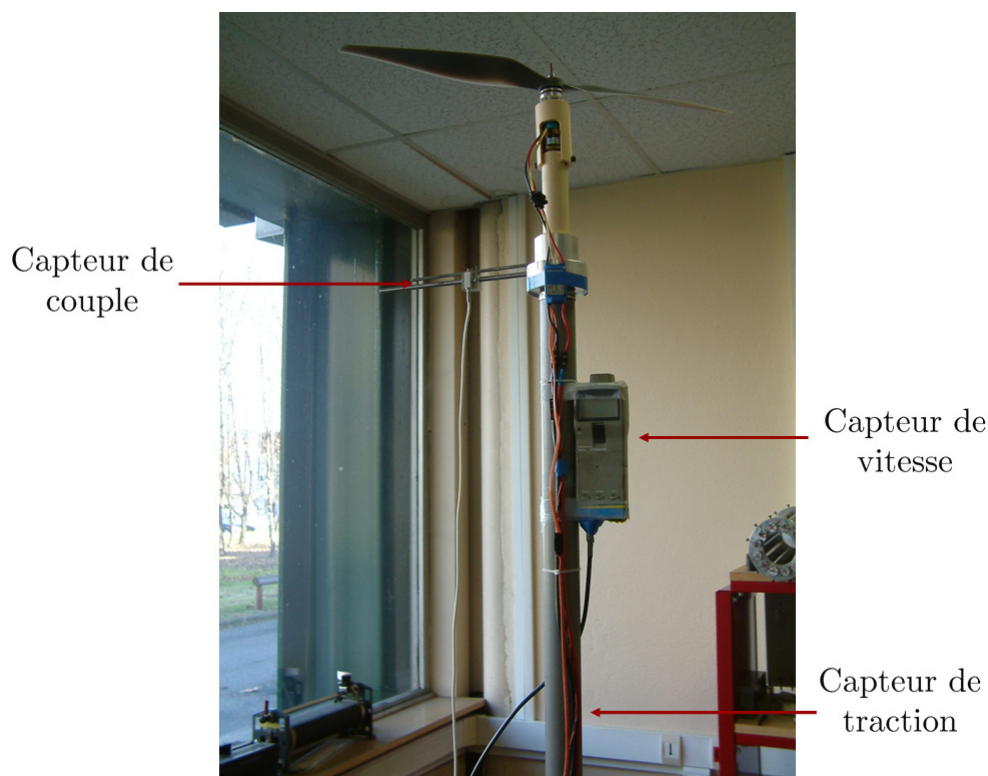


FIG. 2.10 – Chaîne de Traction

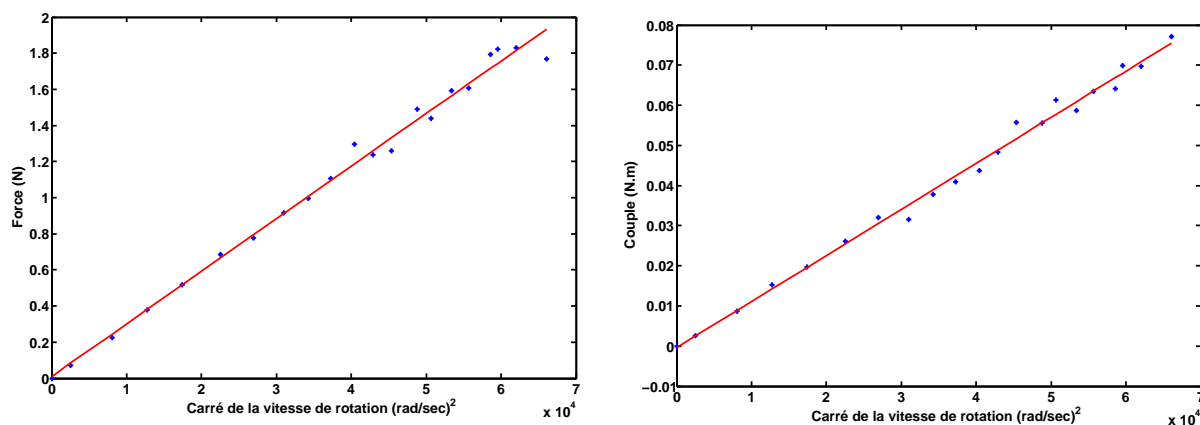


FIG. 2.11 – Détermination des paramètres aérodynamiques

Paramètre	Description	Valeur (USI)
$b$	paramètre de la force de poussé	$29.1 \times 10^{-5}$
$\kappa$	paramètre de traînée	$1.14 \times 10^{-6}$

TAB. 2.1 – Paramètres aérodynamiques

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.6. FORMULATION D'UN MODÈLE GÉNÉRAL

Les paramètres montrés dans le tableau 2.2 ont été mesurés ou obtenus de la littérature. Ces paramètres ont été intégrés dans un modèle numérique, qui nous a permis de simuler la dynamique du vol de notre hélicoptère à quatre rotors.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$N$	nombre de pales	2	
$R_M$	rayon des pales	0.145	m
$c_M$	corde	0.041	m
$\varphi_0$	angle de pas au voisinage de l'axe	0.2812	rad
$\varphi_{tw}$	coefficient de torsion	0.041	rad
$a$	pente de la courbe de la force de sustentation	5.7	
$\rho$	masse volumique de l'air	1.293	$Kg/m^3$

TAB. 2.2 – Caractéristiques aérodynamiques

## 2.6 Formulation d'un modèle général

Dans un premier temps nous utiliserons les hypothèses suivantes afin d'établir les équations du mouvement :

1. la structure en forme de croix, qui est construite en fibre de carbone est supposée être rigide ;
2. l'hélicoptère possède une structure parfaitement symétrique, ce qui permet de considérer une matrice d'inertie diagonale ;
3. l'évolution du vol en palier et du vol stationnaire sont supposés être effectués hors de l'effet du sol. Les effets de compressibilité de la couche d'air en dessous de l'hélicoptère ne sont donc pas pris en compte. Ils pourront être considérés pour une étude ultérieure de robustesse ;
4. la force de poussée  $f_i$  et le couple résistant  $Q_i$  générés par chaque actionneur sont supposés proportionnels au carré de la vitesse de rotation de la pale ;
5. le vol de l'hélicoptère est supposé effectué dans des conditions d'une atmosphère standard ;
6. les perturbations produites par le vent sont initialement négligées. Elles pourront être considérées pour une étude ultérieure de robustesse.

Il existe différentes approches pour décrire les équations dynamiques d'un système, à savoir, l'approche de Newton-Euler, qui exploite les concepts de forces et couples mais également l'approche de Lagrange qui exploite les concepts d'énergie potentielle et cinétique.

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.6. FORMULATION D'UN MODÈLE GÉNÉRAL

---

Dans ce travail, nous allons utiliser les quaternions unitaires pour représenter l'attitude et l'approche de Newton-Euler sera utilisée afin d'obtenir les équations dynamiques du système<sup>9</sup>.

Nous considérons deux systèmes de coordonnées ( $N$  et  $B$ ) tels que ceux montrés dans la figure 2.5.  $B(x_b, y_b, z_b)$  est le repère fixé au corps et son origine coïncide avec le centre de gravité (CG) de l'hélicoptère.  $N(x_n, y_n, z_n)$  est le repère inertiel défini comme un plan tangent à la surface de la terre, tel que les vecteurs unitaires  $(x_n, y_n, z_n)$  coïncident respectivement avec les directions Nord, Est et la pesanteur.

A partir du modèle décrit dans [82], de l'équation cinématique du quaternion présentée dans le paragraphe 1.1.1 et des équations (2.22) et (2.12) nous pouvons établir les équations de mouvement de l'hélicoptère à quatre rotors :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} \quad (2.24)$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} - \frac{1}{m} C^T(q) \vec{F} - \vec{F}_H \quad (2.25)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega} \quad (2.26)$$

$$J_h \dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J_h \vec{\omega} - \Gamma_G + \Gamma_{\phi, \theta, \psi} \quad (2.27)$$

où  $m$  est la masse de l'hélicoptère et  $J_h \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sa matrice d'inertie.  $\vec{g}$  représente le vecteur de champ de gravité dans le repère  $N$ .  $\vec{p} = (x, y, z)^T$  et  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  sont la position et la vitesse linéaire de l'origine du repère  $B$ , dans le repère  $N$ .  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire de l'hélicoptère dans le système de coordonnées  $B$ .  $\vec{F} = [0 \ 0 \ F_T]^T$ , où  $F_T$  représente la somme des forces engendrées par les actionneurs.  $\vec{F}$  est définie dans  $B$ .  $\vec{F}_H = [F_{H_x} \ F_{H_y} \ 0]^T$  représente le vecteur des forces- $H$  dans le système de coordonnées  $N$ .

Les couples s'exerçant sur la structure de l'hélicoptère sont notés  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_{\phi, \theta, \psi}$ .  $\Gamma_G$  représente les couples gyroscopiques et  $\Gamma_{\phi, \theta, \psi}$  les couples de commande induits par la combinaison des forces et couples résistants générés par les actionneurs.

La force  $f_i$  fournie par l'actionneur  $n$  avec une vitesse de rotation de la pale  $s_n$  est modélisée de la façon suivante (voir paragraphe 2.5) :

$$f_i = b s_i^2 \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.28)$$

En supposant que les quatre actionneurs sont identiques, l'expression de la force  $F_T$  devient :

$$F_T = b \sum_{i=1}^4 s_i^2 \quad (2.29)$$

---

<sup>9</sup>Du fait que nous utilisons le quaternion pour représenter l'attitude, une approche de type Lagrange ne peut pas être utilisée, car le quaternion ne peut pas être considéré comme un système de coordonnées généralisées [35].

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.6. FORMULATION D'UN MODÈLE GÉNÉRAL

---

Les composantes du vecteur de forces- $H$  sont :

$$F_{H_x} = \sum_{i=1}^4 F_{H_{xi}} \quad (2.30)$$

$$F_{H_y} = \sum_{i=1}^4 F_{H_{yi}}$$

Le couple résistant  $Q_i$  lié à la résistance de l'air sur les pales est modélisé par :

$$Q_i = k s_i |s_i| \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.31)$$

A partir des équations (2.28) et (2.31), les composantes du vecteur de couples  $\Gamma_{\phi, \theta, \psi}$ , qui sera considéré comme le vecteur de commande, sont données par :

$$\Gamma_{\phi} = db(s_2^2 - s_4^2) \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{\theta} = db(s_1^2 - s_3^2) \quad (2.33)$$

$$\Gamma_{\psi} = k(s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 - s_4^2) \quad (2.34)$$

où  $d$  représente la distance entre le centre de masse de l'hélicoptère et l'axe des actionneurs. En combinant les équations (2.32)-(2.34) avec l'équation (2.29), nous pouvons exprimer les couples et les forces appliqués à l'hélicoptère de manière vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{\phi, \theta, \psi} \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & db & 0 & -db \\ db & 0 & -db & 0 \\ k & -k & k & -k \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \\ s_3^2 \\ s_4^2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$= NS$$

où  $S = [s_1^2 \ s_2^2 \ s_3^2 \ s_4^2]^T$  est le vecteur qui contient le carré de la vitesse de rotation des rotors.

Le couple gyroscopique  $\Gamma_G$  est une conséquence de la rotation simultanée de la structure de l'hélicoptère et de la rotation à grande vitesse des actionneurs. Le comportement de ce couple est régi par l'équation suivante :

$$\Gamma_G = \sum_{i=1}^4 J_a(\vec{\omega} \times z_b)(-1)^{i+1} s_i \quad (2.36)$$

Une des principales caractéristiques de l'hélicoptère à quatre rotors est sa symétrie. Par conséquent, la distribution de masse peut être considérée uniforme. Considérons que la structure de l'hélicoptère soit similaire à celle montrée dans la figure 2.12. Nous utilisons les définitions classiques pour les moments d'inertie et les produits d'inertie [35]. La matrice



## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.7. L'ACTIONNEUR, SES PARAMÈTRES ET SA COMMANDE

d'inertie  $J_h$  est calculée dans le repère lié au corps de l'hélicoptère et elle vaut :

$$J_h = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} y_h^2 + z_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_h^2 + z_h^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_h^2 + y_h^2 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

En accord avec les caractéristiques montrées dans le tableau 2.4, les composantes de la matrice d'inertie sont données dans la tableau 2.3.

Composante	Valeur	Unité
$J_{h_x}$	$8.28 \times 10^{-3}$	$Kg \cdot m^2$
$J_{h_y}$	$8.28 \times 10^{-3}$	$Kg \cdot m^2$
$J_{h_z}$	$15.7 \times 10^{-3}$	$Kg \cdot m^2$

TAB. 2.3 – Composantes de la matrice d'inertie

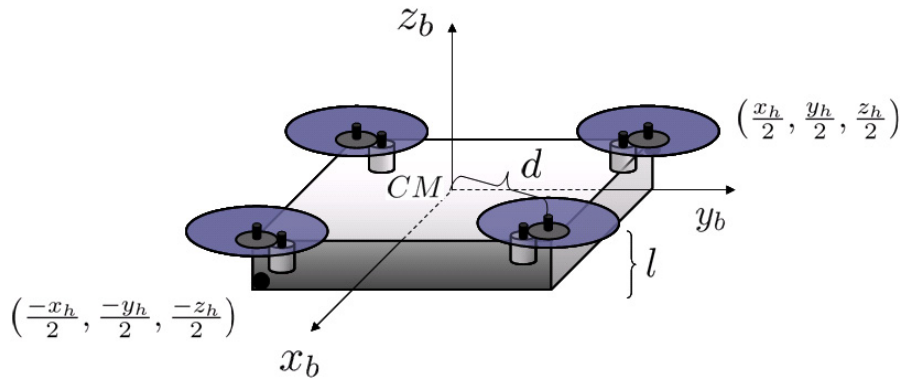


FIG. 2.12 – Corps de l'hélicoptère à quatre rotors

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$d$	distance entre le centre du masse et l'axe du rotor	0.225	m
$l$	hauteur	0.10	m
$m$	masse de l'hélicoptère	0.520	kg

TAB. 2.4 – Caractéristiques de l'hélicoptère

## 2.7 L'actionneur, ses paramètres et sa commande

Nous avons mentionné précédemment que le couple et la force de poussée pour chaque actionneur sont proportionnels au carré de la vitesse de rotation des pales (voir équations (2.28) et (2.31)). En asservissant la vitesse de rotation de l'actionneur, nous contrôlons la

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.7. L'ACTIONNEUR, SES PARAMÈTRES ET SA COMMANDE

force de poussée  $f_n$  et le couple de traînée  $Q_n$ . Par conséquent, nous contrôlons la force de poussée totale et les trois couples autour des axes de l'hélicoptère donnés par la relation (2.35).

L'actionneur est constitué de 2 pales avec un angle de pas fixe, accouplées à un moteur à courant continu par l'intermédiaire d'un engrenage. L'objectif est la conception d'une commande de vitesse, appliquée selon la figure 2.13. Cette commande va élaborer une consigne de tension de sorte que l'actionneur ait une vitesse de rotation égale à la vitesse désirée et assurant que la dynamique de l'actionneur (moteur-pale-engrenage.) soit largement au-delà de la bande passante de contrôle d'attitude, ce qui permet de s'affranchir de la dynamique du rotor dans la synthèse de la loi de commande pour l'attitude. Dans le chapitre 4, nous allons vérifier sur un prototype réel que le système est robuste par rapport à cette approximation.

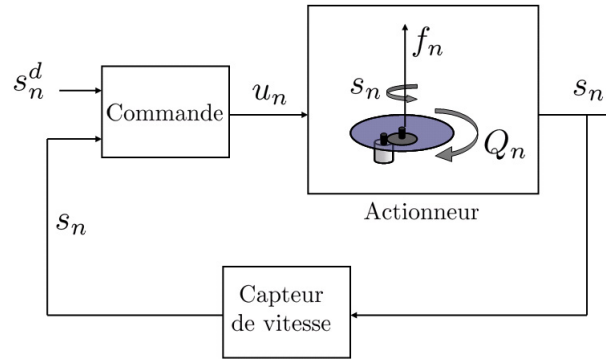


FIG. 2.13 – Schéma de la boucle de commande pour le rotor.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons nous concentrer sur la dynamique de l'actionneur, ainsi que l'implantation d'une commande en boucle fermée afin de poursuivre la vitesse désirée  $s_n^d$  et en conséquence appliquer au système le couple de commande souhaité. L'indice  $n$  correspondant au numéro de l'actionneur ne sera pas utilisé afin de ne pas alourdir les notations. Nous allons aussi considérer que la vitesse de rotation de la pale mesurée est identique à la vitesse réelle.

Les relations entre la vitesse de rotation et le couple résistant de l'axe de l'actionneur et ceux du moteur sont données par :

$$\begin{cases} s_m = K_g s \\ Q_m = \frac{Q}{K_g} \end{cases} \quad (2.38)$$

où  $s_m$  et  $Q_m$  représentent la vitesse de rotation et le couple résistant du moteur, respectivement et  $K_g$  est le facteur d'engrenage.

### 2.7.1 Modèle de l'actionneur

La dynamique du moteur à courant continu est décrite par deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} L\dot{I} = u - RI - \lambda_0 s_m & \text{équation électrique} \\ J_m \dot{s}_m = \tau^m - Q_m & \text{équation mécanique} \end{cases} \quad (2.39)$$

$I$  représente le courant dans l'induit,  $R$  la résistance du moteur,  $\lambda_0$  la constante électromotrice,  $u$  la tension appliquée aux bornes du moteur et  $s_m$  la vitesse de rotation du moteur. Notons que le frottement visqueux  $f_0 s_m$  a été négligé.  $\tau^m = K_m I$  est le couple moteur où  $K_m$  est la constante de couple. Pour les moteurs à courant continu utilisés, l'égalité  $\lambda_0 = K_m$  est valable. Puisque la dynamique de la partie mécanique est plus lente que la dynamique de la partie électrique, on peut aussi négliger l'inductance. Ainsi, une équation algébrique peut être résolue en fonction de  $I$ , ce dernier pouvant être substitué dans la deuxième équation :

$$\dot{s}_m = \frac{K_m u}{J_m R} - \frac{K_m^2 s_m}{J_m R} - \frac{1}{J_m} Q_m \quad (2.40)$$

De l'équation (2.31) et des relations (2.38), nous obtenons :

$$\dot{s}_m = \frac{K_m u}{J_a R} - \frac{K_m^2 s_m}{J_a R} - \frac{\kappa s_m |s_m|}{J_a K_g^3} \quad (2.41)$$

où  $J_a = J_m + J_g$  est la somme des inerties ramenées sur l'axe du moteur.

Dans le tableau 2.5, nous présentons les paramètres du moteur et leur valeur.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$J_a$	Inertie de l'actionneur	$3.4 \times 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$
$R$	Résistance du moteur	0.67	$\Omega$
$K_m$	Constant du moteur	$4.3 \times 10^{-3}$	$N \cdot m/A$
$K_g$	Coefficient de réduction de l'engrenage	5.6	sans

TAB. 2.5 – Paramètres de l'actionneur

### 2.7.2 Commande en boucle ouverte

L'équation (2.41) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{s}_m = -\frac{1}{\tau} s_m - \frac{\kappa}{J_a K_g^3} |s_m| s_m + \frac{1}{K_m \tau} u \quad (2.42)$$

où

$$\tau = \frac{J_a R}{K_m^2}$$

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.7. L'ACTIONNEUR, SES PARAMÈTRES ET SA COMMANDE

---

représente la constante de temps électromécanique de l'actionneur.

La tension requise afin d'atteindre une vitesse de rotation désirée est donnée par l'équation suivante :

$$u = \frac{R\kappa}{K_m K_g^3} |s_m^d| s_m^d + K_m s_m^d \quad (2.43)$$

ou encore, en fonction de la vitesse de rotation désirée de la pale  $s^d$  :

$$u = \frac{R\kappa}{K_m K_g} |s^d| s^d + K_m K_g s^d \quad (2.44)$$

Afin d'observer la réponse du système en boucle ouverte nous avons effectué une simulation. Les paramètres utilisés sont ceux du tableau 2.5. Nous imposons, à l'instant  $t = 0$  sec, une consigne de vitesse de rotation de  $250 \text{ rad/sec}$ , puis à l'instant  $t = 2.5$  sec, une consigne de vitesse de rotation de  $100 \text{ rad/sec}$  est imposée. Initialement la vitesse de rotation est nulle.

La réponse à cette commande est montrée dans la figure 2.14. Nous pouvons constater que le temps de réponse en boucle ouverte est très lent par rapport aux changements des consignes de vitesse. Cette lenteur peut générer des problèmes, voire une instabilité, lors d'une implantation de la commande d'attitude.

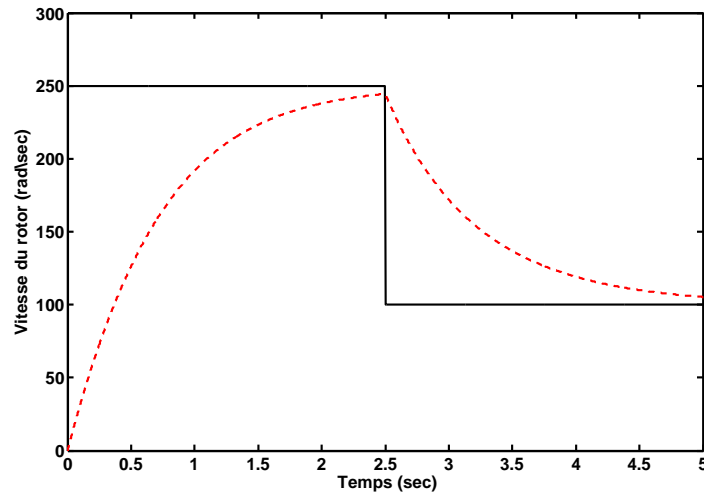


FIG. 2.14 – Réponse du rotor en boucle ouverte : (—) Vitesse de désirée, (- -) vitesse rotor.

### 2.7.3 Commande en boucle fermée

Une commande de type  $PI$  pourrait être utilisée pour la commande de vitesse, en raison de sa simplicité. Néanmoins, elle est très sensible à des perturbations externes (ici le couple  $Q_i$  peut être vu comme une perturbation externe) et la connaissance exacte des paramètres du moteur et des paramètres aérodynamiques est nécessaire.

La méthode de commande que nous allons utiliser ici est basée sur la technique de commande

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.7. L'ACTIONNEUR, SES PARAMÈTRES ET SA COMMANDE

---

par régimes glissants ou modes glissants<sup>10</sup>. La commande par modes glissants est classée dans les systèmes à structures variables VSS [106]. La motivation principale d'utiliser cette technique est :

- sa relative simplicité d'élaboration ;
- la propriété de robustesse du système devant les incertitudes paramétriques du modèle et la présence de perturbations.

En écrivant les équations (2.39) en termes de la vitesse de rotation de l'axe de l'actionneur, nous avons :

$$\begin{aligned} u &= RI + K_m K_g s \\ J_a \dot{s} &= \tau^r - Q \end{aligned} \quad (2.45)$$

où  $\tau^r$  est le couple de l'actionneur ( $\tau^r = \tau^m K_g$ ). Soit  $s_e = s^d - s$ , l'erreur de poursuite de la vitesse de l'actionneur. Le modèle (2.45) en terme de  $s_e$  et  $s^d$  devient :

$$\begin{aligned} u &= RI + K_m K_g (s^d - s_e) \\ J_a \dot{s}_e &= -\tau^r + Q + J_a \dot{s}^d \end{aligned} \quad (2.46)$$

A partir de la première équation de (2.46), le couple du rotor  $\tau^r$  est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \tau^r &= K_g \tau^m \\ &= K_g K_m I \\ &= \frac{K_g K_m}{R} u - \frac{(K_g K_m)^2}{R} (s^d - s) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Définissons la surface de glissement :

$$\xi = s_e \quad (2.48)$$

La surface de glissement  $\xi$  doit garantir les conditions suivantes :

- $\dot{\xi} \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$
- $\xi \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$

**Définition 2.1.** *Fonction signe*

$$\text{sign}(m) = \begin{cases} 1 & m > 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

**Proposition 2.1.** *La loi de commande discontinue :*

$$u = u_0 \text{sign}(\xi) \quad (2.50)$$

---

<sup>10</sup>Sliding Mode Control (SMC) dans la littérature anglo-saxonne.

**CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS**  
**2.7. L'ACTIONNEUR, SES PARAMÈTRES ET SA COMMANDE**

---

avec

$$u_0 > \left| \frac{J_a R}{K_m} \dot{s}^d + K_m K_g s + \frac{R}{K_m} Q \right| \quad (2.51)$$

assure que la vitesse de rotation  $s$  converge vers la vitesse de rotation désirée  $s^d$ .

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V$ , définie positive :

$$V(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 \quad (2.52)$$

En dérivant (2.52) et après utilisation de (2.51), on obtient :

$$\begin{aligned} V(\dot{\xi}) &= \xi \dot{\xi} \\ &= \xi (\dot{s}^d - \dot{s}) \\ &= \xi \left( \dot{s}^d + \frac{K_m^2 K_g}{J_a R} s + \frac{Q}{J_a} \right) - \frac{K_m}{J_a R} |\xi| u_0 \\ &< 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Cette dernière ligne signifie que  $\xi = s_e \rightarrow 0$ , c'est-à-dire,  $s \rightarrow s^d$ .

■

Afin de valider la loi de commande proposée précédemment, nous avons procédé à des simulations. Les paramètres utilisés sont ceux montrés dans le tableau 2.5. Nous avons effectué deux cas d'étude. Dans le premier cas, nous considérons une connaissance parfaite des paramètres du système. Dans le deuxième cas, des incertitudes sur les paramètres sont introduites, afin de vérifier les caractéristiques de robustesse apportées par la commande par modes glissants. La figure 2.15 montre la performance de la commande lorsqu'elle est appliquée à l'actionneur. Nous pouvons remarquer que malgré les incertitudes ( 50 %) dans les paramètres du moteur et de coefficient aérodynamique, la commande permet de s'approcher de la vitesse désirée avec un temps de réponse "acceptable".

En ce qui concerne l'application en temps réel, le signal de commande (2.50) est passé à travers d'un filtre passe-bas et il est converti en un signal de type PWM avec une fréquence de  $250Hz$ . Après certains tests et réglages des paramètres, nous avons obtenu une loi de commande en vitesse assez performante, avec un temps de réponse acceptable ( $\approx 0.4 sec$ ), pour une condition initiale  $s(0) = 0 rad/sec$  et une condition finale  $s(t_f) = 100 rad/sec$ . La figure 2.16 montre le comportement réel de l'actionneur lorsqu'il suit un signal de consigne.

## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.7. L'ACTIONNEUR, SES PARAMÈTRES ET SA COMMANDE

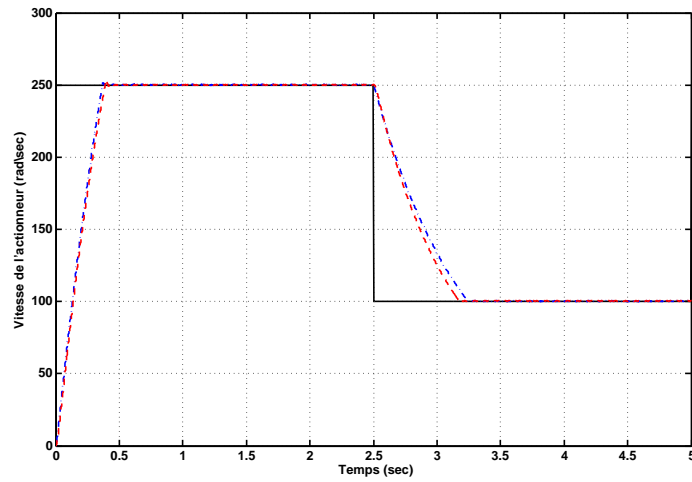


FIG. 2.15 – Réponse de l'actionneur en boucle fermée : (—) vitesse désirée, (-.-) système nominal, (- -) système incertain.

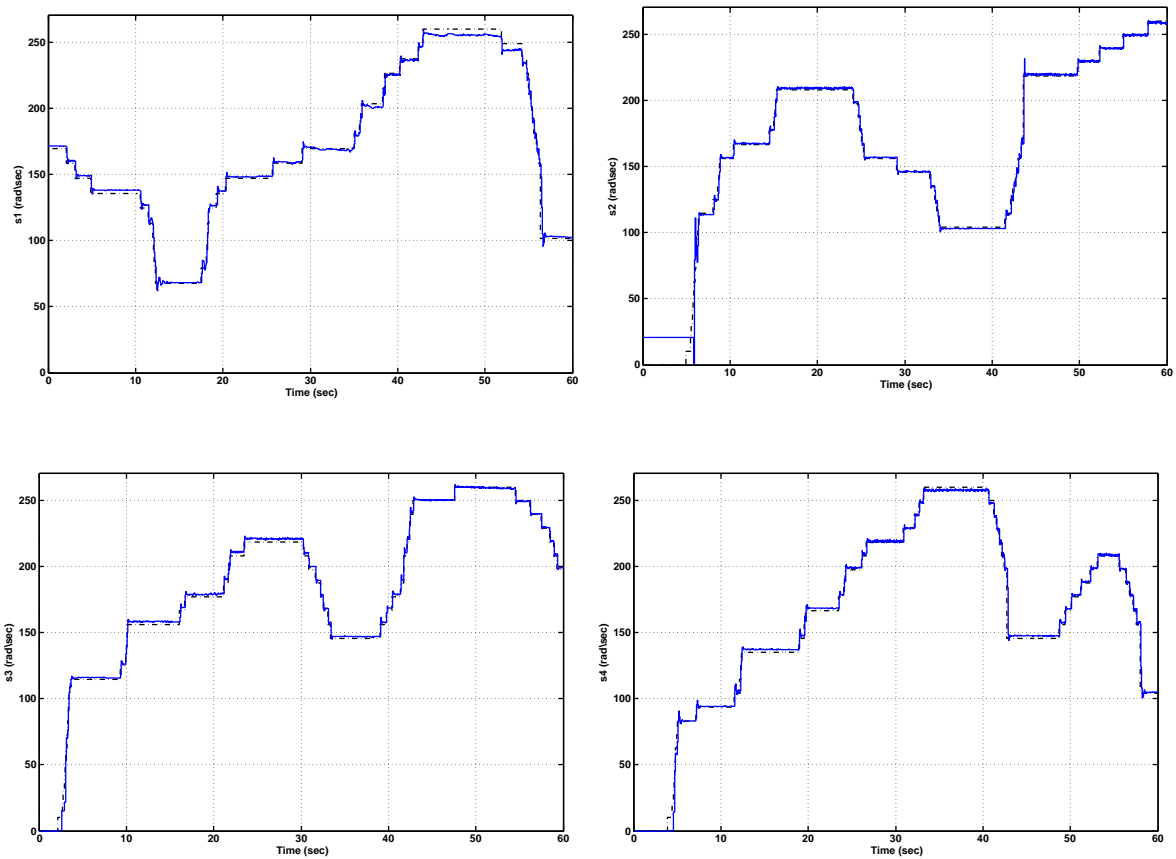


FIG. 2.16 – Réponse de l'actionneur en boucle fermée : (-.-) Vitesse de désirée, (—) Vitesse réelle.

## 2.8 Bilan du modèle de l'hélicoptère à quatre rotors

Un bilan du modèle de l'hélicoptère à quatre rotors est donné maintenant. Le modèle complet peut être représenté par trois sous-systèmes, les actionneurs, l'attitude et la position. Ainsi, nous avons :

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{\vec{p}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \vec{g} - \frac{1}{m} C^T(q) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \sum_{i=1}^4 s_i^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_{H_{xi}} \\ \sum_{i=1}^4 F_{H_{yi}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega} \\ J_h \dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J_h \vec{\omega} - \sum_{i=1}^4 J_a (\vec{\omega} \times z_b) (-1)^{i+1} s_i + \Gamma_{(\phi, \theta, \psi)} \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\Sigma_M : \left\{ \dot{s}_{m_i} = \frac{K_m u}{J_a R} - \frac{K_m^2 s_{m_i}}{J_a R} - \frac{\kappa s_{m_i} |s_{m_i}|}{J_a K_g^3} \text{ avec } i \in \{1, 2, 3, 4\} \right. \quad (2.56)$$

où

$$\Gamma_{(\phi, \theta, \psi)} : \begin{cases} \Gamma_\phi = db(s_2^2 - s_4^2) \\ \Gamma_\theta = db(s_1^2 - s_3^2) \\ \Gamma_\psi = k(s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 - s_4^2) \end{cases} \quad (2.57)$$

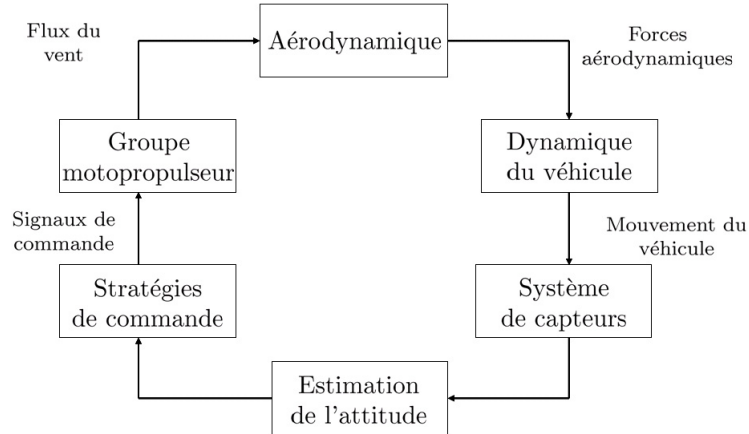


FIG. 2.17 – Architecture du simulateur VFRS

En utilisant ce modèle et les paramètres du système, nous avons développé un simulateur sous MATLAB-Simulink. Ce simulateur a été appelé “Virtual Four-Rotor helicopter flight Simulator”, VFRS. L’objectif est de simuler un comportement réaliste afin de tester et



## CHAPITRE 2. LES DRONES : L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

### 2.8. BILAN DU MODÈLE DE L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

---

d'améliorer les stratégies de commande pour cet hélicoptère. Il faut remarquer que malgré les hypothèses faites pour la description du mouvement, ce modèle n'est pas éloigné de la réalité. La figure 2.17 montre l'architecture générale de ce simulateur. Le simulateur nous permet de visualiser l'ensemble des variables telles que la vitesse angulaire, l'attitude (quaternion ou angles d'Euler), les couples et les forces. Aussi, il nous permet de surveiller les tensions appliquées aux bornes des moteurs, ainsi que les vitesses de rotation dans chaque actionneur. Il faut remarquer que ce simulateur est utilisé à l'heure actuelle par l'équipe SYSCO (Systèmes Non Linéaires et Complexité) et également par l'équipe SA-IGA (Signal et Automatique pour le dIaGnostic et la surveillAnce) du GIPSA-Lab, dans la cadre du projet ANR Safe-NECS (Control and scheduling co-design of Safe Networked Control Systems) qui lie GIPSA-Lab au CRAN-Nancy, au LAAS-Toulouse, à l'INRIA Rhône-Alpes et au LORIA.

Le VFRS contient un module de réalité virtuelle qui permet d'observer et d'analyser la trajectoire de l'hélicoptère dans l'espace à trois dimensions (voir figure 2.18).

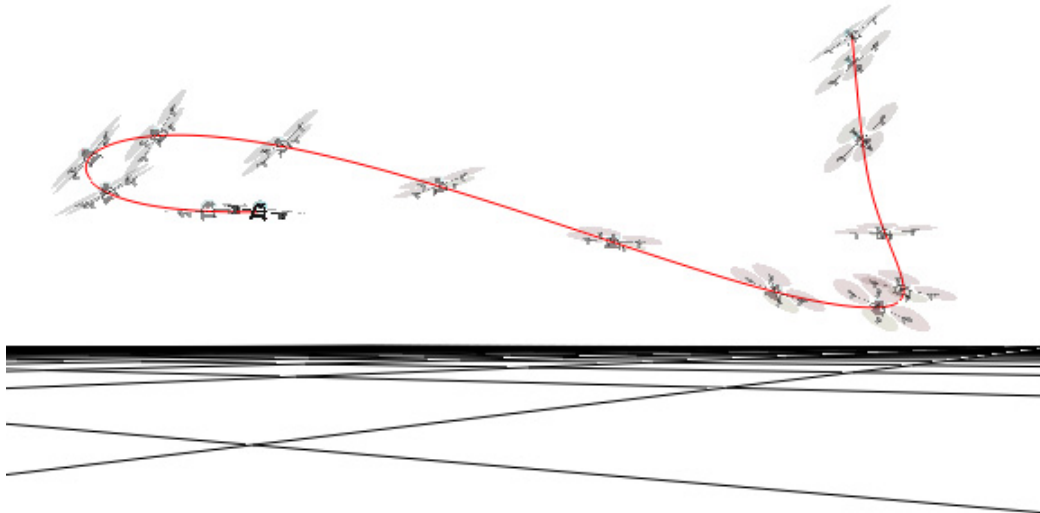


FIG. 2.18 – Simulateur de l'hélicoptère à quatre rotors

## 2.9 Conclusion

Après un bref paragraphe concernant les drones, leur classification et leur importance, nous nous sommes concentrés sur l'hélicoptère à quatre rotors considéré comme un Micro-UAV. Nous avons présenté un prototype d'hélicoptère à quatre rotors développé dans notre laboratoire. Ensuite nous avons réalisé une étude approfondie sur les forces et les couples aérodynamiques produits par chaque rotor. Certains paramètres aérodynamiques ont été identifiés expérimentalement afin d'avoir un modèle le plus fin possible, permettant d'implanter un simulateur de vol réaliste de cet aéronef. Le modèle dynamique a été présenté et une discussion a été effectuée. En particulier, nous avons souligné que la dynamique peut être décomposée en trois sous-systèmes : translation, rotation et dynamique des actionneurs. Enfin, nous avons étudié la dynamique des actionneurs (moteur-hélice-réducteur) et en fonction des effets aérodynamiques nous avons proposé une commande de vitesse basée sur une approche de modes glissants. Cette commande a été testée expérimentalement, montrant des résultats satisfaisants. Les résultats obtenus dans ce chapitre seront utilisés pour la suite de notre travail.

# Chapitre 3

## Détermination de l'Attitude

### 3.1 Introduction

Au début des années 1960, le développement des algorithmes pour l'estimation de l'attitude a été motivé principalement par les applications spatiales, surtout pour l'estimation de l'attitude des satellites, comme nous l'avons mentionné dans l'étude bibliographique menée dans le premier chapitre. Cependant, depuis une décennie, le développement technologique dans le domaine des capteurs a permis d'obtenir des composants intégrés sur silicium : les capteurs MEMS (Micro Electro Mechanical System) sont des capteurs performants à des dimensions micrométriques. En raison de leur faible coût, ce type de capteurs est de nos jours accessible au grand public. De plus, leur utilisation est adaptée aux systèmes embarqués en raison de leur taille et de leur faible consommation énergétique, ce qui représentent les principales contraintes pour ces systèmes.

Parmi la grande diversité de capteurs disponibles en technologie MEMS, nous pouvons citer les capteurs inertiels, constitués par les accéléromètres et les gyromètres, ainsi que des magnétomètres, qui mesurent le champ magnétique terrestre. L'ensemble de ces trois types de capteurs permet la conception de systèmes capables de fournir l'information nécessaire sur l'attitude d'un solide dans l'espace. Ces systèmes sont connus sous le nom de systèmes "Strapdown"<sup>1</sup>. Depuis quelques années, le problème de l'estimation de l'attitude en utilisant des capteurs GAM (Gyromètres, Accéléromètre et Magnétomètre) a été abordé afin d'appliquer l'estimation d'attitude à des domaines émergents tels que la robotique aérienne, la capture de mouvement humain et la biomécanique. L'approche la plus utilisée pour résoudre ce problème est le Filtre de Kalman Etendu (FKE) [70], [85], [63], [68], [36], en raison de la capacité à fusionner des signaux acquis à partir de différentes modalités de mesure.

---

<sup>1</sup> Cela implique que le module de capteurs soit "attaché".

## 3.2 Organisation du chapitre

Dans le chapitre 1, paragraphe 1.1.4, nous avons présenté le problème de l'estimation de l'attitude et nous avons évoqué les différentes approches reportées dans la littérature.

Ce chapitre présente notre contribution à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide et en particulier l'estimation de l'attitude d'un corps rigide dans lequel un ensemble de capteurs GAM est attaché. Dans un premier temps, nous développons deux nouvelles méthodes pour estimer l'attitude à partir de ce qu'on appelle les "vecteurs de mesures". Les méthodes proposées sont génériques, c'est-à-dire, qu'elles sont développées pour  $n$  vecteurs de mesures. La seule condition est qu'au moins deux vecteurs soient non colinéaires. Contrairement à l'état de l'art majoritairement basé sur un modèle de mesures non linéaire qui implique la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire avec contrainte [113], [92], nous utilisons un modèle qui est linéaire par rapport au quaternion [25].

Comme cas particulier, nous utilisons les mesures fournies par trois magnétomètres et trois accéléromètres montés en triaxe orthogonal dans un solide. Ainsi, l'attitude du solide par rapport au système de référence NED (North, East, Down) est estimée. Cette estimation de l'attitude reste valable pour des mouvements quasi-statiques et sans perturbation magnétique, cela signifie que les mesures fournies par les accéléromètres représentent seulement la projection du vecteur de champ de gravité sur le repère attaché au corps et celles des magnétomètres, le champ magnétique terrestre. Le principal avantage des méthodes proposées est leur simplicité et leur robustesse numérique : ces caractéristiques sont primordiales dans l'objectif d'une implantation dans un système embarqué.

Ensuite, nous considérons le cas où les mesures fournies par trois gyromètres montés en triaxe orthogonal sont également prises en compte. Alors que les vecteurs d'observation nous permettent d'estimer l'attitude à chaque instant, les mesures des gyromètres permettent la propagation de l'attitude dans le temps. L'objectif est donc d'exploiter les deux types d'information afin d'estimer l'attitude la plus précise possible. A la différence des travaux portant sur l'estimation d'attitude avec une approche de type Filtre de Kalman Etendu, nous proposons un observateur non linéaire dont le principal avantage est la non linéarisation des équations et nous garantissons une convergence globale de l'erreur à zéro. De plus, dans l'approche proposée, aucune matrice de covariance n'intervient.

En plus de la preuve de stabilité asymptotique, nous montrons que la dynamique de l'erreur d'observation peut se décomposer en deux systèmes ; un système non linéaire  $\mathcal{H}_1$  relié en "feedback" avec un système linéaire  $\mathcal{H}_2$ . Ceci aboutit à énoncer que l'observateur non linéaire proposé est passif.

Poursuivant cette étude et grâce à la passivation de la dynamique de l'erreur, nous montrons que la dynamique de l'erreur d'observation est stable au sens Entrée-Etat (ISS) [96] par rapport à une entrée  $d$ , laquelle peut être considérée comme une perturbation. Par rapport

à la stabilité asymptotique traditionnelle, la contrainte liée à la propriété ISS est plus forte puisqu'il s'agit de garantir que l'état reste borné si l'entrée est bornée, ce qui est loin d'être évident pour les systèmes non linéaires en général. Dans notre cas, l'ISS se traduit par le fait que l'erreur (état) reste borné si une perturbation (l'entrée) est bornée.

L'analyse de stabilité par l'intermédiaire de l'ISS est d'une certaine façon une analyse de robustesse. Cependant, elle a été très peu mentionnée dans la littérature. Le concept d'ISS a été d'abord introduit par Sontang dans [95] qui l'a formalisé dans [96] et récemment exploité dans le cadre de l'observation non linéaire dans [90]. A notre connaissance, ce type d'analyse de stabilité n'a jamais été appliqué aux observateurs d'attitude proposés dans la littérature. Néanmoins, cette analyse est nécessaire, puisqu'à la différence des estimateurs optimaux, tel que le filtre de Kalman, avec les observateurs non linéaires la condition d'optimalité doit être remplacée par celle de robustesse.

### 3.3 Estimation de l'attitude à partir de vecteurs de mesures

Dans le paragraphe 1.1.4 page 27, nous avons vu que la solution du problème de Whaba pour la détermination de l'attitude requière que deux ou plusieurs vecteurs soient connus ou mesurés dans deux systèmes de coordonnées différents. De plus, ces deux vecteurs doivent être non colinéaires et de longueur non nulle. Cette condition est tout à fait normale puisque l'utilisation d'un seul vecteur ou de vecteurs colinéaires résulte en une ambiguïté de la rotation autour du vecteur<sup>2</sup>, ce qui correspond à un problème non complètement observable. Le concept de vecteur de mesure est donné par la définition ci-après.

**Définition 3.1** (vecteur de mesures). *Soient  $\vec{b}_i$  et  $\vec{r}_i$  les coordonnées d'un vecteur  $\vec{x}_i$  exprimé dans  $B$  et  $N$  respectivement. Les vecteurs  $\vec{r}_i$  sont appelées vecteurs de référence et sont supposés connus. Les coordonnées de  $\vec{b}_i$  et  $\vec{r}_i$  sont liées au moyen de la transformation suivante :*

$$\vec{b}_i = C(q)\vec{r}_i + \vec{\eta}_i \quad (3.1)$$

*Le vecteur  $\vec{b}_i$  est un vecteur de mesures puisque ses composantes sont obtenues à partir de la sortie des capteurs montés suivant les axes principaux du corps rigide. La matrice  $C(q)$  peut être interprétée comme un opérateur qui prend un vecteur de référence  $\vec{r}_i$  exprimé dans*

---

<sup>2</sup>En fait, si nous avons deux vecteurs non colinéaires, un plan unique contenant les deux vecteurs peut être défini et si les composantes de ces vecteurs peuvent être mesurées dans deux repères, la rotation nécessaire pour aligner les deux repères peut être déterminée.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

$N$  et qui l'exprime dans  $B$  ; elle est donnée par (1.23). Le vecteur  $\vec{\eta}_i$  est un vecteur de bruits ou perturbations présents dans les mesures des capteurs.

### 3.3.1 Modèle de mesures

Les méthodes d'estimation de l'attitude proposées dans ce travail sont basées sur un modèle de mesures particulier. Ce modèle a été proposé pour première fois dans [24] et très récemment utilisé dans [25]. La caractéristique principale est que si le modèle (3.1) est sans bruit, il peut être ramené à un système linéaire bien structuré. De cette façon, le modèle de mesure peut être considéré linéaire par rapport au quaternion.

Soient  $b_q$  et  $r_q$  les quaternions associés aux vecteurs  $\vec{b}_i$  et  $\vec{r}_i$ , représentant les coordonnées d'un vecteur donné par rapport aux systèmes de coordonnées  $B$  et  $N$  respectivement. Notons :

$$b_q = [0 \quad \vec{b}_i^T]^T \quad r_q = [0 \quad \vec{r}_i^T]^T \quad (3.2)$$

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 1.1.1, ces deux quaternions sont liés par la relation :

$$b_q = \bar{q} \otimes r_q \otimes q = q^{-1} \otimes r_q \otimes q \quad (3.3)$$

A partir de la définition du produit de quaternions donnée par l'équation (1.19), nous obtenons en multipliant (3.3) par  $q$  :

$$q \otimes b_q = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{b}_i^T \\ \vec{b}_i & -[\vec{b}_i^\times] \end{pmatrix} q \quad (3.4)$$

$$r_q \otimes q = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{r}_i^T \\ \vec{r}_i & [\vec{r}_i^\times] \end{pmatrix} q \quad (3.5)$$

En soustrayant les équations (3.4) et (3.5), nous avons :

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\vec{b}_i - \vec{r}_i)^T \\ \vec{b}_i - \vec{r}_i & -[(\vec{b}_i + \vec{r}_i)^\times] \end{pmatrix} q = 0 \quad (3.6)$$

$$Hq = 0$$

En fait, l'équation (3.6) est un modèle de mesure qui ne tient pas compte des erreurs de mesures *i.e.*  $\vec{\eta}_i = 0$ . Lorsque l'erreur de mesure est considérée, un terme supplémentaire apparaît dans l'équation<sup>3</sup>. L'équation (3.6) est un système linéaire de la forme :

$$Ax = c$$

où la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et le vecteur  $c \in \mathbb{R}^n$  sont connus. La principale caractéristique du vecteur  $c$  est que ses composantes sont nulles.

---

<sup>3</sup>Ce terme est un vecteur de bruit dépendant du quaternion tel que l'équation devient  $0 = Hq - \frac{1}{2}\Xi(q)\eta_i$ . Dans [25], l'auteur a utilisé cette expression afin de montrer l'optimalité d'un filtre de Kalman.

### 3.3.2 Énoncé du problème général

Soient  $\vec{b}_i$  et  $\vec{r}_i$  avec  $i = 1 : n$  les vecteurs de mesures et les vecteurs de référence, exprimés dans  $B$  et  $N$  respectivement (voir figure 3.1). L'équation de mesure (3.6) à un instant donné  $t_k$  devient :

$$0 = \bar{H}q \quad (3.7)$$

où la matrice  $\bar{H}$  est construite comme suit :

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_{4n}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4n \times 4} \quad (3.8)$$

avec

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & -(\vec{b}_i - \vec{r}_i)^T \\ \vec{b}_i - \vec{r}_i & -[(\vec{b}_i + \vec{r}_i) \times] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (3.9)$$

$$\varphi_j \in \mathbb{R}^4 \quad \text{avec } j = 1 : 4n$$

Le problème consiste donc à calculer le vecteur  $q \in \mathbb{H}$ , solution de ce système d'équations linéaires bruitées. Plus formellement, cela s'écrit :

$$\hat{q} = \arg \min_q \left\{ f(q) = \frac{1}{2} \|\bar{H}q\|_2^2 \right\} \quad (3.10)$$

$$\text{sous la contrainte : } \|q\|_2^2 = 1$$

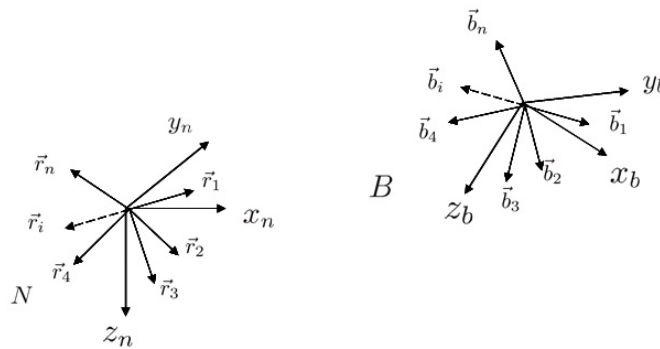


FIG. 3.1 – Les vecteurs de mesures et les vecteurs de référence, exprimés dans  $B$  et  $N$ .

### 3.3.3 Estimation de l'attitude en utilisant une décomposition SVD

D'après l'équation (3.7), la recherche du quaternion d'attitude s'apparente à trouver le quaternion qui appartient au noyau de la matrice  $\bar{H}$ . À partir de l'équation (3.7), il est clair qu'il n'y a pas de restriction sur la norme du quaternion. Néanmoins, nous devons déterminer un quaternion de norme unité pour qu'il représente une rotation. Le problème consiste donc à déterminer le quaternion qui appartient au noyau de la matrice  $\bar{H}$ , avec la contrainte  $\|\hat{q}\|_2 = 1$ . De façon mathématique, le problème est le suivant :

$$\arg \min_{\hat{q}} \left\{ f(\hat{q}) = \frac{1}{2} \|\bar{H}\hat{q}\|_2^2 \right\} \text{ avec } \hat{q} \in \mathbb{H} = \{ \hat{q} \text{ tel que } \hat{q}^T \hat{q} = 1 \} \quad (3.11)$$

Un outil particulièrement utile pour l'analyse matricielle est la décomposition en valeurs singulières (SVD). En effet, la SVD va nous permettre la construction explicite de bases orthogonales pour le noyau de la matrice. Ainsi, nous allons utiliser ces propriétés pour trouver le quaternion appartenant au noyau de  $\bar{H}$ . Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant.

**Théorème 3.1.** *Soit  $\bar{H} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$  une matrice formée à partir des paires de vecteurs  $(\vec{b}_i, \vec{r}_i)$  avec  $i = 1 : n$ . Nous supposons qu'au moins deux paires de vecteurs sont non colinéaires. Par conséquent, il existe une matrice orthogonale  $U \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ , une matrice orthogonale  $V \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  et une matrice  $S \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$  formée d'une diagonale et de zéros, telles que :*

$$\bar{H} = USV^T \quad (3.12)$$

Soit  $V = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$ , avec  $V_i \in \mathbb{R}^4$  les vecteurs singuliers. Alors, le quaternion de rotation  $\hat{q}$  est donné par le quatrième vecteur singulier, c'est-à-dire :

$$\hat{q} = V_4 \quad (3.13)$$

De plus, la condition  $\|\hat{q}\|_2 = 1$  est naturellement satisfaite.

**Preuve** Nous partons de l'égalité suivante :

$$\bar{H} = USV^T \quad (3.14)$$

Or :

$$\frac{1}{2} \|\bar{H}\hat{q}\|_2 = \frac{1}{2} (\hat{q}^T V S^T U^T \cdot USV^T \hat{q}) \quad (3.15)$$

La propriété d'orthonormalité donne :

$$U^T U = I \in \mathbb{R}^{4n \times 4n} \quad (3.16)$$

d'où

$$\frac{1}{2} \|\bar{H}\hat{q}\|_2 = \frac{1}{2} \|SV^T \hat{q}\|_2 \quad (3.17)$$



**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

soit

$$Y = V^T \hat{q} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T \quad (3.18)$$

Ainsi le problème devient :

$$\arg \min_Y \left\{ f(Y) = \frac{1}{2} \|SY\|_2^2 \right\} \text{ avec } Y \in D = \{Y \text{ tel que } Y^T Y = 1\} \quad (3.19)$$

Il faut remarquer que la matrice S est formée d'une diagonale et de zéros telle que :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

avec  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4 \geq 0$ .

Une propriété très utile d'une décomposition SVD est qu'elle nous donne l'information à propos du rang de la matrice. Ainsi pour une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  quelconque :

**rang**(A) = r tel que  $\sigma_r > 0$  et  $\sigma_{r+i} = 0$  avec  $i \in \{1, \dots, p\}$ , où  $p = \min(m, n - r)$ .

Puisque nous supposons qu'au moins deux paires de vecteurs sont non colinéaires, nous avons :

$$\mathbf{rang}(\bar{H}) = 3 \Rightarrow \sigma_3 > 0 \text{ et } \sigma_4 = 0$$

De l'équation (3.19), nous devons résoudre :

$$f(Y) = \frac{1}{2} [(\sigma_1 y_1)^2 + (\sigma_2 y_2)^2 + (\sigma_3 y_3)^2 + (\sigma_4 y_4)^2] = 0 \quad (3.21)$$

sous la contrainte :  $Y^T Y = 1$

En conséquence, la solution à l'équation (3.21) est :

$$Y = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (3.22)$$

De l'équation (3.18), il vient :

$$\begin{aligned} VY &= \hat{q} \\ [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]Y &= \hat{q} \\ V_4 &= \hat{q} \end{aligned} \quad (3.23)$$

puisque la matrice V est par définition orthogonale  $\|V_4\|_2 = 1 \Leftrightarrow \|\hat{q}\|_2 = 1$ .



**Remarque 3.1.** *Notons que l'analyse a été faite dans un contexte sans bruit, i.e. les mesures des capteurs sont parfaites. En conséquence, il est possible d'affirmer que le rang de la matrice  $\bar{H}$  est de trois. En pratique, à cause du bruit présent dans les mesures, la dernière valeur singulière est différente de zéro mais reste proche de zéro. En fait, la dernière valeur singulière nous donne une mesure de l'erreur. De l'équation (3.11), (3.21) et (3.22), l'erreur au sens des moindres carrés est donnée par :*

$$e = \|\bar{H}\hat{q}\|_2^2 = \|SY\|_2^2 = \sum_{i=1}^4 (\sigma_i Y_i)^2 = \sigma_4^2 \quad (3.24)$$

L'approche SVD est un outil élégant d'analyse théorique et une technique numériquement stable et robuste pour calculer le quaternion d'attitude à partir des vecteurs de mesures. Pour la détermination de l'attitude, le seul travail (à notre connaissance) utilisant la SVD est celui reporté dans [69]. La SVD est utilisée dans ce travail afin de trouver la matrice d'attitude en résolvant le problème de Whaba, mais les auteurs ne vont pas au bout de l'analyse.

### 3.3.4 Estimation de l'attitude en utilisant un algorithme de projection

Commençons par rappeler quelques résultats concernant les projections [6]. Une projection  $P_k$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans un sous-espace  $E_k$  de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $P_k^T = P_k$ , la projection est orthogonale. Sinon, on parle de projection oblique. Toute projection oblique est orthogonale par rapport à un autre sous-espace  $F_k$  de  $\mathbb{R}^n$ . On rappelle que  $E_k = \text{Im } P_k = \ker(I - P_k)$  et que  $F_k^\perp = \ker P_k$ , où “ker” désigne le noyau d'une application linéaire et “Im” son image. Il est évident que  $(I - P_k)$  est également une projection. C'est la projection sur  $F_k^\perp$  parallèlement à  $E_k$ .  $P_k^T$  est la projection sur  $F_k$  parallèlement à  $E_k^\perp$  et  $(I - P_k^T)$  est la projection sur  $E_k^\perp$  parallèlement à  $F_k$ . Par conséquent, nous avons, dans  $\mathbb{R}^2$ , le diagramme de la figure 3.2. Ainsi, nous avons le théorème qui suit.

**Théorème 3.2.**  $P_k \vec{x} = 0$  si et seulement si  $\vec{x} \in F_k^\perp$

L'idée fondamentale dans l'estimation linéaire est de faire une projection du vecteur à estimer sur un sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de mesure  $\vec{y}_i$ . A titre d'exemple, regardons la figure 3.3. La projection  $\vec{x}_p \in E_k$  de l'estimée  $\hat{\vec{x}}$  de  $\vec{x}$  sur le plan  $E_k = \text{span}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$  est définie par :

$$\vec{x}_p = \frac{\vec{x} \vec{y}_i^T}{\vec{y}_i^T \vec{y}_i} \vec{y}_i \quad (3.25)$$

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

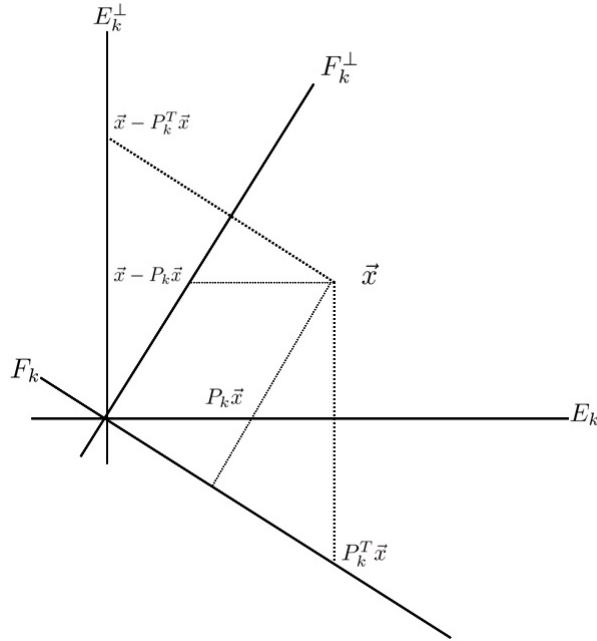


FIG. 3.2 – Projections

Nous identifierons  $P_i$  comme l'opérateur projection, tel que  $P_i = \frac{\vec{x} \vec{y}_i^T}{\vec{y}_i^T \vec{y}_i}$ .

Notons que  $(\vec{x}_p - \vec{x})$  est orthogonal à  $\vec{y}_i$ . Dans le cas où nous souhaitons faire une projection sur le plan  $F_k$ , qui est orthogonal à  $E_k$ , l'opérateur projection devient :

$$P_i^O = I - \frac{\vec{x} \vec{y}_i^T}{\vec{y}_i^T \vec{y}_i} = I - P_i \quad (3.26)$$

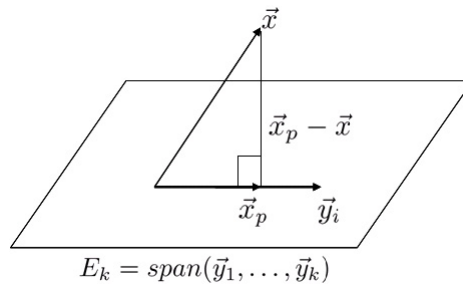


FIG. 3.3 – Idée fondamentale des projections

Dans le cas de l'estimation du quaternion à partir du modèle de mesures (3.7), nous nous sommes intéressés à la projection du quaternion à estimer sur un sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par les paires de vecteurs de mesure  $(\vec{b}_i, \vec{r}_i)$ . Ainsi, nous avons le résultat suivant.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

**Théorème 3.3.** *Soit  $\bar{H} \in \mathbb{R}^{4n \times n}$  une matrice formée à partir des paires de vecteurs  $(\vec{b}_i, \vec{r}_i)$  avec  $i = 1 : n$ . Nous supposons qu'au moins deux paires de vecteurs sont non colinéaires. Soit l'estimateur*

$$\hat{q}_k = \left[ \prod_{j=1}^{4n} \left( I_4 - \frac{\gamma \varphi_j \varphi_j^T}{\alpha + \varphi_j^T \varphi_j} \right) \right] \hat{q}_{k-1} \quad (3.27)$$

$$\hat{q}_k = \frac{\hat{q}_k}{\|\hat{q}_k\|_2}$$

où  $\varphi_j \in \mathbb{R}^4$  sont les vecteurs ligne de la matrice  $\bar{H}$ , avec  $\alpha \geq 0$  et  $0 \leq \gamma \leq 2$ . L'estimateur (3.27) construit une suite de quaternions  $\hat{q}_{k-1}^j$  qui converge vers le quaternion d'attitude  $q_k$ , solution du système (3.7).

**Preuve** Dans les paragraphes précédents, nous avons donné l'idée géométrique sur laquelle le théorème est basé. Néanmoins, une preuve analytique a été développée et est reportée dans l'annexe A. ■

Faisons quelques commentaires à propos de cet estimateur. L'estimateur (3.27) représente une méthode séquentielle pour résoudre le système (3.7) : elle consiste à fabriquer une suite de quaternions  $\hat{q}_{k-1}(j)$  ( $j$  correspond à une numérotation des lignes de  $\bar{H}$ ) qui, sous certaines conditions, converge vers la solution exacte  $q_k$ . En fait, le calcul de  $\hat{q}_k$  fait intervenir  $4n$  étapes intermédiaires correspondant aux  $4n$  lignes de la matrice  $\bar{H}$  donnée par l'équation (3.8). Notons que les  $4n$  étapes doivent être réalisées durant la période d'échantillonnage. Dans la figure 3.4, on montre les étapes intermédiaires qui permettent de déterminer  $\hat{q}_k$  à partir de  $\hat{q}_{k-1}$ .

L'estimateur (3.27), revient en fait à rechercher le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre de la matrice  $\bar{H}^T \bar{H}$  par une technique de la puissance inverse [97] (voir annexe A). Il faut remarquer que la normalisation du quaternion fait partie de la technique pour ne pas tomber sur la solution triviale  $q = 0$ , mais bien pour déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 0. Cela fait une grande différence avec les techniques basées sur une approche filtre de Kalman, où à la fin de chaque mise à jour, on renormalise brutalement.

L'intérêt principal de cet estimateur est sa simplicité, ce qui autorise son implantation en temps réel dans un système embarqué.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

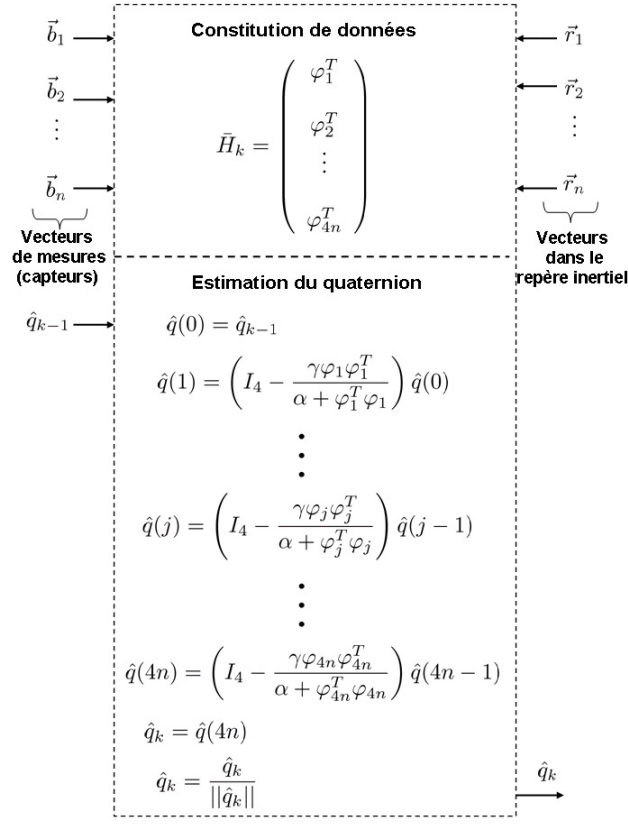


FIG. 3.4 – Estimation du quaternion dans une période d'échantillonnage

### 3.3.5 Estimation de l'attitude : le cas quasi-statique

Maintenant, nous allons nous concentrer sur le cas particulier de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide à partir de la mesure de deux vecteurs non colinéaires. Ces vecteurs sont représentés par le vecteur de champ magnétique et le vecteur de gravité. Les vecteurs de mesures sont fournis par trois accéléromètres et trois magnétomètres montés en triaxe orthogonal (figure 3.5). Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 1.1.3, le signal de sortie d'un accéléromètre est supposé être la somme d'une composante du vecteur d'accélération inertielle  $\vec{a}$ , d'une composante du vecteur du champ de gravité  $\vec{g}$  et d'un terme de bruit  $\vec{\eta}_A$ . Lorsque nous parlons de mouvements quasi-statiques, cela signifie que le vecteur d'accélération inertielle est négligeable par rapport à celui de la gravité ( $\|\vec{a}\|_2 \ll \|\vec{g}\|_2$ ). Ainsi l'équation de sortie des trois accéléromètres est approximée par :

$$\vec{b}_A = -C(q)\vec{g} + \vec{\eta}_A \quad (3.28)$$

La sortie du magnétomètre tri-axes dans le système de coordonnées mobile peut être écrite sous la forme d'un vecteur de mesures :

$$\vec{b}_M = C(q)\vec{r}_M + \vec{\eta}_M \quad (3.29)$$

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

Sans perdre en généralités, nous considérons que les vecteurs  $\vec{g}$  et  $\vec{r}_M$  sont connus et qu'ils sont unitaires (donc normalisés), tels que :

$$\vec{g} = [0 \ 0 \ g]^T = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (3.30)$$

$$\vec{r}_M = [r_{M_x} \ 0 \ r_{M_z}]^T = [0.5 \ 0 \ \sqrt{3}/2]^T \quad (3.31)$$

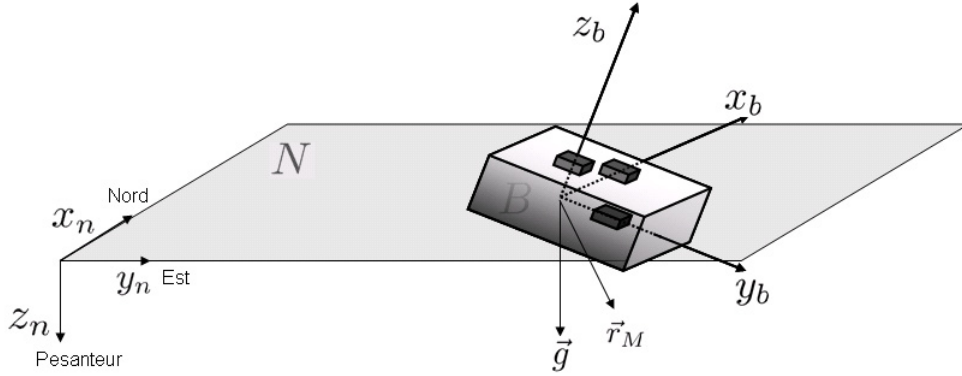


FIG. 3.5 – Module de capteurs

Le cas de l'estimation de l'attitude à partir des mesures d'accéléromètres et de magnétomètres devient un cas particulier du problème traité dans les paragraphes précédents. Ainsi, la matrice  $\bar{H}$  de l'équation de mesures (3.7) devient :

$$\bar{H}_{AM} = \begin{pmatrix} H_A \\ H_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\vec{b}_A - \vec{r}_A)^T \\ \vec{b}_A - \vec{r}_A & -[(\vec{b}_A + \vec{r}_A) \times] \\ 0 & -(\vec{b}_M - \vec{r}_M)^T \\ \vec{b}_M - \vec{r}_M & -[(\vec{b}_M + \vec{r}_M) \times] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4} \quad (3.32)$$

Le problème à résoudre est formulé comme suit :

$$\hat{q} = \arg \min_q \left\{ f(\hat{q}) = \frac{1}{2} \|\bar{H}_{AM} \hat{q}\|_2^2 \right\} \text{ avec } \hat{q} \in \mathbb{H} = \{ \hat{q} \text{ tel que } \hat{q}^T \hat{q} = 1 \} \quad (3.33)$$

Nous pouvons établir les deux résultats suivants.

**Lemme 3.1.** *Soit  $\bar{H}_{AM} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$  une matrice formée par les paires de vecteurs  $(\vec{b}_A, \vec{r}_A)$  et  $(\vec{b}_M, \vec{r}_M)$ . Il existe une matrice orthogonale  $U \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ , une matrice orthogonale  $V \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  et une matrice  $S \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$  formée d'une diagonale et de zéros, telles que (décomposition en valeurs singulières) :*

$$\bar{H} = USV^T \quad (3.34)$$

## CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

### 3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES

---

Soit  $V = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$ , avec  $V_i \in \mathbb{R}^4$  représentant les vecteurs singuliers. Puisque le champ magnétique et le champ de gravité ne sont pas colinéaires, le quaternion optimal peut être déterminé de façon unique. Alors, le quaternion de rotation  $\hat{q}$  est donné par le quatrième vecteur singulier, c'est-à-dire :

$$\hat{q} = V_4 \quad (3.35)$$

De plus, la condition  $\|\hat{q}\|_2 = 1$  est naturellement satisfaite.

**Lemme 3.2.** Soit  $\bar{H}_{AM} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$  une matrice formée par les paires de vecteurs  $(\vec{b}_A, \vec{r}_A)$  et  $(\vec{b}_M, \vec{r}_M)$ . Soit l'estimateur

$$\hat{q}_k = \left[ \prod_{j=1}^8 \left( I_4 - \frac{\gamma \varphi_j \varphi_j^T}{\alpha + \varphi_j^T \varphi_j} \right) \right] \hat{q}_{k-1} \quad (3.36)$$

$$\hat{q}_k = \frac{\hat{q}_k}{\|\hat{q}_k\|_2}$$

où  $\varphi_j \in \mathbb{R}^4$  sont les vecteurs ligne de la matrice  $\bar{H}$ , avec  $\alpha \geq 0$  et  $0 \leq \gamma \leq 2$ . Puisque le champ magnétique et le champ de gravité ne sont pas colinéaires, l'estimateur (3.27) construit une suite de quaternions  $\hat{q}_{k-1}^j$  qui converge vers le quaternion d'attitude  $q_k$ , solution du système (3.7).

### 3.3.6 Résultats en simulation

Afin de montrer la performance des approches proposées, dans cette section nous présentons des résultats numériques obtenus en simulation. Pour cela, nous nous intéressons à estimer l'attitude pour une simple rotation à partir des mesures du champ de gravité et du champ magnétique.

La vraie attitude est représentée par un quaternion appelé  $q_{vrai}$ . Ce quaternion a été choisi aléatoirement et pour cette simulation, on a :

$$q_{vrai} = [0.0480 \ -0.8635 \ -0.4900 \ 0.1097]^T \quad (3.37)$$

Les approches montrées dans le Lemme 3.1 et Lemme 3.2 ont été comparées avec la méthode bien connue “*q-method*” et la méthode “TRIAD”. La méthode “TRIAD” est une méthode déterministe très simple pour trouver l'attitude à partir de deux vecteurs de mesure non colinéaires. Cet algorithme est connu comme “TRIAD” parce qu'il est basé sur la construction de deux trièdres orthogonaux : un représentant le repère inertiel et l'autre représentant le repère mobile. Le principal avantage de la méthode “TRIAD” est qu'elle est très facile à implanter. Cette méthode a été utilisée dans [79] et [65] afin de construire une matrice de rotation à partir des mesures d'accéléromètres et de magnétomètres.

Ici, nous comparons l'algorithme proposé dans le Lemme 3.1 avec la “*q-method*” puisque

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

dans ces deux méthodes le quaternion estimé est celui qui minimise la fonction de coût (1.54) page 27 et (3.10), respectivement. Nous avons aussi comparé l'algorithme donné par le Lemme 3.2 avec la méthode TRIAD.

Afin d'évaluer l'erreur pour chaque approche, nous allons utiliser l'opérateur quaternion d'erreur :

$$q_e = \hat{q}^{-1} \otimes q_{vrai}$$

$$\beta_e = 2|\arccos(q_e)|$$

Et nous allons aussi évaluer la fonction de coût :

$$f(\hat{q}) = \frac{1}{2} \|\bar{H}_{AM}\hat{q}\|_2^2$$

Les vecteurs du champ de gravité et du champ magnétique dans le repère inertiel (NED) sont les vecteurs unitaires (3.30), (3.31). Afin de simuler les caractéristiques réelles des capteurs, nous avons additionné un bruit blanc gaussien et de moyenne nulle aux vecteurs de mesures. Les caractéristiques du bruit sont montrées dans le tableau 3.1.

Capteur	Paramètre (bruit blanc)	Ecart type
Accéléromètre	$\eta_A$	0.002 <i>m/seg</i> <sup>2</sup>
Magnétomètre	$\eta_M$	0.0007 <i>mgauss</i>

TAB. 3.1 – Caractéristiques du bruit pour les accéléromètres et les magnétomètres

Pour un tirage du bruit et pour le quaternion vrai choisi (voir (3.37)), la “*q-method*” donne un meilleur résultat que l'algorithme du lemme 3.1. Cette constatation nécessiterait une analyse statistique menée pour différentes valeur du quaternion  $q_{vrai}$  afin de conclure quant à la supériorité d'une technique sur l'autre. Cependant, l'approche utilisant la SVD a plusieurs avantages sur la “*q-method*”. D'abord, l'approche SVD fournit une procédure numériquement robuste pour trouver le quaternion d'attitude [47]. De plus, la possibilité d'une solution ambiguë peut être traitée facilement en analysant les valeurs singulières. Par exemple, si deux valeurs singulières sont à zéro, cela signifie que la matrice de mesure  $\bar{H}$  est de rang 2. Dans ce cas, une infinité de solutions peuvent être trouvées. Cette propriété peut être exploitée afin de savoir si les vecteurs de mesures sont colinéaires ou si un dérèglement des capteurs est arrivé.



**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

	Lemme 1	q-method
$\hat{q}$	$[0.0504 \ -0.8639 \ -0.4896 \ 0.1069]^T$	$[0.0510 \ -0.8638 \ -0.4895 \ 0.1078]^T$
$\beta_e$	$2.932^\circ$	$2.607^\circ$
$f(\hat{q})$	$3.5417 \times 10^{-6}$	$1.265 \times 10^{-6}$

TAB. 3.2 – Comparaison des performances : Lemme 1 et q-method

La comparaison entre l'approche proposée dans le Lemme 2 et la méthode "TRIAD" est montrée dans le tableau 3.3. Pour un tirage du bruit et pour le quaternion  $q_{vrai}$  (voir (3.37)), la "TRIAD" donne un meilleur résultat que l'algorithme du lemme 3.2. Pour conclure quant à la supériorité d'une technique sur l'autre, il faudrait faire une analyse statistique, avec différentes valeurs d'attitude et différents vecteurs de mesure. Néanmoins, l'avantage principal de l'approche proposée est la possibilité de fusionner plus de deux vecteurs de mesure. La méthode "TRIAD" permet de trouver une matrice de rotation (après on peut obtenir le quaternion associé) utilisant seulement deux vecteurs de mesures non colinéaires. Ainsi, la fusion de  $n$  vecteurs de mesures n'est pas possible avec cette approche. Bien que l'estimateur proposé dans le Lemme 3.2 est un estimateur déterministe, il est robuste par rapport au bruit de mesure, comme nous allons le constater dans le paragraphe 3.6. De plus, la nature séquentielle de l'estimateur (3.36) lui apporte certains avantages, par exemple il peut être modifié en ajoutant un facteur d'oublié ou en sélectionnant des poids différents pour certains types de mesures.

	Lemme 2	Triad
$\hat{q}$	$[0.0320 \ -0.8724 \ -0.4410 \ 0.1138]^T$	$[0.0333 \ -0.8858 \ -0.4478 \ 0.1173]^T$
$\beta_e$	$4.109^\circ$	$3.831^\circ$
$f(\hat{q})$	$4.402 \times 10^{-6}$	$4.020 \times 10^{-6}$

TAB. 3.3 – Comparaison de performances : Lemme 2 et méthode TRIAD

Dans les figures 3.6 et 3.7, le cas d'une simple rotation est montré. Nous montrons les trajectoires du vecteur  $\vec{b}_A$  et du vecteur  $\vec{b}_M$  lorsque la transformation de coordonnées du repère mobile au repère fixe est accomplie. Nous montrons la rotation pour les quatre cas étudiés.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.3. ESTIMATION DE L'ATTITUDE À PARTIR DE VECTEURS DE MESURES**

---

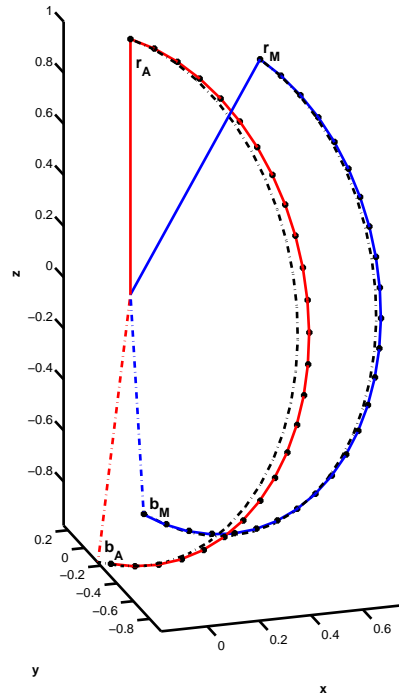


FIG. 3.6 – Comparaison de performances :  $q_{vrai}$  (-), Lemme 1 (-.-), q-method (\*)

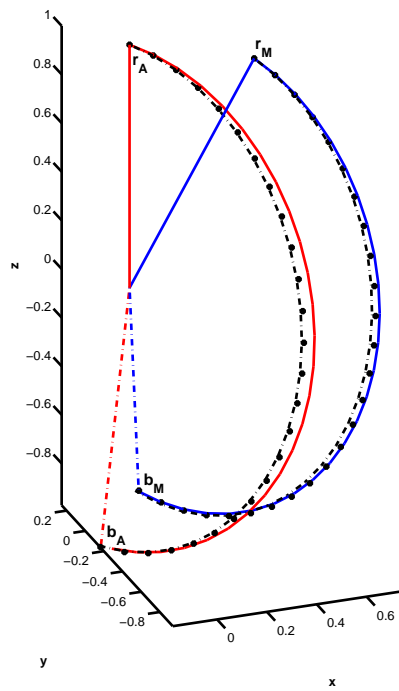


FIG. 3.7 – Comparaison de performances :  $q_{vrai}$  (-), Lemme 2 (-.-), méthode TRIAD (\*)

## 3.4 Observateur non linéaire d'attitude

Dans les paragraphes précédents, nous avons abordé le problème de l'estimation de l'attitude à partir de  $n$  vecteurs de mesures et nous avons proposé deux nouvelles méthodes. Ensuite, nous avons appliqué ces méthodes à l'estimation de l'attitude d'un corps rigide en utilisant les mesures fournies par trois accéléromètres et trois magnétomètres montés en triaxe orthogonal. Cependant, en pratique, l'estimation de l'attitude utilisant seulement les mesures des accéléromètres et des magnétomètres est restreinte à des mouvements quasi-statiques. En fait, les accéléromètres mesurent les vibrations et les accélérations propres du corps lors du passage d'une phase de repos à une phase de mouvement ou vice-versa. Par conséquent, l'estimation de l'attitude est faussée dans ces phases. Néanmoins, l'avantage de faire une estimation avec la modalité accéléromètre et magnétomètre est que même si le quaternion estimé est très bruité, il ne diverge pas au cours de temps.

Afin de faire une estimation la plus précise possible de l'attitude, trois gyromètres montés en triaxe orthogonal sont utilisés, permettant de mesurer la vitesse de rotation du corps et d'en déduire son attitude en intégrant numériquement l'équation cinématique associée (1.25). Malheureusement et comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 1.1.3, page 22, la mesure d'un gyromètre est la somme de la vitesse réelle de rotation, d'un bruit blanc et d'une fonction lentement variable dans le temps appelée biais. Afin d'éviter une erreur dans l'estimation de l'attitude due à l'intégration de cet terme, il doit être estimé et recalé au cours du temps.

Puisque les biais présents dans les mesures des gyromètres ne sont pas directement mesurables, le problème devient un problème d'observation. De plus, l'évolution de l'attitude d'un corps rigide dont les vitesses angulaires sont mesurées par des gyromètres entachés de biais, est modélisée par une équation différentielle non linéaire. Ainsi, nous sommes en face d'un problème d'observation non linéaire.

De nombreux travaux portent sur l'estimation de l'attitude et du biais présent dans les gyromètres en utilisant les mesures des accéléromètres et des magnétomètres. Cette estimation est accomplie via un Filtre de Kalman Étendu (FKE). Cependant, comme nous l'avons mentionné dans le premier chapitre, le principal inconvénient du FKE est dû à l'approximation linéaire du modèle non linéaire. Avec le FKE, on ne peut pas garantir une convergence globale et une divergence peut arriver, notamment dans des situations où l'erreur d'estimation initiale est grande. Ainsi, le FKE peut être considéré comme un filtre hasardeux ([18], page 344).

Notre intérêt s'est porté sur la synthèse d'un observateur non linéaire qui permette la reconstruction de l'attitude à partir des mesures de 3 gyromètres, 3 accéléromètres et 3 magnétomètres. L'idée consiste à trouver un compromis entre précision à coût terme, donnée par l'intégration des gyromètres et précision à long terme donnée par l'attitude estimée à

partir des accéléromètres et magnétomètres. Notre contribution à ce domaine est le sujet du paragraphe 3.4.3. En s'inspirant de l'observateur proposé dans le travail de Salcudean [86] et l'estimation de l'attitude utilisant les méthodes proposées dans le lemme 3.1 et le lemme 3.2, un observateur pour l'attitude et les biais des gyromètres est proposé. Ensuite, nous allons nous intéresser à la dynamique de l'erreur de cet observateur d'attitude non linéaire. Ainsi, la convergence exponentielle de l'erreur à zéro sera montrée. Puis nous allons montrer que cette dynamique de l'erreur est passive. Ce résultat est très important car il est exploité pour donner une preuve formelle de la robustesse de l'observateur par rapport au bruit et aux perturbations dans les mesures. Nous allons montrer cette robustesse sur des données simulées et des données réelles.

### 3.4.1 Observateurs pour des systèmes non linéaires : forme générale

Nous allons considérer un système dynamique modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{pmatrix} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $x_1 \in \mathbb{R}^p$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ ) est l'état,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système supposée mesurée.  $u$  est l'entrée de commande qui peut prendre une valeur  $u(t) \in U$  et  $U$  est un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^m$ . Nous supposons que  $f_i$  est continûment différentiable par rapport à ses arguments.

La structure d'observateur la plus communément utilisée sur les systèmes de la forme (3.38) est la suivante :

$$\mathcal{O}_0 : \begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2, u) + G_1(z, y, u)(y - h(z)) \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2, u) + G_2(z, y, u)(y - h(z)) \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $G_1$  et  $G_2$  sont les *gains de l'observateur*. L'observateur est en fait constitué de la dynamique du système à laquelle on a ajouté un terme de correction dépendant de l'erreur d'observation ( $y - h(z)$ ).

**Définition 3.2** (observateur). *Le système  $\mathcal{O}$  est un observateur asymptotique global si :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - x(t)\| = 0$$

En pratique, la stabilité est utile pour éviter des excursions trop grandes de  $z$  et bien souvent, on cherche à obtenir un observateur exponentiellement stable.

**Définition 3.3** (observateur exponentiel). *Dans le cas de la définition 3.2, l'observateur est dit exponentiel s'il existe deux réels strictement positifs  $\lambda$  et  $\mu$  tels que, pour tout  $t > 0$ , on ait :*

$$\|z(t) - x(t)\| \leq \mu \|h(z(0)) - x(0)\| e^{-\lambda t}$$

### 3.4.2 Position du problème

Afin de proposer un observateur pour l'estimation de l'attitude et du biais présent dans les gyromètres, nous allons rappeler le modèle des mesures des gyromètres, ainsi que le modèle d'évolution du biais. Nous supposons que les gyromètres sont montés dans un solide tels que leurs axes sensibles coïncident avec les axes d'inertie principaux du solide :

$$\vec{\omega}_G = \vec{\omega} + \vec{v} + \vec{\eta}_G \quad (3.40)$$

$$\dot{\vec{v}} = -T^{-1}\vec{v} + \vec{\eta}_v \quad (3.41)$$

où les composantes des vecteur  $\vec{\eta}_G$  et  $\vec{\eta}_v \in \mathbb{R}^3$  sont supposées être des bruits blancs et gaussiens et  $T = \tau I_3$  est une matrice diagonale de constantes de temps.

Nous allons considérer la dynamique de l'attitude d'un corps dans lequel trois gyromètres sont montés en triaxe orthogonal et un biais étant présent dans les mesures gyrométriques. Nous supposons aussi que dans le corps rigide, trois accéléromètres et trois magnétomètres sont montés en triaxe orthogonal, tels qu'un quaternion peut être estimé en utilisant le lemme 3.1 ou le lemme 3.2. De l'équation cinématique (1.25) et des équations (3.40)-(3.69), la dynamique d'un corps rigide dans lequel trois accéléromètres, trois magnétomètres et trois gyromètres sont montés en triaxe orthogonal est modélisée par :

$$\Sigma_A : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ -T^{-1}\vec{v} + \vec{\eta}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Xi(q) [\vec{\omega}_G - \vec{v} - \vec{\eta}_G] \\ -T^{-1}\vec{v} + \vec{\eta}_v \end{pmatrix} \\ y = q_{ps} \end{cases} \quad (3.42)$$

où  $q_{ps}$  est le quaternion estimé à partir des mesures des accéléromètres et des magnétomètres. Notons que le quaternion  $q_{ps}$  peut être exprimé comme suit :

$$q_{ps} = \Delta q \otimes q \quad (3.43)$$

où la condition  $\|q_{ps}\|_2 = 1$  est satisfaite.  $q$  dénote le vrai quaternion d'attitude et  $\Delta q$  est un quaternion de perturbation (généralisé par un bruit borné, non nécessairement gaussien et de moyenne nulle).

## CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

### 3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

---

Notons que le modèle dynamique (3.42) est de la forme :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{pmatrix} = f(x, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.44)$$

avec  $x = [x_1^T \ x_2^T]^T = [q^T \ \bar{\nu}^T]^T$ . Dans notre cas, il n'existe pas de commande puisque nous travaillons seulement avec l'équation cinématique du corps rigide<sup>4</sup>. Néanmoins, nous avons fait apparaître ce terme dans le système (3.44) afin de maintenir une homogénéité avec la forme générale (3.38). Dans la suite, on suppose simplement que l'entrée appartient à un ensemble admissible de fonctions. Pour le système (3.44), il est possible de proposer l'élaboration d'un observateur avec la forme générale suivante :

$$\mathcal{O}_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2, u) + G_1(z, y, u)(y - z_1) \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2, u) + G_2(z, y, u)(y - z_1) \end{cases} \quad (3.45)$$

où  $z_1$  et  $z_2$  sont les estimés de  $x_1$  et  $x_2$ , respectivement. Les gains de l'observateur  $G_1$  et  $G_2$  doivent être choisis.

#### 3.4.3 Observateur non linéaire de l'Attitude proposé

Nous allons présenter ici notre contribution à la conception d'un observateur d'attitude et du biais des gyromètres. Bien que l'observateur proposé soit inspiré du travail de Salcudean [86], il est très différent par sa forme et son application. Nous proposons donc l'observateur suivant :

$$\mathcal{O}_A : \begin{cases} \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \Xi(\hat{q}) [\bar{\omega}_G - \hat{\nu} + K_1 \bar{q}_e] \\ \dot{\hat{\nu}} = -T^{-1} \hat{\nu} - K_2 \bar{q}_e \end{cases} \quad (3.46)$$

$\hat{q}$  et  $\hat{\nu}$  sont le quaternion estimé et le biais estimé.  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ ,  $T^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est une matrice diagonale de constantes de temps et  $\bar{q}_e$  dénote la partie vectorielle du quaternion d'erreur  $q_e$ , obtenu par le "produit quaternion" entre le quaternion  $q_{ps}$  et celui calculé par intégration de l'équation (3.46) :

$$q_e = \hat{q}^{-1} \otimes q_{ps} = \bar{q} \otimes q_{ps} = [q_{e0} \ \bar{q}_e^T]^T \quad (3.47)$$

L'observateur proposé est de la forme (3.45) à la différence que dans (3.47) l'erreur est une erreur d'attitude qui est définie par l'algèbre des quaternions [91]. La structure de l'observateur proposé est montrée dans la figure 3.8. Afin de faire la preuve de la convergence

---

<sup>4</sup>L'avantage de travailler seulement avec l'équation cinématique est que l'algorithme ne nécessite pas de connaissance d'un modèle du système. Par conséquent, il peut être appliqué à l'estimation de l'attitude de différents types de systèmes.

## CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

### 3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

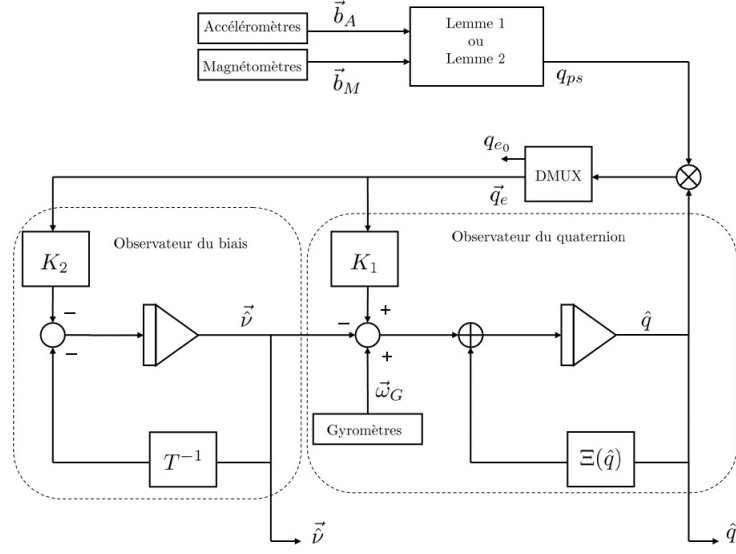


FIG. 3.8 – Schéma de l'observateur d'attitude ( $\otimes$  multiplication du quaternion,  $\oplus$  multiplication matricielle.)

de l'observateur, une analyse de Lyapunov est menée. Comme toujours dans les analyses de stabilité, la preuve est réalisée dans un contexte sans bruit. Ainsi, nous allons faire les hypothèses suivantes :

- $\vec{\eta}_G = \vec{\eta}_v = 0$  : les bruits dans les mesures des gyromètres sont supposés nuls ;
- $\Delta q = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  ou  $q = q_{ps}$ . Bien que, en pratique, le quaternion  $q_{ps}$  soit bruité, il est supposé rester toujours dans un voisinage du vrai quaternion  $q$ .

**Remarque 3.2.** *En général, les termes de bruit n'apparaissent jamais dans un observateur non linéaire, au contraire d'un filtre non linéaire. En fait, un observateur non linéaire et un filtre non linéaire sont tous les deux utilisés pour estimer l'état d'un système à partir des mesures. Cependant, un filtre non linéaire se base sur des équations stochastiques, alors qu'un observateur non linéaire est toujours déterministe.*

**Remarque 3.3.** *En pratique, un observateur non linéaire doit être robuste aux bruits et perturbations dans les mesures.*

A partir des hypothèses précédentes, le modèle dynamique (3.42) devient :

$$\Sigma_{A_{\text{Sans bruit}}} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ -T^{-1}\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Xi(q)[\vec{\omega}_G - \vec{v}] \\ -T^{-1}\vec{v} \end{pmatrix} \\ y = q \end{cases} \quad (3.48)$$

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

En combinant les équations (3.46) et (3.48), la dynamique de l'erreur d'observation est écrite de la forme suivante :

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{q}_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\gamma}^T \\ -\vec{\gamma} & [2\vec{\omega}^\times] + [\vec{\gamma}^\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{e_0} \\ \vec{q}_e \end{pmatrix} \\ \dot{\tilde{\nu}} = -T^{-1}\tilde{\nu} + K_2 \vec{q}_e \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $\vec{\gamma} = \tilde{\nu} + K_1 \vec{q}_e$  et  $\tilde{\nu} = \vec{\nu} - \hat{\vec{\nu}}$ . Le système (3.49) admet deux points d'équilibre :

$$\begin{cases} q_{e_0} = 1, \vec{q}_e = 0, \tilde{\nu} = 0 \\ q_{e_0} = -1, \vec{q}_e = 0, \tilde{\nu} = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

Ce résultat est dû à la non bijection du quaternion avec le groupe  $SO(3)$ . En fait, physiquement, les quaternions  $q_e$  et  $-q_e$  représentent la même erreur d'attitude. En conséquence, les états de l'observateur convergent vers les vrais états si et seulement si :

$$|q_{e_0}| \rightarrow 1, \vec{q}_e \rightarrow 0, \tilde{\nu} = \vec{\nu} - \hat{\vec{\nu}} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

**Théorème 3.4.** *Considérons les points d'équilibre du système (3.49). Le point d'équilibre ( $q_{e_0} = 1, \vec{q}_e = 0, \vec{\nu} = 0$ ) est globalement stable.*

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V$ , définie positive et non bornée et qui appartient à la classe  $C^2$  :

$$\begin{aligned} V &= K_2((1 - q_{e_0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) + \frac{1}{2} \tilde{\nu}^T \tilde{\nu} \\ &= K_2(2(1 - q_{e_0})) + \frac{1}{2} \tilde{\nu}^T \tilde{\nu} \end{aligned} \quad (3.51)$$

En dérivant (3.51) et en utilisant (3.49), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2K_2 \dot{q}_{e_0} + \tilde{\nu}^T \dot{\tilde{\nu}} \\ &= -K_2 \vec{\gamma}^T \vec{q}_e + \tilde{\nu}^T (-T^{-1}\tilde{\nu} + K_2 \vec{q}_e) \\ &= -K_2(\tilde{\nu}^T + K_1 \vec{q}_e^T) \vec{q}_e - \tilde{\nu}^T T^{-1} \tilde{\nu} + K_2 \tilde{\nu}^T \vec{q}_e \\ &= -K_2 K_1 \vec{q}_e^T \vec{q}_e - \tilde{\nu}^T T^{-1} \tilde{\nu} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ainsi,  $\vec{q}_e, \tilde{\nu} \rightarrow 0$ . Par conséquent,  $q_{e_0} \rightarrow \pm 1$ . Cependant, si la condition initiale de la dynamique d'erreur est quelconque excepté les deux points d'équilibre (3.50), l'erreur de l'observateur va converger asymptotiquement vers le point ( $q_{e_0} = 1, \vec{q}_e = 0, \tilde{\nu} = 0$ ) où  $V = \dot{V} = 0$ . En fait, ce point d'équilibre est considéré comme un point "attracteur", tandis que le point ( $q_0 = -1, \vec{q} = 0, \vec{\nu} = 0$ ) est considéré comme un point "répulsif" [52]. A partir de l'équation (3.51), il est possible de remarquer que si l'état du modèle d'erreur se trouve dans le point



### CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

#### 3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

---

répulsif, l'état va rester dans ce point pour  $t > 0$ . Néanmoins, si une petite perturbation  $\Delta q_{e_0}$  a lieu (où la condition  $-1 \leq q_0 \leq 1$  est accomplie), la valeur de  $V$  va décroître et puisque  $\dot{V} < 0$  pour tous les points (excepté le point d'équilibre où  $\dot{V} = 0$ ), on obtient  $q_{e_0} \rightarrow 1$ , ce qui termine la preuve. ■

En raison de la non bijection du quaternion avec le groupe  $SO(3)$ , il existe une obstruction topologique qui empêche d'utiliser un terme de correction continu [11]. Ainsi, en pratique à la place de l'observateur (3.46) nous utiliserons l'observateur :

$$\mathcal{O}_{A_{dis}} : \begin{cases} \dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \Xi(\hat{q}) \left[ \vec{\omega}_G - \hat{\nu} + \text{sign}(q_{e_0}) K_1 \vec{q}_e \right] \\ \dot{\hat{\nu}} = -T^{-1} \hat{\nu} - \text{sign}(q_{e_0}) K_2 \vec{q}_e \end{cases} \quad (3.53)$$

Le terme "décision"  $\text{sign}(q_{e_0})$  assure qu'entre les deux rotations d'angle  $\beta_e$  et  $2\pi - \beta_e$ , le plus petit angle sera choisi. Ainsi, il est possible de montrer que la dynamique de l'erreur converge vers les points d'équilibre ( $q_{e_0} = 1, \vec{q}_e = 0, \vec{\nu} = 0$ ) ou ( $q_{e_0} = -1, \vec{q}_e = 0, \vec{\nu} = 0$ ) de façon exponentielle. Néanmoins, cette convergence dépend du signe de la composante scalaire du quaternion d'erreur. Ainsi nous avons le résultat suivant.

**Théorème 3.5.** *Considérons les points d'équilibre du système (3.49). Le point d'équilibre ( $q_{e_0} = 1, \vec{q}_e = 0, \vec{\nu} = 0$ ) est exponentiellement stable, si  $q_{e_0} \geq 0$ . De même, le point d'équilibre ( $q_{e_0} = -1, \vec{q}_e = 0, \vec{\nu} = 0$ ) est exponentiellement stable, si  $q_{e_0} < 0$ .*

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V$ , qui est définie positive et non bornée et qui appartient à la classe  $C^2$  :

$$V = \begin{cases} V_q + V_{\tilde{\nu}} = K_2((1 - q_{e_0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) + \frac{1}{2} \tilde{\nu}^T \tilde{\nu}, & \text{si } q_{e_0} \geq 0 \\ V_q + V_{\tilde{\nu}} = K_2((1 + q_{e_0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) + \frac{1}{2} \tilde{\nu}^T \tilde{\nu}, & \text{si } q_{e_0} < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

En analysant pour  $q_{e_0} \geq 0$  et en dérivant (3.54) sur les trajectoires de  $q_e$  (équation (3.49)), on obtient :

$$\dot{V} = -K_2 K_1 \vec{q}_e^T \vec{q}_e - \tilde{\nu}^T T^{-1} \tilde{\nu} \quad (3.55)$$

Puisque  $q_{e_0} \in [0, 1]$ , il vient :

$$\vec{q}_e^T \vec{q}_e = \|\vec{q}_e\|_2^2 = 1 - q_{e_0}^2 \geq 1 - q_{e_0} \quad (3.56)$$

Ainsi, il suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -K_2 K_1 \vec{q}_e^T \vec{q}_e - \tilde{\nu}^T T^{-1} \tilde{\nu} \\ &\leq -K_2 K_1 (1 - q_{e_0}) - \tilde{\nu}^T T^{-1} \tilde{\nu} = -\frac{1}{2} K_1 V_q - 2\frac{1}{\tau} V_{\tilde{\nu}} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

La même démarche peut être menée pour le cas  $q_{e_0} < 0$ . ■

### 3.4.4 Analyse de la dynamique de l'erreur : une approche basée sur la passivité

Dans le paragraphe précédent nous avons montré la stabilité asymptotique globale de l'erreur et nous avons exposé les conditions pour une stabilité exponentielle locale. L'origine de la réflexion a été liée à l'analyse de la fonction de Lyapunov qui, en quelque sorte, représente une fonction d'énergie pour la dynamique de l'erreur. Ainsi, nous avons montré que cette fonction présente un minimum à l'équilibre et qu'elle est décroissante dans le temps. Dans le présent paragraphe, nous allons exploiter la notion de passivité, qui est essentiellement liée aux notions d'énergie accumulée du système considéré et d'énergie apportée par des sources extérieures à celui-ci. Ainsi, nous allons nous intéresser à décomposer la dynamique de l'erreur de l'observateur en deux sous-systèmes. Il s'agit d'envisager la présence à la fois d'une entrée et d'une sortie dans chaque sous-système et d'analyser dans chaque sous-système, la façon d'accumuler et de dissiper leur énergie. Dans un second temps, nous allons analyser le comportement du système complet (dynamique de l'erreur) lors d'une interconnexion entre les deux sous-systèmes et nous montrerons que la dynamique de l'erreur est passive. Les concepts principaux de passivité sont donnés dans l'annexe B.

L'intérêt principal de montrer la passivité de la dynamique de l'erreur est la définition explicite des entrées et des sorties de chaque sous-système. Ces caractéristiques peuvent être exploitées pour étudier la robustesse par rapport aux perturbations dans les mesures.

Considérons la dynamique de l'erreur pour l'observateur du biais (équation (3.49)) :

$$\dot{\tilde{\nu}} = -T^{-1}\tilde{\nu} + K_2 \vec{q}_e \quad (3.58)$$

Considérons la sortie virtuelle suivante :

$$\vec{y}_e = K_2 I_3 \tilde{\nu} \quad (3.59)$$

**Proposition 3.1.** *La fonction de transfert de la dynamique de l'erreur (3.58)-(3.59) satisfait le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), (voir équation B.1, annexe B). Cela signifie que l'application  $\vec{q}_e \rightarrow \vec{y}_e$  est Strictement Réelle Positive (SPR).*

De manière intuitive, un système linéaire est appelé Strictement Réel Positif (Strictly Positive Real (SPR)) si son énergie emmagasinée diminue.

**Preuve** Puisque la matrice  $-T^{-1}$  est Hurwitz, pour toute matrice  $Q$  symétrique définie positive, il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive, telles que :

$$(-T^{-1})^T P + P(-T^{-1}) = -Q \quad (3.60)$$

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

Si la matrice  $Q$  est telle que  $Q = 2T^{-1}$ , on obtient :

$$P = I_3 \tag{3.61}$$

En conséquence :

$$B^T P = K_2 I_3 = C \tag{3.62}$$

satisfait l'égalité (B.5).

■

En utilisant (3.59), la structure de la dynamique de l'erreur représentée par les équations (3.49) est montrée dans la figure 3.9.

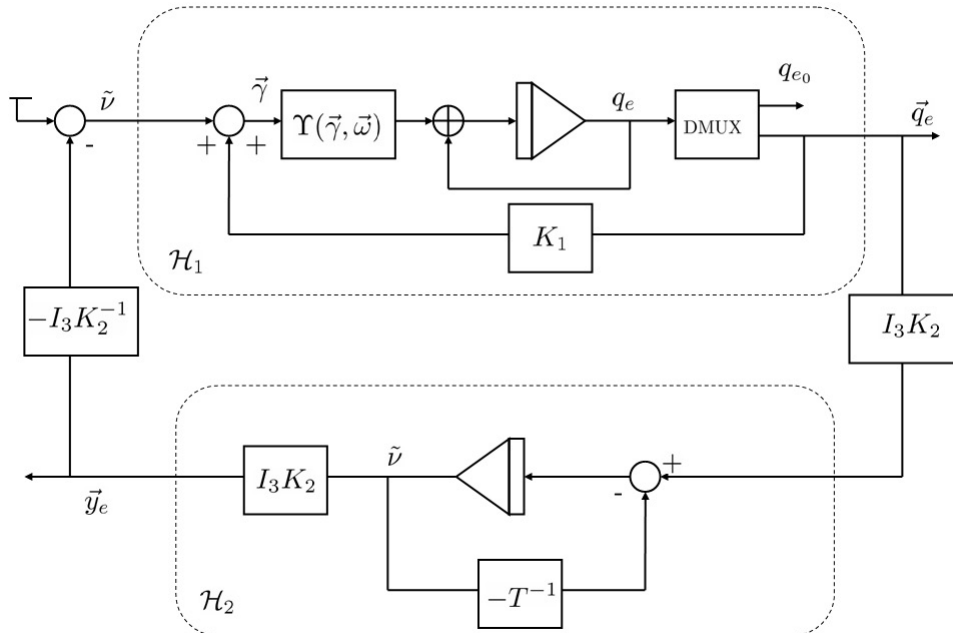


FIG. 3.9 – Structure de la dynamique de l'erreur d'attitude ( $\oplus$  représente une multiplication matricielle)

Cette dynamique de l'erreur peut être exprimée à partir d'un diagramme bloc comme celui de la figure 3.10.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

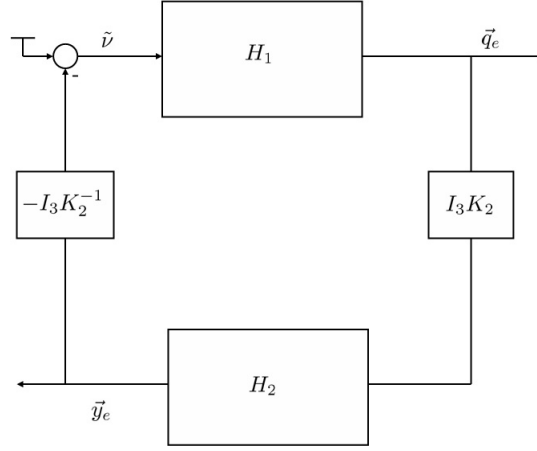


FIG. 3.10 – Dynamique de l'erreur d'attitude

**Proposition 3.2.** *Le système  $H_1$  (erreur d'attitude) est strictement passif en l'état.*

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V_q$ , qui est définie positive et non bornée et qui appartient à la classe  $C^2$  :

$$V_q = \begin{cases} K_2((1 - q_{e0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) = 2K_2(1 - q_{e0}), & \text{si } q_{e0} \geq 0 \\ K_2((1 + q_{e0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) = 2K_2(1 + q_{e0}), & \text{si } q_{e0} < 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Analysons pour le cas  $q_{e0} \geq 0$ . La dérivée de (3.63), sur les trajectoires de  $q_e$  (équation (3.49)), est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &= -2K_2\dot{q}_{e0} \\ &= -K_2\vec{\gamma}^T \vec{q}_e \\ &= -K_2(\tilde{v}^T + K_1\vec{q}_e^T)\vec{q}_e \\ &= -K_2K_1\vec{q}_e^T \vec{q}_e - K_2\tilde{v}^T \vec{q}_e \end{aligned} \quad (3.64)$$

ou de façon similaire :

$$-K_2\tilde{v}^T \vec{q}_e = \dot{V}_q + K_2K_1\vec{q}_e^T \vec{q}_e \quad (3.65)$$

Puisque  $q_{e0} \in [0, 1]$ , on obtient :

$$\vec{q}_e^T \vec{q}_e = \|\vec{q}_e\|_2^2 = 1 - q_{e0}^2 \geq 1 - q_{e0} \geq (1 - q_{e0})^2 \quad (3.66)$$

Il vient :

$$\underbrace{K_2\tilde{v}^T \vec{q}_e}_{\text{Taux d'énergie fournie}} \geq \underbrace{\dot{V}_q}_{\text{Taux d'énergie emmagasinée}} + \underbrace{K_2K_1(1 - q_{e0})^2}_{\text{Taux de dissipation de l'état}} \quad (3.67)$$

## CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

### 3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

---

Cette équation est de la forme donnée par l'équation (B.2) dans la définition d'un système passif (voir définition B.1, annexe B). Ainsi on peut conclure que le système est strictement passif en l'état.

Une démarche similaire peut être menée pour  $q_{e_0} \leq 0$ .

■

**Théorème 3.6.** *L'observateur non linéaire d'attitude (3.46) est passif.*

**Preuve** Puisque le système  $\mathcal{H}_1$  est strictement passif dans l'état et que le système  $\mathcal{H}_2$  est Strictement Réelle Positif (SPR), l'observateur non linéaire d'attitude (3.46) est passif.

■

Ces derniers résultats sont très importants, puisque, en plus de la stabilité globale montrée dans le paragraphe précédent, la passivité de la dynamique de l'erreur est montrée de façon formelle. De plus, l'analyse de passivité nous a permis de décomposer la dynamique de l'erreur en deux sous-systèmes passifs et de définir des entrées et des sorties. Ces aspects sont très importants en vue d'une analyse de robustesse où le bruit ou une perturbation peut être vue comme une entrée dans le système.

#### 3.4.5 Analyse de stabilité au sens entrée-état (ISS)

Jusqu'à maintenant, les analyses de stabilité de la dynamique de l'erreur de l'observateur d'attitude ont été effectuées dans un contexte sans bruit. La question naturelle qui vient à l'esprit est : que se passe-t-il s'il existe du bruit dans les mesures ? Comme nous l'avons mentionné, à la différence d'un observateur linéaire, un observateur non linéaire est, en général, très sensible au bruit et aux perturbations dans les mesures. Ainsi, une petite perturbation peut provoquer une instabilité de la dynamique de l'erreur. Dans ce paragraphe, nous allons aborder cette question et montrer que l'erreur d'estimation reste bornée en dépit d'une perturbation dans les mesures des gyromètres et d'un vecteur de biais qui varie dans le temps. Afin d'atteindre notre objectif, nous allons exploiter la propriété de passivité qui nous a permis de séparer la dynamique de l'erreur dans deux sous-systèmes reliés en "feedback". Ainsi, nous allons étudier la propriété de stabilité au sens entrée-état (ISS) dans chaque sous-système. Ensuite, nous allons montrer que le système complet est lui aussi stable au sens ISS, lorsque nous considérons une perturbation dans les mesures des gyromètres comme une entrée et la partie vectorielle du quaternion d'erreur comme l'état.

Les concepts principaux de la stabilité entrée-état (ISS) sont donnés dans l'annexe C.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

Rappelons le modèle de mesures des gyromètres et le modèle d'évolution du biais :

$$\vec{\omega}_G = \vec{\omega} + \vec{\nu} + \vec{\eta}_G \quad (3.68)$$

$$\dot{\vec{\nu}} = -T^{-1}\vec{\nu} + \vec{\eta}_\nu \quad (3.69)$$

Dans les paragraphes précédents, les composantes des vecteurs  $\vec{\eta}_G$  et  $\vec{\eta}_\nu$  sont supposées être nulles et une analyse de stabilité de l'observateur a été effectuée. Désormais nous allons considérer que ces composantes de bruit sont non nulles. De plus, aucune condition sur la distribution du bruit n'est imposée, la seule condition est que les composantes du bruit soient bornées. Nous avons donc :

$$\sup_{s \in [t_0, t]} \|\vec{\eta}_G(s)\|_2 < c_1 \quad (3.70)$$

$$\sup_{s \in [t_0, t]} \|\vec{\eta}_\nu(s)\|_2 < c_2 \quad (3.71)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  des bornes inconnues.

Si les modèles (3.68) et (3.69) sont considérés, alors le modèle dynamique (3.48) devient :

$$\Sigma_{A_{\text{avec bruit}}} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\vec{\nu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \\ -T^{-1}\vec{\nu} + \vec{\eta}_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Xi(q)[\vec{\omega}_G - \vec{\nu} - \vec{\eta}_G] \\ -T^{-1}\vec{\nu} + \vec{\eta}_\nu \end{pmatrix} \\ y = q \end{cases} \quad (3.72)$$

En combinant la dynamique de l'observateur (3.46) et la dynamique du système (3.72), la dynamique de l'erreur d'observation est décrite par :

$$\Sigma_{e_{\text{bruit}}} : \begin{cases} \dot{q}_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\gamma}^T + \vec{\eta}_G^T \\ -\vec{\gamma} + \vec{\eta}_G & [2\vec{\omega}^\times] + [(\vec{\gamma} + \vec{\eta}_G)^\times] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{e_0} \\ \vec{q}_e \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{\nu}} = -T^{-1}\vec{\nu} + K_2 \vec{q}_e + \vec{\eta}_\nu \end{cases} \quad (3.73)$$

Rappelons que nous avons conçu le vecteur  $\vec{y}_e$  tel que :

$$\vec{y}_e = K_2 I_3 \vec{\nu} \quad (3.74)$$

En utilisant (3.74), la structure de la dynamique de l'erreur représentée par les équations (3.73) est montrée dans la figure 3.11.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

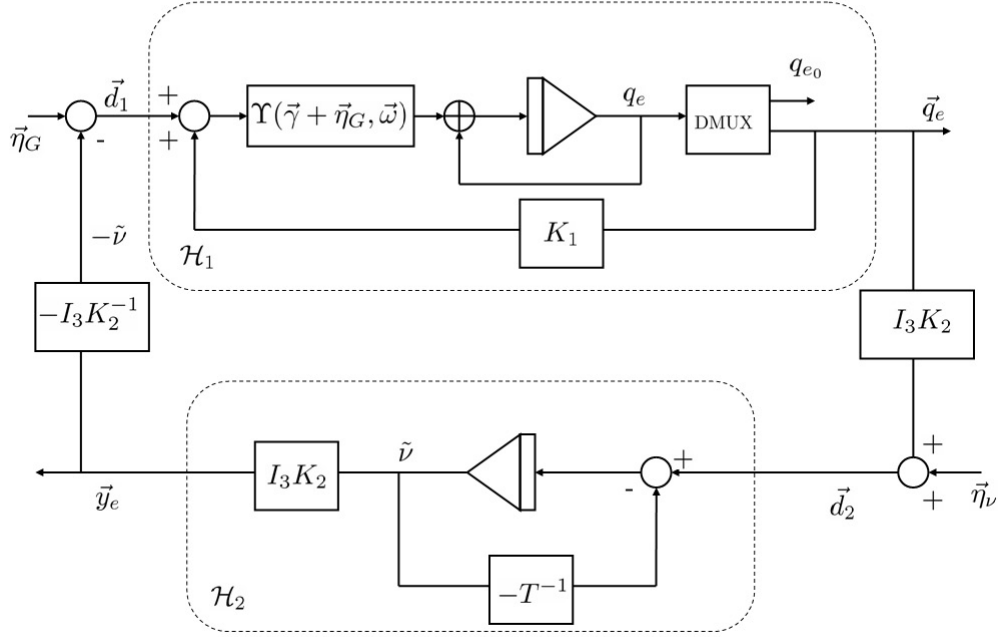


FIG. 3.11 – Structure de la dynamique de l'erreur d'attitude avec des bruit ( $\oplus$  représente une multiplication matricielle)

L'idée est de montrer la stabilité de chaque sous-système au sens entrée-état et ensuite de montrer la stabilité du système bouclé. Les entrées  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  sont telles que :

$$\vec{d}_1 = \tilde{\nu} + \vec{\eta}_G \quad (3.75)$$

$$\vec{d}_2 = K_2 \vec{q}_e + \vec{\eta}_\nu \quad (3.76)$$

**Proposition 3.3.** *Le sous-système  $\mathcal{H}_2$  est stable au sens entrée-état (ISS) par rapport à l'entrée  $\vec{d}_2$ . En conséquence, la sortie du bloc  $\mathcal{H}_2$  ( $\vec{y}_e = K_2 I_3 \tilde{\nu}$ ) reste toujours bornée.*

**Preuve** Considérons la dynamique de l'erreur du biais donnée par la deuxième équation du système (3.73). Puisque la matrice  $-T^{-1}$  est Hurwitz, il suit :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nu}(t)\|_2 &= \exp(-T^{-1}(t - t_0)) \|\tilde{\nu}(t_0)\|_2 + \int_{t_0}^t \exp(-T^{-1}(t - s)) (\vec{d}_2(s)) ds \\ &= \exp(-T^{-1}(t - t_0)) \|\tilde{\nu}(t_0)\|_2 + \int_{t_0}^t \exp(-T^{-1}(t - s)) (K_2 \vec{q}_e(s) + \vec{\eta}_\nu(s)) ds \quad (3.77) \\ &\leq \exp(-T^{-1}(t - t_0)) \|\tilde{\nu}(t_0)\|_2 + K_2 \sup_{s \in [t_0, t]} \{\|\vec{q}_e(s)\|_2\} + \sup_{s \in [t_0, t]} \{\|\vec{\eta}_\nu(s)\|_2\} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|\tilde{\nu}(t)\|_2 \leq \max \left\{ \zeta_2(\|\tilde{\nu}(t_0)\|_2, t - t_0), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_{21}(\|\vec{q}_e(s)\|_2), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_2(\|\vec{\eta}_\nu(s)\|_2) \right\} \quad (3.78)$$

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

avec :

$$\zeta(\|\tilde{\nu}(t_0)\|_2, t - t_0) = \exp(-T^{-1}(t - t_0))\|\tilde{\nu}(t_0)\|_2 \text{ une fonction de classe } \mathcal{KL}$$

et

$$\varsigma_{21}(\|\vec{q}_e(s)\|_2) = K_2\|\vec{q}_e(s)\|_2 \text{ et } \varsigma_2(\|\vec{\eta}_\nu(s)\|_2) = \|\vec{\eta}_\nu(s)\|_2 \text{ des fonctions de classe } \mathcal{K}$$

En accord avec la définition C.1 donnée dans l'annexe C, le système  $\mathcal{H}_2$  d'état  $\tilde{\nu}$  et d'entrée  $\vec{d}_2$  est stable au sens entrée-état. Ainsi, l'erreur d'estimation du biais  $\tilde{\nu}(t)$  est toujours bornée et la sortie du système  $\mathcal{H}_2$  ( $\vec{y}_e = K_2 I_3 \tilde{\nu}$ ) reste toujours bornée pour  $t > t_0$ . ■

**Proposition 3.4.** *La dynamique de l'erreur d'estimation du quaternion, représentée par le système  $\mathcal{H}_1$  est stable au sens entrée-état lorsque nous considérons comme des entrées la perturbation  $\vec{\eta}_G$  et le vecteur d'erreur d'estimation du biais  $\tilde{\nu}$  et comme l'état la partie vectorielle du quaternion d'erreur  $\vec{q}_e$ .*

Le résultat de cette proposition vient directement de l'analogie qui existe entre la notion de stabilité entrée-état et la théorie des systèmes dissipatifs. Afin de faire la preuve de la proposition 3.4, nous allons proposer une fonction de Lyapunov candidate et nous allons montrer que cette fonction est une fonction de Lyapunov ISS. En fait, un système est stable au sens entrée-état s'il admet une fonction de Lyapunov ISS [96].

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V_q$ , définie positive et non bornée et qui appartient à la classe  $C^2$  :

$$V_q = \begin{cases} K_2((1 - q_{e_0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) = 2K_2(1 - q_{e_0}), & \text{si } q_{e_0} \geq 0 \\ K_2((1 + q_{e_0})^2 + \vec{q}_e^T \vec{q}_e) = 2K_2(1 + q_{e_0}), & \text{si } q_{e_0} < 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

Analysons le cas  $q_{e_0} \geq 0$ . La dérivée de (3.79) sur les trajectoires de  $q_e$  (équation (3.73)) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &= -2K_2\dot{q}_{e_0} \\ &= -K_2(\vec{\gamma}^T + \vec{\eta}_G^T)\vec{q}_e \\ &= -K_2(\tilde{\nu}^T + K_1\vec{q}_e^T + \vec{\eta}_G^T)\vec{q}_e \\ &= -K_2K_1\vec{q}_e^T\vec{q}_e - K_2(\tilde{\nu}^T + \vec{\eta}_G^T)\vec{q}_e \\ &= -K_2K_1\vec{q}_e^T\vec{q}_e - K_2\vec{d}_1^T\vec{q}_e \end{aligned} \quad (3.80)$$

Puisque  $q_{e_0} \in [0, 1]$ , on obtient :

$$\vec{q}_e^T \vec{q}_e = \|\vec{q}_e\|_2^2 = 1 - q_{e_0}^2 \geq 1 - q_{e_0} \geq (1 - q_{e_0})^2 \quad (3.81)$$



**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

Il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_q &\leq -K_2K_1(1 - q_{e_0})^2 - \vec{d}_1^T \vec{q}_e \\
&\leq -K_2K_1(1 - q_{e_0})^2 + \|\vec{d}_1\|_2 \|\vec{q}_e\|_2 \\
&\leq -K_2K_1(1 - q_{e_0})^2 + \|\vec{d}_1\|_2 \\
&\leq -\alpha_3((1 - q_{e_0})^2) + \alpha_4(\|\vec{d}_1\|_2)
\end{aligned} \tag{3.82}$$

La fonction  $V_q$  a les caractéristiques suivantes :

– puisque  $V_q$  est non bornée,  $\exists$  des fonctions  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telles que :

$$\alpha_1(\|q(t_0)\|_2) \leq V_q(q(t_0)) \leq \alpha_2(\|q(t_0)\|_2)$$

– les fonctions  $\alpha_3((1 - q_{e_0})^2) = K_1K_2((1 - q_{e_0})^2)$  et  $\alpha_4(\|\vec{d}_1\|_2) = K_2\|\vec{d}_1\|_2$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

En accord avec la définition C.4 donnée dans l'annexe C, la fonction  $V_q$  est une fonction de Lyapunov ISS. En conséquence, par le théorème C.1, le système  $\mathcal{H}_1$  est stable au sens entrée-état par rapport à l'entrée  $\vec{d}_1$ . Par conséquent, l'état  $\vec{q}_e$  satisfait :

$$\|\vec{q}_e(t)\|_2 \leq \max \left\{ \zeta_1(\|\vec{q}_e(t_0)\|_2, t - t_0), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_d(\|\vec{d}_1(s)\|_2) \right\} \tag{3.83}$$

avec  $\zeta_1(\cdot, \cdot)$  une fonction de classe  $\mathcal{KL}$  et  $\varsigma_d(\cdot)$  une fonction de classe  $\mathcal{K}$ .

■

**Remarque 3.4.** *Puisque l'entrée  $\vec{d}_1$  est une combinaison linéaire du bruit et de l'erreur d'estimation du biais dans les mesures gyrométriques ( $\vec{d}_1 = \tilde{\nu} + \vec{\eta}_G$ ) l'état  $\vec{q}_e$  du système  $\mathcal{H}_1$  satisfait la condition suivante :*

$$\|\vec{q}_e(t)\|_2 \leq \max \left\{ \zeta_1(\|\vec{q}_e(t_0)\|_2, t - t_0), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_{12}(\|\tilde{\nu}(s)\|_2), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_1(\|\vec{\eta}_G(s)\|_2) \right\} \tag{3.84}$$

avec  $\zeta_1$  une fonction de classe  $\mathcal{KL}$  et  $\varsigma_{12}(\|\tilde{\nu}\|_2) = K_2\|\tilde{\nu}\|_2$  et  $\varsigma_1(\|\vec{\eta}_G\|_2) = K_2\|\vec{\eta}_G\|_2$  des fonctions de classe  $\mathcal{K}$ .

Maintenant, nous allons analyser la stabilité du système bouclé ( $\mathcal{H}_1$ - $\mathcal{H}_2$ ) et nous allons montrer que le système d'état  $[\vec{q}_e^T \ \tilde{\nu}^T]^T$  et d'entrée  $[\vec{\eta}_G^T \ \vec{\eta}_\nu^T]^T$  est stable entrée-état.

**Théorème 3.7.** *Soit le gain  $K_2 < 1$ . Alors, le système d'état  $[\vec{q}_e^T \ \tilde{\nu}^T]^T$  et d'entrée  $[\vec{\eta}_G^T \ \vec{\eta}_\nu^T]^T$  est stable au sens entrée-état (ISS).*

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

**Preuve** Afin de faire la preuve de ce théorème, nous allons utiliser le théorème de petit gain pour les systèmes ISS [50] (voir théorème (C.2) dans l'annexe C).

De la proposition 3.4, nous savons que le système  $\mathcal{H}_1$  est stable entrée-état, de sorte que l'état satisfait la condition suivante :

$$\|\vec{q}_e(t)\|_2 \leq \max \left\{ \zeta_1(\|\vec{q}_e(t_0)\|_2, t - t_0), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_{12}(\|\tilde{\nu}(s)\|_2), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_1(\|\vec{\eta}_G(s)\|_2) \right\} \quad (3.85)$$

De la proposition 3.3, nous savons que le système  $\mathcal{H}_2$  est stable entrée-état, de sorte que l'état satisfait la condition suivante :

$$\|\tilde{\nu}(t)\|_2 \leq \max \left\{ \zeta_2(\|\tilde{\nu}(t_0)\|_2, t - t_0), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_{21}(\|\vec{q}_e(s)\|_2), \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma_2(\|\vec{\eta}_\nu(s)\|_2) \right\} \quad (3.86)$$

La composition des fonctions  $\varsigma_{12}$  et  $\varsigma_{21}$  est donnée par :

$$\varsigma_{12} \circ \varsigma_{21}(\|\vec{q}_e(s)\|_2) = K_2(K_2\|\vec{q}_e\|_2) \quad (3.87)$$

Puisque  $K_2 < 1$ , alors nous avons :

$$K_2^2\|\vec{q}_e\|_2 < \|\vec{q}_e\|_2 \quad \forall \quad \|\vec{q}_e\|_2 > 0 \quad (3.88)$$

Ainsi, en accord avec le théorème du petit gain pour les systèmes ISS [50] (voir annexe C), la dynamique de l'erreur d'observation, composée par les systèmes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , est stable au sens entrée-état (ISS) par rapport aux perturbations  $\vec{\eta}_G$  et  $\vec{\eta}_\nu$ . ■

De cette dernière analyse, nous pouvons tirer trois conclusions importantes :

1. nous avons démontré que l'observateur proposé est robuste par rapport aux bruits dans les mesures de gyromètres ;
2. nous montrons de façon formelle que l'observateur est capable d'estimer un biais variable dans le temps ;
3. nous avons établi une condition nécessaire pour le gain  $K_2$  afin de maintenir la robustesse de l'observateur.

**Remarque 3.5.** *La condition pour le gain  $K_2$  donnée par le théorème 3.7 coïncide avec les résultats reportés dans [79]. Dans ce travail, les auteurs ont formulé un observateur non linéaire afin d'estimer l'attitude d'un drone de type "VTOL". La conclusion obtenue est que pour de petits mouvements angulaires (faibles inclinations et des petits angles de lacet), un observateur non linéaire comme celui que nous avons proposé dans ce chapitre se comporte comme un filtre complémentaire, où  $K_2$  représente la fréquence de coupure du filtre. Suite à une analyse essai-erreur, les auteurs ont montré que leur observateur a un meilleur comportement pour des valeurs de  $K_2 \approx 1$ .*

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
**3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE**

---

**Remarque 3.6.** *L'analyse de robustesse pour un observateur d'attitude a été très peu traitée dans la communauté. Le seul résultat dans cette direction est celui reporté dans [103]. Cependant, dans cet article, les auteurs utilisent deux repères pour la synthèse de leur observateur : le repère de l'observateur et le repère du corps rigide. En conséquence, les mesures des gyromètres sont prémultipliées par une matrice de rotation intermédiaire avant de les intégrer. Cette prémultiplication peut apporter du bruit supplémentaire lors de l'intégration et faire que l'observateur soit plus sensible aux perturbations [65].*

### 3.4.6 Résultats en simulations

Afin de montrer les performances de l'observateur proposé, nous allons réaliser des simulations. Le modèle théorique simulé est celui d'un corps rigide qui tourne avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = [1.9 \ 2 \ -1.7]^T$  rad/sec.

Les caractéristiques du bruit des mesures accélérométriques et magnétométriques ( $\vec{b}_A$  et  $\vec{b}_M$ ) sont montrées dans le tableau 3.1, page 82. Les mesures des gyromètres comportent un biais qui est variable dans le temps et un terme de bruit qui dans le cas présent est considéré blanc, gaussien et de moyenne nulle. La dynamique du biais est modélisée par un processus de Gauss-Markov (voir l'équation 3.69). Les caractéristiques des bruits pour le modèle de mesure des gyromètres sont montrées dans le tableau 3.4.

Description	Paramètre	Ecart type	Unités
Gyromètre	$\eta_G$	0.01	rad/sec
Biais	$\eta_\nu$	0.001	rad/sec

TAB. 3.4 – Caractéristiques des bruit pour les mesures des gyromètres

Les conditions initiales (CI) à l'instant  $t_0 = 0$  pour le quaternion et le biais théorique, ainsi que le quaternion et le biais estimé sont données dans le tableau 3.5. Les gains et la constante de temps sont choisies comme suit :  $K_1 = 1.5$ ,  $K_2 = 0.5$ ,  $T = 100I_3$ .

CI de l'observateur	Valeur choisie	CI théorique	Valeur théorique	Unité
$\hat{q}(t_0)$	$[0.47 \ 0.19 \ 0.38 \ 0.76]^T$	$q(t_0)$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	
$\vec{\nu}(t_0)$	$[0 \ 0 \ 0]^T$	$\nu(t_0)$	$[0.19 \ 0.38 \ -0.41]^T$	rad/sec

TAB. 3.5 – Conditions initiales (simulation)

### CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

#### 3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

L'objectif est de montrer la capacité de l'observateur à estimer l'attitude même lorsque les conditions initiales sont "loin" des valeurs théoriques, aussi bien pour l'attitude que pour les biais. Rappelons que dans un premier temps l'étude de la convergence de l'erreur à zéro a été effectuée dans un contexte non bruité. Cependant, les simulations ont été effectuées en présence d'un bruit dans les mesures, ce qui constitue une situation réaliste. Compte tenu de l'analyse de passivité et de stabilité entrée-état, la robustesse de l'observateur par rapport aux bruits de mesures est confirmée.

Dans la figure 3.12, le quaternion théorique  $q$ , le quaternion de mesure  $q_{ps}$  obtenu par le lemme 3.1 et le quaternion  $\hat{q}$  estimé par l'observateur sont montrés. Ces courbes sont zoomées dans la figure 3.13 afin de juger de la performance de l'observateur.

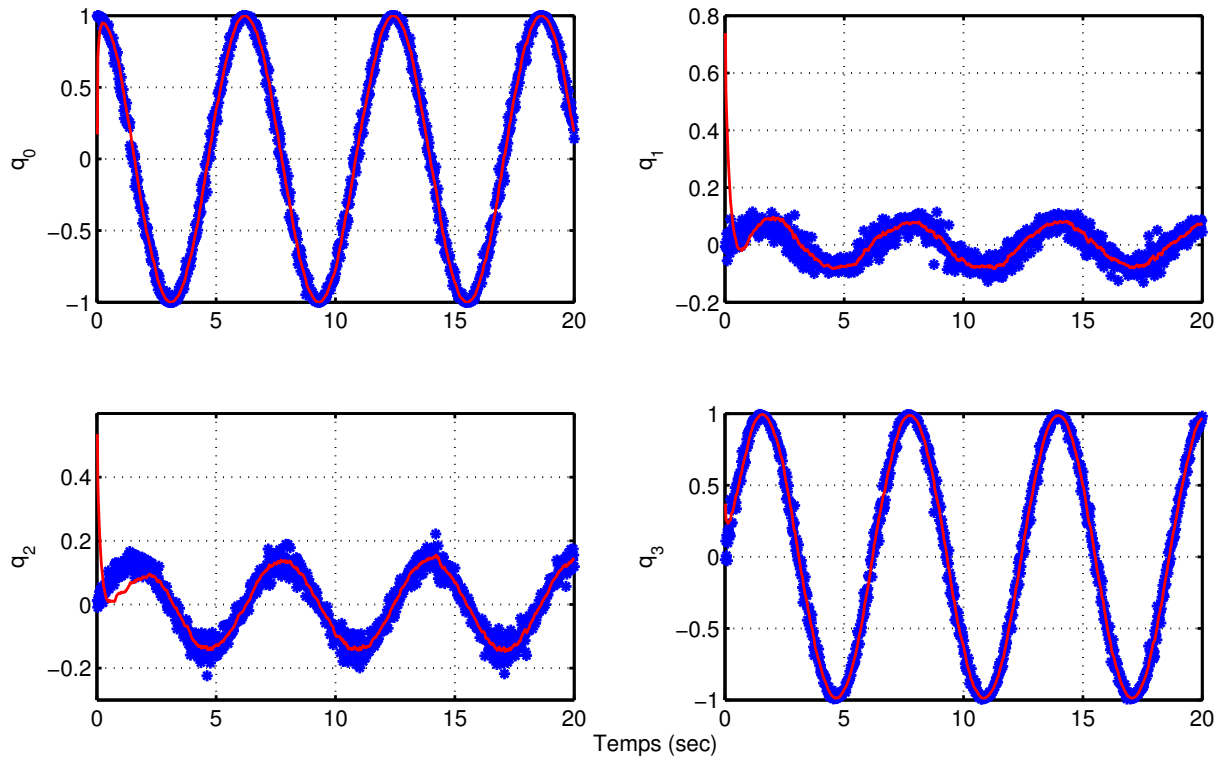


FIG. 3.12 – Estimation du quaternion d'attitude :  $q$  (tiret),  $\hat{q}$  (solide),  $q_{ps}$  (étoile)

CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE  
3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

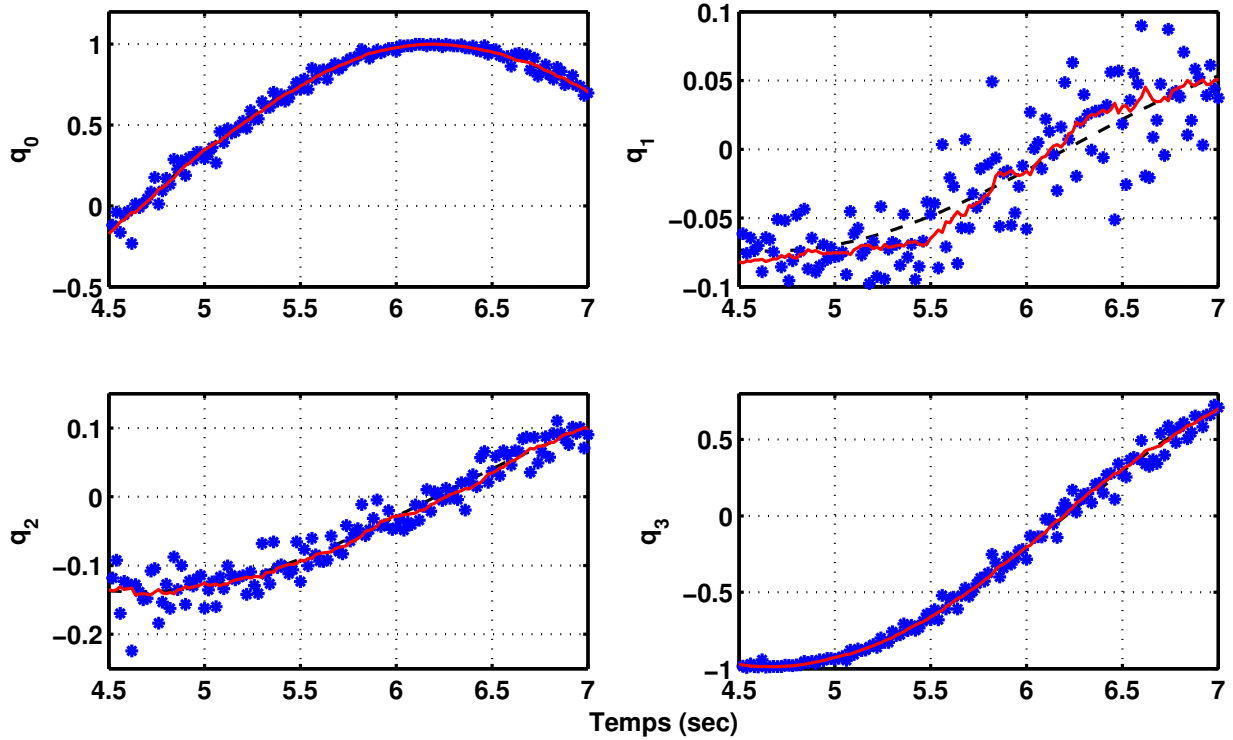


FIG. 3.13 – Estimation du quaternion d'attitude (zoom) :  $q$  (tiret),  $\hat{q}$  (solide),  $q_{ps}$  (étoile).

Comme prévu, le quaternion estimé converge vers le quaternion théorique dans un temps acceptable pour les applications visées. Notons aussi que malgré le bruit dans les mesures des capteurs, le quaternion estimé suit de façon excellente le quaternion théorique. Afin de quantifier l'erreur d'attitude, la métrique géodésique (1.39) est utilisée. Nous avons calculé l'erreur  $\beta_e(q_{the}, \hat{q})$  entre le quaternion théorique et le quaternion estimé  $\hat{q}$ , ainsi que l'erreur  $\beta_e(q_{the}, \hat{q}_{ps})$  entre le quaternion théorique et le quaternion obtenu uniquement avec les mesures des accéléromètres et des magnétomètres,  $q_{ps}$ . Ces erreurs sont montrées dans la figure 3.14, où nous observons la convergence de l'erreur à zéro. Puisque le quaternion  $q_{ps}$  a été obtenu en utilisant le lemme 3.1 (approche SVD) la convergence de l'erreur est immédiate. Notons qu'après la convergence de l'observateur, la moyenne de l'erreur entre  $q$  et  $\hat{q}$  est de  $\bar{\beta}_e(q, \hat{q}) = 0.52^\circ$  avec un écart type  $\sigma_e(q, \hat{q}) = 0.24^\circ$ , tandis que la moyenne de l'erreur entre  $q$  et  $q_{ps}$  est  $\bar{\beta}_e(q, q_{ps}) = 2.9^\circ$  avec un écart type  $\sigma_e(q, q_{ps}) = 1.3^\circ$ .

CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE  
3.4. OBSERVATEUR NON LINÉAIRE D'ATTITUDE

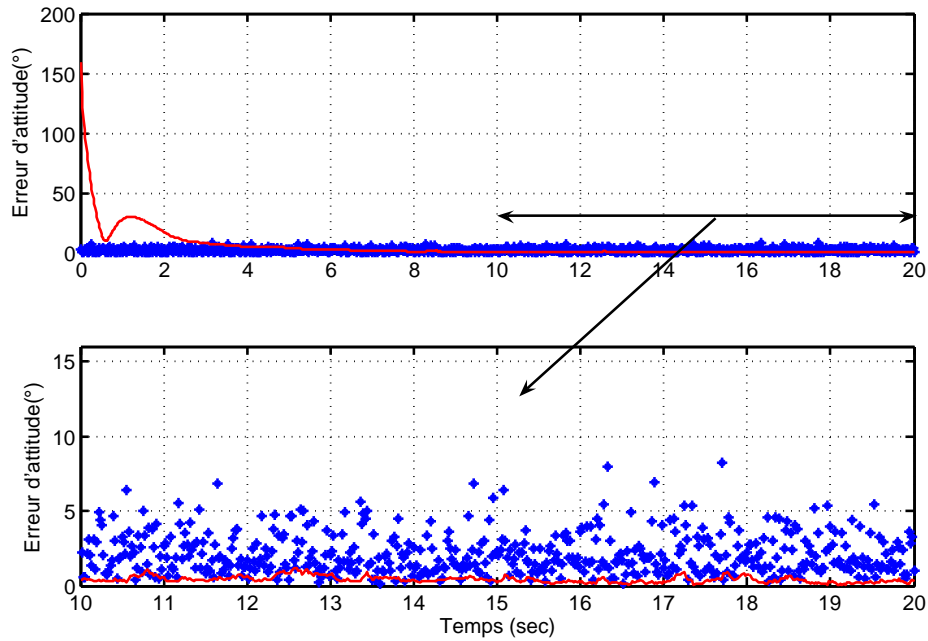


FIG. 3.14 – Erreur de l'attitude estimée :  $\beta_e(q, \hat{q})$  (solide),  $\beta_e(q, q_{ps})$  (étoile)

Dans la figure 3.15, nous montrons la capacité de l'observateur à estimer (et extraire) le biais présent dans les mesures du gyromètre de l'axe  $x_b$ . Un comportement similaire est observé lorsque le biais est aussi présent sur les deux autres axes. Notons que l'observateur est capable d'estimer le biais même s'il est variable dans le temps ce qui représente en fait un scénario réaliste.

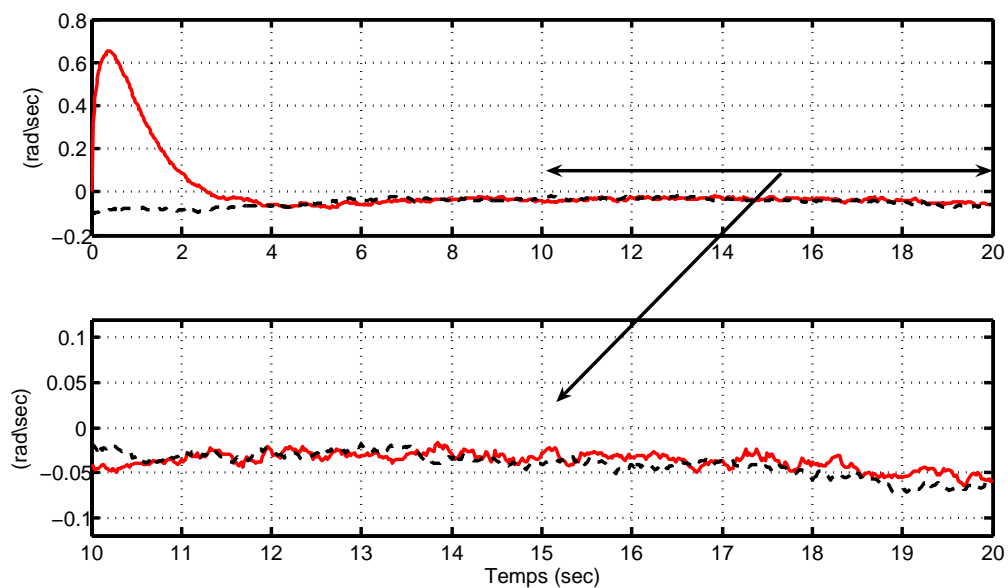


FIG. 3.15 – Estimation du biais dans un gyromètre :  $\nu_x$  (biais simulé) (tiret),  $\hat{\nu}_x$  (biais estimé) (solide)

## 3.5 Comparaison entre le Filtre de Kalman Etendu et l'observateur non linéaire

Nous pouvons distinguer deux classes d'observateurs non linéaires utilisés par la communauté : des observateurs empiriques et des observateurs pour lesquels une preuve de convergence est établie. La première classe d'observateurs est basée sur une approximation du système non linéaire. L'exemple le plus commun est bien sûr le Filtre de Kalman Etendu (FKE). Bien que pour les systèmes linéaires le Filtre de Kalman soit un observateur pour lequel l'estimé converge vers les vrais états (une preuve de convergence est bien établie), la version étendue est une linéarisation du système non linéaire dans un voisinage de son estimation. En conséquence, le FKE est un bon observateur local, voire optimal. Cependant, il n'est pas un observateur globalement convergent. A titre d'exemple, imaginons qu'une estimation *a priori* soit très loin du vrai état, ainsi la linéarisation autour de l'estimée n'a pas de sens. En dépit d'une absence de justification théorique, le FKE est l'un des plus utilisés pour l'estimation des variables d'état des systèmes dynamiques non linéaires.

Le propos de ce paragraphe est de présenter une comparaison entre l'observateur proposé et deux FKE, rapportés dans la littérature pour l'estimation de l'attitude, à savoir le Filtre de Kalman Etendu Multiplicatif (MEKF) et le Filtre de Kalman Etendu Additif (AEKF) (voir [72] pour plus de détails ).

Les composantes des matrices  $Q$  et  $R$  dans ces FKE sont choisies en accord avec les caractéristiques de bruit dans les mesures et dans le modèle (tableau 3.1 et tableau 3.4).

L'objectif est de montrer la capacité de chaque observateur à estimer l'attitude lorsque les conditions initiales sont "loin" des valeurs théoriques, aussi bien pour l'attitude que pour les biais. Les résultats sont montrés dans la figure 3.16, où nous avons calculé l'erreur  $\beta(\hat{q}_{alg}, q_{the})$ , entre le quaternion théorique et le quaternion estimé pour chaque algorithme.

L'estimation du biais pour chaque algorithme est montrée dans la figure 3.17.

Pour les caractéristiques de bruit, les conditions initiales montrées dans le tableau 3.5 et avec les gains  $K_1 = 1.5$ ,  $K_2 = 0.5$ , l'observateur non linéaire proposé donne un meilleur résultat que les FKE. Il faudrait faire une analyse statistique en initialisant avec différentes valeurs d'attitude et de biais et avec différentes valeurs de  $K_1$  et  $K_2$  ainsi que de  $Q$  et  $R$  afin de conclure quant à la supériorité d'une technique sur l'autre. Néanmoins, l'avantage principal de l'approche proposée est la possibilité de "régler" l'observateur non linéaire (régler la vitesse de convergence) à partir de simplement deux gains ( $K_1$  et  $K_2$ ). De plus, compte tenu des analyses de stabilité, la dynamique d'erreur est globalement stable et localement exponentiellement stable. Un autre avantage de l'observateur non linéaire est qu'aucune matrice de covariance n'est calculée, ce qui est nécessaire dans un filtre de Kalman (solution d'une équation de Riccati à chaque période d'échantillonnage).

CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE  
3.5. COMPARAISON ENTRE LE FKE ET L'OBSERVATEUR NON LINÉAIRE

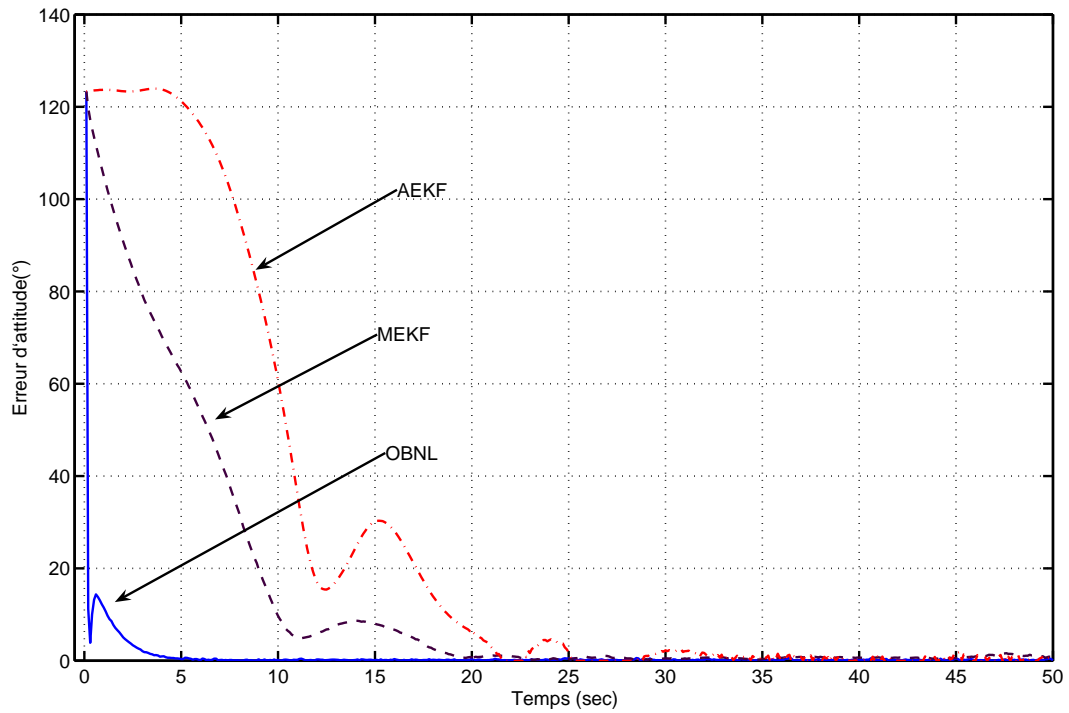


FIG. 3.16 – Erreur de l'attitude estimée

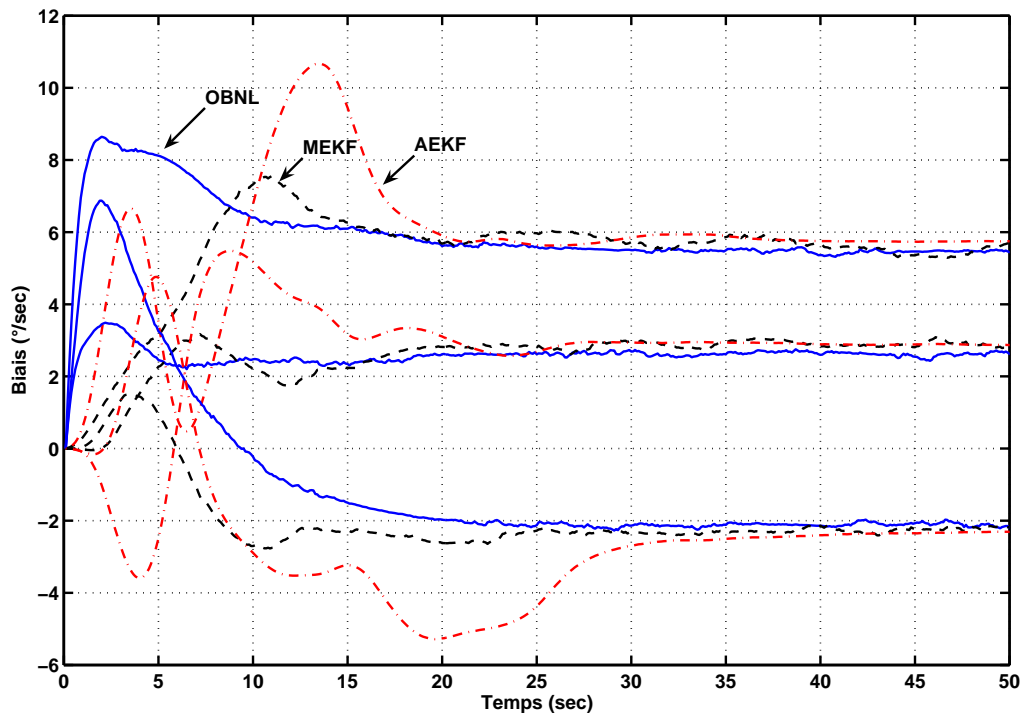


FIG. 3.17 – Estimation du biais dans les gyromètres



## 3.6 Implantation en temps réel des algorithmes d'estimation d'attitude : application à un mini hélicoptère à quatre rotors

Dans le paragraphe précédent, nous avons testé en simulation la performance des algorithmes proposés pour l'estimation de l'attitude. Dans ce paragraphe nous allons présenter l'application de l'estimation de l'attitude à l'estimation de l'attitude du mini hélicoptère à quatre rotors décrit dans le chapitre II.

Cette application consiste à estimer l'attitude de l'hélicoptère à quatre rotors par rapport au système inertiel (NED) tel que donné dans la figure 3.18. Les mesures sont obtenues grâce à une centrale d'attitude de chez Microstrain [74]. Cette centrale est composée de neuf capteurs de technologie MEMS : trois gyromètres, trois accéléromètres et trois magnétomètres. Ce module permet d'obtenir les neuf mesures, de calculer l'attitude (en utilisant un algorithme implanté par le fabricant) et de transmettre les données soit sous forme d'angles d'Euler, de quaternions ou de matrices de rotation, au moyen d'une transmission série RS-232. Néanmoins, ce module permet aussi de transmettre les neuf mesures "brutes". Dans notre cas, nous avons utilisé les neuf mesures "brutes" et nous avons implanté notre algorithme d'estimation de l'attitude. Les neuf mesures sont obtenues avec une fréquence d'échantillonnage de 50 Hz ( $\Delta t = 0.02$  sec). L'algorithme d'estimation a été codé en langage "C" et a été mis dans une DLL (Dynamic-Link Library). Cela permet l'utilisation de l'algorithme pendant une analyse hors-ligne ou pendant un traitement en temps réel en utilisant les plateformes MATLAB<sup>®</sup> Simulink<sup>®</sup> ou LabView<sup>®</sup>. L'algorithme implanté pour l'estimation de l'attitude est donné page 112.

Afin de montrer et d'analyser les performances de notre algorithme, nous avons procédé à une expérience. Cette expérience a été effectuée avant de monter le module de capteurs sur l'hélicoptère, pour tester l'algorithme sous différentes dynamiques de mouvement. L'objectif est de montrer que la fusion des trois modalités de mesures (gyromètre, accéléromètre, magnétomètre) via l'observateur non linéaire proposé, permet d'obtenir une estimation de l'attitude beaucoup plus précise que si uniquement des gyromètres sont utilisés ou si uniquement des accéléromètres et magnétomètres sont utilisés. Ainsi, nous avons estimé un quaternion  $q_G$  obtenu uniquement par l'intégration des mesures des gyromètres, un quaternion  $q_{ps}$  obtenu avec les mesures de accéléromètres et magnétomètres en utilisant une approche projection (lemme 3.2) et un quaternion  $\hat{q}$  obtenu avec l'observateur non linéaire proposé, lequel fusionne les trois types de mesures. Signalons que nous n'avons pas un système de capture de mouvement étalon pour comparer l'attitude estimée par notre algorithme à chaque instant d'échantillonnage avec une référence. En conséquence, nous allons nous contenter de comparer l'attitude estimée initiale et finale avec une attitude

## CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

### 3.6. IMPLANTATION EN TEMPS RÉEL

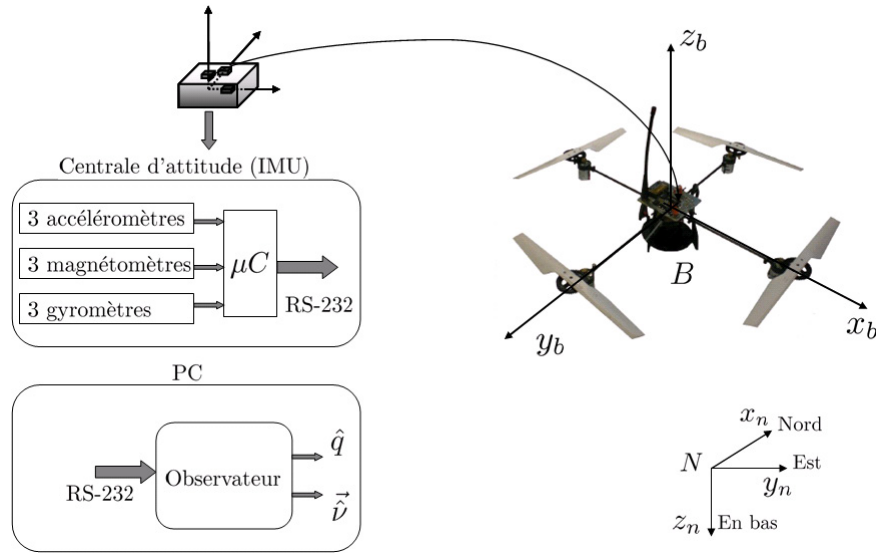


FIG. 3.18 – Estimation de l'attitude de l'hélicoptère à quatre rotors

(position angulaire) bien connue. Les données obtenues de la centrale d'attitude ont été sauvegardées et une analyse hors-ligne a été effectuée. Cette expérience est décrite ci-après et elle est inspirée de l'expérience effectuée dans [80].

1. La centrale d'attitude (CA) est posée dans une attitude bien connue  $q_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  (la centrale a été positionnée sur le sol et elle est orientée telle que son axe  $x$  coïncide avec la direction du champ magnétique). En effet, dans cette position le repère mobile et le repère inertiel coïncident.
2. La CA reste dans cette orientation  $q_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  pendant 10 secondes.
3. La CA tourne dans toutes les directions à différentes vitesses de rotations pendant 40 secondes.
4. La CA est reposée dans la position angulaire initiale telle que les attitudes finale et initiale soient identiques.
5. Pendant toute la durée d'analyse (60 sec), un vecteur de biais a été artificiellement additionné aux mesures des gyromètres, afin de tester la capacité de l'observateur à estimer le biais présent dans les mesures des gyromètres et qui peut dégrader l'estimation de l'attitude.

Les résultats obtenus sont montrés dans les figures 3.20 - 3.22. Nous montrons l'attitude avec la représentation quaternion, mais aussi nous la montrons avec les angles d'Euler (Cardan), puisque cette représentation est plus intuitive.

L'interface de l'algorithme en temps réel sur les plateformes MATLAB<sup>©</sup> Simulink<sup>©</sup> et LabView<sup>©</sup> est montrée dans l'annexe D.

CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE  
3.6. IMPLANTATION EN TEMPS RÉEL

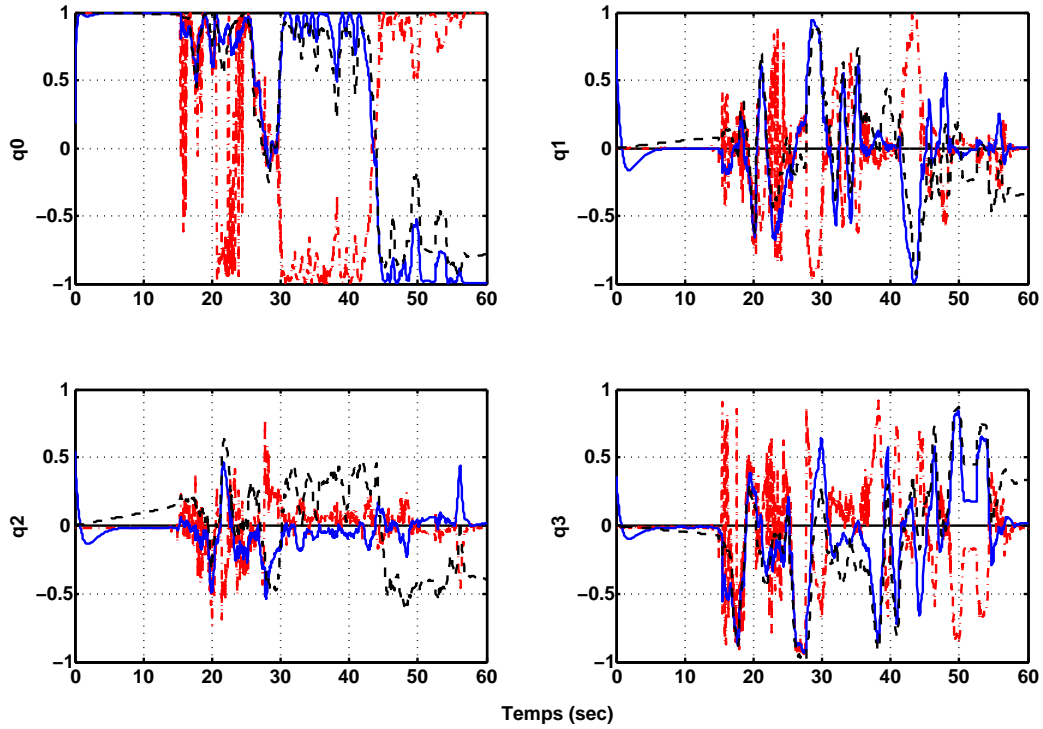


FIG. 3.19 – Estimation du quaternion d'attitude :  $\hat{q}$  (solide),  $q_{ps}$  (point-tiret),  $q_G$  (tiret)

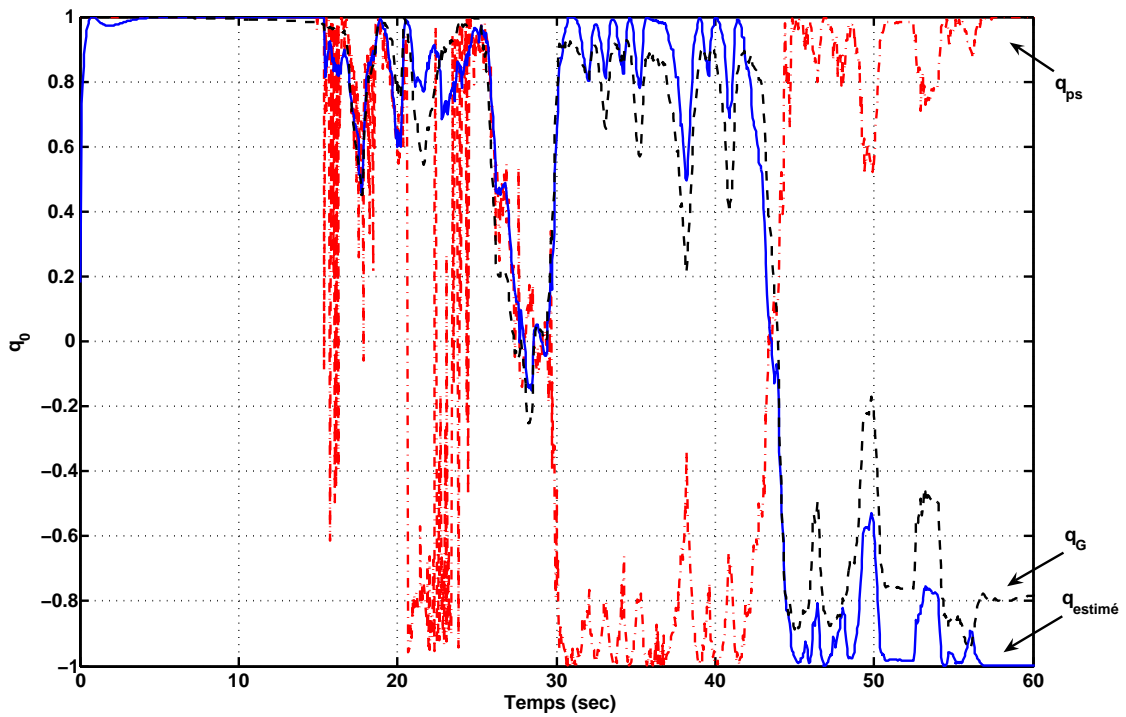


FIG. 3.20 – Estimation du quaternion d'attitude :  $\hat{q}_0$  (solide),  $q_{ps_0}$  (point-tiret),  $q_{G_0}$  (tiret)

CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE  
3.6. IMPLANTATION EN TEMPS RÉEL

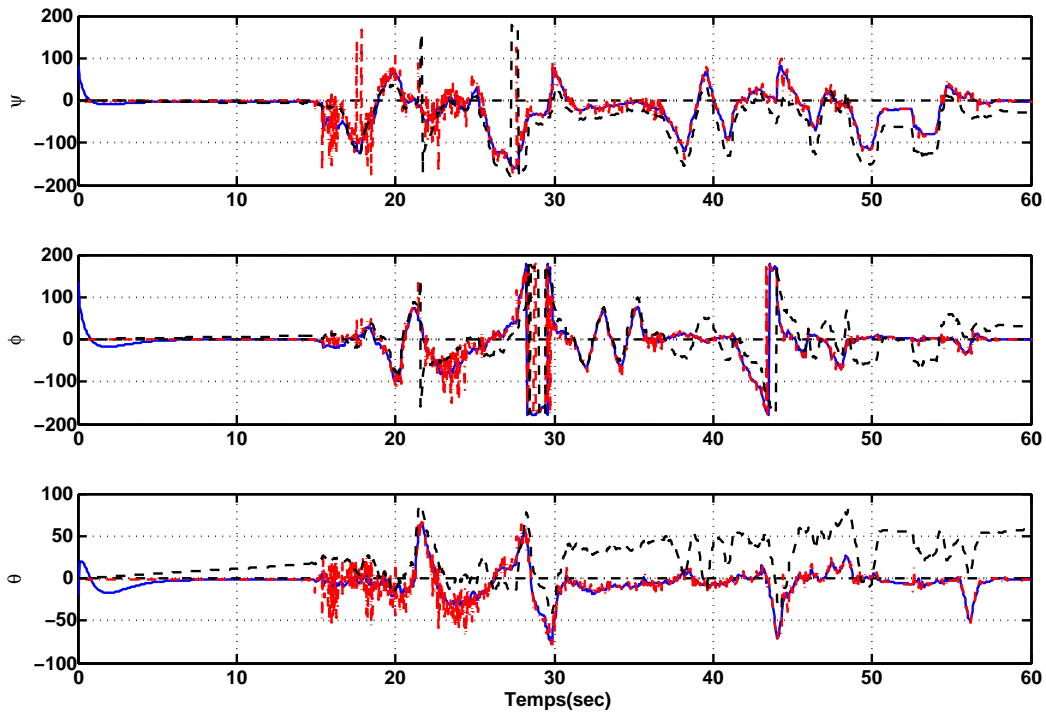


FIG. 3.21 – Angles d'Euler estimés :  $(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$  (solide),  $(\psi, \phi, \theta)_{ps}$  (point-tiret),  $(\psi, \phi, \theta)_G$  (tiret)

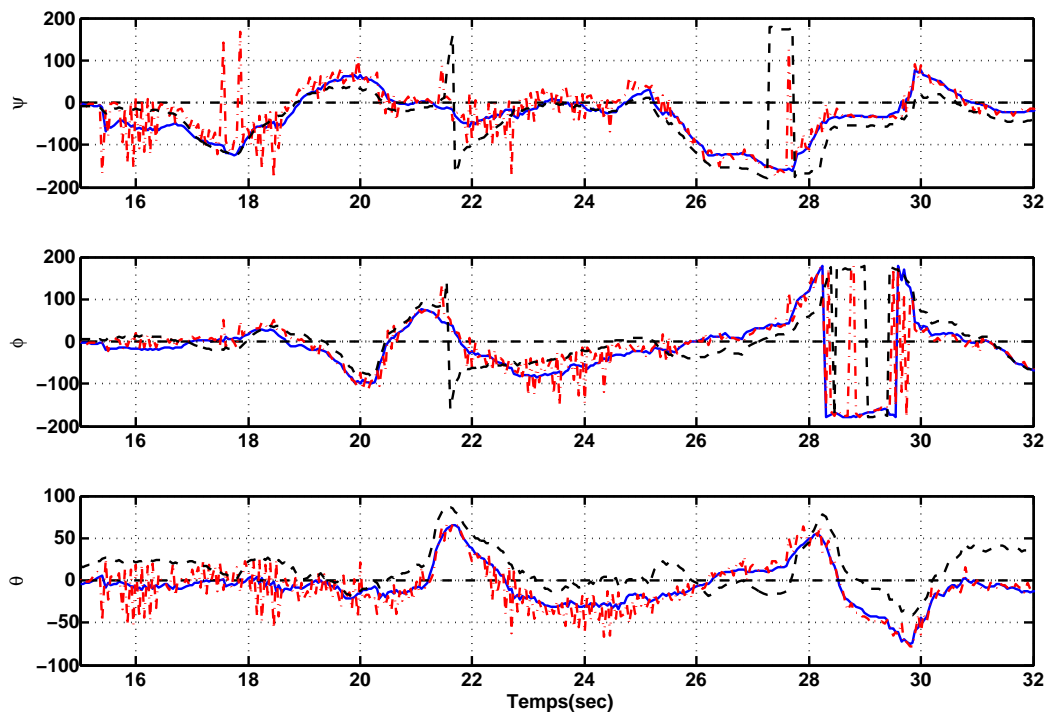


FIG. 3.22 – Angles d'Euler estimés (zoom) :  $(\hat{\psi}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$  (solide),  $(\psi, \phi, \theta)_{ps}$  (point-tiret),  $(\psi, \phi, \theta)_G$  (tiret)

## CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE

### 3.6. IMPLANTATION EN TEMPS RÉEL

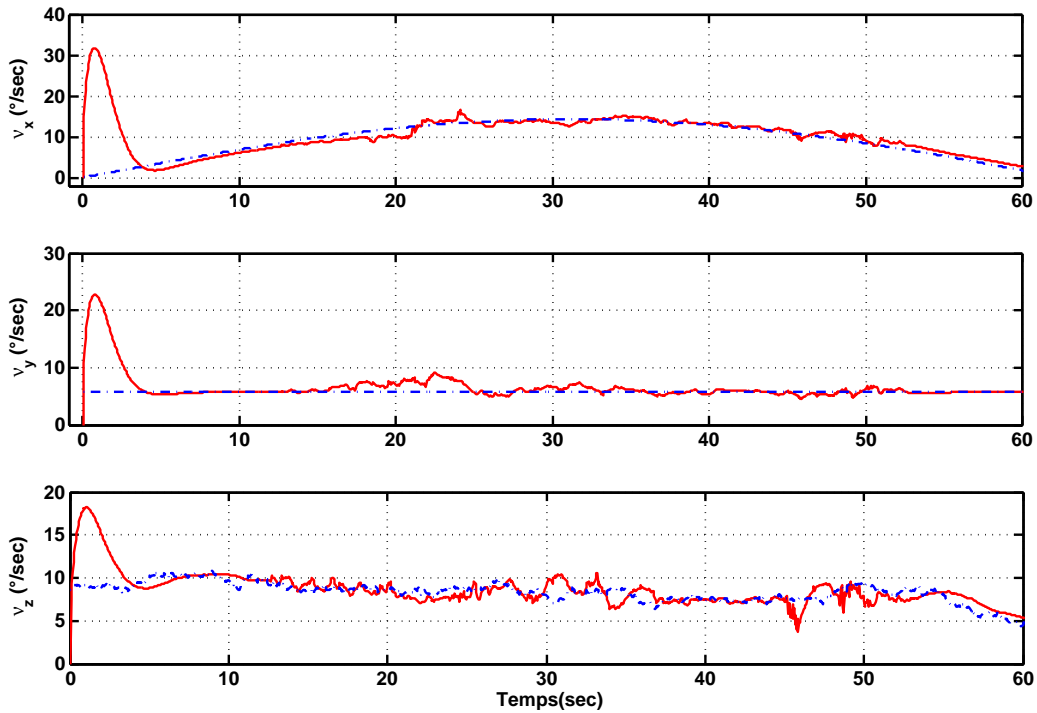


FIG. 3.23 – Estimation du biais dans les gyromètres :  $\nu_{x,y,z}$  (biais théorique) (tiret),  $\hat{\nu}_{x,y,z}$  (solide).

En observant les résultats obtenus, nous pouvons voir que durant la phase statique initiale, le quaternion  $\hat{q}$  est correctement estimé (il converge vers la vraie attitude  $q = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ). Il faut remarquer que pendant cette phase statique  $q_{ps} \approx q$ , car l'accélération du corps est négligeable devant la gravité. Par contre, le quaternion  $q_G$  commence à s'éloigner lentement de l'attitude vraie. Cette dérive est due aux biais présents dans les mesures gyrométriques. Pendant la phase dynamique, on ne peut pas conclure quant à la qualité de l'estimée car on ne dispose pas de système de mesure étalon de l'attitude. Néanmoins, on observe une grande variation pour le quaternion  $q_{ps}$ , puisque dans cette phase l'accélération du corps n'est plus négligeable devant la gravité, par contre les composantes du quaternion  $q_G$  et  $\hat{q}$  restent lisses. A la fin de cette phase dynamique on revient à l'attitude initiale. Comme attendu, le quaternion  $q_{ps}$  est très bien estimé car l'accélération est négligeable devant la gravité. Le quaternion  $q_G$  obtenu uniquement avec les gyromètres a totalement divergé. Pour sa part le quaternion  $\hat{q}$  estimé par l'observateur coïncide exactement avec l'attitude réelle.

Après les simulations menées dans le paragraphe 3.4.6 et le test effectué avec des données réelles, nous pouvons affirmer que l'attitude estimée via le filtre non linéaire permet de fusionner les trois modalités de mesures et d'obtenir une attitude beaucoup plus précise que celle trouvée avec l'intégration des mesures gyrométriques ou avec les accéléromètres et les magnétomètres seuls.

**CHAPITRE 3. DÉTERMINATION DE L'ATTITUDE**  
3.6. IMPLANTATION EN TEMPS RÉEL

---

**Algorithme 1** Initialisation (5 sec en statique)

---

$$q_{ps_0} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

1. Pour  $k = 1$  à  $k = 250$  (5 sec)

Acquérir les données de la centrale inertielle (9 mesures).

Construire matrice  $\bar{H}_{AM} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$

2. Pour chaque période d'échantillonnage, calculer  $q_{ps}(k)$

$$q_{ps}(k) = \left[ \prod_{j=1}^8 \left( I_4 - \frac{\gamma \varphi_j \varphi_j^T}{\alpha + \varphi_j^T \varphi_j} \right) \right] q_{ps}(k-1)$$

$$q_{ps}(k) = \frac{q_{ps}(k)}{\|q_{ps}(k)\|_2}$$

fin pour

$$\hat{q}(0) = q_{ps}(k)$$

$$\hat{v}(0) = \bar{\omega}_G \text{ (moyenne de vitesse angulaire)}$$

fin pour

---

**Algorithme 2** Estimation de l'attitude : observateur non linéaire

---

$\hat{q}(0)$  et  $\hat{v}(0)$  sont obtenus à l'étape d'initialisation

$q_e = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  (l'erreur d'attitude initiale est considérée identiquement nulle)

$k = 0$

1. Tant que l'arrêt n'est pas demandé

$k = k + 1$  (nouvelle période d'échantillonnage)

Acquérir les données de la centrale inertielle (9 mesures).

Construire les matrices :

$$\bar{H}_{AM}(k) \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \Omega \left[ \bar{\omega}_G(k) - \hat{v}(k-1) + K_1 \vec{q}_e(k-1) \right]$$

$$\Phi_1(\Delta t) = e^{A_1 \Delta t} \text{ (calculée à partir d'une approximation de Padé [18])}$$

$$A_2 = -T^{-1} \text{ et } B = K_2$$

$$\Phi_2(\Delta t) = e^{A_2 \Delta t} \text{ et } \Theta(\Delta t) = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \Phi_2[(k+1)\Delta t - \tau] B d\tau$$

2. Calculer  $\hat{q}(k)$ ,  $\hat{v}$ ,  $q_{ps}(k)$  et  $q_e(k)$

$$\hat{q}(k) = \Phi_1(\Delta t) \hat{q}(k-1)$$

$$\hat{v}(k) = \Phi_2(\Delta t) \hat{v}(k-1) + \Theta(\Delta t) \vec{q}_e(k-1)$$

$$q_{ps}(k) = \left[ \prod_{j=1}^8 \left( I_4 - \frac{\gamma \varphi_j \varphi_j^T}{\alpha + \varphi_j^T \varphi_j} \right) \right] \hat{q}(k)$$

$$q_{ps}(k) = \frac{q_{ps}(k)}{\|q_{ps}(k)\|_2}$$

$$q_e(k) = q_{ps}(k) \otimes \hat{q}^{-1}(k) \rightarrow \vec{q}_e(k) = \text{vec}(q_e(k))$$

Fin tant que.

---

## 3.7 Conclusion

Ce chapitre, dans lequel nous avons abordé le problème de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide, s'articule autour de deux paragraphes principaux. Le premier traite de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide à partir de ce qu'on appelle les "vecteurs de mesures". Un aspect important est que les méthodes proposées sont génériques, c'est-à-dire, qu'elles sont développées pour  $n$  vecteurs de mesures. Comme cas particulier, nous utilisons les mesures fournies pour trois magnétomètres et trois accéléromètres montés en triaxe orthogonal dans un solide. Dans un second paragraphe, nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'attitude à partir de trois modalités de mesures, à savoir, gyromètres, magnétomètres et accéléromètres. Un observateur non linéaire pour l'estimation de l'attitude et les biais présents dans les gyromètres a été proposé. Nous avons analysé la dynamique de l'erreur, sa stabilité et sa robustesse par rapport aux bruits dans les mesures. Les algorithmes proposés ont été testés avec des données simulées et avec des données réelles. Les résultats, tant sur le plan de l'efficacité numérique que sur le plan de la robustesse de la méthode sont satisfaisants.





# Chapitre 4

## Commande bornée en attitude

### 4.1 Introduction

La commande de systèmes dynamiques avec une entrée bornée est un problème intrinsèque à la technologie des systèmes de contrôle. Par exemple, le système de direction dans une automobile ne peut pas dépasser un certain angle, dans les systèmes industriels les valves travaillent entre les états fermé et ouvert, les robots manipulateurs ont des contraintes de rotation, etc. Récemment, dans [10] les auteurs ont donné un excellent aperçu de la problématique concernant la commande d'un système avec la saturation des actionneurs. Dans ce travail les auteurs font la réflexion suivante : “l'ingénieur automatique armé avec des techniques linéaires pour le design et la conception de systèmes de contrôle, se trouve très rapidement face à un problème non linéaire, qui menace l'opération entière du système : des perturbations imprévues dans le système provoquent un signal de commande qui produit une saturation des actionneurs. En conséquence, le système fonctionne dans un mode pour lequel il n'a pas été conçu et du lequel il sera incapable de sortir”.

Le problème de la stabilisation de systèmes dynamiques avec une commande bornée a attiré l'attention de différents groupes d'ingénieurs et de théoriciens en faisant de lui un sujet intense de recherche.

En général, les efforts se sont concentrés sur la stabilisation des systèmes linéaires connus sous le nom de chaîne d'intégrateurs. Ces systèmes ont la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.1}$$

où la matrice  $A$  et  $B$  sont telles que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

La grandeur de commande est limitée par des considérations physiques, c'est-à-dire, saturation des actionneurs, tel que :

$$-\bar{u} \leq u \leq \bar{u} \quad (4.3)$$

où  $\bar{u}$  est un nombre réel positif et représente la limite connue a priori de la commande.

Au fur et à mesure que ce sujet a été abordé, différentes approches ont été proposées. Nous allons citer ci-après les plus représentatives.

**1. Approche commande optimale**

- Commande optimale bornée [37]
- Commande optimale en temps minimum [58]

**2. Approche “pseudo optimale” à base d'équation de Ricatti [73], [60], [41].**

**3. Approche non linéaire**

- Approche de Teel [101].
- Approche de Sussman et Sontag [98]

Parmi les approches précédentes, peut-être la plus remarquable est l'approche non linéaire. Cela est dû principalement à l'extrême simplicité et aux propriétés de régularité que cette approche exhibe. Cet axe de recherche a été initié par Teel [101]. Plus tard, ce résultat a été généralisé dans [98]. Malheureusement, avec les deux approches précédentes, la performance du système en bouclée fermée se dégrade au fur et à mesure que la dimension du système croît. Récemment, ces deux précédentes approches ont été étendues et améliorées par :

- Johnson et Kannan [51]
- Marchand [66]
- Marchand et Hably [67]

Les lois de commande rapportées dans ces travaux améliorent de manière significative la performance en boucle fermée pour des systèmes à grande dimension ( $n \geq 3$ ).

Récemment dans [99] les auteurs ont abordé le problème de la stabilisation des systèmes dynamiques sujets aux saturations imbriquées, résultat des limites imposées par les actionneurs et capteurs. Ce résultat montre l'énorme intérêt de la communauté d'automatique pour la stabilisation des systèmes avec des entrées bornées, en utilisant des lois de commande simples

à mettre en oeuvre. Ainsi, l'approche non linéaire est avantageusement l'approche la plus souhaitable d'un point de vue pratique en raison de sa haute performance et de sa simplicité.

La stabilisation en attitude d'un corps rigide est un problème non linéaire qui a attiré beaucoup d'attention ces dernières années. Cet intérêt émerge en raison de l'analogie qui existe entre le modèle dynamique d'un corps rigide et celui de nombreux systèmes tels que les satellites, les hélicoptères, les véhicules marins et sous-marins, les robots manipulateurs, etc. Néanmoins, comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 1.2.1, le problème de la stabilisation d'un corps rigide en utilisant une commande bornée a été très peu exploré et les approches existantes sont très difficiles, voire impossibles, à implanter dans des applications où les capacités de calcul sont réduites.

Ainsi, il est convenable d'étudier la possibilité de stabiliser un corps rigide, en utilisant une approche non linéaire comme celle utilisée pour la stabilisation de systèmes linéaires où sa principale caractéristique est la simplicité.

## 4.2 Organisation du chapitre

Dans le chapitre 1, paragraphe 1.2.1, nous avons présenté le problème de la commande d'attitude d'un corps rigide et nous nous sommes plus spécifiquement intéressé aux approches de commande bornée existantes.

Dans ce chapitre, nous présenterons notre contribution à la conception d'une loi de commande bornée pour la stabilisation globale d'un corps rigide. Le schéma proposé est inspiré de l'approche non linéaire pour la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs [101]. L'attitude est représentée par le quaternion unitaire, ce qui permet de grandes manoeuvres. Cela fait une grande distinction par rapport aux approches qui utilisent une représentation à trois paramètres, où une inhérente singularité géométrique apparaît (voir paragraphe (1.1.1)).

Avec l'approche proposée, la borne de commande autour de chaque axe principal du corps peut être choisie de façon indépendante. La loi de commande peut forcer le vecteur des vitesses angulaires à entrer dans une région spécifique de l'espace d'état et le maintenir dans cette région par la suite. En conséquence, en plus des contraintes sur la commande, la loi de commande fait respecter des contraintes sur la vitesse angulaire. Cette propriété est très importante, puisqu'en pratique la vitesse angulaire est mesurée par des gyromètres, qui ont des limites dans leur plage de mesure. De plus, puisque la loi de commande ne dépend pas du modèle du système, elle est également robuste par rapport à des erreurs dans la connaissance des paramètres inertiels. La principale caractéristique de l'approche proposée est son "extrême simplicité" comparée aux autres approches bornées existantes. Ainsi, cette loi de commande peut être facilement implantée dans des systèmes embarqués où les capacités de mémoire et de calcul sont très réduites.

Un aspect particulier dans le modèle dynamique de l'hélicoptère à quatre rotors (présenté au chapitre 2) est que sa dynamique de rotation peut s'assimiler à celle d'un corps rigide. La seule différence se trouve dans le terme gyroscopique produit par la rotation simultanée de la structure de l'hélicoptère et de la rotation à grande vitesse des actionneurs. Cependant, nous montrons que l'approche proposée reste valide pour la stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors.

Dans un premier temps, nous exposerons quelques rappels à propos de la dynamique d'un corps rigide. Ensuite, nous allons énoncer le problème qui nous amènera à la conception d'une loi de commande bornée. Nous présenterons ensuite notre contribution sur le sujet, à savoir, une loi de commande bornée qui stabilise globalement un corps rigide à une attitude désirée. Puis, les propriétés de cette approche seront exposées et nous présenterons les conditions suffisantes pour la stabilisation du système en dépit de saturation dans les mesures de vitesse angulaire. Quelques simulations seront présentées afin de montrer la performance de la loi de commande à stabiliser un corps rigide possédant un faible moment d'inertie.

Poursuivant cette étude, l'application de la loi de commande bornée pour la stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors sera montrée. En se basant sur les propriétés de simplicité et régularité que notre approche exhibe, la loi de commande est implantée en temps réel. Nous finirons donc par la description de quelques expériences en temps réel qui montrent la capacité et les performances de la loi de commande à la stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors.

### 4.3 Quelques rappels sur le modèle dynamique d'un corps rigide

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, l'attitude d'un corps rigide, c'est-à-dire son orientation et son assiette, peut être décrite en utilisant diverses paramétrisations du groupe orthogonal  $SO(3)$ . C'est le quaternion unitaire qui sera utilisé par la suite (pour plus de détails voir paragraphe, 1.1.1).

Le quaternion unitaire est composé d'un vecteur unitaire  $\vec{e}$ , nommé axe d'Euler et d'un angle de rotation  $\beta$  autour de cet axe. Il est défini par :

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \vec{e} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \quad (4.4)$$

où

$$\mathbb{H} = \{q \mid q_0^2 + \vec{q}^T \vec{q} = 1, q = [q_0 \ \vec{q}^T]^T, q_0 \in \mathbb{R}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3\} \quad (4.5)$$

$\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  et  $q_0$  sont la partie vectorielle et la partie scalaire du quaternion.

## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

### 4.3. QUELQUES RAPPELS SUR LE MODÈLE DYNAMIQUE D'UN CORPS RIGIDE

---

Le quaternion représente la rotation d'un système de coordonnées  $B(x_b, y_b, z_b)$  par rapport à un système de coordonnées  $N(x_n, y_n, z_n)$  ( par exemple le système de coordonnées NED (Nord, Est, en bas)). Une matrice de rotation  $C$  peut être exprimée, en termes de quaternion par :

$$C = C(q) = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})I_3 + 2(\vec{q} \vec{q}^T - q_0[\vec{q}^\times]) \quad (4.6)$$

où  $I_3$  représente la matrice identité de dimension trois et  $[\xi^\times]$  représente un tenseur anti-symétrique associé au vecteur  $\xi$ . Dans le cadre de la commande d'attitude, si nous notons  $q_d$  l'attitude désirée du corps et  $q$  l'attitude réelle du corps, l'erreur d'attitude est représentée par :

$$q_e = q_d^{-1} \otimes q = \bar{q}_d \otimes q \quad (4.7)$$

où  $\otimes$  représente la multiplication quaternion et  $q_d^{-1}$  est le quaternion conjugué de  $q_d$ . Dans le cas où l'erreur d'attitude équivaut à zéro, le quaternion d'erreur a deux valeurs possibles :

$$q_e = [\pm 1 \ 0]^T \quad (4.8)$$

Ceci est dû à la non bijection du quaternion avec le groupe  $SO(3)$ .

Soit  $\vec{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  la vitesse angulaire du corps rigide dans le système de coordonnées  $B$  par rapport à  $N$ , exprimée dans  $B$ . Alors, l'équation cinématique en termes de quaternion est :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\vec{q}^T \\ I_3 q_0 + [\vec{q}^\times] \end{pmatrix} \vec{\omega} \quad (4.9)$$

ou plus consisément :

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega} \quad (4.10)$$

Il existe différentes approches pour décrire les équations dynamiques d'un corps rigide, à savoir, l'approche de Newton-Euler, l'approche de Lagrange ou autres [35]. L'approche de Newton-Euler exploite les concepts de force et couples et c'est celle-ci que nous allons utiliser. Ainsi, le modèle dynamique de rotation d'un corps rigide est décrit par :

$$J \dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \Gamma \quad (4.11)$$

où  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  représente la matrice d'inertie du corps exprimée dans le repère du corps rigide et qui sera considérée symétrique et définie positive.  $\Gamma \in \mathbb{R}^3$  représente les couples s'exerçant sur le corps. En fait, le vecteur  $\Gamma$  est une combinaison de couples de commande et de couples de perturbations dans l'environnement (gravité, forces aérodynamiques, etc.). Dans notre analyse, les couples de perturbation seront initialement négligés. Ils seront considérés ultérieurement pour une étude de robustesse.

## 4.4 Enoncé du problème

L'objectif est la conception d'une loi de commande qui amène le corps rigide décrit par les équations (4.10) et (4.11), à une attitude constante et le maintient à cette attitude par la suite. Soit  $q_d$  le quaternion qui représente l'attitude désirée. En conséquence, l'objectif de la loi de commande est représentée par la condition asymptotique suivante :

$$q \rightarrow q_d, \quad \vec{\omega} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

Le quaternion qui représente l'erreur d'attitude entre l'attitude désirée et l'attitude courante du corps est donné par l'équation (4.7). Dans le cas où l'attitude désirée est représentée par le quaternion  $q_d = [\pm 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  (nous voulons que le repère mobile  $B$  coïncide avec le repère inertiel  $N$ ), le quaternion d'erreur (4.7) devient  $q_e = q$  et l'objectif de la loi de commande est :

$$q \rightarrow [\pm 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad \vec{\omega} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

Rappelons que  $q$  et  $-q$  représentent la même attitude physique. Cela est dû à la non bijection du quaternion avec le groupe orthogonal  $SO(3)$ .

Dans l'analyse de stabilité seul le cas  $q_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  sera considéré. Néanmoins, les résultats peuvent être appliqués à n'importe quelle orientation désirée.

Comme nous l'avons mentionné, la saturation des actionneurs réduit considérablement les bénéfices d'une loi de commande. Dans le cas où la loi de commande fournit de façon continue un signal de commande qui provoque la saturation des actionneurs, une instabilité dans le système peut avoir lieu. En conséquence, en plus de la condition de stabilité asymptotique, la loi de commande doit prendre en compte les contraintes physiques des actionneurs, afin de fournir seulement un signal de commande qui soit capable d'être exécuté par les actionneurs. Enfin, nous sommes intéressés par la conception d'une loi de commande qui soit simple et continue, de sorte qu'elle puisse être implantée en temps réel sur des systèmes où la capacité de calcul est réduite.

## 4.5 Stratégie de commande

Dans ce paragraphe, une loi de commande qui stabilise en attitude un corps rigide est proposée. Le but est le design d'une commande d'attitude qui soit bornée, afin d'utiliser toute l'étendue du travail des actionneurs en garantissant toujours la stabilité.

Avant d'énoncer le résultat nous commencerons par une définition afin de préciser le type de loi de commande obtenue.

**Définition 4.1** (Fonction de saturation). *Soit  $M$  une constante positive. La fonction  $\sigma_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et non décroissant telle que :*

$$\sigma_M(x) = \begin{cases} x & \text{if } |x| < M; \\ \text{sign}(x)M & \text{dans les autres cas;} \end{cases} \quad (4.14)$$

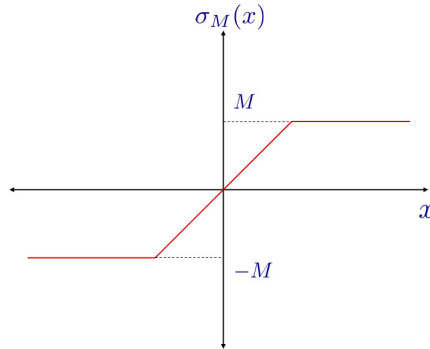


FIG. 4.1 – Fonction de saturation

Notre résultat est alors le suivant :

**Théorème 4.1.** *Considérons la dynamique du corps rigide (4.10) et (4.11). La loi de commande bornée  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]^T$  :*

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\alpha_1 \sigma_{M_1}(\lambda_1[\omega_1 + \rho_1 q_1]) \\ \Gamma_2 &= -\alpha_2 \sigma_{M_2}(\lambda_2[\omega_2 + \rho_2 q_2]) \\ \Gamma_3 &= -\alpha_3 \sigma_{M_3}(\lambda_3[\omega_3 + \rho_3 q_3]) \end{aligned} \quad (4.15)$$

*stabilise globalement et asymptotiquement le corps rigide à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0$ ) où  $\sigma_{M_i}$  sont des fonctions de saturation, avec  $M_i \geq 3\lambda_i \rho_i$  et  $\alpha_i, \lambda_i, \rho_i$  sont des paramètres positifs, avec  $i = \{1, 2, 3\}$ .*

De façon générale, le théorème précédent signifie que peu importe la condition initiale du corps rigide (attitude et vitesse angulaire), la loi de commande (4.15) est capable d'amener les variables d'état du système (l'attitude et la vitesse angulaire) à l'origine de façon asymptotique. De plus, l'amplitude du couple qui s'exerce autour des axes principaux du corps rigide est bornée par  $M_i$ . La borne  $M_i$  peut être choisie de façon indépendante par chaque axe et elle dépend des caractéristiques des actionneurs utilisées. La loi de commande (4.15) est notamment simple et continue. En conséquence, elle peut être appliquée à la stabilisation de systèmes en temps réel avec des capacités de calcul contraignantes. De plus, cette loi est générique. Ainsi, elle peut être utilisée pour des systèmes qui entrent dans le cadre d'un corps rigide.

L'analyse de stabilité d'un corps rigide, lorsque la loi de commande donnée par le théorème 4.1 est appliquée, est donnée ci-après.

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V$ , définie positive et non bornée et qui appartient à la classe  $C^2$  :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega} + \kappa((1 - q_0)^2 + \vec{q}^T \vec{q}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega} + 2\kappa(1 - q_0) \end{aligned} \quad (4.16)$$

où  $J$  est la matrice d'inertie considérée symétrique et définie positive.  $\kappa > 0$  est un paramètre positif et il sera déterminé par la suite. La dérivée de (4.16) après d'utiliser (4.10) et (4.11) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} - 2\kappa \dot{q}_0 \\ &= \vec{\omega}^T (-\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \Gamma) + \kappa \vec{q}^T \dot{\vec{\omega}} \\ &= \underbrace{\omega_1 \Gamma_1 + \kappa q_1 \omega_1}_{\dot{V}_1} + \underbrace{\omega_2 \Gamma_2 + \kappa q_2 \omega_2}_{\dot{V}_2} + \underbrace{\omega_3 \Gamma_3 + \kappa q_3 \omega_3}_{\dot{V}_3} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$\dot{V}$  est la somme de trois termes ( $\dot{V}_1$ ,  $\dot{V}_2$ ,  $\dot{V}_3$ ). D'abord, nous allons analyser le terme  $\dot{V}_1$ . De  $\Gamma_1$  dans (4.15) et l'équation (4.17), on obtient :

$$\dot{V}_1 = -\alpha_1 \omega_1 \sigma_{M_1}(\lambda_1[\omega_1 + \rho_1 q_1]) + \kappa q_1 \omega_1 \quad (4.18)$$

Supposons que  $|\omega_1| > 2\rho_1$ , en conséquence  $|\omega_1| \in ]2\rho_1, +\infty[$ . En raison que  $|q_1| \leq 1$ , l'inégalité  $|\omega_1 + \rho_1 q_1| \geq \rho_1 + \epsilon$  reste valable pour quelque  $\epsilon > 0$  suffisamment petit. Ainsi,  $\omega_1 + \rho_1 q_1$  a le même signe que celui de  $\omega_1$ . De l'équation (4.18) et de la condition de normalité du quaternion,  $\dot{V}_1$  prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\alpha_1 \omega_1 \sigma_{M_1}(\lambda_1[\omega_1 + \rho_1 q_1]) + \kappa \omega_1 q_1 \\ &\leq -\alpha_1 |\omega_1| \sigma_{M_1}(\lambda_1(\rho_1 + \epsilon)) + \kappa |\omega_1| \end{aligned} \quad (4.19)$$

si nous prenons

$$\kappa < \alpha_1 \min(M_1, \lambda_1 \rho_1 + \epsilon) \quad (4.20)$$

il est possible d'assurer la décroissance de  $V_1$  i.e.  $\dot{V}_1 < 0$ . Par conséquent,  $\omega_1$  entre en  $\Phi_1 = \{\omega_1 : |\omega_1| \leq 2\rho_1\}$  dans un temps fini  $t_1$  et reste dedans par la suite (voir figure 4.2. Dans ce cas  $(\omega_1 + \rho_1 q_1) \in [-3\rho_1, 3\rho_1]$ .

Soit  $M_1$  telle que la condition suivante est vérifiée

$$M_1 \geq 3\lambda_1 \rho_1 \quad (4.21)$$

alors, l'équation (4.20) devient

$$\kappa < \alpha_1 \lambda_1 \rho_1 + \epsilon \quad (4.22)$$



**CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE**  
4.5. STRATÉGIE DE COMMANDE

---

Pour un temps  $t_2 > t_1$ , l'argument de  $\sigma_{M_1}$  sera borné par

$$|\lambda_1(\omega_1 + \rho_1 q_1)| \leq 3\lambda_1 \rho_1 \leq M_1 \quad (4.23)$$

En conséquence,  $\sigma_{M_1}$  opère dans la région linéaire telle que

$$\Gamma_1 = -\alpha_1 \lambda_1 [\omega_1 + \rho_1 q_1] \quad (4.24)$$

Ainsi, l'équation (4.18) devient

$$\dot{V}_1 = -\alpha_1 \lambda_1 \omega_1^2 - \alpha_1 \lambda_1 \rho_1 \omega_1 q_1 + \kappa \omega_1 q_1 \quad (4.25)$$

En choisissant  $\kappa = \alpha_1 \lambda_1 \rho_1$  qui satisfait l'inégalité (4.22), nous avons

$$\dot{V}_1 = -\alpha_1 \lambda_1 \omega_1^2 \leq 0 \quad (4.26)$$

Si les mêmes arguments sont appliqués à  $\dot{V}_2$  et  $\dot{V}_3$ , (4.17) devient

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad (4.27)$$

$$= -(\alpha_1 \lambda_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \lambda_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \lambda_3 \omega_3^2) \leq 0 \quad (4.28)$$

Afin de compléter la preuve, le principe d'invariance de LaSalle est invoqué. Toutes les trajectoires convergent vers le plus grand ensemble invariant  $\bar{\Omega}$  dans  $\Omega = \{(\vec{q}, \vec{\omega}) : \dot{V} = 0\} = \{(\vec{q}, \vec{\omega}) : \vec{\omega} = 0\}$ . Dans cet ensemble invariant,  $J\dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J\omega + \Gamma = -[\alpha_1 \lambda_1 \rho_1 q_1 \quad \alpha_2 \lambda_2 \rho_2 q_2 \quad \alpha_3 \lambda_3 \rho_3 q_3]^T = 0$  et donc, le seul invariant de  $\Omega$  est le point pour lequel  $\vec{q} = \vec{\omega} = 0$ . Ainsi,  $\bar{\Omega}$  est réduit à l'origine. Cela conclut la preuve de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. ■

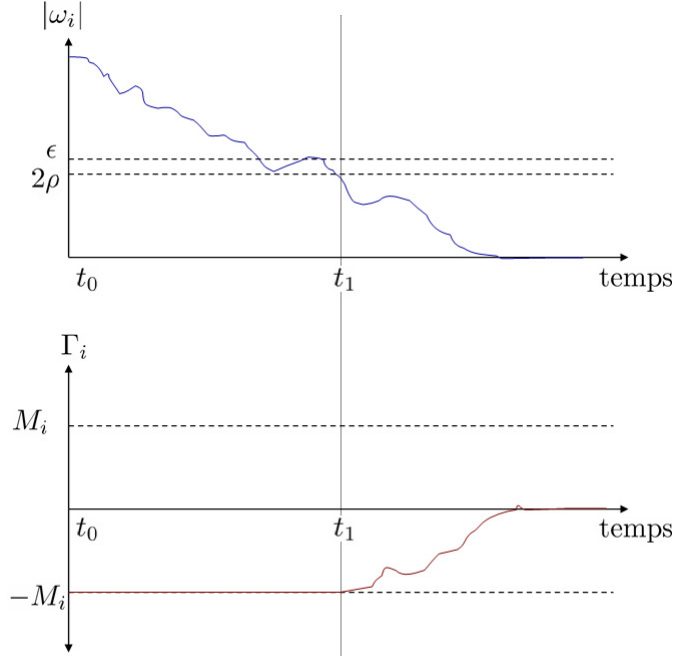


FIG. 4.2 – Exemple de comportement de la boucle fermée

**Remarque 4.1.** Puisque le quaternion  $q$  et le quaternion  $-q$  représentent la même attitude physique, il existe deux points d'équilibre :  $(q_0 = \pm 1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0)$ . En accord avec la fonction de Lyapunov (4.16), le point d'équilibre  $(q_0 = 1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0)$  est considéré comme un point d'équilibre "attracteur", tandis que le point  $(q_0 = -1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0)$  est considéré comme un point d'équilibre "répulsif" (voir [52]).

Ainsi, si la condition initiale est suffisamment proche du point  $(q_0 = -1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0)$ , les trajectoires du système bouclé divergent de ce point et convergent vers le point  $(q_0 = 1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0)$ . En termes de matrice de rotation, cela signifie que si la condition initiale est suffisamment proche du point  $(R_d = I, \vec{\omega} = 0)$ , les trajectoires du système bouclé divergent de  $(R_d = I, \vec{\omega} = 0)$  et convergent encore vers  $(R_d = I, \vec{\omega} = 0)$ . En conséquence, le corps rigide exhibe une rotation de  $\beta = \pi$  rad avant de revenir à l'attitude désirée.

En outre, le point d'équilibre  $(q_0 = -1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0)$  est joignable si nous utilisons la loi de commande suivante

$$\Gamma_i = -\alpha_i \sigma_{M_i}(\lambda_i[\omega_i - \rho_i q_i]) \quad (4.29)$$

avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ainsi, si nous utilisons

$$\Gamma_i = -\alpha_i \sigma_{M_i}(\lambda_i[\omega_i + \text{sign}(q_0)\rho_i q_i]) \quad (4.30)$$

il est possible de s'assurer qu'entre les deux rotations d'angle  $\beta$  et  $2\pi - \beta$ , le plus petit angle sera choisi.

**Remarque 4.2.** *Dû à la non bijection du quaternion avec le groupe  $SO(3)$ , une loi de commande statique discontinue comme celle de l'équation (4.30) est nécessaire pour stabiliser le corps rigide et d'éviter l'effet de tourner  $\pi$  rad, avant de se stabiliser. Cette caractéristique a été étudiée dans [11], où les auteurs ont montré la non-existence d'un "feedback" stabilisant continu pour un corps rigide, lorsque l'attitude est paramétrisée avec le quaternion. En fait le système donné par les équations (4.10) et (4.11), s'inscrit dans le cadre plus général des systèmes qui ne vérifient pas la condition de Brockett [17]. Ceci est une condition pour qu'un système commandé puisse éventuellement admettre un "feedback" stabilisant continu.*

**Remarque 4.3.** *L'analyse de stabilité menée dans le paragraphe précédent a été effectuée en considérant la condition asymptotique (4.13). Dans le cas où la condition (4.12) est considérée et en accord avec les remarques 4.1 et 4.2, la loi de commande qui doit être appliquée est la suivante*

$$\Gamma_i = -\alpha_i \sigma_{M_i}(\lambda_i[\omega_i + \text{sign}(q_{e_0})\rho_i q_{e_i}]) \quad (4.31)$$

avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  $q_e$  représente l'erreur d'attitude entre l'attitude actuelle du corps et l'attitude désirée.

### 4.5.1 Quelques propriétés de la loi de commande

En pratique, la mesure de la vitesse angulaire dans chaque axe du corps est accomplie par des gyromètres (voir paragraphe 1.1.3, page 22). Ces capteurs mesurent la vitesse angulaire dans une plage de mesure qui dépend principalement de la technologie de fabrication. Par conséquent, la capacité à maintenir la rotation autour d'un axe sans dépasser une certaine limite ou borne dans la vitesse angulaire est essentielle. En fait, la loi de commande (4.15) permet de prendre en compte les contraintes sur la vitesse angulaire.

Soit  $\omega_{i_{max}}$  la vitesse angulaire maximale permise lors d'une manoeuvre autour de l'axe  $i$ . Considérons la contrainte suivante

$$|\omega_i| \leq \omega_{i_{max}} \quad (4.32)$$

Nous pouvons établir la propriété suivante.

**Propriété 4.1** (Contrainte sur la vitesse angulaire). *La loi de commande (4.15) stabilise globalement et asymptotiquement le corps rigide (4.10) et (4.11) à l'origine. De plus, si le paramètre  $\rho_i$  est choisi tel que  $\rho_i = \frac{\omega_{i_{max}}}{2}$ , la contrainte  $|\omega_i| \leq \omega_{i_{max}}$  reste satisfaite à partir d'un certain  $t_1 > t_0$  si  $|\omega_i(t_0)| > \omega_{i_{max}}$  et pour tout  $t$  si  $|\omega_i(t_0)| \leq \omega_{i_{max}}$ .*

**Preuve** Supposons que les conditions initiales du système sont telles que à l'instant  $t_0$ ,  $\omega_i$  appartient à l'ensemble  $\Phi_i$  avec  $\Phi_i = \{\omega_i : |\omega_i| \leq 2\rho_i\}$ . A partir de la preuve du théorème 4.1

nous pouvons observer que si  $\omega_i$  appartient à  $\Phi_i$ ,  $\omega_i$  va rester dans  $\Phi_i$  pour tout le temps  $t > t_0$ . Par conséquent, si  $\rho_i = \frac{\omega_{i_{max}}}{2}$  nous pouvons conclure que  $|\omega_i| \leq 2\rho_i = \omega_{i_{max}}, \forall t > t_0$ . ■

Dans certaines situations, il arrive que la vitesse angulaire du corps rigide dépasse la plage de mesure des gyromètres, par exemple lorsqu'une perturbation externe a lieu sur le corps. Dans ce cas, les gyromètres seront saturés. En pratique cette situation peut être catastrophique, aboutissant à une instabilité du système.

La propriété suivante établit la robustesse de la loi de commande proposée par rapport à une possible saturation des gyromètres dans la mesure de la vitesse angulaire.

**Propriété 4.2** (Robustesse par rapport à mesures de vitesse angulaires bornées). *Soit  $\hat{\omega}_{i_{max}}$  la vitesse angulaire maximale qui peut être mesurée par les gyromètres et soit  $\rho_i = \frac{\hat{\omega}_{i_{max}}}{2}$ . Supposons que la vitesse angulaire a dépassé l'étendue de mesure du gyromètre, c'est à dire que  $|\omega_i| > |\hat{\omega}_{i_{max}}|$ . La loi de commande (4.15) stabilise globalement et asymptotiquement le corps rigide à l'origine en dépit d'une saturation dans les gyromètres.*

**Preuve** La preuve sera effectuée d'abord pour  $\omega_1$ . Supposons qu'à l'instant  $t_0$ ,  $|\omega_1| > |\hat{\omega}_{1_{max}}|$ . Dû au fait que le gyromètre est saturé nous avons :  $\text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\hat{\omega}_{1_{max}})$ .

Considérons la fonction de Lyapunov candidate (4.16). La dérivée de (4.16) après avoir utilisé (4.10), (4.11) et la loi de commande (4.15) est donnée par (4.17). En analysant  $\dot{V}_1$ , on obtient :

$$\dot{V}_1 = -\alpha_1 \omega_1 \sigma_{M_1}(\lambda_1 [\hat{\omega}_{1_{max}} + \rho_1 q_1]) + \kappa q_1 \omega_1 \quad (4.33)$$

puisque  $\rho_1 = \frac{\hat{\omega}_{1_{max}}}{2}$ , il suit  $|\hat{\omega}_{1_{max}} + \rho_1 q_1| \geq \frac{1}{2} \hat{\omega}_{1_{max}}$ . Puisque  $\text{sign}(\omega_1) = \text{sign}(\hat{\omega}_{1_{max}})$  et la condition de normalité du quaternion,  $\dot{V}_1$  devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\alpha_1 \omega_1 \sigma_{M_1}(\lambda_1 [\hat{\omega}_{1_{max}} + \rho_1 q_1]) + \kappa \omega_1 q_1 \\ &\leq -\alpha_1 |\omega_1| \sigma_{M_1}(\lambda_1 (\frac{1}{2} \hat{\omega}_{1_{max}})) + \kappa |\omega_1| \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si nous prenons

$$\kappa < \alpha_1 \min(M_1, \lambda_1 \frac{1}{2} \hat{\omega}_{1_{max}}) \quad (4.35)$$

il est possible d'assurer la décroissance de  $V_1$  i.e.  $\dot{V}_1 < 0$ . Par conséquent,  $\omega_1$  entre en  $\Phi_1 = \{\omega_1 : |\omega_1| \leq 2\rho_1\}$  dans un temps fini  $t_1$ . Puisque le paramètre  $\rho_1$  a été choisi en vérifiant la propriété 4.1 ( $\rho_1 = \frac{\hat{\omega}_{1_{max}}}{2}$ ), nous avons  $|\omega_1| \leq |\hat{\omega}_{1_{max}}|$ . En conséquence le gyromètre n'est plus saturé et le système évolue de la même façon que le système nominal (voir figure 4.3. La même démarche peut être effectuée pour  $\dot{V}_2$  et  $\dot{V}_3$ . ■

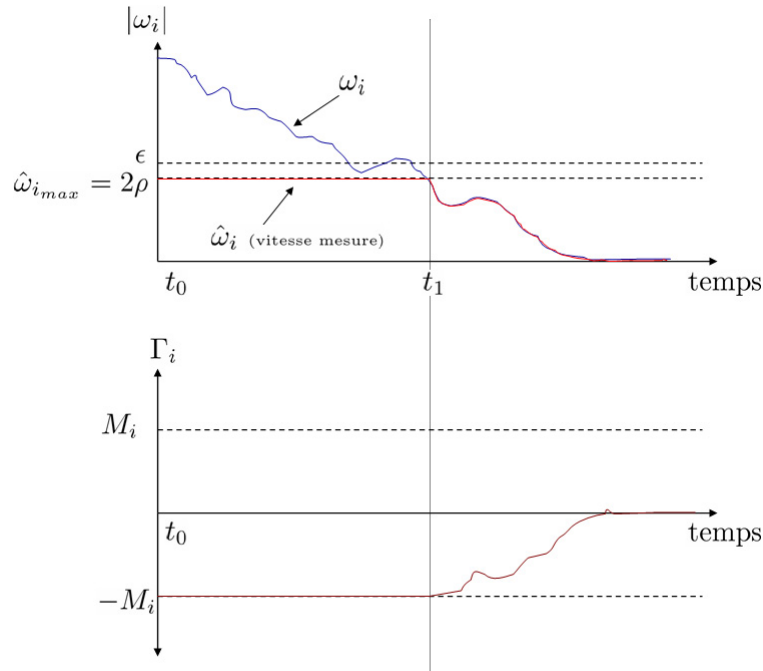


FIG. 4.3 – Exemple de comportement de la boucle fermée avec saturation du gyromètre

**Propriété 4.3** (Robustesse par rapport aux erreurs de modèle). *La loi de commande est robuste par rapport aux erreurs dans le modèle et à des incertitudes paramétriques.*

**Preuve** Il est clair que la loi de commande ne dépend pas de la connaissance des paramètres du modèle (inertie). En conséquence, elle est robuste aux incertitudes et erreurs du modèle. ■

**Propriété 4.4** (Robustesse aux perturbations externes). *La loi de commande est robuste par rapport à des perturbations externes.*

**Preuve** Le moment d'inertie quantifie la résistance qu'offre un corps soumis à une rotation ou plus généralement à une accélération angulaire. En conséquence, plus la masse d'un solide est répartie loin de l'axe de rotation, plus son moment d'inertie est important. Ainsi, une perturbation externe peut se traduire comme une variation de la masse et en conséquence une variation du moment d'inertie. Il suit de la propriété 4.3, que la loi de commande est robuste par rapport à des perturbations externes. ■

Considérons un corps rigide qui évolue dans deux milieux, par exemple le milieu aquatique et le milieu aérien (voir figure 4.4). Dans chaque milieu la résistance qu'offre le corps soumis à une rotation est différente, c'est-à-dire, le moment d'inertie du corps change. En accord

**CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE**  
**4.5. STRATÉGIE DE COMMANDE**

---

avec les propriétés 4.3 et 4.4 si la loi de commande 4.15 est appliquée pour la stabilisation d'un corps rigide qui évolue dans deux milieux, le passage de l'un à l'autre ne requière pas des adaptations dans la loi de commande et la stabilité reste garantie.

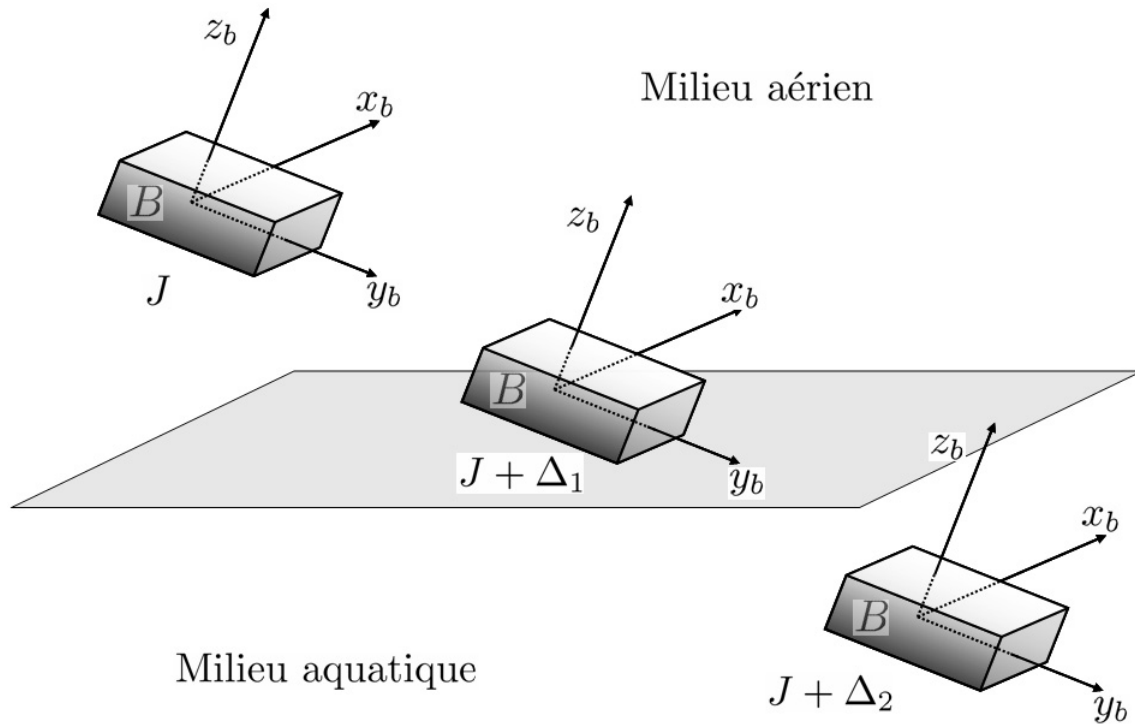


FIG. 4.4 – Exemple de l'évolution d'un corps rigide dans deux milieux.  $J$ ,  $J + \Delta_1$  et  $J + \Delta_1$  représentent la matrice d'inertie du corps exprimé dans le repère du corps.

## 4.6 Résultats en simulation

Dans ce paragraphe, nous allons montrer quelques résultats obtenus en simulation, afin de montrer les performances de la loi de commande bornée proposée. L'objectif est la stabilisation d'un corps rigide qui possède un faible moment d'inertie. En fait, un corps rigide avec ces propriétés est très vulnérable à de grandes accélérations angulaires qui provoquent à la fois une dynamique fortement non linéaire due à l'effet gyroscopique, ainsi que des manoeuvres non linéaires. Par conséquent, l'application d'une commande bornée avec une paramétrisation de l'orientation sans singularités et qui stabilise le système de manière globale et asymptotique est très souhaitable. Dans cette étude, nous supposons que le couple de commande qui s'exerce sur le système (corps rigide), est une combinaison linéaire des forces et des couples générés par quatre actionneurs spécifiques (les actionneurs peuvent être, par exemple, des moteurs ou des turbines dans un satellite, des moteurs DC ou des moteurs brush-less dans un robot aérien, etc.).

Le but de la loi de commande est d'appliquer uniquement des signaux de contrôle permis, afin de maximiser le rendement des actionneurs (utiliser au maximum la plage de fonctionnement) sans mettre en péril la stabilité du système.

Pour cet exemple, supposons que les actionneurs sont tels que le couple maximal qui peut s'exercer autour de chaque axe du corps rigide est donné par  $\bar{\Gamma} = [0.40 \ 0.40 \ 0.15]^T Nm$ .

La matrice d'inertie du corps rigide en question est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 14.6 & 0 & 0 \\ 0 & 7.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.8 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \text{ (Kg } m^2)$$

Le seuil des fonctions de saturation  $M_i$  et les paramètres de réglage  $\alpha_i, \rho, \lambda_i$ , pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont choisis tels que les équations suivantes sont satisfaites :

$$\bar{\Gamma}_1 = \alpha_1 M_1 \quad \bar{\Gamma}_2 = \alpha_2 M_2 \quad \bar{\Gamma}_3 = \alpha_3 M_3$$

avec

$$M_1 \geq 3\lambda_1\rho_1, \quad M_2 \geq 3\lambda_2\rho_2, \quad M_3 \geq 3\lambda_3\rho_3 \quad (4.36)$$

Dans cette étude les valeurs  $\alpha_i = 1$  ont été prises et  $\rho_i = 2.5$  a été choisi en vérifiant la propriété 4.1, afin de ne pas dépasser une vitesse angulaire maximale de  $\omega_{max} = 5 \text{ rad/sec}$  ( $286^\circ/sec$ ). Les paramètres  $\lambda_i$  sont choisis tel que les conditions (4.36) soient remplies.

Les simulations suivantes ont été effectuées :

- Stabilisation ;
- Robustesse par rapport à des perturbations externes ;
- Suivi de trajectoire ;

## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

### 4.6. RÉSULTATS EN SIMULATION

- Robustesse par rapport aux erreurs dans le modèle ;
- Robustesse par rapport à la saturation dans la mesure de la vitesse angulaire ;

Pour une meilleure compression des résultats, nous allons montrer l'attitude dans une représentation d'angles d'Euler. Cependant, l'algorithme de commande est basé sur un formalisme de quaternions.

#### – Stabilisation

Le but de cette simulation est de montrer la capacité de la loi de commande à stabiliser le système à l'origine ( $q_0 = 1$ ,  $\vec{q} = 0$ ,  $\vec{\omega} = 0$ ), à partir d'une attitude initiale suffisamment éloignée,  $\phi = -45^\circ$ ,  $\theta = 50^\circ$ ,  $\psi = -175^\circ$  et une vitesse angulaire nulle,  $\vec{\omega} = 0$ . Les figures 4.5(a) montrent la convergence asymptotique de l'attitude du système bouclé vers l'origine. Il faut remarquer que le système rejoint son point d'équilibre approximativement en 3.5 secondes, ce qui est un temps très désirable pour un système avec un moment d'inertie comme celui considéré dans cette étude. Dans les figures 4.5(b) et 4.5(c) l'évolution de la vitesse angulaire et du couple de commande sont montrées. Il faut remarquer que les contraintes dans les vitesses angulaires et la commande restent satisfaites.

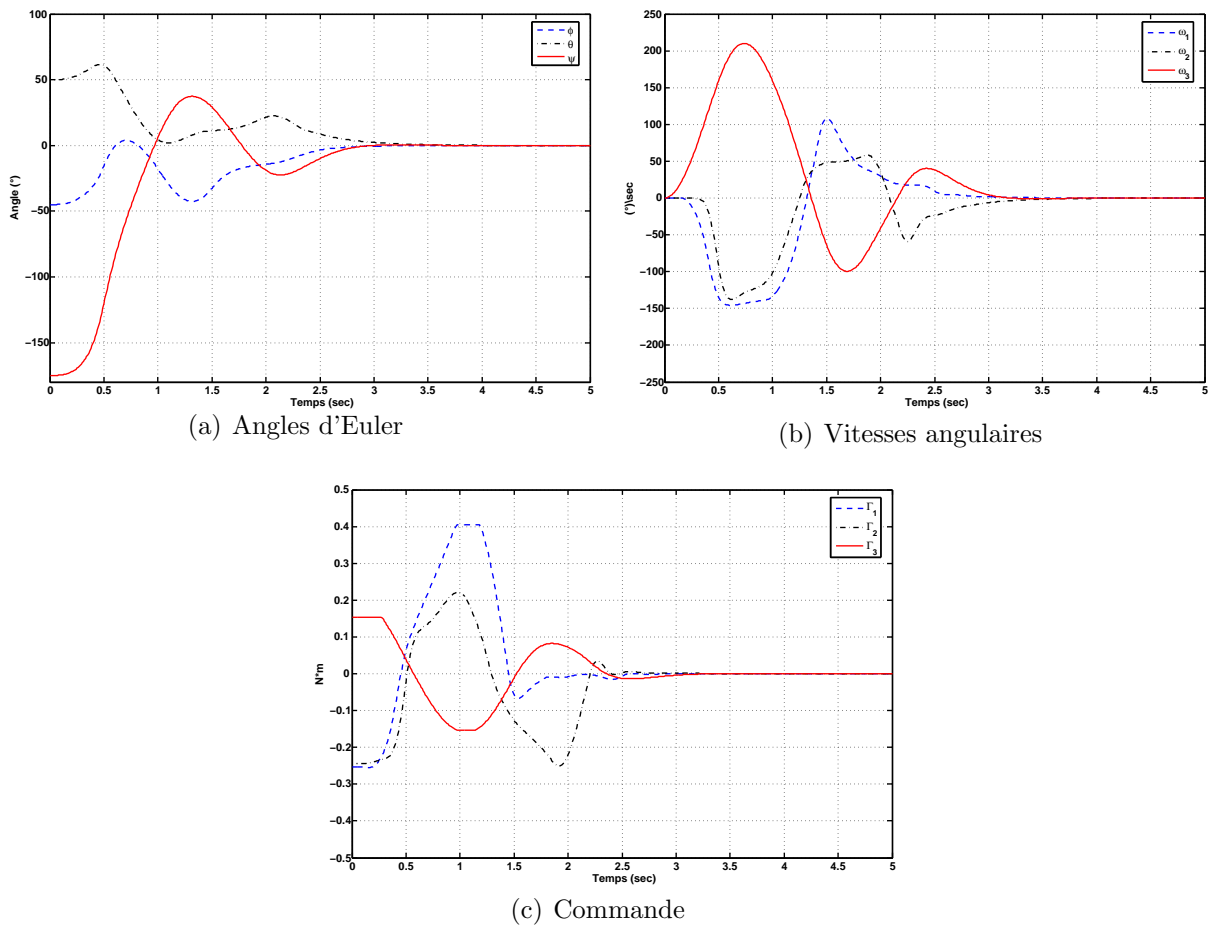


FIG. 4.5 – Stabilisation du corps rigide à l'origine.

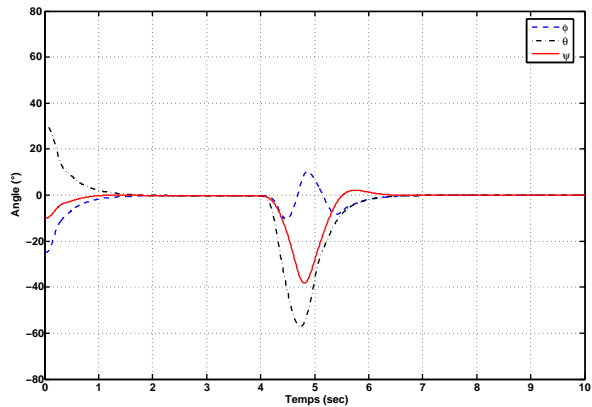


## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

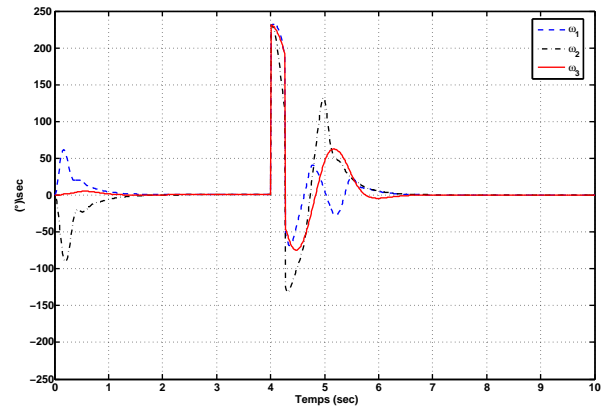
### 4.6. RÉSULTATS EN SIMULATION

#### – Robustesse par rapport aux perturbations externes

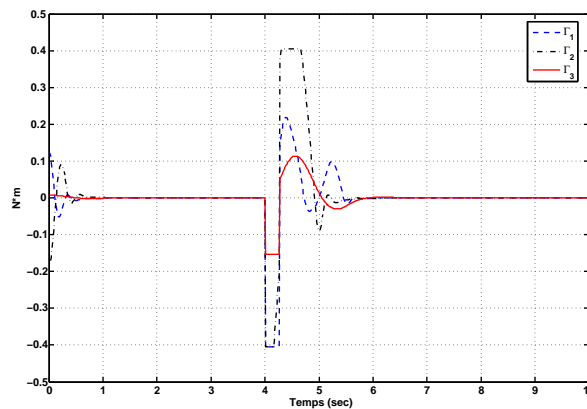
L'objectif de cette simulation est de montrer la robustesse de la loi de commande lorsqu'une perturbation externe (un couple perturbateur) est introduite dans le système. Dans un premier temps le système est stabilisé à l'origine avec les conditions initiales :  $\phi = -25^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\psi = -10^\circ$  et  $\vec{\omega} = 0$ . Après que la stabilisation ait eu lieu (voir figure 4.6(a)), une perturbation est introduite. Le système acquiert une vitesse angulaire de  $229^\circ/sec$  autour de ces trois axes principaux, comme montre la figure 4.6(b). En conséquence, la loi de commande atteint ses limites et elle agit sur le système afin de rejeter les perturbations et de permettre aux états du système de rejoindre l'origine au bout d'un temps de 2.5 sec, figure 4.6(c). Ces résultats montrent que la loi de commande bornée que nous avons proposé, est robuste par rapport aux perturbations externes. Cette propriété est extrêmement importante et nécessaire, surtout dans des systèmes dont le moment d'inertie est faible et qui sont souvent exposés à des perturbations environnementales fortes (par exemple le vent).



(a) Angles d'Euler



(b) Vitesses angulaires



(c) Commande

FIG. 4.6 – Stabilisation à l'origine et rejet de perturbations

– Suivi de trajectoire

Dans cette troisième simulation, nous analysons le comportement du système bouclé lorsque l'attitude désirée est variable dans le temps. L'attitude désirée est donnée en termes d'angles d'Euler :  $\phi_d = 0^\circ$ ,  $\theta_d = 0^\circ$ ,  $\psi_d = 10^\circ + 10^\circ \sin(\frac{15}{\pi}t)$ . Ainsi, les angles d'Euler désirés sont transformés en un quaternion désiré  $q_d$ . Notons que dans ce cas, la loi de commande (4.31) est utilisée. La condition initiale dans cette simulation est :  $\phi = -45^\circ$ ,  $\theta = 50^\circ$ ,  $\psi = -175^\circ$  et  $\vec{\omega} = 0$ .

Le régulateur se comporte convenablement en ramenant les angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et les vitesses angulaires  $\omega_x$  et  $\omega_y$  à l'origine, alors que l'angle  $\psi$  reste dans un voisinage de l'angle désiré  $\psi_d$ . Ces résultats sont montrés dans la figure 4.7. Ce résultat est très important, car bien que la loi de commande ait été conçue pour une stabilisation, elle se comporte d'une façon acceptable dans le cas d'un suivi de trajectoire angulaire. Dans le cas où l'attitude désirée est donnée en forme d'échelon, le problème devient celui de la stabilisation.

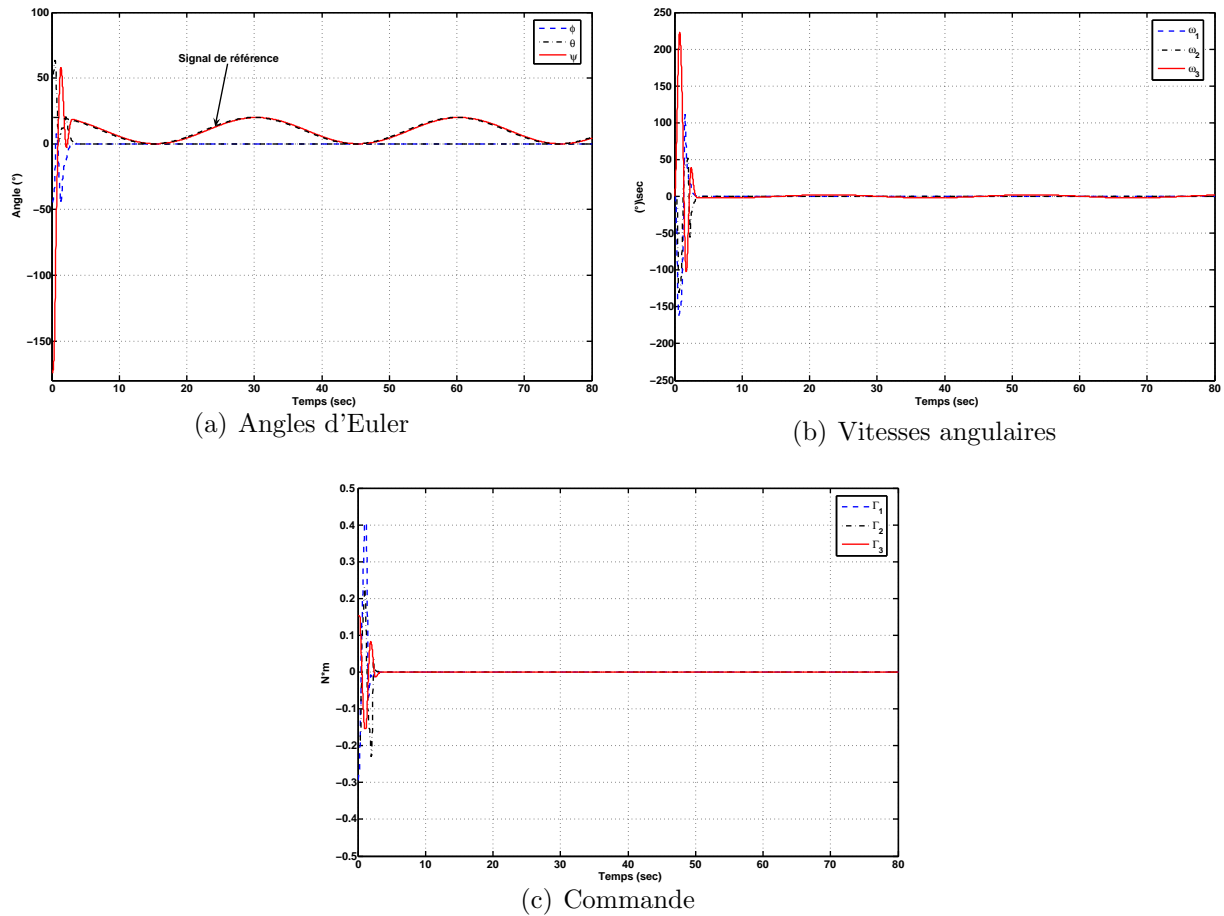


FIG. 4.7 – Suivi de trajectoire

– **Robustesse par rapport aux erreurs dans le modèle**

Afin de tester numériquement la robustesse de la méthode, nous avons introduit des incertitudes dans les moments d'inertie :  $J_I = J - \frac{1}{2}J$  et  $J_{II} = 2J$ . Les figures 4.8(a)-4.8(c) affichent le comportement du système bouclé. Notons que dans tous les cas, la commande ramène l'attitude à un voisinage de l'origine dans un temps approximatif de  $t = 2$  sec. Cela montre que la loi de commande est capable de stabiliser le système, en dépit des incertitudes dans la connaissance du moment d'inertie. Ce fait nous semble évident, car la loi de commande ne dépend pas du modèle.

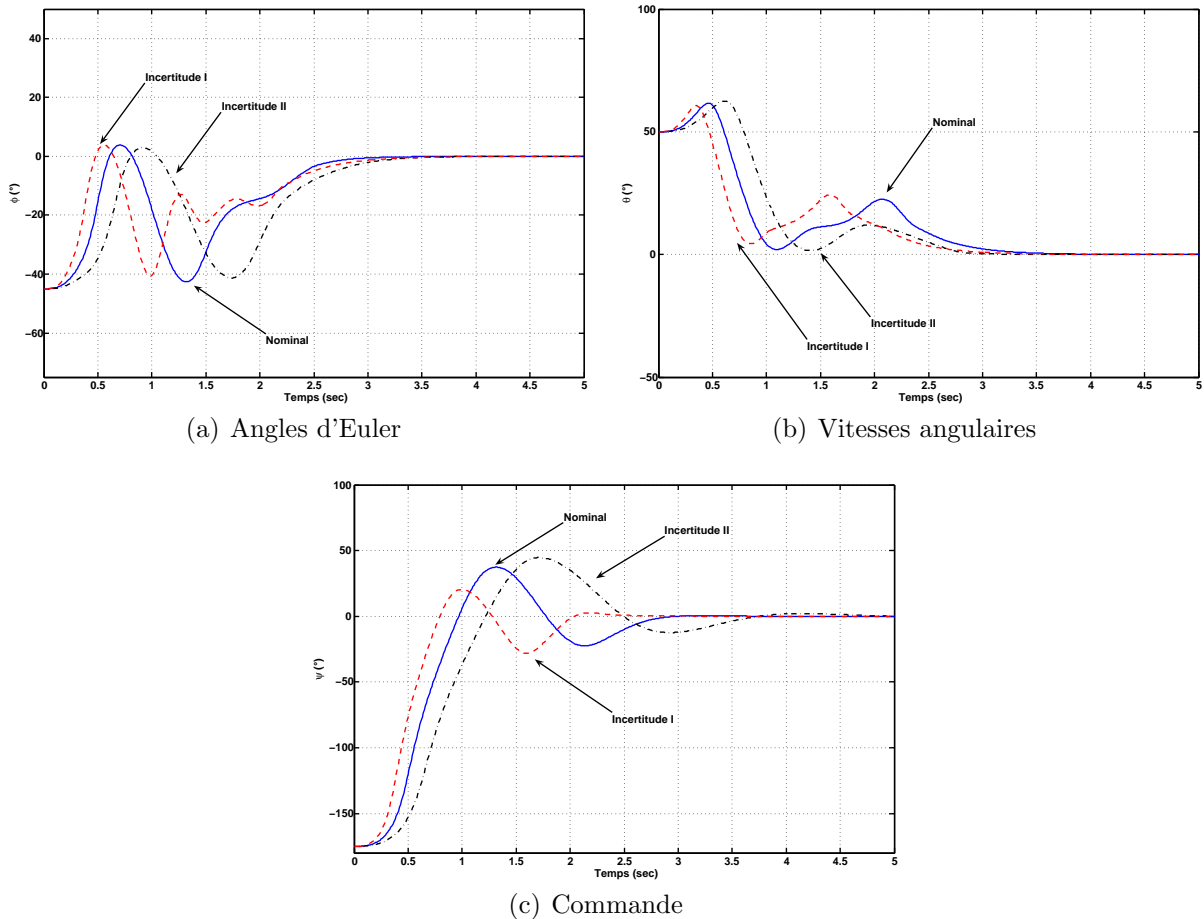


FIG. 4.8 – Les angles d'Euler

– **Robustesse par rapport à saturation dans la mesure de la vitesse angulaire**

Enfin, nous allons montrer l'importance des propriétés 4.1 et 4.2. Il s'agit d'analyser le comportement du système lorsque la vitesse angulaire du corps dépasse la plage de mesure permise par les gyromètres. Dans cet exemple nous supposons que trois gyromètres sont montés orthogonalement et qu'ils coïncident avec les axes principaux du corps rigide. La

**CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE**  
**4.7. APPLICATION À L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS**

---

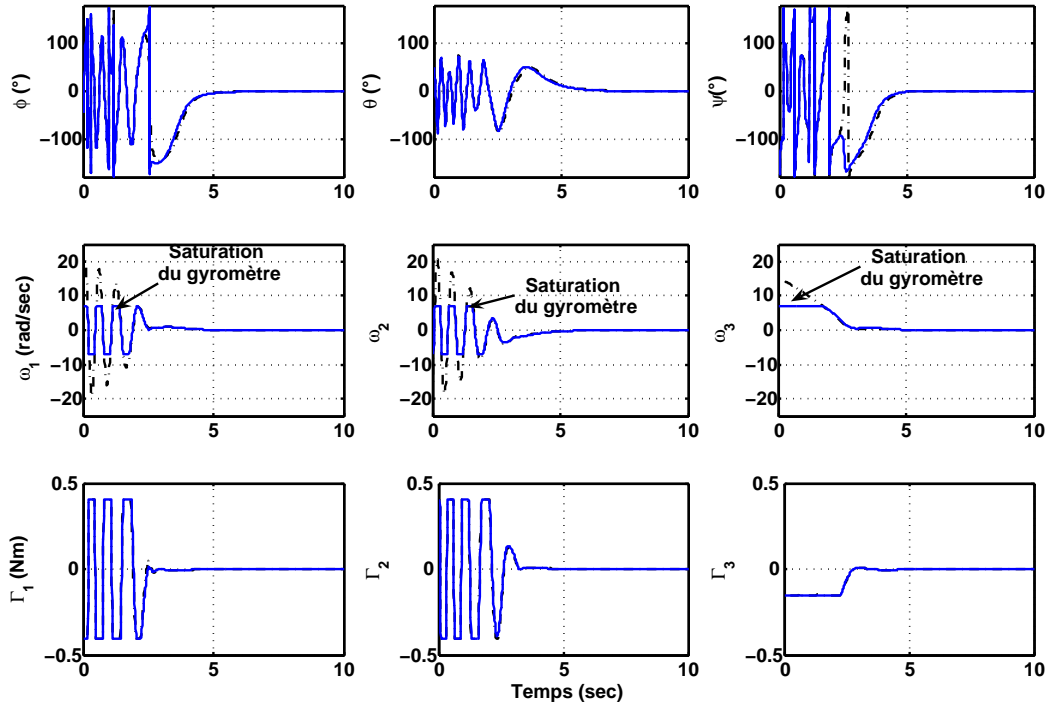


FIG. 4.9 – Comportement du système sous la saturation des gyromètres

vitesse maximale qui peut être mesurée par ces gyromètres est de  $2\pi$  rad/sec. Afin de garantir la stabilité du système, les propriétés 4.1 et 4.2 sont utilisées. Ainsi, nous avons fixé le paramètre  $\rho_i = \frac{\hat{\omega}_{i,max}}{2} = \pi$ . Avec  $\alpha_i = 1$  et les paramètres  $\lambda_i$  avec  $i = \{1, 2, 3\}$  sont choisis tel que la condition 4.36 soit satisfaite.

Dans cette étude les conditions initiales sont :  $\phi = -25^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\psi = -10^\circ$  et  $\vec{\omega} = [15 \quad -15 \quad 15]^T$  rad/sec. L'évolution des variables d'état et de la commande du système bouclé dans le cas nominal (sans saturation des mesures) et sous saturation des mesures gyrométriques se montre sur la figure 4.9. Bien que les mesures gyrométriques soient saturées pendant le deux premières secondes, le bon choix des paramètres de réglage dicté par la propriété 4.1, ont permis d'abord de ramener les vitesses angulaires du corps dans une région de l'espace d'état où les gyromètres ne sont plus saturés, ensuite le système se comporte de façon normale et toutes les variables d'état rejoignent l'origine.

## 4.7 Application à l'hélicoptère à quatre rotors

L'intérêt pour les Véhicules Aériens Autonomes (UAV) et les Micro Véhicules Aériens (MAV) a été principalement pour des objectifs militaires. Cependant, les applications civiles sont aussi nombreuses, par exemple, la surveillance environnementale, la surveillance du trafic et de lignes d'haute tension, la cinématographie ou l'anthropologie. Dû à la capacité de vol

## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

### 4.7. APPLICATION À L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS

---

stationnaire et à la grande manoeuvrabilité, l'hélicoptère à quatre rotors a attiré l'attention dans l'industrie du jouet et dans la communauté robotique et automatique. Ce véhicule est capable de décoller à la verticale et en raison de sa symétrie, il est simple à modéliser et à construire.

Cependant, le mini hélicoptère à quatre rotors, comme celui que nous avons présenté dans le chapitre 2, possède un moment d'inertie très faible. En conséquence, il est largement vulnérable à de grandes accélérations angulaires dues aux perturbations de l'environnement tel que le vent ou aux effets aérodynamiques provoqués par les quatre rotors tournant à grande vitesse. Ainsi, dans des missions réelles, une commande d'attitude performante est cruciale. Celle-ci permet de maintenir une position angulaire désirée en dépit de la présence de perturbation et ainsi d'éviter un possible endommagement de l'aéronef ou de son environnement.

Dans le chapitre 1 paragraphe 1.2.2 nous avons mentionné les différents groupes dans le monde qui se sont consacrés à l'étude et à la conception de lois de commande pour la stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors, ces dernières années. Ainsi, différentes techniques de commande ont été utilisées. Par exemple, la commande PID et LQ dans [14] ou la commande à modes glissants et backstepping dans [15]. Dans ces approches, la paramétrisation de l'attitude a été faite avec les angles d'Euler et le modèle dynamique a été linéarisé autour de l'origine. Dans [100] les auteurs proposent une loi de commande appelée  $PD^2$ . Dans cette approche l'attitude est paramétrisée en utilisant le quaternion unitaire et la loi de commande est obtenue par l'application de la méthode de backstepping. Cette méthode montre une stabilisation asymptotique globale et une stabilisation exponentielle locale, cependant elle dépend des paramètres du modèle. Dans le cadre du projet Robvolint, une commande semi-automatique a été proposée [42]. Ici, l'attitude est paramétrisée avec le quaternion et la loi de commande est obtenue par la méthode backstepping. La principale difficulté dans cette approche est la mesure de la vitesse de translation, laquelle est nécessaire dans la loi de commande.

Bien que les approches évoquées précédemment soient théoriquement congruentes, elles ne prennent pas en compte les limites dans le signal de commande qui peut être appliqué aux actionneurs. En conséquence, lors de larges erreurs en attitude ou de larges erreurs dans la vitesse angulaire, la signal de commande produira une saturation dans les moteurs et une instabilité dans le système arrivera. En outre, il faut remarquer que dans toutes les architectures des hélicoptères à quatre rotors rapportées dans la littérature, la vitesse angulaire est mesurée par des gyromètres. Cependant, parmi toutes les approches de commande proposées aucune parmi elles ne prend en compte les limites dans la mesure des vitesses angulaires.

Une caractéristique particulière dans le modèle dynamique de l'hélicoptère à quatre rotors est que la dynamique de rotation peut s'assimiler à celle d'un corps rigide. Ainsi, les résultats

reportés dans dans le paragraphe 4.5 peuvent être étendus naturellement à la stabilisation en attitude de cet hélicoptère. De plus, en raison de l'extrême simplicité et la caractéristique de continuité que cette loi de commande exhibe, son implantation en temps réel est possible. Dans les paragraphes suivants nous allons montrer comment la loi de commande bornée proposée dans le théorème 4.1 peut être appliquée à la stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors. Cette approche permet de prendre en compte les contraintes dans le signal de commande et dans la mesure de la vitesse angulaire. Ainsi, la loi de commande a été implantée en temps réel et nous allons montrer sa capacité à stabiliser l'hélicoptère à quatre rotors. Particulièrement, nous allons analyser la performance de la méthode en termes de temps de stabilisation, robustesse par rapport aux perturbations externes et la capacité de suivre de consignes d'attitude variables dans le temps.

### 4.7.1 Modèle dynamique

Les détails à propos de la dynamique de vol de l'hélicoptère à quatre rotors et son mode de fonctionnement ont été présentés dans le chapitre 2. Néanmoins, afin d'aborder le problème et de montrer le contexte de la stabilisation en attitude de cet aéronef, nous allons rappeler brièvement le modèle dynamique de ce véhicule aérien.

Le modèle dynamique qui décrit le mouvement du véhicule dans l'espace (six degrés de liberté) peut être divisé en trois sub-systèmes tels que montrent les équations (4.37)-(4.39). Le système en boucle ouverte de l'hélicoptère peut être représenté à partir du diagramme bloc de la figure 4.10.

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{\vec{p}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \vec{g} - \frac{1}{m} C^T(q) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \sum_{i=1}^4 s_i^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_{H_{xi}} \\ \sum_{i=1}^4 F_{H_{yi}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2} \Xi(q) \vec{\omega} \\ J_h \dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J_h \vec{\omega} - \sum_{i=1}^4 J_a (\vec{\omega} \times z_n) (-1)^{i+1} s_i + \Gamma_{(\phi, \theta, \psi)} \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\Sigma_M : \left\{ \dot{s}_{m_i} = \frac{K_m u_i}{J_a R} - \frac{K_m^2 s_{m_i}}{J_a R} - \frac{\kappa s_{m_i} |s_{m_i}|}{J_a K_g^3} \text{ avec } i \in \{1, 2, 3, 4\} \right. \quad (4.39)$$

avec  $s_i = s_{m_i}/K_g$ .

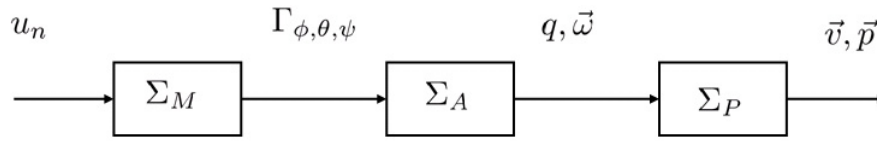


FIG. 4.10 – Diagramme à bloc de la dynamique de l'hélicoptère à quatre rotors

### 4.7.2 Énoncé du problème

L'objectif est la stabilisation de l'attitude en boucle fermée de l'hélicoptère à quatre rotors. Pour cela, seuls les systèmes  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_M$  seront considérés.

L'idée consiste en l'élaboration d'une loi de commande  $\Gamma$  qui permette de stabiliser l'hélicoptère à quatre rotors vers une attitude désirée, représentée par un quaternion  $q_d$ . Dans la conception de la loi de commande, nous assumons l'accès à tous les états du système : quaternion d'attitude et vecteur de vitesse angulaire<sup>1</sup>.

La figure 4.11 montre le diagramme à bloc de la stratégie de commande que nous souhaitons appliquer.

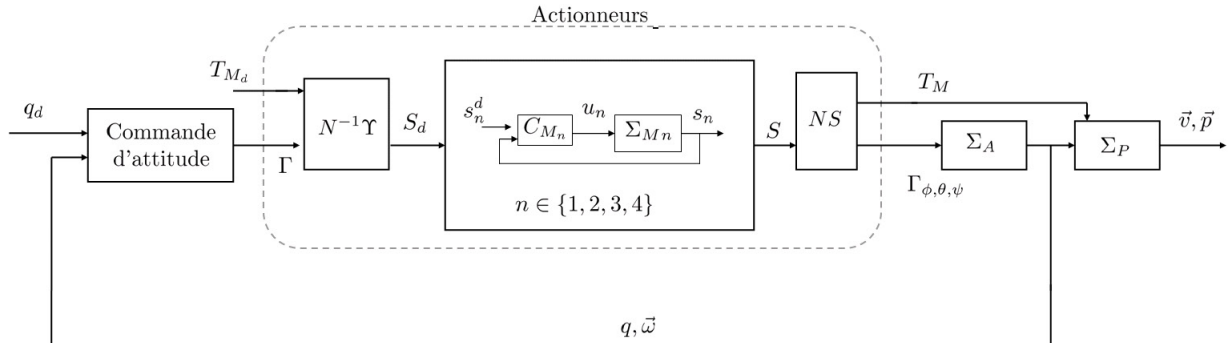


FIG. 4.11 – Stratégie de contrôle

La loi de commande fournit un signal de commande  $\Gamma$  qui doit être injecté au système propulseur. Ainsi, le système propulseur a l'objectif de générer le couple de commande qui doit s'exercer autour de chaque axe de l'hélicoptère. Par conséquent, le couple de commande  $\Gamma$  et la poussée totale désirée  $T_{M_d}$  doivent être transformés en quatre signaux de vitesse de rotation désirée  $s_n^d$  avec  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ , où  $n$  représente le nombre d'actionneurs. A partir de l'équation (2.35) page (58), la vitesse de rotation désirée pour chaque actionneur est obtenue

---

<sup>1</sup>En réalité, les informations sur l'état du système sont obtenues via une centrale de mesure, composé par trois gyromètres, trois accéléromètres et trois magnétomètres. Ainsi, l'observateur d'attitude présenté dans le chapitre 3 est utilisé afin d'estimer le quaternion d'attitude.

**CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE**  
**4.7. APPLICATION À L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS**

---

au moyen de la transformation linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} (s_1^d)^2 \\ (s_2^d)^2 \\ (s_3^d)^2 \\ (s_4^d)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & db & 0 & -db \\ db & 0 & -db & 0 \\ k & -k & k & -k \\ b & b & b & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_c \\ F_{T_d} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$S_d = N^{-1}\Upsilon$$

Les commandes  $C_{M_n}$  avec  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  ont l'objectif d'élaborer une consigne de tension de sorte que l'actionneur  $n$  ait une vitesse de rotation  $s_n$  égale à la vitesse désirée  $s_n^d$  donnée par l'équation (4.40). De plus, les commandes  $C_{M_n}$  doivent assurer que la dynamique du système propulseur soit largement au delà de la bande passante de la commande d'attitude. En conséquence nous que  $s_n \rightarrow s_n^d$  pour un temps  $t$  relativement petit, tel que nous pouvons supposer que :

$$\Gamma = \Gamma_{(\phi, \theta, \psi)} \quad (4.41)$$

La conception de la commande de vitesse  $C_{M_i}$  a été abordée dans le chapitre 2, paragraphe 2.7. Elle est basée sur une approche par modes glissants, et elle est simple et robuste par rapport à des incertitudes de paramètres des moteurs.

Dans cette application, la tension maximale qui peut être appliquée aux bornes des moteurs est 9 V. Lorsque cette tension est appliquée l'actionneur atteint une vitesse maximale de  $s_{n,max} = 260 \text{ rad/sec}$ . En accord avec les valeurs des paramètres aérodynamiques des pales,  $\kappa$  et  $b$ , données dans le tableau 2.11, page 55, le couple maximal qui peut s'exercer autour de chaque axe de l'hélicoptère est

$$\bar{\Gamma}_1 = 0.40 \text{ Nm} \quad \bar{\Gamma}_2 = 0.40 \text{ Nm} \quad \bar{\Gamma}_3 = 0.15 \text{ Nm} \quad (4.42)$$

### 4.7.3 Stabilisation en attitude de l'hélicoptère à quatre rotors

Afin de stabiliser en attitude l'hélicoptère à quatre rotors et de maximiser le rendement des actionneurs en utilisant toute leur étendue de fonctionnement (0-9V), sans prendre de risques en ce qui concerne la stabilité du système, la commande bornée proposée pour la stabilisation d'un corps rigide, présentée dans le paragraphe précédente est appliquée. Ainsi, nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.1.** *Considérons la dynamique du système  $\Sigma_A$  et l'égalité (4.41). Alors, la loi de commande bornée  $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3]^T$  :*

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\alpha_1 \sigma_{M_\phi} (\lambda_1 [\omega_1 + \rho_1 q_1]) \\ \Gamma_2 &= -\alpha_2 \sigma_{M_\theta} (\lambda_2 [\omega_2 + \rho_2 q_2]) \\ \Gamma_3 &= -\alpha_3 \sigma_{M_\psi} (\lambda_3 [\omega_3 + \rho_3 q_3]) \end{aligned} \quad (4.43)$$



**CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE**  
**4.7. APPLICATION À L'HÉLICOPTÈRE À QUATRE ROTORS**

---

*stabilise globalement et asymptotiquement l'attitude de l'hélicoptère à quatre rotors à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0$ ).  $\sigma_{M_{\phi, \theta, \psi}}$  sont des fonction de saturation telles que :*

$$M_{\phi} \geq 3\lambda_1\rho_1, \quad M_{\theta} \geq 3\lambda_2\rho_2, \quad M_{\psi} \geq 3\lambda_3\rho_3$$

où  $\alpha_i, \lambda_i$  et  $\rho_i$  sont des paramètres positifs.

**Preuve** La preuve du lemme est similaire à celle-ci du théorème 4.1. La seule différence se trouve dans le vecteur  $\Gamma_G = \sum_{n=1}^4 J_a(\vec{\omega} \times z_n)(-1)^{n+1}s_n$ . Cependant l'influence de ce vecteur est annulée en raison de la relation suivante :

$$\vec{\omega}^T \Gamma_G = \vec{\omega}^T (\vec{\omega} \times z_n) \sum_{i=1}^4 J_a(-1)^{i+1}\omega_{ri} = 0$$

■

Le résultat précédent est très important puisque la loi de commande (4.43) nous permet de stabiliser l'hélicoptère à quatre rotors de façon globale. De plus, la borne  $M_{\phi, \theta, \psi}$  du couple qui peut s'exercer autour de chaque axe peut être assignée de façon indépendante. Cette borne est choisie en accord avec les caractéristiques des actionneurs utilisées. Ainsi, de l'équation (4.42), nous avons :

$$\bar{\Gamma}_1 = \alpha_1 M_{\phi} \quad \bar{\Gamma}_2 = \alpha_2 M_{\theta} \quad \bar{\Gamma}_3 = \alpha_3 M_{\psi}$$

En conséquence, la loi de commande permet d'utiliser toute la plage de travail des actionneurs dans le cas où cela est nécessaire, sans prendre de risque sur la stabilité du système entier. En outre, les paramètres de réglage  $\rho_i$ , permettent de prendre en compte les contraintes dans la vitesse angulaire de l'hélicoptère. Ce paramètre peut être choisi afin d'éviter une saturation dans la mesure des gyromètres. De plus, si ce paramètre est choisi tel que requis par la propriété 4.1, la loi de commande stabilise l'hélicoptère en dépit de saturations dans la mesure des gyromètres. Notons que la loi de commande (4.43) est indépendante de la matrice d'inertie  $J_h$ , en conséquence, elle est robuste par rapport aux incertitudes dans le modèle et aux perturbations externes (voir propriété).

La caractéristique la plus remarquable de cette approche est sa simplicité. Par conséquent, cette loi de commande peut être exécutée facilement en temps réel, permettant sans problème d'exécuter un vol stationnaire.

## 4.8 Résultats expérimentaux

Dans cette section nous aborderons la stabilisation en attitude en temps réel de l'hélicoptère à quatre rotors lorsque nous appliquons la commande bornée présentée dans le paragraphe précédent. Tout d'abord, la description de la plate-forme expérimentale sera présentée. Ensuite, nous allons décrire les expériences menées. Ces résultats montrent la performance de la loi de commande pour stabiliser en attitude l'hélicoptère à quatre rotors.

### 4.8.1 Plate-forme expérimentale

Afin d'implanter les algorithmes de contrôle et tester la performance en temps réel, nous avons développé en parallèle au prototype du département d'automatique du GIPSA-lab (voir paragraphe 2.3) une autre plate-forme expérimentale utilisant la technique "Hardware-in-the-Loop Simulation". Cette plate-forme a été montée dans la salle de manipulations de l'équipe de "microsystèmes" du laboratoire G2Elab. Elle est montrée dans la figure 4.12.

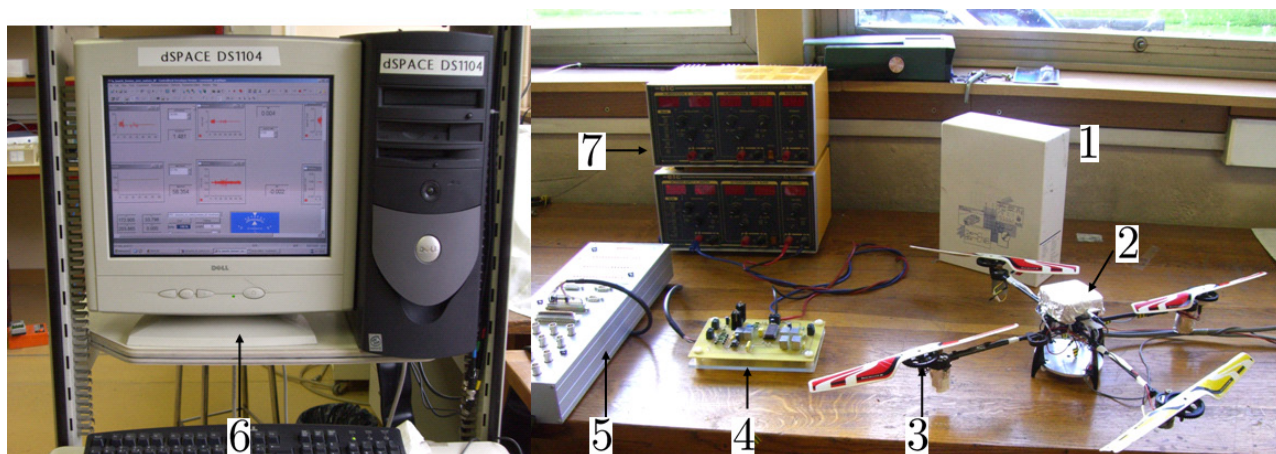


FIG. 4.12 – Plate-forme expérimentale pour la stabilisation en temps réel de l'hélicoptère à quatre rotors

A partir de la figure 4.12, nous pouvons identifier les modules suivantes :

1. Hélicoptère à quatre rotors : cet hélicoptère dont le modèle dynamique et les caractéristiques physiques ont été présentés dans le chapitre 2. La partie mécanique (structure mécanique, moteurs, hélices) est celle du DraganFly [29], néanmoins l'électronique embarquée a été remplacée.
2. Module de capteurs d'attitude : ce module est constitué d'une centrale d'attitude (Microstrain [74]), composée de neuf capteurs de technologie MEMS ; trois gyromètres, trois accéléromètres et trois magnétomètres. Ce module permet d'obtenir les neuf mesures, de calculer l'attitude (en utilisant un algorithme implanté par le fabricant) et de

transmettre les données sous forme de quaternions, au moyen d'une transmission série RS-232. Le module permet aussi de transmettre les neuf mesures "brutes", permettant d'estimer l'attitude en utilisant l'observateur non linéaire présenté dans le chapitre 3.

3. Capteur optique associé à chaque actionneur : ce capteur permet de mesurer la vitesse de rotation de la pale, dans le but de l'asservir.
4. Module de puissance : ce module amplifie en tension et courant les signaux PWM qui proviennent de la carte de contrôle dSPACE DS1104. Les tensions à appliquer aux bornes des moteurs sont(0-9V).
5. Carte de contrôle dSPACE R&D DS1104 : cette carte est basée sur un processeur MPC8240. C'est dans cette carte que tout l'algorithme de commande pour la stabilisation de l'attitude est implanté. En conséquence, dans cette carte les quatre modules suivants sont implantés :

**Commande de vitesse des actionneurs.** C'est dans ce module que les boucles de commande pour l'asservissement de vitesse des quatre actionneurs sont implantées. Rappelons que l'objectif de ces boucles de commande de vitesse est de créer un couple de commande autour de chaque axe principal de l'hélicoptère. De plus, les commandes de vitesse assurent que la dynamique des actionneurs est largement au-delà de la bande passante de commande d'attitude. Les sorties de ce module sont les quatre signaux PWM avec une fréquence de 250 Hz.

**Observateur non linéaire d'attitude.** C'est dans ce module que les neuf mesures (3 gyromètres, 3 accéléromètres et 3 magnétomètres) sont acquises à une fréquence de 50 Hz via une transmission série. Ensuite, l'observateur non linéaire présenté au chapitre 3 est utilisé afin de trouver l'attitude (quaternion). La sortie de ce module est composée de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  et le quaternion  $q$ , qui sont envoyés à la commande d'attitude.

**Commande d'attitude.** C'est dans ce module que la loi de commande du lemme 4.1 est implantée. A partir de l'information fournie par l'observateur d'attitude et de l'attitude désirée  $q_d$  fournie par l'utilisateur (pilote) la loi de commande calcule le couple de commande qui doit être appliqué autour de chaque axe principal de l'hélicoptère. Ensuite, à partir de la poussée total désirée  $T_{M_d}$  fournie aussi par l'utilisateur, les vitesses de rotation que chaque actionneur sont calculés.

6. Le PC : c'est dans le PC que les algorithmes de commande et d'observation sont édités et compilés. Avec la Real-Time Interface (RTI) de dSPACE<sup>®</sup>, la programmation des algorithmes est faite avec MATLAB<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup>. La Real-Time Interface fournit des blocs Simulink permettant une configuration des entrées A/N, des sorties N/A, des lignes d'E/S numériques, de l'interface série (UART) et de la génération des signaux

## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

### 4.8. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

PWM. Ensuite le programme est compilé et une génération du code est effectuée. Le code correspondant est implanté dans le microprocesseur de la carte de contrôle dSPACE DS1104. Notons que l'exécution des algorithmes en temps réel est faite par le microprocesseur et non par le PC.

Lorsque le programme commence à tourner en temps réel, nous utilisons l'interface "ControlDesk" afin d'observer l'évolution de toutes les variables du système et de modifier en ligne tous les paramètres souhaités. Ainsi, nous pouvons modifier certaines variables en temps réel, telles que l'attitude désirée  $q_d$  et la poussée désirée  $T_{M_d}$ . De plus, cette interface permet d'enregistrer toutes les données au cours d'une expérimentation.

Dans la figure 4.13 nous montrons un schéma de la plate-forme expérimentale décrite ci-avant.

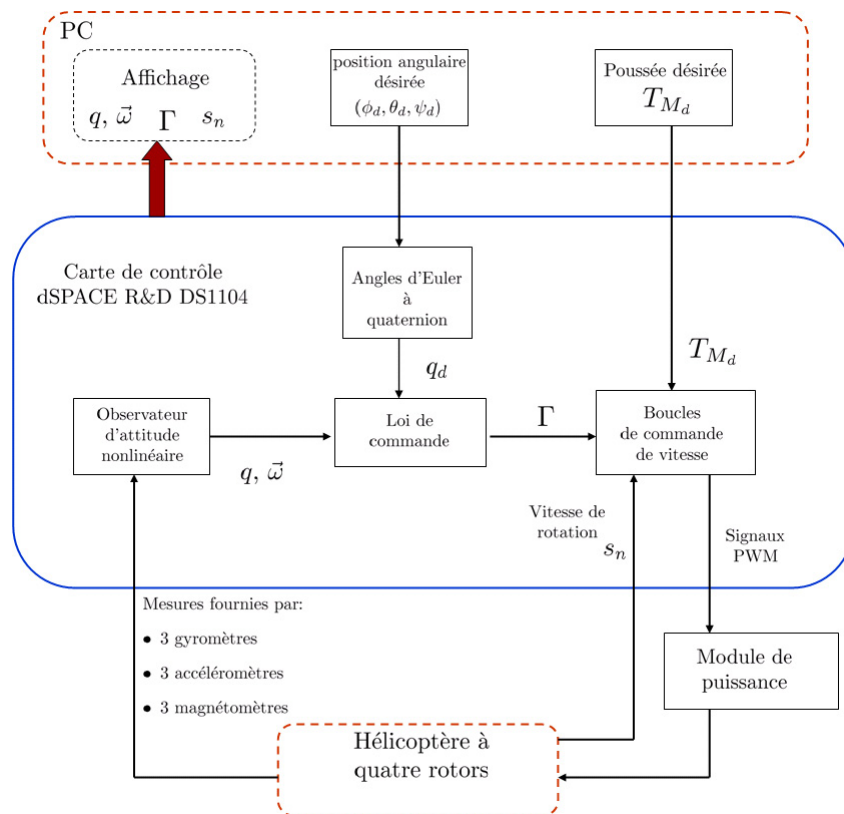


FIG. 4.13 – Architecture expérimentale pour la stabilisation en temps réel de l'hélicoptère à quatre rotors

## 4.8.2 Description des expériences

Après la description de la plate-forme expérimentale, nous allons présenter les différentes expériences menées pour la stabilisation en attitude suivies d'une discussion sur les résultats obtenus.

Les paramètres de réglage de la loi de commande sont présentés dans le tableau 4.1.

Paramètre	Valeur
$M_\phi, M_\theta$	0.4
$M_\psi$	0.15
$\alpha_{1,2,3}$	1
$\rho_{1,2,3}$	2.5

TAB. 4.1 – Valeurs des paramètres dans la loi de commande

Les expériences suivantes ont été effectuées :

- Stabilisation ;
- Robustesse par rapport aux perturbations externes ;
- Suivi de trajectoire ;

Pour une meilleure compression des résultats, nous allons montrer l'attitude dans une représentation d'angles d'Euler. Cependant, l'algorithme de commande est basé sur un formalisme de quaternions.

### – Stabilisation

Cette première expérience teste l'efficacité de la loi de commande à stabiliser l'hélicoptère à l'origine ( $q_0 = 1, \vec{q} = 0, \vec{\omega} = 0$ ), i.e. ( $\phi = 0^\circ, \theta = 0^\circ, \psi = 0^\circ$ ). Pour cette expérience l'attitude initiale est :  $\phi = -28^\circ, \theta = 13^\circ, \psi = -23^\circ$  et une vitesse angulaire nulle,  $\vec{\omega} = 0$ . Les figures 4.14(a) et 4.14(b) montrent la convergence asymptotique de l'attitude et de la vitesse angulaire du système bouclé. Le système joint l'attitude désirée approximativement en 1.5 secondes, ce qui est un temps très acceptable pour un système avec un moment d'inertie comme celui de notre hélicoptère. Concernant la commande, nous observons dans la figure 4.14(c) que dans ce cas, les contraintes dans la commande restent largement satisfaites et en conséquence la commande stabilise le système et il n'existe pas de risque de saturation dans les actionneurs.

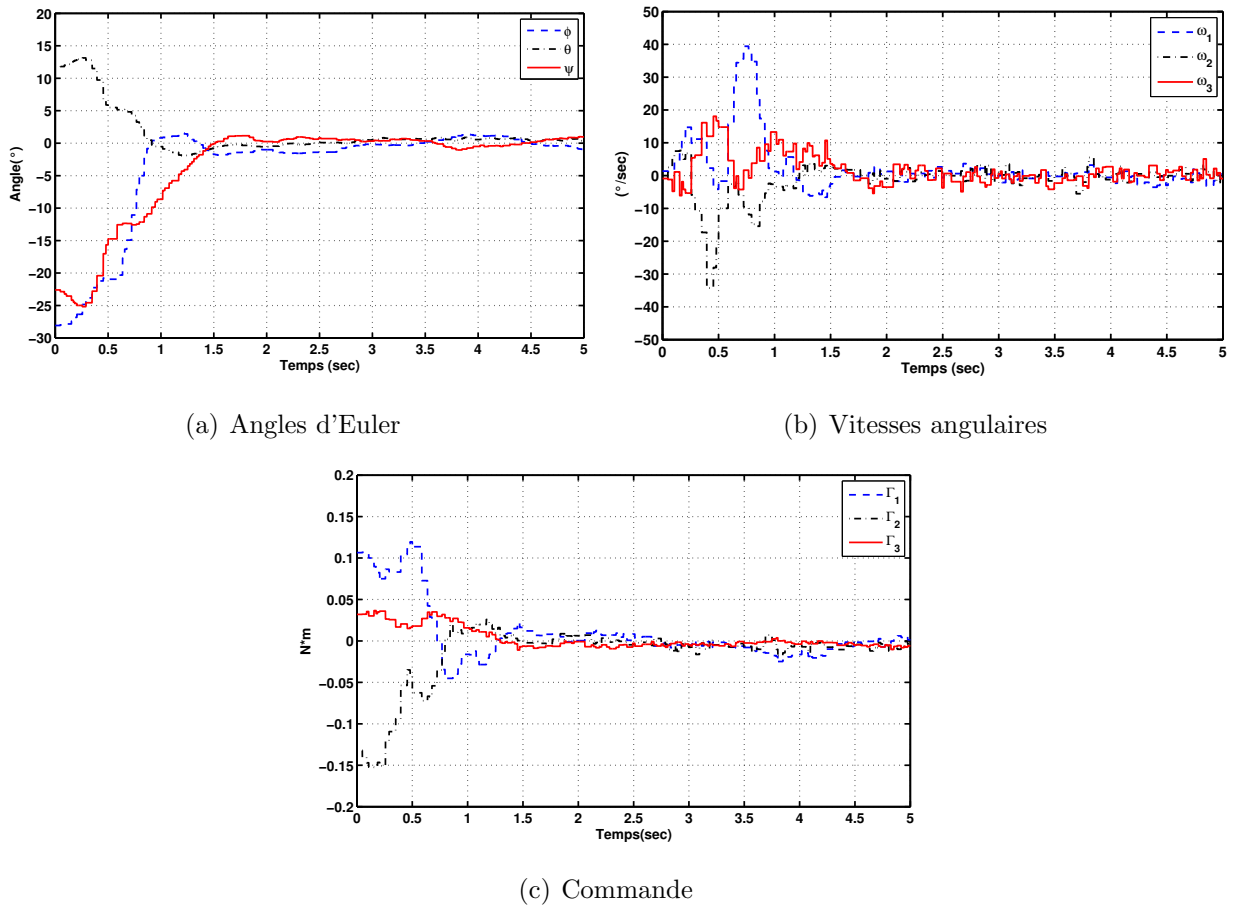


FIG. 4.14 – Stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors à l'origine.

– **Robustesse par rapport aux perturbations externes**

Dans cette seconde expérience, la performance de la loi de commande à rejeter les perturbations externes a été testée. Dans un premier temps le système est stabilisé à l'origine en partant des conditions initiales :  $\phi = -25^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\psi = -10^\circ$  et  $\vec{\omega} = 0$ . Puis l'hélicoptère y reste pendant 7 secondes. Ensuite, un couple perturbateur est introduit autour des deux directions de chaque axe. La première perturbation est introduite autour de l'axe  $z_b$ . Cette perturbation provoque une erreur grande dans l'angle  $\psi$  ainsi que dans la vitesse angulaire  $\omega_z$ , comme le montrent les figures 4.15(a) et 4.15(b). En conséquence, la commande  $\Gamma_3$  atteint ses limites ( $\pm 0.15$  Nm) et elle réagit sur le système afin de rejeter la perturbation et stabiliser l'hélicoptère à l'origine, cela est montré dans la figure 4.15(c). La loi de commande a rejeté aussi de façon satisfaisante les perturbations qui ont été introduites autour des deux directions des axes  $x_b$  and  $y_b$ , alors que les contraintes dans la commande  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  restent satisfaites.

Ces résultats montrent que la loi de commande bornée que nous avons proposé, est robuste par rapport aux perturbations externes et le plus important est que la loi de commande

## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

### 4.8. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

maximise l'efficacité des actionneurs sans prendre de risque dans la stabilité du système. Notons que la propriété de robustesse est énormément nécessaire dans des mission réelles où des forces aérodynamiques ou des autres facteurs ont lieu sur le système.

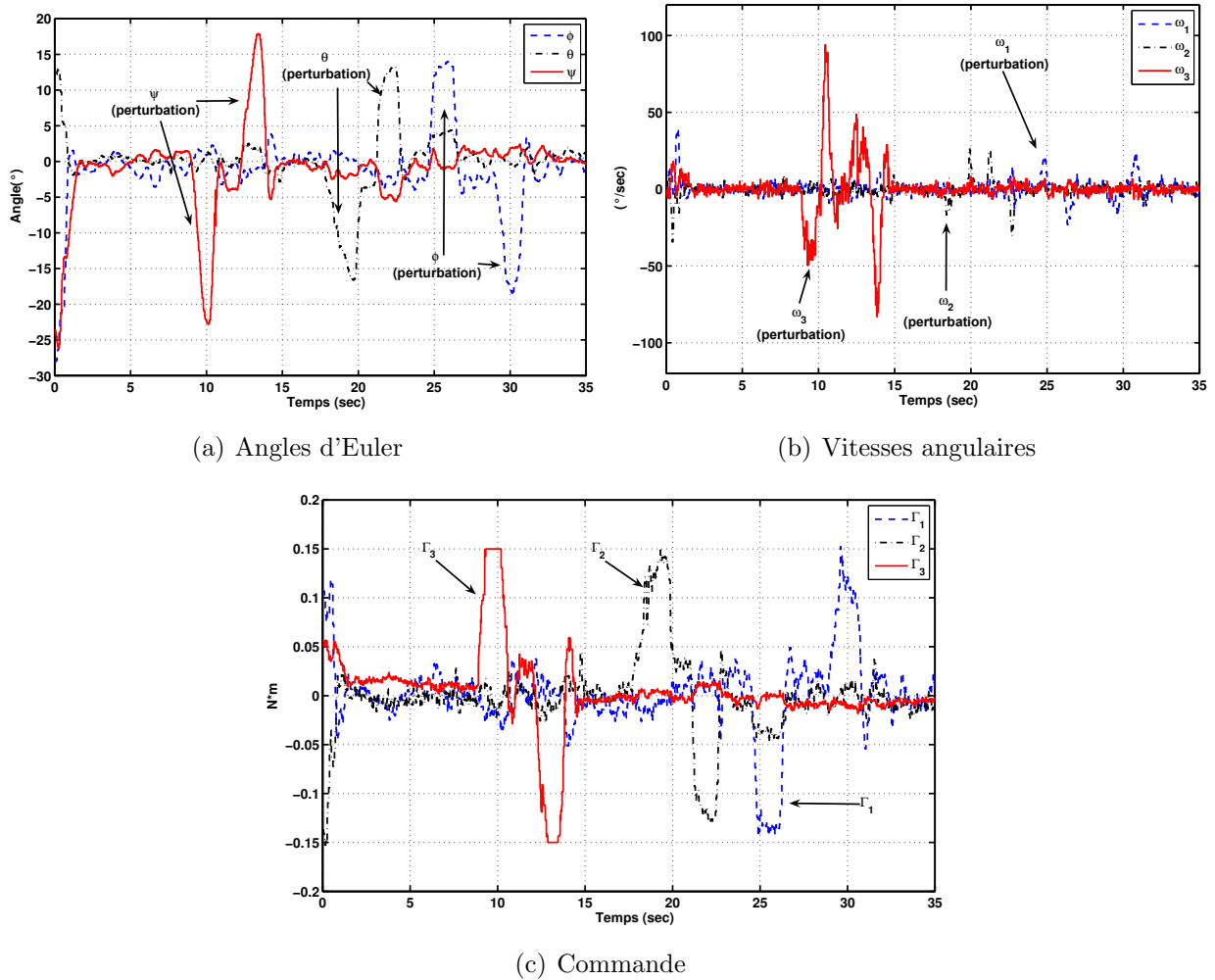


FIG. 4.15 – Stabilisation de l'hélicoptère à quatre rotors à l'origine et soumis à des perturbations externes

#### – Suivi de trajectoire

Enfin, nous avons analysé le comportement du système bouclé lorsque l'attitude désirée est variable dans le temps. L'attitude de référence (orientation désirée) est donnée en termes d'angles d'Euler et elle est :  $\phi_d = 0^\circ$ ,  $\theta_d = 0^\circ$ ,  $\psi_d = 8^\circ + 8^\circ \sin(\frac{15}{\pi}t)$ . Ainsi, les angles d'Euler désirés sont transformés en un quaternion désiré  $q_d$  qui est utilisé ensuite par la loi de commande. Dans ce cas les conditions initiales son telles que :  $\phi = \theta = \psi = 0^\circ$  et  $\vec{\omega} = 0$ . Dans la figure 4.16 nous montrons l'efficacité de la loi de commande à maintenir en vol stationnaire l'hélicoptère et à suivre la trajectoire angulaire autour de l'axe  $z_b$ . De plus, nous observons qu'en dépit des perturbations introduites, la loi de commande maintient l'hélicoptère dans un voisinage de l'attitude désirée.

## CHAPITRE 4. COMMANDE BORNÉE EN ATTITUDE

### 4.8. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Il faut remarquer que dans le cas où le signal de référence soit de type échelon, le problème devient à celui de la stabilisation.

Cette dernière expérience montre que l'hélicoptère est capable de faire un suivi de trajectoire angulaire, en utilisant la loi de commande 4.43 malgré qu'elle ait été conçue pour faire la stabilisation. Une simple adaptation de celle-ci en cherchant à stabiliser l'erreur de la vitesse angulaire est triviale en suivant la démarche de Teel [101] et permettrait d'améliorer les résultats en poursuite de consignes plus rapides.

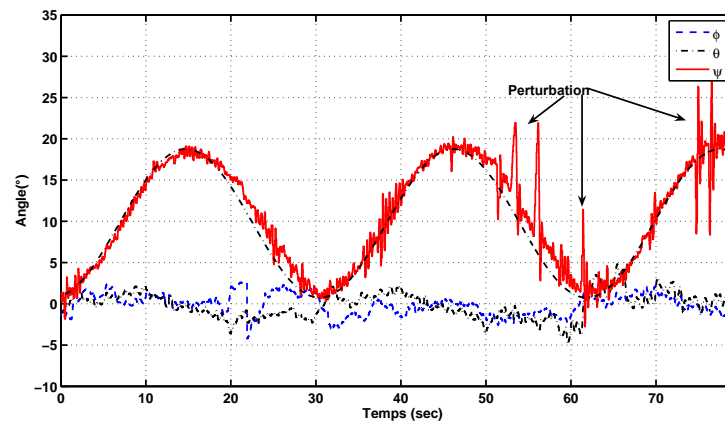


FIG. 4.16 – Suivi de trajectoire : évolution des angles de roulis, tangage et lacet, lorsque l'hélicoptère suit une trajectoire autour de l'axe  $z_b$ .



FIG. 4.17 – Vol stationnaire de l'hélicoptère à quatre rotors



## 4.9 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre porte sur la stabilisation globale en attitude d'un corps rigide. Une nouvelle commande bornée a été proposée en utilisant une approche non linéaire à base de fonctions imbriquées. L'objectif de la loi de commande est de maximiser l'efficacité des actionneurs sans prendre de risque dans la stabilité du système. Nous avons montré de plus que l'approche permet de respecter des contraintes de vitesse angulaire. L'approche est spécialement simple et elle ne nécessite pas la connaissance de paramètres inertiels pour garantir la stabilité globale. L'approche proposée est étendue à la stabilisation en attitude d'un hélicoptère à quatre rotors et l'implantation en temps réel a été effectuée. Quelques expériences en temps réel ont été réalisées et elles ont permis de valider la performance de notre approche.

De par sa nature et ses propriétés, rien n'indique qu'une telle approche ne puisse pas être appliquée à tous les systèmes qui entrent dans le cadre d'un corps rigide.



# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a permis d'aborder différents domaines de l'automatique, avec application des résultats à l'estimation de l'attitude et à la commande en attitude d'un drone à quatre rotors, rendant le travail de fait, multidisciplinaire. Ce domaine applicatif est particulièrement attrayant et les résultats obtenus (et énoncés dans ce manuscrit) ont été appliqués sur le prototype du laboratoire, après une analyse théorique complète. Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons présenté une étude sur l'état de l'art concernant l'estimation et la commande d'attitude d'un corps rigide. En particulier nous nous sommes intéressés à l'estimation de l'attitude d'un solide dans lequel trois magnétomètres, trois accéléromètres et trois gyromètres sont montés en triaxe orthogonal. Nous avons discuté des nombreuses applications de l'estimation d'attitude utilisant ce type de capteurs et en particulier son intérêt pour la robotique aérienne.

Nous avons fait une étude bibliographique des méthodes utilisées pour l'estimation de l'attitude, ce qui nous a conduit à constater que le Filtre de Kalman Etendu est la technique la plus souvent rencontrée pour répondre à cette problématique. Nous avons aussi constaté qu'en parallèle à notre étude, des observateurs non linéaires pour l'estimation de l'attitude ont été publiés, mais avec une approche différente de la notre.

Ensuite, nous avons présenté le problème de la commande d'attitude et nous nous sommes plus spécifiquement intéressés aux approches de commande bornée existantes. Puis, nous avons abordé le problème de la commande de l'hélicoptère à quatre rotors et nous avons constaté que la commande en attitude d'un corps rigide peut être aussi appliquée à la stabilisation en attitude de ce véhicule et en général à la commande en attitude des véhicules VTOL "Verticale Take-off and landing". Ce chapitre s'achève sur une présentation des différentes équipes de recherche impliquées dans le développement de la commande de l'hélicoptère à quatre rotors, ainsi que leurs apports.

L'état de l'art présenté dans ce premier chapitre nous a permis de situer notre travail dans celui de la communauté.

## CHAPITRE 5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

Dans le second chapitre, nous nous sommes plus spécifiquement intéressés à l'hélicoptère à quatre rotors ; ses modes de vol, le modèle dynamique, la description du prototype sur lequel nous avons travaillé, la conception et l'implantation d'une loi de commande pour l'asservissement en vitesse de chaque actionneur constitué de l'ensemble "moteur - hélice - réducteur". L'identification expérimentale de certains paramètres aérodynamiques et une recherche bibliographique sur la dynamique des hélicoptères ont permis l'implantation d'un simulateur numérique de l'hélicoptère à quatre rotors.

Dans le troisième chapitre, nous avons tout d'abord donné la structure du vecteur de mesures considéré. A partir d'un modèle de mesure déterministe, nous avons proposé deux méthodes de détermination du quaternion d'attitude à partir de vecteurs de mesures obtenus par des triaxes. Les deux méthodes de résolution proposées ont été appliquées à l'estimation de l'attitude d'un solide où trois magnétomètres et trois accéléromètres sont supposés montés en triaxe orthogonal. Puisque le vecteur de champ de gravité et le champ magnétique sont non colinéaires, l'estimation de l'attitude du solide par rapport au système de coordonnées NED (North, South, Down) est garantie. La seule condition est que l'accélération propre du corps soit "petite" par rapport à la gravité.

Dans un deuxième temps et afin d'estimer l'attitude avec plus de précision, les mesures fournies par trois gyromètres montés en triaxe orthogonal sont également prises en compte. Un observateur non linéaire est proposé afin de fusionner les trois modalités de mesures et d'estimer le quaternion d'attitude et le biais présent dans les mesures des gyromètres.

Outre la preuve de stabilité asymptotique traditionnelle qui montre une convergence globale de l'erreur d'estimation à zéro, nous avons montré que la dynamique de l'erreur est passive. Ce résultat nous a emmené, de façon naturelle, à montrer que la dynamique de l'erreur d'observation est stable au sens Entrée-Etat (ISS), lorsque l'on considère comme état l'erreur d'estimation et comme entrée une perturbation dans les mesures. Cette analyse nous a fourni aussi des conditions nécessaires que les gains de l'observateur doivent satisfaire.

Finalement, nous avons validé notre approche dans un premier temps avec de données simulées. Ensuite, nous avons réalisé une implantation pour des applications en temps réel. L'application directe de notre approche a été l'estimation de l'attitude d'un hélicoptère à quatre rotors. Mais notre approche étant générique (le modèle de l'hélicoptère n'est pas utilisé dans l'observateur) elle pourrait être appliquée à d'autres applications telles que la capture de mouvement humain ou la biomécanique.

La dernière partie du mémoire traite de la stabilisation globale en attitude d'un corps rigide. Ainsi nous avons proposé une commande d'attitude bornée qui garantisse la convergence de l'attitude du corps rigide vers une attitude désirée, même dans le cas d'une grande erreur d'attitude et de vitesse angulaire. L'objectif de cette approche est de maximiser la performance des actionneurs (saturables et saturés) sans mettre en péril la stabilité du système.

De plus, le schéma de contrôle permet également de prendre en compte des contraintes sur la vitesse angulaire. La loi de commande proposée est basée sur des fonctions de saturation imbriquées et elle est très proche par sa structure de celle utilisée pour la stabilisation de systèmes linéaires avec une commande bornée. La principale caractéristique de notre approche est qu'elle est générique et extrêmement simple à implanter.

Nous avons montré que la loi de commande proposée stabilise globalement en attitude l'hélicoptère à quatre rotors. L'implantation en temps réel a également été effectuée. Un grand nombre de tests ont été réalisés, montrant la performance du schéma proposé par rapport au temps de réponse, rejet de perturbations et suivi de trajectoires angulaires.

Les perspectives de ce travail sont multiples et nous allons en énoncer quelques unes ci-après :

- pour ce qui concerne l'observateur d'attitude, diverses applications sont envisagées, en particulier dans le domaine de la biomécanique. Des travaux dans ce domaine ont déjà été effectués et se poursuivent [88], ce qui permettra de situer nos recherches dans le cadre plus général de la robotique d'assistance (Assistive Robotics) et de l'interaction de l'humain avec des robots (Human-Robot Interaction (HRI)) ;
- nous avons constaté en pratique le bon fonctionnement du système bouclé (observateur - commande d'attitude). Cependant, il serait intéressant de montrer théoriquement la stabilité du couplage. Bien que dans le cas linéaire la stabilité du système bouclé soit assurée (principe de séparation), dans le cas non linéaire, la stabilité du système bouclé est loin d'être évidente. Néanmoins, l'analyse de stabilité au sens ISS qui a été menée pour l'observateur non linéaire pourrait être exploitée. L'idée serait d'exiger que l'erreur d'observation reste bornée, cette contrainte pouvant éviter l'apparition d'explosion en temps fini du système bouclé ;
- nous avons développé deux méthodes pour l'estimation de l'attitude (quaternion) à partir des vecteurs de mesures (en particulier avec des accéléromètres et magnétomètres) dans le cas quasi-statique. L'idée serait d'exploiter cette information et la propriété de passivité du corps rigide, afin de concevoir une loi de commande d'attitude qui soit bornée et qui n'utilise pas les mesures gyrométriques. Cela pourrait s'avérer utile dans le cas où un gyromètre est défaillant ;
- nous avons remarqué que dans le cas de l'hélicoptère à quatre rotors (en général dans une plateforme VTOL), le modèle dynamique peut s'assimiler à une structure en cascade : dynamique de rotation - dynamique de position. Dans notre travail, nous avons travaillé seulement avec la dynamique de rotation (attitude). Néanmoins, avec un choix approprié de deux termes de couplage entre les deux dynamiques, il serait envisageable de faire la synthèse d'un contrôleur pour le système complet. L'idée consiste de for-

cer (suffisamment rapide) certaines variables d'état dans une région. Dans ce cas, la dynamique sera linéaire, ce qui permettra de faire appel à des techniques récemment développées par Marchand et Ably [67] pour la stabilisation d'une chaîne d'intégrateurs. Cependant, il faudra garantir que la loi de commande ainsi synthétisée restera bornée ;

- au niveau expérimental, l'idée est d'avoir une plateforme expérimentale assez performante (système DSP comme calculateur central, capteurs à ultrason, capteurs infrarouges et éventuellement GPS) qui permette l'implantation des algorithmes de commande de position.

# Annexe A

## Preuve du Théorème 3.3

Afin de montrer de manière analytique comment l'estimateur (3.27) a été déterminé, supposons qu'une estimation  $\hat{q}_{k-1}$  est disponible. Notons que le calcul de  $\hat{q}_k$  fait intervenir  $4n$  étapes intermédiaires correspondant aux  $4n$  lignes de la matrice  $\bar{H}$  donnée par l'équation (3.8). Ainsi, les  $4n$  étapes doivent être réalisées dans une période d'échantillonnage. Considérons l'élément  $j$  de la suite de quaternions fabriquée par l'estimateur (3.27) (voir figure 3.4) à l'instant  $t_k$ . Puisque l'analyse sera menée à l'instant  $t_k$ , l'indice  $k$  est supprimé afin de ne pas alourdir les notations.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, supposons qu'une estimation  $\hat{q}(j-1) = \hat{q}_{k-1}$  est disponible et supposons que  $q$  dénote le vrai quaternion qui représente la rotation à l'instant  $t_k$ . Parmi tous les quaternion candidats au quaternion  $q$ , nous choisissons le quaternion dénoté par  $\hat{q}(j)$ , le plus proche de  $\hat{q}(j-1)$ . Ainsi, nous proposons le problème d'optimisation suivant [40] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{q}(j) = \arg \min_{q(j)} \left\{ f(\hat{q}(j)) = \frac{1}{2} \|\hat{q}(j) - \hat{q}(j-1)\|_2^2 \right\} \\ \text{sous la contrainte } 0 = \varphi_j^T \hat{q}(j) \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

**Remarque A.1.** Notons que l'objectif du problème d'optimisation (A.1) consiste à minimiser la distance euclidienne entre le quaternion  $\hat{q}(j)$  et le quaternion  $\hat{q}(j-1)$ . La relation entre la métrique euclidienne et la métrique géodésique est donnée par l'équation (1.41), page 10. Ainsi, nous avons les conditions suivantes :

$$\text{Si } \|\hat{q}(j) - \hat{q}(j-1)\|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \beta_r \rightarrow 0 \Rightarrow q_r = [\hat{q}(j)]^{-1} \otimes \hat{q}(j-1) \rightarrow [\pm 1 \ 0]^T \quad (\text{A.2})$$

Le Lagrangien associé à ce problème d'optimisation s'écrit :

$$L(\hat{q}(j), \lambda) = \frac{1}{2} \|\hat{q}(j) - \hat{q}(j-1)\|_2^2 + \lambda[0 - \varphi_j^T \hat{q}(j)] \quad (\text{A.3})$$

D'abord nous allons trouver un extremum du Lagrangien (A.3) qui est associé au problème d'optimisation (A.1) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \hat{q}(j)} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0\end{aligned}\tag{A.4}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\hat{q}(j) - \hat{q}(j-1) - \lambda \varphi_j^T &= 0 \\ -\varphi_j^T \hat{q}(j) &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

En substituant la première équation de (A.5) dans la deuxième et en résolvant pour  $\lambda$ , on obtient :

$$\lambda = \frac{-\varphi_j^T \hat{q}(j-1)}{\varphi_j^T \varphi_j}\tag{A.6}$$

En substituant l'équation (A.6) dans la première équation de (A.5), le quaternion  $\hat{q}(j)$  est donné par l'expression suivante :

$$\hat{q}(j) = \left( I_4 - \frac{\varphi_j \varphi_j^T}{\varphi_j^T \varphi_j} \right) \hat{q}(j-1)\tag{A.7}$$

Afin d'éviter une possible division par zéro (ou par un nombre proche de zéro) et afin de maintenir la norme unité du quaternion, l'algorithme précédent est remplacé par :

$$\begin{aligned}\hat{q}(j) &= \left( I_4 - \frac{\gamma \varphi_j \varphi_j^T}{\alpha + \varphi_j^T \varphi_j} \right) \hat{q}(j-1) \\ \hat{q}(j) &= \frac{\hat{q}(j)}{\|\hat{q}(j)\|_2}\end{aligned}\tag{A.8}$$

Si le problème d'optimisation est appliqué pour les  $4n$  lignes de la matrice  $\bar{H}$  du modèle de mesure, c'est-à-dire pour  $j = 4n$ , nous avons l'estimateur suivant :

$$\begin{aligned}\hat{q}(4n) &= \left[ \prod_{j=1}^{4n} \left( I_4 - \frac{\gamma \varphi_j \varphi_j^T}{\alpha + \varphi_j^T \varphi_j} \right) \right] \hat{q}(j-1) \\ \hat{q}(4n) &= \frac{\hat{q}(4n)}{\|\hat{q}(4n)\|_2}\end{aligned}\tag{A.9}$$

En remplaçant  $\hat{q}(j-1)$  par  $\hat{q}_{k-1}$  et  $\hat{q}(4n)$  par  $\hat{q}_k$  nous avons l'estimateur donné par l'équation (A.9).

---



■

Une propriété très intéressante de l'algorithme (A.9) est la suivante (voir [2], page 85) :

$$\|\hat{q}(j) - q\| \leq \|\hat{q}(j-1) - q\| \leq \|\hat{q}(0) - q\| \quad \text{avec } j = 1 : 4n \quad (\text{A.10})$$

où  $q$  dénote le vrai quaternion qui représente la rotation à l'instant  $t_k$ , telle que l'équation suivante est vérifiée :

$$0 = \varphi_j^T q \quad \text{avec } j = 1 : 4n \quad (\text{A.11})$$

**Remarque A.2.** *La propriété donnée par l'équation (A.10) n'implique pas que l'estimé  $\hat{q}(j)$  converge.*

**Remarque A.3.** *L'estimateur (A.9) représente une méthode séquentielle pour calculer le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre de la matrice  $\bar{H}^T \bar{H}$  au moyen d'une technique de puissance inverse, dont la convergence quadratique est prouvée [97].*



# Annexe B

## Concepts sur la passivité

La théorie de la passivité prend en compte des considérations énergétiques des systèmes physiques. De nombreux systèmes physiques possèdent certaines propriétés entrée-sortie reliées à la conservation, à la dissipation et au transport de l'énergie. Ces propriétés sont connues comme des propriétés dissipatives. Il est important de séparer les concepts et définitions reliés à la passivité d'un système lorsqu'il s'agit d'un système linéaire ou d'un système non-linéaire. Un système linéaire est appelé Réel Positif (Positive Real (PR)) si son énergie emmagasinée reste constante. Il est appelé Strictement Réel Positif (Strictly Positive Real (SPR)) si son énergie emmagasinée diminue. Le terme dissipatif est normalement utilisé pour les systèmes non linéaires. Un des points forts des systèmes dissipatifs est qu'ils supportent les combinaisons de manière simple. Ainsi, *un système constitué de sous-systèmes passifs reliés de façon parallèle où en "feedback" est aussi passif*. Nous allons exposer succinctement quelques notions concernant les systèmes passifs. Le lecteur peut consulter par exemple [53] et [62] pour plus de détails.

Considérons un système dynamique modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^p$ ,  $f$  et  $h$  sont lisses et  $f(0) = 0$ .

**Définition B.1** ([53]). *Le système  $\Sigma_1$  est dit passif s'il existe une fonction continue définie positive  $V(x)$  appelée fonction d'emmagasinage telle que :*

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + \epsilon u^T u + \delta y^T y + \rho \vartheta(x), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad (\text{B.2})$$

où  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\rho$  sont des constantes non négatives et  $\vartheta(x)$  est une fonction de  $x$  définie positive telle que :

$$\vartheta(x(t)) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0 \quad (\text{B.3})$$

## ANNEXE B. CONCEPTS SUR LA PASSIVITÉ

---

pour toutes les solutions de  $\Sigma_1$  et pour une entrée  $u(t)$  pour laquelle la solution existe. Le terme  $\rho\vartheta(x)$  est appelé *taux de dissipation de l'état*.

Le système  $\Sigma_1$  est :

- un système sans pertes si l'inégalité (B.2) se vérifie et si  $\epsilon = \delta = \rho = 0$ , c'est-à-dire :

$$u^T y \geq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u)$$

- un système strictement passif en entrée s'il existe un  $\epsilon > 0$  ;
- un système strictement passif en sortie s'il existe un  $\delta > 0$  ;
- un système strictement passif en l'état s'il existe un  $\rho > 0$  ;

**Lemme B.1** (Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)). Soit  $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B$  une matrice de fonction transfert, où  $A$  est une matrice Hurwitz. La paire  $(A, B)$  est contrôlable et la paire  $(A, C)$  est observable. En conséquence,  $Z(s)$  est réelle strictement positive (SPR) si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P = P^T$  et une matrice  $Q = Q^T$ , telles que :

$$A^T P + P A = -Q \tag{B.4}$$

$$B^T P = C \tag{B.5}$$

# Annexe C

## Concepts sur la Stabilité Entrée-Etat (Input-State Stability (ISS))

Ici nous allons exposer succinctement la notion de Stabilité Entrée-Etat (Input-State Stability (ISS)). Le lecteur peut consulter par exemple [95], [96], pour plus de détail.

Considérons un système dynamique modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{C.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $f$  est continûment différentiable telle que  $f(0, 0) = 0$ .

De façon très générale, la propriété ISS signifie que dans un système non linéaire, quelles que soient les conditions initiales, si les entrées futures sont petites, alors l'état du système doit rester petit, c'est-à-dire :

$$u(\cdot) \text{ bornée} \Rightarrow x(\cdot) \text{ borné}$$

Afin de donner quelques définitions plus formelles, nous voyons tout d'abord quelques concepts fondamentaux de la théorie de la stabilité [43] :

- une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  si elle est continue et strictement croissante, telle que  $f(0) = 0$ ;
- une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$  si elle est continue et strictement croissante, telle que  $f(0) = 0$  et  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \infty$ ;
- une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de classe  $\mathcal{KL}$  si la fonction  $f(\cdot, t)$  à l'instant  $t$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  et si pour toute  $r$  fixe elle est décroissante à zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ ;
- $\mathcal{L}_\infty^E$  est l'ensemble de fonctions essentiellement bornées sur tout intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}^+$  dans un espace métrique  $E$ .

**Définition C.1.** [96] *Le système (C.1) est stable au sens entrée-état (ISS) par rapport à l'entrée  $u$  s'il existe une fonction  $\zeta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\varsigma$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que pour*

chaque  $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  et pour chaque entrée  $u \in \mathcal{L}_\infty^m$ , la solution  $x(t)$  existe pour  $t \geq 0$  et vérifie la condition

$$\|x(t)\| \leq \zeta(\|x_0\|, t - t_0) + \sup_{s \in [t_0, t]} \varsigma(\|u(s)\|) \quad (\text{C.2})$$

pour chaque  $t \geq 0$ .

Une fonction  $\varsigma$  satisfaisant une telle inégalité est appelée gain du système.

**Définition C.2.** [96] Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est appelée une fonction de Lyapunov ISS (ISS-Lyapunov Fonction) pour le système (C.1) s'il existe des fonctions  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telles que :

$$\alpha_1(\|x_0\|) \leq V(x_0) \leq \alpha_2(\|x_0\|) \quad (\text{C.3})$$

et

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial x} f(x_0, u) \leq -\alpha_3(\|x_0\|) + \alpha_4(\|u\|) \quad (\text{C.4})$$

A partir de l'équation (C.4), sur les trajectoires du système (C.1), l'inégalité suivant est accomplie :

$$\frac{V(x(t))}{dt} \leq -\alpha_3(\|x(t)\|) + \alpha_4(\|u(t)\|) \quad (\text{C.5})$$

Nous pouvons voir qu'il existe une analogie entre l'inégalité (C.4) et celle de l'équation (B.2). En termes de la théorie des systèmes dissipatifs (voir définition B.1), l'équation (C.4) représente une inégalité de dissipation, avec une fonction d'emménagement  $V$  et un taux d'énergie fournie  $w(u, x) = -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|u\|)$ .

**Théorème C.1.** [96] Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un système quelconque :

1. le système est stable 'entrée-état (ISS) ;
2. le système admet une fonction de Lyapunov ISS.

**Théorème C.2** (Théorème du Petit gain [50]). Considérons un système constitué de sous-systèmes reliés en "feedback" comme celui montré dans la figure C.1 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, d_{12}, d_{1d}) & d_{21} &= h(x_1, d_{12}, d_{1d}) \\ \dot{x}_2 &= f(x_2, d_{21}, d_{2d}) & d_{12} &= h(x_2, d_{21}, d_{2d}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où chaque sous-système est stable entrée-état de sorte que chaque sortie satisfait :

$$\begin{aligned} \|d_{12}\| &\leq \max \left\{ \zeta_2(\|x_2\|, t), \sup_{s \in [0, t]} \varsigma_{21}(\|d_{21}(s)\|), \sup_{s \in [0, t]} \varsigma_2(\|d_{2d}(s)\|) \right\} \\ \|d_{21}\| &\leq \max \left\{ \zeta_1(\|x_1\|, t), \sup_{s \in [0, t]} \varsigma_{12}(\|d_{12}(s)\|), \sup_{s \in [0, t]} \varsigma_1(\|d_{1d}(s)\|) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Si :

$$\varsigma_{12} \circ \varsigma_{21}(r) < r \quad \forall r > 0 \quad (\text{C.8})$$

le système d'états  $(x_1, x_2)$  et d'entrées  $(d_{1d}, d_{2d})$  est stable entrée-état.

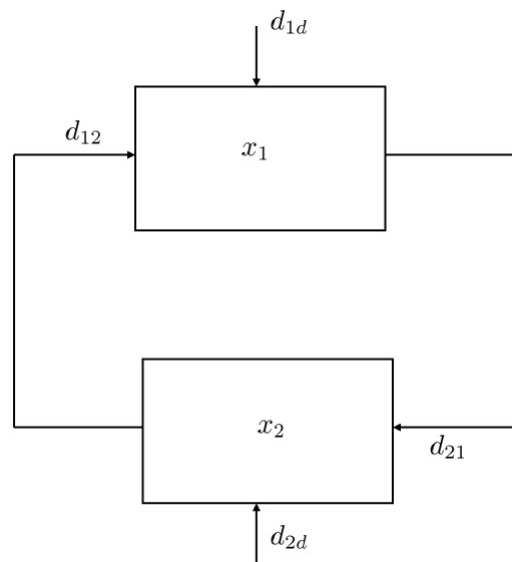


FIG. C.1 – Sous-systèmes (ISS) reliés en feedback.





## Annexe D

# Interface de l'observateur d'attitude en temps réel

Afin de faire une estimation de l'attitude, les neuf mesures (3 gyromètres, 3 magnétomètres et 3 accéléromètres) sont obtenues avec une fréquence d'échantillonnage de  $50\text{ Hz}$  ( $\Delta t = 0.02\text{ sec}$ ) à partir de la centrale Microstrain [74]. L'observateur a été codé en langage "C" et a été mis dans une DLL (Dynamic-Link Library). Cela permet l'utilisation de l'algorithme pendant une analyse hors-ligne ou pendant un traitement en temps réel en utilisant les plateformes MATLAB<sup>©</sup> Simulink<sup>©</sup> ou LabView<sup>©</sup>.

Les interfaces de l'algorithme en temps réel sur les plateformes MATLAB<sup>©</sup> Simulink<sup>©</sup> et LabView<sup>©</sup> sont montrées dans les figures suivantes.

## ANNEXE D. INTERFACE DE L'OBSERVATEUR D'ATTITUDE EN TEMPS RÉEL

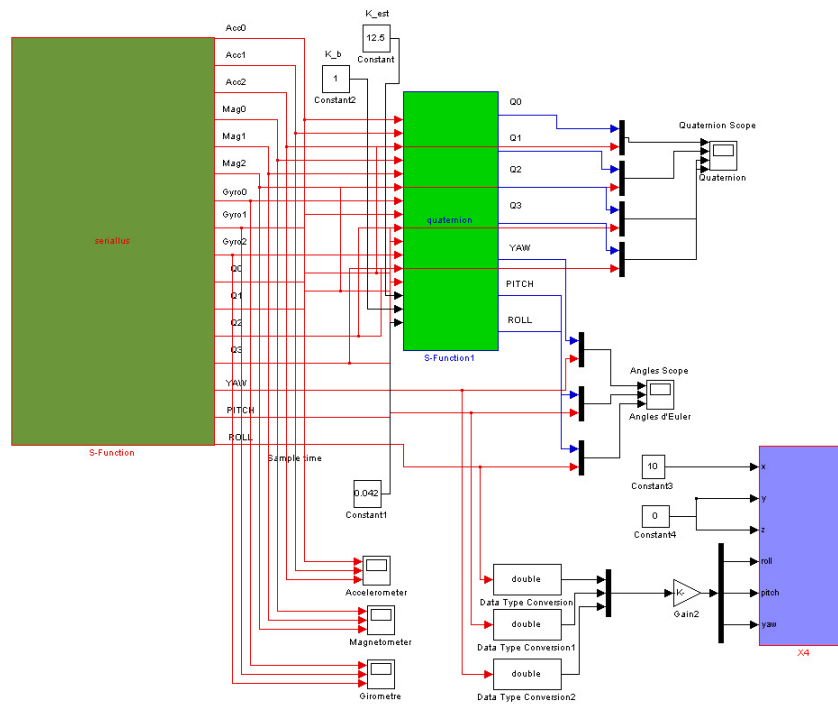


FIG. D.1 – Observateur non linéaire d'attitude sur Simulink

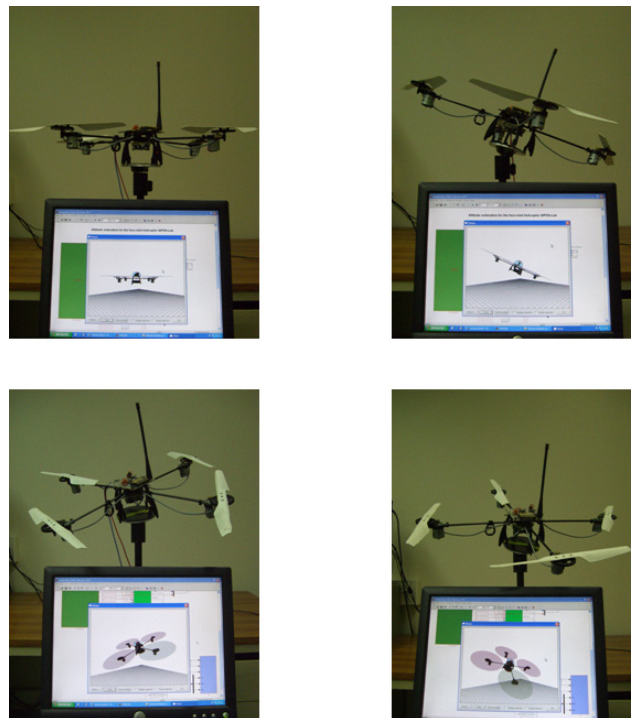


FIG. D.2 – Estimation en temps réel de l'attitude (Simulink et Virtual reality)

ANNEXE D. INTERFACE DE L'OBSERVATEUR D'ATTITUDE EN TEMPS RÉEL

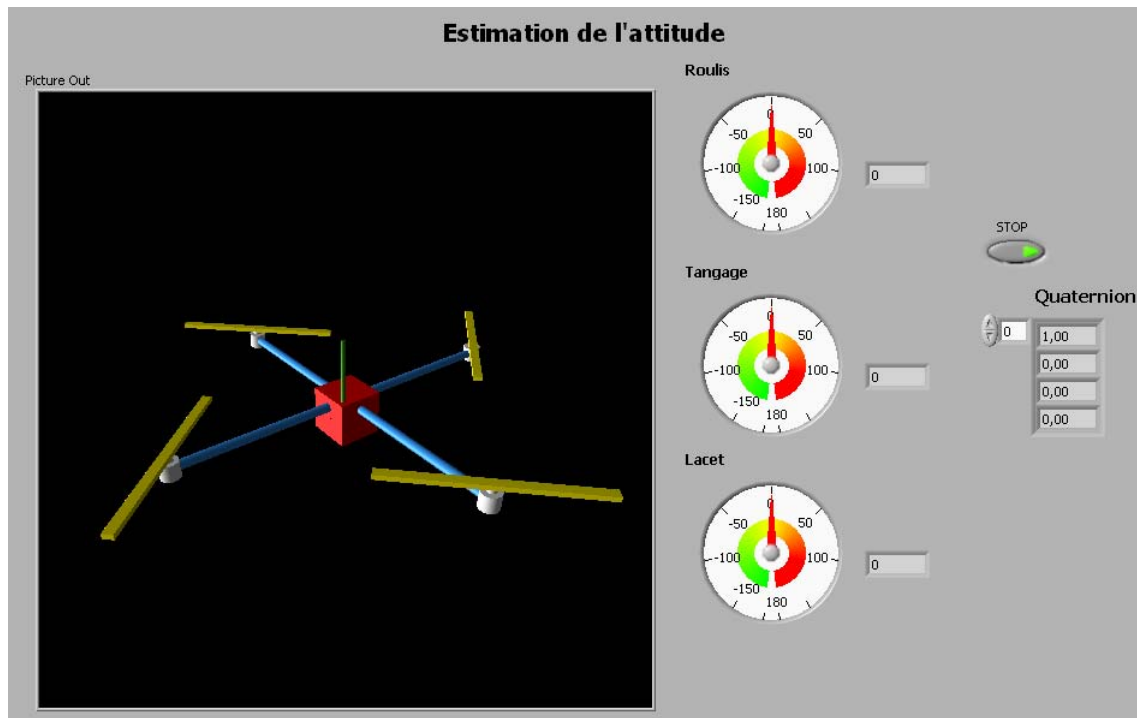


FIG. D.3 – Observateur non linéaire d'attitude sur LabView



# Bibliographie

- [1] E. ALTUĞ, J.P. OSTROWSKI, P. GARCÍA et R. MAHONY : Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2002.
- [2] K.J. ÅSTRÖM et B. WITTENMARK : *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1989.
- [3] ASTROSURF : <http://www.astrosurf.com/luxorion/terre-champ-magnetique2.htm>, Juillet 2007.
- [4] J. C. AVILA VILCHIS, B. BROGLIATO, A. DZUL et R. LOZANO : Nonlinear modelling and control of helicopters. *Automatica*, 39(9):1583–1596, 2003.
- [5] I.Y. BAR-IZTHACK, J. DEUTSCHMANN et F.L. MARKLEY : Quaternion normalization in additive EKF for spacecraft attitude estimation. *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 1991.
- [6] A. BARRAUD : *Outils d'analyse numérique pour l'automatique*. Lavoisier, 2002.
- [7] S. BEEBY, G. ENSELL, M. KRAFT et N. WHITE : *MEMS Mechanical Sensors*. Artech House, Inc., 2004.
- [8] C. BELTA : On controlling aircraft and underwater vehicles. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004.
- [9] C. BELTA, L. HABETS et V. KUMAR : Control of multi-affine systems on rectangles with applications to hybrid biomolecular networks. *In IEEE conference on Decision and Control*, 2002.
- [10] D.S. BERNSTEIN et A.N. MICHEL : A chronological bibliography on saturation actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5:375–380, 1995.
- [11] P.S. BHAT et D.S. BERNSTEIN : A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *Systems & Control Letters*, 39(1):63–70, 2000.
- [12] J.D. BOSKOVIC, S.-M. LI et R.K. MEHRA : Robust stabilization of spacecraft in the presence of control input saturation using sliding mode control. *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 1999.

- [13] S. BOUABDALLAH, P. MURRIERI et R. SIEGWART : Design and control of an indoor micro quadrotor. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004.
- [14] S. BOUABDALLAH, A. NOTH et R. SIEGWART : PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *In IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2004.
- [15] S. BOUABDALLAH et R. SIEGWART : Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005.
- [16] BOUTIQUE AVION : <http://www.opaleaero.com>, Mai 2007.
- [17] R.W. BROCKETT, R.S. MILLMAN et H.S. SUSMANN : Asymptotique stability and feedback stabilization. *In Differential Geometric Control Theory*, 1983.
- [18] R.G. BROWN et P.Y.C HWANG : *Introduction to Random Signal and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, New Work, 1997.
- [19] CADDEN : <http://www.cadden.fr>, Mai 2007.
- [20] P. CASTILLO : *Modélisation et commande d'un mini hélicoptère à quatre rotors*. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France, 2004.
- [21] P. CASTILLO, P. ALBERTOS, P. GARCÍA et R. LOZANO : Simple real-time attitude stabilisation of a quad-rotor aircraft with bounded signals. *In IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [22] P. CASTILLO, A. DZUL et R. LOZANO : Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE transactions on Control Sytems Technology*, 12(4):510–516, 2004.
- [23] Y. CHENG et J.L. CRASSIDIS : Particle filter for sequential spacecraft attitude estimation. *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2004.
- [24] J.C.K CHOU et M. KAMEL : Quaternion approach to solve the kinematic equation of rotation,  $A_a A_x = A_z A_b$  of a sensor-mounted robotic manipulator. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1988.
- [25] D. CHOUKROUN : *Novel methods for attitude determination using vector observations*. Thèse de doctorat, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 2003.
- [26] A. CHRITTE, T. HAMEL et R. MAHONY : Zero dynamics analysis for IBVS control of under actuated rigid body dynamics. *In 7th International IFAC Symposium on Robot Control*, 2003.
- [27] J.L. CRASSIDIS et F.L. MARKLEY : Unscented filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(4):536–542, 2003.

- [28] CROSSBOW TECHNOLOGY : <http://www.xbow.com/>, Mai 2007.
- [29] DRANGANFLY INNOVATION INC : <http://www.rctoys.com>, Mai 2007.
- [30] A. DZUL, T. HAMEL et R. LOZANO : Modélisation et commande non linéaire pour un hélicoptère bi-rotor co-axial. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 37(10): 1277–1295, 2003.
- [31] M. G. EARL et R. D’ANDREA : Real-time attitude estimation techniques applied to a four rotor helicopter. *In IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.
- [32] O. EGELAND et J.-M. GODHAVN : Passivity-based adaptive attitude control of a rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):842–846, 1994.
- [33] G. FAY : Derivation of the aerodynamic forces for the mesicopter simulation. Rapport technique, Stanford University, USA, 2001.
- [34] O. FJELLSTAD et T.I. FOSSEN : Quaternion feedback regulation of underwater vehicles. *In IEEE Conference on Control Application*, 1994.
- [35] T.I. FOSSEN : *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. John Wiley & Sons, New Work, 1994.
- [36] E. FOXLIN : Inertial head-tracker sensor fusion by a complementary separate-bias kalman filter. *In Virtual Reality Annual International Symposium, VRAIS’96*, 1996.
- [37] J.P. GAUTHIER et G. BORNARD : Commande multivariable en présence de contraintes de types inégalité. *R.A.I.R.O Automatique/System Analysis and Control*, 17(3):205–222, 1983.
- [38] A. GNING, F. ABDALLAH et Ph. BONNIFAIT : A new estimation method for multi-sensor fusion by using interval analysis and particle filtering. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007.
- [39] A. GNING et Ph. BONNIFAIT : Constraints propagation techniques on intervals for a guaranteed localization using redundant data. *Automatica*, 42(7):1167–1175, 2006.
- [40] G.C. GOODWIN et K.S. SIN : *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [41] F. GROGNARD, R. SEPULCHRE et G. BASTIN : Improving the performance of low-gain designs for bounded control of linear systems. *Automatica*, 38(10):1777–1782, 2002.
- [42] N. GUÉNARD, T. HAMEL et V. MOREAU : Dynamic modelling and remote control design for un x4-flyer. *In IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA’05*, 2005.
- [43] W. HAHN : *Sability of motion*. Springer Verlag, New Work-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, 1967.

- [44] T. HAMEL et R. MAHONY : Visual servoing of an under-actuated rigid body system : An image based approach. *IEEE Transactions on Robotic and Automation*, 18(2):187–198, 2002.
- [45] T. HAMEL, R. MAHONY, R. LOZANO et J.P. OSTROWSKI : Dynamical modelling and configuration stabilization for an X4-Flyer. *In 15th Triennial World Congress, IFAC 2002*, 2002.
- [46] O. HEGRENAS, J.T. GRAVDAHL et P. TONDEL : Attitude control by means of explicit model predictive control, via multi-parametric quadratic programming. *In American Control Conference*, 2005.
- [47] J. N. HIGHAM : *Accurancy and Stability of Numerical Algorithms*. Siam, 1996.
- [48] J. D. HOL, T. B. SCHÖN, F. GUSTAFSSON et P. J. SLYCKE : Sensor fusion for augmented reality. *In The 9th International Conference on Information Fusion*, 2006.
- [49] INSTRUMENTATION AVIONICS : <http://stratomaster.eu>, Mai 2007.
- [50] Z.-P JIANG, A. TEEL et P. PRAILY : Small-gain theorems for iss systems and applications. *Math of Control, Signal and systems*, 7:104–130, 1994.
- [51] E.N. JOHNSON et S.K. KANNAN : Nested saturation with guaranteed real poles. *In American Control Conferenece*, 2003.
- [52] S.M. JOSHI, A.G. KELKAR et J.T. WEN : Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10):1800–1803, 1995.
- [53] H.K. KHALIL : *Nonlinear systems*. Prentcie Hall, Inc, 1996.
- [54] K. KONDAK, B. MARKUS, N. MEYER et G. HOMMEL : Autonomously flying VTOL-robots : Modeling and control. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007.
- [55] R. KRISTIENSEN et P. J. NICKLASSON : Satellite attitude control by quaternion-based backstepping. *In American Control Conference*, 2005.
- [56] M. KRSTIĆ et P. TSIOTRAS : Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1042–1049, 1999.
- [57] E.J. LEFFERTS, F.L. MARKLEY et M.D. SHUSTER : Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 5(5):417–429, 1982.
- [58] F. LEWIS et V. SYROM : *Optimal Control*. John WileySons Inc., 1995.
- [59] R.F. LEWIS, G. WANSONG, M. RAMSEY, L. MINOR, R. BOYLE et D.M. MERFELD : Vestibular adaptation studied with a prosthetic semicircular canal. *Journal of Vestibular Research*, 12:87–94, 2002/2003.



- [60] Z. LIN : Global control of linear systems with saturating actuators. *Automatica*, 34(7):897–905, 1998.
- [61] J. LIU, A.M. SHKEL, K. NIE et F.G. ZENG : System design and experimental evaluation of a MEMS-based semicircular canal prosthesis. In *IEEE EMBS Conference on Neural Engineering*, pages 177–180, 2003.
- [62] R. LOZANO, B. BROGLIATO, O. EGELAND et B. MASCHKE : *Dissipative Systems Analysis and Control. Theory and Applications*. Springer Verlag, CCE Series, London, 2000.
- [63] H.J. LURING et P.H. VELTINK : Measuring orientation of human body segments using gyroscopes and accelerometers. *Medical and Biological Engineering Computing*, 43:273–281, 2005.
- [64] R. MAHONY et T. HAMEL : Adaptive compensation of aerodynamic effects during takeoff and landing manouvres for scale model autonomous helicopter. *European Journal of Control*, 7(1):43–58, 2001.
- [65] R. MAHONY, T. HAMEL et J.M. PFLIMLIN : Complementary filter design on the special orthogonal group  $SO(3)$ . In *IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, 2005.
- [66] N. MARCHAND : Further results on global stabilization for multiples integrators with bounded controls. In *IEEE conference on Decision and Control, CDC'03*, 2003.
- [67] N. MARCHAND et A. HABLY : Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41(12):2147–2152, 2005.
- [68] J. MARINS, X. YUN, E. BACHMANN et M.J.Zyda MCGHEE, R.B. : An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors. In *IEEE Int. Conference on Itelligents Robots and Systems*, 2001.
- [69] F.L. MARKLEY : Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition. *Journal of Astronautical Sciences*, 38(3):245–258, 1988.
- [70] F.L. MARKLEY : Attitude determination using vector observations : Theory. *Journal of the Astronautical Sciences*, 37(1):41–58, 1989.
- [71] F.L. MARKLEY : Attitude error representations for kalman filtering. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 63(2):311–317, 2003.
- [72] F.L. MARKLEY, J.L CRASSIDIS et Y. CHENG : Nonlinear attitude filtering methods. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2005.
- [73] A. MEGRETSKI : L2 BIBO output feedback stabilization with saturated control. In *13th IFAC World Congress, San Francisco, vol. D, pp. 435-440, 1996.*, 1996.

- [74] MICROSTRAIN MICROMINUATURE SENSORS : <http://www.microstrain.com>, Mai 2007.
- [75] D. MORTARI : A closed-form solution to the Wahba problem. *Journal of the Astronautical Sciences*, 45(2):195–204, 1997.
- [76] D. MORTARI : Second estimator of the optimal quaternion. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(5):885–887, 2000.
- [77] MOTION CAPTURE SYSTEM : <http://www.vicon.com>, Mai 2007.
- [78] M. OSIPCHUCK, K.D. BHARADWAJ et K.D. MEASE : Achieving good performance in global attitude stabilization. *In American Control Conference*, 1997.
- [79] J.M. PFLIMLIN, T. HAMEL et P. SOUÈRES : A nonlinear observer on  $SO(3)$  group for attitude and gyro bias estimation for a flying UAV. *In IFAC World Congress*, 2005.
- [80] J.M. PFLIMLIN, P. SOUÈRES et T. HAMEL : Hovering flight stabilization of a ducted fan VTOL UAV in crosswind. *International Journal of Control*, 80(5):666–683, 2007.
- [81] P. POUNDS, R. MAHONY et J. GRESHAM : Towards dynamically-favourable quad-rotor aerial robots. *In Australian Conference on Robotics and Automation*, 2004.
- [82] P. POUNDS, R. MAHONY, P. HYNES et J. ROBERTS : Design of a four-rotor aerial robot. *In Australian Conference on Robotics and Automation*, 2002.
- [83] R.W. PROUTY : *Helicopter Performance, Stability and Control*. Krieger Publishing Company, 1995.
- [84] H. REHBINDER et B.K. GHOSH : Pose estimation using line-based dynamic vision and inertial sensors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2):186–198, 2003.
- [85] S.I. ROUMELIOTIS, G.S. SUKHATME et G.A. BEKEY : Smoother based 3d attitude estimation for mobile robot localization. *In IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA '99*, 1999.
- [86] S. SALCUDEAN : A globally convergent velocity observer for rigid body motion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(12):1493–1497, 1991.
- [87] B.B. SALMERON-QUIROZ : *Fusion de Données multi-capteurs pour la capture de mouvement*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2007.
- [88] B.B. SALMERON-QUIROZ, J.F. GUERRERO-CASTELLANOS, S. LESECQ et N. MARCHAND : Towards human capture movement. *In Congreso de la Asociación Mexicana de Control Automático, AMCA '07*, 2007.
- [89] S.L. SCRIVENER et R.C. THOMPSON : Survey of time-optimal attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17(2):225–233, 1994.
- [90] H. SHIM, J.H. SEO et A.R. TEEL : Nonlinear observer design via passivation of error dynamics. *Automatica*, 39:885–892, 2003.

- [91] M.D. SHUSTER : A survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41(4):439–517, 1993.
- [92] M.D. SHUSTER et S.D. OH : Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 4(1):70–77, 1981.
- [93] S.N. SINGH et W. YIM : Nonlinear adaptive backstepping design for spacecraft attitude control using solar radiation pressure. *In IEEE conference on Decision and Control*, 2002.
- [94] C SONG, S.-J. KIM, S.-H. KIM et H.S. NAM : Robust control of the missile attitude based on quaternion feedback. *Control Engineering Practice*, 14:811–818, 2005.
- [95] E.D. SONTAG : Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4):435–443, 1989.
- [96] E.D. SONTAG et Y. WANG : On characterization of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24:351–359, 1995.
- [97] G.W. STEWART : *Introduction to Matrix Computations*. Computer Science and Applied Mathematics, 1973.
- [98] H.J. SUSSMANN, E.D. SONTAG et Y. YANG : A general result on the stabilization on linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2411–2424, 1994.
- [99] S. TARBOURIECH, C. PRIEUR et J.M. Gomes da SILVA JR. : Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8):1364–1371, 2006.
- [100] A. TAYEBI et S. MCGLIVARY : Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):562–571, 2006.
- [101] A.R. TEEL : Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18:165–171, 1992.
- [102] THE OPTOTRAK CERTUS MOTION CAPTURE SYSTEM : <http://www.ndigital.com/research/certus.php>, Mai 2007.
- [103] J. THIENEL et R.M. SANNER : A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11):2011–2014, 2003.
- [104] P. TSIOTRAS : New control laws for the attitude stabilization of rigid bodies. *In 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, 1994.
- [105] P. TSIOTRAS et J. LUO : Control of underactuated spacecraft with bounded inputs. *Automatica*, 36(8):1153–1169, 2000.

- [106] V.I. UTKIN : *Sliding Mode Control in electromechanical systems*. London ;Philadelphia, PA : Taylor & Francis, 1999.
- [107] B. VIK et T.I. FOSSEN : An nonlinear observer for GPS and INS integration. *In IEEE Conference on Decision and Control*, 2001.
- [108] III. WALL, C., M.S. WEINBERG, P.B. SCHMIDT et D.E. KREBS : Balance prosthesis based on micromechanical sensors using vibrotactil feedback of tilt. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 29(4):321–331, 1991.
- [109] G. WANSONG et D.M. MERFELD : Prototype neural semicircular canal prosthesis using patterned electrical stimulation. *Annals of Biomedical Engineering*, 28:572–581, 2000.
- [110] WASTON INDUSTRIES : <http://www.watson-gyro.com>, Mai 2007.
- [111] J.T. WEN et K. KREUTZ-DELGADO : The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1148–1162, 1991.
- [112] J.T. WEN, S. SEEREERAM et D.S. BAYARD : Nonlinear predictive control applied to spacecraft attitude control. *In American Control Conference*, 1997.
- [113] G. WHABA : A least squares estimate of spacecraft attitude. *SIAM Review*, 7(3):409, 1965.
- [114] B. WIE, H. WEISS et A. ARAPOSTATHIS : Quaternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 12(3):375–380, 1989.
- [115] XSSENS MOTION TECHNOOGIES : <http://www.xsens.com>, Mai 2007.

**Résumé :**

Ce travail de thèse porte sur l'estimation de l'attitude et la commande bornée en attitude d'un corps rigide. L'application « mini hélicoptère à quatre rotors » a été le support pour analyser les apports de nos approches. La première partie de cette thèse est consacrée à la description et la modélisation de l'hélicoptère à quatre rotors. Dans la deuxième partie, nous abordons le problème de l'estimation de l'attitude d'un corps rigide doté d'un ensemble de capteurs GAM (gyromètres, accéléromètres et magnétomètres). Nous proposons un observateur non linéaire afin de fusionner les différents types de mesures. Nous montrons que la dynamique de l'erreur d'observation peut se décomposer en deux sous-systèmes passifs reliés en « feedback ». Cette propriété est utilisée pour montrer que la dynamique de l'erreur d'observation est stable au sens Entrée-Etat (ISS) en considérant une perturbation comme l'entrée et l'erreur d'attitude comme l'état. Une validation avec des données simulées et une implantation en temps réel montrent la capacité et les performances de l'approche proposée. Dans la dernière partie de ce travail, nous établissons une loi de commande bornée pour la stabilisation globale en attitude d'un corps rigide. Dans le schéma proposé, l'attitude est paramétrisée par le quaternion et la loi de commande est basée sur des fonctions de saturation imbriquées. La loi de commande permet de respecter des contraintes liées à la vitesse angulaire. De plus, la stabilité du système en boucle fermée est indépendante des paramètres inertiels du système. La caractéristique principale de l'approche proposée est son extrême simplicité qui autorise son implantation sur des systèmes embarqués où les capacités de calcul sont réduites. Ce résultat est ensuite étendu du corps rigide à l'hélicoptère à quatre rotors. Finalement, la loi de commande et l'observateur non linéaire sont implantés en temps réel et la stabilisation en attitude de l'hélicoptère est réalisée.

**Mots clefs :** attitude, hélicoptère à quatre rotors, observation non linéaire, SVD, projection, passivité, stabilité ISS, capteurs MEMS, commande non linéaire, fonctions de saturation imbriquées.

---

**Attitude estimation and bounded attitude control of a rigid body: application on four-rotor helicopter**

---

**Abstract :**

This PhD. thesis deals with the attitude estimation and the bounded attitude stabilisation of a rigid body. The application to the four-rotor helicopter was the support to analyze the contributions of our approaches. The first part of this work is devoted to the description and the modelling of the four-rotor helicopter. The second part of this report deals with the problem of attitude estimation of a rigid body equipped with a group of GAM sensors (rate gyros, accelerometers and magnetometers). A nonlinear observer is proposed in order to fuse all the information sources. It is shown then that the error dynamics can be broken up into two passive subsystems connected in "feedback". This property is used to show that the error dynamics is input-to-state stable (ISS) when the measurement disturbance is considered as the input and the error state as the state. The stability, convergence and robustness are confirmed in simulation and in a real-time application. The last part of this work presents the global stabilization of a rigid body by means of a bounded quaternion-based feedback control. In addition to input bounds, the nonlinear control takes into account the slew rate limits. The proposed control scheme is generic and can be applied to all systems falling in the framework of rigid bodies. Furthermore, its extreme simplicity is particularly suitable for embedded implementation. Because the control law is model-independent, it is robust towards inertial matrix uncertainty. It is also shown that the control strategy can be applied to attitude stabilization of a four-rotor mini-helicopter despite gyroscopic effects that are not present in the rigid body framework. Several real-time experiments have been performed on a real mini-helicopter in order to show the effectiveness of the proposed control approach together with the proposed non linear observer.

**Key words:** attitude, four-rotor helicopter, nonlinear observers, SVD, projection, passivity, stability ISS, sensors MEMS, nonlinear control, saturation functions, embedded saturation functions.