



HAL
open science

Analyse structurelle de la localisation et de la classification de capteurs

Do Hieu Trinh

► **To cite this version:**

Do Hieu Trinh. Analyse structurelle de la localisation et de la classification de capteurs. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT: . tel-00370272

HAL Id: tel-00370272

<https://theses.hal.science/tel-00370272v1>

Submitted on 24 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'Institut Polytechnique de Grenoble

***Spécialité* : AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE**

préparée au Département Automatique de GIPSA-Lab Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale :

Électronique, Électrotechnique, Automatique, Traitement du Signal

présentée et soutenue publiquement

par

Do Hieu TRINH

le 27 Octobre 2008

TITRE :

**ANALYSE STRUCTURELLE DE LA LOCALISATION
ET DE LA CLASSIFICATION DE CAPTEURS**

DIRECTEURS DE THÈSE :

M. Jean-Michel DION	Directeur de Recherche CNRS
M. Christian COMMAULT	Professeur à l'INPG

JURY :

M. Marcel STAROSWIECKI	Président
M. Taha BOUKHOBZA	Rapporteur
M. Jean-Jacques LOISEAU	Rapporteur
M. Jean-Michel DION	Co-directeur de thèse
M. Christian COMMAULT	Co-directeur de thèse
M. András SEBÖ	Examineur

Table des matières

1	INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
2	Formulation des problèmes	7
2.1	Systèmes dynamiques et propriétés	8
2.2	Placement des capteurs pour obtenir des propriétés spécifiques	9
2.2.1	Introduction	9
2.2.2	Les problèmes traités	10
2.3	Classification des capteurs pour conserver des propriétés	11
2.3.1	Introduction	11
2.3.2	Les problèmes traités	14
2.4	Illustration	14
2.4.1	Problème de l'observabilité	14
2.4.2	Problème de rejet de perturbation par retour de mesure	17
2.5	Conclusion	18
3	Systèmes Linéaires Structurés	21
3.1	Introduction	22
3.2	Système Linéaire Structuré	23
3.2.1	Motivation	23
3.2.2	Définition des systèmes linéaires structurés	26
3.2.3	Système linéaire admissible	27
3.3	Propriétés génériques	28
3.3.1	Rang générique d'une matrice structurée	29
3.4	Graphe associé	29
3.4.1	Graphe orienté	29
3.4.2	Graphe d'un système linéaire structuré	31
3.4.3	Exemple	32
3.5	Illustration sur quelques propriétés	33
3.5.1	Rang générique	33
3.5.2	La commandabilité générique	34
3.6	Conclusion	38

4	L'observabilité des systèmes linéaires structurés	39
4.1	Formulation du problème	40
4.1.1	Observabilité générique	40
4.1.2	Placement des capteurs pour l'observabilité	41
4.1.3	Classification des capteurs pour l'observabilité	41
4.2	Les conditions graphiques de l'observabilité générique	42
4.2.1	Exemple	43
4.3	La connexion à la sortie	44
4.3.1	Décomposition du graphe associé	44
4.3.2	Graphe de connexion	47
4.3.3	Placement des capteurs pour la connexion à la sortie	50
4.3.4	Préservation de la connexion à la sortie en présence de défauts de capteurs	52
4.4	L'absence de contraction	56
4.4.1	Caractérisation de la contraction	56
4.4.2	Placement des capteurs pour l'annulation de contraction	61
4.4.3	Absence de contraction	63
4.4.4	Exemple	66
4.5	Placement des capteurs pour l'observabilité	67
4.5.1	Placement des capteurs	67
4.6	Classification des capteurs pour la préservation de l'observabilité	72
4.6.1	Classification des capteurs	72
4.6.2	Analyse de la complexité	73
4.7	Conclusion	74
5	Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés	77
5.1	Formulation du problème	78
5.2	Problème du rejet de perturbation	79
5.2.1	Rejet de perturbation par retour d'état	79
5.2.2	Rejet de perturbation par retour de mesure	86
5.2.3	Exemple	89
5.3	Mesures inutiles pour le problème RPRM	90
5.3.1	Préliminaires	90
5.3.2	Ensemble de mesures inutiles	92
5.3.3	Exemple	93
5.4	Le cas perturbation unique	93
5.4.1	Préliminaires	94
5.4.2	La classification des capteurs	96
5.4.3	Exemple	98
5.4.4	Analyse de la complexité	99

5.5	Exemple illustratif	100
5.5.1	Le système à 5 bacs	100
5.5.2	Conditions géométriques pour la solubilité de problème du rejet de perturbation	102
5.5.3	Conditions graphiques pour la solubilité de problème du rejet de perturbation	104
5.5.4	Classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation	104
5.5.5	Calcul d'un retour d'état pour le problème du rejet de perturbation	105
5.5.6	Calcul d'un retour de mesure pour le problème du rejet de perturbation	107
5.5.7	Résultats de simulation	109
5.6	Le cas général du rejet de perturbation	112
5.6.1	Les disques mutuellement disjoints	112
5.6.2	Les disques ne sont pas mutuellement disjoints	116
5.7	Conclusion	120
6	CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	121
	Bibliographie	127
	Algorithme de DM-Décomposition	135

Remerciements

Le travail dans ce mémoire a été réalisé au GIPSA - Lab (UMR 5216) au sein du Département Automatique - (anciennement Laboratoire d'Automatique de Grenoble - LAG) sous la direction conjointe de Monsieur Jean-Michel DION, Directeur de recherches au CNRS et Monsieur Christian COMMAULT, Professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble (INPG). Je tiens à les remercier de m'avoir fait confiance et de m'avoir permis de suivre ce thème de recherche très intéressant. Je me rappelle bien, un jour de printemps 2003, j'ai reçu la lettre d'acceptation pour faire un DEA à Grenoble. La lettre a été signée par Monsieur Christian COMMAULT, en tant que Responsable de la formation Automatique - Productique de l'école doctorale EEATS. À partir de ce jour là, tout commence. Je n'oublie pas que Monsieur Christian COMMAULT m'a gentiment envoyé le photocopié de son cours "Systèmes à événements discrets" suite à ma demande. Je n'oublie pas non plus le moment où Monsieur Jean-Michel DION et Monsieur Christian COMMAULT m'ont accepté pour faire le stage sur les systèmes linéaires structurés. À l'époque, je ne connaissais pas grand chose, à part des notions de base de la théories des graphes. C'était avant Noël 2003 et ce fait a marqué une longue période très agréable. Ce n'est que le début de l'histoire. Je leur dois beaucoup plus qu'ils ne le pensent. Je tiens à les remercier aussi pour leur rigueur scientifique et leur généreuse disponibilité tout au long de mes études. Merci à tous les deux.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury :

- Monsieur Marcel STAROSWIECKI, Professeur à École Polytechnique Universitaire de Lille - Université Lille 1 qui a accepté de présider le jury de ma thèse.
- Monsieur Taha BOUKHOBZA, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré de Nancy et Monsieur Jean-Jacques LOISEAU, Directeur de Recherches CNRS à l'Institut de Recherche en Communications et en Cybernétique de Nantes (IRCCyN) qui ont accepté de rapporter sur ce travail. Je les remercie chaleureusement pour le temps précieux qu'ils ont consacré à cette tâche malgré leurs agendas chargés, également pour leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la forme définitive du rapport.
- Monsieur András SEBŐ, Directeur de Recherches CNRS au Laboratoire des Sciences pour la Conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble - G-SCOP qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail.

J'adresse également mes remerciement à tous les membres de l'équipe administrative et technique du Gipsa-Lab, et plus particulièrement à Marie-Thérèse, Patricia, Marie-Rose, Virginie, Daniel, Olivier... Je leur suis très reconnaissant pour leur gentillesse et leur

serviabilité.

Un grand merci à tous mes professeurs, bien nombreux pour que je puisse les citer tous.

Une pensée toute spéciale va à mes collègues de bureau, à David - le campeur à l'INRIA, Sameh - le gentil démineur, Hala - la réceptionniste, Hieu - le tout frais, sans oublier l'éternel fêtard (ce qu'on me raconte) Zin qu'il m'a fait hériter son bureau et d'un fauteuil confortable. La pensée va aussi à des collègues du labo, Hai Binh, Hoa Binh, Long, Khanh, Toan, Van, Khoat, Fermi, Cédric, Shi, Charles, Sylvain, ... et beaucoup d'autres.

Un remerciement tout spécial pour Sameh, avec qui j'ai partagé tant de choses, du parcours d'études (Master, Thèse) au parcours de combattant pour se loger (Condillac, Ouest). J'ai failli prendre un studio pour la 4ème année consécutive dans la même résidence que toi.

Je voudrais remercier également mon voisin Adib pour l'exercice physique qu'il m'a proposé régulièrement en me demandant de rentrer le soir à pied.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu, à toute ma famille, à mes amis, à toi, la brave fille qui a suivi pas à pas l'avance de ma thèse et a toujours su me motiver.

Chapitre 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Depuis un certain temps, les systèmes automatisés se sont développés et sont devenus de plus en plus complexes pour répondre aux besoins de la société moderne : plus économiques, plus écologiques, meilleure qualité des produits, meilleures performances,... L'augmentation de la complexité des systèmes automatisés entraîne l'utilisation de capteurs de plus en plus nombreux.

Un capteur est un dispositif qui a pour fonction essentielle de transformer une grandeur physique mesurée en une autre grandeur physique utilisable, soit par l'homme directement soit par d'autres instruments. Il existe de nombreux types de capteurs pour différentes grandeurs physiques : distance, temps, vitesse, force, lumière, son, pression, débit, courant, température,... (voir Fraden [2004]).

Les capteurs jouent un rôle très important dans la commande d'un système automatisé. Tout d'abord, ils sont utilisés pour la synthèse des lois de commande garantissant des performances souhaitées. Les capteurs sont souvent indispensables pour garantir des propriétés du système, par exemple l'observabilité ou pour le problème de détection de défauts.

Les capteurs sont souvent coûteux, leur emplacement sur un système parfois très limité, leur maintenance difficile,... il est donc important de savoir utiliser de manière optimale les capteurs d'un système. Pour des raisons de fiabilité et de sûreté, on cherche à garantir le fonctionnement du système en cas de panne de certains capteurs.

Les systèmes automatisés, en particulier les systèmes physiques sont souvent représentés par des modèles d'état dont les paramètres associées sont en général connus avec une certaine imprécision. Les incertitudes sur les paramètres d'un modèle peuvent être liées à des erreurs d'identification, à des erreurs de mesure ou encore à des changements de comportement du système. Ces paramètres peuvent dépendre du point de fonctionnement du système. Seulement une partie de ces paramètres est connue avec exactitude, en particulier les paramètres qui valent zéro. Les paramètres du système sont donc soit nuls soit libres mais les positions des paramètres nuls et non nuls dans les matrices sont connues. Les systèmes représentés de cette façon sont appelés *systèmes structurés*, ils sont une classe de systèmes dépendant de paramètres : ils sont caractérisés par les positions connues des paramètres libres. Pour de tels systèmes, on étudie des propriétés dites "*génériques*" (ou "*structurelles*"). Ces propriétés sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres. De cette manière, C.T. Lin [Lin, 1974] a abordé la commandabilité des systèmes linéaires mono-entrée.

Un graphe orienté peut être associé intuitivement à un système structuré : chaque variable du système est représentée par un sommet et chaque relation non nulle entre deux variables est représentée par un arc reliant les deux sommets associés à ces deux variables. Il s'avère que le graphe est un outil très efficace pour analyser les propriétés génériques des systèmes considérés. Lin [1974] a montré que la condition générique de commandabilité s'interprétait graphiquement en termes de chemins et de cycles qui recouvrent tous les sommets d'état du graphe associé. Les caractérisations graphiques des propriétés sont aussi intéressantes du point de vue pédagogique, parce qu'elles nous permettent de visualiser clairement certaines propriétés sur des systèmes de taille raisonnable.

Cette caractérisation de la commandabilité des systèmes linéaires mono-entrée a été généralisée aux systèmes structurés multi-entrées par Shields and Pearson [1976] ; Glover and Silverman [1976]. En dualisant les conditions de commandabilité structurelle, nous obtenons les conditions d'observabilité générique pour des systèmes linéaires structurés.

Comme dit un proverbe tibétain : “Si un problème a une solution, alors il est inutile de s'inquiéter ; s'il n'en a pas, s'inquiéter n'y changera rien”, au cours de cette thèse, certains problèmes de la théorie de la commande ont été posés en espérant trouver des solutions. Naturellement, les solutions ne viennent pas par miracle mais il faut aller les chercher. Parmi ces problèmes, certains ont été résolus de manière concrète, d'autres avec des solutions plus ou moins faciles à mettre en oeuvre. Il reste encore des problèmes ouverts pour lesquels des pistes de réflexion sont proposées.

Dans ce travail on s'est intéressé à la résolution générique de problèmes liés à l'observation de variables internes du système et à la dépendance entre ces propriétés et la structure du système. Plus précisément, nous nous intéressons aux propriétés qui dépendent de l'ensemble des capteurs du système. L'analyse de cette dépendance conduit à l'étude de deux problèmes :

- L'ajout et le placement des capteurs pour rendre les propriétés vraies.
- La classification des capteurs en fonction de leur importance pour satisfaire les propriétés demandées du système.

On considérera tout d'abord l'observabilité des systèmes linéaires structurés en utilisant des critères graphiques. Ensuite, nous étudierons le placement des capteurs supplémentaires pour rendre observable un système non observable. Pour un système observable, nous classerons ensuite les capteurs en fonction de leur importance pour satisfaire l'observabilité.

Chapitre 1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans une deuxième partie de la thèse, on considérera le problème du rejet de perturbation par retour de mesure. Ce problème consiste à chercher un retour de mesure qui rende la sortie à réguler insensible à la perturbation. Comme la solubilité de ce problème dépend de l'ensemble de capteurs du système, nous essayerons de donner une classification des capteurs, en particulier ceux qui sont inutiles pour résoudre le problème.

Ce mémoire est organisé en quatre parties :

- Le premier chapitre est consacré à la formulation de deux problèmes, le placement des capteurs et la classification des capteurs. Nous commencerons par le problème de placement des capteurs : étant donné un système et une propriété qui dépend des capteurs, si la propriété n'est pas vérifiée, comment peut-on la rendre vraie en ajoutant des capteurs supplémentaires? Ensuite, nous aborderons la classification des capteurs pour différentes propriétés du système. Étant donné une propriété vraie, cette classification consiste à déterminer les capteurs essentiels, qui sont "vitaux" pour la propriété ainsi que les capteurs inutiles que ne jouent aucun rôle pour la propriété. Nous illustrerons ces deux problèmes sur quelques exemples à la fin du chapitre.
- Le deuxième chapitre est une introduction aux systèmes linéaires structurés. Après la motivation de ce type de représentation des systèmes à travers l'analyse d'une colonne à distiller, nous parlerons des propriétés génériques et du graphe associé à ces systèmes. Ceux-ci permettront d'illustrer comment on peut vérifier des propriétés du système sur le graphe associé.
- Le troisième chapitre s'intéresse à l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires structurés. En dualisant le résultat sur la commandabilité générique, il s'avère que le système est génériquement observable si et seulement s'il est connecté à la sortie et il ne contient pas de contraction. Nous ramènerons la caractérisation de la connexion à la sortie sur un graphe réduit nommé "graphe de connexion", qui sera construit à partir du graphe associé. Grâce au graphe de connexion, nous trouverons les éléments qui ne sont pas connectés à la sortie et dans ce cas, nous proposerons le nombre de mesures nécessaires et leurs emplacements pour que le système soit connecté à la sortie. Si le système est connecté à la sortie, nous donnerons une classification des capteurs pour cette propriété du système, grâce au graphe de connexion.

Pour la contraction, nous allons utiliser deux outils existants de la théorie des graphes : le graphe biparti associé à ce système et la DM-Décomposition effectuée sur le graphe biparti. La DM-Décomposition nous donnera une caractérisation de la contraction.

Grâce à des propriétés de la DM-Décomposition, nous donnerons le nombre de mesures nécessaires et leurs emplacements pour que la contraction disparaisse. Si le système ne contient pas de contraction, grâce à des propriétés de la DM-Décomposition et à l'étude des couplages maximums sur le graphe biparti, nous donnerons une classification des capteurs pour l'absence de contraction.

En combinant les analyses ci-dessus, nous montrerons que la classification des capteurs pour l'observabilité peut s'effectuer par des algorithmes polynomiaux.

- Le quatrième chapitre vise le problème de rejet de perturbation par retour de mesure, qui est aussi un problème dépendant des capteurs du système. Après des rappels sur les conditions de solubilité pour ce problème en termes géométrique et graphique, en particulier la condition graphique $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ donnée par ([van der Woude, 1993; Commault et al., 1997]) avec \mathcal{I}^* , \mathcal{J}^* deux ensembles de sommets du graphe associé au système, nous montrerons que les mesures correspondant aux sommets du graphe en dehors de \mathcal{I}^* sont inutiles pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure. Alors, au lieu d'étudier le système entier, pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure, il suffit d'analyser le système réduit composé par des sommets de \mathcal{I}^* , les perturbations et les mesures.

Dans le cas où la perturbation est unique, c'est-à-dire le système est affecté par une seule perturbation, nous proposerons une classification complète des capteurs pour ce problème. Cette classification sera illustrée sur un système thermo-hydraulique de 5 bacs. Ensuite, nous calculerons un retour de mesure qui permet de rejeter la perturbation. Ces résultats seront validés par la simulation sur le modèle du procédé.

Dans le cas général et sous certaines hypothèses, nous proposerons également une classification des capteurs pour le rejet de perturbation par retour de mesure.

- Quelques conclusions et perspectives terminent la thèse.

Ce travail de thèse a donné lieu aux publications suivantes :

1. *Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems*, C. Commault, J. M. Dion et D. H. Trinh, Dans *IEEE CDC Conf*, Séville, Espagne, Décembre 2005.
2. *Observability preservation under sensor failure*, C. Commault, J. M. Dion et D. H. Trinh, Dans *IEEE CDC Conf*, San Diego, USA, Décembre 2006
3. *Preservation of properties under sensor failure*, J. M. Dion, C. Commault et D. H. Trinh, Dans *Conference on Systems and Control CSC2007*, Marrakech, Maroc, Mai 2007.
4. *Useless sensors for disturbance rejection by measurement feedback problem*, D. H. Trinh, C. Commault et J. M. Dion, Dans *ACD-07 Conférence*, Grenoble, France, Octobre 2007.
5. *Préservation de l'observabilité en présence de défauts de capteurs*, D. H. Trinh, Dans *Revue e-STA*, vol 4, 2008. (L'article a été présentée à *JDMACS'07*, Reims, France)
6. *Sensor classification for disturbance rejection by measurement feedback problem*, J. M. Dion, C. Commault et D. H. Trinh, Dans *IFAC World Congress 2008*, Séoul, Koréa, July 2008
7. *Observability preservation under sensor failure*, C. Commault, J. M. Dion et D. H. Trinh, Dans *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol 53, issue 6, July 2008
8. *Sensor classification for control and diagnosis problems : A structural approach*, C. Commault, J. M. Dion et D. H. Trinh, Dans *Symposium to Honor Bill Wolovich*, Cancun, Mexique, Décembre 2008

Chapitre 2

Formulation des problèmes

2.1 Systèmes dynamiques et propriétés

Le titre de “premier système automatique du monde” peut être attribué à l’horloge à eau de Ctésibius construite autour du troisième siècle avant J.C. à Alexandrie. L’horloge utilisait un flotteur qui glissait le long d’un cylindre gradué pour maintenir le niveau d’eau dans un bassin et qui permettait de réguler le débit d’eau sortant, qui faisait monter l’indicateur de l’heure dans un autre bassin. Une variété de dispositifs automatiques ont été utilisés au cours des siècles pour accomplir des tâches utiles ou tout simplement pour divertir. Cette dernière catégorie comprend les automates, très populaires en Europe au 17ème et 18ème siècles, avec des figurines qui dansent de manières répétitive ou avec des boîtes à musique qui jouent le même morceau à chaque fois. Parmi les inventeurs de cette époque, on peut citer Jaques de Vaucanson qui est né à Grenoble en 1709 avec ses trois inventions : le flûtiste automate, qui jouait de la flûte traversière ; le joueur de tambourin qui jouait de la flûte et du tambourin ; le canard qui peut manger, digérer, cancaner et simuler la nage. Ces automates sont des exemples de contrôle en boucle ouverte.

Les dispositifs de contrôle automatique en “boucle fermée” sont d’abord apparus pour le régulateur de température d’un four attribué à Drebbel vers 1620, et le régulateur de Watt utilisé pour réguler la vitesse des moteurs à vapeur de James Watt en 1788.

Dans le papier “ On Gouvernor” daté en 1868, J. C. Maxwell a été en mesure d’expliquer les instabilités du régulateur de Watt en utilisant des équations différentielles pour décrire le système. Ceci illustre l’importance et l’utilité des modèles mathématiques dans la compréhension des phénomènes complexes. Maxwell a trouvé la condition de stabilité pour des systèmes décrits par des équations différentielles jusqu’à l’ordre trois. En 1876, Routh donne le critère de stabilité pour les systèmes d’ordre quelconque. La stabilité est une des *propriétés* les plus importantes pour les systèmes dynamiques.

La théorie de la commande a beaucoup évolué durant les cent dernières années. Les nouvelles techniques mathématiques ont permis de concevoir des systèmes de commande beaucoup plus complexes que le régulateur de Watt, notamment après la deuxième guerre mondiale. On peut citer les progrès de la commande optimale dans des années 50 et 60, les méthodes stochastiques, de commande robuste, de commande adaptative dans des années 70 et 80. L’application de ces méthodes et techniques a changé la vie humaine : les voyages spatiaux, les satellites de communication, le transport aérien, ...

Comme vu précédemment, la stabilité est une propriété importante qui ne dépend que du système lui même. Nous verrons d’autres propriétés des systèmes qui font

maintenant l'objet de l'histoire de la théorie de commande telles que la commandabilité, l'observabilité, le rang, le rejet de perturbations, Par convention, on notera le système Σ et la propriété \mathcal{P} .

2.2 Placement des capteurs pour obtenir des propriétés spécifiques

2.2.1 Introduction

Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera particulièrement à des propriétés du système qui sont dépendantes de l'ensemble des capteurs du système, c'est-à-dire du nombre de capteurs ainsi que de leurs emplacements (autrement dit des variables mesurées). Étant donné un système Σ avec l'ensemble de capteurs Y et une de ses propriétés \mathcal{P} qui dépend de Y , on peut formuler :

$$\mathcal{P}(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est vraie avec } Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Alors, si $\mathcal{P}(Y) = 0$, une question se pose naturellement :

Comment rendre \mathcal{P} vraie ?

Pour un système Σ et une propriété \mathcal{P} qui n'est pas vérifiée par l'ensemble de capteurs Y , le problème de déterminer un ensemble de capteurs supplémentaires pour que \mathcal{P} soit vraie sous certaines conditions telles que le nombre minimal, le coût minimal, la tolérance aux défauts, ... est appelé le problème du *placement des capteurs*.

Pour rendre \mathcal{P} vraie, supposons qu'on dispose d'un ensemble de capteurs supplémentaires Z qui collectent des nouvelles mesures. Sur le nouveau système composé de Σ et des nouvelles mesures Z , si \mathcal{P} est vérifiée :

$$\mathcal{P}(Y \cup Z) = 1$$

on dit que le problème de placement des capteurs pour la propriété \mathcal{P} sur le système Σ est résolu.

2.2.2 Les problèmes traités

La première propriété à laquelle on s'intéresse dans ce travail est l'observabilité. De manière non formelle, l'observabilité d'un système est la possibilité de déterminer le comportement de l'ensemble du système à partir des mesures. L'observabilité joue un rôle important dans la théorie de commande, pour comprendre ce qui se passe à l'intérieur du système, pour calculer les lois de commande, pour assurer certaines performances du système, ...

Quand le système Σ n'est pas observable, on cherche à implanter les nouveaux capteurs pour que Σ devienne observable. Ce problème a été étudié depuis près de quarante ans, les premières études ont concerné le domaine de la chimie. On peut citer quelques références comme celles de Václavek and Loucka [1976]; Kretsovalis and Mah [1987]; Madron and Veverka [1993]; Meyer et al. [1994]; Ali and Narasimhan [1996]; Raghuraj et al. [1999]. Mais dans ces articles, les modèles qualitatifs ne prennent pas en compte la dynamique du système. Dans ce cas, l'observabilité se réduit au fait que chaque variable est connectée à un capteur. Pour une vision complète de ces approches, les lecteurs peuvent consulter par exemple Bagajewicz [1997]; Chmielewski et al. [2002].

Dans notre travail, on se concentre sur les systèmes linéaires qui prennent en compte la dynamique du système. Nous allons analyser structurellement les causes de non observabilité de ces systèmes. Ensuite, nous allons résoudre le problème de placement des capteurs pour l'observabilité. Notons en particulier, les travaux de Commault et al. [2005] pour les systèmes linéaires et les extensions à l'observabilité des systèmes bi-linéaires dans Boukhobza et al. [2006b]; Boukhobza and Hamelin [2007], aux systèmes implicites [Boukhobza et al., 2006a] ou encore à des systèmes complexes comme dans [Chamseddine et al., 2007]

Le problème de placement des capteurs pour la détection et la localisation des défauts (problème FDI - **F**ault **D**etection and **I**solation) a reçu une attention particulière, et plusieurs résultats sont disponibles. Dans Travé-Massuyès et al. [2001] on propose une méthode basée sur l'addition successive de capteurs en prenant en compte les critères de diagnosticabilité. Le principe de cette méthode est d'analyser le modèle physique du système d'un point de vue structurel. Cette approche structurelle est basée sur les relations de redondance analytique, Staroswiecki and Cassar [1996]; Cassar and Staroswiecki [1997]. Dans Spanache et al. [2004] on propose une méthode d'optimisation du placement des capteurs en utilisant des algorithmes génétiques. Frisk and Krysander [2007] proposent une méthode de placement des capteurs afin d'obtenir la détectabilité et l'isolabilité maximale de défauts. Cette méthode est basée sur la décomposition de

Dulmage-Mendelsohn. Dans Yassine et al. [2007] on propose une méthode structurale pour le placement des capteurs qui satisfait un cahier des charges (diagnostic, détectabilité,...) désiré. Dans Commault et al. [2006b,c]; Yacoub-Agha [2007], les auteurs traitent ce problème pour les systèmes linéaires structurés.

Le problème du rejet de perturbation par retour d'état - (RPRE) est bien connu dans la théorie de commande. Dans le cas où l'état n'est pas directement mesuré, on a le problème du rejet de perturbation par retour de mesure - (RPRM) qui est plus complexe. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure a été résolu de manière élégante par l'approche géométrique dans [Schumacher, 1980; Willems and Commault, 1981]. Dans le contexte des systèmes structurés, ce problème a été résolu par l'approche graphique par van der Woude [1993]; Commault et al. [1997]. L'idée intuitive de cette approche peut être facilement expliquée dans le cadre des systèmes à temps discret : Le problème RPRM est potentiellement soluble si le temps nécessaire pour que la perturbation arrive à la sortie est plus long que le temps pour mesurer la perturbation plus le temps pour l'éliminer. La solubilité de ce problème dépend donc de l'ensemble des capteurs du système. Dans notre travail, nous étudions le placement des capteurs pour que le problème RPRM soit soluble (voir Dion et al. [2008a,b]). Ce problème sera traité dans le Chapitre 5.

2.3 Classification des capteurs pour conserver des propriétés

2.3.1 Introduction

Revenons à l'équation (2.2.1), quand on a $\mathcal{P}(Y) = 1$ avec le système Σ et son ensemble de capteurs Y , on se pose alors plusieurs questions : quel est le degré d'importance de chaque capteur pour satisfaire la propriété \mathcal{P} ? Quels sont les capteurs inutiles c'est-à-dire les capteurs qui ne servent à rien pour conserver la propriété \mathcal{P} quelle que soit la solution choisie? Parmi les capteurs utiles c'est-à-dire les capteurs qui ne sont pas inutiles, quels sont les capteurs critiques pour \mathcal{P} dont la défaillance rendra la propriété \mathcal{P} fausse? En répondant à ces questions, on résout le problème de classification des capteurs.

L'intérêt de ce problème ne se limite pas aux raisons économiques mais aussi à la compréhension fine des mécanismes de résolution du problème, à la relation entre la structure du système et la solubilité du problème, à la sûreté de fonctionnement et à la facilité d'utilisation.

Pour aborder ce problème, nous proposons d'abord quelques définitions.

Définition 2.3.1. (*Défaut capteur*) Soit Σ un système et Y son ensemble de capteurs. Un capteur $y_i \in Y$ est dit défaillant s'il ne donne plus la mesure de y_i .

Un sous ensemble de capteurs V_Y de Y qui satisfait $\mathcal{P}(V_Y) = 1$ est défini comme une solution :

Définition 2.3.2. (*Solution*) Soit Σ un système, Y son ensemble de capteurs et une propriété \mathcal{P} . Un ensemble de capteurs $V_Y \subseteq Y$ tels que

$$\mathcal{P}(V_Y) = 1$$

est appelé solution.

Pour un système Σ et une propriété \mathcal{P} nous pouvons classer les capteurs en trois types :

- Capteurs essentiels.
- Capteurs inutiles.
- Capteurs utiles.

Cette classification prendra en compte l'importance d'un capteur pour la propriété \mathcal{P} . Le défaut d'un capteur essentiel fait perdre la propriété \mathcal{P} , alors que le défaut d'un capteur inutile n'a aucun effet sur \mathcal{P} .

Définition 2.3.3. (*Capteur inutile*) Soit Σ un système linéaire, Y son ensemble de capteurs et une propriété \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(Y) = 1$. Soit $y_i \in Y$.

Le capteur y_i est un capteur inutile si pour toute solution V_Y contenant y_i , $V_Y \setminus \{y_i\}$ reste une solution.

Les capteurs d'un système qui ne sont pas inutiles représentent l'ensemble des capteurs utiles. Certains capteurs de l'ensemble des capteurs utiles peuvent être des capteurs essentiels.

Définition 2.3.4. (*Capteur essentiel*) Soit Σ un système linéaire, Y son ensemble de capteurs et une propriété \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(Y) = 1$. Soit $y_i \in Y$.

Le capteur y_i est un capteur essentiel s'il appartient à toute solution V_Y .

Le Figure 2.1 nous donne une vision de la classification des capteurs.

Une autre classification des capteurs a été présentée par [Staroswiecki et al., 2004] en se basant sur la notion d'ensemble minimal de capteurs - (minimal sensor set en anglais - MSS) et de sous-ensemble critique de capteurs :

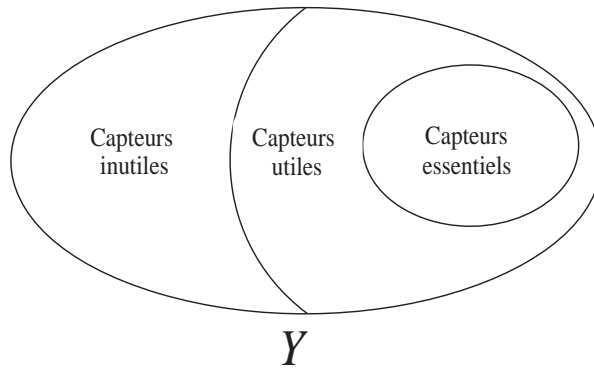


FIG. 2.1 – La classification des capteurs

Définition 2.3.5. (*Ensemble minimal de capteurs*) Soit Σ un système, Y son ensemble de capteurs et une propriété \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(Y) = 1$. Un ensemble de capteurs $V_Y \subseteq Y$ tel que

$$\mathcal{P}(V_Y) = 1$$

est dit ensemble minimal de capteurs si

$$\forall V' \subset V_Y : \mathcal{P}(V') = 0$$

Autrement dit, si V_Y est un ensemble minimal de capteurs, alors pour n'importe quel capteur $y_i \in V_Y$, si y_i tombe en panne, la propriété \mathcal{P} n'est plus vérifiée.

Définition 2.3.6. (*Sous-ensemble critique de capteurs*) Soit Σ un système, Y son ensemble de capteurs et une propriété \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(Y) = 1$. Un ensemble de capteurs $V_Y \subseteq Y$ tel que

$$\mathcal{P}(Y \setminus V_Y) = 0$$

est dit sous-ensemble critique de capteurs.

Ces notions ont des relations avec notre approche, par exemple :

- Un capteur inutile est un capteur qui n'appartient à aucun ensemble minimal de capteurs du système.
- Un capteur essentiel est un capteur qui appartient à tout ensemble minimal de capteurs.
- Un capteur essentiel peut être caractérisé comme un sous-ensemble critique de capteurs de cardinalité un.

2.3.2 Les problèmes traités

En appliquant cette classification, les auteurs [Commault et al., 2007; Yacoub-Agha, 2007; Frisk and Krysander, 2007] ont classé les capteurs pour le problème de FDI. [Staroswiecki et al., 2004] donne une classification pour l'observabilité qui a été étendue dans [Chamseddine et al., 2007] pour la tolérance aux défauts de capteurs. Nos recherches sur la classification des capteurs pour l'observabilité des systèmes linéaires structurés sont dans [Commault et al., 2006a; Trinh, 2007; Commault et al., 2008] et pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure dans [Dion et al., 2008a; Trinh et al., 2007]. Nous allons aborder ces deux problèmes dans les Chapitres 4 et 5.

Les résultats sur la classification des capteurs peuvent être utilisés dans l'étape de conception d'un système. Par exemple, quand le concepteur dispose une banque de capteurs possibles, chaque capteur peut mesurer certaines variables et le concepteur doit trouver un ensemble de capteurs à implanter pour satisfaire le cahier des charges. Sous cet angle, ces résultats peuvent être considérés comme une concrétisation des travaux de N. Karcanias sur la conception intégrée de la commande et de l'instrumentation (voir [Karcanias, 1995, 1996]).

2.4 Illustration

Dans cette section, nous allons illustrer les problèmes de placement et de classification des capteurs pour l'observabilité sur quelques exemples. Nous allons illustrer également ces concepts sur le problème de rejet de perturbation par retour de mesure.

2.4.1 Problème de l'observabilité

L'observabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps n'est pas concernée par les entrées du système. Considérons donc un système linéaire décrit par des équations d'état de forme :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (2.4.1)$$

où $x(t)$ est le vecteur des états de dimension n , $y(t)$ est le vecteur des sorties de dimension p . A et C sont des matrices réelles constantes de dimensions respectives $n \times n$ et $p \times n$. La définition de l'observabilité des systèmes linéaires est donnée comme suit :

Définition 2.4.1. (*Observabilité*) Soit Σ un système linéaire de type (2.4.1). Σ est dit observable si pour chaque état initial $x(t_i)$, il existe un temps fini t_f tel que la connaissance de la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[t_i, t_f]$ suffit pour déterminer de manière unique l'état initial $x(t_i)$. Dans le cas contraire le système est dit non observable.

L'observabilité d'un système de type (2.4.1) peut être vérifiée par le critère de Kalman :

Théorème 2.4.1. Soit Σ un système linéaire de type (3.2.1). Σ est observable si et seulement si :

$$\text{rang } [\mathcal{Q}_O] = n \quad (2.4.2)$$

où

$$\mathcal{Q}_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

\mathcal{Q}_O est appelée la matrice d'observabilité du système Σ

Placement des capteurs pour l'observabilité

Pour illustrer l'aspect placement des capteurs, nous proposons l'exemple suivant :

Exemple 2.4.1

Considérons le système linéaire Σ de type (2.4.1) décrit par le couple (A, C) suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Ce système a trois états x_1, x_2, x_3 et une sortie y_1 . Par l'équation 2.4.3, on peut calculer la matrice d'observabilité du système Σ de l'Exemple 2.4.1 :

$$\mathcal{Q}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rang } [\mathcal{Q}_O] = 2$$

Le système Σ de l'Exemple 2.4.1 n'est donc pas observable. Pour rendre ce système observable, il suffit d'ajouter une mesure supplémentaire pour n'importe quel état. Par

exemple, en ajoutant une mesure $z = x_1$ pour l'état x_1 , on obtient :

$$\mathcal{Q}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rang} [\mathcal{Q}_O] = 3$$

Avec une seule mesure supplémentaire $z = x_2$, on obtient :

$$\mathcal{Q}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{rang} [\mathcal{Q}_O] = 3$$

Pour une seule mesure $z = x_3$, on trouve la même matrice d'observabilité que celle de $z = x_1$. Dans ces cas ci, avec une mesure supplémentaire, on peut rendre le système Σ observable.

Classification des capteurs pour l'observabilité

Exemple 2.4.2

Considérons le système linéaire Σ de type (2.4.1) décrit par le couple (A, C) suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce système a trois états x_1, x_2, x_3 et quatre sorties y_1, y_2, y_3 et y_4 . Sa matrice d'observabilité est de rang $[\mathcal{Q}_O] = 3$.

Ce système est observable. Si la propriété \mathcal{P} est l'observabilité de ce système, on a $\mathcal{P}(Y) = 1$. Les ensembles de capteurs qui satisfont \mathcal{P} sont :

- $V_0 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

- $V_1 = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $V_2 = \{y_1, y_3, y_4\}$
- $V_3 = \{y_2, y_3, y_4\}$
- $V_4 = \{y_1, y_3\}$
- $V_5 = \{y_2, y_3\}$

Considérons toutes les solutions qui contiennent y_4 : V_0 , V_2 et V_3 . On a :

- $V_0 \setminus \{y_4\} = V_1$
- $V_2 \setminus \{y_4\} = V_4$
- $V_3 \setminus \{y_4\} = V_5$

Cela confirme que y_4 est un capteur inutile d'après la Définition 2.3.3. Dans ce cas, il n'existe pas d'autre capteur inutile. L'ensemble des capteurs utiles est donné par $\{y_1, y_2, y_3\}$.

D'après la Définition 2.3.4, il s'avère que y_3 est un capteur essentiel pour l'observabilité du système Σ parce qu'il appartient à toutes les solutions V_i .

Dans le Chapitre 4, nous allons proposer une méthode pour classer ces trois catégories de capteurs sans qu'il soit nécessaire de lister toutes les solutions possibles.

2.4.2 Problème de rejet de perturbation par retour de mesure

Le problème de rejet de perturbation par retour de mesure nécessite de considérer l'entrée et la mesure du système. Le système linéaire est décrit par des équations d'état de la forme :

$$\Sigma_{dz} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases}, \quad (2.4.4)$$

où

- $x(t)$ est le vecteur des états de dimension n
- $y(t)$ est le vecteur des sorties de dimension p
- $u(t)$ est le vecteur des commandes de dimension m
- $d(t)$ est le vecteur des perturbations de dimension q
- $z(t)$ est le vecteur des mesures de dimension v

A, B, C, E et H sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées.

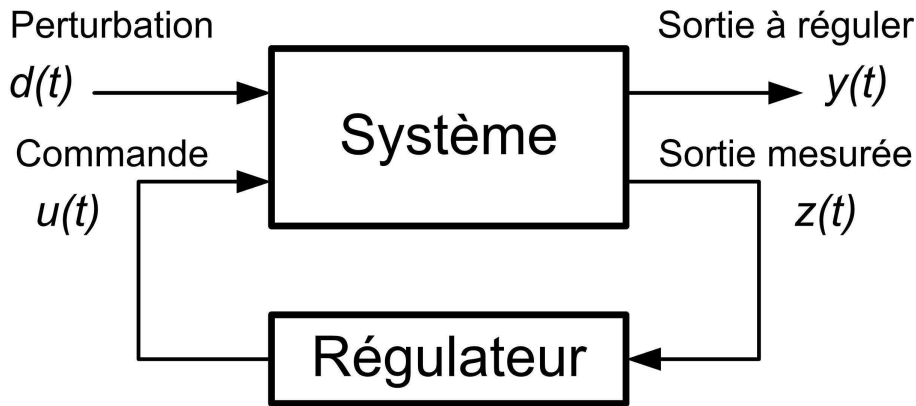


FIG. 2.2 – Le retour de mesure

Le problème de rejet de perturbation revient à trouver un retour dynamique de mesure défini par

$$\Sigma_{fb} \begin{cases} \dot{w}(t) = Lw(t) + Mz(t) \\ u(t) = Nw(t) + Pz(t) \end{cases}, \quad (2.4.5)$$

où $w(t) \in \mathbb{R}^\mu$, tel que le transfert en boucle fermée entre d et y soit nul. En termes de matrices de transfert on a :

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & K(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

avec $u = F(s)z$ et $F(s)$ tel que :

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0 \quad (2.4.7)$$

La solution de ce problème dépend des capteurs du système. Nous donnerons plus tard les conditions de solubilité du problème par l'approche géométrique et l'approche graphique également et nous étudions les deux aspects placement / classification des capteurs pour ce problème.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé deux problèmes concernant les propriétés qui dépendent de l'ensemble des capteurs du système :

- Le problème de placement des capteurs.

Chapitre 2. Formulation des problèmes

- Le problème de classification des capteurs.

Nous allons utiliser les notions présentées dans ce chapitre pour étudier ces deux problèmes sur deux propriétés du système :

- L'observabilité au Chapitre 4.
- Le rejet de perturbation par retour de mesure dans le Chapitre 5.

Chapitre 3

Systemes Linéaires Structurés

3.1 Introduction

Les systèmes physiques sont souvent représentés par des modèles d'état dont les paramètres des matrices associées sont en général mal connus. Ces paramètres sont soit fixés à zéro soit libres mais les positions des paramètres nuls et non nuls dans les matrices sont connues. Dans ce travail, on considère les *systèmes structurés* qui sont une classe de systèmes dépendant de paramètres : ils sont caractérisés par les positions connues des paramètres libres. Avec de tels systèmes, on étudie des propriétés dites génériques (ou structurelles). Ces propriétés sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres. À ces systèmes structurés, on peut associer des graphes qui sont un outil très efficace pour analyser les propriétés génériques des systèmes considérés.

La notion de système structuré a été présentée par C.T. Lin [Lin, 1974] dans ses recherches sur la commandabilité structurelle des systèmes linéaires mono-entrée. Les conditions de commandabilité structurelle ont été interprétées graphiquement en termes de chemins et de cycles. Cette caractérisation a été généralisée aux systèmes structurés multi-entrées par Shields and Pearson [1976]; Glover and Silverman [1976]. Les démonstrations assez compliquées des théorèmes ont été simplifiées par Davison [1977]; C.T. Lin lui même dans [Lin, 1977]; Hosoe and Matsumoto [1979]; Mayeda [1981]; Yamada [1984] et Linnemann [1986].

D'autres recherches portant sur d'autres propriétés génériques des systèmes ont également été menées durant ce temps. Le *rang générique* de la matrice de transfert d'un système structuré a été étudié par Ohta and Kodama [1985] et par van der Woude [1991a]. La structure à l'infini qui joue un rôle majeur pour résoudre des problèmes de commande "classiques" a été abordée par Suda et al. [1989], Commault et al. [1991], van der Woude [1991b]. Cette structure peut être obtenue grâce à l'étude de chemins entrées - sorties sommets disjoints sur le graphe associé.

Toujours pour les systèmes linéaires structurés, d'autres problèmes tels que le découplage entrée-sortie ont été caractérisés graphiquement par Dion and Commault [1993]. Le rejet de perturbation par retour d'état a été étudié dans [Commault et al., 1991; van der Woude, 1991c]. Le problème de rejet de perturbation par retour de sortie a été étudié par [Commault et al., 1993, 1997; van der Woude, 1993, 1994; Bahar et al., 1996].

Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) a reçu beaucoup d'attention voir [Chen and Patton, 1999; Frank, 1996]. Dans le cadre des systèmes linéaires structurés, la condition de solubilité a été donnée par Commault et al. [2002a].

Ce qui précède n'est qu'une petite partie des problèmes traités dans le cadre des systèmes linéaires structurés. Beaucoup d'autres références peuvent être consultées dans [Reinschke, 1988; Murota, 2000; Dion et al., 2003].

Parallèlement à l'approche présentée dans ce travail, il existe d'autres approches utilisant des graphes pour l'analyse structurelle d'un système. D'abord, l'approche qui utilise des graphes bipartis pour exploiter les relations existantes entre contraintes et variables. Cette approche a été développée dans [Staroswiecki and Cassar, 1996; Blanke et al., 2003; Staroswiecki et al., 2000; Staroswiecki, 2003, 2007; Assad, 2002] pour aborder les problèmes de diagnostic et de synthèse de commande tolérante aux défauts.

Une autre approche est le Bond-graph. Le Bond-graph a été utilisé pour analyser des propriétés structurelles telles que la commandabilité, l'observabilité, la structure à l'infini [Sueur and Dauphin-Tanguy, 1989, 1991; Rahmani, 1993; Rahmani et al., 1996; Rahmani and Dauphin-Tanguy, 2006], le problème de détection et localisation de défauts [Bouamama et al., 2000, 2005; Rahmani and Dauphin-Tanguy, 2006]. Pour plus d'informations sur les Bond-graphs, les lecteurs peuvent consulter le livre [Dauphin-Tanguy, 2000].

Dans ce qui suit, nous allons rappeler le concept du système linéaire structuré, les propriétés génériques et l'analyse de tel système par le graphe associé. Nous donnerons également l'illustration à travers deux propriétés du système : le rang d'une matrice de transfert et la commandabilité.

3.2 Système Linéaire Structuré

3.2.1 Motivation

La théorie des systèmes linéaires multivariables a donné lieu à de nombreux résultats aujourd'hui classiques. Nous nous intéressons ici aux systèmes linéaires invariants dans le temps qui peuvent être décrits par des équations d'état de forme :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où $x(t)$ est le vecteur des états de dimension n , $y(t)$ est le vecteur des sorties de dimension p , $u(t)$ est le vecteur des entrées de dimension m . A , B et C sont des matrices réelles constantes de dimensions respectives $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$.

Des approches variées (fréquentielles, géométriques, algébriques, structurales) ont permis de résoudre une grande majorité des problèmes de commande des systèmes linéaires de la forme (3.2.1). Illustrons cette approche par l'exemple suivant.

Considérons un modèle de colonne à distiller à 13 plateaux (voir [Hovelaque et al., 1996]) dont le schéma est détaillé dans la Figure 3.1. Cet exemple est représentatif de procédés de l'industrie chimique.

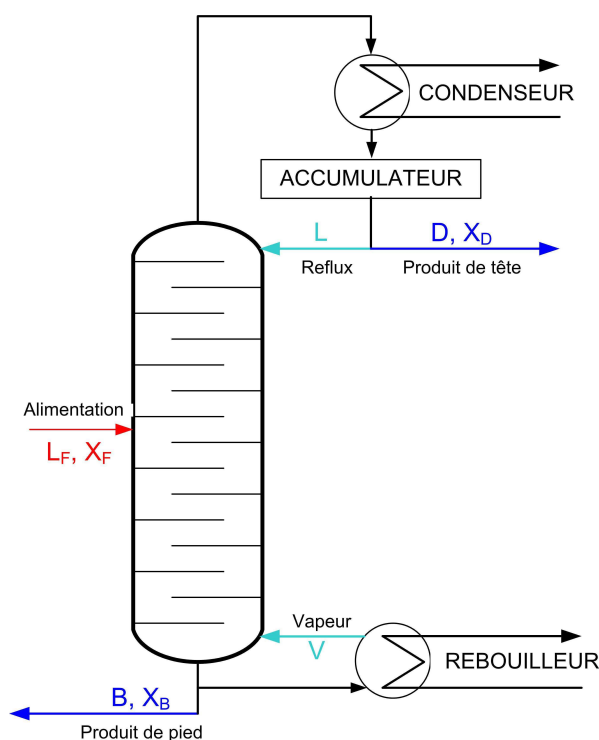


FIG. 3.1 – Colonne à distiller

L'objectif est de contrôler la composition en tête de colonne X_D et la composition en pied de colonne X_B en utilisant le taux de reflux L et l'injection de vapeur V . De plus, l'influence des perturbations sur le débit d'alimentation L_X et la composition X_F doivent être minimisées. Le procédé peut être linéarisé autour de points de fonctionnement avec $[L, V]^T$ comme vecteur d'entrée, $[L_F, X_F]^T$ comme vecteur de perturbation, $[X_D, X_B]^T$ comme vecteur de sortie. Le vecteur d'état correspond à la composition dans le générateur de vapeur, sur chaque plateau et dans le condensateur $[X_R, X_1, \dots, X_{13}, X_C]^T$.

Le modèle linéarisé exhibe clairement la structure du procédé (voir Figure 3.2) :

1. Chaque plateau ne peut influencer directement que le plateau en dessous et le

plateau en dessus de lui-même. On trouve donc des paramètres fixés à zéro qui correspondent à l'absence de relation physique entre les variables.

2. La composition de l'alimentation X_F influence seulement le plateau alimenté de manière directe. Le débit L_F influence le plateau alimenté et les plateaux en dessous.
3. Les paramètres du modèle linéarisé dépendent du point de fonctionnement mais la position des paramètres non-nuls reste inchangée.

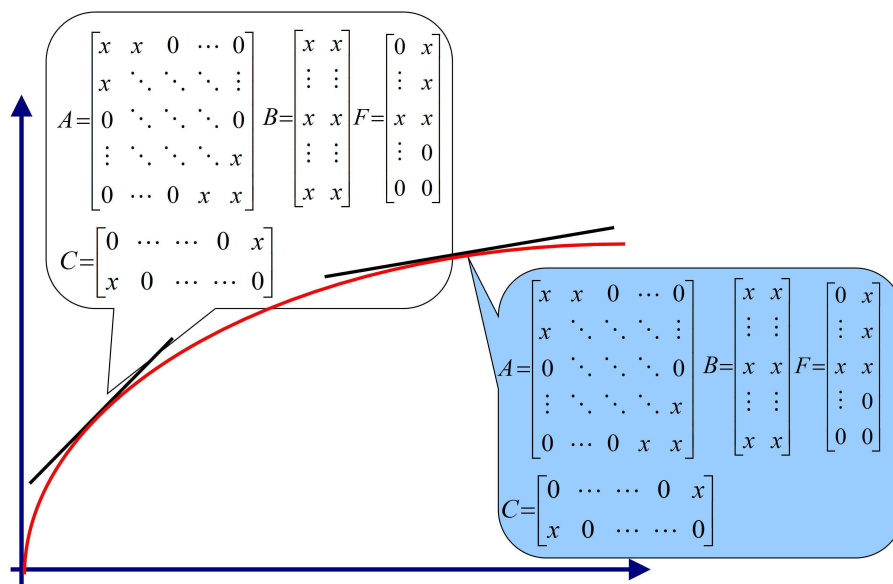


FIG. 3.2 – Colonne à distiller

Pour faire face à ce type de système, on peut utiliser plusieurs approches :

La première approche vise à obtenir les paramètres du procédé, par identification par exemple. Une fois la représentation d'état du procédé obtenue, on peut appliquer les résultats bien connus de la théorie de commande pour résoudre les problèmes posés. Mais cette approche ignore la structure du système. En particulier, les paramètres fixés à zéro qui ont un sens dans la structure du système sont traités numériquement tout comme les autres paramètres. Le résultat obtenu dépend des valeurs des paramètres, ceux-ci ne sont pas toujours faciles à identifier en pratique.

L'approche opposée consiste à étudier le système par les lois de la physique et par le calcul formel. On obtient des résultats dépendants de relations entre paramètres. Mais en pratique, on rencontre des difficultés parce que les lois de la physique entre les variables sont parfois mal connues. L'autre difficulté réside dans le fait que quand le système est de grande taille, le calcul formel devient coûteux en temps.

Entre ces deux points de vue, on voudrait avoir une représentation du système qui prend en compte :

1. L'information sur la structure du système obtenue à partir des lois de la physique et de la décomposition du système.
2. La possibilité d'étudier des propriétés qui dépendent très peu des paramètres inconnus du système mais essentiellement de sa structure.
3. La réduction de temps de calcul, la possibilité de traiter les systèmes de grande taille.
4. La possibilité d'une représentation visuelle de la structure du système.

Dans ce qui suit, nous allons étudier la notion du *Système Linéaire Structuré* qui répond à nos besoins. Notons que pour une simplicité de l'analyse, on perd la précision sur la modélisation du système.

3.2.2 Définition des systèmes linéaires structurés

Après les travaux de Lin [1974], Linnemann [1981] a proposé une définition des systèmes linéaires structurés en termes de "matrices structurées", où apparaissait la notion de paramètres soit fixés à zéros soit inconnus. Cette notion a été reprise par Murota [1987] en termes de paramètres soit nuls soit algébriquement indépendants.

En schématisant ce concept, un système linéaire structuré est un système linéaire dont la seule information connue est l'existence ou l'absence de relation entre variables.

Définition 3.2.1. (*Système linéaire structuré*) Soit Σ_Λ un système linéaire décrit par l'ensemble d'équations d'état :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées. A_Λ , B_Λ et C_Λ sont des matrices de dimensions appropriées. Σ_Λ est appelé système linéaire structuré si les éléments de la matrice composée

$$J_\Lambda = \begin{bmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 \end{bmatrix}$$

sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

On note $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble des paramètres libres de la matrice J_Λ . La structure du système est donnée par les positions des paramètres fixés à zéro et des paramètres libres. Le système linéaire structuré représente une classe importante de systèmes linéaires dépendants de paramètres.

Exemple 3.2.1

Considérons le système Σ_Λ de type (3.2.1) décrit par les équations d'état suivantes :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases}$$

où

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}; \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}$$

Les paramètres égaux à 0 dans les matrices A, B et C correspondent à des zéros fixes, c'est-à-dire à des absences de relations entre variables. Les paramètres libres $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ représentent les différentes relations entre les variables. On note $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\} \subset \mathbb{R}^7$ le vecteur des paramètres libres de ce système.

Nous pouvons calculer la matrice de transfert du système Σ_Λ :

$$T_\Lambda(s) = C_\Lambda(sI - A_\Lambda)^{-1}B_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_3\lambda_5s^{-2} & \lambda_2\lambda_4\lambda_5s^{-2} \\ \lambda_3\lambda_6s^{-1} & \lambda_4\lambda_7s^{-1} \end{bmatrix}$$

3.2.3 Système linéaire admissible

Un système linéaire structuré doit être considéré comme une classe de systèmes linéaires ayant tous une structure identique, dans le sens où les positions des paramètres fixés à zéro sont les mêmes. La notion d'appartenance d'un système linéaire à un système linéaire structuré a été mentionnée par Linnemann [1981]; Reinschke [1988] :

Définition 3.2.2. (Système linéaire admissible) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.2) défini par le triplet $(A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda)$. Un système linéaire $\Sigma = (A, B, C)$ est dit admissible par rapport à Σ_Λ si les paramètres fixés à zéro des matrices $A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda$ correspondent à des paramètres nuls pour les matrices A, B et C .

Par exemple, en fixant :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$ un système linéaire admissible par rapport au système linéaire structuré Σ_Λ de l'Exemple (3.2.1).

3.3 Propriétés génériques

Pour un système linéaire structuré, on peut étudier des propriétés dites génériques. Une propriété générique est une propriété qui est vraie pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Revenons à l'Exemple 3.2.1, on peut calculer le déterminant de la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$:

$$\det[T_\Lambda(s)] = \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 (\lambda_1 \lambda_7 - \lambda_2 \lambda_6) s^{-3}$$

Donc, la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$ est de rang plein si :

$$\lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \neq 0, \lambda_1 \lambda_7 - \lambda_2 \lambda_6 \neq 0,$$

c'est-à-dire, la propriété du système " $T_\Lambda(s)$ est de rang plein" est vraie pour presque toute valeur de $\Lambda \subset \mathbb{R}^7$.

La notion de propriété générique est fondamentale dans l'étude des systèmes linéaires structurés. Ce concept a été présenté de manière théorique, en particulier par Wonham [1974], Murota [1987] et Reinschke [1988].

Une variété algébrique $V \subset \mathbb{R}^\tau$ est définie comme l'hypersurface caractérisée par les racines communes d'un nombre fini de polynômes p_1, p_2, \dots, p_k :

$$V = \{\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau) | p_i(\Lambda) = 0, i = 1, 2, \dots, k\}$$

V est propre si $V \neq \mathbb{R}^\tau$ et V est non triviale si $V \neq \emptyset$. La notion de généricité peut être définie dans le contexte des systèmes structurés.

Définition 3.3.1. (Propriété générique) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré tel que $\Lambda \subset \mathbb{R}^\tau$. Une propriété \mathcal{P} est dite générique, si \mathcal{P} est vraie pour toute valeur de Λ n'appartenant pas à une variété algébrique propre dans \mathbb{R}^τ .

Revenons à l'Exemple (3.2.1) ci dessus, la propriété \mathcal{P} : " $T_\Lambda(s)$ est de rang plein" est vraie pour toute valeur des $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7\} \subset \mathbb{R}^7$ excepté celles appartenant à la variété algébrique V :

$$V = \{\Lambda \subset \mathbb{R}^7 | \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 (\lambda_1 \lambda_7 - \lambda_2 \lambda_6) = 0\}$$

Une propriété générique est donc une propriété vraie pour presque toutes les valeurs de $\Lambda \subset \mathbb{R}^r$. On étudie de nombreuses propriétés génériques des systèmes linéaires structurés telles que le rang générique de la matrice de transfert, la structure à l'infini, l'ordre des zéros à l'infini, la commandabilité, l'observabilité, le découplage par retour d'état, le rejet de perturbation, *etc...* On va détailler maintenant le rang générique d'un système linéaire structuré.

3.3.1 Rang générique d'une matrice structurée

Comme on a pu l'observer sur l'Exemple (3.2.1), le rang de la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$ peut chuter pour certaines valeurs du vecteur Λ . Suite à la Définition (3.3.1) sur la propriété générique, on peut donner la définition du rang générique d'une matrice :

Définition 3.3.2. (*Rang générique*) [Johnston et al., 1984; Reinschke, 1988; Murota, 2000] Soit Σ_Λ un système linéaire structuré ayant pour matrice de transfert $T_\Lambda(s)$, avec $\Lambda \subset \mathbb{R}^r$. Le rang générique de $T_\Lambda(s)$, noté *g-rang* $[T_\Lambda(s)]$ est défini comme le rang maximal de toutes les matrices admissibles $T(s)$ par rapport à $T_\Lambda(s)$:

$$g\text{-rang}[T_\Lambda(s)] = \max \text{rang} [T(s)]$$

3.4 Graphe associé

Des graphes de différentes natures peuvent être associés aux systèmes linéaires structurés. L'étude des systèmes linéaires structurés sur un graphe associé fait partie des atouts majeurs de ce thème de recherche. La théorie des graphes est un outil très efficace tant au niveau calculatoire que pédagogique. Nous verrons qu'en effet des conditions matricielles pouvant paraître compliquées auront une traduction graphique très simple. L'étude des propriétés génériques revient à vérifier certaines conditions sur les graphes associés. Néanmoins, cet outil ne peut s'utiliser "visuellement" que pour des systèmes linéaires structurés de taille raisonnable. Pour les systèmes de grande dimension, l'intérêt sera uniquement d'ordre calculatoire.

3.4.1 Graphe orienté

Nous rappelons dans cette partie quelques notions de base de théorie des graphes [Berge, 1973], notamment sur les graphes orientés.

Définition 3.4.1. (*Graphe orienté*) Un graphe orienté $G = (V, W)$ est un couple d'ensembles constitué par :

- Un ensemble d'éléments $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ appelés *sommets*
- Un ensemble d'éléments $W \subset V \times V$; $W = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ appelés *arcs*. Un arc $w_h \in W$ est défini par $w_h = (v_i, v_j)$ où v_i est appelé *extrémité initiale* et v_j *extrémité terminale* de l'arc w_h .

Avec un graphe orienté $G = (V, W)$, on a les notions suivantes :

Pour un arc $w_h = (v_i, v_j)$, on dit que v_i est un *prédécesseur* de v_j et que v_j est un *successeur* de v_i . Si v_i coïncide avec v_j , on a une *boucle*.

Sur le graphe $G = (V, W)$, un *chemin* \mathcal{R} allant du sommet v_1 au sommet v_q est une séquence d'arcs :

$$\mathcal{R}(v_1, v_q) = (v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots (v_{q-2}, v_{q-1}), (v_{q-1}, v_q)$$

telle que $v_i \in V$ pour $i = 1, 2, \dots, q$ et $(v_{i-1}, v_i) \in W$ pour $i = 2, 3, \dots, q$. Pour la simplicité, nous notons :

$$\mathcal{R}(v_1, v_q) = \{v_1, v_2 \dots v_q\}$$

Considérons V_1, V_2 deux sous-ensembles de V . S'il existe un chemin $\mathcal{R}(v_1, v_q)$ tel que $v_1 \in V_1, v_q \in V_2$, on a un chemin entre V_1 et V_2 dénoté $\mathcal{R}(V_1, V_2)$.

Pour un chemin défini *i.e.* $\mathcal{R}(v_1, v_q)$, sa *longueur* est égale au nombre d'arcs le constituant, chaque arc étant compté autant de fois qu'il apparaît dans la séquence. La longueur de $\mathcal{R}(v_1, v_q)$ est de $q - 1$ et elle est notée $\mathcal{L}(v_1, v_q)$.

Un chemin $\mathcal{R}(v_1, v_q)$ est dit *simple* (ou *élémentaire*) s'il ne rencontre pas plus d'une fois le même sommet.

Un chemin $\mathcal{R}(v_1, v_q)$ avec $v_1 \equiv v_q$ est appelé un *circuit*. Si de plus, $\mathcal{R}(v_1, v_q)$ ne rencontre qu'une seule fois chaque sommet sauf v_1 , le circuit est dit *élémentaire*. Un circuit élémentaire est appelé aussi un *cycle*.

Deux chemins $\mathcal{R}(v_a, v_b)$ et $\mathcal{R}(v_c, v_d)$ sont dits *sommets disjoints* s'ils n'ont aucun sommet en commun : $\mathcal{R}(v_a, v_b) \cap \mathcal{R}(v_c, v_d) = \emptyset$. Un ensemble de chemins est une *famille de chemins sommets disjoints* si les chemins sont sommets disjoints mutuellement.

De la même manière, un ensemble de cycles est dit *famille de cycles sommets disjoints* si les cycles sont sommets disjoints mutuellement. Une famille de cycles sommets disjoints qui couvre tous les sommets d'un graphe est appelée *famille de cycles recouvrante*.

Pour deux ensembles de sommets $V_1, V_2 \subset V$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, un *couplage* $V_1 - V_2$ de dimension k est un ensemble de k chemins sommets disjoints entre V_1 et V_2 . Un tel couplage est maximum quand k est maximal.

3.4.2 Graphe d'un système linéaire structuré

Soit un système linéaire structuré Σ_Λ décrit par les équations différentielles de la forme (3.2.2). Un graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ peut être associé à Σ_Λ de la manière suivante :

- ensemble des sommets $V = U \cup X \cup Y$ où :
 - $U = (u_1, \dots, u_m)$ correspond aux m entrées du système.
 - $X = (x_1, \dots, x_n)$ correspond aux n états du système.
 - $Y = (y_1, \dots, y_p)$ correspond aux p sorties du système.
 - ensemble d'arcs $W = W_{UX} \cup W_{XX} \cup W_{XY}$ où :
 - $W_{UX} = \{(u_j, x_i), b_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles entrées-états.
 - $W_{XX} = \{(x_j, x_i), a_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-états.
 - $W_{XY} = \{(x_j, y_i), c_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-sorties.
- avec b_{ij} (*resp.* a_{ij}, c_{ij}) l'élément (i, j) de la matrice B (*resp.* A, C).

Cette représentation est naturelle par rapport à la symbolique d'un système linéaire. Un sommet représente bien une variable du système et un arc correspond bien à une relation de dépendance (directe) entre deux variables.

Avec le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ associé au système Σ_Λ , nous avons les définitions suivantes :

Définition 3.4.2. (Connexion à l'entrée) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Si pour tout sommet $x_i \in X$, il existe un chemin $\mathcal{R}(u_j, x_i)$ sur $G(\Sigma_\Lambda)$ où $u_j \in U$, Σ_Λ est dit connecté à l'entrée.

Définition 3.4.3. (Connexion à la sortie) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.2) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Si pour tout sommet $x_i \in X$, il existe un chemin $\mathcal{R}(x_i, y_k)$ sur $G(\Sigma_\Lambda)$ où $y_k \in Y$, Σ_Λ est dit connecté à la sortie.

Avec un système Σ_Λ qui est connecté à l'entrée (*resp.* à la sortie), on dit que son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à l'entrée (*resp.* à la sortie).

Définition 3.4.4. (*Chemin entrée-sortie*) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Un chemin

$$\mathcal{R}(v_1, v_q) = (v_1, v_2, \dots, v_q)$$

tel que $v_1 \in U$ et $v_q \in Y$ est appelé un chemin entrée-sortie.

3.4.3 Exemple

Exemple 3.4.1

Considérons le système Σ_Λ de type (3.2.2) décrit par la représentation d'état suivante :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}, C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_7 & 0 \\ \lambda_8 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix}$$

le système Σ_Λ a deux entrées, trois états et deux sorties. Le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ a donc pour ensemble de sommets :

$$V = \{u_1, u_2, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\}$$

Les arcs correspondent aux paramètres non nuls λ_i des matrices A_Λ , B_Λ et C_Λ . Par exemple :

- l'arc (u_1, x_1) correspond à l'élément b_{11} de B_Λ qui est non nul

$$b_{11} = \lambda_5 \neq 0$$

- la boucle autour de x_1 correspondant à l'élément a_{11} de A_Λ qui est non nul

$$a_{11} = \lambda_1 \neq 0$$

Le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est présenté Figure 3.3 :

Ce système est connecté à l'entrée et connecté à la sortie comme le montre la Figure 3.3. Sur $G(\Sigma_\Lambda)$, nous pouvons trouver des chemins entrée-sortie tels que le chemin $\{u_1, x_1, x_3, y_2\}$ ou le chemin $\{u_2, x_3, x_2, y_1\}$.

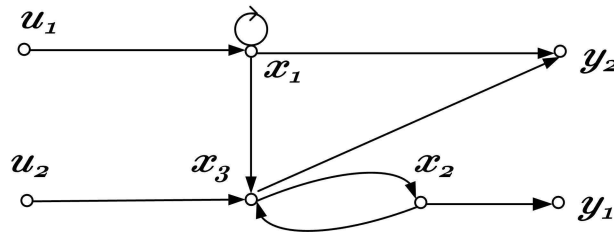


FIG. 3.3 – $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 3.4.1

3.5 Illustration sur quelques propriétés

Le graphe associé s'avère être un outil très efficace pour étudier les propriétés génériques de ces systèmes. Nous illustrons ici l'analyse de quelques propriétés du système tels que le rang générique et la commandabilité.

3.5.1 Rang générique

D'après la Définition (3.3.2), le rang générique $g\text{-rang } [T_\Lambda(s)]$ de la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$ d'un système linéaire structuré Σ_Λ est défini comme le rang maximum pour toutes les matrices admissibles $T(s)$ par rapport à $T_\Lambda(s)$. Sur le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$, le rang générique $g\text{-rang}$ peut être calculé comme suit :

Théorème 3.5.1. [van der Woude, 1991a; Commault et al., 1991; Dion et al., 2003] Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.2) et $G(\Sigma_\Lambda)$ son graphe associé. Le rang générique de $T_\Lambda(s)$ est égal au nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints sur $G(\Sigma_\Lambda)$.

Exemple 3.5.1

Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par le triplet $(A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda)$ suivant :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & \lambda_5 & 0 \end{pmatrix}, B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_6 & \lambda_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} \end{pmatrix}.$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 3.4.

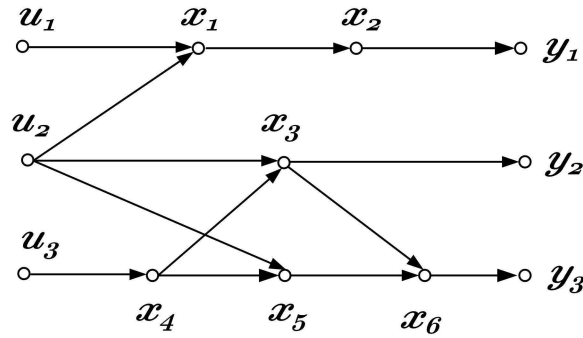


FIG. 3.4 – $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 3.5.1

Sur $G(\Sigma_\Lambda)$, le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints est égal à 3. Par l'exemple on a les 3 chemins (u_1, x_1, x_2, y_1) , (u_2, x_3, y_2) et $(u_3, x_4, x_5, x_6, y_3)$. On a donc

$$g - \text{rang} [T_\Lambda(s)] = 3$$

3.5.2 La commandabilité générique

Dans cette partie nous allons aborder la commandabilité pour les systèmes linéaires structurés. Les résultats pour cette propriété sont bien connus dans la littérature (voir [Lin, 1974; Glover and Silverman, 1976; Shields and Pearson, 1976; Reinschke, 1988]).

La commandabilité

La notion de commandabilité pour le système linéaire Σ de type (3.2.1) est bien connue (Kailath [1980]). Rappelons maintenant la définition :

Définition 3.5.1. (Commandabilité) Soit Σ un système linéaire de type (3.2.1). Σ est dit commandable si quel que soit $x(t_i)$ l'état à l'instant initial, et quel que soit $x(t_f)$ l'état à l'instant final, il existe une commande $u(t)$, appliquée sur l'intervalle de temps fini $[t_i; t_f]$, qui permet de rejoindre l'état final partant de l'état initial.

Pour vérifier la commandabilité d'un système linéaire, on utilise le plus souvent le critère de Kalman :

Théorème 3.5.2. *Soit Σ un système linéaire de type (3.2.1). Σ est commandable si et seulement si :*

$$\text{rang } [\mathcal{Q}_c] = n \quad (3.5.1)$$

où

$$\mathcal{Q}_c = [B \quad AB \quad \dots \quad AB^{n-1}] \quad (3.5.2)$$

\mathcal{Q}_c est appelée la matrice de commandabilité du système Σ

Il existe aussi le test de *PBH* développé par Popov - Belevitch - Hautus dans les années soixante :

Théorème 3.5.3. *Soit Σ un système linéaire de type (3.2.1). Σ est commandable si et seulement si pour toute valeur de s :*

$$\text{rang } [sI - A \quad B] = n \quad (3.5.3)$$

La commandabilité générique

Pour un système linéaire structuré Σ_Λ de type (3.2.2), avec chaque choix de $\lambda_i \in \Lambda$, on obtient un système linéaire admissible de type (3.2.1) comme défini par la Définition (3.2.2). En conséquence, on peut vérifier si chaque système linéaire admissible est commandable ou non. Si la commandabilité est vérifiée pour presque tous les systèmes linéaires admissibles, on dit que le système linéaire structuré Σ_Λ est *génériquement commandable*.

Pour vérifier graphiquement la commandabilité d'un système linéaire structuré, C.T. Lin a proposé la notion de "*dilatation*" :

Définition 3.5.2. (*Dilatation*)[Lin, 1974] *Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.2) et $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ son graphe associé. On considère S un ensemble de k_S sommets d'état. Notons $T(S)$ l'ensemble de sommets $v_i \in V$ pour $i = 1, 2, \dots, k_T$ tels qu'il existe un arc $(v_i, v_j) \in W$ où $v_j \in S$. S est une dilatation si :*

$$k_S - k_T = d_S > 0 \quad (3.5.4)$$

d_S est appelé défaut de dilatation S .

Les conditions de la commandabilité générique peuvent s'exprimer comme suit :

Théorème 3.5.4. *Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (3.2.2) et $G(\Sigma_\Lambda)$ son graphe associé. Σ_Λ est génériquement commandable si et seulement si :*

1. Le système Σ_Λ est connecté à l'entrée,
2. Il n'existe pas de dilatation dans $G(\Sigma_\Lambda)$.

Physiquement, s'il existe dans le graphe associé un sommet d'état qui n'est pas connecté à l'entrée, ce sommet représente un état qui n'est pas atteignable par des commandes. D'un autre côté, la dilatation représente un ensemble de sommets d'état qui est piloté directement par un autre ensemble plus petit en nombre d'éléments. Dans ces deux cas, le système n'est pas commandable. Nous allons clarifier ces notions par quelques petits exemples.

Exemples

Exemple 3.5.2

Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par la paire (A_Λ, B_Λ) suivante (matrice C_Λ quelconque de dimension appropriée) :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 3.5

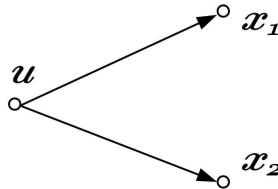


FIG. 3.5 – $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 3.5.2

Avec cet exemple, en prenant $S = \{x_1, x_2\}$, on trouve $T(S) = \{u\}$ donc S est une dilatation. Avec cette dilatation, le système Σ_Λ dans l'Exemple 3.5.2 n'est pas commandable. Vérifions le rang de la matrice de commandabilité :

$$g\text{-rang } [\mathcal{Q}_{\Lambda C}] = g\text{-rang } [B_\Lambda \quad A_\Lambda B_\Lambda] = g\text{-rang } \begin{bmatrix} \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Pour toutes les valeurs de λ_5 et λ_6 , le $g\text{-rang}[\mathcal{Q}_{\Lambda C}]$ est inférieur à 2, le nombre d'états. Cela confirme la non commandabilité du système.

Exemple 3.5.3

Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par la paire (A_Λ, B_Λ) suivante (matrice C_Λ quelconque de dimension appropriée) :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 3.6.

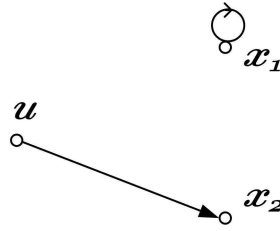


FIG. 3.6 – $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 3.5.3

Dans ce cas, il n'existe pas de dilatation sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$. Par contre, le sommet x_1 n'est pas connecté à l'entrée. Le système Σ_Λ dans cet exemple n'est pas commandable. Le rang de la matrice de commandabilité vaut clairement :

$$g\text{-rang} [\mathcal{Q}_{\Lambda C}] = g\text{-rang} [B_\Lambda \quad A_\Lambda B_\Lambda] = g\text{-rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

le $g\text{-rang}[\mathcal{Q}_{\Lambda C}]$ est inférieur à 2 quelle que ce soit la valeur de λ_6 . Cela confirme la non commandabilité du système.

Exemple 3.5.4

Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par la paire (A_Λ, B_Λ) suivant (matrice C_Λ quelconque de dimension appropriée) :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 3.7.

Le système Σ_Λ est connecté à l'entrée et $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient aucune dilatation, donc Σ_Λ est commandable. Le rang de la matrice de commandabilité dans ce cas :

$$g\text{-rang} [\mathcal{Q}_{\Lambda C}] = g\text{-rang} [B_\Lambda \quad A_\Lambda B_\Lambda] = g\text{-rang} \begin{bmatrix} \lambda_5 & \lambda_1 \lambda_5 \\ \lambda_6 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

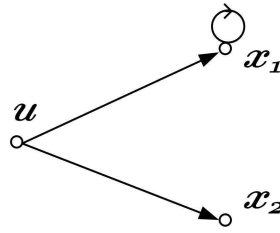


FIG. 3.7 – $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 3.5.4

Pour presque toutes les valeurs de λ_1 , λ_5 et λ_6 , $g - rang[\mathcal{Q}_{\Lambda C}]$ est égal à 2 sauf pour les cas suivants :

$$\lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_5 = 0 \text{ ou } \lambda_6 = 0$$

En effet, avec $\lambda_1 = 0$, on retrouve le système non commandable de l'Exemple 3.5.2. Avec $\lambda_5 = 0$, on retrouve le système non commandable de l'Exemple 3.5.3. Avec $\lambda_6 = 0$, on a aussi un système non commandable avec le sommet d'état x_2 qui n'est pas connecté à l'entrée.

Il existe aussi des conditions équivalentes de la commandabilité générique exprimées en termes graphiques de *famille de chemins et de cycles recouvrant* ou de “*cactus*”, en termes algébriques “*forme I*”, “*forme II*” présentées dans Lin [1974]; Dion et al. [2003].

3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté les systèmes linéaires structurés. La notion de genericité a été abordée car elle joue un rôle prédominant dans l'étude de tels systèmes. Nous avons montré comment associer un graphe orienté aux systèmes linéaires structurés. L'intérêt de cette approche a été illustré sur deux propriétés classiques d'un système linéaire : le rang de la matrice de transfert et la commandabilité. Dans les chapitres suivants, nous allons nous concentrer sur deux autres propriétés du système : l'observabilité et le rejet de perturbation par retour de mesure.

Chapitre 4

L'observabilité des systèmes linéaires structurés

4.1 Formulation du problème

Ce chapitre est consacré à l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires structurés. Dans un premier temps, nous allons étudier le problème de placement des capteurs pour l'observabilité, c'est-à-dire quand le système n'est pas observable, on proposera une stratégie d'implantation de capteurs supplémentaires pour que le système devienne observable. Ensuite, le problème de classification des capteurs par rapport à leur importance pour la préservation de l'observabilité sera traité.

4.1.1 Observabilité générique

L'observabilité des systèmes linéaires structurés n'est pas affectée par des entrées du système. Considérons donc un système linéaire structuré Σ_Λ décrit par des équations d'état de type (3.2.2) sans les entrées :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où $x(t)$ est le vecteur des états de dimension n , $y(t)$ est le vecteur des sorties de dimension p . A_Λ et C_Λ sont des matrices structurées de dimensions respectives $n \times n$ et $p \times n$.

Pour un système linéaire structuré Σ_Λ de type (4.1.1), avec chaque choix de $\lambda_i \in \Lambda$, on obtient un système linéaire admissible de type (2.4.1) comme défini par la Définition 3.2.2. En conséquence, on peut vérifier si chaque système linéaire admissible est observable ou non. Si l'observabilité est vérifiée pour presque tous les systèmes linéaires admissibles, on dit que le système linéaire structuré Σ_Λ est *génériquement observable*.

L'observabilité d'un système Σ_Λ de type (4.1.1) peut être vérifiée par le critère de Kalman sur les matrices structurées A_Λ et C_Λ :

Théorème 4.1.1. *Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1). Σ_Λ est génériquement observable si et seulement si :*

$$\text{g-rang } [\mathcal{Q}_{\Lambda O}] = n \quad (4.1.2)$$

où

$$\mathcal{Q}_{\Lambda O} = \begin{bmatrix} C_\Lambda \\ C_\Lambda A_\Lambda \\ \vdots \\ C_\Lambda A_\Lambda^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

\mathcal{Q}_{AO} est appelée la matrice d'observabilité générique du système Σ_Λ

4.1.2 Placement des capteurs pour l'observabilité

Pour l'instant, à un système Σ_Λ , on associe la propriété \mathcal{P}_Λ qui est l'observabilité du système Σ_Λ et Y l'ensemble de capteurs existants de Σ_Λ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_\Lambda(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma_\Lambda \text{ est observable} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Si $\mathcal{P}_\Lambda(Y) = 0$, on cherche à implanter un nouvel ensemble de capteurs supplémentaires Z qui collectent de nouvelles mesures

$$z(t) = H_\Lambda x(t)$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^q$, $z_i(t)$ est la mesure obtenue à partir de i^{ime} capteur supplémentaire, H est une matrice de dimension $q \times n$. Nous avons alors un système dit *structuré composé* de type 4.1.1 :

Définition 4.1.1. (Système structuré composé) Le système suivant est appelé le système structuré composé :

$$\Sigma_\Lambda^c \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \\ z(t) = H_\Lambda x(t) \end{cases}, \quad (4.1.5)$$

Si \mathcal{P}_Λ est vérifiée sur le système composé Σ_Λ^c :

$$\mathcal{P}_\Lambda(Y \cup Z) = 1$$

on dit que le problème de placement des capteurs pour l'observabilité est résolu pour le système Σ_Λ .

4.1.3 Classification des capteurs pour l'observabilité

Partant d'un système linéaire structuré Σ_Λ de type (4.1.1), si ce système est observable, c'est-à-dire avec l'ensemble de capteurs Y du Σ_Λ , nous avons :

$$\mathcal{P}_\Lambda(Y) = 1$$

Dans l'ensemble de capteurs Y , il existe le risque qu'un capteur $y_j \in Y$ tombe en panne à un moment et cela peut faire perdre l'observabilité de Σ_Λ . Pour faire face à ce problème, nous allons classer les capteurs en fonction de leur criticité pour l'observabilité du système. Les capteurs seront classés en trois catégories que nous avons évoquées dans le Chapitre 2 :

- Capteurs essentiels.
- Capteurs inutiles.
- Capteurs utiles.

4.2 Les conditions graphiques de l'observabilité générique

Avec un système linéaire structuré de type (4.1.1), on peut associer un graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ comme dans la section (3.4.2) avec les sous ensembles $U = \emptyset$ et $W_{UX} = \emptyset$. Pour vérifier graphiquement l'observabilité d'un système linéaire structuré de type (4.1.1), dualisons maintenant la notion de "dilatation" définie dans la Définition 3.5.2 :

Définition 4.2.1. (*Contraction*) [Lin, 1974] Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1) et $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ son graphe associé. On considère S un ensemble de k_S sommets d'état. Notons $T(S)$ l'ensemble de sommets $v_i \in V$ pour $i = 1, 2, \dots, k_T$ tels qu'il existe un arc $(v_j, v_i) \in W$ où $v_j \in S$. S est une contraction si :

$$k_S - k_T = c_S > 0 \tag{4.2.1}$$

c_S est appelé défaut de contraction S .

Les conditions de l'observabilité générique peuvent s'exprimer comme suit :

Théorème 4.2.1. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1) et $G(\Sigma_\Lambda)$ son graphe associé. Σ_Λ est génériquement observable si et seulement si :

1. Le système Σ_Λ est connecté à la sortie,
2. Il n'existe pas de contraction dans $G(\Sigma_\Lambda)$.

où la définition de la connexion à la sortie est donnée par la Définition 3.4.4.

Physiquement, s'il existe dans le graphe associé un sommet d'état qui n'est pas connecté à la sortie, ce sommet représente un état qui ne donne aucune information sur des

mesures. D'un autre côté, la contraction représente un ensemble de sommets d'état qui est relié directement à un autre ensemble plus petit en nombre d'éléments. Dans ces deux cas, le système n'est pas observable. Nous allons clarifier ces notions par quelques petits exemples.

4.2.1 Exemple

Exemple 4.2.1

Considérons le système structuré Σ_Λ de type (4.1.1) qui est le dual du système de l'Exemple 3.5.2. Le graphe associé à ce système peut-être obtenu en remplaçant la commande u par la sortie y et en inversant le sens des arcs sur le graphe 3.5. Le graphe associé à ce système est donné Figure 4.1.a

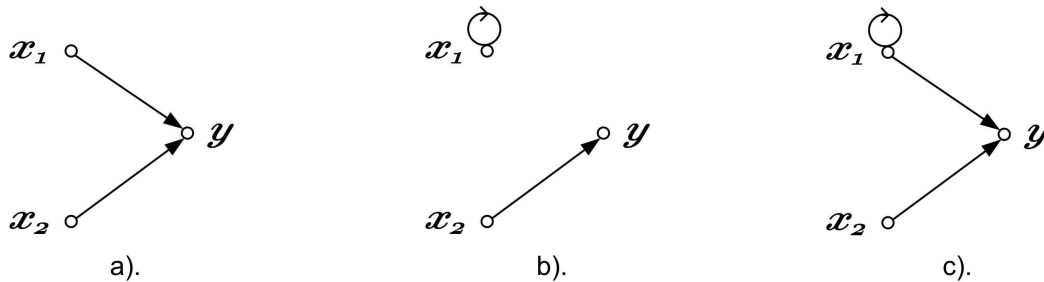


FIG. 4.1 – $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3

Avec cet exemple, en prenant $S = \{x_1, x_2\}$, on trouve $T(S) = \{y\}$ donc S est une contraction. Cela confirme la non observabilité du système.

Exemple 4.2.2

Considérons le système structuré Σ_Λ de type (4.1.1) qui est le dual du système de l'Exemple 3.5.3. Le graphe associé à ce système est donné Figure 4.1.b

Dans ce cas, il n'existe pas de contraction sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$. Par contre, le sommet x_1 n'est pas connecté à la sortie. Le système Σ_Λ dans cet exemple n'est pas observable.

Exemple 4.2.3

Considérons le système structuré Σ_Λ de type (4.1.1) qui est le dual du système de l'Exemple 3.5.3. Le graphe associé à ce système est présenté sur

la Figure 4.1.c.

Comme on le voit sur $G(\Sigma_\Lambda)$, le système Σ_Λ est connecté à la sortie et $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient aucune dilatation, Σ_Λ est donc observable.

Les autres conditions équivalentes de la commandabilité générique mentionnées précédemment (*famille de chemins et de cycles recouvrant*, “*cactus*”, “*forme I*”, “*forme II*” dans Lin [1974]; Dion et al. [2003]) peuvent être dualisées pour l'observabilité générique.

Dans les sections suivantes, nous allons étudier plus profondément les deux conditions de l'observabilité générique qui dépendent de l'ensemble de capteurs du système :

- La connection à la sortie
- L'absence de contraction

4.3 La connexion à la sortie

Pour étudier la connexion à la sortie d'un système Σ_Λ de type (4.1.1), nous allons décomposer son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$.

4.3.1 Décomposition du graphe associé

Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$. Nous rappelons quelques notions de la théorie des graphes qui sont utiles pour la décomposition [Berge, 1973].

Définition 4.3.1. (*Equivalence*) Deux sommets v_i et v_j dans $G(\Sigma_\Lambda)$ sont dits équivalents s'il existe un chemin de v_i à v_j et un chemin de v_j à v_i .

Dans ce contexte on suppose que v_i est équivalent à lui-même. La définition même entraîne la symétrie et la réflexivité. La transitivité résulte de ce que l'on peut concaténer un chemin entre v_i et v_j et un chemin entre v_j et v_k pour obtenir un chemin entre v_i et v_k .

Les classes d'équivalences correspondant à cette relation d'équivalence s'appellent les *composantes fortement connexes* de $G(\Sigma_\Lambda)$:

Définition 4.3.2. (*Composantes fortement connexes*) Un ensemble de sommets $C_F \in V$ de $G(\Sigma_\Lambda)$ est dit une *composante fortement connexe* si :

- $\forall v_i, v_j \in C_F, v_i$ et v_j sont équivalents

– $\forall v_i \in C_F$ et $\forall v_k \notin C_F$, v_i et v_k ne sont pas équivalents

Il existe des algorithmes standards de type combinatoire pour trouver la décomposition canonique du graphe en composantes fortement connexes (voir [Reinschke, 1988]). Les sommets de sortie y_i sont des composantes fortement connexes composées d'un sommet unique.

Les composantes fortement connexes peuvent être dotées d'un ordre partiel naturel. Les composantes fortement connexes \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j sont telles que $\mathcal{C}_i \preceq \mathcal{C}_j$ s'il existe un arc (v_j, v_i) où $v_i \in \mathcal{C}_i$ et $v_j \in \mathcal{C}_j$. Par l'ordre partiel, nous pouvons définir les composantes infimales :

Définition 4.3.3. (Composantes infimales) *les composantes fortement connexes sans arcs sortant dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ sont appelées les composantes infimales.*

Notons que les sommets de sortie sont de telles composantes infimales. Dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$, il y a un autre type de composantes qui nous intéressent :

Définition 4.3.4. (Composantes Pré-infimales) *Dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$, les composantes fortement connexes qui n'ont que des arcs sortant vers les sorties sont appelées les composantes pré-infimales.*

Définition 4.3.5. (Composantes non connectées) *Dans le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$, les composantes infimales qui ne sont pas des sommets de sortie sont appelées les composantes non connectées.*

Pour illustrer ces notions, nous nous proposons l'exemple suivant :

Exemple 4.3.1

Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ présenté Figure 4.2.

Dans cet exemple, nous avons 8 composantes fortement connexes distinguées par des cercles en traits pointillés comme montré Figure 4.2.b. Parmi ces composantes fortement connexes, nous avons quatre composantes infimales :

- $\{y_1\}$
- $\{y_2\}$
- $\{x_{10}\}$
- $\{x_8, x_9\}$

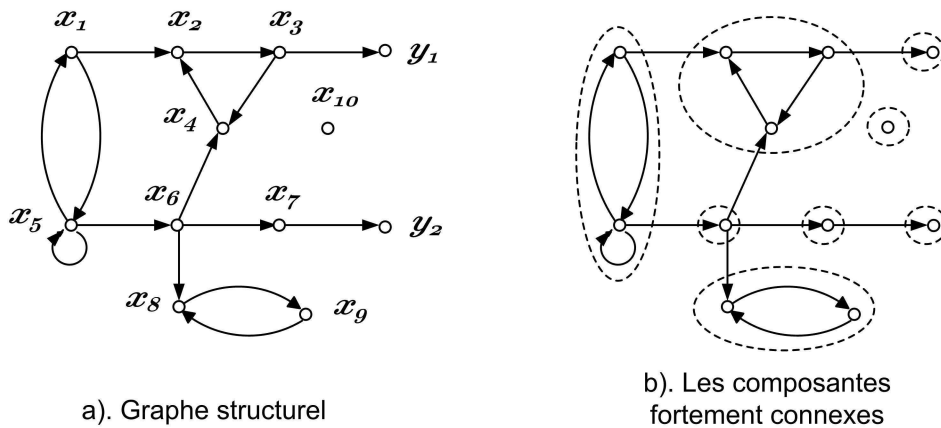


FIG. 4.2 – $G(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 4.3.1 et sa décomposition

deux composantes pre-infimales :

- $\{x_2, x_3, x_4\}$
- $\{x_7\}$

deux composantes non connectées :

- $\{x_{10}\}$
- $\{x_8, x_9\}$

L'intérêt de la décomposition du graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ est de réduire la taille du problème. Pour la connexion à la sortie, nous allons nous concentrer sur les sommets dans des composantes infimales et dans des composantes pré-infimales au lieu de regarder l'ensemble de sommets du graphe. Nous avons une caractérisation de la connexion à la sortie d'un système linéaire :

Proposition 4.3.1. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Σ_Λ est connecté à la sortie si et seulement si toutes les composantes infimales de $G(\Sigma_\Lambda)$ sont des sommets de sortie.*

Démonstration : Tous les sommets d'état de Σ_Λ sont soit connectés à des composantes infimales soit appartiennent à des composantes infimales de $G(\Sigma_\Lambda)$ par la décomposition de $G(\Sigma_\Lambda)$. Quand toutes les composantes infimales sont des sorties, tous les sommets d'état sont connectés à la sortie. Dans ce cas, Σ_Λ est connecté à la sortie d'après la Définition 3.4.4.

Inversement, si une composante infimale n'est pas une sortie, tous les sommets de cette composante ne sont pas connectés à la sortie d'après la Définition 4.3.2. ■

La Proposition 4.3.1 montre que la cause de non connexion à la sortie est la présence des composantes non connectées, c'est-à-dire de composantes infimales qui ne sont pas des sommets de sortie. Nous pouvons vérifier sur l'Exemple 4.3.1, la présence de deux composantes non connectées $\{x_{10}\}$ et $\{x_8, x_9\}$ montre que le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ n'est pas connecté à la sortie.

4.3.2 Graphe de connexion

Pour étudier la connexion à la sortie, nous présentons maintenant un nouveau type de graphe : un graphe non orienté.

Graphe non orienté

Un graphe non orienté est défini de la même façon d'un graphe orienté défini par la Définition 3.4.1 :

Définition 4.3.6. (*Graphe non orienté*) Un graphe non orienté $G = (V, A)$ est un couple d'ensembles constitué par :

- Un ensemble d'éléments $W = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ appelés sommets
- Un ensemble d'éléments $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ appelés arêtes. Une arête $a_h \in A$ est définie par $a_h = (v_i, v_j)$ où v_i, v_j sont appelés les extrémités de l'arête a_h .

Dans un graphe non orienté, on a des arêtes au lieu des arcs dans un graphe orienté.

Sur le graphe non orienté $G = (V, A)$, une chaîne \mathcal{C} allant du sommet v_1 au sommet v_q est une séquence d'arêtes :

$$\mathcal{C}(v_1, v_q) = (v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots (v_{q-2}, v_{q-1}), (v_{q-1}, v_q)$$

telle que $v_i \in V$ pour $i = 1, 2, \dots, q$ et $(v_{i-1}, v_i) \in A$ pour $i = 2, 3, \dots, q$.

S'il existe une chaîne reliant toute paire $v_i, v_j \in W$ d'un graphe non orienté $G = (V, A)$, on dit que le graphe $G = (V, A)$ est *connexe*. Un graphe non orienté $G = (V, A)$ peut être décomposé en composantes connexes disjointes de manière similaire avec la décomposition d'un graphe orienté.

Graphe de connexion

Le graphe de connexion est un graphe non orienté associé au système Σ_Λ défini de la manière suivante :

Définition 4.3.7. (Graphe de connexion) Le graphe $C(\Sigma_\Lambda) = (V_c, W_c)$ dit graphe de connexion est construit à partir de $G(\Sigma_\Lambda)$ comme suit :

1. l'ensemble de sommets est $V_c = V \cup V' \cup Y \cup z$ avec :
 - $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ où chaque v_i correspond à une composante pré-infimale de $G(\Sigma_\Lambda)$,
 - $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_l\}$ où chaque v'_i correspond à une composante non connectée de $G(\Sigma_\Lambda)$,
 - Y est l'ensemble de sommets de sortie $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$,
 - z est un sommet additionnel,
2. l'ensemble d'arêtes est $W_c = \{(v_i, y_j) \mid \text{s'il existe un chemin de la composante pré-infimale correspondante à } v_i, \text{ à } y_j\} \cup \{(y_j, z) \forall j\}$.

Notons que par la définition de $C(\Sigma_\Lambda)$, on relie tous les sommets de sortie y_j au sommet additionnel z .

Exemple 4.3.2

Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ présenté Figure 4.3.

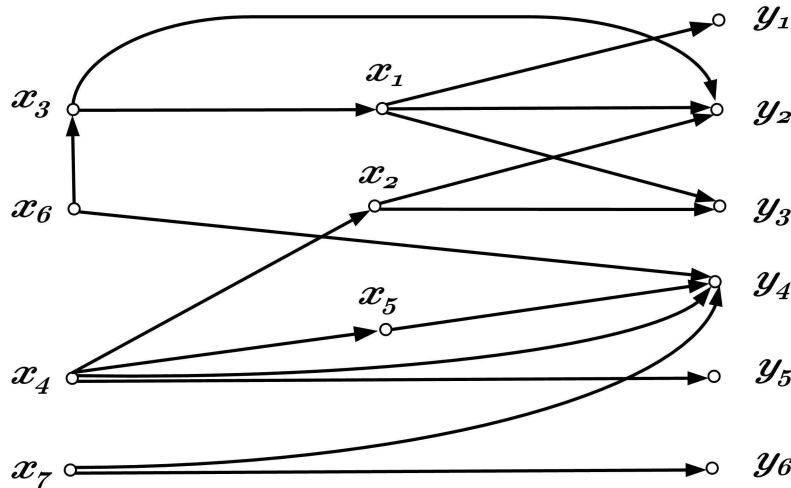


FIG. 4.3 – $G(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 4.3.2

Dans cet exemple, toutes les composantes infimales $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_6\}$ sont des sorties donc $V' = \emptyset$. On a quatre composantes pré-infimales dans $G(\Sigma_\Lambda)$ donc les sommets correspondants de V sont $v_1 \approx \{x_1\}, v_2 \approx \{x_2\},$

$v_3 \approx \{x_5\}$ et $v_4 \approx \{x_7\}$. On relie chaque v_i aux sommets de sortie correspondants : v_1 à y_1, y_2 et y_3 ; v_2 à y_2 et y_3 ... Ensuite, on relie chaque sortie y_j à z par une arête. Le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.4.

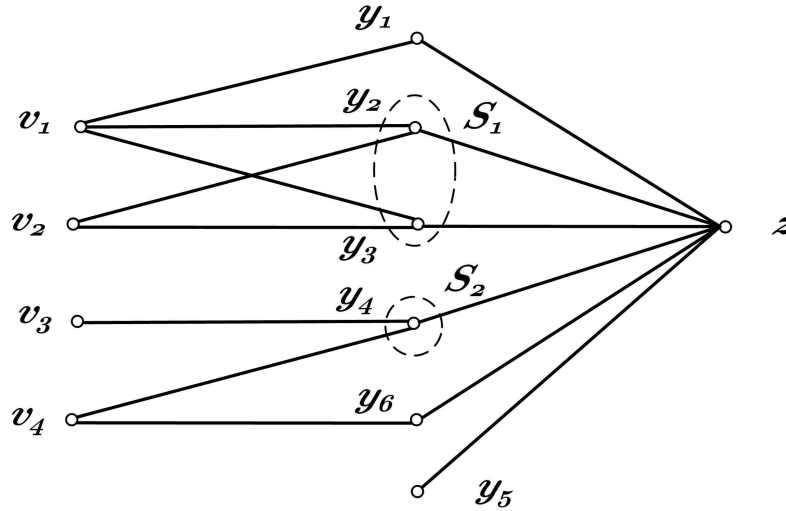


FIG. 4.4 – $C(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 4.3.2

$C(\Sigma_\Lambda)$ nous permet d'analyser de manière simple la connexion à la sortie du système Σ_Λ .

Proposition 4.3.2. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec ses graphes associés $G(\Sigma_\Lambda)$ et $C(\Sigma_\Lambda)$. Le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à la sortie si et seulement si le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe.*

Démonstration : Si $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe, il existe alors une chaîne qui relie chaque v_i à z et cette chaîne traverse un sommet y_j dans $C(\Sigma_\Lambda)$. Toutes les composantes pré-infimales de $G(\Sigma_\Lambda)$ sont connectées à la sortie ainsi que les sommets connectés à ces composantes pré-infimales. $G(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à la sortie d'après la Définition 3.4.4.

Inversement, si $C(\Sigma_\Lambda)$ n'est pas connexe, il existe dans $C(\Sigma_\Lambda)$ au moins un sommet isolé $v'_i \in C(\Sigma_\Lambda)$ qui correspond à une composante non connectée de $G(\Sigma_\Lambda)$. Dans ce cas, $G(\Sigma_\Lambda)$ n'est pas connecté à la sortie d'après la Proposition 4.3.1. ■

Revenons sur l'Exemple 4.3.2, comme le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe (Figure 4.4), ainsi $G(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à la sortie (Figure 4.3).

Grâce au graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$, nous pouvons étudier le problème de placement des capteurs pour la connexion à la sortie de manière plus simple.

4.3.3 Placement des capteurs pour la connexion à la sortie

La connexion à la sortie est une des conditions du théorème sur l'observabilité générique (Théorème 4.2.1). Quand la condition de connexion à la sortie n'est pas vérifiée, nous allons proposer une solution par le placement des capteurs.

Définition 4.3.8. (*Défaut de connexion*) *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec ses graphes associés $G(\Sigma_\Lambda)$ et $C(\Sigma_\Lambda)$. On note \bar{d} le nombre de composantes non connectées de $G(\Sigma_\Lambda)$. \bar{d} est appelé "défaut de connexion".*

Remarque 4.3.1. \bar{d} est égal au nombre d'éléments de type v'_i du graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ par la construction de $C(\Sigma_\Lambda)$.

A partir d'un système linéaire structuré de type (4.1.1), en combinant avec des capteurs supplémentaires $z(t) = H_\Lambda x(t)$, nous avons un système structuré composé Σ_Λ^C comme défini par la Définition 4.1.1. A ce système composé Σ_Λ^c , nous pouvons associer un graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda^c)$ et un graphe non orienté $C(\Sigma_\Lambda^c)$ comme auparavant. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.3.3. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) et un ensemble de capteurs supplémentaires Z . Le système composé est Σ_Λ^c et son graphe associé $C(\Sigma_\Lambda^c)$.*

1. Σ_Λ^c est connecté à la sortie si et seulement si chaque sommet v'_i de $C(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à un sommet z_j qui correspond à un capteur supplémentaire.
2. Le nombre d'états à mesurer est au moins égal à \bar{d} , le défaut de connexion.

Démonstration :

1. Tous les sommets d'état de Σ_Λ sont connectés à des composantes infimales de $G(\Sigma_\Lambda)$. Quand on relie tout les sommets $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_l\}$ de $C(\Sigma_\Lambda)$ où chaque v'_i correspond à une composante infimale de $G(\Sigma_\Lambda)$ à des capteurs supplémentaires puis que l'on relie ces capteurs supplémentaires au sommet additionnel z , le graphe $C(\Sigma_\Lambda^C)$ devient connexe. Σ_Λ^C est donc connecté à la sortie.

2. Supposons que le nombre d'états mesuré soit inférieur à \bar{d} , il existe donc un élément v'_i de $C(\Sigma_\Lambda)$ qui n'est pas connecté à un capteur supplémentaire. Il n'existe donc pas une chaîne qui relie v'_i à z . Dans ce cas, $C(\Sigma_\Lambda^C)$ est non connexe et Σ_Λ^C n'est pas connecté à la sortie d'après la Proposition 4.3.2.

Remarque 4.3.2. La Proposition 4.3.3 indique le nombre d'états à mesurer qui est au moins égal à \bar{d} . Comme un capteur supplémentaire peut mesurer la combinaison de

plusieurs états, le nombre minimal de capteurs supplémentaires peut être inférieur à \bar{d} comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.3.3

Considérons le système structuré Σ_Λ de type (4.1.1) décrit par la paire (A_Λ, C_Λ) suivante :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système Σ_Λ n'est pas connecté à la sortie et on a le défaut de connexion $\bar{d} = 2$. En ajoutant un seul capteur supplémentaire qui mesure les deux états $H_\Lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]$, la connexion à la sortie est assurée comme le montre Figure 4.5 :

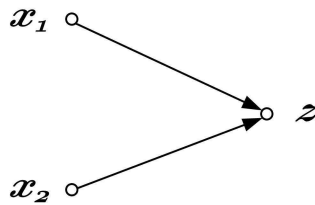


FIG. 4.5 – $G(\Sigma_\Lambda^c)$ pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.3.3

Remarque 4.3.3. Chaque capteur supplémentaire peut mesurer n'importe quel sommet d'état dans une composante non connectée pour que cette composante soit connectée à la sortie.

Exemple de placement des capteurs pour la connexion à la sortie

Exemple 4.3.4

Reconsidérons le système Σ_Λ de l'Exemple 4.3.1 avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ Figure 4.2, nous allons construire le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ de ce système. L'analyse précédente montre que $G(\Sigma_\Lambda)$ a 4 composantes infimales dont deux ne sont pas des sommets de sortie :

1. $v'_1 \approx \{x_{10}\}$
2. $v'_2 \approx \{x_8, x_9\}$

et deux composantes pré-infimales :

1. $v_1 \approx \{x_2, x_3, x_4\}$
2. $v_2 \approx \{x_7\}$

Le graphe $C(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.6.a.

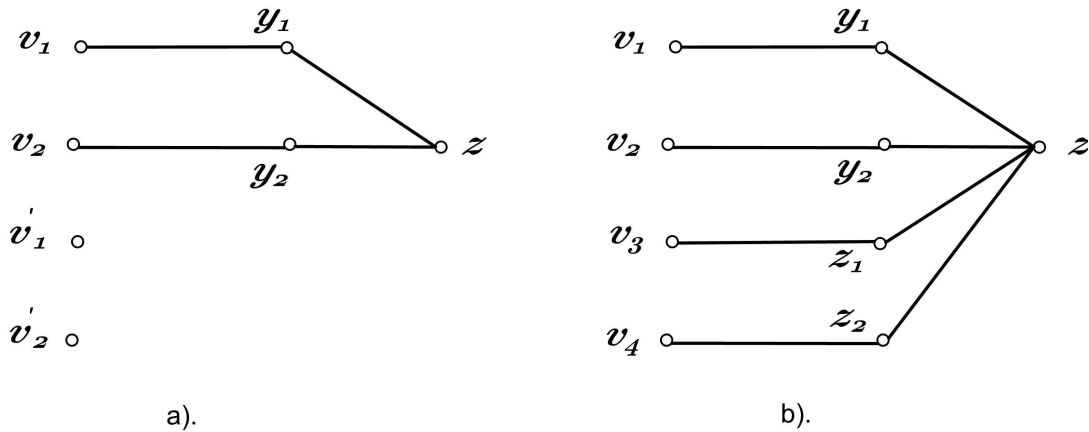


FIG. 4.6 – $C(\Sigma_\Lambda)$ et $C(\Sigma_\Lambda^c)$ pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.3.4

Comme $C(\Sigma_\Lambda)$ n'est pas connexe à cause des deux éléments v_1' et v_2' . Nous pouvons ajouter deux nouveaux capteurs supplémentaires z_1 et z_2 pour v_1' et v_2' . Nous pouvons observer le graphe de connexion composé $C(\Sigma_\Lambda^c)$ dans le Figure 4.6.b, $C(\Sigma_\Lambda^c)$ est connexe donc $G(\Sigma_\Lambda^c)$ est connecté à la sortie. En effet, z_1 doit mesurer x_{10} et z_2 doit mesurer soit x_8 soit x_9 .

Si un capteur peut mesurer plusieurs variables à la fois, nous pouvons proposer un seul capteur supplémentaire z_3 pour tous les deux éléments v_1' et v_2' pour rendre $G(\Sigma_\Lambda^c)$ connecté à la sortie.

4.3.4 Préservation de la connexion à la sortie en présence de défauts de capteurs

En présence de défauts de capteurs sur un système Σ_Λ , supposons qu'on dispose d'un sous-ensemble de capteurs $V_Y \subseteq Y$ dit *solution* comme défini par la Définition 2.3.2, et qui ne contient pas de capteurs défaillants. Pour que l'observabilité soit conservée avec le sous-ensemble de capteurs V_Y , il y a une condition nécessaire qui s'impose : il faut que Σ_Λ reste connecté à la sortie avec V_Y . Pour la préservation de la connexion à la sortie, nous allons utiliser un outil de la théorie des graphes, il s'agit des séparateurs irréductibles.

Séparateurs irréductibles

Définition 4.3.9. (*Séparateur irréductible*) Considérons $H(V, A)$ un graphe non orienté connexe. Pour $S \subseteq V$:

- S est dit séparateur si en enlevant à $H(V, A)$, S et les arêtes incidentes à S , le graphe résultant n'est plus connexe.
- S est dit séparateur irréductible s'il n'existe pas un sous-ensemble propre de S qui soit un séparateur de H .

Remarque 4.3.4. Si S , de cardinalité plus grande que 1, est un séparateur irréductible d'un graphe connexe H , pour n'importe quel sommet $s \in S$, $S \setminus \{s\}$ n'est pas un séparateur, donc la suppression de $S \setminus \{s\}$ ne déconnecte pas H .

Le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ capture toute l'information concernant la connexion à la sortie du système. Nous utiliserons les séparateurs irréductibles composés seulement des sommets de sortie sur ce graphe pour analyser la préservation de la connexion à la sortie en cas de défauts de capteurs.

Pour construire l'ensemble des séparateurs irréductibles inclus dans Y d'un graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$, nous pouvons utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme 4.3.4. Énumération de tous les séparateurs irréductibles

1. Pour tout v_i :
 - $S(v_i) := \{y_j | (v_i, y_j) \in W_c\}$
2. Pour tout $S(v_i)$:
 - S'il n'existe pas $v_k \neq v_i$ tel que $S(v_k) \subset S(v_i)$, alors $S(v_i)$ est un séparateur irréductible.

La construction de l'algorithme vient du fait que $S(v_i)$ est l'ensemble des sommets voisins de v_i , ainsi c'est un séparateur pour v_i . Considérons un ensemble $S'(v_i) \subset S(v_i)$ alors $S'(v_i)$ n'est pas un séparateur pour v_i parce que v_i est connecté au sommet additionnel z par les sommets appartenant à $S(v_i) \setminus S'(v_i)$. Si $S'(v_i)$ est un séparateur, c'est-à-dire que la suppression de $S'(v_i)$ déconnecte le graphe $C(\Sigma_\Lambda)$, $S'(v_i)$ est alors un séparateur pour un sommet $v_j \neq v_i$ et ce séparateur $S(v_j) \equiv S'(v_i)$ apparaît dans la première étape de l'Algorithme 4.3.4. À l'issue de cette étape, nous trouvons tout les séparateurs susceptibles d'être irréductibles.

Dans la deuxième étape, nous vérifions si un séparateur $S(v_i)$ ne contient aucun autre séparateur trouvé dans la première étape, il est alors un séparateur irréductible.

Préservation de la connexion à la sortie en présence de défauts de capteurs

Dans cette sous-section nous nous concentrerons sur les séparateurs composés seulement de sommets de sortie. Rappelons la Définition 2.3.1 sur le défaut de capteur, dans un système Σ_Λ , un capteur en panne implique la suppression de la variable y_j correspondante sur Σ_Λ et cela entraîne la suppression du sommet y_j sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ et des arcs incidents ainsi que les éléments correspondants sur le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.3.5. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$. Supposons que la propriété de connexion à la sortie est vraie pour Σ_Λ . En présence de défauts de capteurs, la connexion à la sortie de Σ_Λ est préservée si et seulement s'il existe au moins un capteur sans défaut dans chaque séparateur irréductible de $C(\Sigma_\Lambda)$ inclus dans Y .*

Démonstration

Suffisance : Comme Σ_Λ est connecté à la sortie, le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe d'après la Proposition 4.3.2. Sous l'hypothèse de défaut de capteurs, le seul moyen pour déconnecter le graphe $C(\Sigma_\Lambda)$ est de supprimer complètement au moins un séparateur irréductible inclus dans Y . Comme il existe au moins un capteur sans défaut dans chaque séparateur irréductible, aucun séparateur irréductible n'a été supprimé, $C(\Sigma_\Lambda)$ reste connexe. D'après la Proposition 4.3.2, Σ_Λ reste connecté à la sortie.

Nécessité :

Supposons qu'il existe un séparateur irréductible S_i du graphe $C(\Sigma_\Lambda)$ qui ne contient que des capteurs en panne. Alors l'ensemble $\{Y \setminus S_i\}$ ne peut pas assurer la connexion du graphe $C(\Sigma_\Lambda)$ à cause de la suppression complète du séparateur irréductible S_i . Quand $C(\Sigma_\Lambda)$ n'est plus connexe, Σ_Λ devient non connecté à la sortie d'après la Proposition 4.3.2. ■

En utilisant le résultat de la Proposition 4.3.5, nous pouvons classer les capteurs en trois catégories pour la préservation de la connexion à la sortie comme suit :

Théorème 4.3.6. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$. Supposons que la propriété de la connexion à la sortie soit vraie pour $G(\Sigma_\Lambda)$.*

1. Les capteurs essentiels \bar{E} pour la propriété de connexion à la sortie sont les séparateurs irréductibles de $C(\Sigma_\Lambda)$ inclus dans Y de cardinalité 1.
2. Les capteurs inutiles \bar{L} pour la propriété de connexion à la sortie sont ceux qui n'appartiennent à aucun séparateur irréductible de $C(\Sigma_\Lambda)$ inclus dans Y .

Démonstration : Considérons un capteur y^* et V_Y une solution pour le problème de connexion à la sortie de Σ_Λ tel que $y^* \in V_Y$. Avec l'ensemble de capteur V_Y , nous pouvons construire le graphe de connexion correspondant $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$ qui est connexe d'après la Proposition 4.3.2.

1. Supposons que le capteur y^* appartient à un séparateur irréductible de cardinalité 1. Si on supprime y^* , $\{V_Y \setminus y^*\}$ n'est plus une solution pour la connexion à la sortie car un séparateur irréductible est supprimé sur $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$. y^* appartient à toutes les solutions V_Y pour la connexion à la sortie, y^* est donc un capteur essentiel d'après la Définition 2.3.4.

Inversement, supposons que le capteur y^* appartient à un séparateur irréductible de cardinalité plus grande que 1 ou il n'appartient à aucun séparateur irréductible. La suppression de y^* seul n'a aucun effet sur la connexion du graphe $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$ correspondant, c'est-à-dire que le graphe de connexion associé à l'ensemble de capteurs $\{V_Y \setminus y^*\}$ reste connexe d'après la Remarque 4.3.4. y^* n'est donc pas un capteur essentiel.

2. Supposons que le capteur y^* n'appartient à aucun séparateur irréductible du graphe $C(\Sigma_\Lambda)$. De la construction des séparateurs irréductibles donnée par l'Algorithme 4.3.4, chaque séparateur irréductible du graphe $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$ est inclus dans un séparateur irréductible du graphe $C(\Sigma_\Lambda)$. Le capteur y^* n'appartient donc à aucun séparateur irréductible du graphe $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$. Pour toute solution V_Y contenant y^* , la suppression du capteur y^* ne déconnecte pas le graphe $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$ car aucun séparateur irréductible n'est totalement supprimé. Comme $C_{V_Y}(\Sigma_\Lambda)$ reste connexe, la connexion à la sortie de Σ_Λ est conservée. Cela montre que y^* est un capteur inutile d'après la Définition 2.3.3.

Inversement, supposons que le capteur y^* appartient à un séparateur irréductible S du graphe $C(\Sigma_\Lambda)$. Pour tout séparateur irréductible $S' \neq S$, S' contient au moins un sommet qui n'est pas dans S par l'irréductibilité de ces séparateurs. Alors $\{Y \setminus (S \setminus y^*)\}$ est une solution pour la connexion à la sortie comme dans cet ensemble il existe au moins un sommet dans chaque séparateur irréductible. La suppression de y^* de la solution $\{Y \setminus (S \setminus y^*)\}$ détruit la connexion du graphe de connexion correspondant car il n'y a plus de sommet dans S . Cela montre que y^* n'est pas un capteur inutile. ■

Exemple 4.3.5

Reconsidérons le système linéaire Σ_Λ dont son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est présenté Figure 4.3 et son graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ présenté Figure 4.4.

En appliquant l'Algorithme 4.3.4, on trouve deux séparateurs irréductibles inclus dans l'ensemble Y :

- $S_1 = \{y_2, y_3\}$
- $S_2 = \{y_4\}$

Grâce au Théorème 4.3.6, on peut donc classer les capteurs pour la connexion à la sortie :

- $\bar{L} = \{y_1, y_5, y_6\}$ l'ensemble des capteurs inutiles parce que ces capteurs n'appartiennent à aucun séparateur irréductible.
- $\bar{F} = \{y_2, y_3, y_4\}$ l'ensemble des capteurs utiles.
- $\bar{E} = \{y_4\}$ l'ensemble des capteurs essentiels car $y_4 \in S_2$ qui est un séparateur irréductible de cardinalité 1.

Pour préserver la connexion à la sortie de ce système, on doit assurer au moins que les capteurs $\{y_2, y_4\}$ ou $\{y_3, y_4\}$ soient sans défauts. On peut vérifier aisément ces résultats sur les graphes $C(\Sigma_\Lambda)$ et $G(\Sigma_\Lambda)$ des Figures 4.4 et 4.3.

4.4 L'absence de contraction

Pour caractériser la contraction puis étudier l'absence de contraction sur un graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ associé à un système linéaire Σ_Λ de type (4.1.1), nous allons utiliser un autre type de graphe : le graphe biparti et une décomposition du graphe biparti.

4.4.1 Caractérisation de la contraction

Graphe biparti

Dans cette sous-section, nous rappelons la notion de graphe biparti, qui est un outil bien adapté aux calculs de rang générique des matrices.

Définition 4.4.1. (*Graphe biparti*) Avec un graphe orienté $G = (V, W)$ défini par la Définition 3.4.1, s'il existe une partition $V = V^+ \cup V^-$ telle que :

- $V^+ \cap V^- = \emptyset$
 - $\forall v_i, v_j \in V^+ \text{ (Resp } V^-), \nexists (v_i, v_j) \in W$
- alors $G = (V, W)$ est appelé graphe biparti

Autrement dit, le graphe biparti consiste en deux ensembles disjoints de sommets et il n'existe pas d'arc entre deux sommets qui appartiennent au même ensemble. Par convention, on notera un graphe biparti

$$B = (B^+, B^-; W')$$

où B^+ et B^- sont les deux ensembles de la partition des sommets et W' l'ensemble d'arcs.

Considérons un système linéaire structuré Σ_Λ du type (4.1.1) comme précédemment, un graphe biparti

$$B(\Sigma_\Lambda) = (B^+, B^-; W') \quad (4.4.1)$$

peut être associé au système Σ_Λ de la manière suivante :

- Nous dédoublons chaque sommet d'état x_i de Σ_Λ en deux sommets x_i^+ et x_i^- . Nous avons donc :
 - $X^+ = \{x_1^+, \dots, x_n^+\}$ est le premier ensemble de sommets d'état
 - $X^- = \{x_1^-, \dots, x_n^-\}$ est le deuxième ensemble de sommets d'état
 - $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie.
- l'ensemble de sommets B^+, B^- est donné par
 - $B^+ = X^+$
 - $B^- = X^- \cup Y$
- l'ensemble d'arcs W' est défini par $W_A \cup W_C$ où
 - $W_A = \{(x_j^+, x_i^-) | a_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-états.
 - $W_C = \{(x_j^+, y_i) | c_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-sorties.

Notons qu'un élément de la matrice $a_{ij} \neq 0$ (*resp.* $c_{ij} \neq 0$) signifie que l'élément (i, j) de la matrice A (*resp.* C) est un paramètre libre (structurellement différent de zéro). Par convention, on appelle B^+ l'ensemble de sommets à “gauche” et B^- l'ensemble de sommets à “droite” par leur positions sur le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$.

Dans un graphe biparti, nous avons une structure particulière qui s'appelle un “couplage”

Définition 4.4.2. (Couplage) Dans un graphe biparti $B = (B^+, B^-; W')$, un ensemble d'arcs $M \subseteq W'$ tels que les arcs dans M n'ont aucun sommet en commun est appelé un couplage.

Le cardinalité d'un couplage, (le nombre des arcs) s'appelle également sa taille. Un couplage M est dit *maximum* s'il a une cardinalité maximum. Le problème du couplage maximum est de trouver un couplage de cardinalité maximale. Ce problème peut être résolu en utilisant des algorithmes très efficaces basés sur les chaînes alternées augmentantes ou les idées de la théorie du flot maximal [Hopcroft and Karp, 1973].

Avec un couplage M , nous pouvons associer à chaque arc du couplage un arc allant dans le sens inverse. Après l'association des arcs, nous définissons un *chemin alterné* comme un chemin dont les arêtes sont alternativement dans M et en dehors de M . Un *circuit alterné* est défini de la même manière. Un sommet de B est dit saturé par M s'il appartient à ce couplage. Un *chemin faisable* est un chemin alterné de longueur paire avec un sommet extrémité non saturé par M (sommet initial ou sommet terminal du chemin).

Exemple 4.4.1

Considérons le système linéaire structuré Σ_Λ donc son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ présenté Figure 4.7.a. Son graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$ présenté Figure 4.7.b.

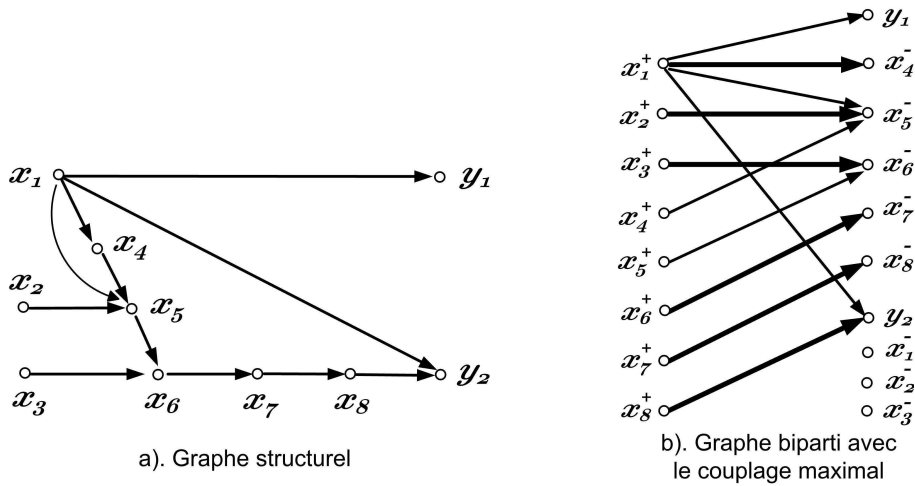


FIG. 4.7 – $G(\Sigma_\Lambda)$ et un couplage maximum sur $B(\Sigma_\Lambda)$ pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.4.1

Sur $B(\Sigma_\Lambda)$, on peut trouver un couplage maximum formé par les arcs en trait épais : $M = \{(x_1^+, x_4^-); (x_2^+, x_5^-); (x_3^+, x_6^-); (x_6^+, x_7^-); (x_7^+, x_8^-); (x_8^+, y_2)\}$

Avec le couplage M ci-dessus, on peut trouver des chemins alternés tels que $\{(x_4^-, x_1^+); (x_1^+, x_5^-); (x_5^-, x_2^+)\}$ ou $\{(x_4^-, x_1^+); (x_1^+, y_2); (y_2, x_8^+)\}$, ... Les exemples de chemin faisable sont $\{(x_4^-, x_1^+); (x_1^+, y_1)\}$; $\{(x_5^+, x_6^-); (x_6^-, x_3^+)\}$, ... Sur ce graphe biparti, il n'existe pas de circuit alterné.

Il est connu (Lin [1974]) que l'absence de contraction est équivalente au fait que la matrice $\begin{bmatrix} A_\Lambda \\ C_\Lambda \end{bmatrix}$ est génériquement de rang plein.

La notion de couplage permet une caractérisation simple de l'absence de contraction en termes de graphe biparti du système ce qui dans notre cas peut être énoncé comme suit.

Proposition 4.4.1. (*[Commault et al., 2002b]*) *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et avec son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. Il n'existe pas de contraction dans $G(\Sigma_\Lambda)$ si et seulement s'il existe un couplage de taille n dans $B(\Sigma_\Lambda)$.*

DM décomposition

La Dulmage-Mendelsohn (DM)- Décomposition permet de décomposer de façon unique un graphe biparti B en sous-graphes bipartis irréductibles partiellement ordonnés $B_i = (B_i^+, B_i^-; W_i')$ ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$) dits composantes de la DM-Décomposition. L'algorithme pour la DM-Décomposition est présenté dans [Murota, 1987] (voir Annexe page 133). Nous rappelons ici les propriétés de ces composantes :

Proposition 4.4.2. *Considérons $B = (B^+, B^-; W')$ un graphe biparti et $B_i = (B_i^+, B_i^-; W_i')$ ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$) ses DM-Composantes.*

1. *Un couplage maximum sur B est une union de couplages maximaux sur les DM-Composantes B_i ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$).*
2. *Un sommet $v \in B_0^-$ (ou B_i^+, B_i^- ($i = 1, \dots, r$) ou B_∞^+) est saturé par n'importe quel couplage maximum sur B .*
3. *Un sommet $v \in B^+$ appartient à B_0 si et seulement s'il existe un couplage maximum sur B qui ne sature pas v .*
4. *Un sommet $v \in B^-$ appartient à B_∞ si et seulement s'il existe un couplage maximum sur B qui ne sature pas v .*

En effet, la DM-Décomposition est équivalente à une permutation des lignes et des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A_\Lambda \\ C_\Lambda \end{bmatrix}$ pour obtenir la forme bloc diagonale présentée Figure

4.8. Nous avons $r_\Sigma = \text{rang} \begin{bmatrix} A_\Lambda \\ C_\Lambda \end{bmatrix} \leq n$.

Le fait que $r_\Sigma < n$ c'est-à-dire que la matrice $\begin{bmatrix} A^T & ; & C^T \end{bmatrix}^T$ n'est pas de rang plein implique qu'il y a des colonnes de $\begin{bmatrix} A^T & ; & C^T \end{bmatrix}^T$ qui sont combinaison linéaire des autres colonnes. Par cette permutation, nous pouvons faire apparaître un bloc qui correspond à la partie B_0 de la DM-Décomposition. On a $r - r_\Sigma = |B_0^+| - |B_0^-|$ où $|\cdot|$ est la cardinalité d'un ensemble.

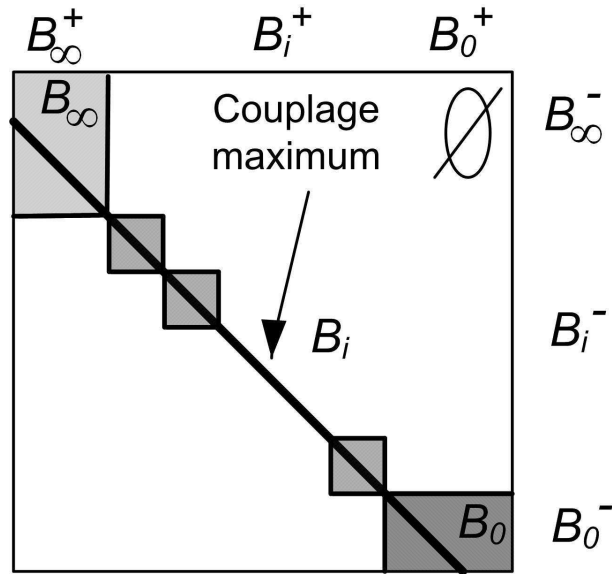


FIG. 4.8 – DM-Décomposition

Exemple 4.4.2

Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.3 et considérons le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$. Nous construisons la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$ comme dans Murota [1987]. Alors $B_0 = \emptyset$ et $B_\infty = \{x_4^-, x_6^-, x_7^-, y_5, x_4^+, x_2^-, x_5^-, y_1, x_1^+, y_2, x_3^+, x_1^-, x_2^+, y_3\}$. Finalement, $B_1 = \{x_5^+; y_4\}$, $B_2 = \{x_6^+; x_3^-\}$ et $B_3 = \{x_7^+; y_6\}$ comme montré Figure 4.9.

Grâce à la DM-Décomposition, nous pouvons caractériser l'absence de contraction comme suit :

Proposition 4.4.3. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient pas de contraction si et seulement si la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$ est telle que $B_0 = \emptyset$.*

Démonstration : Supposons que le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient pas de contraction alors il existe un couplage maximum M de taille n dans $B(\Sigma_\Lambda)$ d'après la Proposition 4.4.1. Comme le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$ contient n sommets à gauche $B^+ = \{x_1^+, \dots, x_n^+\}$, ce couplage maximum M doit couvrir tous ces n sommets. Dans ce cas, la partie B_0 est vide : $B_0 = \emptyset$ dans la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$ d'après la Proposition 4.4.2 (troisième point de cette proposition).

Inversement, supposons qu'il existe une contraction sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ alors le couplage maximum M sur le graphe $B(\Sigma_\Lambda)$ est de taille inférieure à n d'après la Proposition 4.4.1. Si on note $card(M)$ la taille de M , il existe donc $n - card(M)$ sommets dans B^+ qui ne sont pas saturés par M . Alors, dans la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$, $B_0 \neq \emptyset$. ■

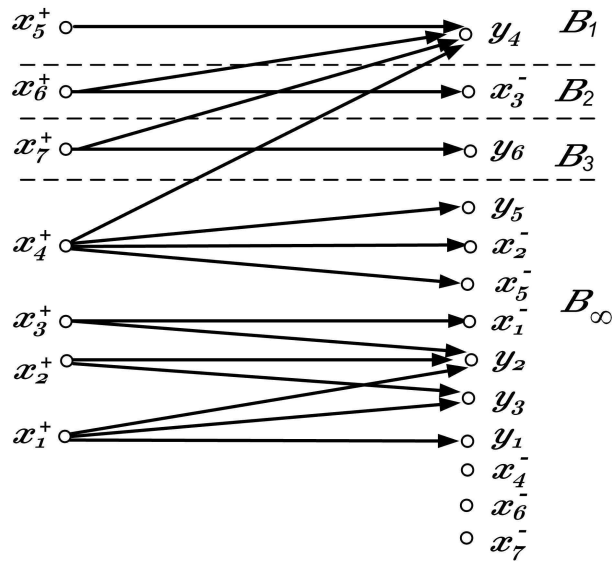


FIG. 4.9 – $B(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 4.4.2

Avec la caractérisation de la partie B_0 donnée par la DM-Décomposition, nous pouvons définir le défaut de contraction comme suit :

Définition 4.4.3. (Défaut de contraction) *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec son graphe associé $B(\Sigma_\Lambda)$ et la partie B_0 issue de la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$. On note \hat{d} la différence de nombre de sommets de B_0^+ et B_0^- :*

$$\hat{d} = |B_0^+| - |B_0^-|$$

\hat{d} est appelé "défaut de contraction".

La Proposition 4.4.3 nous donne une caractérisation équivalente plus concrète des contractions dans un graphe. Dans ce qui suit, nous allons utiliser cette proposition pour le problème de placement des capteurs pour l'annulation de contraction, ensuite la classification des capteurs en fonction de leur nécessité pour que le système reste sans contraction en présence de défauts de capteurs.

4.4.2 Placement des capteurs pour l'annulation de contraction

Avec un système Σ_Λ ayant des contractions sur le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$, on trouve la composante B_0 dans la DM-Décomposition du graph $B(\Sigma_\Lambda)$. Pour annuler ces contractions, il nous faut des capteurs supplémentaires de type

$$z(t) = H_\Lambda x(t)$$

qu'on a introduits précédemment dans la Section 4.5. Notre objectif, est qu'il n'y ait plus de contraction sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda^c)$ associé au système composé Σ_Λ^c de type 4.1.1. Nous avons le résultat suivant qui montre le nombre de capteurs supplémentaires nécessaires pour annuler la contraction :

Théorème 4.4.4. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et le graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. Soit B_0 de la DM-décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$.*

1. *Le nombre de capteurs supplémentaires qui doivent être implantés pour que le système composite Σ_Λ^c n'ait pas de contraction est $\hat{d} = \text{card}(B_0^+) - \text{card}(B_0^-)$, le défaut de contraction de Σ_Λ .*
2. *Ces capteurs supplémentaires doivent mesurer \hat{d} sommets d'état de B_0^+ pour qu'il se forme un couplage de taille $\text{card}(B_0^+)$ dans le graphe biparti construit par B_0 et ces capteurs supplémentaires.*

Démonstration Supposons qu'on ait un couplage maximal M_V dans B_0 alors $\text{card}(M_V) = \text{card}(B_0^-)$ d'après la Proposition 4.4.2. Ce couplage sature $\text{card}(M_V)$ sommets à gauche de B_0 et le nombre de sommets non saturés est égal à

$$\text{card}(B_0^+) - \text{card}(M_V) = \text{card}(B_0^+) - \text{card}(B_0^-) = \hat{d}$$

Avec \hat{d} capteurs supplémentaires qui mesurent \hat{d} sommets non saturés par M_V , on a un couplage de taille $\text{card}(B_0^+)$ dans le graphe biparti construit par B_0 et ces capteurs supplémentaires. Le résultat est que la DM-Décomposition du système composite Σ_Λ^c n'a plus de partie B_0 , donc Σ_Λ^c n'a plus de contraction.

Exemple 4.4.3

Reconsidérons le système Σ_Λ de l'Exemple 4.4.1 dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.7.a et le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.7.b. Sa DM-Décomposition est donné Figure 4.10.

Dans cet exemple, on a la contraction B_0 d'où $B_0^+ = \{x_2^+; x_3^+; x_4^+; x_5^+\}$ et $B_0^- = \{x_5^-; x_6^-\}$ comme montre le Figure 4.10. On a $\hat{d} = \text{card}(B_0^+) - \text{card}(B_0^-) = 2$. Alors, on doit mesurer un état de $\{x_2^+; x_4^+\}$ et un de $\{x_3^+; x_5^+\}$ pour annuler la contraction.

Proposition 4.4.5. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1) avec le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et le graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. Considérons la partie B_0 de la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$ avec un couplage maximum M_0 sur B_0 .*

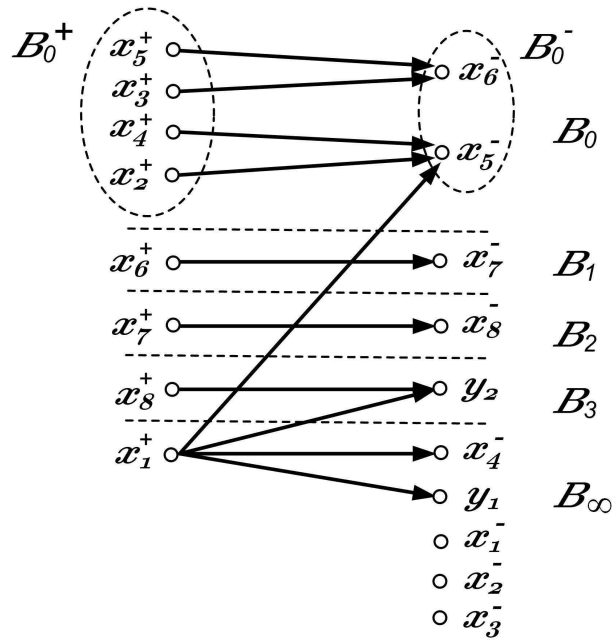


FIG. 4.10 – La DM-Décomposition pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.4.3

Mesurer un sommet quelconque x_i^+ dans B_0^+ par un capteur supplémentaire z augmente la taille de M_0 d'une unité.

Démonstration : Notons $\text{card}(M_0)$ la cardinalité de M_0 . Nous avons deux cas :

1. $x_i^+ \notin M_0$ alors le couplage $M_0 \cup (x_i^+, z)$ a la taille $\text{card}(M_0) + 1$.
2. $x_i^+ \in M_0$ par l'arc $(x_i^+, x_i^-) \in M_0$. Comme $x_i^- \in B_0^-$ alors x_i^- est connecté à au moins deux sommets dans B_0^+ dont l'un est x_i^+ et l'autre est x_j^+ tel que $x_j^+ \notin M_0$ d'après la Proposition 4.4.2. Construisons maintenant le couplage M' :

$$M' := M_0 \setminus (x_i^+, x_i^-) \cup (x_j^+, x_i^-) \cup (x_i^+, z)$$

La taille de M' est de $\text{card}(M_0) + 1$. ■

Donc, pour une contraction représentée par B_0 , on peut mesurer n'importe quel état dans B_0^+ pour réduire le défaut de contraction \hat{d} d'une unité.

4.4.3 Absence de contraction

Étant donné un système Σ_Λ sans contraction sur le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$, nous allons classer les capteurs dans l'ensemble Y de Σ_Λ en trois catégories annoncées précédemment.

Théorème 4.4.6. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$.*

L'ensemble des capteurs essentiels \hat{E} pour l'absence de contraction est l'ensemble de sommets de sortie qui appartiennent aux composantes B_i , ($i = 1, \dots, r$) dans la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$.

Démonstration : Par les propriétés de la DM-Décomposition, le nombre de sommets de B_i^+ est égal au nombre de sommets de B_i^- , ($i = 1, \dots, r$). Si nous supprimons un sommet de sortie qui appartient à B_i^- , ceci créera une contraction. Donc, tous les capteurs dans les composantes B_i , ($i = 1, \dots, r$) appartiennent à n'importe quelle solution du problème d'absence de contraction et sont donc essentiels.

En outre, la suppression d'un seul sommet de sortie dans B_∞ ne change pas la taille du couplage maximum sur $B(\Sigma_\Lambda)$. Donc, aucun sommet de sortie dans B_∞ n'est essentiel.

Pour déterminer le nombre minimal de sommets de sortie dans toute solution pour l'absence de contraction, nous pouvons ramener l'analyse à B_∞ comme suit :

- Algorithme 4.4.7.**
1. *Pour tout arc (v^+, v^-) de B_∞ , lui assigner un poids 0 si v^+ est un sommet d'état, un poids 1 si v^- est un sommet de sortie.*
 2. *Trouver un couplage maximum de poids minimal dans B_∞ . Soit W_m ce poids minimal.*
 3. *Le nombre minimal de sommets de sortie dans une solution est $W_m + \text{card}(\hat{E})$.*

Théorème 4.4.8. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré de type (4.1.1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. Considérons la partie B_∞ de la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$.*

L'ensemble des capteurs inutiles \hat{L} pour l'absence de contraction est l'ensemble des sommets de sortie qui n'appartiennent à aucun couplage maximum de poids minimal sur B_∞ .

Démonstration : Considérons y^* un capteur qui appartient à un couplage maximum de poids minimal M_1 sur B_∞ . En ajoutant les couplages maximaux dans des composantes B_i au couplage M_1 , nous avons un couplage maximum M sur $B(\Sigma_\Lambda)$ d'après la Propriété 4.4.2. Soit V_Y un ensemble de capteurs appartenant à M qui est une solution pour l'absence de contraction. On a donc $y^* \in V_Y$. Parce que les composantes B_i sont déterminées de la manière unique ainsi que les sommets de sortie appartenant à ces composantes, le couplage M est aussi de poids minimal. Comme le couplage M est de poids minimal, on ne peut pas diminuer son poids en remplaçant y^* par un sommet d'état, c'est-à-dire $\{V_Y \setminus y^*\}$ n'est plus une solution. Donc, y^* n'est pas un capteur inutile.

Nous allons montrer maintenant qu'un capteur utile doit appartenir à un couplage maximum de poids minimal sur B_∞ .

Considérons y_i^* un capteur appartenant à une solution $V_{Y_2} \subseteq Y$ tel que $\{V_{Y_2} \setminus y_i^*\}$ n'est plus une solution, c'est-à-dire y_i^* est un capteur utile. Pour tous $y_j \in V_{Y_2}$, $y_j \neq y_i^*$, on vérifie si $\{V_{Y_2} \setminus y_j\}$ est encore une solution. Si $\{V_{Y_2} \setminus y_j\}$ est une solution, on enlève y_j . Cette procédure se termine par un ensemble de capteurs $\bar{V}_{Y_2} \subseteq V_{Y_2}$ tel que pour tous $y \in \bar{V}_{Y_2}$, $\{\bar{V}_{Y_2} \setminus y\}$ n'est plus une solution. Considérons un couplage maximal M_2 tel que M_2 sature exactement l'ensemble \bar{V}_{Y_2} . En se basant sur le couplage M_2 , un chemin alterné de longueur paire dont l'extrémité initiale est un sommet de sortie dans \bar{V}_{Y_2} et l'extrémité terminale est un sommet non saturé par M_2 , alors l'extrémité terminale doit être un sommet de sortie.

Un couplage maximum $M' \neq M_2$ peut être obtenu à partir de M_2 par la permutation des arcs sur le couplage maximum M_2 avec les autres arcs sur les circuits alternés ou sur des *chemins faisables* (voir Berge [1973]), c'est-à-dire les chemins alternés de longueur paire avec une extrémité non saturée par M_2 .

La permutation des arcs ne change pas l'ensemble des sommets de M_2 par rapport à ceux de M' à part les extrémités des chemins faisables. Avec un chemin faisable :

- si l'extrémité initiale saturée est un sommet de sortie, alors l'extrémité terminale non saturée doit être un sommet de sortie ;
- si l'extrémité initiale saturée est un sommet d'état, alors l'extrémité terminale non saturée peut être un sommet de sortie ou un sommet d'état.

Alors, le poids de M' est supérieur ou égal au poids de M_2 . Successivement, on arrive au couplage maximum M_1 avec les permutations ci-dessus et le poids de M_1 est supérieur ou égal au poids de M_2 . Cela montre que le nombre de sommets de sortie sur M_2 est inférieur ou égal à celui de M_1 . Comme M_1 est de poids minimal, M_2 l'est aussi. Alors y^* est un capteur utile. ■

Remarque 4.4.1. Nous pouvons montrer que l'utilisation de l'Algorithme 4.4.7 sur $B(\Sigma_\Lambda)$ nous fournira un ensemble minimal de capteurs non défaillants qui assurent l'absence de contraction c'est-à-dire les capteurs qui appartiennent à un couplage maximal de poids minimal.

Pour trouver l'ensemble de capteurs qui sont utiles pour l'absence de contraction, nous pouvons utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme 4.4.9. 1. Pour tout arc (v^+, v^-) de B_∞ , lui assigner un poids 0 si v^- est un sommet d'état, un poids 1 si v^- est un sommet de sortie.

2. Trouver un couplage maximum de poids minimal dans B_∞ qui sature un ensemble de sommets de sortie V^* .
3. L'ensemble de capteurs utiles \hat{F} est l'ensemble de capteurs qui appartiennent à des chemins faisables qui commencent par des sommets dans V^* .

La construction de l'Algorithme 4.4.9 vient du fait que n'importe quel sommet de sortie qui appartient à un chemin faisable commençant par un sommet de sortie dans V^* doit appartenir à un couplage maximum de poids minimal. De plus, si un sommet de sortie y' n'appartient pas à un couplage maximum de poids minimal, il n'existe pas de chemin faisable qui commence par un sommet de sortie dans V^* et qui se termine en y' .

En utilisant les résultats précédent, nous pouvons effectuer la classification des capteurs pour l'absence de contraction par des étapes suivantes :

1. Effectuer la DM-Décomposition sur $B(\Sigma_\Lambda)$.
2. Classer les capteurs essentiels \hat{E} en utilisant le Théorème 4.4.6.
3. Classer les capteurs utiles \hat{F} en utilisant l'Algorithme 4.4.9.
4. L'ensemble de capteurs inutiles \hat{L} obtenu par définition $\hat{L} = Y \setminus \hat{F}$

4.4.4 Exemple

Dans cette sous-section, nous allons appliquer les résultats de la classification des capteurs sur le système de l'Exemple 4.3.2.

Exemple 4.4.4

Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.3 et la DM-Décomposition est donnée Figure 4.9.

Dans ce cas sur B_∞ , il existe au moins un couplage maximal de poids minimal qui ne sature pas y_5 , par l'exemple le couplage composé par $\{(x_4^+, x_2^-); (x_3^+, x_1^-); (x_2^+, y_2); (x_1^+, y_1)\}$. Par contre, n'importe quel couplage maximal de poids minimal sature deux sommets de l'ensemble $\{y_1, y_2, y_3\}$. Avec le couplage ci-dessous, $\{(y_1, x_1^+); (x_1^+, y_3)\}$ est un chemin faisable, y_3 est donc un capteur utile d'après l'Algorithme 4.4.9.

Nous avons donc pour l'absence de contraction :

- l'ensemble des capteurs inutiles $\hat{L} = \{y_5\}$.
- l'ensemble des capteurs utiles $\hat{F} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_6\}$.
- l'ensemble des capteurs essentiels $\hat{E} = \{y_4, y_6\}$ (parce que $y_4 \in B_1$ et $y_6 \in B_3$).

4.5 Placement des capteurs pour l'observabilité

4.5.1 Placement des capteurs

Comme le montre la Proposition 4.4.5, un capteur supplémentaire qui mesure n'importe quel sommet dans B_0^+ fait diminuer le défaut de contraction d'une unité. La Remarque 4.3.3 montre qu'un capteur supplémentaire qui mesure n'importe quel sommet dans une composante non connectée fait diminuer le défaut de connexion d'une unité. Alors, si l'ensemble de sommets B_0^+ intersecte l'ensemble de sommets dans des composantes non connectées, nous pouvons trouver des capteurs supplémentaires qui serviront pour relier une composante non connectée à la sortie et qui font diminuer le défaut de contraction. Dans le cas contraire, il nous faut \bar{d} mesures supplémentaires pour la connexion à la sortie et \hat{d} capteurs supplémentaires pour l'annulation de contraction. Sous l'hypothèse qu'un capteur peut mesurer un seul état, nous allons illustrer l'aspect de placement des capteurs par les exemples suivants.

Exemple 4.5.1

Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.11.a et sa partie B_0 est donnée Figure 4.11.b.

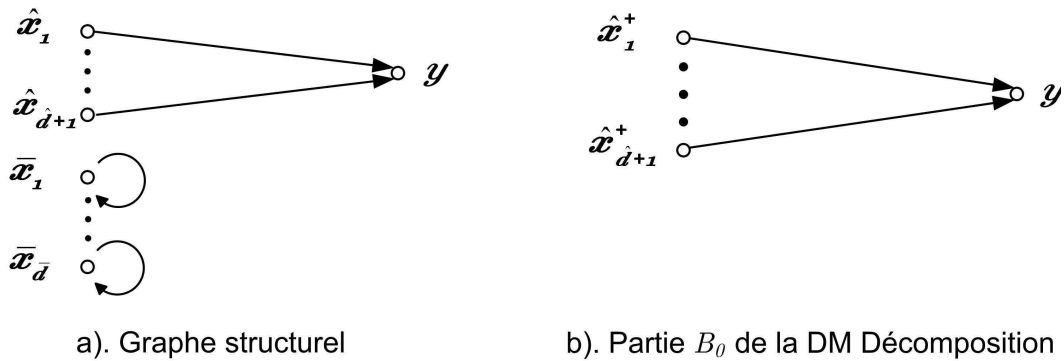


FIG. 4.11 – $G(\Sigma_\Lambda)$ et partie B_0 pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.5.1

Dans l'Exemple 4.5.1, on a une contraction de défaut \hat{d} et \bar{d} composantes non connectées. Le problème ne peut être résolu qu'avec $\hat{d} + \bar{d}$ capteurs supplémentaires, c'est-à-dire \hat{d} capteurs supplémentaires pour annuler la contraction et \bar{d} capteurs supplémentaires pour relier les composantes non connectées à la sortie.

Exemple 4.5.2

Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure

4.12.a et sa partie B_0 est donnée Figure 4.12.b.

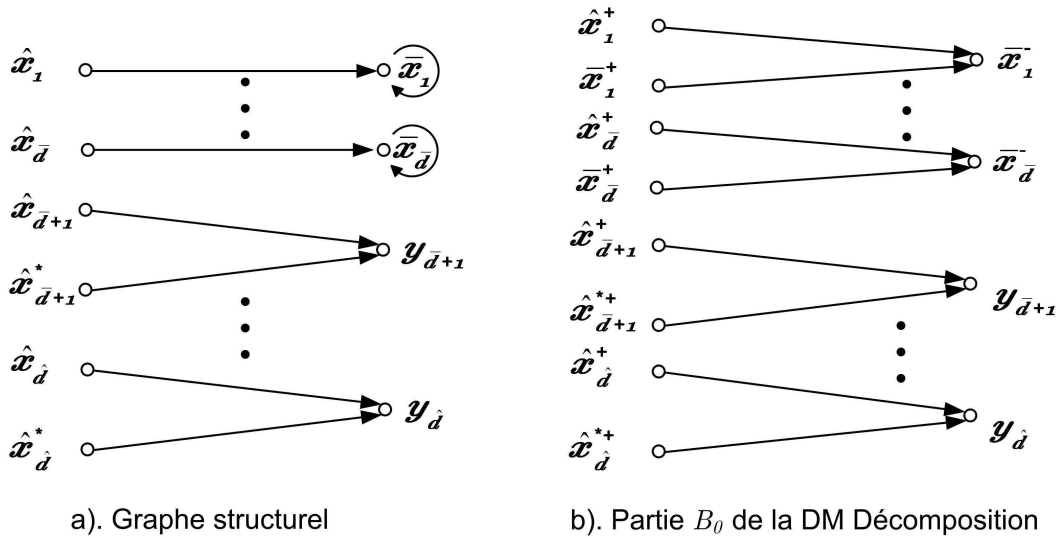


FIG. 4.12 – $G(\Sigma_\Lambda)$ et partie B_0 pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.5.2

Le système de l'Exemple 4.5.2 contient \bar{d} composantes non connectées $\{\bar{x}_1\}, \{\bar{x}_2\}, \dots, \{\bar{x}_{\bar{d}}\}$ et une contraction B_0 de défaut \hat{d} formée par \hat{d} contractions non décomposables de défaut 1. Par la numérotation des sommets de ce système, nous obtenons $\hat{d} > \bar{d}$.

Il nous faut \hat{d} capteurs supplémentaires pour annuler la contraction B_0 parce que \hat{d} est le défaut de contraction (voir Théorème 4.4.4), chaque capteur annule une contraction non décomposable de défaut 1. Parmi ces capteurs, s'il y en a \bar{d} qui relie aux \bar{d} sommets $\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+, \dots, \bar{x}_{\bar{d}}^+$, un par un, le système sera connecté à la sortie d'après la Remarque 4.3.3. Dans ce cas, le problème de placement des capteurs pour l'observabilité est résolu avec \hat{d} capteurs supplémentaires.

Exemple 4.5.3

Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.13.a et sa partie B_0 est donnée Figure 4.13.b.

Le système de l'Exemple 4.5.3 contient \bar{d} composantes non connectées $\{\bar{x}_1\}, \{\bar{x}_2\}, \dots, \{\bar{x}_{\hat{d}}\}, \{\hat{x}_{\hat{d}+1}\}, \dots, \{\hat{x}_{\bar{d}}\}$ et une contraction B_0 de défaut \hat{d} comme la montre Figure 4.13.b. Par la numérotation des sommets de ce système, nous obtenons $\hat{d} < \bar{d}$.

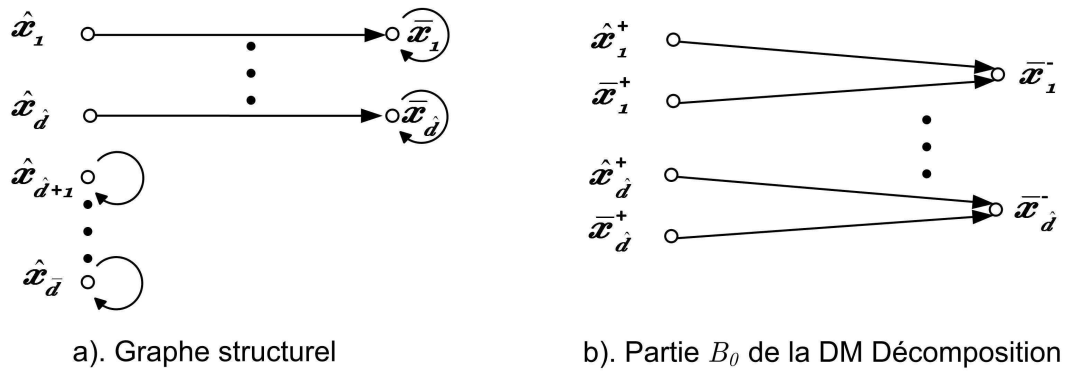


FIG. 4.13 – $G(\Sigma_\Lambda)$ et partie B_0 pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.5.3

Il nous faut \bar{d} capteurs supplémentaires pour connecter le système à la sortie, un capteur pour chaque composante non connectée. En connectant le système à la sortie, la contraction B_0 est annulée automatiquement. Dans ce cas, on résout le problème de placement des capteurs pour l'observabilité avec \bar{d} capteurs supplémentaires.

Exemple 4.5.4

Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.14.a et sa partie B_0 est donnée Figure 4.14.b.

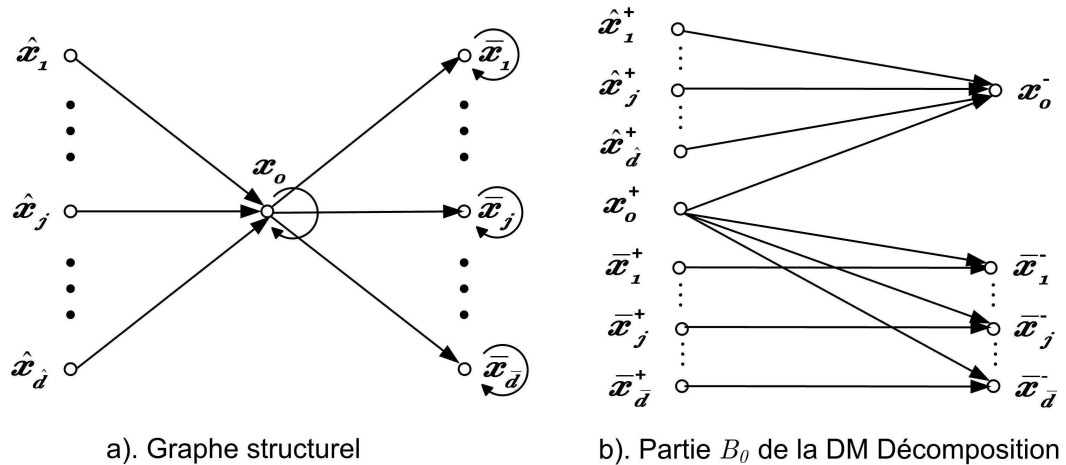


FIG. 4.14 – $G(\Sigma_\Lambda)$ et partie B_0 pour le système Σ_Λ de l'Exemple 4.5.4

Le système de l'Exemple 4.5.4 contient \bar{d} composantes non connectées $\{\bar{x}_1\}, \{\bar{x}_2\}, \dots, \{\bar{x}_{\bar{d}}\}$ et une contraction B_0 de défaut \hat{d} comme la montre Figure 4.14.b.

Il nous faut \bar{d} capteurs supplémentaires pour connecter le système à la sortie, un capteur pour chaque composante non connectée. Ensuite, pour annuler la contraction B_0 , il nous faut $\hat{d} - 1$ capteurs supplémentaires qui mesurent $\hat{d} - 1$ sommets quelconques dans l'ensemble $\{\hat{x}_1^+, \hat{x}_2^+, \dots, \hat{x}_{\hat{d}}^+\}$. Finalement, le placement des capteurs pour l'observabilité est achevé avec $\hat{d} + \bar{d} - 1$ capteurs supplémentaires.

En résumant les cas montrant des bornes sur les nombre de capteurs nécessaire pour le problème de placement des capteurs ci-dessus, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.5.1. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) avec ses graphes associés $G(\Sigma_\Lambda)$ et $B(\Sigma_\Lambda)$. Soient \bar{d} le défaut de connexion et \hat{d} le défaut de contraction. Le nombre de capteurs supplémentaires n_{cs} nécessaire pour rendre Σ_Λ observable est :*

$$\text{Max}(\hat{d}, \bar{d}) \leq n_{cs} \leq \hat{d} + \bar{d} \quad (4.5.1)$$

Dans les cas particuliers :

– B_0^+ n'intersecte pas les composantes non connectées

$$n_{cs} = \hat{d} + \bar{d} \quad (4.5.2)$$

– B_0^+ intersecte les composantes non connectés

$$\text{Max}(\hat{d}, \bar{d}) \leq n_{cs} \leq \hat{d} + \bar{d} - 1 \quad (4.5.3)$$

où B_0^+ est l'ensemble de sommets à gauche de la partie B_0 de la DM-Décomposition du $B(\Sigma_\Lambda)$.

Preuve :

Dans le cas général, la borne inférieure $\text{Max}(\hat{d}, \bar{d})$ est la conséquence directe des Propositions 4.4.4 et 4.3.3. La borne inférieure \hat{d} est atteinte dans l'Exemple 4.5.2, la borne inférieure \bar{d} est atteinte dans l'Exemple 4.5.3. La borne supérieure $\hat{d} + \bar{d}$ est atteinte dans certains cas comme le montre l'Exemple 4.5.1.

Quand il n'y a pas d'intersection entre B_0^+ et les composantes non connectées, le nombre de capteurs nécessaires est $\hat{d} + \bar{d}$ parce qu'il n'existe pas de capteur qui sert à la fois pour relier une composante non connectée à la sortie et pour diminuer le défaut de contraction.

Quand il y a une intersection entre B_0^+ et les composantes non connectées, on peut diminuer la borne supérieure d'une unité (voir la Proposition 4.4.5 et la Remarque 4.3.3) mais la borne inférieure est toujours $\text{Max}(\hat{d}, \bar{d})$.

Contrairement à l'hypothèse évoquée au début de la Section 4.5 qu'un capteur ne peut mesurer qu'un seul état, si un capteur peut mesurer tout les sommets d'état, alors le nombre de capteurs supplémentaires n_{cs} nécessaire pour rendre Σ_Λ observable quand $\hat{d} + \bar{d} > 0$ est :

$$n_{cs} = \text{Max}(\hat{d}, 1) \quad (4.5.4)$$

Si Σ_Λ n'est pas observable à cause de la non connexion à la sortie ou en combinant avec la présence d'une contraction ayant le défaut de contraction $\hat{d} = 1$, il suffit d'ajouter un seul capteur supplémentaire pour annuler la contraction et relier le système à la sortie. Quand la contraction a un défaut $\hat{d} > 1$, il nous faut \hat{d} capteurs supplémentaires pour annuler la contraction d'après le Théorème 4.4.4 et ces capteurs supplémentaires assurent aussi la connexion à la sortie parce que un capteur peut mesurer tout les sommets d'état.

Pour le placement optimal de capteurs, la solution avec le nombre de capteurs supplémentaires minimal n'est pas forcément celle de coût global minimal. On peut voir ce phénomène sur l'exemple suivant :

Exemple 4.5.5

Considérons le système dans la Figure 4.15

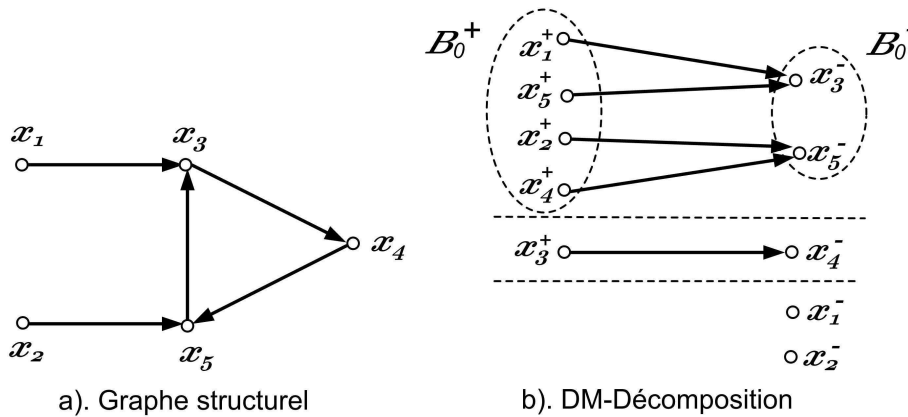


FIG. 4.15 – Le système pour l'Exemple 4.5.5

On a deux contractions :

- $B_0^1 = \{x_1^+, x_5^+, x_3^-\}$
- $B_0^2 = \{x_2^+, x_4^+, x_5^-\}$

et une composante non connectée

- $CNC = \{x_3, x_4, x_5\}$

L'intersection $CNC \cap B_0^+ = \{x_4^+, x_5^+\}$. Supposons que le sommet x_1 (resp x_2, x_3, x_4, x_5) coûte 1 (resp 2, 3, 40, 50) unité à mesurer. Les solutions avec 2 capteurs supplémentaires sont de mesurer $\{x_1, x_4\}$ (resp $\{x_2, x_5\}$,

$\{x_4, x_5\}$) avec le coût de 41 (resp 52, 90) unités. Mais on peut résoudre le problème avec 3 capteurs supplémentaires qui mesurent $\{x_1, x_2, x_3\}$ avec un coût inférieur qui est de 6 unités.

Donc, il faut distinguer deux critères à minimiser :

- Critère 1 : Le coût global minimal.
- Critère 2 : Le nombre de capteurs supplémentaires minimal

4.6 Classification des capteurs pour la préservation de l'observabilité

4.6.1 Classification des capteurs

Par les analyses dans des Section 4.3.4 et 4.4.3, nous avons le Théorème suivant :

Théorème 4.6.1. *Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (4.1.1) et pour le problème de préservation de l'observabilité, en utilisant les classifications des Théorème 4.3.6, Théorème 4.4.6 et Théorème 4.4.8 :*

- L'ensemble des capteurs essentiels est $E = \bar{E} \cup \hat{E}$.
- L'ensemble des capteurs inutiles est $L = \bar{L} \cap \hat{L}$.
- L'ensemble des capteurs utiles est $F = Y \setminus L$.

En effet, pour assurer que le système reste observable tout en supprimant des capteurs, le système avec les capteurs restants doit satisfaire la propriété de la connexion à la sortie et l'absence de contraction. Le Théorème 4.3.6 donne l'ensemble des capteurs qui peuvent être supprimés en conservant la propriété de connexion à la sortie. Les Théorèmes 4.4.6 et 4.4.8 donnent l'ensemble des capteurs qui peuvent être supprimés sans créer de contraction.

Il est clair qu'un capteur qui est essentiel pour la connexion à la sortie **OU** essentiel pour l'absence de contraction est essentiel pour la préservation de l'observabilité du système. Un capteur qui est inutile pour la connexion à la sortie **ET** inutile pour l'absence de contraction est inutile pour la préservation de l'observabilité du système.

Reconsidérons le système décrit dans l'Exemple 4.3.2. Par l'analyse de la connexion à la sortie de ce système, on a :

- $\bar{L} = \{y_1, y_5, y_6\}$

- $\bar{E} = \{y_4\}$
- $\bar{F} = \{y_2, y_3, y_4\}$

Pour l'absence de contraction, on a :

- $\hat{L} = \{y_5\}$
- $\hat{E} = \{y_4, y_6\}$
- $\hat{F} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_6\}$.

En utilisant le Théorème 4.6.1 avec ces ensembles de capteurs, on obtient pour l'observabilité :

- L'ensemble des capteurs essentiels $E = \bar{E} \cup \hat{E} = \{y_4, y_6\}$
- L'ensemble des capteurs inutiles $L = \bar{L} \cap \hat{L} = \{y_5\}$
- L'ensemble des capteurs utiles $F = Y \setminus L = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_6\}$

Dans cet exemple, en gardant l'ensemble des capteurs essentiels $E = \{y_4, y_6\}$ et deux des trois capteurs de l'ensemble des capteurs utiles et non essentiels $\{y_1, y_2, y_3\}$ sans défaut, l'observabilité est préservée. Les ensembles minimaux de capteurs non défaillants permettant de préserver l'observabilité du système sont :

- soit $\{y_4, y_6, y_1, y_2\}$
- soit $\{y_4, y_6, y_1, y_3\}$
- soit $\{y_4, y_6, y_2, y_3\}$

4.6.2 Analyse de la complexité

L'analyse de la complexité pour la classification des capteurs pour la préservation de l'observabilité d'un système linéaire structuré Σ_Λ peut être divisée en deux sous problèmes.

Proposition 4.6.2. *La détermination des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour la connexion à la sortie peut s'effectuer en temps polynomial.*

Démonstration : La décomposition du graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ en composantes fortement connexes peut être effectuée en temps $O(N + M)$ où N et M sont le nombre de sommets et le nombre d'arcs du graphe $G(\Sigma_\Lambda)$. Par l'Algorithme 4.3.4, le nombre de séparateurs $S(v_i)$, noté n_S , est égal au nombre de composantes pré-infimales de $G(\Sigma_\Lambda)$. Dans le second pas de l'algorithme, on doit effectuer au plus $\frac{1}{2}n_S(n_S - 1)$ comparaisons entre ces n_S séparateurs. Donc, la détermination des séparateurs irréductibles est en temps polynomial. Donc, la détermination des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour la connexion à la sortie peut s'effectuer en temps polynomial. ■

Remarque 4.6.1. La classification des capteurs pour la connexion à la sortie peut s'effectuer en temps polynomial comme la montre la Proposition 4.6.2. Mais le problème de trouver une solution à nombre minimal de capteurs pour la connexion à la sortie, c'est-à-dire un ensemble de capteurs tels que chaque séparateur irréductible $S(v_i)$ du graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ ait au moins un capteur sans défaut est équivalent au problème du "hitting set" qui est NP-complet (voir Garey and Johnson [1999]).

Proposition 4.6.3. *La détermination des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour l'absence de contraction peut s'effectuer en temps polynomial.*

Démonstration : Par construction de la DM-Décomposition, la détermination des capteurs essentiels peut s'effectuer en $O(N^{5/2})$ avec N le nombre de sommets sur $B(\Sigma_\Lambda)$. Dans l'Algorithme 4.4.9, l'ensemble V^* peut être obtenu avec un temps $O(N(M + N \log N))$ d'où N et M sont des nombres de sommets et d'arcs du graphe B_∞ . À partir de V^* , l'ensemble des capteurs utiles peut être obtenu par une simple procédure de marquage. Finalement, la détermination des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour l'absence de contraction peut s'effectuer en temps polynomial. ■

À partir des Propositions 4.6.2 et 4.6.3, nous pouvons conclure sur la complexité pour la classification des capteurs pour la préservation de l'observabilité d'un système linéaire structuré Σ_Λ comme suit :

Théorème 4.6.4. *La détermination des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour l'observabilité d'un système linéaire structuré Σ_Λ peut s'effectuer en temps polynomial.*

Démonstration : D'après le Théorème 4.6.1 et du fait que les classifications des capteurs essentiels et des capteurs inutiles pour la connexion à la sortie ainsi que l'absence de contraction peuvent s'effectuer en temps polynomial (Propositions 4.6.2 et 4.6.3). ■

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons revisité l'observabilité des systèmes structurés. En utilisant l'approche graphique, nous avons focalisé notre attention sur les causes de non observabilité de tels système :

- le système n'est pas connecté à la sortie
- la présence de contractions

Premièrement, nous avons abordé le problème de placement des capteurs pour remédier à ces deux causes de non observabilité séparément en donnant le nombre de capteurs

nécessaires ainsi que l'emplacement des capteurs pour chaque cas. En combinant ces deux problèmes, nous avons donné des bornes sur le nombre de capteurs nécessaires pour assurer l'observabilité. Les résultats ont été illustrés sur plusieurs exemples.

Ensuite, nous avons concentré notre intérêt sur le problème de préservation de l'observabilité en présence de défauts de capteurs. Nous avons classé les capteurs par rapport à leur nature critique concernant l'observabilité du système : les capteurs qui sont essentiels c'est-à-dire dont un défaut mène à la perte de l'observabilité, les capteurs qui sont inutiles pour la préservation de l'observabilité et ceux qui sont utiles. Cette classification des capteurs peut s'effectuer à l'aide d'algorithmes standard ou de décompositions pour réduire la complexité du problème. Finalement, nous avons démontré que les algorithmes sont polynomiaux en temps de calcul et donc que la classification peut être facilement mise en oeuvre. L'approche proposée est bien adaptée pour l'analyse structurelle.

Notons que le problème dual de la classification des capteurs pour l'observabilité est le problème de la classification des actionneurs pour la commandabilité, il a été étudié dans [Do, 2008].

Chapitre 5

Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

5.1 Formulation du problème

Tous les systèmes dynamiques sont susceptibles d'être affectés par des perturbations. Les perturbations ont plusieurs d'origines. Le premier cas est le changement de l'environnement de fonctionnement du système. Par exemple, dans la commande d'un avion, le changement de vitesse et de direction du vent peuvent être considérés comme des perturbations. Pour commander les suspensions actives d'un châssis, l'irrégularité de la route peut être considérée comme une perturbation. Pour maintenir la température constante d'une chambre froide, le changement de la température à l'extérieur de la chambre peut être considéré comme une perturbation, ... Ces types de perturbations dites "externes" peuvent être modélisées comme de nouvelles entrées du système. Dans certains cas, les perturbations sont mesurables.

Quand le système subit des perturbations externes, il est souvent demandé que certaines performances du système restent inchangées malgré l'influence des perturbations. Nous allons considérer dans ce chapitre un problème classique de la théorie de la commande, il s'agit du rejet de perturbation. Ce problème consiste à commander un système à l'aide d'un retour d'état ou d'un retour dynamique de sortie mesurée pour que la perturbation n'ait aucun effet sur la sortie régulée. Pour le retour d'état, on parle du problème de **R**ejet de **P**erturbation par **R**etour d'**É**tat statique (RPRE); par le retour de sortie, on a le problème de **R**ejet de **P**erturbation par **R**etour dynamique de **M**esure (RPRM).

Le rejet de perturbation par retour d'état a été résolu par l'approche géométrique [Wonham, 1974] et par l'approche algébrique [Verghese, 1978]. L'interprétation graphique de ces résultats pour les systèmes linéaires structurés a été donnée par [Commault et al., 1991; van der Woude, 1991c].

Le problème de rejet de perturbation par retour de mesure a été résolu par Schumacher [1980]; Willems and Commault [1981] en utilisant l'approche géométrique. Les développements graphiques pour résoudre ce problème pour les systèmes linéaires structurés ont été donnés par [Commault et al., 1993, 1997; van der Woude, 1993, 1994; Bahar et al., 1996].

Dans ce qui suit, nous allons d'abord rappeler le problème du rejet de perturbation ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème ait une solution. Ensuite, quand le système a une seule perturbation, nous allons étudier la solubilité du problème RPRM par placement des capteurs. Quand le problème RPRM est résolu, nous allons classer les capteurs en trois catégories comme l'évoque le Chapitre 2. Dans le cas général c'est-à-dire quand plusieurs perturbations affectent le système, nous donnerons une autre

caractérisation plus simple pour la solubilité du problème RPRM et déterminerons un ensemble important de capteurs inutiles pour ce problème.

5.2 Problème du rejet de perturbation

5.2.1 Rejet de perturbation par retour d'état

Formulation classique

Soit le système linéaire représenté par des équations d'état de forme :

$$\Sigma_d \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où $d(t)$ est le vecteur de perturbation de dimension q , E est une matrice réelle de dimension $n \times q$.

Les conditions de solubilité du problème de rejet de perturbation dépendent de la possibilité de mesurer la perturbation.

a. Problème RPRE avec mesure de la perturbation

Dans le cas où la perturbation d est mesurable, le problème du rejet de perturbation par retour d'état (RPRE) consiste à chercher un retour d'état de la forme :

$$u = Fx + Jd \quad (5.2.2)$$

tel que le transfert entre la perturbation d et la sortie à réguler y en boucle fermée soit nul :

$$T_{F,J}(s) = C(sI - A - BF)^{-1}(BJ + E) = 0 \quad (5.2.3)$$

En termes géométriques, le problème a une solution si et seulement si :

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im } B \quad (5.2.4)$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

où $\text{Im}E$ est l'image de E ; $\text{Im}B$ est l'image de B et \mathcal{V}^* est le plus grand sous-espace (A, B) -invariant contenu dans $\text{Ker}C$ - le noyau de C .

En fait, le sous-espace \mathcal{V}^* peut être calculé facilement de manière itérative (voir [Wonham, 1979]), comme limite de la séquence de sous-espaces :

$$\begin{cases} V_0 = \text{Ker } C \\ V_k = \text{Ker } C \cap A^{-1}(V_{k-1} + \text{Im } B) \text{ avec } k \geq 1 \end{cases} \quad (5.2.5)$$

b. Problème RPRE sans mesure de la perturbation

Quand la perturbation n'est pas mesurable, nous avons $J \equiv 0$ donc le retour d'état devient :

$$u = Fx \quad (5.2.6)$$

Dans ce cas, le transfert en boucle fermée entre la perturbation d et la sortie à réguler y doit être nul :

$$T_F(s) = C(sI - A - BF)^{-1}E = 0 \quad (5.2.7)$$

La condition nécessaire et suffisante en termes géométriques devient :

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}^* \quad (5.2.8)$$

Interprétation pour les systèmes linéaires structurés

Un système linéaire structuré avec perturbation est décrit de la même manière qu'un système linéaire structuré de la forme 3.2.2 :

Définition 5.2.1. (Système linéaire structuré avec perturbation) Soit $\Sigma_{\Lambda d}$ un système linéaire décrit par l'ensemble d'équations d'état :

$$\Sigma_{\Lambda d} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\Lambda}x(t) + B_{\Lambda}u(t) + E_{\Lambda}d(t) \\ y(t) = C_{\Lambda}x(t) \end{cases} \quad (5.2.9)$$

$\Sigma_{\Lambda d}$ est un système linéaire structuré si la matrice suivante :

$$J_{\Lambda d} = \begin{bmatrix} A_{\Lambda} & B_{\Lambda} & E_{\Lambda} \\ C_{\Lambda} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

est structurée, c'est-à-dire si les éléments de la matrice composée $J_{\Lambda d}$ sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

À ce système structuré $\Sigma_{\Lambda d}$, nous pouvons associer un graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda d}) = (V', W')$ de la même manière que $G(\Sigma_{\Lambda}) = (V, W)$ comme montré dans la Section 3.4.2, c'est-à-dire :

- $V' = V \cup D$ où $D = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$, l'ensemble des perturbations.
- $W' = W \cup W_{DX}$ où $W_{DX} = \{(d_i, x_j), e_{ji} \neq 0\}$ avec e_{ji} l'élément (j, i) de la matrice E_{Λ} .

À partir du graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda d})$, nous pouvons donner les conditions graphiques pour la solubilité du problème de rejet de perturbation par retour d'état pour les deux cas suivants.

c. Problème RPRE avec mesure de la perturbation

Dans ce cas, la solubilité générique du problème RPRE pour les système linéaires structurés (obtenue à partir des résultats sur la structure à l'infini [Verghese, 1978]) s'exprime comme suit :

Théorème 5.2.1. (*[Commault et al., 1991]*) *Soit $\Sigma_{\Lambda d}$ un système linéaire structuré de type (5.2.9) et $G(\Sigma_{\Lambda d})$ son graphe associé. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état avec mesure de la perturbation est génériquement soluble si et seulement si :*

1. *Un couplage maximum entre U et Y sur $G(\Sigma_{\Lambda})$ et un couplage maximum entre $U \cup D$ et Y sur $G(\Sigma_{\Lambda d})$ ont la même taille notée r .*
2. *$L_r = L_{d,r}$, où L_r est le nombre minimum de sommets de X contenus dans un couplage de taille r de U à Y dans $G(\Sigma_{\Lambda})$ et $L_{d,r}$ est le nombre minimum de sommets de X contenus dans un couplage de taille r de $U \cup D$ à Y dans $G(\Sigma_{\Lambda d})$.*

Le Théorème 5.2.1 montre que pour résoudre le problème RPRE, les commandes doivent être :

- suffisamment nombreuses, ce qui s'exprime en termes de rang du couplage entrée-sortie et du couplage entrée/perturbation-sortie.
- suffisamment rapides, ce qui s'exprime en termes de longueur des chemins sur les couplages ci-dessus.

pour éliminer l'influence de la perturbation avant qu'elle n'atteigne la sortie. Nous illustrons ce théorème par les exemples suivants.

Exemple 5.2.1

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) avec son graphe associé

$G(\Sigma_{\Lambda d})$ présenté Figure 5.1. Supposons que la perturbation est mesurable.

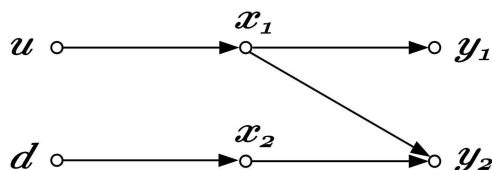


FIG. 5.1 – $G(\Sigma_{\Lambda d})$ de l'Exemple 5.2.1

Avec cet exemple, il est clair qu'un couplage maximum entre U et Y est de taille 1, par exemple le couplage qui est constitué par le chemin $\{(u, x_1), (x_1, y_1)\}$ ou par le chemin $\{(u, x_1), (x_1, y_2)\}$. Cependant, un couplage maximum entre $U \cup D$ et Y est de taille 2, par exemple le couplage constitué des deux chemins $\{(u, x_1), (x_1, y_1)\}$ et $\{(d, x_2), (x_2, y_2)\}$. Alors la condition 1 du Théorème 5.2.1 n'est pas satisfaite, le problème de rejet de perturbation par retour d'état avec mesure de la perturbation n'a donc pas de solution. En effet, en essayant d'éliminer l'effet de la perturbation d sur y_2 , la commande u perturbe inévitablement la sortie y_1 .

Exemple 5.2.2

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda d})$ présenté Figure 5.2. Supposons que la perturbation est mesurable.

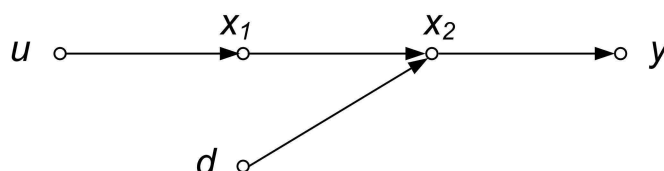


FIG. 5.2 – $G(\Sigma_{\Lambda d})$ de l'Exemple 5.2.2

Dans cet exemple, un couplage maximum entre U et Y est de taille 1, ainsi qu'un couplage maximum entre $U \cup D$ et Y . Alors la condition 1 du Théorème 5.2.1 est vérifiée. Par contre, la condition 2 ne l'est pas parce que $L_r = 2$ et $L_{d,r} = 1$. Alors le problème RPRE avec mesure de la perturbation n'a donc pas de solution. En effet, la perturbation d atteint la sortie y sans que la commande u ait le temps pour réagir.

Exemple 5.2.3

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) avec son graphe associé

$G(\Sigma_{\Lambda d})$ présenté Figure 5.3. Supposons que la perturbation est mesurable.

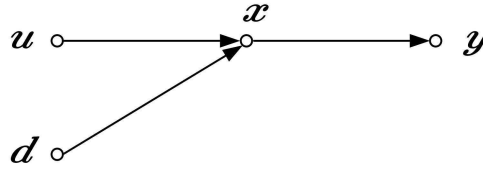


FIG. 5.3 – $G(\Sigma_{\Lambda d})$ de l'Exemple 5.2.3

Dans cet exemple, un couplage maximum entre U et Y est de taille 1, ainsi qu'un couplage maximum entre $U \cup D$ et Y . Alors la condition 1 du Théorème 5.2.1 est vérifiée. On trouve le même nombre de sommets appartenant à X sur ces deux couplages $L_r = L_{d,r} = 1$ donc, le problème RPRE avec mesure de la perturbation a une solution. Avec cette mesure, on peut calculer une commande de type $u = Fx + Jd$ qui annule l'effet de perturbation d sur l'état x .

d. Problème RPRE sans mesure de la perturbation

Dans le cas où la perturbation n'est pas disponible pour la mesure, nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.2.2. ([Commault et al., 1991]) Soit $\Sigma_{\Lambda d}$ un système linéaire structuré de type (5.2.9) et $G(\Sigma_{\Lambda d})$ son graphe associé. Le problème de rejet de perturbation par retour d'état **sans** mesure de la perturbation est génériquement soluble si et seulement si :

1. Un couplage maximum entre U et Y sur $G(\Sigma_{\Lambda})$ et un couplage maximum entre $U \cup D$ et Y sur $G(\Sigma_{\Lambda d})$ ont la même taille notée r .
2. $L_r = L_{d,r}$, où L_r est le nombre minimum de sommets de $X \cup U$ contenus dans un couplage de taille r de U à Y dans $G(\Sigma_{\Lambda})$ et $L_{d,r}$ est le nombre minimum de sommets de $X \cup U$ contenus dans un couplage de taille r de $U \cup D$ à Y dans $G(\Sigma_{\Lambda d})$.

Dans le cas où la perturbation n'est pas mesurable directement, l'information sur cette perturbation doit être collectée à partir des mesures d'état, ce qui fait perdre du temps. Dans le cadre des systèmes échantillonnés, ce retard correspond à un pas d'échantillonnage. Pour cette raison, dans la condition 2 du Théorème 5.2.2, on prend en compte le retard associé à ces deux couplages.

Exemple 5.2.4

Reconsidérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) de l'Exemple 5.2.3

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda d})$ présenté Figure 5.3. Supposons que la perturbation n'est pas mesurable.

Dans cet exemple, la condition 1 du Théorème 5.2.2 est vérifiée mais pas la condition 2 parce que $L_r = 1$ et $L_{d,r} = 2$. Alors, le problème RPRE sans mesure de la perturbation n'a pas de solution. En effet, sans mesure de la perturbation, l'information sur la perturbation sera mesurée en x et cette information est trop tardive pour réagir.

Un autre point de vue sur le problème RPRE avec ou sans mesure de perturbation porte sur la longueur des chemins appartenant à ces deux couplages. En effet, résoudre le problème RPRE sans mesure de perturbation est équivalent à résoudre le problème RPRE avec la mesure de perturbation sur un autre systèmes obtenu par l'ajout d'un arc devant chaque d'entrée (voir [Commault et al., 1991; Dion et al., 2003]).

Exemple 5.2.5

Reconsidérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) dans l'Exemple 5.2.3 avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda d})$ présenté Figure 5.3. Supposons que la perturbation n'est pas mesurable.

Pour cet exemple, en ajoutant un arc (u', u) avant l'entrée u , nous obtenons le graphe $G(\Sigma'_{\Lambda d})$ présenté Figure 5.4 :

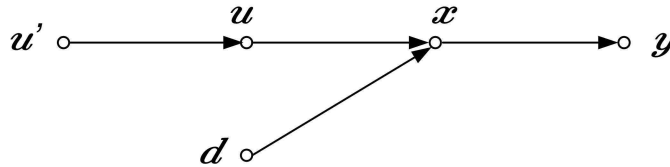


FIG. 5.4 – $G(\Sigma'_{\Lambda d})$ de l'Exemple 5.2.5

En appliquant le Théorème 5.2.1 sur la Figure 5.4, on trouve que la condition 2 n'est pas vérifiée, conformément à l'analyse donnée par l'Exemple 5.2.4. Alors, le problème RPRE pour le système $\Sigma_{\Lambda d}$ de l'Exemple 5.2.5 n'est pas soluble sans mesure de la perturbation.

(A, B) -invariant pour les systèmes linéaires structurés

Dans le contexte des systèmes structurés, le sous-espace (A, B) -invariant maximum contenu dans $\text{Ker}C$ dépend des paramètres, on le note \mathcal{V}_{Λ}^* , ce qui signifie qu'il varie dans \mathbb{R}^n quand Λ varie dans \mathbb{R}^k , mais sa dimension reste génériquement constante. On peut définir un sous-espace, appelé partie fixe de \mathcal{V}_{Λ}^* et noté \mathcal{V}_F^* , qui est le plus grand

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

sous-espace fixe contenu dans presque tous les \mathcal{V}_Λ^* quand Λ varie dans \mathbb{R}^k , voir Figure 5.5.

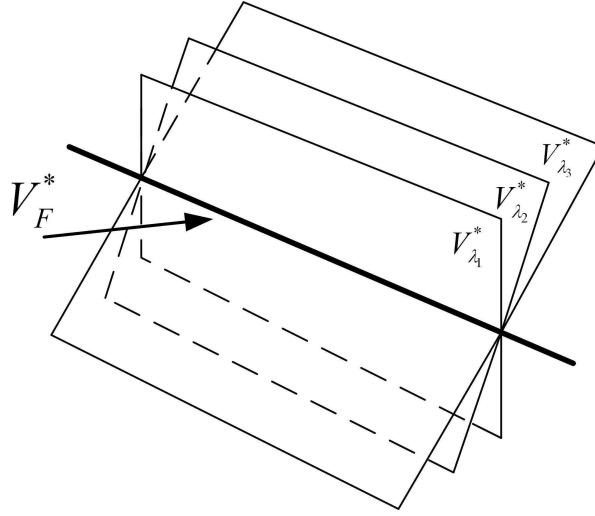


FIG. 5.5 – \mathcal{V}_F^* et la variation de \mathcal{V}_Λ^*

Le sous-espace \mathcal{V}_F^* peut être caractérisé simplement sur le graphe de la manière suivante $\mathcal{V}_F^* = \{e_i \text{ pour } i \text{ tel que } e_i \in \mathcal{I}^*\}$ [van der Woude, 1993] où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{I}^* est défini comme suit :

Définition 5.2.2. (\mathcal{I}^*) *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda d})$. L'ensemble \mathcal{I}^* est donné par :*

$\mathcal{I}^* = \{x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \text{la taille maximale d'un couplage de } U \cup x_i \text{ à } Y \text{ dans } G(\Sigma_{\Lambda d}) \text{ est la même que la taille maximale d'un couplage de } U \text{ à } Y \text{ dans } G(\Sigma_{\Lambda d}) \text{ et le nombre minimal de sommets de } X \cup U \text{ dans les deux couplages est le même}\}$

\mathcal{I}^* caractérise l'ensemble des e_i tels que, si une perturbation arrive sur e_i elle peut être rejetée par un retour d'état sans mesure de la perturbation.

Si on note $\text{Im}E_F$ le plus petit sous-espace fixe contenant les $\text{Im}E_\Lambda$ quand Λ varie dans \mathbb{R}^k , on a l'équivalent structurel du résultat de la condition (5.2.8)

Théorème 5.2.3. ([Commault et al., 1997]) *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda d}$ de type (5.2.9) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda d})$. Le problème du rejet de perturbation par retour d'état sans mesure de la perturbation est génériquement soluble si et seulement si*

$$\text{Im}E_F \subset \mathcal{V}_F^* \quad (5.2.10)$$

5.2.2 Rejet de perturbation par retour de mesure

Formulation classique

Repartons du système 5.2.1, supposons que la perturbation n'est pas mesurable et supposons que l'état n'est pas complètement accessible. On a donc un vecteur de sorties mesurées $z(t) = Hx(t)$. Le système dans ce cas est décrit par les équations d'état suivantes :

$$\Sigma_{dz} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Hx(t) \end{cases} \quad (5.2.11)$$

où $z(t)$ est le vecteur de mesure de dimension v et H une matrice réelle de dimension $v \times n$

Le problème de rejet de perturbation par retour de mesure (RPRM) revient à trouver un retour dynamique de mesure défini par

$$\Sigma_{fb} \begin{cases} \dot{w}(t) = Lw(t) + Mz(t) \\ u(t) = Nw(t) + Pz(t) \end{cases} \quad (5.2.12)$$

où $w(t) \in \mathbb{R}^\mu$, tel que le transfert en boucle fermée entre d et y soit nul. En termes de matrices de transfert on a :

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) & K(s) \\ M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

avec $u = F(s)z$ et $F(s)$ tel que :

$$G(s)F(s)(I - M(s)F(s))^{-1}N(s) + K(s) = 0 \quad (5.2.14)$$

En termes géométriques, ce problème a une solution élégante [Schumacher, 1980; Willems and Commault, 1981]. Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de RPRM ait une solution est que :

$$\mathcal{N}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (5.2.15)$$

où \mathcal{N}^* est le plus petit sous-espace (H, A) -invariant contenant $\text{Im}E$ et \mathcal{V}^* le plus grand sous-espace (A, B) -invariant contenu dans $\text{Ker}C$.

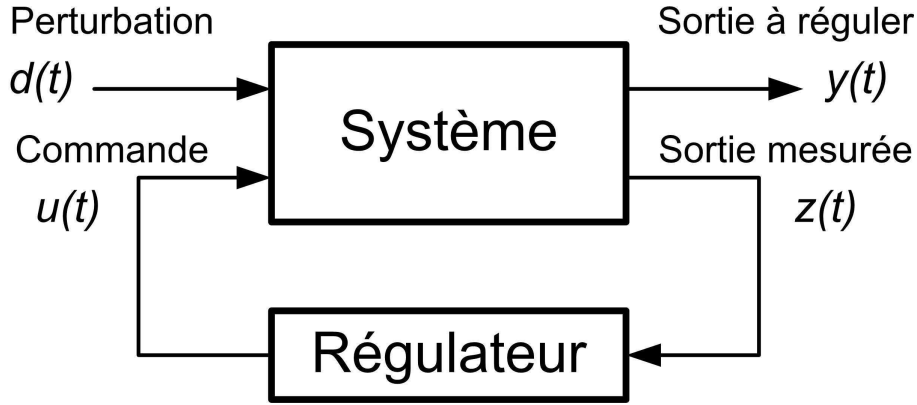


FIG. 5.6 – Le retour de mesure

Le sous-espace \mathcal{N}^* peut être calculé facilement de manière itérative (voir [Wonham, 1979]) :

$$\begin{cases} N_0 = \text{Im}E \\ N_k = A(N_{k-1} \cap \text{Ker}H) + \text{Im}E \text{ avec } k \geq 1 \end{cases} \quad (5.2.16)$$

Comme pour le calcul de \mathcal{V}^* donné dans (5.2.5), \mathcal{N}^* est la limite de la séquence de sous-espaces.

Interprétation sur les systèmes linéaires structurés

Le système linéaire de forme (5.2.11) peut être redéfini dans le contexte structuré de type (5.2.9) comme suit :

Définition 5.2.3. Soit $\Sigma_{\Lambda dz}$ un système linéaire décrit par l'ensemble d'équations d'état :

$$\Sigma_{\Lambda dz} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\Lambda}x(t) + B_{\Lambda}u(t) + E_{\Lambda}d(t) \\ y(t) = C_{\Lambda}x(t) \\ z(t) = H_{\Lambda}x(t) \end{cases} \quad (5.2.17)$$

$\Sigma_{\Lambda dz}$ est système linéaire structuré si la matrice suivante :

$$J_{\Lambda dz} = \begin{bmatrix} A_{\Lambda} & B_{\Lambda} & E_{\Lambda} \\ C_{\Lambda} & 0 & 0 \\ H_{\Lambda} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est structurée, c'est-à-dire les éléments de la matrice composée $J_{\Lambda dz}$ sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

À ce système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$, nous pouvons associer un graphe orienté $G(\Sigma_{\Lambda dz}) = (V'', W'')$ de la même manière que $G(\Sigma_{\Lambda d}) = (V', W')$ montré précédemment, c'est-à-dire :

- $V'' = V' \cup Z$ où $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_v\}$, l'ensemble de mesures.
- $W'' = W' \cup W_{XH}$ où $W_{XH} = \{(x_i, z_j), h_{ji} \neq 0\}$ avec h_{ji} l'élément (j, i) de la matrice H_Λ .

Par simplicité, nous notons $G(\Sigma_{\Lambda dz}) = (V, W)$.

Dans le même esprit que pour le problème RPRE, la condition géométrique nécessaire et suffisante pour la solubilité du problème de RPRM peut être interprétée pour les systèmes structurés :

Théorème 5.2.4. (*[Commault et al., 1997]*) *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si et seulement si*

$$\mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^* \quad (5.2.18)$$

où \mathcal{N}_F^* est le plus petit sous-espace fixe contenant les \mathcal{N}_Λ^* quand Λ varie dans \mathbb{R}^k .

Le sous-espace \mathcal{N}_F^* peut être caractérisé simplement sur le graphe de la manière suivante $\mathcal{N}_F^* = \{e_j \text{ pour } j \text{ tel que } e_j \in X \setminus \mathcal{J}^*\}$ [van der Woude, 1993] où e_j est le jème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{J}^* est défini comme suit :

Définition 5.2.4. (\mathcal{J}^*) *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. L'ensemble \mathcal{J}^* est donné par :*

$\mathcal{J}^* = \{x_j, j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \text{la taille maximale d'un couplage de } D \text{ à } Z \cup x_j \text{ dans } G(\Sigma_{\Lambda dz}) \text{ est la même que la taille maximale d'un couplage de } D \text{ à } Z \text{ dans } G(\Sigma_{\Lambda dz}) \text{ et le nombre minimal de sommets de } X \cup Z \text{ dans les deux couplages est le même}\}$

\mathcal{J}^* caractérise l'ensemble des sommets tels qu'on peut estimer à partir des mesures par un observateur indépendamment des perturbations. Le complémentaire de \mathcal{J}^* contient toute information concernant les perturbations.

Notons que le calcul de \mathcal{I}^* sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda d})$ de la Définition 5.2.2 ne dépend que des ensembles U , X et Y ainsi que des matrices structurées B_Λ , A_Λ et C_Λ . Alors, on peut appliquer le calcul de \mathcal{I}^* sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ pour trouver le même \mathcal{I}^* car la détermination de \mathcal{I}^* dépend d'éléments qui sont partagés par les deux graphes.

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Avec les deux ensembles \mathcal{I}^* et \mathcal{J}^* , nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.2.5. (*[van der Woude, 1993; Commault et al., 1997]*) *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Le problème du rejet de perturbation par retour de mesure est génériquement soluble si et seulement si :*

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X \quad (5.2.19)$$

Cette condition graphique 5.2.19 est équivalente à la condition géométrique du Théorème 5.2.4. Nous allons illustrer ces résultats sur un exemple dans la section suivante.

5.2.3 Exemple

Exemple 5.2.6

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.7 :

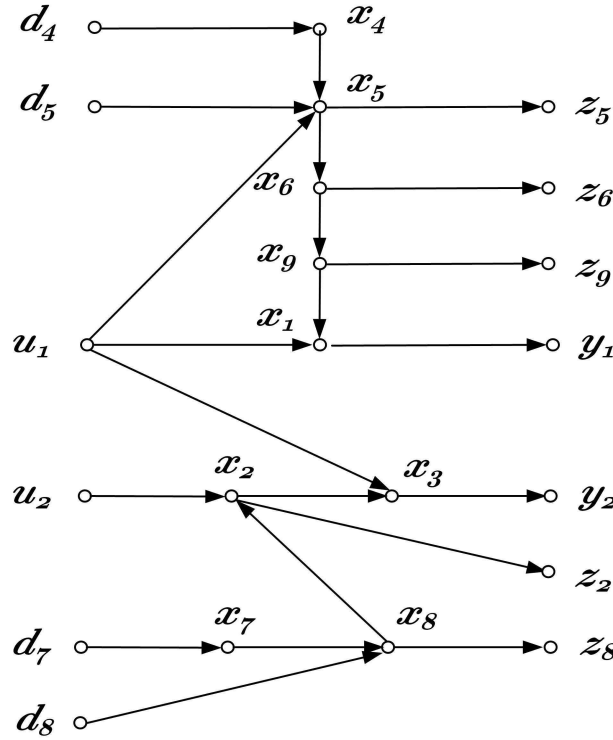


FIG. 5.7 – $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ de l'Exemple 5.2.6

Le nombre maximum de chemins sommets disjoints de U à Y sur $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ est égal à 2 et correspond à l'ensemble unique de chemins :

- $\{u_1, x_1, y_1\}$
- $\{u_2, x_2, x_3, y_2\}$

dont le nombre minimal de sommets de $X \cup U$ sur ces chemins est égal à 5.

D'après la Définition 5.2.2 nous avons :

$$\mathcal{I}^* = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

Par exemple $x_9 \notin \mathcal{I}^*$ car l'ensemble maximum de chemins sommets dis-joints de $U \cup x_9$ à Y sur $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ est égal à 2, qui est défini par :

- $\{x_9, x_1, y_1\}$
- $\{u_1, x_3, y_2\}$

cet ensemble ne contient que 4 sommets appartenant à $X \cup U$.

De la même manière, nous pouvons déterminer l'ensemble \mathcal{J}^* d'après la Définition 5.2.4 :

$$\mathcal{J}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_9\}$$

Alors le problème RPRM est soluble pour ce système parce que

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$$

5.3 Mesures inutiles pour le problème RPRM

Partant d'un système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$, nous supposons que le problème RPRM est soluble pour $\Sigma_{\Lambda dz}$. Nous allons caractériser un ensemble de mesures inutiles pour la solubilité du problème RPRM : les mesures pour des sommets d'état en dehors de \mathcal{I}^* . Pour cela, nous avons besoin de quelques préliminaires.

5.3.1 Préliminaires

Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$.

Nous désignons par L_{DZ} un couplage maximum entre D et Z sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ ayant le nombre minimal de sommets dans $X \cup Z$. Notons ce nombre de sommets N_{XZ} . Nous avons alors :

Lemme 5.3.1. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Soit ensemble \mathcal{J}^* défini par la Définition 5.2.4. Alors*

$$\forall x_i \in L_{DZ}, x_i \notin \mathcal{J}^* \tag{5.3.1}$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Démonstration : À partir du calcul de \mathcal{J}^* , il est clair qu'en considérant x_i comme une nouvelle mesure, la taille r du couplage maximum entre D et $Z \cup x_i$ ne peut pas être diminuée. Nous avons les deux cas suivants :

- r augmente, alors $x_i \notin \mathcal{J}^*$ par la Définition 5.2.4.
- r reste constant, alors le chemin de D à Z qui passe par x_i et qui a été utilisé pour construire le couplage L_{DZ} se termine maintenant en x_i . Donc, le nombre de sommets N_{XZ} diminue au moins de 1. Alors, $x_i \notin \mathcal{J}^*$.

Remarque 5.3.1. L'inversement de ce lemme n'est pas vrai, c'est-à-dire qu'un sommet qui n'appartient pas à L_{DZ} peut appartenir à $X \setminus \mathcal{J}^*$.

Nous allons montrer dans la suite, qu'étant donné un système $\Sigma_{\Lambda dz}$ avec un ensemble de sommets \mathcal{J}^* calculé par la Définition 5.2.4, la suppression des capteurs qui mesurent seulement les sommets dans \mathcal{J}^* ne change pas \mathcal{J}^* .

Lemme 5.3.2. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ et l'ensemble \mathcal{J}^* défini par la Définition 5.2.4. Supposons que le problème de rejet de perturbation par retour de mesure ait une solution. Soit $z_j \in Z$ tel que pour chaque x_i , si $(x_i, z_j) \in W$ alors $x_i \in \mathcal{J}^*$.*

Considérons le sous-système $\Sigma_{\Lambda dz}^{z_j}$ obtenu à partir de $\Sigma_{\Lambda dz}$ en enlevant de $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ le sommet z_j et les arcs incidents. Notons $\mathcal{J}^(\Sigma_{\Lambda dz}^{z_j})$ l'ensemble \mathcal{J}^* de la Définition 5.2.4 pour $\Sigma_{\Lambda dz}^{z_j}$. Nous avons :*

$$\mathcal{J}^*(\Sigma_{\Lambda dz}^{z_j}) = \mathcal{J}^*$$

Démonstration : Avec $\Sigma_{\Lambda dz}$, nous avons l'ensemble \mathcal{J}^* et un couplage maximum L_{DZ} de taille r ayant le nombre minimal de sommets N_{XZ} qui appartiennent à $X \cup Z$. Par le lemme 5.3.1, avec x_i, x_k dans \mathcal{J}^* tels que $x_i, x_k \notin L_{DZ}$, alors la suppression de z_j avec les arcs incidents ne change pas L_{DZ} et tout les sommets qui étaient dans \mathcal{J}^* . Alors, \mathcal{J}^* ne change pas.

Illustrons maintenant ce lemme sur l'exemple suivant :

Exemple 5.3.1

Reconsidérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) présenté dans l'Exemple 5.2.6 donc son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.7.

Comme le calcul précédent le montre :

$$\mathcal{J}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_9\}$$

Les capteurs $\{z_2, z_6, z_9\}$ ne mesurent que des sommets d'état appartenant à \mathcal{J}^* . Supposons qu'on enlève ces trois capteurs, il nous reste alors deux capteurs $\{z_5, z_8\}$. L'ensemble de \mathcal{J}^* correspondants à $\{z_5, z_8\}$ vaut :

$$\mathcal{J}_{\{z_5, z_8\}}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_9\}$$

Nous avons alors

$$\mathcal{J}^* \equiv \mathcal{J}_{\{z_5, z_8\}}^*$$

Avec le lemme ci-dessus, nous pouvons montrer que les capteurs qui mesurent seulement des sommets dans \mathcal{J}^* ne sont pas essentiels pour le problème de RPRM.

Proposition 5.3.3. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ et l'ensemble \mathcal{J}^* défini par la Définition 5.2.4. Supposons que le problème de rejet de perturbation par retour de mesure ait une solution. Soit $z_j \in Z$ tel que pour chaque x_i , si $(x_i, z_j) \in W$ alors $x_i \in \mathcal{J}^*$. Dans ce cas, z_j n'est pas essentiel pour la solubilité du problème de RPRM.*

Démonstration : Comme z_j ne mesure que les sommets dans \mathcal{J}^* , alors la suppression de z_j ainsi que des arcs incidents ne change pas \mathcal{J}^* d'après le Lemme 5.3.2. De plus, l'ensemble de \mathcal{I}^* ne dépend pas de Z , donc la solubilité du problème de RPRM est conservée à cause du Théorème 5.2.5.

5.3.2 Ensemble de mesures inutiles

Les résultats précédents nous permettent de caractériser un ensemble de mesures qui s'avèrent inutiles pour résoudre le problème de RPRM :

Théorème 5.3.4. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ et l'ensemble \mathcal{J}^* défini par la Définition 5.2.4. Supposons que le problème de rejet de perturbation par retour de mesure ait une solution. Soit $z_j \in Z$ tel que pour chaque x_i , si $(x_i, z_j) \in W$ alors $x_i \in \bar{\mathcal{I}}^* = X \setminus \mathcal{I}^*$. Dans ce cas, z_j est inutile pour la solubilité du problème de RPRM.*

Démonstration : Considérons $z_j \in Z$ tel que pour chaque x_i , si $(x_i, z_j) \in W$ alors $x_i \in \bar{\mathcal{I}}^*$. Considérons V_Z un sous-ensemble de capteurs qui contient z_j tel que le problème

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

de RPRM soit soluble avec V_Z . Notons $\mathcal{J}_{V_Z}^*$ l'ensemble de sommets \mathcal{J}^* correspondant au sous-ensemble de capteurs V_Z . Nous avons alors :

$$\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}_{V_Z}^* = X$$

d'après le Théorème 5.2.5 et du fait que \mathcal{I}^* est indépendant de Z . Donc, z_j mesure seulement les sommets dans $\bar{\mathcal{I}}^* \subseteq \mathcal{J}_{V_Z}^*$. D'après la Proposition 5.3.3, il existe un autre sous-ensemble de capteurs contenu dans V_Z qui ne contient pas z_j et qui est une solution pour le problème RPRM. D'après la Définition 2.3.3, z_j est un capteur inutile. ■

Le Théorème 5.3.4 nous fournit un ensemble de capteurs qui sont inutiles pour résoudre le problème RPRM, les capteurs qui mesurent uniquement les sommets d'état en dehors de l'ensemble \mathcal{I}^* . Nous pouvons interpréter ce résultat, les mesures en dehors de \mathcal{I}^* sont inutiles pour la solubilité du problème RPRM. Ce résultat est obtenu sur les systèmes linéaires structurés sans la nécessité d'une analyse à priori, sauf le calcul de \mathcal{I}^* .

5.3.3 Exemple

Exemple 5.3.2

Reconsidérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) présenté dans l'Exemple 5.2.6 dont le graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ est présenté Figure 5.7.

Les calculs dans l'Exemple 5.2.6 montrent que :

$$\mathcal{I}^* = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

$$\mathcal{J}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_9\}$$

Alors z_2 et z_9 sont des capteurs inutiles parce qu'ils ne mesurent que des sommets d'état en dehors de \mathcal{I}^* .

5.4 Le cas perturbation unique

Dans cette section, nous nous concentrons sur le problème de rejet de perturbation par retour de mesure dans le cas où il y a une seule perturbation d qui affecte le système, c'est-à-dire que le système $\Sigma_{\Lambda dz}$ est de type (5.2.17) avec $q = 1$. Dans ce cas, nous allons donner une autre caractérisation de la solubilité du problème de RPRM et puis, nous allons donner une classification complète des capteurs pour ce problème. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques lemmes.

5.4.1 Préliminaires

Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$.

Nous désignons par L_{UY} un couplage maximum entre U et Y sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ ayant le nombre minimal de sommets dans $U \cup X$. Notons ce nombre de sommets N_{UX} . Nous avons alors :

Lemme 5.4.1. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Soit l'ensemble \mathcal{I}^* défini par la Définition 5.2.2. Alors*

$$\forall x_i \in L_{UY}, x_i \notin \mathcal{I}^* \quad (5.4.1)$$

Démonstration : Similaire à la démonstration du Lemme 5.3.1.

Lemme 5.4.2. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Soit l'ensemble \mathcal{I}^* défini par la Définition 5.2.2. S'il existe $y_j \in Y$ tel que $(x_i, y_j) \in W$ alors $x_i \notin \mathcal{I}^*$.*

Démonstration : Supposons que $(x_i, y_j) \in W$ et $x_i \in \mathcal{I}^*$. Notons L_{UY} le couplage maximum entre U et Y sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ ayant le nombre minimal de sommets dans $U \cup X$. Notons ce nombre de sommets N_{UX} . Nous avons les deux cas suivants qui dépendent du fait que y_j appartient à L_{UY} ou non :

1. Supposons que y_j appartient à L_{UY} par un chemin de u_k à y_j , alors ce chemin contient au moins 3 sommets u_k, y_j et un sommet d'état parce qu'il n'existe pas de chemin entrée-sortie direct sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Comme $x_i \in \mathcal{I}^*$ donc $x_i \notin L_{UY}$ d'après le Lemme 5.4.1. Nous pouvons construire alors un nouveau couplage maximum entre $U \cup x_i$ et Y en remplaçant le chemin de u_k à y_j par celui de x_i à y_j qui est plus court. Puis, le nombre minimal de sommets dans $U \cup X$ sur le nouveau couplage maximum diminue par rapport à l'ancien couplage. Cela montre que $x_i \notin \mathcal{I}^*$ d'après la Définition 5.2.2.
2. Supposons que y_j n'appartient à aucun couplage maximum L_{UY} . Alors un couplage maximum entre $U \cup x_i$ et Y peut être construit en ajoutant l'arc (x_i, y_j) au couplage L_{UY} . On obtient un nouveau couplage maximum de taille plus grande que l'ancien couplage. D'après la Définition 5.2.2, $x_i \notin \mathcal{I}^*$. ■

Remarque 5.4.1. D'après le Lemme 5.4.2, si un sommet $x_i \in \mathcal{I}^*$ alors il n'existe pas $y_j \in Y$ tel que $(x_i, y_j) \in W$.

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Nous définissons maintenant deux notions :

Définition 5.4.1. (*Frontière de \mathcal{I}^)** *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Soit l'ensemble \mathcal{I}^* défini par la Définition 5.2.2. Notons $F_{\mathcal{I}^*}$, la frontière de \mathcal{I}^* , l'ensemble de sommets :*

$$F_{\mathcal{I}^*} = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid \exists(x_i, x_j) \in W, x_j \notin \mathcal{I}^*\} \quad (5.4.2)$$

$F_{\mathcal{I}^*}$ désigne donc l'ensemble des sommets de \mathcal{I}^* qui ont au moins un successeur en dehors de \mathcal{I}^* .

Définition 5.4.2. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$. Notons $F_{\mathcal{I}^*}$ la frontière de \mathcal{I}^* définie par la Définition 5.4.1. Pour une perturbation d qui affecte au moins un sommet de \mathcal{I}^* , notons r_d la longueur d'un plus court chemin de d à $F_{\mathcal{I}^*}$. Notons \mathcal{D}_d l'ensemble de sommets :*

$$\mathcal{D}_d = \{x_i \in \mathcal{I}^* \mid 0 < \mathcal{L}(d, x_i) \leq r_d\}$$

où $\mathcal{L}(d, x_i)$ est la longueur d'un plus court chemin de d à x_i .

Nous donnons maintenant une autre caractérisation pour la solubilité du problème de rejet de perturbation par retour de mesure.

Théorème 5.4.3. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ affecté par une seule perturbation d ($q = 1$). Notons \mathcal{D}_d comme dans la Définition 5.4.2. Le problème de rejet de perturbation par retour de mesure est soluble si et seulement si :*

1. *d affecte seulement des sommets appartenant à \mathcal{I}^* , c'est-à-dire pour tout $(d, x_i) \in W$, $x_i \in \mathcal{I}^*$.*
2. *il existe z^* une mesure d'un sommet d'état dans \mathcal{D}_d , c'est-à-dire qu'il existe $x_k \in \mathcal{D}_d$ tel que $(x_k, z^*) \in W$*

Démonstration :

Suffisance : Supposons que ces deux conditions sont vérifiées, alors la longueur d'un plus court chemin de d à z^* noté $\mathcal{L}(d, z^*)$ est plus courte ou égale à $r_d + 1$ où r_d , est le rayon \mathcal{D}_d qui est donné dans la Définition 5.4.2 (voir Figure 5.8). Prenons $x_j \notin \mathcal{I}^*$ alors $x_j \notin \mathcal{D}_d$ d'après la Définition 5.4.2. Nous avons les deux cas suivants :

1. Il existe au moins un chemin de d à x_j . Alors la longueur d'un plus court chemin de d à x_j notée $\mathcal{L}(d, x_j)$ est plus grande ou égale à $r_d + 1$. Cela montre que $x_j \in \mathcal{J}^*$ d'après la Définition 5.2.4.

2. Il n'existe pas de chemin de d à x_j , alors $x_j \in \mathcal{J}^*$ d'après la Définition 5.2.4.

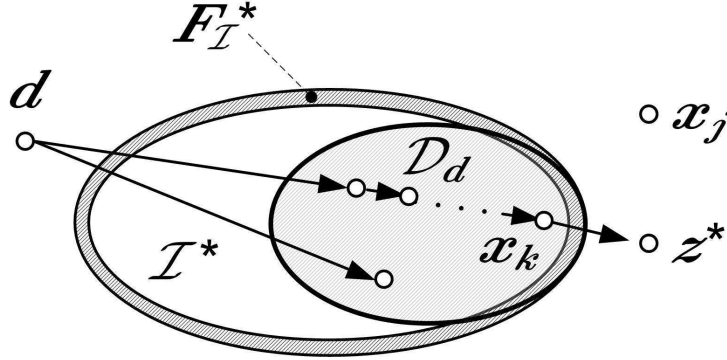


FIG. 5.8 – Mesure à l'intérieur de \mathcal{D}_d

Alors, $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$, le problème RPRM est soluble.

Nécessité : Supposons qu'il existe $(d, x_j) \in W$ tel que $x_j \notin \mathcal{I}^*$, alors la longueur d'un plus court chemin de d à n'importe quelle mesure est plus grande ou égale à 2. D'après la Définition de \mathcal{J}^* donnée dans 5.2.4, $x_j \notin \mathcal{J}^*$ alors $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$, le problème RPRM n'est pas soluble.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de mesure dans \mathcal{D}_d . Notons l' la longueur d'un plus court chemin de d à une mesure, alors $l' \geq r_d + 2$.

Notons x^* un sommet d'état tel que $x^* \in \mathcal{D}_d \cap F_{\mathcal{I}^*}$ alors il existe $x_j \notin \mathcal{I}^*$ tel que $(x^*, x_j) \in W$ d'après la Définition de $F_{\mathcal{I}^*}$ (Voir Figure 5.9). Alors la longueur d'un plus court chemin de d à x_j noté $\mathcal{L}(d, x_j) = r_d + 1$ est donc $\mathcal{L}(d, x_j) < l'$. D'après la définition de \mathcal{J}^* , $x_j \notin \mathcal{J}^*$, alors le problème de RPRM n'est pas soluble parce que $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$. ■

Pour résoudre le problème RPRM quand le système $\Sigma_{\Lambda dz}$ a une perturbation unique d qui affecte seulement les sommets d'état appartenant à \mathcal{I}^* , nous devons mesurer au moins un sommet d'état appartenant à \mathcal{D}_d .

5.4.2 La classification des capteurs

Nous caractérisons maintenant les ensembles de capteurs
– essentiels.

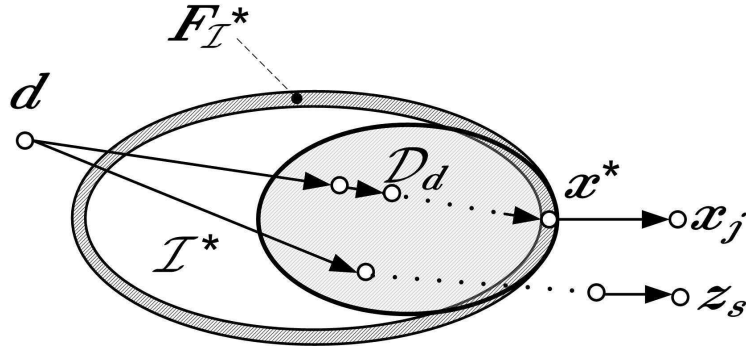


FIG. 5.9 – La mesure en dehors de \mathcal{D}_d

- inutiles.
- utiles.

pour le problème de rejet de perturbation par retour de sortie quand le système $\Sigma_{\Lambda dz}$ a une perturbation unique d qui affecte seulement les sommets d'état appartenant à \mathcal{I}^* .

Théorème 5.4.4. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ affecté par une seule perturbation d ($q = 1$). Notons \mathcal{D}_d comme dans la Définition 5.4.2. Supposons que le problème de rejet de perturbation par retour de mesure est soluble.*

1. z_j est un capteur inutile si et seulement si pour tout x_i tel que $(x_i, z_j) \in W$ alors $x_i \notin \mathcal{D}_d$.
2. z_j est un capteur utile si et seulement s'il existe $x_i \in \mathcal{D}_d$ tel que $(x_i, z_j) \in W$.
3. z_j est un capteur essentiel si et seulement si z_j est l'unique capteur utile.

Démonstration :

1. Supposons que z_j est un capteur qui ne mesure pas de sommet d'état dans \mathcal{D}_d . Considérons $V_Z \subseteq Z$ une solution pour le problème de RPRM qui contient z_j . D'après le Théorème 5.4.3, il existe $z^* \in V_Z$ une mesure d'un sommet d'état $x_i \in \mathcal{D}_d$. Alors $\{V_Z \setminus z_j\}$ est encore une solution par la mesure z^* . Donc z_j est un capteur inutile d'après la Définition 2.3.3.

Inversement, supposons que z_j est un capteur qui mesure au moins un sommet d'état dans \mathcal{D}_d . D'après le Théorème 5.4.3, $V_Z = \{z_j\}$ est une solution pour le problème de RPRM. La suppression de z_j rend insoluble le problème de RPRM, c'est-à-dire $\{V_Z \setminus z_j\} = \emptyset$ n'est plus une solution. Alors z_j n'est pas un capteur inutile.

2. Supposons que z_j est un capteur qui mesure au moins un sommet d'état dans \mathcal{D}_d , alors z_j est utile d'après la démonstration ci-dessus.

3. Supposons que z_j est l'unique capteur utile. Considérons $V_Z \subseteq Z$ une solution pour le problème de RPRM alors $z_j \in V_Z$ parce que z_j est l'unique capteur utile. La suppression de z_j rend insoluble le problème de RPRM, c'est-à-dire $\{V_Z \setminus z_j\} = \emptyset$ n'est plus une solution. Alors z_j est un capteur essentiel d'après la Définition 2.3.4.

Inversement, supposons qu'il existe $z_k \neq z_j$ tel que z_k est un capteur utile. Considérons $V_Z = \{z_j, z_k\}$, d'après le Théorème 5.4.3, V_Z est une solution pour le problème de RPRM. Dans ce cas, la suppression de z_j ne change pas la solubilité du problème de RPRM parce que $\{V_Z \setminus z_j\} = \{z_k\}$ est une solution. Alors z_j n'est pas un capteur essentiel. ■

5.4.3 Exemple

Exemple 5.4.1

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.10.

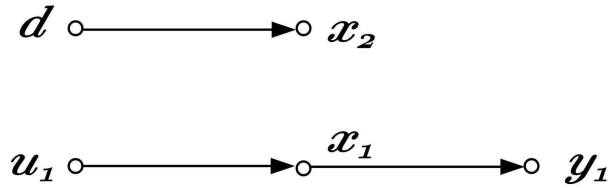


FIG. 5.10 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.4.1

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_2\}$ et la perturbation d affecte seulement $x_2 \in \mathcal{I}^*$. D'après la Définition 5.4.2, nous trouvons $\mathcal{D}_d = \emptyset$. Sans aucune mesure, on a $\mathcal{J}^* = \{x_1\}$ donc $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ alors le problème de RPRM est soluble sans aucune mesure. En effet, la perturbation d n'a aucun effet sur la sortie à réguler y_1 .

Exemple 5.4.2

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.11.

Dans ce cas nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_2, x_3, x_4\}$, $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_2, x_4\}$ et la perturbation d affecte $\{x_2, x_3\} \in \mathcal{I}^*$. Par la Définition 5.4.2, nous avons $\mathcal{D}_d = \{x_2, x_3\}$ alors une mesure pour x_2 ou x_3 résout le problème de RPRM parce que dans ce cas, nous avons $\mathcal{J}^* = \{x_1, x_4\}$.

Mais le problème de RPRM n'est pas soluble en mesurant x_4 , un sommet

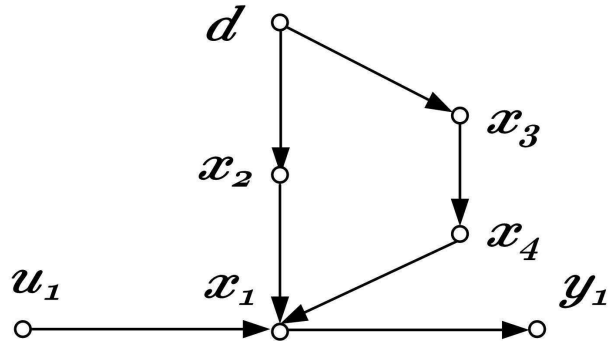


FIG. 5.11 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.4.2

d'état qui n'appartient pas à \mathcal{D}_d , parce que dans ce cas, $x_1 \notin \mathcal{J}^*$ et cela fait que $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* \neq X$.

5.4.4 Analyse de la complexité

L'analyse de la complexité du classement des capteurs pour le problème RPRM quand le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ est affecté par une seule perturbation dépend du Théorème 5.4.4 :

Proposition 5.4.5. *La détermination des capteurs essentiels, des capteurs inutiles et des capteur utiles pour le problème du rejet de perturbation par retour de sortie quand le système est affecté par une seule perturbation peut s'effectuer en temps polynomial.*

Démonstration : Le couplage maximum de U à Y sur $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ ayant le nombre minimum de sommets peut être obtenu en temps polynomial par un algorithme de type flot maximum. Ensuite, pour chaque sommet d'état x_i qui n'appartient pas à ce couplage, on construit un couplage maximum de U à $Y \cup x_i$ sur $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ ayant le nombre minimum de sommets puis on compare avec le couplage initial pour déterminer si x_i appartient à \mathcal{I}^* ou non d'après la Définition 5.2.2. Alors, la détermination de \mathcal{I}^* est clairement polynomiale.

Quand l'ensemble \mathcal{I}^* est déterminé, la classification des capteurs en trois catégories est une simple procédure de marquage d'après le Théorème 5.4.4. Donc, la classification des capteurs dans ce cas peut s'effectuer en temps polynomial. ■

5.5 Exemple illustratif

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats obtenus précédemment sur un procédé thermo-hydraulique à 5 bacs.

5.5.1 Le système à 5 bacs

Exemple 5.5.1

Considérons le procédé thermo-hydraulique représenté Figure 5.12.

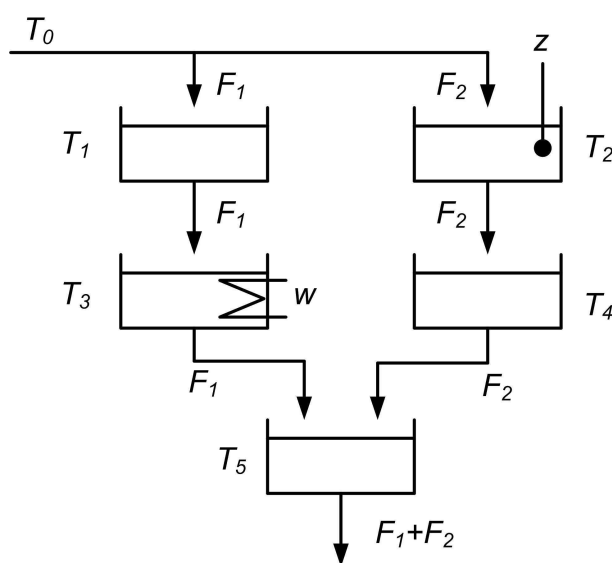


FIG. 5.12 – Le procédé à 5 bacs

Ce procédé est composé de 5 bacs, chacun étant alimenté par un débit fixe F_1 pour les bacs 1 et 3, F_2 pour les bacs 2 et 4 et $(F_1 + F_2)$ pour le bac 5.

L'entrée de commande est la puissance de chauffe w du bac 3. La sortie à réguler est la température T_5 du cinquième bac. La perturbation est la température d'alimentation T_0 et la sortie mesurée z est la température T_2 .

Le problème de rejet de perturbation consiste à trouver une loi de commande par retour de mesure (utilisant uniquement T_2) pour que T_5 soit insensible aux variations de T_0 .

En choisissant comme variables d'état les variations de température autour d'un point de fonctionnement on aboutit à un modèle linéarisé du type

(5.2.11) où

$$x = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5]^T \quad d = T_0 \quad u = w \quad y = T_5 \quad (5.5.1)$$

avec les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-F_1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-F_2}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_1}{C_3} & 0 & \frac{-F_1}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{C_4} & 0 & \frac{-F_2}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_1}{C_5} & \frac{F_2}{C_5} & \frac{-F_1-F_2}{C_5} \end{bmatrix} \quad (5.5.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/C_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} F_1/C_1 \\ F_2/C_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C_i correspond à la capacité calorifique du bac i .

A ce modèle on peut aisément associer un système structuré du type (5.2.17) dont les matrices sont :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{14} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le graphe associé est donné Figure 5.13 :

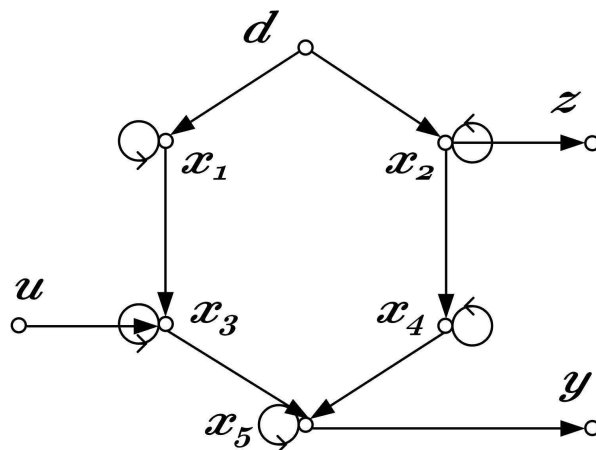


FIG. 5.13 – Graphe de l'exemple de 5 bacs

5.5.2 Conditions géométriques pour la solubilité de problème du rejet de perturbation

L'image de perturbation $\text{Im}E$ est :

$$\text{Im } E = \text{Span} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.4)$$

alors le sous-espace, partie fixe de $\text{Im}E$, noté $\text{Im}E_F$ est :

$$\text{Im } E_F = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.5)$$

En utilisant l'Algorithme 5.2.5 on peut calculer le sous-espace (A, B) -invariant maximum

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

contenu dans $\ker C$, \mathcal{V}^* :

$$\mathcal{V}^* = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_7/\lambda_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.6)$$

Le sous-espace, partie fixe de \mathcal{V}^* et noté \mathcal{V}_F^* est clairement

$$\mathcal{V}_F^* = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.7)$$

De façon duale calculons \mathcal{N}^* le plus petit sous-espace (H, A) -invariant contenant $\text{Im} E$ en utilisant l'Algorithme 5.2.16 pour obtenir finalement :

$$\mathcal{N}^* = \text{Span} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.8)$$

Sa partie fixe est donnée par \mathcal{N}_F^*

$$\mathcal{N}_F^* = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5.9)$$

Pour ce système, le problème du rejet de perturbation par retour d'état sans mesure de perturbation $u(t) = Fx(t)$ est génériquement soluble d'après le Théorème 5.2.3 :

$$\text{Im } E_F \subset \mathcal{V}_F^* \quad (5.5.10)$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, nous constatons que, pour presque toute valeur des paramètres la condition du Théorème 5.2.4 est satisfaite :

$$\mathcal{N}_F^* \subset \mathcal{V}_F^* \quad (5.5.11)$$

Le rejet de perturbation avec retour de mesure est donc génériquement soluble.

5.5.3 Conditions graphiques pour la solubilité de problème du rejet de perturbation

Le problème du rejet de perturbation par retour d'état sans mesure de perturbation pour le système de l'Exemple 5.5.1 a bien une solution d'après le Théorème 5.2.1 en ajoutant un arc (u', u) devant l'entrée u . Nous avons :

- Un couplage maximum entre U et Y et un couplage maximum entre $U \cup D$ et Y sur ont la même taille de 1.
- Le nombre minimum de sommets dans X sur ces deux couplages est égal à 2.

Par l'approche graphique on peut calculer les ensembles de sommets \mathcal{I}^* et \mathcal{J}^* par les Définitions 5.2.2 et 5.2.4 qui valent respectivement :

$$\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}, \quad \mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\} \quad (5.5.12)$$

Donc $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ et le problème a une solution d'après le Théorème 5.2.5.

Dans la pratique, la mesure de la température du deuxième bac est une information suffisamment rapide sur la perturbation T_0 pour qu'elle soit prise en compte par l'action de w dans le bac 3 et que la perturbation T_0 soit ensuite compensée à temps au niveau du bac 5.

5.5.4 Classification des capteurs pour le problème du rejet de perturbation

Dans cet exemple, la classification des capteurs est assez simple. Nous avons les cas suivants :

1. Si seulement x_2 est disponible pour la mesure, comme calculé précédemment, $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}$ et $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$. Alors la frontière $F_{\mathcal{I}^*}$ est $\{x_1, x_2\}$ et $D_d = \{x_1, x_2\}$. D'après le Théorème 5.4.4, le capteur $z = T_2$ qui est l'unique capteur mesurant un

sommet d'état appartenant à D_d , est essentiel.

2. Supposons maintenant que x_1 et x_2 sont disponibles pour la mesure. Nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}$ et $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$. Alors $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_2\}$ et $D_d = \{x_1, x_2\}$. Les mesures de x_1 et x_2 sont utiles mais pas essentielles d'après le Théorème 5.4.4.

3. Supposons que tous les sommets d'état x_1, \dots, x_5 sont disponibles pour la mesure. Nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2\}$ et $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$. Alors $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_1, x_2\}$ et $D_d = \{x_1, x_2\}$. D'après le Théorème 5.3.4, les mesures de x_3, x_4 et x_5 sont inutiles pour la solubilité du problème RPRM parce que ce sont des mesures en dehors de \mathcal{I}^* . Ces mesures fournissent des informations tardives sur la perturbation. Par contre, les mesures de x_1 et x_2 sont utiles mais pas essentielles d'après le Théorème 5.4.4.

5.5.5 Calcul d'un retour d'état pour le problème du rejet de perturbation

Rappelons que la fonction de transfert en boucle fermée (5.2.7) entre la perturbation d et la sortie à réguler y doit être nulle :

$$T_F(s) = C_\Lambda(sI - A_\Lambda - B_\Lambda F_\Lambda)^{-1} E_\Lambda = 0 \quad (5.5.13)$$

La matrice de retour d'état est de la forme

$$F_\Lambda = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5] \quad (5.5.14)$$

En boucle ouverte, l'équation caractéristique du système :

$$\det(sI - A_\Lambda) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_6)(s - \lambda_4)(s - \lambda_9) \quad (5.5.15)$$

et en boucle fermée :

$$\det(sI - A_\Lambda - B_\Lambda F_\Lambda) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_6)[-\lambda_7 \lambda_{10} f_5 + (-\lambda_{10} f_3 + s - \lambda_4)(s - \lambda_9)] \quad (5.5.16)$$

Pour assurer le rejet de perturbation, le retour F_Λ doit satisfaire :

$$(A_\Lambda + B_\Lambda F_\Lambda)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (5.5.17)$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

En développant l'Équation (5.5.17), nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 + \lambda_{10}f_1 & \lambda_{10}f_2 & \lambda_4 + \lambda_{10}f_3 - \frac{\lambda_7}{\lambda_8}\lambda_{10}f_4 \\ 0 & \lambda_5 & -\frac{\lambda_7}{\lambda_8}\lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_7}{\lambda_8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.18)$$

ce qui implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 + \lambda_{10}f_1 = 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda_{10}f_2 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda_7}{\lambda_8} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_4 + \lambda_{10}f_3 - \frac{\lambda_7}{\lambda_8}\lambda_{10}f_4 \\ -\frac{\lambda_7}{\lambda_8}\lambda_6 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda_7}{\lambda_8} \end{pmatrix} \end{array} \right. , \quad (5.5.19)$$

où le symbol \propto représente la colinéarité entre deux vecteurs. D'après les Équations (5.5.19), nous avons alors :

- f_1 et f_2 sont fixés par les λ_i
- f_3 et f_4 sont liés
- f_5 libre

Donc, nous pouvons prendre n'importe quelle valeur pour f_5 et f_3 . f_4 se calcule en fonction de f_3 . Nous pouvons par exemple choisir $f_3 = 0$ et $f_5 = 0$ et le retour d'état suivant assure le rejet de perturbation :

$$F_{\Lambda 1} = \left[\begin{array}{ccccc} -\frac{\lambda_3}{\lambda_{10}} & -\frac{\lambda_3\lambda_8}{\lambda_7\lambda_{10}} & 0 & \frac{\lambda_4\lambda_8 - \lambda_6\lambda_8}{\lambda_7\lambda_{10}} & 0 \end{array} \right] \quad (5.5.20)$$

Avec le retour d'état $F_{\Lambda 1}$, nous trouvons exactement la même dynamique en boucle fermée qu'en boucle ouverte pour ce système de 5 bacs.

Une autre possibilité, nous pouvons prendre $f_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_{10}}$ et $f_5 = 0$ pour arriver au retour d'état suivant :

$$F_{\Lambda 2} = \left[\begin{array}{ccccc} -\frac{\lambda_3}{\lambda_{10}} & -\frac{\lambda_3\lambda_8}{\lambda_7\lambda_{10}} & -\frac{\lambda_3}{\lambda_{10}} & -\frac{\lambda_6\lambda_8}{\lambda_7\lambda_{10}} & 0 \end{array} \right] \quad (5.5.21)$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Avec le retour d'état $F_{\Lambda 2}$, nous avons modifié l'équation caractéristique du système en boucle fermée, qui vaut maintenant :

$$\det (sI - A_{\Lambda} - B_{\Lambda}F_{\Lambda}) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_6)s(s - \lambda_9) \quad (5.5.22)$$

5.5.6 Calcul d'un retour de mesure pour le problème du rejet de perturbation

Pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure, en termes de matrices de transfert (5.2.13) on a :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Lambda} & K_{\Lambda} \\ M_{\Lambda} & N_{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \quad (5.5.23)$$

avec $u = F_{\Lambda}z$ et F_{Λ} (5.2.14) tel que :

$$G_{\Lambda}F_{\Lambda}(I - M_{\Lambda}F_{\Lambda})^{-1}N_{\Lambda} + K_{\Lambda} = 0 \quad (5.5.24)$$

Le retour dynamique de mesure peut être représenté par le schéma suivant (Figure 5.14) :

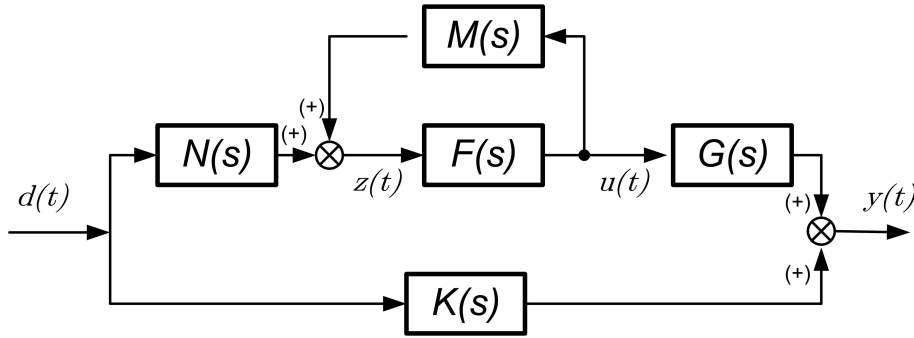


FIG. 5.14 – Le transfert perturbation sortie

Nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} G_{\Lambda} &= \frac{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{13}}{(s - \lambda_4)(s - \lambda_9)} \\ M_{\Lambda} &= 0 \\ N_{\Lambda} &= \frac{\lambda_{12} \lambda_{14}}{s - \lambda_2} \\ K_{\Lambda} &= \left[\frac{\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{11}}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_4)} + \frac{\lambda_5 \lambda_8 \lambda_{12}}{(s - \lambda_2)(s - \lambda_6)} \right] \frac{\lambda_{13}}{s - \lambda_9} \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Comme $M_\Lambda = 0$, l'équation (5.5.24) devient :

$$G_\Lambda F_\Lambda N_\Lambda + K_\Lambda = 0 \quad (5.5.26)$$

dans ce cas, le schéma du retour dynamique de mesure de Figure 5.14 se ramène à un sous-schéma plus simple, présenté Figure 5.15 :

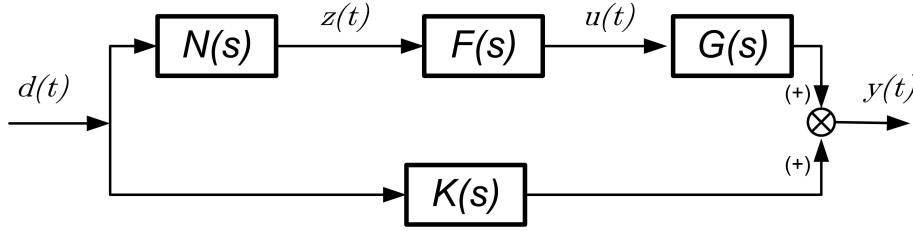


FIG. 5.15 – Le retour dynamique de mesure cas $M = 0$

il est alors suffisant de prendre F_Λ une fonction de transfert d'ordre 2 :

$$F_\Lambda = d_1 + \frac{c_1 + c_2 s}{s^2 - a_2 s - a_1} \quad (5.5.27)$$

pour résoudre l'équation 5.5.26. Nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\lambda_1 \lambda_6 \\ a_2 &= \lambda_1 + \lambda_6 \\ c_1 &= \frac{\lambda_3 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_{11} (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_5 \lambda_8 \lambda_{12} (\lambda_6 - \lambda_4)}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{12} \lambda_{14}} \\ c_2 &= \frac{-\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{11} (\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_5 \lambda_8 \lambda_{12} (\lambda_6 - \lambda_4)}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{12} \lambda_{14}} \\ d_1 &= \frac{-\lambda_3 \lambda_7 \lambda_{11} - \lambda_5 \lambda_8 \lambda_{12}}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{12} \lambda_{14}} \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

Le retour dynamique de mesure F_Λ est de la forme :

$$F_\Lambda = -\frac{\lambda_5 \lambda_8 \lambda_{12} (s - \lambda_1) (s - \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_7 \lambda_{11} (s - \lambda_2) (s - \lambda_6)}{\lambda_7 \lambda_{10} \lambda_{12} \lambda_{14} (s - \lambda_1) (s - \lambda_6)} \quad (5.5.29)$$

Le retour F_Λ trouvé dans ce cas est unique, c'est-à-dire en fonction des λ_i . Nous pouvons prendre la réalisation suivante pour le retour dynamique de mesure F_Λ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \quad (5.5.30)$$

$$u = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + d_1 z \quad (5.5.31)$$

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

Ce retour de mesure F_Λ rend la sortie à réguler y insensible par rapport à des variations de perturbation d .

5.5.7 Résultats de simulation

Dans cette sous-section, nous allons présenter les résultats de simulation pour le système à 5 bacs.

Supposons qu'à l'état initial, le volume d'eau dans ces bacs est égal à $V_{ci} = 5$ litres. Alors la capacité calorifique de chaque bac est :

$$C_i = V_{ci}c_e$$

d'où c_e est la capacité thermique massique de l'eau, qui vaut $4,186 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. C'est-à-dire la quantité d'énergie en kiloJoules pour augmenter de 1 degré Kelvin 1 kg d'eau. Nous avons alors $C_i = 20,93 \text{ kJ.K}^{-1}$.

Les débits d'eau sont fixés :

- $F_1 = 0,1$ litre / seconde
- $F_2 = 0,05$ litre / seconde

La température d'entrée du système est supposée varier autour de 20°C :

$$T_0 = 20^\circ\text{C} \pm 10^\circ\text{C}$$

Nous souhaitons que la température d'eau à la sortie soit de $T_5 = 40^\circ\text{C}$, quelle que soit la valeur de T_0 .

Supposons d'abord que la température d'entrée $T_0 = 20^\circ\text{C}$, c'est-à-dire le point de fonctionnement du système quand il n'y a pas de perturbation. Dans ce cas, à chaque seconde, l'énergie thermique échangée entre l'entrée et la sortie est :

$$Q_e = (F_1 + F_2)c_e(T_5 - T_0)$$

alors $Q_e = 12,558$ kJ.

et cette quantité d'énergie est fournie par la résistance chauffante pendant une seconde. Autrement dit, la puissance de chauffe est de $12,558 \text{ kW}$.

Nous avons également l'énergie thermique échangée sur le bac 3 pendant 1 seconde, qui vaut aussi d'énergie de chauffe émise pendant une seconde :

$$Q_{e3} = F_1 c_e (T_3 - T_0)$$

le bac trois sera donc à la température de $T_3 = 50^\circ C$.

Notons que sous l'effet de la perturbation, la température d'entrée du système peut baisser à $T_0 = 10^\circ C$. Dans ce cas, la puissance de chauffe nécessaire sera de $25,116 kW$. Dans le cas contraire, quand la température d'entrée du système monte à $T_0 = 30^\circ C$, la puissance de chauffe nécessaire sera de $6,279 kW$.

Présentons maintenant les résultats de la simulation.

Sans rejet de perturbation

La réponse du système quand le rejet de perturbation n'est pas appliqué :

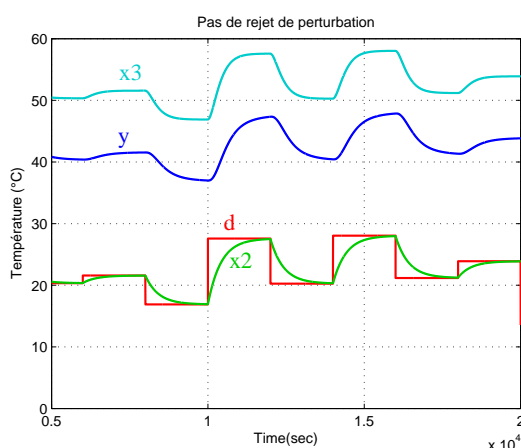


FIG. 5.16 – La température de la perturbation et de la sortie

Comme on le voit sur les Figures 5.16 et 5.17, les températures des bacs suivent la variation de la température de la perturbation T_0 .

Rejet de perturbation par retour d'état

Dans ce cas, nous nous appliquons le retour d'état calculé précédemment :

$$F_{\Lambda 1} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{-\lambda_3}{\lambda_{10}} & \frac{-\lambda_3 \lambda_8}{\lambda_7 \lambda_{10}} & 0 & \frac{\lambda_4 \lambda_8 - \lambda_6 \lambda_8}{\lambda_7 \lambda_{10}} & 0 \end{array} \right] \quad (5.5.32)$$

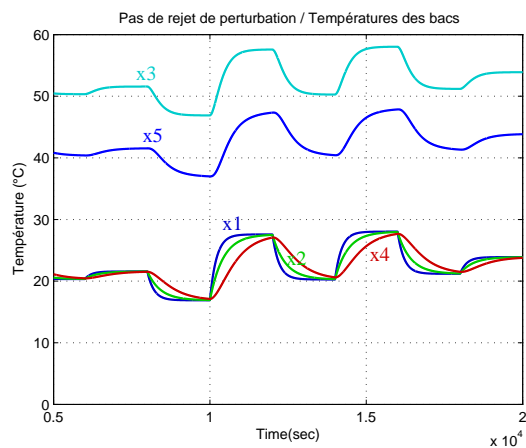


FIG. 5.17 – La température des bacs

La Figure 5.18 montre comment la perturbation a été rejetée. La sortie est maintenue constante à 40°C malgré la variation de la perturbation.

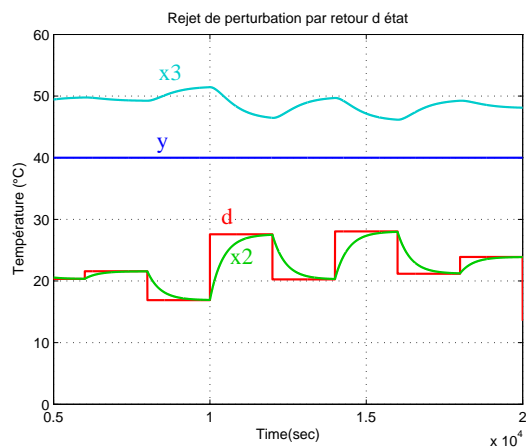


FIG. 5.18 – La température de la perturbation et de la sortie

Rejet de perturbation par retour de mesure

La Figure 5.21 montre comment la perturbation a été rejetée par le retour dynamique de mesure. La sortie est maintenue constante à 40°C.

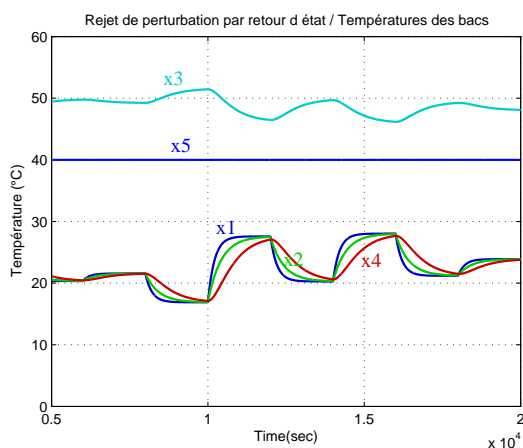


FIG. 5.19 – La température des bacs

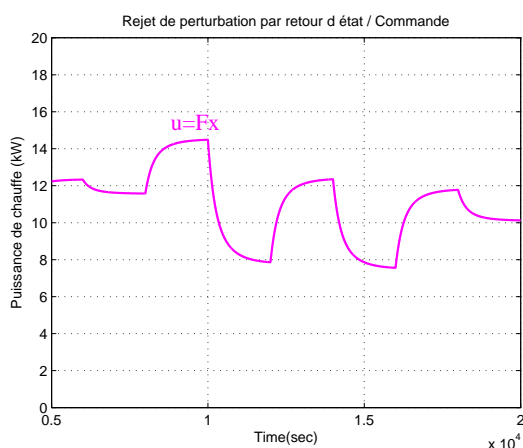


FIG. 5.20 – La commande $u = Fx$

5.6 Le cas général du rejet de perturbation

Dans la Section 5.4, nous avons donné une classification complète des capteurs pour le problème du rejet de perturbation par retour de mesure dans le cas où la perturbation est unique. Dans ce qui suit, nous allons donner un certain nombre de résultats plus généraux mais valables uniquement sous certaines hypothèses. Le premier cas, c'est quand les disques autour des perturbations définies par la Définition 5.4.2 sont mutuellement disjoints .

5.6.1 Les disques mutuellement disjoints

Théorème 5.6.1. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Delta dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Delta dz})$ affecté par l'ensemble de perturbations $D = \{d_1, \dots, d_q\}$.*

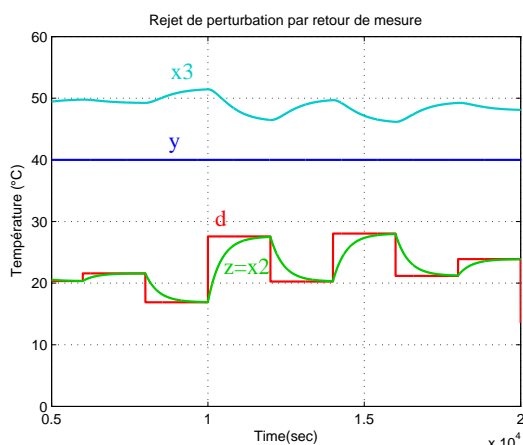


FIG. 5.21 – La température de la perturbation et de la sortie

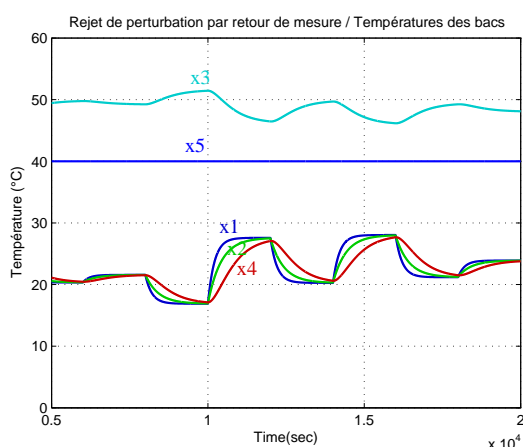


FIG. 5.22 – La température des bacs

Notons \mathcal{D}_{d_i} comme dans la Définition 5.4.2 pour chaque perturbation $d_i \in D$. Supposons que :

$$\mathcal{D}_{d_i} \cap \mathcal{D}_{d_j} = \emptyset \text{ pour tous les } \mathcal{D}_{d_i}, \mathcal{D}_{d_j} \text{ avec } d_i \neq d_j$$

Le problème de rejet de perturbation par retour de mesure est soluble si et seulement si pour chaque perturbation $d_i \in D$:

1. d_i affecte seulement des sommets appartenant à \mathcal{I}^* , c'est-à-dire pour tout $(d_i, x_i) \in W$, $x_i \in \mathcal{I}^*$.
2. il existe z_i une mesure d'un sommet d'état dans \mathcal{D}_{d_i} , c'est-à-dire qu'il existe $x_k \in \mathcal{D}_{d_i}$ tel que $(x_k, z_i) \in W$
3. la taille d'un couplage maximum entre D et Z est égale au nombre de perturbations q

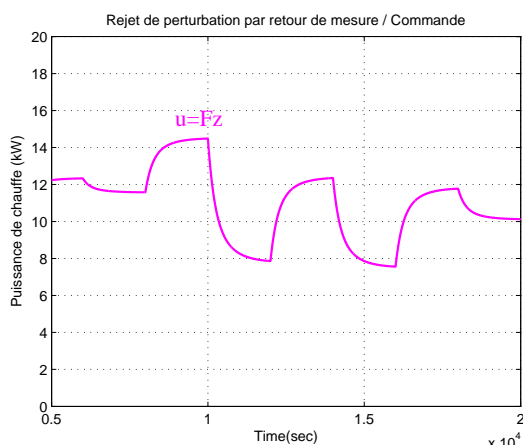


FIG. 5.23 – La commande $u = Fz$

Idée de démonstration : Ce théorème est la généralisation du Théorème 5.4.3 dans le cas où le système a plusieurs perturbations mais quand les disques sont mutuellement disjoints. Pour chaque perturbation d_i , il nous faut au moins une mesure pour le retour de mesure rejette cette perturbation. Puis, cette mesure doit être suffisamment rapide pour réagir. Alors, il faut mesurer au moins un sommet d'état appartenant à chaque disque \mathcal{D}_{d_i} par un capteur distinct pour que le problème RPRM soit soluble.

À partir de ce résultat, nous pouvons classer les capteurs pour la solubilité du problème RPRM sous cette hypothèse :

Théorème 5.6.2. *Considérons le système linéaire structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ affecté par l'ensemble de perturbations $D = \{d_1, \dots, d_q\}$. Notons \mathcal{D}_{d_i} comme dans la Définition 5.4.2 pour chaque perturbation $d_i \in D$. Supposons que le problème de rejet de perturbation par retour de mesure est soluble et que*

$$\mathcal{D}_{d_i} \cap \mathcal{D}_{d_j} = \emptyset \text{ pour tous les } \mathcal{D}_{d_i}, \mathcal{D}_{d_j} \text{ avec } d_i \neq d_j$$

Nous avons alors :

1. z_j est un capteur inutile si et seulement si pour tout x_i tel que $(x_i, z_j) \in W$ alors $x_i \notin \bigcup \mathcal{D}_{d_i}$.
2. z_j est un capteur utile si et seulement s'il existe \mathcal{D}_{d_i} et $x_i \in \mathcal{D}_{d_i}$ tels que $(x_i, z_j) \in W$.
3. z_j est un capteur essentiel si et seulement s'il existe \mathcal{D}_{d_i} telle que z_j est l'unique capteur utile pour \mathcal{D}_{d_i} .

où $\bigcup \mathcal{D}_{d_i}$ est l'union de tous les disques autour des perturbations.

Idée de démonstration : La démonstration est similaire à celle du Théorème 5.4.4 et se base sur le résultat du Théorème 5.6.1.

Illustrons cette classification sur l'exemple suivant :

Exemple 5.6.1

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.24.

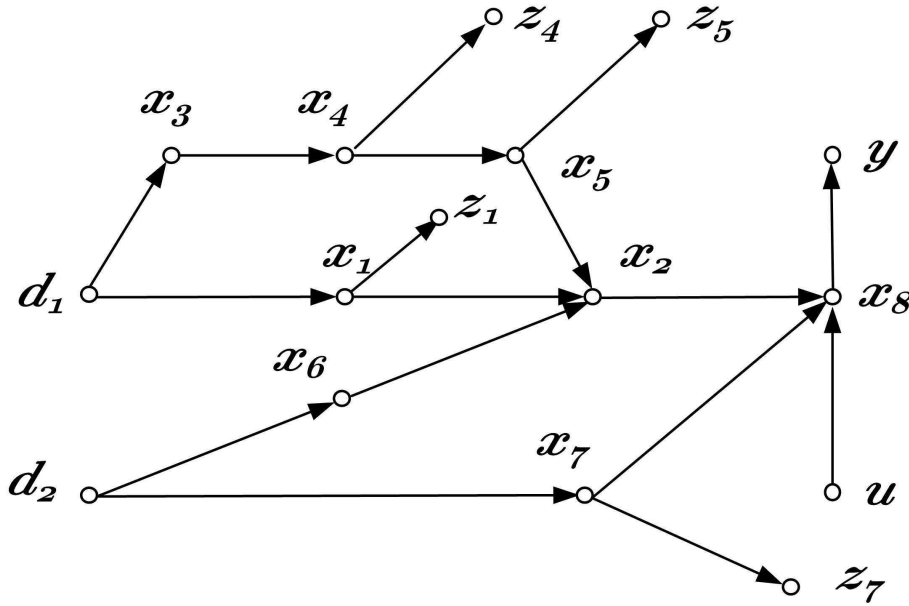


FIG. 5.24 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.6.1

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$; $\mathcal{J}^* = \{x_2, x_4, x_5, x_8\}$, alors le problème RPRM est soluble d'après le Théorème 5.2.5. Nous avons $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_2, x_7\}$ et deux perturbations d_1 et d_2 qui affectent directement des sommets d'état dans \mathcal{I}^* . D'après la Définition 5.4.2, nous trouvons $\mathcal{D}_{d_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $\mathcal{D}_{d_2} = \{x_6, x_7\}$.

D'après la classification des capteurs donnée par le Théorème 5.6.2, nous avons :

- z_7 est un capteur essentiel parce qu'il est l'unique capteur mesurant un sommet d'état dans le disque \mathcal{D}_{d_2} .
- z_5 est un capteur inutile parce qu'il ne mesure ni dans \mathcal{D}_{d_1} ni dans \mathcal{D}_{d_2} .
- z_1 et z_4 sont des capteurs utiles parce qu'ils mesurent dans le même disque \mathcal{D}_{d_1} .

5.6.2 Les disques ne sont pas mutuellement disjoints

Dans le cas où les disques autour des perturbations ne sont pas mutuellement disjoints, la classification donnée par le Théorème 5.6.2 peut s'appliquer sur des disques qui n'ont aucun sommet en commun avec les autres, c'est-à-dire les disques \mathcal{D}_{d_i} tels que :

$$\forall d_j \neq d_i : \mathcal{D}_{d_i} \cap \mathcal{D}_{d_j} = \emptyset$$

Pour le reste, nous avons les observations suivantes :

Première observation

Dans le cas général, nous avons observé un type de mesure "trop tôt" comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5.6.2

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.25.

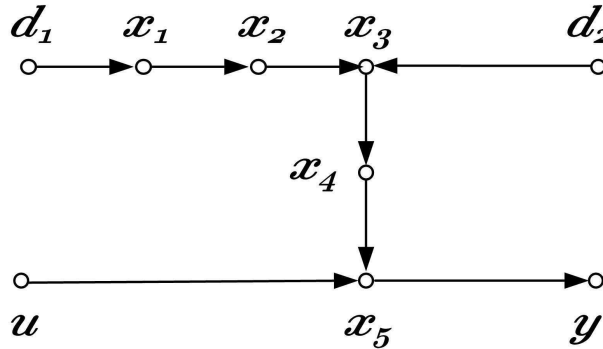


FIG. 5.25 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.6.2

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_4\}$ et deux perturbations d_1 et d_2 qui affectent directement deux sommets d'état $x_1, x_3 \in \mathcal{I}^*$. D'après la Définition 5.4.2, nous trouvons $\mathcal{D}_{d_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $\mathcal{D}_{d_2} = \{x_3, x_4\}$.

En fait, pour résoudre le problème RPRM, il est nécessaire que l'ensemble des mesures contienne soit x_3 soit x_4 soit les deux, ces deux sommets appartenant au disque \mathcal{D}_{d_2} . Dans ce cas, les mesures de $\{x_1, x_2\}$ sont inutiles.

Pour cette raison, il faut au moins une mesure pour la perturbation d_2 dans le disque \mathcal{D}_{d_2} , cette mesure sert aussi pour collecter l'information sur la

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

perturbation d_1 et elle rend les mesures “proches” de d_1 inutiles, on appelle $\{x_1, x_2\}$ les mesures inutiles “trop tôt”.

Le phénomène observé dans l’Exemple 5.6.2 n’existe plus après une petite modification apportée sur le système comme le montre l’Exemple 5.6.3 :

Exemple 5.6.3

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.26.

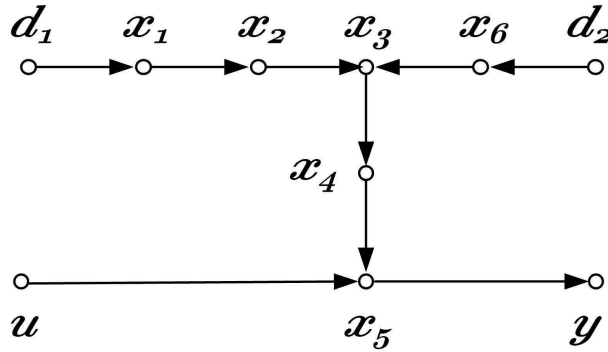


FIG. 5.26 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l’Exemple 5.6.3

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$; $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_4\}$ et deux perturbations d_1 et d_2 qui affectent directement deux sommets d’état $x_1, x_3 \in \mathcal{I}^*$. D’après la Définition 5.4.2, nous trouvons $\mathcal{D}_{d_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $\mathcal{D}_{d_2} = \{x_3, x_4, x_6\}$.

Dans ce cas, les mesures de x_1 et de x_2 ne sont plus inutiles. Par exemple, mesurer $V = \{x_1, x_6\}$ est une solution pour le problème RPRM mais $V \setminus x_1 = x_6$ ne l’est pas. En fait, toutes les mesures dans $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$ sont utiles pour le problème RPRM.

Deuxième observation

Pour caractériser un type de capteurs essentiels, nous allons utiliser un ensemble particulier de sommets, ceux qui appartiennent à tous les couplage maximum entre D et Z sur le graphe $G(\Sigma_{\Lambda dz})$:

Définition 5.6.1. (Ensemble des sommets essentiels) ([van der Woude, 2000])
Soit $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ un graphe. L’ensemble des sommets appartenant à tous les couplage maximum entre D et Z est appelé l’ensemble des sommets essentiels. Cet ensemble est noté V_{ess} .

Chapitre 5. Problème du rejet de perturbation par retour de mesure des systèmes linéaires structurés

De la même manière pour la définition de V_{ess} , nous notons V_{ess}^* l'ensemble des sommets essentiels entre D et $Z \cup F_{T^*}$. Avec ces deux ensemble V_{ess} et V_{ess}^* , nous avons observé qu'un capteur z_j tel que

$$z_i \in V_{ess} \cap \overline{V_{ess}^*}$$

alors z_i est essentiel pour le problème de RPRM. Illustrons cette observation sur les exemples suivants :

Exemple 5.6.4

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.27.

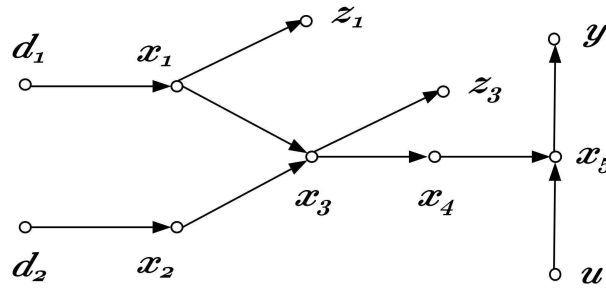


FIG. 5.27 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.6.4

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $\mathcal{J}^* = \{x_4, x_5\}$ alors le problème RPRM est soluble d'après le Théorème 5.2.5. L'ensemble des sommets essentiels est $V_{ess} = \{d_1, x_1, z_1, d_2, x_2, x_3, z_3\}$. Comme $F_{T^*} = \{x_4\}$ donc $V_{ess}^* = \{d_1, x_1, z_1, d_2, x_2, x_3\}$ et

$$V_{ess} \cap \overline{V_{ess}^*} = z_3$$

Dans ce cas, le capteur z_3 est essentiel pour le problème RPRM. Si on supprime z_3 , $\mathcal{J}^* = \emptyset$

Exemple 5.6.5

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.28.

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$ alors le problème RPRM est soluble d'après le Théorème 5.2.5. L'ensemble des sommets essentiels $V_{ess} = \{d_1, x_1, z_1, d_2, x_2, z_2\}$. Comme $F_{T^*} = \{x_4\}$ donc $V_{ess}^* = \{d_1, x_1, z_1, d_2, x_2\}$ et

$$V_{ess} \cap \overline{V_{ess}^*} = \{z_1, z_2\}$$

Dans ce cas, les capteurs $\{z_1, z_2\}$ sont essentiels pour le RPRM problème. Si on supprime un de ces capteurs, on trouve $\mathcal{J}^* = \emptyset$.

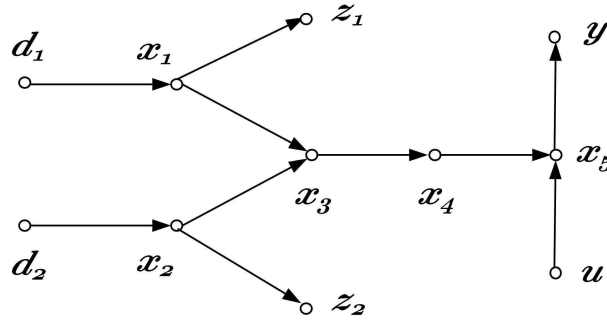


FIG. 5.28 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.6.5

Exemple 5.6.6

Considérons le système structuré $\Sigma_{\Lambda dz}$ de type (5.2.17) avec son graphe associé $G(\Sigma_{\Lambda dz})$ présenté Figure 5.29.

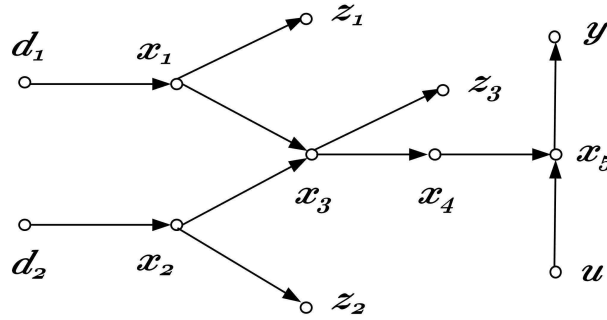


FIG. 5.29 – $G(\Sigma_{dz})$ pour l'Exemple 5.6.6

Dans cet exemple, nous avons $\mathcal{I}^* = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $\mathcal{J}^* = \{x_3, x_4, x_5\}$ alors le problème RPRM est soluble d'après le Théorème 5.2.5. L'ensemble des sommets essentiels $V_{ess} = \{d_1, x_1, d_2, x_2\}$. Comme $F_{\mathcal{I}^*} = \{x_4\}$ donc $V_{ess}^* = \{d_1, x_1, d_2, x_2\}$ et

$$V_{ess} \cap \overline{V_{ess}^*} = \emptyset$$

Dans ce cas, aucun capteur n'est essentiel pour le problème RPRM. Le résultat $V_{ess} \cap \overline{V_{ess}^*} = \emptyset$ indique qu'il n'existe pas de capteur essentiel pour la condition du rang, il peut aussi exister d'autres types de capteurs essentiels pour la condition de longueur, parce que l'ensemble de \mathcal{J}^* est défini sur les deux conditions de rang et de longueur.

Les trois exemples précédents montrent une classe de capteurs essentiels.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons revisité le problème du Rejet de Perturbation par Retour d'état et par Retour de Mesure. En utilisant l'approche graphique, nous nous sommes focalisé sur la préservation de la solubilité du problème en présence de défauts de capteurs. Avec le retour de mesure, quand le problème a une solution, nous avons montré que toute mesure en dehors de \mathcal{I}^* est inutile. Quand la perturbation est unique, nous avons proposé une classification complète des capteurs en fonction de leur criticité pour assurer la solubilité du problème, c'est-à-dire les capteurs essentiels dont un défaut rend le problème non soluble et les capteurs inutiles qui ne servent à rien pour résoudre ce problème.

L'approche graphique utilisée est bien adaptée pour l'analyse structurelle à priori pour calculer le retour d'état et le retour de sortie. Ceci peut s'effectuer par des algorithmes standard et l'implémentation numérique est simple. L'analyse du système de 5 bacs illustre l'intérêt de cette approche. Dans le cas où le système a plusieurs perturbations qui forment des disques disjoints, nous avons donné une classification qui généralise le cas perturbation unique. Dans le cas général, nous avons répertorié d'autres types de capteurs inutiles ou essentiels pour le problème RPRM.

Chapitre 6

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion

Les travaux de cette thèse ont porté sur trois problèmes principaux :

1. L'analyse générale de la dépendance entre une propriété \mathcal{P} du système Σ_Λ et la structure du système. Cette analyse comporte deux aspects :
 - Le placement des capteurs pour rendre des propriétés vraies.
 - La classification des capteurs en fonction de leur importance pour les propriétés considérées.

Ensuite, nous avons étudié ces deux aspects sur deux problèmes dans le cadre des systèmes linéaires structurés :

2. L'observabilité des systèmes linéaires structurés
3. Le rejet de perturbation par retour de mesure

L'outil principal pour ces travaux est la théorie des graphes, en particulier les analyses sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ associé au système Σ_Λ .

En premier lieu, nous avons étudié le problème de placement des capteurs pour garantir les propriétés du système. Puis, nous avons proposé la classification des capteurs en trois catégories pour une propriété \mathcal{P} qui dépend de l'ensemble des capteurs de Σ_Λ :

- Capteurs essentiels.
- Capteurs inutiles.
- Capteurs utiles.

Cette classification prend en compte l'importance d'un capteur pour la propriété \mathcal{P} . Le défaut d'un capteur essentiel fait perdre la propriété \mathcal{P} , alors que le défaut d'un capteur inutile n'a aucun effet sur \mathcal{P} . Cette classification est générale, nous l'avons appliquée sur diverses propriétés du système telles que l'observabilité ou le rejet de perturbation par retour de mesure.

L'intérêt de cette classification ne se limite pas aux raisons économiques mais aussi à la compréhension fine des mécanismes de résolution du problème, à la liaison entre la structure du système et la solubilité du problème, à la sûreté de fonctionnement et à la facilité d'utilisation,...

Notons que les auteurs [Commault et al., 2007; Yacoub-Agha, 2007; Frisk and Krysander, 2007] ont classé les capteurs pour le problème de détection de défauts; [Staroswiecki et al., 2004] donne une classification pour l'observabilité qui a été étendue dans

[Chamseddine et al., 2007] pour la tolérance aux défauts de capteurs.

Nous avons étudié l'observabilité des systèmes linéaires structurés à partir des conditions graphiques obtenues en dualisant les conditions graphiques sur la commandabilité générique. Plus précisément, ce sont la condition de connexion à la sortie et la condition d'absence de contraction.

Pour l'étude de la connexion à la sortie, nous avons proposé le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$, un graphe réduit qui contient toute l'information sur la connexion à la sortie du système de départ. À partir de ce graphe de connexion, nous avons montré que le système est connecté à la sortie si et seulement si $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe. Si ce n'est pas le cas, nous avons proposé une solution par le placement des capteurs.

Sur le graphe de connexion, en utilisant les séparateurs irréductibles composés seulement de sommets de sortie, nous avons classé les capteurs pour la connexion à la sortie. Nous avons montré que les capteurs appartenant à des séparateurs irréductibles de cardinalité 1 sont essentiels; les capteurs n'appartenant à aucun séparateur irréductible sont inutiles pour la connexion à la sortie.

Pour l'absence de contraction, nous avons utilisé le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$ et la DM-Décomposition comme des outils. La DM-Décomposition nous donne une caractérisation de la contraction. Grâce à des propriétés de la DM-Décomposition, nous avons déterminé le nombre de mesures nécessaires et leur emplacement pour que la contraction disparaisse. Si le système ne contient pas de contraction, grâce à aux propriétés de la DM-Décomposition et des couplages maximum sur le graphe biparti, nous avons donné une classification des capteurs pour l'absence de contraction. Alors, un capteur est essentiel s'il appartient à une composante de type B_i de la DM-Décomposition. Un capteur est inutile s'il n'appartient à aucun couplage maximum de poids minimal sur B_∞ .

En combinant les analyses sur la connexion à la sortie et sur l'absence de contraction, nous avons donné des bornes sur le nombre de capteurs nécessaires pour rendre un système observable. Nous avons montré également que la classification des capteurs pour l'observabilité peut s'effectuer en temps polynômial. Ces résultats ont été présentés dans [Commault et al., 2006a; Trinh, 2007; Commault et al., 2008]

Le troisième volet a été consacré au problème de rejet de perturbation par retour de mesure. L'étude a été commencée à partir de la condition graphique bien connue $\mathcal{I}^* \cup \mathcal{J}^* = X$ [van der Woude, 1993; Commault et al., 1997] avec \mathcal{I}^* , \mathcal{J}^* deux ensembles

de sommets. Le premier résultat intéressant que nous avons montré est que les mesures en dehors de \mathcal{I}^* sont inutiles pour résoudre ce problème. Alors, au lieu d'étudier le système entier, pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure, il est suffisant d'analyser le système réduit qui se trouve entre les perturbations, les mesures et la frontière de \mathcal{I}^* .

Dans le cas où la perturbation est unique, nous avons donné une classification complète des capteurs pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure. Celle-ci est très simple à effectuer. Cette classification a été illustrée sur un système thermo-hydraulique de 5 bacs avec une perturbation. Ensuite, nous avons calculé un retour de mesure qui permet de rejeter la perturbation. Ces résultats ont été illustrés par la simulation sur le modèle du procédé.

Dans le cas où le système est soumis à plusieurs perturbations, nous avons généralisé sous certaines conditions la classification précédente. Dans le cas général, nous avons répertorié des configurations standards pour lesquelles les capteurs peuvent être classés inutiles ou essentiels mais le travail n'est pas terminé. Une partie de ces résultats a été présentée dans [Trinh et al., 2007; Dion et al., 2008a].

Perspectives

À la suite des observations que nous avons présentées dans le cas général, nous proposons comme première perspective de trouver une classification complète pour le problème de rejet de perturbation par retour de mesure dans le cas général.

Comme chaque capteur utile peut jouer un rôle distinct par rapport aux autres capteurs pour que la propriété \mathcal{P} soit vraie, nous pouvons proposer de classer plus finement ces capteurs par une analyse du type de celle proposée par [Do, 2008].

Pour certaines propriétés du système, comme par exemple la connexion à la sortie, la détermination du nombre minimal de capteurs dans une solution est non polynomial (Remarque 4.6.1). La recherche d'algorithmes approximatifs afin de donner une solution moins coûteuse en temps de calcul à ce type de problème est une piste intéressante.

Un autre idée est de prendre en compte le coût de chaque capteur. Certains capteurs sont plus chers que les autres, certaines mesures sont plus coûteuses que les autres comme nous l'avons observé sur l'Exemple 4.5.5. Donc, la considération de coût de chaque capteur pour trouver une solution à coût minimal pour le problème de placement des capteurs est aussi intéressante que de trouver une solution au nombre minimal de capteurs.

Ces premiers résultats, surtout pour la classification des capteurs ouvrent nombre de perspectives pour l'étude générique des autres propriétés des systèmes, même pour des propriétés qui ne dépendent pas des capteurs du systèmes mais des actionneurs par exemple.

Index

- chemin, 30
 - alterné, 58
 - entrée-sortie, 32
 - faisable, 58
 - longueur, 30
 - simple, 30
- composante
 - fortement connexe, 45
 - infimale, 45
 - non connectée, 45
 - pré-infimale, 45
- connexion
 - à l'entrée, 31
 - à la sortie, 31
- contraction, 42
- couplage, 31, 57
 - maximum, 57
- dilatation, 35
- DM-Décomposition, 59, 135
- défaut
 - connexion, 50
 - contraction, 61
- Frontière de \mathcal{I}^* , 95
- graphe
 - associé, 29, 31, 57
 - biparti, 56
 - de connexion, 48
 - non orienté, 47
 - orienté, 30
- générique
 - commandabilité, 34
 - propriété, 28
 - rang, 29, 33
- rang
 - générique, 33
- RPRE, 78
- RPRM, 78
- système
 - linéaire, 23
 - linéaire admissible, 27
 - linéaire structuré, 26
 - structuré composé, 41

Bibliographie

- Ali, Y. and Narasimhan, S. (1996). Sensor network design for maximizing reliability of linear processes. *AIChE Journal*, 42 :2563–2575.
- Assad, M. (2002). *Analyse de la tolérance aux fautes : Approches fonctionnelle et structurelle*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- Bagajewicz, M. J. (1997). Design and retrofit of sensor network in process plants. *AIChE Journal*, 43(9) :2300–2306.
- Bahar, M., Jantzen, J., Commault, C., Dion, J. M., and Hovelaque, V. (1996). Structural decoupling and disturbance rejection in a distillation column. In *World Congress IFAC'96*, volume M, San Francisco, USA.
- Berge, C. (1973). *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., and Staroswiecki, M. (2003). *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer-Verlag.
- Bouamama, B. O., Dauphin-Tanguy, G., Staroswiecki, M., and Amo-Bravo, D. (2000). Bond graph analysis of structural FDI properties in mechatronic systems. In *1st IFAC conference on mechatronic systems*, pages 1057–1062, Darmsdadt, Germany.
- Bouamama, B. O., Medjaher, K., Bayart, M., Samantaray, A. K., and Conrard, B. (2005). Fault detection and isolation of smart actuators using bond graphs and external models. *Control Engineering Practice*, 13(2) :159–175.
- Boukhobza, T. and Hamelin, F. (2007). Observability analysis for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach. *Automatica*, 43(11) :1968–1974.
- Boukhobza, T., Hamelin, F., and Sauter, D. (2006a). Observability of structured linear systems in descriptor form : A graph-theoretic approach. *Automatica*, 42(4) :629–635.
- Boukhobza, T., Hamelin, F., and Sauter, D. (2006b). Uniform observability analysis for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach. *European Journal of Control*, 12(5) :505–518.

Bibliographie

- Cassar, J. and Staroswiecki, M. (1997). A structural approach for the design of failure detection and identification systems. In *IFAC, IFIP,IMACS Conference on Control of Industrial Systems*, pages 329–334, Belfort, France.
- Chamseddine, A., Noura, H., and Raharijaona, T. (2007). Optimal sensor network design for observability of complex systems. In *American Control Conf.*, pages 1705–1710, New York, USA.
- Chen, J. and Patton, R. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer academic publishers.
- Chmielewski, D. J., Palmer, T., and Manousiouthakis, V. (2002). On the theory of optimal sensor placement. *AIChE Journal*, 48(5) :1001–1012.
- Commault, C., Dion, J. M., and Benahcène, M. (1993). Output feedback disturbance decoupling : Graph interpretation for structured systems. *Automatica*, 29 :1463–1472.
- Commault, C., Dion, J. M., and Hovelague, V. (1997). A geometric approach for structured systems : Application to the disturbance decoupling problem. *Automatica*, 33 :403–409.
- Commault, C., Dion, J. M., and Perez, A. (1991). Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36 :884–887.
- Commault, C., Dion, J. M., Sename, O., and Motyeian, R. (2002a). Observer-based fault detection and isolation for structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(12) :2074–2079.
- Commault, C., Dion, J. M., and Trinh, D. H. (2005). Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems. In *IEEE CDC Conf.*, pages 7193–7197, Séville, Spain.
- Commault, C., Dion, J. M., and Trinh, D. H. (2006a). Observability preservation under sensor failure. In *IEEE CDC Conf.*, pages 7193–7197, San Diego, USA.
- Commault, C., Dion, J. M., and Trinh, D. H. (2008). Observability preservation under sensor failure. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53(6) :1554–1559.
- Commault, C., Dion, J. M., and van der Woude, J. (2002b). Characterization of generic properties of linear structured systems for efficient computations. *Kybernetika*, 38(5) :503–520.
- Commault, C., Dion, J. M., and Yacoub-Agha, S. (2006b). Location of additional sensors for FDI. In *4th Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, Nancy, France.

Bibliographie

- Commault, C., Dion, J. M., and Yacoub-Agha, S. (2006c). Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation. In *IFAC Safe Process*, Beijing, Chine.
- Commault, C., Dion, J. M., and Yacoub-Agha, S. (2007). Sensor classification for the fault detection and isolation problem. In *IFAC Symp. SSC 07*, Iguazu Falls, Brazil.
- Dauphin-Tanguy, G. (2000). *Les Bond Graphs*. Systèmes automatisés. Hermès, Paris.
- Davison, E. J. (1977). Connectivity and structural controllability of composite systems. *Automatica*, 13(2) :109–123.
- Dion, J. M. and Commault, C. (1993). Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 38 :1132–1135.
- Dion, J. M., Commault, C., and Trinh, D. H. (2008a). Sensor classification for the disturbance rejection by measurement feedback problem. In *IFAC WC 2008*, Seoul, Korea.
- Dion, J. M., Commault, C., and Trinh, D. H. (2008b). Sensor network design for the disturbance rejection by measurement feedback problem. In *IEEE CDC Conf.*, Cancun, Mexico.
- Dion, J. M., Commault, C., and van der Woude, J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) :1125–1144.
- Do, T. H. (2008). Défaillance des actionneurs et commandabilité des systèmes structurés. Master's thesis, Gipsa Lab / INPG.
- Fraden, J. (2004). *Handbook of Modern Sensors*. Springer, 3rd edition.
- Frank, P. (1996). Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results. *European Journal of Control*, 2 :6–28.
- Frisk, E. and Krysander, M. (2007). Sensor placement for maximum fault isolability. In *18th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-07)*, Nashville, USA.
- Garey, M. and Johnson, D. (1999). *Computers and intractability : A guide to the theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman And Company.
- Glover, K. and Silverman, L. (1976). Characterization of structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21 :534–537.
- Hopcroft, J. and Karp, R. (1973). An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. on Comp.*, 2 :225–231.
- Hosoe, S. and Matsumoto, K. (1979). On the irreducibility condition in the structural controllability theorem. *IEEE Trans. Automat. Control*, 24(6) :963–966.

Bibliographie

- Hovelaque, V., Commault, C., and Dion, J. M. (1996). Analysis of linear structured systems using a primal-dual algorithm. *Systems and Control Letters*, 27 :73–85.
- Johnston, R. D., Barton, G. W., and Brisk, M. L. (1984). Determination of the generic rank of structural matrices. *International Journal of Control*, 40(2) :257 – 264.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall.
- Karcanias, N. (1995). Integrated process design : A generic control theory/design based framework. *Computers in Industry*, 26(3) :291–301.
- Karcanias, N. (1996). Control problems in global process instrumentation : A structural approach. *Computers & Chemical Engineering*, 20 :1101–1106.
- Kretsovalis, A. and Mah, R. S. H. (1987). Effect of redundancy on estimation accuracy in process data reconciliation. *Chemical Engineering Science*, 42(9) :2115–2121.
- Lin, C. (1974). Structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 19(3) :201–208.
- Lin, C. (1977). System structure and minimal structure controllability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22(5) :855–862.
- Linnemann, A. (1981). Decoupling of structured systems. *Systems and Control Letters*, 2 :71–86.
- Linnemann, A. (1986). A further simplification in the proof of the structural controllability theorem. *IEEE Trans. Automat. Control*, 31(7) :638–639.
- Madron, F. and Veverka, V. (1993). Optimal selection of measuring points in complex plant by linear methods. *AIChE Journal*, 38 :227–236.
- Mayeda, H. (1981). On structural controllability theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(3) :795–798.
- Meyer, M., Le-Lann, J. M., Koehret, B., and Enjalbert, M. (1994). Optimal selection of sensor location on a complex plant, using a graph oriented approach. *Computer & Chemical Engineering*, 18 :S535–S540.
- Murota, K. (1987). *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, volume 3 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag New-York, Inc.
- Murota, K. (2000). *Matrices and Matroids for Systems Analysis*. Algorithms and Combinatorics 20. Springer.
- Ohta, Y. and Kodama, S. (1985). Structural invertibility of transfer functions. *IEEE Trans. Automat. Control*, 30 :818–819.

Bibliographie

- Raghuraj, R., Bhushan, M., and Rengaswamy, R. (1999). Locating sensors in complex chemical plants based on fault diagnostic observability criteria. *AIChE Journal*, 45(2) :310–322.
- Rahmani, A. (1993). *Bond Graph Approach for Structural Study of Linear Systems*. PhD thesis, Université de Lille.
- Rahmani, A. and Dauphin-Tanguy, G. (2006). Structural analysis of switching systems modelled by bond-graphs. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12(2-3) :235–247.
- Rahmani, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (1996). On the infinite structure of systems modelled by bond-graphs : feedback decoupling. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 3, pages 1617–1622, Beijing, China.
- Reinschke, K. (1988). *Multivariable control : A graph-theoretic approach*, volume 108 of *Lect. Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag.
- Schumacher, J. (1980). Compensator design methods using (C,A,B)-pairs. *IEEE Trans. Automat. Control*, 25 :1133–1138.
- Shields, R. and Pearson, J. (1976). Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21 :203–212.
- Spanache, S., Escobet, T., and Travé-Massuyès, L. (2004). Sensor placement optimisation using genetic algorithms. In *15th International Workshop on Principles of Diagnosis*, pages 179–183, Carcassonne.
- Staroswiecki, M. (2003). Observability, monitorability and fault tolerant estimation by structural analysis. In *DDP'03*, Gdansk, Poland.
- Staroswiecki, M. (2007). *Advances in Control Theory and Applications*, volume 353 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter Observability and the Design of Fault Tolerant Estimation Using Structural Analysis, pages 257–278. Springer Berlin / Heidelberg.
- Staroswiecki, M. and Cassar, J. (1996). Approche structurelle pour la conception des systèmes de surveillance. In *Ecole d'Eté d'Automatique*, Grenoble, France.
- Staroswiecki, M., Cassar, J. P., and Declerck, P. (2000). *Issues of fault diagnosis for dynamic systems*, chapter A structural framework for the design of FDI system in large scale industrial plants, pages 245–283. Springer Verlag.
- Staroswiecki, M., Hoblos, G., and Aitouche, A. (2004). Sensor network design for fault tolerant estimation. *Int. J. Adapt. Control Signal Processing*, 18 :55–72.

- Suda, N., Wan, B., and Ueno, I. (1989). The orders of infinite zeros of structured systems. *Transactions of the Society of Instrument Control Engineers*, 25 :346–348.
- Sueur, C. and Dauphin-Tanguy, G. (1989). Structural controlability/observability of linear systems represented by bond-graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 326(6) :869–883.
- Sueur, C. and Dauphin-Tanguy, G. (1991). Bondgraph approach for structural analysis of MIMO linear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 328(1) :55–70.
- Travé-Massuyès, L., Escobet, T., and Milne, R. (2001). Model-based diagnosability and sensor placement application to a frame 6 gas turbine subsystem. In *12th Int. Workshop on principles of diagnosis*, pages 205–212, Sansicario, Via Lattea, Italie.
- Trinh, D. H. (2007). Préservation de l’observabilité en présence de défauts de capteurs. *e-STA*, 4(Spécial JD-JN-MACS 07 ; Cette article a été présentés lorsque JDMACS’07 - Reims - France).
- Trinh, D. H., Commault, C., and Dion, J. M. (2007). Useless sensors for the disturbance rejection by measurement feedback problem. In *ACD 2007*, Grenoble, France.
- van der Woude, J. (1991a). A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Math. Control Signals Systems*, 4 :33–40.
- van der Woude, J. (1991b). On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Applications*, 148 :145–169.
- van der Woude, J. (1991c). On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Applications*, 148 :145–169.
- van der Woude, J. (1993). Disturbance decoupling by measurement feedback for structured systems : a graph theoretic approach. In *Proc. 2nd Europ. Cont. Conf. ECC’93*, pages 1132–1137, Groningen, Holland.
- van der Woude, J. (1994). Graph theoretic methods for the computation of disturbance decoupling feedback matrices for structured system. *Linear Algebra and its Applications*, 196 :119–162.
- van der Woude, J. (2000). The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journ. of Control*, 38 :1–21.
- Václavek, V. and Loucka, M. (1976). Selection of measurements necessary to achieve multicomponent mass balances in chemical plant. *Chemical Engineering Science*, 31(12) :1199–1205.
- Verghese, G. (1978). *Infinite frequency behavior in generalized dynamical systems*. PhD thesis, Dept. Elect. Eng., Stanford Univ., Stanford, Calif.

Bibliographie

- Willems, J. and Commault, C. (1981). Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole placement. *SIAM Journ. Control Opt.*, 19 :490–504.
- Wonham, W. (1974). *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer-Verlag, New-York, (3rd ed., 1985).
- Wonham, W. (1979). *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer Verlag.
- Yacoub-Agha, S. (2007). *Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic : Localisation de capteurs*. PhD thesis, INP Grenoble, Grenoble, France.
- Yamada, T. (1984). Comments on “On structural controllability theorem”. *IEEE Trans. Automat. Control*, 29(12) :1130–1131.
- Yassine, A. A., Ploix, S., and Flaus, J. (2007). New results for sensor placement with diagnosability purpose. In *18th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-07)*, Nashville, USA.

Algorithme de DM-Décomposition

Algorithme .0.1. *DM-Décomposition Murota [1987]*

1. Trouver un couplage maximum M dans $B = (B^+, B^-; W')$. Notons $\partial^+ M$ (resp. $\partial^- M$) l'ensemble de sommets dans B^+ (resp. B^-) saturés par le couplage M .

2. Associer au couplage M un graphe biparti $B_M = (B^+ \cup B^-; \overline{W'})$ tel que $(v, w) \in \overline{W'} \Leftrightarrow (v, w) \in W'$ ou $(w, v) \in M$. On note $S^+ = B^+ \setminus \partial^+ M$ et $S^- = B^- \setminus \partial^- M$.

3. $B_0 = \{B_0^+ \cup B_0^-\} = \{v \in B^+ \cup B^- \mid w \rightsquigarrow v \text{ dans } B_M \text{ pour } w \text{ dans } S^+\}$ où $B_0^+ = \{B^+ \cap B_0\}$ et $B_0^- = \{B^- \cap B_0\}$. B_0 est dite la part inconsistente minimale ou la queue horizontale de B .

4. $B_\infty = \{B_\infty^+ \cup B_\infty^-\} = \{v \in B^+ \cup B^- \mid v \rightsquigarrow w \text{ dans } B_M \text{ pour } w \text{ dans } S^-\}$ où $B_\infty^+ = \{B^+ \cap B_\infty\}$ et $B_\infty^- = \{B^- \cap B_\infty\}$.

5. B_i ($i=1, \dots, r$) sont les composantes fortement connexes du graphe B_M en enlevant les sommets saturés par $B_0 \cup B_\infty$ et les arcs incidents à ces sommets.

6. On définit l'ordre partiel \prec par $\{B_i \mid i = 0, 1, \dots, r, \infty\}$ comme suit : $B_i \prec B_j \Leftrightarrow B_j \rightsquigarrow B_i$ on B_M $B_i \in B_i$ and $B_j \in B_j$.

où $w \rightsquigarrow v$ représente l'existence d'un chemin de w à v .

ANALYSE STRUCTURELLE DE LA LOCALISATION ET DE LA CLASSIFICATION DE CAPTEURS

Résumé : Dans ce travail, on étudie les problèmes de localisation et de classification des capteurs pour des propriétés génériques - propriétés valables pour presque toutes les valeurs des paramètres. Lorsqu'une propriété donnée du système n'est pas vérifiée avec l'ensemble des capteurs, on cherche à implanter de nouveaux capteurs pour rendre la propriété vraie. Lorsqu'une propriété du système est vérifiée avec l'ensemble des capteurs existants, on classe les capteurs en différentes catégories en fonction de leur criticité relativement à la propriété. La thèse caractérise les capteurs essentiels pour la propriété, ceux qui doivent être sans défaut. La défaillance d'un de ces capteurs essentiels fait perdre la propriété. Les capteurs inutiles qui peuvent tomber en panne sans aucun impact sur la propriété sont également caractérisés. Cette approche générale a été appliquée à deux propriétés : l'observabilité et le rejet de perturbation par retour de mesure. Tous les résultats ont été obtenus par une approche graphique et sont implantables numériquement de façon simple.

Mots-Clés : Systèmes linéaires structurés ; Analyse structurelle ; Localisation de capteurs ; Classification de capteurs ; Observabilité ; Rejet de perturbation.

Abstract : In this work, we study the problem of the localization and the classification of sensor for generic properties - properties which are true for almost all values of the parameters. When a property is not satisfied with the existing sensors, we seek to implement additional sensors to make the property true. When a property is satisfied with the existing sensors, we provide a classification of sensors with respect to their importance concerning property. The thesis characterizes the essential sensors, those which must be without failure. The failure of one of these essential sensors makes property lost. The useless sensors which can fail without impact on the property are also characterized. This generic approach was applied to two properties : the observability and the disturbance rejection by measurement feedback. All results were obtained by a graphical approach and implantable numerically so simple.

Keywords : Linear structured systems ; Structural analysis ; Localization of sensors ; Classification of sensors ; Observability ; Disturbance rejection.