HAL open science

Etude des modèles non dominés en mathématiques financières

Magali Kervarec

▶ To cite this version:

Magali Kervarec. Etude des modèles non dominés en mathématiques financières. Mathématiques [math]. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2008. Français. NNT : . tel-00370713

HAL Id: tel-00370713

https://theses.hal.science/tel-00370713v1

Submitted on 24 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'EVRY
VAL D'ESSONNE

île de France

Université d'Évry Val d'Essonne

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ d'ÉVRY-VAL-D'ESSONE

Spécialité : Mathématiques

par

Magali Kervarec

Sujet :

ÉTUDE DES MODÈLES NON DOMINÉS EN MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES.

Soutenue le 9 Décembre 2008 devant la Commission d'examen :

M. Nicolas Bouleau	(Rapporteur)
Mme. Jocelyne Bion-Nadal	(Examinateur)
Mme. Monique Jeanblanc	(Examinateur)
M. Denis Feyel	(Examinateur)
Mme. Marie-Claire Quenez	(Examinateur)
M. Laurent Denis	(Directeur de thèse)

Après avis des rapporteurs : M. Nicolas Bouleau
M. Shige Peng

Remerciements

Ce travail a été réalisé avec le soutien de la Région Ile de France que je tiens à remercier pour son financement qui m'a permis d'effectuer ma thèse dans des conditions matérielles confortables.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. D'abord, à Laurent Denis, mon directeur de thèse qui durant toutes ces années a joué un rôle essentiel dans ma formation de probabiliste et de chercheur. Je le remercie pour sa confiance et la grande liberté qu'il m'a laissé. Ces éléments m'ont permis de m'épanouir durant cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Nicolas Bouleau et Shige Peng pour le temps qu'ils ont consacré à rapporter cette thèse. Je remercie également Jocelyne Bion Nadal, Denis Feyel, Monique Jeanblanc et Marie-Claire Quenez d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Faire ma thèse dans l'équipe Analyse et Probabilités de l'Université d'Evry aura été une chance et je tiens à remercier chaleureusement tout les membres de cette équipe. En particulier, Monique pour son soutien de chaque instant et ses précieux conseils, et les doctorants qui partagent avec moi leur bureau ou qui l'ont partagé : Benhaz, Georgia, Armand et Antoine. Je salue également le travail, la gentillesse et la disponibilité de Valérie et de Maouloud.

Je voudrais également remercier mes amis qui n'ont pas de rapport avec les probabilités mais qui par leurs encouragements et leur soutien ont participé à l'élaboration de cette thèse. Je pense également à mes parents et ma soeur qui ont toujours été présents pour m'épauler dans les moments difficiles.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mon chéri qui a supporté au jour le jour mes déprimes, ma démotivation, voire ma mauvaise humeur, m'a toujours soutenue avec enthousiasme et sans qui rien de tout cela n'aurait été possible.

Table des matières

Introduction

Partie I Cadre d'étude et propriétés topologiques 7

1 Introduction 9
2 Cadre d'étude et définition de capacités 10
2.1 Cadre d'étude 10
2.2 Définitions des capacités 11
2.3 Capacités de Prokhorov 12
2.4 Lien entre les capacités c_p et $c_{p'}$ 14
2.5 Lien entre ensembles polaires et ensembles de probabilité nulle . 15
3 Intégrale stochastique dans un modèle non dominé 17
3.1 Ensemble des fonctions quasi continues 17
3.2 Définition des espaces sur lesquels on construit l'intégrale 21
3.3 Définition de l'intégrale stochastique 22
3.4 Intégrales stochastiques et ensembles polaires 23
3.5 Le processus intégrale stochastique 24
3.6 Définition de la variation de B_i quadratique quasi-partout . . . 25
4 Propriétés topologiques fondamentales : compacité de $\mathcal{P}$ 28
5 Théorème de représentation limite dans le cas $p = 1$ 30
5.1 Caractérisation du dual de $\mathcal{L}_1(c)$ 30
5.2 Théorèmes de représentation limite 33
5.3 Quelques exemples de représentations 36

Partie II Fonction d'utilité sur $\mathcal{L}_1(c)$ 39

1 Introduction 41
2 Définitions et hypothèses sur la fonction d'utilité 42
3 Principaux résultats 44
3.1 Résultats pour u_Q 44
3.2 Résultats pour u 45
4 Un théorème de densité et application 46
5 Théorie duale 51
5.1 Théorème de mini-max 51
5.2 La fonction duale 53
6 Existence de stratégies d'optimisation 54

Partie III Mesure de risque définie sur $\mathcal{L}_p(c)$ 59

1 Introduction 61
2 Définitions des mesure de risque 63
3 Ensemble des positions acceptables 64
4 Représentation des mesures de risque définies sur $\mathcal{L}_p(c)$ 66
4.1 Représentation des mesures de risque cohérentes 66
4.2 Représentation des mesures de risque convexes 68
5 Construction d'une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ à partir d'un convexe quelconque 73
6 Premiers exemples de mesures de risque convexe 75
6.1 Un exemple basé sur le risque de "manque à gagner" 75
6.2 Exemple basé sur une stratégie de couverture avec contraintes . 78

7 Value at risk 81
7.1 Définitions 81
7.2 Liens avec les mesures de risque cohérentes 83
8 Worst conditional expectation 86
9 Average value at risk 88
9.1 Définition 88
9.2 Représentation et cohérence de l'$AV@R_\lambda$ 89
9.3 Comparaison avec la $V@R_\alpha$ 97

Partie IV Inf-convolution et couverture de risque non-tradable 99

1 Introduction 101
2 Supremum de mesures de risque convexes 102
3 Inf-convolution des mesures de risque 102
3.1 Définition et premières propriétés 102
3.2 Premier exemple d'inf-convolution 104
4 Mesure de risque dilatée 105
4.1 Définitions et propriétés 105
4.2 Exemple 106
4.3 Quelques propriétés 107
4.4 Inf-convolution de mesures de risque dilatées 108
4.5 Résultats limites 109
5 Optimisation de transaction 113
5.1 Cas de deux agents n'ayant pas accès au marché 113
5.2 Couverture individuelle du risque 114
5.3 Cas de deux agents ayant accès au marché 116

Partie V Perspectives : espérance conditionnelle et mesures de risque dynamiques 123

1 Introduction 125
2 Espérance et espérance conditionnelle non linéaire 126
2.1 Espérance non linéaire 126
2.2 Définition d'une espérance conditionnelle non linéaire 127
3 Mesures de risque dynamiques 134
3.1 Définitions 134
3.2 Caractérisation de l'invariance par multiplication 135
3.3 Ensemble de positions acceptables 136
3.4 Consistance en temps et ensembles de positions acceptables . . 138
3.5 Exemple 138
3.6 Conclusion et perspectives 139

Annexe

1 Introduction 143
2 Construction fonctionnelle 143
2.1 Définitions et prolongement de Lebesgue 143
2.2 Propriétés du dual de $\mathcal{L}^1(c)$ 145
3 Construction ensembliste 145
3.1 Définition 145
3.2 Capacitabilité 146
4 Lien entre capacités ensemblistes et capacités fonctionnelles 147

Bibliographie 149

Introduction

L'objet de cette thèse est d'étudier les modèles non dominés en mathématiques financières. Nous verrons par la suite ce que nous entendons précisément par modèles non dominés, mais l'idée de départ était d'introduire un cadre prenant en compte l'incertitude du modèle et dans lequel nous pourrions développer une théorie financière proche de celle des modèles classiquement utilisés pour donner des prix ou couvrir des risques dans les salles de marché. Mais, d'abord, pourquoi parler d'incertitude du modèle ?
Rappelons dans un premier temps que si classiquement on donne la paternité de l'idée d'appliquer le calcul stochastique à la finance à L. Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" en 1900, il faut attendre le début des années 70 et les articles de R.C. Merton, en 1971 ([54]) et surtout de F. Black et M. Scholes, en 1973 ([29]) pour voir les avancées mathématiques dans le domaine des probabilités appliquées aux sciences financières. Ceux ci proposent en effet une modélisation mathématique de l'évolution possible des cours du marché, sous la forme d'équations différentielles stochastiques. Depuis, de nombreux produits financiers de plus en plus compliqués ont vu le jour et le calcul de leur prix est souvent fait à partir du modèle proposé par F. Black et M. Scholes, qui rappelons-le consiste à modéliser le prix S_t d'un actif à l'instant t par la formule :

$$dB_t = \sigma B_t dW_t + \nu B_t dt$$

où W est un mouvement brownien et ν et σ des constantes appelés respectivement la déviation et la volatilité.
Cette formule a l'avantage d'admettre une solution explicite, ce qui explique sa popularité. Cependant, le modèle de F. Black et M. Scholes ne permet pas de modéliser précisément le monde réel. L'expérience montre qu'en réalité la volatilité dépend du prix d'exercice et de la maturité. En pratique, la surface de volatilité (la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice et de la maturité) n'est pas plate. Souvent, pour une maturité donnée, la volatilité implicite par rapport au prix d'exercice a une forme de sourire (appelé le smile de volatilité). D'autres modèles ont été développés pour essayer de coller au plus juste à la réalité de l'évolution des actifs, mais aucun n'est pleinement satisfaisant et c'est toujours le modèle de Black et Scholes qui reste le plus utilisé dans les marchés financiers malgré son inadéquation à décrire le monde réel. Cet écart entre monde réel et modèles mathématiques est pointé du doigt à chaque crise financière comme celle induite par les subprimes. D'autre part, même si nous étions sûr que tel ou tel modèle décrivait bien la réalité, se poserait alors le problème de l'évaluation (appelé plutôt "calibration") des paramètres de ce modèle. Parvenir à avoir une valeur exacte pour chacun de ces paramètres parait difficile et nous retrouvons notre problème d'adéquation au monde réel.

Ceci explique que l'incertitude du modèle soit devenu un sujet récurent dans les articles de mathématiques financières. Ainsi, plutôt que de considérer que l'on connaît précisément la loi des prix des actifs de notre marché, nous pouvons considérer que nous connaissons un ensemble de lois possibles. Ce qui revient à considérer que l'agent ne connaît pas la loi de probabilité P qui régit les marchés mais utilise sa connaissance déformée de la réalité pour dégager un ensemble de probabilités possibles $\mathcal{P}$, correspondant à des scénarios vraisemblables. Cette façon de modéliser l'incertitude du modèle utilisé a été très étudiée ces dernières années. Citons pour commencer la version robuste de l'utilité introduite par I. Gilboa et D. Schmeidler ([48]) en 1989 ou la représentation des mesures de risque convexes donnée par P.Artzner et ses co-auteurs ([15]) qui dans les deux cas consiste à maximiser une certaine quantité sur un ensemble de probabilités possibles. Cependant pour l'étude de ces notions et la construction d'exemples qui ont fait l'objet de nombreux papiers, les auteurs font souvent l'hypothèse que l'ensemble des probabilités considérées sont équivalentes ou absolument continues par rapport à la "vraie" probabilité régissant le marché. Nous verrons que dans certains cas naturels (par exemple, celui du modèle à volatilité incertaine) cette hypothèse n'est pas vérifiée par l'ensemble des lois de prix des actifs considérées comme possibles.
Dans notre cadre, nous considérerons un ensemble de probabilités non dominé au sens statistique du terme c'est-à-dire que nous ne supposerons pas nos probabilités toutes équivalentes ou toutes absolument continues par rapport à une même probabilité. Ce type de modèle a été introduit par L. Denis et C. Martini dans l'article [40] pour étudier les prix de sur-réplication d'options européennes.
Nous nous intéresserons à d'autres problématiques et généralisons d'une certaine manière leur modèle puisque nous travaillerons sur des ensembles de "type L^p" pour un paramètre p quelconque supérieur ou égal à 1 et non seulement pour $p = 2$, comme dans [40]. Remarquons que le fait de travailler avec un ensemble de probabilité non dominé engendre une difficulté supplémentaire, car nous n'avons pas, dans notre modèle, une probabilité donnée qui joue un rôle particulier par rapport aux autres et donc les notions d'ensembles négligeables ou de propriétés vraies presque sûrement ne peuvent pas être considérées sous une seule probabilité mais doivent être définies sur l'ensemble des probabilités. Pour cela, nous utiliserons une notion plus générale que celle de mesure : la notion de capacité qui a été introduite par Choquet [33]. Quelques définitions et résultats classiques à ce propos sont rappelés dans l'annexe. Présentons maintenant le plan de cette thèse et les principales contributions apportées.

La première partie de la thèse est consacrée à l'élaboration du cadre d'étude et à la démonstration des principales propriétés topologiques vérifiées dans celui-ci. On considère un marché avec d actifs risqués et B le processus de prix actualisés à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous supposons que ce processus B est une martingale dont la loi n'est pas précisément connue. On suppose que l'on connaît seulement l'ensemble $\mathcal{P}$ des "lois possibles" et prenons ainsi en compte l'incertitude du modèle. Imaginons par exemple que pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$, on sache uniquement que la volatilité de B_i prend des valeurs dans l'intervalle $[\alpha_i; \beta_i]$ avec $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i > +\infty$. Ce modèle est le modèle à volatilité incertaine introduit par Lyons [53] et Avellaneda et ses coauteurs [13]. Alors, chaque probabilité P de l'ensemble $\mathcal{P}$ vérifie

l'inégalité

$$\alpha_i^2 dt \leqslant \langle \frac{dS_t}{S_t} \rangle \leqslant \beta_i^2 dt$$

Remarquons que l'ensemble de probabilités $\mathcal{P}$ n'est pas dominé au sens statistique du terme, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de probabilité dans cet ensemble par rapport à laquelle toute probabilité de $\mathcal{P}$ est absolument continue. Nous ferrons une hypothèse légèrement plus générale pour notre ensemble de probabilités.
L'idée est d'introduire pour chaque $p \geqslant 1$ une capacité c_p et d'utiliser les espaces associés que l'on notera $\mathcal{L}_p(c)$ et qui ont été étudiés par Feyel et De la Pradelle (voir [45] et les résultats rappelés dans l'annexe). Nous montrerons ensuite la compacité de l'ensemble $\mathcal{P}$ qui joue un rôle très important dans les démonstrations des parties suivantes. Enfin, nous montrerons un théorème de représentation limite pour les éléments de $\mathcal{L}_1(c)$.

Dans la seconde partie nous étudierons les problèmes de fonctions d'utilité et d'investissement optimal dans notre cadre non-dominé. Rappelons que J. Von Neumann et O. Morgenstern [68] ont prouvé que sous certaines conditions sur les préférences de l'investisseur, l'utilité d'un actif se met sous la forme :

$$u\left(X\right) = E_Q\left[U\left(X\right)\right]$$

où Q est une probabilité donnée et U une fonction d'utilité.
Mais, ce paradigme de l'utilité espérée présente clairement des déficiences et ne prend en particulier pas en compte l'incertitude du modèle. C'est pourquoi, I. Gilboa et D. Schmeidler [48] ont introduit une version dite robuste de l'utilité qui prend la forme

$$\inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q\left[U\left(X\right)\right]$$

où l'infimum est pris sur toute une classe de probabilités. Alors, le but d'un investisseur est de maximiser cette utilité robuste sur l'ensemble des portefeuilles possibles. Cette étude a fait l'objet de nombreux articles (voir par exemple [62] ou [65]) mais dans ceux-ci les auteurs supposent que les probabilités de l'ensemble $\mathcal{P}$ sont absolument continues ou équivalentes par rapport à une probabilité donnée, ce qui n'est pas le cas ici. Pour tout $x > 0$, nous considérons l'ensemble $\chi(x)$ des portefeuilles admissibles de valeur initiale x et la fonction valeur

$$u(x) = \sup_{X \in \chi(x)} \inf_{Q \in \mathcal{P}} E_Q\left[U\left(X\right)\right]$$

Nous établissons d'abord une théorie duale pour la maximisation de l'utilité robuste, puis nous montrons l'existence d'une probabilité $\widehat{Q}$ qui est la moins favorable dans le sens où, pour résoudre la maximisation de l'utilité robuste, il suffit de la résoudre sous cette probabilité.

Les partie suivantes sont consacrées à la mesure du risque dans notre cadre. De nombreux articles récents (voir par exemple [15], [7]....) traitent l'évaluation du risque, basée sur un ensemble d'axiomes qui doivent être vérifiés par toute mesure de risque et permettent de définir les mesures de risque convexes et cohérentes. Dans ces différents articles, les

positions financières sont supposées bornées ou appartenant $L^1(P)$ pour une probabilité P donnée, ce qui n'est pas le cas dans notre cadre.
Dans la troisième partie, nous construisons de manière analogue une théorie des mesures de risque dans notre cadre non dominé et prenant donc en compte l'incertitude du modèle. Nous définissons des mesures de risque cohérentes et convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$ et nous montrons que nous avons le même type de théorème de représentation que dans le cadre de [15] ou [7], c'est-à dire que les mesures de risque cohérentes sur $\mathcal{L}_p(c)$ se mettent nécessairement sous la forme

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[-X]$$

où $\mathcal{Q}$ est un ensemble de probabilité. Et les mesures de risque convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$ se mettent nécessairement sous la forme

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[-X] - \alpha(Q)$$

où $\mathcal{Q}$ est un ensemble de probabilité.
Puis, nous définissons et étudions quelques exemples de mesures de risque classiques comme le "Shortfall Risk", la "Value at Risk", l'"Average Value at Risk" ou la "Worst Conditional Expectation" que nous étendons à notre cadre et que nous relions aux définitions classiques.

L'évaluation du risque permet d'établir des stratégies de couverture. N. El Karoui et P. Barrieu [24] ont ainsi défini le transfert optimal de risque non négociable entre deux agents : elles déterminent la règle de pricing, et le flux optimal à transférer. Pour cela l'outil clef est l'inf-convolution de deux mesures de risque. Leur étude est faite dans les mêmes cadres que [15] ou [7] et ne s'applique donc pas à nos modèles non dominés.
Le but de la quatrième partie de cette thèse est de définir des opérations stables sur l'ensemble des mesures de risque de $\mathcal{L}_p(c)$ et en particulier le passage au supremum, la dilatation et bien sûr l'inf-convolution. Puis, de la même manière que dans [24], nous étudierons les problèmes de transfert optimal de risque non négociable.

Dans la dernière partie, nous établissons une théorie dynamique des mesures de risque dans le sens où nous ne nous intéresserons pas seulement à ce qui se passera à l'instant T fixé, mais à ce qui se passera entre les dates 0 et T, en prenant en compte l'évolution de l'information disponible. Cette vision dynamique a fait l'objet de nombreux articles récents (par exemples [26], [17], [38]...) dans les cadres d'étude classique où l'on se fixe une probabilité ou de portefeuille à valeur bornée (pour [26]). Dans ces différents articles, l'espérance conditionnelle joue un rôle clef et permet d'exprimer toute mesure de risque dynamique cohérentes ou convexes. Dans notre cadre non dominé, cette notion d'espérance conditionnelle pose problème car nous devons étudier un conditionnement qui prennent en compte toutes les probabilités de notre ensemble $\mathcal{P}$. En fait nous ne définirons pas exactement une espérance conditionnelle mais simplement une espérance conditionnelle non linéaire au sens défini par S. Peng (dans [57]). Puis, nous montrerons qu'hormis la linéarité, cet outil vérifie beaucoup de propriétés analogues à l'espérance conditionnelle classique.

Un fois cet outil défini, nous pouvons construire des mesures de risque dynamiques convexes et cohérentes dans notre cadre. Nous nous concentrerons particulièrement sur deux propriétés propres au point de vue dynamique : l'invariance par multiplication et la consistance en temps qui joue un rôle essentiel dans les articles cités précédemment ([26], [17], [38]...). Nous finirons par un lien entre mesures de risque dynamiques cohérentes et espérance conditionnelle non linéaire.

Première partie

Cadre d'étude et propriétés topologiques

1 Introduction

En mathématiques financières, l'une des premières difficultés à laquelle on doit faire face est celle du choix d'un modèle. Il existe en effet de nombreuses façons de modéliser les marchés financiers, le modèle le plus fréquemment utilisé est celui de Black et Scholes. Il consiste à supposer que le vecteur prix des actifs S_t varie selon la relation suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où W est un mouvement brownien et le drift μ et la volatilité σ sont des constantes.
Mais, l'observation des données du marché montre qu'il n'est pas pleinement satisfaisant, en particulier le fait que la volatilité σ soit une constante est mis en défaut. D'autre part, une fois que l'on a choisi un modèle se pose le problème de la calibration des paramètres de celui-ci, dans le cas du modèle de Black et Scholes, cela correspond à décider quelle valeur donner aux constantes μ et σ. Il est difficile de pouvoir prétendre trouver une valeur exacte pour chaque paramètre, et trouver une fourchette de valeurs possibles semble plus raisonnable.
Une fois ces différentes difficultés présentées, il paraît assez naturel de s'intéresser à des modèles non totalement spécifiés. Ainsi, Avenalleda et ses co-auteurs ([13]) et Lyons ([53]) ont introduit un modèle dit à volatilité incertaine que nous noterons UVM dans la suite. Il s'agit d'une généralisation du modèle de Black et Scholes, mais cette fois la volatilité n'est pas supposée constante mais appartenant à un intervalle fixé $[\underline{\sigma}; \overline{\sigma}]$. Nous pouvons remarquer, qu'alors la variation quadratique de $\frac{dS_t}{S_t}$ vérifie l'inégalité :

$$\underline{\sigma}^2 dt \leqslant \langle \frac{dS_t}{S_t} \rangle \leqslant \overline{\sigma}^2 dt \tag{1}$$

Ceci revient à considérer que nous avons un ensemble de lois de prix possibles correspondant aux différentes valeurs de la volatilité ou qu'un agent sur le marché n'a pas la connaissance précise de la loi de probabilité qui le régit mais seulement d'un ensemble de lois de probabilité possibles que nous noterons $\mathcal{P}$.
Nous partirons de l'inégalité (1) pour introduire un modèle généralisant le modèle UVM. Ce type de modèle a été introduit par L. Denis et C. Martini dans l'article [40], dans un cadre proche de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mais où l'on considère une capacité (voir l'annexe pour plus de détails sur cette notion) et non une probabilité. En effet, nous n'avons pas une probabilité mais un ensemble de probabilités et toutes jouent le même rôle, en d'autres termes, il n'y pas de probabilité privilégiée par rapport à laquelle toutes les autres sont équivalentes ou absolument continues, comme dans de nombreux articles traitant des modèles prenant en compte l'incertitude du modèle. Remarquons d'ailleurs que ce type d'hypothèse d'absolue continuité ou d'équivalence n'est pas nécessairement vérifié dans le cas du modèle UVM. Nous voulons dans cette partie généraliser le cadre introduit dans [40] à un cadre proche de L^p pour un réel p quelconque supérieur ou égal à 1.
Ainsi, le but de cette partie est de présenter un modèle prenant en compte l'incertitude du modèle, généralisant le modèle UVM et qui garderait toutefois des propriétés topologiques qui nous permettraient par la suite (dans les parties 2, 3, 4) de retrouver des résultats

proches de ceux que l'on connaît dans le cas de modèles totalement spécifiés. D'abord, nous introduirons le modèle, les hypothèses faites sur l'ensemble de probabilités considéré et nous étudierons le lien avec le cadre d'étude proposé par S. Peng dans [59], [58], [60] ou [61]. Puis, nous définirons les capacités de Prokhorov c_p qui nous serviront tout au long de la thèse et observerons quelques unes de leurs propriétés. Dans la section 3, nous pourrons introduire l'ensemble $\mathcal{L}_p(c)$ qui sera notre ensemble de référence dans lequel se trouveront les processus de prix des portefeuilles d'actifs et nous définirons la notion d'intégration par rapport au vecteur processus de prix des actifs B, à valeur dans cet ensemble et défini P-presque sûrement pour toute probabilité P appartenant à $\mathcal{P}$.
Enfin, nous étudierons une propriété topologique de l'ensemble de probabilités considéré dans notre modèle qui sera fondamentale dans la suite. Ainsi, nous verrons que pour une certaine topologie que nous définirons $\mathcal{P}$ est compact. Enfin, dans le cas où p=1, nous mettrons en évidence une caractérisation du dual de notre ensemble de processus $\mathcal{L}_1(c)$ et un théorème de représentation limite des éléments de cet ensemble.

2 Cadre d'étude et définition de capacités

2.1 Cadre d'étude

Tout au long de cette thèse, on se fixe un temps terminal $T > 0$.
Soit $d \in \mathbb{N}^\star$ la dimension du processus que nous étudierons, c'est-à-dire le nombre d'actifs risqués sur notre marché.
On pose $\Omega = C_0([0;T], \mathbb{R}^d)$, l'espace de fonctions continues définies sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, nulles en 0, muni de la norme de la convergence uniforme, $\mathcal{B}$ la σ-algèbre borélienne et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration canonique.
Notons $(B_t)_{t\in[0,T]}$ le processus coordonnées, et pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, $(B_{i,t})_{t\in[0;T]}$ le processus de la i^{me} coordonnée.
Enfin, on note $C_b(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues bornées définies sur Ω et muni de la topologie de la convergence uniforme.

Définition I.1. *: Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$, on dit que P est une probabilité martingale orthogonale si le processus coordonnées est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ sous P, et les martingales $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ sont orthogonales, c'est-à-dire que pour tout $i \neq j$,*

$$\forall t \in [0,T],\ \langle B_i, B_j\rangle_t^P = 0 \quad P\ a.s.$$

Où $\langle B_i, B_j\rangle^P$ est le processus de variation quadratique de B^i et B^j, sous P. Lorsque $i = j$ nous la noterons $\langle B_i\rangle^P$.

Pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$, on considère $\underline{\mu}_i$ et μ_i deux mesures finies, déterministes sur $[0,T]$. Nous supposerons également que pour tout i, μ_i est Hölder-continue, c'est-à-dire qu'il existe des constantes strictement positives C_i, α_i telles que :

$$\forall s,t \in [0,T]\,,\ s \leqslant t,\ \mu_{i,t} - \mu_{i,s} \leqslant C_i|t-s|^{\alpha_i}$$

où pour tout $t \in [0,T]$, $\underline{\mu}_{i,t} = \underline{\mu}_i([0,t])$ et $\mu_{i,t} = \mu_i([0,t])$
Maintenant, nous dirons qu'une probabilité martingale orthogonale P vérifie les hypothèses $H(\underline{\mu}, \mu)$ si :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad d\underline{\mu}_{i,t} \leqslant d\langle B_i \rangle_t^P \leqslant d\mu_{i,t}.$$

Nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités martingales orthogonales qui vérifient l'hypothèse $H(\underline{\mu}, \mu)$.

Remarque 1 : Pour la construction des capacités et de l'intégrale stochastique qui suit, nous pouvons réécrire les preuves en prenant comme ensemble de probabilités un sous ensemble $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$.

Remarque 2 : le cas où $d\underline{\mu}_{i,t} = \underline{\sigma}_i^2 dt$ et $d\mu_{i,t} = \sigma_i^2 dt$ pour des constantes $\underline{\sigma}_i$ et σ_i, correspond au cas où la volatilité du i^{me} actif risqué appartient à $[\underline{\sigma}_i, \sigma_i]$. Nous pouvons également remarquer que cela comprend le cas où $\underline{\mu}_i = 0$.

Il est important de remarquer que les probabilités de l'ensemble $\mathcal{P}$ ne sont, généralement, pas équivalentes ou absolument continues par rapport à une même probabilité. On parle alors de modèles non dominés, car il n'y a aucune probabilité qui domine toutes celles représentant notre ensemble de scénarios possibles.
Mais dans ce type de modèle, les notions de presque sûr ou d'ensemble négligeable posent problème car il n'y a pas de probabilité privilégiée à laquelle on pourrait se restreindre pour ces notions. Dans notre cadre nous devons regarder ces notions pour toutes les probabilités en même temps, et donc redéfinir ce type de notion. Pour cela nous recourons à une notion plus générale que celle de probabilité : les capacités.

2.2 Définitions des capacités

Définition I.2. *: $\forall p \in [1; +\infty[$, $\forall f \in C_b(\Omega)$, on définit*

$$c_p(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[|f|^p]^{\frac{1}{p}}$$

Remarque : Dans [40], la capacité considérée est celle correspondant au cas particulier où p=2. Et dans [11], c'est le cas où $p = 1$ qui est considéré.

Ainsi, pour p fixé dans $[1; +\infty[$, on définit une semi-norme sur $C_b(\Omega)$, il est en effet facile de voir que c_p vérifie les propriétés de la semi-norme sur $C_b(\Omega)$. Nous pouvons, de plus, montrer qu'il s'agit bien d'une capacité. Mais avant cela nous devons définir quelques ensembles et montrer la compacité étroite de $\mathcal{P}$.

2.3 Capacités de Prokhorov

Compacité étroite relative de $\mathcal{P}$

De même que dans l'article [40] dans le cas où p=2, nous pouvons montrer que $\mathcal{P}$ est relativement étroitement compact au sens défini dans [18], c'est-à-dire que pour toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$, il existe une sous suite $P_{n'}$ et une probabilité P telles que la sous suite converge étroitement vers P.

Lemme I.3. *$\mathcal{P}$ est relativement étroitement compact.*

Démonstration.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}$, alors, en appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, puis en utilisant l'hypothèse $H\left(\underline{\mu},\mu\right)$ et l'Hölder-continuité des mesures μ_i, on obtient qu'il existe, pour tout $q>0$, $K_q>0$ (qui est la constante de Burkholder-Davis-Gundy associée à q) telle que pour tout $i\in\{1,\ldots,d\}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $0<s<t<T$

$$\begin{aligned} E_{P_n}\left[\left|B_{i,t}-B_{i,s}\right|^q\right] &\leqslant K_q E_{P_n}\left[\left(\langle B_i\rangle_t^{P_n}-\langle B_i\rangle_s^{P_n}\right)^{\frac{q}{2}}\right] \\ &\leqslant K_q\left(\mu_{i,t}-\mu_{i,s}\right)^{\frac{q}{2}} \\ &\leqslant C_i K_q\left(t-s\right)^{\frac{\alpha_i q}{2}} \end{aligned}$$

Comme on est à horizon T, $t-s<T$, et on peut choisir convenablement $q>0$ tel qu'il existe des constantes strictement positives α, β, γ telles que pour tout $0<s<t<T$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$E_{P_n}\left[\left|B_t-B_s\right|\right]\leqslant\beta\left|t-s\right|^{1+\gamma}$$

Nous pouvons alors appliquer le critère de Kolmogorov pour la compacité étroite (cf théorème 1.8 p.217 de [18]) qui nous donne que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étroitement relativement compacte et par suite que l'ensemble $\mathcal{P}$ est étroitement relativement compact.

□

Régularité et prolongement de c_p

Maintenant que nous avons montré la compacité étroite relative de $\mathcal{P}$, nous pouvons montrer que les semi-normes c_p sont bien des capacités, puis en utilisant les propriétés de notre espace nous pourrons en déduire qu'elles sont de Prokhorov. Pour cela, comme nous l'avons expliqué plus longuement en annexe, il suffit de montrer que les capacités sont régulières ou que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_b(\Omega)$ qui décroît simplement vers 0, $(c(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0.

Proposition I.4. *Soit $p\in[1;\infty[$, alors c_p est une capacité de Prokhorov*

Démonstration.
On a vu en annexe que dans notre cadre, comme Ω est un espace polonais, on a équivalence entre capacité, capacité régulière et capacité de Prokhorov. Montrons que l'on a une capacité régulière et on en déduira qu'il s'agit également d'une capacité de Prokhorov.

D'abord, on voit facilement que la propriété de croissance de c_p est vérifiée sur $C_b(\Omega)$. Reste donc à montrer que la propriété notée (b') dans la définition des capacités de l'annexe est vérifiée. Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_b(\Omega)$ qui décroît simplement vers 0.
On note $\overline{\mathcal{P}}$ l'adhérence de $\mathcal{P}$ pour la convergence étroite. Maintenant, posons :

$$\begin{array}{rccc} F_n : & \overline{\mathcal{P}} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & P & \longrightarrow & E_P[|f_n|] \end{array}$$

alors F_n est continue pour la topologie de la convergence étroite. Et, pour tout P fixé appartenant à $\overline{\mathcal{P}}$, la suite $(F_n(P))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus, d'après le théorème de convergence monotone, on a :

$$\forall P \in \overline{\mathcal{P}},\ \lim_{n\to\infty} F_n(P) = \lim_{n\to\infty} E_P[|f_n|] = 0$$

Or, $\overline{\mathcal{P}}$ est compact pour la topologie de la convergence étroite donc, d'après le théorème de Dini, $F_n(Q_p)$ converge uniformément vers 0 sur cet ensemble. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\overline{\mathcal{P}}} E_P[|f_n|] = 0$$

De plus, comme $\overline{\mathcal{P}}$ est l'adhérence de $\mathcal{P}$ pour la topologie de la convergence étroite,

$$\forall f \in C_b(\Omega), \sup_{P\in\overline{\mathcal{P}}} E_P[|f|] = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P[|f|]$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} c(f_n) = 0$$

Donc c est une capacité régulière.

□

Les capacités ainsi définies sont régulières au sens de Feyel-de la Pradelle ([45]) et nous pouvons considérer le prolongement de Lebesgue (cf [4]), comme expliqué dans l'annexe, aux fonctions quelconques :
– On étend c_p aux fonctions sci positives. Pour f sci positive, on pose :

$$c_p(f) = \sup\{c_p(\phi)\,;\phi \in C_b(\Omega),\ 0 \leqslant \phi \leqslant f\}$$

– Puis on étend aux fonctions quelconques. Pour $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, on pose :

$$c_p(g) = \inf\{c_p(f)\,; f \textit{ est sci et } f \geqslant |g|\}$$

Cela nous permet de définir une capacité ensembliste en posant pour tout $A \subset \Omega$

$$c_p(A) = c_p(\mathbf{1}_A),$$

Dans la suite, nous utiliserons le vocabulaire classique lié aux capacités :
– Un ensemble $A \subset \Omega$ est dit polaire pour la capacité c_p (la capacité ne sera pas nécessairement citée s'il n'y a pas de doute sur celle utilisée) si $c_p(A) = 0$.
– Une propriété est dite vraie quasi-partout (par rapport à c_p) si elle est vraie partout sauf sur un ensemble polaire.

2.4 Lien entre les capacités c_p et $c_{p'}$

Nous venons de définir pour tout réel p plus grand que 1 une capacité c_p ensembliste. En fait, il existe un lien entre celles-ci, on peut même toutes les écrire à partir de la capacité c_1.

Théorème I.5. *Soit $p \in [1; +\infty[$ et $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ alors*

$$c_p(A) = (c_1(A))^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration.
Montrons d'abord le résultat pour un ouvert : soit O un ouvert appartenant à $\mathcal{B}(\Omega)$, alors la fonction $\mathbf{1}_O$ est s.c.i. positive et d'après la définition du prolongement de Lebesgue et de nos capacités sur $C_b(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
c_p(\mathbf{1}_O) &= \sup\{c_p(\phi); \phi \in C_b(\Omega),\ 0 \leqslant \phi \leqslant \mathbf{1}_O\} \\
&= \sup\left\{\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P[\phi^p]^{\frac{1}{p}}; \phi \in C_b(\Omega),\ 0 \leqslant \phi \leqslant \mathbf{1}_O\right\} \\
&= \left(\sup\left\{\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P[\phi^p]; \phi \in C_b(\Omega),\ 0 \leqslant \phi^p \leqslant \mathbf{1}_O\right\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sup\{c_1(\phi); \phi \in C_b(\Omega),\ 0 \leqslant \phi \leqslant \mathbf{1}_O\})^{\frac{1}{p}} \\
&= (c_1(\mathbf{1}_O))^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

On a par conséquent le résultat du théorème pour les ouverts, montrons qu'il est vrai pour un borélien quelconque de Ω : soit $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ alors, par définition du prolongement de Lebesgue, puis en utilisant le résultat obtenu pour les ouverts,

$$\begin{aligned}
c_p(\mathbf{1}_A) &= \inf\{c_p(f);\ \text{f est sci et } f \geqslant \mathbf{1}_A\} \\
&= \inf\{c_p(O); O \text{ est ouvert et } A \subset O\} \\
&= \inf\left\{(c_1(O))^{\frac{1}{p}}; O \text{ est ouvert et } A \subset O\right\} \\
&= (c_1(\mathbf{1}_A))^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré pour un borélien quelconque.

□

Ce théorème nous permet d'établir une équivalence entre les ensembles polaires pour une capacité c_p et les ensembles polaires pour une capacité $c_{p'}$ pour tout réels p, p' plus grand que 1.

Corollaire I.6. *Soient $A \subset \Omega$ et $p, p' \in [1; +\infty[$ alors*

$$c_{p'}(A) = 0 \ ssi\ c_p(A) = 0$$

Démonstration.
Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème précédent.

□

Remarque : Cette proposition nous permet d'affirmer que les ensembles polaires pour une capacité c_p sont les mêmes que les ensembles polaires pour une capacité $c_{p'}$, quels que soient p et p' appartenant à $[1;\infty[$. Il est donc inutile de préciser par rapport à quelle capacité un ensemble est polaire.

2.5 Lien entre ensembles polaires et ensembles de probabilité nulle

Rappelons quelques résultats de l'article [11]. Dans celui-ci, S. Peng et L. Denis proposent deux constructions de capacités. Dans la première partie de cet article, ils montrent que si on a un ensemble de probabilités $\mathcal{P}$ étroitement compact, alors l'application $\widehat{c}$ qui à tout borélien A de Ω associe la quantité :

$$\widehat{c}(A) = \sup_{P\in\mathcal{P}} P(A)$$

est une capacité régulière. En particulier, ils observent (théorème 6) que pour tout $A \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\widehat{c}(A) &= \inf\{\widehat{c}(O), O \text{ ouvert et } A \subset O\}\\ &= \sup\{\widehat{c}(K), K \text{ compact et } K \subset A\}\end{aligned}$$

Dans la seconde partie, ils se donnent une espérance non linéaire régulière $\mathbb{E}$ (la définition d'espérance conditionnelle non linéaire est rappelée dans la partie 5, on peut également se référer à [59], quant à la définition de régularité, c'est la même que pour les capacités) sur $C_b(\Omega)$ (en fait, ils montrent même que l'on peut partir d'un ensemble plus petit). Puis, ils définissent une capacité régulière c par la relation :

$$\forall X \in C_b(\Omega),\ c(X) = \mathbb{E}[|X|]$$

Ils prolongent ensuite la capacité obtenue par le prolongement de Lebesgue que nous avons détaillé en annexe et utilisé pour nos capacités c_p. La capacité ainsi obtenue est encore notée c et le théorème 42 nous donne que pour tout borélien A, elle s'écrit nécessairement sous la forme :

$$c(A) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A)$$

où $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des mesures de probabilité qui ne chargent pas les ensembles polaires et est dominé par $\mathbb{E}$ sur $C_b(\Omega)$.
Ces différentes propriétés et cette construction de capacités vont nous permettre d'écrire les capacités ensemblistes comme un supremum de probabilités, puis d'établir un lien entre ensemble polaire et ensemble de mesure nulle pour toute probabilité appartenant à $\mathcal{P}$. Plus précisément, nous avons les propositions suivantes :

Proposition I.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, soit $p \in [1,+\infty[$ alors*

$$\forall P \in \mathcal{P},\ c_p(A) = \sup_{P\in\mathcal{P}} (P(A))^{\frac{1}{p}}$$

Corollaire I.8. *Soit $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, A est un ensemble polaire pour la capacité c_p ssi*

$$\forall P \in \mathcal{P},\ P(A) = 0.$$

Démonstration du corollaire I.8.
Soit $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, un ensemble polaire pour la capacité c_p alors $c_p(A) = 0$. D'après la proposition I.7, ceci implique que pour tout $P \in \mathcal{P}$, $P(A) = 0$. □

Montrons maintenant la proposition :

Démonstration de la proposition I.7.
Etudions dans un premier temps le cas où p=1. Si nous posons

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X]$$

alors comme $\mathbb{E}$ est une espérance non linéaire (voir la partie 5 pour plus de détails et définition sur cette notion) et régulière puisque c_1 l'est (cf proposition I.4). Nous sommes par conséquent dans un cas particulier du théorème 42 de [11] expliqué ci-dessus et donc

$$c_1(A) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q(A)$$

Donc, dans ce cas, A est un ensemble polaire pour la capacité c_1 ssi $\forall P \in \mathcal{P},\ P(A) = 0$. où $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des mesures de probabilité qui ne chargent pas les ensembles polaires et est dominé par c_1 sur $C_b(\Omega)$.
Appelons $\widehat{c}$ l'application qui à tout borélien A de Ω associe

$$\widehat{c}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$$

Alors, d'après la première partie de [11], $\widehat{c}$ est une capacité régulière car $\mathcal{P}$ est étroitement compact (nous avons montré la relative étroite compacité, la fermeture est un résultat classique, pour des idées de la démonstration cf la proposition I.27 et la remarque suivant cette proposition).
De manière évidente, on a $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ et donc

$$\forall A \in \mathcal{B}(\Omega),\ c_1(A) \geqslant \widehat{c}(A)$$

Inversement, soit O un ouvert de Ω, par définition du prolongement de Lebesgue

$$c_1(O) = \sup\{c_1(\phi); \phi \in C_b(\Omega),\ 0 \leqslant \phi \leqslant \mathbf{1}_O\}$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\phi \in C_b(\Omega)$, tel que $0 \leqslant \phi \leqslant \mathbf{1}_O$ et $c_1(O) \leqslant c_1(\phi) + \epsilon$. De plus, par définition de c_1 sur $C_b(\Omega)$,

$$c_1(\phi) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[\phi] \leqslant \sup_{P \in \mathcal{P}} P(O)$$

Donc, pour tout ouvert O,

$$c_1(O) \leqslant \sup_{P \in \mathcal{P}} P(O) = \widehat{c}(O)$$

finalement, pour c_1 et $\widehat{c}$ sont des capacités régulières, égales sur tout ouvert et donc égales partout car d'après le théorème 6 de [11] rappelé ci-dessus,

$$\widehat{c}(A) = \inf \{\widehat{c}(O), O \text{ ouvert et } A \subset O\}$$

et par définition du prolongement de Lebesgue

$$c_1(A) = \inf \{c_1(O), O \text{ ouvert et } A \subset O\}$$

C'est-à-dire, pour tout $A \in \mathcal{B}(\Omega)$,

$$c_1(A) = \widehat{c}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$$

Nous obtenons donc la proposition pour $p = 1$.
Le cas p quelconque s'obtient en appliquant la théorème I.5 :

$$c_p(A) = (c_1(A))^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{P \in \mathcal{P}} (P(A))^{\frac{1}{p}}$$

□

3 Intégrale stochastique dans un modèle non dominé

Pour pouvoir considérer dans ce modèle la valeur d'un portefeuille, il est nécessaire de définir une intégrale par rapport au processus B et définie quasi-partout. Il s'agit du but de cette partie.

3.1 Ensemble des fonctions quasi continues

Commençons par introduire quelques notations :

Notation Dans la suite, nous noterons $\mathcal{L}_p(c)$ la complétion topologique de $C_b(\Omega)$ par la semi-norme c_p et $L_p(c)$ le quotient de $\mathcal{L}_p(c)$ par rapport à la relation d'égalité quasi-sûre.

Remarque Un élément de $L_p(c)$ est une classe d'équivalence par rapport à la relation d'égalité quasi-sûre. Cependant, comme habituellement dans le cas où on s'intéresse aux fonctions de $L^p(P, \Omega)$, on ne fera pas de distinction entre la classe d'équivalence et les fonctions appartenant à cette classe.

Remarquons que du corollaire I.8, nous pouvons déduire les deux corollaires suivants qui donnent un lien entre des égalités ou inégalités vérifiées $P - p.s.$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ et ces mêmes égalités ou inégalités vérifiées quasi-sûrement pour des fonctions de $\mathcal{L}_p(c)$:

Corollaire I.9. *Soit $f, g \in \mathcal{L}_p(c)$ telles que pour tout $P \in \mathcal{P}$*

$$f = g \ P - p.s.$$

alors $f = g$ dans $\mathcal{L}_p(c)$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à l'ensemble $A = \{f \neq g\}$. □

Corollaire I.10. *Soit $f, g \in \mathcal{L}_p(c)$ telles que pour tout $P \in \mathcal{P}$*

$$f \geqslant g \ P - p.s.$$

alors $f \geqslant g$ q.s.

Démonstration.
De même que dans la démonstration du corollaire précédent, il suffit d'appliquer le corollaire I.8 à l'ensemble $A = \{f < g\}$. □

Définition I.11. *Une fonction f définie sur Ω à valeurs dans un espace topologique est dite quasi-continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } O \text{ ouvert}, c(O) < \varepsilon, \text{ tel que } f_{|O^c} \text{ est continue.}$$

De même que dans le cas $p = 2$ (cf [40]), un point important à remarquer est qu'un élément de $\mathcal{L}_p(c)$ est défini P-p.s. pour tout $P \in \mathcal{P}$. Plus précisément, on a le théorème suivant dont les idées de démonstration se trouvent dans [11] ou [8].

Théorème I.12. *Tout élément de $\mathcal{L}_p(c)$ peut-être identifié à une fonction quasi-continue sur Ω (et donc définie quasi-partout).*

La démonstration de ce théorème nécessite la connaissance du lemme suivant qui est une généralisation de l'inégalité de Markov au cas des capacités :

Lemme I.13.

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c), \ c_p\left(\{|X| > \alpha\}\right) \leqslant \frac{c_p\left(X\right)^p}{\alpha^p}$$

Démonstration du lemme I.13.
Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov sous chaque probabilité, puis de passer au supremum.

□

Le lemme suivant est également utile pour la démonstration du théorème :

Lemme I.14. *Si X est quasi-continue et $Y = X$ q.s. alors Y est également quasi-continue.*

Démonstration du lemme I.14.
Soit $\epsilon > 0$, comme $c_p\left(\{X \neq Y\}\right)$, il existe O_1 un ouvert tel que $\{X \neq Y\} \subset O_1$ et $c_p\left(O_1\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Puis, par définition de la quasi-continuité, il existe O_2 un ouvert tel que $c_p\left(O_1\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ et X continu sur O_2^c. Alors, si on pose $O = O_1 \cup O_2$, O est un ouvert tel que $c_p(O) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ et Y est continue sur O^c.

□

Démonstration du théorème .
Soit $f \in \mathcal{L}_p(c)$, alors il existe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C_b(\Omega)$ qui converge vers f pour la semi-norme c_p. Donc, la suite est de Cauchy pour cette semi-norme, on peut extraire une sous suite $(X_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall k \geqslant 1,\ c_p\left(X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\right) \leqslant 2^{-2k}$$

Posons, pour tout réel k,

$$A_k = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \left\{ \left| X_{n_{i+1}} - X_{n_i} \right| > 2^{-\frac{i}{p}} \right\}$$

Alors, par sous-additivité de c_p, puis en utilisant l'inégalité de Markov pour les capacités,

$$c_p(A_k) \leqslant \sum_{i=k}^{+\infty} c_p\left(\left\{ \left| X_{n_{i+1}} - X_{n_i} \right| > 2^{-\frac{i}{p}} \right\} \right) \leqslant \sum_{i=k}^{+\infty} 2^{-i} = 2^{-k+1}$$

De plus, comme pour tout k, $X_{n_k} \in C_b(\Omega)$ est continue, A_k est ouvert et, par définition, pour tout k, $(X_{n_i})_{i\geqslant 1}$ converge uniformément sur A_k^c donc la limite est continue sur A_k^c. Notons, pour tout $w \in \cup_n A_n^c$, $\widetilde{f}(w)$ la limite de $(X_{n_i})_{i\geqslant 1}$. Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $\widetilde{f}_{|A_k^c}$ est continue et $\widetilde{f}_{|A_k^c} = f$ *q.s.*, donc d'après le lemme I.14, on obtient le résultat.

□

On peut également montrer la proposition suivante qui nous donne un lien entre convergence dans $\mathcal{L}_p(c)$ et convergence $P - p.s.$ pour tout $P \in \mathcal{P}$:

Proposition I.15. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_p(c)$ une suite qui converge vers f dans $\mathcal{L}_p(c)$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f en dehors d'un ensemble polaire.*

Remarque Ceci signifie que si une suite converge dans $\mathcal{L}_p(c)$, alors elle converge en dehors d'un ensemble polaire et donc $P - p.s.$ pour tout $P \in \mathcal{P}$.

Pour démontrer cette propriété, il est intéressant dans un premier temps (comme dans [11] ou [8]) de remarquer que l'on peut énoncer une version capacitaire du lemme de Borel-Cantelli :

Lemme I.16. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens telle que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_p(A_n) < +\infty$$

alors, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ *est polaire.*

Démonstration du lemme I.16.
Il suffit de montrer cela pour $p = 1$ d'après la proposition I.7. Donc, on applique le lemme de Borel Cantelli sous chaque probabilité $P \in \mathcal{P}$, puis on passe au supremum.

□

Démonstration de la proposition I.15.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_p(c)$ une suite qui converge vers f dans $\mathcal{L}_p(c)$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall k \geqslant 1, c_p\left(f_{n_k} - f\right) \leqslant k^{-p-2}$$

Posons

$$A_k = \left\{ |f - f_{n_k}| > \frac{1}{k} \right\} \text{ et } A = \limsup_{k\to\infty} A_k$$

D'après le lemme de Markov capacitaire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_p\left(A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{c_p\left(f_{n_k} - f\right)}{1/k} \right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}} < +\infty$$

Donc, en appliquant le lemme de Borel-Cantelli capacitaire, on obtient que $c_p\left(A\right) = 0$.
De plus, la suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge clairement vers f sur A^c, ce qui achève la démonstration.

□

On peut maintenant montrer la relation suivante qui nous donne une formule explicite pour la capacité d'un élément de $\mathcal{L}_p(c)$.

Proposition I.17. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(c)$ alors*

$$c_p\left(f\right) = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_p\left[|f|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{L}_p(c)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_b\left(\Omega\right)$ une suite qui converge vers f dans $\mathcal{L}_p(c)$. Donc, d'après la proposition I.15, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f en dehors d'un ensemble polaire, c'est-à-dire que la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge $P-p.s.$ vers f, pour tout $P \in \mathcal{P}$.
D'autre part, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme c_p, c'est-à-dire,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N}; \forall q, k \geqslant p,\ c_p\left(f_{n_q} - f_{n_k}\right) = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left|f_{n_q} - f_{n_k}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

Cela implique que la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p\left(\Omega, P\right)$, pour tout $P \in \mathcal{P}$ et uniformément en P. Nous pouvons en déduire que, pour tout $P \in \mathcal{P}$ et uniformément en P, cette suite converge dans $L^p\left(\Omega, P\right)$ et donc P-p.s.. Et, par conséquent, cette limite est égale à f, $P - p.s$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. La convergence étant de plus uniforme en P, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left|f_{n_q}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[|f|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

D'autre part, comme f_{n_k} appartient à $C_b\left(\Omega\right)$ et converge vers f dans $\mathcal{L}_p(c)$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left|f_{n_q}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} c_p\left(f_{n_k}\right) = c_p\left(f\right)$$

On déduit de ces égalités la proposition.

□

L. Denis et S. Peng dans [11] ont par ailleurs démontré une caractérisation des espaces $\mathcal{L}_p(c)$ en termes de fonctions quasi-continues, rappelons ce théorème :

Théorème I.18. *Soit f une fonction $\mathcal{B}$-mesurable à valeurs réelles, alors f appartient à $\mathcal{L}_p(c)$ ssi les conditions suivantes sont vérifiées :*
- *f est quasi-continue*
- $\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[|f|^p\right] < +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[|f|^p \mathbf{1}_{\{|f|>n\}}\right] = 0$

3.2 Définition des espaces sur lesquels on construit l'intégrale

Nous venons de voir que $\mathcal{L}_p(c)$ est un ensemble de fonctions définies quasi partout, donc P presque sûrement pour tout P appartenant à $\mathcal{P}$. Pour chacun de ces P, on sait construire une intégrale stochastique par rapport à B, mais définie P-p.s. et pas quasi-partout. Nous cherchons à définir une notion d'intégrale par rapport à B à valeur dans cet espace $\mathcal{L}_p$, en utilisant le même genre d'argument que [40] dans le cas $p = 2$. Commençons par construire l'espace des intégrants.
On note $\mathcal{H}_e$ l'ensemble des processus élémentaires : h appartient à $\mathcal{H}_e$ si

$$\forall s \in [0,T],\ h_s = \sum_{i=0}^{N} k_i \mathbf{1}_{\{]t_i;t_{i+1}]\}}(s),$$

où $(t_i)_i$ est une subdivision déterministe de $[0;T]$ et pour tout $i \in \{0,\cdots N\}$, k_{t_i} est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, bornée et continue.
Pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$, on note $\mathcal{H}_{i,p}$ la complétion de $\mathcal{H}_e$ par rapport à la semi-norme :

$$||h||_{\mathcal{H}_{i,p}} = c_p\left(\left(\int_0^T h_s^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(\int_0^T h_s^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

Soit $H_{i,p}$ le quotient de $\mathcal{H}_{i,p}$ sur l'espace des processus h tels que $||h||_{\mathcal{H}_{i,p}} = 0$. Alors, $H_{i,p}$ est un espace de Banach pour la norme résultant.

Proposition I.19. *Soient $f \in C_b(\Omega)$, Q un polynôme, $s,t \in [0;T]$ et $i \in \{0,\cdots d\}$, alors $Q(B_{i,t} - B_{i,s})f \in \mathcal{L}_p$.*

Démonstration.
Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le résultat pour $Q(x) = x^k$ et pour $s = 0$.
Montrons donc que $B_{i,t}^k f \in \mathcal{L}_p$.
Posons $S_n = \left(\left((-n) \vee B_{i,t}^k\right) \wedge n\right)$, alors on a $S_n \in C_b(\Omega)$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leqslant M$ et soit $P \in \mathcal{P}$, alors, on a :

$$\parallel B_{i,t}^k f - S_n \parallel_{L^p(P)}^p = E_P\left[\mathbf{1}_{\left\{|B_{i,t}^k|>n\right\}} |f B_{i,t}^k|^p\right] \leqslant M^p E_P\left[\mathbf{1}_{\left\{|B_{i,t}^k|>n\right\}} \left|B_{i,t}^k\right|^p\right]$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \| B_{i,t}^k f - S_n \|_{L^p(P)}^p &\leqslant M^p E_P \left[\left(\mathbf{1}_{\left\{ |B_{i,t}^k| > n \right\}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} E_P \left[|B_{i,t}^k|^{2p} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant M^p P \left(|B_{i,t}^k| > n \right)^{\frac{1}{2}} E_P \left[|B_{i,t}^k|^{2p} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Markov, on a :

$$\| B_{i,t}^k f - S_n \|_{\mathcal{L}^p(P)}^p \leqslant M^p \left(\frac{E_P \left[|B_{i,t}^k|^{2p} \right]}{n^{2p}} \right)^{\frac{1}{2}} E_P \left[|B_{i,t}^k|^{2p} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Or, d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe $K_p \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que :

$$E_P \left[|B_{i,t}^k|^{2p} \right] \leqslant K_p E_p \left[\langle B_i \rangle_t^p \right]$$

Et d'après l'hypothèse $H(\underline{\mu}, \mu)$,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad E_p \left[\langle B_i \rangle_t^p \right] \leqslant \mu_{i,t}$$

Donc

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \| B_{i,t}^k f - S_n \|_{L^p(P)}^p \leqslant \frac{M^p}{n^p} K_p \mu_{i,t}$$

Finalement,

$$\lim_{n \to \infty} c_p \left(B_{i,t}^k f - S_n \right) = \lim_{n \to \infty} \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P \left[\left(B_{i,t}^k f - S_n \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = 0$$

Or, $S_n \in C_b(\Omega)$ donc $B_{i,t}^k f \in \mathcal{L}_p(c)$.

□

3.3 Définition de l'intégrale stochastique

Notation : Si $h = (h_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ appartient à $\mathcal{H}_p^d = \mathcal{H}_{1,p} \times \cdots \times \mathcal{H}_{d,p}$, on pose :

$$\| h \|_{\mathcal{H}_p^d} = \left(\sum_{i=1}^d \| h_i \|_{\mathcal{H}_p}^{i,p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème I.20. *L'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} I_T^p : \quad h = \left(\sum_{i=0}^N k_i^j \mathbf{1}_{\{]t_i;t_{i+1}]\}} \right)_{1 \leqslant k \leqslant d} & \longmapsto & I_T^p(h) = \int_0^T h_s dB_s = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=0}^N k_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right) \right) \\ (\mathcal{H}_e)^d & \longrightarrow & \mathcal{L}_p \end{array}$$

vérifie pour tout $h \in (\mathcal{H}_e)^d$ la relation

$$c_p \left(I_T^p(h) \right) \leqslant K_p \| h \|_{\mathcal{H}_p^d} \qquad (\star)$$

où K_p est une constante dépendant de p.
Cette application s'étend de manière unique en une application linéaire de $\mathcal{H}_p^d$ dans $\mathcal{L}^p(c)$ encore notée $I_T^p(h) = \int_0^T h_s dB_s$ et satisfaisant $(\star)$.

Démonstration.
Soit $h \in (\mathcal{H}_e)^d$, d'après la proposition précédente, on a bien $I_T^p(h) \in \mathcal{L}_p(c)$.
De plus, par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$, il existe une constante M_p telle que pour tout $P \in \mathcal{P}$:

$$E_P\left[\left|\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{i=0}^{N} k_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right)\right|^p\right] \leqslant M_p \sum_{j=1}^{d} E_P\left[\left|\sum_{i=0}^{N} k_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right|^p\right]$$

D'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante C_p telle que, pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$:

$$\begin{aligned} E_P\left[\left|\sum_{i=0}^{N} k_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right|^p\right] &= E_P\left[\left(\int_0^T h_{i,s}dB_{i,s}\right)^p\right] \\ &\leqslant C_p E_P\left[\left(\int_0^T h_{i,s}^2 d\langle B_i\rangle_s\right)^{\frac{p}{2}}\right] \end{aligned}$$

Puis d'après les hypothèses $H(\underline{\mu},\mu)$, pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$:

$$E_P\left[\left|\sum_{i=0}^{N} k_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)\right|^p\right] \leqslant C_p E_P\left[\left(\int_0^t h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$

Donc

$$E_P\left[\left|I_T^p(h)\right|^p\right] \leqslant M_p C_p \sum_{j=1}^{d} E_P\left[\left(\int_0^t h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$

Puis, en passant à la borne sup pour les $P \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} c_p\left(I_T^p(h)\right)^p &\leqslant M_p C_p \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{d} E_P\left[\left(\int_0^t h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ &\leqslant M_p C_p \sum_{j=1}^{d} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(\int_0^t h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ &\leqslant M_p C_p \parallel h \parallel_{\mathcal{H}_p^d}^p \end{aligned}$$

Donc $(\star)$ est vraie pour $h \in (\mathcal{H}_e)^d$.

On peut enfin conclure dans le cas général en utilisant la densité de $\mathcal{H}_e$ dans $\mathcal{H}_{i,p}$, pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$.

□

3.4 Intégrales stochastiques et ensembles polaires

Maintenant que nous avons construit une intégrale stochastique à valeur dans $\mathcal{L}_p$, il important de remarquer que pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_p$, sous une probabilité martingale orthogonale P' ne chargeant pas les ensembles polaires mais n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{P}$, nous avons deux manières de construire une intégrale

– D'une part, nous pouvons remarquer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\}, \ \left| \int_0^T h_{i,s} d\mu_{i,s} \right| < \infty \ P' - p.s.$$

Puis, comme P' est une probabilité martingale orthogonale, $\int_0^T h_s dB_s$ est une P'-martingale locale et donc est bien définie P'-p.s..

– D'autre part, nous venons de donner une définition de $\int_0^T h_s dB_s$ comme élément de $\mathcal{L}_p$, défini quasi-partout et donc défini P'-p.s..

Nous pouvons remarquer que ces deux définitions coïncident sur l'ensemble des processus élémentaires $(\mathcal{H}_e)^d$ et donc par densité coïncident sur l'ensemble des processus de $\mathcal{H}_p$. Une fois que l'on a remarqué ceci, on peut énoncer et démontrer la propriété suivante :

Proposition I.21. *Soit $p \in [1; \infty[$ et soit P une probabilité martingale orthogonale qui ne charge pas les ensembles polaires pour c_p, alors $P \in \mathcal{P}$.*

Démonstration.
D'après le corollaire I.6, si P ne charge pas les ensembles polaires pour c_p alors P ne charge pas les ensembles polaires pour c_2. Alors, on peut appliquer la proposition 2.12 de [40], à chacune des coordonnées B_i, ce qui nous donne que

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\}, \quad d\underline{\mu}_{i,t} \leqslant d\langle B_i \rangle_t^P \leqslant d\mu_{i,t}, \ P - p.s.$$

Donc, P est une probabilité martingale orthogonale qui vérifie les hypothèses $H(\underline{\mu}, \mu)$ et appartient donc à $\mathcal{P}$. □

3.5 Le processus intégrale stochastique

Nous avons défini une intégrale stochastique entre 0 et T, quasi-partout, nous voulons maintenant étendre cette définition à une intégrale entre 0 et t définies quasi-partout qui soit un processus convenable en un certain sens que nous explicitons :

Notation Nous noterons $\mathcal{L}_p(c, C([0,T]; \mathbb{R}))$ la complétion de $C_b(\Omega, C([0,T]; \mathbb{R}))$, l'ensemble des fonctions continues bornées de Ω dans $C([0,T]; \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$) par rapport à la norme définie par

$$\forall X \in C_b(\Omega, C([0,T]; \mathbb{R})), \ \| X \|_{\mathcal{L}_p(c, C([0,T]; \mathbb{R}))} = c_p \left(\sup_{t \in [0,T]} [X_t| \right).$$

Et, nous noterons $\mathcal{L}_p^a(c, C([0,T]; \mathbb{R}))$ le sous ensemble des processus de $\mathcal{L}_p(c, C([0,T]; \mathbb{R}))$ qui sont adaptés.

De même que précédemment, on peut montrer que $\mathcal{L}_p(c, C([0,T]; \mathbb{R}))$ est un espace de Banach et que tout élément $X \in \mathcal{L}_p(c, C([0,T]; \mathbb{R}))$ peut être considéré comme une fonction quasi-continue de Ω dans $C([0,T])$. De plus, si $X \in \mathcal{L}_p(c, C([0,T]; \mathbb{R}))$ alors, pour tout $t \in [0,T]$, $X_t \in \mathcal{L}_p(c)$ et il existe un ensemble polaire N tel que, pour tout $w \in \Omega \cap N^c$, l'application

$$t \in [0,T] \longrightarrow X_t(w)$$

est continue.

Nous pouvons maintenant revenir à la définition de notre processus intégrale stochastique :

Théorème I.22. *Soit* $h = (h_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in (\mathcal{H}_d^p)^d$*, appelons* X *le processus à valeurs réelles suivant :*

$$X_t = \int_0^t h_s dB_s$$

Alors, X *admet une version dans* $\mathcal{L}_p^a(c, C([0,T];\mathbb{R}))$ *que nous noterons encore* X *et qui vérifie l'inégalité :*

$$c_p\left(\sup_{t\in[0,T]}[X|\right) \leqslant K'_p \parallel h \parallel_{\mathcal{H}_d^p} \tag{2}$$

Démonstration. La démonstration utilise les mêmes arguments que pour le théorème I.20. Ainsi, soit $h \in (\mathcal{H}_e)^d$ et soit $P \in \mathcal{P}$, en utilisant l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$, puis l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et l'hypothèse $H\left(\underline{\mu}, \mu\right)$, il existe des constantes M'_p et C'_p telles que

$$\begin{aligned}
E_P\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\sum_{i=1}^d \int_0^t h_{i,s}dB_{i,s}\right|^p\right] &\leqslant M'_p E_P\left[\sup_{t\leqslant T}\sum_{i=1}^d\left|\int_0^t h_{i,s}dB_{i,s}\right|^p\right] \\
&\leqslant M'_p C'_p \sum_{i=1}^d E_P\left[\left(\int_0^T h_{i,s}^2 d\langle B\rangle_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
&\leqslant M'_p C'_p \sum_{i=1}^d E_P\left[\left(\int_0^T h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Passons maintenant au supremum sur les $P \in \mathcal{P}$, et posons $K'_p = M'_p c'_p$, on obtient

$$c_p\left(\sup_{t\in[0,T]}[X|\right) \leqslant K'_p \parallel h \parallel_{\mathcal{H}_d^p}$$

De plus, il est immédiat de voir que pour $h \in (\mathcal{H}_e)^d$, X appartient bien à $\mathcal{L}_p^a(c, C([0,T];\mathbb{R}))$, on a donc le résultat pour tout $h \in (\mathcal{H}_e)^d$. Puis, en utilisant la densité de $\mathcal{H}_e$ dans $\mathcal{H}_{i,p}$, pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$, on obtient le théorème pour tout $h \in \mathcal{H}_d^p$.

□

Remarque Nous aurions pu définir de même un processus intégrale stochastique X à valeur dans $\mathbb{R}^n$, mais nous avons choisi de simplifier le propos et de prendre $n = 1$.

3.6 Définition de la variation de B_i quadratique quasi-partout

Proposition I.23. *Pour tout* $t \in [0,T]$ *et tout* $i \in \{1,\ldots,d\}$*, il existe un élément de* $\mathcal{L}_p(c)$ *que nous noterons* $\langle B_i\rangle_t$ *tel que pour tout* $P \in \mathcal{P}$*,* $\langle B_i\rangle_t^P = \langle B_i\rangle_t$ $P-p.s.$ *et* $\langle B_i\rangle$*. appartient à l'ensemble* $\mathcal{L}_p^a(c, C([0,T];\mathbb{R}))$*.*

Remarque Cette proposition nous assure l'existence d'une version quasi-partout et continue en temps de la variation quadratique de B_i.

Pour démontrer cette proposition, nous devons dans un premier temps obtenir des critères d'appartenance aux ensembles $\mathcal{H}_i$. Il s'agit du but des lemmes suivants :

Lemme I.24. *Si $p \geqslant 2$ et si X est un processus prévisible qui admet une version dans $L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$, alors X appartient à $\mathcal{H}_i$.*

Démonstration.
Soit $X \in L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$ prévisible, alors il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{H}_e$ qui converge dans $L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T c_p\left(X_s - h_n^s\right)^p d\mu_{i,s} = 0$$

Donc, d'après l'inégalité de Jensen, il existe une constante K telle que :

$$\begin{aligned}
\| h_n - X \|_{\mathcal{H}_i}^p &= \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(\int_0^T \left(h_s^n - X_s\right)^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
&\leqslant K \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\int_0^T \left(h_s^n - X_s\right)^p d\mu_{i,s}\right] \\
&\leqslant K \int_0^T \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[|h_s^n - X_s|^p\right] d\mu_{i,s} \\
&\leqslant K \int_0^T c_p\left(X_s - h_n^s\right)^p d\mu_{i,s}
\end{aligned}$$

Donc h_n converge vers X dans $\mathcal{H}_i$ et donc X appartient à $\mathcal{H}_i$.

□

Lemme I.25. *Si $1 \leqslant p < 2$ et si $X^{\frac{2}{p}}$ est un processus prévisible qui admet une version dans $L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$, alors X appartient à $\mathcal{H}_i$.*

Démonstration.
Soit X un processus prévisible tel que $X^{\frac{2}{p}} \in L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$ alors il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{H}_e$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T c_p\left(\left(X_s - h_n^s\right)^{\frac{2}{p}}\right)^p d\mu_{i,s} = 0$$

Puis, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}
\| h_n - X \|_{\mathcal{H}_i}^2 &= \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(\int_0^T (h_s^n - X_s)^2\, d\mu_{i,s}\right)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}} \\
&\leqslant \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\int_0^T (h_s^n - X_s)^2\, d\mu_{i,s}\right] \\
&\leqslant \int_0^T \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(|h_s^n - X_s|^{\frac{2}{p}}\right)^p\right] d\mu_{i,s} \\
&\leqslant \int_0^T c_p\left(|X_s - h_n^s|^{\frac{2}{p}}\right)^p d\mu_{i,s}
\end{aligned}$$

Donc h_n converge vers X dans $\mathcal{H}_i$ et donc X appartient à $\mathcal{H}_i$.

□

Lemme I.26. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'application*

$$s \in [0,T] \to (B_{i,s})^k$$

appartient à $\mathcal{H}_i$

Démonstration.
Pour pouvoir utiliser les lemmes précédents, on distingue les cas suivant la valeur de p.
Cas 1 : supposons $1 \leqslant p < 2$
Pour tout $P \in \mathcal{P}$, d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante K telle que :

$$E_P\left[|B_{i,t}|^{2k}\right] \leqslant K E_P\left[\left(\langle B_i\rangle_t^P\right)^k\right] \leqslant K\mu_{i,t}^k$$

Donc

$$c_p\left((B_{i,t})^{\frac{2k}{p}}\right)^p \leqslant K\mu_{i,t}^k$$

Donc $\left((B_{i,t})^k\right)^{\frac{2}{p}}$ admet une version dans $L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$ et ,d'après le lemme I.25, $(B_{i,t})^k$ appartient à $\mathcal{H}_i$.
Cas 2 : supposons $p \geqslant 2$
Pour tout $P \in \mathcal{P}$, d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante K' telle que :

$$E_P\left[|B_{i,t}|^{pk}\right] \leqslant K' E_P\left[\left(\langle B_i\rangle_t^P\right)^{\frac{kp}{2}}\right] \leqslant K'\mu_{i,t}^{\frac{kp}{2}}$$

Donc

$$c_p\left((B_{i,t})^k\right)^p \leqslant K'\mu_{i,t}^{\frac{kp}{2}}$$

Donc $(B_{i,t})^k$ admet une version dans $L^p([0,T],\mu_i;\mathcal{L}_p(c))$ et d'après le lemme I.24 appartient à $\mathcal{H}_i$.

□

Démonstration de la proposition I.23.
Posons, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\langle B_i \rangle_t = B_{i,t}^2 - \int_0^t B_{i,s} dB_{i,s}$$

D'après la proposition I.19, $B_{i,t}^2 \in \mathcal{L}_p(c)$.
D'après le lemme I.25, de même que l'on a démontré le lemme I.26, on peut montrer que

$$s \in [0,T] \to (B_{i,s}) \cdot 1(s \in]0,t])$$

appartient à $\mathcal{H}_{i,d}$ et donc d'après la construction de l'intégrale que nous avons faite :

$$\int_0^t B_{i,s} dB_{i,s} \in \mathcal{L}_p(c)$$

Et donc $\langle B_i \rangle_t \in \mathcal{L}_p(c)$.
D'autre part, l'égalité $\langle B_i \rangle_t = \langle B_i \rangle_t^P$ est claire car on sait que les intégrales P-p.s. et quasi-partout coïncident et que

$$\langle B_i \rangle_t^P = B_{i,t}^2 - \int_0^t B_{i,s} dB_{i,s} \ P - p.s.$$

□

4 Propriétés topologiques fondamentales : compacité de $\mathcal{P}$

Dans la suite de la thèse, cette propriété joue un rôle très important. Nous devons d'abord définir une topologie sur l'ensemble $\mathcal{P}$, puis nous nous attaquerons à la démonstration de la compacité pour cette topologie.
Remarquons d'abord que pour $Q \in \mathcal{P}$, on peut considérer Q comme étant l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} Q: & \mathcal{L}_1(c) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & X & \longrightarrow & E_Q[X] \end{array}$$

Or, pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $|E_Q[X]| \leqslant c_p(X)$, donc :

$$Si \ \lim_{n\to\infty} X_n = X \ dans \ \mathcal{L}_p(c) \ \ alors \ \lim_{n\to\infty} E_Q[|X_n - X|] = 0$$

Donc l'application Q est continue et donc $Q \in (\mathcal{L}_p(c))^\star$.
On peut donc considérer $\mathcal{P}$ comme un sous ensemble de $(\mathcal{L}_p(c))^\star$, muni de la topologie faible étoile. Ainsi, dans la suite, quand nous parlerons de topologie faible sur $\mathcal{P}$, ce sera au sens de la topologie faible étoile définie ci-dessus.
Une propriété de compacité de $\mathcal{P}$ nous servira à plusieurs reprises dans la suite :

Proposition I.27. *Sous l'hypothèse $H(\underline{\mu}, \mu)$, $\mathcal{P}$ est faiblement compact.*

Démonstration.
Commençons par montrer la faible relative compacité de $\mathcal{P} \subset (\mathcal{L}_p(c))^\star$. Ainsi, si on pose $V = \{X \in \mathcal{L}_p(c);\ c(X) \leqslant 1\}$, alors V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_p(c)$. Et, comme $\forall X \in V,\ \forall Q \in \mathcal{P}, |E_Q[X]| \leqslant c(X) \leqslant 1$, on a :

$$\mathcal{P} \subset K = \{\Gamma \in (\mathcal{L}_1(c))^\star;\ |\Gamma(X)| \leqslant 1,\ X \in V\}$$

Et d'après le de Banach Alaoglu, K est un compact pour la topologie faible étoile. Nous pouvons en déduire que $\mathcal{P}$ est faiblement relativement compact pour la topologie faible étoile de $(\mathcal{L}_p(c))^\star$.
Reste donc à voir que $\mathcal{P}$ est faiblement fermé. Pour cela, prenons une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ qui converge faiblement vers $Q \in (\mathcal{L}_p(c))^\star$ et montrons que Q appartient à $\mathcal{P}$.
Ainsi Q est une forme linéaire et, par passage à la limite, comme les Q_n sont positives, Q est également positive.
On peut maintenant appliquer à Q le théorème de Feyel et De La Pradelle que nous avons rappelé en annexe (théorème V.31). On obtient que Q est continue et qu'il existe une mesure positive finie λ qui ne charge pas les ensembles polaires telle que

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(c),\ E_Q(f) = \int_\Omega f(x)\lambda(dx)$$

De plus, comme $E_{Q_n}[\mathbf{1}_\Omega] = 1$, par passage à la limite on obtient $E_Q[\mathbf{1}_\Omega] = 1$. Donc, finalement, Q est une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles polaires.

Montrons, maintenant, que Q est une probabilité martingale orthogonale.
On peut d'abord remarquer par passage à la limite que Q est une mesure positive de masse totale 1, c'est-à-dire une probabilité.
Soient $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ tels que $i \neq j$, et soit $F : \mathbb{R}^{d\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Considérons

$$f = F(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_d})$$

avec $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant s$. Montrons que

$$E_Q[(B_{i,t} - B_{i,s}) f] = 0 \ \ et \ \ E_Q[(B_{i,t}B_{j,t} - B_{i,s}B_{j,s}) f] = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est une probabilité martingale orthogonale donc

$$E_{Q_n}[(B_{i,t} - B_{i,s}) f] = 0 \ \ et \ \ E_{Q_n}[(B_{i,t}B_{j,t} - B_{i,s}B_{j,s}) f] = 0.$$

Comme F est bornée, en utilisant la proposition I.19, on obtient que $(B_{i,t} - B_{i,s}) f$ et $(B_{i,t}B_{j,t} - B_{i,s}B_{j,s}) f$ et donc en passant à la limite quand n tend vers ∞, on a :

$$E_Q[(B_{i,t} - B_{i,s}) f] = 0 \ \ et \ \ E_Q[(B_{i,t}B_{j,t} - B_{i,s}B_{j,s}) f] = 0$$

Donc Q est une probabilité martingale orthogonale.
Ainsi, on a montré que Q est une probabilité martingale qui ne charge pas les ensembles polaires et donc, d'après la proposition I.21, Q appartient à $\mathcal{P}$ et on a le résultat de la proposition.

□

Remarque On pourrait démontrer de la même manière, ce qui est classique, que $\mathcal{P}$ est étroitement fermé. Ce qui implique comme nous avons déjà montré que cet ensemble est étroitement relativement compact, la compacité étroite de $\mathcal{P}$. Puis nous aurions pu en déduire le théorème puisque la convergence dans $(\mathcal{L}_1(c))^\star$ implique la convergence étroite. Mais, nous avons choisi ici de faire une preuve directe du résultat.

5 Théorème de représentation limite dans le cas $p = 1$

Dans cette partie nous nous plaçons dans le cas particulier qui peut sembler le plus naturel : celui où $p = 1$

5.1 Caractérisation du dual de $\mathcal{L}_1(c)$

Dans cette partie, nous cherchons à décrire le dual de $\mathcal{L}_1(c)$. Pour cela nous allons utiliser le théorème rappelé en annexe. C'est pourquoi nous nous intéressons aux convexes héréditaires étroitement compacts de mesures positives sur Ω. Et plus particulièrement au lemme suivant :

Lemme I.28. *L'ensemble*

$$H = \left\{\mu = Z \times P \text{ avec } P \in \mathcal{P} \text{ et } Z \in L^\infty(P) \text{ positive et tel que } \| Z \|_{L^\infty(P)} \leqslant 1\right\}$$

est un convexe héréditaire étroitement compact de mesures positives sur Ω.

Démonstration.
Montrons qu'il s'agit bien d'un ensemble convexe.
Soient $\mu_1 = Z_1 \times P_1$, $\mu_2 = Z_2 \times P_2$ des éléments de H et $\lambda \in [0;1]$. Posons, $P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$ alors on voit facilement que P est une probabilité martingale orthogonale ne chargeant pas les ensembles polaires car P_1 et P_2 vérifient ces propriétés. Donc, d'après la proposition I.21, P appartient à $\mathcal{P}$. De plus, P_1 et P_2 sont clairement absolument continues par rapport à P et nous pouvons en déduire l'existence de fonctions positives $\widetilde{Z}_1$ et $\widetilde{Z}_2$ telles que

$$P_1 = \widetilde{Z}_1 \times P \text{ et } P_2 = \widetilde{Z}_2 \times P$$

d'où

$$\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 = \left(\lambda\widetilde{Z}_1 Z_1 + (1-\lambda)\widetilde{Z}_2 Z_2\right) P$$

De plus,

$$P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 = \left(\lambda\widetilde{Z}_1 + (1-\lambda)\widetilde{Z}_2\right) P$$

Donc

$$\| \lambda\widetilde{Z}_1 + (1-\lambda)\widetilde{Z}_2 \|_{L^\infty(P)} \leqslant 1$$

Nous pouvons finalement en déduire que $\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ appartient à H, puis par suite que H est convexe.

Montrons que H est faiblement compact pour la topologie étroite.
Ainsi, si on pose $V = \{X \in C_b(\Omega)\,;\ \| X \|_\infty \leqslant 1\}$, alors V est un voisinage de 0 dans $C_b(\Omega)$. Et, comme $\forall X \in V,\ \forall Q \in \mathcal{P}, \forall Z \in L^\infty(Q)$ positive et tel que $\| Z \|_{L^\infty(Q)} \leqslant 1, |E_Q[ZX]| \leqslant E_Q[X] \leqslant 1$, on a :

$$H \subset K = \{\Gamma \in (C_b(\Omega))^\star\,;\ |\Gamma(X)| \leqslant 1,\ X \in V\}$$

Et d'après le de Banach Alaoglu, K est un compact pour la topologie étroite. Nous pouvons en déduire que H est relativement compact pour la topologie étroite.

Montrons maintenant que H est étroitement fermé.
Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H qui converge étroitement vers μ. Notons $P_n \in \mathcal{P}$ et $Z_n \in L^\infty(P)$ positif, tel que $\| Z_n \|_{L^\infty(P_n)} \leqslant 1$ et $\mu_n = Z_n \times P_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $f \in C_b(\Omega)$,

$$\mu_n(f) = E_{P_n}[Z_n f] \leqslant E_{P_n}[|f|] \leqslant c(f)$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient que μ est une forme linéaire sur $C_b(\Omega)$, majorée par c. Puis, d'après le théorème de Hanh-Banach, nous pouvons prolonger μ en une forme linéaire majorée par c sur $\mathcal{L}_1(c)$ que nous noterons encore μ.
De plus, μ est une forme linéaire positive car pour tout f positive appartenant à $\mathcal{L}_1(c)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_b(\Omega)$ de fonctions positives qui converge vers f pour la norme c. Puis, comme c majore μ,

$$|\mu(f_n - f)| \leqslant c(f_n - f)$$

D'où, nous obtenons la convergence :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C_b(\Omega)$,

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(f_n) = \mu(f_n)$$

Et, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $\mu_k(f_n) \geqslant 0$ donc $\mu(f) \geqslant 0$ et μ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{L}_1(c)$. Puis, d'après le théorème V.31 de l'annexe, on obtient que μ est une mesure (ne chargeant pas les ensembles polaires).
Nous pouvons maintenant remarquer qu'étant donné que $\mathcal{P}$ est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\widehat{P}$ de $\mathcal{P}$. Alors, pour tout $f \in C_b(\Omega)$ positive,

$$\mu_n(f) = E_{P_n}[Z_n f] \leqslant E_{P_n}[f]$$

Puis en passant à la limite nous en déduisons l'inégalité :

$$\mu(f) \leqslant E_{\widehat{P}}[f]$$

Donc, il existe $\widehat{Z} \in L^\infty\left(\widehat{P}\right)$ positive tel que $\| \widehat{Z} \|_{L^\infty(\widehat{P})} \leqslant 1$ et $\mu = \widehat{Z} \times \widehat{P}$. Ce qui signifie que μ appartient à H et achève notre démonstration.

□

Théorème I.29. *Soit μ une forme linéaire positive, majorée par c_1, alors il existe $P \in \mathcal{P}$ et $Z \in L^\infty(P)$ positif, tel que $\| Z \|_{L^\infty(P)} \leqslant 1$ et $\mu = Z \times P$.*

Démonstration.
Soit μ une forme linéaire positive, majorée par c_1. D'après le lemme précédent, H est une ensemble héréditaire convexe étroitement compact. Donc, d'après le théorème rappelé en annexe, si on pose

$$\widetilde{c} = \sup_{\lambda \in H} \int |f| \, d\lambda$$

on a

$$H = M(\widetilde{c})$$

avec $M(\widetilde{c})$ qui désigne les mesures boréliennes positives majorées par $\widetilde{c}$. De plus, par définition de $\widetilde{c}$ et de H,

$$\widetilde{c}(f) \geqslant \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[|f|] = c_1(f)$$

Nous pouvons en déduire que, comme μ est majorée par c_1, μ est également majorée par $\widetilde{c}$ et par suite que μ appartient à $M(\widetilde{c}) = H$. Ce qui nous donne le résultat du théorème $\square$

Théorème I.30.

$$(\mathcal{L}_1(c))^\star = \left\{\mu = Z \times P \text{ avec } P \in \mathcal{P} \text{ et } Z \in L^\infty(P) \text{ positif, tel que } \| Z \|_{L^\infty(P)} < +\infty\right\}$$

Démonstration.
Soit $\mu \in (\mathcal{L}_1(c))^\star$ alors, comme nous l'avons souligné en annexe, μ est une mesure. Nous pouvons donc l'écrire sous la forme de sa décomposition de Jordan (cf [21] p.115) :

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

avec μ^+ et μ^- qui désignent des mesures positives. Maintenant nous pouvons appliquer le théorème V.31 de l'annexe à ces mesures, on obtient qu'il existe λ^+ et λ^- deux mesures positives qui ne chargent pas les ensembles polaires telles que

$$\forall f \in \mathcal{L}_1(c),\ \mu^+(f) = \int f(x)\,\lambda^+(dx) \text{ et } \mu^-(f) = \int f(x)\,\lambda^-(dx)$$

De plus, μ est une forme linéaire continue donc il existe une constante K telle que

$$\forall f \in \mathcal{L}_1(c),\ |\mu(f)| \leqslant K c_1(f)$$

D'autre part, comme on a choisi la décomposition de Jordan de μ, on a $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ (cf [21] p. 115), donc

$$\forall f \in \mathcal{L}_1(c),\ \mu^+(f) \leqslant K c_1(f) \text{ et } \mu^-(f) \leqslant K c_1(f)$$

Ainsi les mesures $\frac{\mu^+}{K}$ et $\frac{\mu^-}{K}$ sont des mesures positives, majorées par c, nous pouvons appliquer le théorème précédent : on obtient qu'il existe des probabilités P^+ et P^- appartenant à $\mathcal{P}$ et des fonctions positives $Z^+ \in L^\infty(P^+)$ et $Z^- \in L^\infty(P^-)$ telles que

$$\frac{\mu^+}{K} = Z^+ P^+ \text{ et } \frac{\mu^-}{K} = Z^- P^-.$$

Puis, posons

$$P = \frac{P^+ + P^-}{2}$$

Alors, P est un élément de $\mathcal{P}$ et P^+ et P^- sont absolument continues par rapport à cette probabilité donc il existe des fonctions positives Z_1 et Z_2 appartenant à $L^\infty(P)$ telles que

$$P^+ = Z_1 P \text{ et } P^- = Z_2 P^-.$$

De plus, comme

$$P = \frac{P^+ + P^-}{2} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} P$$

On a

$$\| Z_1 + Z_2 \|_{L^\infty(P)} \leqslant 2$$

D'où $Z = KZ^+Z_1 + KZ^-Z_2$ appartient à $L^\infty(P)$ et

$$\mu = \left(KZ^+Z_1 + KZ^-Z_2\right) P = ZP$$

Et finalement, on a l'inclusion

$$(\mathcal{L}_1(c))^\star \subset \left\{\mu = Z \times P \text{ avec } P \in \mathcal{P} \text{ et } Z \in L^\infty(P) \text{ positif, tel que } \| Z \|_{L^\infty(P)} < +\infty\right\}$$

L'autre inclusion étant triviale, on obtient le théorème. □

5.2 Théorèmes de représentation limite

Nous aimerions obtenir un théorème analogue dans notre cadre au théorème de représentation des martingales, en d'autres termes nous voudrions exprimer n'importe quel élément de $\mathcal{L}_1(c)$ en fonction d'une intégrale par rapport à B. Avant cela il nous faut introduire quelques notations.

Notation Notons $\mathcal{L}_1^+(c)$ l'ensemble des fonctions positives appartenant à $\mathcal{L}_1(c)$. Et

$$\mathcal{K} = \left\{\int_0^T h_s dB_s \text{ avec } h \in \mathcal{H}_1^d\right\}$$

Nous pouvons maintenant énoncer les deux théorèmes de représentation limite suivants :

Théorème I.31. *Soit $f \in \mathcal{L}_1(c)$ et $a = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[f]$ alors il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{L}_1^+(c)$ et une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{H}_d^1$ telles que*

$$f = \lim_{n\to\infty} \int_0^T h_s^n dB_s - g_n + a \text{ dans } \mathcal{L}_1(c)$$

Corollaire I.32. *Soit $f \in \mathcal{L}_1(c)$ telle que $E_P[f] = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$, alors il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{H}_1^d$ telle que*

$$f = \lim_{n\to\infty} \int_0^T h_s^n dB_s \text{ dans } \mathcal{L}_1(c)$$

Démonstration du théorème I.31.
Posons $A = \left(\mathcal{K} - \mathcal{L}_1^+(c)\right)$.
Supposons que $f - a \notin \overline{A}^{c_1}$ où $\overline{A}^{c_1}$ désigne l'adhérence de A pour la convergence par rapport à la semi-norme c_1. Alors, d'après le théorème de Hanh-Banach, il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathcal{L}_1(c)$ telle que

$$\phi(f - a) > sup_{g \in \overline{A}^{c_1}} \phi(g) \tag{3}$$

Montrons que cette forme linéaire est positive : soient $g \in \mathcal{L}_1^+(c)$ et $\lambda > 0$ alors $\lambda g \in \mathcal{L}_1^+(c)$ et par conséquent $-\lambda g \in \overline{A}^{c_1}$. Nous pouvons en déduire d'après l'inégalité ci dessus que

$$\phi(f - a) > -\lambda \phi(g).$$

Ceci étant vrai pour tout $\lambda > 0$, nécessairement, on a $\phi(g) \geqslant 0$. Cette propriété est vérifiée pour tout $g \in \mathcal{L}_1^+(c)$ donc ϕ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{L}_1(c)$.
Nous pouvons donc lui appliquer le théorème V.31 rappelé en annexe : il existe une mesure finie λ, ne chargeant pas les ensembles polaires telle que

$$\forall f \in \mathcal{L}_1(c),\ \phi(f) = \int_\Omega f(x)\, d\lambda(x)$$

Posons maintenant

$$\widetilde{P} = \frac{\lambda}{\lambda(\Omega)}$$

alors, $\widetilde{P}$ est une probabilité ne chargeant pas les ensembles polaires, montrons qu'elle appartient à $\mathcal{P}$, pour cela, d'après la Proposition I.21, il reste à montrer qu'il s'agit d'une probabilité martingale.
Soient $h \in \mathcal{H}_d^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda \int_0^T h_s dB_s \in \mathcal{K} \subset \overline{A}^{c_1}$$

par conséquent,

$$\phi(f - a) > \lambda \phi\left(\int_0^T h_s dB_s\right)$$

Ceci étant vrai pour tout λ réel, nous pouvons déduire de l'inégalité ci-dessus que

$$\phi\left(\int_0^T h_s dB_s\right) = 0.$$

Puis, par définition de $\widetilde{P}$, nous obtenons que

$$\forall h \in \mathcal{H}_d^1,\ E_{\widetilde{P}}\left[\int_0^T h_s dB_s\right] = 0.$$

Nous pouvons facilement en déduire que $\widetilde{P}$ est une probabilité martingale. et donc que $\widetilde{P} \in \mathcal{P}$.

Réécrivons maintenant l'équation (3) avec $\widetilde{P}$ et utilisons l'égalité ci-dessus : soit $h \in \mathcal{H}_d^1$, alors $\int_0^T h_s dB_s \in \overline{A}^{c_1}$ et

$$E_{\widetilde{P}}[f - a] > \sup_{g \in \overline{A}^{c_1}} E_{\widetilde{P}}[g] \geqslant E_{\widetilde{P}}\left[\int_0^T h_s dB_s\right] = 0.$$

D'où, en utilisant la définition de a,

$$E_{\widetilde{P}}[f] > a = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[f]$$

Ceci contredit le fait que $\widetilde{P}$ appartient à $\mathcal{P}$. Nous pouvons donc conclure que

$$f - a \in \overline{A}^{c_1}$$

Ce qui achève la démonstration.

□

Démonstration du corollaire I.32.
Soit $f \in \mathcal{L}_1(c)$ telle que $E_P[f] = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$, alors d'après le théorème précédent, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{L}_1^+(c)$ et une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{H}_d^1$ telles que

$$f = \lim_{n\to\infty} \int_0^T h_s^n dB_s - g_n \text{ dans } \mathcal{L}_1(c)$$

Nous pouvons facilement en déduire que

$$\forall P \in \mathcal{P},\ \lim_{n\to\infty} E_P\left[\int_0^T h_s^n dB_s - g_n\right] = E_P[f]$$

De plus, pour tout $P \in \mathcal{P}$, P étant une probabilité martingale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_P\left[\int_0^T h_s^n dB_s\right] = 0$ et par hypothèse $E_P[f] = 0$. La convergence ci-dessus, peut donc s'écrire :

$$\forall P \in \mathcal{P},\ \lim_{n\to\infty} E_P[g_n] = 0.$$

Soit $P \in \mathcal{P}$ et soit $Z \in L^\infty(P)$ alors

$$|E_{ZP}[g_n]| \leqslant E_P[|Z|\,|g_n|] \leqslant \| Z \|_{L^\infty(P)} E_P[g_n]$$

Par conséquent,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall Z \in L^\infty(P),\ \lim_{n\to\infty} E_{ZP}[g_n] = 0$$

Ce qui signifie d'après la caractérisation de $(\mathcal{L}_1(c))^\star$ donnée dans le théorème I.30 que

$$\forall \mu \in (\mathcal{L}_1(c))^\star,\ \lim_{n\to\infty} \mu(g_n) = 0$$

c'est-à-dire, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.
De plus, $\left(\int_0^T h_s^n dB_s - g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement et donc faiblement vers f donc $\left(\int_0^T h_s^n dB_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$

converge faiblement vers f. D'où, nous pouvons en déduire qu'il existe une combinaison linéaire convexe qui converge fortement vers f. C'est-à-dire, il existe une suite $\left(\widetilde{h}_s^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}_d^1$ telle que

$$f = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \widetilde{h}_s^n dB_s \text{ dans } \mathcal{L}_1(c)$$

□

Remarque On aurait aimé obtenir un théorème qui permette d'écrire un élément f de $\mathcal{L}_1(c)$ de capacité nulle comme $\int_0^T h_s dB_s$, mais pour cela, étant donné que l'on a le théorème limite ci-dessus, il faudrait avoir la fermeture de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}_1(c)$. Il est intéressant de remarquer que dans l'annexe de [40], L. Denis et C. Martini montrent que sous certaines hypothèses $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathcal{L}_2(c)$, mais pas dans $\mathcal{L}_1(c)$.

5.3 Quelques exemples de représentations

Dans quelques cas particuliers, nous pouvons mettre en évidence des représentations d'éléments de $\mathcal{L}_1(c)$ en fonction d'une intégrale de $\mathcal{K}$, il s'agit de l'objet de cette partie.

Proposition I.33. *Soit $h \in \mathcal{H}_p^d$ déterministe, posons*

$$c = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right)\right] = c_1\left(\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right)\right)$$

alors, il existe des fonctions $k \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{L}_1^+(c)$ telles que

$$\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right) = c + k - g$$

Démonstration.
Posons,

$$M_T = \exp\left(\int_0^T h_s dB_s - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\langle B\rangle_{i,s}\right)$$

Alors, en appliquant la formule d' Itô, on obtient que

$$M_T = 1 + \int_0^T M_s h_s dB_s$$

par conséquent, en utilisant ceci et l'hypothèse $H\left(\underline{\mu}, \mu\right)$

$$\begin{aligned}
\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right) &= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\langle B\rangle_{i,s}\right) M_T \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\langle B\rangle_{i,s}\right)\left(1 + \int_0^T M_s h_s dB_s\right) \\
&\leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)\left(1 + \int_0^T M_s h_s dB_s\right)
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $P \in \mathcal{P}$, comme P est une probabilité martingale :

$$E_P\left[\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right)\right] \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right)$$

Inversement, d'après le théorème de Daniell-Kolmogorov (voir par exemple, le théorème 31 dans [19]) il existe une probabilité $P_\mu \in \mathcal{P}$ telle que $\langle B_{i,t}\rangle^{P_\mu} = \mu_{i,t}$, pour tout i, t. Alors,

$$\begin{aligned} E_{P_\mu}\left[\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right)\right] &= E_{P_\mu}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\langle B\rangle_{i,s}\right)\left(1 + \int_0^T M_s h_s dB_s\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^T h_{i,s}^2 d\mu_{i,s}\right) = c$$

D'où,

$$exp\left(\int_0^T h_s dB_s\right) \geqslant c\left(1 + \int_0^T M_s h_s dB_s\right)$$

Or, $c\int_0^T M_s h_s dB_s$ apparient à $\mathcal{K}$ donc on a le résultat de la proposition

□

Etudions un deuxième exemple :

Proposition I.34. *Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. Posons*

$$a = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[(B_{i,T})^2\right]$$

alors, il existe des fonctions $k \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{L}_1^+(c)$ telles que

$$(B_{i,T})^2 = c + k - g$$

Démonstration. Appliquons la formule d'Itô :

$$(B_{i,T})^2 = 2\int_0^T B_{i,s} dB_{i,s} + \langle B_i\rangle_t$$

Donc, en utilisant l'hypothèse $H\left(\underline{\mu}, \mu\right)$,

$$\forall P \in \mathcal{P},\ E_P\left[(B_{i,T})^2\right] = E_P\left[\ \langle B_i\rangle_t\right] \leqslant \mu_{i,T}$$

Puis, de même que dans la démonstration précédente, d'après le théorème de Daniell-Kolmogorov, il existe une probabilité $P_\mu \in \mathcal{P}$ telle que $\langle B_i\rangle_T^{P_\mu} = \mu_{i,T}$. Alors

$$E_{P_\mu}\left[\langle B_i\rangle_T\right] = \mu_{i,T}$$

Nous pouvons donc en déduire que

$$a = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P \left[(B_{i,T})^2 \right] = \mu_{i,T}$$

d'où, nous obtenons l'égalité :

$$(B_{i,T})^2 = a + 2 \int_0^T B_{i,s} dB_{i,s} - (\mu_{i,T} - \langle B_i \rangle_T)$$

De plus, clairement, $2 \int_0^T B_{i,s} dB_{i,s} \in \mathcal{K}$ et, d'après l'hypothèse $H\left(\underline{\mu}, \mu\right)$, $(\mu_{i,T} - \langle B_i \rangle_T) \in \mathcal{L}_1^+(c)$. Donc nous obtenons la relation annoncée.

$\square$

Deuxième partie

Fonction d'utilité sur $\mathcal{L}_1(c)$

1 Introduction

L'idée d'introduire des fonctions d'utilité part du constat que l'espérance mathématique échoue a bien décrire le comportement d'un investisseur face à une position financière (ou d'un joueur face à une loterie). En effet, par exemple, un agent averse au risque préférera gagner 1000 euros à coup sûr, que d'avoir une chance sur 100 de gagner 100000 euros alors que l'espérance de gain est la même dans les deux cas. Inversement, un joueur de Loto préfère jouer avec une chance sur 10 millions de gagner 1 millions d'euros que de garder l'euro que lui coûte le billet, alors que l'espérance de gain du jeu est inférieur au prix du billet. Ces exemples de comportements classiques nous montrent que l'espérance ne prend pas en compte les comportements d'aversion au risque ou de prise de risque.
C'est pourquoi, Von Neumann et Morgenstern ont introduit l'utilité espérée. Ils ont montré que sous certaines conditions de préférences de l'investisseur, la fonctionnelle d'utilité d'un actif X se met sous la forme

$$E_Q\left[U\left(X\right)\right]$$

où Q est une probabilité donnée et U une fonction d'utilité croissante et convexe, à valeurs réelles.
Dans ce cadre, le problème de maximisation de l'utilité de la valeur terminale d'un portefeuille a été étudié à plusieurs reprises, notamment par Karatzas et als ([10]) dans le cas d'une filtration brownienne, puis par Kramkov et Schachermayer ([51]) dans un cas plus général (semi-martingales). Dans ces articles, la probabilité réelle Q est supposée connue par l'investisseur, l'incertitude sur le choix du modèle n'est donc pas prise en compte.
Cependant, certaines observations empiriques du comportement des personnes face à l'incertitude, au risque mettent en défaut ce paradigme de l'utilité espérée. Pour tenir compte de ces observations et en particuliers de certains paradoxes mis en évidence par D. Ellsberg (pour plus de détails voir [7]) ou par M. Allais, I. Gilboa et D. Schmeidler (cf [48]) ont proposé une version dite robuste de la fonctionnelle d'utilité qui prend alors la forme :

$$\inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q\left[U\left(X\right)\right] \tag{4}$$

où U une fonction d'utilité croissante et convexe, à valeurs réelles et l'infimum est pris sur toute une classe $\mathcal{P}$ de mesures de probabilité sur l'ensemble des scénarios. En d'autres termes, au lieu de se fixer un seul modèle probabiliste, on se donne un ensemble de modèles dans la classe $\mathcal{P}$, puis on étudie les utilités espérées dans chacun de ces modèles, c'est-à-dire pour chacune des probabilités et on considère enfin le cas le moins favorable parmi les modèles. Cette version robuste permet de prendre en compte l'incertitude du modèle puisqu'on ne considère plus une unique probabilité mais un ensemble de probabilités possibles, c'est-à-dire un ensemble de modèles possibles.
Maintenant, le but d'un investisseur est de maximiser cette fonctionnelle robuste d'utilité sur l'ensemble des portefeuilles possibles issus des stratégies admissibles. Ce genre de problèmes a été étudié à plusieurs reprises, par exemple par M.C. Quenez ([62]), A. Gundel ([49]) ou A. Schied et C.T. Wu ([65]). Mais dans ces différents articles de très fortes hypothèses sont faites sur l'ensemble des probabilités considérées $\mathcal{P}$. Ainsi, M.C. Quenez et A. Gundel supposent que toutes les probabilités de $\mathcal{P}$ (ou dans son adhérence) sont équivalentes à une probabilité de référence donnée. Puis, A. Schied et C.T. Wu améliorent

l'hypothèse et supposent que toutes les probabilités de $\mathcal{P}$ sont absolument continues par rapport à une probabilité de référence donnée. Il est important de remarquer que ces conditions sur $\mathcal{P}$ sont souvent mises en défaut lorsque l'on travaille dans un cadre prenant en compte l'incertitude du modèle. Ainsi, dans le cas du modèle à volatilité incertaine (UVM) présenté dans la première partie, les probabilités considérées sont généralement mutuellement singulières et non dominées (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de probabilité par rapport à laquelle toutes les probabilités de $\mathcal{P}$ sont absolument continues).
Ici, nous partons de l'ensemble des probabilités que nous avons introduit dans la partie précédente comme ensemble des scénarios possibles par extension du modèle à volatilité incertaine. Rappelons qu'alors nos probabilités ne sont pas supposées dominées. Dans ce cadre, nous développons une théorie analogue à celle développé par Schachermayer et Kramkov (cf [51] ou [52]) dans le cas de l'utilité non robuste.

2 Définitions et hypothèses sur la fonction d'utilité

On suppose, comme cela est fait en général (voir [51]), que la fonction d'utilité U est une fonction $[0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, strictement concave, continue et différentiable continûment et qu'elle vérifie les conditions d'Inada :

$$U'(0) = \lim_{x\rightarrow 0} U'(x) = +\infty \quad et \quad U'(\infty) = \lim_{x\rightarrow\infty} U'(x) = 0$$

On suppose également que l'élasticité asymptotique est strictement inférieure à 1, c'est-à-dire que :

$$AE(U) = \limsup_{n\rightarrow\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1$$

De plus, nous supposons que U est bornée, c'est pourquoi nous avons supposé qu'elle était définie en 0 (ce qui n'est pas toujours le cas dans les articles traitant des fonctions d'utilité). Il est, en effet, toujours possible dans ce cas de la prolonger en 0.
Par exemple, on peut choisir comme fonction d'utilité la fonction $U(x) = K.\arctan(x^\gamma/\gamma)$ avec $\gamma \in (0,1]$. Elle vérifie alors les différentes hypothèses énoncées précédemment.
Par la suite, nous utiliserons la fonction conjuguée de U :

$$\forall y > 0,\ V(y) = \sup_{x>0}(U(x) - xy)$$

Dans [51], W.Schachermayer et D. Kramkov rappellent un résultat classique sur ces fonction U et V : le fait que la dérivée de U est la fonction inverse de la dérivée de l'opposé de V que nous noterons I. En d'autres termes :

$$I := -V' = (U')^{-1}$$

Rappelons les notations classiquement utilisées pour décrire le problème dit "auxiliaire", c'est-à-dire à Q fixé. Pour tout $Q \in \mathcal{P}$ et $x \geqslant 0$, notons $\chi_Q(x)$, l'ensemble des processus portefeuille positifs X définis sous Q et tels que

$$X_t = x + \int_0^t h_s\, dB_s,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

où h est prévisible et B-intégrable sous Q (nous rappelons dans le paragraphe suivant la définition de la B-intégrabilité).
De même que dans [51], posons

$$u_Q(x) = \sup_{X \in \chi_Q(x)} E_Q[U(X_T)],$$

la fonction valeur du problème de maximisation d'utilité sous une probabilité Q, puis notons v_Q la fonction duale de u_Q (nous énonçons par la suite le théorème de [51] qui nous permet d'affirmer qu'il s'agit bien de la fonction duale, cf théorème II.1) définie par :

$$v_Q(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}_Q(y)} E_Q\left[V\left(Y_T\right)\right]$$

où

$$\mathcal{Y}_Q(y) = \{Y \geqslant 0;\ Y_0 = y \ et\ XY\ est\ une\ Q - surmartingale\ ,\ \forall X \in \chi_Q(1)\}$$

Puis, pour l'étude du problème robuste, nous pouvons définir la fonction

$$u(x) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} u_Q(x),$$

Nous montrerons qu'il s'agit de la fonction valeur du problème robuste, c'est-à-dire, qu'elle égale au supremum de l'équation 4 sur l'ensemble des portefeuilles de notre modèle.
Définissons également la fonction

$$v(y) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} v_Q(y).$$

Nous montrerons que cette fonction est bien la duale de la fonction u définie ci-dessus.

Remarque Le fait de prendre l'infimum sur les P appartenant à $\mathcal{P}$ correspond à étudier ce qui se passe dans le pire des scénarios possibles, après avoir maximisé l'utilité pour chacun de ces scénarios.

Enfin, pour tout $x \geqslant 0$, notons $\chi(x)$ l'ensemble des processus portefeuille positifs définis quasi partout X tels qu'il existe $h \in \widetilde{\mathcal{H}}_d$ vérifiant

$$X_t = x + \int_0^t h_s\, dB_s,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

Nous verrons, par la suite, qu'il existe un lien entre l'ensemble des processus portefeuilles de notre modèle : $\chi(x)$ et l'ensemble des processus portefeuilles de [51] définis Q-p.s. : $\chi_Q(x)$. Cela nous permettra d'utiliser les résultats de [51] dans notre cadre d'étude.

3 Principaux résultats

3.1 Résultats pour u_Q

W. Schachermayer et D. Kramkov ont développé dans le cas où l'on considère une seule probabilité Q, une théorie duale et l'existence de stratégie d'optimisation qui peuvent s'appliquer ici pour les fonctions u_Q et v_Q.
Rappelons d'abord la topologie qu'ils ont utilisée. Ils utilisent la topologie des semi-martingales, c'est-à-dire celle induite par une semi-norme équivalente à la norme d'Emery (voir par exemple[3] p122) :

$$D^\star(S) = \sum \frac{1}{2^n} \sup \left\{ E_Q \left[(K.S)_n^\star \wedge 1 \right] ;\ |K| \leqslant 1 \right\}$$

où $Y^\star$ désigne la fonction maximale définie par $Y_t^\star = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} |Y_u|$ et K est un processus prévisible, à valeurs réelles.
Mais, comme nous travaillons à horizon fini (T est fixé et fini), cette norme est équivalente à :

$$D_\infty(S) = \sup \left\{ E_Q \left[(K.S)_T^\star \wedge 1 \right] ;\ |K| \leqslant 1 \right\}$$

Dans ce contexte, un processus prévisible H à valeur dans $\mathbb{R}^d$ est dit S-intégrable si $\left(H\mathbf{1}_{\{|H| \leqslant n\}}.S\right)$ est une suite de Cauchy pour la norme définie ci-dessus, et le processus limite est noté $H.S$.
Pour cela, nous devons d'abord remarquer qu'étant donné que nous avons supposé U bornée, V est également bornée et donc, pour tout $y > 0$ et pour tout $Q \in \mathcal{P}$, $v_{\widetilde{Q}}(y) < \infty$.
Maintenant, nous pouvons appliquer les différents résultats de l'article [51] aux fonctions u_Q et v_Q, pour Q quelconque fixé, appartenant à $\mathcal{P}$.
Enonçons dans un premier temps un résultat de dualité :

Théorème II.1. *Les fonctions valeurs u_Q et v_Q sont conjuguées l'une de l'autre, ce qui signifie que*

$$u_Q(x) = \inf_{y>0} \left(v_Q(y) + xy \right),\ x > 0$$

$$v_Q(y) = \sup_{x>0} \left(u_Q(x) - xy \right),\ y > 0$$

De plus, u_Q est continûment différentiable sur $[0; +\infty[$ et v_Q est strictement convexe.

Maintenant, présentons un théorème d'existence de stratégies optimales à la fois pour u_Q et pour v_Q et un lein entre celles-ci.

Théorème II.2.

1. *Il existe un unique $\widehat{X}(x) \in \chi_Q(x)$ tel que*

$$u_Q(x) = \sup_{X \in \chi_Q(x)} E_Q \left[U(X_T) \right] = E_Q \left[U\left(\widehat{X}_T(x) \right) \right]$$

2. *Il existe un unique $\widehat{Y}(y)$ tel que*

$$v_Q(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}_Q(y)} E_Q \left[V(Y_T) \right] = E_Q \left[V\left(\widehat{Y}_T(y) \right) \right]$$

3. *Si, de plus, $y = u_Q(x)$ alors*

$$\widehat{X}_T(x) = I\left(\widehat{Y}_T(y)\right) \text{ et } \widehat{Y}_T(y) = U'\left(\widehat{X}_T(x)\right)$$

Et $\widehat{X}(x)\widehat{Y}(y)$ est une Q-martingale uniformément intégrable.

Le but de cette partie de la thèse est d'obtenir des résultats analogues dans notre cadre non dominé.

3.2 Résultats pour u

Nous pouvons dans notre cadre non dominé montrer le même genre de résultats que ceux énoncés précédemment pour la version robuste de l'utilité. Dans cette partie nous énoncerons les principaux résultats obtenus que nous nous attacherons par la suite à démontrer.

Théorème II.3. *Sous les hypothèses présentées précédemment, nous obtenons que :*

1. *La fonction valeur u vérifie pour tout $x > 0$:*

$$u(x) = \sup_{X\in\chi(x)} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{X\in\chi(x)} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]$$

2. *Les fonctions valeurs u et v sont conjuguées, c'est-à-dire,*

$$u(x) = \inf_{y>0}\left(v(y) + xy\right) \text{ et } v(y) = \sup_{x>0}\left(u(x) - xy\right)$$

L'autre résultat que nous avons obtenu sur les fonctions valeurs est sur l'existence de stratégies d'optimisation. Le théorème que nous obtenons généralise le résultat de [65] au cas où l'ensemble de probabilités considéré est non dominé. Ainsi, on obtient également, dans notre cadre non dominé, l'existence d'une probabilité $\widehat{Q}$ dite "moins favorable", dans le sens que le problème robuste est équivalent au problème standard sous cette probabilité $\widehat{Q}$.

Théorème II.4. *Soit $x_0 > 0$. Sous les hypothèses présentées précédemment, il existe une probabilité $\widehat{Q} \in \mathcal{P}$ et il existe des processus $\widehat{X} \in \chi_{\widehat{Q}}$ et $\widehat{Y} \in \mathcal{Y}_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$ où $\widehat{y} = u'_{\widehat{Q}}(x_0)$ tels que*

1. $u(x_0) = u_{\widehat{Q}}(x_0) = E_{\widehat{Q}}\left[U\left(\widehat{X}\right)\right]$
2. $v(\widehat{y}) = u(x_0) - \widehat{y}x_0$
3. $v(\widehat{y}) = v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = E_{\widehat{Q}}\left[\widehat{Y}\right]$
4. $\widehat{X}_T(x) = I\left(\widehat{Y}_T(y)\right)$ *et* $\widehat{Y}_T(y) = U'\left(\widehat{X}_T(x)\right)$ $\widehat{Q}-p.s.$, *et de plus $\widehat{X}(x)\widehat{Y}(y)$ est une $\widehat{Q}$-martingale uniformément intégrable.*

Les démonstrations de ces deux théorèmes font l'objet du reste de cette partie.

4 Un théorème de densité et application

La première étape pour démontrer ces résultats est de montrer un lien entre l'ensemble $\chi_Q(x)$ des processus portefeuille définis sous Q et l'ensemble $\chi(x)$ des processus portefeuille définis quasi-partout. Pour cela, nous introduisons un ensemble intermédiaire :

$$\chi_e(x) = \left\{ x \exp\left(\int_0^T \alpha_s dB_s - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^T \alpha_{i,s}^2 d < B_i >_s \right) ; \alpha \in \mathcal{H}_e^d \right\}$$

On peut maintenant énoncer la propriété de densité suivante :

Proposition II.5. *Soit $Q \in \mathcal{P}$,*

$$\chi_Q(x) \subset \overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)} \subset \overline{\chi(x)}^{L_0(Q)}$$

Pour prouver cette propriété, nous montrons d'abord que

Lemme II.6. *Soit $X_T = x + \int_0^T h_s dB_s$ un élément de $\chi_Q(x)$. Supposons qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que $X_T \geqslant \beta$ $Q-a.e.$. Alors, il existe une suite $(X_T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\chi_Q(x)$ qui vérifie*

$$X_T^n = x + \int_0^T h_s^n dB_s,$$

avec $|h^n| \leqslant n$, $x + \int_0^t h_s^n dB_s \geqslant \frac{\beta}{2}$, pour tout $t \in [0,T]$, et telle que :

$$\lim_{n\to\infty} X_T^n = X_T \text{ pour la convergence en } Q\text{-probabilité}$$

Démonstration.
Soit $X = x + \int_0^T h_s dB_s \in \chi_Q(x)$ tel que $X \geqslant \beta > 0$ $Q-p.s.$.
Alors h est prévisible et B-intégrable, c'est-à-dire (voir [3] p122 ou le paragraphe sur les résultats de u_Q) que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T h_s \mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}} dB_s = \int_0^T h_s dB_s$$

pour la norme D définie dans [3] p122. Ceci implique, comme nous l'avons déjà remarqué, dans notre cas à horizon fini, la convergence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|K|\leqslant 1} E_Q \left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} | \int_0^t K_s \left(h_s \mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}} - h_s \right) dB_s | \wedge 1 \right] = 0$$

<u>Etape 1</u> : Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} | \int_0^t \left(h_s \mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}} - h_s \right) dB_s| = 0$ *dans* $L^0(Q)$.
Remarquons d'abord que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\frac{1}{2} \min(1,x) \leqslant \frac{x}{1+x} \leqslant \min(1,x)$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} & E_Q\left[\frac{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|}{1+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|}\right] \\ \leqslant\ & E_Q\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|\wedge 1\right]\leqslant\epsilon \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\delta > 0$,

$$E_Q\left[\frac{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|}{1+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|}\mathbf{1}_{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t\left(h_s\mathbf{1}_{|h_s|\leqslant n}-h_s\right)dB_s|>\delta}\right]\leqslant\epsilon$$

Puis, en utilisant la croissance de l'application : $x \to \frac{x}{x+1}$, on obtient :

$$\frac{\delta}{\delta+1}Q\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|>\delta\right)\leqslant\epsilon$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|=0 \quad \text{pour la convergence en Q-probabilité}$$

<u>Etape 2</u> : montrer l'existence de la suite h_n du théorème.
Soit $0 < \epsilon < \frac{\beta}{2}$ et soit $\eta > 0$, alors, d'après l'étape 1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$,

$$Q\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|>\epsilon\right)\leqslant\eta$$

Soit $n > n_0$, posons

$$\tau=\inf_{t\geqslant 0}\left\{x+\int_0^t h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}<\frac{\beta}{2}\right\}\wedge T$$

et

$$h_s^n = h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n, s<\tau\}}$$

Nous pouvons alors remarquer que, comme on a choisit $\epsilon < \frac{\beta}{2}$:

$$\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|\leqslant\epsilon\right\}\subset\{\tau=T\}$$

Or, sur l'ensemble $\{\tau = T\}$, $h_s^n = h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}$ donc

$$\begin{aligned} \left\{|\int_0^T (h_s-h_s^n)\,dB_s|>\epsilon\right\} &\subset \left\{\int_0^T \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|>\epsilon\right\}\cup\{\tau\neq T\} \\ &\subset \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t \left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|>\epsilon\right\} \end{aligned}$$

car les deux ensembles ci dessus sont inclus dans $\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t\left(h_s\mathbf{1}_{\{|h_s|\leqslant n\}}-h_s\right)dB_s|>\epsilon\right\}$
Ainsi, nous avons montré que

$$\forall n>n_0,\quad Q\left(|\int_0^T(h_s-h_s^n)\,dB_s|>\epsilon\right)\leqslant\eta$$

Par conséquent, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie toutes les conditions du lemme et la preuve est complète.

□

Le lemme suivant est clair :

Lemme II.7. *Pour tout processus h prévisible et borné, il existe une suite $(h^n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}_e^d$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T h_s^n dB_s=\int_0^T h_s dB_s\quad dans\ L^0(Q)$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^d\int_0^T\left(h_{i,s}^n\right)^2 d<B_i>_s=\sum_{i=1}^d\int_0^T\left(h_{i,s}\right)^2 d<B_i>_s\quad dansL^0(Q)$$

Démonstration de la proposition II.5.
Nous avons divisé la démonstration en plusieurs étapes
Etape 1 : Montrons que $\chi_e(x)\subset\chi(x)$.
Soit $\alpha\in\mathcal{H}_e^d$, posons pour tout $t\in[0,T]$

$$X_t=x\exp\left(\int_0^t\alpha_s dB_s-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\int_0^t\alpha_{i,s}^2 d<B_i>_s\right)$$

et

$$Y_t=\int_0^t\alpha_s dB_s-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\int_0^t\alpha_{i,s}^2 d<B_i>_s\ .$$

Etant donné que α appartient à $\mathcal{H}_e^d$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(\int_0^t\alpha_s dB_s\right)^n$ et $\left(\sum_{i=1}^d\int_0^t\alpha_{i,s}^2 d<B_i>_s\right)^n$ appartiennent à $\mathcal{L}_1(c)$ (d'après la proposition I.19). De plus,

$$c\left((Y_t)^n\right)\leqslant 2^{n-1}\left\{c\left(\left(\int_0^t\alpha_s dB_s\right)^n\right)+c\left(\left(\sum_{i=1}^d\int_0^t\alpha_{i,s}^2 d<B_i>_s\right)^n\right)\right\}$$

Puis en appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundi, il existe une constante C_n que l'on peut prendre égale à $4n$ (cf théorème 92 chapitre VII de [5]) telle que

$$\leqslant 2^{n-1}\left(C_n c\left(\left(\sum_{i=1}^d\int_0^T\alpha_{i,s}^2 d<B_i>_s\right)^{\frac{n}{2}}\right)+c\left(\left(\sum_{i=1}^d\int_0^T\alpha_{i,s}^2 d<B_i>_s\right)^n\right)\right)$$

Puis, comme α est borné, que B vérifie $H\left(\underline{\mu},\mu\right)$ et que les mesures μ_i sont bornées et, il existe une constante K telle que :

$$\leqslant 2^{n-1}nK^n$$

Or, $\mathcal{L}_1(c)$ est un espace de Banach, donc, d'après l'inégalité précédente,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_t^n}{n!} := \exp\left(Y_t\right)$$

est une série convergente et appartient à $\mathcal{L}_1(c)$. De la même manière, on peut montrer qu'il existe une constante C telle que $c\left(\exp\left(2Y_t\right)\right) < C$ et alors $c\left(X_t^2\right) < x^2C$ ce qui permet d'affirmer que X appartient à $\mathcal{H}_i$ forall $i \in \{1,\ldots,d\}$. En effet, soit $i \in \{1,\ldots,d\}$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}_e$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T c\left(\left(X_s - h_{s,n}\right)^2\right)d\mu_{i,s} = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}\| X - h_n \|_{\mathcal{H}_i}^2 &\leqslant \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(\int_0^T \left(X_s - h_{s,n}\right)^2 d\mu_{i,s}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &\leqslant \int_0^T \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(X_s - h_{s,n}\right)^2\right]d\mu_{i,s}\end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n\to\infty} h_n = X$ dans $\mathcal{H}_i$ et $X \in \mathcal{H}_i$.
Puis, nous appliquons la formule d'Itô à $\exp(Y_T)$, sous chaque probabilité $P \in \mathcal{P}$, ce qui nous donne :

$$X_T = x + \int_0^T x\alpha_s X_s dB_s$$

Et, comme $X \in \mathcal{H}_i$, il est clair que $x\alpha X \in \widetilde{\mathcal{H}}_d$ et $X \in \chi(x)$.
<u>Etape 2</u> : Montrons que si $X \in \chi_Q(x)$ et $X \geqslant \beta$ Q-p.s. où β est une constante positive, alors $X_T \in \overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)}$.
Soit $X \in \chi_Q(x)$ telle que $X \geqslant \beta\ Q-p.s.$, alors, $X_T = x + \int_0^T h_s dB_s$ où h est B-intégrable et prévisible.
Soient $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis dans le lemme II.6. Appliquons, maintenant, la formule d' Itô à $\ln(X^n)$:

$$X_T^n = x\exp\left(\int_0^T \alpha_s^n dB_s - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\int_0^T \left(\alpha_{i,s}^n\right)^2 d < B_i >_s\right)$$

avec $\alpha_s^n = \frac{h_s^n}{X_s^n}$ vérifiant $|\alpha_s^n| \leqslant \frac{2n}{\beta}$. Comme α^n est borné, d'après le lemme II.7, il existe une suite $\left(\widetilde{h}^{n,p}\right)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_e^d$ telle que :

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^T \widetilde{h}_s^{n,p} dB_s = \int_0^T \alpha_s^n dB_s \ \text{ dans } L^0\left(Q\right)$$

et

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{i=1}^{d}\int_0^T\left(\widetilde{h}_{i,s}^{n,p}\right)^2 d<B_i>_s=\sum_{i=1}^{d}\int_0^T\left(\alpha_{i,s}^{n}\right)^2 d<B_i>_s \quad \text{dans } L^0(Q)$$

Posons, maintenant :

$$\widetilde{X}_T^{n,p}=x\exp\left(\int_0^T\widetilde{h}_s^{n,p}dB_s-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^T\left(\widetilde{h}_{i,s}^{n,p}\right)^2 d<B_i>_s\right)$$

alors

$$\lim_{p\to\infty}\widetilde{X}_T^{n,p}=X_T^n \ \text{ dans } L^0(Q)$$

Par conséquent,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ X_T^n\in\overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)}$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty}X_T^n=X_T \text{ dans } L_0(Q).$$

Nous pouvons en déduire la relation,

$$X_T\in\overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)}$$

<u>Etape 3</u> : Montrons que $\chi_Q(x)\subset\overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)}$

Soit $X\in\chi_Q(x)$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $X_n=X+\frac{1}{n}\in\overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)}$, d'après l'étape 2. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X \quad Q-p.s$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X \ \text{ dans } L_0(Q)$$

Enfin, nous obtenons que

$$X\in\overline{\chi_e(x)}^{L_0(Q)}$$

On peut maintenant facilement conclure que l'on a le résultat du théorème.

□

Cette propriété de densité nous permet de remplacer dans l'expression de u, l'ensemble des portefeuilles définis Q-p.s. $\chi_Q(x)$ par l'ensemble des portefeuilles définis quasi-partout $\chi(x)$, en d'autres termes, on obtient la proposition suivante :

Proposition II.8.

$$\sup_{X\in\chi_Q(x)}E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]=\sup_{X\in\chi(x)}E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]$$

Démonstration.
Pour montrer cela, il suffit de montrer que :

$$\forall X \in \chi_Q(x),\ \exists\, (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \chi(x) \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} E_Q\left[U\left(X_T^n\right)\right] = E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]$$

Soit $X \in \chi_Q(x)$, alors, comme $\overline{\chi(x)}^{L_0(Q)} = \chi_Q(x)$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \chi(x)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ pour la convergence en Q-probabilité}$$

Donc il existe une sous-suite $\left(X_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} X_{\phi(n)} = X \quad Q - p.s.$$

Or U est continue, donc on a :

$$\lim_{n\to\infty} U\left(X_{\phi(n)}\right) = U\left(X\right) \quad Q - p.s.$$

Or U est bornée, donc par convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to\infty} E_Q\left[U\left(X_{\phi(n)}\right)\right] = E_Q\left[U\left(X\right)\right] \quad Q - p.s.$$

Finalement, on obtient le résultat de la proposition.

□

5 Théorie duale

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème II.3 que nous divisons en plusieurs propositions et lemmes.

5.1 Théorème de mini-max

Pour démontrer les résultats de cette partie, nous utiliserons le théorème du mini-max suivant qui apparaît dans [1].

Théorème II.9. *Soit M un sous espace convexe compact, N un sous espace convexe et $f : M \times N \to \mathbb{R}$ tel que :*
– $\forall y \in N$, $x \to f(x,y)$ est convexe et s.c.i.
– $\forall x \in M$, $y \to f(x,y)$ est concave.
alors il existe $\bar{x} \in M$ tel que

$$\sup_{y\in N} f(\bar{x}, y) = \sup_{y\in N} \inf_{x\in M} f(x,y)$$

et donc

$$\sup_{y\in N} \inf_{x\in M} f(x,y) = \inf_{x\in M} \sup_{y\in N} f(x,y)$$

A l'aide de ce théorème, on peut montrer le théorème du mini-max pour les fonctions d'utilité suivant :

Proposition II.10. *Il existe une probabilité $\widehat{Q} \in \mathcal{P}$ telle que*

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup_{X\in\chi(x)} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{X\in\chi(x)} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] \\ &= \sup_{X\in\chi_{\widehat{Q}}(x)} E_{\widehat{Q}}\left[U\left(X_T\right)\right] = u_{\widehat{Q}}(x) \end{aligned}$$

Remarque Ce théorème nous donne que la fonction u est bien la fonction valeur du problème robuste, c'est-à-dire, qu'elle réalise le supremum sur l'ensemble $\chi(x)$ des portefeuilles acceptables pour notre modèle de la fonctionnelle robuste d'utilité définie par la formule 4.
Il nous dit également que tout se passe comme si on travaillait sous la probabilité la pire $\widehat{Q}$, c'est-à-dire celle qui réalise le minimum sur $\mathcal{P}$ des fonctions valeur $u_Q(x)$.

Démonstration de la proposition II.10.
D'après la proposition II.8, on obtient que

$$u(x) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{X\in\chi_Q(x)} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{X\in\chi(x)} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]$$

On peut maintenant appliquer le théorème II.9 (mini-max) rappelé précédemment à la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}\times\chi(x) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (Q,X) & \longrightarrow & E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] \end{array}$$

où $\mathcal{P}$ est muni de la topologie faible étoile.
Pour cela montrons que les hypothèses du théorème du mini-max sont vérifiée. D'abord, on peut remarquer que $\chi(x)$ est convexe et que, d'après la proposition I.27, $\mathcal{P}$ est convexe et compacte pour la topologie faible étoile.
Puis, d'après la concavité de U, pour tout $Q \in \mathcal{P}$, $X \longrightarrow E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]$ est concave. Enfin, pour tout $X \in \chi(x)$, comme U est bornée, $U\left(X\right) \in \mathcal{L}_1(c)$ et donc, par définition de la convergence dans $(\mathcal{L}_1(c))^\star$, si on considère une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Q dans $(\mathcal{L}_1(c))^\star$ alors

$$\lim_{n\to\infty} E_{Q_n}\left[U\left(X\right)\right] = E_Q\left[U\left(X\right)\right]$$

Et donc $Q \longrightarrow E_Q\left[U\left(X_T\right)\right]$ est continue sur $\mathcal{P}$. La convexité de cette fonction est évidente.
Finalement, nous pouvons appliquer le théorème II.9, et nous obtenons qu'il existe une probabilité $\widehat{Q} \in \mathcal{P}$ telle que :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup_{X\in\chi(x)} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{X\in\chi(x)} E_Q\left[U\left(X_T\right)\right] \\ &= \sup_{X\in\chi(x)} E_{\widehat{Q}}\left[U\left(X_T\right)\right] \end{aligned}$$

Puis, en utilisant de nouveau la propositionII.8, on obtient que

$$\sup_{X\in\chi(x)} E_{\widehat{Q}}\left[U\left(X_T\right)\right] = \sup_{X\in\chi_{\widehat{Q}}(x)} E_{\widehat{Q}}\left[U\left(X_T\right)\right] = u_{\widehat{Q}}(x)$$

En combinant ces deux égalités on obtient le théorème de mini-max annoncé.

□

5.2 La fonction duale

Nous divisons la partie 2 du théorème II.3 en deux lemmes qui nous permettront d'affirmer que les fonctions u et v sont bien duales l'une de l'autre. Pour cela nous utiliserons des résultats classiques d'analyse convexe que l'on trouve par exemple dans [67].

Lemme II.11. *Soit $y > 0$.*

$$v(y) = \sup_{x>0} (u(x) - xy)$$

Démonstration.
D'après le théorème II.1,

$$\forall Q \in \mathcal{P},\ v_Q(y) = \sup_{x>0} (u_Q(x) - xy)$$

Donc

$$v(y) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{x>0} (u_Q(x) - xy)$$

Nous voulons, de nouveau, appliquer le théorème II.9. Pour cela, remarquons d'abord que pour tout $x > 0$, l'application $Q \in \mathcal{P} \to u_Q(x)$ est convexe et s.c.i. comme supremum de fonctions s.c.i.(cf démonstration de la proposition II.10). De plus, on montre facilement que l'application $x \longrightarrow u_Q(x) - xy$ est concave. Donc, nous pouvons appliquer le théorème II.9 à la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+^\star & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (Q, x) & \longrightarrow & u_Q(x) - xy \end{array}$$

Et, nous obtenons que :

$$v\,(y) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{x>0} (u_Q\,(x) - xy) = \sup_{x>0} \inf_{Q\in\mathcal{P}} (u_Q\,(x) - xy) = \sup_{x>0} (u\,(x) - xy)$$

□

Lemme II.12.

$$u(x) = \inf_{y>0} (v(y) + xy)$$

Démonstration.
D'abord, nous étendons la fonction u sur $\mathbb{R}$, en une fonction $\bar{u}$, en posant $\bar{u}\,(x) = -\infty \ \ si\ x < 0$.
Alors, $-\bar{u}$ est une fonction convexe et propre, et nous pouvons appliquer le théorème 12.2. p.104 de [67] :

$$(-\bar{u})^{\star\star} = -\bar{u}$$

Où, pour toute fonction convexe f, $f^\star$ désigne sa fonction conjuguée. Nous pouvons facilement montré que :
– si y<0, alors $(-\bar{u})^\star\,(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (\bar{u}\,(x) + xy) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (u\,(x) + xy) = v\,(-y)$
– si y>0, alors $(-\bar{u})^\star\,(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (\bar{u}\,(x) + xy) = \sup_{x>0} (u\,(x) + xy) = +\infty$

Donc

$$-\left(-\bar{u}\right)^{\star\star}(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\left(\left(-\bar{u}\right)^{\star}(y) - xy\right) = \inf_{y<0}\left(\left(-\bar{u}\right)^{\star}(y) - xy\right)$$
$$= \inf_{y>0}\left(\left(-\bar{u}\right)^{\star}(-y) + xy\right) = \inf_{y>0}\left(v(y) + xy\right)$$

Donc, nous obtenons finalement que :

$$u(x) = \inf_{y>0}\left(v(y) + xy\right)$$

□

6 Existence de stratégies d'optimisation

Le but de cette partie est de démontrer le théorème II.4. Pour cela nous démontrerons quelques lemmes qui implique les résultats du théorème.

Lemme II.13. *Soit $x_0 > 0$, alors il existe une probabilité $\widehat{Q} \in \mathcal{P}$ et un processus $\widehat{X} \in \chi_{\widehat{Q}}(x_0)$ tels que*

$$u(x_0) = u_{\widehat{Q}}(x_0) = E_{\widehat{Q}}\left[U\left(\widehat{X}\right)\right]$$

De plus, u est strictement croissante.

Démonstration.
D'après le théorème de mini-max que nous avons démontré (proposition II.10), on sait qu'il existe une probabilité $\widehat{Q} \in \mathcal{P}$ telle que :

$$u(x_0) = u_{\widehat{Q}}(x_0)$$

Sous $\widehat{Q}$, nous pouvons appliquer le (1) du théorème II.2 que nous avons rappelé précédemment et nous obtenons l'existence d'un processus $\widehat{X} \in \chi_{\widehat{Q}}(x)$ tel que

$$u_{\widehat{Q}}(x_0) = \sup_{X\in\chi_{\widehat{Q}}(x_0)} E_{\widehat{Q}}\left[U\left(X_T\right)\right] = E_{\widehat{Q}}\left[U\left(\widehat{X}_T\right)\right]$$

Ce qui nous donne la première partie du lemme.
Etudions maintenant la croissance de u. Soit $\epsilon > 0$, comme U est strictement croissante, $u_{\widehat{Q}}$ est également strictement croissante et :

$$\begin{aligned} u(x_0) - u(x_0 - \epsilon) &= u_{\widehat{Q}}(x_0) - u(x_0 - \epsilon) \\ &= u_{\widehat{Q}}(x_0) - inf_{Q\in\mathcal{P}} u_Q(x_0 - \epsilon) \\ &\geqslant u_{\widehat{Q}}(x_0) - u_{\widehat{Q}}(x_0 - \epsilon) > 0 \end{aligned}$$

Donc, u est strictement croissante et la preuve est complète.

□

Lemme II.14. *Soit $x_0 > 0$, posons $\widehat{y} = u'_{\widehat{Q}}(x_0)$ où $\widehat{Q}$ est la probabilité du lemme II.13, alors*

$$u'_+(x_0) \leqslant \widehat{y} \leqslant u'_-(x_0)$$

Démonstration.
D'abord, d'après le théorème II.3 (de [51]) que nous avons rappelé précédemment, on sait que $u_{\widehat{Q}}$ est différentiable. Puis par concavité de U, $u_{\widehat{Q}}$ est également concave et donc la fonction $x \longrightarrow \frac{u_{\widehat{Q}}(x)-u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x-x_0}$ est décroissante. ce qui nous donne :

– si $0 < x_1 < x_0$ alors $\widehat{y} = u'_{\widehat{Q}}(x_0) \leqslant \dfrac{u_{\widehat{Q}}(x_1) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_1 - x_0}$

– si $x_0 < x_2$ alors $\widehat{y} = u'_{\widehat{Q}}(x_0) \geqslant \dfrac{u_{\widehat{Q}}(x_2) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_2 - x_0}$

De plus,

$$u_{\widehat{Q}}(x_1) \geqslant u(x_1) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} u_Q(x_1) \text{ et } u_{\widehat{Q}}(x_2) \geqslant u(x_2)$$

Donc, pour tout x_1, x_2 tel que $0 < x_1 < x_0 < x_2$,

$$u'_{\widehat{Q}}(x_0) \leqslant \frac{u_{\widehat{Q}}(x_1) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{u(x_1) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$u'_{\widehat{Q}}(x_0) \geqslant \frac{u_{\widehat{Q}}(x_2) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_2 - x_0} \geqslant \frac{u(x_2) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_2 - x_0}$$

Maintenant, en passant à la limite quand $x_1 \to x_0$, et quand $x_2 \to x_0$, on obtient :

$$u'_+(x_0) \leqslant \widehat{y} \leqslant u'_-(x_0)$$

□

Lemme II.15. *Soient $x_0 > 0$, $\widehat{Q}$ la probabilité du lemme II.13 et $\widehat{y}$ le réel du lemme II.14, alors*

$$v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = v(\widehat{y}) = u(x_0) - \widehat{y}x_0$$

Démonstration.
On a vu dans la démonstration du lemme précédent que

– si $0 < x_1 < x_0$ alors $\widehat{y} \leqslant \dfrac{u_{\widehat{Q}}(x_1) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_1 - x_0}$

– si $x_0 < x_2$ alors $\widehat{y} \geqslant \dfrac{u_{\widehat{Q}}(x_2) - u_{\widehat{Q}}(x_0)}{x_2 - x_0}$

Donc, on obtient que pour tout $x > 0$,

$$u_{\widehat{Q}}(x) - \widehat{y}x \leqslant u_{\widehat{Q}}(x_0) - \widehat{y}x_0$$

Or,

$$v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = \sup_{x>0} \left(u_{\widehat{Q}}(x) - \widehat{y}x \right) \leqslant u_{\widehat{Q}}(x_0) - \widehat{y}x_0$$

D'où, nous déduisons que

$$v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = u_{\widehat{Q}}(x_0) - \widehat{y}x_0$$

Montrons maintenant que u est concave. Soient $s, t > 0$ et $\lambda \in [0;1]$, alors comme $u_{\widehat{Q}}$ est concave, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) &= \inf_{Q\in\mathcal{P}} u_Q(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \\ &\geqslant \inf_{Q\in\mathcal{P}} (\lambda u_Q(x_0) + (1-\lambda)u_Q(x_1)) \\ &\geqslant \lambda \inf_{Q\in\mathcal{P}} u_Q(x_0) + (1-\lambda)\inf_{Q\in\mathcal{P}} u_Q(x_1) \\ &\geqslant \lambda u(x_0) + (1-\lambda)u(x_1) \end{aligned}$$

Donc u est concave. Par conséquent la fonction $x \longrightarrow \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ est décroissante et de même que pour $u_{\widehat{Q}}$ dans la démonstration du lemme précédent, on obtient que

– si $0 < x_1 < x_0$ alors $u'_-(x_0) \leqslant \dfrac{u(x_1)-u(x_0)}{x_1-x_0}$

– si $x_0 < x_2$ alors $u'_+(x_0) \geqslant \dfrac{u(x_2)-u(x_0)}{x_2-x_0}$

Or, d'après le lemme II.14, $u'_-(x_0) \geqslant \widehat{y}$ donc si $0 < x_1 < x_0$, $u(x_1) - \widehat{y}x_1 \leqslant u(x_0) - \widehat{y}x_0$.
Et, d'après le lemme II.14, $u'_+(x_0) \leqslant \widehat{y}$ donc si $x_0 < x_2$, $u(x_2) - \widehat{y}x_2 \leqslant u(x_0) - \widehat{y}x_0$.
Finalement,

$$\forall x > 0, \quad u(x) - \widehat{y}x \leqslant u(x_0) - \widehat{y}x_0$$

donc,

$$v(\widehat{y}) = \sup_{x>0}(u(x) - \widehat{y}x) \leqslant u(x_0) - \widehat{y}x_0$$

Ainsi, nous avons l'égalité suivante :

$$v(\widehat{y}) = u(x_0) - \widehat{y}x_0$$

Et nous obtenons le résultat du lemme.

□

Lemme II.16. *Soient $x_0 > 0$, $\widehat{Q}$ la probabilité du lemme II.13 et $\widehat{y}$ le réel du lemme II.14, alors il existe un processus $\widehat{Y} \in \mathcal{Y}_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$ tel que*

$$v(\widehat{y}) = v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = E_{\widehat{Q}}\left[V\left(\widehat{Y}\right)\right]$$

De plus,

$$\widehat{X}_T(x) = I\left(\widehat{Y}_T(y)\right) \text{ et } \widehat{Y}_T(y) = U'\left(\widehat{X}_T(x)\right) \quad \widehat{Q} - p.s.$$

et $\widehat{X}(x)\widehat{Y}(y)$ est une $\widehat{Q}$-martingale uniformément intégrable.

Démonstration. On a vu dans le lemme précédent que $v(\widehat{y}) = v_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$.
Maintenant, nous pouvons appliquer le point (2) théorème II.2 sous la probabilité $\widehat{Q}$:

$$\exists! \widehat{Y} \in \mathcal{Y}_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) \quad \text{tel que} \quad v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = E_{\widehat{Q}}\left[V\left(\widehat{Y}\right)\right]$$

De plus, comme $u_{\widehat{Q}}(x_0) = E_{\widehat{Q}}\left[U\left(\widehat{X}\right)\right]$ et $\widehat{y} = u'_{\widehat{Q}}(x_0)$, on peut appliquer le point (3) du théorème II.2 sous la probabilité $\widehat{Q}$:

$$\widehat{X}_T(x) = I\left(\widehat{Y}_T(y)\right) \text{ et } \widehat{Y}_T(y) = U'\left(\widehat{X}_T(x)\right) \quad \widehat{Q} - p.s.$$

et $\widehat{X}(x)\widehat{Y}(y)$ est une $\widehat{Q}$-martingale uniformément intégrable.
Nous obtenons donc le résultat du lemme ce qui achève la démonstration du théorème II.4.

□

Troisième partie

Mesure de risque définie sur $\mathcal{L}_p(c)$

1 Introduction

Un des enjeux majeurs de la finance moderne est d'avoir une bonne connaissance du risque pris lorsque l'on détient une position financière ou un ensemble de positions financières. Il existe plusieurs raisons à cela, d'abord du point de vue de la banque, une meilleure connaissance du risque permet de limiter les pertes, d'augmenter la rentabilité et permet également d'aider à la prise de décision. D'autre part, du point du vue des actionnaires de la banque, des régulateurs internationaux, des outils permettant de calculer le risque permettent de contrôler les positions des banques et de leur imposer des prises de risque modérées.
En effet, un certain nombre de faillites retentissantes ont poussé la Banque des règlements internationaux et les différents régulateurs nationaux des institutions financières à adopter des règles de calcul minimum pour protéger le système financier international. Ils imposent aux banques de posséder des réserves conséquentes pour couvrir les risques pris et faire face à l'imprévu. Pour cela, les régulateurs ont dû imposer la mise en place d'indicateurs de risques, comme la "Value at Risk" (souvent notée VaR). Il s'agit de la méthode la plus couramment utilisée pour mesurer le risque de marché, elle donne la perte maximale observable sur un portefeuille avec une probabilité donnée sur un horizon de temps donné. Cependant, elle n'est pas pleinement satisfaisante, en effet, les premiers reproches que l'on peut lui faire sont qu'elle est insensible à l'ampleur des pertes au-delà du seuil fixé et qu'elle ne diminue pas nécessairement lorsque l'on diversifie le portefeuille. Il existe d'autres mesures de risques ayant des propriétés particulières de convexité ou de cohérence, comme la "Conditionnal Value at Risk" (souvent noté CVaR), qui prennent en compte ces différents aspects du risque auxquels la VaR est insensible.
Cette notion de mesure de risque a été introduite par P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber et D. Heath dans [15] et dans [14]. Ils ont mis en évidence une série d'axiomes caractérisant une mesure de risque cohérente. Puis, Delbaen (voir par exemple [37]) a étudié en détails ce type de mesure de risque pour montrer qu'elle se mettait nécessairement sous la forme

$$\rho\left(X\right) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[-X]$$

où $\mathcal{Q}$ est un ensemble de mesures finiment additives.
Puis, H. Föllmer et A. Schied, dans [7] ou dans [6], ont en quelque sorte généralisé ce type de représentation pour des mesures de risque plus générales, dite convexes. Ils ont montré que de telles mesures de risque se mettent sous la forme :

$$\rho\left(X\right) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E[-X] - \alpha\left(Q\right)$$

où α est une fonction de pénalité et $\mathcal{Q}$ un ensemble de mesures finiment additives.
Dans chacun de ces cas, on s'intéresse particulièrement aux mesures de risque qui admettent une représentation avec un ensemble de probabilités plutôt qu'un ensemble de mesures finiment additives. Ainsi, dans [15], les auteurs ont montré que de telles représentations avaient lieu sous certains critères de régularité de la mesure de risque ρ.
Dans ces différents papiers, les auteurs étudient les mesures de risque sur des ensembles de fonctions mesurables bornées. Pour généraliser cela, des papiers récents, de Cherny (cf

[31] ou [32]) ou de D. Filipovic et G. Svindland (cf [46]), par exemple, introduisent les mesures de risque sur des ensembles de fonctions non bornées : $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Mais, l'un des intérêts de cette théorie des mesures de risque est de présenter un outil d'étude sans se fixer à l'avance un modèle, ou ce qui revient au même, une probabilité sous laquelle travailler, ce qui n'est pas le cas dans le cadre $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Malheureusement, il est difficile d'avoir des exemples pratiques sans spécifier le modèle. Ainsi, les exemples les plus utilisés de mesure de risque, comme la VaR, CVaR, le risque de "manque à gagner" ("shortfall risk")..., sont définis et étudiés, après avoir fixé une probabilité d'étude (voir par exemple [15], ou [22]).
Le calcul de ces différentes mesures de risque se fait sous l'hypothèse que l'on connaît la probabilité qui régit le marché, c'est-à-dire que l'on ne prend pas en compte l'incertitude liée au choix du modèle dans le calcul du risque. Ainsi, pour les calculs de VaR, en général, on part d'un modèle de Black-Sholes donc avec une volatilité constante, ce qui n'est pas une hypothèse satisfaisante au vu des marchés, surtout en période de crise.
Le but de cette partie est de construire une théorie de mesure de risque dans notre cadre, c'est-à-dire prenant en compte l'incertitude dans le choix du modèle. Le calcul ne se basera plus sur une probabilité donnée sous-jacente au marché, mais sur un ensemble de probabilités possibles $\mathcal{P}$. Nous allons ainsi définir des mesures de risque sur les espaces $\mathcal{L}_p(c)$ définis précédemment qui sont constitués de fonctions mesurables non nécessairement bornées. Puis, nous montrerons que nous retrouvons des théorèmes de représentation analogues au cas classique, c'est-à-dire que sous certaines hypothèses de convexité, notre mesure de risque ρ pourra se mettre sous la forme :

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}'} (E[-X] - \alpha(Q))$$

où $\mathcal{P}'$ est un ensemble de probabilités que nous définirons et α une fonction de pénalité.
Sous d'autres hypothèses plus fortes sur la mesure de risque ρ, dites de cohérence que nous définirons dans notre cadre, nous verrons que la pénalité est nulle ou infinie et qu'alors la mesure de risque pourra se mettre sous la forme :

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}''} E[-X]$$

où $\mathcal{P}''$ est un ensemble de probabilités qui vérifie certaines propriétés que nous détaillerons.
Soulignons le fait que dans notre cadre d'étude, nous obtenons aussi bien pour les mesures de risque cohérentes que pour les mesures de risque convexes des théorèmes de représentation, satisfaisant dans le sens où on a des ensembles de probabilités et non de mesures finiment additives.
Puis, nous verrons que dans notre cadre, où nous fixons simplement un ensemble de probabilités possibles et non une probabilité, nous pouvons définir et étudier différents exemples de mesure de risque. D'abord, des exemples naturels liés au risque de pénurie ou à des stratégies de couvertures. Puis, nous verrons que nous pouvons définir une "Value at Risk" dans notre modèle qui, comme dans le cas où on travaille avec une probabilité fixée, n'est pas convexe. Puis, nous en construirons deux autres l'"Average Value at Risk"

(notée AVaR), sorte de moyenne de la VaR, et la "Worst Conditional Expectattion" (notée WCE) qui elles sont convexes et que nous pourrons comparer à la VaR.

2 Définitions des mesure de risque

Dans cette partie, nous introduisons une définition des mesures de risque monétaires en prenant une approche axiomatique proche de celle de [15] et [7]. Mais nous ne considérerons pas les différentes positions financières comme un sous espace de fonctions mesurables bornées, ou de $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, comme c'est en général la cas, ni même comme un sous espace de $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. En effet, nous voulons ici, rester dans un cadre où aucune probabilité P n'est privilégiée et donc introduire un espace de positions financières définies sous toutes nos probabilités appartenant à $\mathcal{P}$, plus exactement, un sous espace de $\mathcal{L}^p(c)$.
Pour la suite de cette partie, nous nous fixons un $p \in [1; \infty[$, et nous considérons Π, un sous espace de l'ensemble $\mathcal{L}^p(c)$, qui est l'ensemble des positions financières de notre marché incomplet. Pour une position financière X, nous quantifions le risque $\rho(X)$ d'une telle position en considérant le point de vue d'une agence de surveillance. Supposons que pour celle-ci, il y ait un sous ensemble de positions de Π qui soient considérées comme acceptables. Alors, $\rho(X)$ peut être vu comme le plus petit capital qui ajouté à la position X en fait une position acceptable.
De même que dans le cadre des mesures de risque sur des sous ensembles de fonctions mesurables bornées ([7]), certaines propriétés de la mesure de risque ρ semblent alors naturelles. D'abord, la propriété de croissance, ainsi, si on considère X et Y deux positions telles que $X \leqslant Y$ alors si ajouter le capital m à X en fait une position acceptable, il est logique qu'ajouter m à Y en fasse également une position acceptable, en d'autres termes $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$. D'autre part, si nous ajoutons la somme m à la position X, la somme minimale qu'il faut ajouter pour en faire une position acceptable est diminuée d'autant, en d'autres termes $\rho(X+m) = \rho(X) - m$. A partir de ces remarques, nous définissons les mesures de risque monétaires.

Définition III.1. *Une application $\rho : \Pi \to \mathbb{R}$ est appelée une mesure de risque monétaire si elle vérifie les conditions suivantes pour tout $X, Y \in \Pi$:*
- *monotonie : Si $X \leqslant Y$ quasi-partout, alors $\rho(X) \geqslant \rho(Y)$*
- *invariance par translation : $\forall m \in \mathbb{R}$, $\rho(X+m) = \rho(X) - m$*

Il est en général considéré que diversifier un portefeuille diminue le risque de la position, cela se traduit en terme de mesure de risque par la convexité de celle-ci. On introduit donc des mesures de risque convexes qui auront la propriété de favoriser la diversification du portefeuille :

Définition III.2. *Une mesure de risque monétaire est appelée mesure de risque convexe si elle vérifie la propriété suivante :*
- *convexité : $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall X, Y \in \Pi$, $\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda \rho(X) + (1-\lambda) \rho(Y)$*

Une autre propriété plus discutable peut être imposée, on peut considérer qu'un position reste acceptable si on on la multiplie par un facteur même très grand, ou ce qui revient au

même, que le risque augmente de manière linéaire par rapport à la taille de la position. Cela nous donne une autre catégorie de mesure de risque que l'on appellera mesure de risque cohérente.

Définition III.3. *Une mesure de risque convexe est appelée mesure de risque cohérente si elle vérifie la propriété suivante :*
– homogénéité positive : $\forall \lambda \geqslant 0,\ \forall X \in \Pi,\ \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Remarque Si ρ est une mesure de risque cohérente, les propriétés de convexité et d'homogénéité positive nous permettent de montrer que ρ est sous-additive, c'est-à-dire :

$$\forall X, Y \in \Pi,\ \rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$$

3 Ensemble des positions acceptables

Nous pouvons maintenant définir la notion de positions acceptables pour une mesure de risque ρ.

Définition III.4. *Soit ρ une mesure de risque sur $\Pi \subset \mathcal{L}_p(c)$, définissons l'ensemble $\mathcal{A}_\rho$ par*

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \Pi,\ \rho(X) \leqslant 0\}$$

Cet ensemble sera appelé l'ensemble des positions acceptables pour la mesure de risque ρ

Remarquons que ceci est cohérent avec la quantification du risque comme une somme minimale nécessaire à rendre une position acceptable. En effet, on dit que l'on a une position acceptable si cette quantité est négative ou nulle. Inversement, nous pouvons à partir d'un ensemble de positions acceptables $\mathcal{A}$ (vérifiant certaines conditions) définir une mesure de risque.

Définition III.5. *Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{L}_p(c)$. Posons :*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R},\ m + X \in \mathcal{A}\}$$

Nous pouvons montrer que sous certaines conditions sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des positions acceptables nous définissons une mesure de risque convexe ou cohérente. Introduisons d'abord une notation :

Notation Notons $\mathcal{L}_p(c)^+$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{L}_p(c)$ et positive quasi-partout et $\mathcal{L}_p^b(c)$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{L}_p(c)$ et bornée quasi-partout.

Remarque Nous notons $\mathcal{L}_p^b(c)$ les fonctions décrites ci-dessus, mais nous pouvons remarquer qu'en fait cet ensemble de fonctions ne dépend pas de p. Pour tout $p \geqslant 1$, $\mathcal{L}_p^b(c) = \mathcal{L}_1^b(c)$.

Proposition III.6. *Supposons que $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide de fonctions de $\mathcal{L}_p(c)$ et qu'il existe un sous espace Π de $\mathcal{L}_p(c)$ qui contient les fonctions constantes et vérifie :*

$$\forall X \in \Pi,\ -\infty < \rho_{\mathcal{A}}(X) < +\infty,$$

alors :

1. *Si $\mathcal{A}$ est un cône convexe qui contient $\mathcal{L}_p(c)^+$ alors $\rho_{\mathcal{A}}$ est une mesure de risque cohérente sur Π*
2. *Si $\mathcal{A}$ est convexe et vérifie la propriété suivante :*

$$\textit{Si } Y \in \Pi, \textit{ tel qu'il existe } X \in \mathcal{A} \textit{ vérifiant } Y \geqslant X \textit{ q.p, alors } Y \in \mathcal{A}$$

alors $\rho_{\mathcal{A}}$ est une mesure de risque convexe sur Π

Démonstration.
Montrons d'abord la propriété 1. :
Soient $X, Y \in \Pi$ tels que $X \leqslant Y$ *q.p.*. Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $m + X \in \mathcal{A}$, alors

$$m + Y = m + X + (Y - X)$$

avec $m + X \in \mathcal{A}$ et $(Y - X) \in \mathcal{L}_p(c)^+ \subset \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est un cône convexe, $m + Y \in \mathcal{A}$, d'où

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \geqslant \rho_{\mathcal{A}}(Y)$$

Montrons la propriété d'homogénéité positive : soient $\lambda > 0$, $X \in \Pi$ et $m \in \mathbb{R}$ tels que $m + X \in \mathcal{A}$ alors, comme $\mathcal{A}$ est un cône, $\lambda m + \lambda X \in \mathcal{A}$ et

$$\forall X \in \Pi, \forall \lambda > 0,\ \lambda \rho_{\mathcal{A}}(X) \geqslant \rho_{\mathcal{A}}(\lambda X)$$

Donc, en appliquant ceci à $\lambda X \in \Pi$ (car $\mathcal{A}$ est un cône) et au réel positif $\frac{1}{\lambda}$, on obtient l'inégalité dans l'autre sens et finalement

$$\forall X \in \Pi, \forall \lambda > 0,\ \lambda \rho_{\mathcal{A}}(X) = \rho_{\mathcal{A}}(\lambda X)$$

La propriété d'invariance par translation est vérifiée par $\rho_{\mathcal{A}}$ car $\forall m \in \mathbb{R}, \forall X \in \Pi$,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{A}}(X + m') &= \inf\{m \in \mathbb{R},\ m + m' + X \in \mathcal{A}\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R},\ m + X \in \mathcal{A}\} - m' = \rho_{\mathcal{A}}(X) - m' \end{aligned}$$

Enfin, la propriété de convexité découle de la convexité de $\mathcal{A}$. En effet, soient $X, Y \in \Pi$ et $\lambda \in [0; 1]$, si $m, m' \in \mathbb{R}$ tels que $m + X \in \mathcal{A}$ et $m' + Y \in \mathcal{A}$ alors par convexité de $\mathcal{A}$, $\lambda m + (1 - \lambda) m' + \lambda X + (1 - \lambda) Y \in \mathcal{A}$ et donc

$$\rho_{\mathcal{A}}(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leqslant \lambda \rho_{\mathcal{A}}(X) + (1 - \lambda) \rho_{\mathcal{A}}(Y)$$

Ainsi la propriété 1. est démontrée.

Montrons maintenant, la propriété 2.
Les propriétés de convexité et d'invariance par translation montrée ci-dessus, ne dépendent pas de la structure de cône de $\mathcal{A}$ mais de sa convexité donc elles sont toujours vraies sous les hypothèses de 2. Il reste uniquement à montrer la propriété de monotonie de $\rho_{\mathcal{A}}$ sous les hypothèses du 2.
Soient $X, Y \in \Pi$ tels que $X \leqslant Y$ et soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $m + X \in \mathcal{A}$. Alors, $m + X \leqslant m + Y$ et donc, d'après les hypothèses de 2., $m + Y \in \mathcal{A}$. Donc, $\rho_{\mathcal{A}}(X) \geqslant \rho_{\mathcal{A}}(Y)$ et la propriété de monotonie est vérifiée par $\rho_{\mathcal{A}}$ qui est finalement une mesure de risque convexe sur Π.
□

Remarque : nous verrons dans la suite (partie 5) comment définir une mesure de risque à partir d'un ensemble convexe quelconque (ne vérifiant pas nécessairement les conditions 1) et 2) de la proposition précédente).

4 Représentation des mesures de risque définies sur $\mathcal{L}_p(c)$

4.1 Représentation des mesures de risque cohérentes

On considère dans ce paragraphe que $\Pi = \mathcal{L}_p(c)$, c'est-à-dire que l'on suppose que l'on a des mesures de risque définie sur $\mathcal{L}_p(c)$ tout entier.
Nous pouvons alors montrer que nous avons un théorème de représentation des mesures de risque cohérentes définies sur $\mathcal{L}_p(c)$ qui est analogue au cas où on considère une probabilité sous-jacente P et une mesure de risque sur $L^\infty(P, \Omega)$ ou un ensemble de fonctions mesurables bornées (voir par exemple [7]). Mais ici, nous ne fixons pas une probabilité et nous obtenons une représentation avec un ensemble de probabilités et non de mesures finiment additives (sans rajouter d'hypothèse de régularité de ρ, comme c'est le cas dans [7]).

Théorème III.7. *Soit ρ une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$. Alors, ρ est continue et il existe un ensemble $\mathcal{Q}$ de probabilités sur Ω qui ne chargent pas les ensembles polaires et telles que*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho(X) = \sup_{P \in \mathcal{Q}} E_P[-X]$$

De plus, $\mathcal{Q}$ peut être choisi convexe et tel que le supremum ci-dessus soit atteint.

Démonstration.
Par hypothèse ρ est cohérente, donc en utilisant les propriétés de sous-additivité et de décroissance de ρ, on obtient que :

$$\rho(X) - \rho(Y) \leqslant \rho(X - Y) + \rho(Y) - \rho(Y) \leqslant \rho(-|X - Y|)$$

Puis, étant donné que X et Y jouent le même rôle, on en déduit la relation suivante :

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leqslant \rho(-|X - Y|)$$

De cette inégalité, nous pouvons déduire que pour avoir la continuité de ρ sur $\mathcal{L}_p(c)$, il suffit de montrer que ρ est continue en 0.
Montrons ceci par l'absurde. Supposons que ρ n'est pas continue en 0, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $X_n \in \mathcal{L}_p(c)$ tels que :

$$c(X_n) \leqslant \frac{1}{n^3} \quad et \quad |\rho(X_n)| > \epsilon$$

Par monotonie de ρ,

$$\rho(X_n) \leqslant \rho(-|X_n|)$$

Et, par sous additivité et monotonie de ρ :

$$0 = \rho(0) \leqslant \rho(X_n - |X_n|) \leqslant \rho(X_n) + \rho(-|X_n|)$$

Donc

$$\rho(-|X_n|) \geqslant |\rho(X_n)| > \epsilon$$

De plus,

$$c\left(-n|X_n|\right) = nc\left(X_n\right) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et $\mathcal{L}_p(c)$ est un espace de Banach donc on peut définir

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} -n|X_n| \quad et \quad Y \in \mathcal{L}_p(c)$$

Puis, par monotonie et homogénéité positive de ρ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \rho\left(Y\right) \geqslant \rho\left(-n|X_n|\right) = n\rho\left(|X_n|\right) > n\epsilon$$

Donc, $\rho\left(Y\right) = +\infty$, ce qui contredit le fait que ρ soit finie sur $\mathcal{L}_p(c)$. On peut donc conclure que ρ est continue en 0 et donc sur $\mathcal{L}_p(c)$.

D'autre part, d'après une conséquence du théorème de Hanh-Banach :

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho\left(X\right) = \sup_{\lambda \in \mathcal{Q}} \lambda\left(X\right),$$

où $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{L}_p(c)$, dominées par ρ. Soit $\lambda \in \mathcal{Q}$, alors $-\lambda$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{L}_p(c)$. En effet, soit $X \geqslant 0$ appartenant à $\mathcal{L}_p(c)$, comme λ est dominée par ρ qui est décroissante :

$$-\lambda\left(X\right) \geqslant -\rho\left(X\right) \geqslant \rho\left(0\right) = 0$$

D'après le théorème V.31 rappelé en annexe, il existe une mesure finie P qui ne charge pas les ensembles polaires telle que :

$$\forall f \in \mathcal{L}_1(c),\ -\lambda\left(f\right) = \int_\Omega f(x)P(dx)$$

De plus,

$$-\lambda\left(1\right) \geqslant -\rho\left(1\right) = 1$$

Et

$$-\lambda\left(-1\right) \geqslant -\rho\left(-1\right) = -1$$

Donc $\int_\Omega P(dx) = -\lambda\left(1\right) = 1$. Donc

$$-\lambda\left(X\right) = E_P[X]$$

c'est-à-dire,

$$\lambda\left(X\right) = E_P[-X]$$

De plus, il est clair que $\mathcal{Q}$ est convexe et fermé. En effet, si $\left(Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}$ converge vers $\widehat{Q}$ dans $\mathcal{L}_p(c)$ alors :

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \lim_{n\to\infty} E_{Q_n}[X] = E_{\widehat{Q}}[X]$$

Donc par passage à la limite, $\widehat{Q}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_p(c)$, dominée par ρ, donc $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}$.
De plus, ρ est continue en 0, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c) \textit{ tel que } c(X) \leqslant \epsilon, |\rho(X)| \leqslant 1$$

Soit $V = \{X \in \mathcal{L}_p(c);\ c(X) \leqslant \epsilon\}$, alors V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_p(c)$. Soit $Q \in \mathcal{Q}$, alors, par hypothèse de domination, pour tout $X \in V$, $E_Q[-X] \leqslant \rho(X) \leqslant 1$ et comme $-X \in V$, $E_Q[X] \leqslant \rho(-X) \leqslant 1$ donc $|E_Q[X]| \leqslant 1$. Donc,

$$\mathcal{Q} \subset \{\Gamma \in (\mathcal{L}_p(c))^\star;\ \forall X \in V,\ |\Gamma(X)| \leqslant 1\}$$

Or, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, l'ensemble ci-dessus est compact pour la topologie faible étoile de $\mathcal{L}_p(c)$. Donc $\mathcal{Q}$ est faiblement relativement compact et, étant donné qu'on a déjà vu que cet ensemble est fermé, il est compact pour la topologie faible étoile.
Or, on a montré que

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X]$$

Donc, il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{Q}$ que l'on peut choisir (quitte à extraire) convergente pour la topologie faible étoile vers $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}$, telle que :

$$\rho(X) = \lim_{n\to\infty} E_{Q_n}[-X] = E_{\widehat{Q}}[-X]$$

□

Ce théorème de représentation nous montre que dans le cas de mesures de risque cohérentes, quantifier le risque revient à calculer l'espérance de la perte $-X$ pour un ensemble de probabilités $\mathcal{Q}$, puis à prendre le cas le moins favorable parmi tous les modèles dans la classe $\mathcal{Q}$.

4.2 Représentation des mesures de risque convexes

Théorème de représentation

Nous prouvons, dans ce paragraphe, que toute mesure de risque définie sur $\mathcal{L}_p(c)$ admet le même type de représentation que celle définie sur un ensemble de fonctions mesurables bornées (cf [7]).
D'abord, nous pouvons remarquer que si $\mathcal{P}'$ est l'ensemble des probabilités ne chargeant pas les ensembles polaires et appartenant à $(\mathcal{L}_p(c))^\star$ et α une fonction de pénalité, c'est-à-dire une fonction de $\mathcal{P}'$ dans $\to \mathbb{R} \cup +\infty$, minorée et non identiquement égale à $+\infty$, alors la formule

$$\rho(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}'} (E_P[-X] - \alpha(P))$$

définit une mesure de risque convexe sur l'ensemble $\mathcal{L}_p(c)$. Et nous pouvons en fait montrer que n'importe quelle mesure de risque convexe peut se mettre sous cette forme, plus précisément, nous avons le théorème de représentation suivant :

Théorème III.8. *Soit ρ une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$. Alors, ρ admet une représentation de la forme :*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}'} E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)$$

avec

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X]$$

et $\mathcal{P}'$ l'ensemble des probabilités qui ne chargent pas les ensembles polaires et qui appartiennent à $(\mathcal{L}_p(c))^\star$.
De plus, pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, il existe une probabilité $P_X \in \mathcal{P}'$ telle que :

$$\rho(X) = E_{P_X}[-X] - \alpha_{min}(P_X)$$

Et, α_{min} est la plus petite fonction de pénalité, c'est-à-dire que si α est une autre fonction de pénalité associée à ρ, alors $\alpha(Q) \geqslant \alpha_{min}(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{P}'$

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$ et $Q \in \mathcal{P}'$. On pose

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X]$$

En utilisant l'invariance par translation de ρ, on peut montrer que $X' = \rho(X) + X$ appartient à $\mathcal{A}_\rho$, on en déduit que :

$$\alpha_{min}(Q) \geqslant E_Q[-X'] = E_Q[-X] - \rho(X)$$

Donc,

$$\forall Q \in \mathcal{P}', \forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho(X) \geqslant E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)$$

Ce qui donne en passant au supremum sur $\mathcal{P}'$:

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho(X) \geqslant \sup_{Q \in \mathcal{P}'} (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q))$$

Montrons l'inégalité inverse :
Soit $X \in \mathcal{L}_1(c)$, on peut supposer, sans perte de généralité grâce à la propriété d'invariance par translation de ρ, que $\rho(X) = 0$. D'autre part, remarquons que

$$\rho(n) = \rho(n+0) = \rho(0) - n$$

donc

$$\rho(n + \rho(0)) = \rho(n) - \rho(0) = -n$$

Posons :

$$\Gamma_\rho = \{Y \in \mathcal{L}_1(c);\ \rho(Y) < 0\}$$

Alors Γ_ρ est convexe car si $X, Y \in \Gamma_\rho$ et $\lambda \in [0,1]$, alors par convexité de ρ :

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) < 0$$

Donc $\lambda X + (1-\lambda) Y \in \Gamma_\rho$ et on peut en déduire la convexité de Γ.

Montrons, maintenant, par l'absurde que Γ_ρ est d'intérieur non vide dans $\mathcal{L}_p(c)$. Pour cela, on suppose que Γ_ρ est d'intérieur vide dans $\mathcal{L}_p(c)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $X_n \in \mathcal{L}_p(c)$ tel que $c(X_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ et

$$\rho(n + \rho(0) + X_n) = -n - \rho(0) + \rho(X_n) \geqslant 0$$

C'est-à-dire,

$$\rho(X_n) \geqslant n + \rho(0)$$

Donc par monotonie de ρ, comme $-|X_n| \leqslant X_n$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \rho(-|X_n|) \geqslant \rho(X_n) \geqslant n + \rho(0)$$

Posons :

$$Y = \sum_{n=1}^{+\infty} -|X_n|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c(X_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc la suite $\left(\sum_{n=1}^{k} -|X_n|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}_p(c)$. De plus, $\mathcal{L}_p(c)$ est un espace de Banach et donc Y appartient à $\mathcal{L}_p(c)$ et vérifie $\rho(Y) < +\infty$. Maintenant, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y \leqslant -|X_n|$ q.p. et comme ρ est décroissante sur $\mathcal{L}_1(c)$, on a :

$$\rho(Y) \geqslant \rho(-|X_n|) \geqslant n + \rho(0)$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient une contradiction avec le fait que $\rho(Y) < +\infty$. Donc Γ_ρ est d'intérieur non vide dans $\mathcal{L}_p(c)$.

Maintenant, comme $X \notin \Gamma_\rho$, on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach qui nous donne l'existence d'une forme linéaire continue, non nulle μ sur $\mathcal{L}_p(c)$ telle que :

$$\mu(X) \leqslant \inf_{Y\in\Gamma_\rho} \mu(Y)$$

Soit $Y \in \mathcal{L}_p(c)$ une variable aléatoire positive. Alors, pour tout $\eta \geqslant 0$, $X+1+\eta Y \geqslant 1+X$ et donc, en utilisant la décroissance de ρ, puis l'invariance par translation, on obtient :

$$\rho(X + 1 + \eta Y) \leqslant \rho(X+1) = \rho(X) - 1 = -1 < 0$$

Donc $X + 1 + \eta Y$ appartient à Γ_ρ et donc :

$$\mu(X) \leqslant \mu(X + 1 + \eta Y) = \mu(X) + \mu(1) + \eta\mu(Y)$$

Comme ceci est vrai pour tout $\eta \geqslant 0$ et comme $\mu(X) > -\infty$, on a, nécessairement, $\mu(Y) \geqslant 0$. Donc, μ est une forme linéaire positive.
D'après le théorème V.31 rappelé en annexe, μ est continue et il existe une mesure finie λ qui ne charge pas les ensembles polaires telle que :

$$\forall f \in \mathcal{L}_1(c),\ \mu(f) = \int_\Omega f(x)\lambda(dx)$$

De plus, comme μ est une forme linéaire non nulle, $\mu(1) \neq 0$. On peut donc poser $P_X = \frac{\lambda}{\mu(1)}$, alors $P_X \in \mathcal{P}'$. De plus, comme $\Gamma_\rho \subset \mathcal{A}_\rho$, on a :

$$\alpha_{min}(P_X) = \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} E_{P_X}[-Y] \geqslant \sup_{Y \in \Gamma_\rho} E_{P_X}[-Y] = -\frac{1}{\mu(1)} \inf_{Y \in \Gamma_\rho} \lambda(Y)$$

Remarquons, maintenant, que pour tout $\eta > 0$ et pour tout $Y \in \mathcal{A}_\rho$,

$$\rho(Y + \eta) = \rho(Y) - \eta \leqslant -\eta < 0$$

Donc, $Y + \eta$ appartient à Γ_ρ.
De plus, par définition de α_{min}, pour tout $\epsilon > 0$, il existe Z appartenant à $\mathcal{A}_\rho$ tel que :

$$\alpha_{min}(P_X) \leqslant E_{P_X}[-Z] + \frac{\epsilon}{2} = E_{P_X}\left[-\left(Z + \frac{\epsilon}{2}\right)\right] + \epsilon$$

Or, $Z + \frac{\epsilon}{2}$ appartient à Γ_ρ, donc

$$\alpha_{min}(P_X) \leqslant \sup_{Y \in \Gamma_\rho} E_{P_X}[-Y] + \epsilon = -\frac{1}{\mu(1)} \inf_{Y \in \Gamma_\rho} \lambda(Y) + \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient l'égalité suivante :

$$\alpha_{min}(P_X) = -\frac{1}{\mu(1)} \inf_{Y \in \Gamma_\rho} \lambda(Y)$$

Donc,

$$E_{P_X}[-X] - \alpha_{min}(P_X) = \frac{1}{\mu(1)} \left(\inf_{Y \in \Gamma_\rho} \lambda(Y) - \lambda(X) \right) \geqslant 0$$

Or, comme $\rho(X) = 0$, ceci peut s'écrire sous la forme

$$\rho(X) \leqslant E_{P_X}[-X] - \alpha_{min}(P_X) \leqslant \sup_{Q \in \mathcal{P}'} \left(E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q) \right)$$

On peut alors en déduire l'égalité :

$$\rho(X) = E_{P_X}[-X] - \alpha_{min}(P_X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}'} \left(E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q) \right)$$

Reste à montrer que α_{min} est minimal. Soit α une autre fonction de pénalité associée à ρ. Alors, pour tout $X \in \mathcal{A}_\rho$ et pour tout $Q \in \mathcal{P}'$,

$$E_Q[-X] - \alpha(Q) \leqslant \rho(X) \leqslant 0$$

Donc,

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ \alpha(Q) \geqslant \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] = \alpha_{min}(Q)$$

Nous pouvons maintenant conclure que α_{min} est bien la fonction de pénalité minimale associé à ρ.

□

De même que dans le cas des mesures cohérentes, ce théorème de représentation, nous montre que pour quantifier le risque, il faut déterminer un ensemble de probabilités $\mathcal{Q}$, qui correspond à un ensemble de modèles, et calculer pour chacune des probabilités l'espérance de la perte $-X$. Mais, on ne traite pas de la même façon toutes les mesures, certains modèles nous semblent plus plausibles que d'autres et nous voulons les privilégier. Pour cela nous soustrayons une pénalité associée au modèle qui est plus on moins grande selon la confiance que l'on a dans le modèle. Puis de nouveau, on considère le cas le moins favorable pour obtenir $\rho(X)$.
Le cas des mesures de risque cohérentes correspond au cas où la fonction de pénalité ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$ et donc on peut restreindre notre ensemble de probabilités sur lequel on prend le supremum aux probabilités de pénalité nulle, ce qui explique la forme de représentation trouvée pour les mesures de risque cohérentes.

Remarque : On n'a plus nécessairement ce genre de représentation lorsque la mesure de risque n'est plus définie sur $\mathcal{L}_1(c)$ mais seulement sur un sous espace. C'est pourquoi, dans la suite, on étudiera particulièrement ce cas.

Représentation de la fonction de pénalité dans le cas d'une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$

Il est parfois intéressant de pouvoir exprimer la fonction de pénalité d'une mesure de risque convexe sans faire intervenir l'ensemble des stratégie admissibles $\mathcal{A}_\rho$ associé. Nous pouvons montrer que le même type de représentation de la pénalité que dans le cadre des mesures de risque définies sur un ensemble de fonctions mesurables bornées existe dans notre cadre. C'est le but de la propriété suivante :

Propriété III.9. *Soit ρ une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ et α la fonction pénalité associée à cette mesure de risque, alors $\forall P \in \mathcal{P}'$,*

$$\alpha_{min}(P) = \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} E_P[-X] - \rho(X)$$

Démonstration.
Par définition de ρ, $\forall X \in \mathcal{L}_p(c)$, $\forall P \in \mathcal{P}'$:

$$\rho(X) \geqslant E_P[-X] - \alpha_{min}(P)$$

Donc

$$\alpha_{min}(P) \geqslant \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} E_P[-X] - \rho(X) \geqslant \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_P[-X] - \rho(X)$$

Or, si $X \in \mathcal{A}_\rho$, $\rho(X) \leqslant 0$

$$\sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_P[-X] - \rho(X) \geqslant \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_P[-X] = \alpha_{min}(P)$$

Donc, les inégalités ci-dessus sont des égalités et, en particulier :

$$\alpha_{min}(P) = \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} E_P[-X] - \rho(X)$$

□

5 Construction d'une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ à partir d'un convexe quelconque

Nous avons vu une façon de définir une mesure de risque à partir d'un ensemble de positions acceptables. Mais, cet ensemble doit vérifier certaines propriétés pour que l'on obtienne une mesure de risque convexe. Comme dans l'article de P. Barrieu et N. El Karoui ([24]) dans le cas de mesures de risque sur un ensemble de fonctions mesurables bornées, nous construisons, à partir d'un ensemble convexe quelconque $\mathcal{H}$, une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$. Nous n'imposons cependant plus à l'ensemble $\mathcal{H}$ d'être l'ensemble des positions acceptables de la mesure de risque construite.

Proposition III.10. *Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_p(c)$ un espace convexe.*
On définit l'application $\nu_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{L}_p(c)$ par :

$$\nu_{\mathcal{H}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ m + X \geqslant \zeta \ q.p.\}$$

On suppose que pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $-\infty < \nu_{\mathcal{H}}(X) < +\infty$.
Alors $\nu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ et de fonction de pénalité $\alpha_{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ \alpha_{\mathcal{H}}(Q) = \sup_{H \in \mathcal{H}} E_Q[-H]$$

Démonstration.
Montrons d'abord que nous avons bien une mesure de risque convexe :

– Convexité : Soient $\lambda \in [0,1]$ et $X, Y \in \mathcal{L}_p(c)$, soit $\epsilon > 0$, alors il existe deux réels m_X et m_Y qui vérifient :

$$\nu_{\mathcal{H}}(X) - +\epsilon \geqslant m_X \geqslant \nu_{\mathcal{H}}(X)$$

et

$$\nu_{\mathcal{H}}(Y) + \epsilon \geqslant m_Y \geqslant \nu_{\mathcal{H}}(Y)$$

Par définition de $\nu_{\mathcal{H}}$, il existe $\zeta, \zeta' \in \mathcal{H}$ tels que :

$$\zeta \leqslant m_X + X \quad q.p.$$

$$\zeta' \leqslant m_Y + Y \quad q.p.$$

Soient $M = \lambda m_X + (1-\lambda) m_Y$ et $\widetilde{\zeta} = \lambda\zeta + (1-\lambda)\zeta'$ alors $\widetilde{\zeta} \in \mathcal{H}$ et

$$M + \lambda X + (1-\lambda) Y \geqslant \widetilde{\zeta} \quad q.p.$$

et donc

$$M \geqslant \nu_{\mathcal{H}}(\lambda X + (1-\lambda) Y) \quad q.p.$$

De plus,

$$M \leqslant \lambda\nu_{\mathcal{H}}(X) + (1-\lambda)\nu_{\mathcal{H}}(Y) + \epsilon \quad q.p.$$

Par conséquent,

$$\nu_{\mathcal{H}}(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda\nu_{\mathcal{H}}(X) + (1-\lambda)\nu_{\mathcal{H}}(Y) + \epsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on obtient la propriété de convexité.

– Monotonie : Soient $X, Y \in \mathcal{L}_p(c)$ tels que $X \leqslant Y$. Soit m un réel tel qu'il existe ζ appartenant à $\mathcal{H}$ vérifiant l'inégalité :

$$m + X \geqslant \zeta \quad q.p.$$

alors,

$$m + Y \geqslant m + X \geqslant \zeta \quad q.p.$$

Par définition de $\nu_{\mathcal{H}}(Y)$,

$$\nu_{\mathcal{H}}(Y) \leqslant m$$

Donc, en passant à l'infimum, on obtient :

$$\nu_{\mathcal{H}}(X) \geqslant \nu_{\mathcal{H}}(Y)$$

– Invariance par translation : Soient $X \in \mathcal{L}_p(c)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \nu_{\mathcal{H}}(X+\alpha) &= \inf\{m \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ m + \alpha + X \geqslant \zeta\ q.p.\} \\ &= \inf\{m' \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ m' + X \geqslant \zeta\ q.p.\} - \alpha \\ &= \nu_{\mathcal{H}}(X) - \alpha \end{aligned}$$

Comme par hypothèse, $\nu_{\mathcal{H}}$ est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$, nous avons montré que $\nu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$.
Montrons maintenant que la fonction de pénalité a bien la forme annoncée dans la proposition :
Soit X appartenant à $\mathcal{A}_{\nu_{\mathcal{H}}}$, l'ensemble des positions acceptables pour la mesure de risque $\nu_{\mathcal{H}}$. Alors, par définition, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $m \leqslant \epsilon$ et $\zeta \in \mathcal{H}$ tels que $m + X \geqslant \zeta$. Ce qui implique l'inégalité suivante : $-X \leqslant \epsilon - \zeta$. D'où, en passant à l'espérance :

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ E_Q[-X] \leqslant \epsilon + E_Q[-\zeta] \leqslant \epsilon + \sup_{H \in \mathcal{H}} E_Q[-H]$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $X \in \mathcal{A}_{\nu_{\mathcal{H}}}$, en passant au supremum sur cet ensemble, on obtient que

$$\sup_{X \in \mathcal{A}_{\nu_{\mathcal{H}}}} E_Q[-X] \leqslant \sup_{H \in \mathcal{H}} E_Q[-H]$$

De plus, on voit facilement que $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}_{\nu_{\mathcal{H}}}$, d'où on peut déduire l'inégalité inverse. Et, en utilisant la représentation de la fonction de pénalité de la proposition III.9, on obtient l'égalité :

$$\alpha_{\mathcal{H}}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_{\nu_{\mathcal{H}}}} E_Q[-X] = \sup_{H \in \mathcal{H}} E_Q[-H]$$

□

Nous verrons dans la section suivante que nous pouvons écrire cette mesure de risque comme étant l'inf-convolution de deux mesures de risque convexe que nous préciserons.
D'autre part, sous certaines conditions sur $\mathcal{H}$, nous obtenons que la mesure de risque $\nu_{\mathcal{H}}$ est cohérente.

Proposition III.11. *Sous les hypothèses de la proposition III.10, supposons de plus que $\mathcal{H}$ est un cône alors, $\nu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$ qui admet la représentation suivante :*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \nu_{\mathcal{H}}(X) = \sup\{E_Q[-X]\,; Q \in \mathcal{P}' \text{ tel que } \forall \zeta \in \mathcal{H}, E_Q[-\zeta] \leqslant 0\}$$

Démonstration.
Nous avons déjà montré que $\nu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$, pour avoir la cohérence reste donc à voir si elle vérifie la propriété d'homogénéité positive. Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$ et soit $\lambda > 0$,alors

$$\begin{aligned}
\nu_{\mathcal{H}}(\lambda X) &= \inf\{m \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ m + \lambda X \geqslant \zeta\} \\
&= \inf\left\{m \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ \frac{m}{\lambda} + \lambda X \geqslant \frac{\zeta}{\lambda}\right\} \\
&= \lambda \inf\{m \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ m + X \geqslant \zeta\} = \lambda \nu_{\mathcal{H}}(X)
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en observant que comme $\mathcal{H}$ est un cône, si $\zeta \in \mathcal{H}$ alors $\frac{\zeta}{\lambda} \in \mathcal{H}$. Nous pouvons alors conclure que $\nu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$. D'où, nous pouvons en déduire que sa fonction de pénalité est nulle ou infinie pour chaque $Q \in \mathcal{P}'$. De plus, d'après la proposition III.10, celle-ci à la forme :

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ \alpha_{\mathcal{H}}(Q) = \sup_{H \in \mathcal{H}} E_Q[-Q]$$

Donc, la pénalité $\alpha_{\mathcal{H}}(Q)$ est nulle ssi $\forall \zeta \in \mathcal{H}$, $E_Q[-\zeta] \leqslant 0$ et par suite infinie ailleurs, ce qui implique que l'on a la représentation énoncée dans la proposition. □

6 Premiers exemples de mesures de risque convexe

6.1 Un exemple basé sur le risque de "manque à gagner"

Revenons à la notion d'utilité robuste introduite dans le chapitre précédent et qui nous permettait de traduire les préférences d'un investisseur. Supposons ainsi qu'un investisseur évalue le risque d'une position financière X via son utilité robuste :

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q[U(X)]$$

Ici, nous prenons le point de vue d'un investisseur qui s'intéresse particulièrement au risque de perte, il semble assez naturel d'introduire une fonction de perte l définie par : $l(x) = -U(-x)$. Quand on regardait l'utilité, il cherchait à maximiser celle-ci, maintenant que l'on prend le point de vue de la perte, il cherche la position X qui minimise sa "perte robuste" :

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q[l(-X)]$$

Il est alors naturel de considérer comme ensemble de positions acceptables les positions dont la perte robuste est inférieure à un certain seuil x_0. Nous allons dans la suite de

ce paragraphe construire la mesure de risque associée à cet ensemble de positions acceptables, en introduisant une fonction de perte l qui vérifiera le même type d'hypothèses de croissance et convexité que la fonction d'utilité U du chapitre précédent, nous rajouterons également une hypothèse (Q) empêchant cette fonction de croître trop vite. Avant cela, remarquons que ce type de mesure de risque (appelée "shortfall risk" que nous avons traduit par risque de "manque à gagner") est introduit dans [7] dans le cas où l'on part d'une utilité espérée (non robuste). Il est intéressant de voir que notre cadre permet de faire le lien avec l'utilité robuste de manière analogue.
On se fixe un réel $p \geqslant 1$.
Soit $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de perte, convexe, croissante, non identiquement constante et qui vérifie l'hypothèse suivante :
Hypothèse (Q) : Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |l(x)| \leqslant M(1 + |x|^p)$$

Par exemple, on peut prendre la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ l(x) = \left(x^+\right)^p$$

Fixons maintenant un x_0 appartenant à l'intérieur de $l(\mathbb{R})$ et introduisons l'ensemble des positions acceptables défini par :

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{L}_p(c),\ \forall P \in \mathcal{P},\ E_P[l(-X)] \leqslant x_0\}$$

Ainsi, une position est considérée comme étant acceptable si quelque soit le scénario qui se réalise (c'est-à-dire, pour tout $P \in \mathcal{P}$), la moyenne des pertes est plus petite que x_0. Définissons, maintenant,

$$\begin{aligned} \rho_{l,x_0}(X) &= \inf\{m \in \mathbb{R};\ m + X \in \mathcal{A}\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R};\ \forall P \in \mathcal{P},\ E_P[l(-m - X)] \leqslant x_0\} \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que nous avons ainsi introduit une mesure de risque convexe définie sur $\mathcal{L}_p(c)$:

Proposition III.12. *Sous l'hypothèse (Q), ρ_{l,x_0} est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$.*

Démonstration.
Pour montrer que ρ_{l,x_0} est bien ne mesure de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$, il suffit de montrer que ρ_{l,x_0} est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$ et que l'ensemble $\mathcal{A}$ des positions acceptables associées à ρ_{l,x_0} verifie les hypothèses de la proposition III.6. D'abord, nous pouvons remarquer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide car il contient les fonctions constantes et égales à $-y$ avec $l(y) \leqslant x_0$ (de tels réels y existent car on a choisi x_0 dans l'intérieur de $l(\mathbb{R})$). De plus, cet ensemble est clairement convexe et satisfait la condition de monotonie de la proposition III.6. Reste donc à vérifier que ρ_{l,x_0} est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, montrons que $\rho_{l,x_0}(X) > -\infty$.
Soit $P \in \mathcal{P}$, soit $m \in \mathbb{R}$, alors, d'après l'hypothèse (Q),

$$l(-m - X) \leqslant M(1 + |m + X|^p) \quad \text{quasi-partout et donc } P - p.s.$$

Or, $X \in \mathcal{L}_p(c)$ donc $|m+X|^p \in L^1(P)$. Ce qui implique, avec l'inégalité ci-dessus que $l(-m-X) \in L^1(P)$ et que l'espérance de cette valeur sous la probabilité P existe.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $l(y) > x_0$ (un tel y existe car x_0 appartient à l'intérieur de $l(\mathbb{R})$), alors, d'après le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to-\infty} E_P\left[l(-m-X)\right] &\geqslant \lim_{m\to-\infty} E_P\left[l\left((-m-X)\wedge y\right)\right] \\
&\geqslant E_P\left[\liminf_{m\to-\infty} l\left((-m-X)\wedge y\right)\right] = l(y) \\
&> x_0
\end{aligned}$$

Donc, $\rho_{l,x_0}(X) > -\infty$.

Montrons, maintenant, que $\rho_{l,x_0}(X) < +\infty$.
Soit $y < 0$ tel que $l(y) < x_0$ (le fait que l soit croissante permet de choisir y strictement négatif), alors $\left((-m-X)\vee y\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions dans $\mathcal{L}_p(c)$, qui converge vers y quasi-partout. De plus, comme c_p est une capacité régulière, on a vu dans l'annexe que ceci implique que $\left((-m-X)\vee y - y\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}_p(c)$, c'est-à-dire

$$\lim_{m\to\infty} c_p\left((-m-X)\vee y - y\right)^p = \lim_{m\to\infty}\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left((-m-X)\vee y - y\right)^p\right] = 0$$

De plus, d'après l'hypothèse (Q), on a :

$$\begin{aligned}
&\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[l\left((-m-X)\vee y\right) - l(y)\right] \\
=\ &\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(l(-m-X) - l(y)\right)\mathbf{1}_{\{-m-X>y\}}\right] \\
\leqslant\ &\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(M + M|-m-X|^p - l(y)\right)\mathbf{1}_{\{-m-X>y\}}\right]
\end{aligned}$$

De plus, sur l'ensemble $\{-m-X>y\}$, il existe une constante K_p positive telle que :

$$|m+X|^p \leqslant (|-m-X-y| + |y|)^p \leqslant K_p\left((-m-X-y)^p + |y|^p\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[l\left((-m-X)\vee y\right) - l(y)\right] \\
\leqslant\ &\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left(M + M\left((-m-X-y) - |y|\right)^p - l(y)\right)\mathbf{1}_{\{-m-X>y\}}\right] \\
\leqslant\ &K_p M \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[(-m-X-y)^p\,\mathbf{1}_{\{-m-X>y\}}\right] \\
&+ \left(M + K_p M|y|^p - l(y)\right)\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\mathbf{1}_{\{-m-X>y\}}\right]
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Markov et l'égalité suivante : $(-m-X-y)\,\mathbf{1}_{\{-m-X>y\}} = (-m-X)\vee y - y$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&\sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[l\left((-m-X)\vee y\right) - l(y)\right] \\
\leqslant\ &K_p M \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[\left((-m-X)\vee y - y\right)^p\right] + \left(M + MK_p|y|^p - l(y)\right)\frac{c_p(X+y)^p}{m^p}
\end{aligned}$$

Or, on a vu au début de la démonstration que la première partie de l'expression ci-dessus tendait vers 0 quand m tend vers l'infini, et comme $X + y \in \mathcal{L}_p(c)$, $c_p(X + y) < +\infty$, il en est de même pour la deuxième partie de cette expression et donc :

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[l\left((-m - X) \vee y\right)\right] = -l(y) < x_0$$

Comme, par hypothèse l est croissante

$$l\left((-m - X) \vee y\right) \geqslant l(-m - X)$$

Donc

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[l(-m - X)\right] < x_0$$

Et nous pouvons en déduire que

$$\rho_{l,x_0}(X) < +\infty$$

□

6.2 Exemple basé sur une stratégie de couverture avec contraintes

Exemple de mesure de risque liée à une stratégie de couverture

L'exemple de mesure de risque liée à une stratégie de couverture qui semble le plus naturel est le suivant :

$$\rho_{\mathcal{H}}(X) = \inf\left\{m \in \mathbb{R};\ \exists h \in \mathcal{H}_p^d \text{ t.q. } X + m + \int_0^T h_s dB_s \geqslant 0 \text{ q.p.}\right\}$$

Ceci signifie qu'une position financière X est considérée comme moins risquée si sa partie risquée peut être couverte sans frais, quelque soit le modèle et que l'on peut construire une telle stratégie de couverture sous chaque probabilité $P \in \mathcal{P}$.
On définit ainsi une mesure de risque cohérente sur l'ensemble

$$\Pi_{\rho_{\mathcal{H}}} = \{X \in \mathcal{L}_p(c); \rho_{\mathcal{H}}(X) < +\infty\}$$

En effet, les propriétés de convexité, invariance par translation, monotonie et d'homogénéité positive sont vraies car l'ensemble des positions acceptables est bien un cône convexe.
D'autre part, si on considère $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $m \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}_p^d$ tels que :

$$X + m + \int_0^T h_s dB_s \geqslant 0 \quad q.p.$$

alors

$$m \geqslant \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P[-X]$$

Donc

$$\rho_{\mathcal{H}}(X) > -\infty$$

Cependant, $\rho_{\mathcal{H}}$ est une mesure cohérente sur un sous-espace de $\mathcal{L}_p(c)$ qui peut être différent de $\mathcal{L}_p(c)$ et donc nous n'avons pas de théorème de représentation dans ce cas. C'est pourquoi, nous essayons dans le chapitre suivant d'ajouter des contraintes sur les stratégies et de transformer cette mesure pour obtenir une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$

Exemple avec contraintes de mesures de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$

On peut maintenant imaginer imposer des contraintes sur le montant des transactions. Par exemple, on peut supposer que si $h = (h_1, \ldots, h_d)$ est une stratégie alors les h_i sont compris entre $[a_i; b_i]$ avec $a_i \leqslant 0 \leqslant b_i$.
Plus généralement, on peut considérer un sous ensemble convexe $\mathcal{H}'$ de fonctions de $\mathcal{H}_p^d$ contenant 0 et qui représente l'ensemble des stratégies autorisées. Une stratégie $X \in \mathcal{L}_p(c)$ sera considérée comme non risquée s'il existe $h \in \mathcal{H}'$ tel que

$$X + \int_0^T h_s dB_s \geqslant 0 \quad q.p$$

Ce qui implique que pour tout $P \in \mathcal{P}$

$$X + \int_0^T h_s dB_s \geqslant 0 \quad P - p.s.$$

De façon naturelle, nous pouvons introduire la mesure de risque

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho_{\mathcal{H}'}(X) = \inf\left\{m \in \mathbb{R}; \exists h \in \mathcal{H}' \text{ t.q. } m + X + \int_0^T h_s dB_s \geqslant 0 \quad q.p\right\}$$

Proposition III.13. *$\rho_{\mathcal{H}'}$ est une mesure de risque convexe sur*

$$\Pi' = \{X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho_{\mathcal{H}'}(X) < +\infty \text{ et } \rho_{\mathcal{H}'}(-X) < +\infty\}$$

Démonstration.
Les propriétés de monotonie, d'invariance par translation et de convexité se vérifient facilement. Par définition de Π', pour tout $X \in \Pi'$, $\rho_{\mathcal{H}'}(X) < +\infty$. Reste à voir que pour tout $X \in \Pi'$, $\rho_{\mathcal{H}'}(X) > -\infty$.
Pour cela, commençons par calculer $\rho_{\mathcal{H}'}(0)$. Remarquons que si $h \in \mathcal{H}'$ et $m \in \mathbb{R}$ vérifient

$$m + \int_0^T h_s dB_S \geqslant 0 \ q.p.$$

alors, en passant à l'espérance sous n'importe quelle probabilité de $\mathcal{P}$, on obtient que $m \geqslant 0$ ce qui implique que $\rho_{\mathcal{H}'}(0) \geqslant 0$. De plus, $0 \in \mathcal{H}'$, donc finalement, $\rho_{\mathcal{H}'}(0) = 0$. Puis, par convexité, pour tout $X \in \Pi'$, on obtient que

$$0 = \rho_{\mathcal{H}'}(0) = \rho_{\mathcal{H}'}\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X\right) \leqslant \frac{1}{2}\rho_{\mathcal{H}'}(X) + \frac{1}{2}\rho_{\mathcal{H}'}(-X)$$

D'où,

$$\rho_{\mathcal{H}'}(X) \geqslant -\rho_{\mathcal{H}'}(-X) > -\infty$$

Donc $\rho_{\mathcal{H}'}$ est finie sur Π', ce qui achève la démonstration.

□

On peut remarquer que $\mathcal{L}_b^p(c)$ est inclus dans Π'. Cependant, nous ne savons pas si $\mathcal{L}_p(c)$ est inclus dans Π' et si nous avons un théorème de représentation pour cette mesure de risque.
Pour obtenir finalement une mesure définie sur $\mathcal{L}_p(c)$ nous introduisons une sorte de combinaison de cette mesure de risque et de celle introduite dans le paragraphe précédent, basée sur le risque de manque à gagner. On fait d'abord quelques hypothèses et on introduit quelques notations :

- $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de perte convexe croissante qui satisfait l'hypothèse (Q) et qui est minorée par une constante C.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ appartenant à l'intérieur de $l(\mathbb{R})$
- $\mathcal{H}'$ un sous ensemble convexe de fonctions de $\mathcal{H}_p^d$ contenant 0 et borné dans $\mathcal{H}_p^d$.

Nous pouvons maintenant introduire notre mesure de risque, nous posons pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$:

$$\rho_{l,x_0}^{\mathcal{H}'}(X) = \inf\left\{m \in \mathbb{R};\ \exists h \in \mathcal{H}' \text{ t.q. } \forall P \in \mathcal{P}\ E_P\left[l\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s\right)\right] \leqslant x_0\right\}$$

Proposition III.14. *Sous ces hypothèses, $\rho_{l,x_0}^{\mathcal{H}'}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$.*

Démonstration.
Les propriétés de monotonie, d'invariance par translation et de convexité se vérifient facilement.
Reste à voir que notre mesure de risque est bien finie sur $\mathcal{L}_p(c)$. Pour cela, nous pouvons d'abord remarquer que $\rho_{l,x_0}^{\mathcal{H}'} \leqslant \rho_{l,x_0}$. On obtient donc immédiatement en conséquence de ce que nous avons montré pour ρ_{l,x_0} que

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho_{l,x_0}^{\mathcal{H}'}(X) < +\infty$$

Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, on peut alors choisir $\epsilon > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $l(y) \geqslant x_0 + \epsilon$ (car x_0 est dans l'intérieur de $l(\mathbb{R})$). Alors, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{H}'$ et $P \in \mathcal{P}$, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
E_P\left[l\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s\right)\right] &\geqslant E_P\left[l\left(\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s\right) \wedge y\right)\right] \\
&\geqslant l(y)P(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s \geqslant y) \\
&\quad + CP(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s < y) \\
&\geqslant l(y) + (C - l(y))\, P\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s < y\right)
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que si $m < -y$,

$$\begin{aligned}
P\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s < y\right) &= P\left(X + \int_0^T h_s\, dB_s > -y - m\right) \\
&\leqslant \frac{E_P\left[\left|X + \int_0^T h_s\, dB_s\right|^p\right]}{(-y-m)^p} \\
&\leqslant \frac{c_p\left(X + \int_0^T h_s\, dB_s\right)^p}{(-y-m)^p} \\
&\leqslant \frac{\left(c_p(X) + c_p\left(\int_0^T h_s\, dB_s\right)\right)^p}{(-y-m)^p} \\
&\leqslant \frac{\left(c_p(X) + K_p \parallel h \parallel_{\mathcal{H}_p^d}\right)^p}{(-y-m)^p}
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est l'inégalité $(\star)$ du théorème $I.20$ et K_p est une constante. De plus, par hypothèse $X \in \mathcal{L}_p(c)$ donc $c_p(X) < +\infty$ et $h \in \mathcal{H}'$ est un ensemble de fonctions borné dans $\mathcal{H}_p^d$ donc $\sup_{h\in\mathcal{H}'} \parallel h \parallel_{\mathcal{H}_p^d} < +\infty$. Nous pouvons donc conclure en passant au supremum pour les $P \in \mathcal{P}$ et les $h \in \mathcal{H}'$, puis en faisant tendre m vers l'infini que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}'} \sup_{P\in\mathcal{P}} P\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s < y\right) = 0$$

Donc

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}'} \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P\left[l\left(-m - X - \int_0^T h_s\, dB_s\right)\right] \geqslant l(y) \geqslant x_0 + \epsilon$$

Donc, $\rho_{l,x_0}^{\mathcal{H}'}(X) > -\infty$ et la démonstration est complète.

□

7 Value at risk

7.1 Définitions

Rappelons que, si on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, classiquement, ce que l'on appelle la "value at risk" sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (cf par exemple, [7]) est définie par :

$$\forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), V@R_\alpha^P(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) > \alpha\}$$

Il s'agit de la mesure de risque la plus utilisée en salle de marché, elle sert actuellement de référence aux régulateurs internationaux. Donc, même si cette mesure de risque n'est pas convexe, il est important de pouvoir la définir dans notre cadre :

Définition III.15. *Soit $\alpha \in (0,1)$. On pose*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ V@R_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R},\ \exists P \in \mathcal{P}, P(X \leqslant x) > \alpha\}.$$

$V@R_\alpha$ est ce que nous pouvons appeler dans ce modéle la "value at risk", dans le sens où, si on prend $X \in \mathcal{L}_p(c)$ qui représente une position financière alors, si $x < -V@R_\alpha(X)$, pour tout $P \in \mathcal{P}$ (c'est-à-dire quelque soit le scénario), $P\left(X \leqslant x\right) \leqslant \alpha$.
Vérifions d'abord que l'objet ainsi défini est une application de $\mathcal{L}_p(c)$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que la proposition suivante est satisfaite.

Proposition III.16. *Soit $p \geqslant 1$, alors pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $V@R_\alpha\left(X\right)$ est fini.*

Démonstration.
Pour tout $P \in \mathcal{P}$ et pour tout $x < 0$,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x) &\leqslant P(|X| \geq -x) \\ &\leq \frac{E_P(|X|^p)}{|x|^p} \\ &\leq \frac{c_p(X)^p}{|x|^p} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \to -\infty} \sup_{P \in \mathcal{P}} P(X \leqslant x) = 0,$$

ce qui nous permet de conclure que $V@R_\alpha\left(X\right) < +\infty$.
D'autre part, pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\lim_{x \to +\infty} P(X \leqslant x) = 1,$$

et donc $V@R_\alpha\left(X\right) > -\infty$.

□

Nous pouvons, maintenant, exprimer $V@R_\alpha$ en fonction des $V@R_\alpha^P$ pour $P \in \mathcal{P}$, de la façon suivante :

Proposition III.17. *Soit $\alpha \in (0,1)$. Pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$,*

$$V@R_\alpha(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} V@R_\alpha^P\left(X\right)$$

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors, $\forall \epsilon > 0$, il existe $P_\epsilon \in \mathcal{P}$ tel que :

$$\begin{aligned} \inf_{P \in \mathcal{P}} -V@R_\alpha^P\left(X\right) &\geqslant -V@R_\alpha^{P_\epsilon(X)} - \epsilon \\ &\geqslant \inf\{x \in \mathbb{R},\ P_\epsilon(X \leqslant x) > \alpha\} - \epsilon \\ &\geqslant \inf\{x \in \mathbb{R},\ \exists P \in \mathcal{P}, P(X \leqslant x) > \alpha\} - \epsilon \\ &\geqslant -V@R_\alpha(X) - \epsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} V@R_\alpha^P\left(X\right) \leqslant V@R_\alpha(X)$$

Montrons l'inégalité inverse, soit

$$x \in \{y \in \mathbb{R},\ \exists P \in \mathcal{P}\ t.q.\ P(X \leqslant y) > \alpha\}$$

alors, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que

$$x \in \{y \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant y) > \alpha\}$$

Donc

$$\begin{aligned} x &\geqslant \inf\{y \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant y) > \alpha\} = -V@R_\alpha^P(X) \\ &\geqslant \inf_{P \in \mathcal{P}} -V@R_\alpha^P(X) = -\sup_{P \in \mathcal{P}} V@R_\alpha^P(X) \end{aligned}$$

Donc, on obtient l'inégalité dans l'autre sens et finalement, l'égalité désirée. □

7.2 Liens avec les mesures de risque cohérentes

Dans cette partie, nous allons voir que $V@R_\alpha$ est une mesure de risque qui n'est ni cohérente, ni convexe mais peut être approchée par des mesures de ce type.
D'abord, nous voyons facilement qu'elle vérifie les propriétés de monotonie, d'invariance par translation et donc il s'agit d'une mesure de risque monétaire sur l'ensemble sur lequel elle est finie. Or, nous avons vu, proposition III.16 que, pour tout $p \geqslant 1$, $V@R_\alpha$ est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$ donc il s'agit d'une mesure de risque monétaire sur $\mathcal{L}_p(c)$.
Cependant, nous pouvons remarquer plusieurs défauts de cette mesure de risque. D'abord, par définition elle ne s'intéresse pas aux pertes dont la probabilité d'apparition est inférieure au seuil fixé α, même si celles-ci sont très grandes. D'autre part, $V@R_\alpha$ ne vérifie pas la propriété de convexité donc n'est ni une mesure de risque convexe, ni une mesure de risque cohérente. Cette mesure de risque a donc l'inconvénient de ne pas juger moins risquée une position plus diversifiée.
Mais, de même que F. Delbaen, pour $V@R_\alpha^P$ sur L^∞, dans [37], nous pouvons établir des relations entre la mesure de risque monétaire $V@R_\alpha$ et les mesures de risque cohérentes sur $\mathcal{L}_p(c)$ (ou sur un sous-espace). Ainsi, dans un premier temps, nous caractérisons les mesures de risque ρ cohérentes sur $\mathcal{L}_p(c)$ qui dominent $V@R_\alpha$, c'est-à-dire qui vérifient que pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $V@R_\alpha(X) \leqslant \rho(X)$.

Lemme III.18. *Soient $\alpha \in]0,1[$ et ρ une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$. On note $\mathcal{Q}_\rho$ l'ensemble des mesures de probabilité qui apparaît dans le théorème de représentation, de sorte que :*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\rho} E_Q[-X]$$

Alors, $V@R_\alpha$ est dominée par ρ ssi pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$ tel que $0 \leqslant X \leqslant 1$ q.p. et tel qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ vérifiant $P(X = 1) > \alpha$, on a $\rho(-X) = 1$; en d'autres termes, il existe une probabilité $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ telle que $X = 1$ $Q - p.s.$

Démonstration du lemme III.18.
Supposons d'abord que $V@R_\alpha$ est dominée par ρ. Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$ tel que $0 \leqslant X \leqslant 1$ *q.p.*

et tel qu'il existe une probabilité $P \in \mathcal{P}$ vérifiant $P(X=1) > \alpha$. Alors, comme ρ est une mesure de risque cohérente :

$$\rho(-X) \leqslant \rho(-1) = 1$$

De plus, $P(X=1) > \alpha$ entraîne que $P(-X \leqslant -1) > \alpha$ et donc

$$V@R_\alpha(-X) \geqslant 1$$

ρ est dominée par $V@R_\alpha$, donc

$$\rho(-X) \geqslant V@R_\alpha(-X) \geqslant 1$$

Et donc $\rho(-X) = 1$. Maintenant, d'après le théorème de représentation des mesures cohérentes, le supremum est atteint et donc il existe une probabilité $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ telle que $E_Q[-X] = 1$. Etant donné que $0 \leqslant X \leqslant 1$ *q.p.*, cette inégalité est vérifiée $Q - p.s.$ et donc $X = 1$ $Q - p.s.$.
Montrons, maintenant, que la condition est suffisante.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$. Par invariance par translation de $V@R_\alpha$, quitte à considérer $X + V@R_\alpha(X)$, on peut supposer que $V@R_\alpha(X) = 0$. Ce qui nous ramène à démontrer que $\rho(X) \geqslant 0$. Pour cela, considérons $\epsilon > 0$ et ϕ_ϵ une fonction continue lipschitzienne, de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ tels que :

$$\forall x \in]-\infty, \epsilon],\ \phi_\epsilon(x) = 1,\ \forall x \in]\epsilon, 2\epsilon],\ 0 \leqslant \phi_\epsilon(x) < 1 \ et\ \forall x > 2\epsilon,\ \phi_\epsilon(x) = 0$$

Posons, $Y = \phi_\epsilon(X)$. Etant donné que

$$-V@R_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ \exists P \in \mathcal{P}, P(X \leqslant x) > \alpha\} = 0 < \epsilon$$

Il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $P(X \leqslant \epsilon) > \alpha$, ce qui implique que $P(Y=1) > \alpha$ et donc qu'il existe une probabilité $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ telle que $Y = 1$ $Q - p.s.$. D'où, nous déduisons que

$$\rho(X) \geqslant E_Q[-X] = -E_Q[XY]$$

Or, par définition de ϕ_ϵ

$$E_Q[XY] \leqslant E_Q[X\mathbf{1}_{X<2\epsilon}] \leqslant 2\epsilon P(X < 2\epsilon) \leqslant 2\epsilon$$

Donc

$$\rho(X) \geqslant -2\epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\rho(X) \geqslant 0 = V@R_\alpha(X)$. Ce qui finit la démonstration du lemme.

□

Nous pouvons maintenant établir un lien entre $V@R_\alpha$ et les mesures de risques cohérentes, plus précisément approcher $V@R_\alpha$ par au dessus, par des mesures de risque cohérentes définies sur $\mathcal{L}_p^b(c)$, dans le cas d'une position X bornée.
Pour cela, nous n'utiliserons pas exactement le résultat du lemme ci-dessus qui caractérise les mesures de risque cohérentes sur $\mathcal{L}_p(c)$ et non sur $\mathcal{L}_p^b(c)$. Mais, nous utiliserons le même genre d'idées que dans la démonstration de ce lemme, pour montrer le théorème suivant :

Théorème III.19. *Soit $\alpha \in (0,1)$, alors pour tout $X \in \mathcal{L}_p^b(c)$,*

$$V@R_\alpha(X) = \inf\{\rho(X),\ \rho \text{ mesure de risque cohérente sur } \mathcal{L}_p^b(c),\ \rho \geqslant V@R_\alpha\}.$$

Démonstration du théorème III.19.
Soit $X \in \mathcal{L}_p^b(c)$, de même que dans la démonstration précédente, on peut supposer que $V@R_\alpha(X) = 0$. Notons Θ l'ensemble des fonctions Y appartenant à $\mathcal{L}_p(c)$ telles que $0 \leqslant Y \leqslant 1$ *q.p.* et qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ vérifiant $P(Y=1) > \alpha$. En utilisant le fait que $V@R_\alpha(X) = 0$, on obtient que pour tout $\epsilon > 0$, $-\epsilon < \inf\{x \in \mathbb{R},\ \exists P \in \mathcal{P}, P(X \leqslant x) > \alpha\}$ et donc, pour tout $P \in \mathcal{P}$, $P(X \leqslant -\epsilon) \leqslant \alpha$. Nous pouvons en déduire que

$$\forall P \in \mathcal{P},\ P(X \geqslant 0) \geqslant 1 - \alpha$$

D'autre part, par définition de Θ, pour tout $Y \in \Theta$, il existe une probabilité $P_Y \in \mathcal{P}$ telle que $P_Y(Y=1) > \alpha$ et comme $P_Y(X \geqslant 0) \geqslant 1-\alpha$, $P_Y(\{X \geqslant 0\} \cap \{Y=1\}) > 0$. On peut donc définir

$$\forall Z \in \mathcal{L}_p^b(c),\ \rho(Z) = \sup_{Y \in \Theta} \sup_{P_Y \in \mathcal{P}_Y} \frac{E_{P_Y}\left[-Z\mathbf{1}_{\{X \geqslant 0\} \cap \{Y=1\}}\right]}{P_Y(\{X \geqslant 0\} \cap \{Y=1\})}$$

avec $\mathcal{P}_Y$ désignant l'ensemble des probabilités $P_Y \in \mathcal{P}$ vérifiant $P_Y(Y=1) > \alpha$. Les propriétés d'invariance par translation, d'homogénéité positive, de monotonie et de convexité de ρ se déduisent facilement des propriétés de l'espérance. D'autre part, si $Z \in \mathcal{L}_p^b(c)$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $-M \leqslant Z \leqslant M$ et donc $-M \leqslant \rho(Z) \leqslant M$. On peut en déduire que ρ est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p^b(c)$.
De plus, pour tout $Y \in \Theta$, par définition de ρ et en utilisant l'inégalité $0 \leqslant Y \leqslant 1$ *q.p.*, on obtient que $\rho(-Y) = 1$. Montrons que ceci implique, comme dans le cas d'une mesure de risque définie sur $\mathcal{L}_p(c)$(cf lemme III.18), que ρ domine $V@R_\alpha$ sur $\mathcal{L}_p^b(c)$. On utilise pour cela les mêmes idées que dans la démonstration du lemme.
Soit $Z \in \mathcal{L}_p^b(c)$, on veut montrer que $V@R_\alpha(Z) \leqslant \rho(Z)$. Par invariance par translation, quitte à considérer $Z + V@R_\alpha(Z)$ plutôt que Z, on peut supposer que $V@R_\alpha(Z) = 0$. Soit $\epsilon > 0$, considérons la fonction ϕ_ϵ définie dans le lemme III.18 et $Y = \phi_\epsilon(Z)$. De même que dans le lemme, on obtient qu'alors $Y \in \Theta$ et donc, d'après ce que nous venons de voir, que $\rho(-Y) = 1$. Nous n'avons pas de théorème de représentation et ne pouvons pas appliquer exactement les mêmes idées que pour le lemme. Mais, par définition de ϕ_ϵ, on a toujours :

$$ZY \in \mathcal{L}_p^b(c) \text{ et } ZY \leqslant 2\epsilon$$

En utilisant la monotonie de ρ, on obtient alors que

$$\rho(-ZY) \leqslant \rho(-2\epsilon) = 2\epsilon$$

D'autre part, $Z \in \mathcal{L}_p^b(c)$, donc il existe $M > 0$ tel que $-M \leqslant Z \leqslant M$, d'où

$$Z(1-Y) \leqslant M(1-Y)$$

Et, en utilisant la monotonie, l'homogénéité positive et l'invariance par translation de ρ, nous pouvons en déduire que

$$\rho(Z(1-Y)) \geqslant \rho(M(1-Y)) = M\rho((1-Y)) = M(\rho((-Y)) - 1) = 0$$

Puis, comme ρ est une mesure de risque cohérente, elle est sous additive, d'où en utilisant les inégalités précédentes

$$\rho(Z) \geqslant \rho(Z(1-Y)) - \rho(-ZY) \geqslant -2\epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\rho(Z) \geqslant 0 = V@R_\alpha(X)$. Donc, nous avons montré que ρ domine $V@R_\alpha$.
De plus, par définition de ρ, $\rho(X) \leqslant 0$ et en appliquant le résultat ci-dessus à $Z = X$, on a $\rho(X) \geqslant V@R_\alpha(X) = 0$. Donc $\rho(X) = 0 = V@R_\alpha(X)$ et la démonstration est finie.

□

8 Worst conditional expectation

Nous avons vu dans la partie précédente que $V@R_\alpha$ peut-être approchée par au dessus, du moins pour les positions bornées, par des mesures de risque cohérentes. Mais elle n'est pas convexe ce qui signifie que le risque d'un portefeuille peut être plus grand que la somme des risques qui le compose si le risque est mesuré par cette mesure de risque monétaire, comme dans le cadre classique (voir par exemple [44], [64] ou [23] pour une étude des déficiences de la $V@R_\alpha^P$ qui sont les mêmes que dans notre cadre). Dans cette partie, nous cherchons à définir une mesure de risque qui contrairement à la $V@R_\alpha$, soit cohérente et qui la domine. Une première tentative dans ce sens est d'introduire une mesure de risque analogue à celle appelée "Worst Conditional Expectation" définie dans [15] dans le cas où l'on se restreint à $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dans notre cadre, c'est-à-dire sans se donner une probabilité connue régissant le marché, mais un ensemble de probabilités possibles. Dans cette partie, nous définissons une mesure de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$ pour p quelconque appartenant à $[1; +\infty[$.

Définition III.20. *Soit $\alpha \in (0,1)$. On pose*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ WCE_\alpha(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sup\{E_P[-X|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\}$$

Proposition III.21. *WCE_α est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$*

Démonstration.
Les propriétés de monotonie, d'invariance par translation et d'homogénéité positive sont faciles à vérifier.
Montrons la propriété de convexité. Soit $P \in \mathcal{P}$, soit $A \in \mathcal{B}$, un événement tel que $P(A) > \alpha$, soit $\lambda \in (0,1)$, alors

$$E_P[\lambda X + (1-\lambda) Y|A] = \lambda E_P[X|A] + (1-\lambda) E_P[Y|A]$$

Donc, en passant à l' infimum, on a pour tout $P \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
& \inf\{E_P[\lambda X + (1-\lambda) Y|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \\
= \ & \inf\{\lambda E_P[X|A] + (1-\lambda) E_P[Y|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \\
\geqslant \ & \lambda \inf\{E_P[X|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} + (1-\lambda) \inf\{E_P[Y|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in \mathcal{P}$, on peut, de même, passer à l' infimum sur les $P \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} & \inf_{P\in\mathcal{P}} \inf\{E_P\left[\lambda X + (1-\lambda) Y|A\right];\ P(A) > \alpha\} \\ \geqslant\ & \lambda \inf_{P\in\mathcal{P}} \inf\{E_P\left[X|A\right];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \\ & + (1-\lambda) \inf_{P\in\mathcal{P}} \inf\{E_P\left[Y|A\right];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$WCE_\alpha(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda WCE_\alpha(X) + (1-\lambda) WCE_\alpha(Y)$$

WCE_α vérifie donc la propriété de convexité.
Reste à montrer que WCE_α est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$. Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors

$$\begin{aligned} |WCE_\alpha(X)| &= \left|\sup_{P\in\mathcal{P}} \sup\{E_P[-X|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\}\right| \\ &\leqslant \sup_{P\in\mathcal{P}} \sup\{|E_P[-X|A]|;\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \\ &\leqslant \sup_{P\in\mathcal{P}} \sup\left\{\left|\frac{E_P[-X\mathbf{1}_A]}{P(A)}\right|;\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\right\} \\ &\leqslant \frac{c_p(X)}{\alpha} < +\infty \end{aligned}$$

Donc WCE_α est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$ et la preuve est complète.

□

De même que dans le cas $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, nous pouvons montrer que cette mesure de risque est toujours plus grande que la "Value at Risk" (de notre modèle, c'est-à-dire associée à un ensemble de probabilités).

Proposition III.22. *Soit* $\alpha \in (0,1)$,

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ WCE_\alpha(X) \geqslant V@R_\alpha(X)$$

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$ et soit $P \in \mathcal{P}$, alors, pour tout réel x tel que $P(X \leqslant x) > \alpha$,

$$\sup\{E_P[-X|A]; A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \geqslant E_P[-X|X \leqslant x] \geqslant -x$$

Donc, pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \sup\{E_P[-X|A]; A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} &\geqslant -\inf\{x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) > \alpha\} \\ &\geqslant V@R_\alpha^P(X) \end{aligned}$$

Ceci étant vérifié pour tout $P \in \mathcal{P}$, en passant au supremum sur ces P et en utilisant la proposition III.17, on obtient l'inégalité :

$$WCE_\alpha(X) \geqslant V@R_\alpha(X)$$

□

9 Average value at risk

Dans cette partie, on se restreint au cas où $p > 1$.

9.1 Définition

Nous cherchons une autre alternative à la $V@R_\alpha$ qui soit plus satisfaisante dans un certain sens. Rappelons que, si on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dans [7] par exemple, une autre mesure de risque appelée l'"average value at risk" sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est définie sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par :

$$\forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), \ AV@R_\lambda^P(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\alpha^P(X)\, d\alpha$$

Dans notre cadre, nous voulons définir une mesure de risque analogue à celle-ci et "corrigeant" certains défauts de la "Value at Risk". Ainsi, nous avons vu que la $V@R_\alpha$ ne prend pas en compte les pertes qui se produisent avec une probabilité inférieure au seuil fixé α. Une alternative naturelle pour surmonter ce problème est de considérer pour chaque scénario, chaque probabilité P la moyenne des pertes se produisant avec probabilité inférieure à α, puis de prendre le pire scénario possible, c'est-à-dire le supremum sur l'ensemble des probabilités. Nous introduisons ainsi une mesure de risque que nous appellerons "Average value at risk" et noterons $AV@R_\alpha$.

Définition III.23. *Soit $\lambda \in (0,1)$ et soit $p > 1$. On pose*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c), \ AV@R_\lambda(X) = \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\alpha^P(X)\, d\alpha\right)$$

Ainsi, le lien avec la définition de [7] est facile :

$$\forall X \in L^\infty(P), \ AV@R_\lambda(X) = \sup_{P\in\mathcal{P}} AV@R_\lambda^P(X)$$

Proposition III.24. *Pour tout $p > 1$, et pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $AV@R_\lambda(X)$ est bien définie et est finie.*

Démonstration.
Soit $\alpha \in (0, \lambda)$. On a déjà vu que

$$\forall P \in \mathcal{P}, \ \forall x < 0, \ P(X \leqslant x) \leqslant \frac{c_p(X)^p}{|x|^p}$$

Pour $x = -\frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}$, ceci donne :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \ P(X \leqslant x) \leqslant \alpha$$

Donc,

$$x \leqslant \inf\{y \in \mathbb{R}, \ \exists P \in \mathcal{P} \text{ tel que } P(X \leqslant y) > \alpha\}$$

Par définition de $V@R_\alpha^P$, on obtient

$$\forall P \in \mathcal{P},\ V@R_\alpha^P(X) \leqslant \frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}$$

De plus, on voit facilement que pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$ et pour tout $P \in \mathcal{P}$, $\alpha \to V@R_\alpha^P(X)$ est décroissante. Ainsi, pour tout $\alpha \in (0,\lambda)$, $V@R_\alpha^P(X) \geqslant V@R_\lambda^P(X)$.
Ainsi,

$$\forall \alpha \in (0,\lambda), \forall P \in \mathcal{P},\ V@R_\lambda^P(X) \leqslant V@R_\alpha^P(X) \leqslant \frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \tag{5}$$

Et, étant donné que

$$\lim_{x\to\infty} P(X \leqslant x) = 1,$$

$V@R_\alpha^P(X) > -\infty$ Donc, pour tout $p > 1$, $\alpha \to V@R_\alpha^P(X)$ est intégrable sur $(0,\lambda)$ et$AV@R_\lambda$ est bien définie.
De plus, si on intègre l'équation (5) entre $(0,\lambda)$, $\forall P \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} V@R_\lambda^P(X) &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\alpha^P(X)\,d\alpha \\ &\leqslant \int_0^\lambda \frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}d\alpha \leqslant \frac{p}{p-1}\frac{c_p(X)}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

On passe ensuite au supremum sur $\mathcal{P}$ et on utilise la proposition III.17 :

$$V@R_\lambda(X) \leqslant AV@R_\lambda(X) \leqslant \frac{p}{p-1}\frac{c_p(X)}{\lambda^{\frac{1}{p}}}$$

Donc $AV@R_\lambda$ est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$, pour $p > 1$.

□

9.2 Représentation et cohérence de l'$AV@R_\lambda$

Rappelons le théorème 4.39 p.184 de [7] :

Théorème III.25. *Pour $\lambda \in (0,1)$, $AV@R_\lambda^P$ est une mesure de risque cohérente sur $L^\infty(P)$ qui admet la représentation suivante :*

$$\forall X \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P),\ AV@R_\lambda^P(X) = \max_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda^P} E_Q[-X] \tag{6}$$

où $\mathcal{Q}_\lambda^P$ est un ensemble de probabilités Q absolument continues par rapport à P de densité de Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dP}$ $P-p.s.$ bornée par $\frac{1}{\lambda}$.

Nous avons dans notre cadre une représentation du même type de l'$AV@R_\lambda$, qui nous permet d'en déduire qu'il s'agit bien d'une mesure de risque cohérente.

Théorème III.26. *Pour $p > 1$, pour $\lambda \in (0,1)$, $AV@R_\lambda$ est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$ qui admet la représentation suivante :*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ AV@R_\lambda(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X] \tag{7}$$

où $\mathcal{Q}_\lambda = \{Q \in \mathcal{P}';\ \exists P \in \mathcal{P}\ t.q.\ Q \ll P \text{ et } \frac{dQ}{dP} \leqslant \frac{1}{\lambda}\ P - p.s\}$.
De plus, le supremum dans (7) est atteint (il s'agit en fait d'un maximum).

Avant de démontrer ce théorème, on peut s'intéresser aux propriétés topologiques de l'ensemble $\mathcal{Q}_\lambda$ introduit dans le théorème, et en particulier à sa compacité qui nous sera utile pour montrer que la représentation de l'$AV@R_\lambda$ est bien atteinte pour une certaine probabilité $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme III.27. *Soit $\lambda > 0$, l'ensemble $\mathcal{Q}_\lambda \subset (\mathcal{L}_p(c))^\star$ introduit dans le théorème III.26 est faiblement compact.*

Démonstration du lemme III.27.
Soit $V = \{X \in \mathcal{L}_p(c);\ c_p(X) \leqslant \lambda\}$, alors V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_1(c)$. De plus, comme $\forall X \in V$, $\forall Q \in \mathcal{Q}_\lambda$, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que Q soit absolument continue par rapport à P et que $\frac{dQ}{dP} \leqslant \frac{1}{\lambda}\ P - p.s$ et

$$\begin{aligned} |E_Q[X]| &\leqslant \left| E_P\left[\frac{dQ}{dP}X\right]\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} E_P[|X|] \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} c_p(X) \leqslant 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{Q}_\lambda \subset K = \{\Gamma \in (\mathcal{L}_p(c))^\star;\ \forall X \in V,\ |\Gamma(X)| \leqslant 1\}$$

Et d'après le de Banach Alaoglu, K est un compact pour la topologie faible étoile. Donc $\mathcal{Q}_\lambda$ est faiblement relativement compact pour la topologie faible étoile.

Reste donc à voir que $\mathcal{Q}_\lambda$ est faiblement fermé. Pour cela, prenons une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{Q}_\lambda$ qui converge faiblement vers $Q \in (\mathcal{L}_p(c))^\star$ et montrons que Q appartient à $\mathcal{Q}_\lambda$.
Ainsi Q est une forme linéaire et, par passage à la limite, comme les Q_n sont positives, Q est également positive.
On peut maintenant appliquer à Q le théorème de théorème V.31 que nous avons rappelé en annexe. Il nous donne l'existence d'une mesure positive finie μ ne chargeant pas les ensembles polaires et telle que

$$\forall f \in \mathcal{L}_p(c), E_Q[f] = \int_\Omega f(x)\mu(dx)$$

Donc Q est une probabilité qui ne charge pas les ensembles polaires. D'autre part, par définition de $\mathcal{Q}_\lambda$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathcal{P}$ tel que Q_n est absolument continue

par rapport à P_n et $\frac{dQ_n}{dP_n} < \frac{1}{\lambda}$ $P-p.s.$. Or, $\mathcal{P} \subset (\mathcal{L}_p(c))^\star$ est faiblement compact, donc quitte à extraire, on peut supposer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{L}_p(c))^\star$ vers $\widehat{P} \in \mathcal{P}$. Alors, pour toute fonction f continue bornée et positive,

$$E_Q[f] = \lim_{n\to\infty} E_{Q_n}[f] = \lim_{n\to\infty} E_{P_n}\left[\frac{dQ_n}{dP_n} f\right] \leqslant \frac{1}{\lambda} E_{\widehat{P}}[f]$$

Par conséquent, Q est absolument continue par rapport à $\widehat{P} \in \mathcal{P}$ et $\frac{dQ}{d\widehat{P}} < \frac{1}{\lambda}$ d'où $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$. La preuve est donc complète.

□

Avant de passer à la démonstration du théorème, il est utile de montrer les deux lemmes suivants qui nous permettront de passer facilement du cas où X est borné au cas où $X \in \mathcal{L}_p(c)$.

Lemme III.28. *Soient $p > 1$ et $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} AV@R_\lambda((-n) \vee X) = AV@R_\lambda(X).$$

Lemme III.29. *Soient $p > 1$ et $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} AV@R_\lambda(X \wedge n) = AV@R_\lambda(X).$$

Démonstration du lemme III.28.
La démonstration de ce lemme se sépare en plusieurs étapes :
Etape 1 : Montrons l'inégalité

$$\lim_{n\to\infty} AV@R_\lambda((-n) \vee X) \leqslant AV@R_\lambda(X).$$

Pour tout entier n, $(-n) \vee X \geqslant X$, donc d'après la propriété de monotonie de $V@R_\alpha^P$ (on déduit facilement de la définition que $V@R_\alpha^P$ est décroissante)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P, \forall \alpha \in (0,\lambda),\ V@R_\alpha^P((-n) \vee X) \leqslant V@R_\alpha^P(X)$$

D'où, en intégrant et en passant au supremum pour les $P \in \mathcal{P}$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ AV@R_\lambda((-n) \vee X) \leqslant AV@R_\lambda(X)$$

On obtient l'inégalité souhaitée en passant à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus.
Etape 2 : Montrons que pour tout $P \in \mathcal{P}$ et pour tout $\alpha \in (0,\lambda)$,

$$\forall n \geqslant \frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}},\ V@R_\alpha^P((-n) \vee X) = V@R_\alpha^P(X)$$

On a vu dans la démonstration de la proposition III.16 que :

$$\forall P \in \mathcal{P},\ x < 0,\ P(X \leqslant x) \leqslant \frac{c_p(X)^p}{|x|^p}$$

En appliquant ce résultat à $x = -\frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $-n \leqslant -\frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}$,

$$P\left(X \leqslant -n\right) \leqslant P\left(X \leqslant -\frac{c_p\left(X\right)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}\right) \leqslant \alpha$$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $P\left(X \leqslant x\right) > \alpha$, alors $x \geqslant -\frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \geqslant -n$ et donc

$$P\left(\left(\left(-n\right) \vee X\right) \leqslant x\right) = P\left(X \leqslant x\right) > \alpha$$

Nous pouvons en déduire que

$$\forall n \geqslant \frac{c_p\left(X\right)}{\alpha^{\frac{1}{p}}},\ V@R_\alpha^P\left(\left(-n\right) \vee X\right) \geqslant V@R_\alpha^P\left(X\right)$$

Nous avons montré que l'inégalité inverse était vraie pour tout entier n dans l'étape 1 de la preuve donc on obtient l'égalité annoncée.
<u>Etape 3</u> : Montrons que pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(\left(-n\right) \vee X\right) d\alpha = \int_0^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(X\right) d\alpha$$

Soit $P \in \mathcal{P}$. Pour tout $\alpha \in \left(\frac{c_p(X)^p}{n^p}, \lambda\right)$, on a l'inégalité $n \geqslant \frac{c_p(X)}{\alpha^{\frac{1}{p}}}$ et donc, d'après l'étape 2 de cette démonstration,

$$V@R_\alpha^P\left(\left(-n\right) \vee X\right) = V@R_\alpha^P\left(X\right)$$

Donc, en intégrant, on obtient :

$$\int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(\left(-n\right) \vee X\right) d\alpha = \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(X\right) d\alpha$$

De plus, suite à la définition de $AV@R_\lambda$, nous avons montré que l'application $\alpha \longrightarrow V@R_\alpha^P\left(X\right)$ est intégrable sur $(0, \lambda)$ et donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(\left(-n\right) \vee X\right) d\alpha &= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(X\right) d\alpha \\ &= \int_0^{\lambda} V@R_\alpha^P\left(X\right) d\alpha\end{aligned}$$

<u>Etape 4</u> : Montrons que pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R_\alpha^P\left(X \vee \left(-n\right)\right) d\alpha \geqslant 0$$

Dans la démonstration de la proposition III.24, on a vu que

$$\forall P \in \mathcal{P},\ \frac{c_p(X)^p}{n^p} V@R^P_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}(X \vee (-n)) \leqslant \int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X \vee (-n) \leqslant n^{p-1}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \leqslant n^{p-1}\right) = 1$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{c_p(X)^p} P\left(X \vee (-n) \leqslant n^{p-1}\right) = +\infty$$

D'où, il existe n_P tel que $\forall n \geqslant n_P,\ P(X \vee (-n) \leqslant n^{p-1}) > \frac{c_p(X)^p}{n^p}$. Nous pouvons en déduire que :

$$\forall n \geqslant n_P,\ V@R^P_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}(X \vee (-n)) \geqslant -n^{p-1}$$

Et donc, comme $p > 1$, pour tout $P \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{c_p(X)^p}{n^p} V@R^P_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}(X \vee (-n)) \\ &\geqslant \liminf_{n\to\infty} -\frac{c_p(X)^p}{n^p} n^{p-1} = 0\end{aligned}$$

<u>Etape 5</u> : Montrons le lemme.

$$\begin{aligned}&\int_0^\lambda V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha \\ =\ &\int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha + \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^\lambda V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha \\ =\ &\int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha + \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^\lambda V@R^P_\alpha(X)\, d\alpha\end{aligned}$$

Donc, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} \left(\int_0^\lambda V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha\right) \\ \geqslant\ &\sup_{P\in\mathcal{P}} \left(\liminf_{n\to\infty} \int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha + \liminf_{n\to\infty} \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^\lambda V@R^P_\alpha(X)\, d\alpha\right) \quad (8)\end{aligned}$$

D'après les résultats obtenus dans les étapes 3 et 4 de cette démonstration, pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} \int_0^{\frac{c_p(X)^p}{n^p}} V@R^P_\alpha(X \vee (-n))\, d\alpha + \liminf_{n\to\infty} \int_{\frac{c_p(X)^p}{n^p}}^\lambda V@R^P_\alpha(X)\, d\alpha \\ \geqslant\ &\int_0^\lambda V@R^P_\alpha(X)\, d\alpha\end{aligned}$$

Ces inégalités étant vraies pour tout $P \in \mathcal{P}$, on peut passer au supremum sur les $P \in \mathcal{P}$, puis déduire de l'inégalité (8) que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}} \left(\int_0^\lambda V@R_\alpha^P \left(X \vee (-n)\right) d\alpha \right) \geqslant \sup_{P\in\mathcal{P}} \int_0^\lambda V@R_\alpha^P \left(X\right) d\alpha$$

Ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} AV@R_\lambda \left((-n) \vee X\right) \geqslant AV@R_\lambda \left(X\right).$$

D'où, on peut conclure qu'on a en fait égalité.

□

Démonstration du lemme III.29.
Etant donnée l'inégalité $X \wedge n \leqslant X$ et la décroissance de $V@R_\alpha^P$, pour tout $P \in \mathcal{P}$, $V@R_\alpha^P(X \wedge n) \geqslant V@R_\alpha^P(X)$.
Montrons l'inégalité inverse. Remarquons d'abord que si $V@R_\alpha^P(X) > -n$ alors $V@R_\alpha^P(X \wedge n) > -n$. Ce qui signifie que $\inf\{x \in \mathbb{R};\ P\left(X \wedge n \leqslant x\right) > \alpha\} < n$, d'où

$$\begin{aligned}
\inf\{x \in \mathbb{R};\ P\left(X \wedge n \leqslant x\right) > \alpha\} &= \inf\{x < n;\ P\left(X \wedge n \leqslant x\right) > \alpha\} \\
&= \inf\{x < n;\ P\left(X \leqslant x\right) > \alpha\} \\
&\geqslant \inf\{x \in \mathbb{R};\ P\left(X \leqslant x\right) > \alpha\}
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie car si $x < n$ alors $P\left(X \wedge n \leqslant x\right) = P\left(X \leqslant x\right)$. Et donc, $V@R_\alpha^P(X \wedge n) \leqslant V@R_\alpha^P(X)$.

$$\forall n > -V@R_\alpha^P(X),\ V@R_\alpha^P(X \wedge n) = V@R_\alpha^P(X) \tag{9}$$

D'autre part,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall x > 0,\ P\left(X \geqslant x\right) \leqslant \frac{E_P[|X|^p]}{x^p} \leqslant \frac{c_p\left(X\right)^p}{x^p}$$

Donc, si $x > \frac{c_p(X)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{p}}}$ alors $\forall P \in \mathcal{P}$, $P\left(X \geqslant x\right) < 1-\alpha$, d'où, $P\left(X \leqslant x\right) > \alpha$. Donc,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall x > \frac{c_p\left(X\right)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{p}}},\ V@R_\alpha^P(X) \geqslant -x$$

Donc,

$$\forall P \in \mathcal{P},\ -V@R_\alpha^P(X) \leqslant \frac{c_p\left(X\right)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{p}}}$$

Puis, en utilisant, l'inéquation (9), on obtient que :

$$\forall n > \frac{c_p\left(X\right)}{(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}}, \forall P \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in (0,\lambda),\ V@R_\alpha^P(X \wedge n) = V@R_\alpha^P(X)$$

En intégrant, puis en passant au supremum, on obtient que

$$\forall n > \frac{c_p(X)}{(1-\lambda)^{\frac{1}{p}}},\ AV@R_\alpha^P(X \wedge n) = AV@R_\alpha^P(X)$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} AV@R_\lambda(X \wedge n) = AV@R_\lambda(X).$$

□

Démonstration du théorème III.26.
La démonstration de ce théorème est divisée en plusieurs étapes :
Etape 1 : Montrons que si $X \in \mathcal{L}_p(c)$ est borné quasi-partout alors la formule de représentation (7) est vérifiée.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$ borné quasi-partout, alors $X \in L^\infty(P)$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ et nous pouvons appliquer le théorème III.25 à X :

$$\begin{aligned} AV@R_\lambda(X) &= \sup_{P\in\mathcal{P}} AV@R_\lambda^P(X) \\ &= \sup_{P\in\mathcal{P}} \max_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda^P} E_Q[-X] \\ &= \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X] \end{aligned}$$

avec $\mathcal{Q}_\lambda$ est l'ensemble des probabilités Q telle qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $Q \in \mathcal{Q}_\lambda^P$. C'est-à-dire, Q est absolument continue par rapport à P et $\frac{dQ}{dP} \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Or, P ne charge pas les ensembles polaires donc Q non plus et Q appartient à $\mathcal{P}'$. Finalement, l'ensemble $\mathcal{Q}_\lambda$ est bien celui décrit dans le théorème.
Etape 2 : Montrons que la formule de représentation (7) est vérifiée pour $X \in \mathcal{L}_p(c)$.
Comme, on a l'inégalité

$$X \wedge n \leqslant ((-n) \vee X) \wedge n \leqslant (-n) \vee X$$

et la décroissance de $V@R_\alpha^P$, puis en intégrant et en passant au supremum, on obtient

$$AV@R_\lambda((-n) \vee X) \leqslant AV@R_\lambda(((-n) \vee X) \wedge n) \leqslant AV@R_\lambda(X \wedge n)$$

Comme on a vu aux lemmes 3 et 4 que les membres de gauche et de droite de l'inégalité tendent vers $AV@R_\lambda(X)$ quand n tend vers l'infini, on obtient finalement que

$$\lim_{n\to\infty} AV@R_\lambda(((-n) \vee X) \wedge n) = AV@R_\lambda(X).$$

Or, $\forall P \in \mathcal{P}$,$\forall n \in \mathbb{N}$, $(((-n) \vee X) \wedge n) \in L^\infty(P)$ donc d'après l'étape 1

$$\forall n \in \mathbb{N},\ AV@R_\lambda(((-n) \vee X) \wedge n) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-(((-n) \vee X) \wedge n)]$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$AV@R_\lambda(X) = \lim_{n\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q\left[-\left(\left((-n)\vee X\right)\wedge n\right)\right]$$

Or, d'après le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q\left[-\left(\left((-n)\vee X\right)\wedge n\right)\right] &\geqslant \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} \lim_{n\to\infty} E_Q\left[-\left(\left((-n)\vee X\right)\wedge n\right)\right]\\ &\geqslant \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X]\end{aligned}$$

Montrons l'inégalité inverse. Posons, $X_n = -\left(\left((-n)\vee X\right)\wedge n\right)$.
Or, $\forall Q \in \mathcal{Q}_\lambda$, il existe $P \in \mathcal{P}$ telle que Q est absolument continue par rapport à P, $\frac{dQ}{dP} \leqslant \frac{1}{\lambda}$ et

$$\begin{aligned}\left|E_Q[-X] - E_Q[-X_n]\right| &\leqslant E_Q\left[|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right]\\ &\leqslant E_P\left[\frac{dQ}{dP}|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right]\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}E_P\left[|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right]\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}E_P\left[|X|^p\mathbf{1}_{|X|>n}\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}c_p\left(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\forall Q \in \mathcal{Q}_\lambda, \forall n \in \mathbb{N},\ E_Q[-X_n] \leqslant \frac{1}{\lambda}c_p\left(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right) + E_Q[-X]$$

En passant au supremum sur les $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X_n] \leqslant \frac{1}{\lambda}c_p\left(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right) + \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X]$$

Puis, d'après le théorème de [11] que nous avons rappelé dans la première partie (théorème I.18).

$$\lim_{n\to\infty} c_p\left(|X|\mathbf{1}_{|X|>n}\right) = 0$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X_n] \leqslant \sup_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X]$$

<u>Etape 3</u> : Montrons que le supremum de la formule (7) est atteint pour une probabilité $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$.
D'après la formule (7), il existe $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}_\lambda$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} E_{Q_n}[-X] = AV@R_\lambda(X)$$

D'après le lemme III.27, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{L}_p(c))^\star$ vers $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$. Ce qui signifie que

$$\lim_{n\to\infty} E_{Q_n}[-X] = E_Q[-X]$$

D'où Q est la probabilité recherchée et le supremum dans la formule (7) est en fait un maximum.
Etape 4 : Montrons que $AV@R_\lambda$ est une mesure de risque cohérente.
A partir de la formule de représentation (7), les propriétés de monotonie, d'invariance par translation, de convexité et d'homogénéité sont évidentes. Donc $AV@R_\lambda$ est une mesure de risque cohérente et la démonstration est complète.

□

Ce théorème nous donne une représentation de l'$AV@R_\lambda$ et le fait qu'il s'agit bien d'une mesure de risque convexe. Nous pouvons en déduire la continuité de cette application :

Corollaire III.30. *L'application $X \longrightarrow AV@R_\lambda(X)$ est continue sur $\mathcal{L}_p(c)$.*

Démonstration.
On vient de montrer que $AV@R_\lambda$ est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$. Or, toute mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$ est continue donc on obtient le résultat.

□

9.3 Comparaison avec la $V@R_\alpha$

Le but de cette partie est de comparer, pour un α fixé, $AV@R_\alpha$, $V@R_\alpha$ et WCE_α.

Proposition III.31. *Soient $p > 1$, $\alpha \in (0,1)$, pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$,*

$$V@R_\alpha(X) \leqslant WCE_\alpha(X) \leqslant AV@R_\alpha(X)$$

Démonstration.
L'inégalité de droite est la proposition (III.22), montrons celle de gauche. Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, soit P une probabilité appartenant à $\mathcal{P}$ et un événement $A \in \mathcal{B}$, tel que $P(A) > \alpha$, posons

$$Q_A = P(.|A)$$

Alors Q_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$ absolument continue par rapport à P et

$$\forall B \in \mathcal{B},\ Q_A(B) = P(B|A) \leqslant \frac{P(B)}{P(A)} < \frac{P(B)}{\alpha}$$

D'où

$$\frac{dQ_A}{dP} < \frac{1}{\alpha}$$

Ce qui signifie que Q_A appartient à $\mathcal{Q}_\alpha$ et donc

$$E_P[-X|A] = E_{Q_A}[-X] \leqslant \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\alpha} E_Q[-X]$$

Or, d'après le théorème III.26, $AV@R_\lambda(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X]$ et comme l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $P \in \mathcal{P}$ et pour tout $A \in \mathcal{B}$ tel que $P(A) > \alpha$,

$$WCE_\alpha(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sup\{E_P[-X|A];\ A \in \mathcal{B},\ P(A) > \alpha\} \leqslant AV@R_\alpha(X)$$

□

Quatrième partie

Inf-convolution et couverture de risque non-tradable

1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la connaissance et la gestion du risque était un enjeu important de la finance. Pour mieux mesurer le risque, nous avons introduit la notion de mesure de risque et donné quelques exemples définis sur $\mathcal{L}_p(c)$ et quelques propriétés. Dans ce chapitre, nous verrons comment les mesures de risque peuvent nous permettre de modéliser un marché de plus en plus compliqué qui a vu l'apparition de produits de plus en plus proches de ceux proposés par les compagnies d'assurance.
Ainsi, classiquement, sur le marché il existe des options d'achat ou de vente ("put" et "call") qui permettent à un investisseur de se couvrir sur l'évolution du prix d'un actif. Ce type de contrat lui donne le droit d'acheter ou de vendre selon le type de l'option un certain actif, à une date T et à un prix K fixés à l'avance. Mais un investisseur peut avoir envie de couvrir le risque de son portefeuille de manière moins directe et plus ciblée. Par exemple, il peut vouloir couvrir son portefeuille contre un risque non négociable sur le marché qui peut-être lié à la météo, à une catastrophe naturelle, à une attaque terroriste ou encore à n'importe quel risque général des assurances contre lesquels ils veulent se couvrir, par exemple l'allongement de la durée de vie. Ce genre de produits de couverture partielle d'un risque non lié à un produit financier qui était jusqu'à récemment réservé au marché de l'assurance, a fait son apparition sur les marchés financiers. Ils ont donc fait l'objet de récentes études dans différents papiers, par exemple dans des articles de N. El Karoui et R. Rouge ([43]), de M. Davis ([35]) ou N. El Karoui et P. Barrieu ([24]).
Dans la suite, nous considérons un agent qui doit faire face à un risque non échangeable sur le marché (il n'existe pas d'actif sous-jacent) pour la somme $X(\theta)$ et nous voulons étudier la possibilité d'émettre et donc de donner un prix à un contrat qui permette à l'agent possédant $X(\theta)$ de se couvrir au moins partiellement sur ce risque, c'est-à-dire de diminuer le risque de sa position.
P. Barrieu et N. El Karoui se sont intéressées à ce genre de problématiques dans l'article [24], dans un cadre où on a une probabilité fixée P et des positions financières qui appartiennent à $L^\infty(P, \Omega)$. Dans ce cadre, elles ont développé une méthode de construction optimale de produit financier qui couvre un risque non échangeable sur le marché. L'idée est de minimiser le risque de l'acheteur du contrat sous la contrainte de ne pas augmenter le risque du vendeur. De plus, chaque agent a la possibilité d'investir la somme qui lui reste dans le marché financier, mais avec un accès différent à celui-ci (ce qui correspond à considérer deux agents de type différents, par exemple une compagnie d'assurance et une banque). Pour cela, l'outil approprié est l'inf-convolution de mesure de risque.
Le but de cette partie est de montrer que ce type de méthode fonctionne également dans notre cadre d'étude, avec des positions financières définies quasi-partout et un ensemble de modèles possibles (non dominés). Nous allons dans un premier temps définir des opérations qui laissent stable l'ensemble des mesures de risque convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$, comme l'inf-convolution ou la dilatation qui nous permettront de définir d'autres mesures de risque. Puis nous nous attaquerons au problème de transfert optimal de risque non échangeable et nous verrons que nous obtenons des résultats proches de ceux obtenus dans [24].

2 Supremum de mesures de risque convexes

La première opération sur les mesures de risque à laquelle nous nous intéressons est le passage au supremum. Nous aimerions savoir si le nouvel objet ainsi obtenu est une mesure de risque convexe, et si c'est le cas si nous pouvons exprimer une fonction de pénalité en fonction des pénalités des autres mesures de risque.

Proposition IV.1. *Soit I un ensemble d'indices. On suppose que pour tout $i \in I$, ρ_i est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$, de fonctions de pénalité α_i. Supposons également que $\forall X \in \mathcal{L}_p(c)$, $\sup_{i\in I} \rho_i(X) < +\infty$, alors l'application qui à tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$ associe*

$$\rho(X) = \sup_{i\in I} \rho_i(X)$$

est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ qui peut-être représentée par la fonction de pénalité α définie par

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ \alpha(Q) = \inf_{i\in I} \alpha_i(Q)$$

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors en utilisant la représentation des mesures ρ_i à l'aide des pénalités α_i, on obtient

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \sup_{i\in I}\left(\sup_{Q\in\mathcal{P}'}\left(E_Q[-X] - \alpha_i(Q)\right)\right) \\
&= \sup_{Q\in\mathcal{P}'}\left(E_Q[-X] - \inf_{i\in I}\alpha_i(Q)\right) \\
&= \sup_{Q\in\mathcal{P}'}\left(E_Q[-X] - \alpha(Q)\right)
\end{aligned}$$

où $\alpha(Q) = \inf_{i\in I} \alpha_i(Q)$. Or par hypothèse $\rho(0) < +\infty$ donc α est minoré et il s'agit bien d'une fonction de pénalité. De plus, par hypothèse ρ est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$ donc il s'agit bien d'une mesure de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$ que l'on peut représenter par la fonction de pénalité α. □

3 Inf-convolution des mesures de risque

Le but de cette partie est de montrer que nous pouvons, de même que dans le cas des mesures de risque définies sur un ensemble de fonctions mesurables bornées (cf [24]), définir l'inf-convolution de deux mesures de risque convexes. Nous verrons dans les parties suivantes, l'utilisation que nous pouvons faire de cet outil.

3.1 Définition et premières propriétés

Nous définissons l'opération d'inf-convolution entre deux mesures de risque de la même manière que dans [24] :

Définition IV.2. *Soient ρ_1 et ρ_2 deux mesures de risque convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$, avec pour fonctions de pénalités α_1 et α_2. On définit :*

$$\begin{array}{rccl} \rho_1 \square \rho_2 = \rho_{1,2} : & \mathcal{L}_p(c) & \longmapsto & \overline{\mathbb{R}} \\ & X & \longrightarrow & \rho_{1,2}(X) = \inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} (\rho_1(X-H) + \rho_2(H)) \end{array}$$

Théorème IV.3. *Si $\rho_{1,2}$ est finie alors $\rho_{1,2}$ est une mesure de risque convexe de fonction de pénalité $\alpha_{1,2}$ telle que*

$$\forall Q \in \mathcal{P}, \quad \alpha_{1,2}(Q) = \alpha_1(Q) + \alpha_2(Q)$$

Démonstration.
La propriété de monotonie de $\rho_{1,2}$ découle de celle de ρ_1 et de ρ_2.
L'invariance par translation de $\rho_{1,2}$ découle de celle ρ_1.
Montrons la convexité de $\rho_{1,2}$: soient $\lambda \in [0;1]$, $X, Y \in \mathcal{L}_p(c)$,

$$\rho_{1,2}(\lambda X + (1-\lambda) Y) = \inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} \rho_1(\lambda X + (1-\lambda) Y - H) + \rho_2(H)$$

Donc, $\forall H_1, H_2 \in \mathcal{L}_p$,

$$\begin{array}{rl} & \rho_{1,2}(\lambda X + (1-\lambda) Y) \\ \leqslant & \rho_1(\lambda X + (1-\lambda) Y - (\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2)) + \rho_2(\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2) \end{array}$$

Puis par convexité de ρ_1 et ρ_2,

$$\leqslant \lambda \rho_1(X - H_1) + (1-\lambda) \rho_1(Y - H_2) + \lambda \rho_2(H_2) + (1-\lambda) \rho_2(H_2)$$

Puis on prend l'infimum pour les $H_1 \in \mathcal{L}_p$ et pour les $H_2 \in \mathcal{L}_p$:

$$\leqslant \lambda \rho_1 \square \rho_2(X) + (1-\lambda) \rho_1 \square \rho_2(Y)$$

Donc, $\rho_1 \square \rho_2$ est convexe et finalement, comme par hypothèse cette fonction est finie, il s'agit bien d'une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$.
Exprimons, maintenant, sa fonction de pénalité en fonction de celles de ρ_1 et ρ_2. Soit $Q \in \mathcal{P}'$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{1,2}(Q) & = & \sup_{X \in \mathcal{L}_p} (E_Q[-X] - \rho_{1,2}(X)) \\ & = & \sup_{X \in \mathcal{L}_p} \left(E_Q[-X] - \inf_{H \in \mathcal{L}_1(c)} (\rho_1(X-H) + \rho_2(H)) \right) \\ & = & \sup_{X \in \mathcal{L}_p} \sup_{H \in \mathcal{L}_p} (E_Q[-X] - \rho_1(X-H) - \rho_2(H)) \\ & = & \sup_{X \in \mathcal{L}_p} \sup_{H \in \mathcal{L}_p} (E_Q[-(X-H)] - \rho_1(X-H) + E_Q[-H] - \rho_2(H)) \\ & = & \sup_{X \in \mathcal{L}_p} \sup_{H \in \mathcal{L}_p} (E_Q[-(X)] - \rho_1(X) + E_Q[-H] - \rho_2(H)) \\ & = & \alpha_1(Q) + \alpha_2(Q) \end{array}$$

□

On obtient ainsi une propriété de stabilité des mesures de risque convexes, ainsi, en faisant l'inf-convolution de deux mesures de risque convexes on obtient encore une mesure de risque convexe.

Remarque Ce théorème, nous permet de remarquer que

$$\rho_1 \Box \rho_2 = \rho_2 \Box \rho_1$$

3.2 Premier exemple d'inf-convolution

Soit ρ une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ de fonction de pénalité α_ρ.
On se donne un espace convexe $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_p(c)$.
Comme pour la proposition III.10, on définit alors la mesure de risque $\nu_\mathcal{H}$ sur $\Pi = \{X \in \mathcal{L}_p(c) \text{ t.q. } -\infty < \nu_\mathcal{H}(X) < +\infty\}$ par :

$$\nu_\mathcal{H}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}; \exists \zeta \in \mathcal{H},\ m + X \geqslant \zeta\}$$

Supposons que $\forall X \in \mathcal{L}_p(c)$, $-\infty < \nu_\mathcal{H}(X) < +\infty$, c'est-à-dire $\Pi = \mathcal{L}_p(c)$ alors $\nu_\mathcal{H}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ et nous pouvons lui associer une fonction de pénalité que nous noterons $\alpha_\mathcal{H}$. Considérons l'inf-convolution de cette mesure de risque avec ρ :

Proposition IV.4. *Supposons que pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $\nu_\mathcal{H}(X)$ est fini et que $\inf_{H\in\mathcal{H}} \rho(X-H) > -\infty$, alors*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c),\ \rho \Box \nu_\mathcal{H}(X) = \inf_{H\in\mathcal{H}} \rho(X-H)$$

Et la fonction $\rho \Box \nu_\mathcal{H}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ de fonction de pénalité α telle que :

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ \alpha(Q) = \alpha_\mathcal{H}(Q) + \alpha_\rho(Q)$$

Démonstration.
Par définition,

$$\begin{aligned}
\rho \Box \nu_\mathcal{H}(X) &= \inf_{H\in\mathcal{L}_p(c)} (\rho(X-H) + \nu_\mathcal{H}(H)) \\
&\leqslant \inf_{H\in\mathcal{H}} (\rho(X-H) + \nu_\mathcal{H}(H)) \\
&\leqslant \inf_{H\in\mathcal{H}} \rho(X-H)
\end{aligned}$$

car, par définition de $\nu_\mathcal{H}$, si $H \in \mathcal{H}$ alors $\nu_\mathcal{H}(H) \leqslant 0$.
De plus, par invariance par translation de la mesure de risque ν, pour tout $H \in \mathcal{L}_p(c)$:

$$\nu_\mathcal{H}(H + \nu_\mathcal{H}(H)) = \nu_\mathcal{H}(H) - \nu_\mathcal{H}(H) = 0$$

Donc, par définition de $\nu_\mathcal{H}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\zeta \in \mathcal{H}$ tel que $\epsilon + H + \nu_\mathcal{H}(H) \geqslant \zeta$.
Puis, par invariance par translation de ρ et $\nu_\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\rho(X-H) + \nu_\mathcal{H}(H) &= \rho(X - (\epsilon + H + \nu_\mathcal{H}(H))) + \nu_\mathcal{H}(\epsilon + H + \nu(H)) \\
&= \rho(X - (\epsilon + H + \nu(H))) - \epsilon
\end{aligned}$$

Or, $X - (\epsilon + H + \nu_{\mathcal{H}}(H)) \leqslant X - \zeta$, donc, par monotonie de ρ :

$$\rho(X - (\epsilon + H + \nu_{\mathcal{H}}(H))) \geqslant \rho(X - \zeta)$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\rho(X - H) + \nu_{\mathcal{H}}(H) \geqslant \rho(X - \zeta) - \epsilon \geqslant \inf_{\zeta \in \mathcal{H}} \rho(X - \zeta) - \epsilon$$

Donc, pour tout $H \in \mathcal{L}_p(c)$,

$$\rho(X - H) + \nu_{\mathcal{H}}(H) \geqslant \inf_{\zeta \in \mathcal{H}} \rho(X - \zeta)$$

Puis, en prenant l'infimum sur les $H \in \mathcal{L}_p(c)$:

$$\inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} (\rho(X - H) + \nu_{\mathcal{H}}(H)) \geqslant \inf_{\zeta \in \mathcal{H}} \rho(X - \zeta)$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\rho \square \nu_{\mathcal{H}}(X) = \inf_{H \in \mathcal{H}} \rho(X - H)$$

D'après la proposition précédente et le fait que ρ soit finie et $\inf_{H \in \mathcal{H}} \rho(X - H) > -\infty$ sur $\mathcal{L}_p(c)$, $\rho \square \nu_{\mathcal{H}}$ est finie sur $\mathcal{L}_p(c)$. Donc, d'après le théorème IV.3, $\rho \square \nu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ de fonction de pénalité α vérifiant la propriété ci-dessus.

□

Remarque On peut remarquer que même si l'hypothèse : $\forall X \in \mathcal{L}_p(c)$, $-\infty < \nu_{\mathcal{H}}(X) < +\infty$ n'est pas vérifiée, l'application qui à $X \in \mathcal{L}_p(c)$ associe $\inf_{H \in \mathcal{H}} \rho(X - H)$ définit une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$. En effet, les propriétés de monotonie et d'invariance par translation se déduisent facilement de celles de ρ. Pour la propriété de convexité la démonstration est la même que pour montrer la propriété de convexité dans le théorème IV.3. Enfin, pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, $\rho(X)$ est finie et $\inf_{H \in \mathcal{H}} \rho(X - H) > -\infty$ donc $\inf_{H \in \mathcal{H}} \rho(X - H)$ est fini. Mais, la présentation à l'aide d'une inf-convolution est une façon robuste de présenter les choses (qui se conserve lorsque l'on a deux agents ayant accès au marché).

4 Mesure de risque dilatée

4.1 Définitions et propriétés

Nous avons vu dans la partie précédente que pour les mesures de risque cohérentes, la mesure de risque varie linéairement par rapport à la taille de la position. Mais dans le cas des mesures de risque convexes ce n'est plus le cas et il est donc assez naturel de considérer la relation entre la tolérance au risque et la taille de la position. Pour cela on part d'une mesure de risque convexe de base ρ. Puis, le coefficient de tolérance au risque est introduit comme étant un paramètre décrivant la façon dont un agent pénalise une position par rapport à la mesure de risque de base :

Définition IV.5. *Soit ρ une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ avec une fonction de pénalité α et soit $\gamma > 0$ un coefficient de tolérance au risque. On définit la mesure de risque dilatée ρ_γ associée à ρ et γ par :*

$$\forall X \in \mathcal{L}_p(c), \quad \rho_\gamma(X) = \gamma\rho\left(\frac{1}{\gamma}X\right)$$

Remarque Dans la littérature, les mesures de risque sont plutôt dilatées par un coefficient d'aversion au risque qui est l'inverse de ce que nous avons appelé coefficient de tolérance au risque et souvent cela est fait dans le cas de la mesure de risque entropique (cf [43]). Nous avons généralisé cela à toute mesure de risque comme dans [24] et avons pris le parti de travailler avec le coefficient de tolérance au risque car lorsque nous regarderons l'inf-convolution de deux mesures de risque dilatées, nous verrons que l'on obtient une mesure de risque dont le coefficient de tolérance au risque s'écrit plus facilement à partir de ceux des mesures de départ (comme une somme).

Propriété IV.6. *La mesure de risque dilatée ρ_γ associée à ρ et γ est bien une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ et la fonction de pénalité α_{ρ_γ} vérifie :*

$$\forall Q \in \mathcal{P}, \quad \alpha_{\rho_\gamma}(Q) = \gamma\alpha(Q)$$

Démonstration.
Les propriétés d'invariance par translation, de monotonie et de convexité se déduisent facilement de celle de ρ, ainsi que la finitude sur $\mathcal{L}_p$. Donc ρ_γ est une mesure de risque sur $\mathcal{L}_p$ et nous pouvons lui associer une fonction de pénalité α_γ qui vérifie : pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\alpha_{\rho_\gamma}(P) = \sup_{X\in\mathcal{L}_1(c)} \left(E_P[-X] - \rho_\gamma(X)\right) = \sup_{X\in\mathcal{L}_p(c)} \left(E_P[-X] - \gamma\rho\left(\frac{1}{\gamma}X\right)\right)$$

$$= \sup_{X\in\mathcal{L}_p(c)} \left(E_P[-\gamma X] - \gamma\rho(X)\right) = \gamma\alpha(Q)$$

□

4.2 Exemple

Nous pouvons étudier le cas particulier de mesures de risque associées à la fonction de perte l définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ l(x) = (x)^+$$

Nous noterons alors :

$$\rho_{l,x_0} = \rho_{+,x_0}$$

Dans, ce cas les mesures dilatées peuvent s'écrire comme des mesures du même type :

Proposition IV.7. *Pour tout $\gamma > 0$, $\rho_{+,\gamma x_0}$ est la mesure de risque dilatée associée à ρ_{+,x_0} et γ.*

Démonstration.
Soient $\gamma > 0$ et $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors la mesure de risque dilatée associée à ρ_{+,x_0} et γ vérifie :

$$\begin{aligned}
\rho^{\gamma}_{+,x_0}(X) &= \gamma \inf \left\{ m \in \mathbb{R};\ \forall P \in \mathcal{P}',\ E_P \left[\left(-m - \frac{X}{\gamma} \right)^+ \right] \leqslant x_0 \right\} \\
&= \gamma \inf \left\{ \frac{m}{\gamma}, m \in \mathbb{R};\ \forall P \in \mathcal{P}',\ E_P \left[(-m - X)^+ \right] \leqslant \gamma x_0 \right\} \\
&= \rho_{+,\gamma x_0}(X)
\end{aligned}$$

□

4.3 Quelques propriétés

Ces mesures de risque dilatées présentent quelques propriétés intéressantes que nous présentons dans ce paragraphe.

Propriété IV.8. *Soit ρ une mesure de risque convexe. Pour tout $X \in \mathcal{L}_\infty(c)$, la fonction*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^\star_+ & \longmapsto & \mathbb{R} \\
\gamma & \longrightarrow & \gamma\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) - \gamma\rho(0)
\end{array}$$

est décroissante

Démonstration.
Soient γ et γ' tels que $0 < \gamma \leqslant \gamma'$, alors, par convexité de ρ, on obtient :

$$\frac{\gamma}{\gamma'}\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) + \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma'}\rho(0) \geqslant \rho\left(\frac{X}{\gamma'}\right)$$

Donc

$$\gamma\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) - \gamma\rho(0) \geqslant \gamma'\rho\left(\frac{X}{\gamma'}\right) - \gamma'\rho(0)$$

Donc, on a démontré la propriété.

□

Propriété IV.9. *Soit ρ une mesure de risque convexe, alors pour tout $\gamma, \gamma' > 0$,*

$$(\rho_\gamma)_{\gamma'} = \rho_{\gamma\gamma'}$$

Démonstration.
Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition des mesures dilatées.

□

Propriété IV.10. *Soit ρ une mesure de risque convexe, alors ρ est une mesure de risque cohérente ssi pour tout $\gamma > 0$, $\rho_\gamma = \rho$.*

Démonstration.
Pour tout $\gamma > 0$, $\rho_\gamma = \rho$ ssi pour tout $X \in \mathcal{L}_1(c)$, pour tout $\gamma > 0$, $\rho(\gamma X) = \gamma\rho(X)$. Donc la propriété d'homogénéité positive est vérifiée par ρ qui est donc une mesure de risque cohérente.

□

4.4 Inf-convolution de mesures de risque dilatées

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de ces familles de mesures de risque dilatées vis à vis de l'opération d'inf-convolution.
Considérons d'abord l'inf-convolution de deux mesures de risque de même coefficient de tolérance au risque γ mais lié à des mesures de bases ρ et ρ' différentes

Proposition IV.11.

$$\rho_\gamma \square \rho'_\gamma = (\rho \square \rho')_\gamma$$

Démonstration.
Il s'agit d'une conséquence immédiate des définitions. □

Dans les deux théorèmes qui suivent, on s'intéresse cette fois à l'inf-convolution de deux mesures de risque dilatées issues d'une même mesure de risque de base ρ. On peut alors écrire la mesure de risque obtenue comme une mesure de risque dilatée issu de ρ et de plus on obtient l'existence et la formule explicite du $H \in \mathcal{L}_p(c)$ qui réalise l'infimum de cette inf-convolution.

Théorème IV.12. *Soit ρ une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ alors*

$$\forall \gamma, \gamma' > 0, \quad \rho_\gamma \square \rho_{\gamma'} = \rho_{\gamma+\gamma'}$$

Démonstration.
Montrons d'abord que $\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}$ est bien une mesure de risque. D'après le théorème IV.3, il suffit pour cela de montrer qu'elle est finie. Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$,

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}(X) &= \inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_\gamma(X-H) + \rho_{\gamma'}(H)\right) = \inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\gamma \rho\left(\frac{X-H}{\gamma}\right) + \gamma' \rho\left(\frac{H}{\gamma'}\right)\right) \\
&= \inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} (\gamma+\gamma') \left(\frac{\gamma}{\gamma+\gamma'} \rho\left(\frac{X-H}{\gamma}\right) + \frac{\gamma'}{\gamma+\gamma'} \rho\left(\frac{H}{\gamma'}\right)\right)
\end{aligned}$$

Par convexité de ρ

$$\geqslant (\gamma+\gamma') \rho\left(\frac{X}{\gamma+\gamma'}\right) > -\infty$$

Donc $\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}$ est finie et il s'agit, d'après le théorème IV.3, d'une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$.
De plus, par définition de $\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}$ et de ρ_γ, $\forall H \in \mathcal{L}_p(c)$,

$$\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}(X) \leqslant \gamma \rho\left(\frac{X-H}{\gamma}\right) + \gamma' \rho\left(\frac{H}{\gamma'}\right)$$

On applique cela pour $H = \frac{\gamma'}{\gamma+\gamma'} X$ (si $X \in \mathcal{L}_p(c)$ alors H ainsi défini vérifie $H \in \mathcal{L}_p(c)$) :

$$\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}(X) \leqslant (\gamma+\gamma') \rho\left(\frac{X}{\gamma+\gamma'}\right)$$

Avec, l'inégalité obtenue précédemment dans la démonstration, cela donne que pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$,

$$\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}(X) = (\gamma + \gamma')\,\rho\left(\frac{X}{\gamma + \gamma'}\right) = \rho_{\gamma+\gamma'}(X)$$

□

Remarque Une conséquence de ce théorème est que l'élément obtenu par inf-convolution de deux mesures de risque dilatées de même mesure de base est une mesure de risque convexe définie sur $\mathcal{L}_p(c)$.

Dans ce cas particulier d'inf-convolution de mesure de risque dilatée, l'infimum est atteint et nous pouvons exprimer de façon explicite l'élément de $\mathcal{L}_p$ qui réalise ce minimum.

Théorème IV.13. *On optimise*

$$\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}(X) = \rho_{\gamma+\gamma'}(X) = \inf_{H \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_\gamma(X - H) + \rho_{\gamma'}(H)\right)$$

en $H^\star = \frac{\gamma'}{\gamma'+\gamma} X$

Démonstration.
Dans la démonstration du théorème précédent (théorème IV.12), on a vu que pour $H \in \mathcal{L}_p(c)$:

$$\rho_\gamma \square \rho_{\gamma'}(X) = \rho_\gamma(X - H) + \rho_{\gamma'}(H) = (\gamma + \gamma')\,\rho\left(\frac{X}{\gamma + \gamma'}\right)$$

Ce qui donne le résultat du théorème.

□

4.5 Résultats limites

Mesure de risque marginal

Etudions maintenant le comportement d'une famille de mesures de risque γ-tolérante associée à une mesure de risque convexe ρ lorsque le coefficient de tolérance au risque γ tend vers l'infini. En particulier, nous voulons savoir si en faisant tendre ce coefficient vers l'infini, nous obtenons encore une mesure de risque qui vérifie des propriétés intéressantes (convexité ou cohérence).

Théorème IV.14. *Soit ρ une mesure de risque de fonction de pénalité α, telle que $\rho(0) = 0$. Notons $\mathcal{P}'$ l'ensemble de probabilités vérifiant la représentation :*

$$\rho(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}'} \left(E_P[X] - \alpha(Q)\right)$$

On définit la mesure de risque marginal ρ_∞ pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$ par :

$$\rho_\infty(X) = \lim_{\gamma \to \infty} \rho_\gamma(X)$$

Alors ρ_∞ est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$, de fonction de pénalité α_∞ qui vérifie :

$$\alpha_\infty(Q) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha(Q) = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\rho_\infty(X) = \sup\{E_Q[-X];\ Q \in \mathcal{P}' \text{ tel que } \alpha(Q) = 0\}$$

Démonstration.
D'après la propriété IV.8, pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, la fonction $\gamma \longrightarrow \rho_\gamma(X)$ est décroissante. Donc, on peut définir $\rho_\infty(X)$ (la limite existe).
Montrons que ρ_∞ est une mesure de risque :
Soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, comme la fonction $\gamma \longrightarrow \rho_\gamma(X)$ est décroissante :

$$\forall \gamma > 1,\ \rho_\gamma(X) \leqslant \rho(X)$$

Donc en passant à la limite quand γ tend vers l'infini, on obtient :

$$\rho_\infty(X) \leqslant \rho(X) < +\infty$$

Par hypothèse, $\rho(0) = 0$ et d'après le théorème de représentation des mesures de risque convexes, il existe $P_0 \in \mathcal{P}'$ telle que :

$$0 = \rho(0) = E_{P_0}[0] - \alpha(P_0) = -\alpha(P_0)$$

Donc, pour tout $\gamma > 0$,

$$\rho_\gamma(X) = \gamma \sup_{P \in \mathcal{P}'} \left(E_P\left[-\frac{X}{\gamma}\right] - \alpha(P) \right) \geqslant E_{P_0}[-X]$$

Or,

$$E_{P_0}[X] < +\infty \text{ car } P_0 \in (\mathcal{L}_p(c))^\star$$

Donc,

$$\rho_\infty(X) = \lim_{\gamma \to \infty} \rho_\gamma(X) \geqslant E_{P_0}[-X] > -\infty$$

Donc $\forall X \in \mathcal{L}_p(c)$, $\rho_\infty(X)$ est finie.

D'autre part, les propriétés de convexité, monotonie et d'invariance par translation se conservent par passage à la limite, donc ρ_∞ est bien une mesure de risque.

De plus, d'après la propriété IV.9, pour tout $\gamma, \gamma' > 0$, $(\rho_\gamma)_{\gamma'} = \rho_{\gamma\gamma'} = (\rho_{\gamma'})_\gamma$. Donc en passant à la limite quand γ tend vers l'infini, on obtient :

$$(\rho_{\gamma'})_\infty = \rho_\infty = (\rho_\infty)_{\gamma'}$$

Donc, d'après la propriété IV.10, ρ_∞ est une mesure de risque cohérente.

Etudions maintenant la fonction de pénalité minimale α_∞ de la mesure de risque ρ_∞.

$$\alpha_\infty(Q) = \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} \left(E_Q[-X] - \rho_\infty(X)\right)$$

Or, $\gamma \longrightarrow \rho_\gamma(X)$ est décroissante donc $\rho_\infty(X) = \inf_{\gamma>0} \rho_\gamma(X)$ et :

$$\begin{aligned}
\alpha_\infty(Q) &= \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} \sup_{\gamma>0} \left(E_Q[-X] - \rho_\gamma(X)\right) \\
&= \sup_{\gamma>0} \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} \left(E_Q[-X] - \rho_\gamma(X)\right) \\
&= \sup_{\gamma>0} \alpha_\gamma(Q) = \sup_{\gamma>0} \gamma\alpha(Q) \\
&= \begin{cases} 0 \ si \ \alpha(Q) = 0 \\ +\infty \ sinon \end{cases}
\end{aligned}$$

De plus, comme $\alpha(P_0) = 0$, α_∞ n'est pas partout égale à $+\infty$ et $\{Q \in \mathcal{P}' \ tel \ que \ \alpha(Q) = 0\}$ est non vide. Donc, pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, on a la caractérisation suivante de ρ_∞ :

$$\rho_\infty(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}'} \left(E_Q[-X] - \alpha_\infty(Q)\right) = \sup\{E_Q[-X];\ Q \in \mathcal{P}' \text{ tel que } \alpha(Q) = 0\}$$

□

Remarque : On est dans un cadre plus général que celui où l'on a une probabilité fixée, mais on conserve une caractérisation de la mesure de risque marginal avec un ensemble de probabilités et non de mesures finiment additives.

Mesure de risque conservative

Nous nous intéressons maintenant au comportement de notre famille de mesure γ-tolérante lorsque le coefficient de tolérance γ tend vers 0.

Théorème IV.15. *Soit ρ une mesure de risque de fonction de pénalité α. Notons $\mathcal{P}'$ l'ensemble de probabilités vérifiant la représentation :*

$$\rho(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}'} \left(E_P[X] - \alpha(Q)\right)$$

On définit, ρ_{0^+} pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$, par la relation :

$$\rho_{0^+}(X) = \lim_{\gamma \to 0^+} \rho_\gamma(X)$$

Alors, sur l'ensemble $\Pi = \{X \in \mathcal{L}_p(c);\ \rho_{0^+}(X) < +\infty\}$, ρ_{0^+} est une mesure de risque cohérente et vérifie

$$\rho_{0^+}(X) = \sup\{E_Q[-X];\ Q \in \mathcal{P}' \ tel \ que \ \alpha(Q) < +\infty\}$$

De plus, si $\Pi = \mathcal{L}_p(c)$, ce qui est en particulier le cas si l'ensemble $\mathcal{P}'$ est borné dans $(\mathcal{L}_p)^\star$ alors, ρ_{0^+} est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$ admettant la représentation ci-dessus.

Démonstration.
Remarquons d'abord que $\rho_\gamma(X) = \gamma\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) - \gamma\rho(0) + \gamma\rho(0)$.
Or, $\gamma \longrightarrow \gamma\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) - \gamma\rho(0)$ est décroissante et $\gamma\rho(0)$ tend vers 0 quand γ tend vers 0. Donc, $\rho_\gamma(X)$ admet une limite quand γ tend vers 0, on note $\rho_{0^+}(X)$ cette limite.
Ainsi,

$$\rho_{0^+}(X) = \lim_{\gamma\to 0^+} \gamma\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) - \gamma\rho(0)$$

D'après la décroissance de la fonction ci-dessus, on a :

$$\rho_{0^+}(X) \geqslant \rho(X) - \rho(0)$$

Donc $\rho_{0^+}(X)$ est finie pour tout $X \in \Pi$. Les propriétés de monotonie, d'invariance par translation et de convexité sont également conservées par passage à la limite et donc ρ_{0^+} est bien une mesure de risque. De plus, de même que pour ρ_∞, à l'aide de la propriété IV.9, on peut montrer que pour tout $\gamma > 0$, $(\rho_{0^+})_\gamma = \rho_{0^+}$ et donc, d'après la propriété IV.10, ρ_{0^+} est une mesure de risque cohérente.
Par monotonie, on a :

$$\begin{aligned}\rho_{0^+}(X) &= \sup_{\gamma>0}\left(\gamma\rho\left(\frac{X}{\gamma}\right) - \gamma\rho(0)\right)\\ &= \sup_{\gamma>0}\sup_{Q\in\mathcal{P}'}\left(E_Q[-X] - \gamma\alpha(Q) - \gamma\rho(0)\right)\\ &= \sup_{Q\in\mathcal{P}'}\sup_{\gamma>0}\left(E_Q[-X] - \gamma\left(\alpha(Q) + \rho(0)\right)\right)\end{aligned}$$

Or,

$$\alpha(Q) = \sup_{X\in\mathcal{L}_p(c)}\left(E_Q[-X] - \rho(X) \geqslant -\rho(0)\right)$$

Donc,

$$\alpha(Q) + \rho(0) \geqslant 0$$

De plus, d'après le théorème $III.8$, il existe $\widehat{Q} \in \mathcal{P}'$ tel que

$$\rho(0) = -\alpha\left(\widehat{Q}\right)$$

Donc, l'ensemble $\{Q \in \mathcal{P}' \textit{ telle que } \alpha(Q) < +\infty\}$ est non vide (puisqu'il contient $\widehat{Q}$) et par conséquent

$$\rho_{0^+}(X) = \sup\{E_Q[-X];\ Q \in \mathcal{P} \text{ tel que } \alpha(Q) < +\infty\}$$

Supposons, maintenant, que $\mathcal{P}'$ est borné dans $(\mathcal{L}_p)^\star$, soit $X \in \mathcal{L}_p(c)$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ E_Q[-X] \leqslant M$$

Nous pouvons en déduire que

$$\forall Q \in \mathcal{P}',\ \rho_{0^+}(X) = \sup\{E_Q[-X];\ Q \in \mathcal{P} \text{ tel que } \alpha(Q) < +\infty\} \leqslant M < +\infty$$

Finalement, on obtient que ρ_{0^+} est une mesure de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$.

□

Remarque : ρ_{0+} n'est pas toujours une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{L}_p(c)$ (en général, seulement sur le sous-ensemble Π), mais admet toujours une représentation du type de celle du théorème $III.7$. Nous pouvons également souligner de nouveau le fait que nous avons un théorème de représentation avec un ensemble de probabilités et non un ensemble de mesures finiment additives

5 Optimisation de transaction

5.1 Cas de deux agents n'ayant pas accès au marché

Cadre d'étude général

On considère deux agents, respectivement notés A et B dans notre modèle, c'est-à-dire dans un modèle où on n'a pas fixé une probabilité mais un ensemble de probabilités possibles $\mathcal{P}$. Chacun de ces agents veut améliorer la distribution et la gestion de son risque.
On suppose que la richesse X_T^A de l'agent A à la date T est confrontée à un risque non achetable (non tradable). La richesse X_T^B de l'agent B est également confrontée à un risque non achetable. Pour réduire son risque, l'agent A émet un contrat de valeur F de maturité T et de prix Π pour réduire son risque. Pour cela, il entre en contact avec B. Si la transaction a lieu, à la date T, A possédera la somme $X_T^A - F + \Pi$ et l'agent B possédera la somme $X_T^B + F - \Pi$ On suppose que l'agent A modélise son risque par une mesure de risque ρ_A et que l'agent B modélise son risque avec la mesure de risque ρ_B. L'agent A cherche une structure de prix (F, Π) qui minimise la mesure de risque de sa richesse finale : A cherche (F, Π) qui minimise $\rho_A\left(X_T^A - F + \Pi\right)$.
Mais, pour que la transaction ait lieu, il faut que l'agent B tire également un bénéfice de la transaction, c'est-à-dire que la transaction lui permette de réduire la mesure de risque de sa richesse finale. Il faut que la structure de prix vérifie :$\rho_B\left(X_T^B + F - \Pi\right) \leqslant \rho_B\left(X_T^B\right)$. Ainsi, on cherche une structure de prix (F, Π) qui vérifie :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \rho_A\left(X_T^A - F + \Pi\right) \\ \text{sous la condition } \rho_B\left(X_T^B + F - \Pi\right) \leqslant \rho_B\left(X_T^B\right) \end{cases}$$

La condition sur ρ_B et l'invariance par translation de cette mesure de risque nous donne que le prix maximal qu'un agent B est prêt à payer est

$$\Pi_B(F) = \rho_B\left(X_T^B\right) - \rho_B\left(X_T^B + F\right)$$

Donc, on est ramené à chercher F qui minimise $\rho_A\left(X_T^A - F\right) + \rho_B\left(X_T^B + F\right) - \rho_B\left(X_T^B\right)$, c'est-à-dire qui minimise

$$R_{A,B}\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{F \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A\left(X_T^A - F\right) + \rho_B\left(X_T^B + F\right)\right)$$

En faisant le changement de variable $\widetilde{F} = X_T^B + F$, ceci revient à chercher $\widetilde{F} \in \mathcal{L}_p(c)$ qui minimise

$$R_{A,B}\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{\widetilde{F} \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A\left(X_T^A + X_T^B - \widetilde{F}\right) + \rho_B\left(\widetilde{F}\right)\right)$$

Ce que l'on peut écrire à l'aide de l'inf-convolution :

$$R_{A,B}\left(X_T^A, X_T^B\right) = \rho_A \Box \rho_B \left(X_T^A + X_T^B\right)$$

Stratégies d'optimisation dans le cas particulier des mesures dilatées

Etudions le cas particulier de mesures de risque ρ_A, ρ_B dilatées associées à la même mesure ρ et avec des coefficients d'aversion au risque γ_A et γ_B. On retrouve dans notre cadre les résultats de Boch ([30]) et de P. Barrieu et N. El Karoui (voir par exemple [24]) :

Théorème IV.16. *Soient ρ une mesure de risque convexe et ρ_A et ρ_B les mesures de risque convexes dilatées associées à ρ et de coefficients d'aversion respectifs γ_A et γ_B. Soient $X_T^A, X_T^B \in \mathcal{L}_p(c)$.*
Alors, la mesure de risque résiduelle après la transaction est donnée par :

$$R_{A,B}\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{F \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A\left(X_T^A - F\right) + \rho_B\left(X_T^B + F\right)\right) = \rho_{\gamma_C}\left(X_T^A + X_T^B\right)$$

avec

$$\gamma_C = \gamma_A + \gamma_B$$

De plus l'infimum ci-dessus est en fait un minimum et est atteint pour

$$F^\star = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B} X_T^A - \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B} X_T^B$$

Démonstration.
En effet, comme on l'a vu précédemment, en effectuant le changement de variable $\widetilde{F} = X_T^B + F$:

$$R_{A,B}\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{\widetilde{F} \in \mathcal{L}_1(c)} \left(\rho_{\gamma_A}\left(X_T^A + X_T^B - \widetilde{F}\right) + \rho_{\gamma_B}\left(\widetilde{F}\right)\right)$$

$$= \rho_{\gamma_A} \Box \rho_{\gamma_B}\left(X_T^A, X_T^B\right) = \rho_{\gamma_C}\left(X_T^A + X_T^B\right)$$

avec $\gamma_C = \gamma_A + \gamma_B$, d'après le théorème 3.
De plus d'après le théorème 4, l'infimum est atteint en $\widetilde{F}^\star = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B}\left(X_T^A + X_T^B\right)$. Puis, comme on avait posé $\widetilde{F} = X_T^B + F$, on trouve que l'infimum est atteint pour

$$F^\star = \widetilde{F}^\star - X_T^B = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B} X_T^A - \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B} X_T^B$$

□

5.2 Couverture individuelle du risque

On considère un agent A dont le risque est mesuré par la mesure de risque ρ_A et on suppose qu'il peut couvrir son risque sur sa richesse X en utilisant des produits d'un ensemble convexe de $\nu_T^A \subset \mathcal{L}_p(c)$. Son but est de minimiser la mesure de risque de sa richesse, il cherche à optimiser :

$$\inf_{\xi \in \nu_T^A} \rho_A\left(X_T^A - \xi\right)$$

Théorème IV.17. *Soit ν_T^A un ensemble convexe et compact de $\mathcal{L}_p(c)$. On suppose que ρ_A^m est finie. Alors l'infimum*

$$\rho_A^m(X) = \inf_{\xi \in \nu_T^A} \rho_A\left(X_T^A - \xi\right)$$

est atteint en un certain $\widehat{\xi} \in \nu_T^A$.

Démonstration.
On va pour montrer cela appliquer un théorème de mini-max (Aubin) à la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \nu_T^A \times \mathcal{P}' & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (\xi, Q) & \longrightarrow & E_Q[X-\xi] - \alpha(Q) \end{array}$$

Par hypothèse, ν_T^A est convexe et compact dans $\mathcal{L}_p(c)$.
D'autre part, rappelons que $\mathcal{P}'$ est l'ensemble des probabilités ne chargeant pas les ensembles polaires et appartenant à $(\mathcal{L}_p(c))^\star$. On voit facilement que $\mathcal{P}'$ est convexe.
De plus, comme $\mathcal{P}'$ est inclus dans $(\mathcal{L}_p(c))^\star$, pour tout Q appartenant à $\mathcal{P}'$, l'application $\xi \longrightarrow E_Q[X-\xi] - \alpha(Q)$ est continue. De plus, on voit facilement que cette application est affine donc convexe.
Enfin, soit $\lambda \in [0;1]$, alors pour tout $\xi \in \nu_T^A$ et $Q, Q' \in \mathcal{P}'$, en utilisant la caractérisation de α :

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X]$$

$$\begin{array}{rl} f & (\xi, \lambda Q + (1-\lambda) Q') \\ = & \lambda E_Q[X-\xi] + (1-\lambda) E_{Q'}[X-\xi] - \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho} \left(\lambda E_Q[-X] + (1-\lambda) E_{Q'}[-X]\right) \\ \geqslant & \lambda E_Q[X-\xi] + (1-\lambda) E_{Q'}[X-\xi] - \lambda \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] + (1-\lambda) \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_{Q'}[-X] \\ \geqslant & \lambda E_Q[X-\xi] - \alpha(Q) + (1-\lambda) E_{Q'}[X-\xi] - \alpha(Q') \end{array}$$

Donc $Q \longrightarrow E_Q[X-\xi] - \alpha(Q)$ est concave. On peut maintenant appliquer le théorème du mini-max de Aubin : il existe $\widehat{\xi} \in \nu_T^A$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{P \in \mathcal{P}'} \left(E_Q\left[X - \widehat{\xi}\right] - \alpha(Q)\right) & = & \sup\limits_{Q \in \mathcal{P}'} \inf\limits_{\xi \in \nu_T^A} \left(E_Q[X-\xi] - \alpha(Q)\right) \\ & = & \inf\limits_{\xi \in \nu_T^A} \sup\limits_{Q \in \mathcal{P}'} \left(E_Q[X-\xi] - \alpha(Q)\right) \end{array}$$

D'après le théorème de représentation de mesure convexe sur l'espace $\mathcal{L}_p(c)$,

$$\rho(X-\xi) = \sup_{Q \in \mathcal{P}'} \left(E_Q[X-\xi] - \alpha(Q)\right)$$

Ceci signifie que :

$$\rho\left(X - \widehat{\xi}\right) = \inf_{\xi \in \nu_T^A} \rho(X-\xi)$$

□

Remarque 1 L'accès au marché permet à l'agent de réduire sa mesure de risque. Tout se passe comme si il n'y avait pas accès et que sa mesure de risque était ρ_A^m. C'est pourquoi nous appellerons cette mesure de risque, mesure de risque modifiée par le marché.

Remarque 2 Dans le cas où l'ensemble ν_T^A permet de définir une mesure de risque qui est engendrée par cet ensemble convexe, notée ν_A ($= \nu_{\nu_T^A}$ avec les notations du chapitre précédent),

$$\rho_A^m(X) = \rho_A \square \nu_A(X)$$

Nous pouvons rapprocher cette stratégie de couverture de risque individuel par accès au marché du cas où nous avions deux agents qui n'avaient pas accès au marché. Tout se passe comme si le marché jouait le rôle d'un agent B qui aurait pour mesure de risque ν_A, on est ramené à chercher l'élément $F \in \mathcal{L}_p(c)$ qui réalise l'infimum : $\rho_A \square \nu_A(X)$.

Remarque 3 Notre hypothèse ν_T^A convexe et compact de $\mathcal{L}_p(c)$ est vérifiée par exemple si on considère un ensemble borné et convexe d'un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{L}_p(c)$.

5.3 Cas de deux agents ayant accès au marché

Cadre d'étude

Comme précédemment, on considère un agent A qui est exposé à un risque non présent directement sur le marché pour une somme, à l'instant T, X_T^A et un agent B dont la richesse X_T^B à l'instant T est également soumise à un risque. Pour réduire son risque, l'agent veut émettre un contrat F de prix initial Π et le vendre à l'agent B. On suppose, de plus, que les deux agents évaluent le risque de leurs positions par l'intermédiaire des mesures de risque convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$: ρ_A et ρ_B (de fonction de pénalité respective α_A et α_B).
Mais, maintenant, les deux agents ont un accès au marché financier via deux ensembles convexes ν_T^A et ν_T^B qui peuvent être différents. Ainsi, nos deux agents peuvent être de nature très différente comme un assureur et un investisseur et donc ne pas avoir accès au même type de produits. Ces accès au marché permettent à chacun de réduire préalablement (avant d'étudier le contrat F) son risque en investissant de manière optimale dans les produits financiers auquel il a accès (via ν_T^A et ν_T^B). Comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur la couverture individuelle du risque, grâce à cet accès au marché, les mesures de risque qui leur servent maintenant à évaluer leur risque sont les mesures de risque modifiées par le marché définies pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$ par

$$\rho_A^m(X) = \inf_{H \in \nu_T^A} \rho_A(X - H) \text{ et } \rho_B^m(X) = \inf_{H \in \nu_T^B} \rho_B(X - H).$$

Comme précédemment, on suppose que ces mesures de risque sont supérieures à $-\infty$, on note leur fonction de pénalité α_A^m et α_B^m. On suppose également que les ensembles ν_T^A et ν_T^B permettent d'engendrer des mesures de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$ que l'on notera ν_A et ν_B, de fonction de pénalité respective $\alpha_{\nu_T^A}$ et $\alpha_{\nu_T^B}$. Alors, on a vu que pour tout $X \in \mathcal{L}_p(c)$

$$\rho_A^m(X) = \rho_A \square \nu_A(X) \text{ et } \rho_B^m(X) = \rho_B \square \nu_B(X).$$

Ceci étant remarqué, de même que dans le cas d'agents n'ayant pas accès au marché, l'agent A cherche le contrat que minimise son évaluation du risque sur son bien final : $\rho_A^m\left(X_T^A - F + \pi\right)$, mais pour que la transaction ait lieu il faut que l'agent B en tire un profit c'est-à-dire que son évaluation du risque de sa richesse finale en ayant acheté le contrat soit inférieure à celle s'il ne fait rien : $\rho_B^m\left(X_T^B + F - \Pi\right) \leqslant \rho_B^m\left(X_T^B\right)$. Ceci revient à déterminer la structure de prix (F, Π) telle que

$$\begin{cases} \textit{minimiser } \rho_A^m\left(X_T^A - F + \Pi\right) \\ \textit{sous la condition } \rho_B^m\left(X_T^B + F - \Pi\right) \leqslant \rho_B^m\left(X_T^B\right) \end{cases}$$

De même que précédemment, en utilisant l'invariance par translation de ρ_B^m, on obtient le prix maximal que B est prêt à payer, qui correspond à son prix d'indifférence (il n'a ni intérêt à acheter le contrat, ni à ne rien faire) :

$$\Pi_B^m(F) = \rho_B^m\left(X_T^B\right) - \rho_B^m\left(X_T^B + F\right)$$

Donc, on est ramené à chercher F qui minimise $\rho_A^m\left(X_T^A - F\right) + \rho_B^m\left(X_T^B + F\right) - \rho_B\left(X_T^B\right)$, c'est-à-dire en faisant le changement de variable $\widetilde{F} = X_T^B + F$, ceci revient à chercher $\widetilde{F} \in \mathcal{L}_p(c)$ qui minimise

$$\begin{aligned} R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) &= \inf_{F \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A^m\left(X_T^A - F\right) + \rho_B^m\left(X_T^B + F\right)\right) \\ &= \inf_{\widetilde{F} \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A^m\left(X_T^A + X_T^B - \widetilde{F}\right) + \rho_B^m\left(\widetilde{F}\right)\right) \\ &= \rho_A^m \square \rho_B^m\left(X_T^A + X_T^B\right) \\ &= \rho_A \square \nu_A(X) \square \rho_B \square \nu_B(X)\left(X_T^A + X_T^B\right) \end{aligned}$$

Pour pouvoir interpréter cela nous supposons que $\rho_A^m \square \rho_B^m$ est fini. Alors, nous savons, d'après le théorème IV.3 que $R_{A,B}^m$ est une mesure de risque convexe que l'on peut interpréter comme étant la mesure de risque résiduelle après que toutes les transactions aient été effectuées. Et sa fonction de pénalité est donnée par, $\forall Q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B}^m(Q) &= \alpha_A(Q) + \alpha_B(Q) + \alpha_{\nu_T^A}(Q) + \alpha_{\nu_T^B}(Q) \\ &= \alpha_A^m(Q) + \alpha_B^m(Q) \end{aligned}$$

Le marché joue le même rôle qu'un agent supplémentaire qui imposerait des contraintes et permettrait à l'agent auquel il est relié (A ou B) de diminuer son risque. C'est pourquoi, nous nous retrouvons avec l'inf-convolution de quatre mesures de risque, deux par agent.

Existence et caractérisation de la stratégie optimale

De même que dans l'article de P. Barrieu et N. El Karoui ([24]), dans notre cadre où nous avons considéré un ensemble de probabilités possibles, nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'existence d'une stratégie optimale. Avant d'énoncer le théorème introduisons quelques définitions :

Définition IV.18. *Soit ρ une mesure de risque convexe sur $\mathcal{L}_p(c)$ alors*
– *On dira qu'une probabilité $\widehat{Q}$ est optimale pour le programme (X, ρ) si*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}'} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q)\right) = E_{\widehat{Q}}[-X] - \alpha\left(\widehat{Q}\right)$$

– *On dira que $\widehat{X} \in \mathcal{L}_p(c)$ optimise le programme (Q, α) si*

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in \mathcal{L}_p(c)} \left(E_Q[-X] - \rho(X)\right) = E_Q\left[-\widehat{X}\right] - \rho\left(\widehat{X}\right)$$

Théorème IV.19. *On suppose que $\rho_A^m \square \rho_B^m$ est finie (et donc définit bien une mesure de risque convexe).*
Le programme :

$$R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{F \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A^m\left(X_T^A - F\right) + \rho_B^m\left(X_T^B + F\right)\right) = \rho_A^m \square \rho_B^m\left(X_T^A + X_T^B\right)$$

est exact en $F^\star$ ssi il existe une probabilité $Q_{A,B}^X$ optimale pour le programme $\left(X_T^A + X_T^B, R_{A,B}^m\right)$ telle que $X_T^B + F^\star$ optimise le programme $\left(Q_{A,B}^X, \alpha_B^m\right)$ et $X_T^A - F^\star$ optimise le programme $\left(Q_{A,B}^X, \alpha_A^m\right)$.

Démonstration.
$R_{A,B}^m$ est une mesure de risque sur $\mathcal{L}_p(c)$, de fonction de pénalité $\alpha_A^m + \alpha_B^m$.
On sait, d'après le théorème de représentation des mesures de risque convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$, qu'il existe une probabilité $Q_{A,B}^X \in \mathcal{P}'$ qui optimise le programme $\left(X_T^A + X_T^B, R_{A,B}^m\right)$, c'est-à-dire :

$$R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) = E_{Q_{A,B}^X}[-X_T^A - X_T^B] - \alpha_A^m\left(Q_{A,B}^X\right) - \alpha_B^m\left(Q_{A,B}^X\right)$$

Posons $X = X_T^A + X_T^B$ et notons pour toute variable $M \in \mathcal{L}_p(c)$, M^c la variable centrée associée à la probabilité $Q_{A,B}^X$: $M^c = M - E_{Q_{A,B}^X}[M]$.
Par invariance par translation et optimalité de $Q_{A,B}^X$, on a

$$-R_{A,B}^m\left(\left(X_T^A\right)^c, \left(X_T^B\right)^c\right) = -R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) - E_{Q_{A,B}^X}[X] = \alpha_A^m(Q_{A,B}^X) + \alpha_B^m(Q_{A,B}^X)$$

Or, par invariance par translation :

$$\begin{aligned}
\alpha_A^m(Q_{A,B}^X) &= \sup_{F \in \mathcal{L}_p(c)} \left(E_Q[-F] - \rho_A^m(F)\right) = \sup_{F \in \mathcal{L}_p(c)} -\rho_A^m\left(F - E_{Q_{A,B}^X}[F]\right) \\
&= \sup_{F \in \mathcal{L}_p(c)} -\rho_A^m(F^c) = \sup_{F \in \mathcal{L}_p(c)} -\rho_A^m(X^c - F^c)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
-R_{A,B}^m\left(\left(X_T^A\right)^c, \left(X_T^B\right)^c\right) &= \sup_{F \in \mathcal{L}_p(c)} -\rho_B^m(F^c) + \sup_{F \in \mathcal{L}_p(c)} -\rho_A^m(X^c - F^c) \\
&\geqslant -\inf_{F \in \mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A^m(X^c - F^c) + \rho_B^m(F^c)\right) = -R_{A,B}^m\left(\left(X_T^A\right)^c, \left(X_T^B\right)^c\right)
\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité ci-dessus est une égalité :

$$\sup_{F\in\mathcal{L}_p(c)} -\rho_B^m\left(F^c\right) + \sup_{F\in\mathcal{L}_p(c)} -\rho_A^m\left(X^c - F^c\right) = \sup_{F\in\mathcal{L}_p(c)} \left(-\rho_A^m\left(X^c - F^c\right) - \rho_B^m\left(F^c\right)\right)$$

Donc, le programme $R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right)$ est exact en $F^\star$ ssi $F^\star$ réalise le supremum de droite, c'est-à-dire, ssi $F^\star$ est optimal pour les deux problèmes $\sup_{F\in\mathcal{L}_p(c)} -\rho_B^m\left(F^c\right)$ et $\sup_{F\in\mathcal{L}_p(c)} -\rho_A^m\left(X^c - F^c\right)$.

□

Remarque Dans notre cadre, comme nous l'avons écrit dans la démonstration, le théorème de représentation de mesures de risque convexes sur $\mathcal{L}_p(c)$, nous donne l'existence d'une probabilité $Q_{A,B}^X \in \mathcal{P}'$ qui optimise le programme $\left(X_T^A + X_T^B, R_{A,B}^m\right)$. Soulignons le fait que dans notre cadre encore une fois nous avons affaire à une probabilité et non à une mesure finiment additive.

Cas particulier des mesures dilatées

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence et la caractérisation de la stratégie optimale pour le problème

$$R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{F\in\mathcal{L}_p(c)} \left(\rho_A^m\left(X_T^A - F\right) + \rho_B^m\left(X_T^B + F\right)\right) = \rho_A^m \square \rho_B^m\left(X_T^A + X_T^B\right)$$

avec $\rho_A^m = \rho_A \square \nu^A$ et $\rho_B^m = \rho_B \square \nu^B$ où ρ_A et ρ_B sont des mesures de risque dilatées de la mesure de risque convexe ρ, et de coefficients d'aversion au risque respectifs, γ_A et γ_B.
Dans ce cas, on peut réécrire plus simplement notre fonction à maximiser en utilisant l'inf-convolution. En effet, dans ce cas, par commutativité de l'inf-convolution et en utilisant le théorème IV.12, on a :

$$R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) = \rho_A \square \nu_A \square \rho_B \square \nu_B\left(X_T^A + X_T^B\right) = \rho_C \square \nu_A \square \nu_B\left(X_T^A + X_T^B\right)$$

avec ρ_C la mesure de risque dilatée associée à ρ et de coefficient d'aversion aux risques $\gamma_C = \gamma_A + \gamma_B$.
Puis, en utilisant la proposition IV.4, on obtient :

$$R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right) = \inf_{\xi_B\in\nu_T^B} \inf_{\xi_A\in\nu_T^A} \left(\rho_C\left(X_T^A + X_T^B - \xi_A - \xi_B\right)\right) = \inf_{\xi\in\nu_T^A+\nu_T^B} \left(\rho_C\left(X_T^A + X_T^B - \xi\right)\right)$$

Regardons d'abord le cas particulier où les deux agents ont le même accès au marché :

Proposition IV.20. *Si $\nu_T^A = \nu_T^B = \mathcal{H}$ est un cône convexe alors une structure optimale du problème $R_{A,B}^m\left(X_T^A, X_T^B\right)$ est*

$$F^\star = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B} X_T^A - \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B} X_T^B$$

Démonstration.
Si $\mathcal{H}$ est un cône convexe alors la mesure de risque $\nu_{\mathcal{H}}$ est cohérente et donc invariante par dilatation. Nous pouvons déduire de cela, de la proposition IV.11 puis du théorème IV.12 que

$$\begin{aligned} R^m_{A,B}\left(X^A_T, X^B_T\right) &= \rho_A \square \nu_{\mathcal{H}} \square \rho_B \square \nu_{\mathcal{H}}\left(X^A_T + X^B_T\right) \\ &= \rho_{\gamma_A} \square \left(\nu_{\mathcal{H}}\right)_{\gamma_A} \square \rho_{\gamma_B} \square \left(\nu_{\mathcal{H}}\right)_{\gamma_B}\left(X^A_T + X^B_T\right) \\ &= \left(\rho \square \nu_{\mathcal{H}}\right)_{\gamma_A} \square \left(\rho \square \nu_{\mathcal{H}}\right)_{\gamma_B}\left(X^A_T + X^B_T\right) \\ &= \left(\rho \square \nu_{\mathcal{H}}\right)_{\gamma_C}\left(X^A_T + X^B_T\right) \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le théorème IV.13, de même que dans la démonstration du théorème IV.16 on obtient que la structure optimale est donnée par $F^\star$ de la proposition.

□

On obtient le même résultat que dans le cas où les agents n'ont pas accès au marché et $F^\star$ est indépendant du marché. L'accès au marché modifie simplement le prix Π du contrat émis par l'agent A.
On peut maintenant revenir au cas où les deux agents n'ont pas accès au même marché et caractériser la solution optimale du problème $R^m_{A,B}(X)$, en fonction de celle du problème écrit avec ρ_C (quand une telle stratégie existe, ce qui est, en particulier le cas, sous les hypothèses du théorème 9).

Théorème IV.21. *On suppose que $\xi^\star = \eta^\star_A + \eta^\star_B$, avec $\eta^\star_A \in \nu^A_T$ et $\eta^\star_B \in \nu^B_T$, est solution optimale du problème :*

$$\inf_{\xi \in \nu^A_T + \nu^B_T} \rho_C\left(X - \xi\right), \quad \textit{avec } \gamma_C = \gamma_A + \gamma_B$$

alors

$$F^\star = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B} X^A_T - \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B} X^B_T - \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B}\eta^\star_A + \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B}\eta^\star_B$$

est une structure optimale du problème $R^m_{A,B}\left(X^A_T, X^B_T\right)$ De plus,

1. *$\eta^\star_A$ est optimal pour le problème de couverture de la richesse $X^A_T - F^\star$ pour l'agent A, et*

$$\frac{1}{\gamma_A}\rho_A\left(X^A_T - F^\star - \eta^\star_A\right) = \frac{1}{\gamma_A}\rho_A \inf_{\xi_A \in \nu^A_T}\left(X^A_T - F^\star - \xi_A\right) = \frac{1}{\gamma_C}\rho_C\left(X^A_T + X^B_T - \xi^\star\right)$$

2. *$\eta^\star_B$ est optimal pour le problème de couverture de la richesse $X^B_T + F^\star$ pour l'agent B, et*

$$\frac{1}{\gamma_B}\rho_B\left(X^B_T + F^\star - \eta^\star_B\right) = \frac{1}{\gamma_B}\rho_B \inf_{\xi_B \in \nu^B_T}\left(X^B_T + F^\star - \xi_B\right) = \frac{1}{\gamma_C}\rho_C\left(X^A_T + X^B_T - \xi^\star\right)$$

Démonstration.
La démonstration se divise en plusieurs étapes :
Etape 1 : Montrer que $F^\star$ défini dans le théorème est bien une solution optimale du

problème $R^m_{A,B}(X^A_T + X^B_T)$
En utilisant l'optimalité de $\xi^\star$, on a :

$$R^m_{A,B}(X^A_T + X^B_T) = \rho_C\left(X^A_T + X^B_T - \xi^\star\right)$$

Puis, en utilisant la décomposition de ρ_C, à l'aide de l'inf-convolution de ρ_A et ρ_B, on obtient :

$$\begin{aligned} R^m_{A,B}(X^A_T + X^B_T) &= \rho_A \square \rho_B\left(X^A_T + X^B_T - \xi^\star\right) \\ &= \inf_{\widetilde{F}\in\mathcal{L}_1(c)}\left(\rho_A\left(X^A_T + X^B_T - \widetilde{F} - \xi^\star\right) + \rho_B\left(\widetilde{F}\right)\right) \end{aligned}$$

D'après le théorème IV.13, la solution optimale du problème ci-dessus est atteinte en

$$\widetilde{F}^\star = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B}\left(X^A_T + X^B_T - \xi^\star\right)$$

Ainsi, avec le changement de variable $\widetilde{F}^\star = F^\star + X^B_T - \eta^\star_B$:

$$R_{A,B}\left(X^A_T, X^B_T\right) = \rho_A\left(X^A_T - F^\star - \eta^\star_A\right) + \rho_B\left(X^B_T + F - \eta^\star_B\right)$$

Donc $R_{A,B}$ est optimal en :

$$F^\star = \widetilde{F}^\star - X^B_T + \eta^\star_B = \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B}X^A_T - \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B}X^B_T - \frac{\gamma_B}{\gamma_A + \gamma_B}\eta^\star_A + \frac{\gamma_A}{\gamma_A + \gamma_B}\eta^\star_B$$

Etape 2 :Montrons que $\nu^\star_A$ et $\nu^\star_B$ sont optimales aux sens du théorème.
Par définition du programme $R^m_{A,B}$ et par optimalité de $F^\star$ et $\xi^\star = \nu^\star_A + \nu^\star_B$, on obtient que

$$\begin{aligned} R^m_{A,B}\left(X^A_T + X^B_T\right) &= \rho_A\left(X^A_T - F^\star - \nu^\star_A\right) + \rho_B\left(X^B_T + F^\star - \nu^\star_B\right) \\ &\leqslant \inf_{\xi_A\in\nu^T_A}\inf_{\xi_B\in\nu^T_B}\inf_{F\in\mathcal{L}_p(c)}\rho_A\left(X^A_T - F - \xi_A\right) + \rho_B\left(X^B_T + F - \xi_B\right) \\ &\leqslant \inf_{\xi_A\in\nu^T_A}\rho_A\left(X^A_T - F^\star - \xi_A\right) + \rho_B\left(X^B_T + F^\star - \nu^\star_B\right) \\ &\leqslant \rho_A\left(X^A_T - F^\star - \nu^\star_A\right) + \rho_B\left(X^B_T + F^\star - \nu^\star_B\right) \end{aligned}$$

Ainsi, les inégalités si dessus sont en fait des égalités et

$$\rho_A\left(X^A_T - F^\star - \eta^\star_A\right) = \inf_{\xi_A\in\nu^A_T}\rho_A\left(X^A_T - F^\star - \xi_A\right)$$

De plus, en utilisant la relation démontrée dans l'étape 1 et donnant $F^\star$ en fonction de $\nu^\star_A$ et $\nu^\star_B$, on obtient

$$\frac{1}{\gamma_A}\rho_A\left(X^A_T - F^\star - \eta^\star_A\right) = \frac{1}{\gamma_C}\rho_C\left(X^A_T + X^B_T - \xi^\star\right)$$

On a ainsi démontré le point 1. du théorème, le point 2. se traite de la même manière.

□

On peut remarquer que de même que dans le cadre de [24], on retrouve dans ce cas une diversification standard si les fonctions de pénalités sont proportionnelles. Pour augmenter la diversification, il faut être dans un cas où les deux agents ont des fonctions de pénalités très différentes et donc que les agents soient de type très différents.

Cinquième partie

Perspectives : espérance conditionnelle et mesures de risque dynamiques

1 Introduction

Dans les parties précédentes, nous avons fait une étude statique de nos différents problèmes. Le terme statique signifie ici que nous avons considéré une position financière X à la date 0 qui devait être vendue à une date de maturité T fixée à l'avance. En particulier, nous avons mesuré le risque d'une telle position sans prendre en compte le fait qu'entre les dates 0 et T des réajustements peuvent être effectués en fonction des nouvelles informations disponibles. Il serait donc intéressant de pouvoir donner une mesure $\rho_t(X)$ du risque encouru par l'investisseur avec la position financière X, à chaque instant t qui prenne en compte les nouvelles informations disponibles à cet instant.
Nous pouvons faire le même genre de reproche dans le cadre classique des mesures de risque de [15] ou [7]. C'est pourquoi, dans de nombreux articles récents, il est question de mesures de risque dynamiques (ou même plus généralement de mesures de risque conditionnelles). Ainsi, F. Delbaen [38] ou P. Artzner et ses coauteurs [16] ont introduit et étudié les mesures de risque cohérentes dynamiques. Parallèlement, la notion de de mesures de risque convexes dynamiques a été développé par exemple par F. Riedel [63], M.Fritelli et E. Rosazza Gianin [47], P. Cheredito, F. Delbaen et M. Kupper [17] ou encore J. Bion-Nadal [26]. Un autre point de vue a également été utilisé pour introduire ces mesures de risque dynamiques : les équations différentielles stochastiques rétrogrades par le biais notamment de la g-espérance conditionnelle (voir par exemple les articles de S. Peng [57], [55] ou de P. Barrieu et N. El Karoui [25]).
Dans ces différents articles, une des notions clés est celle de consistance en temps et un des enjeux majeurs présentés dans ces papiers est la caractérisation de cette propriété. Ainsi, en temps discret, P. Cheredito, F. Delbaen et M. Kupper [17], ont caractérisé la consistance en temps par une condition sur les ensembles de positions acceptables. En temps continu, F. Delbaen [38] donne une caractérisation pour les mesures de risque dynamiques cohérentes en terme de stabilité d'ensemble de probabilités. Puis, J. Bion-Nadal [27] montre l'équivalence entre cette propriété et une propriété de cocyclicité des fonctions de pénalité minimale. La propriété d'invariance par translation diffère également de celle du cas statique et est caractérisée de différentes manières par K. Detlefsen et G. Scandolo [41].
Le but de cette partie est d'introduire, dans notre cadre non dominé, des outils pour étudier d'un point de vue dynamique les différents problèmes présentés dans les parties précédentes, en particulier les mesures de risque. Dans un premier temps, nous définissons une espérance conditionnelle non linéaire qui est liée à la notion de G-espérance (voir [59] pour plus de détails) et donc aux mesures de risque. Nous verrons que cette espérance conditionnelle non linéaire présente des propriétés proches de celles de l'espérance conditionnelle "classique". Puis, nous introduisons les mesures de risque cohérentes et convexes dynamiques dans notre cadre. Nous insisterons sur les propriétés d'invariance par multiplication et de consistance en temps et donnerons des caractérisations de celles-ci. Puis, nous verrons un lien entre l'espérance conditionnelle non linéaire et les mesures de risque dynamiques.

2 Espérance et espérance conditionnelle non linéaire

Dans toute cette partie, on se place dans le cas où p=1, c_1 sera notée seulement c et on se place sous l'hypothèse plus simple à utiliser mais moins générale H(adt,dt), pour un réel a fixé appartenant à $[0;1[$ c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathcal{P},\ a\ dt \leqslant d < B >_t^P \leqslant dt$$

2.1 Espérance non linéaire

Rappelons la définition donnée par S. Peng, dans [57], de l'espérance non linéaire. Une petite différence est faite ici sur l'espace de départ de notre application, puisque l'on s'autorise à considérer des fonctions non bornées.

Définition V.1. *Une application E de $\mathcal{L}_1(c)$ dans $\mathbb{R}$ est appelée espérance non linéaire si elle vérifie les propriétés :*

1. *Monotonie : pour tout X, Y dans $\mathcal{L}_1(c)$ tels que $X \leqslant Y$ q.s., $E[X] \leqslant E[Y]$.*
2. *Préservation des constantes : Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $E[c] = c$*
3. *Sous-additivité : pour tout $X, Y \in \mathcal{L}_1(c)$, $E[X+Y] \leqslant E[X] + E[Y]$*
4. *Homogénéité positive : pour tout $\lambda \geqslant 0$, $X \in \mathcal{L}_1(c)$, $E[\lambda X] = \lambda E[X]$*
5. *Constance par translation : pour tout $c \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{L}_1(c)$, $E[X+c] = E[X] + c$*

Nous voulons ici définir une espérance non linéaire qui convienne dans notre cadre.

Définition V.2. *: Pour $X \in \mathcal{L}^1(c)$, on pose :*

$$E_c[X] = c(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X]$$

Remarque Nous notons dans cette partie la capacité c sous la forme E_c car cela nous permettra de formuler de manière agréable et analogue au cas de l'espérance classique (linéaire) des formules faisant intervenir l'espérance conditionnell non linéaire.

Proposition V.3. *: E_c est une espérance non-linéaire sur $\mathcal{L}_1(c)$ au sens de Peng.*

Démonstration. La démonstration est immédiate. □

Remarque Cette espérance conditionnelle non linéaire est d'une certaine façon la seule que nous pouvons utiliser car d'après le théorème 41 de [11], si on se donne un ensemble de probabilité $\mathcal{P}$ ne chargeant pas les ensembles polaires et dominé par une espérance non linéaire E alors celle-ci s'écrit nécessairement comme un supremum sur les $P \in \mathcal{P}$ des espérances sous P, pour tout $X \in C_b(\Omega)$.

2.2 Définition d'une espérance conditionnelle non linéaire

Pour tout $t \in [0;T]$, on notera $\Omega_t = C_0([0;t],\mathbb{R})$ et on fera l'identification habituelle : pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $\Omega_t = \Omega_s \times \Omega_{t-s}$, à l'aide de la bijection :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \Omega_t & \longmapsto & \Omega_s \times \Omega_{t-s} \\ & w & \longrightarrow & (w_1, w_2) \end{array}$$

où $(w_u^1)_{u\in[0;s]} = (w_u)_{u\in[0;s]}$ et $(w_u^2)_{u\in[0;t-s]} = (w_{s+u} - w_s)_{u\in[0;t-s]}$.
Nous noterons alors $X(w) = X(w_1, w_2)$.
Puis, pour tout $t \in [0;T]$, on notera $\mathcal{P}_t$ les probabilités martingales de $\mathcal{P}$ restreintes à l'espace Ω_t et $\mathcal{L}_1^t$ l'espace associé correspondant. Plus précisément,

Définition V.4. *$\mathcal{P}_t$ est l'ensemble des probabilités martingales Q sur Ω_t telles qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ dont la restriction à Ω_t est Q.*

On peut alors définir une capacité sur $C_b(\Omega_t)$, à l'aide de la relation :

$$\forall f \in C_b(\Omega_t),\ c^t(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}_t} E_P[|X|]$$

De manière analogue à ce que nous avons fait sur Ω, on peut prolonger cette capacité à toutes les fonctions de Ω_t dans $\mathbb{R}$.Puis, on note $\mathcal{L}_1^t$ la complétion topologique de $C_b(\Omega_t)$ par rapport à c^t.En plongeant Ω_t dans Ω de façon canonique, il est clair que $c^t = c$ sur $C_b(\Omega_t)$ et donc sur $\mathcal{L}_1^t$. C'est pourquoi nous noterons toujours cette capacité c.
Avant de définir l'espérance conditionnelle non linéaire sur $\mathcal{L}_1(c)$, nous allons déterminer un ensemble de fonctions différent de $C_b(\Omega)$, qui soit dense dans $\mathcal{L}_1(c)$ et sur lequel nous pourrons définir facilement une espérance conditionnelle non linéaire. Puis, nous étendrons cette définition par passage à la limite aux fonctions de $\mathcal{L}_1(c)$.

Définition et densité de l"espace $Lip_t(\Omega)$

Dans l'article [11], L. Denis et S. Peng ont remarqué que l'ensemble des fonctions lipschitziennes bornées sur Ω qui génère la topologie de Ω est dense dans $\mathcal{L}_1(c)$. Ils montrent également que, si on note $lip\left(\mathbb{R}^{d\times n}\right)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}^{d\times n}$, l'ensemble

$$Lip(\Omega) = \left\{\phi(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) : \forall n \geqslant 1, t_1, \ldots, t_n \in [0,T], \forall \phi \in lip\left(\mathbb{R}^{d\times n}\right)\right\}$$

est dense dans $\mathcal{L}_1(c)$ bien qu'il ne génère pas la topologie de Ω. Nous sommes confrontés ici au même genre de problème et nous allons utiliser les mêmes idées que dans [11] pour montrer la propriété suivante :

Proposition V.5. *Notons, pour tout $t \in [0,T]$, $Lip_t(\Omega)$ l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme $f(B_{s_1}, ..., B_{s_n}, B_{t_1} - B_t, ..., B_{t_r} - B_t)$ avec $0 \leqslant s_1 < s_2 < ... < s_n < t \leqslant t_1 < ... < t_r \leqslant T$ et f une fonction lipschitzienne. Alors $Lip_t(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}_1(c)$*

Remarquons d'abord qu'on a le lemme suivant :

Lemme V.6. *Soient $t \in [0,T]$ et K un sous espace compact de Ω, alors, pour tout $\phi \in C_b(\Omega)$, il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Lip_t(\Omega)$ telle que $\sup_{w\in\Omega} |\phi_n(w)| \leqslant sup_{w\in\Omega} |\phi(w)|$ et ϕ_n converge uniformément vers ϕ sur K.*

Démonstration du lemme V.6.
De même que dans [11], pour l'ensemble $Lip(\Omega)$, il suffit de remarquer que $Lip_t(\Omega)$ est une sous algèbre séparante contenant les fonctions constantes et d'appliquer le théorème de Stone-Weierstrass (voir, par exemple [9]).

□

Démonstration de la proposition V.5.
Pour démontrer cette proposition, on utilise de nouveau le même genre d'arguments que [11] pour démontrer le théorème 57.
Soit $f \in C_b(\Omega)$. On a déjà vu que la capacité $c_1 = c$ est de Prokhorov (proposition I.4) et d'après la définition rappelée en annexe, cela implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un compact $K_n \subset \Omega$ tel que $c(K_n^c) < \frac{1}{n}$. Puis, en appliquant le lemme V.6, on obtient qu'il existe $f_n \in Lip_t(\Omega)$ tel que

$$\sup_{w\in\Omega} |f_n(w)| \leqslant sup_{w\in\Omega} |f(w)| \text{ et } \sup_{w\in K_n} |f_n(w) - f(w)| < \frac{1}{n}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} c(f_n - f) &= \frac{1}{n} c(K_n) + 2\sup_{w\in\Omega} |f(w)|\, c((K_n)^c) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(1 + 2\sup_{w\in\Omega} |f(w)|\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ dans } \mathcal{L}_1(c)$$

Ainsi, on a montré que $C_b(\Omega)$ est inclus dans l'adhérence de $Lip_t(\Omega) \subset \mathcal{L}_1(c)$ pour la semi-norme c. Or, par définition, l'adhérence de $C_b(\Omega)$ pour cette semi-norme est $\mathcal{L}_1(c)$. Ce qui implique notre proposition.

□

Définition de l'espérance conditionnelle non linéaire sur $Lip_t(\Omega)$

De manière naturelle, nous pouvons définir une espérance non linéaire conditionnelle sur $Lip_t(\Omega)$:

Définition V.7. *: Soit $t \in [0;T]$, pour tout $X \in Lip_t(\Omega)$, on pose*

$$E_c[X|\mathcal{F}_t] = \sup_{P\in\mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2) dP(w_2)$$

Il est maintenant important de remarquer que cet objet est bien défini quasi-partout et plus précisément appartient à $\mathcal{L}_1^t$.

Proposition V.8. *Soit $t \in [0;T]$, pour tout $X \in Lip_t(\Omega)$, on a*

$$E_c[X|\mathcal{F}_t] \in C_b(\Omega_t) \subset \mathcal{L}_1^t$$

Démonstration.
Soit $X \in Lip_t(\Omega)$, c'est-à-dire de la forme $f(B_{s_1}, ..., B_{s_n}, B_{t_1} - B_t, ..., B_{t_r} - B_t)$ avec $0 \leqslant s_1 < s_2 < ... < s_n < t \leqslant t_1 < ... < t_r \leqslant T$ et f une fonction lipschitzienne.

$$\begin{aligned} & |E_c[X \mid \mathcal{F}_t](w_1) - E_c[X|\mathcal{F}_t](w_1+h)| \\ = & \left| \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1,w_2)dP(w_2) - \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1+h,w_2)\, dP(w_1,w_2 \right| \\ \leqslant & \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-t}} \left| \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1,w_2) - X(w_1+h,w_2)dP(w_1,w_2) \right| \end{aligned}$$

Par hypothèse f est lipschitzienne donc il existe une constante K telle que :

$$|E_c[X \mid \mathcal{F}_t](w_1) - E_c[X \mid \mathcal{F}_t](w_1+h)|$$

$$\leqslant K\left(|B_{s_1}(w_1) - B_{s_1}(w_1+h)| + |B_{s_2}(w_1) - B_{s_2}(w_1+h)| + ... + |B_{s_n}(w_1) - B_{s_n}(w_1+h)|\right)$$

Par continuité de B, on a la continuité de $E_c[X|\mathcal{F}_t]$ et comme on avait pris f bornée on a bien $E_c[X|\mathcal{F}_t]$ qui est bornée . Nous avons donc montré que pour tout $X \in Lip_t(\Omega)$, $E_c[X \mid \mathcal{F}_t] \in C_b(\Omega_t)$.

□

Propriétés de l'espérance conditionnelle non linéaire sur $Lip_t(\Omega)$

Avant d'étendre la définition à $\mathcal{L}_1(c)$, étudions les propriétés de l'espérance conditionnelle "classique" qui restent vraies dans notre cas non linéaire, sur $Lip_t(\Omega)$.
Nous pouvons commencer par énoncer quelques propriétés immédiates .

Proposition V.9. *Soit $X, Y \in Lip_t(\Omega)$*
a) Si $X \in \mathcal{F}_t$ alors $E_c[X|\mathcal{F}_t] = X$
b) Si $X \leqslant Y$ q.p. alors $E_c[X|\mathcal{F}_t]] \leqslant E_c[Y|\mathcal{F}_t]$ q.p.
c) $|E_c[X|\mathcal{F}_t] - E_c[Y|\mathcal{F}_t]| \leqslant E_c[|\ X - Y\ |\ |\mathcal{F}_t]$ q.p.

Démonstration.
a) Si X$\in Lip_t(\Omega) \cap (\mathcal{F}_t)$ alors $X(w_1,w_2) = X(w_1)$ d'où le résultat.
b) Car la même propriété est vraie pour l'espérance classique et le passage à la borne supérieure ne change pas l'inégalité.
c)

$$\begin{aligned} & |\ E_c[X|\mathcal{F}_t] - E_c[Y|\mathcal{F}_t]\ | \\ = & \left| \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1,w_2)dP(w_2) - \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} Y(w_1,w_2)dP(w_2) \right| \\ \leqslant & \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} |X(w_1,w_2) - Y(w_1,w_2)|\, dP(w_2) = E_c[|\ X - Y\ |\ |\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

□

Etudions maintenant la conservation des propriétés fondamentales de l'espérance conditionnelle dans le cas non linéaire sur $Lip_t(\Omega)$.

Proposition V.10. *Soit $X \in Lip_t(\Omega)$ alors*

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] = E_c[X]$$

Démonstration.
D'après la proposition V.8, $E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]]$ est bien définie et on a :

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] = \sup_{P\in\mathcal{P}} E_P[E_c[X|\mathcal{F}_t]]$$

Donc il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ telle que

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] = \lim_{n\to\infty} E_{P_n}[E_c[X|\mathcal{F}_t]]$$

De plus, par faible compacité de $\mathcal{P} \subset (\mathcal{L}_1(c))^\star$, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\tilde{Q} \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in (\mathcal{L}_1(c)), \quad \lim_{n\to\infty} E_{P_n}[E_c[X] = E_{\tilde{Q}}[E_c[X]$$

De plus, d'après la propriété V.8, $E_c[X|\mathcal{F}_t] \in \mathcal{L}^1$ donc

$$\begin{aligned} E_c\left[E_c\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] &= \lim_{n\to\infty} E_{P_n}\left[E_c\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] = E_{\tilde{Q}}\left[E_c\left[X \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\ &= E_{\tilde{Q}}\left[\sup_{P\in\mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X\left(w_1, w_2\right) dP\left(w_2\right)\right] \\ &= E_{\tilde{Q}_1}\left[\sup_{P\in\mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X\left(w_1, w_2\right) dP\left(w_2\right)\right] \end{aligned}$$

où $\tilde{Q}_1$ est la restriction de $\tilde{Q}$ à Ω_t
De même, comme $X \in \mathcal{L}^1$ et $\mathcal{P}_{T-t}$ est compact car les probabilités de $\mathcal{P}_{T-t}$ sont obtenues à partir de celles de $\mathcal{P}_T$, pour tout $w_1 \in \mathcal{P}_t$, il existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{T-t}$ telle que :

$$\begin{aligned} E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] &= E_{\tilde{Q}_1}\left[\int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2) d\tilde{P}(w_1, w_2)\right] \\ &= \int_{\Omega_t} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2) d\tilde{P}(w_1, w_2) d\tilde{Q}_1(w_1) \end{aligned}$$

□

Lemme V.11. *: $d\tilde{P}(w_1, w_2)d\tilde{Q}_1(w_1)$ définit par ϕ^{-1} une probabilité sur Ω_T qui appartient à $\mathcal{P}$.*

Suite de la démonstration du théorème V.10.
Puis par ϕ^{-1}, on passe de $\Omega_t \times \Omega_{T-t}$ à Ω_T et donc il existe une probabilité $P_0 \in \mathcal{P}$ telle que :

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] = E_{P_0}[X] \leqslant E_c[X]$$

Montrons l'inégalité inverse :
D'après la compacité de $\mathcal{P}$, il existe une probabilité $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ telle que

$$E_c[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X] = E_{\tilde{P}}[X] = E_{\tilde{P}}[E_{\tilde{P}}[X|\mathcal{F}_t]] = E_{\tilde{P}}[E_{\tilde{P}}[X(w_T - w_t + w_t)|\mathcal{F}_t]]$$

Soit $\tilde{P}_1$ la restriction de $\tilde{P}$ à Ω_t et $\tilde{P}_2$ la loi conditionnelle de $(w_{t+v}, w_t)_{v\in[0;T-t]}$ sachant $\mathcal{F}_t$, alors :

$$E_c[X] = \int_{\Omega_t} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2) d\tilde{P}_2(w_1, w_2) d\tilde{P}_1(w_1)$$

□

Lemme V.12. *La loi conditionnelle de $(B_{t+v} - B_t)_{v\in[0;T-t]}$ sous $\widetilde{P}$ sachant $\mathcal{F}_t$ appartient à $\mathcal{P}_{T-t}$.*

Fin de la démonstration du théorème V.10.
D'après ce lemme, on a :

$$E_c[X] \leqslant E_{\tilde{P}_1}[E_c[X|\mathcal{F}_t]] \leqslant E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]]$$

On a donc finalement $E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] = E_c[X]$.

□

Démonstration lemme V.11.
Soit Q la probabilité telle que $dQ = d\tilde{P}(w_1, w_2) d\tilde{Q}_1(w_1)$.
Etudions le cas où $t \leqslant u \leqslant s$ et calculons $E_Q[B_s - B_u \mid \mathcal{F}_u]$.
Soient $t \leqslant v_1 < v_2 < ... < v_d \leqslant u$

$$\begin{aligned} & E_Q[(B_s - B_u) f(w_1, B_{v_1} - B_t, B_{v_2} - B_t, ..., B_{v_d} - B_t) \mid \mathcal{F}_t] \\ = \; & E_Q[((B_s - B_t) - (B_u - B_t)) f(w_1, B_{v_1} - B_t, B_{v_2} - B_t, ..., B_{v_d} - B_t) \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

Or $\tilde{P}$ est la loi conditionnelle de $(B_{t+v} - B_t)_{v\in[0;T-t]}$ sachant $\mathcal{F}_t$ et par hypothèse, on a $\tilde{P}$ appartient à $\mathcal{P}_{T-t}$, donc cette espérance est nulle. Et donc, en prenant l'espérance de cette égalité et on obtient :

$$E_Q[(B_s - B_u) f(w_1, B_{v_1} - B_t, B_{v_2} - B_t, ..., B_{v_d} - B_t)] = 0$$

Donc

$$\forall X \in \mathcal{F}_u, \quad E_Q[(B_s - B_u) X] = 0$$

Finalement,

$$E_Q[B_s - B_u \mid \mathcal{F}_u] = 0$$

Donc Q est une probabilité martingale.
De plus, on voit facilement que l'hypothèse $H(adt, dt)$ est vérifiée et donc $Q \in \mathcal{P}$.

□

Démonstration lemme V.12 .
Soit Q_2 la loi conditionnelle de $(B_{t+v} - B_t)_{v\in[0;T-t]}$ sachant $\mathcal{F}_t$.
Soit $u < s$, calculons $E_{Q_2}[B_s - B_u \mid \mathcal{F}_u]$, dans le cas où $t < s$ (le cas où $s < t$ est trivial). Alors il existe v_1 et v_2 deux réels positifs tels que $u = v_1 + t$ et $s = v_2 + t$. Soient u_1, u_2,...,u_k tels que $t \leqslant u_1 + t < u_2 + t < ... < u_n + t \leqslant u$, alors on a :

$$\begin{aligned}
& E_{Q_2}\left[(B_s - B_u) f\left(w_1, B_{t+u_1} - B_t, ..., B_{t+u_n} - B_t\right)\right] \\
= & \int_{\Omega_{T-t}} (B_{t+v_2} - B_{t+v_1}) f\left(w_1, B_{t+u_1} - B_t, ..., B_{t+u_n} - B_t\right) dQ_2(w_1, w_2) \\
= & E_P\left[(B_{t+v_2} - B_{t+v_1}) f\left(w_1, B_{t+u_1} - B_t, ..., B_{t+u_n} - B_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
= & E_P\left[E_P\left[(B_{t+v_2} - B_{t+v_1}) f\left(w_1, B_{t+u_1} - B_t, ..., B_{t+u_n} - B_t\right) \mid \mathcal{F}_{t+v_1}\right] \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

Or P est une probabilité martingale par hypothèse donc :

$$E_P\left[(B_{t+v_2} - B_{t+v_1}) f\left(w_1, B_{t+u_1} - B_t, ..., B_{t+u_n} - B_t\right) \mid \mathcal{F}_{t+v_1}\right] = 0$$

Donc on a, pour les mêmes raisons que dans la démonstration du lemme précédent :

$$E_{Q_2}\left[B_s - B_u \mid \mathcal{F}_u\right] = 0$$

Donc Q_2 est une probabilité martingale.
Enfin, on voit facilement que l'hypothèse $H(adt, dt)$ est vérifiée et donc $Q \in \mathcal{P}$.

□

Proposition V.13. *Soit $X \in Lip_t(\Omega)$ alors*

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E_c[X|\mathcal{F}_{s\wedge t}]$$

Démonstration.
Etudions dans un premier temps le cas où $t < s$:
$E_c[X|\mathcal{F}_t] \in \mathcal{L}_1^t$ (d'après la proposition V.8) et comme $t < s$, on a $L_1 \cap \mathcal{F}_t \subset L_1 \cap \mathcal{F}_s$. Donc d'après le a) de la proposition V.9,

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E_c[X|\mathcal{F}_t]$$

Etudions maintenant le cas où $t > s$:
On identifie Ω_T à $\Omega_s \times \Omega_{t-s} \times \Omega_{T-t}$

$$\begin{array}{rccc}
\phi' : & \Omega_T & \longmapsto & \Omega_s \times \Omega_{t-s} \times \Omega_{T-t} \\
& w & \longrightarrow & (w_1, w_2, w_3)
\end{array}$$

avec $(w_u^1)_{u\in[0;s]} = (w_u)_{u\in[0;s]}$, $(w_u^2)_{u\in[0;t-s]} = (w_{u+s} - w_s)_{u\in[0;t-s]}$ et $(w_u^3)_{u\in[0;T-t]} = (w_{u+t} - w_t)_{u\in[0;T-t]}$.

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \sup_{Q\in\mathcal{P}_{T-s}} \int_{\Omega_{T-s}} \sup_{P\in\mathcal{P}_{T-t}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2, w_3) dP(w_1, w_2, w_3) dQ(w_1, w_2)$$

De même que dans la démonstration de la proposition V.10, par compacité faible, il existe $Q \in \mathcal{P}_{T-s}$ et $P \in \mathcal{P}_{T-t}$ telles que :

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \int_{\Omega_{T-s}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2) dP(w_1, w_2, w_3) dQ(w_1, w_2)$$

Alors si on note $\tilde{Q}$ la restriction de Q à Ω_{t-s}, on a :

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \int_{\Omega_{t-s}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2, w_3) dP(w_1, w_2, w_3) d\tilde{Q}(w_2, w_3)$$

D'après le lemme V.11, il existe une probabilité $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{T-s}$ telle que :

$$E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \int_{\Omega_{T-s}} X(w_1, w_2, w_3) d\tilde{P}(w_1, w_2, w_3) \leqslant E_c[X|\mathcal{F}_s]$$

Montrons l'inégalité inverse :

$$E_c\left[X \mid \mathcal{F}_s\right] = \sup_{P \in \mathcal{P}_{T-s}} \int_{\Omega_{T-s}} X(w_1, w_2, w_3) dP(w_1, w_2, w_3)$$

De même que précédemment, par compacité de $\mathcal{P}_{T-s}$, il existe $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{T-s}$ telle que :

$$E_c\left[X \mid \mathcal{F}_s\right] = \int_{\Omega_{T-s}} X(w_1, w_2) d\tilde{P}(w_1, w_2, w_3) = \int_{\Omega_{T-s}} X(w_1, w_2, w_3) d\tilde{P}(w_1, w_2, w_3))$$

Posons $\tilde{P}_1$ la restriction de $\tilde{P}$ à Ω_{t-s} et $\tilde{P}_2$ la loi conditionnelle de $(B_{t+v} - B_t)_{t \in [0;T-t]}$ sachant $\mathcal{F}_t$, alors :

$$\begin{aligned} E_c\left[X \mid \mathcal{F}_s\right] &= \int_{\Omega_{t-s}} \int_{\Omega_{T-t}} X(w_1, w_2, w_3) dP_2(w_1, w_2, w_3) dP_1(w_1, w_2) \\ &\leqslant \int_{\Omega_{t-s}} E_c\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] dP_1(w_1, w_2) \leqslant E_c\left[E_c\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \end{aligned}$$

□

Extension de la définition et des résultats sur l'espérance conditionnelle non linéaire à $\mathcal{L}_1(c)$

Soit $X \in \mathcal{L}_1(c)$, alors d'après la proposition V.5, il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à $Lip_t(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad dans\ \mathcal{L}^1(c)$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$, alors la propriété c de la proposition V.9 et la proposition V.10

$$\begin{aligned} c\left(E_c\left[X_n \mid \mathcal{F}_t\right] - E_c\left[X_m \mid \mathcal{F}_t\right]\right) &\leqslant c\left(E_c\left[|X_n - X_m| \mid \mathcal{F}_t\right]\right) = E_c\left[E_c\left[|X_n - X_m| \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\ &\leqslant c\left(X_n - X_m\right) \end{aligned}$$

Or, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donc de Cauchy dans $\mathcal{L}_1(c)$, par conséquent, la suite $(E_c[X_n \mid \mathcal{F}_t])_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente dans $\mathcal{L}_1(c)$. On pose alors

$$E_c[X \mid \mathcal{F}_t] := \lim_{n\to\infty} E_c[X_n \mid \mathcal{F}_t]$$

Remarque De cette manière, nous définissons bien un unique objet qui appartient à $\mathcal{L}_1(c)$. En effet, si on prend deux suites X_n et Y_n de $Lip_t(\Omega)$ qui converge vers un même X dans $\mathcal{L}_1(c)$, alors de la même façon que ci-dessus pour montrer que la suite $(E_c[X_n \mid \mathcal{F}_t])_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, nous pouvons montrer que les limites des espérances conditionnelles non linéaire de X_n et Y_n sont égales quasi-partout.

Les propriétés démontrées pour l'espérance conditionnelle non linéaire sur $Lip_t(\Omega)$ restent vraies sur $\mathcal{L}_1(c)$:

Théorème V.14. *Soient $X, Y \in \mathcal{L}_1(c)$ alors*
a) Si $X \in \mathcal{F}_t$ alors $E_c[X|\mathcal{F}_t] = X$
b) Si $X \leqslant Y$ q.p. alors $E_c[X|\mathcal{F}_t]] \leqslant E_c[Y|\mathcal{F}_t]$ q.p.
c) $|E_c[X|\mathcal{F}_t] - E_c[Y|\mathcal{F}_t]| \leqslant E_c[|\ X - Y\ |\ |\mathcal{F}_t]$ q.p.
d) $E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]] = E_c[X]$
e) $E_c[E_c[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E_c[X|\mathcal{F}_{s\wedge t}]$

Démonstration.
On déduit ces résultats par passage à la limite grâce aux résultats obtenus dans le cas où X appartient à $Lip_t(\Omega)$.

□

3 Mesures de risque dynamiques

3.1 Définitions

Dans les articles [26], [28] ou encore [27], J. Bion Nadal propose une définition des mesures de risque conditionnelles. En particulier, dans [26], elle établit cela dans un cadre très général, d'incertitude, c'est-à-dire sans probabilité donnée. Mais, dans cet article l'ensemble des positions financières sur lequel sont définies les mesures de risque est supposé composé de fonctions bornées. Dans cette partie, nous voulons établir une théorie proche de celle de J. Bion Nadal dans notre cadre c'est-à-dire définir des mesures de risque conditionnelles, ce qui nous permettra d'introduire des mesures de risque dynamiques sur $\mathcal{L}_1(c)$.

Définition V.15. *Une famille $(\rho_{s,t})_{s\geqslant t}$ est appelée mesure de risque dynamique si, pour tout (s,t) tels que $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$, l'application*

$$\rho_{s,t} : \mathcal{L}_1^s(c) \longrightarrow \mathcal{L}_1^t(c)$$

vérifie pour tout s, t tels que $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ les conditions suivantes

1. *Monotonie : $\forall X, Y \in \mathcal{L}_1^s(c)$, si $X \leqslant Y$ q.s. alors $\rho_{s,t}(X) \geqslant \rho_{s,t}(Y)$ q.s.*
2. *Invariance par translation : $\forall X \in \mathcal{L}_1^s(c)$, $\forall Y \in \mathcal{L}_1^t(c)$, $\rho_{s,t}(X+Y) = \rho_{s,t}(X) - Y$ q.s.*

3. *Invariance par multiplication :* $\forall X \in \mathcal{L}_1^s(c)$, $\forall A \in \mathcal{F}_t$, $\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A \rho_{s,t}(X)$ *q.s.*
4. *Consistance en temps :* $\forall (r,s,t)$, $\rho_{r,t} = \rho_{r,s}(-\rho_{s,t})$ *si* $r \geqslant s \geqslant t$.

Les propriétés (1) et (2) s'interprètent facilement de même que dans le cas statique qui correspond en fait au cas particulier où $t = 0$ et $s = T$.
La propriétés (3) est une propriété supplémentaire imposée par la dynamique de notre problème et s'interprète comme suit. Si on suppose qu'à l'instant t on sait que l'événement A se produit alors notre évaluation du risque de la position X au temps $s \geqslant t$ dépend seulement des scénarios de la position financière possibles, c'est-à-dire $X\mathbf{1}_A$, la restriction de X à A. Nous verrons par la suite une autre caractérisation de cette propriété.
Enfin, la propriété de consistance par rapport au temps, traduit le fait que pour calculer le risque d'une position financière à l'instant s, il est équivalent de le faire directement ou de le faire en deux étapes en considérant un temps intermédiaire.

De même que dans le cas statique, il est intéressant d'étudier des mesures de risque dynamiques présentant des propriétés particulières de convexité ou de cohérence.

Définition V.16. *Une famille* $(\rho_{s,t})_{s \geqslant t}$ *de mesures de risque dynamique est dite convexe si, pour tout* (s,t) *tels que* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{L}_1^s(c)$, *pour tout* $\lambda \in [0,1]$,

$$\rho_{s,t}(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda \rho_{s,t}(X) + (1-\lambda) \rho_{s,t}(Y) \ \ q.s.$$

Définition V.17. *Une famille* $(\rho_{s,t})_{s \geqslant t}$ *de mesures de risque dynamique convexe est dite cohérente si, pour tout* (s,t) *tels que* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$, *pour tout* $X \in \mathcal{L}_1^s(c)$, *pour tout* $\lambda \geqslant 0$, *elle satisfait la propriété d'homogénéité positive :*

$$\rho_{s,t}(\lambda X) = \lambda \rho_{s,t}(X) \ \ q.s.$$

Ces propriétés de cohérence et de convexité s'interprètent comme dans le cas statique.

3.2 Caractérisation de l'invariance par multiplication

K. Defetsen et G. Scandolo ont montré que dans le cas de mesures de risque dynamiques définies sur $L^\infty(P,\Omega)$ la propriété d'invariance par multiplication peut être écrite de différentes manières équivalentes. Nous pouvons dans notre cadre montrer le même genre de résultat, plus précisément :

Proposition V.18. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une famille* $(\rho_{s,t})_{s \geqslant t}$ *de mesure de risque dynamique :*
(a) La propriété d'invariance par multiplication est vérifiée
(b) Pour tout $s \geqslant t$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{L}_1^t$, $A \in \mathcal{F}_t$, $X\mathbf{1}_A = Y\mathbf{1}_A$ *implique* $\rho_{s,t}(X)\mathbf{1}_A = \rho_{s,t}(Y)\mathbf{1}_A$
(c) Pour tout $s \geqslant t$, *pour tout* $X, Y \in \mathcal{L}_1^t$, $A \in \mathcal{F}_t$, $\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c}) = \rho_{s,t}(X)\mathbf{1}_A + \rho_{s,t}(Y)\mathbf{1}_{A^c}$
(d) Pour tout $s \leqslant t$, *pour tout* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_1^t$, $A_n \in \mathcal{F}_t$, $N \geqslant 1$, $\rho_{s,t}\left(\sum_{n=1}^N X_n \mathbf{1}_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^N \rho_{s,t}(X_n)\mathbf{1}_{A_n}$

Démonstration.
$(a) \Rightarrow (b)$: soient $X, Y \in \mathcal{L}_1^t$, $A \in \mathcal{F}_t$, $X\mathbf{1}_A = Y\mathbf{1}_A$, alors

$$\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A) = \rho_{s,t}(Y\mathbf{1}_A)$$

puis par invariance par multiplication on obtient (b).
$(b) \Rightarrow (a)$: soient $X \in \mathcal{L}_1^t$, $A \in \mathcal{F}_t$, alors $X\mathbf{1}_A = X\mathbf{1}_A\mathbf{1}_A$ et donc d'après (b),

$$\rho_{s,t}(X)\mathbf{1}_A = \rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_A$$

Et, $0\mathbf{1}_{A^c} = (X\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_{A^c}$ donc d'après (b),

$$\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_{A^c} = \rho_{s,t}(0)\mathbf{1}_{A^c} = 0$$

Donc,

$$\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A) = \rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_{A^c} + \rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A)\mathbf{1}_A = \rho_{s,t}(X)\mathbf{1}_A$$

$(a) \Rightarrow (c)$: soient $X, Y \in \mathcal{L}_1^t$, $A \in \mathcal{F}_t$, alors, en appliquant deux fois la propriété (a), on obtient

$$\begin{aligned}
\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c}) &= \rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c})\mathbf{1}_{A^c} + \rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c})\mathbf{1}_A \\
&= \rho_{s,t}((X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c})\mathbf{1}_{A^c}) + \rho_{s,t}((X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c})\mathbf{1}_A) \\
&= \rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A) + \rho_{s,t}(Y\mathbf{1}_{A^c}) \\
&= \rho_{s,t}(X)\mathbf{1}_A + \rho_{s,t}(Y)\mathbf{1}_{A^c}
\end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (d)$: On montre par récurrence ce résultat.
Si $N = 1$, on prend $Y = 0$ dans la relation (c) et on obtient $\rho_{s,t}(X\mathbf{1}_A) = \rho_{s,t}(X)\mathbf{1}_A$.
Supposons le résultat vérifié pour N, soient $(A_n)_{n \leqslant N+1} \in \mathcal{F}_t$ et $B = \cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{F}_t$. En appliquant la relation (c) et l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho_{s,t}\left(\sum_{n=1}^{N+1} X_n\mathbf{1}_{A_n}\right) &= \rho_{s,t}\left(\sum_{n=1}^{N+1} X_n\mathbf{1}_{A_n}\mathbf{1}_B + X_{N+1}\mathbf{1}_{A_{N+1}}\mathbf{1}_{B^c}\right) \\
&= \rho_{s,t}\left(\sum_{n=1}^{N+1} X_n\mathbf{1}_{A_n}\right)\mathbf{1}_B + \rho_{s,t}\left(X_{N+1}\mathbf{1}_{A_{N+1}}\right)\mathbf{1}_{B^c} \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \rho_{s,t}(X_n)\mathbf{1}_{A_n} + \rho_{s,t}(X_{N+1})\mathbf{1}_{A_{N+1}}
\end{aligned}$$

$(d) \Rightarrow (a)$: cette implication est évidente, elle correspond au cas $N = 1$.

□

3.3 Ensemble de positions acceptables

De même que dans le cas statique, on peut définir un ensemble de positions acceptables entre les instants t et s comme étant l'ensemble des positions dont la mesure de risque entre ces deux instants est négative :

Définition V.19. *Soit une famille de mesures de risque dynamiques* $(\rho_{s,t})_{s\leqslant t}$*, on définit l'ensemble des positions acceptables entre* s *et* t *associé à cette famille par*

$$\mathcal{A}_{\rho_{s,t}} = \{X \in \mathcal{L}_1^s(c); \rho_{s,t}(X) \leqslant 0 \ q.s.\}$$

Cet ensemble présente plusieurs propriétés proche de celles que l'on avait dans le cas statique des mesures de risque.

Proposition V.20. $\mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$ *est un ensemble non vide, héréditaire admettant les propriétés suivantes*
- *bifurcation : Pour tout* $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$ *et pour tous ensembles disjoints* $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_t$ *alors,* $X = X_1\mathbf{1}_{B_1} + X_2\mathbf{1}_{B_2}$ *appartient à* $\mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$.
- *positivité : Tout élément de* $\mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$*,* $\mathcal{F}_t$*-mesurable est positif quasi-partout.*

Démonstration.

- La propriété de bifurcation est une conséquence des différentes caractérisations de l'invariance par multiplication donnée dans la proposition V.18. Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_t$ deux ensembles disjoints alors d'après la proposition V.18,

$$\begin{aligned}
\rho_{s,t}(X_1\mathbf{1}_{B_1} + X_2\mathbf{1}_{B_2}) &= \rho_{s,t}(X_1\mathbf{1}_{B_1} + X_2\mathbf{1}_{B_2})\mathbf{1}_{B_1} + \rho_{s,t}(X_1\mathbf{1}_{B_1} + X_2\mathbf{1}_{B_2})\mathbf{1}_{B_2} \\
&= \rho_{s,t}(X_1\mathbf{1}_{B_1}) + \rho_{s,t}(X_2\mathbf{1}_{B_2}) \\
&= \rho_{s,t}(X_1)\mathbf{1}_{B_1} + \rho_{s,t}(X_2)\mathbf{1}_{B_2} \leqslant 0
\end{aligned}$$

  Donc $X = X_1\mathbf{1}_{B_1} + X_2\mathbf{1}_{B_2}$ appartient à $\mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$.
- Soit X un élément $\mathcal{F}_t$-mesurable de $\mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$, alors par invariance par translation,

$$\rho_{s,t}(X) = \rho_{s,t}(0) - X = -X q.s$$

  Par définition de $\mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$, $\rho_{s,t}(X) \leqslant 0$ $q.s.$ et donc X est positif quasi-partout.

□

D'autre part, on peut à partir de l'ensemble des positions acceptables associées à une famille $(\rho_{s,t})_{s\geqslant t}$ reconstruire la famille :

Proposition V.21.

$$\forall X \in \mathcal{L}_1^s(c),\ \rho_{s,t}(X) = \inf\left\{Y \in \mathcal{L}_1^t(c); X + Y \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}\right\}$$

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{L}_1^s(c)$, nous allons à la fois montrer que l'infimum existe et qu'il vaut $\rho_{s,t}(X)$.
D'une part, par invariance par translation, on a :

$$\rho_{s,t}(X + \rho_{s,t}(X)) = \rho_{s,t}(X) - \rho_{s,t}(X) = 0$$

Donc $X + \rho_{s,t}(X)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{A}_{s,t}$ et par conséquent, $\rho_{s,t}(X)$ appartient à $\left\{Y \in \mathcal{L}_1^t(c); X + Y \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}\right\}$.
D'autre part, si $Y \in \mathcal{L}_1^t(c)$ tel que $X + Y \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$ alors $\rho_{s,t}(X + Y) \leqslant 0$ et donc, par invariance par translation, $Y \geqslant \rho_{s,t}(X)$.

□

3.4 Consistance en temps et ensembles de positions acceptables

De manière classique nous pouvons établir un lien entre consistance en temps et ensembles de positions acceptables. Plus précisément, on a la propriété suivante :

Proposition V.22. *Soit* $(\rho_{s,t})_{t\leqslant s}$ *une famille de mesures de risque dynamiques consistante en temps alors*

$$\forall t \leqslant u \leqslant s,\ \mathcal{A}_{\rho_{s,t}} = \mathcal{A}_{\rho_{s,u}} + \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$$

Démonstration.
Soit $X \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$, posons $Z = X + \rho_{u,t}(X)$. Alors, par invariance par translation, $\rho_{u,t}(Z) = 0$ et donc $Z \in \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$.
Puis, d'après la propriété de consistance en temps,

$$\rho_{s,u}(X - Z) = \rho_{s,u}(X - Z) = \rho_{s,u}(-\rho_{u,t}(X)) = \rho_{s,t}(X) \leqslant 0 \ q.s.$$

Donc $X - Z \in \mathcal{A}_{\rho_{s,u}}$ et par suite $X \in \mathcal{A}_{\rho_{s,u}} + \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$. D'où,

$$\mathcal{A}_{\rho_{s,t}} \subset \mathcal{A}_{\rho_{s,u}} + \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $Y \in \mathcal{A}_{\rho_{s,u}}$ et $Z \in \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$, alors en utilisant la consistance en temps, puis l'invariance par translation,

$$\rho_{s,t}(Y + Z) = \rho_{s,u}(-\rho_{u,t}(Y + Z)) = \rho_{s,u}(-\rho_{u,t}(Z) + Y)$$

Comme $Z \in \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$, $-\rho_{u,t}(Z) + Y \geqslant Y$ $q.s.$ et en utilisant la propriété de monotonie et l'appartenance de Y à $\mathcal{A}_{\rho_{s,u}}$, on obtient

$$\rho_{s,u}(-\rho_{u,t}(Z) + Y) \leqslant \rho_{s,u}(Y) \leqslant 0 \ q.s.$$

Ce qui implique que $Y + Z \in \mathcal{A}_{\rho_{s,t}}$ et finalement

$$\mathcal{A}_{\rho_{s,t}} = \mathcal{A}_{\rho_{s,u}} + \mathcal{A}_{\rho_{u,t}}$$

□

3.5 Exemple

A l'aide de la notion introduite précédemment d'espérance conditionnelle non linéaire, nous pouvons définir un exemple de mesure de risque dynamique.
En effet, définissons une famille de mesures de risque, posons pour tout s, t tels que $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ et pour tout $X \in \mathcal{L}_1^s(c)$

$$\rho_{s,t}(X) = E_c[-X \mid \mathcal{F}_t]$$

On définit ainsi une famille de mesures de risque dynamiques cohérentes.

3.6 Conclusion et perspectives

L'essentiel supremum d'une famille de variables aléatoires définies P-p.s. est une variable aléatoire définie P-p.s. qui majore P-presque partout la famille. Une des difficultés dans notre cadre est de définir une notion proche de celle-ci mais définie quasi-partout : un "essentiel supremum quasi sûr". Mais ceci n'est pas possible de manière analogue au cas où l'on se fixe une probabilité.
Trouver une notion mathématique remplaçant l'essentiel supremum ouvrirait des perspectives intéressantes, on pourrait alors espérer montrer un théorème de représentation pour les mesures de risque dynamiques cohérentes et convexes. Cela permettrait également de construire des exemples à partir d'ensembles de positions acceptables.

Annexe

1 Introduction

Les capacités sont un des outils fondamentaux dans l'étude de notre modèle. Elles permettent de prendre en compte simultanément toutes nos probabilités de l'ensemble $\mathcal{P}$ sans en privilégier une en particulier. Ce qui nous intéresse car nous travaillons avec un ensemble de probabilités non dominé et nous ne voulons donc pas regarder les ensembles négligeables ou propriétés vraies presque-partout pour une probabilité mais pour notre ensemble de probabilité. Pour cela la notion de probabilité est mal adaptée et il est préférable d'utiliser une généralisation de celle-ci : la notion de capacité, qui permet de s'affranchir de la propriété d'additivité et de la remplacer par la sous-additivité.
Le but de cette partie est de rappeler les principales définitions et propriétés dont nous nous servons dans le corps de cette thèse. ces résultats sont principalement issus de [45] et [4]. Dans la première section, nous rappellerons les principes de la construction fonctionnelle des capacités et les définitions de capacités régulières et de Prokhorov. Dans la deuxième section nous verrons la construction ensembliste des capacité et un théorème de capacitabilité de Choquet. Enfin, dans la troisième section, nous établirons un lien entre le point de vue fonctionnel et le point de vue ensembliste et nous en déduirons le théorème qui nous utilisons dans le corps de la thèse.

2 Construction fonctionnelle

Les résultats que nous présentons dans cette partie, ainsi que leur démonstration sont dans [45]

2.1 Définitions et prolongement de Lebesgue

On se donne un espace E complètement régulier. Soit $\mathcal{L}$ un sous espace réticulé de fonctions continues bornées, contenant les constantes et engendrant la topologie de E. Rappelons dans ce cadre les définitions ensemblistes.

Définition V.23. *On appelle capacité sur $\mathcal{L}$ toute semi-norme c sur $\mathcal{L}$ ayant les propriétés suivantes :*

(a) c est croissante, c'est-à-dire, si $|f| \leqslant |g|$ alors $c(f) \leqslant c(g)$,

(b) pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ tendant vers 0 en décroissant, on a $\inf c(f_n) = 0$.

Définition V.24. *Une capacité c est dite régulière si elle vérifie*

(b') Pour tout ensemble filtrant décroissant $f_\alpha \in \mathcal{L}$ tendant vers 0, on a $\inf c(f_\alpha) = 0$.

Définition V.25. *Une capacité c est dite de Prokhorov si elle vérifie*

(b") Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K tel que $c(f) \leqslant \epsilon$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ telle que $|f|$ soit majorée par l'indicatrice de $E\backslash K$.

Remarque Dans le corps de la thèse, nous considérons le cas où $E = \Omega = C_0\left([0;T], \mathbb{R}^d\right)$ est l'espace des fonctions continues définies sur $[0;T]$, à valeur dans R^d, nulles en 0, muni de la convergence uniforme et $\mathcal{L} = C_b(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions continues bornées définies sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Nous pouvons maintenant établir les liens entre les définitions. En effet, on voit facilement que (b') implique (b) et que (b'') implique (b'). De plus, sous certaines conditions sur l'espace E, on a une équivalence entre les propriétés (b) et (b') :

Proposition V.26. *Si E est un espace Lindelöf (c'est-à-dire que de tout recouvrement d'ouvert on peut extraire un recouvrement dénombrable), alors toute capacité est régulière*

Sous certaines conditions, nous avons également une équivalence entre les propriétés (b') et (b'').

Proposition V.27. *Si E est localement compact ou polonais alors toute capacité régulière est de Prokhorov.*

Remarque Dans le corps de la thèse, l'espace $E = \Omega = C_0\left([0;T],\mathbb{R}^d\right)$ muni de la convergence uniforme que nous avons choisi est un espace métrisable séparable et complet c'est-à-dire un espace polonais et de Lindelöf. Donc dans ce cadre particulier, nous avons équivalence entre les propriétés (b), (b') et (b''). Ce qui signifie que toute capacité est régulière et même de Prokhorov. C'est pourquoi dans la suite cette partie nous nous intéresserons particulièrement à ces types de capacité.

Si c est une capacité régulière sur $\mathcal{L}$, on peut la prolonger à l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ en effectuant le prolongement de Lebesgue suivant :
– Si f est s.c.i. positive, on pose

$$c\left(f\right) = \sup\left\{c\left(\phi\right)\ ;\ 0 \leqslant \phi \leqslant f\ ,\ \phi \in \mathcal{L}\right\}$$

– Puis, si g est quelconque, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose :

$$c\left(g\right) = \inf\left\{c\left(f\right)\ ;\ f \text{ s.c.i et } f \geqslant |g|\right\}$$

Le prolongement ainsi défini sera toujours noté c. Il vérifie l'inégalité de convexité dénombrable :

Proposition V.28. *Soient g, g_n des fonctions positives telles que $g \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ alors $c\left(g\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} c\left(g_n\right)$.*

Dans la suite, on notera $F^1\left(c\right)$ l'ensemble des fonctions f de E dans $\mathbb{R}$ telles que $c\left(f\right) < +\infty$ et $\mathcal{L}^1(c)$ l'adhérence de $\mathcal{L}$ dans $F^1(c)$ relativement à la distance définie par c. Le quotient $L^1(c)$ de $\mathcal{L}^1(c)$ par le sous-espace des fonctions c-polaires est un espace de Banach réticulé.

On a construit notre capacité sur un espace de fonction $\mathcal{L}$ inclus dans $C_b\left(E\right)$, mais on peut remarquer que si on prend un espace plus petit que $C_b\left(E\right)$, lorsque l'on considère l'adhérence de notre espace $\mathcal{L}$ on obtient un espace qui contient $C_b\left(E\right)$. Rappelons la proposition 10 p.880 de [45] :

Proposition V.29.

$$C_b\left(E\right) \subset \mathcal{L}^1(c)$$

Dans la suite et dans le cadre de la thèse, nous prendrons $\mathcal{L} = C_b\left(E\right)$

2.2 Propriétés du dual de $\mathcal{L}^1(c)$

Un théorème de Feyel De la Pradelle (voir proposition 11p. 881 de [45]), nous caractérise le dual de $\mathcal{L}^1(c)$ et en particulier les formes linéaires positives en terme de mesure ne chargeant pas les ensembles polaires. Cette propriété est fondamentale et nous l'utilisons à de nombreuses reprises dans le corps de cette thèse.

Proposition V.30. *Le dual de $\mathcal{L}^1(c)$ est constitué de mesures portées par E.*

De plus, les formes linéaires positives sont nécessairement dans le dual de $\mathcal{L}_1(c)$ et on peut donc les représenter par des mesures :

Théorème V.31. *Si T est une forme linéaire positive de $\mathcal{L}^1(c)$ dans $\mathbb{R}$, alors T est continue et il existe une mesure positive finie λ qui ne charge pas les ensembles polaires telle que*

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(c),\ T(f) = \int_\Omega f(x)\lambda(dx)$$

Un autre théorème énoncé par D. Feyel et A. de La Pradelle (voir théorème 12p. 881 de [45]) nous sera utile pour caractériser le dual de $\mathcal{L}^1(c)$ dans le corps de la thèse (cf. paragraphe 1.5.1) :

Théorème V.32. *Soit H un convexe héréditaire étroitement compact de mesures régulières positives sur E, pour tout $f \in C_b(E)$, posons*

$$c_H(f) = \sup_{\mu \in H} \left\{ \int |f|\, d\mu \right\}$$

alors c_H est une capacité régulière et $H = M(c_H)$ où $M(c_H)$ désigne l'ensemble des mesures boréliennes positives majorées par c_H.

3 Construction ensembliste

3.1 Définition

Dans la partie précédente nous sommes partis d'une capacité définie sur un espace de fonctions $\mathcal{L}$, pour ensuite étendre la définition à toutes les fonctions et en particulier aux fonctions indicatrices, ce qui nous donnait une capacité sur les boréliens de E. D'autres théories proposent une construction directe des capacités sur les boréliens d'un ensemble E, c'est ce que nous présentons dans cette partie. Nous verrons ensuite que ces deux définitions correspondent.
Dans cette partie on se donne une espace E et sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ (on pourrait plus généralement considérer un espace pavé $(E, \mathcal{E})$ cf [4] pour plus de détails).

Définition V.33. *Une application I de $\mathcal{B}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée précapacité si elle vérifie les propriétés :*
(i) I est croissante, c'est-à-dire si $A \subset B$ alors $I(A) \leqslant I(B)$

(ii) I "monte", c'est-à-dire si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{B}(E)$ alors $I(\cup A_n) = \sup I(A_n)$

Définition V.34. *Une $\mathcal{B}(E)$-capacité de Choquet sur E est une précapacité I qui vérifie la propriété suivante :*
(iii) I descend les compacts, c'est-à-dire, si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts de $\mathcal{B}(E)$ alors $I(\cap K_n) = \inf I(K_n)$

3.2 Capacitabilité

Nous commençons par un théorème fondamental pour les capacités, appelé théorème de capacitabilité de Choquet. Il nous permet d'exprimer la capacité de tout borélien de E en fonction de celle des compacts qui sont inclus dans ce borélien. Ce théorème est très important car il nous permet souvent de généraliser des résultats vrais sur les compacts aux boréliens de E.

Théorème V.35. *Soit E un espace compact métrisable et soit c une $\mathcal{B}(E)$-capacité de Choquet alors toute partie B borélienne de E est capacitable, c'est-à-dire*

$$I(B) = \sup\{I(K),\ K \text{ compact inclus dans } B\}$$

Ce théorème est énoncé dans le cas où E est compact, ce qui n'est pas le cas dans notre cadre. Mais, dans notre cadre, E est polonais et la capacité est de Prokhorov, ce qui implique que l'on peut étendre ce résultat. En effet, si on se fixe un $\epsilon > 0$, par définition d'une capacité de Prokhorov, il existe K_ϵ un compact tel que $c(f) \leqslant \epsilon$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ telle que $|f|$ soit majorée par l'indicatrice de $E\backslash K$.
Alors, on peut définir une capacité de Choquet c_ϵ sur le sous ensemble K_ϵ par

$$\forall A \subset K_\epsilon,\ c_\epsilon(A) = c(A)$$

Alors, on est dans le cadre du théorème de capacitabilité qui nous donne $\forall A \subset K_\epsilon$

$$\begin{aligned} c_\epsilon(A) &= \sup\{c_\epsilon(K),\ K \text{ compact inclus dans } A\} \\ &= \sup\{c(K),\ K \text{ compact inclus dans } A\} \end{aligned}$$

Soit $B \in \mathcal{B}(E)$, alors

$$c(B) \leqslant c(B \cap K_\epsilon) + c(B \cap (K_\epsilon)^c)$$

D'après le théorème de capacitabilité, il existe un compact K inclus dans $B \cap K_\epsilon \subset B$ tel que

$$c(B \cap K_\epsilon) \leqslant c(K) + \epsilon$$

Or $(K_\epsilon)^c$ est ouvert donc

$$c(B \cap (K_\epsilon)^c) \leqslant c((K_\epsilon)^c) = \sup\left\{c(\phi)\ ;\ 0 \leqslant \phi \leqslant \mathbf{1}_{(K_\epsilon)^c}\ ,\ \phi \in \mathcal{L}\right\} \leqslant \epsilon$$

Donc

$$c(B) \leqslant 2\epsilon + c(K) \leqslant \sup\{c_\epsilon(K),\ K \text{ compact inclus dans } B\} + 2\epsilon$$

ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a le résultat.

4 Lien entre capacités ensemblistes et capacités fonctionnelles

Dans le cas où $\mathcal{L} = C_b(E)$ (qui est le cadre dans la thèse), nous pouvons établir un lien entre les définitions fonctionnelle et ensembliste. En effet, dans le cas de la définition fonctionnelle, grâce au prolongement de Lebesgue nous avons défini notre capacité c pour une fonction quelconque, en particulier pour les fonctions indicatrices. Ainsi, si c est une capacité sur $\mathcal{L}$, nous pouvons définir une application que nous noterons encore c par :

$$\begin{array}{rccc} c: & A & \longmapsto & c(A) = c(\mathbf{1}_A) \\ & \mathcal{B}(E) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \end{array}$$

Proposition V.36. *L'application c de $\mathcal{B}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est une $\mathcal{B}(E)$-capacité de Choquet et tout borélien est donc capacitable*

C'est grâce à l'extension de Lebesgue que l'on obtient une capacité de Choquet (cf [34])

Bibliographie

[1] J-P. Aubin and I.Ekeland. *Applied Nonlinear Analysis.* Wiley, New York, 1984.

[2] Tomas Björk. *Arbitrage theory,in continuous time.* Oxford, 1998.

[3] F. Delbean and W. Schachermayer. *The Mathematics of Arbitrage.* Springer Finance, 2006.

[4] C. Dellacherie. *Capacités et Processus Stochastiques.* Springer Verlag, 1972.

[5] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel.* Hermann, 1980.

[6] H. Föllmer and A.Schield. Convex measures ofrisk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6(4) :429–447, 2002.

[7] H. Föllmer and A.Schield. *Stochastic finance : an introduction in discrete time.* De Gruyter Studies in Math., 2002.

[8] F. Hirsch and N. Bouleau. *Dirichlet forms and analysis on Wiener space.* De Gruyter Studies in Math., 1991.

[9] F. Hirsch and G. Lacombe. *Eléménts d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 1997.

[10] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag New York, 1988.

[11] M. Hu L. Denis and S. Peng. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : application to g-brownian motion pathes. *Preprint, disponible sur http ://arxiv.org/pdf/0802.1240*, 2008.

[12] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, 1999.

[13] A.Levy M.Avellaneda and A.Paras. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Journal of Applied Finance*, 1, 1995.

[14] J.M. Eber P. Artzner, F. Delbaen and D.Heath. Thinking coherently. *Risk*, 10 :68–71, 1997.

[15] J.M. Eber P. Artzner, F. Delbaen and D.Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, 9(3) :203–228, 1999.

[16] J.M. Eber P. Artzner, F. Delbaen and D.Heath. Coherent multiperiod risk adjusted values and bellman's principle. *Annals of Operations Research*, 152(1) :5–22, 2007.

[17] F. Delbaen P. Cheredito and M.Kupper. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete time processes. *Electronical Journal of Probability*, 11 :57–106, 2006.

[18] D. Revuz and M.Yor. *Continuous Martingale and Brownian Motion.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.

[19] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes, And Martingales (Vol1).* Wiley, 1994.

[20] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1974.

[21] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1977.

[22] C. Acerbi and D. Tasche. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, 26(7) :1487–1503, 2002.

[23] C. Acerbi C. Nordio and C. Sirtori. Expected shortfall as a tool for financial risk management. *Working Paper, disponible sur http ://arxiv.org/pdf/cond-mat/0102304*, 2001.

[24] P. Barrieu and N.El Karoui. Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. *Financa and Stochastics*, 9(2) :269–298, 2005.

[25] P. Barrieu and N.El Karoui. Pricing, hedging and optimally designing derivatives via minimization of risk measures. *Preprint, available at http ://aps.arxiv.org/abs/0708.0948*, 2007.

[26] J. Bion-Nadal. Conditional risk measure and robust representation of convex conditional risk measures. *CMAP Preprint 557, Ecole Polytechnique Palaiseau*, 2004.

[27] J. Bion-Nadal. Dynamic risk measures : Time consistency and risk measures from bmo martingales. *Finance and Stochastics*, 12(2) :219–244, 2008.

[28] J. Bion-Nadal. Time consistent dynamic risk processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 2008.

[29] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.

[30] K. Borch. Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica*, 30 :424–444, 1962.

[31] A.S. Cherny. Pricing with coherent risk. *Probability Theory and its applications*, 52(3) :506–540, 2007.

[32] A.S. Cherny. Equilibrium with coherent risk. *Preprint, available at :http ://mech.math.msu.su/cherny.*, 2008.

[33] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5 :131–295, 1955.

[34] G. Choquet. Forme abstraite du théorème de capacitabilité. *Annales de l'Institut Fourier*, 9 :83–89, 1959.

[35] M. Davis. Weather derivatives by marginal value. *Quantitative Finance*, 1 :1–4, 2001.

[36] F. Delbaen. A remark on slutsky's theorem. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 32 :313–315, 1999.

[37] F. Delbaen. Coherent risk measures on general probability spaces. *Advances in finance and stochastics*, pages 1–37, 2002.

[38] F. Delbaen. The structure of m-stable sets and in particular of the set of risk neutral measures. *Lecture Notes in Mathematics*, 1874 :215–258, 2006.

[39] F. Delbaen and W.Schachermayer. A compactness principle for bounded sequences of martingales with applications. *Proceedings of the Seminar of Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Progress in Probability*, 43 :137–173, 1999.

[40] L. Denis and C. Martini. A theorical framework for the pricing of continent claims in the presence of model uncertainty. *The Annals of Applied Probability*, 16(2) :827–852, 2006.

[41] K. Detlefsen and G.Scandolo. Conditional and dynamic convex risk measures. *Finance and Stochastics*, 9(4), 2005.

[42] N. El Karoui and M-C. Quenez. Dynamic programming and pricing contingent claims in incomplete markets. *SIAM journal on control & optimization*, 33 :29–66, 1995.

[43] N. El Karoui and N. Rouge. Pricing via utility maximisation and entropy. *Mathematical Finance*, 10 :259–276, 2000.

[44] P. Embrechts. Extreme value theory : Potential and limitations as an integrated risk management tool. *Derivatives Use, Trading and Regulations*, 6 :449–456, 2000.

[45] D. Feyel and A.De La Pradelle. Espaces de sobolev gaussiens. *Ann. I. Fourier*, 39(4) :875–908, 1989.

[46] D. Filipovic and G.Svindland. Convex risk measures beyond bounded risks, or the canonical model space for law-invariant convex risk measures is l^1. *VIF working paper series*, 2008.

[47] M. Fritelli and E. Rosazza Gianin. Dynamic convex risk measures. *Risk Measures for the 21st Century*, 2004.

[48] I. Gilboa and D.Schmeidler. Maximin expected utility with a non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18 :141–153, 1989.

[49] A. Gundel. Robust utility maximization for complete and incomplete market models. *Finance and Stochastics*, 9(2) :151–176, 2005.

[50] P. Huber and V. Strassen. Minimax tests and the neyman-pearson lemma for capacities. *Ann. Statistics*, 1(2) :251–263, 1973.

[51] D. Kramkov and W.Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investement in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 9(3) :904–950, 1999.

[52] D. Kramkov and W.Schachermayer. Necessary and su ?cient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 13(4), 2003.

[53] F. Lyons. Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives. *Journal of Applied Finance*, 2 :117–133, 1995.

[54] R.C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4) :373–413, 1971.

[55] S. Peng. Backward sde and related g-expectation. *Backward stochastic differential equations.*

[56] S. Peng. Filtration consistent nonlinear expectations and evaluation of contingent claims. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 20(2) :1–24, 2004.

[57] S. Peng. Nonlinear expectations, nonlinear evaluations and risk measures. *Stochastics Methods in finance*, page 165–253, 2004.

[58] S. Peng. Nonlinear expectations and nonlinear markov chains. *Chin. Ann. Math.*, 26B(2) :159–184, 2005.

[59] S. Peng. G-expectation, g-brownian motion and related stochastic calculus of ito's type. *Preprint, disponible sur http ://arxiv.org/pdf/math/0601035*, 2006.

[60] S. Peng. Multi-dimentional g-brownian motion and related stochastic calculus under g-expectation. *Preprint, disponible sur http ://arxiv.org/pdf/math/0601699v2*, 2006.

[61] S. Peng. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations. *Preprint, disponible sur http ://arxiv.org/pdf/math/0702358v1*, 2007.

[62] M.C. Quenez. Optimal portfolio in a multiple-priors model. *Progress in Probability*, 58 :291–321, 2004.

[63] F. Riedel. Dynamic coherent risk measures. *Stochastic Processes and their Applications*, 112(2) :185–200, 2004.

[64] H. Rootzén and C. Klüppelberg. A single number can't hedge against economic catastrophes. *Ambio*, 28(6) :550–555, 1999.

[65] A. Schied and C-T.Wu. Duality theory for optimal investments under model uncertainty. *Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH*, 23(3) :199–217, 2005.

[66] D. Talay and Z.Zheng. Worst case model risk management. *Finance and Stochastics*, 6 :517–537, 2002.

[67] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1970.

[68] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944.