



**HAL**  
open science

# Utilisation d'une interaction nucléon-nucléon de portée finie dans le formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum.

Jean Baptiste Faes

## ► To cite this version:

Jean Baptiste Faes. Utilisation d'une interaction nucléon-nucléon de portée finie dans le formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum.. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université de Caen, 2007. Français. NNT: . tel-00371317

**HAL Id: tel-00371317**

**<https://theses.hal.science/tel-00371317v1>**

Submitted on 27 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



GANIL T 07 01

Grand Accélérateur National d'Ions Lourds

**GANIL**  
Laboratoire commun CEA / DSM - CNRS / INP<sup>3</sup>

# UNIVERSITE de CAEN/ BASSE NORMANDIE

U.F.R. de Sciences  
ECOLE DOCTORALE SIMEM

THESE

Présentée par

**Mr Jean-Baptiste FAES**

et soutenue

**le 13 avril 2007**

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN**

**Spécialité : Constituants élémentaires**

(Arrêté du 07 Août 2006)

Titre :

**Utilisation d'une interaction nucléon-nucléon de portée finie dans le formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum.**

MEMBRES du JURY :

**Mr Morten HJORTH-JENSEN**, Professeur, Université de Oslo (*rapporteur*)

**Mr Van Giai NGUYEN**, Directeur de recherche CNRS, IPN Orsay (*rapporteur*)

**Mr Chris HEYDE**, Professeur, Université de Gent

**Mr Oscar NAVILIAT-CUNCIC**, Professeur, Université de Caen

**Mme Ingrid ROTTER**, Professeur, Institut für Komplexe Systeme, Dresden

**Mr Jan VAAGEN**, Professeur, Université de Bergen

**Mr Marek PLOSZAJCZAK**, Directeur de recherche, GANIL Caen (*Directeur de thèse*)



UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE  
U.F.R Sciences. ÉCOLE DOCTORALE S.I.M.E.M.

## THÈSE

présentée par

Mr Jean-Baptiste FAES

et soutenue

le 13 avril 2007

en vue de l'obtention du

## DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : Constituants élémentaires  
(Arrêté du 07 août 2006)

Titre :

**Utilisation d'une interaction nucléon-nucléon de portée finie dans le formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum**

## MEMBRES du JURY

Mr Morten HJORTH-JENSEN, Professeur, Université de Oslo (**rapporteur**)  
Mr Van Giai NGUYEN, Directeur de Recherche CNRS, IPN Orsay, (**rapporteur**)  
Mr Chris HEYDE, Professeur, Université de Gent  
Mr Oscar NAVILIAT-CUNCIC, Professeur, Université de Caen  
Mme Ingrid ROTTER, Professeur, Institut für Komplexe Systeme, Dresden  
Mr Jan VAAGEN, Professeur, Université de Bergen  
Mr Marek PLOSZAJCZAK, Chercheur CEA, GANIL (**Directeur de thèse**)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Structure et réaction dans une approche unifiée</b>	<b>8</b>
2.1	Champ moyen et interactions . . . . .	9
2.1.1	Les équations de Hartree-Fock . . . . .	9
2.1.1.1	Formalisme de base . . . . .	9
2.1.1.2	Noyaux à couches fermées . . . . .	11
2.1.1.3	Noyaux à couches non fermées . . . . .	14
2.2	Le modèle en couches . . . . .	15
2.2.1	Formalisme de base . . . . .	15
2.2.2	Méthode de seconde quantification . . . . .	16
2.3	La théorie des réactions . . . . .	20
2.3.1	Le problème avec asymptotique à deux fragments . . . . .	20
2.3.2	Canaux d'arrangement . . . . .	22
2.3.3	Ondes partielles et schéma de couplage . . . . .	23
2.3.4	Ondes distordues et potentiel de Coulomb . . . . .	25
2.3.5	Comportement asymptotique . . . . .	26
2.3.6	Décroissance spontanée . . . . .	27
2.3.7	Introduction de notations supplémentaires . . . . .	28
2.4	Le modèle en couches avec couplage aux états du continuum . . . . .	30
2.4.1	Etats individuels . . . . .	30
2.4.1.1	Etats liés, continuum et résonances . . . . .	30
2.4.1.2	Equation radiale et condition de raccordement . . . . .	31
2.4.1.3	Etats quasi-liés inclus dans le continuum . . . . .	33
2.4.1.4	Projecteurs et complétudes . . . . .	38
2.4.2	Etats à $N$ -corps . . . . .	41
2.4.2.1	Relation de complétude dans l'espace de Fock . . . . .	41
2.4.2.2	Espace des états liés . . . . .	43

2.4.2.3	Espace des états avec une particule dans un état de diffusion	43
2.4.2.4	Espaces modèles	43
2.4.3	Formalisme de Feshbach	44
2.4.3.1	Lien entre les espaces modèles et les canaux physiques	44
2.4.3.2	Projecteurs et résolvante	50
2.4.4	Les équations générales du modèle en couches avec couplage d'une particule aux états du continuum	52
2.4.4.1	Forme générale des solutions de diffusion	52
2.4.4.2	Séparation de l'hamiltonien total en hamiltoniens partiels et opérateurs de transition	55
2.4.4.3	Les équations homogènes	58
2.4.4.4	Les équations inhomogènes	64
2.4.4.5	Résonances à $N$ corps	67
2.4.5	Les approximations du modèle	70
2.4.5.1	Les mélanges de configurations	70
2.4.5.2	Problèmes liés à la troncation de l'espace de valence	70
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>71</b>
3.1	Coupure des résonances individuelles	71
3.2	Interaction nucléon-nucléon	81
3.3	Spectroscopie de $^{17}F$ et $^{17}O$ et déphasages de diffusion $^{16}O(p,p)^{16}O$	84
<b>4</b>	<b>Modèle en couches avec un nombre arbitraire de particules peuplant les états du continuum</b>	<b>89</b>
4.1	Considérations générales	89
4.1.1	Espaces des canaux physiques	89
4.1.2	Espaces modèles	91
4.1.3	Lien entre les espaces modèles et les canaux physiques	92
4.2	Les équations générales du modèle en couches avec couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum	98
4.2.1	Forme générale des équations	98
4.2.2	Choix de la représentation pour la résolution des équations	101
4.2.2.1	Coordonnées hyper-sphériques	101
4.2.2.2	Rotation cinématique	109
4.2.2.3	Antisymétrisation	111
4.2.2.4	Etats du projectile	117
4.2.2.5	Construction de la base à deux fragments	118
4.2.3	Les équations homogènes dans la base à deux fragments	121

4.2.4	Remarques sur les autres formes d'aymptotiques . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>128</b>
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>131</b>
6.1	Méthode de résolution des équations Hartree-Fock en représentation coordonnée . . . . .	131
6.2	Calcul des éléments de matrice à deux corps de l'interaction nucléon-nucléon	133
6.2.1	Interaction de Brink-Boeker . . . . .	133
6.2.2	Interaction spin-orbite de portée finie . . . . .	135
6.2.3	Interaction coulombienne . . . . .	141
6.3	Le code de modèle en couches . . . . .	144
6.4	Matrice de couplage des équations homogènes . . . . .	147
6.5	Source des équations inhomogènes . . . . .	151
6.6	Représentation radiale des solutions de l'espace $\mathcal{Q}$ . . . . .	157
6.7	Résolution des équations projetées sur le continuum individuel . . . . .	159
6.7.1	Solution matricielle . . . . .	159
6.7.2	Solution vectorielle . . . . .	161
6.8	Dérivation de la résolvante avec un nombre arbitraire d'espaces modèles . .	163
6.9	Fonctions de spin-isospin à symétrie adaptée . . . . .	166
6.10	Projection des équations avec deux particules dans le continuum . . . . .	171
6.11	Éléments de la matrice de couplage dans la partition de masse « 2 » . . . .	175
6.12	Exemple de calcul de sources pour les équations inhomogènes . . . . .	179

# Chapitre 1

## Introduction

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude des systèmes quantiques ouverts non-relativistes appliquée à la physique nucléaire dans le but d'obtenir une description microscopique des noyaux faiblement liés, ainsi que des mécanismes de réaction impliquant de tels noyaux. Ce travail regroupe différents domaines de la théorie nucléaire tels que la théorie du modèle en couches, la théorie Hartree-Fock, la théorie des réactions ...

L'approche standard dans l'étude des systèmes quantiques où le nombre de particules est trop important pour que l'on puisse résoudre le problème exactement, se base sur la construction d'un champ moyen (ressenti par chaque particule) à partir d'une interaction nucléon-nucléon donnée. Ce champ moyen permet de définir un hamiltonien individuel générant une base individuelle. Cette base individuelle est utilisée pour la construction d'une base à  $N$  corps (déterminants de Slater). Enfin, les nucléons sont corrélés entre eux par l'interaction résiduelle qui est diagonalisée dans la base à  $N$  corps, fournissant ainsi les mélange de configurations. La construction du champ moyen, et donc de l'hamiltonien individuel, diffère d'une théorie à l'autre.

Dans la théorie du modèle en couches la base individuelle est construite à partir d'un puit de potentiel infini [1, 2, 3, 4, 5]. Cette base est tronquée puis utilisée pour la construction des déterminants de Slater. Enfin, l'interaction résiduelle est ajustée en fonction de l'espace de valence choisi. En pratique cependant, les monopôles ainsi que les multipôles sont fittés de manière à reproduire au mieux la spectroscopie des noyaux étudiés. On comprend dès lors pourquoi cette méthode est susceptible de fournir les mélanges de configurations les plus réalistes. Cependant ce genre d'approche ne s'applique qu'aux systèmes quantiques fermés (noyaux proches du fond de la vallée de stabilité) et ne permet pas de fournir une bonne description des noyaux faiblement liés.

Afin d'inclure les couplage aux états du continuum dans le modèle en couches fut introduit le *GSM* (Gamow Shell Model) [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Ce modèle utilise les états de Gamov [15], générés par un puits de potentiel fini et vérifiant la relation de complétude de Berggren [16]. Le *GSM* permet de prendre en compte le couplage aux états du continuum d'un nombre arbitraire de particules mais ne permet pas une description des mécanismes de réaction car ce modèle n'offre pas la possibilité de distinguer les différents canaux de décroissance.

Afin de décrire les mécanismes de réaction dans le contexte du modèle en couches, Feshbach a introduit un formalisme [17] dans lequel l'espace de Hilbert est séparé en deux parties : l'espace  $Q$  dans lequel nous voulons développer la fonction d'onde du système, et l'espace  $P$  qui contient le reste de l'espace. S'appuyant sur ce formalisme, Mahaux et Weidenmüller, dans leur étude des mécanismes de réaction par la théorie du modèle en couches [18], approximent le champ moyen par un simple puit de potentiel de type Saxon-Woods avec un couplage spin-orbite ainsi que l'interaction centrale de Coulomb. Ce potentiel étant de profondeur finie, l'hamiltonien individuel génère un ensemble fini d'états individuels liés ainsi qu'un continuum. L'espace  $q$  des états individuels liés et l'espace  $p$  des états de diffusion sont utilisés pour la construction des espace  $Q$  (système total lié) et  $P$  (système total comportant une particule dans un état de diffusion). Le puit de potentiel étant censé représenter le champ moyen, l'interaction résiduelle doit correspondre exactement à la différence entre l'interaction nucléon-nucléon et ce potentiel moyen. Ce formalisme n'a cependant fait l'objet d'aucune application numérique, en raison de la définition peu réaliste des espaces  $q$  et  $p$  et des couplages entre les espaces  $Q$  et  $P$ .

Se basant sur le formalisme de Feshbach, Rotter et le groupe de Dresde ont développé le *Continuum Shell Model* [19, 20], dans lequel l'espace  $q$  est re-défini de manière à y inclure les résonances individuelles sous forme d'*états quasi-liés*. L'espace  $p$  est alors renormalisé et constitue un continuum non-résonant. Pour des raisons évidentes de simplification, leurs applications numériques furent menées à bien en approximant l'interaction résiduelle par une interaction schématique de portée nulle. En dépit de ces approximations, la même interaction est utilisée pour le calcul des mélanges de configurations ainsi que pour le couplage aux états du continuum. Cette approche présente néanmoins le désavantage lié aux mélanges de configurations obtenus, rappelons-le, au moyen d'une interaction schématique.

Pour pallier à ce problème a été introduit le formalisme du *SMEC* (Shell Model Embedded in the Continuum) [21, 22, 23, 24] dans lequel les mélanges de configurations sont fournis par le modèle en couches, et ce pour une interaction ajustée pour l'espace de valence considéré. Cette approche permet d'obtenir des résultats quantitatifs très proches des données expérimentales pour les spectres [21, 22] et sections efficaces de diffusion [22], de capture radiative [22, 23, 25], de dissociation Coulombienne [26], de décroissance beta première interdite [27] et de radioactivité 2 protons [28].

Ces deux derniers modèles, *Continuum Shell Model* et *SMEC*, souffrent du problème lié à la dissociation du potentiel moyen (et donc de l'interaction résiduelle) et de l'interaction nucléon-nucléon, les états individuels et le couplage aux états du continuum étant obtenus à partir de différentes interactions. En effet, l'interaction résiduelle dépend du choix du potentiel moyen ainsi que de l'interaction nucléon-nucléon de base. C'est pourquoi avons-nous décidé de mener une étude dans laquelle tous les ingrédients nécessaires à un calcul de modèle en couches avec couplage aux états du continuum sont dérivés à partir de la seule donnée de l'interaction nucléon-nucléon. L'interaction résiduelle devant, par définition, être minimum, nous construisons la base individuelle à partir d'un champ moyen auto-consistant dérivé des équations de Hartree-Fock. Cette même interaction résiduelle est alors utilisée pour les couplages aux états du continuum.

Dans cet exposé, nous présentons en premier lieu une approche théorique générale. Cependant, la validation numérique du modèle n'est que prototypique. En effet, nous sommes encore, à l'heure actuelle, confrontés au problème de dimensionnalité de la base de Fock fournissant les mélanges de configurations. Ceci nous oblige à restreindre tout calcul de

structure à un espace de valence fortement tronqué (le noyau étant en grande partie constitué d'un coeur inerte de couches fermées). Ces restrictions nous obligent donc à utiliser une interaction effective appropriée pour l'espace de valence choisi. C'est pourquoi nous gardons la philosophie de *SMEC* en utilisant les mélanges de configurations de modèle en couches.

Les applications numériques présentées dans cet exposé se limitent au formalisme du modèle en couches avec couplage d'une seule particule aux états du continuum. Cependant, l'utilisation d'une interaction nucléon-nucléon de portée finie nous permet d'envisager une généralisation de ce formalisme avec la prise en compte d'un nombre arbitraire de particules couplant aux états du continuum. C'est pourquoi nous proposons également une généralisation théorique du formalisme appliquée au problème des canaux de réaction couplés où le système total est scindé en deux fragments (cible et projectile).

Dans le **deuxième chapitre**, nous commençons par introduire les équations radiales intégrées-différentielles générant la base radiale individuelle dont nous nous servirons tout au long du chapitre. Quelques rappels sur la théorie du modèle en couches ainsi que sur la théorie des réactions nous permettent ensuite d'introduire nos notations. Ceci étant, nous présentons une nouvelle méthode de coupure des résonances individuelles menant à une nouvelle définition des *états quasi-liés inclus dans le continuum*. États liés, quasi-liés et de diffusion nous permettent ensuite de construire la base de Fock ainsi que les espaces modèles. Nous ferons ensuite le lien entre espaces modèles et espaces des canaux physiques, et enfin dériverons les équations générales du modèle en couches avec couplage d'une particule aux états du continuum à partir de l'interaction nucléon-nucléon.

Nous donnons, dans le **chapitre 3**, quelques applications numériques du modèle présenté dans le premier chapitre. La première partie est consacrée à l'étude des propriétés des états quasi-liés ainsi qu'à l'illustration de la nouvelle méthode de coupure sur des exemples de déphasage. Nous introduisons ensuite l'interaction nucléon-nucléon que nous utilisons. Enfin, la spectroscopie (énergies et largeurs) des noyaux miroirs  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ , ainsi que les déphasages de diffusion  $^{16}\text{O}(p, p)^{16}\text{O}$  seront présentés.

Dans le **chapitre 4** nous généralisons le formalisme en prenant en compte le couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum individuel. Nous commençons par des considérations générales quant à la définition des espaces modèles et leur lien avec les espaces des canaux physiques. Nous dérivons ensuite les équations générales du modèle dans un système de coordonnées arbitraire. Nous nous limiterons alors à la construction d'une base à deux fragments projetée sur le continuum individuel multiple et nous intéresserons à la forme explicite des équations de canaux couplés dans le cadre de cette approximation. Enfin, nous donnons quelques remarques concernant la possibilité de prendre en compte des formes asymptotiques plus complexes.

Nous concluons et donnerons les perspectives dans le **chapitre 5**.

Le **chapitre 6** est consacré à des annexes qui appuient les chapitres 2, 3 et 4 de façon linéaire. Nous présentons dans un premiers temps quelques détails relatifs aux méthodes numériques employées pour la résolution des équations Hartree-Fock (section (6.1)) ainsi que le calcul explicite des éléments de matrice à deux corps de l'interaction nucléon-nucléon utilisée (section (6.2)). Nous donnons ensuite (section (6.3)) quelques remarques sur le code de modèle en couches que nous avons développé.

Dans le chapitre 2 sont développées les équations de canaux couplés homogènes modélisant la diffusion d'un nucléon sur une cible. Le calcul des éléments de la matrice de couplage de ces équations est donné dans la section (6.4). La décroissance d'un noyau instable est, quant à elle, modélisée par des équations de canaux couplés inhomogènes. Le calcul de la source à ces équations est donné dans la section (6.5). La représentation radiale de la fonction d'onde totale du système nécessite celle des solutions de l'espace  $Q$  qui est donnée dans la section (6.6). Les équations de canaux couplés homogènes et inhomogènes doivent être projetées sur le continuum individuel. C'est pourquoi nous donnons dans la section (6.7) une méthode de projection de ces équations.

La généralisation du modèle, développée dans le chapitre 4, nécessite la définition d'un nombre arbitraire d'espaces modèles. Dans la section (6.8) est développée la résolvante totale du système pour un nombre arbitraire d'espaces modèles. La construction de la base à deux corps utilisée dans le chapitre 4 nécessite le calcul des états liés du projectile dans un système de coordonnées intrinsèques. Ces états doivent être développés dans une base antisymétrique dont la construction nécessite celle de fonctions de spin-isospin de symétrie bien définie que nous donnons dans la section (6.9). La généralisation du formalisme nécessite la projection des équations de voies couplées sur le continuum individuel multiple. Nous proposons, dans la section (6.10), une technique de projection de ces équations appliquée au cas particulier où deux particules peuplent les états du continuum individuel. Dans la section (6.11), nous dérivons les éléments de la matrice de couplage des équations de canaux couplés dans le cas particulier où le système est scindé en deux fragments. Enfin, un exemple de calcul des sources aux équations inhomogènes est donné dans la section (6.12).

## Chapitre 2

# Structure et réaction dans une approche unifiée

Le but de ce chapitre est de mettre en avant le fait qu'à partir de la seule interaction nucléon-nucléon, il est possible de décrire, sur le même plan, la structure des noyaux faiblement liés ainsi que les mécanismes de réaction impliquant de tels noyaux. Une analyse structurale d'un système de fermions suggère la définition d'une base à  $N$  corps anti-symétrique dans laquelle est ensuite diagonalisée l'interaction en question. Dans la théorie du modèle en couches nucléaire cette base est construite à partir de déterminants de Slater, ces derniers étant construits à partir d'une base individuelle engendrée par un puits de potentiel harmonique. Cependant, le moyen le plus approprié de générer une base individuelle à partir d'une interaction nucléon-nucléon consiste à construire un champ moyen auto-consistant. Aussi commençons-nous par dériver explicitement, dans la section (2.1), les équations intégral-différentielles radiales obtenues à partir des équations de Hartree-Fock, dans le cas des noyaux de couches fermées, puis dans le cas des noyaux de couches non fermées moyennant certaines approximations. Les états propres liés et quasi-liés des équations Hartree-Fock constitueront alors, dans tout ce qui suit, la base individuelle nous permettant de définir l'espace de valence. A ce stade, l'interaction résiduelle doit être diagonalisée dans la base à  $N$  corps construite au moyen de ces derniers états individuels, menant aux mélanges de configurations représentatifs de la structure nucléaire. Cependant, les mélanges de configurations les plus réalistes étant obtenus grâce à la théorie du modèle en couches, nous donnons, dans la section (2.2), quelques rappels relatifs à cette théorie ainsi que sur l'utilisation du formalisme de seconde quantification, afin d'introduire nos notations. Dans la section (2.3), nous rappelons les résultats de base de la théorie des réactions auxquels nous ferons référence tout au long du présent exposé. Enfin, la section (2.4) est entièrement dédiée à l'utilisation d'une interaction nucléon-nucléon de portée finie dans le formalisme du modèle en couches avec couplage d'une particule aux états du continuum, unifiant ainsi les différents ingrédients mentionnés plus haut. Dans cette dernière partie, certaines démonstrations délicates et fastidieuses sont données en annexe, afin de ne pas surcharger de formules le déroulement de l'exposé. Cependant, ces annexes sont des parties en soi dont l'importance est capitale. Les conventions d'écriture et notations sont introduites de façon linéaire tout au long du chapitre.

## 2.1 Champ moyen et interactions

### 2.1.1 Les équations de Hartree-Fock

#### 2.1.1.1 Formalisme de base

L'hamiltonien  $\mathcal{H}$  d'un système de  $A$  particules peut s'écrire,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A t(i) + \sum_{1=i<j}^A V(ij) + \sum_{i<j<k} V(ijk) + \dots, \quad (2.1)$$

où  $t(i)$  est l'opérateur énergie cinétique de la particule  $i$ ,  $V(ij)$  est l'interaction à deux corps entre les particules  $i$  et  $j$ ,  $V(ijk)$  l'interaction à trois corps entre les particules  $i$ ,  $j$  et  $k$ , etc ... Une approximation, généralement utilisée dans la théorie du modèle en couches, consiste à négliger les interactions à plus de deux corps. Nous négligerons donc ces interactions dans tout ce qui suit.

L'interaction mutuelle des particules mène à un potentiel moyen ressenti par chaque particule. Si nous notons  $U(i)$  le potentiel moyen ressenti par la particule  $i$ , nous pouvons exprimer l'hamiltonien du système sous la forme suivante,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \left( t(i) + U(i) \right) + \left( \sum_{1=i<j}^A V(ij) - \sum_{i=1}^A U(i) \right), \quad (2.2a)$$

$$= \sum_{i=1}^A h(i) + \sum_{1=i<j}^A V^{res}(ij), \quad (2.2b)$$

où l'hamiltonien à un corps  $h(i)$  spécifie le mouvement de la particule  $i$  dans le cadre d'une approximation de particules indépendantes, et l'opérateur à deux corps  $V^{res}(ij)$  correspond à l'interaction résiduelle entre les particules  $i$  et  $j$ . Pour résoudre le problème aux valeurs propres  $(E - \mathcal{H})|\Psi(1, 2, \dots, A)\rangle = 0$ , on décompose généralement l'état à  $A$  corps  $|\Psi(1, 2, \dots, A)\rangle$  dans une base constituée d'un produit tensoriel d'états individuels propres de l'hamiltonien à un corps  $h$ ,

$$|\Psi(1, 2, \dots, A)\rangle = \sum_i C_i |a_i(1), b_i(2), \dots, c_i(A)\rangle, \quad (2.3a)$$

$$(e_{a_i} - h)|a_i\rangle = 0, \quad (e_{b_i} - h)|b_i\rangle = 0, \quad \dots \quad (2.3b)$$

où  $C_i$  est le coefficient du développement correspondant à la configuration d'occupation numérotée  $i$ . Dans le cas d'un système de nucléons (et plus généralement d'un système de fermions), cette base doit satisfaire au principe de Pauli et est construite à partir de déterminants de Slater. La fonction d'onde à  $A$  corps indiscernables, que nous noterons désormais  $|\Psi\rangle$ , et vérifiant  $(E - \mathcal{H})|\Psi\rangle = 0$ , s'écrit donc,

$$|\Psi\rangle = \sum_i C_i |DS_i\rangle, \quad (2.4)$$

où  $|DS_i\rangle$  est un déterminant de Slater normalisé construit de la manière suivante,

$$|DS_i\rangle \equiv |a_i, b_i, \dots, c_i\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} a_i(1) & a_i(2) & \dots \\ b_i(1) & b_i(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

La théorie Hartree-Fock nous donne une méthode permettant de déterminer, à partir d'une interaction nucléon-nucléon  $V$ , le meilleur potentiel moyen  $U$  (ainsi que les états individuels correspondants), tel que le déterminant de Slater normalisé  $|DS_0\rangle$ , où toutes les particules occupent les états individuels de plus basse énergie, correspond à une bonne approximation de l'état fondamental du système. Le critère pour satisfaire cette condition est que l'énergie doit être minimum. Cette stationnarité est exprimée à travers un principe variationnel conservant la norme,

$$\delta \langle DS_0 | \mathcal{H} | DS_0 \rangle = 0, \quad (2.6a)$$

$$\langle DS_0 | DS_0 \rangle = 1. \quad (2.6b)$$

En notant  $\{|a\rangle, |b\rangle, \dots\}$  la base individuelle, on peut montrer [29] que, si l'interaction  $V$  n'admet pas de dépendance en densité, (2.6) mènent aux équations,

$$e_{a,b} \equiv \langle a|t|b\rangle + \sum_{c \leq \lambda} \langle a, c|V|b, c\rangle_{as} = 0, \quad \text{pour } a \leq \lambda, b > \lambda, \quad (2.7)$$

où  $\lambda$  est le niveau de Fermi et où nous avons introduit l'élément de matrice à deux corps antisymétrisé,

$$\langle a, c|V|b, c\rangle_{as} = \langle a(1), c(2)|V|b(1), c(2)\rangle - \langle a(1), c(2)|V|c(1), b(2)\rangle. \quad (2.8)$$

Les équations (2.7) ne disent rien sur les éléments de la matrice  $e$  connectant deux états occupés, ou deux états inoccupés. Cependant, nous pouvons choisir la base individuelle de manière à ce qu'elle diagonalise séparément les matrices  $e_{a \leq \lambda, b \leq \lambda}$  et  $e_{a > \lambda, b > \lambda}$ , obtenant donc les équations de base communément utilisées en calcul Hartree-Fock,

$$\langle a|t|b\rangle + \sum_{c \leq \lambda} \langle a, c|V|b, c\rangle_{as} = e_a \delta_{a,b}. \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) est alors équivalente à,

$$\langle a|t + U|b\rangle = e_a \delta_{a,b}, \quad (2.10)$$

où le potentiel moyen  $U$  est défini par l'équation,

$$\langle a|U|b\rangle = \sum_{c \leq \lambda} \langle a, c|V|b, c\rangle_{as}. \quad (2.11)$$

Enfin, la valeur moyenne de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  dans l'état fondamental Hartree-Fock  $|DS_0\rangle$  est donnée par,

$$E_{HF} = \langle DS_0 | \mathcal{H} | DS_0 \rangle = \sum_{c \leq \lambda} \left( e_c - \frac{1}{2} \langle c|U|c\rangle \right). \quad (2.12)$$

Notons ici que l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  décrit un système à  $3A$  degrés de liberté spatiales, incluant donc les états du centre de masse. Ces derniers états ne sont d'aucun intérêt et doivent être supprimés pour peu que l'on s'intéresse aux états intrinsèques du système. Une méthode approximative pour supprimer ces états [30] consiste à soustraire, dans les équations, l'hamiltonien du centre de masse, après variation. En notant  $\vec{p}_i$  l'opérateur impulsion de la particule  $i$ , l'hamiltonien du centre de masse s'écrit,

$$\frac{1}{2Am} \left( \sum_{i=1}^A \vec{p}_i \right)^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A t(i) + \frac{1}{2Am} \sum_{i \neq j} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j, \quad (2.13)$$

où  $m$  est la masse d'un nucléon. Une autre approximation peut être faite en négligeant le deuxième terme du membre de droite de (2.13). La soustraction du premier terme à l'hamiltonien (2.2) mène alors à,

$$\langle a | t - \frac{1}{A} t + U | b \rangle = \langle a | - \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + U | b \rangle = e_a \delta_{a,b}, \quad (2.14)$$

où nous avons défini la masse normalisée  $m^*$  par,

$$m^* = \frac{A}{A-1} m. \quad (2.15)$$

Afin de simplifier les expressions, nous noterons  $t^*$  l'opérateur énergie cinétique normalisé de la manière suivante,

$$t^* = \frac{A-1}{A} t. \quad (2.16)$$

Dans nos conventions d'écriture, nous désignerons par une lettre arrondie, du type  $\mathcal{H}$ , l'hamiltonien d'un système de nucléons incluant le centre de masse, et par une lettre droite, du type  $H$ , l'hamiltonien intrinsèque d'un tel système.

### 2.1.1.2 Noyaux à couches fermées

Le potentiel Hartree-Fock peut engendrer des états individuels dégénérés. Nous supposons dans un premier temps que le nombre de particules est tel que ces états sont complètement occupés. Dans ce cas le potentiel est à symétrie sphérique et il devient commode de séparer parties radiale et angulaire. En représentation coordonnée, nous écrirons donc l'état individuel de nombres quantiques  $\{n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\alpha \tau_{z\alpha}\}$ <sup>1</sup>,

$$\langle \vec{r} | n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\alpha \tau_{z\alpha} \rangle = \varphi_{n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\alpha \tau_{z\alpha}}(\vec{r}) = \frac{u_{n_\alpha l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}}(r)}{r} \mathcal{Y}_{l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}}^{m_\alpha}(\Omega), \quad (2.17)$$

où nous avons défini,

$$\mathcal{Y}_{l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}}^{m_\alpha}(\Omega) = \sum_{m_l, m_s} \langle l_\alpha 1/2, m_l m_s | j_\alpha m_\alpha \rangle Y_{l_\alpha}^{m_l}(\Omega) \chi_{m_s} \tau_{\tau_{z\alpha}}, \quad (2.18)$$

où  $Y_{l_\alpha}^{m_l}(\Omega)$  est une harmonique sphérique d'ordre  $l_\alpha$  et de projection  $m_l$ ,  $\chi_{m_s}$  est le spineur de projection  $m_s$ ,  $\tau_{\tau_{z\alpha}}$  est l'isospineur de projection  $\tau_{z\alpha}$ . Dans nos notations,  $n_\alpha$  correspond au nombre de noeuds de la fonction radiale  $u$  s'il s'agit d'un état lié et au nombre d'onde s'il s'agit d'un état de diffusion, auquel cas cet indice devient continu.

Pour simplifier les expressions, nous introduisons les notations suivantes, qui seront utilisées dans tout ce qui suit,

$$\alpha \equiv \{n_\alpha l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}\}, \quad (2.19a)$$

$$\bar{\alpha} \equiv \{l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}\}. \quad (2.19b)$$

---

<sup>1</sup>Puisque le « spin-orbit splitting » est une propriété très marquée dans les noyaux, dans tout ce qui suit nous opterons pour le couplage  $j - j$ .

La représentation coordonnées (2.17) s'écrit alors,

$$\langle \vec{r} | \alpha m_\alpha \rangle = \frac{u_\alpha(r)}{r} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}(\Omega). \quad (2.20)$$

A l'aide de ces notations, nous pouvons introduire la forme couplée des états à deux corps du type,

$$|\alpha(1), \beta(2)\rangle^{\Gamma, M} = \sum_{m_\alpha, m_\beta} \langle j_\alpha j_\beta, m_\alpha m_\beta | \Gamma M \rangle |\alpha m_\alpha(1), \beta m_\beta(2)\rangle. \quad (2.21)$$

Pour un état à deux corps ne comprenant que les parties angulaire, de spin et d'isospin, nous noterons alors,

$$|\bar{\alpha}(1), \bar{\beta}(2)\rangle^{\Gamma, M} = \sum_{m_\alpha, m_\beta} \langle j_\alpha j_\beta, m_\alpha m_\beta | \Gamma M \rangle |\bar{\alpha} m_\alpha(1), \bar{\beta} m_\beta(2)\rangle. \quad (2.22)$$

L'indexation des particules n'a pas lieu d'être pour les états antisymétrisés. Nous rappellerons toutefois cette antisymétrisation par l'indice « *as* » (comme en (2.8)) pour les états à deux corps, et omettrons ce détail pour les états à 3 corps et plus. Notons enfin que la redondance de certains nombres quantiques dans les équations, et non de tous ceux définis par les symboles (2.19), nous obligera parfois à utiliser une notation mixte. Par exemple, les relations d'orthogonalité et de complétude des fonctions d'onde radiales individuelles s'écrivent,

$$\int dr u_{n_\alpha \bar{\alpha}}(r) u_{n_\beta \bar{\alpha}}(r) = \delta_{n_\alpha, n_\beta}, \quad (2.23a)$$

$$\sum_{n_\alpha} u_\alpha(r) u_\alpha(r') = \delta(r - r'), \quad (2.23b)$$

où le double symbole de sommation dans (2.23b) rappelle que la complétude inclut les états liés aussi bien que les états du continuum réel.

Re-écrivons donc les équations (2.9) en substituant les états individuels génériques  $|a\rangle, |b\rangle, \dots$  par les états  $|\alpha m_\alpha\rangle, |\beta m_\beta\rangle, \dots$  introduits en (2.20), et en soustrayant la contribution du centre de masse,

$$\langle \alpha m_\alpha | t^* | \beta m_\beta \rangle + \sum_{\gamma m_\gamma} \langle \alpha m_\alpha, \gamma m_\gamma | V | \beta m_\beta, \gamma m_\gamma \rangle_{as} = e_\alpha \delta_{\alpha m_\alpha, \beta m_\beta}. \quad (2.24)$$

L'interaction  $V$  conservant le moment angulaire total  $\Gamma$ , le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (2.24) peut s'écrire sous la forme couplée,

$$\sum_{\gamma m_\gamma} \sum_{\Gamma, M} \langle j_\alpha j_\gamma, m_\alpha m_\gamma | \Gamma M \rangle \langle j_\beta j_\gamma, m_\beta m_\gamma | \Gamma M \rangle \frac{1}{\hat{\Gamma}} \langle \alpha, \gamma | |V| | \beta, \gamma \rangle_{as}^\Gamma, \quad (2.25)$$

où  $\hat{\Gamma} = \sqrt{2\Gamma + 1}$  et où nous avons réduit l'élément de matrice à deux corps. En utilisant la relation d'orthogonalité suivante des coefficients de Clebsch-Gordan [31],

$$\sum_{m_\gamma, M} \langle j_\alpha j_\gamma, m_\alpha m_\gamma | \Gamma M \rangle \langle j_\beta j_\gamma, m_\beta m_\gamma | \Gamma M \rangle = \frac{\hat{\Gamma}^2}{\hat{j}_\alpha} \delta_{j_\alpha m_\alpha, j_\beta m_\beta}, \quad (2.26)$$

le fait que l'opérateur énergie cinétique conserve les nombres quantiques orbital, de spin, d'isospin et de projection, et le fait que l'interaction  $V$  conserve la parité totale, nous obtenons,

$$\langle n_\alpha \bar{\alpha} m_\alpha | t^* | n_\beta \bar{\alpha} m_\alpha \rangle + \sum_{n_\gamma \bar{\gamma}} \sum_{\Gamma} \sum_{\hat{j}_\alpha} \frac{\hat{\Gamma}}{2} \langle n_\alpha \bar{\alpha}, n_\gamma \bar{\gamma} || V || n_\beta \bar{\alpha}, n_\gamma \bar{\gamma} \rangle_{as}^\Gamma = e_{n_\alpha \bar{\alpha}} \delta_{n_\alpha, n_\beta}. \quad (2.27)$$

En insérant une relation de complétude dans l'espace coordonnée et en intégrant sur la partie angulaire, nous pouvons écrire l'élément de matrice de l'opérateur énergie cinétique sous la forme suivante,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \int dr u_{n_\alpha \bar{\alpha}}(r) \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} \right] u_{n_\beta \bar{\alpha}}(r), \quad (2.28)$$

En utilisant une procédure analogue, nous pouvons écrire le terme à deux corps,

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha \bar{\alpha}, n_\gamma \bar{\gamma} || V || n_\beta \bar{\alpha}, n_\gamma \bar{\gamma} \rangle_{as}^\Gamma = \\ \iint dr dr' r r' u_{n_\alpha \bar{\alpha}}(r) u_{n_\gamma \bar{\gamma}}(r') \left[ V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_{n_\beta \bar{\alpha}}(r)}{r} \frac{u_{n_\gamma \bar{\gamma}}(r')}{r'} \right) \right. \\ \left. - (-1)^{\Gamma-j_\alpha-j_\gamma} V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_{n_\beta \bar{\alpha}}(r')}{r'} \frac{u_{n_\gamma \bar{\gamma}}(r)}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

où nous avons défini,

$$\begin{aligned} V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\Gamma(r, r') = \langle \bar{\alpha}(1) \bar{\gamma}(2) || V || \bar{\alpha}(1) \bar{\gamma}(2) \rangle^\Gamma(r, r') = \\ \hat{\Gamma} \iint d\Omega d\Omega' \left[ \mathcal{Y}_{l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}}^\dagger(\Omega) \times \mathcal{Y}_{l_\gamma j_\gamma \tau_{z\gamma}}^\dagger(\Omega') \right]^{\Gamma M} V(\vec{r}, \vec{r}') \left[ \mathcal{Y}_{l_\alpha j_\alpha \tau_{z\alpha}}(\Omega) \times \mathcal{Y}_{l_\gamma j_\gamma \tau_{z\gamma}}(\Omega') \right]^{\Gamma M}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

et similairement pour le terme d'échange. Notons que le terme défini en (2.30) peut, en toute généralité, être un opérateur différentiel agissant sur la partie radiale qui est située dans les grandes parenthèses de l'équation (2.29). Enfin, en utilisant (2.28) et (2.29), et en se souvenant de la relation de complétude (2.23b), nous pouvons intégrer l'équation (2.27) sur  $n_\alpha$  pour obtenir les équations intégro-différentielles,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{d^2}{dr^2} + k_\alpha^2 - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} \right) u_\alpha(r) + D_{\bar{\alpha}}(r) u_\alpha(r) + \int dr' E_{\bar{\alpha}}(r, r') u_\alpha(r') = 0, \quad (2.31)$$

où  $k_\alpha = \sqrt{2m^*e_\alpha/\hbar^2}$ , et où les potentiels direct et d'échange sont donnés par,

$$D_{\bar{\alpha}}(r) = \sum_{\gamma, \Gamma} \sum_{\hat{j}_\alpha} \frac{\hat{\Gamma}}{2} \int dr' r r' u_\gamma(r') V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (2.32a)$$

$$E_{\bar{\alpha}}(r, r') = - \sum_{\gamma, \Gamma} \sum_{\hat{j}_\alpha} \frac{\hat{\Gamma}}{2} (-1)^{\Gamma-j_\alpha-j_\gamma} r r' u_\gamma(r') V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r)}{r r'} \right) \times. \quad (2.32b)$$

Une méthode numérique de résolution des équations intégro-différentielles est présentée en annexe (6.1). Le calcul des éléments de matrice du type  $V_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r, r')$  est donné en annexe (6.2) pour différents types d'interaction nucléon-nucléon. Dans le cas particulier de l'interaction spin-orbite de portée finie (la seule force non centrale que nous utilisons dans cet exposé), nous pouvons montrer que la partie directe (2.32a) du potentiel se résume à un scalaire (et non à un opérateur différentiel). Le seul terme différentiel apparaissant dans les équations radiales Hartree-Fock (2.31) est donc celui de l'opérateur énergie cinétique.

### 2.1.1.3 Noyaux à couches non fermées

Lorsque le système considéré comporte un nombre de particules tel que certaines couches ne sont que partiellement remplies, le potentiel n'est plus à symétrie sphérique, et la décomposition (2.20) n'est pas appropriée. Nous pouvons cependant utiliser une approximation fort utile pour outre-passer ce problème, et ainsi éviter la nécessité de résoudre des équations intégrales-différentielles en deux (symétrie cylindrique) voire trois dimensions. Afin d'illustrer le fondement de cette approximation, considérons à nouveaux les équations (2.27). L'obtention de ces équations suppose implicitement que toute orbitale de moment de spin donné est complètement remplie. Par exemple, dans la relation (2.26), la sommation sur  $m_\gamma$  est effectuée de  $-j_\gamma$  à  $+j_\gamma$ . La probabilité d'occupation d'un état de nombres quantiques  $\{\gamma m_\gamma\}$  est alors de  $1/\hat{j}_\gamma^2$ . Si maintenant  $p$  particules sont ajoutées à un coeur de couches fermées sur une orbitale de spin  $j$ , nous pouvons, dans le cadre d'une approximation raisonnable, considérer que cette couche sera occupée avec la probabilité  $p/\hat{j}^2$ . Nous pouvons « simuler » cette approximation par une re-définition de la partie angulaire, de spin et d'isospin des états individuels,

$$|\bar{\alpha}, m_\alpha\rangle \longrightarrow \frac{\sqrt{p_\alpha}}{\hat{j}_\alpha} |\bar{\alpha}, m_\alpha\rangle, \quad (2.33)$$

où  $p_\alpha$  est le nombre de particules occupant la couche considérée. En utilisant cette substitution dans l'équation (2.27), et en désignant par  $\{\gamma m_\gamma\}$  l'ensemble des nombres quantiques caractérisant les états individuels du coeur de couches fermées et par  $\{\delta m_\delta\}$  ceux de la couche non fermée, nous obtenons facilement,

$$\begin{aligned} \langle \alpha m_\alpha | t^* | \beta m_\beta \rangle + \sum_{\gamma m_\gamma} \langle \alpha m_\alpha, \gamma m_\gamma | V | \beta m_\beta, \gamma m_\gamma \rangle_{as} + \\ \frac{p_\delta}{\hat{j}_\delta^2} \sum_{m_\delta} \langle \alpha m_\alpha, \delta m_\delta | V | \beta m_\beta, \delta m_\delta \rangle_{as} = e_\alpha \delta_{\alpha m_\alpha, \beta m_\beta}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ainsi, l'influence de la substitution (2.33) sur les solutions radiales est équivalente à la redéfinition suivante des potentiels (2.32),

$$D_{\bar{\alpha}}(r) = \sum_{\gamma, \Gamma} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}_\alpha^2} P_{j_\gamma}^{occ} \int dr' r r' u_\gamma(r') V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (2.35a)$$

$$E_{\bar{\alpha}}(r, r') = - \sum_{\gamma, \Gamma} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}_\alpha^2} P_{j_\gamma}^{occ} (-1)^{\Gamma-j_\alpha-j_\gamma} r r' u_\gamma(r') V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r)}{r r'} \right) \times. \quad (2.35b)$$

où la probabilité d'occupation  $P_{j_\gamma}^{occ}$  de la couche de spin  $j_\gamma$  est définie par,

$$P_{j_\gamma}^{occ} = \begin{cases} 1 & \text{pour une couche fermée,} \\ \frac{p_\gamma}{\hat{j}_\gamma^2} & \text{pour une couche non fermée comportant } p_\gamma \text{ particules.} \end{cases} \quad (2.36)$$

## 2.2 Le modèle en couches

### 2.2.1 Formalisme de base

La théorie du modèle en couches nucléaire [1, 2, 3, 4, 5] stipule que le noyau peut être décrit par un coeur inerte de couches fermées auquel s'ajoutent des nucléons de valence se distribuant sur un ensemble fini de couches. La figure (2.1) montre un exemple de définition du coeur et de l'espace de valence pour la description de  $^{16}\text{O}$ . La configuration d'occupation

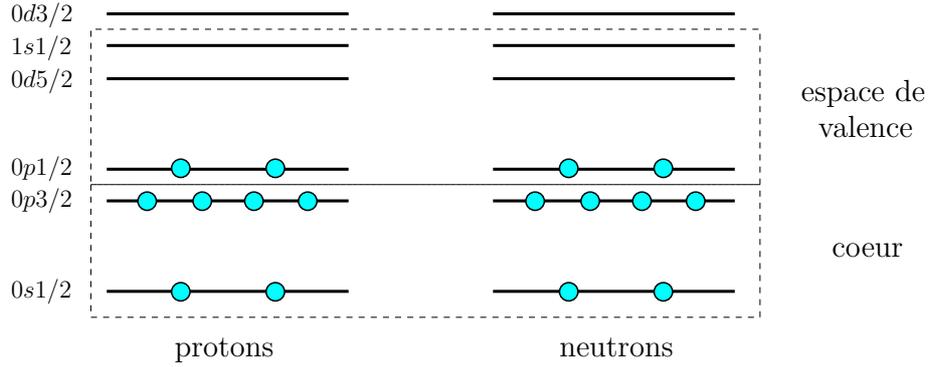


FIG. 2.1 – Exemple de définition du coeur et de l'espace de valence pour la description de  $^{16}\text{O}$ .

présentée sur cette figure correspond à celle de plus basse énergie (donc à la configuration Hartree-Fock). Le coeur étant inerte, nous construisons la base en distribuant les particules de valence sur les orbitales de valence de toutes les façons possibles. Dans l'exemple de la figure (2.1), ceci revient à distribuer 4 particules sur 20 états individuels. En numérotant les particules de valence de 1 à  $n_{val}$ , l'hamiltonien du système s'écrit,

$$\mathcal{H} = H_{core} + \sum_{i=1}^{n_{val}} h^{sm}(i) + \sum_{1=i<j}^{n_{val}} V^{sm}(ij), \quad (2.37)$$

où  $H_{core}$  est l'hamiltonien du coeur, et où nous avons ajouté l'exposant «  $sm$  » afin de rappeler que l'hamiltonien à un corps  $h^{sm}$  et l'interaction résiduelle  $V^{sm}$  diffèrent de ceux définis en (2.2). L'hamiltonien individuel est construit de la manière suivante,

$$h^{sm}(i) = t(i) + U^{ho}(i), \quad (2.38)$$

où le potentiel  $U^{ho}(i)$  est un puits harmonique, qui a l'avantage d'être analytique et fournit une base dans laquelle les états du centre de masse peuvent être éliminés facilement, plus un terme spin-orbite. De même qu'en (2.5), la base individuelle  $\{|a\rangle^{sm}\}$  générée par  $h^{sm}$  est utilisée pour construire une base à  $A$  corps antisymétrisée  $\{|DS_i\rangle^{sm}\}$ . Puisque le coeur est inerte,  $H_{core}$  est diagonal dans cette base et de valeur constante que nous noterons  $E_{core}$ . En notant  $H_{cm}$  l'hamiltonien du centre de masse, l'hamiltonien intrinsèque  $H$  du système est alors donné par,

$$H = \mathcal{H} - H_{cm}. \quad (2.39)$$

Les vecteurs d'état intrinsèques du système, que l'on note  $|\psi_i\rangle$ , où l'indice  $i$  différencie les états, sont alors développés similairement à (2.4),

$$|\psi_i\rangle = \sum_j C_{ij}^{sm} |DS_j\rangle^{sm}. \quad (2.40)$$

L'espace de valence est tronqué, ce qui limite le développement (2.40) à un nombre fini de configurations. La diagonalisation de  $H$  dans la base  $\{|SD_i\rangle^{sm}\}$  nous fournit alors les coefficients de mélange de configurations de modèle en couches  $\{C_{ij}^{sm}\}$ .

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'interaction résiduelle  $V^{sm}$  ne correspond pas à l'interaction  $V^{res}$  définie en (2.2b) car la base utilisée est tronquée. La méthode donnant les meilleurs résultats consiste à ajuster les éléments de matrice à deux corps de l'interaction  $V^{sm}$  afin de fitter les propriétés spectroscopiques d'un grand nombre de noyaux. On obtient alors une interaction effective qui dépend de l'espace de valence choisi. De même qu'en (2.20), le schéma de couplage  $j - j$  est le plus approprié pour décrire les états individuels. Nous noterons donc la base individuelle de modèle en couches  $\{|\alpha m_\alpha\rangle^{sm}\}$ , où les états sont décomposés d'une manière analogue à (2.20),

$$\langle \vec{r} | \alpha m_\alpha \rangle^{sm} = \varphi_{\alpha m_\alpha}^{sm}(\vec{r}) = \frac{u_\alpha^{ho}(r)}{r} \mathcal{Y}_\alpha^{m_\alpha}(\Omega), \quad (2.41)$$

où  $u_\alpha^{ho}(r)$  sont les fonctions propres radiales de l'oscillateur harmonique [1, 2, 3].

## 2.2.2 Méthode de seconde quantification

Nous introduisons dans cette partie certains résultats de base dont nous ferons usage par la suite. Nos conventions sont celles introduites dans [3].

La méthode habituelle pour résoudre le problème aux valeurs propres pour un système de fermions utilise le formalisme de seconde quantification. Ce formalisme repose sur le fait que la fonction d'onde d'un système de  $A$  fermions peut être développée dans l'espace de Fock, c'est à dire dans une base à  $A$  corps complètement antisymétrisée. Si nous notons  $\{|a\rangle, |b\rangle, \dots\}$  une base orthogonale individuelle, alors un état  $|SD\rangle$  de la base de Fock à  $A$  particules est construit selon (2.5), que nous écrivons ici en faisant apparaître l'opérateur d'antisymétrisation  $\mathcal{A}$ ,

$$|SD\rangle = |a, b, \dots, c\rangle = \mathcal{A}|a(1), b(2), \dots, c(A)\rangle, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P \hat{P}, \quad (2.42b)$$

où  $\hat{P}$  est un opérateur de permutation de parité  $(-1)^P$ , et où la sommation est effectuée sur les  $A!$  permutations possibles. Dans le ket du membre de droite de (2.42a) nous avons indiqué que la particule (1) occupe l'état individuel  $|a\rangle$ , la particule (2) occupe  $|b\rangle$ , etc ... Cet ordre est complètement arbitraire car l'antisymétriseur  $\mathcal{A}$  efface cette discernabilité. La dimension de la base de Fock correspond au nombre de configurations d'occupation possibles et est en général infinie. En modèle en couches, la troncation est effectuée en premier lieu sur la base individuelle, ce qui limite le nombre de configurations à une valeur finie. Une autre troncation peut également être effectuée sur les configurations elles-mêmes; ce qui réduit encore la dimension de la base de Fock. Notons cependant que plus la troncation est drastique, moins l'espace de Fock est riche en configurations, et plus le caractère effectif de l'interaction  $V^{sm}$  est prononcé.

Le formalisme de seconde quantification introduit les opérateurs  $a_a^\dagger$  et  $a_b$ , dénommés respectivement opérateur de création et opérateur d'annihilation et satisfaisant aux relations,

$$\{a_a^\dagger, a_b^\dagger\} = \{a_a, a_b\} = 0, \quad (2.43a)$$

$$\{a_a^\dagger, a_b\} = \delta_{a,b}. \quad (2.43b)$$

L'état de base (2.42a) est alors construit selon la convention suivante,

$$|a, b, \dots, c\rangle = a_c^\dagger \dots a_b^\dagger a_a^\dagger | \rangle, \quad (2.44)$$

où  $| \rangle$  désigne l'état vide.

Si  $\mathcal{T}(i)$  est un opérateur à un corps agissant dans l'espace des états de la particule  $i$ , alors le formalisme de seconde quantification nous permet d'écrire,

$$\sum_{i=1}^A \mathcal{T}(i) = \sum_{a,b} \langle a | \mathcal{T} | b \rangle a_a^\dagger a_b, \quad (2.45)$$

où la sommation dans le membre de droite est effectuée sur tous les états de la base individuelle considérée. Il est à noter que la relation (2.45) n'est valable que dans la base de Fock définie en (2.44), en d'autres termes, les éléments de matrice de l'opérateur du membre de gauche de l'équation (2.45) ne sont égaux à ceux de l'opérateur du membre de droite uniquement dans la base de Fock. L'application de ce dernier opérateur dans une base constituée d'un simple produit tensoriel d'états individuels serait d'une interprétation douteuse et pour le moins compliquée.

De même, si  $\mathcal{K}(ij)$  est un opérateur à deux corps agissant dans l'espace composé d'un produit tensoriel des états de la particule  $i$  avec ceux de la particule  $j$ , nous pouvons écrire, dans la base de Fock,

$$\sum_{1=i < j}^A \mathcal{K}(ij) = \frac{1}{4} \sum_{a,b,c,d} \langle a, b | \mathcal{K} | c, d \rangle_{as} a_a^\dagger a_b^\dagger a_d a_c. \quad (2.46)$$

Introduisons maintenant les notations couplées pour la construction de la base de Fock. Nous substituons alors la base individuelle générique  $\{|a\rangle\}$  par la base  $\{|\alpha m_\alpha\rangle\}$  introduite en (2.20). Si nous notons  $\vec{j}(i) = \vec{l}(i) + \vec{s}(i)$  l'opérateur moment de spin total de la particule ( $i$ ), alors nous pouvons définir l'opérateur moment de spin total du système de  $A$  nucléons par,

$$\vec{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^A \vec{j}(i). \quad (2.47)$$

Nous noterons alors  $|\Phi\rangle^{J,M}$  un état à  $A$  corps complètement antisymétrique et satisfaisant aux équations suivantes,

$$\left( J(J+1) - \mathcal{J}^2 \right) |\Phi\rangle^{J,M} = 0, \quad (2.48a)$$

$$\left( M - \mathcal{J}_z \right) |\Phi\rangle^{J,M} = 0. \quad (2.48b)$$

Une méthode de construction de tels états est décrite dans [3].

Il devient alors utile d'introduire également les notations couplées pour les opérateurs tensoriels irréductibles (dont nous ferons plus tard un usage extensif). Si  $\mathcal{T}^{\theta, m_\theta}$  est un opérateur tensoriel d'ordre  $\theta$  (et de projection  $m_\theta$ ) dans la base  $\{|\alpha m_\alpha\rangle\}$ , on montre facilement que l'on peut écrire, dans la base de Fock,

$$\sum_{i=1}^A \mathcal{T}^{\theta, m_\theta}(i) = \frac{1}{\tilde{\theta}} \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha || \mathcal{T}^\theta || \beta \rangle \left( a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\beta \right)^{\theta, m_\theta}, \quad (2.49)$$

où nous avons introduit l'opérateur  $\tilde{a}_{\alpha m_\alpha} = (-1)^{j_\alpha + m_\alpha} a_{\alpha, -m_\alpha}$  qui, comme l'opérateur de création, est un opérateur tensoriel. De même, si  $\mathcal{K}^{\theta, m_\theta}(ij)$  est tensoriel d'ordre  $\theta$  dans la base à deux corps  $\{|\alpha m_\alpha(i), \beta m_\beta(j)\rangle\}$ , nous pouvons écrire, dans la base de Fock,

$$\sum_{1=i < j}^A \mathcal{K}^{\theta, m_\theta}(ij) = -\frac{1}{\tilde{\theta}} \sum_{\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma, \Gamma'} \Gamma \langle \alpha, \beta || \mathcal{K}^\theta || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma'} \left[ \left( a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger \right)^\Gamma \left( \tilde{a}_\gamma \tilde{a}_\delta \right)^{\Gamma'} \right]^{\theta, m_\theta}, \quad (2.50)$$

où nous avons introduit l'élément de matrice à deux corps antisymétrisé et normalisé,

$$\Gamma \langle \alpha, \beta || \mathcal{K}^\theta || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma'} = \frac{\Gamma \langle \alpha, \beta || \mathcal{K}^\theta || \gamma, \delta \rangle_{as}^{\Gamma'}}{\sqrt{1 + \delta_{\alpha, \beta}} \sqrt{1 + \delta_{\gamma, \delta}}}. \quad (2.51)$$

Comme nous l'avons vu, l'hamiltonien de modèle en couches n'est actif que pour les particules de valences, l'hamiltonien du coeur ne fournissant qu'une contribution scalaire. Nous pouvons donc limiter la diagonalisation de l'hamiltonien à une base de Fock à  $n_{val}$  particules. En utilisant les résultats précédents, on montre alors facilement que l'hamiltonien (2.37) peut s'écrire<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & E_{core} + \sum_{(\alpha) \in val} \langle \alpha || h^{sm} || \alpha \rangle \left( a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\alpha \right)^{0,0} \\ & - \sum_{(\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta) \in val} \sum_{\Gamma} \langle \alpha, \beta || V^{sm} || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \left[ \left( a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger \right)^\Gamma \left( \tilde{a}_\gamma \tilde{a}_\delta \right)^\Gamma \right]^{0,0}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

où nous avons spécifié que les sommations sur les états individuels se limitent à l'espace de valence (dénnoté par  $val$ ), et où nous avons utilisé le fait que l'hamiltonien  $h^{sm}$  est diagonal dans la base  $\{|\alpha m_\alpha\rangle^{sm}\}$ .

Intéressons-nous maintenant plus précisément à la base de Fock. Si nous définissons l'état antisymétrisé à  $n_{val}$  corps,

$$|\Phi_{val}\rangle = |v_1, v_2, \dots, v_{n_{val}}\rangle, \quad (2.53)$$

où les états individuels  $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots$  appartiennent à l'espace de valence, et l'état antisymétrisé à  $n_{core}$  corps que l'on note  $|0\rangle$  et définissant l'état du coeur, alors nous pouvons définir l'état antisymétrisé à  $A$  corps ( $n_{core} + n_{val} = A$ ),

$$|0, \Phi_{val}\rangle = \mathcal{A}(|0\rangle \otimes |\Phi_{val}\rangle), \quad (2.54)$$

---

<sup>2</sup>Nous omettons ici l'exposant  $sm$  sur les états individuels pour simplifier les expressions; il reste cependant présent pour les opérateurs écrits en première quantification, rappelant ainsi que ces expressions ne sont valables que dans la base de modèle en couches.

où, cette fois-ci, l'opérateur  $\mathcal{A}$  antisymétrise l'état partiellement antisymétrique situé à sa droite. Par définition, le coeur n'admet qu'une seule configuration<sup>3</sup>. La dimension de l'espace engendré par les états (2.53) est donc égale à la dimension de l'espace engendrés par les états (2.54). De plus, on peut montrer [3] que les éléments de matrice de l'hamiltonien  $H$  sont les mêmes dans les deux bases. Nous pouvons donc écrire en toute quiétude,

$$\langle 0, \Phi_{val} | H | 0, \Phi'_{val} \rangle = \langle \Phi_{val} | H | \Phi'_{val} \rangle, \quad (2.55)$$

car cette réduction fait intervenir une phase de réarrangement positive. Cependant, et ce pour les besoins ultérieurs du présent exposé, nous utiliserons une base générale à  $A$  corps. Dans tout ce qui suit, nous désignerons l'ensemble des états du coeur par « *core* » et l'ensemble des états de l'espace de valence par « *val* ». Les indices regroupant les nombres quantiques définissant chaque couche seront ordonnés de la manière suivante,

$$\alpha \in core, \quad \beta \in val \quad \Rightarrow \quad \alpha < \beta. \quad (2.56)$$

Quelques détails sur les méthodes numériques utilisées dans le code de modèle en couches, ainsi que des remarques sur le formalisme proton-neutron sont exposés en annexe (6.3).

---

<sup>3</sup>Ce qui correspond déjà à une troncation de l'espace total ; donc plus le coeur est grand, plus l'espace est tronqué.

## 2.3 La théorie des réactions

### 2.3.1 Le problème avec asymptotique à deux fragments

Nous rappelons ici quelques résultats fondamentaux sur la théorie des collisions n'incluant que les partitions de masse correspondant au problème à deux corps asymptotique. On peut trouver une description complète de cette théorie dans [32], [33], [34]. Ce succinct rappel nous permet cependant d'introduire les notations qui seront nôtres par la suite.

Nous considérons un système qui évolue à une énergie intrinsèque totale  $E$  durant un processus de collision. Nous définissons alors le *passé infini* ainsi que le *futur infini* relativement à l'instant de la collision. Dans ces zones de temps lointaines, le système est supposé consister en deux fragments<sup>4</sup> : l'un des deux est appelé la *cible*, et l'autre le *projectile*. Nous notons  $\vec{r}$  la coordonnée relative séparant les centres de masse de la cible et du projectile. Dans le passé infini, ainsi que dans le futur infini, la distance relative  $|\vec{r}|$  est supposée très grande. Dans un formalisme indépendant du temps nous parlerons alors de *région asymptotique*. Dans la région asymptotique, les deux fragments n'interagissent pas et cible et projectile sont indépendamment décrits par leur hamiltonien intrinsèque que l'on note  $H_T$  et  $H_P$  respectivement. Nous notons  $|T^{j_T m_T}\rangle$  les vecteurs d'états intrinsèques de la cible, où  $j_T$  est le moment de spin total et  $m_T$  sa projection. Tous les autres nombres quantiques nécessaires pour définir la cible de manière unique sont symbolisés par la petite lettre capitale « T » (réminiscente du mot anglais *Target*). Ces états sont alors solution de l'équation stationnaire,

$$(E_T - H_T)|T^{j_T m_T}\rangle = 0. \quad (2.57)$$

De même, nous notons les états intrinsèques du projectile  $|P^{j_P m_P}\rangle$ , solutions de,

$$(E_P - H_P)|P^{j_P m_P}\rangle = 0. \quad (2.58)$$

Dans la région asymptotique, l'hamiltonien intrinsèque du système total, que l'on note  $H_0$  et que l'on qualifie d'*asymptotique* (ou *libre*), peut s'écrire,

$$H_0 = H_T + H_P + \frac{q^2}{2\mu}, \quad (2.59)$$

où  $\vec{q}$  est le moment conjugué de la variable relative  $\vec{r}$  et  $\mu$  est la masse réduite cible-projectile. Les états stationnaires du système « libre » se réduisent alors à,

$$|T^{j_T m_T} \otimes P^{j_P m_P} \otimes \vec{q}\rangle, \quad (2.60)$$

où  $|\vec{q}\rangle$  est une onde plane de moment  $\vec{q}$ . Ces vecteurs d'états satisfont donc à,

$$(E - H_0)|T^{j_T m_T} \otimes P^{j_P m_P} \otimes \vec{q}\rangle = 0, \quad (2.61)$$

où  $E = E_T + E_P + q^2/2\mu$ . A un temps proche de l'instant de la collision, la distance  $|\vec{r}|$  est supposée suffisamment petite pour que les deux fragments puissent interagir via un potentiel  $\mathcal{V}$ . Nous parlerons alors de *région d'interaction*. Dans la région d'interaction, l'hamiltonien intrinsèque du système, que l'on note  $H$ , s'écrit alors,

$$H = H_T + H_P + \frac{q^2}{2\mu} + \mathcal{V}. \quad (2.62)$$

---

<sup>4</sup>Ce que nous appelons *fragment* correspond ici à un système dans sa partition de masse la plus simple, à savoir un état lié.

Nous noterons  $|\psi\rangle$  les états stationnaires intrinsèques du système total satisfaisant à,

$$(E - H)|\psi\rangle = 0. \quad (2.63)$$

Dans une expérience de diffusion, le faisceau est modélisé, avant la collision, par une superposition d'états du type (2.60), dont la distribution en impulsion est centrée sur une valeur moyenne. Ce paquet d'ondes est alors propagé puis diffusé par le potentiel  $\mathcal{V}$  avant d'atteindre à nouveau la région asymptotique où les produits de la réaction peuvent être détectés.

La théorie formelle des collisions nous permet d'exprimer, dans un formalisme indépendant du temps, les états solutions de (2.63) connaissant, à une énergie donnée  $E$ , l'état du système dans le passé infini. Ceci est achevé à l'aide de l'opérateur de Möller défini par [32],

$$\Omega^+ = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}, \quad (2.64)$$

qui mappe les états stationnaires de  $H_0$  sur ceux de  $H$ . En considérant que le système est, dans le passé infini, dans l'état  $|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}} \otimes \mathbb{P}^{j_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{P}}} \otimes \vec{q}\rangle$ , la solution  $|\psi\rangle^+$  de l'équation (2.63) est alors donnée par,

$$|\psi\rangle^+ = \Omega^+ |\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}} \otimes \mathbb{P}^{j_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{P}}} \otimes \vec{q}\rangle. \quad (2.65)$$

L'équation (2.65) exprime le fait que, pour un état initial de moment  $\vec{q}$  donné, l'état  $|\psi\rangle^+$  contient toutes les informations sur le processus de collision. L'état physique final est alors obtenu en propageant la superposition des états  $|\psi\rangle^+$  correspondant à la distribution initiale en impulsion.

De même, nous pouvons définir l'opérateur de Möller,

$$\Omega^- = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}, \quad (2.66)$$

qui mappe les états  $|\mathbb{T}'^{j_{\mathbb{T}'} m_{\mathbb{T}'}} \otimes \mathbb{P}'^{j_{\mathbb{P}'} m_{\mathbb{P}'}} \otimes \vec{q}'\rangle$  décrivant le système dans le futur infini sur les solutions  $|\psi'\rangle^-$  de (2.63) de la manière suivante,

$$|\psi'\rangle^- = \Omega^- |\mathbb{T}'^{j_{\mathbb{T}'} m_{\mathbb{T}'}} \otimes \mathbb{P}'^{j_{\mathbb{P}'} m_{\mathbb{P}'}} \otimes \vec{q}'\rangle, \quad (2.67)$$

où nous avons primé les états et nombres quantiques, afin de rappeler que l'hamiltonien libre n'admet pas nécessairement la même forme avant et après la collision. En effet, il se peut que le système change de partition de masse lors du processus de collision. La convention consistant à ajouter les exposants *in* et *out* aux kets et aux opérateurs afin de distinguer les états asymptotiques dans le passé ou dans le futur lointains, ainsi que les deux formes *post* et *prior* de l'interaction, est ici abandonnée pour des raisons de simplicité dans les notations.

En introduisant les deux formes (sortante et entrante) de la *résolvante* totale de l'hamiltonien  $H$ ,

$$G^\pm = \frac{1}{E^\pm - H} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E \pm i\varepsilon - H}, \quad (2.68)$$

qui peuvent se développer de la manière suivante,

$$G^\pm = G_0^\pm + G_0^\pm \mathcal{V} G^\pm, \quad (2.69)$$

où la résolvante « libre » est définie par,

$$G_0^\pm = \frac{1}{E^\pm - H_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E \pm i\varepsilon - H_0}, \quad (2.70)$$

on peut montrer que l'équation (2.65) se réduit à,

$$|\psi\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^+ |\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau} \otimes \mathbb{P}^{j_p m_p} \otimes \vec{q}\rangle \quad (2.71a)$$

$$= |\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau} \otimes \mathbb{P}^{j_p m_p} \otimes \vec{q}\rangle + G_0^+ \mathcal{V} |\psi\rangle^+. \quad (2.71b)$$

et que (2.67) se résume à,

$$|\psi'\rangle^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -i\varepsilon G^- |\mathbb{T}'^{j_{\tau'} m_{\tau'}} \otimes \mathbb{P}'^{j_{p'} m_{p'}} \otimes \vec{q}'\rangle \quad (2.72a)$$

$$= |\mathbb{T}'^{j_{\tau'} m_{\tau'}} \otimes \mathbb{P}'^{j_{p'} m_{p'}} \otimes \vec{q}'\rangle + G_0'^- \mathcal{V}' |\psi'\rangle^-. \quad (2.72b)$$

### 2.3.2 Canaux d'arrangement

Dans cette partie, nous considérons le cas, plus général, où le système ne se réduit pas nécessairement à un problème à deux corps dans la région asymptotique. Cette dernière région peut alors être définie au moyen de systèmes de coordonnées plus complexes, appropriés pour chaque partition de masse. Nous utiliserons donc la terminologie adéquate de *canal d'arrangement* pour distinguer ces différentes partitions de masse. Par exemple, dans la section précédente, les canaux d'arrangement considérés correspondent aux partitions de masse où le système est scindé en deux fragments. Notons cependant qu'à chaque canal d'arrangement peut correspondre plusieurs canaux d'*excitation* comme spécifié, par exemple, par les états intrinsèques  $|\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}\rangle$  et  $|\mathbb{P}^{j_p m_p}\rangle$  définis dans la section précédente.

Un canal d'arrangement, que nous notons  $a$ , est donc défini par les vecteurs d'état  $|a\rangle$  solutions de l'équation  $(E - H_0^a)|a\rangle = 0$ , où  $H_0^a$  est l'hamiltonien décrivant le système dans une certaine partition de masse dans la région asymptotique. Nous pouvons alors définir les opérateurs de Möller généralisés  $\Omega_a^\pm$  qui mappent l'espace engendré par les états  $|a\rangle$  du canal d'arrangement  $a$  sur l'espace engendrés par les états,

$$|\psi_a\rangle^\pm = \Omega_a^\pm |a\rangle = |a\rangle + G_0^{a\pm} \mathcal{V}_a |\psi_a\rangle^\pm, \quad (2.73)$$

solutions de (2.63), où la résolvante  $G_0^{a\pm}$  est définie de manière analogue à (2.70). Selon la théorie multi-canaux avec réarrangement [33], la solution  $|\psi_a^+\rangle$  peut être écrite en fonction d'un autre canal d'arrangement  $b$  de la manière suivante,

$$|\psi_b\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^{a+} |b\rangle + G_0^{a+} \mathcal{V}_a |\psi_b\rangle^+, \quad (2.74)$$

où il peut être démontré que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^{a+} |b\rangle \sim \delta_{a,b} |a\rangle, \quad (2.75)$$

dans la région asymptotique. Chaque canal d'arrangement peut admettre plusieurs (voire un continuum) états d'excitation. C'est le cas lorsque, par exemple, l'hamiltonien  $H_0^a$  du

canal d'arrangement  $a$  peut supporter plusieurs états liés. Notons ces états  $|a_i\rangle$ , où l'indice  $i$  différencie les états d'excitation. Pour un canal d'arrangement donné  $a$ , les états  $|a_i\rangle$  sont orthogonaux :  $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{i,j}$ . En revanche, les états propres de deux canaux d'arrangement différents  $a$  et  $b$  ne vérifient pas nécessairement cette relation puisque qu'ils sont états propres d'hamiltoniens différents  $H_0^a$  et  $H_0^b$ . Ceci mène à des problèmes de non-orthogonalité et de surcomplétude [35, 36]. Cependant, on peut montrer que les espaces  $\mathcal{P}_a^\pm$  engendrés par les états  $\{\Omega_a^\pm|a\rangle\}$  pour différents canaux d'arrangement sont orthogonaux. Si nous notons  $P_a^\pm$  les projecteurs sur les espaces  $\mathcal{P}_a^\pm$ , nous pouvons donc écrire,

$$P_a^\pm P_b^\pm = 0, \quad a \neq b. \quad (2.76)$$

De plus, il peut être démontré la relation suivante, appelée *relation de complétude asymptotique*,

$$Q + \sum_a P_a^\pm = \mathbb{1}, \quad (2.77)$$

où  $Q$  est le projecteur sur l'espace des états où le système total est lié (consistant donc en un seul fragment).

Dans ce chapitre nous nous limiterons aux canaux d'arrangement correspondant au problème asymptotique à deux corps, et oublierons les problèmes de non-orthogonalité. Ceci revient à considérer que le système n'admet qu'une seule partition de masse dans la région asymptotique.

### 2.3.3 Ondes partielles et schéma de couplage

Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous ne considérons que les canaux d'arrangement où le système est scindé en deux fragments dans la région asymptotique, et ce pour une partition de masse donnée. L'espace des canaux d'excitation correspondant à l'hamiltonien libre (2.59) est alors engendré par les états (2.60). Nous pouvons ainsi définir le projecteur  $\tilde{P}$  sur cet espace de la manière suivante,

$$\tilde{P} = \sum_{T^{j_T m_T}, P^{j_P m_P}} \int d^3 q |\mathbb{T}^{j_T m_T} \otimes \mathbb{P}^{j_P m_P} \otimes \vec{q}\rangle \langle \mathbb{T}^{j_T m_T} \otimes \mathbb{P}^{j_P m_P} \otimes \vec{q}|, \quad (2.78)$$

où les sommations portent sur tous les états propres liés de  $H_T$  et  $H_P$ .

Il devient alors commode d'introduire une représentation coordonnée de l'espace des canaux. Les états  $\{|\mathbb{T}^{j_T m_T} \otimes \mathbb{P}^{j_P m_P} \otimes \vec{q}\rangle\}$  correspondent aux états asymptotiques physiques et sont facilement interprétables en ce sens. Cependant, la définition (2.78), qui n'est autre qu'une relation de complétude au sein de l'espace des canaux à deux fragments de même partition de masse, peut indifféremment être écrite au moyen des états sus-mentionnés, ou au moyen des états  $\{|\mathbb{T}^{j_T m_T} \otimes \mathbb{P}^{j_P m_P} \otimes \vec{r}\rangle\}$  où  $|\vec{r}\rangle$  est le ket coordonnée correspondant à la variable relative entre les deux fragments. Nous pouvons ainsi écrire (2.78) sous la forme suivante,

$$\tilde{P} = \sum_{T^{j_T m_T}, P^{j_P m_P}} \int d^3 r |\mathbb{T}^{j_T m_T} \otimes \mathbb{P}^{j_P m_P} \otimes \vec{r}\rangle \langle \mathbb{T}^{j_T m_T} \otimes \mathbb{P}^{j_P m_P} \otimes \vec{r}|. \quad (2.79)$$

En utilisant une base d'harmonique sphériques pour la complétude au sein de l'espace angulaire, nous pouvons alors écrire,

$$\tilde{P} = \sum_{T^{j_T m_T}, P^{j_P m_P}, l, m_l} \int dr r^2 |T^{j_T m_T} \otimes P^{j_P m_P} \otimes l m_l, r\rangle \langle T^{j_T m_T} \otimes P^{j_P m_P} \otimes r, l m_l|, \quad (2.80)$$

où la base  $\{|l m_l, r\rangle\}$  admet la représentation suivante,

$$\langle \vec{r} | l m_l, r' \rangle = \frac{\delta(r - r')}{r r'} Y_l^{m_l}(\Omega_r). \quad (2.81)$$

Enfin, nous introduisons notre schéma de couplage (qui sera utilisé dans tout ce qui suit) au moyen des états  $\{|\mathcal{Y}_c^{J,M}, r\rangle\}$  admettant la représentation suivante,

$$\langle \vec{r} | \mathcal{Y}_c^{J,M}, r' \rangle = \frac{\delta(r - r')}{r r'} \mathcal{Y}_c^{J,M}(\Omega_r), \quad (2.82)$$

où les fonctions angulaires sont données par<sup>5</sup>,

$$\mathcal{Y}_c^{J,M}(\Omega_r) = \sum_{m_T, m_P} \langle l j, m_l m_P | j m \rangle \langle j_T j, m_T m | J M \rangle |T^{j_T m_T} \otimes P^{j_P m_P}\rangle Y_l^{m_l}(\Omega_r), \quad (2.83)$$

et où nous avons introduit la notation simplifiée<sup>6</sup>,

$$c \equiv \{T^{j_T}, (l, P^{j_P})^j\}, \quad (2.84)$$

qui n'est autre que la définition des canaux en termes d'ondes partielles. En décomposant la représentation coordonnées de l'onde plane  $|\vec{q}\rangle$  en ondes partielles, on montre facilement que l'on a,

$$\langle r, \mathcal{Y}_c^{J,M} | T^{j_T m_T} \otimes P^{j_P m_P} \otimes \vec{q} \rangle = \sum_{l,j} \delta_{c,c'} j_l(kr) \Xi_c^{J,M}(m_T, m_P, \Omega_q), \quad (2.85)$$

où, pour une énergie totale  $E$ ,

$$k = \frac{q}{\hbar} = \sqrt{\frac{2\mu(E - E_T - E_P)}{\hbar^2}}, \quad (2.86)$$

$j_l$  est la fonction de Bessel sphérique et où le terme dépendant de la partie angulaire  $\Omega_q$  est donné par,

$$\Xi_c^{J,M}(m_T, m_P, \Omega_q) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^{3/2}} i^l \langle l j, m_l m_P | j m \rangle \langle j_T j, m_T m | J M \rangle Y_l^{*m_l}(\Omega_q). \quad (2.87)$$

Il est aisé de montrer que les fonctions angulaires (2.87) satisfont aux relations suivantes,

$$\sum_{m_T, m_P} \int d\Omega_q \left( \Xi_{T^{j_T}, P^{j_P}, l, j}^{J,M}(m_T, m_P, \Omega_q) \right)^\dagger \Xi_{T^{j'_T}, P^{j'_P}, l', j'}^{J', M'}(m_T, m_P, \Omega_q) = \frac{2}{\pi \hbar^3} \delta_{(l, j, J, M), (l', j', J', M')} \quad (2.88a)$$

$$\sum_{l, j, J, M} \Xi_c^{J,M}(m_T, m_P, \Omega_q) \left( \Xi_{c'}^{J', M'}(m_{T'}, m_{P'}, \Omega'_q) \right)^\dagger = \frac{2}{\pi \hbar^3} \delta_{(m_T, m_P), (m_{T'}, m_{P'})} \delta(\Omega_q - \Omega'_q). \quad (2.88b)$$

Enfin, nous concluons en écrivant le projecteur (2.78) comme suit,

$$\tilde{P} = \sum_{c, J, M} \int dr r^2 |\mathcal{Y}_c^{J,M}, r\rangle \langle r, \mathcal{Y}_c^{J,M}|. \quad (2.89)$$

<sup>5</sup>Notons que  $m_l = m - m_P$  et  $m = M - m_T$ .

<sup>6</sup>L'ordre de couplage est ici symbolisé, la lettre  $c$  n'en décrivant pas moins l'ensemble des nombres quantiques  $\{T, j_T, l, P, j_P, j\}$ .

### 2.3.4 Ondes distordues et potentiel de Coulomb

Redéfinissons l'hamiltonien total par  $H = H_0^c + \mathcal{V}$ , où  $H_0^c = H_0 + \mathcal{V}_c$  et  $\mathcal{V}_c$  est un potentiel additionnel. Nous pouvons alors définir la résolvante du nouvel hamiltonien libre  $H_0^c$ ,

$$G_0^{c\pm} = \frac{1}{E^\pm - H_0^c}. \quad (2.90)$$

En notant  $|\psi_0\rangle$  la solution de  $(E - H_0)|\psi_0\rangle = 0$ , nous pouvons écrire les solutions totales (analogues de (2.71) et (2.72)),

$$|\psi\rangle^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^\pm |\psi_0\rangle \quad (2.91a)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon (G_0^{c\pm} |\psi_0\rangle + G^\pm \mathcal{V} G_0^{c\pm} |\psi_0\rangle). \quad (2.91b)$$

En introduisant,

$$|\psi_c\rangle^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^{c\pm} |\psi_0\rangle, \quad (2.92)$$

(2.91) mène à,

$$|\psi\rangle^\pm = |\psi_c\rangle^\pm + G_0^{c\pm} \mathcal{V} |\psi\rangle^\pm. \quad (2.93)$$

Le problème se réduit donc à (2.71b-2.72b) à ceci près que le vecteur libre  $|\psi_0\rangle$  est remplacé par le vecteur *distordu*  $|\psi_c\rangle^\pm$ . Si le potentiel additionnel  $\mathcal{V}_c$  est le potentiel de Coulomb :  $\mathcal{V}_c(r) = e^2 Z_T Z_P / r$ , où  $Z_T$  et  $Z_P$  sont les nombres de charge de la cible et du projectile respectivement, alors le nouvel opérateur de Möller,

$$\Omega_c^\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{\frac{i}{\hbar} H t} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0^c t}, \quad (2.94)$$

n'est plus défini à cause de la portée infinie de ce potentiel. Néanmoins, par une procédure de renormalisation [37, 38], nous pouvons trouver une solution analytique, que l'on note<sup>7</sup>  $|\psi_c\rangle^\pm \equiv |\vec{q}^c\rangle^\pm$ , communément dénommée *onde plane distordue de Coulomb* et admettant la représentation coordonnée suivante,

$$\langle \vec{r} | \vec{q}^c \rangle^\pm = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{-\pi\eta/2} \Gamma(1 \pm i\eta) e^{i\vec{k}\vec{r}} {}_1F_1(\mp i\eta; 1; i(kr - \vec{k}\vec{r})), \quad (2.95)$$

où  $\eta = \mu e^2 Z_1 Z_2 / \hbar^2 k$  est le paramètre de *Sommerfeld*, et  ${}_1F_1(a; b; z)$  est la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce [39]. L'onde plane  $|\vec{q}^c\rangle^+$  peut être développée sur une base d'ondes partielles comme suit,

$$\langle \vec{r} | \vec{q}^c \rangle^+ = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sum_{l,m} i^l e^{i\sigma_l} f_{l,\eta}(kr) Y_l^{*m}(\Omega_q) Y_l^m(\Omega_r), \quad (2.96)$$

où  $f_{l,\eta}(kr)$  est la fonction d'onde de Coulomb régulière, normalisée de la manière suivante (pour  $r \rightarrow \infty$ ),

$$f_{l,\eta}(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin(kr - \eta \log(2kr) - \pi l/2 + \sigma_l), \quad (2.97)$$

---

<sup>7</sup>Nous oublions ici les états intrinsèques de la cible et du projectile pour simplifier les notations.

et où  $\sigma_l$  est le *déphasage de Coulomb*,

$$\sigma_l = \arg(\Gamma(l + 1 + i\eta)). \quad (2.98)$$

La fonction d'onde de Coulomb régulière (2.97) peut s'écrire en fonction des fonctions d'onde de Coulomb irrégulières  $h_{l,\eta}^\pm$  comme suit,

$$f_{l,\eta}(kr) = \frac{1}{2}(e^{i\sigma_l} h_{l,\eta}^+(kr) + e^{-i\sigma_l} h_{l,\eta}^-(kr)), \quad (2.99)$$

où, pour  $r \sim \infty$ ,

$$h_{l,\eta}^\pm(kr) \sim \frac{i^{\mp(l+1)}}{kr} e^{\pm i(kr - \eta \log(2kr))}. \quad (2.100)$$

Dans tout ce qui suit, nous assimilerons l'hamiltonien libre  $H_0$  à l'hamiltonien  $H_0^c$ , supposant implicitement que le potentiel de Coulomb y est contenu. Les états (2.60) sont alors remplacés par les états,

$$|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}} \otimes \mathbb{P}^{j_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{P}}} \otimes \vec{q}^c\rangle, \quad (2.101)$$

et la relation (2.85) devient,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{c'}^{J,M} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}} \otimes \mathbb{P}^{j_{\mathbb{P}} m_{\mathbb{P}}} \otimes \vec{q}^c \rangle = \sum_{l,j} \delta_{c,c'} e^{i\sigma_l} f_{l,\eta}(kr) \Xi_c^{J,M}(m_{\mathbb{T}}, m_{\mathbb{P}}, \Omega_q). \quad (2.102)$$

### 2.3.5 Comportement asymptotique

Nous supposons toujours, dans cette partie, que l'espace des canaux où le système est scindé en deux fragments pour une partition de masse donnée est suffisant pour décrire l'ensemble des états accessibles au système. La relation (2.78) devient alors une relation de complétude.

Les coefficients du développement de l'état de diffusion (2.71) dans la base  $\{|\mathcal{Y}_{c'}^{J,M}, r\rangle\}$  introduite dans la section (2.3.3) sont notés,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{c'}^{J,M} | \psi \rangle^+ = \frac{1}{r} \psi_{c'}^{J,M}(r). \quad (2.103)$$

On peut montrer [40] que les éléments de matrice de la résolvante  $G_0^+$  peuvent s'écrire,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{c'}^{J,M} | G_0^+ | \mathcal{Y}_{c''}^{J,M}, r' \rangle = g_{c'}^+(k', r, r'), \quad (2.104)$$

où la fonction de Green  $g_{c'}^+$  admet l'expression suivante,

$$g_{c'}^+(k', r, r') = -\frac{2i\mu' k'}{\hbar^2} e^{i\sigma_{c'}} f_{l',\eta'}(k' r_<) h_{l',\eta'}^+(k' r_>). \quad (2.105)$$

En écrivant les éléments de matrice de l'interaction  $\mathcal{V}$  comme suit,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{c'}^{J,M} | \mathcal{V} | \mathcal{Y}_{c''}^{J,M}, r'' \rangle = \mathcal{V}_{c',c''}^J(r', r''), \quad (2.106)$$

l'équation (2.71b) est équivalente à,

$$\frac{1}{r} \psi_{c'}^{J,M}(r) = \sum_{l,j} \delta_{c,c'} e^{i\sigma_l} f_{l,\eta}(kr) \Xi_c^{J,M}(m_T, m_P, \Omega_q) + \sum_{c''} \iint dr' dr'' r'^2 r''^2 g_{l'}^{\pm}(k', r, r') \mathcal{V}_{c',c''}^J(r', r'') \psi_{c''}^{J,M}(r''). \quad (2.107)$$

Enfin, en posant<sup>8</sup>,

$$\psi_{c'}^{J,M}(r) = \sum_{l,j} \psi_{c',c}^J(r) \Xi_c^{J,M}(m_T, m_P, \Omega_q), \quad (2.108)$$

et en utilisant la relation d'orthogonalité (2.88a), (2.107) mène à,

$$\psi_{c',c}^J(r) = \delta_{c,c'} e^{i\sigma_l} r f_{l,\eta}(kr) + \sum_{c''} \iint dr' dr'' r'^2 r''^2 g_{l'}^{\pm}(k', r, r') \mathcal{V}_{c',c''}^J(r', r'') \psi_{c'',c}^J(r''). \quad (2.109)$$

En introduisant les fonctions radiales suivantes,

$$H_c^{\pm}(r) = k r e^{\pm i\sigma_l} h_{k,\eta}^{\pm}(r), \quad (2.110)$$

on montre facilement que la solution matricielle  $\psi_{c',c}^J(r)$  admet la forme asymptotique suivante,

$$\psi_{c',c}^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_l}}{2k'} \left[ H_c^-(r) \delta_{c,c'} + H_{c'}^+(r) S_{c',c}^J \right], \quad (2.111)$$

où,

$$S_{c',c}^J = \delta_{c',c} - \frac{4i\mu'}{\hbar^2} k' e^{-i\sigma_{l'}} \sum_{c''} \iint dr' dr'' r'^2 r''^2 f_{l'\eta'}(k' r') \mathcal{V}_{c',c''}^J(r', r'') \psi_{c'',c}^J(r''), \quad (2.112)$$

sont les éléments d'une matrice relative à la matrice de diffusion par une transformation unitaire.

### 2.3.6 Décroissance spontanée

Il peut arriver qu'un système quantique dans sa partition de masse la plus simple (système total lié) aspire à décroître, c'est à dire à se scinder spontanément en deux (ou plus) fragments s'éloignant l'un de l'autre avant d'atteindre la région asymptotique. Nous supposons que, dans le canal d'arrangement correspondant à un seul fragment<sup>9</sup>, le système est décrit par l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  de moment de spin total  $J$  (et projection  $M$ ). Tout les autres nombres quantiques sont dénotés  $\Phi$ . De même qu'en (2.74), nous pouvons écrire,

$$|\psi\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^+ |\Phi\rangle^{J,M} + G_0^+ \mathcal{V} |\psi\rangle^+. \quad (2.113)$$

<sup>8</sup>Notons que les nombres quantiques  $T^{J_r, m_T}$  de la cible et  $P^{J_p, m_p}$  du projectile sont fixés pour le canal entrant.

<sup>9</sup>En toute rigueur, nous ne pouvons pas ici parler de canal, car le système admet une forme asymptotique nulle. Nous utiliserons cependant cet abus de langage dans tout ce qui suit.

Dans la base des canaux à deux fragments, (2.113) admet alors la représentation suivante,

$$\langle r, \mathcal{Y}_c^{J,M} | \psi \rangle^+ = \frac{1}{r} \psi_c^J(r) = \langle r, \mathcal{Y}_c^{J,M} | \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^+ | \Phi \rangle^{J,M} + \langle r, \mathcal{Y}_c^{J,M} | G_0^+ \mathcal{V} | \psi \rangle^+, \quad (2.114)$$

et la relation (2.75) nous permet d'écrire,

$$\langle r, \mathcal{Y}_c^{J,M} | \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^+ | \Phi \rangle^{J,M} \sim 0, \quad \text{pour } r \rightarrow \infty. \quad (2.115)$$

Avant d'aller plus loin, une remarque s'impose. Comme nous l'avons mentionné dans la section (2.3.3), la relation (2.78) est assimilable, dans le cadre de notre approximation, à une relation de complétude dans l'espace des canaux à deux fragments de même partition de masse. Mais nous remarquons que le sous-espace engendré par les états  $|\Phi\rangle^{J,M}$  décrivant le système total lié est inclu dans l'espace des canaux à deux fragments, ces deux derniers pouvant être liés dans leur mouvement relatif. Ceci nous permet d'utiliser la même méthode que dans la section précédente pour dériver la forme asymptotique suivante,

$$\psi_c^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_l}}{2k} H_c^+(r) \Gamma_c^J, \quad (2.116)$$

où nous avons posé,

$$\Gamma_c^J = -\frac{2i\mu k}{\hbar^2} \int dr' r'^2 f_{l,\eta}(kr') \langle r', \mathcal{Y}_c^{J,M} | \mathcal{V} | \psi \rangle^+. \quad (2.117)$$

Notons la forme vectorielle de la solution  $\psi_c^J(r)$ , à la différence de la forme matricielle (2.111), car le canal entrant étant inexistant, cette solution ne dépend pas de la partie angulaire d'une quelconque onde incidente.

### 2.3.7 Introduction de notations supplémentaires

Nous introduisons dans cette partie, peu primesautière mais hélas nécessaire, quelques notations supplémentaires qui nous seront utiles par la suite. Le schéma de couplage introduit dans la section (2.3.3) peut être symbolisé de la manière suivante,

$$\left[ (\text{cible})^{j_T} \times \left[ (\text{moment angulaire relatif})^l \times (\text{projectile})^{j_P} \right]^j \right]^{J,M}. \quad (2.118)$$

Nous avons alors introduit en (2.84) une notation simplifiée visant à symboliser l'ensemble des nombres quantiques définissant chaque canal (en termes d'onde partielles) par la lettre romaine  $c$ . Nous introduisons alors la forme réduite  $\bar{c}$  de cette notation de la manière suivante,

$$\bar{c} \equiv \{l, P, j_P, j\}, \quad (2.119)$$

ne correspondant donc qu'aux nombres quantiques décrivant le moment relatif, le projectile et le moment de spin  $j$ . Nous pouvons alors factoriser la notation (2.84) de la manière suivante,

$$c \equiv \{T, j_T, \bar{c}\}. \quad (2.120)$$

De même, nous factorisons les fonctions angulaires (2.83) comme suit,

$$\mathcal{Y}_c^{J,M}(\Omega) = \left[ |T^{j_T}\rangle \times \mathcal{Y}_{\bar{c}}(\Omega) \right]^{J,M} = \sum_{m_T, m} \langle j_T j, m_T m | JM \rangle |T^{j_T, m_T}\rangle \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m(\Omega), \quad (2.121)$$

où nous avons défini,

$$\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m(\Omega) = \sum_{m_l, m_p} \langle l j_P, m_l m_p | jm \rangle Y_l^{m_l}(\Omega) |P^{j_P, m_P}\rangle. \quad (2.122)$$

Chaque ket  $|\mathcal{Y}_c^{J,M}, r\rangle$  de la base des canaux peut alors s'écrire,

$$|\mathcal{Y}_c^{J,M}, r\rangle = |T^{j_T} \otimes \mathcal{Y}_{\bar{c}}, r\rangle^{J,M}. \quad (2.123)$$

Afin d'illustrer simplement cette nouvelle notation, prenons l'exemple où le fragment appelé *projectile* correspond à un seul nucléon. Dans ce cas, les nombres quantiques intrinsèques de ce « fragment », dénotés précédemment par la petite capitale P, se résument à la projection de l'isospin  $\tau_z$ , et le moment  $j_P$  n'est autre que le spin 1/2 du fermion considéré. La notation (2.119) se résume donc à,

$$\bar{c} \equiv \{l, j, \tau_z\}, \quad (2.124)$$

où nous avons omis le spin 1/2. La seule différence entre les notations (2.19a) et (2.84) réside donc uniquement dans les nombres quantiques d'excitation : l'utilisation de la lettre romaine *c* sous-entend les nombres quantiques  $\{T, j_T\}$  définissant l'état d'excitation du fragment appelé *cible*, alors que l'utilisation de la lettre grecque  $\alpha$  sous-entend le nombre quantique  $n_\alpha$  ( $k_\alpha$  pour un état de diffusion) définissant l'état d'excitation du fragment appelé *projectile*, relativement à la cible.

## 2.4 Le modèle en couches avec couplage aux états du continuum

### 2.4.1 Etats individuels

#### 2.4.1.1 Etats liés, continuum et résonances

On suppose une base constituée des états  $|\alpha m_\alpha\rangle$  définis comme en (2.20) et satisfaisant à l'équation,

$$(e_\alpha - h)|\alpha m_\alpha\rangle = 0, \quad (2.125)$$

où  $h$  est un hamiltonien construit à partir d'un potentiel à symétrie sphérique et de profondeur finie. En toute généralité, ce potentiel peut être de portée finie, auquel cas les fonctions d'onde radiales  $u_\alpha(r)$  sont solutions d'une équation intégral-différentielle du type (2.31). Cette équation radiale peut admettre trois types de solutions d'un intérêt physique immédiat :

- des solutions de *diffusion*, qui constituent un ensemble continu et sont caractérisées par un nombre d'onde  $k_\alpha$  réel positif; ces solutions admettent la forme asymptotique suivante,

$$\begin{aligned} u_\alpha(r) &\sim C_\alpha^- k_\alpha r h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^-(k_\alpha r) + C_\alpha^+ k_\alpha r h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^+(k_\alpha r) \\ &= A_\alpha k_\alpha r \left( h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^-(k_\alpha r) + S_\alpha h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^+(k_\alpha r) \right), \end{aligned} \quad (2.126)$$

où  $h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^\pm(k_\alpha r)$  sont les fonctions d'onde de Coulomb irrégulières sortante et entrante définies comme en (2.99),  $C_\alpha^\pm$  et  $A_\alpha$  sont des constantes et  $S_\alpha$  est l'élément de la matrice  $S$  de diffusion pour l'onde partielle considérée,

- des solutions *liées*, qui constituent un ensemble discret et sont caractérisées par un nombre d'onde  $k_\alpha$  imaginaire positif; ces solutions admettent la forme asymptotique d'onde sortante,

$$u_\alpha(r) \sim C_\alpha k_\alpha r h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^+(k_\alpha r), \quad (2.127)$$

où  $C_\alpha$  est une constante,

- des solutions *résonnantes* [41], qui constituent un ensemble discret et sont caractérisées par un nombre d'onde  $k_\alpha$  de parties réelle positive et imaginaire négative telles que  $\text{Re}(k_\alpha) > -\text{Im}(k_\alpha)$ ; ces solutions admettent également la forme asymptotique sortante.

Dans ce qui suit, nous construirons l'espace des états individuels à partir des états liés et de diffusion. Les solutions radiales satisfont donc à la relation de complétude de Newton [42],

$$\sum_{n_\alpha} u_\alpha(r) u_\alpha(r') + \int_0^\infty dk_\alpha u_\alpha(r) u_\alpha(r') = \delta(r - r'). \quad (2.128)$$

Dans l'espace total, la relation de complétude devient alors,

$$\sum_{\bar{\alpha}, m_\alpha} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}(\Omega) \left[ \sum_{n_\alpha} \frac{u_\alpha(r)}{r} \frac{u_\alpha(r')}{r'} + \int_0^\infty dk_\alpha \frac{u_\alpha(r)}{r} \frac{u_\alpha(r')}{r'} \right] \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{\dagger m_\alpha}(\Omega') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \mathbb{1}_{SI}, \quad (2.129)$$

où les fonctions angulaires  $\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}(\Omega)$  ont été définies en (2.18) et où  $\mathbb{1}_{SI}$  représente l'identité dans l'espace de spin et d'isospin. Nous verrons quelle est l'influence des solutions résonnantes sur le continuum réel dans la partie (2.4.1.3).

### 2.4.1.2 Equation radiale et condition de raccordement

L'ensemble des fonctions d'onde radiales qui nous intéresse est constitué des solutions de l'équation générique suivante,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + k_{\alpha}^2 - \frac{l_{\alpha}(l_{\alpha} + 1)}{r^2} \right] u_{\alpha}(r) + D_{\bar{\alpha}}(r)u_{\alpha}(r) + \Theta_{\alpha}(r) = 0, \quad (2.130)$$

où nous avons défini le terme source,

$$\Theta_{\alpha}(r) = \int dr' E_{\bar{\alpha}}(r, r') u_{\alpha}(r'). \quad (2.131)$$

Outre les restrictions habituelles [43]-[47], on demande au potentiel de satisfaire aux conditions suivantes,

$$D_{\bar{\alpha}}(r) \sim e^2 Z_1 Z_2 / r, \text{ (potentiel de Coulomb) pour } r \rightarrow \infty, \quad (2.132a)$$

$$E_{\bar{\alpha}}(r, r') = E_{\bar{\alpha}}(r', r), \text{ (symétrie du noyau intégral),} \quad (2.132b)$$

$$\Theta_{\alpha}(r) \sim 0, \text{ pour } r \rightarrow \infty. \quad (2.132c)$$

Pour résoudre cette équation on divise habituellement l'axe radial en deux parties :

- la partie *intérieure* définie par l'intervalle  $[0, R]$ , où  $R$  correspond approximativement au *rayon* du potentiel<sup>10</sup> ; sur cet intervalle, la solution  $u_{\alpha}(r)$  est écrite,

$$u_{\alpha}(r) = C u_{\alpha}^{reg}(r), \quad (2.133)$$

avec  $C$  une constante, et où la solution *régulière*  $u_{\alpha}^{reg}(r)$  satisfait à,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-l_{\alpha}-1} u_{\alpha}^{reg}(r) = 1, \quad (2.134)$$

- la partie *extérieure*  $[R, R_{max}]$ , telle que pour  $r \geq R_{max}$  les conditions (2.132a) et (2.132c) sont vérifiées ; sur cet intervalle, la solution  $u_{\alpha}(r)$  est décomposée de la manière suivante,

$$u_{\alpha}(r) = C_{\alpha}^{-} H_{\alpha}^{-}(r) + C_{\alpha}^{+} H_{\alpha}^{+}(r), \quad (2.135)$$

où  $C_{\alpha}^{\pm}$  sont des constantes proportionnelles aux *fonctions de Jost* [40], et où  $H_{\alpha}^{\pm}$  sont les *solutions de Jost*.

---

<sup>10</sup>Nous entendons ici par *rayon* du potentiel le rayon  $R$  aux alentours duquel  $D_{\bar{\alpha}}(r)$  et  $\Theta_{\alpha}(r)$  varient brusquement ; ce rayon correspond à ce que l'on pourrait appeler la *surface* du noyau.

Les solutions de Jost  $H_\alpha^\pm(r)$  sont solutions de l'équation (2.130) et admettent la forme asymptotique,

$$H_\alpha^\pm(r) \sim k_\alpha r h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^\pm(k_\alpha r). \quad (2.136)$$

Ayant obtenu les solutions régulière et de Jost, on trouve la solution totale en résolvant l'équation de continuité de la dérivée logarithmique de  $u_\alpha$  en  $R$ . Pour les états de diffusion, cette équation est équivalente au système linéaire suivant,

$$\begin{aligned} C u_\alpha^{reg}(R) &= C_\alpha^- H_\alpha^-(R) + C_\alpha^+ H_\alpha^+(R), \\ C \frac{du_\alpha^{reg}(r)}{dr} \Big|_{r=R} &= C_\alpha^- \frac{dH_\alpha^-(r)}{dr} \Big|_{r=R} + C_\alpha^+ \frac{dH_\alpha^+(r)}{dr} \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Les états de diffusion sont normalisés de manière à satisfaire à,

$$\int dr u_{k, \bar{\alpha}}(r) u_{k', \bar{\alpha}}(r) = \delta(k - k'), \quad (2.138)$$

qui est l'équivalent de (2.23a) pour les états de diffusion. Enfin, on peut montrer que (2.138) implique,

$$C_\alpha^+ C_\alpha^- = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.139)$$

Pour les états liés et les solutions résonnantes, on adopte une autre méthode. Nous savons [48] que, pour un potentiel non-local symétrique, les fonctions de Jost peuvent s'exprimer en fonction du Wronskien<sup>11</sup>  $W$  de la fonction régulière avec les solutions de Jost, calculé en  $r = 0$  ou  $r = \infty$ ,

$$C_\alpha^\pm = \mp \frac{1}{2ik_\alpha} W(u_\alpha^{reg}, H_\alpha^\mp)_{r=0 \text{ ou } \infty}, \quad (2.140)$$

à la différence du cas local où cette égalité est vérifiée pour toute valeur de  $r$ . On choisit donc une valeur de  $r$  suffisamment grande de manière à vérifier (2.132c), s'assurant ainsi que le Wronskien est constant au-delà de cette valeur, et cherche les zéros de la fonction de Jost  $C_\alpha^-$  (qui correspondent aux pôles de la matrice  $S$ ) afin de satisfaire à la condition asymptotique (2.127).

Remarquons que, dans le cas d'un potentiel non-local, l'existence des fonctions de Jost n'est pas assurée dans le plan complexe [47]. De plus, l'intégration numérique de l'équation (2.130) nécessite un calcul de terme source tel que  $\Theta_\alpha(r)$ , qui peut diverger. Dans ces conditions, la seule méthode pour déterminer la position d'une résonance d'un tel potentiel est de tracer le déphasage du continuuum réel, et de localiser le passage par  $\pi/2$ .

---

<sup>11</sup>Le Wronskien de deux fonctions  $f(r)$  et  $g(r)$  est ici défini par  $W(f, g)(r) = f(r)g'(r) - f'(r)g(r)$ , où le prime désigne la dérivé première.

### 2.4.1.3 Etats quasi-liés inclus dans le continuum

Si l'équation radiale (2.130) admet une solution résonante très proche de l'axe réel positif, alors le continuum réel est perturbé et admet une forte densité d'états dans la zone située juste au dessus du pôle (cf. Fig. (2.2)).

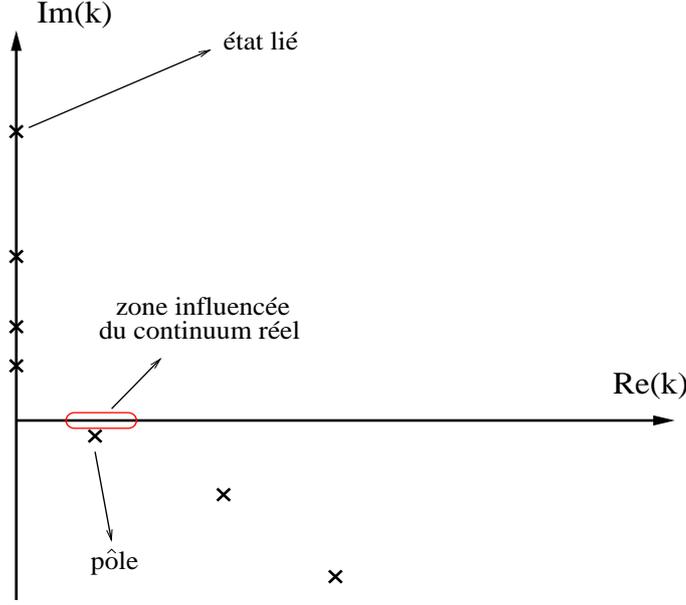


FIG. 2.2 – Plan complexe  $k$ .

Cette propriété se traduit par une variation rapide du déphasage dans cette zone, ainsi que de la section efficace qui prend alors la forme bien connue de *Breit-Wigner* dont la largeur est relative à la partie imaginaire de la position du pôle.

Afin de pouvoir illustrer facilement l'influence des pôles de la matrice  $S$  sur les états de diffusion, nous emploierons dans cette partie un potentiel local simplifié de type Woods-Saxon additionné d'un terme spin-orbite (sans oublier le potentiel de Coulomb, simulé par une sphère uniformément chargée). Ce potentiel « test » prend alors la forme suivante (en représentation radiale),

$$U_{\bar{\alpha}}(r) = V_0 U_{ws}(r) + 2 \left[ j_{\alpha}(j_{\alpha} + 1) - l_{\alpha}(l_{\alpha} + 1) - \frac{3}{4} \right] V_{so} \frac{1}{r} \frac{dU_{ws}(r)}{dr} + \delta_{\tau z \alpha, -1/2} V^C(r), \quad (2.141)$$

où  $V_0$  et  $V_{so}$  sont des constantes. Le terme  $U_{ws}(r)$  n'est autre qu'une distribution de Fermi,

$$U_{ws}(r) = \frac{1}{1 + e^{(r-R)/d}}, \quad (2.142)$$

où  $R$  est le rayon du potentiel et  $d$  sa diffusivité. Enfin, le terme coulombien est donné par,

$$V^C(r) = C_{coul} Z_T \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(r/R)^2 \right) \delta(r < R) + \frac{1}{r} \delta(r \geq R) \right], \quad (2.143)$$

où  $C_{coul}$  ( $\simeq 1.44 \text{ MeV}$ ) est la constante de Coulomb et  $Z_T$  le nombre de charge de la cible.

L'équation radiale vérifiée par la solution  $u_\alpha(r)$  prend alors la forme triviale suivante,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + k_\alpha^2 - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} \right] u_\alpha(r) + U_{\bar{\alpha}}(r)u_\alpha(r) = 0, \quad (2.144)$$

où nous avons pris la peine d'inclure la masse réduite cible-projectile  $\mu$ , soucieux de décrire un phénomène de diffusion dans le référentiel du centre de masse.

Dans la zone d'influence du pôle, les états de diffusion prennent une forme très localisée. Nous entendons ici par *localisé*, le fait que l'amplitude maximale de la fonction d'onde est atteinte dans la région intérieure au noyau, et y prend une forme disproportionnée par rapport à la forme sinusoidale asymptotique (que nous appellerons *queue*). Si le pôle est vraiment très proche de l'axe réel, nous pouvons raisonnablement supposer que l'état de diffusion le plus affecté sera celui se situant immédiatement au-dessus. En d'autres termes, si  $k_{res}$  correspond au nombre d'onde d'une solution résonante, alors l'états du continuum réel de nombre d'onde  $\text{Re}(k_{res})$  est suspecté comme étant le plus localisé.

Afin d'illustrer ce phénomène, nous cherchons l'état résonant  $0d5/2$  proton dans le puit de potentiel (2.141) avec les paramètres suivants,

$V_0(\text{MeV})$	$V_{so}(\text{MeV})$	$R(\text{fm})$	$d(\text{fm})$
40.0	3.5	3.5	0.5

(2.145)

généralisé par une cible de masse  $16 \text{ amu}$  et de nombre de charge  $Z_T = 8$ . Nous trouvons alors un pôle situé à  $\text{Re}(k_{res}) = 0.265126 \text{ fm}^{-1}$ ,  $\text{Im}(k_{res}) = -0.00139835 \text{ fm}^{-1}$ , ce qui correspond à une énergie  $e_{res} = 1.54955 \text{ MeV}$  et une largeur  $\Gamma_{res} = 32.692 \text{ keV}$ . La fonction d'onde radiale de l'état de diffusion correspondant à l'énergie  $e_{res}$  est présentée figure (2.3).

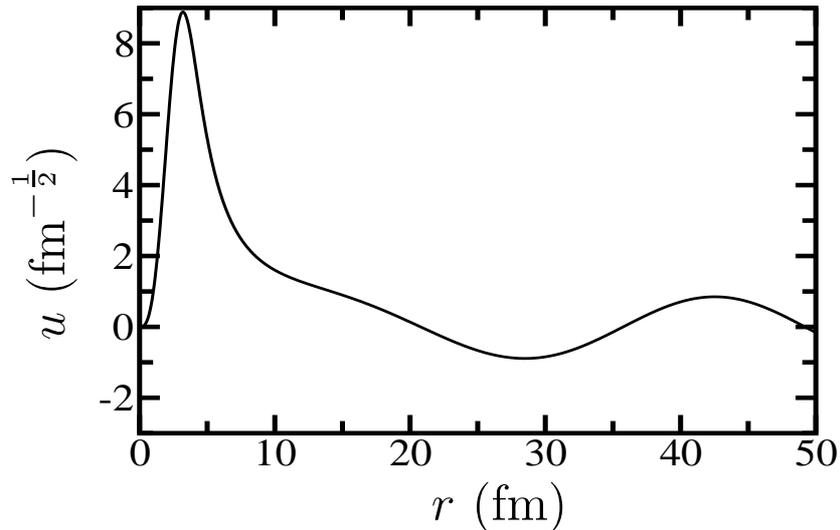


FIG. 2.3 – Fonction d'onde radiale de l'état de diffusion  $0d5/2$  proton à l'énergie de la résonance, obtenue à partir du potentiel (2.141). Les valeurs des paramètres sont donnés en (2.145).

Nous observons clairement cette partie localisée de la fonction d'onde qui présente de fortes similitudes avec un état lié.

Comme nous l'avons vu dans la section (2.2.1), l'hamiltonien de modèle en couches se base sur des états individuels engendrés par un puits de potentiel infini. Un tel puits ne peut être représentatif du champ moyen que pour un nombre très limité d'états : ceux du coeur et de l'espace de valence, car il ne peut pas générer de continuum. Nous savons que le champ moyen nucléaire est de profondeur finie. Ce continuum doit donc, en toute rigueur, exister. Les états individuels de modèle en couches n'ont valeur que de base, et n'ont pas la prétention d'être représentatifs de ce que seraient les hypothétiques « vrais » états individuels générés par le « vrai » champ moyen nucléaire. Nous pouvons même supposer que certains états de l'espace de valence, liés dans le modèle en couches, correspondraient en fait à des états résonnants si ceux-ci avaient été calculés dans un potentiel plus réaliste. En effet, chaque état lié correspond, au même titre que les états résonnants, à un zéro de la fonction de Jost  $C^-$ . Lorsque l'on diminue la profondeur du puit de potentiel, ce zéro se déplace le long de l'axe imaginaire en se rapprochant de 0. Si l'on continue de diminuer la profondeur du puit, alors ce zéro devient un pôle de la matrice  $S$ , continuant à se déplacer dans le quart de plan complexe inférieur droit, en s'éloignant progressivement de l'axe réel.

Certains modèles, tels que le *Gamow Shell Model* [6]-[14], utilisent les états résonnants (ou *états de Gamow*) pour compléter la base individuelle. La relation de complétude individuelle est alors celle de *Bergreen* [16]. Dans notre cas, nous voulons construire la base individuelle à partir des seuls états liés et de diffusion. Comme nous le verrons plus tard, l'espace de valence que nous utiliserons doit correspondre à celui de modèle en couches. Ceci nous amène donc au problème suivant : si, à partir d'un puits de potentiel fini, un état qui devrait se trouver dans l'espace de valence, se trouve en fait dans le continuum, comment inclure celui-ci dans l'espace des états liés ?

Nous avons vu que l'état de diffusion situé juste au-dessus d'un pôle présente une forte ressemblance avec un état lié. Nous pourrions donc supprimer cet état du continuum et l'inclure dans l'espace de valence. Bien qu'orthogonal aux autres états liés, cet état n'est pas normalisable au sens usuel, et vérifie toujours la relation (2.138). La première méthode utilisée pour normaliser un tel état [49] consistait simplement à « couper » la queue de la fonction radiale au moyen d'une distribution de Heaviside dont le rayon correspond approximativement à celui du potentiel considéré. L'état ainsi obtenu est alors orthonormalisé par rapport aux autres états liés. Cette méthode permet de supprimer correctement les résonances du continuum individuel, mais présente néanmoins le désavantage lié à la non-continuité de la fonction d'onde. De plus, le rayon de coupure reste un paramètre libre qui doit être ajusté. Pour pallier au problème de non-continuité, une autre méthode fut introduite [24] consistant à multiplier la fonction radiale par une distribution de Fermi. Cependant, cette méthode admet toujours un paramètre libre correspondant au rayon de la distribution.

L'état obtenu à partir de ces méthodes est traditionnellement appelé *état quasi-lié inclus dans le continuum* (EQLIC). Le fait d'inclure un tel état dans l'espace des états liés implique une redéfinition de l'hamiltonien, car cet état n'en est plus état propre. Supposons que l'hamiltonien  $h$  admette  $N_b$  états liés  $\{|\alpha m_\alpha\rangle\}$  satisfaisant à  $(e_\alpha - h)|\alpha m_\alpha\rangle = 0$ , et  $N_r$  solutions résonnantes auxquelles correspondent les EQLIC  $\{|\alpha m_\alpha\rangle^{res}\}$  définis comme précédemment à l'énergie de la résonance  $e_\alpha^{res}$ . Nous regroupons ces états dans une base commune  $\{|\widetilde{\gamma m_\gamma}\rangle\}$  comportant  $N_b + N_r$  états.

Le nouvel hamiltonien  $\tilde{h}$  est alors défini comme suit,

$$\tilde{h} = \sum_{\alpha m_\alpha} |\widetilde{\alpha m_\alpha}\rangle \tilde{e}_\alpha \langle \widetilde{\alpha m_\alpha}| + \left( \mathbf{1} - \sum_{\alpha m_\alpha} |\widetilde{\alpha m_\alpha}\rangle \langle \widetilde{\alpha m_\alpha}| \right) h \left( \mathbf{1} - \sum_{\beta m_\beta} |\widetilde{\beta m_\beta}\rangle \langle \widetilde{\beta m_\beta}| \right), \quad (2.146)$$

où,

$$\tilde{e}_\alpha = e_\alpha \quad \text{pour un état lié,} \quad (2.147a)$$

$$\tilde{e}_\alpha = e_\alpha^{res} \quad \text{pour un EQLIC.} \quad (2.147b)$$

Les états  $|\widetilde{\alpha m_\alpha}\rangle$  vérifient alors,

$$(\tilde{e}_\alpha - \tilde{h})|\widetilde{\alpha m_\alpha}\rangle = 0, \quad (2.148)$$

et le continuum de  $\tilde{h}$  est naturellement renormalisé à travers le second terme du membre de droite de l'équation (2.146). La méthode numérique pour intégrer les états de diffusion de l'hamiltonien projeté (2.146) n'est qu'un cas particulier de la méthode générale multi-canaux présentée en annexe (6.7).

Dans cet exposé, nous adoptons une nouvelle méthode qui s'avère être efficace et est dépourvue des inconvénients mentionnés plus haut. Le principe de cette méthode repose sur le fait que, si nous voulons que l'EQLIC admette une asymptotique d'état lié, nous devons intégrer l'équation radiale dans la partie extérieure avec comme condition asymptotique,

$$u_\alpha(r) \sim C_\alpha^+ k_\alpha r h_{l_\alpha, \eta_\alpha}^+(i\text{Re}(k_{res})r), \quad (2.149)$$

où  $k_{res}$  est la position du pôle. D'autre part, dans la partie intérieure, la fonction radiale doit être proportionnelle à la solution régulière de nombre d'onde  $\text{Re}(k_{res})$ . Le problème est alors que l'équation de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première n'admet pas de solution. En effet, trouver le nombre d'onde  $k_\alpha$  qui vérifie cette équation de continuité pour un état lié est équivalent à trouver le nombre d'onde qui annule le Wronskien de la solution régulière avec la solution de Jost sortante,

$$W(u_\alpha^{reg}, H_\alpha^+)(r) = 0. \quad (2.150)$$

L'équation (2.150) doit être vérifiée pour toute valeur de  $r$  dans le cas d'un potentiel local, et en  $r = 0$  ou  $\infty$  dans le cas d'un potentiel non-local symétrique. Dans notre cas, le nombre d'onde est fixé dans les parties intérieure et extérieure, ce qui interdit (2.150). L'idée est alors de résoudre l'équation (2.150) avec comme inconnue la variable radiale  $r$  elle-même. La solution  $r_{cut}$  de cette équation fixe alors le rayon de coupure.

L'application de cette méthode à l'exemple utilisé dans cette partie nous donne le rayon de coupure  $r_{cut} = 17.9966 \text{ fm}$ . L'EQLIC obtenu, après normalisation, est présenté figure (2.4). Remarquons la grande portée ( $\sim 20 \text{ fm}$ ) de cet état, entraînant une augmentation du rayon moyen  $\langle r \rangle$  en comparaison de celui obtenu à partir d'un état lié normal.

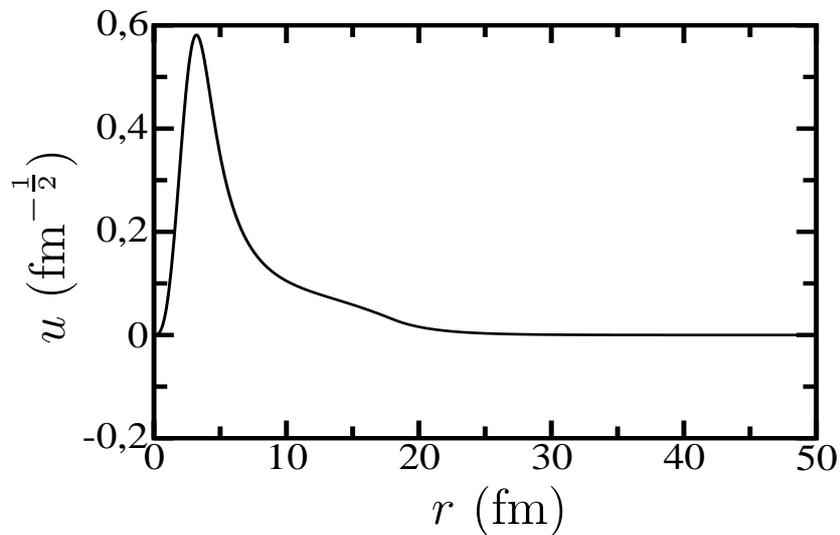


FIG. 2.4 – *EQLIC* obtenu avec la nouvelle méthode (voir texte) et correspondant à la résonance  $0d5/2$  proton présentée figure (2.3).

Le déphasage obtenu avec l'hamiltonien  $h$  en comparaison de celui obtenu avec l'hamiltonien  $\tilde{h}$  est présenté figure (2.5).

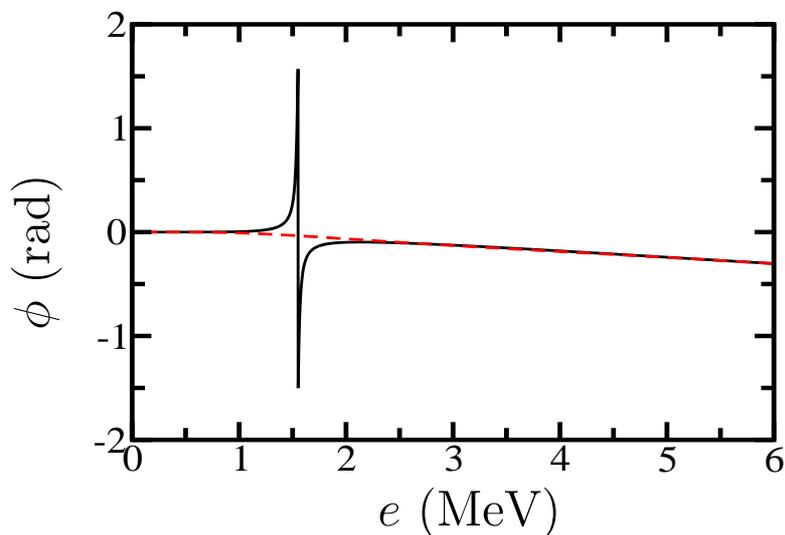


FIG. 2.5 – Déphasage du continuum résonant (trait plein), en comparaison de celui correspondant au nouvel hamiltonien (tirets) défini par l'équation (2.146).

Nous voyons clairement que la résonance est supprimée du continuum. Nous dirons alors que l'hamiltonien  $\tilde{h}$  admet un continuum *non-résonant*.

#### 2.4.1.4 Projecteurs et complétudes

Nous introduisons dans cette partie des notations exploitant la symétrie sphérique et qui nous seront fort utiles par la suite. L'espace des états individuels que nous utiliserons dans tout ce qui suit est construit à partir des états liés, des EQLIC et du continuum non-résonant définis à partir de l'hamiltonien  $\tilde{h}$  (cf. eq. (2.146)). La base individuelle regroupant états liés et EQLIC était notée  $\{|\widetilde{\alpha m_\alpha}\rangle\}$ . Dans ce qui suit, nous revenons aux anciennes notations pour simplifier les expressions. Nous noterons donc  $h$  l'hamiltonien individuel, et  $\{|\alpha m_\alpha\rangle\}$  la base des états liés, des EQLIC et du continuum non-résonant. De plus, nous ne ferons plus de distinction entre états liés et EQLIC, et utiliserons simplement les termes *états liés* pour regrouper les deux. Les états du continuum non-résonant seront, pour leur part, dénommés *états de diffusion* (ou états du continuum). La distinction, dans les équations, entre états liés et de diffusion se fera, comme auparavant, par le symbole de sommation discret  $\sum$  pour les états liés, et continu  $\int$  pour les états de diffusion. Dans le cadre de ces notations, les états individuels vérifient toujours la relation de complétude (2.129).

Comme nous l'avons vu, l'état individuel  $|\alpha m_\alpha\rangle$  peut s'écrire, en représentation coordonnées,

$$\langle \vec{r} | \alpha m_\alpha \rangle = \frac{u_\alpha(r)}{r} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}(\Omega). \quad (2.151)$$

Il devient alors commode de séparer le vecteur d'état  $|\alpha m_\alpha\rangle$  en un produit de vecteurs d'états admettant respectivement une représentation radiale et angulaire. En factorisant le ket coordonnées  $|\vec{r}\rangle = |r\rangle|\Omega\rangle$ , nous noterons donc,

$$\langle \vec{r} | \alpha m_\alpha \rangle = \langle r | u_\alpha \rangle \langle \Omega | \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha} \rangle, \quad (2.152)$$

où nous avons défini,

$$\langle r | u_\alpha \rangle = \frac{u_\alpha(r)}{r}, \quad (2.153a)$$

$$\langle \Omega | \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha} \rangle = \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}(\Omega). \quad (2.153b)$$

Rappelons maintenant quelques relations basiques. Les relations d'orthogonalité et de complétude de la base coordonnée s'écrivent,

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \langle r | r' \rangle \langle \Omega | \Omega' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{rr'} \delta(\Omega - \Omega'), \quad (2.154a)$$

$$\int dr^3 |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| = \int dr r^2 |r\rangle \langle r| \int d\Omega |\Omega\rangle \langle \Omega| = \mathbb{1}. \quad (2.154b)$$

La complétude dans l'espace angulaire incluant les degrés de liberté de spin et d'isospin peut être écrite à l'aide des fonctions (2.153b),

$$\sum_{m_s, \tau_z} \int d\Omega \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} |\Omega\rangle \langle \Omega | \chi_{m_s}^\dagger \tau_{\tau_z}^\dagger = \sum_{\bar{\alpha} m_\alpha} |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}\rangle \langle \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}|, \quad (2.155)$$

car elles y forment une base complète. De plus, ces fonctions sont orthogonales. Ainsi pouvons-nous construire la base de l'espace total,

$$\{|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}, r\rangle\}, \quad (2.156)$$

et vérifiant les relations d'orthogonalité et de complétude,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}}, r' \rangle = \frac{\delta(r - r')}{rr'} \delta_{\bar{\alpha} m_{\alpha}, \bar{\beta} m_{\beta}}, \quad (2.157a)$$

$$\sum_{\bar{\alpha} m_{\alpha}} \int dr r^2 |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, r\rangle \langle r, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}| = \mathbb{1}. \quad (2.157b)$$

Les coefficients du développement (indépendant de la projection) d'un état quelconque  $|\varphi\rangle$  dans cette base seront notés,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \varphi \rangle = \frac{1}{r} \varphi_{\bar{\alpha}}(r). \quad (2.158)$$

Nous voulons maintenant scinder l'espace des états individuels en deux espaces orthogonaux : l'espace  $q$  des états liés et l'espace  $p$  des états de diffusion. A cette fin, nous définissons les projecteurs sur ces espaces,

$$\hat{q} = \sum_{\bar{\alpha} m_{\alpha}} \sum_{n_{\alpha}} |\alpha m_{\alpha}\rangle \langle \alpha m_{\alpha}|, \quad (2.159a)$$

$$\hat{p} = \sum_{\bar{\alpha} m_{\alpha}} \int dk_{\alpha} |\alpha m_{\alpha}\rangle \langle \alpha m_{\alpha}|, \quad (2.159b)$$

satisfaisant à,

$$\hat{q} + \hat{p} = \mathbb{1}, \quad (2.160)$$

car les espace  $q$  et  $p$  sont suffisants pour décrire l'ensemble des états individuels<sup>12</sup>. Nous définissons ensuite les projecteurs  $q_{\bar{\alpha}}$  et  $p_{\bar{\alpha}}$  agissant dans les sous espaces radiaux de nombres quantiques angulaires ( $\bar{\alpha} m_{\alpha}$ ) fixés,

$$q_{\bar{\alpha}} = \langle \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \hat{q} | \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} \rangle = \sum_{n_{\alpha}} |u_{\alpha}\rangle \langle u_{\alpha}|, \quad (2.161a)$$

$$p_{\bar{\alpha}} = \langle \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \hat{p} | \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} \rangle = \int dk_{\alpha} |u_{\alpha}\rangle \langle u_{\alpha}|. \quad (2.161b)$$

Ces opérateurs sont effet indépendants de la projection  $m_{\alpha}$ . De même,  $q_{\bar{\alpha}}$  et  $p_{\bar{\alpha}}$  satisfont à,

$$q_{\bar{\alpha}} + p_{\bar{\alpha}} = \mathbb{1}_{\bar{\alpha}}. \quad (2.162)$$

Nous introduisons maintenant les représentations radiales des opérateurs (2.161),

$$\langle r | q_{\bar{\alpha}} | r' \rangle = \frac{q_{\bar{\alpha}}(r, r')}{rr'} = \sum_{n_{\alpha}} \frac{u_{\alpha}(r)}{r} \frac{u_{\alpha}(r')}{r'}, \quad (2.163a)$$

$$\langle r | p_{\bar{\alpha}} | r' \rangle = \frac{p_{\bar{\alpha}}(r, r')}{rr'} = \int dk_{\alpha} \frac{u_{\alpha}(r)}{r} \frac{u_{\alpha}(r')}{r'}. \quad (2.163b)$$

A l'aide des définitions précédentes, nous pouvons écrire les coefficients du développement, dans la base (2.156), des projections  $\hat{q}|\varphi\rangle$  et  $\hat{p}|\varphi\rangle$  d'un état  $|\varphi\rangle$ ,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \hat{q} | \varphi \rangle = \frac{1}{r} \int dr' q_{\bar{\alpha}}(r, r') \varphi_{\bar{\alpha}}(r'), \quad (2.164a)$$

$$\langle r, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \hat{p} | \varphi \rangle = \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{\alpha}}(r, r') \varphi_{\bar{\alpha}}(r'). \quad (2.164b)$$

---

<sup>12</sup>Dans le cadre de notre approximation consistant à ne prendre en compte que les états liés et de diffusion.

Forts de ces notations, nous pouvons définir la base projetée,

$$\{|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, q_{\bar{\alpha}}r\rangle, |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, p_{\bar{\alpha}}r\rangle\}, \quad (2.165)$$

par les expressions suivantes,

$$|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, q_{\bar{\alpha}}r\rangle \equiv \hat{q} |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, r\rangle = \int dr' r'^2 |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, r'\rangle \frac{q_{\bar{\alpha}}(r', r)}{r'r}, \quad (2.166a)$$

$$|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, p_{\bar{\alpha}}r\rangle \equiv \hat{p} |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, r\rangle = \int dr' r'^2 |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, r'\rangle \frac{p_{\bar{\alpha}}(r', r)}{r'r}, \quad (2.166b)$$

et satisfaisant aux relations d'orthogonalités et de complétude,

$$\langle rq_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}}, q_{\bar{\beta}}r'\rangle = \delta_{\bar{\alpha}m_{\alpha}, \bar{\beta}m_{\beta}} \frac{q_{\bar{\alpha}}(r, r')}{rr'}, \quad (2.167a)$$

$$\langle rp_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}}, p_{\bar{\beta}}r'\rangle = \delta_{\bar{\alpha}m_{\alpha}, \bar{\beta}m_{\beta}} \frac{p_{\bar{\alpha}}(r, r')}{rr'}, \quad (2.167b)$$

$$\langle rq_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}}, p_{\bar{\beta}}r'\rangle = 0, \quad (2.167c)$$

$$\sum_{\bar{\alpha}m_{\alpha}} \int dr r^2 |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, q_{\bar{\alpha}}r\rangle \langle rq_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | + \sum_{\bar{\alpha}m_{\alpha}} \int dr r^2 |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, p_{\bar{\alpha}}r\rangle \langle rp_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}} | = \mathbf{1}. \quad (2.167d)$$

Si nous notons  $|\alpha m_{\alpha}\rangle$  un état lié, alors nous pouvons écrire,

$$\langle rq_{\bar{\beta}}, \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}} | \alpha m_{\alpha}\rangle = \delta_{\bar{\beta}m_{\beta}, \bar{\alpha}m_{\alpha}} \frac{u_{\alpha}(r)}{r}, \quad (2.168a)$$

$$\langle rp_{\bar{\beta}}, \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}} | \alpha m_{\alpha}\rangle \equiv 0. \quad (2.168b)$$

De même, si nous notons  $|\delta m_{\delta}\rangle$  un état du continuum, alors,

$$\langle rq_{\bar{\beta}}, \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}} | \delta m_{\delta}\rangle \equiv 0, \quad (2.169a)$$

$$\langle rp_{\bar{\beta}}, \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}^{m_{\beta}} | \delta m_{\delta}\rangle = \delta_{\bar{\beta}m_{\beta}, \bar{\delta}m_{\delta}} \frac{u_{\delta}(r)}{r}. \quad (2.169b)$$

Enfin, nous conclurons en remarquant que,

$$\frac{p_{\bar{\alpha}}(r, r')}{r r'} = \langle r | p_{\bar{\alpha}} | r'\rangle \sim \langle r | p_{\bar{\alpha}} + q_{\bar{\alpha}} | r'\rangle = \langle r | \mathbf{1}_{\bar{\alpha}} | r'\rangle = \frac{\delta(r - r')}{r r'}, \quad (2.170)$$

lorsque  $r \rightarrow \infty$  (ou  $r' \rightarrow \infty$ ), ce qui nous permet d'écrire,

$$|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, q_{\bar{\alpha}}r\rangle \sim 0, \quad (2.171a)$$

$$|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, p_{\bar{\alpha}}r\rangle \sim |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_{\alpha}}, r\rangle, \quad (2.171b)$$

pour  $r \rightarrow \infty$ .

## 2.4.2 Etats à $N$ -corps

### 2.4.2.1 Relation de complétude dans l'espace de Fock

Dans cette partie, nous restons dans le cadre de considérations générales, et supposons toujours une base individuelle  $\{|\alpha m_\alpha\rangle\}$  générée par un potentiel à symétrie sphérique. Cette base est complète au sens de Newton ; elle est donc composée d'états liés ainsi que d'un continuum. Considérons alors un système physique constitué de  $A$  nucléons. Comme nous l'avons vu dans la partie (2.2.2), nous pouvons construire une base complètement antisymétrisée (base de Fock) à partir des états individuels sus-mentionnés. Chaque état de cette base est donc construit comme en (2.42a). A chaque ensemble de nombres quantique angulaires  $(\bar{\alpha} m_\alpha)$  correspond un ensemble de fonctions radiales  $|u_\alpha\rangle$  définie comme en (2.153a). Ces fonctions correspondent soit à des états liés, soit à des états de diffusion. Rappelons que l'indice  $\alpha$ , défini en (2.19a), représente un ensemble de nombres quantiques permettant de définir ces fonctions d'une manière univoque. Nous pouvons donc assimiler ces indices à un ensemble de nombres, une partie duquel est discrète (états liés) et l'autre continue (états de diffusion). Nous notons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des indices correspondant aux états liés et  $\mathcal{C}$  celui correspondant aux états du continuum. Dans tout ce qui suit nous ordonnerons ces indices de la manière suivante,

$$\alpha \in \mathcal{D}, \beta \in \mathcal{C} \Rightarrow \alpha < \beta. \quad (2.172)$$

Intéressons-nous maintenant plus précisément à la base de Fock. Si nous notons  $\{|d_1\rangle, |d_2\rangle, \dots\}$  un ensemble d'états individuels liés, et  $\{|c_1\rangle, |c_2\rangle, \dots\}$  un ensemble d'états individuels du continuum, alors la base de Fock doit théoriquement être engendrée à partir de tous les déterminants de Slater du type,

$$|d_1, d_2, \dots, d_A\rangle, \quad (2.173a)$$

$$|d_1, d_2, \dots, d_{A-1}, c_1\rangle, \quad (2.173b)$$

$$|d_1, d_2, \dots, d_{A-2}, c_1, c_2\rangle, \quad (2.173c)$$

$$\vdots$$

$$|c_1, c_2, \dots, c_A\rangle, \quad (2.173d)$$

soit : tous les états où les  $A$  particules occupent des états liés, tous les états où  $A-1$  particules occupent des états liés et une particule peuple les états du continuum, etc... Comme nous allons le voir, les états de Fock comportant au moins une particule dans un état de diffusion nous permettent de faire un lien avec l'espace des canaux physiques dans la région asymptotique, car les états de diffusion, à la différence des états liés, admettent une forme asymptotique non nulle. Si l'on s'intéresse à un noyau faiblement lié dont le premier seuil correspond à l'émission d'une particule, on peut alors raisonnablement supposer que les états de Fock du type (2.173b) seront suffisants pour décrire convenablement l'espace des canaux dans la région asymptotique. Puisque nous nous intéressons à des domaines d'énergie voisines d'un tel seuil, nous nous limiterons dans ce chapitre aux états du type (2.173a) et (2.173b). Nous supposons donc, dans une première approximation, que l'ensemble des états accessibles au système est décrit par les états de Fock avec au plus une particule dans un état de diffusion. Si nous notons  $\{|\alpha_i m_i\rangle\}$  un ensemble d'états individuels liés, et  $|\alpha m_\alpha\rangle$  un état individuel qui peut être lié ou de diffusion, alors nous pouvons construire un état de la base de Fock à  $A$  particules de la manière suivante,

$$|\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2, \dots, \alpha_{A-1} m_{A-1}, \alpha m_\alpha\rangle = \mathcal{A}\left(|\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2, \dots, \alpha_{A-1} m_{A-1}\rangle \otimes |\alpha m_\alpha\rangle\right), \quad (2.174)$$

où  $\mathcal{A}$  est un antisymétriseur. En toute rigueur, nous devrions indiquer, dans le membre de droite de l'équation (2.174), les indices des particules que décrivent chaque ket. Nous oublierons ce détail pour simplifier les expressions et considérerons, par exemple, que le ket  $|\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2, \dots, \alpha_{A-1} m_{A-1}\rangle$  est constitué d'une combinaison linéaire antisymétrique de produits tensoriels des états individuels des particules  $(1, 2, \dots, A-1)$ , et que le ket  $|\alpha m_\alpha\rangle$  représente l'état de la particule  $A$ . Cette indexation est arbitraire, mais nécessaire. Cependant, dans le cas présent il n'est pas difficile de se souvenir de cette convention sans pour autant l'écrire explicitement.

L'ensemble des déterminants de Slater  $\{|\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2, \dots, \alpha_{A-1} m_{A-1}\rangle\}$  obtenus en distribuant de toutes les façons possibles  $A-1$  particules sur l'ensemble des états liés forment une base complète et orthogonale de l'espace de Fock à  $A-1$  particules liées. Aussi, tout ensemble d'états obtenus à partir de ces derniers par une transformation orthogonale peut également constituer une base complète et orthogonale du même espace. Il devient alors commode de diviser cette base en états de moment de spin bien défini. Nous noterons donc  $\{|\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}\rangle\}$  une telle base, où  $|\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}\rangle$  est un état normalisé composé d'une combinaison linéaire complètement antisymétrique de  $A-1$  états individuels liés et couplant au moment de spin  $j_\tau$  (et de projection  $m_\tau$ ). Nous pouvons maintenant définir un état antisymétrique à  $A$  particules de la manière suivante,

$$|\mathbb{T}^{j_\tau, m_\tau}, \alpha m_\alpha\rangle = \mathcal{A}\left(|\mathbb{T}^{j_\tau, m_\tau}\rangle \otimes |\alpha m_\alpha\rangle\right). \quad (2.175)$$

En utilisant la complétude de la base  $\{|\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}\rangle\}$  dans l'espace de Fock à  $A-1$  particules liées, et en se servant de la relation de complétude (2.160) dans l'espace des états de la particule  $A$ , nous pouvons écrire la relation de complétude au sein de l'espace total,

$$\sum_{\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}} \mathcal{A}\left[|\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}\rangle \langle \mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}| \otimes \left(\sum_{\bar{\alpha} m_\alpha} \sum_{n_\alpha} |\alpha m_\alpha\rangle \langle \alpha m_\alpha| + \sum_{\bar{\alpha} m_\alpha} \int dk_\alpha |\alpha m_\alpha\rangle \langle \alpha m_\alpha|\right)\right] \mathcal{A}^\dagger = \mathbb{1} \quad (2.176)$$

Nous écrivons le deuxième terme dans les grandes parenthèses de l'équation (2.176) au moyen de la base projetée définie en (2.166b),

$$\sum_{\bar{\alpha} m_\alpha} \int dk_\alpha |\alpha m_\alpha\rangle \langle \alpha m_\alpha| = \sum_{\bar{\alpha} m_\alpha} \int dr r^2 |\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}, p_{\bar{\alpha}} r\rangle \langle r p_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}|, \quad (2.177)$$

menant à,

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}} \sum_{\alpha m_\alpha} |\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}, \alpha m_\alpha\rangle \langle \mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}, \alpha m_\alpha| + \\ & \sum_{\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}} \sum_{\bar{\alpha} m_\alpha} \int dr r^2 |\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha} p_{\bar{\alpha}} r\rangle \langle \mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}, r p_{\bar{\alpha}} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha}| = \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Enfin, en introduisant les formes couplées suivantes,

$$|\mathbb{T}^{j_\tau}, \alpha\rangle^{J,M} = \sum_{m_\tau, m_\alpha} \langle j_\tau j_\alpha, m_\tau m_\alpha | JM \rangle |\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}, \alpha m_\alpha\rangle, \quad (2.179a)$$

$$|\mathbb{T}^{j_\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r\rangle^{J,M} = \sum_{m_\tau, m_\alpha} \langle j_\tau j_\alpha, m_\tau m_\alpha | JM \rangle |\mathbb{T}^{j_\tau m_\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{m_\alpha} p_{\bar{\alpha}} r\rangle, \quad (2.179b)$$

nous pouvons écrire,

$$\sum_{\mathbb{T}^{j_\tau}, \bar{\alpha}, n_\alpha} \sum_{J,M} |\mathbb{T}^{j_\tau}, \alpha\rangle^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j_\tau}, \alpha| + \sum_{\mathbb{T}^{j_\tau}, \bar{\alpha}} \sum_{J,M} \int dr r^2 |\mathbb{T}^{j_\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r\rangle^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j_\tau}, r p_{\bar{\alpha}} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}| = \mathbb{1}. \quad (2.180)$$

### 2.4.2.2 Espace des états liés

Dans (2.180), le premier terme du membre de gauche agit dans l'espace de Fock engendré par les déterminants de Slater du type (2.173a), c'est à dire dans l'espace où toutes les particules occupent des états liés. Les états  $\{|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \alpha\rangle^{J,M}\}$  forment une base complète et orthogonale de cet espace. Ainsi, tout ensemble d'états obtenus à partir de ces derniers par une transformation orthogonale constitue également une base orthogonale et complète de cet espace. Par la suite, nous noterons  $\mathcal{Q}$  l'espace engendré par de tels états et  $Q$  le projecteur sur cet espace. En notant  $\{|\Phi\rangle^{J,M}\}$  une base de l'espace  $\mathcal{Q}$ , où  $\Phi$  désigne tous autres nombres quantiques que le spin total et sa projection, nous avons donc,

$${}^{J,M}\langle\Phi|\Phi'\rangle^{J,M} = \delta_{\Phi,\Phi'}, \quad (2.181a)$$

$$\sum_{\Phi^{J,M}} |\Phi\rangle^{J,M}\langle\Phi| = Q. \quad (2.181b)$$

### 2.4.2.3 Espace des états avec une particule dans un état de diffusion

Dans (2.180), le deuxième terme du membre de gauche agit dans l'espace de Fock engendré par les déterminants de Slater du type (2.173b), c'est à dire dans l'espace où  $A-1$  particules occupent des états liés et une particule occupe un état de diffusion. Par la suite, nous noterons  $\mathcal{P}$  l'espace engendré par les états du type (2.173b) et  $P$  le projecteur sur cet espace. Nous choisissons  $\{|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r\rangle^{J,M}\}$  comme base de l'espace  $\mathcal{P}$ . Nous pouvons alors montrer que ces états vérifient,

$${}^{J,M}\langle\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{\alpha}} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} | t'^{j_{\mathbb{T}}}, \mathcal{Y}_{\bar{\beta}} p_{\bar{\beta}} r'\rangle^{J,M} = \delta_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}'^{j_{\mathbb{T}}}} \delta_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \frac{p_{\bar{\alpha}}(r r')}{r r'}, \quad (2.182a)$$

$$\sum_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \bar{\alpha}, J, M} \int dr r^2 |\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r\rangle^{J,M} \langle\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{\alpha}} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}| = P. \quad (2.182b)$$

### 2.4.2.4 Espaces modèles

Dans le cadre de notre approximation, les espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  sont suffisants pour décrire l'ensemble des états accessibles au système. De plus, ces espaces sont orthogonaux par construction. Nous pouvons donc écrire,

$$Q + P = \mathbf{1}, \quad (2.183a)$$

$$PQ = 0. \quad (2.183b)$$

Comme nous allons le voir dans la section suivante, les espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  ne sont pas appropriés pour la description des canaux physiques. Ces espaces nous permettent simplement de décomposer un état du système total en deux parties orthogonales, l'une des deux admettant une asymptotique non nulle. Ces espaces sont communément appelés *espaces modèles*.

### 2.4.3 Formalisme de Feshbach

Le formalisme développé par Feshbach [17] nous permet de remplacer l'équation de Schrödinger totale par des équations vérifiées par la fonction d'onde projetée sur certains espaces modèles. Ces espaces modèles sont, dans notre cas, les espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  introduits dans la section précédente. Le problème principal dans ce genre d'approche est de faire le lien entre les espaces modèles et les espaces des canaux physiques afin d'obtenir des équations avec de correctes conditions asymptotiques. Dans cette partie, nous commencerons par faire le lien entre les espaces modèles et les espaces des canaux physiques en expliquant les approximations faites dans le cadre du présent exposé, puis nous décomposerons la résolvante de l'hamiltonien du système en plusieurs parties agissant chacune dans l'un des espaces modèles.

#### 2.4.3.1 Lien entre les espaces modèles et les canaux physiques

Dans un problème de physique nucléaire où le nombre de particules est trop grand pour que l'on puisse traiter le problème entier dans un système de coordonnées exclusivement intrinsèque, les nucléons sont généralement repérés par leur position  $\vec{r}_i$  par rapport à une origine arbitraire fixe  $O$ . Les moments conjugués des ces variables sont notés  $\vec{p}_i$ . Dans ce système de coordonnées, l'hamiltonien total du système de  $A$  nucléons s'écrit,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V(ij). \quad (2.184)$$

Cet hamiltonien décrit un système à  $3A$  degrés de liberté (sans compter les degrés de liberté de spin et d'isospin), incluant donc ceux du centre de masse. En définissant le moment total,

$$\vec{P}_{cm} = \sum_{i=1}^A \vec{p}_i, \quad (2.185)$$

qui est la variable conjuguée de la position du centre de masse, définie par,

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i, \quad (2.186)$$

nous pouvons écrire (2.184) sous la forme suivante,

$$\mathcal{H} = \frac{P_{cm}^2}{2Am} + H, \quad (2.187)$$

où  $H$  est l'hamiltonien intrinsèque du système de  $A$  nucléons, invariant par translation<sup>13</sup>. Dans tout calcul de physique nucléaire,  $H$  est le seul hamiltonien dont les vecteurs et valeurs propres sont d'un intérêt, car décrivant un système quantique intrinsèque, et non son mouvement global relativement à un hypothétique laboratoire. Comme nous l'avons vu, l'hamiltonien total peut se scinder en un hamiltonien à un corps (construit à partir du champ moyen), et un hamiltonien à deux corps (correspondant à l'interaction résiduelle). Le fait de fixer l'origine du champ moyen brise l'invariance par translation de l'hamiltonien,

<sup>13</sup>Nous supposons ici, et dans tout ce qui suit, que l'interaction à deux corps  $V(ij)$  admet une dépendance en  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  et  $|\vec{p}_i - \vec{p}_j|$ .

et le centre de masse peut admettre des états d'excitation non-physiques (ou *spurioux*) se mélangeant aux états d'excitation intrinsèques. En modèle en couches, l'hamiltonien (non-physique) du centre de masse est connu analytiquement, ce qui permet de supprimer ces états spurioux facilement. Comme nous l'avons vu, il existe aussi des techniques en calcul Hartree-Fock visant à supprimer ces états. Bien que construits à partir de  $A$  états individuels, les états de la base de Fock obtenus après suppression des états du centre de masse n'en décrivent pas moins les états intrinsèques du système.

Il existe nombre de systèmes de coordonnées, tels que les coordonnées de Jacobi (dont nous ferons usage dans le chapitre suivant), permettant de mener à bien des calculs dans le référentiel du centre de masse. Afin d'illustrer notre problème, nous choisissons ici un ensemble de coordonnées relatives, peu approprié pour un calcul pratique, mais plus « parlant » dans un contexte de champ moyen. Nous définissons ces coordonnées de la manière suivante,

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}, \quad i = 1, 2, \dots, A. \quad (2.188)$$

Ces coordonnées décrivent donc un système à  $3A - 3$  degrés de liberté. On peut en effet construire  $A - 1$  combinaisons linéaires indépendantes à partir des  $A$  vecteurs  $\vec{r}'_i$  (leur somme étant nulle). Considérons alors un état à  $A$  corps  $|\Psi\rangle$ , propre de  $\mathcal{H}$ . Selon (2.187), cet état peut se factoriser comme suit,

$$|\Psi\rangle = |\Psi^{cm}\rangle|\psi\rangle, \quad (2.189)$$

où  $|\Psi^{cm}\rangle$  est l'état du centre de masse, et  $|\psi\rangle$  est l'état intrinsèque du système. La figure (2.6) illustre la séparation entre coordonnées relatives et position du centre de masse pour un système composé de quatre particules.

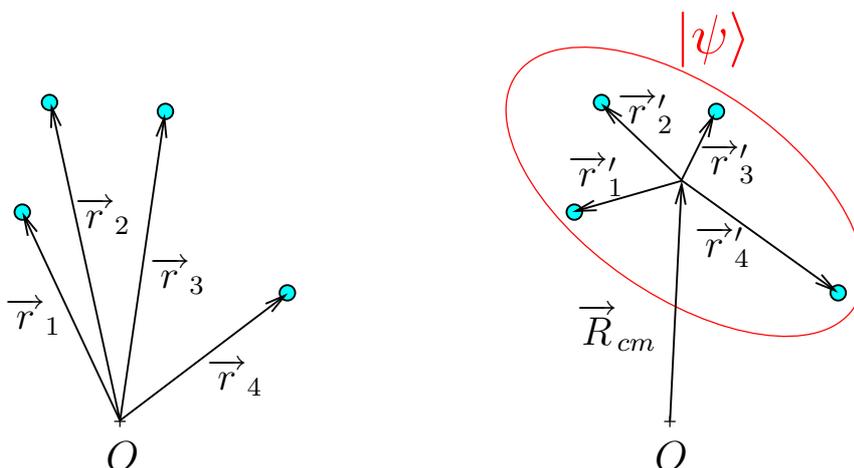


FIG. 2.6 – *A gauche* : les vecteurs position  $\vec{r}_i$  sont définis par rapport à une origine arbitraire  $O$ . *A droite* : l'état intrinsèque  $|\psi\rangle$  est exprimé dans le système de coordonnées relatives (2.188).

Puisque  $\vec{R}_{cm}$  est symétrique par toute permutation, l'antisymétrie de la fonction d'onde totale est contenue dans la partie intrinsèque. Nous supposons alors que l'état intrinsèque  $|\psi\rangle$  est décomposé en une combinaison linéaire de déterminants de Slater à  $A$  états individuels calculés à partir d'un champ moyen dont l'origine est fixée. Cependant, après suppression

des états non-physiques du centre de masse, nous supposons que cette origine coïncide avec la position du centre de masse du système. Dans le cadre de cette approximation, les fonctions d'onde individuelles sont supposées admettre la représentation (2.151) dans le système de coordonnées (2.188). Supposons maintenant que la particule  $A$  se trouve très éloignée des  $A-1$  autres particules que l'on suppose confinées dans une région très localisée. En utilisant une terminologie propre à la théorie des partitions, nous dirons que le système est composé de deux fragments : le fragment constitué des particules  $(1, 2, \dots, A-1)$ , et le fragment constitué de la particule  $A$ . Nous pouvons alors raisonnablement penser que la particule  $A$  contribue peu (ou pas) au champ moyen ressenti par les autres particules. L'origine de ce champ moyen est alors déplacée dans une région voisine au centre de masse du fragment  $(1, 2, \dots, A-1)$ . La position du centre de masse  $\vec{R}_T$  du fragment  $(1, 2, \dots, A-1)$  et son moment conjugué  $\vec{P}_T$  sont respectivement définis par,

$$\vec{R}_T = \frac{1}{A-1} \sum_{i=1}^{A-1} \vec{r}_i, \quad (2.190a)$$

$$\vec{P}_T = \sum_{i=1}^{A-1} \vec{p}_i. \quad (2.190b)$$

De même qu'en (2.188) nous pouvons définir les coordonnées intrinsèques au fragment  $(1, 2, \dots, A-1)$ ,

$$\vec{x}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_T, \quad i = 1, 2, \dots, A-1. \quad (2.191)$$

Supposons alors que la distance entre les deux fragments est assez grande pour que l'on puisse négliger (outre l'interaction Coulombienne) toute interaction entre la particule  $A$  et le reste du système. Dans ce cas l'hamiltonien total, que l'on qualifie d'*asymptotique* et que l'on note  $\mathcal{H}_0$ , peut se diviser de la manière suivante,

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_T + \frac{p_A^2}{2m}, \quad (2.192)$$

où  $\mathcal{H}_T$  est l'hamiltonien du système à  $3A-3$  degrés de liberté composé des particules  $(1, 2, \dots, A-1)$ . De même qu'en (2.187), nous pouvons écrire,

$$\mathcal{H}_T = \frac{P_T^2}{2(A-1)m} + H_T, \quad (2.193)$$

où  $H_T$  est l'hamiltonien intrinsèque du fragment  $(1, 2, \dots, A-1)$ . Nous pouvons alors construire des états à  $A-1$  corps  $|T\rangle$  propres de  $\mathcal{H}_T$  et pouvant se factoriser de la manière suivante,

$$|T\rangle = |T^{cm}\rangle |T^{j_T, m_T}\rangle, \quad (2.194)$$

où  $|T^{cm}\rangle$  est l'état du centre de masse du fragment  $(1, 2, \dots, A-1)$ , et où la partie intrinsèque satisfait à,

$$(E_T - H_T) |T^{j_T, m_T}\rangle = 0. \quad (2.195)$$

La figure (2.7) illustre le nouveau système de coordonnées approprié pour une représentation dite *asymptotique*.

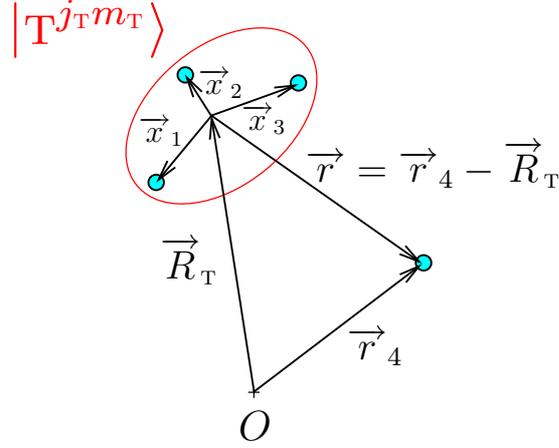


FIG. 2.7 – La particule 4 n'interagissant pas avec le reste du système, l'état intrinsèque  $|\mathbf{T}^{j_T, m_T}\rangle$  du fragment (1, 2, 3) est exprimé dans le système de coordonnées (2.191).

Si nous notons  $\vec{r}$  la coordonnée relative séparant la particule  $A$  du centre de masse des  $A - 1$  autres particules, et  $\vec{q}$  le moment conjugué de cette variable, alors l'hamiltonien (2.192) peut s'écrire de manière à faire apparaître le mouvement du centre de masse total,

$$\mathcal{H}_0 = \frac{P_{cm}^2}{2Am} + H_T + \frac{q^2}{2\mu}, \quad (2.196)$$

où,

$$\mu = m \frac{A-1}{A}, \quad (2.197)$$

est la masse réduite entre la particule  $A$  et le fragment (1, 2, ...,  $A - 1$ ). Après suppression de l'hamiltonien du centre de masse, nous obtenons l'hamiltonien asymptotique intrinsèque,

$$H_0 = H_T + \frac{q^2}{2\mu}. \quad (2.198)$$

Résumons alors la situation ainsi : l'hamiltonien intrinsèque du système composé des particules (1, 2, ...,  $A$ ) est noté  $H$ . Un état intrinsèque  $|\psi\rangle$  de ce système vérifie,

$$(E - H)|\psi\rangle = 0, \quad (2.199)$$

et est décomposé dans une base de Fock à  $A$  particules de la manière suivante,

$$|\psi\rangle = \sum_i A_i |a_1^i, a_2^i, \dots, a_A^i\rangle, \quad (2.200)$$

où  $|a_1^i\rangle, |a_2^i\rangle, \dots, |a_A^i\rangle$  sont des états individuels obtenus à partir d'un champ moyen engendré par les  $A$  particules et dont l'origine coïncide avec la position du centre de masse du système. L'hamiltonien asymptotique intrinsèque du système composé des fragments (1, 2, ...,  $A - 1$ ) et ( $A$ ) est  $H_0 = H_T + q^2/2\mu$ . Les états propres correspondants sont alors  $|\mathbf{T}^{j_T, m_T} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle$  où  $|\vec{q}\rangle$  est une onde plane de moment  $\vec{q}$ , et  $\chi_{m_s}$  et  $\tau_{\tau_z}$  sont le spineur et l'isospineur de la particule  $A$  respectivement. Ces états vérifient,

$$(E_T + \varepsilon_q - H_0)|\mathbf{T}^{j_T, m_T} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle = 0, \quad (2.201)$$

où  $\varepsilon_q = q^2/2\mu$ , et où l'état intrinsèque  $|\mathbb{T}^{j_{\text{tr}} m_{\text{tr}}}\rangle$  est décomposé dans une base de Fock à  $A - 1$  particules de la manière suivante,

$$|\mathbb{T}^{j_{\text{tr}} m_{\text{tr}}}\rangle = \sum_j B_j |b_1^j, b_2^j, \dots, b_{A-1}^j\rangle, \quad (2.202)$$

où  $|b_1^j\rangle, |b_2^j\rangle, \dots, |b_{A-1}^j\rangle$  sont des états individuels obtenus à partir du champ moyen généré par les particules  $(1, 2, \dots, A - 1)$  et dont l'origine coïncide avec la position du centre masse du fragment correspondant. Les états  $\{|\mathbb{T}^{j_{\text{tr}} m_{\text{tr}}}\rangle \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\}$  forment alors une base de l'espace des canaux physiques de partition de masse constituée des fragments  $(1, 2, \dots, A - 1)$  et  $(A)$ . Nous pouvons donc, comme dans la section (2.3.3), définir le projecteur  $\tilde{P}$  sur cet espace de la manière suivante,

$$\tilde{P} = \sum_c \sum_{J,M} \int dr r^2 |\mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle \otimes \mathcal{Y}_{\bar{c}r} \rangle^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle \otimes r \mathcal{Y}_{\bar{c}}|, \quad (2.203)$$

où nous utilisons les notations introduites dans l'exemple de la section (2.3.7). Revenons alors aux espaces modèles introduits dans la section (2.4.2) et décomposons la solution  $|\psi\rangle$  de (2.199) au moyen de la relation (2.183a),

$$|\psi\rangle = Q|\psi\rangle + P|\psi\rangle. \quad (2.204)$$

Les composantes du vecteur d'état  $|\psi\rangle$  dans la base des canaux peuvent alors s'écrire,

$${}^{J,M} \langle t^{j_j} \otimes r, \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \psi \rangle = {}^{J,M} \langle t^{j_j} \otimes r, \mathcal{Y}_{\bar{c}} | Q | \psi \rangle + {}^{J,M} \langle t^{j_j} \otimes r, \mathcal{Y}_{\bar{c}} | P | \psi \rangle. \quad (2.205)$$

L'opérateur  $Q$  projetant sur l'espace des états à  $A$  corps liés (partition de masse constitué d'un seul fragment), nous pouvons écrire,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} {}^{J,M} \langle t^{j_j} \otimes r, \mathcal{Y}_{\bar{c}} | Q | \psi \rangle = 0, \quad (2.206)$$

car l'état  $Q|\psi\rangle$  doit être confiné à une région localisée de l'espace. Ceci nous permet d'écrire, de façon symbolique, la forme asymptotique de la solution totale projetée sur l'espace des canaux physiques,

$$\tilde{P}|\psi\rangle = \tilde{P}(Q + P)|\psi\rangle \sim \tilde{P}P|\psi\rangle. \quad (2.207)$$

Nous avons vu dans la section (2.4.2) qu'une base de l'espace  $\mathcal{P}$  peut s'écrire,

$$\{|\mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle, \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r'\rangle^{J,M}\}, \quad (2.208)$$

où nous avons primé l'état de Fock à  $A - 1$  particules liées  $|\mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle$  afin de le différencier des états intrinsèques du fragment  $(1, 2, \dots, A - 1)$  défini précédemment. Tous les états individuels constituant l'état  $|\mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle$  ainsi que les projecteurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  sont obtenus à partir du champ moyen généré par l'ensemble des  $A$  particules. De plus, la coordonnée radiale  $r'$  est évaluée dans le système de coordonnées (2.188). Le calcul du produit d'opérateurs  $\tilde{P}P$  nécessite celui de recouvrements du type,

$${}^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle \otimes r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{A} | \mathbb{T}^{j_{\text{tr}}}\rangle \otimes \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r'\rangle^{J,M}, \quad (2.209)$$

symbolisé sur la figure (2.8), où  $\mathcal{A}$  est l'antisymétriseur agissant sur le produit tensoriel d'états situé à sa droite.

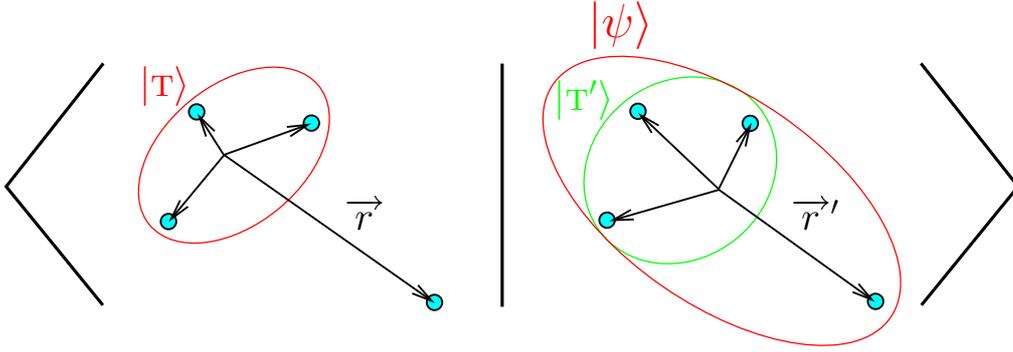


FIG. 2.8 – Représentation schématique du recouvrement (2.209).

Le problème est alors que l'état intrinsèque  $|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}m_{\mathbb{T}}}\rangle$  n'est pas évalué dans le même système de coordonnées que le « sous-état »  $|\mathbb{T}'^{j_{\mathbb{T}}m_{\mathbb{T}}}\rangle$ . Remarquons toutefois que la variable  $\vec{r}'$  est colinéaire à  $\vec{r}$ . En effet, nous avons,

$$\vec{r} = \frac{A}{A-1} \vec{r}', \quad (2.210)$$

ces variables admettant donc la même dépendance angulaire. Voici donc les approximations que nous ferons dans le présent exposé :

- nous supposons que, dans la région asymptotique, le sous état à  $A-1$  particules liées issu du champ moyen généré par l'ensemble des  $A$  particules correspond à l'état intrinsèque du fragment  $(1, 2, \dots, A-1)$ ,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}m_{\mathbb{T}}} | \mathbb{T}'^{j_{\mathbb{T}}m_{\mathbb{T}}} \rangle = \delta_{\mathbb{T}, \mathbb{T}'}, \quad (2.211)$$

- nous prenons en compte le recul de la cible par le changement d'échelle radiale (2.210).

Revenons alors au recouvrement (2.209). Dans cette expression, l'antisymétriseur, peut s'écrire [3],

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{i=1}^{A-1} \Pi_{iA} \hat{P}_{iA}, \quad (2.212)$$

où  $\hat{P}_{iA}$  est un opérateur qui permute les particules  $i$  et  $A$ , et  $\Pi_{iA}$  est la phase correspondante. Ainsi pouvons-nous écrire le recouvrement (2.209) sous la forme suivante,

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{i=1}^{A-1} \int \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}(1, \dots, A-1) \otimes r \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}(A) | \Pi_{iA} \hat{P}_{iA} | \mathbb{T}'^{j_{\mathbb{T}}}(1, \dots, A-1) \otimes \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r'(A) \rangle^{J,M}, \quad (2.213)$$

où nous avons fait apparaître explicitement l'indexation des particules. Puisque, dans notre approximation, l'état individuel  $|\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} r'\rangle$  est orthogonal à tous les états individuels constituant l'état  $|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}m_{\mathbb{T}}}\rangle$  (car issus du même champ moyen), seule la permutation correspondant à l'identité donne une contribution non nulle. Le recouvrement (2.213) se simplifie donc en,

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \delta_{\mathbb{T}, \mathbb{T}'} \delta_{\bar{\alpha}, \bar{\alpha}'} \frac{p_{\bar{\alpha}}(r, r')}{r r'}. \quad (2.214)$$

En utilisant les résultats précédents ainsi que l'idempotence du projecteur  $p_{\bar{a}}$ , nous démontrons facilement que le produit d'opérateurs  $\tilde{P}P$  s'écrit,

$$\tilde{P}P = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_c \sum_{J,M} \int dr r^2 |\mathbb{T}^{j\tau} \otimes \mathcal{Y}_{\bar{c}r}\rangle^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}|. \quad (2.215)$$

Enfin, en utilisant l'expression conjuguée de (2.215), puis en utilisant la relation (2.171b), nous pouvons écrire,

$$\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | P \tilde{P} \sim \frac{1}{\sqrt{A}} \langle \mathbb{T}^{j\tau} \otimes r \mathcal{Y}_{\bar{c}} |, \quad (2.216)$$

pour  $r \rightarrow \infty$ .

### 2.4.3.2 Projecteurs et résolvante

Comme nous l'avons vu dans la section (2.3), l'objet mathématique d'intérêt central dans la formulation de la théorie des collisions est la résolvante  $G$ . La technique de projection de Feschbach nous permet d'introduire des résolvantes (ou propagateurs) partielles agissant dans chacun des espaces modèles et d'exprimer la résolvante totale en fonction de celles-ci.

Comme nous l'avons supposé, les espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  sont suffisants pour décrire l'ensemble des états accessibles au système, les projecteurs sur ces espaces vérifiant donc la relation (2.183a). Ainsi pouvons nous décomposer l'hamiltonien intrinsèque  $H$  de la manière suivante,

$$H = (Q + P)H(Q + P) = H_{QQ} + H_{QP} + H_{PQ} + H_{PP}, \quad (2.217)$$

où nous avons défini  $H_{QQ} = QHQ$  etc ... En utilisant l'identité opératorielle,

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A}, \quad (2.218)$$

nous pouvons écrire la résolvante totale,

$$G = \frac{1}{E - H} = \frac{1}{E - H_{PP}} + \frac{1}{E - H_{PP}}(H_{QQ} + H_{QP} + H_{PQ})G. \quad (2.219)$$

En définissant la résolvante projetée,

$$G_P = P \frac{1}{E - H_{PP}} P, \quad (2.220)$$

il vient,

$$PG = G_P + G_P H_{PQ} G, \quad (2.221)$$

où nous avons utilisé la relation d'orthogonalité (2.183b). En utilisant la même procédure, on montre que,

$$QG = G_Q + G_Q H_{QP} (PG) \quad (2.222a)$$

$$= G_Q + G_Q H_{QP} G_P + G_Q H_{QP} G_P H_{PQ} (QG), \quad (2.222b)$$

où la résolvante  $G_Q$  est définie par,

$$G_Q = Q \frac{1}{E - H_{QQ}} Q. \quad (2.223)$$

Nous factorisons ensuite (2.222b) de la manière suivante,

$$(Q - G_Q H_{QP} G_P H_{PQ})(QG) = G_Q + G_Q H_{QP} G_P. \quad (2.224)$$

En multipliant (2.224) à gauche par  $(G_Q)^{-1} = Q(E - H_{QQ})Q$ , il vient,

$$(E - H_{QQ} - H_{QP} G_P H_{PQ})(QG) = Q + H_{QP} G_P. \quad (2.225)$$

En définissant l'opérateur suivant,

$$H_{QQ}^{eff} = H_{QQ} + H_{QP} G_P H_{PQ}, \quad (2.226)$$

et la résolvante associée,

$$G_Q^{eff} = Q \frac{1}{E - H_{QQ}^{eff}} Q, \quad (2.227)$$

nous obtenons,

$$QG = G_Q^{eff} (Q + H_{QP} G_P), \quad (2.228a)$$

$$PG = G_P + G_P H_{PQ} G_Q^{eff} (Q + H_{QP} G_P). \quad (2.228b)$$

Enfin, la résolvante totale peut s'écrire,

$$G = QG + PG = G_P + (Q + G_P H_{PQ}) G_Q^{eff} (Q + H_{QP} G_P). \quad (2.229)$$

Notons ici que pour l'obtention de (2.229), nous avons choisi un « chemin » particulier. Nous verrons par la suite que le nombre de façon de décomposer la résolvante totale pour  $N$  espaces modèles s'élève à  $N!$ . Dans le cas présent, il n'est pas difficile de montrer que la deuxième façon de décomposer  $G$  est,

$$G = G_Q + (P + G_Q H_{QP}) G_P^{eff} (P + H_{PQ} G_Q), \quad (2.230)$$

où,

$$G_P^{eff} = P \frac{1}{E - H_{PP}^{eff}} P, \quad (2.231a)$$

$$H_{PP}^{eff} = H_{PP} + H_{PQ} G_Q H_{QP}. \quad (2.231b)$$

Cependant, dans ce chapitre nous utiliserons la forme (2.229), qui se prête mieux à un calcul de diffusion d'une particule sur une cible.

L'opérateur  $H_{QQ}^{eff}$  défini en (2.226) n'est autre que l'hamiltonien effectif agissant dans l'espace  $\mathcal{Q}$  en prenant en compte les couplages à l'espace  $\mathcal{P}$ . Ce caractère effectif se comprend mieux en écrivant,

$$QGQ = Q \frac{1}{E - H_{QQ}^{eff}} Q. \quad (2.232)$$

## 2.4.4 Les équations générales du modèle en couches avec couplage d'une particule aux états du continuum

### 2.4.4.1 Forme générale des solutions de diffusion

Dans cette partie, nous cherchons la forme générale des solutions de diffusion  $|\psi\rangle$  de l'équation,

$$(E - H)|\psi\rangle = 0, \quad (2.233)$$

où  $H$  est l'hamiltonien intrinsèque du système de  $A$  particules. Nous avons défini, dans la section précédente, les états asymptotiques physiques  $|\mathbf{T}^{j\tau m\tau} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle$ , solutions de l'équation,

$$(E - H_0)|\mathbf{T}^{j\tau m\tau} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle = 0, \quad (2.234)$$

où  $H_0$  est l'hamiltonien « libre » correspondant au canal d'arrangement où le système est scindé en deux fragments (l'un des deux consistant simplement en une particule). Le projecteur sur l'espace de ces canaux était noté  $\tilde{P}$ . En utilisant les résultats de la section (2.3), nous pouvons écrire la solution  $|\psi\rangle^+$  de (2.233) en fonction des solutions asymptotiques dans le passé infini de la manière suivante,

$$|\psi\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^+ |\mathbf{T}^{j\tau m\tau} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle \quad (2.235a)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^+ \tilde{P} |\mathbf{T}^{j\tau m\tau} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle, \quad (2.235b)$$

où, dans (2.235b), nous avons utilisé le fait que l'état  $|\mathbf{T}^{j\tau m\tau} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle$  appartient à l'espace des canaux physiques considérés. En utilisant la décomposition (2.229) de la résolvante totale, nous pouvons alors écrire,

$$|\psi\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \left[ G_P^+ + (Q + G_P^+ H_{PQ}) G_Q^{eff+} (Q + H_{QP} G_P^+) \right] \tilde{P} |\mathbf{T}^{j\tau m\tau} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle. \quad (2.236)$$

Intéressons-nous alors à l'hamiltonien effectif  $H_{QQ}^{eff}$  défini en (2.226). Nous notons<sup>14</sup>  $\{|\Phi_i\rangle\}$  une base complète orthogonale de l'espace  $\mathcal{Q}$  (où l'indice  $i$  différencie les états). Nous supposons que les états constituant cette base sont états propres de l'hamiltonien projeté  $H_{QQ}$ , satisfaisant donc à,

$$(E_i - H_{QQ})|\Phi_i\rangle = 0. \quad (2.237)$$

Les éléments de matrice de l'hamiltonien effectif dans cette base sont alors,

$$\langle \Phi_i | H_{QQ}^{eff} | \Phi_j \rangle = \langle \Phi_i | H_{QQ} + H_{QP} G_P^+ H_{PQ} | \Phi_j \rangle = E_i \delta_{ij} + \langle w_i | \omega_j \rangle, \quad (2.238)$$

où nous avons défini,

$$|w_i\rangle = H_{PQ} |\Phi_i\rangle, \quad (2.239a)$$

$$|\omega_j\rangle = G_P^+ H_{PQ} |\Phi_j\rangle. \quad (2.239b)$$

La diagonalisation de l'hamiltonien effectif dans la base  $\{|\Phi_i\rangle\}$  nous fournit les états propres  $\{|\tilde{\Phi}_i\rangle\}$  satisfaisant à,

$$(\tilde{E}_i - H_{QQ}^{eff})|\tilde{\Phi}_i\rangle = 0. \quad (2.240)$$

<sup>14</sup>Nous oublions ici le schéma de couplage introduit en (2.181) afin de simplifier les équations.

Nous notons  $\mathcal{O}$  la matrice de changement de base  $\{|\Phi_i\rangle\} \rightarrow \{|\tilde{\Phi}_i\rangle\}$  ou, plus précisément,

$$|\tilde{\Phi}_i\rangle = \sum_j \mathcal{O}_{ij} |\Phi_j\rangle. \quad (2.241)$$

L'hamiltonien effectif dépend de l'énergie totale  $E$  par l'intermédiaire de la résolvante  $G_P^+$ . Il en va donc de même des ses vecteurs et valeurs propres. La résolvante  $G_P^+$  peut s'écrire,

$$G_P^+ = P \frac{1}{E - H_{PP}} P = \mathcal{P}_V \left( \frac{1}{E - H_{PP}} \right) P - 2i\pi\delta(E - H_{PP}) P, \quad (2.242)$$

où  $\mathcal{P}_V$  désigne la partie principale. Nous voyons donc que, pour une énergie  $E$  située dans le continuum de l'hamiltonien projeté  $H_{PP}$ , l'hamiltonien effectif est non-hermitique, admettant donc des valeurs propres complexes. Cet hamiltonien est cependant symétrique, ses vecteurs propres fournissant une base bi-orthogonale [50]. La base duale est alors construite par transposition (et non conjugaison hermitique) de ces vecteurs. Dans la représentation spectrale de la résolvante  $G_Q^{eff}$ , qui s'écrit,

$$G_Q^{eff} = \sum_i |\tilde{\Phi}_i\rangle \frac{1}{E - \tilde{E}_i} \langle \tilde{\Phi}_i|, \quad (2.243)$$

le dénominateur n'a donc pas la possibilité de s'annuler pour une énergie réelle positive (correspondant à une solution de diffusion). Ceci nous permet d'écrire,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_Q^{eff+} \tilde{P} |T^{j_r m_r} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle = 0, \quad (2.244)$$

pour  $E$  réelle positive. Enfin, en définissant,

$$|\xi\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_P^+ \tilde{P} |T^{j_r m_r} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle, \quad (2.245)$$

(2.236) se réduit à,

$$|\psi\rangle^+ = |\xi\rangle^+ + (Q + G_P H_{PQ}) G_Q^{eff} H_{QP} |\xi\rangle^+. \quad (2.246)$$

En utilisant la représentation spectrale (2.243), nous obtenons alors,

$$|\psi\rangle^+ = |\xi\rangle^+ + \sum_i (|\tilde{\Phi}_i\rangle + |\tilde{\omega}_i\rangle) \frac{1}{E - \tilde{E}_i} \langle \tilde{\omega}_i | \xi \rangle^+, \quad (2.247)$$

où nous avons défini,

$$\begin{aligned} |\tilde{\omega}_i\rangle &= H_{PQ} |\tilde{\Phi}_i\rangle = \sum_j \mathcal{O}_{ij} |\omega_j\rangle, \\ |\tilde{\omega}_i\rangle &= G_P^+ H_{PQ} |\tilde{\Phi}_i\rangle = \sum_j \mathcal{O}_{ij} |\omega_j\rangle. \end{aligned} \quad (2.248a)$$

Les solutions  $|\xi\rangle^+$  et les quantités  $\{|\omega_i\rangle\}$  sont respectivement solutions d'équations de canaux couplés homogènes et inhomogènes que nous traiterons explicitement dans les parties (2.4.4.3) et (2.4.4.4).

Nous nous intéressons maintenant à la forme asymptotique de la solution  $|\xi\rangle^+$ . Nous remarquons tout d'abord que l'on peut écrire,

$$|\xi\rangle^+ = P|\tilde{\varphi}\rangle^+, \quad (2.249)$$

où nous avons défini,

$$|\tilde{\varphi}\rangle^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \tilde{G}_P^+ |\mathbf{T}^{j_{\mathbf{T}m_{\mathbf{T}}}} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle, \quad (2.250)$$

et où la résolvante  $\tilde{G}_P$  est donnée par,

$$\tilde{G}_P^+ = \frac{1}{E^+ - H_{PP}}. \quad (2.251)$$

En utilisant les résultats de la section (2.3), nous pouvons écrire,

$$|\tilde{\varphi}\rangle^+ = |\mathbf{T}^{j_{\mathbf{T}m_{\mathbf{T}}}} \otimes \chi_{m_s} \tau_{\tau_z} \otimes \vec{q}\rangle + G_0^+ \tilde{\mathcal{V}} |\tilde{\varphi}\rangle^+, \quad (2.252)$$

où  $G_0^+$  est la résolvante libre correspondant à l'hamiltonien asymptotique  $H_0$  du canal sortant, et où l'interaction  $\tilde{\mathcal{V}}$  est définie par,

$$\tilde{\mathcal{V}} = H_{PP} - H_0. \quad (2.253)$$

En utilisant le fait que  $|\tilde{\varphi}\rangle^+$  appartient nécessairement à l'espace des canaux à deux fragments (dont l'un est constitué d'une seule particule), et en utilisant la relation (2.216), nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \xi_{c'}^{J,M}(r) &= {}^{J,M} \langle t^{j_{t'}} , r p_{c'} \mathcal{Y}_{c'} |\xi\rangle^+ \\ &= {}^{J,M} \langle t^{j_{t'}} , r p_{c'} \mathcal{Y}_{c'} | P \tilde{P} |\tilde{\varphi}\rangle \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{A}} {}^{J,M} \langle t^{j_{t'}} \otimes r \mathcal{Y}_{c'} |\tilde{\varphi}\rangle, \quad \text{pour } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.254)$$

Enfin, en posant,

$$\xi_{c'}^{J,M}(r) = \sum_{l,j} \xi_{c',c}^J(r) \Xi_c^{J,M}(m_{\mathbf{T}}, m_s, \Omega_q), \quad (2.255)$$

et en se souvenant de la forme asymptotique (2.111) de la solution  $|\tilde{\varphi}\rangle^+$ , nous trouvons,

$$\xi_{c',c}^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_l}}{2k'\sqrt{A}} \left[ H_c^-(r) \delta_{c,c'} + H_{c'}^+(r) S_{c',c}^J \right]. \quad (2.256)$$

En utilisant une procédure analogue, et se servant de la relation (2.116), on montre sans difficultés que les termes  $|\omega_i\rangle$  admettent la forme asymptotique suivante,

$$r {}^{J,M} \langle \mathbf{T}^{j_{\mathbf{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} |\omega_i\rangle = \omega_c^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_l}}{2k\sqrt{A}} H_c^+(r) \Gamma_c^J. \quad (2.257)$$

#### 2.4.4.2 Séparation de l'hamiltonien total en hamiltoniens partiels et opérateurs de transition

La résolution de l'équation (2.233) passe nécessairement par le calcul explicite des opérateurs  $H_{QQ}$ ,  $H_{PQ}$ , ... Nous commencerons cependant par traiter les projections de l'hamiltonien total  $\mathcal{H} = H + H_{cm}$ , et aborderons l'hamiltonien du centre de masse  $H_{cm}$  dans des parties subséquentes. En se souvenant des équivalences (2.49) et (2.50), nous pouvons écrire l'hamiltonien (2.1) en seconde quantification, et sous forme couplée,

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha || t || \beta \rangle \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta} \right)^{0,0} - \sum_{\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0}, \quad (2.258)$$

où les doubles symbole de sommation rappellent que les états liés aussi bien que les états de diffusion individuels sont pris en compte. Les conventions de notation que nous utiliserons sont les suivantes,

$$\sum_{\alpha} \equiv \sum_{l_{\alpha}, j_{\alpha}, \tau_{z\alpha}} \sum_{n_{\alpha}}, \quad (2.259a)$$

$$\int d\alpha \equiv \sum_{l_{\alpha}, j_{\alpha}, \tau_{z\alpha}} \int dk_{\alpha}. \quad (2.259b)$$

En introduisant les notations simplifiées,

$$t_{\alpha, \beta}^{0,0} = \langle \alpha || t || \beta \rangle \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta} \right)^{0,0}, \quad (2.260a)$$

$$\hat{V}_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^{0,0} = - \sum_{\Gamma} \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0}, \quad (2.260b)$$

(2.258) se réduit à,

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha, \beta} t_{\alpha, \beta}^{0,0} + \sum_{\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta} \hat{V}_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^{0,0}. \quad (2.261)$$

Les sommations sur les indices  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'opérateur à un corps de l'équation (2.261) peuvent se diviser en quatre parties, selon que ces indices appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{C}$  définis dans la section (2.4.2). Ces combinaisons sont présentées dans le tableau (2.1).

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \left\| \begin{array}{c|c|c} \mathcal{D} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ \mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{C} \end{array} \right.$$

TAB. 2.1 – Les quatre combinaisons d'indices possibles pour la partie à un corps de l'hamiltonien (2.261).

Toutes les combinaisons d'indice possibles dans les sommations de la partie à deux corps sont présentées dans le tableau (2.2), où nous avons barré celles exclues par le fait que  $\alpha \leq \beta$  et  $\gamma \leq \delta$  dans (2.258) tout en respectant l'ordre défini en (2.172).

$\alpha$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$
$\beta$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$
$\gamma$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$
$\delta$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$

TAB. 2.2 – *Combinaisons d'indices possibles pour la partie à deux corps de l'hamiltonien (2.261).*

La séparation des sommations sur les états individuels nous permet d'écrire l'hamiltonien (2.261) sous la forme compacte suivante,

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=0}^1 \mathcal{I}_{ij} + \sum_{i,j=0}^2 \mathcal{V}_{ij}, \quad (2.262)$$

où les opérateurs à un corps  $\mathcal{I}_{ij}$  sont donnés par,

$$\mathcal{I}_{00} = \sum_{\alpha,\beta} t_{\alpha,\beta}^{0,0}, \quad (2.263a)$$

$$\mathcal{I}_{10} = \int d\alpha \sum_{\beta} t_{\alpha,\beta}^{0,0}, \quad (2.263b)$$

$$\mathcal{I}_{01} = \sum_{\alpha} \int d\beta t_{\alpha,\beta}^{0,0}, \quad (2.263c)$$

$$\mathcal{I}_{11} = \iint d\alpha d\beta t_{\alpha,\beta}^{0,0}, \quad (2.263d)$$

et les opérateurs à deux corps  $\mathcal{V}_{ij}$  sont définits comme suit,

$$\mathcal{V}_{00} = \sum_{\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta} \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264a)$$

$$\mathcal{V}_{01} = \sum_{\alpha \leq \beta, \gamma} \int d\delta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264b)$$

$$\mathcal{V}_{10} = \sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} \int d\beta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264c)$$

$$\mathcal{V}_{11} = \sum_{\alpha, \gamma} \iint d\beta d\delta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264d)$$

$$\mathcal{V}_{02} = \sum_{\alpha \leq \beta} \iint_{\gamma \leq \delta} d\gamma d\delta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264e)$$

$$\mathcal{V}_{20} = \iint_{\alpha \leq \beta} d\alpha d\beta \sum_{\gamma \leq \delta} \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264f)$$

$$\mathcal{V}_{12} = \sum_{\alpha} \int d\beta \iint_{\gamma \leq \delta} d\gamma d\delta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264g)$$

$$\mathcal{V}_{21} = \iint_{\alpha \leq \beta} d\alpha d\beta \sum_{\gamma} \int d\delta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}, \quad (2.264h)$$

$$\mathcal{V}_{22} = \iint_{\alpha \leq \beta} d\alpha d\beta \iint_{\gamma \leq \delta} d\gamma d\delta \hat{V}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{0,0}. \quad (2.264i)$$

L'interprétation des opérateurs (2.263) et (2.264) est immédiate : les opérateurs du type  $\mathcal{T}_{ii}$  ( $\mathcal{V}_{ii}$ ) sont des opérateurs partiels agissant dans un espace de Fock contenant au moins  $i$  particules dans le continuum, alors que les opérateurs du type  $\mathcal{T}_{ij}$  ( $\mathcal{V}_{ij}$ ) ( $i \neq j$ ) sont des opérateurs de transition d'un espace de Fock contenant par exemple  $n$  particules dans le continuum ( $n \geq j$ ), à un espace contenant  $n + i - j$  particules dans le continuum.

A partir des opérateurs (2.263) et (2.264), nous pouvons construire les hamiltoniens partiels suivants,

$$\mathcal{H}_{00} = \mathcal{T}_{00} + \mathcal{V}_{00}, \quad (2.265a)$$

$$\mathcal{H}_{11} = \mathcal{T}_{11} + \mathcal{V}_{11}, \quad (2.265b)$$

$$\mathcal{H}_{22} = \mathcal{T}_{11} + \mathcal{V}_{11} + \mathcal{V}_{22}, \quad (2.265c)$$

ainsi que les opérateurs de transitions,

$$\mathcal{H}_{10} = \mathcal{T}_{10} + \mathcal{V}_{10}, \quad (2.266a)$$

$$\mathcal{H}_{01} = \mathcal{T}_{01} + \mathcal{V}_{01} = \mathcal{H}_{10}^\dagger, \quad (2.266b)$$

$$\mathcal{H}_{02} = \mathcal{V}_{02}, \quad (2.266c)$$

$$\mathcal{H}_{20} = \mathcal{V}_{20} = \mathcal{H}_{02}^\dagger, \quad (2.266d)$$

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{T}_{01} + \mathcal{V}_{01} + \mathcal{V}_{12}, \quad (2.266e)$$

$$\mathcal{H}_{21} = \mathcal{T}_{10} + \mathcal{V}_{10} + \mathcal{V}_{21} = \mathcal{H}_{12}^\dagger. \quad (2.266f)$$

Si nous notons  $|DS^i\rangle$  un déterminant de Slater comportant  $i$  particules dans un état de diffusion, alors nous démontrons facilement les relations suivantes,

$$\langle DS^0 | \mathcal{H} | DS^0 \rangle = \langle DS^0 | \mathcal{H}_{00} | DS^0 \rangle, \quad (2.267a)$$

$$\langle DS^1 | \mathcal{H} | DS^1 \rangle = \langle DS^1 | \mathcal{H}_{00} + \mathcal{H}_{11} | DS^1 \rangle, \quad (2.267b)$$

$$\langle DS^i | \mathcal{H} | DS^i \rangle = \langle DS^i | \mathcal{H}_{00} + \mathcal{H}_{22} | DS^i \rangle, \quad i \geq 2, \quad (2.267c)$$

$$\langle DS^0 | \mathcal{H} | DS^1 \rangle = \langle DS^0 | \mathcal{H}_{01} | DS^1 \rangle, \quad (2.267d)$$

$$\langle DS^{i-1} | \mathcal{H} | DS^i \rangle = \langle DS^{i-1} | \mathcal{H}_{12} | DS^i \rangle, \quad i \geq 2, \quad (2.267e)$$

$$\langle DS^{i-2} | \mathcal{H} | DS^i \rangle = \langle DS^{i-2} | \mathcal{H}_{02} | DS^i \rangle, \quad i \geq 2. \quad (2.267f)$$

Etant donné que nous limitons l'hamiltonien (2.1) aux interactions à deux corps au plus, ce dernier ne peut pas coupler les déterminants de Slater qui diffèrent de plus de deux particules dans le continuum. Dans ce chapitre, nous nous limitons à un espace de Fock admettant au plus une particule dans le continuum, ce qui exclu l'action des opérateurs  $\mathcal{H}_{20}$ ,  $\mathcal{H}_{21}$ ,  $\mathcal{H}_{02}$ ,  $\mathcal{H}_{12}$  et  $\mathcal{H}_{22}$ . Enfin, à partir des relations (2.267), il est aisé de montrer,

$$Q\mathcal{H}Q = Q\mathcal{H}_{00}Q, \quad (2.268a)$$

$$Q\mathcal{H}P = Q\mathcal{H}_{01}P, \quad (2.268b)$$

$$P\mathcal{H}Q = P\mathcal{H}_{10}Q, \quad (2.268c)$$

$$P\mathcal{H}P = P(\mathcal{H}_{00} + \mathcal{H}_{11})P. \quad (2.268d)$$

### 2.4.4.3 Les équations homogènes

Dans cette section, nous nous intéressons à la solution de diffusion projetée  $|\xi\rangle^+$  définie en (2.245). En multipliant (2.245) à gauche par  $P(E - H)P$ , nous obtenons, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$P(E - H)P|\xi\rangle^+ = 0. \quad (2.269)$$

En substituant l'hamiltonien intrinsèque  $H$  par l'hamiltonien total  $\mathcal{H}$  auquel l'on soustrait celui du centre de masse, l'équation (2.269) est équivalente à,

$$P(E - \mathcal{H} + \frac{P_{cm}^2}{2Am})P|\xi\rangle^+ = 0. \quad (2.270)$$

Enfin, en utilisant la relation (2.268d), il vient joyeusement,

$$P(E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am})P|\xi\rangle^+ = 0. \quad (2.271)$$

En multipliant (2.271) à gauche par  ${}^{J,M}\langle T^{j_r}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} |$  et en utilisant l'expression (2.182b) du projecteur  $P$ , nous obtenons,

$$\sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle T^{j_r}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} | T'^{j_{r'}} , \mathcal{Y}_{c'} p_{c'} r' \rangle^{J,M} \frac{1}{r'} \xi_{c'}^{J,M}(r') = 0, \quad (2.272)$$

où nous avons défini,

$$\frac{1}{r'} \xi_{c'}^{J,M}(r') = {}^{J,M}\langle T'^{j_{r'}} , r' p_{c'} \mathcal{Y}_{c'} | \xi \rangle. \quad (2.273)$$

En suivant une procédure similaire à celle introduite dans la section (2.3), nous posons,

$$\xi_{c'}^{J,M}(r') = \sum_{j'', m''} \xi_{c, c''}^J(r') \Xi_{c''}^{J,M}(m_{T''}, m_s'', \Omega_q), \quad (2.274)$$

supposant ainsi que le canal physique entrant est décrit par l'état,

$$|t''^{j_t'' m_t''} \otimes \chi_{m_s''} \tau_{\tau_z''} \otimes \vec{q}\rangle. \quad (2.275)$$

Enfin, en utilisant la relation d'orthogonalité (2.88a) des fonctions angulaires  $\Xi$ , nous obtenons facilement,

$$\sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle T^{j_r}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} | T'^{j_{r'}} , \mathcal{Y}_{c'} p_{c'} r' \rangle^{J,M} \frac{1}{r'} \xi_{c', c''}^J(r') = 0, \quad (2.276)$$

où la solution matricielle  $\xi_{c', c''}^J(r)$  est supposée vérifier la forme asymptotique (2.256). Notre problème premier consiste donc en le calcul des éléments de matrice des opérateurs  $\mathcal{H}_{00}$  et  $\mathcal{H}_{11}$  dans la base  $\{|T^{j_r}, \mathcal{Y}_{\bar{c}} p_{\bar{c}} r\rangle^{J,M}\}$  de l'espace  $\mathcal{P}$ .

Nous nous intéressons tout d'abord aux éléments de matrice de l'hamiltonien partiel  $\mathcal{H}_{00}$ . Selon (2.265a), (2.263a) et (2.264a), cet opérateur s'écrit,

$$\mathcal{H}_{00} = \sum_{\alpha,\beta} \langle \alpha || t || \beta \rangle \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta} \right)^{0,0} - \sum_{\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0}, \quad (2.277)$$

et n'agit que sur les états liés. Appliqué dans la base  $\{ |T^{j_T}, \mathcal{Y}_{\bar{c}} p_{\bar{c}} r \rangle^{J,M} \}$  générant l'espace  $\mathcal{P}$ , cet opérateur n'agit donc que sur le sous-état à  $A - 1$  particules liées  $|T^{j_T}\rangle$ . Ceci nous permet d'écrire,

$$\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{H}_{00} | T'^{j_{T'}}, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \delta_{j_T, j_{T'}} \langle T^{j_T m_T} | \mathcal{H}_{00} | T'^{j_T m_T} \rangle \delta_{\bar{c}, \bar{c}'} \frac{p_{\bar{c}}(r, r')}{r r'}. \quad (2.278)$$

La phase de réarrangement correspondant à la réduction (2.278) est en effet positive. De plus, nous avons utilisé le fait que  $\mathcal{H}_{00}$  conserve le moment de spin  $j_T$ , ainsi que sa projection  $m_T$  (que nous avons fait apparaître explicitement au lieu de réduire l'élément de matrice). Dans la base de Fock à  $A - 1$  particules liées  $\{ |T^{j_T m_T}\rangle \}$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{00}$  peut alors s'écrire, en se souvenant des correspondances entre première et seconde quantification introduites dans la section (2.2.2),

$$\mathcal{H}_{00} = \sum_{i=1}^{A-1} t(i) + \sum_{1=i < j}^{A-1} V(ij), \quad (2.279)$$

où, une fois de plus, l'indexation des particules est arbitraire. Nous voyons donc qu'il s'agit d'un problème à  $A - 1$  particules limité à la base engendrée par les états  $|T^{j_T m_T}\rangle$ . Nous avons vu dans la partie (2.4.2) que nous disposons d'une liberté quant au choix de ces états, pourvu qu'ils forment une base complète et orthogonale de l'espace de Fock à  $A - 1$  particules liées. Nous choisissons donc ces états de manière à ce qu'ils satisfassent à,

$$(E_T - H_T) |T^{j_T m_T}\rangle = 0, \quad (2.280)$$

où  $H_T$  est l'hamiltonien intrinsèque du sous-système à  $A - 1$  particules défini par la relation,

$$H_T = \mathcal{H}_{00} - \frac{P_T^2}{2(A-1)m}, \quad (2.281)$$

où le deuxième terme du membre de droite représente l'hamiltonien du centre de masse de ce sous-système et n'agit que sur les états individuels liés. Il est à noter que l'hamiltonien  $H_T$  possède un caractère effectif dû au fait que la base  $\{ |T^{j_T m_T}\rangle \}$  est tronquée (car n'incluant pas les états du continuum). Enfin, nous résumons les résultats précédents en écrivant les éléments de matrice de l'hamiltonien partiel  $\mathcal{H}_{00}$  de la manière suivante,

$$\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{H}_{00} | T'^{j_{T'}}, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | E_T + \frac{P_T^2}{2(A-1)m} | T'^{j_{T'}}, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M}. \quad (2.282)$$

Nous nous intéressons maintenant aux éléments de matrice de l'opérateur  $\mathcal{T}_{11}$  défini en (2.263d). Cet opérateur s'écrit, en se souvenant de la définition (2.260a),

$$\mathcal{T}_{11} = \iint d\alpha d\beta \langle \alpha || t || \beta \rangle \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta} \right)^{0,0}, \quad (2.283)$$

et n'agit donc que sur les états du continuum individuel. Nous pouvons alors écrire,

$$\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{T}_{11} | T'^{j_{T'}}, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \delta_{T^{j_T}, T'^{j_{T'}}} \delta_{\bar{c}, \bar{c}'} \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \mathcal{T}_{11} | \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m p_{\bar{c}}, r' \rangle, \quad (2.284)$$

car la phase de réarrangement est positive. De plus, nous avons utilisé le fait que l'opérateur  $\mathcal{T}_{11}$  conserve les nombres quantiques définis par  $\bar{c}$  (ainsi que la projection  $m$ ). Appliqué dans la base partielle  $\{|\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m p_{\bar{c}}, r\rangle\}$ , l'opérateur  $\mathcal{T}_{11}$  prend alors la forme, en première quantification,

$$\mathcal{T}_{11} = \sum_{i \in \mathcal{C}} \frac{p_i^2}{2m}, \quad (2.285)$$

où, dans le membre de droite, nous avons spécifié symboliquement par  $i \in \mathcal{C}$  que la sommation porte sur les particules occupant un état de diffusion. Puisque la base  $\{|\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m p_{\bar{c}}, r\rangle\}$  décrit l'espace des états d'une seule particule, (2.285) se résume à,

$$\mathcal{T}_{11} = \frac{p_{\bar{c}}^2}{2m}, \quad (2.286)$$

où  $\vec{p}_{\bar{c}}$  est l'opérateur impulsion agissant dans l'espace des états de la particule se trouvant dans un état de diffusion.

Résumons alors les résultats précédents en écrivant le noyau de l'équation intégral-différentielle (2.276) sous la forme suivante,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | E - E_{\mathbb{T}} - \mathcal{V}_{11} - \frac{p_{\bar{c}}^2}{2m} - \frac{P_{\mathbb{T}}^2}{2(A-1)m} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M}. \quad (2.287)$$

En remarquant que,

$$\frac{p_{\bar{c}}^2}{2m} + \frac{P_{\mathbb{T}}^2}{2(A-1)m} = \frac{P_{cm}^2}{2Am} + \frac{q_{\bar{c}}^2}{2\mu}, \quad (2.288)$$

où nous avons fait apparaître le mouvement du centre de masse du système total et où  $\mu$  est la masse réduite définie en (2.197) et  $\vec{q}_{\bar{c}}$  est le moment conjugué de la variable relative entre la particule occupant un état de diffusion et le reste du système, nous pouvons écrire (2.287) sous la forme,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | - \frac{q_{\bar{c}}^2}{2\mu} + (E - E_{\mathbb{T}}) - \mathcal{V}_{11} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M}. \quad (2.289)$$

En se souvenant des arguments de la section (2.4.3.1), on peut facilement se convaincre que l'opérateur  $\vec{q}_{\bar{c}}$  défini en (2.288) n'agit que sur les états de diffusion. Tout comme en (2.278), les éléments de matrice de l'opérateur  $q_{\bar{c}}^2/2\mu$  dans la base de l'espace  $\mathcal{P}$  peuvent s'écrire,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \frac{q_{\bar{c}}^2}{2\mu} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \delta_{c,c'} \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \frac{q_{\bar{c}}^2}{2\mu} | \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m p_{\bar{c}}, r' \rangle. \quad (2.290)$$

Enfin, nous résumons les résultats précédents en écrivant,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{T}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} \\ = \delta_{c,c'} \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | - \frac{q_{\bar{c}}^2}{2\mu} + (E - E_{\mathbb{T}}) | \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m p_{\bar{c}}, r' \rangle \\ = -\delta_{c,c'} \frac{1}{j} \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \hat{p} \left( \hat{T} \right) \hat{p} | \mathcal{Y}_{\bar{c}} r' \rangle, \end{aligned} \quad (2.291)$$

où nous avons utilisé la relation (2.166b) et avons défini,

$$\hat{T} = \frac{q_{\bar{c}}^2}{2\mu} - (E - E_{\text{T}}). \quad (2.292)$$

Dans (2.287), seul le terme  $\mathcal{V}_{11}$ , défini en (2.264d), couple les états liés à ceux du continuum. Le calcul explicite des éléments de matrice de ce terme est donné en annexe (6.4) où l'on montre que l'on peut écrire,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{11} | \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \hat{p} \left( {}^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}}} \right) \hat{p} | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle, \quad (2.293)$$

où  ${}^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}}$  est un opérateur à un corps non local prenant en compte la structure interne de la cible dans les différents canaux d'excitation. En d'autres termes, la structure de la cible génère un potentiel moyen ressenti par le projectile (la particule se trouvant dans un état de diffusion), qui peut se mettre sous la forme d'un opérateur à un corps « effectif » que nous notons  ${}^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}}$ .

Comme nous l'avons mentionné dans la partie (2.4.2), les états de la cible sont construits à partir de combinaisons linéaires de déterminants de Slater à  $A - 1$  particules liés. Comme nous le verrons plus tard, cette base peut être tronquée au niveau des configurations. Par exemple, nous pouvons nous attendre à ce que les premiers états excités de cette cible puissent être, comme en modèle en couches, convenablement décrits par un coeur inerte auquel est ajouté un mélange de configurations dans un espace de valence. Dans ce cas, le potentiel  ${}^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}}$  est la somme de deux contributions : celle du coeur, et celle de l'espace de valence de la cible (cf. Fig. (2.9)). Dans l'annexe (6.4), il est montré que la contribution

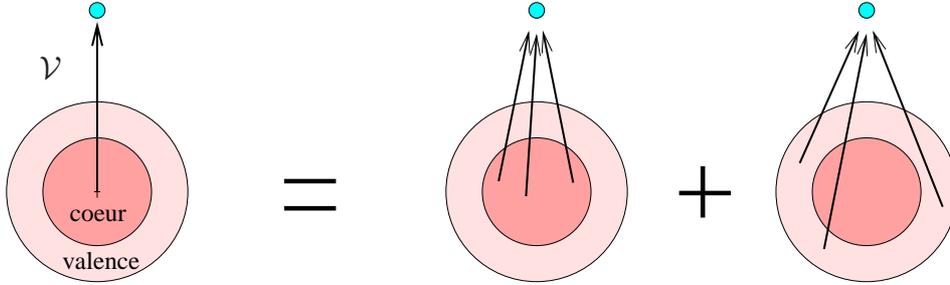


FIG. 2.9 – Illustration des différentes contributions au potentiel ressenti par le projectile (en bleu sur la figure).

du coeur est diagonale dans la base des canaux (ne couple pas les différents canaux) et admet une forme similaire aux potentiels Hartree-Fock (2.32). En revanche, la contribution de l'espace de valence, et par là même des mélanges de configurations, couple les différents canaux d'excitation, et nécessite le calcul d'éléments de matrice de produits d'opérateurs de création et d'annihilation dans la base des états intrinsèques de la cible.

La représentation radiale de l'opérateur à un corps  ${}^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}}$  dans la base non projetée  $\{ | \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m, r \rangle \}$  est, à l'instar du potentiel Hartree-Fock, la somme d'une partie directe et d'une partie d'échange,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{\bar{c}} | | {}^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\text{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\text{T}'}}} | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle = \frac{\delta(r - r')}{rr'} {}^J D_{c,c'}(r) + \frac{1}{rr'} {}^J E_{c,c'}(r, r'), \quad (2.294)$$

dont les expressions sont données en (6.99a). En utilisant (2.291) et (2.293), les équations intégral-différentielles (2.276) peuvent s'écrire,

$$\sum_{c'} \int dr' r' \langle r | \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \hat{p} \left( \frac{1}{j} \delta_{T^{jT}, T'^{jT'}} \hat{T} + {}^J \mathcal{V}_{T^{jT}, T'^{jT'}} \right) \hat{p} | \mathcal{Y}_{c'} r' \rangle \xi_{c', c''}^J(r') = 0. \quad (2.295)$$

En utilisant la relation (2.166b) et en définissant,

$$\langle r | \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \frac{1}{j} \delta_{T^{jT}, T'^{jT'}} \hat{T} + {}^J \mathcal{V}_{T^{jT}, T'^{jT'}} | \mathcal{Y}_{c'} r' \rangle = \frac{1}{rr'} \mathcal{K}_{c, c'}(r, r'), \quad (2.296)$$

nous dérivons facilement,

$$\frac{1}{r} \int dr_1 p_{\bar{c}}(r, r_1) \sum_{c'} \int dr_2 \mathcal{K}_{c, c'}(r_1, r_2) \int dr' p_{c'}(r_2, r') \xi_{c', c''}^J(r') = 0. \quad (2.297)$$

Enfin, en introduisant matrices d'opérateurs non-locaux  $\tilde{\mathcal{K}}(r)$  et  $\tilde{p}(r)$  qui admettent les éléments de matrice suivants,

$$\left[ \tilde{\mathcal{K}}(r) \right]_{c, c'} = \int dr' \mathcal{K}_{c, c'}(r, r') \times \quad (2.298a)$$

$$\left[ \tilde{p}(r) \right]_{c, c'} = \delta_{c, c'} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') \times, \quad (2.298b)$$

et en définissant la matrice  $\xi^J(r)$  comme suit,

$$\left[ \xi^J(r) \right]_{c, c'} = \xi_{c, c'}^J(r), \quad (2.299)$$

le système d'équations (2.297) est alors équivalent à l'équation matricielle suivante,

$$\tilde{p} \left( \tilde{\mathcal{K}} \left( \tilde{p} \xi^J \right) \right) (r) = 0. \quad (2.300)$$

Une méthode de résolution des équations projetées sur le continuum individuel est présentée en annexe (6.7) pour différents cas de conditions asymptotiques. Cette méthode nécessite la résolution d'équations du type,

$$\tilde{\mathcal{K}} \xi^J = \Theta, \quad (2.301)$$

où  $\Theta$  représente quelque terme source discuté en détails dans l'annexe, ainsi que de l'équation homogène (i.e. où  $\Theta \equiv 0$ ). En termes simples, la résolution des équations projetées (2.300) passe par la résolution des équations non projetées aux solutions desquelles l'on soustrait ensuite les solutions particulières n'appartenant pas à l'espace  $\mathcal{P}$ , tout en vérifiant la condition asymptotique physique désirée. Intéressons nous alors aux équations non projetées afin d'illustrer le problème. En écrivant l'opérateur énergie cinétique en représentation radiale et en utilisant (2.294), nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{c, c'}(r, r') = & -\delta(r - r') \delta_{c, c'} \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dr^2} + k_c^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + \\ & \delta(r - r') {}^J D_{c, c'}(r) + {}^J E_{c, c'}(r, r'), \end{aligned} \quad (2.302)$$

où nous avons défini,

$$k_c = \sqrt{\frac{2\mu(E - E_T)}{\hbar^2}}. \quad (2.303)$$

Nous en déduisons les équations intégral-différentielles couplées vérifiées par la solution non-projetée,

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dr^2} + k_c^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi_{c,c''}^J(r) + \sum_{c'} {}^J D_{c,c'}(r) \xi_{c',c''}^J(r) \\ + \sum_{c'} \int dr' {}^J E_{c,c'}(r, r') \xi_{c',c''}^J(r') = 0. \end{aligned} \quad (2.304)$$

Livrons nous alors à quelques remarques. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la contribution d'un éventuel coeur aux potentiels  ${}^J D_{c,c'}$  et  ${}^J E_{c,c'}$  ne couple pas les différents canaux et admet la même forme que les potentiels Hartree-Fock (2.32), à ce détail près que les sommations sur  $\gamma$  sont limitées aux états définissant ce coeur. Si maintenant nous limitons la description de la cible à un unique coeur, c'est à dire à la seule configuration d'occupation où toutes les orbitales de plus basse énergie sont occupées, alors le potentiel cible-projectile correspond exactement au potentiel Hartree-Fock pour un état inoccupé situé dans le continuum.

#### 2.4.4.4 Les équations inhomogènes

Dans cette section, nous nous intéressons aux quantités  $\{|\omega_i\rangle\}$  définies en (2.239b). Afin d'être un peu plus précis, nous revenons aux notations introduites dans la section (2.4.2.2) et désignons par  $|\Phi\rangle^{J,M}$  un état de l'espace  $\mathcal{Q}$  couplant au moment de spin total  $J$ . Nous re-définissons alors,

$$|\omega\rangle^{J,M} = G_P^+ H_{PQ} |\Phi\rangle^{J,M}. \quad (2.305)$$

Le membre de droite de cette équation indique que l'état  $|\omega\rangle^{J,M}$  est le résultat d'une transition (par l'opérateur  $H_{PQ}$ ) de l'état lié  $|\Phi\rangle^{J,M}$  vers l'espace  $\mathcal{P}$ , puis d'une propagation (par l'opérateur  $G_P^+$ ) dans l'espace  $\mathcal{P}$ . C'est pourquoi l'on qualifie souvent l'état  $|\omega\rangle^{J,M}$  de *prolongation* de l'espace  $\mathcal{Q}$  dans l'espace  $\mathcal{P}$ . L'équation (2.305) simule donc la décroissance de l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  en deux fragments, l'un des deux consistant en un seul nucléon.

En suivant la même procédure que dans la section (2.4.4.3), nous pouvons écrire,

$$P(E - H)P|\omega\rangle^{J,M} = PHQ|\Phi\rangle^{J,M}. \quad (2.306)$$

En substituant l'hamiltonien intrinsèque  $H$  par l'hamiltonien total  $\mathcal{H}$  auquel l'on soustrait celui du centre de masse, puis en utilisant les relations (2.268d) et (2.268c), il vient,

$$P(E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am})P|\omega\rangle^{J,M} = P(\mathcal{H}_{10} - \frac{P_{cm}^2}{2Am})Q|\Phi\rangle^{J,M}. \quad (2.307)$$

En multipliant (2.307) à gauche par  ${}^{J,M}\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} |$  et en utilisant l'expression (2.182b) du projecteur  $P$ , nous obtenons,

$$\begin{aligned} \sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} | T^{j_{r'}} , \mathcal{Y}_{c'} p_{c'} r' \rangle^{J,M} \frac{1}{r'} \omega_{c'}^J(r') = \\ \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | (\mathcal{H}_{10} - \frac{P_{cm}^2}{2Am}) | \Phi \rangle^{J,M}, \end{aligned} \quad (2.308)$$

où, dans le membre de droite, nous avons utilisé le fait que l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  appartient à l'espace  $\mathcal{Q}$ . La solution vectorielle  $\omega_{c'}^J(r)$  est supposée vérifier la forme asymptotique (2.257).

Dans (2.308), le terme du membre de gauche admet exactement la même forme qu'en (2.276) et a été discuté dans la section précédente. Le terme du membre de droite représente une source aux équations dont l'expression explicite est dérivée en annexe (6.5) où l'on montre que l'on peut écrire,

$$\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | (\mathcal{H}_{10} - \frac{P_{cm}^2}{2Am}) | \Phi \rangle^{J,M} = \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') w_c(\Phi^J, r'), \quad (2.309)$$

où le terme  $w_c(\Phi^J, r')$  est donné par la formule générale (6.145). En utilisant les résultats de la section précédente, nous pouvons écrire (2.308) sous la forme suivante,

$$\int dr_1 p_{\bar{c}}(r, r_1) \sum_{c'} \int dr_2 \mathcal{K}_{c,c'}(r_1, r_2) \int dr' p_{c'}(r_2, r') \omega_{c'}^J(r') = \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') w_c(\Phi^J, r'), \quad (2.310)$$

où l'opérateur non local  $\mathcal{K}$  à été défini en (2.296). Enfin, en définissant la solution vectorielle  $\vec{\omega}^J(r)$  et le vecteur « source »  $\vec{w}(r)$  dont les composantes sont données respectivement par,

$$\left[ \vec{\omega}^J(r) \right]_c = \omega_c^J(r), \quad (2.311a)$$

$$\left[ \vec{w}(r) \right]_c = w_c(\Phi^J, r), \quad (2.311b)$$

et en faisant usage des matrices d'opérateurs non-locaux introduits en (2.298), nous pouvons écrire le système d'équations (2.310) sous la forme suivante,

$$\tilde{p} \left( \tilde{\mathcal{K}} \left( \tilde{p} \vec{\omega}^J \right) \right) (r) = \left( \tilde{p} \vec{w} \right) (r). \quad (2.312)$$

Une méthode de résolution des équations projetées sur le continuum individuel est présentée en annexe (6.7).

Le terme source  $w_c(\Phi^J, r)$  simule la « perte » d'un nucléon par l'état  $|\Phi\rangle^J$ . Un nucléon, occupant un état lié dans  $|\Phi\rangle^J$ , est alors promu vers un état de diffusion, ce qui scinde le système total en un sous-état à  $A - 1$  particules liées  $|\mathbb{T}^{j\tau}\rangle$  et le nucléon considéré (assimilé au projectile dans la région asymptotique). Chaque configuration d'occupation définissant l'état de l'espace  $\mathcal{Q}$  contribue au terme  $w_c(\Phi^J, r)$ . De même que la cible, l'état  $|\Phi\rangle^J$  peut être décrit par un coeur inerte plus un mélange de configurations dans un espace de valence. Puisque le coeur est inerte, nous nous attendons à ce que seules les particules de l'espace de valence contribuent au terme source. Le calcul de l'annexe (6.5) montre que c'est bien le cas mais fait cependant apparaître un terme supplémentaire que l'on pourrait qualifier de *correctif*. Afin d'illustrer simplement ce fait, écrivons ici l'hamiltonien total  $\mathcal{H}$  en seconde quantification,

$$\mathcal{H} = \sum_{a,b} \langle a|t|b\rangle a_a^\dagger a_b + \frac{1}{4} \sum_{a,b,c,d} \langle a,b|V|c,d\rangle_{as} a_a^\dagger a_b^\dagger a_d a_c, \quad (2.313)$$

où les états individuels génériques  $|a\rangle, |b\rangle, \dots$  peuvent aussi bien représenter les états liés que les états de diffusion. L'utilisation du théorème de Wick [3] nous permet d'écrire (2.313) sous la forme suivante,

$$\mathcal{H} = E_{HF} + \sum_a e_a : a_a^\dagger a_a : + \frac{1}{4} \sum_{a,b,c,d} \langle a,b|V|c,d\rangle_{as} : a_a^\dagger a_b^\dagger a_d a_c :, \quad (2.314)$$

où  $E_{HF}$  est l'énergie Hartree-Fock (cf. equ. (2.12)),  $e_a$  représente l'énergie de l'état individuel  $|a\rangle$  et les produits d'opérateurs encadrés des notations  $::$  représentent leur ordonnement normal par rapport au vide généralisé défini par la configuration de plus basse énergie. Dans l'annexe, le calcul des éléments de matrice du type,

$$\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{H} | \Phi \rangle^{J,M}, \quad (2.315)$$

est effectué à l'aide de l'expression (2.313). Considérons néanmoins l'expression (2.314) pour le calcul de ces éléments de matrice. L'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  étant orthogonal à l'état  $|\mathbb{T}^{j\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{c}} p_{\bar{c}} r\rangle^{J,M}$ , la contribution scalaire  $E_{HF}$  disparaît. De plus, il n'est pas difficile de se convaincre qu'il en est de même pour l'opérateur à un corps, ce dernier conservant le nombre de particules

liées. Il ne reste donc plus que le terme à deux corps. Or, nous savons que l'application d'un produit d'opérateurs dans l'ordre normal sur la configuration Hartree-Fock (où les particules occupent les états de plus basse énergie) donne un résultat nul. Dans l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$ , cette configuration d'occupation particulière ne doit donc pas contribuer au terme source. Nous écrivons ce fait sous la forme symbolique suivante,

$$\langle T^{j\pi}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{H} | \Phi \rangle^{J,M} = \langle T^{j\pi}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{H} (|\Phi\rangle^{J,M} - |DS_0\rangle) \rangle, \quad (2.316)$$

où le déterminant de Slater  $|DS_0\rangle$  représente la configuration Hartree-Fock. Cette dernière configuration est constituée du coeur auquel s'ajoutent des particules additionnelles. La figure (2.10) montre schématiquement (dans l'exemple de la section (2.2.1)) la définition de l'état  $|DS_0\rangle$  où l'état du coeur est symbolisé par  $|0\rangle$  et l'état représentant les particules additionnelles par  $|add\rangle$ .

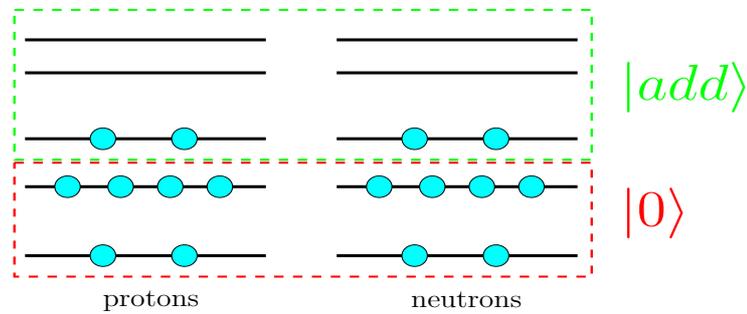


FIG. 2.10 – Exemple de décomposition de l'état  $|DS_0\rangle$  en un coeur  $|0\rangle$  et un état  $|add\rangle$  constitué de particules additionnelles.

D'autre part, l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  est constitué du même coeur  $|0\rangle$  ainsi que d'un mélange de configurations des particules de valence que l'on note  $|val\rangle$  (cf. Fig. (2.11)).

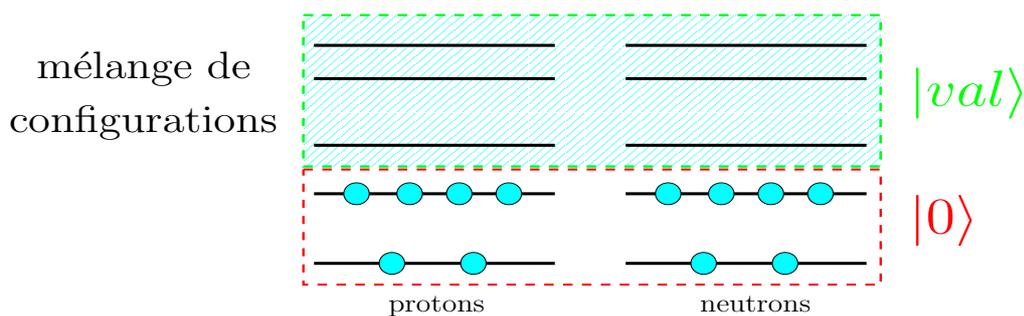


FIG. 2.11 – Exemple de décomposition de l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  (voir texte) en un coeur  $|0\rangle$  et un mélange de configurations  $|val\rangle$  dans l'espace de valence.

Nous pouvons alors écrire symboliquement,

$$|\Phi\rangle^{J,M} - |DS_0\rangle = |0, val\rangle - |0, add\rangle = |val\rangle - |add\rangle, \quad (2.317)$$

car les deux contributions du coeur s'annulent. La correction due à la contribution des particules additionnelles apparaît naturellement lors du calcul explicite du terme source. Remarquons pour finir que si le coeur englobe toutes les particules (espace de valence nul), alors le terme source disparaît.

### 2.4.4.5 Résonances à $N$ corps

Dans les deux parties précédentes, nous avons dérivé les équations que vérifient les solutions homogène  $|\xi\rangle^+$  et inhomogène  $|\omega\rangle^{J,M}$  nécessaires au calcul de la solution complète  $|\psi\rangle^+$  définie en (2.247). Nous nous intéressons donc maintenant à cette solution complète.

Une fois de plus, nous nous voyons dans l'obligation de modifier légèrement les notations pour plus de commodité. Un état de l'espace  $\mathcal{Q}$  couplant au moment de spin total  $J$  et de projection  $M$  sera noté  $|\Phi_i\rangle^{J,M}$ , où  $\Phi_i$  représente tous les autres nombres quantiques définissant l'état de l'espace  $\mathcal{Q}$  (excitation, parité etc.). Les termes source et prolongements sont alors notés,

$$|{}^i\mathbf{w}\rangle^{J,M} = H_{PQ}|\Phi_i\rangle^{J,M}, \quad (2.318a)$$

$$|{}^i\omega\rangle^{J,M} = G_P^+|{}^i\mathbf{w}\rangle^{J,M}, \quad (2.318b)$$

où nous avons placé l'indice  $i$  en exposant à gauche afin de faire de la place pour la définition ultérieure des canaux. Les vecteurs propres de l'hamiltonien effectif sont pour leur part notés (cf. eq. (2.241)),

$$|\tilde{\Phi}_i\rangle^{J,M} = \sum_j \mathcal{O}_{ij}|\Phi_i\rangle^{J,M}, \quad (2.319)$$

et vérifient,

$$(\tilde{E}_i^J - H_{QQ}^{eff})|\tilde{\Phi}_i\rangle^{J,M}. \quad (2.320)$$

Nous définissons enfin,

$$|{}^i\tilde{\mathbf{w}}\rangle^{J,M} = \sum_j \mathcal{O}_{ij}|{}^i\mathbf{w}\rangle^{J,M}, \quad (2.321a)$$

$$|{}^i\tilde{\omega}\rangle^{J,M} = G_P^+|{}^i\tilde{\mathbf{w}}\rangle^{J,M}. \quad (2.321b)$$

En termes de ces notations, l'équation (2.247) s'écrit,

$$|\psi\rangle^+ = |\xi\rangle^+ + \sum_{i,J,M} \left( |\tilde{\Phi}_i\rangle^{J,M} + |{}^i\tilde{\omega}\rangle^{J,M} \right) \frac{1}{E - \tilde{E}_i^J} {}^{J,M}\langle {}^i\tilde{\mathbf{w}}|\xi\rangle^+. \quad (2.322)$$

La solution complète  $|\psi\rangle^+$  représente un système de  $A$  particules indiscernables. Aussi les composantes de ce vecteur d'état dans la base des canaux  $|\mathbb{T}^{j\tau} \otimes \mathcal{Y}_{\bar{c}r}\rangle^{J,M}$ , où l'indexation des particules constituant chaque fragment est fixée, ne représente-t'elle qu'une partie de la solution antisymétrique. Puisque la solution (2.322) est la somme d'une partie appartenant à l'espace  $\mathcal{Q}$  et d'une partie appartenant à l'espace  $\mathcal{P}$ , une représentation radiale doit contenir ces deux espaces. A l'aide des arguments de la section (2.4.2), il n'est pas difficile de montrer que l'identité peut s'écrire,

$$\mathbb{1} = P + Q = \sum_{c,J,M} \int dr r^2 |\mathbb{T}^{j\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{c}r}\rangle^{J,M} \langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}}|, \quad (2.323)$$

où les vecteurs d'état  $|\mathbb{T}^{j\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{c}r}\rangle^{J,M}$  sont définis par,

$$|\mathbb{T}^{j\tau}, \mathcal{Y}_{\bar{c}r}\rangle^{J,M} = \mathcal{A} \left( |\mathbb{T}^{j\tau}(1 \cdots A - 1) \otimes \mathcal{Y}_{\bar{c}r}(A)\rangle^{J,M} \right), \quad (2.324)$$

et où l'antisymétriseur partiel  $\mathcal{A}$  a été défini en (2.212). Ces vecteurs forment alors une base complète et orthogonale de l'espace de Fock dans laquelle la solution totale peut être développée en toute quiétude. Nous multiplions alors à gauche l'équation (2.323) par  ${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} |$ , obtenant,

$${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | \psi \rangle^+ = \frac{1}{r} \psi_c^{J,M}(r)$$

$${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | \left[ |\xi \rangle^+ + \sum_i \left( |\tilde{\Phi}_i \rangle^{J,M} + |{}^i\tilde{\omega} \rangle^{J,M} \right) \frac{1}{E - \tilde{E}_i^J} {}^{J,M}\langle {}^i\tilde{\omega} | \xi \rangle^+ \right]. \quad (2.325)$$

Puisque la solution  $|\xi \rangle^+$  et les prolongements  $|{}^i\omega \rangle^{J,M}$  appartiennent à l'espace  $\mathcal{P}$ , nous pouvons écrire,

$${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | \xi \rangle^+ = {}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{e}} \mathcal{Y}_{\bar{e}} | \xi \rangle^+ = \frac{1}{r} \xi_c^{J,M}(r), \quad (2.326a)$$

$${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | {}^i\tilde{\omega} \rangle^{J,M} = {}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{e}} \mathcal{Y}_{\bar{e}} | {}^i\tilde{\omega} \rangle^{J,M} = \frac{1}{r} {}^i\tilde{\omega}_c^{J,M}(r). \quad (2.326b)$$

En revanche, les termes  ${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | \tilde{\Phi}_i \rangle^{J,M}$  admettent une forme beaucoup plus compliquée dont le calcul est donné en annexe (6.6). En utilisant la relation de complétude (2.322), nous pouvons écrire,

$${}^{J,M}\langle {}^i\tilde{\omega} | \xi \rangle^+ = \sum_{c''} \int dr' {}^i\tilde{\omega}_{c''}^J(r') \xi_{c''}^{J,M}(r'), \quad (2.327)$$

où nous avons posé,

$${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | {}^i\tilde{\omega} \rangle^{J,M} = {}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{e}} \mathcal{Y}_{\bar{e}} | {}^i\tilde{\omega} \rangle^{J,M} = \frac{1}{r'} {}^i\tilde{\omega}_{c''}^J(r'), \quad (2.328)$$

quantité supposée indépendante de la projection  $M$ . Les informations physiques mesurables lors d'un processus de collision sont contenues dans la matrice de diffusion qui est liée à la forme asymptotique de la fonction d'onde. Nous nous intéressons donc à la forme que prend la solution complète pour de grandes valeurs de  $r$ . Ceci nous permet déjà de supprimer le terme  ${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r \mathcal{Y}_{\bar{e}} | \tilde{\Phi}_i \rangle^{J,M}$  qui est de contribution nulle dans la région asymptotique. En posant,

$$\psi_c^{J,M}(r) = \sum_{l', j'} \psi_{c, c'}^J(r) \Xi_{c'}^{J,M}(m_{l'}, m_{p'}, \Omega_q), \quad (2.329a)$$

$$\xi_c^{J,M}(r) = \sum_{l', j'} \xi_{c, c'}^J(r) \Xi_{c'}^{J,M}(m_{l'}, m_{p'}, \Omega_q), \quad (2.329b)$$

nous obtenons alors, pour  $r \sim \infty$ ,

$$\psi_{c, c'}^J(r) \sim \xi_{c, c'}^J(r) + \sum_i {}^i\tilde{\omega}_c^J(r) \frac{1}{E - \tilde{E}_i^J} \sum_{c''} \int dr' {}^i\tilde{\omega}_{c''}^J(r') \xi_{c'', c'}^J(r'). \quad (2.330)$$

Les prolongements  ${}^i\omega_c^J(r)$  admettent la forme asymptotique (2.257), que nous écrivons ici en faisant apparaître la dépendance en  $i$ ,

$${}^i\omega_c^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_i}}{2k\sqrt{A}} H_c^+ \Gamma_c^J(i). \quad (2.331)$$

En posant,

$$\tilde{\Gamma}_c^J(i) = \sum_j \mathcal{O}_{ij} \Gamma_c^J(j), \quad (2.332)$$

nous pouvons écrire la forme asymptotique des prolongements  ${}^i\tilde{\omega}_c^J(r)$ ,

$${}^i\tilde{\omega}_c^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_i}}{2k\sqrt{A}} H_c^+ \tilde{\Gamma}_c^J(i). \quad (2.333)$$

Finalement, en se souvenant de la forme asymptotique (2.256) de la solution homogène, celle de la solution complète est donnée par,

$$\psi_{c,c'}^J(r) \sim \frac{e^{i\sigma_i}}{2k\sqrt{A}} \left[ H_c^-(r) \delta_{c,c'} + H_c^+(r) \left( S_{c,c'}^J + \sum_i \frac{\tilde{\Gamma}_c^J(i) \tilde{\gamma}_{c'}^J(i)}{E - \tilde{E}_i^J} \right) \right], \quad (2.334)$$

où nous avons posé,

$$\tilde{\gamma}_{c'}^J(i) = \sum_{c''} \int dr' {}^i\tilde{w}_{c''}^J(r') \xi_{c'',c'}^J(r'). \quad (2.335)$$

Nous voyons donc que le rapport entre onde sortante et entrante admet la forme suivante,

$$S_{c,c'}^J + \sum_i \frac{\tilde{\Gamma}_c^J(i) \tilde{\gamma}_{c'}^J(i)}{E - \tilde{E}_i^J}. \quad (2.336)$$

Il s'agit donc de la somme d'une partie non-résonante ( $S^J$ ) et d'une partie résonante. Le caractère non-résonant de la matrice de diffusion partielle  $S^J$  s'explique par le fait que la solution  $\xi^J$  de l'équation homogène est projetée sur le continuum individuel qui est non-résonant par construction (voir partie (2.4.1.3)). En revanche, le terme de droite de (2.336) admet des pôles qui ne sont autres que les états propres (de valeur propre complexe) de l'hamiltonien effectif  $H_{QQ}^{eff}$ . La position de ces pôles est déterminée par la structure de la cible à  $A - 1$  particules ainsi que de l'état à  $A$  particules  $|\Phi_i\rangle^{J,M}$ . La partie réelle de la position d'un pôle correspond à l'énergie aux alentours de laquelle un système composite résonant à  $A$  particules peut subsister pendant un temps relativement long (relatif à la partie imaginaire). Nous parlons alors de résonance à  $N$ -corps.

Les éléments de matrice de l'hamiltonien effectif dans la base  $\{|\Phi_i\rangle^{J,M}\}$  sont donnés par,

$${}^{J,M}\langle \Phi_i | H_{QQ} + H_{QP} G_P^+ H_{PQ} | \Phi_j \rangle^{J,M} = E_i^J \delta_{i,j} + \sum_c \int dr {}^i w_c^J(r) {}^j \omega_c^J(r). \quad (2.337)$$

La diagonalisation de cet hamiltonien nous fournit les coefficients  $\mathcal{O}_{ij}$  ainsi que les valeurs propres complexes  $\tilde{E}_i^J(E)$ , expression dans laquelle nous rappelons qu'elles dépendent de l'énergie totale  $E$ . Enfin, la position d'un pôle dans le plan complexe énergie est déterminée en résolvant l'équation suivante,

$$E = \tilde{E}_i^J(E). \quad (2.338)$$

## 2.4.5 Les approximations du modèle

### 2.4.5.1 Les mélanges de configurations

Les états individuels liés  $\{|a\rangle, |b\rangle \dots\}$  générés par le champ moyen engendré par l'ensemble des particules servent à la construction des déterminants de Slater  $\{|DS_i\rangle\}$ ,

$$|DS_i\rangle = |a, b, \dots\rangle. \quad (2.339)$$

Le déterminant de Slater  $|DS_0\rangle$  où toutes les orbitales de plus basse énergie sont occupées n'est pas suffisant pour décrire les états excités du système, voire même l'état fondamental. Les configurations d'occupation  $\{|DS_i\rangle\}$  sont en effet couplées par l'interaction résiduelle  $V^{res}$ . Les différents états d'excitation  $\{|\psi_i\rangle\}$  du système doivent donc être représentés par des combinaisons linéaires de déterminants de Slater (mélange de configurations),

$$|\psi_i\rangle = \sum_j C_{ij} |DS_j\rangle. \quad (2.340)$$

Dans tout ce qui précède, les états à  $A$  particules  $|\psi\rangle, |\Phi\rangle$  etc... ainsi que les états à  $A - 1$  particules  $|T\rangle$  sont construits comme en (2.340). En toute rigueur, les coefficients de mélange de configurations  $\{C_{ij}\}$  sont obtenus en diagonalisant l'interaction résiduelle  $V^{res}$  correspondant à l'interaction nucléon-nucléon  $V$  choisie. Une telle méthode, bien que rigoureuse d'un point de vue formel, ne permet pas une bonne description de la structure nucléaire. Nous adopterons donc, dans cet exposé, la méthode utilisée dans le formalisme du SMEC consistant à remplacer les coefficients  $\{C_{ij}\}$  par les coefficients de mélange de configurations de modèle en couches  $\{C_{ij}^{sm}\}$  comme définis en (2.40), car fournissant une meilleure description de la structure des états du système.

### 2.4.5.2 Problèmes liés à la troncation de l'espace de valence

Un calcul de modèle en couches nécessite la définition d'un coeur et d'un espace de valence (cf. section (2.2)). Puisque nous avons décidé d'utiliser dans nos calculs les coefficients de mélange de configurations de modèle en couches, nous nous voyons dans l'obligation d'utiliser également la même définition du coeur et de l'espace de valence. L'ensemble des états individuels générant la base à  $N$  corps doivent donc correspondre à ces définitions. Les états résonnants dans le puits de potentiel Hartree-Fock qui devraient se trouver dans l'espace de valence sont alors re-définis à l'aide de la méthode introduite dans la section (2.4.1.3). Nous pouvons cependant être confrontés au problème inverse, qui peut se résumer en ces quelques lignes : notre modèle se targue de pouvoir définir les résonances à  $N$  corps, correspondant aux pôles de la partie résonnante de la matrice de diffusion (2.336). Si maintenant le potentiel admet un état résonnant qui n'est pas inclus dans l'espace de valence, cet état n'est pas couplé au reste du système par les mélanges de configurations, et cette résonance devient une résonance à 1 corps (individuelle) correspondant à un pôle de la matrice  $S^J$  apparaissant dans (2.336), et que nous qualifions de *non-résonnante*, à tort comme nous le constatons à présent. L'interaction nucléon-nucléon effective étant définie de manière à reproduire les caractéristiques intrinsèques d'un système à  $N$  corps, il ne faut pas s'attendre à ce qu'elle reproduise correctement les observables de diffusion (sans réarrangement) d'une particule sur une cible.

# Chapitre 3

## Applications

Nous présentons dans ce chapitre quelques applications numériques de base sur des exemples simples illustrant les principaux points discutés dans le chapitre 2. Nous commencerons par quelques observations concernant les propriétés des états quasi-liés inclus dans le continuum. Nous présenterons ensuite les différentes interactions nucléon-nucléon que nous utiliserons pour un calcul de modèle en couches avec couplage d'une particule aux états du continuum. La spectroscopie de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  ainsi que les déphasages de diffusion  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  obtenus à l'aide de ce dernier modèle seront ensuite analysés.

### 3.1 Coupure des résonances individuelles

Nous voulons ici étudier les conséquences de la nouvelle définition des EQLIC présentée dans la section (2.4.1.3). Pour plus de commodité, nous emploierons dans cette partie le potentiel local simplifié (2.141) pour générer les résonances individuelles. En effet, il est bien plus aisé, numériquement, de trouver les états résonnants d'un tel potentiel que ceux d'un potentiel non-local.

Deux quantités d'intérêt concernant les EQLIC sont : leur rayon carré moyen, et le « rayon de jonction ». Nous nous proposons d'étudier l'évolution de ces deux quantités en fonction de la largeur de l'état pour trois exemples. Les figures (3.1-3.3) présentent les variations du rayon de jonction  $r_m$  et du rayon carré moyen  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  en fonction de la largeur  $\Gamma$  de l'état pour les états résonnants neutron  $1p_{1/2}$ , neutron  $0d_{5/2}$  et proton  $1s_{1/2}$  respectivement. Pour l'obtention de ces figures, nous avons choisi les paramètres  $V_{so} = 3.5$  MeV,  $R = 3.5$  fm et  $d = 0.5$  fm du potentiel (2.141). Nous faisons varier la position de l'état résonnant (pôle de la matrice de diffusion) en faisant varier le paramètre  $V_0$ . Enfin, dans tous ces exemples, le potentiel est généré par une cible de masse 16 amu et de nombre de charge  $Z_t = 8$ .

Nous observons les faits suivants : pour les états neutrons, le rayon de jonction diverge en  $\Gamma \sim 0$  pour toutes valeurs du moment angulaire  $l$ , alors que le rayon carré moyen diverge pour  $l = 1$  et admet une valeur maximale pour  $l = 2$ . Pour les états protons, le rayon carré moyen ne diverge pas en  $\Gamma \sim 0$ , c'est à dire lorsque l'on s'approche du seuil, ce qui n'est pas le cas pour rayon de jonction.

Pour  $l > 1$ , la barrière centrifuge a pour effet de confiner la fonction radiale ; ce qui explique la valeur maximale du rayon carré moyen rencontrée pour l'état neutron avec  $l = 2$ . La

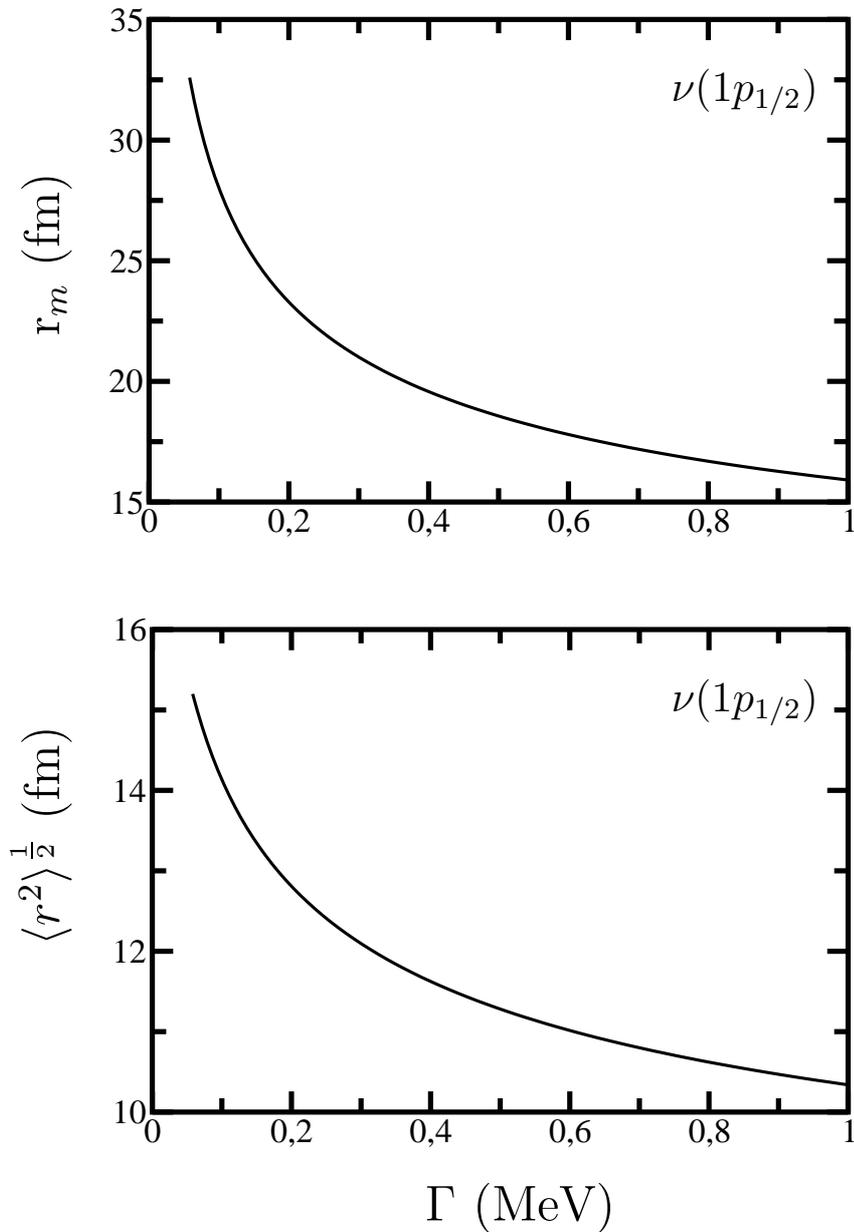


FIG. 3.1 – Variation du rayon carré moyen  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  et du point de jonction  $r_m$  en fonction de la largeur  $\Gamma$  de l'état résonnant neutron  $1p_{1/2}$ . La profondeur  $V_0$  du puits varie de 65.5 MeV à 61.485 MeV.

barrière coulombienne a le même effet pour les états proton et ce, pour toute valeur du moment angulaire. Ces propriétés sont typiques de celles d'un état lié, ce qui nous conforte dans l'idée que la nouvelle définition des EQLIC est bien appropriée.

Pour expliquer les propriétés du rayon de jonction, rappelons tout d'abord que la largeur d'un état résonnant diminue lorsque l'énergie (partie réelle de la position du pôle) diminue. Nous voyons donc que le point de raccordement entre la solution régulière et la solution de Jost sortante (qui admet une asymptotique d'état lié) diverge lorsque l'énergie se rapproche du seuil. Ce phénomène peut s'expliquer de la manière suivante : si l'énergie a une valeur

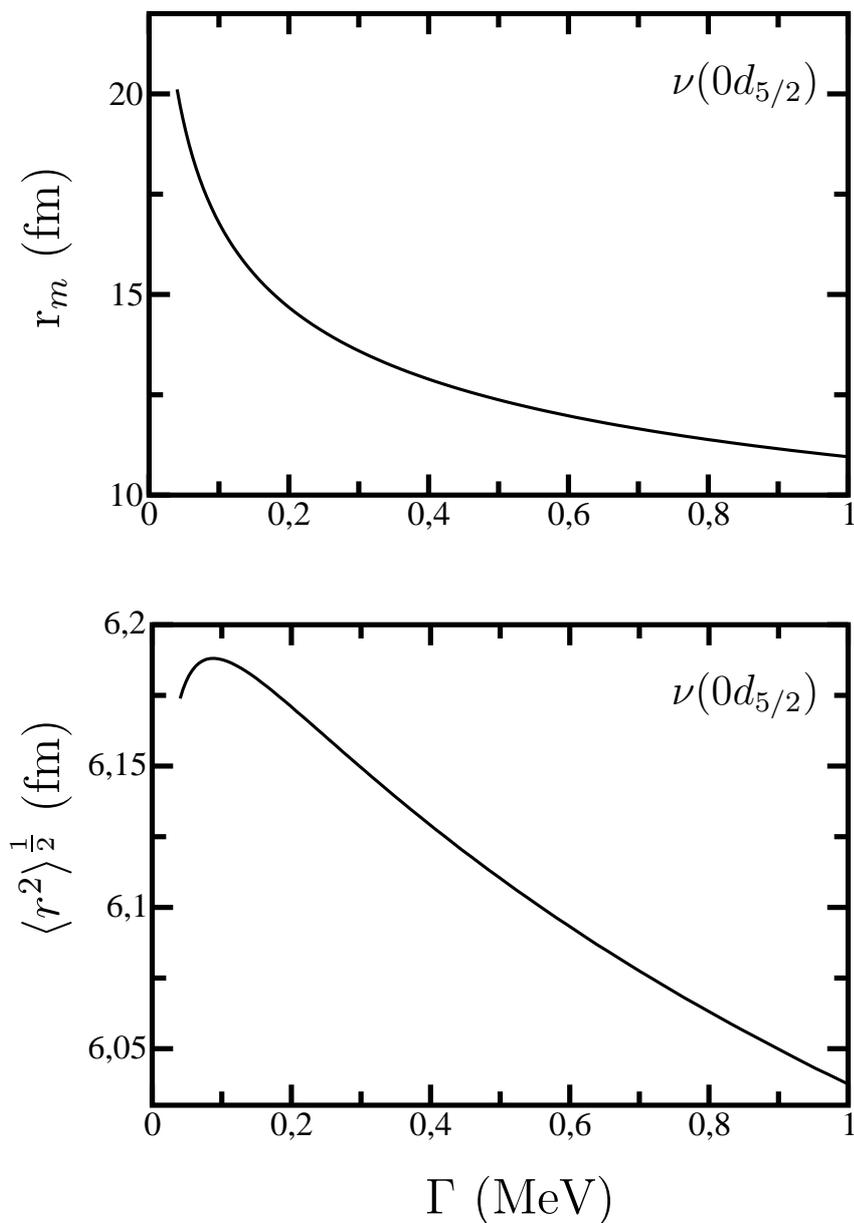


FIG. 3.2 – Variation du rayon carré moyen  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  et du point de jonction  $r_m$  en fonction de la largeur  $\Gamma$  de l'état résonnant neutron  $0d_{5/2}$ . La profondeur  $V_0$  du puits varie de 35 MeV à 29.54 MeV.

inférieure à celle de la barrière centrifuge, alors la fonction d'onde n'admet la forme asymptotique d'onde sortante libre que bien au delà du point tournant extérieur (i.e. le deuxième point d'intersection entre la barrière et l'énergie). Alors que pour une énergie bien supérieure à celle de la barrière, cette forme asymptotique peut être atteinte dans une région située en deçà du point tournant extérieur.

Afin d'illustrer la nouvelle méthode de coupure des résonances individuelles, nous présentons fig. (3.4,3.6,3.8) les EQLIC obtenus pour les trois exemples utilisés dans cette partie, et pour plusieurs positions de la résonance. Les figures (3.5,3.7,3.9) présentent les déphasages

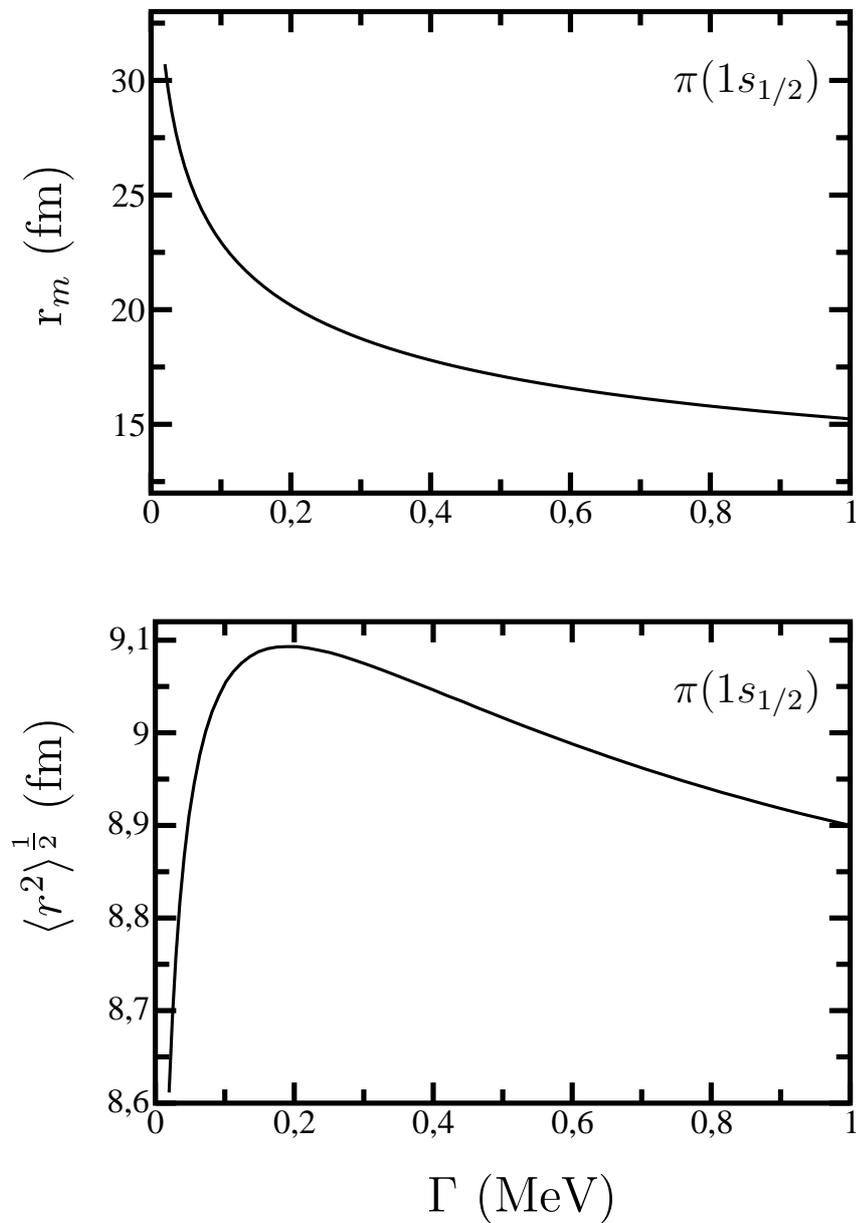


FIG. 3.3 – Variation du rayon carré moyen  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  et du point de jonction  $r_m$  en fonction de la largeur  $\Gamma$  de l'état résonnant proton  $1s_{1/2}$ . La profondeur  $V_0$  du puits varie de 44.5 MeV à 39.64 MeV.

résonnants en comparaison des déphasages non-résonnants obtenus par projection de l'hamiltonien individuel (cf. equ. (2.146)) au moyen de ces EQLIC.

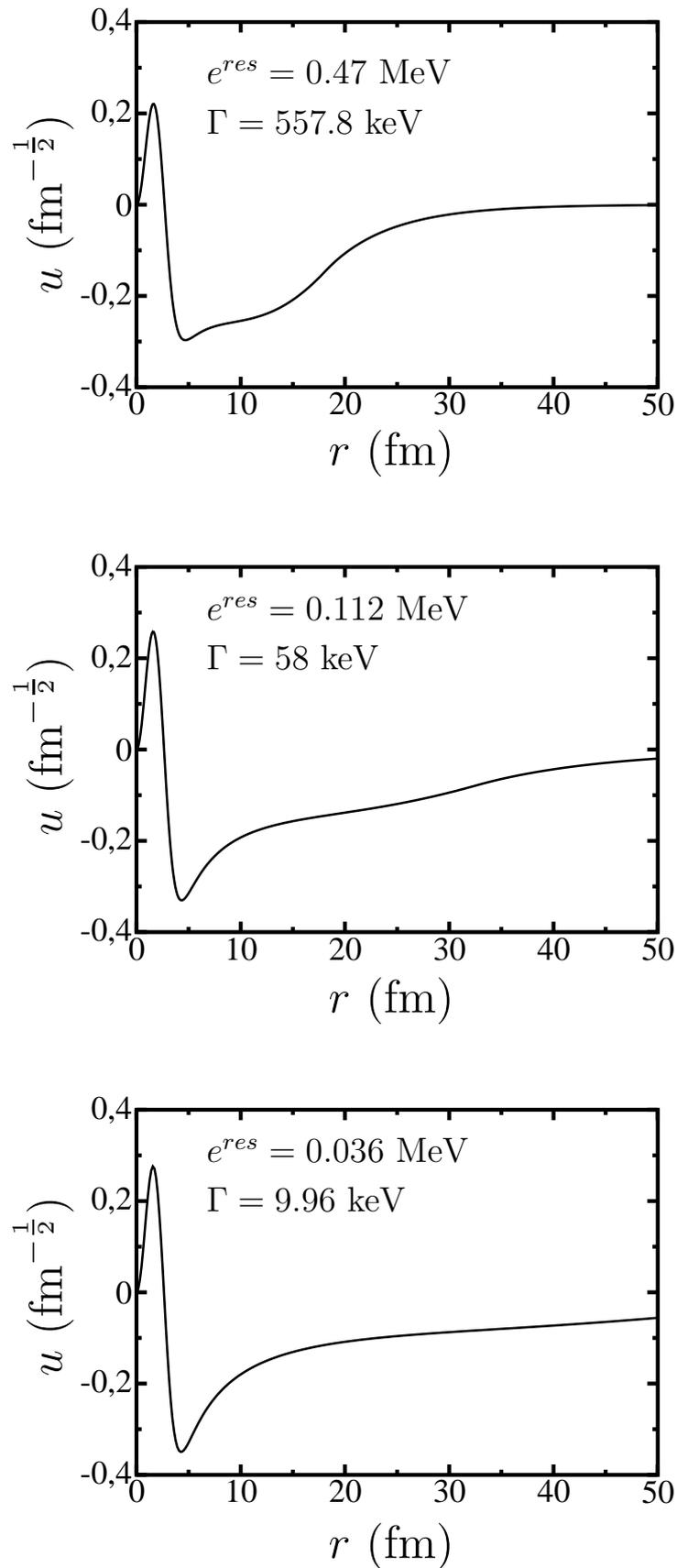


FIG. 3.4 – EQLIC  $1p_{1/2}$  neutron pour trois positions de la résonance.

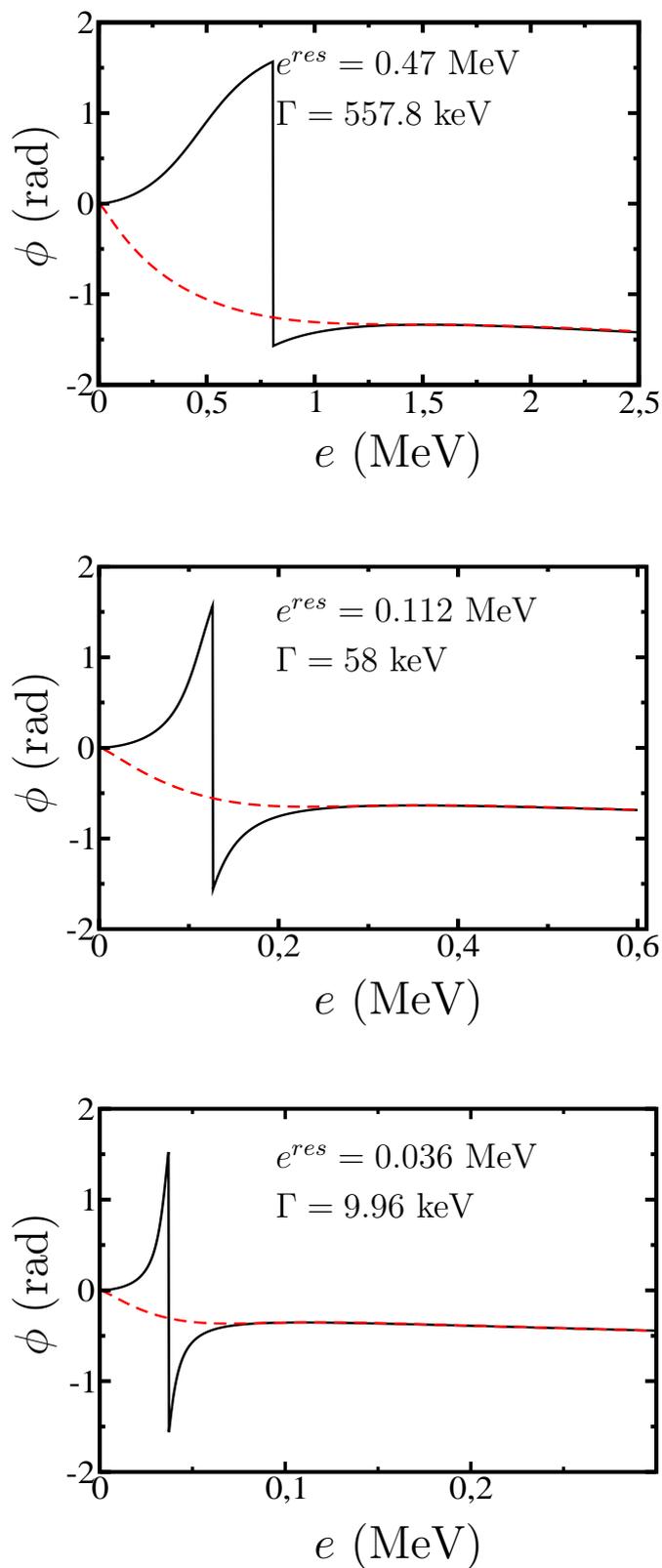


FIG. 3.5 – Déphasage du continuum résonnant (trait plein) comparé au déphasage du continuum non-résonnant (tirets) pour les trois exemples présentés fig. (3.4).

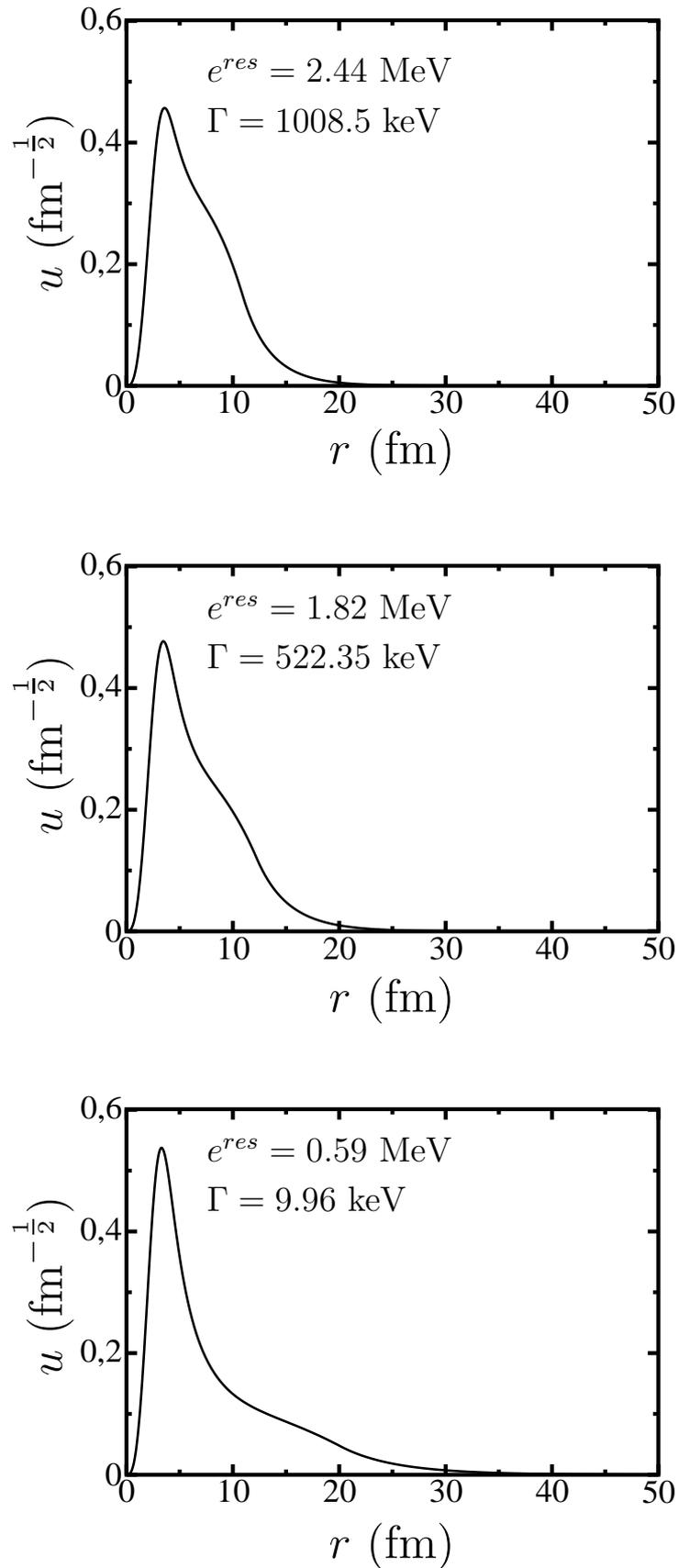


FIG. 3.6 – EQLIC  $0d_{5/2}$  neutron pour trois positions de la résonance.

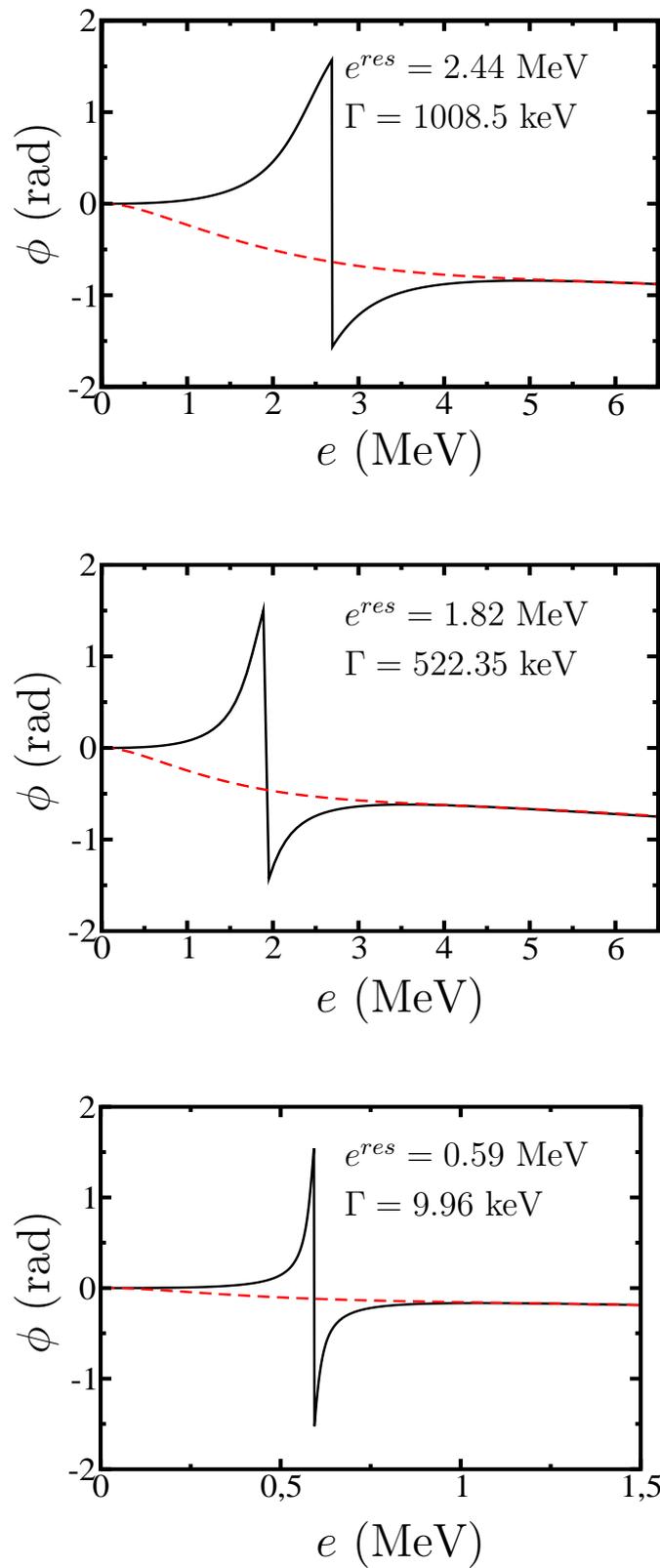


FIG. 3.7 – Déphasage du continuum résonnant (trait plein) comparé au déphasage du continuum non-résonnant (tirets) pour les trois exemples présentés fig. (3.6).

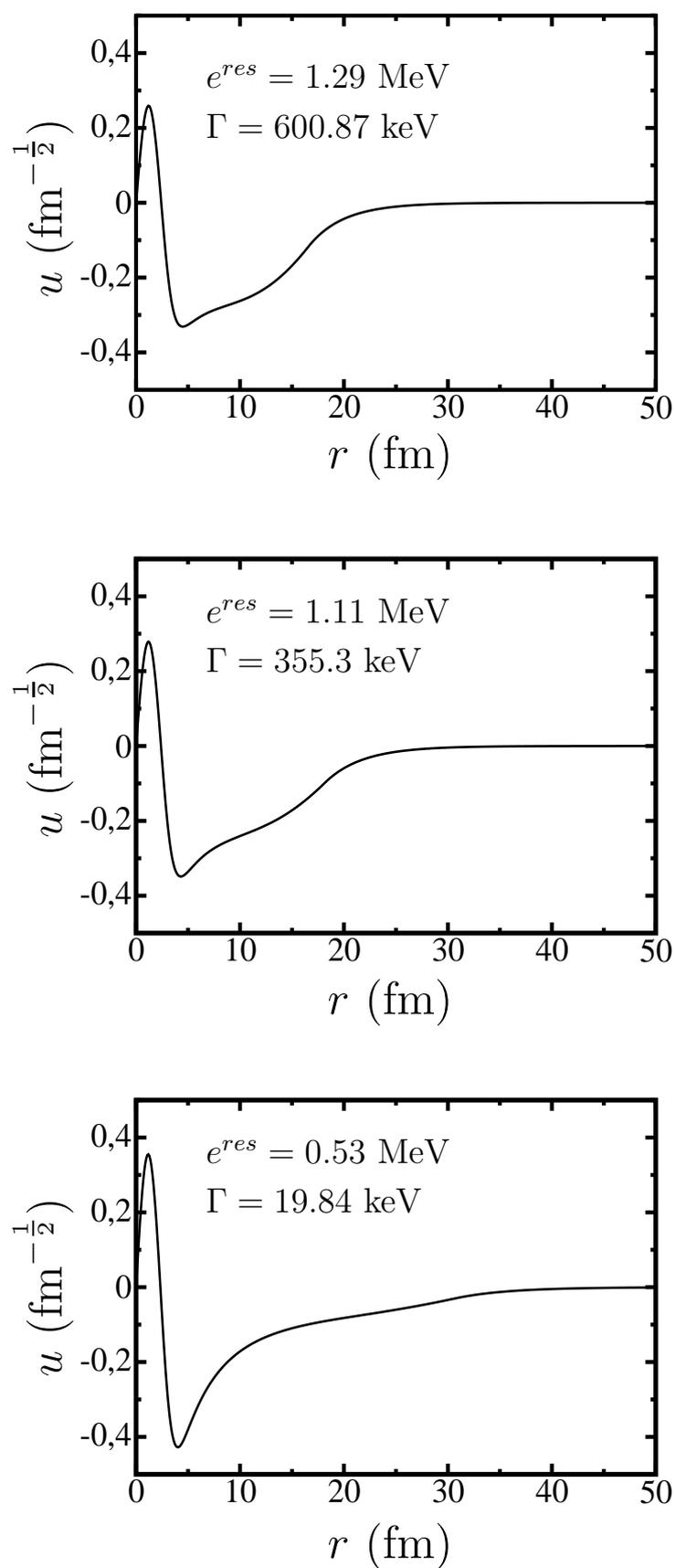


FIG. 3.8 – EQLIC  $1s_{1/2}$  proton pour trois positions de la résonance.

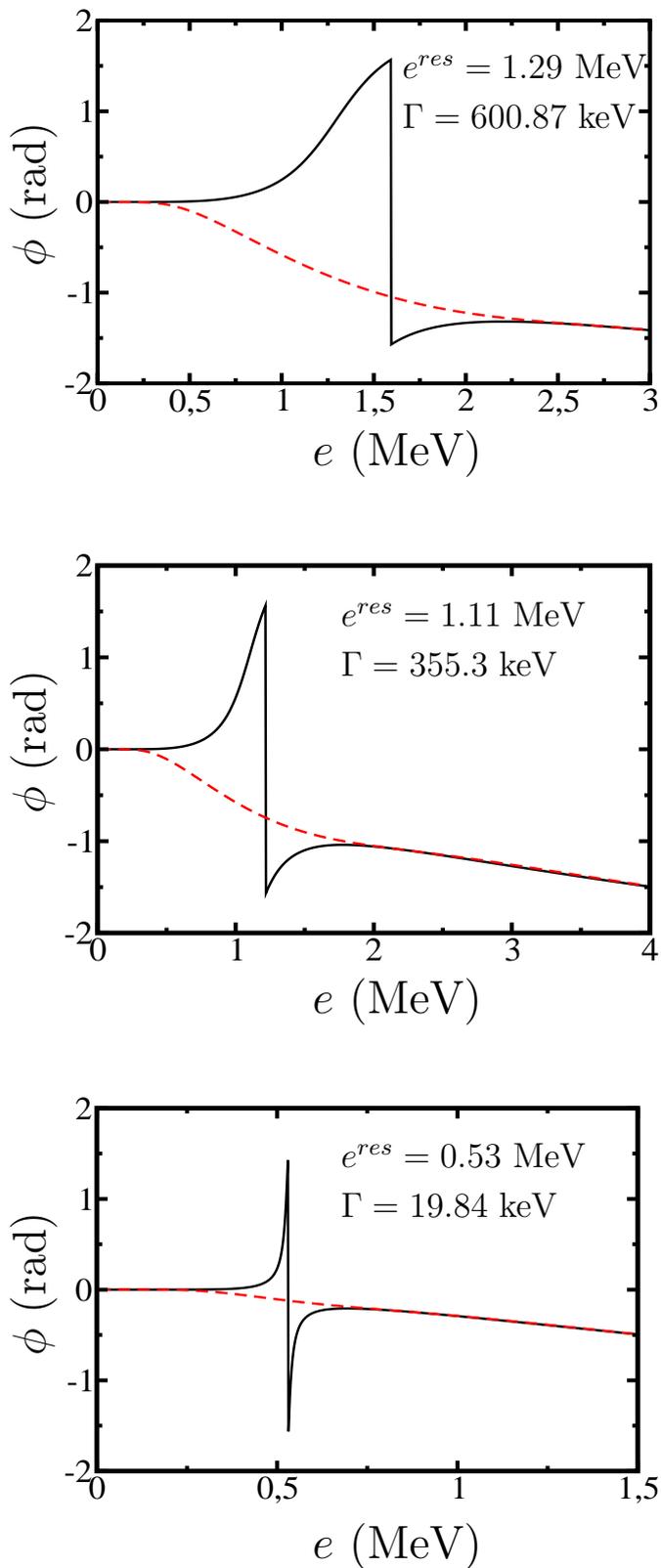


FIG. 3.9 – Déphasage du continuum résonnant (trait plein) comparé au déphasage du continuum non-résonnant (tirets) pour les trois exemples présentés fig. (3.8).

## 3.2 Interaction nucléon-nucléon

Nos calculs se basent sur la force de portée finie effective  $B1$  de Brink et Boeker [51] qui fut construite pour reproduire les énergies de liaison expérimentales de  ${}^4He$ ,  ${}^{16}O$  et  ${}^{40}Ca$ . Afin de prendre en compte l'interaction coulombienne, Bautista *et.al.* [52] ont légèrement modifié la force  $B1$ , menant à la force  $B1_a$ , et lui ont ajouté un terme spin-orbite de portée finie. La forme générale de l'interaction nucléon-nucléon que nous utiliserons prend la forme suivante,

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 \left( W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau \right) e^{-\beta_i^2 r^2} + V_{so} e^{-\beta_{so}^2 r^2} \left( \vec{L} \cdot \vec{S} \right) + \delta_{\tau_{z1}, -1/2} \delta_{\tau_{z2}, -1/2} \frac{C}{|\vec{r}|}, \quad (3.1)$$

où  $\vec{r}$  est la position relative des deux nucléons,  $P^\sigma$  est l'opérateur d'échange de spin,  $P^\tau$  est l'opérateur d'échange d'isospin et  $C$  est la constante de Coulomb. Les paramètres de l'interaction spin-orbite ont été ajustés de manière à reproduire le splitting  $\pi(0p)$  de 6.3 MeV dans  ${}^{16}O$  avec l'interaction  $B1_a$ , et prennent les valeurs suivantes :  $V_{so} = 81.5$  MeV et  $\beta_{so} = 1.2$  fm. Afin d'étudier les variations des résultats donnés par le modèle développé dans le chapitre 2 en fonction de l'interaction nucléon-nucléon, nous avons construit deux autres variantes de l'interaction originale  $B1$ , que l'on note  $B1_b$  et  $B1_c$ . Les paramètres des trois interactions ( $B1_a$ ,  $B1_b$  et  $B1_c$ ) que nous utiliserons dans ce chapitre sont présentés dans le tableau (3.1). Les énergies de liaison de  ${}^4He$ ,  ${}^{12}C$ ,  ${}^{14}C$ ,  ${}^{16}O$ ,  ${}^{17}F$  et  ${}^{40}Ca$  obtenues

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$
$W_1$ (MeV)	-77.335	-79.445	-80.1477
$B_1$ (MeV)	0	0	0
$H_1$ (MeV)	0	0	0
$M_1$ (MeV)	-63.274	-61.165	-60.4623
$\beta_1$ (fm <sup>-1</sup> )	0.51	0.51	0
$W_2$ (MeV)	595.55	595.55	595.55
$B_2$ (MeV)	0	0	0
$H_2$ (MeV)	0	0	0
$M_2$ (MeV)	-206.04	-206.04	-206.04
$\beta_2$ (fm <sup>-1</sup> )	2.04	2.04	2.04

TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres des interactions de type Brink-Boeker utilisées dans ce chapitre.

avec les interactions  $B1_a$ ,  $B1_b$  et  $B1_c$  sont comparées aux valeurs expérimentales dans le tableau (3.2). Les tableaux (3.3-3.7) présentent les énergies des états individuels pour ces mêmes noyaux et en fonction de l'interaction utilisée. Dans le cas particulier de  ${}^{17}F$ , nous donnons également les énergies des états inoccupés  $\nu(0d_{5/2})$ ,  $\nu(1s_{1/2})$  et  $\pi(1s_{1/2})$  car ces états font partie de l'espace de valence que nous utiliserons dans la partie suivante. Notons que pour les trois interactions que nous utilisons, l'état  $\pi(1s_{1/2})$  est situé dans le continuum. Nous construisons alors l'EQLIC correspondant à la partie réelle  $e^{res}$  de la position du pôle. C'est cette quantité ( $e^{res}$ ) qui apparaît dans le tableau (3.6) pour l'état  $\pi(1s_{1/2})$ . Enfin, les distributions de densité proton (dont l'expression est donnée en (6.61)) sont présentées figure (3.10) pour  ${}^{12}C$ ,  ${}^{16}O$ ,  ${}^{17}F$  et  ${}^{40}Ca$ .

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$	$Exp.$
${}^4He$	27.56	27.56	27.56	28.30
${}^{12}C$	64.54	69.60	71.37	92.16
${}^{14}C$	87.60	94.17	96.46	105.28
${}^{16}O$	117.42	125.82	128.74	127.62
${}^{17}F$	116.94	126.12	129.32	128.22
${}^{40}Ca$	342.18	382.00	396.20	342.05

TAB. 3.2 – *Energies de liaison (en MeV) en fonction de l'interaction utilisée, et comparaison avec les données expérimentales.*

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$
$\nu(0s_{1/2})$	-47.00	-48.97	-49.64
$\nu(0p_{3/2})$	-16.74	-17.89	-18.29
$\pi(0s_{1/2})$	-44.05	-45.96	-46.61
$\pi(0p_{3/2})$	-14.19	-15.29	-15.67

TAB. 3.3 – *Energies (en MeV) des états individuels de  ${}^{12}C$  en fonction de l'interaction.*

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$
$\nu(0s_{1/2})$	-47.43	-49.50	-50.21
$\nu(0p_{3/2})$	-19.88	-21.20	-21.66
$\nu(0p_{1/2})$	-13.72	-14.53	-14.81
$\pi(0s_{1/2})$	-49.88	-52.08	-52.83
$\pi(0p_{3/2})$	-20.56	-21.89	-22.35

TAB. 3.4 – *Energies (en MeV) des états individuels de  ${}^{14}C$  en fonction de l'interaction.*

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$
$\nu(0s_{1/2})$	-54.00	-56.33	-57.13
$\nu(0p_{3/2})$	-26.65	-28.21	-28.76
$\nu(0p_{1/2})$	-20.26	-21.29	-21.65
$\pi(0s_{1/2})$	-50.12	-52.37	-53.14
$\pi(0p_{3/2})$	-23.07	-24.57	-25.09
$\pi(0p_{1/2})$	-16.77	-17.74	-18.08

TAB. 3.5 – *Energies (en MeV) des états individuels de  ${}^{16}O$  en fonction de l'interaction.*

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$
$\nu(0s_{1/2})$	-55.52	-58.08	-58.96
$\nu(0p_{3/2})$	-28.35	-30.08	-30.69
$\nu(0p_{1/2})$	-22.09	-23.27	-23.67
$\nu(0d_{5/2})$	-5.15	-6.13	-6.49
$\nu(1s_{1/2})$	-1.47	-1.66	-1.97
$\pi(0s_{1/2})$	-50.21	-52.63	-53.46
$\pi(0p_{3/2})$	-23.24	-24.83	-25.38
$\pi(0p_{1/2})$	-17.30	-18.37	-18.75
$\pi(0d_{5/2})$	-0.831	-1.66	-1.97
$\pi(1s_{1/2})$	1.34	0.97	0.86

TAB. 3.6 – Energies (en MeV) des états individuels de  $^{17}F$  en fonction de l'interaction.

	$B1_a$	$B1_b$	$B1_c$
$\nu(0s_{1/2})$	-81.50	-87.22	-89.22
$\nu(0p_{3/2})$	-53.83	-57.88	-59.31
$\nu(0p_{1/2})$	-48.39	-51.68	-52.83
$\nu(0d_{5/2})$	-29.50	-32.26	-33.24
$\nu(0d_{3/2})$	-21.12	-22.75	-23.33
$\nu(1s_{1/2})$	-24.85	-27.37	-28.27
$\pi(0s_{1/2})$	-72.88	-78.34	-80.25
$\pi(0p_{3/2})$	-45.76	-49.58	-50.93
$\pi(0p_{1/2})$	-40.39	-43.46	-44.53
$\pi(0d_{5/2})$	-21.91	-24.44	-25.35
$\pi(0d_{3/2})$	-13.68	-15.11	-15.62
$\pi(1s_{1/2})$	-17.13	-19.43	-20.26

TAB. 3.7 – Energies (en MeV) des états individuels de  $^{40}Ca$  en fonction de l'interaction.

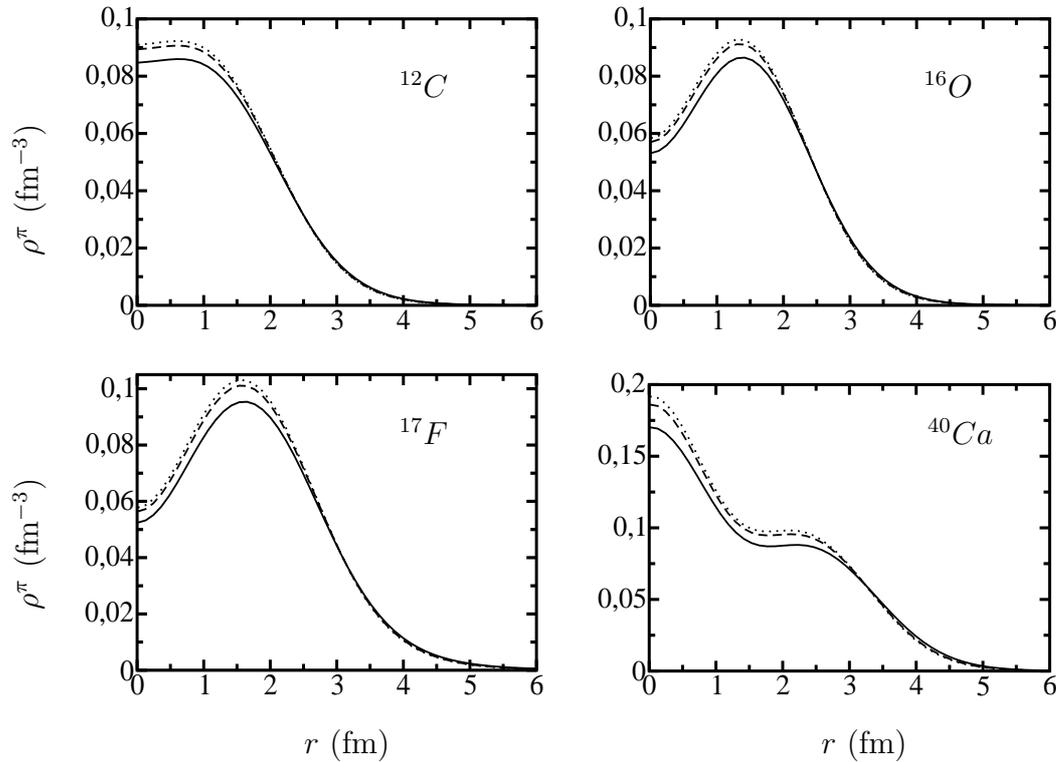


FIG. 3.10 – Distributions de densité proton pour l'interaction  $B1_a$  (lignes continues), pour l'interaction  $B1_b$  (lignes en tirets) et pour l'interaction  $B1_c$  (lignes en pointillés).

### 3.3 Spectroscopie de $^{17}F$ et $^{17}O$ et déphasages de diffusion $^{16}O(p, p)^{16}O$

Nous choisissons, comme premier test, d'appliquer le modèle au calcul du spectre de  $^{17}F$ . Les énergies (complexes) composant ce spectre sont solution de (2.338). Rappelons alors que le calcul des éléments de matrice de l'hamiltonien effectif nécessite le calcul du recouvrement de la solution des équations inhomogènes de canaux couplés avec le terme source de ces équations (cf. equ. (2.337)). Ces équations inhomogènes sont résolues pour une énergie intrinsèque totale  $E$  qui, pour un canal donné, peut s'écrire,

$$E = E_{A-1} + e, \quad (3.2)$$

où  $E_{A-1}$  est l'énergie intrinsèque de la cible (constituée de  $A - 1$  particules) et  $e$  est l'énergie incidente du projectile par rapport à la cible. L'énergie de l'état de la cible peut se décomposer de la manière suivante,

$$E_{A-1} = \mathcal{E}_{A-1} + E_{A-1}^0, \quad (3.3)$$

où  $E_{A-1}^0$  est l'énergie de l'état fondamental, et  $\mathcal{E}_{A-1}$  est l'énergie d'excitation par rapport à l'état fondamental. De même, l'énergie du système à  $A$  particules liées peut s'écrire,

$$E_A = \mathcal{E}_A + E_A^0. \quad (3.4)$$

Les valeurs propres (complexes) de l'hamiltonien effectif peuvent s'écrire,

$$\tilde{E} = E_A + \Delta + i\frac{\Gamma}{2}, \quad (3.5)$$

où  $\Delta$  est une correction réelle à l'énergie  $E_A$ , et  $\Gamma$  correspond à la largeur de l'état. Les pôles de la partie résonnante de la matrice de diffusion (2.336) correspondent alors aux zéros des quantités suivantes,

$$E - \tilde{E} = e - (\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_{A-1} + \Delta + i\frac{\Gamma}{2}) - \delta, \quad (3.6)$$

où nous avons posé,

$$\delta = E_A^0 - E_{A-1}^0. \quad (3.7)$$

Nous considérons alors  $\delta$  comme un paramètre libre que l'on ajuste afin de reproduire l'énergie de séparation du noyau considéré. L'interaction de modèle en couches utilisée pour fournir les mélanges de configurations des systèmes liés à  $A - 1$  et  $A$  particules est l'interaction *ZBM\_F* [27], dérivée de l'interaction *ZBM* proposée par Zuker, Buck et Mc Grory [53] en vue de donner une description des noyaux avec  $A \sim 16$ . Cette interaction considère le noyau comme un cœur de  $^{12}\text{C}$  auquel s'ajoutent des nucléons de valence se distribuant sur les couches  $0p_{1/2}$ ,  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$ . Dans nos calculs, nous ne considérons que le canal de décroissance de  $^{17}\text{F}$  en  $^{16}\text{O} + p$ , où  $^{16}\text{O}$  est dans l'état fondamental. Ceci reste une approximation raisonnable si l'on s'intéresse à des domaines d'énergie bien en deçà de l'énergie où le premier canal de diffusion inélastique s'ouvre, c'est à dire  $\sim 7.6$  MeV. Le tableau (3.8) présente le spectre obtenu par résolution de l'équation (2.338) dans le plan complexe pour les trois interactions nucléon-nucléon discutées dans la section précédente, en comparaison des énergies de modèle en couches standard et des énergies expérimentales.

$J^\pi$	SM $E$ (MeV)	$B1_a$		$B1_b$		$B1_c$		Exp	
		$E$ (MeV)	$\Gamma$ (keV)						
5/2+	-0.592	-1.154	—	-1.103	—	-1.082	—	-0.600	—
1/2+	-0.105	-0.105	—	-0.105	—	-0.105	—	-0.105	—
1/2-	2.527	2.601	47.240	2.617	52.105	2.628	54.125	2.504	19
5/2-	3.178	3.228	0.370	3.249	0.354	3.260	0.357	3.257	1.5
3/2-	4.040	4.184	18.743	4.210	20.314	4.225	21.151	4.040	225
9/2-	4.576	4.730	$\sim 0$	4.757	$\sim 0$	4.772	$\sim 0$	4.620	—
3/2-	4.912	5.065	7.240	5.092	7.594	5.107	8.075	4.888	48
7/2-	5.111	5.206	2.562	5.228	2.700	5.241	2.768	5.072	40
5/2-	5.467	5.611	0.002	5.637	0.006	5.653	0.004	5.082	< 0.6
3/2+	5.393	5.544	15.466	5.571	19.241	5.586	21.736	5.220	180
1/2-	5.043	5.194	13.424	5.220	14.609	5.236	15.047	5.437	30
1/2+	6.126	6.274	20.184	6.303	21.518	6.318	21.111	5.960	200
5/2+	6.780	6.923	16.909	6.949	15.370	6.964	14.942	6.097	$\leq 1.8$
3/2+	6.588	6.745	36.586	6.774	37.894	6.791	38.428	6.178	4.5

TAB. 3.8 – *Energies de modèle en couches (SM) et énergies (et largeurs) du modèle en couches avec couplage aux états du continuum en comparaison des données expérimentales pour  $^{17}\text{F}$ . L'interaction de modèle en couches ZBM\_F a été utilisée pour fournir les mélanges de configurations. Le paramètre  $\delta$  a été ajusté de manière à reproduire l'énergie expérimentale du premier état excité 1/2+ (-105 keV). Il prend la valeur de -0.434 MeV pour l'interaction  $B1_a$ , de -0.407 MeV pour l'interaction  $B1_b$  et de -0.392 MeV pour l'interaction  $B1_c$ .*

Nous observons une forte influence du couplage au continuum pour l'état fondamental  $5/2+$  qui est beaucoup abaissé en comparaison de la valeur expérimentale. Même la valeur donnée par le modèle en couches est plus correcte. L'importance de la correction  $\Delta$  (cf. equation (3.5)) est relative à l'amplitude du terme source apparaissant dans les équations inhomogènes. Le terme source correspondant à cet état est celui de plus grande amplitude. Les inadéquations entre valeurs théoriques et expérimentales peuvent s'expliquer en premier lieu par les mélanges de configurations utilisés, fittés pour un calcul de modèle en couches standard, et non pour un calcul de modèle en couches avec couplage aux états du continuum. D'autre part, la troncation de l'espace de valence ne nous permet pas d'inclure l'état individuel proton  $d_{3/2}$  dans l'espace  $q$ . A titre de comparaison, nous présentons, tableau (3.9), le spectre de  $^{17}\text{O}$  pour l'interaction  $B1_a$ , en comparaison des énergies de modèle en couches et des valeurs expérimentales.

$J^\pi$	SM $E$ (MeV)	$B1_a$		Exp	
		$E$ (MeV)	$\Gamma$ (keV)	$E$ (MeV)	$\Gamma$ (keV)
5/2+	-4.222	-4.820	—	-4.143	—
1/2+	-3.734	-3.862	—	-3.272	—
1/2-	-1.102	-1.127	—	-1.088	—
5/2-	-0.451	-0.520	—	-0.300	—
3/2-	0.411	0.411	6.075	0.411	40.0
9/2-	0.947	0.977	$\sim 0$	1.073	$< 0.1$
3/2-	1.283	1.311	4.0	1.236	28.0
7/2-	1.482	1.508	0.002	1.554	3.4
5/2-	1.838	1.861	0.01	1.590	$< 1.0$
3/2+	1.764	1.770	10.222	1.726	6.6
1/2-	1.414	1.440	5.697	1.796	32.0

TAB. 3.9 – *Energies de modèle en couches (SM) et énergies (et largeurs) du modèle en couches avec couplage aux états du continuum en comparaison des données expérimentales pour  $^{17}\text{O}$ . L'interaction de modèle en couches ZBM\_F a été utilisée pour fournir les mélanges de configurations. Le paramètre  $\delta$  a été ajusté de manière à reproduire l'énergie expérimentale du premier état non lié 3/2- (411 keV). Il prend la valeur de -4.187 MeV pour l'interaction  $B1_a$ .*

Nous observons cette fois-ci que le couplage au continuum réajuste l'écart entre les deux premiers niveaux ( $5/2+$  et  $1/2+$ ). Cependant les largeurs restent en général trop faibles pour les états de parité négative.

Les déphasages de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  pour les ondes partielles  $1/2^-$ ,  $7/2^-$ ,  $3/2^+$  et  $3/2^-$  sont présentés figures (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14) respectivement. Ces résultats ont été obtenus avec l'interaction  $B1_a$ . Les données expérimentales proviennent de [54].

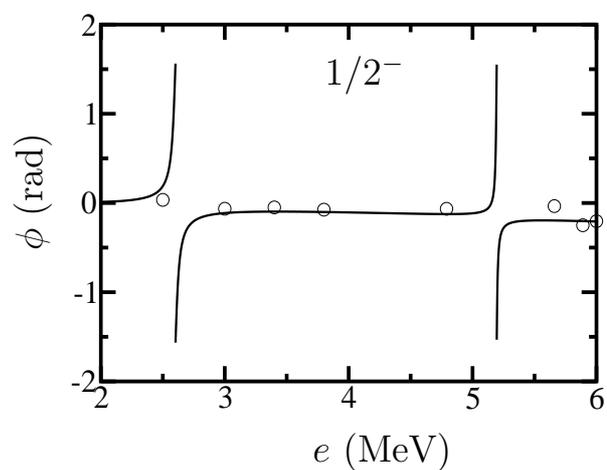


FIG. 3.11 – Déphasage de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  pour l'onde partielle  $1/2^-$  en comparaison de données expérimentales (cercles).

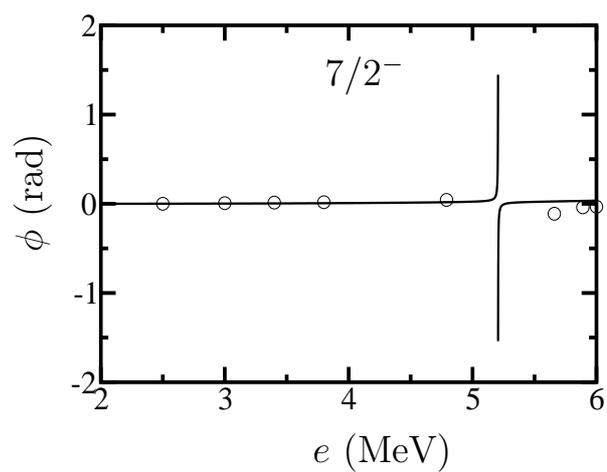


FIG. 3.12 – Déphasage de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  pour l'onde partielle  $7/2^-$  en comparaison de données expérimentales (cercles).

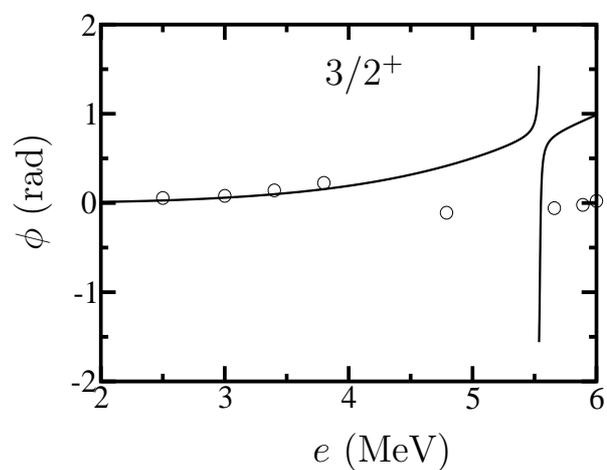


FIG. 3.13 – Déphasage de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  pour l'onde partielle  $3/2^+$  en comparaison de données expérimentales (cercles).

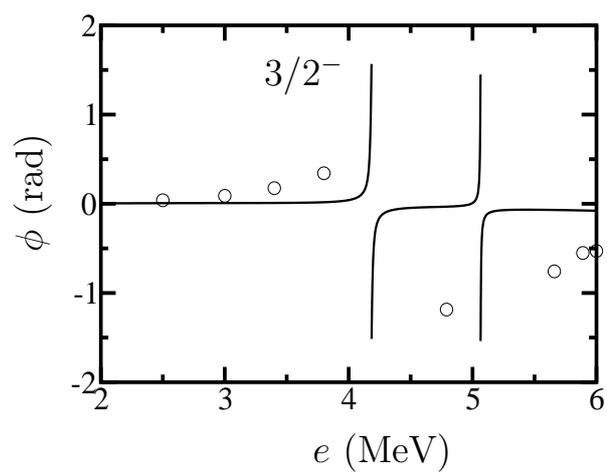


FIG. 3.14 – Déphasage de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  pour l'onde partielle  $3/2^-$  en comparaison de données expérimentales (cercles).

# Chapitre 4

## Modèle en couches avec un nombre arbitraire de particules peuplant les états du continuum

Une approche structurale prenant en compte le couplage d'une seule particule aux états du continuum individuel mène aisément à un problème de diffusion avec réarrangement. Une particule peuplant un état du continuum a en effet une probabilité non-nulle d'être détectées dans la région asymptotique, ce qui mène à un problème à deux corps asymptotique. Lorsque deux ou plus particules peuplent les états du continuum, la variété des processus de réaction possibles prenant en compte la structure du système devient très riche, trop riche. En effet, si plusieurs particules ont une probabilité non-nulle d'être détectée dans une région éloignée de celle de la réaction, toute forme d'asymptotique possible (deux, trois et plus corps) est théoriquement à prendre en compte dans un calcul de voies couplées. Cependant, la sélection de certains processus, dont on sait qu'ils sont prépondérants pour tels types de noyaux et pour certaines gammes d'énergie, permet en général de simplifier considérablement le problème. Dans ce chapitre, nous n'étudierons pas tous les cas de figure et nous limiterons l'application du formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum au problème standard des canaux de réaction couplés n'incluant que les partitions de masse où le système est scindé en deux fragments. Il s'agit là d'une généralisation directe du formalisme. Cette approche est purement formelle et n'a fait l'objet d'aucune « expérimentation » numérique. Il est à noter que seul un calcul massivement parallèle est susceptible d'en fournir des résultats quantitatifs.

### 4.1 Considérations générales

#### 4.1.1 Espaces des canaux physiques

La méthode des canaux de réaction couplés [55, 56] suppose que le vecteur d'état  $|\psi\rangle$  satisfaisant à,

$$(E - H)|\psi\rangle = 0, \quad (4.1)$$

où  $H$  est l'hamiltonien intrinsèque du système total, peut être approximé par une superposition d'états à deux fragments correspondant aux états stationnaires du système dans la

région asymptotique. On obtient alors un système d'équations intégral-différentielles pour la fonction d'onde du mouvement relatif de ces deux fragments. En considérant un système composé de  $A$  nucléons, nous le scindons en une cible composée de  $A - i$  particules et décrite par ses vecteurs d'état liés que l'on note  $\{|T_{A-i}\rangle\}$  et un projectile composé de  $i$  particules et décrit par ses vecteurs d'état liés que l'on note  $\{|P_i\rangle\}$ . Les états stationnaires asymptotiques du système total dans cette partition de masse, que l'on appellera « partition de masse  $i$  », peuvent alors s'écrire,

$$|T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle, \quad (4.2)$$

où  $|\vec{q}_i\rangle$  est une onde plane de moment  $\vec{q}_i$  décrivant le mouvement relatif cible-projectile. En notant  $\vec{x}_i$  la coordonnée relative séparant les centres de masse des deux fragments, nous pouvons définir, comme dans la section (2.3.3), le projecteur  $\tilde{P}_i$  sur l'ensemble des canaux d'excitation correspondant à la partition de masse  $i$  de la manière suivante,

$$\tilde{P}_i = \sum_{T_{A-i}} \sum_{P_i} \int d^3x_i |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i\rangle \langle T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i|, \quad (4.3)$$

où les sommations portent sur tous les états liés de la cible et du projectile. Nous noterons  $\tilde{\mathcal{P}}_i$  l'espace sur lequel projette  $\tilde{P}_i$ . La figure (4.1) illustre schématiquement différentes partitions de masse d'un système composé de  $A = 7$  particules où les états intrinsèques de la cible sont naïvement représentés dans un système de coordonnées relatives telles que celui introduit dans la section (2.4.3.1), et ceux du projectile dans un système de coordonnées de type Jacobi.

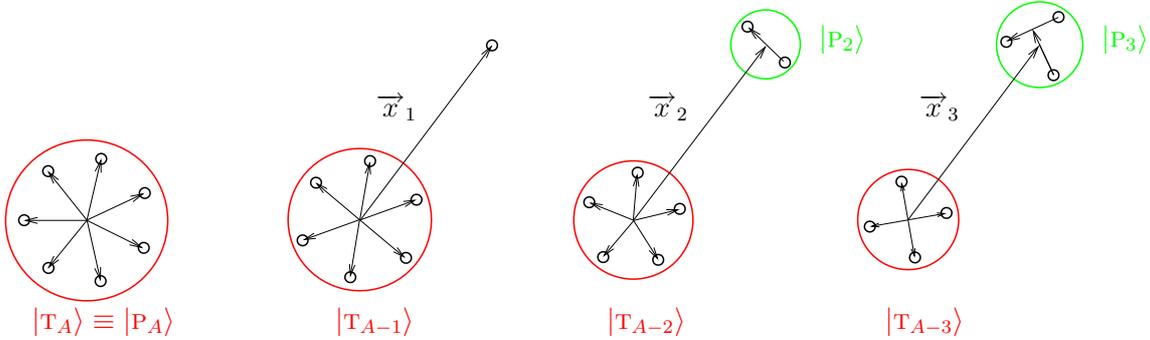


FIG. 4.1 – Exemples de partition de masse à deux fragments.

Rappelons alors que les états (4.2) pour différentes partitions de masse sont états propres d'hamiltoniens différents. Par conséquent, ils ne sont pas orthogonaux. De plus, les espaces des canaux d'excitation pour des partitions de masse différentes ne sont pas linéairement indépendants. Ces deux malheureux problèmes (non orthogonalité et sur-complétude) peuvent se résumer par les deux formules (non moins malheureuses) suivantes,

$$\tilde{P}_i \tilde{P}_j \neq \delta_{i,j} \tilde{P}_i, \quad (4.4a)$$

$$\sum_i \tilde{P}_i > \mathbf{1}. \quad (4.4b)$$

### 4.1.2 Espaces modèles

Bien que nous sommes supposés, dans ce chapitre, généraliser le formalisme en prenant en compte les espaces engendrés par tous les déterminants de Slater (2.173), nous limiterons le nombre de particules peuplant les états du continuum à une valeur maximum  $i_{max}$  telle que  $i_{max} \ll A/2$ . Les raisons de cette limitation deviendront claires par la suite.

Considérons un état de Fock à  $A$  particules dont  $i$  occupent les états du continuum. Un tel état peut être décomposé dans la base de Fock engendrée par les déterminants de Slater du type,

$$|d_1, d_2, \dots, d_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i\rangle = a_{c_i}^\dagger \cdots a_{c_2}^\dagger a_{c_1}^\dagger a_{d_{A-i}}^\dagger \cdots a_{d_2}^\dagger a_{d_1}^\dagger | \rangle, \quad (4.5)$$

où nous reprenons les notations introduites dans la section (2.4.2.1). En notant  $\{|T'_{A-i}\rangle\}$  une base complète orthogonale de l'espace de Fock à  $A-i$  particules liées, obtenue à partir des déterminants de Slater du type  $|d_1, d_2, \dots, d_{A-i}\rangle$  par transformation orthogonale, nous pouvons définir une base de l'espace de Fock comprenant  $i$  particules dans un état de diffusion au moyen des états,

$$|T'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i\rangle = \sum_{\{d\}} \mathcal{C}_{\{d\}} |d_1, d_2, \dots, d_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i\rangle, \quad (4.6)$$

où la sommation sur  $\{d\}$  et les coefficients  $\mathcal{C}_{\{d\}}$  symbolisent la combinaison linéaire sur les états liés. Le projecteur  $P_i$  sur l'espace  $\mathcal{P}_i$  des états de Fock avec  $i$  particules peuplant les états du continuum peut alors s'écrire,

$$P_i = \sum_{T'_{A-i}} \sum_{c_1 < c_2 < \dots < c_i} |T'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i\rangle \langle T'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i|, \quad (4.7)$$

où l'ordonnement dans la sommation sur les états du continuum est nécessaire pour éviter les comptages multiples, dûs à l'antisymétrisation, de déterminants de Slater. Cependant, nous pouvons supprimer cet ordonnement (peu commode) en divisant par le nombre de fois ( $i!$ ) qu'apparaît chaque déterminant de Slater. Nous écrirons donc,

$$P_i = \frac{1}{i!} \sum_{T'_{A-i}} \sum_{\{c_k\}} |T'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i\rangle \langle T'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i|, \quad (4.8)$$

où  $\{c_k\}$  symbolise tout ensemble de  $i$  états de diffusion individuels sans ordonnement particulier. Dans le cadre de notre approximation, les espaces  $\mathcal{P}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, i_{max}$ ) sont suffisants pour décrire l'ensemble des états accessibles au système. De plus, ces espaces sont orthogonaux par construction. Nous résumons ces deux faits heureux par les deux formules (non moins heureuses) suivantes,

$$P_i P_j = \delta_{i,j} P_i, \quad (4.9a)$$

$$\sum_i P_i = \mathbf{1}. \quad (4.9b)$$

### 4.1.3 Lien entre les espaces modèles et les canaux physiques

Nous commençons ici en introduisant, comme dans la section (2.4.3.1), l'approximation visant à assimiler, pour une partition de masse  $i$  donnée, l'état de la cible  $|T_{A-i}\rangle$  dans la région asymptotique, au sous état à  $A - i$  particules liées  $|T'_{A-i}\rangle$ ,

$$\langle T_{A-i} | T'_{A-i} \rangle = \delta_{T,T'}. \quad (4.10)$$

Nous comprenons dès lors la limitation imposée sur le nombre de particules peuplant les états du continuum. En effet, si nous pouvons facilement prendre en compte le recul de la cible pour le mouvement relatif des deux fragments, le changement de position de l'origine du champ moyen devient problématique si  $A - i \sim i$ , et ne peut être traité de manière satisfaisante dans un formalisme indépendant du temps.

Nous nous proposons maintenant, et ce à l'aide de l'approximation (4.10), de déduire quelques propriétés relatives aux produits de projecteurs du type  $\tilde{P}_i P_j$ . Nous voyons déjà que, si le nombre de particules peuplant les états du continuum est supérieur au nombre de particules constituant le projectile, alors ce produit est nul,

$$\tilde{P}_i P_j \equiv 0, \quad \text{si } j > i. \quad (4.11)$$

En effet, ce produit d'opérateurs contient nécessairement le recouvrement d'un état du continuum individuel avec un des états liés de la cible, ces deux états étant orthogonaux car supposés issus du même champ moyen. La figure (4.2) illustre schématiquement ce fait.

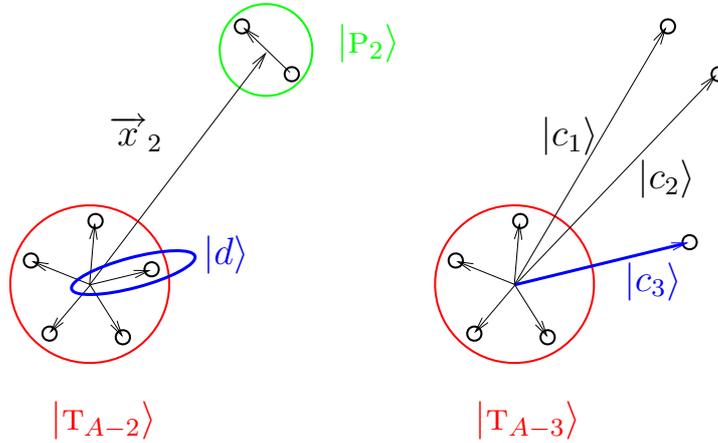


FIG. 4.2 – *A gauche est illustré un élément de l'espace des canaux à deux fragments pour la partition de masse 2 (voir texte). A droite est illustré un élément de l'espace dans lequel trois particules peuplent les états du continuum, symbolisés par  $|c_1\rangle$ ,  $|c_2\rangle$  et  $|c_3\rangle$ . Le recouvrement de ces deux éléments implique nécessairement celui de l'un des états liés de la cible  $|T_{A-2}\rangle$ , symbolisé par  $|d\rangle$ , avec l'un des états du continuum (p. ex.  $|c_3\rangle$ ).*

En revanche, si le nombre de particules occupant un état de diffusion est inférieur ou égal au nombre de particules constituant le projectile, le recouvrement correspondant n'est pas forcément nul,

$$\tilde{P}_i P_j \neq 0, \quad \text{si } j \leq i. \quad (4.12)$$

Cependant, une simple illustration graphique (figure (4.3)) est suffisante pour nous convaincre du fait suivant : pour une partition de masse  $i$ , seuls les états avec au moins  $i$  particules dans un état de diffusion sont de contribution non nulle dans la région asymptotique, c'est à dire lorsque la coordonnée relative  $\vec{x}_i$  des deux fragments devient grande. Nous pouvons alors écrire,

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} \tilde{P}_i P_j = 0, \quad \text{si } j < i. \quad (4.13)$$

Enfin, nous résumons les résultats précédents en écrivant,

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} \tilde{P}_i P_j = \delta_{i,j} \tilde{P}_i P_i. \quad (4.14)$$

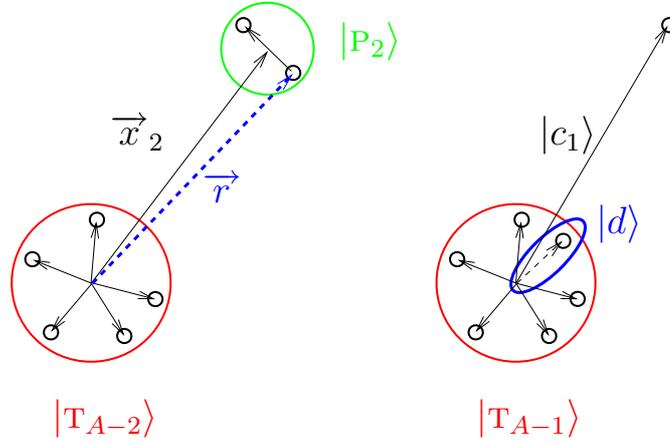


FIG. 4.3 – A gauche est illustré un élément de l'espace des canaux à deux fragments pour la partition de masse 2 (voir texte). A droite est illustré un élément de l'espace dans lequel une seule particule occupe un état du continuum, symbolisé par  $|c_1\rangle$ . Lorsque la distance relative  $x_2$  des deux fragments devient grande, alors le module de la coordonnée  $\vec{r}$  dans laquelle est évalué l'un des états liés (symbolisé par  $|d\rangle$ ) de l'état  $|T_{A-1}\rangle$  devient également grand, du fait du confinement du projectile à une région localisée de l'espace. L'état lié  $|d\rangle$  admettant une asymptotique nulle, l'élément de droite ne contribue pas à celui de gauche lorsque  $x_2$  devient grande.

Nous nous proposons maintenant de calculer explicitement le produit d'opérateurs  $\tilde{P}_i P_i$  afin d'en déduire certaines propriétés. A cette fin, nous commençons par exprimer le déterminant de Slater (4.5) de l'espace  $\mathcal{P}_i$  en un produit de déterminants de Slater de la manière suivante,

$$|d_1, d_2, \dots, d_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i\rangle = \sqrt{\frac{(A-i)! i!}{A!}} \sum_{\hat{P}} \hat{\pi}_P \hat{P} \left( |d_1, d_2, \dots, d_{A-i}\rangle \otimes |c_1, c_2, \dots, c_i\rangle \right). \quad (4.15)$$

Dans nos conventions,  $|d_1, d_2, \dots, d_{A-i}\rangle$  est une combinaison linéaire antisymétrique des particules  $(1, 2, \dots, A-i)$  et  $|c_1, c_2, \dots, c_i\rangle$  est une combinaison linéaire antisymétrique des particules  $(A-i+1, \dots, A)$ . Dans (4.15),  $\hat{P}$  est un opérateur de permutation (de parité  $\pi_P$ ), et la sommation porte sur toutes les permutations possibles entre les groupes de particules

$(1, 2, \dots, A-i)$  et  $(A-i+1, \dots, A)$  (les permutations au sein de chaque groupe ne sont pas prises en compte). Nous supposons alors que, dans un état  $|\mathbb{T}_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i\rangle$  de la base des canaux d'excitation dans la partition de masse  $i$ , l'état  $|\mathbb{T}_{A-i}\rangle$  de la cible est antisymétrique et constitué des particules  $(1, 2, \dots, A-i)$ , et le projectile est antisymétrique et constitué des particules  $(A-i+1, \dots, A)$ . Ceci nous permet d'écrire,

$$\langle \mathbb{T}_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i | d_1, d_2, \dots, d_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i \rangle = \sqrt{\frac{(A-i)! i!}{A!}} \langle \mathbb{T}_{A-i} | d_1, d_2, \dots, d_{A-i} \rangle \langle P_i \otimes \vec{x}_i | c_1, c_2, \dots, c_i \rangle, \quad (4.16)$$

car, les états  $c_1, c_2, \dots, c_i$  du continuum individuel étant orthogonaux à tous les états liés constituant l'état  $|\mathbb{T}_{A-i}\rangle$ , seule la permutation correspondant à l'identité est de contribution non nulle. Enfin, en remplaçant les déterminants de Slater (4.15) par les états définis en (4.6), et en utilisant (4.10), nous obtenons,

$$\langle \mathbb{T}_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i | \mathbb{T}'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i \rangle = \sqrt{\frac{(A-i)! i!}{A!}} \delta_{\mathbb{T}, \mathbb{T}'} \langle P_i \otimes \vec{x}_i | c_1, c_2, \dots, c_i \rangle. \quad (4.17)$$

Avant d'aller plus loin, livrons nous à quelques considérations. Un déterminant de Slater à  $i$  particules peut s'écrire,

$$|a_1, a_2, \dots, a_i\rangle = \mathcal{A}_i |a_1(1), a_2(2), \dots, a_i(i)\rangle, \quad (4.18)$$

où l'antisymétriseur  $\mathcal{A}_i$  admet l'expression suivante,

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{\sqrt{i!}} \sum_P (-1)^P \hat{P}, \quad (4.19)$$

où  $\hat{P}$  est un opérateur de permutation (de parité  $(-1)^P$ ) et où la sommation porte sur les  $i!$  permutations possibles. Le recouvrement de deux déterminants de Slater peut alors s'écrire,

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_i | b_1, b_2, \dots, b_i \rangle = \frac{1}{i!} \sum_{P, P'} (-1)^{P+P'} \langle a_1(1), a_2(2), \dots, a_i(i) | P^\dagger P' | b_1(1), b_2(2), \dots, b_i(i) \rangle. \quad (4.20)$$

Or, le produit  $P^\dagger P'$  est également un élément du groupe, de parité  $(-1)^{P+P'}$ . En posant  $P'' = P^\dagger P'$ , nous pouvons écrire,

$$\sum_{P, P'} (-1)^{P+P'} P^\dagger P' = \sum_P \left( \sum_{P''} (-1)^{P''} P'' \right) = \sum_P \sqrt{i} \mathcal{A}_i = (i!)^{3/2} \mathcal{A}_i. \quad (4.21)$$

En utilisant (4.21) dans (4.20), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, \dots, a_i | b_1, b_2, \dots, b_i \rangle &= \sqrt{i!} \langle a_1(1), a_2(2), \dots, a_i(i) | b_1, b_2, \dots, b_i \rangle \\ &= \sqrt{i!} \langle a_1, a_2, \dots, a_i | b_1(1), b_2(2), \dots, b_i(i) \rangle. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ceci nous permet d'écrire le recouvrement (4.17) comme suit<sup>1</sup>,

$$\begin{aligned} \langle T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i | T'_{A-i}, c_1, c_2, \dots, c_i \rangle = \\ i! \sqrt{\frac{(A-i)!}{A!}} \delta_{T, T'} \langle P_i \otimes \vec{q}_i | c_1(1), c_2(2), \dots, c_i(i) \rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

et, en utilisant (4.3) et (4.8), il vient,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i P_i = \sqrt{\frac{(A-i)!}{A!}} \sum_{T_{A-i}} \sum_{P_i} \int dx_i^3 |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i \rangle \\ \langle P_i \otimes \vec{x}_i | \sum_{\{c_k\}} |c_1(1), \dots, c_i(i) \rangle \langle T_{A-i}, c_1, \dots, c_i|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nous construisons maintenant un état antisymétrique quelconque à  $A$  particules dont  $A-i$  occupent des états liés. Nous notons ces états,

$$|d_1, d_2, \dots, d_{A-i}, \{\rho_i\}\rangle, \quad (4.25)$$

où  $\{\rho_i\}$  représente un ensemble de  $i$  états individuels, voire un ensemble de  $3i$  coordonnées spatiales et  $2i$  coordonnées de spin et d'isospin. Ces états engendrent un espace plus grand que l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}_i$  des canaux d'excitation dans la partition de masse  $i$ , ainsi que l'espace  $\mathcal{P}_i$  contenant  $i$  particules dans le continuum. Plus précisément, l'espace engendré par les états (4.25) contient les espaces  $\tilde{\mathcal{P}}_i$  et  $\mathcal{P}_i$ . Par une combinaison linéaire du type (4.6), nous pouvons alors construire les états suivants,

$$|T_{A-i}, \{\rho_i\}\rangle, \quad (4.26)$$

ainsi que le projecteur,

$$\bar{P}_i = \sum_{T_{A-i}} \sum_{\{\rho_i\}} |T_{A-i}, \{\rho_i\}\rangle \langle T_{A-i}, \{\rho_i\}|. \quad (4.27)$$

Ce dernier projecteur est équivalent à l'identité dans l'espace de Fock à  $A$  particules dont  $A-i$  occupent des états liés. Nous voulons maintenant calculer le recouvrement entre un état du type (4.6) et un état du type (4.26). Pour mener à bien ce calcul, nous faisons usage de l'antisymétriseur partiel introduit en (4.15) et écrivons,

$$\begin{aligned} \langle T_{A-i}, c_1, \dots, c_i | T'_{A-i}, \{\rho_i\} \rangle = \\ \frac{(A-i)! i!}{A!} \sum_{P, P'} \pi_P \pi_{P'} \left( \langle T'_{A-i} | c_1, \dots, c_i \rangle \hat{P}^\dagger \hat{P} \left( |T_{A-i}\rangle | \{\rho_i\} \rangle \right) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

où la sommation sur  $P$  portent uniquement sur les permutations qui échangent des particules entre les états  $|T_{A-i}\rangle$  et  $|c_1, \dots, c_i\rangle$ , et celles sur  $P'$  sur les permutations qui échangent des particules entre les états  $|T'_{A-i}\rangle$  et  $|\{\rho_i\}\rangle$ . Chacun de ces états à  $A-i$  et  $i$  particules sont

<sup>1</sup>pour plus de commodité dans les notations, nous changeons l'indexation des particules, supposant ainsi que la cible  $|T_{A-i}\rangle$  est constituée des particules  $i+1, i+2, \dots, A$ .

complètement antisymétriques. En notant  $\hat{P}'' = \hat{P}^\dagger \hat{P}'$ , qui est un opérateur de permutation de parité  $\pi_{P''} = \pi_P \pi_{P'}$ , il vient,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_{A-i}, c_1, \dots, c_i | \mathbb{T}'_{A-i}, \{\rho_i\} \rangle = \\ \frac{(A-i)! i!}{A!} \sum_{P, P''} \pi_{P''} \left( \langle \mathbb{T}'_{A-i} | c_1, \dots, c_i \rangle \hat{P}'' \left( | \mathbb{T}_{A-i} \rangle | \{\rho_i\} \rangle \right) \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Puisque les états  $c_1, \dots, c_i$  du continuum individuel sont tous orthogonaux à tous les états individuels constituant la cible  $| \mathbb{T}_{A-i} \rangle$ , seule la permutation  $P'' = \mathbb{1}$  est de contribution non nulle. De plus, le nombre de permutations « partielles »  $P$  apparaissant dans (4.29) est exactement de  $A!/(A-i)!i!$ . Nous pouvons donc écrire,

$$\langle \mathbb{T}_{A-i}, c_1, \dots, c_i | \mathbb{T}'_{A-i}, \{\rho_i\} \rangle = \delta_{\mathbb{T}, \mathbb{T}'} \langle c_1, \dots, c_i | \{\rho_i\} \rangle. \quad (4.30)$$

Avec cette dernière relation, nous sommes en mesure de calculer le produit d'opérateurs  $\tilde{P}_i P_i$  appliqué à un état du type (4.26),

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i P_i | \mathbb{T}_{A-i}, \{\rho_i\} \rangle = \sqrt{\frac{(A-i)!}{A!}} \sum_{P_i} \int dx_i^3 | \mathbb{T}_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i \rangle \\ \langle P_i \otimes \vec{x}_i | \sum_{\{c_k\}} | c_1(1), \dots, c_i(i) \rangle \langle c_1, \dots, c_i | \{\rho_i\} \rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Enfin, en utilisant le fait que  $| \{\rho_i\} \rangle$  est un état à  $i$  particules complètement antisymétrique ainsi que la relation (4.22), et en posant,

$${}^i p = \sum_{\{c_k\}} | c_1(1), \dots, c_i(i) \rangle \langle c_1(1), \dots, c_i(i) | = \hat{p}(1) \otimes \hat{p}(2) \otimes \dots \otimes \hat{p}(i), \quad (4.32)$$

où  $\hat{p}(k)$  représente le projecteur (défini dans la section (2.4.1.4)) sur les états du continuum individuel de la particule  $k$ , nous obtenons,

$$\tilde{P}_i P_i | \mathbb{T}_{A-i}, \{\rho_i\} \rangle = \sqrt{\frac{(A-i)! i!}{A!}} \sum_{P_i} \int dx_i^3 | \mathbb{T}_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i \rangle \langle P_i \otimes \vec{x}_i | {}^i p | \{\rho_i\} \rangle. \quad (4.33)$$

Nous supposons maintenant que le ket  $| \{\rho_i\} \rangle$  correspond à un élément d'une représentation. L'ensemble  $\{ | \{\rho_i\} \rangle \}$  est alors supposé former une base complète et orthogonale d'un espace à  $3i$  dimensions spatiales (dans lequel est décrit un système à  $3i$  degrés de liberté spatiales). Nous notons symboliquement ce fait par la relation,

$$\sum_{\{\rho_i\}} | \{\rho_i\} \rangle \langle \{\rho_i\} | = \mathbb{1}. \quad (4.34)$$

Nous construisons alors une représentation projetée de la manière suivante,

$$| {}^i p \{ \rho_i \} \rangle \equiv {}^i p | \{ \rho_i \} \rangle, \quad (4.35)$$

ainsi que les états à  $A$  particules complètement antisymétriques,

$$| \mathbb{T}_{A-i}, {}^i p \{ \rho_i \} \rangle \equiv \mathcal{A} \left( | \mathbb{T}_{A-i} \rangle \otimes | {}^i p \{ \rho_i \} \rangle \right), \quad (4.36)$$

qui appartiennent à l'espace  $\mathcal{P}_i$ , où  $\mathcal{A}$  est un antisymétriseur partiel comme défini en (4.15). Il n'est pas difficile de se convaincre que le projecteur  $P_i$  peut s'écrire,

$$P_i = \sum_{\mathbb{T}_{A-i}} \sum_{\{\rho_i\}} |{}_{\mathbb{T}_{A-i}, i} p \{\rho_i\}\rangle \langle {}_{\mathbb{T}_{A-i}, \{\rho_i\}} i p|. \quad (4.37)$$

Nous avons défini précédemment la région asymptotique à deux fragments dans la partition de masse  $i$  par la formule  $x_i \rightarrow \infty$ . Nous définissons ici la région asymptotique par la formule symbolique  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$  représentant la région de l'espace à  $3i$  dimensions spatiales où toutes les particules qui ne sont pas dans un état lié se trouvent à une grande distance de la cible. En utilisant (2.170), nous pouvons écrire,

$$\langle \{\rho_i\} i p | \sim \langle \{\rho_i\} |, \quad \text{pour } \{\rho_i\} \rightarrow \infty, \quad (4.38)$$

car, dans cette région, le projecteur  $i p$  se résume à,

$$\mathbb{1}(1) \otimes \mathbb{1}(2) \otimes \dots \otimes \mathbb{1}(i). \quad (4.39)$$

Étudions maintenant le cas particulier où le vecteur d'état  $|\{\rho_i\}\rangle$  correspond à l'état  $|P_i \otimes \vec{x}_i\rangle$  (où l'antisymétrie est contenue dans  $|P_i\rangle$ ). Nous noterons donc,

$$|{}_{\mathbb{T}_{A-i}, \{\rho_i\}}\rangle \equiv |{}_{\mathbb{T}_{A-i}, (P_i \otimes \vec{x}_i)}\rangle, \quad (4.40)$$

rappelant ainsi l'antisymétrie complète sur les  $A$  particules. Comme en (2.171), nous pouvons écrire, dans la limite  $x_i \rightarrow \infty$ ,

$$\langle P_i \otimes \vec{x}_i | i p \sim \langle P_i \otimes \vec{x}_i |, \quad (4.41)$$

car nécessairement chaque variable radiale dans laquelle est évalué l'un des états du continuum individuel devient grande. En utilisant l'expression conjuguée de (4.33), nous dérivons,

$$\langle {}_{\mathbb{T}_{A-i}, (P_i \otimes \vec{x}_i)} | P_i \tilde{P}_i \sim \sqrt{\frac{(A-i)! i!}{A!}} \langle {}_{\mathbb{T}_{A-i}} \otimes P_i \otimes \vec{x}_i |, \quad (4.42)$$

pour  $x_i \rightarrow \infty$ . La relation (4.42) nous servira, dans la section suivante, à dériver la forme asymptotique de la solution projetée sur l'espace  $\mathcal{P}_i$ .

## 4.2 Les équations générales du modèle en couches avec couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum

### 4.2.1 Forme générale des équations

Dans cette section, nous dérivons les équations de base que nous traiterons en détails par la suite. Quoique possible, une généralisation du formalisme de Feshbach n'est pas appropriée pour un calcul numérique lorsque le nombre de sous-espaces accessibles au système devient important. Aussi adoptons-nous ici une autre approche. L'approche de Feshbach peut cependant aider, d'un point de vue purement formel, à comprendre les mécanismes microscopiques mis en jeu lors de processus complexes de collision avec réarrangement impliquant tous les couplages possibles entre les différents espaces modèles. Aussi donnons-nous en annexe (6.8) la décomposition de la résolvante totale pour un nombre arbitraire d'espaces modèles. Nous notons  $|\psi_i\rangle$  la projection de la fonction d'onde totale  $|\psi\rangle$  (solution de (4.1)) sur l'espace  $\mathcal{P}_i$  des états de Fock avec  $i$  particules dans le continuum,

$$|\psi_i\rangle = P_i|\psi\rangle. \quad (4.43)$$

D'après la relation (4.9b), nous avons,

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \sum_i P_i|\psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle. \quad (4.44)$$

En utilisant la propriété (4.14), nous pouvons écrire, lorsque la distance inter-fragment  $x_i$  devient grande,

$$\tilde{P}_i|\psi\rangle = \sum_j \tilde{P}_i P_j|\psi\rangle \sim \tilde{P}_i|\psi_i\rangle. \quad (4.45)$$

Les projections de l'hamiltonien intrinsèque total seront pour leur part notées,

$$H_{ij} = P_i H P_j. \quad (4.46)$$

Toujours en utilisant la relation de complétude (4.9b), nous dérivons,

$$H = \mathbb{1} H \mathbb{1} = \sum_{i,j} H_{ij}. \quad (4.47)$$

L'équation (4.1) prend alors la forme,

$$(E - \sum_{i,j} H_{ij})|\psi\rangle = 0, \quad (4.48)$$

que nous re-écrivons de la manière suivante,

$$(E - H_{ii})|\psi\rangle = \sum_{(k,j) \neq (i,i)} H_{kj}|\psi_j\rangle. \quad (4.49)$$

En appliquant le projecteur  $P_i$  à gauche de l'équation (4.49), il vient,

$$(E - H_{ii})|\psi_i\rangle = \sum_{j \neq i} H_{ij}|\psi_j\rangle. \quad (4.50)$$

Nous avons donc obtenu un système d'équations inhomogènes pour les projections (4.43) de la fonction d'onde totale. Considérons maintenant le canal sortant correspondant à la partition de masse  $f$ . La forme « post » de l'hamiltonien du système est alors,

$$H = H_0^f + V^f, \quad (4.51)$$

où  $H_0^f$  est l'hamiltonien libre dont les états propres sont,

$$|T_{A-f} \otimes P_f \otimes \vec{q}_f\rangle, \quad (4.52)$$

et la résolvante est,

$$G_0^{f+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E + i\varepsilon - H_0^f}. \quad (4.53)$$

En supposant que, pour le canal entrant, le système est dans la partition de masse  $i$ , décrite par les états,

$$|T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle, \quad (4.54)$$

nous pouvons définir la solution  $|\tilde{\varphi}\rangle_i^+$  de l'équation (4.1) de la manière suivante,

$$|\tilde{\varphi}\rangle_i^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^+ |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0^{f+} |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle + G_0^{f+} V^f |\tilde{\varphi}\rangle_i^+. \quad (4.55)$$

Dans la région asymptotique du canal sortant ( $x_f \rightarrow \infty$ ), nous avons alors,

$$\tilde{P}_f |\tilde{\varphi}\rangle_i^+ \sim \delta_{i,f} |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle + G_0^{f+} V^f |\tilde{\varphi}\rangle_i^+. \quad (4.56)$$

Enfin, la projection de la solution totale  $|\psi_f\rangle_i^+$  sur l'espace à  $f$  particules dans le continuum peut s'écrire,

$$|\psi_f\rangle_i^+ = P_f \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G^+ |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle, \quad (4.57)$$

dont nous déduisons, à l'aide de la relation (4.42), la forme asymptotique,

$$|\psi_f\rangle_i^+ \sim P_f \tilde{P}_f |\tilde{\varphi}\rangle_i^+ \sim \sqrt{\frac{(A-f)! f!}{A!}} \left[ \delta_{i,f} |T_{A-i} \otimes P_i \otimes \vec{q}_i\rangle + G_0^{f+} V^f |\tilde{\varphi}\rangle_i^+ \right], \quad (4.58)$$

pourvu que le système de coordonnées dans lequel est évalué  $|\psi_f\rangle_i^+$  correspond à (4.40) dans la région asymptotique. La résolution des équations de canaux couplés pour les solutions projetées  $|\tilde{\varphi}\rangle_i^+$  sur l'espace des canaux physiques n'est pas aisée, dû à leur non-orthogonalité. En revanche, les solutions projetées  $|\psi_f\rangle_i^+$  sur les espaces modèles sont orthogonales et vérifient le système d'équations (4.50). Le prix à payer pour cette simplification est la projection des équations sur le continuum individuel qui est évalué dans le référentiel cible. Re-écrivons donc ici le système (4.50) pour l'ensemble des solutions projetées  $|\psi_f\rangle_i$ ,

$$P_f (E - H) P_f |\psi_f\rangle_i = \sum_{j \neq f} P_f H P_j |\psi_j\rangle_i. \quad (4.59)$$

En multipliant (4.59) à gauche par  $\langle T_{A-f}, \{\rho_f\}^f p |$ , et en posant,

$$\langle T_{A-f}, \{\rho_f\}^f p | E - H | T'_{A-f}, {}^f p \{ \rho'_f \} \rangle = \langle \{ \rho_f \}^f p | \mathcal{K}_{T_{A-f}, T'_{A-f}} | {}^f p \{ \rho'_f \} \rangle \quad (4.60a)$$

$$\langle T_{A-f}, \{\rho_f\}^f p | H | T_{A-j}, {}^j p \{ \rho_j \} \rangle = \langle \{ \rho_f \}^f p | \mathcal{T}_{T_{A-f}, T_{A-j}} | {}^j p \{ \rho_j \} \rangle, \quad (4.60b)$$

il vient,

$$\sum_{T'_{A-f}} \sum_{\{\rho'_f\}} \langle \{\rho_f\} | {}^f p \mathcal{K}_{T_{A-f}, T'_{A-f}} {}^f p | \{\rho'_f\} \rangle \psi_{T'_{A-f}, i}(\{\rho'_f\}) = \sum_{j \neq f} \sum_{T_{A-j}} \sum_{\{\rho_j\}} \langle \{\rho_f\} | {}^f p \mathcal{T}_{T_{A-f}, T_{A-j}} {}^j p | \{\rho_j\} \rangle \psi_{T_{A-j}, i}(\{\rho_j\}), \quad (4.61)$$

où nous avons posé,

$$\psi_{T_{A-f}, i}(\{\rho_f\}) = \langle T_{A-f}, \{\rho_f\} | {}^f p | \psi_f \rangle_i. \quad (4.62)$$

Nous voyons donc qu'il s'agit d'un système d'équations projetées sur le continuum individuel (multiple), que l'on écrit ici de façon simplifiée,

$${}^f p \mathcal{K} {}^f p \psi = {}^f p \sum_{j \neq f} w_j, \quad (4.63)$$

où  $w_j$  représente la contribution au terme source de la solution avec  $j$  particules dans le continuum. La résolution de l'équation (4.63) nécessite celle de l'équation non projetée,

$$\mathcal{K}\psi = \sum_{j \neq f} w_j, \quad (4.64)$$

aux solutions desquelles l'on doit soustraire celles n'appartenant pas à l'espace  $\mathcal{P}_f$ , tout en vérifiant la forme asymptotique désirée. Il est clair que seule une méthode numérique itérative est susceptible de pouvoir résoudre un tel système d'équations. Par exemple, on commence par résoudre l'équation avec 0 particules dans le continuum. Cette solution nous fournit une source aux équations avec 1 particule dans le continuum. Ayant obtenu les solutions avec 0 et 1 particules dans le continuum, on obtient deux contributions à la source des équations avec trois particules dans le continuum ...etc. Lorsque l'on a résolu les équations jusqu'à  $i_{max}$  particules dans le continuum, on recommence, et ce jusqu'à convergence.

Pour conclure, nous écrivons les équations avec 0 particules dans le continuum (système total lié),

$$P_0(E - H)P_0|\psi_0\rangle_i = \sum_{j \neq 0} P_0 H P_j |\psi_j\rangle_i. \quad (4.65)$$

On note  $\{|\Phi\rangle\}$  une base complète orthogonale de l'espace  $\mathcal{P}_0$  et dont les éléments vérifient,

$$(E_\Phi - H_{00})|\Phi\rangle = 0. \quad (4.66)$$

La fonction d'onde projetée  $|\psi_0\rangle_i$  peut être décomposée dans cette base,

$$|\psi_0\rangle_i = \sum_{\Phi} |\Phi\rangle \langle \Phi | \psi_0 \rangle_i. \quad (4.67)$$

D'après (4.65), les coefficients de ce développement s'écrivent,

$$\langle \Phi | \psi_0 \rangle_i = \frac{1}{E - E_\Phi} \sum_{j \neq 0} \langle \Phi | H | \psi_j \rangle_i. \quad (4.68)$$

## 4.2.2 Choix de la représentation pour la résolution des équations

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, nous limitons notre étude au problème avec asymptotique à deux fragments. Nous devons donc construire une base (représentation) dans laquelle nous pouvons développer la fonction d'onde du système et calculer aisément les éléments de matrice de l'interaction régissant le mouvement relatif des deux fragments. Le fragment appelé « cible » est supposé le plus gros, et ses vecteurs d'états sont développés dans une base de déterminants de Slater. Les vecteurs d'états du projectile sont quant à eux développés dans un système de coordonnées intrinsèques de type hyper-sphérique. Nous commencerons donc par introduire dans la section (4.2.2.1) les coordonnées hyper-sphériques ainsi que les harmoniques hyper-sphériques qui constituent une base de l'espace hyper-angulaire d'un système de particules. Nous présentons ensuite, section (4.2.2.2), quelques rappels concernant la transformation entre deux systèmes de coordonnées hyper-sphériques au moyen des coefficients de Raynal-Revai. Ces transformations sont nécessaires pour un calcul aisé des éléments de matrice de l'interaction, ainsi que pour la construction d'une base à symétrie adaptée. Les vecteurs d'état du projectile doivent, tout comme ceux de la cible, satisfaire au principe de Pauli. Nous donnons donc, section (4.2.2.3), une méthode de construction d'une base hyper-sphérique à symétrie adaptée, à l'aide de laquelle nous pouvons construire une base de l'espace hyper-angulaire, de spin et d'isospin complètement antisymétrique. L'équation de Schrödinger pour les états liés du projectile est alors développée dans cette base, section (4.2.2.4). Enfin, dans la section (4.2.2.5), nous construisons la base à deux fragments.

### 4.2.2.1 Coordonnées hyper-sphériques

On considère un système composé de  $A$  particules. La position de la particule  $i$ , de masse  $m_i$ , dans l'espace à trois dimensions, par rapport à une origine arbitraire  $O$ , est spécifiée par le vecteur  $\vec{r}_i$  de composantes cartésiennes,

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} r_i^1 \\ r_i^2 \\ r_i^3 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

L'ensemble de composantes  $\{r_i^j\}$  forme alors un système de coordonnées dans un espace à  $3A$  dimensions. Nous pouvons définir un nouveau système de coordonnées  $\{x_i^j\}$  par la transformation linéaire suivante,

$$x_i^j = \sum_k U_{ik} r_k^j. \quad (4.70)$$

Nous voulons maintenant choisir la transformation (4.70) de manière à ce que l'un des  $A$  vecteurs  $\{\vec{x}_i\}$  corresponde à la position du centre de masse du système, et les  $A - 1$  autres aux degrés de liberté intrinsèques. Parmi les nombreuses possibilités, nous choisissons les coordonnées de Jacobi normalisées [57], obtenus à partir des coordonnées  $\{r_i^j\}$  par la transformation (4.70) où les éléments de la matrice  $U$  sont donnés par,

$$U_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m_{i+1}}{M_i \mu M_{i+1}}} (m_j - \delta_{i+1,j} M_{i+1}) \delta_{j \leq i+1}, & i = 1 \cdots A - 1, \\ \frac{m_j}{M_A}, & i = A, \end{cases} \quad (4.71)$$

où la *masse réduite*  $\mu$  et les masses partielles  $\{M_i\}$  sont respectivement définies par,

$$\mu = \left( \frac{\prod_{i=1}^A m_i}{M_A} \right)^{1/(A-1)}, \quad (4.72a)$$

$$M_i = \sum_{j=1}^i m_j. \quad (4.72b)$$

Le changement de coordonnées (4.70) peut alors s'écrire sous la forme suivante,

$$\vec{x}_i = \sqrt{\frac{\mu^{(i+1),(1,\dots,i)}}{\mu}} \left( \vec{R}_i - \vec{r}_{i+1} \right), \quad i = 1 \cdots A-1, \quad (4.73a)$$

$$\vec{x}_A = \vec{R}_A = \vec{R}_{cm}, \quad (4.73b)$$

où nous avons défini,

$$\vec{R}_i = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^i m_j \vec{r}_j, \quad (4.74)$$

qui correspond donc à la position du centre de masse du groupe de particules  $(1, 2, \dots, i)$ , et où,

$$\mu^{(i+1),(1,\dots,i)} = \frac{m_{i+1} M_i}{M_{i+1}}, \quad (4.75)$$

est la masse réduite entre la particule  $i+1$  et le groupe de particules  $(1, 2, \dots, i)$ . La figure (4.4) illustre ce changement de coordonnées pour un système composé de quatre particules.

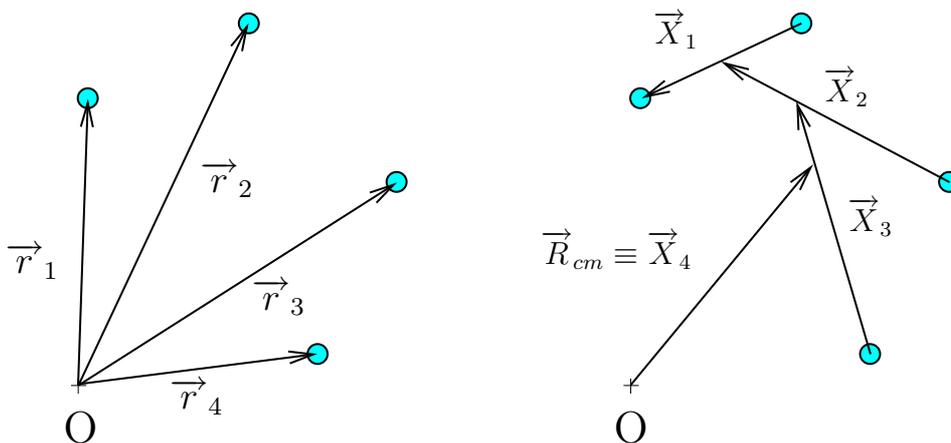


FIG. 4.4 – Exemple de passage des vecteurs position  $\{\vec{r}_i\}$ , évaluées par rapport à une origine arbitraire fixe  $O$ , aux vecteurs définissant les coordonnées de Jacobi. Les vecteurs apparaissant sur la figure de droite sont définis par  $\vec{X}_i = \vec{R}_i - \vec{r}_{i+1}$  et sont collinéaires aux vecteurs  $\vec{x}_i$  définis en (4.73).

Les vecteurs  $\{\vec{x}_i\}$  définis par (4.73) sont appelés *vecteurs de Jacobi*. En définissant les matrices diagonales de dimension  $A$ ,  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{m}$  comme suit,

$$\tilde{\mu}_{ii} = (1 - \delta_{iA})\mu + \delta_{iA}M_A, \quad (4.76a)$$

$$\tilde{m}_{ii} = m_i, \quad (4.76b)$$

on peut montrer que l'inverse de la matrice  $U$  définie en (4.71) est donnée par,

$$U^{-1} = \frac{1}{\tilde{m}} U^T \tilde{\mu}, \quad (4.77)$$

et que la matrice  $U$  est bien de déterminant unité,

$$\det(U) = 1. \quad (4.78)$$

Nous nous intéressons maintenant à un changement de coordonnées curviligne à  $3A$  dimensions, passant des coordonnées de Jacobi  $\{x_i^j\}$  à un nouvel ensemble de coordonnées que l'on note  $\{\xi_k\}$  ( $k = 1, \dots, 3A$ ). Un tel changement de coordonnées peut s'écrire,

$$x_i^j = x_i^j(\{\xi_k\}), \quad (4.79)$$

où les anciennes coordonnées sont exprimées comme fonctions des nouvelles. Nous définissons alors le changement de coordonnées curvilignes suivant,

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \rho \cos(\phi_{A-1}) \cos(\phi_{A-2}) \cdots \cos(\phi_{i+1}) \sin(\phi_i) \begin{pmatrix} \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i) \\ \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i) \\ \cos(\theta_i) \end{pmatrix}, \quad i = 1 \cdots A-1 \\ \vec{x}_A &= \vec{R}_{cm}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

où les  $3A$  nouvelles coordonnées, appelées coordonnées *hyper-sphériques*, sont définies par :

- les  $A-2$  *hyper-angles*  $\{\phi_i\}$  ( $\phi_1 \equiv \frac{\pi}{2}$ ) définis sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,
- les  $2A-2$  angles  $\{\theta_i, \varphi_i\} \equiv \{\Omega_i\}$  constituant les parties angulaires (en coordonnées sphériques) des  $A-1$  vecteurs  $\vec{x}_i$  ( $i = 1 \cdots A-1$ ),
- l'*hyper-rayon*  $\rho$  défini sur  $[0, \infty[$ ,
- les 3 composantes cartésiennes de la position du centre de masse  $\vec{R}_{cm}$ .

On montre facilement que l'hyper-rayon admet les expressions suivantes,

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{A-1} (\vec{x}_i)^2 = \frac{1}{2M\mu} \sum_{i,j=1}^A m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2, \quad (4.81)$$

dont on déduit qu'il est invariant par translation et par toute permutation des particules. En utilisant les règles de transformation de l'opérateur différentiel laplacien dans un changement de coordonnées curviligne, on peut montrer (laborieux) que l'opérateur énergie cinétique du système de  $A$  particules s'écrit,

$$-\sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_{r_i}^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{int}^2 - \frac{\hbar^2}{2M_A} \nabla_{R_{cm}}^2, \quad (4.82)$$

où le deuxième terme du membre de droite représente l'opérateur énergie cinétique du centre de masse du système. Dans (4.82), nous avons défini,

$$\nabla_{int}^2 = \partial_\rho^2 + \frac{3A-4}{\rho} \partial_\rho - \frac{\mathcal{L}^2}{\rho^2}, \quad (4.83)$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}^2$ , communément appelé opérateur *grand-orbitale*, admet l'expression suivante,

$$\mathcal{L}^2 = \sum_{i=1}^{A-1} \frac{1}{\prod_{j=i+1}^{A-1} \cos^2(\phi_j)} \left[ -\partial_{\phi_i}^2 + \left( (3i-4) \tan(\phi_i) - 2 \cotan(\phi_i) \right) \partial_{\phi_i} + \frac{l_i^2}{\sin^2(\phi_i)} \right], \quad (4.84)$$

où les opérateurs  $l_i^2$  ne sont autres que les opérateurs moment angulaire traditionnels (fonctions des angles  $\Omega_i$ ) de valeurs propres  $l_i(l_i+1)$ . Les fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{L}^2$ , appelées *harmoniques hyper-sphériques*, sont notées  $\{Y_{[K]}\}$  et admettent l'expression générale suivante,

$$Y_{[K]}(\{\phi_i\}, \{\Omega_i\}) = Y_{l_1}^{m_1}(\Omega_1) \prod_{i=2}^{A-1} Y_{l_i}^{m_i}(\Omega_i) \mathcal{N}_i \sin^{l_i}(\phi_i) \cos^{K_{i-1}}(\phi_i) P_{n_i}^{l_i+\frac{1}{2}, K_{i-1}+\frac{3i-5}{2}}(\cos(2\phi_i)), \quad (4.85)$$

où  $P_n^{a,b}(x)$  est un polynôme de Jacobi et où nous avons posé,

$$K_i = \sum_{j=1}^i (2n_j + l_j), \quad n_1 = 0, \quad (4.86a)$$

$$K \equiv K_{A-1}, \quad (4.86b)$$

avec  $\{n_i\}$  des entiers positifs ou nuls. Nous utilisons la notation  $[K]$  pour symboliser de manière simple tous les nombres quantiques nécessaires pour définir ces fonctions de manière unique,

$$[K] \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_{A-1}, m_1, m_2, \dots, m_{A-1}, n_2, \dots, n_{A-1}\}. \quad (4.87)$$

Enfin, les coefficients de normalisation  $\mathcal{N}_i$  sont définis par,

$$\mathcal{N}_i = \sqrt{\frac{2(K_i + 3i/2 - 1) n_i! \Gamma(K_i - n_i + 3i/2 - 1)}{\Gamma(K_i - n_i - l_i + 3/2(i+1)) \Gamma(n_i + l_i + 3/2)}}, \quad (4.88)$$

où  $\Gamma(x)$  désigne la fonction gamma. L'harmonique hyper-sphérique  $Y_{[K]}$  est fonction propre de  $\mathcal{L}^2$  avec la valeur propre  $K(K+3A-5)$ ,

$$\left( \mathcal{L}^2 - K(K+3A-5) \right) Y_{[K]}(\{\phi_i\}, \{\Omega_i\}) = 0. \quad (4.89)$$

L'élément de volume à  $3A-3$  dimensions dans l'espace des états intrinsèques du système est donné par,

$$dV^{3A-3} = \rho^{3A-4} d\rho d\phi^{3A-4}, \quad (4.90)$$

où nous avons posé,

$$d\phi^{3A-4} = d\Omega_1 \prod_{i=2}^{A-1} \left( \cos(\phi_i) \right)^{3i-4} \left( \sin(\phi_i) \right)^2 d\phi_i d\Omega_i, \quad (4.91)$$

et,

$$d\Omega_i = \sin(\phi_i) d\theta_i d\varphi_i. \quad (4.92)$$

Afin de simplifier les expressions, nous regroupons sous la notation  $\vec{\phi}$  toutes les variables angulaires et hyper-angulaires (représentant donc  $3A - 4$  variables). Dans le cadre de ces notations, les harmoniques hyper-sphériques satisfont aux relations d'orthogonalité et de complétude suivantes,

$$\int d\phi^{3A-4} \left[ Y_{[K]}(\vec{\phi}) \right]^\dagger Y_{[K']}(\vec{\phi}) = \delta_{[K],[K']}, \quad (4.93a)$$

$$\sum_{[K]} Y_{[K]}(\vec{\phi}) \left[ Y_{[K]}(\vec{\phi}') \right]^\dagger = \delta^{3A-4}(\vec{\phi} - \vec{\phi}'). \quad (4.93b)$$

La fonction d'onde intrinsèque  $\psi(\rho, \vec{\phi})$  d'un système de  $A$  particules peut alors se décomposer de la façon suivante,

$$\psi(\rho, \vec{\phi}) = \sum_{[K]} \psi_{[K]}(\rho) Y_{[K]}(\vec{\phi}), \quad (4.94)$$

où les coefficients du développement sont donnés par,

$$\psi_{[K]}(\rho) = \int d\phi^{3A-4} \left[ Y_{[K]}(\vec{\phi}) \right]^\dagger \psi(\rho, \vec{\phi}). \quad (4.95)$$

Enfin, en posant,

$$\psi_{[K]}(\rho) = \frac{\xi_{[K]}(\rho)}{\rho^{\frac{3A-4}{2}}}, \quad (4.96)$$

nous démontrons facilement, à l'aide des relations (4.83) et (4.89),

$$\nabla_{int}^2 \psi(\rho, \vec{\phi}) = \sum_{[K]} Y_{[K]}(\vec{\phi}) \frac{1}{\rho^{\frac{3A-4}{2}}} \left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{K(K+3A-5) + \frac{(3A-4)(3A-6)}{4}}{\rho^2} \right) \xi_{[K]}(\rho). \quad (4.97)$$

Nous généralisons alors la notation introduite plus haut en désignant par  $\vec{\rho}$  l'ensemble des  $3A - 3$  variables intrinsèques. Cette notation nous permet, dans le même esprit que dans la section (2.4.1.4), d'introduire une représentation hyper-sphérique  $|\vec{\rho}\rangle$ , que l'on factorize comme suit,

$$|\vec{\rho}\rangle = |\rho\rangle |\vec{\phi}\rangle. \quad (4.98)$$

Nous noterons alors les relations d'orthogonalité et de complétude dans l'espace des états (hyper-spatiaux) intrinsèques d'un système de  $A$  particules,

$$\langle \vec{\rho} | \vec{\rho}' \rangle = \langle \rho | \rho' \rangle \langle \vec{\phi} | \vec{\phi}' \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^{3A-4}} \delta^{3A-4}(\vec{\phi} - \vec{\phi}'), \quad (4.99a)$$

$$\int d\rho \rho^{3A-3} |\vec{\rho}\rangle \langle \vec{\rho}| = \int d\rho \rho^{3A-4} |\rho\rangle \langle \rho| \int d\phi^{3A-4} |\vec{\phi}\rangle \langle \vec{\phi}| = \mathbb{1}. \quad (4.99b)$$

Nous définissons ensuite les états  $|[K], \rho\rangle$  qui admettent la représentation suivante,

$$\langle \vec{\rho} | [K], \rho' \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^{3A-4}} Y_{[K]}(\vec{\phi}), \quad (4.100)$$

et au moyen desquels nous pouvons écrire,

$$\langle \rho, [K] | [K'], \rho' \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^{3A-4}} \delta_{[K],[K']}, \quad (4.101a)$$

$$\sum_{[K]} \int d\rho \rho^{3A-4} | [K], \rho \rangle \langle \rho, [K] | = \mathbf{1}. \quad (4.101b)$$

Les coefficients du développement d'un état intrinsèque  $|\psi\rangle$  dans la base  $| [K], \rho \rangle$  seront notés,

$$\langle \rho, [K] | \psi \rangle = \frac{1}{\rho^{\frac{3A-4}{2}}} \psi_{[K]}(\rho). \quad (4.102)$$

Il devient alors commode d'introduire des fonctions hyper-angulaires couplant à un moment angulaire total bien défini. Pour simplifier les expressions, nous introduisons les fonctions suivantes,

$$F_{K_{i-1}, l_i, K_i}(\phi_i) = \mathcal{N}_i \sin^{l_i}(\phi_i) \cos^{K_{i-1}}(\phi_i) P_{n_i}^{l_i + \frac{1}{2}, K_{i-1} + \frac{3i-5}{2}}(\cos(2\phi_i)),$$

$$i = 2 \cdots A - 1. \quad (4.103)$$

Nous définissons alors les harmoniques hyper-sphériques couplées comme suit,

$$Y_{[K]}^{L,M}(\vec{\phi}) = \left[ \cdots \left[ \left( Y_{l_1}(\Omega_1) Y_{l_2}(\Omega_2) \right)^{L_2} F_{K_1, l_2, K_2}(\phi_2) Y_{l_3}(\Omega_3) \right]^{L_3} F_{K_2, l_3, K_3}(\phi_3) \cdots \right. \\ \left. \cdots Y_{l_{A-1}}(\Omega_{A-1}) \right]^{L,M} F_{K_{A-2}, l_{A-1}, K_{A-1}}(\phi_{A-1}), \quad (4.104)$$

où, maintenant, la notation  $[K]$  est définie par,

$$[K] \equiv \{l_1, l_2, \cdots, l_{A-1}, L_2, L_3, \cdots, L_{A-2}, n_2, \cdots, n_{A-1}\}, \quad (4.105)$$

ou, selon les relations (4.86), de façon équivalente par,

$$[K] \equiv \{l_1, l_2, \cdots, l_{A-1}, L_2, L_3, \cdots, L_{A-2}, K_2, K_3, \cdots, K_{A-1}\}. \quad (4.106)$$

Nous adaptons les notations introduites plus haut en définissant les états  $| [K]^{L,M}, \rho \rangle$  vérifiant,

$$\langle \vec{\rho} | [K]^{L,M}, \rho' \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^{3A-4}} Y_{[K]}^{L,M}(\vec{\phi}), \quad (4.107)$$

et au moyen desquels nous pouvons écrire,

$$\langle \rho, [K]^{L,M} | [K']^{L',M'}, \rho' \rangle = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho^{3A-4}} \delta_{[K],[K']} \delta_{L,L'} \delta_{M,M'}, \quad (4.108a)$$

$$\sum_{[K], L, M} \int d\rho \rho^{3A-4} | [K]^{L,M}, \rho \rangle \langle \rho, [K]^{L,M} | = \mathbf{1}. \quad (4.108b)$$

Les états  $\{|[K]^{L,M}\rangle\}$  de la base hyper-angulaire à  $A$  particules peuvent être construits d'une manière récursive que nous nous proposons d'investiguer maintenant. Nous commençons par construire un état de base de l'espace angulaire à deux particules, que l'on note,

$$|K_1 M_1\rangle \equiv |l_1 M_1\rangle, \quad (4.109)$$

et qui n'est autre qu'une harmonique sphérique de moment angulaire relatif  $l_1$  et de projection  $M_1$ . L'état (4.109) est un état propre de l'opérateur,

$$l_1^2 = -\frac{1}{\sin(\theta_1)} \partial_{\theta_1} \left( \sin(\theta_1) \partial_{\theta_1} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta_1)} \partial_{\varphi_1}^2, \quad (4.110)$$

avec la valeur propre  $l_1(l_1 + 1)$  et admet la représentation suivante,

$$\langle \Omega_1 | l_1 M_1 \rangle = Y_{l_1}^{M_1}(\Omega_1). \quad (4.111)$$

Un état de base de l'espace hyper-angulaire à trois particule peut s'écrire,

$$|K_1, l_2 K_2\rangle^{L_2, M_2}, \quad (4.112)$$

qui est un état propre de l'opérateur,

$$\mathcal{L}_2^2 = -\partial_{\phi_2}^2 + 2 \left( \tan(\phi_2) - \cotan(\phi_2) \right) \partial_{\phi_2} + \frac{l_1^2}{\cos^2(\phi_2)} + \frac{l_2^2}{\sin^2(\phi_2)}, \quad (4.113)$$

avec la valeur propre  $K_2(K_2 + 4)$ , de l'opérateur  $l_1^2$  avec la valeur propre  $l_1(l_1 + 1)$ , de l'opérateur  $l_2^2$  (défini comme en (4.110) où les angles  $\Omega_1$  sont remplacés par les angles  $\Omega_2$ ) avec la valeur propre  $l_2(l_2 + 1)$ , de l'opérateur  $L_2^2 = (\vec{l}_1 + \vec{l}_2)^2$  avec la valeur propre  $L_2(L_2 + 1)$  et de l'opérateur  $(L_2)_z$  avec la valeur propre  $M_2$ . L'état (4.112) admet la représentation suivante,

$$\langle \Omega_1, \Omega_2, \phi_2 | K_1, l_2 K_2 \rangle^{L_2, M_2} = \left( Y_{l_1}(\Omega_1) Y_{l_2}(\Omega_2) \right)^{L_2, M_2} F_{K_1, l_2, K_2}(\phi_2), \quad (4.114)$$

où les fonctions  $F_{K_{i-1}, l_i, K_i}$  ont été définies en (4.103). Un état de base de l'espace hyper-angulaire à quatre particules peut s'écrire,

$$|K_1, l_2 K_2 L_2, l_3 K_3\rangle^{L_3, M_3}, \quad (4.115)$$

qui est état propre de l'opérateur,

$$\mathcal{L}_3^2 = -\partial_{\phi_3}^2 + \left( 5 \tan(\phi_3) - 2 \cotan(\phi_3) \right) \partial_{\phi_3} + \frac{\mathcal{L}_2^2}{\cos^2(\phi_3)} + \frac{l_3^2}{\sin^2(\phi_3)}, \quad (4.116)$$

avec la valeur propre  $K_3(K_3 + 7)$ , de l'opérateur  $l_3^2$  avec la valeur propre  $l_3(l_3 + 1)$ , de l'opérateur  $L_3^2 = (\vec{L}_2 + \vec{l}_3)^2$  avec la valeur propre  $L_3(L_3 + 1)$  et  $(L_3)_z$  avec la valeur propre  $M_3$  en plus d'être de bons nombres quantiques  $l_1, l_2, K_2, L_2$ . Ces états admettent la représentation suivante,

$$\langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \phi_2, \phi_3 | K_1, l_2 K_2 L_2, l_3 K_3 \rangle^{L_3, M_3} = \left[ \left( Y_{l_1}(\Omega_1) Y_{l_2}(\Omega_2) \right)^{L_2} F_{K_1, l_2, K_2}(\phi_2) Y_{l_3}(\Omega_3) \right]^{L_3, M_3} F_{K_2, l_3, K_3}(\phi_3). \quad (4.117)$$

Enfin, la récurrence mène à l'état,

$$|K_1, l_2 K_2 L_2, l_3 K_3 L_3, \dots, l_{A-1} L_{A-1} K_{A-1}\rangle^{L,M} \equiv |[K]^{L,M}\rangle, \quad (4.118)$$

propre de l'opérateur,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A-1}^2 \equiv \mathcal{L}^2 = & -\partial_{\phi_{A-1}}^2 + \left( (3A-7)\tan(\phi_{A-1}) - 2\cotan(\phi_{A-1}) \right) \partial_{\phi_{A-1}} + \\ & \frac{\mathcal{L}_{A-2}^2}{\cos^2(\phi_{A-1})} + \frac{l_{A-1}^2}{\sin^2(\phi_{A-1})}, \end{aligned} \quad (4.119)$$

de valeur propre  $K_{A-1}(K_{A-1} + 3A - 5) \equiv K(K + 3A - 5)$ , et admettant la représentation (4.104).

Par la suite, nous seront parfois amenés à préciser, dans nos notations, le nombre de particules composant le système. Par exemple, l'hyper-rayon défini pour un système de  $i$  particules sera parfois noté  $\rho_i$ . De même, l'ensemble des  $3i - 4$  variables angulaires et hyper-angulaires de la base hyper-sphérique sera parfois notée  $\vec{\phi}_i$ , pour lever de possibles ambiguïtés. Dans le cadre de ces notations, et tout en respectant les conventions introduites dans cette section, nous pouvons écrire,

$$\vec{\phi}_{i+1} \equiv \{ \vec{\phi}_i, \phi_i, \Omega_i \}, \quad (4.120a)$$

$$\rho_i = \rho_{i+1} \cos \phi_i. \quad (4.120b)$$

### 4.2.2.2 Rotation cinématique

Comme nous l'avons mentionné au début de la section (4.2.2.2), il existe de nombreuses façons de définir un ensemble de vecteurs de Jacobi. La figure (4.5) montre un autre exemple que celui représenté sur la figure (4.4).

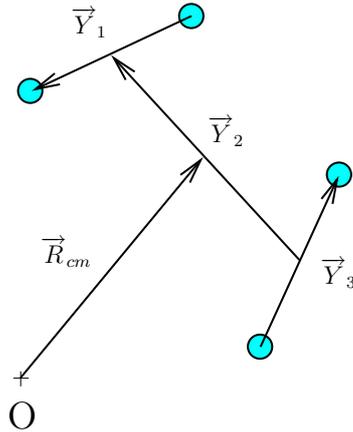


FIG. 4.5 – Autre exemple de définition des vecteurs de Jacobi. Les vecteurs  $\{\vec{Y}_i\}$  sont collinéaires aux vecteurs  $\{\vec{y}_i\}$  définis en (4.121).

L'ensemble des vecteurs de Jacobi, que l'on note  $\{\vec{y}_i\}$ , illustrés sur cette figure sont alors définis de la manière suivante,

$$\vec{y}_1 = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\mu}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (4.121a)$$

$$\vec{y}_2 = \sqrt{\frac{\mu_{(12),(34)}}{\mu}} (\vec{R}_{12} - \vec{R}_{34}), \quad (4.121b)$$

$$\vec{y}_3 = \sqrt{\frac{\mu_{3,4}}{\mu}} (\vec{r}_3 - \vec{r}_4), \quad (4.121c)$$

$$\vec{y}_4 = \vec{R}_{cm}, \quad (4.121d)$$

où  $\mu_{1,2}$  est la masse réduite entre les particules (1) et (2),  $\mu_{3,4}$  est la masse réduite entre les particules (3) et (4),  $\mu_{(12),(34)}$  est la masse réduite entre les groupes de particules (1, 2) et (3, 4),  $\vec{R}_{12}$  est la position du centre de masse du groupe de particules (1, 2) et  $\vec{R}_{34}$  est la position du centre de masse du groupe de particules (3, 4).  $\vec{r}_i$  est toujours défini comme représentant la position de la particule ( $i$ ) par rapport à une origine arbitraire fixe  $O$ , et la masse réduite globale  $\mu$  est toujours définie par (4.72a).

En notant  $\vec{r}$  le vecteur défini par,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vdots \\ \vec{r}_A \end{pmatrix}, \quad (4.122)$$

la transformation (4.70) peut s'écrire,

$$\vec{x} = U \vec{r}. \quad (4.123)$$

En notant  $U'$  la matrice de passage des coordonnées  $\{r_j^i\}$  à un autre système de coordonnées de Jacobi  $\{y_j^i\}$  nous pouvons écrire,

$$\vec{y} = U' \vec{r} = U' U^{-1} \vec{x}. \quad (4.124)$$

Il est alors possible de montrer que la matrice  $\mathcal{U} = U' U^{-1}$  peut s'écrire,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.125)$$

où  $\tilde{\mathcal{U}}$  est une matrice orthogonale de dimension  $A - 1$ . Nous en déduisons que le passage d'un système de vecteurs de Jacobi  $\vec{x}$  à un autre correspond à une rotation dans l'espace à  $A - 1$  dimensions des vecteurs  $\vec{x}_i$  ( $i = 1 \dots A - 1$ ). Une telle transformation est appelée *rotation cinématique* et est paramétrisable par  $(A - 2)(A - 1)/2$  angles. A titre d'exemple, le passage des coordonnées de Jacobi définies par les vecteurs (4.73) avec  $A = 4$ , aux coordonnées de Jacobi définies par les vecteurs (4.121) correspond à un cas particulier de rotation à deux dimensions des vecteurs  $\vec{x}_2$  et  $\vec{x}_3$  d'un angle,

$$\alpha = \arccos \left( \sqrt{\frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_3 + m_4)}} \right), \quad (4.126)$$

la matrice  $\tilde{\mathcal{U}}$  étant définie par,

$$\tilde{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.127)$$

Nous avons défini dans la section précédente les coordonnées hyper-sphériques intrinsèques  $(\rho, \vec{\phi})$  correspondant aux vecteurs de Jacobi  $\{\vec{x}_i\}$  ( $i = 1 \dots A - 1$ ). Nous pouvons également définir un changement de coordonnées curvilignes à  $3A$  dimensions passant des coordonnées  $\{\vec{y}_i\}$ , obtenus par rotation cinématique des vecteurs  $\{\vec{x}_i\}$  ( $i = 1 \dots A - 1$ ), aux nouvelles coordonnées hypersphériques que l'on note  $(\rho', \vec{\phi}')$ . La rotation cinématique n'affectant pas l'hyper-rayon, nous pouvons écrire  $\rho' = \rho$ . En revanche, les variables angulaires et hyper-angulaires correspondent à différents systèmes de coordonnées. Nous notons  $\{|[K]^{L,M}\rangle\}$  une base d'harmoniques hyper-sphériques couplées fonctions des variables  $\vec{\phi}$  et  $\{|[K']^{L',M'}\rangle\}$  une base d'harmoniques hyper-sphériques couplées fonctions des variables  $\vec{\phi}'$ . Chacune de ces base est complète dans l'espace hyper-angulaire. En utilisant la conservation du moment angulaire total (et de sa projection), ces deux bases doivent donc être déductibles l'une de l'autre par une transformation orthogonale du type,

$$|[K]^{L,M}\rangle = \sum_{[K']} \langle [K]^L | [K']^L \rangle |[K']^{L,M}\rangle. \quad (4.128)$$

Le nombre quantique grand-orbitale  $K_{A-1}$  (cf. eq. (4.86b)) étant conservé, le développement (4.128) doit être fini. Pour un système composé de trois particules, les coefficients  $\langle [K]^L | [K']^L \rangle$  ont été calculés analytiquement par Raynal et Revai [58] et portent leur noms. Une généralisation pour quatre particules a été étudiée dans [59].

### 4.2.2.3 Antisymétrisation

Comme nous l'avons vu en (4.81), l'hyper-rayon est invariant par toute permutation des particules. L'antisymétrie d'une base décrivant les états intrinsèques d'un système de fermions doit donc être contenue dans la partie hyper-angulaire, de spin et d'isospin. Pour la construction d'une base antisymétrique, nous adoptons la méthode introduite dans [60], qui se prête bien à un calcul numérique. Le principe est de construire une base d'harmoniques hyper-sphériques à *symétrie adaptée*, c'est à dire suivant une représentation irréductible du groupe symétrique  $S_A$  selon la séquence  $S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset S_A$ . Les représentations irréductibles du groupe  $S_n$  peuvent être décrites par les *diagrammes de Young* [61] qui sont en correspondance biunivoque avec les partitions de l'entier  $n$  du type,

$$\begin{aligned} n &= \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i, \\ \nu_1 &\geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_i \geq 0, \\ 1 &\leq i \leq n. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Les collections de chiffres (ou partitions)  $\{\nu_1, \nu_2, \dots\}$  sont notés  $[\nu]$ . Chaque diagramme de Young, que l'on note  $Y^{[\nu]}$ , est constitué de  $n$  cases arrangées selon  $i$  lignes, la ligne  $j$  comportant  $\nu_j$  cases (en suivant la notation (4.129)). On montre alors qu'il y a une correspondance biunivoque entre les diagrammes de Young et les valeurs propres d'un ensemble complet d'opérateurs qui commutent dans  $S_n$ . La figure (4.6) montre les partitions correspondant aux représentations irréductibles du groupe  $S_4$ , ainsi que les diagrammes de Young associés. A un diagramme de Young donné  $Y^{[\nu]}$  correspond un ensemble de ta-

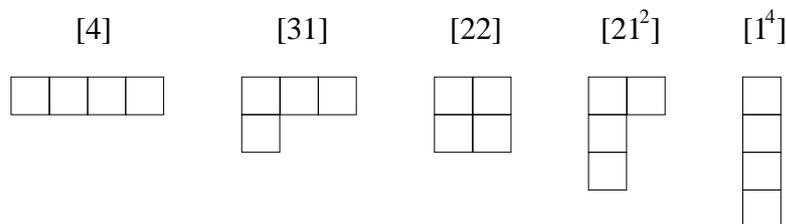


FIG. 4.6 – Les 5 partitions correspondant aux représentations irréductibles du groupe  $S_4$ , et les diagrammes de Young associés. La notation  $[1^4]$ , par exemple, est équivalente à  $[1111]$ .

*bleaux de Young* obtenus en remplissant les cases du diagramme par un arrangement des nombres  $1, 2, \dots, n$  de manière croissante de gauche à droite, et de haut en bas. Les tableaux de Young, que l'on note  $Y_m^{[\nu]}$ , où  $m$  distingue les différents arrangements des nombres  $1, 2, \dots, n$ , constituent alors la base de *Yamanouchi*. Un vecteur de cette base, noté  $|Y_m^{[\nu]}\rangle$ , suit les représentations irréductibles  $[\nu], [\nu'], [\nu''], \dots, [1]$  des groupes  $S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_1$  ( $S_1$  est redondant) où les partitions  $[\nu'], [\nu''], \dots$  sont obtenues en supprimant successivement les cases du tableau de Young  $Y_m^{[\nu]}$  en suivant l'ordre décroissant des nombres qui les remplissent. Enfin, pour une partition donnée, les indices  $m$  sont ordonnés par ordre décroissant des *symboles de Yamanouchi*, définis par  $(r_n r_{n-1} \dots r_1)$  où  $r_i$  désigne l'indice de la ligne où se trouve le chiffre  $i$ . La figure (4.7) illustre cette décomposition pour les trois tableaux de Young correspondant à la partition  $[31]$  du groupe  $S_4$ . Nous voyons donc que le tableau de Young  $Y_1^{[31]}$  suit la séquence de représentations irréductibles  $[31], [3], [2], [1]$ , que  $Y_2^{[31]}$  suit  $[31], [21], [2], [1]$  et que  $Y_3^{[31]}$  suit  $[31], [21], [1^2], [1]$ . Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation  $[\nu]$  pour désigner aussi bien une représentation irréductible du groupe  $S_n$  qu'un diagramme de Young ou que la partition de l'entier  $n$ , et utiliserons la notation  $[\nu]_m$  pour désigner aussi bien un tableau de Young qu'un symbole de Yamanouchi.

$$\begin{array}{l}
Y_1^{[31]} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
Y_2^{[31]} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
Y_3^{[31]} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

FIG. 4.7 – Les 3 tableaux de Young  $Y_m^{[31]}$ , et leur décomposition suivant les représentations irréductibles de  $S_4, S_3, S_2$  (et  $S_1$ ).

Un ensemble de  $n$  indices vérifiant la symétrie d'un tableau de Young donné est symétrique par permutation des indices situés sur la même ligne, et antisymétrique par permutation des indices situés dans la même colonne. Nous voyons donc que la fonction d'onde d'un système de  $A$  fermions doit vérifier la symétrie  $[1^A]$ . Un état de la base hyper-angulaire, de spin et d'isospin d'un système de  $A$  nucléons peut être factorisé de la manière suivante,

$$Y_{[K]}^{L,M}(1, 2, \dots, A) \chi_{m_{s1}}(1) \chi_{m_{s2}}(2) \cdots \chi_{m_{sA}}(A) \tau_{\tau_{z1}}(1) \tau_{\tau_{z2}}(2) \cdots \tau_{\tau_{zA}}(A), \quad (4.130)$$

où  $Y_{[K]}^{L,M}(1, 2, \dots, A)$  est une harmonique hypersphérique couplée, définie comme en (4.104), et  $\chi_{m_{si}}(i)$  et  $\tau_{\tau_{zi}}(i)$  représentent le spineur et l'isospineur du nucléon ( $i$ ) respectivement. Si nous parvenons à trouver un ensemble de combinaisons linéaires des harmoniques hypersphériques, que l'on note  $\{A_{[\nu_1]_{m_1}}\}$ , vérifiant la symétrie correspondant à la partition  $[\nu_1]$  du groupe  $S_A$ , et un ensemble de combinaisons linéaires des produits des  $2A$  fonctions de spin et d'isospin, que l'on note  $\{B_{[\nu_2]_{m_2}}\}$ , vérifiant la symétrie  $[\nu_2]$ , alors nous pouvons définir un état de base  $\psi_{[\nu]_m}$  comprenant tous les degrés de liberté, et satisfaisant à la symétrie du tableau de Young  $[\nu]_m$ , de la manière suivante,

$$\psi_{[\nu]_m} = \sum_{m_1, m_2} \langle [\nu]_m | [\nu_1]_{m_1}, [\nu_2]_{m_2} \rangle A_{[\nu_1]_{m_1}} B_{[\nu_2]_{m_2}} \equiv \left[ A_{[\nu_1]} \times B_{[\nu_2]} \right]^{[\nu]_m}, \quad (4.131)$$

où les coefficients  $\langle [\nu]_m | [\nu_1]_{m_1}, [\nu_2]_{m_2} \rangle$  correspondent aux coefficients de Clebsch-Gordan du groupe des permutations<sup>2</sup>. Dans le cas particulier où  $[\nu] = [1^A]$ , les coefficients de Clebsch-Gordan apparaissant dans (4.131) admettent l'expression suivante,

$$\langle [1^A] | [\nu_1]_{m_1}, [\nu_2]_{m_2} \rangle = \frac{\Lambda_{m_1}^{\nu_1}}{\sqrt{h_{\nu_1}}} \delta_{[\nu_2]_{m_2}, [\tilde{\nu}_1]_{\tilde{m}_1}}, \quad (4.132)$$

où  $[\tilde{\nu}_1]_{\tilde{m}_1}$  désigne le tableau de Young conjugué du tableau  $[\nu_1]_{m_1}$ , c'est à dire le tableau obtenu à partir de  $[\nu_1]_{m_1}$  en permutant lignes et colonnes,  $h_{\nu_1}$  est la dimension de la représentation irréductible  $[\nu_1]$  et  $\Lambda_{m_1}^{\nu_1}$  représente la phase correspondant à la permutation nécessaire pour passer du tableau de Young  $[\nu_1]_1$  (correspondant au plus grand symbole de Yamanouchi) au tableau  $[\nu_1]_{m_1}$ .

<sup>2</sup>En général, un nombre quantique supplémentaire est nécessaire pour définir ces coefficients de manière unique. Cependant, ce label supplémentaire n'apparaît que pour des systèmes à plus de 4 particules, que nous ne considérerons pas dans la construction d'une base partielle à symétrie adaptée.

Nous nous proposons maintenant de résumer la méthode décrite dans [60] pour la construction d'une base hypersphérique à symétrie adaptée, de manière à introduire nos notations. A cette fin, nous reprenons le schéma récursif présenté à la fin de la section (4.2.2.1) et commençons par considérer une base angulaire d'un système de deux nucléons numérotés (1) et (2). Les états de cette base sont de simples harmoniques sphériques. L'application de l'opérateur de permutation (12) des particules (1) et (2) sur l'état de base  $|K_1 M_1\rangle$  a pour effet la multiplication par une phase,

$$(12)|K_1 M_1\rangle = (-1)^{K_1} |K_1 M_1\rangle. \quad (4.133)$$

Nous en déduisons que l'état  $|K_1 M_1\rangle$  admet la symétrie [2] ou  $[1^2]$  du groupe  $S_2$  selon que  $K_1 \equiv l_1$  est pair ou impair respectivement. La base angulaire à symétrie adaptée d'un système de deux particules sera donc notée,

$$\{|K_1[\nu_2] M_1\rangle\}, \quad (4.134)$$

où  $[\nu_2]$  désigne la représentation irréductible du groupe  $S_2$ . A partir des états (4.134), nous pouvons construire une base de l'espace hyper-angulaire d'un système composé de trois particules de la manière suivante,

$$\{|K_1[\nu_2], l_2 K_2\rangle^{L_2, M_2}\}. \quad (4.135)$$

Ces états sont de bons nombres quantiques  $K_1$ ,  $[\nu_2]$ ,  $l_2$ ,  $K_2$ ,  $L_2$  et  $M_2$ . Un ensemble complet d'opérateurs qui commutent dans  $S_3$  peut être limité à l'unique opérateur suivant, appelé *opérateur de somme des classes* [61],

$$[(2)]_3 = (12) + (13) + (23), \quad (4.136)$$

c'est à dire à la somme des opérateurs de transposition. La diagonalisation de cet opérateur dans un espace de représentation de  $S_3$  nous en fournit les représentations irréductibles. Puisque les opérateurs  $\mathcal{L}_2^2$  (cf. (4.113)),  $L_2^2$  et  $Lz_2$  commutent avec l'opérateur (4.136), l'ensemble des états (4.135) avec les nombres quantiques  $[\nu_2]$ ,  $K_2$ ,  $L_2$ ,  $M_2$  fixés forment un espace invariant par toute permutation de  $S_3$ . La diagonalisation de l'opérateur (4.136) dans cette base nous fournit alors une base hyper-angulaire de symétrie  $[\nu_3]$  dans  $S_3$  (et de symétrie  $[\nu_2]$  dans  $S_2$ ),

$$|K_2[\nu_2][\nu_3]\beta_3\rangle^{L_2, M_2} = \sum_{K_1, l_2} \langle K_1[\nu_2], l_2 K_2 | \{K_2[\nu_2][\nu_3]\beta_3\}^{L_2} |K_1[\nu_2], l_2 K_2\rangle^{L_2, M_2}, \quad (4.137)$$

où les termes  $\langle K_1[\nu_2], l_2 K_2 | \{K_2[\nu_2][\nu_3]\beta_3\}^{L_2}$  correspondent aux *coefficients de parentage fractionnaire hypersphériques*. Notons que ces états ne sont plus de bons nombres quantiques  $K_1$  et  $l_2$ , c'est pourquoi nous ajoutons le label supplémentaire  $\beta_3$  afin de les définir de manière unique. Les valeurs propres de l'opérateur (4.136) sont connues analytiquement pour chaque représentation irréductible de  $S_3$ , ce qui nous permet d'identifier, après diagonalisation, les états de symétrie  $[\nu_3]$  donnée. Le calcul des éléments de matrice de l'opérateur (12) dans la base engendrée par les vecteurs (4.135) est immédiate (cf. (4.133)). En revanche, ceux des opérateurs (13) et (23) nécessite un changement de coordonnées de Jacobi au moyen des coefficients de Raynal-Revai et est décrite en détails dans [60]. Notons enfin que la séquence de représentations irréductibles  $[\nu_3], [\nu_2]$  suivant  $S_3$  et  $S_2$  peut être labellée de manière unique par un tableau de Young  $[\nu_3]_{m_3}$ . Nous identifions alors,

$$|K_2[\nu_2][\nu_3]\beta_3\rangle^{L_2, M_2} \equiv |K_2[\nu_3]_{m_3}\beta_3\rangle^{L_2, M_2}. \quad (4.138)$$

Nous poursuivons en construisant les états à quatre particules,

$$|K_2[\nu_3]_{m_3}\beta_3L_2, l_3K_3\rangle^{L_3, M_3}. \quad (4.139)$$

L'opérateur de somme des classes du groupe  $S_4$  peut s'écrire,

$$[(2)]_4 = [(2)]_3 + \sum_{i=1}^3 (i, 4). \quad (4.140)$$

Cet opérateur commute avec les opérateurs  $\mathcal{L}_3^2$ ,  $L_3^2$  et  $Lz_3$ . L'ensemble des vecteurs (4.139) avec  $[\nu_3]_{m_3}$ ,  $K_3$ ,  $L_3$ ,  $M_3$  fixés forme un espace invariant de  $S_4$ . La diagonalisation de (4.140) dans cette base nous fournit les états,

$$|K_3[\nu_4]_{m_4}\beta_4\rangle^{L_3, M_3} = \sum_{K_2, L_2, l_3, \beta_3} \langle K_2[\nu_3]_{m_3}\beta_3L_2, l_3K_3 | \} K_3[\nu_4]_{m_4}\beta_4 \rangle^{L_3} |K_2[\nu_3]_{m_3}\beta_3L_2, l_3K_3\rangle^{L_3, M_3}, \quad (4.141)$$

de bons nombres quantiques  $K_3$ ,  $L_3$  et  $M_3$  et suivant la séquence de représentations irréductibles de  $S_4, S_3, S_2$  spécifiées par le tableau de Young  $[\nu_4]_{m_4}$ . Enfin, la récurrence mène à l'état de base à  $i$  particules,

$$|K_{i-1}[\nu_i]_{m_i}\beta_i\rangle^{L_{i-1}, M_{i-1}} = \sum_{K_{i-2}, L_{i-2}, l_{i-1}, \beta_{i-1}} \langle K_{i-2}[\nu_{i-1}]_{m_{i-1}}\beta_{i-1}L_{i-2}, l_{i-1}K_{i-1} | \} K_{i-1}[\nu_i]_{m_i}\beta_i \rangle^{L_{i-1}} |K_{i-2}[\nu_{i-1}]_{m_{i-1}}\beta_{i-1}L_{i-2}, l_{i-1}K_{i-1}\rangle^{L_{i-1}, M_{i-1}}. \quad (4.142)$$

Dans [60], il est montré que les coefficients de parenté fractionnaire hypersphériques, dans (4.142), dépendent des partitions  $[\nu_i]$  et  $[\nu_{i-1}]$ , et non des séquences spécifiées par les indices  $m_i$  et  $m_{i-1}$ . Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation suivante,

$$[K]_i \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, L_2, L_3, \dots, L_{i-2}, K_2, K_3, \dots, K_{i-1}\}, \quad (4.143)$$

équivalente à (4.106), mais où nous spécifions en plus (par l'indice  $i$ ) le nombre de particules composant le système. Nous pouvons alors écrire,

$$[K]_i \equiv [K]_{i-1} + \{L_{i-2}, l_{i-1}, K_{i-1}\}. \quad (4.144)$$

Nous pouvons résumer les résultats précédents en écrivant un état de la base hyperangulaire à  $i$  particules suivant la séquence de représentations irréductibles  $S_2 \subset S_3 \cdots S_i$  spécifiée par le tableau de Young  $[\nu_i]_{m_i}$ , comme une combinaison linéaire d'harmoniques hyper-sphériques couplées,

$$|K_{i-1}[\nu_i]_{m_i}\beta_i\rangle^{L_{i-1}, M_{i-1}} = \sum_{\substack{[K]_{i-1} \\ L_{i-2}, l_{i-1}}} \langle [K]_i | \} K_{i-1}[\nu_i]_{m_i}\beta_i \rangle^{L_{i-1}} | [K]_i \rangle^{L_{i-1}, M_{i-1}}, \quad (4.145)$$

où nous avons défini,

$$\langle [K]_i | \} K_{i-1}[\nu_i]_{m_i}\beta_i \rangle^{L_{i-1}} = \sum_{\substack{\beta_3, \dots, \beta_{i-1} \\ \beta_2 \equiv 1}} \prod_{k=2}^{i-1} \langle K_{k-1}[\nu_k]\beta_k L_{k-1}, l_k K_k | \} K_k[\nu_{k+1}]\beta_{k+1} \rangle^{L_k}. \quad (4.146)$$

Nous nous intéressons maintenant à la partie spin-isospin. Nous introduisons alors les notations suivantes afin de définir, sous forme couplées, les fonctions de spin et d'isospin du système de  $i$  particules,

$$[S]^{S_{i-1}, Sz} \equiv \left[ \cdots \left( (1/2, 1/2)^{S_1}, 1/2 \right)^{S_2}, \cdots, 1/2 \right]^{S_{i-1}, Sz}, \quad (4.147a)$$

$$[T]^{T_{i-1}, Tz} \equiv \left[ \cdots \left( (1/2, 1/2)^{T_1}, 1/2 \right)^{T_2}, \cdots, 1/2 \right]^{T_{i-1}, Tz}. \quad (4.147b)$$

avec,

$$Sz = \sum_{k=1}^i m_{sk}, \quad (4.148a)$$

$$Tz = \sum_{k=1}^i \tau_{zk}. \quad (4.148b)$$

La notation  $[S]$  ( $[T]$ ) peut alors être utilisée afin de regrouper l'ensemble des  $i-2$  moments de spin (d'isospin) autres que  $S_{i-1}$  ( $T_{i-1}$ ),

$$[S] \equiv \{S_1, S_2, \cdots, S_{i-2}\}, \quad (4.149a)$$

$$[T] \equiv \{T_1, T_2, \cdots, T_{i-2}\}. \quad (4.149b)$$

On peut montrer [62] que chaque produit couplé (4.147a) de fonctions de spin (de symétrie  $SU(2)$ ) vérifie la symétrie d'un tableau de Young. Plus précisément, à un moment de spin total  $S_{i-1}$  donné correspond un diagramme de Young  $[\nu]$ , et chaque tableau de Young  $[\nu]_m$  correspond à une donnée de l'ensemble des  $i-2$  moments de spin  $\{S_1, S_2, \cdots, S_{i-2}\}$ . Nous écrivons ce fait sous la forme suivante,

$$[S]^{S_{i-1}} \equiv [\nu_{S_{i-1}}]_{m_{[S]}}. \quad (4.150)$$

Il en va de même pour les produits couplés de fonctions d'isospin,

$$[T]^{T_{i-1}} \equiv [\nu_{T_{i-1}}]_{m_{[T]}}. \quad (4.151)$$

Ces produits de fonctions de symétrie  $SU(2)$  couplées, et les tableaux de Young associés sont donnés dans l'annexe (6.9) pour  $i = 2, 3, 4$ . La construction de fonctions de spin-isospin ( $SU(4)$ ) de symétrie bien définie se fait au moyen de coefficients de Clebsch-Gordan du groupe du groupe  $S_i$ . En notant  $|\nu_1]_{m_1}\rangle$  l'un des produits de fonctions de spin (4.147a) vérifiant la symétrie du tableau de Young  $[\nu_1]_{m_1}$  et  $|\nu_2]_{m_2}\rangle$  l'un des produits de fonctions d'isospin (4.147b) vérifiant la symétrie du tableau de Young  $[\nu_2]_{m_2}$ , alors une fonction de spin-isospin  $B_{[\nu]_m}$  de symétrie  $[\nu]_m$  s'écrit,

$$B_{[\nu]_m} = \sum_{m_1, m_2} \langle [\nu]_m | [\nu_1]_{m_1}, [\nu_2]_{m_2} \rangle |[\nu_1]_{m_1}\rangle |[\nu_2]_{m_2}\rangle. \quad (4.152)$$

Mais nous voulons construire des fonctions de spin-isospin de moments totaux  $S_{i-1}$  et  $T_{i-1}$  donnés. En utilisant les équivalences (4.150) et (4.151), nous pouvons écrire de telles fonctions de la manière suivante,

$$B_{[\nu]_m}^{S_{i-1}, T_{i-1}, Sz, Tz} = \sum_{[S], [T]} \langle [\nu]_m | [\nu_{S_{i-1}}]_{m_{[S]}}, [\nu_{T_{i-1}}]_{m_{[T]}} \rangle |[S]^{S_{i-1}, Sz}\rangle |[T]^{T_{i-1}, Tz}\rangle. \quad (4.153)$$

Ces fonctions de spin-isospin à symétrie adaptée sont données dans l'annexe (6.9) pour  $i = 2, 3, 4$ .

Enfin, nous pouvons construire une base complètement antisymétrique de l'espace hyper-angulaire, de spin et d'isospin comme suit,

$$|K_{i-1}, L_{i-1}, S_{i-1}, g_i\rangle^{j_p, m_p} = \sum_{\substack{[K]_{i-1}, L_{i-2}, l_{i-1} \\ [S], [T]}} \mathcal{C}_{[K]_i, [S], [T], g_i}^{L_{i-1}, S_{i-1}, T_{i-1}} |([K]_i^{L_{i-1}}, [S]^{S_{i-1}})^{j_p, m_p}, [T]^{T_{i-1}, T_z}\rangle, \quad (4.154)$$

où nous avons posé la notation simplifiée suivante,

$$g_i \equiv \{T_{i-1}, T_z, [\nu_i], \beta_i\}, \quad (4.155)$$

et où les coefficients sont donnés par,

$$\mathcal{C}_{[K]_i, [S], [T], g_i}^{L_{i-1}, S_{i-1}, T_{i-1}} = \sum_{m_i} \frac{\Lambda_{m_i}^{\nu_i}}{\sqrt{h_{\nu_i}}} \langle [K]_i | \{K_{i-1} [\nu_i]_{m_i} \beta_i\}^{L_{i-1}} \langle [\tilde{\nu}_i]_{\tilde{m}_i} | [\nu_{S_{i-1}}]_{m_{[S]}}, [\nu_{T_{i-1}}]_{m_{[T]}} \rangle. \quad (4.156)$$

Dans (4.154), nous avons de surcroît couplé les fonctions hyper-angulaires et de spin au moment de spin total  $j_p$ ,

$$|([K]_i^{L_{i-1}}, [S]^{S_{i-1}})^{j_p, m_p}\rangle = \sum_{M_{i-1}, S_z} \langle L_{i-1} S_{i-1}, M_{i-1} S_z | j_p, m_p \rangle | [K]_i^{L_{i-1}, M_{i-1}}, [S]^{S_{i-1}, S_z} \rangle. \quad (4.157)$$

En posant  $K = K_{i-1}$ ,  $L = L_{i-1}$  et  $S = S_{i-1}$ , nous pouvons construire la base,

$$\{|(KLSg_i)^{j_p, m_p}, \rho_i\rangle\}, \quad (4.158)$$

de l'espace intrinsèque total d'un système de  $i$  fermions, et vérifiant,

$$\langle (KLSg_i)^{j_p, m_p}, \rho_i | (K'L'S'g'_i)^{j_p, m_p}, \rho'_i \rangle = \delta_{(K,L,S,g_i), (K',L',S',g'_i)} \frac{\delta(\rho_i - \rho'_i)}{\rho_i^{3i-4}}, \quad (4.159a)$$

$$\sum_{K,L,S,g_i,j_p,m_p} \int d\rho_i \rho_i^{3i-4} |(KLSg_i)^{j_p, m_p}, \rho_i\rangle \langle (KLSg_i)^{j_p, m_p}, \rho_i| = \mathbb{1}. \quad (4.159b)$$

La représentation hyper-angulaire de la base (4.158) sera alors notée,

$$\langle \vec{\rho}_i | (KLSg_i)^{j_p, m_p}, \rho'_i \rangle = \frac{\delta(\rho_i - \rho'_i)}{\rho_i^{3i-4}} Y_{KLSg_i}^{j_p, m_p}(\vec{\phi}_i). \quad (4.160)$$

La construction de cette base antisymétrique va nous permettre, dans la section suivante, de développer l'équation de Schrödinger pour les états intrinsèques liés du projectile.

#### 4.2.2.4 Etats du projectile

L'équation aux valeurs propres du vecteur d'état intrinsèque d'un système de  $i$  fermions peut s'écrire,

$$\left( E_p + \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{int}^2 - \sum_{j < k=1}^i V_{jk} \right) |P_i\rangle = 0, \quad (4.161)$$

où  $\nabla_{int}^2$  est la partie intrinsèque de l'opérateur laplacien (cf. (4.83)),  $\mu$  est la masse réduite globale (cf. (4.72a)) et  $V_{jk}$  est l'interaction entre les particules  $j$  et  $k$ . Nous pouvons décomposer l'état intrinsèque  $|P_i\rangle^{j_p, m_p}$  (où nous ajoutons en exposant le moment angulaire  $j_p$ , ainsi que sa projection  $m_p$ ), du projectile dans la base antisymétrique (4.158) de la manière suivante,

$$\langle \vec{\rho}_i | P_i \rangle^{j_p, m_p} = \frac{1}{\rho_i^{\frac{3i-4}{2}}} \sum_{K, L, S, g_i} P_{KLSg_i}^{j_p}(\rho_i) Y_{(KLSg_i)}^{j_p, m_p}(\vec{\phi}_i). \quad (4.162)$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions  $Y_{(KLSg_i)}^{j_p, m_p}$  et la relation (4.97), on montre que l'équation (4.161) est équivalente au système d'équations différentielles suivant,

$$\left[ E_p + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{d\rho_i^2} - \frac{K(K+3i-5) + \frac{(3i-4)(3i-6)}{4}}{\rho_i^2} \right) \right] P_{KLSg_i}^{j_p}(\rho_i) + \sum_{K'L'S'g'_i} \langle (KLSg_i)^{j_p, m_p} | \sum_{jk} V_{jk} | (K'L'S'g'_i)^{j_p, m_p} \rangle(\rho_i) P_{K'L'S'g'_i}^{j_p}(\rho_i) = 0, \quad (4.163)$$

où nous avons posé,

$$\langle (KLSg_i)^{j_p, m_p} | V_{jk} | (K'L'S'g'_i)^{j_p, m_p} \rangle(\rho_i) = \int d\phi_i^{3i-4} Y_{(KLSg_i)}^{*j_p, m_p}(\vec{\phi}_i) V_{jk}(\rho_i, \vec{\phi}_i) Y_{(K'L'S'g'_i)}^{j_p, m_p}(\vec{\phi}_i). \quad (4.164)$$

Le calcul des éléments de matrice (4.164) se fait à l'aide des coefficients de Raynal-Revai afin d'éviter le calcul d'intégrales à  $3i-4$  dimensions (voir par exemple [63]). La résolution du système d'équations (4.163) avec comme condition asymptotique,

$$P_{KLSg_i}^{j_p}(\rho_i) \sim e^{-\kappa\rho_i}, \quad \text{pour } \rho_i \rightarrow \infty, \quad (4.165)$$

où  $\kappa = \sqrt{-2\mu E_p / \hbar^2}$ , fournit un ensemble de solutions discrètes correspondant aux états liés du système (en supposant que le projectile n'admet pas de sous-système lié dans la région asymptotique, ou qu'il s'agit d'un noyau de type brunnien). Dans ce qui suit, nous supposons que le système d'équations (4.163) admet au moins un état lié et noterons ces états,

$$|P_i^{j_p, m_p}\rangle = \sum_{KLSg_i} |P_{KLSg_i}^{j_p}\rangle |K, L, S, g_i\rangle^{j_p, m_p}, \quad (4.166)$$

où, en représentation hypersphérique, nous avons,

$$\langle \rho_i | P_{KLSg_i}^{j_p} \rangle = \frac{1}{\rho_i^{\frac{3i-4}{2}}} P_{KLSg_i}^{j_p}(\rho_i), \quad (4.167a)$$

$$\langle \vec{\phi}_i | K, L, S, g_i \rangle^{j_p, m_p} = Y_{(KLSg_i)}^{j_p, m_p}(\vec{\phi}_i). \quad (4.167b)$$

### 4.2.2.5 Construction de la base à deux fragments

Nous nous intéressons dans cette section à la construction d'une base à deux fragments prenant en compte explicitement la structure interne de la cible et du projectile. Nous considérons la partition de masse  $i$  (cf. partie (4.1.1)). Un état de l'espace  $\tilde{P}_i$  peut alors s'écrire,

$$|\mathbb{T}_{A-i}^{j_T} \otimes \mathcal{Y}_{\bar{c}} r\rangle^{J,M} \equiv |\mathbb{T}_{A-i}^{j_T} \otimes (l_i P_i^{j_P})^j, r\rangle^{J,M}, \quad (4.168)$$

où nous reprenons les notations introduites dans la section (2.3) à ce détail près que l'on ajoute l'indice  $i$  au moment angulaire relatif cible-projectile. A partir de ces états, nous pouvons construire les états complètement antisymétriques,

$$|\mathbb{T}_{A-i}^{j_T}, (l_i P_i^{j_P})^j, r\rangle^{J,M} = \mathcal{A} \left( |\mathbb{T}_{A-i}^{j_T} \otimes (l_i P_i^{j_P})^j, r\rangle^{J,M} \right), \quad (4.169)$$

où  $\mathcal{A}$  est un antisymétriseur comme défini en (4.15). Enfin, en utilisant le projecteur (4.32), nous définissons les états suivants,

$$|\mathbb{T}_{A-i}^{j_T}, {}^i p (l_i P_i^{j_P})^j, r\rangle^{J,M} \equiv |\mathbb{T}_{A-i}^{j_T}, {}^i p \mathcal{Y}_{\bar{c}} r\rangle^{J,M}, \quad (4.170)$$

qui appartiennent à l'espace  $P_i$ . Intéressons-nous alors aux états du projectile. En utilisant les résultats des deux sections précédentes, nous pouvons écrire, en recouplant de manière adéquate,

$$\begin{aligned} |(l_i P_i^{j_P})^{j,m}\rangle &= \sum_{\substack{K_{i-1}, L_{i-1}, S_{i-1}, L_i, g_i \\ [K]_{i-1}, L_{i-2}, l_{i-1}, [S], [T]}} \mathcal{C}_{[K]_i, [S], [T], g_i}^{L_{i-1}, S_{i-1}, T_{i-1}} (-1)^{j+S_{i-1}+L_i} \hat{L}_i \hat{J}_P \left\{ \begin{array}{ccc} l_i & L_{i-1} & L_i \\ S_{i-1} & j & j_P \end{array} \right\} \\ |P_{K_{i-1}, L_{i-1}, S_{i-1}, g_i}^{j_P}\rangle & \left| \left( [K]_i^{L_{i-1}} l_i \right)^{L_i}, [S]^{S_{i-1}} \right\rangle^{j,m} \left| [T]^{T_{i-1}, T_z} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.171)$$

où les diverses constantes et notations ont été définies dans les sections précédentes. Dans cette dernière expression, la partie hyper-sphérique à  $i$  particules (et angulaire relative) peut s'écrire en intégrant sur l'hyper-rayon,

$$\begin{aligned} |P_{K_{i-1}, L_{i-1}, S_{i-1}, g_i}^{j_P}\rangle & \left| \left( [K]_i^{L_{i-1}} l_i \right)^{L_i, M_i} \right\rangle = \\ & \int d\rho_i \rho_i^{\frac{3i-4}{2}} P_{K_{i-1}, L_{i-1}, S_{i-1}, g_i}^{j_P}(\rho_i) \left( |[K]_i^{L_{i-1}}, \rho_i\rangle \times |l_i\rangle \right)^{L_i, M_i}. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Dans (4.172),  $|[K]_i^{L_{i-1}}, \rho_i\rangle$  représente un élément de la base hyper-sphérique comme définie en (4.107), et  $|l_i\rangle$  est une simple harmonique sphérique. Par la suite, nous noterons,

$$\left( |[K]_i^{L_{i-1}}, \rho_i\rangle \times |l_i\rangle \right)^{L_i, M_i} \equiv \left| \left( [K]_i^{L_{i-1}} l_i \right)^{L_i, M_i}, \rho_i \right\rangle. \quad (4.173)$$

Afin de pouvoir calculer les éléments de matrice de l'interaction entre les nucléons de la cible et ceux du projectile, nous voulons passer de la représentation à deux corps (4.168) à une représentation hyper-sphérique à  $i+1$  corps (incluant la cible) de manière à pouvoir effectuer une rotation cinématique et ainsi simplifier ce calcul. Une représentation « mixte » possible de l'espace  $\tilde{P}_i$  peut s'écrire (en omettant les états intrinsèques de la cible),

$$|\vec{\rho}_i, \vec{r}\rangle \equiv |(\vec{\phi}_i, \rho_i), (\Omega_i, r)\rangle, \quad (4.174)$$

où  $|\vec{\rho}_i\rangle$  est un élément de la représentation hyper-sphérique intrinsèque à  $i$  particules (cf. notation introduite dans la section (4.2.2.1)) engendrant l'espace dans lequel sont évalués les états intrinsèques du projectile, et  $\vec{r}$  est la coordonnée relative cible-projectile. Dans (4.174), nous notons  $\vec{\phi}_i$  l'ensemble des  $i - 2$  hyper-angles et des  $2i - 2$  angles de la représentation hyper-sphérique à  $i$  particules,

$$\vec{\phi}_i \equiv \{\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{i-1}, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{i-1}\}, \quad (4.175)$$

et  $\rho_i$  l'hyper-rayon.  $r$  et  $\Omega_i$  correspondent pour leur part au module et à la partie angulaire du vecteur  $\vec{r}$  respectivement. Nous voulons donc passer de la représentation (4.174) à la représentation suivante,

$$|\vec{\rho}_{i+1}\rangle \equiv |\vec{\phi}_{i+1}, \rho_{i+1}\rangle, \quad (4.176)$$

où,

$$\vec{\phi}_{i+1} \equiv \{\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{i-1}, \phi_i, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{i-1}, \Omega_i\} \equiv \{\vec{\phi}_i, \phi_i, \Omega_i\}, \quad (4.177)$$

et où  $\rho_{i+1}$  correspond à l'hyper-rayon du système de  $i+1$  particules. En primant les variables angulaires et hyper-angulaires à  $i$  particules, on peut montrer, en utilisant les propriétés de la distribution de Dirac, que l'on a,

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}_i, \vec{r} | \vec{\rho}_{i+1} \rangle &= \frac{1}{J_{i+1}} \delta(\vec{\phi}_i - \vec{\phi}'_i) \delta(\Omega_i - \Omega'_i) \\ &\delta\left(\rho_{i+1} - \frac{\rho_i}{\cos(\phi_i)}\right) \delta\left(\phi_i - \arctan\left(\frac{\alpha r}{\rho_i}\right)\right), \end{aligned} \quad (4.178)$$

où  $J_{i+1}$  est le jacobien de la transformation curviligne (4.80),

$$J_{i+1} = \rho_{i+1}^{3i-1} \prod_{k=2}^i \cos^{3k-4}(\phi_k) \sin^2(\phi_k), \quad (4.179)$$

et où nous avons posé,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_{\text{TP}}}{\mu}}, \quad (4.180)$$

avec  $\mu_{\text{TP}}$  la masse réduite cible-projectile et  $\mu$  la masse réduite globale (définie en (4.72a)). Nous voulons maintenant passer d'une représentation à l'autre en termes d'ondes partielles. A l'aide de (4.178), on montre que l'on peut écrire,

$$\left| \left( [K]_i^{L_{i-1}, l_i} \right)^{L_i, M_i}, \rho_i, r \right\rangle = \sum_{K_i} F_{K_{i-1}, l_i, K_i}^\dagger(\vec{\phi}_i) \left| [K]_{i+1}^{L_i, M_i}, \bar{\rho}_{i+1} \right\rangle, \quad (4.181)$$

où les fonctions  $F_{K_{i-1}, l_i, K_i}$  ont été définies en (4.103) et où,

$$\bar{\phi}_i = \arctan\left(\frac{\alpha r}{\rho_i}\right), \quad (4.182a)$$

$$\bar{\rho}_{i+1} = \sqrt{\rho_i^2 + (\alpha r)^2}. \quad (4.182b)$$

La figure (4.8) illustre la transformation (4.181) pour  $i = 3$ .

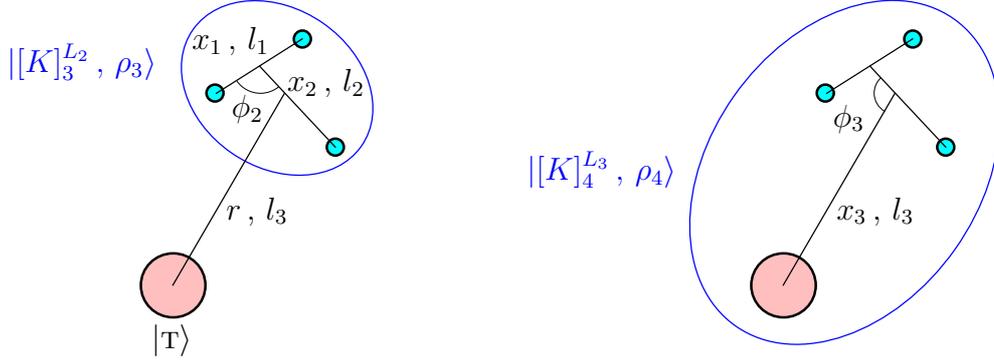


FIG. 4.8 – A gauche : est illustré schématiquement un élément de la base à deux fragments pour une cible  $T$  constituée de  $A - 3$  particules et un projectile constitué de 3 particules.  $x_1$  et  $x_2$  représentent les modules des vecteurs de Jacobi (définis en (4.80)),  $l_1$  et  $l_2$  sont les moments angulaires de ces variables et  $\phi_2$  est l'hyper-angle reliant  $x_1$  et  $x_2$  à l'hyper-rayon  $\rho_3$ . Les éléments  $||[K]_3^{L_2}, \rho_3\rangle$  de la base d'ondes partielles dans laquelle sont développés les états du projectile sont définis comme en (4.166). Enfin,  $r$  est le module de la position relative  $\vec{r}$  des deux fragments, et  $l_3$  le moment angulaire relatif cible-projectile. Une fois résolu le problème à trois corps intrinsèque du projectile, le problème total se résume à un problème à deux corps. A droite : la cible est considérée comme une particule ponctuelle (bien que possédant une structure interne). Il s'agit donc d'un problème à quatre corps développé dans un système de coordonnées hyper-sphériques approprié. En numérotant les particules constituant le projectile de 1 à 3, les coordonnées hyper-sphériques à quatre particules sont obtenues en ajoutant la quatrième particule (la cible) suivant le schéma récursif présenté à la fin de la section (4.2.2.1). Le passage de la représentation schématisée à gauche à celle schématisée à droite se traduit par la substitution des variables  $\rho_3$  et  $r$  par les variables  $\rho_4$  et  $\phi_3$ .

Enfin, nous résumons ici en écrivant entièrement la transformation dérivée ci-dessus,

$$\begin{aligned}
 & |(l_i P_i^{j_P})^{j,m}, r\rangle = \\
 & \sum_{\substack{cf\ eq.(4.171) \\ K_i}} \int d\rho_i \rho_i^{\frac{3i-4}{2}} \mathcal{C}_{[K]_i, [S], [T], g_i}^{L_{i-1}, S_{i-1}, T_{i-1}} (-1)^{j+S_{i-1}+L_i} \hat{L}_i \hat{j}_P \left\{ \begin{matrix} l_i & L_{i-1} & L_i \\ S_{i-1} & j & j_P \end{matrix} \right\} F_{K_{i-1}, l_i, K_i}^\dagger(\bar{\phi}_i) \\
 & P_{K_{i-1}, L_{i-1}, S_{i-1}, g_i}^{j_P}(\rho_i) \left| \left( [K]_{i+1}^{L_i}, [S]^{S_{i-1}} \right)^{j,m}, [T]^{T_{i-1}, T_z}, \bar{\rho}_{i+1} \right\rangle. \quad (4.183)
 \end{aligned}$$

Remarquons pour finir que le développement (4.181) sur les fonctions  $F_{K_{i-1}, l_i, K_i}$  est théoriquement infini. Cependant, le développement d'une interaction (ou d'un état confiné à une région localisée de l'espace) dans cette base ne doit en principe requérir qu'un nombre limité de moments grand-orbitaux  $K_i$ .

### 4.2.3 Les équations homogènes dans la base à deux fragments

Nous nous intéressons dans cette section au système d'équations (4.50). La résolution de ces équations inhomogènes nécessite celle des équations homogènes correspondantes. Aussi oublierons-nous ici les sources constituant le membre de droite des équations (4.50). Afin d'être plus précis, nous modifions légèrement la notation introduite en (2.84) pour la définition des canaux en ajoutant un indice correspondant au nombre de particules constituant le projectile. Par exemple, pour la partition de masse  $f$ , nous noterons,

$$c_f \equiv \{\mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, l_f, P_f^{j_P}, j\} \quad (4.184a)$$

$$\bar{c}_f \equiv \{l_f, P_f^{j_P}, j\}. \quad (4.184b)$$

Les états à deux fragments appartenant à l'espace  $P_f$  sont alors,

$$|\mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} r\rangle^{J,M} \equiv |\mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, {}^f p (l_f P_f^{j_P})^j r\rangle^{J,M}, \quad (4.185)$$

dont la construction a été donnée dans la section précédente. Enfin, nous limiterons l'espace  $P_f$  à une structure à deux fragments,

$$P_f \simeq \sum_{c_f, J, M} \int dr r^2 |\mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} r\rangle^{J,M} \langle \mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} {}^f p|, \quad (4.186)$$

ce qui constitue une approximation raisonnable si l'on suppose que le projectile est « pré-formé » dans la région d'interaction. Les équations avec une seule particule dans un état de diffusion ayant été développées en détail dans le chapitre précédent, nous considérerons le cas où  $f \geq 2$ .

Ecrivons donc les équations homogènes projetées sur l'espace  $P_f$ ,

$$P_f(E - H)P_f|\psi_f\rangle_i = 0. \quad (4.187)$$

En substituant l'hamiltonien intrinsèque  $H$  par l'hamiltonien total  $\mathcal{H}$  auquel l'on soustrait celui du centre de masse, puis en utilisant la relation (2.167c), il vient,

$$P_f(E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{22} + \frac{P_{cm}^2}{2Am})P_f|\psi_f\rangle = 0. \quad (4.188)$$

En multipliant (4.188) à gauche par  ${}^{J,M} \langle \mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} {}^f p|$  et en utilisant l'expression (4.37) du projecteur  $P_f$ , nous obtenons,

$$\sum_{c'_f} \int dr' r' \langle \mathbb{T}_{A-f}^{j_T}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} {}^f p| E - \mathcal{H}_{00} - \mathcal{H}_{22} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} | \mathbb{T}_{A-f}^{j'_T}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle^{J,M} \psi_{c'_f}^{J,M}(r') = 0 \quad (4.189)$$

où nous avons posé,

$${}^{J,M} \langle \mathbb{T}_{A-f}^{j'_T}, r' \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} {}^f p | \psi_f \rangle = \frac{1}{r'} \psi_{c'_f}^{J,M}(r'). \quad (4.190)$$

L'hamiltonien  $\mathcal{H}_{00}$  n'agit que sur les états liés constituant les états de la cible  $|\mathbb{T}\rangle$ . En utilisant la même argumentation que dans la section (2.4.4.3), nous en déduisons que cet opérateur s'écrit, en première quantification, de la manière suivante,

$$\mathcal{H}_{00} = \sum_{k=1}^{A-f} t(k) + \sum_{1=k<j}^{A-f} V(kj), \quad (4.191)$$

où les particules numérotées de 1 à  $A - f$  sont supposées être dans un état lié. De même qu'en (2.181), nous scindons  $\mathcal{H}_{00}$  de la manière suivante,

$$\mathcal{H}_{00} = H_{T_{A-f}} + \frac{P_t^2}{2(A-f)m}, \quad (4.192)$$

où  $H_{T_{A-f}}$  représente l'hamiltonien intrinsèque d'un système de  $A - f$  particules dans un état lié, et où le deuxième terme du membre de droite correspond à l'hamiltonien du centre de masse de ce système ( $m$  étant la masse d'un nucléon). Nous choisissons alors les états  $|T\rangle$  de la cible de manière à ce qu'ils satisfassent à,

$$(E_t - H_{T_{A-f}})|T^{j_T m_T}\rangle = 0. \quad (4.193)$$

Nous nous intéressons maintenant à l'hamiltonien partiel  $\mathcal{H}_{22}$  qui, selon (2.265c), s'écrit,

$$\mathcal{H}_{22} = \mathcal{T}_{11} + \mathcal{V}_{11} + \mathcal{V}_{22}. \quad (4.194)$$

D'après (2.263d) et (2.264i), nous avons,

$$\mathcal{T}_{11} + \mathcal{V}_{22} = \sum_{k \in \mathcal{C}} t(k) + \sum_{\substack{k < j \\ k \in \mathcal{C}, j \in \mathcal{C}}} V_{jk} \quad (4.195a)$$

$$= \frac{P_P^2}{2fm} + H_P, \quad (4.195b)$$

où, dans (4.195a), nous avons spécifié par  $\in \mathcal{C}$  que ces opérateurs n'agissent que sur les particules se trouvant dans un état de diffusion. Dans (4.195b), nous avons scindé l'hamiltonien partiel en un hamiltonien intrinsèque au groupe de particules se trouvant dans un état de diffusion, et l'opérateur énergie cinétique du centre de masse de ce même groupe de particules. L'hamiltonien intrinsèque  $H_P$  prend alors la forme suivante,

$$H_P = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{int}^2 + \sum_{\substack{j < k \\ (j \in \mathcal{C}, k \in \mathcal{C})}} V_{jk}, \quad (4.196)$$

où  $\nabla_{int}^2$  est la partie intrinsèque de l'opérateur laplacien, définie en (4.83), pour le sous système de  $f$  particules. Enfin, nous choisissons les états intrinsèques  $|P\rangle$  du projectile de manière à ce qu'ils satisfassent à,

$$(E_P - H_P)|P_f^{j_P m_P}\rangle = 0, \quad (4.197)$$

équation qui a été développée dans la section (4.2.2.4). En utilisant les résultats précédents, nous pouvons écrire le noyau de l'équation intégrodifférentielle (4.189) sous la forme suivante,

$$\langle T_{A-f}^{j_T}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}^f p | E - E_T - E_P - \mathcal{V}_{11} + \frac{P_{cm}^2}{2Am} - \frac{P_T^2}{2(A-f)m} - \frac{P_P^2}{2fm} | T_{A-f}^{j'_T}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle^{J,M} \quad (4.198)$$

En remarquant que l'on a,

$$\frac{P_{cm}^2}{2Am} - \frac{P_T^2}{2(A-f)m} - \frac{P_P^2}{2fm} = -\frac{q_C^2}{2\mu_{TP}}, \quad (4.199)$$

où  $\vec{q}_c$  représente la variable conjuguée de la position relative cible-projectile, et  $\mu_{\text{TP}}$  est la masse réduite correspondante, à savoir,

$$\mu_{\text{TP}} = \frac{f(A-f)}{A} m, \quad (4.200)$$

nous pouvons écrire (4.198),

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_{A-f}^{j_{\text{T}}}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}^f p | E - E_{\text{T}} - E_{\text{P}} - \frac{q_c^2}{2\mu_{\text{TP}}} | \mathbb{T}_{A-f}^{j'_{\text{T}}}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle^{J,M} \\ = -\delta_{c_f, c'_f} \frac{1}{\hat{j}} \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} || {}^f p (\hat{T}) {}^f p || \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle, \end{aligned} \quad (4.201)$$

où nous avons posé,

$$\hat{T} = \frac{q_c^2}{2\mu_{\text{TP}}} - (E - E_{\text{T}} - E_{\text{P}}). \quad (4.202)$$

Nous regardons maintenant en détails l'opérateur  $\mathcal{V}_{11}$ . Dans l'annexe (6.4) sont dérivés les éléments de matrice de cet opérateur dans une base comprenant une seule particule dans un état de diffusion. Il n'est pas difficile de montrer que le calcul des éléments de matrice de cet opérateur dans une base à  $A$  corps contenant un nombre arbitraire de particules dans le continuum se fait de manière analogue. Une différence apparaît néanmoins, que nous résumons ainsi : dans l'annexe (6.4) il est montré que la matrice de couplage des équations homogènes peut s'écrire comme les éléments de matrice d'un opérateur non-local à un corps, noté  ${}^J \mathcal{V}_{\text{T}^{j_{\text{T}}}, \text{T}'^{j'_{\text{T}}}}$ , dans la base partielle à une particule  $\{|\mathcal{Y}_{\bar{c}}, p_{\bar{c}}, r\rangle\}$  (cf. équation (6.89)). La dérivation des éléments de matrice de l'opérateur  $\mathcal{V}_{11}$  dans la base engendrée par les états (4.185) mène quant à elle à,

$$\langle \mathbb{T}_{A-f}^{j_{\text{T}}}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}^f p | \mathcal{V}_{11} | \mathbb{T}_{A-f}^{j'_{\text{T}}}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle^{J,M} = \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} || {}^f p \left( \sum_{k \in \mathcal{C}} {}^J \mathcal{V}_{\text{T}^{j_{\text{T}}}, \text{T}'^{j'_{\text{T}}}}(k) \right) {}^f p || \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle, \quad (4.203)$$

où nous spécifions par  $k \in \mathcal{C}$  que la sommation porte sur les  $f$  particules occupant un état de diffusion et composant les « sous-états »  $\{|\mathcal{Y}_{\bar{c}_f}^f p\rangle\}$ . Dans (4.203), l'opérateur à un corps  ${}^J \mathcal{V}_{\text{T}^{j_{\text{T}}}, \text{T}'^{j'_{\text{T}}}}(k)$  agit sur la particule numérotée  $k$  et admet la représentation radiale (6.99a), à ceci près que la coordonnée relative est celle séparant un nucléon du projectile (la particule  $n^{\circ} k$ ) du centre de masse de la cible. Notons que la coordonnée radiale  $r$ , dans (4.203), correspond à la distance séparant les centres de masse des deux fragments, et non à celle séparant le centre de masse de la cible avec l'un des nucléons composant le projectile. D'où l'intérêt de la décomposition (4.183) pour le calcul de ces éléments de matrice. La figure (4.9) illustre schématiquement les différentes interactions inter-nucléon et nucléon-cible pour la partition de masse 3. La dérivation des éléments de matrice (4.203) dans le cas général implique une notation très encombrante. C'est pourquoi nous ne donnons, en annexe (6.12), qu'un exemple de calcul dans le cas où seulement 2 particules composent le projectile. Enfin, nous pouvons résumer les résultats précédents en écrivant le système d'équations intégral-différentielles sous la forme suivante,

$$\sum_{c'_f} \int dr' r' \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} || {}^f p \left( \delta_{c_f, c'_f} \frac{1}{\hat{j}} \hat{T} + \sum_{k \in \mathcal{C}} {}^J \mathcal{V}_{\text{T}^{j_{\text{T}}}, \text{T}'^{j'_{\text{T}}}}(k) \right) {}^f p || \mathcal{Y}_{\bar{c}'_f} r' \rangle \psi_{c'_f}^{J,M}(r') = 0. \quad (4.204)$$

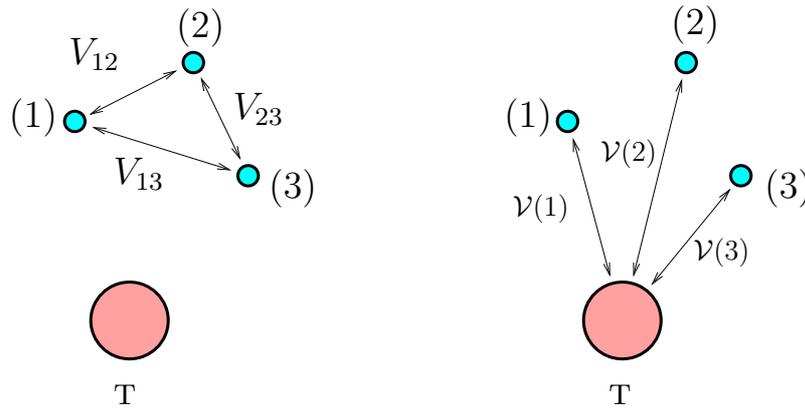


FIG. 4.9 – Illustration schématique : la cible  $T$  et les trois nucléons (numérotés de 1 à 3) composant le projectile. A gauche est illustré l'interaction mutuelle  $V_{ij}$  des nucléons composant le projectile. A droite est illustré l'interaction  $\mathcal{V}(k)$  de chaque nucléon avec la structure de la cible. L'interaction  $V$  est une interaction nucléon-nucléon, tandis que  $\mathcal{V}$  prend en compte l'interaction d'un nucléon du projectile avec tous les nucléons de la cible, ces derniers étant corrélés par les mélanges de configurations. Cette interaction admet donc un caractère non-local, dû au principe de Pauli.

En supposant que, dans le canal entrant, le système est dans la partition de masse  $i$ , c'est à dire dans l'état,

$$|T_{A-i}^{j_T m_T} \otimes P_i^{j_P m_P} \otimes \vec{q}\rangle, \quad (4.205)$$

nous pouvons définir la solution radiale matricielle  $\psi_{c_f, c_i}^J(r)$  par la relation,

$$\psi_{c_f}^{J, M}(r') = \sum_{c_i} \psi_{c_f, c_i}^J(r') \Xi_{c_i}^{J, M}(m_{T, A-i}, m_{P, i}, \Omega_q), \quad (4.206)$$

et admettant la forme asymptotique suivante,

$$\psi_{c_f, c_i}^J(r) \sim \sqrt{\frac{(A-f)! f!}{A!}} \frac{e^{i\sigma_{l_f}}}{2k_f} \left[ H_{c_f}^-(r) \delta_{c_i, c_f} + H_{c_f}^+ S_{c_f, c_i}^J \right], \quad (4.207)$$

où nous avons posé,

$$k_f = \sqrt{\frac{2\mu_{TP}(E - E_T - E_P)}{\hbar^2}}. \quad (4.208)$$

La méthode de projection des équations sur le continuum individuel multiple est donnée dans l'annexe (6.11) dans le cas où deux nucléons composent le projectile. La généralisation à un nombre plus élevé de particules dans le continuum se fait de manière analogue.

Le calcul des termes sources dans le système d'équations (4.50) doit se faire au cas par cas. Nous en donnons un exemple dans l'annexe (6.12).

#### 4.2.4 Remarques sur les autres formes d'aymptotiques

Nous avons, dans la section (4.2.1), dérivé les équations du modèle en couches avec couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum dans une base générale que nous notions symboliquement  $|\mathbb{T}, \{\rho_i\}\rangle$  pour  $i$  particules dans le continuum. Nous avons alors restreint cette base à des états à deux fragments, l'ensemble des « coordonnées »  $\{\rho_i\}$  se limitant aux états liés du projectile ainsi que la coordonnée relative cible-projectile. Nous voulons ici apporter quelques remarques sur la forme des équations dans une base où l'identité (4.34) est vérifiée, et ce dans le cas particulier où, dans la région d'interaction, les particules peuplant les états du continuum ne sont pas « agglomérées » sous la forme d'un cluster.

Nous avons construit, dans la section (4.2.2.5), une base hyper-angulaire, de spin et d'isospin antisymétrique. Pour un système de  $f$  particules, les états de cette base sont des combinaisons linéaires d'états du type (cf. eq. (4.183)),

$$|([K]_f^{L_{f-1}}, [S]^{S_{f-1}})^{j,m}, [T]^{T_{f-1}}\rangle. \quad (4.209)$$

A partir de ces derniers états de base, nous pouvons, suivant le schéma récursif présenté à la fin de la section (4.2.2.1), et en recouplant de manière adéquate, construire une base à  $f + 1$  particules de la manière suivante,

$$\begin{aligned} & \left| \left( ([K]_f^{L_{f-1}} \times [S]^{S_{f-1}})^{j,m}, l_f K_f \right)^{J,M}, [T]^{T_{f-1}}, \rho_{f+1} \right\rangle = \\ & \sum_{L_f} (-1)^{j+3S_{f-1}+2J+l_f+L_f} \hat{j} \hat{L}_f \left\{ \begin{array}{ccc} S_{f-1} & L_{f-1} & j \\ l_f & J & L_f \end{array} \right\} \\ & \left| [K]_{f+1}^{L_f}, \rho_{f+1} \right\rangle \times | [S]^{S_{f-1}} \rangle \Big]^{J,M} | [T]^{T_{f-1}} \rangle, \end{aligned} \quad (4.210)$$

où, dans le terme de droite, la partie hyper-angulaire admet la représentation suivante,

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\rho}_{f+1} \left| [K]_{f+1}^{L_f}, \rho'_{f+1} \right\rangle \right\rangle & \equiv \left\langle \vec{\rho}_{f+1} \left| \left( [K]_f^{L_{f-1}} \times l_f \right) K_f, \rho'_{f+1} \right\rangle^{L_f, M_f} \right\rangle \\ & = \frac{1}{\rho_{3f-1}} \delta(\rho_{f+1} - \rho'_{f+1}) \left( Y_{[K]_f}^{L_{f-1}}(\vec{\Phi}_f) \times Y_{l_f}(\Omega_f) \right)^{L_f, M_f} F_{K_{f-1}, l_f, K_f}(\Phi_f). \end{aligned} \quad (4.211)$$

Dans nos conventions, la particule numérotée  $f + 1$  correspond à la cible. Les états (4.210) nous permettent alors de construire une base hypersphérique à  $f + 1$  particules et antisymétrique seulement pour le sous-système composé des particules  $1, 2, \dots, f$ . Nous noterons ces états  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}_f}, \rho_{f+1}\rangle$  où  $\bar{c}_f$  représente l'ensemble des nombres quantiques nécessaires pour les définir de manière unique. Pour alléger les équations nous noterons dans ce qui suit  $\rho$  l'hyper-rayon du système de  $f + 1$  particules. Nous poursuivons en construisant une base incluant les degrés de libertés intrinsèques à la cible,

$$|\mathcal{Y}_{c_f}, \rho\rangle^{J,M} \equiv \mathcal{A} \left( \left[ |\mathbb{T}_{A-f}^{j_r} \rangle \times |\mathcal{Y}_{\bar{c}_f}, \rho \rangle \right]^{J,M} \right), \quad (4.212)$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur qui achève l'antisymétrisation sur l'ensemble des  $A$  particules. Enfin, nous pouvons définir les états de base projetés sur le continuum individuel multiple,

$$|\mathbb{T}_{A-f}^{j_r}, {}^f p \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}, \rho\rangle^{J,M}. \quad (4.213)$$

Enfin, les équations homogènes vérifiées par la fonction d'onde totale du système (analogues des équations (4.189)) peuvent s'écrire,

$$\sum_{c'_f} \int d\rho' \rho'^{3f-1} \langle \mathcal{T}_f^{j_T}, \rho \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}^f p | E - H | \mathcal{T}_f^{j'_T}, {}^f p \mathcal{Y}_{c'_f} \rho' \rangle^{J,M} \frac{\Psi_{c'_f}(\rho')}{\rho'^{\frac{3f-1}{2}}} = 0, \quad (4.214)$$

où nous avons posé,

$$\frac{\Psi_{c'_f}(\rho')}{\rho'^{\frac{3f-1}{2}}} = {}^{J,M} \langle \mathcal{T}_f^{j_T}, \rho' \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}^f p | \Psi \rangle^+. \quad (4.215)$$

Dans (4.214), l'opérateur  $E - H$  peut, en suivant la même procédure que dans le section (4.2.3), se mettre sous la forme suivante,

$$E - E_T + \frac{P_{CM}^2}{2Am} - \sum_{k \in \mathcal{C}} t(k) - \frac{P_T^2}{2(A-f)m} - \sum_{k \in \mathcal{C}} {}^J \mathcal{V}_{\mathcal{T}^{j_T}, \mathcal{T}'^{j'_T}}(k) - \sum_{\substack{k < j \\ k \in \mathcal{C}, j \in \mathcal{C}}} V_{jk}. \quad (4.216)$$

En remarquant que l'on a,

$$\sum_{k \in \mathcal{C}} t(k) + \frac{P_T^2}{2(A-f)m} = - \sum_{k \in \mathcal{C}} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r_k}^2 - \frac{\hbar^2}{2(A-f)m} \nabla_{r_T}^2 \quad (4.217a)$$

$$= - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{int}^2 + \frac{P_{CM}^2}{2Am}, \quad (4.217b)$$

où l'opérateur  $\nabla_{int}^2$  a été défini en (4.83), et en définissant,

$$\sum_{\substack{k < j \\ k \in \mathcal{C}, j \in \mathcal{C}}} \langle \mathcal{Y}_{c_f}, \rho | V_{jk} | \mathcal{Y}_{c'_f}, \rho' \rangle^{J,M} = \frac{\delta(\rho - \rho')}{(\rho\rho')^{\frac{3f-1}{2}}} {}^1 V_{c_f, c'_f}(\rho), \quad (4.218)$$

ainsi que,

$$\langle \mathcal{Y}_{c_f}, \rho | \mathcal{V}_{22} | \mathcal{Y}_{c'_f}, \rho' \rangle^{J,M} = \sum_{k \in \mathcal{C}} \langle \mathcal{Y}_{\bar{c}_f}, \rho | {}^J \mathcal{V}_{\mathcal{T}^{j_T}, \mathcal{T}'^{j'_T}}(k) | \mathcal{Y}_{c'_f}, \rho' \rangle = \frac{1}{(\rho\rho')^{\frac{3f-1}{2}}} {}^2 V_{c_f, c'_f}(\rho, \rho'), \quad (4.219)$$

les équations non projetées peuvent s'écrire,

$$\begin{aligned} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \partial_\rho^2 + k^2 - \frac{K(K+3f-1) + \frac{(3f-1)(3f-3)}{4}}{\rho^2} \right) \Psi_{c_f}(\rho) + \sum_{c'_f} {}^1 V_{c_f, c'_f}(\rho) \Psi_{c'_f}(\rho) \\ + \sum_{c'_f} \int d\rho' {}^2 V_{c_f, c'_f}(\rho, \rho') \Psi_{c'_f}(\rho') = 0, \end{aligned} \quad (4.220)$$

où nous avons posé,

$$k = \sqrt{\frac{2\mu(E - E_T)}{\hbar^2}}. \quad (4.221)$$

La fonction d'onde  $\Psi_{c_f, c'_f}$  du système est donc développée dans un système de coordonnées approprié pour le cas où il n'y a pas de distinction entre les différents canaux de décroissance. Par exemple, dans le cas où trois nucléons occupent les états du continuum, il se peut que ces trois particules décroissent de manière démocratique, menant ainsi à un problème asymptotique à quatre corps (cible comprise), ou bien que deux d'entre elles se lient menant à un problème à trois corps asymptotique, ou enfin que ces trois particules forment un cluster menant à un problème asymptotique à deux corps. Le lien entre région hyper-sphérique (là où les possibles canaux de décroissance ne sont pas encore différenciés), et la région de Jacobi (définissant la région asymptotique) s'effectue en général par transformation adiabatique de la base hyper-sphérique [64] de manière à ne conserver qu'une seule variable de propagation de l'équation de Schrödinger.

# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

Nous avons développé le formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum avec interaction nucléon-nucléon de portée finie. Nous avons ensuite généralisé le formalisme de manière à prendre en compte le couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum.

Dû au principe d'exclusion de Pauli et à la portée finie de l'interaction utilisée, les équations de canaux couplés décrivant la diffusion d'un nucléon sur une cible de structure complexe admettent un noyau non-local. La dimension de l'espace de Fock augmentant de façon prohibitive avec le nombre de couches de l'espace de valence, nous avons construit la cible à partir d'un coeur de couches fermées ainsi que quelques orbitales additionnelles sur lesquelles les nucléons de valence se distribuent. Le potentiel cible-projectile se divise alors en deux parties : une contribution dûe au coeur et admettant la même forme que le potentiel Hartree-Fock, et une contribution dûe aux mélanges de configurations de l'espace de valence. Nous avons alors vu que, le coeur étant inerte, seul l'espace de valence est de contribution non nulle à la source des équations inhomogènes de canaux couplés simulant la perte d'un nucléon du système total par émission spontanée.

Le grand progrès dans cette approche, en comparaison au modèle précédent [22, 24], l'utilisation de la même interaction nucléon-nucléon pour le champ moyen et pour le couplage aux états du continuum. Cependant, le fait de tronquer la base individuelle, ainsi que la base de Fock, nous a contraint à utiliser une interaction effective différente pour le calcul des mélanges de configurations. Nous comprenons mieux cette séparation en analysant le passage d'un cas « extrême » à l'autre. Dans le cas extrême où l'espace de Fock se limite à la seule configuration où tous les états individuels de plus basse énergie sont occupés (aucun mélange de configurations), le potentiel cible-projectile correspond exactement au potentiel Hartree-Fock pour un état inoccupé situé dans le continuum ; il n'y a donc pas de réaction (réarrangement) et le modèle se résume à un simple problème de diffusion d'un nucléon par un potentiel. De plus, le terme source étant inexistant, le système total cible-projectile, supposé dans un état initial lié, ne peut pas décroître spontanément (il est dans un état « éternel »). Dans le cas extrême opposé où tous les mélanges de configurations sont pris en compte, toutes les orbitales liées issues du champ moyen couplent aux états du continuum individuel. Toutes les configurations d'occupation contribuent au potentiel cible-projectile. La partie structure suppose alors un calcul de modèle en couches sans coeur [65, 66, 67, 68, 69, 70] mené à bien avec une interaction nucléon-nucléon plus réaliste.

Nous avons donc posé les bases nécessaires à un calcul *ab-initio*, le but étant de dériver le champ moyen, les mélanges de configurations et le couplage aux états du continuum à partir de la seule interaction nucléon-nucléon dans le vide (comme par exemple l'interaction  $V18$  [71]).

Nous avons montré, par quelques applications numériques sur l'exemple du spectre de  $^{17}\text{F}$  ainsi que sur les déphasages de diffusion  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  la faisabilité de cette approche utilisant une interaction effective de portée finie ainsi que des mélanges de configurations dans un espace de valence contenant un coeur. Les résultats obtenus sont en accord qualitatif avec les données expérimentales. Le formalisme est complètement général et permet une formulation du modèle en couches sans coeur avec couplage aux états du continuum.

Le couplage d'une seule particule aux états du continuum offre la possibilité d'une description microscopique satisfaisante des noyaux faiblement liés dont le premier seuil correspond à l'émission d'un nucléon. Cependant, nous savons qu'il s'agit là d'un bien étroit aperçu de la carte des noyaux. Les noyaux de type Borroméens sont un exemple type de systèmes faiblement liés où trois sous-systèmes non liés sont corrélés entre eux pour former un ensemble lié. On comprend dès lors l'importance de la généralisation du formalisme prenant en compte le couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum individuel. En effet, même si deux particules du système peuplent les états du continuum, la corrélation résiduelle qui les lie peut avoir comme conséquence de lier le système total. La proche présence du continuum peut alors modifier la structure du sous-système lié de façon non-négligeable, et a pour effet la structure en halo généralement observée. Cependant, la généralisation du formalisme suppose de faire le lien avec les conditions asymptotiques physiques correspondant au canal de décroissance étudié. Par exemple, dans les processus de capture radiative ( $\alpha$ , deuton ou autre), les particules composant le cluster émis (ou capturé) doivent être corrélés par l'interaction nucléon-nucléon de base. De même, les corrélations entre nucléons dans l'étude des processus séquentiels tels que la radioactivité deux protons [28] nécessitent l'utilisation d'une interaction de portée finie.

Nous avons alors, dans le chapitre 4, généralisé le formalisme en prenant en compte le couplage d'un nombre arbitraire de particules aux états du continuum dans le cadre des canaux de décroissance à deux fragments. Ce choix d'asymptotique permet de décrire les mécanismes de couplage au continuum aux alentours de tous les seuils de décroissance à deux corps (neutron, proton, deuton, triton, alpha  $\dots$ ). En particulier, ce formalisme permet d'étudier le mécanisme d'alignement d'une fonction d'onde près du seuil d'émission de particule avec la fonction d'onde du canal correspondant [25, 80]. Ce mécanisme d'alignement est une explication naturelle d'apparition des structures en clusters près des seuils d'émission de ceux-ci [81]. Par exemple, états à halo à un neutron apparaissant près du seuil d'émission d'un neutron, ou phénomène de clusterisation alpha près du seuil de décroissance alpha  $\dots$

La difficulté principale dans l'étude de ces mécanismes d'alignement par le modèle en couches avec couplage aux états du continuum est purement technique et liée aux changements de coordonnées inhérents à tout calcul prenant en compte la structure interne des deux objets de la réaction. Nous avons alors proposé une méthode de calcul des éléments de matrice de l'interaction cible-projectile dans une base à deux fragments qui a l'avantage d'être facilement adaptable à un problème prenant en compte une forme asymptotique plus complexe. En effet, les états liés du projectile étant évalué dans un système de coordonnées de type Jacobi, nous pouvons aisément substituer, dans la base à deux fragments,

la fonction d'onde du projectile par une onde plane hyper-sphérique, par exemple, pour la description des processus de décroissance « démocratique ». En effet, si le deuton correspond à un état bien lié, le di-proton correspond lui à une résonance qui, après émission, peut décroître, menant ainsi à un problème asymptotique à trois corps (en comptant le noyau fils).

Même si les possibilités numériques actuelles ne nous permettent pas encore une étude systématique, nous pouvons envisager, dans un futur proche, d'étudier les réactions de diffusion élastique, inélastique, de transfert, de knock-out, les phénomènes d'alignement, de halo, et ce dans un cadre unifié. Contrairement aux études précédentes [22, 24, 28], où une interaction de portée nulle était utilisée, nous sommes maintenant en mesure d'étudier les corrélations énergétiques et spatio-temporelles entre les produits de décroissance et de réaction. L'étude de ces corrélations dans un formalisme unifié permettra alors de déduire les corrélations internes aux noyaux instables.

# Chapitre 6

## Annexes

### 6.1 Méthode de résolution des équations Hartree-Fock en représentation coordonnée

Nous écrivons ici le type général d'équation intégral-différentielle à une dimension qui nous intéresse<sup>1</sup>,

$$u''(r) + D(r)u(r) + \int dr' E(r, r') u(r') = 0, \quad (6.1)$$

où  $u(r)$  est la fonction radiale inconnue,  $D(r)$  regroupe tous les termes de portée nulle et  $E(r, r')$  est la partie d'échange. L'une des premières méthodes introduite ...[72] pour intégrer numériquement ce type d'équation consistait à résoudre itérativement l'équation suivante,

$$u_n''(r) + \left( D(r) + \tilde{E}_n(r) \right) u_n(r) = 0, \quad (6.2)$$

où  $\tilde{E}_n(r)$  est un potentiel local équivalent défini par,

$$\tilde{E}_n(r) = \frac{1}{u_{n-1}(r)} \int dr' E(r, r') u_{n-1}(r'), \quad \tilde{E}_0(r) \equiv 0. \quad (6.3)$$

On montre alors aisément que l'on a,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r) = u(r). \quad (6.4)$$

Le problème est alors que le potentiel équivalent  $\tilde{E}_n(r)$  diverge à chaque noeud de la fonction d'onde radiale  $u_{n-1}(r)$ . Aux voisinage de chaque divergence, le potentiel était alors régularisé par interpolation. Cette méthode présente les désavantages d'être compliquée, peu précise et instable.

Nous adoptons donc la méthode introduite dans ...[73] (voir aussi ...[74]), consistant à résoudre itérativement l'équation suivante,

$$u_n''(r) + G_n(r)u_n'(r) + \left( D(r) + F_n(r) \right) u_n(r) = 0, \quad (6.5)$$

---

<sup>1</sup>Pour alléger les expressions, nous utilisons les notations primées pour symboliser les dérivations par rapport à la variable radiale :  $u'(r) = (du/dr)(r)$ ,  $u''(r) = (d^2u/dr^2)(r)$  ...

où les termes  $F_n(r)$  et  $G_n(r)$  sont définis de la manière suivante,

$$F_n(r) = \frac{1}{B_n(r)} \int dr' E(r, r') \left[ u_{n-1}(r) u_{n-1}(r') + a^2 u'_{n-1}(r) u'_{n-1}(r') \right], \quad F_0(r) \equiv 0, \quad (6.6a)$$

$$G_n(r) = \frac{a^2}{B_n(r)} \int dr' E(r, r') \left[ u'_{n-1}(r) u_{n-1}(r') - u_{n-1}(r) u'_{n-1}(r') \right], \quad G_0(r) \equiv 0, \quad (6.6b)$$

où nous avons introduit,

$$B_n(r) = \left( u_{n-1}(r) \right)^2 + a^2 \left( u'_{n-1}(r) \right)^2, \quad (6.7)$$

et où  $a$  est une constante de la dimension d'une longueur. Comme en (6.4), nous montrons facilement que les solutions  $u_n(r)$  convergent vers la solution de (6.1). L'avantage de cette méthode réside dans le fait que la quantité  $B_n(r)$  n'admet aucun zéro. De plus, l'équation (6.5) devient exacte  $\forall n$  pour un potentiel local (ie.  $E(r, r') = \delta(r - r')E(r)$ ).

La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations différentielles (6.5) est l'algorithme du point intermédiaire avec extrapolation polynomiale (*Burlisch-Stoer modified midpoint method ...*[75]). A chaque itération Hartree-Fock, le potentiel est calculé sur une grille radiale de points équidistants. Le calcul en n'importe quel point de l'axe radial est alors effectué par interpolation polynômiale (*splines interpolation ...*[75]).

Avant convergence, l'équations (6.5) correspond à un problème non-hermitique. Une solution de ces équations admet donc une petite partie imaginaire qui peut faire diverger la procédure. D'où l'importance de projeter les solutions sur l'axe réel après chaque itération, même s'il en résulte une fonction d'onde qui n'est pas exactement solution de (6.5) car, de toute façon, après convergence la solution doit être réelle pour un état lié. Pour les états de diffusion, cette non-hermiticité des équations ne pose pas de problème de convergence.

Le paramètre  $a$  est choisi, pour les états liés, de l'ordre de la portée de l'interaction nucléon-nucléon, i.e.  $\sim 1 \text{ fm}$ . Cependant, nous avons observé que, pour les états de diffusion, la meilleure stabilité numérique est obtenue avec une valeur de  $a \sim 0.5 \text{ fm}$ .

## 6.2 Calcul des éléments de matrice à deux corps de l'interaction nucléon-nucléon

### 6.2.1 Interaction de Brink-Boeker

Pour l'interaction effective proposée par Brink et Boecker ...[51], nous nous limitons au calcul des éléments de matrice à deux corps de l'opérateur générique suivant,

$$V = \left( W + BP^\sigma - HP^\tau - MP^\sigma P^\tau \right) e^{-r^2\beta^2}. \quad (6.8)$$

Dans cette expression,  $\vec{r}$  désigne la position relative entre les particules 1 et 2, repérées par les vecteurs position  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  respectivement,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (6.9)$$

Les coordonnées angulaires des particules 1 et 2 seront distinguées par les notations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement. Pour leur part, les opérateurs seront affublés des notations (1) ou (2) selon qu'ils agissent dans l'espace des états de la particule 1 ou de la particule 2 respectivement.

Le développement multipolaire de la gaussienne ...[1] nous permet de séparer parties radiales et angulaires de la manière suivante,

$$e^{-r^2\beta^2} = \sum_L \frac{(-1)^L}{\hat{L}} V_L(r_1, r_2) \left( Y_L(\Omega_1) \times Y_L(\Omega_2) \right)^{0,0}, \quad (6.10)$$

où nous avons posé,

$$V_L(r_1, r_2) = 4\pi \hat{L}^2 i^L e^{-\beta^2(r_1^2+r_2^2)} j_L(-2i\beta^2 r_1 r_2), \quad (6.11a)$$

$$\left( Y_L(\Omega_1) \times Y_L(\Omega_2) \right)^{0,0} = \frac{1}{\hat{L}} \sum_m (-1)^{L-m} Y_L^m(\Omega_1) Y_L^{-m}(\Omega_2). \quad (6.11b)$$

Dans (6.11a),  $j_L$  désigne la fonction de Bessel sphérique. La décomposition (6.10) est bien commode car permettant une dérivation analytique des éléments de matrice de la partie angulaire. Nous considérerons donc à partir de maintenant la gaussienne (6.10) en tant qu'opérateur agissant dans l'espace angulaire des particules 1 et 2 et noterons simplement,

$$e^{-r^2\beta^2} = \sum_L \frac{(-1)^L}{\hat{L}} V_L(r_1, r_2) \left( Y_L(1) \times Y_L(2) \right)^{0,0}. \quad (6.12)$$

L'opérateur  $P^\sigma$  d'échange de spin s'écrit,

$$P^\sigma = \frac{1}{2} \left( 1 + \vec{\sigma}(1) \cdot \vec{\sigma}(2) \right), \quad (6.13)$$

où  $\vec{\sigma}$  désigne la représentation vectorielle des 3 matrices de Pauli. Ce dernier opérateur est tensoriel d'ordre 1. En utilisant la relation entre produit scalaire et produit intérieur ...[31], nous pouvons écrire,

$$P^\sigma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \sigma(1) \times \sigma(2) \right]^{0,0}. \quad (6.14)$$

En utilisant la relation suivante,

$$\begin{aligned} \left( Y_L(1) \times Y_L(2) \right)^{0,0} \left( \sigma(1) \times \sigma(2) \right)^{0,0} = \\ \frac{1}{\sqrt{3\hat{L}}} \sum_{\theta} \hat{\theta} \left[ \left( Y_L(1) \times \sigma(1) \right)^{\theta} \times \left( Y_L(2) \times \sigma(2) \right)^{\theta} \right]^{0,0}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

ainsi que (6.12), l'interaction (6.8) prend alors la forme,

$$\begin{aligned} V = \sum_L \frac{(-1)^L}{\hat{L}} V_L(r_1, r_2) \left\{ \left( W + \frac{B}{2} - P^{\tau} \left( H + \frac{M}{2} \right) \right) \left( Y_L(1) \times Y_L(2) \right)^{0,0} \right. \\ \left. - \frac{1}{2\hat{L}} (B - MP^{\tau}) \sum_{\theta} \hat{\theta} \left[ \left( Y_L(1) \times \sigma(1) \right)^{\theta} \times \left( Y_L(2) \times \sigma(2) \right)^{\theta} \right]^{0,0} \right\}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

que nous écrivons sous la forme plus compacte suivante,

$$V = \sum_L \frac{(-1)^L}{\hat{L}} V_L(r_1, r_2) \sum_{i=1}^4 a_i A_L^i I^i, \quad (6.17)$$

où les constantes  $a_i$ , les opérateurs angulaires et de spin  $A_L^i$  et les opérateurs d'isospin  $I^i$  sont données par,

$$a_1 = W + \frac{B}{2}, \quad a_2 = -H - \frac{M}{2}, \quad a_3 = -\frac{B}{2}, \quad a_4 = \frac{M}{2} \quad (6.18a)$$

$$A_L^1 = A_L^2 = \left( Y_L(1) \times Y_L(2) \right)^{0,0} \quad (6.18b)$$

$$A_L^3 = A_L^4 = \frac{1}{\hat{L}} \sum_{\theta} \hat{\theta} \left[ \left( Y_L(1) \times \sigma(1) \right)^{\theta} \times \left( Y_L(2) \times \sigma(2) \right)^{\theta} \right]^{0,0} \quad (6.18c)$$

$$I^1 = I^3 = \mathbb{1} \quad (6.18d)$$

$$I^2 = I^4 = P^{\tau}. \quad (6.18e)$$

Nous calculons enfin les éléments de matrice à deux corps (définis comme en (2.30)),

$$\begin{aligned} V_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^J(r_1, r_2) = \langle l_{\alpha} j_{\alpha} \tau_{z\alpha}(1), l_{\beta} j_{\beta} \tau_{z\beta}(2) || V || l_{\gamma} j_{\gamma} \tau_{z\gamma}(1), l_{\delta} j_{\delta} \tau_{z\delta}(2) \rangle^J(r_1, r_2) \\ = \sum_L V_L(r_1, r_2) \sum_{i=1}^4 a_i \langle l_{\alpha} j_{\alpha}(1), l_{\beta} j_{\beta}(2) || A_L^i || l_{\gamma} j_{\gamma}(1), l_{\delta} j_{\delta}(2) \rangle^J \\ \langle \tau_{z\alpha}(1), \tau_{z\beta}(2) | I^i | \tau_{z\gamma}(1), \tau_{z\delta}(2) \rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Les éléments de matrice des opérateurs d'isospin sont simplement donnés par,

$$\langle \tau_{z\alpha}(1), \tau_{z\beta}(2) | I^1 | \tau_{z\gamma}(1), \tau_{z\delta}(2) \rangle = \delta_{\tau_{z\alpha}, \tau_{z\gamma}} \delta_{\tau_{z\beta}, \tau_{z\delta}}, \quad (6.20a)$$

$$\langle \tau_{z\alpha}(1), \tau_{z\beta}(2) | I^2 | \tau_{z\gamma}(1), \tau_{z\delta}(2) \rangle = \delta_{\tau_{z\alpha}, \tau_{z\delta}} \delta_{\tau_{z\beta}, \tau_{z\gamma}}. \quad (6.20b)$$

Nous calculons ensuite,

$$\begin{aligned} \langle l_{\alpha} j_{\alpha}(1), l_{\beta} j_{\beta}(2) || A_L^1 || l_{\gamma} j_{\gamma}(1), l_{\delta} j_{\delta}(2) \rangle^J = \\ \frac{\hat{J}}{\hat{L}} (-1)^{j_{\gamma} + j_{\beta} + J + L} \left\{ \begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & L \\ j_{\delta} & j_{\beta} & J \end{matrix} \right\} \langle l_{\alpha} j_{\alpha} || Y_L || l_{\gamma} j_{\gamma} \rangle \langle l_{\beta} j_{\beta} || Y_L || l_{\delta} j_{\delta} \rangle, \end{aligned} \quad (6.21)$$

où les éléments de matrice de l'harmonique sphérique dans la base individuelle couplée sont donnés par ...[3],

$$\begin{aligned} \langle l_\alpha j_\alpha || Y_L || l_\gamma j_\gamma \rangle &= \langle (l_\alpha 1/2)^{j_\alpha} || Y_L || (l_\gamma 1/2)^{j_\gamma} \rangle \\ &= (-1)^{j_\alpha + \frac{1}{2}} \frac{\hat{j}_\alpha \hat{j}_\gamma \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_\alpha & L & j_\gamma \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \delta_{(l_\alpha + L + l_\gamma), \text{pair}}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Enfin, nous avons,

$$\begin{aligned} \langle l_\alpha j_\alpha(1), l_\beta j_\beta(2) || A_L^3 || l_\gamma j_\gamma(1), l_\delta j_\delta(2) \rangle^J &= \\ \sum_{\theta} \frac{\hat{J}}{\hat{L}} (-1)^{j_\gamma + j_\beta + J + \theta} \begin{Bmatrix} j_\alpha & j_\gamma & \theta \\ j_\delta & j_\beta & J \end{Bmatrix} \langle l_\alpha j_\alpha || (Y_L \times \sigma)^\theta || l_\gamma j_\gamma \rangle &\langle l_\beta j_\beta || (Y_L \times \sigma)^\theta || l_\delta j_\delta \rangle. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Dans cette dernière formule, nous pouvons simplifier,

$$\langle l_\alpha j_\alpha || (Y_L \times \sigma)^\theta || l_\gamma j_\gamma \rangle = \hat{j}_\alpha \hat{j}_\gamma \hat{\theta} \begin{Bmatrix} l_\alpha & \frac{1}{2} & j_\alpha \\ l_\gamma & \frac{1}{2} & j_\gamma \\ L & 1 & \theta \end{Bmatrix} \langle l_\alpha || Y_L || l_\gamma \rangle \langle \frac{1}{2} || \sigma || \frac{1}{2} \rangle, \quad (6.24)$$

où l'élément de matrice réduit de l'opérateur de Pauli est donné par,

$$\langle \frac{1}{2} || \sigma || \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{6}, \quad (6.25)$$

et ceux de l'harmonique sphérique par,

$$\langle l_\alpha || Y_L || l_\gamma \rangle = (-1)^{l_\alpha} \frac{\hat{l}_\alpha \hat{l}_\gamma \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l_\alpha & L & l_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

## 6.2.2 Interaction spin-orbite de portée finie

Pour le calcul des éléments de matrice de l'interaction spin-orbite, nous utilisons la méthode introduite dans ...[52] et adopterons leurs notation. Nous nous limitons ici au terme,

$$V = V_{so} e^{-\beta^2 r^2} (\vec{L} \cdot \vec{S}), \quad (6.27)$$

et oublierons la partie isospin, dont les éléments de matrice ont été donnés dans la section précédente.

Nous commençons par écrire l'opérateur moment angulaire relatif  $\vec{L}$  en représentation coordonnées,

$$\vec{L} = -i \vec{r} \wedge \vec{\nabla} = \sqrt{2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^1, \quad (6.28)$$

où  $\vec{\nabla}$  représente l'opérateur gradient par rapport à la coordonnée relative  $\vec{r}$  définie en (6.9),  $\wedge$  représente le produit extérieur et où nous avons utilisé la relation entre produit extérieur et intérieur ...[31] pour l'obtention du terme du membre de droite, où l'exposant 1 rappelle qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel. En utilisant la forme tensorielle ...[31] des vecteurs position des particules 1 et 2, nous pouvons écrire,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (r_1 \vec{Y}(1) - r_2 \vec{Y}(2)), \quad (6.29)$$

où  $\vec{Y}$  désigne la forme vectorielle de l'harmonique sphérique d'ordre 1, de composantes  $Y_1^m$  ( $m = 0, \pm 1$ ).

En remarquant que,

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}(2)), \quad (6.30a)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}(1) - \vec{\nabla}(2), \quad (6.30b)$$

il vient,

$$\begin{aligned} (\vec{L} \cdot \vec{S}) &= -\sqrt{3} (L \times S)^{0,0} \\ &= -\sqrt{2\pi} \left[ \left( (r_1 Y_1(1) - r_2 Y_1(2)) \times (\nabla(1) - \nabla(2)) \right)^1 \times (\sigma(1) + \sigma(2)) \right]^{1,0,0} \end{aligned} \quad (6.31)$$

expression qui, après développement puis recouplage, peut être écrite sous la forme plus compacte suivante,

$$(\vec{L} \cdot \vec{S}) = -\sqrt{2\pi} \sum_{(ijk)} (-1)^{i+j} r_i \left[ Y_1(i) \times (\nabla(j) \times \sigma(k)) \right]^{1,0,0}, \quad (6.32)$$

où les combinaisons d'indices  $(ijk)$  sont présentées ci-après,

$i$	$j$	$k$
1	1	1
1	1	2
1	2	1
1	2	2
2	1	1
2	1	2
2	2	1
2	2	2

TAB. 6.1 – Combinaisons d'indices apparaissant dans l'expression (6.32).

Enfin, en utilisant le développement multipolaire (6.10), nous pouvons écrire,

$$V = -\sqrt{2\pi} V_{so} \sum_L V_L(r_1, r_2) \frac{(-1)^L}{\hat{L}} \sum_{ijk} (-1)^{i+j} r_i \left[ Y_L(1) \times Y_L(2) \right]^{0,0} \left[ Y_1(i) \times (\nabla(j) \times \sigma(k)) \right]^{1,0,0}. \quad (6.33)$$

En utilisant la composition des harmoniques sphériques ...[3], on peut montrer que l'interaction  $V$  prend la forme suivante,

$$V = \frac{V_{so}}{\sqrt{2}} \sum_{L,L'} V_L(r_1, r_2) \frac{\hat{L}'}{\hat{L}} \begin{pmatrix} L & L' & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{ijk} \mathcal{O}_{L,L'}^{0,0}(ijk), \quad (6.34)$$

où nous avons introduit,

$$\mathcal{O}_{L,L'}^{0,0}(ijk) = (-1)^{i+j} r_i \left[ \left( Y_{L'}(i) \times Y_L(\bar{i}) \right)^1 \times (\nabla(j) \times \sigma(k)) \right]^{1,0,0}, \quad (6.35)$$

ainsi que la notation suivante,

$$\bar{1} = 2 \quad (6.36a)$$

$$\bar{2} = 1. \quad (6.36b)$$

Afin de pouvoir calculer les éléments de matrice à deux corps de cette interaction, nous devons factoriser les opérateurs  $\mathcal{O}_{L,L'}^{0,0}(ijk)$  en un produit d'opérateurs chacun agissant dans l'espace des états d'une seule particule. Cette tâche est longue et fastidieuse et doit être effectuée au cas par cas pour chaque combinaison d'indices présentée dans le tableau (6.1). Aussi présentons nous ici directement le résultat final,

$$V = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{so} \sum_{L,L',K} V_L(r_1, r_2) \frac{\hat{L}'}{\hat{L}} \begin{pmatrix} L & L' & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L & L' & 1 \\ 1 & 1 & K \end{matrix} \right\} \sum_{(ijk)} \sum_M (-1)^{L+M} \tilde{\mathcal{O}}_{LL'K}^M(ijk). \quad (6.37)$$

Les opérateurs  $\tilde{\mathcal{O}}_{L,L',K}^M(ijk)$  sont définis dans le tableau (6.2) pour chaque combinaison d'indices  $(ijk)$ ,

$(ijk)$	$\tilde{\mathcal{O}}_{LL'K}^M(ijk)$
111	$-r_1 \frac{\hat{K}}{\hat{L}} S_{LM}^{L'K}(1) Y_L^{-M}(2)$
112	$r_1 C_{KM}^{L'}(1) \mathcal{M}_{K-M}^L(2)$
121	$r_1 \mathcal{M}_{KM}^{L'}(1) C_{K-M}^L(2)$
122	$-r_1 \frac{\hat{K}}{\hat{L}'} Y_{L'}^M(1) S_{L'-M}^{LK}(2)$
211	$-r_2 \frac{\hat{K}}{\hat{L}'} S_{L'M}^{LK}(1) Y_{L'}^{-M}(2)$
212	$r_2 C_{KM}^L(1) \mathcal{M}_{K-M}^{L'}(2)$
221	$r_2 \mathcal{M}_{KM}^L(1) C_{K-M}^{L'}(2)$
222	$-r_2 \frac{\hat{K}}{\hat{L}} Y_L^M(1) S_{L-M}^{L'K}(2)$

TAB. 6.2 – Définition des opérateurs  $\tilde{\mathcal{O}}_{LL'K}^M(ijk)$  apparaissant dans (6.37).

où nous avons introduit les opérateurs,

$$C_{LM}^K = \left( Y_K \times \nabla \right)^{L,M} \quad (6.38a)$$

$$S_{LM}^{L'K} = \left[ \left( Y_{L'} \times \nabla \right)^K \times \sigma \right]^{L,M} \quad (6.38b)$$

$$\mathcal{M}_{LM}^K = \left( Y_K \times \sigma \right)^{L,M}. \quad (6.38c)$$

Enfin, en utilisant la relation suivante,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L & L' & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L & L' & 1 \\ 1 & 1 & K \end{matrix} \right\} = \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} (-1)^K \begin{pmatrix} 1 & K & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K & L' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta_{(L+L'+1), \text{pair}}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

nous pouvons écrire l'interaction (6.27) sous la forme,

$$V = -V_{so} \sum_{L, L', K} V_L(r_1, r_2) f(L, L', K) \sum_{(ijk)} \sum_M (-1)^M \tilde{\mathcal{O}}_{LL'K}^M(ijk), \quad (6.40)$$

où,

$$f(L, L', K) = (-1)^{L+K} \frac{\hat{L}'}{\hat{L}} \begin{pmatrix} 1 & K & L' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta_{(L+L'+1), \text{pair}}. \quad (6.41)$$

Le calcul des éléments de matrice des opérateurs (6.38a) est long et fastidieux. Nous rappelons simplement, comme point de départ, les deux seuls éléments de matrice réduits non nuls de l'opérateur gradient,

$$\langle l+1 || \nabla || l \rangle = -\sqrt{l+1} \left( \frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right), \quad (6.42a)$$

$$\langle l-1 || \nabla || l \rangle = \sqrt{l} \left( \frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right), \quad (6.42b)$$

et donnons les résultats finaux,

$$\begin{aligned} \langle lj || C_L^K || l' j' \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{j'+1/2+l+l'+L} \hat{j} \hat{j}' \hat{l} \hat{l}' \hat{L} \hat{K} \left\{ \begin{matrix} l & j & 1/2 \\ j' & l' & L \end{matrix} \right\} \\ \left[ \begin{pmatrix} l' & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 1 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dr} \right. \\ \left. + \sqrt{2} \delta_{(l+l'+K+1), \text{pair}} \begin{pmatrix} l' & L & l \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 1 & K \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{l'(l'+1)}}{r} \right], \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \langle lj || S_L^{L'K} || l' j' \rangle = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (-1)^l \hat{j} \hat{j}' \hat{l} \hat{l}' \hat{L} \hat{L}' \hat{K} \left\{ \begin{matrix} l & 1/2 & j \\ l' & 1/2 & j' \\ K & 1 & L \end{matrix} \right\} \\ \left[ \begin{pmatrix} l' & K & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dr} \right. \\ \left. + \sqrt{2} \delta_{(l+l'+L'+1), \text{pair}} \begin{pmatrix} l' & K & l \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 1 & L' \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{l'(l'+1)}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Les éléments de matrice réduits de l'opérateur  $\mathcal{M}_{LM}^K$  ont été donnés en (6.24).

Afin de simplifier les équations, nous introduisons les notations suivantes,

$$\langle l_\alpha j_\alpha || C_L^K || l_\beta j_\beta \rangle = C_L^K(\alpha, \beta) \frac{1}{r} + \tilde{C}_L^K(\alpha, \beta) \frac{d}{dr}, \quad (6.45a)$$

$$\langle l_\alpha j_\alpha || S_L^{L'K} || l_\beta j_\beta \rangle = S_L^{L'K}(\alpha, \beta) \frac{1}{r} + \tilde{S}_L^{L'K}(\alpha, \beta) \frac{d}{dr}, \quad (6.45b)$$

$$\langle l_\alpha j_\alpha || M_L^K || l_\beta j_\beta \rangle = M_L^K(\alpha, \beta), \quad (6.45c)$$

$$\langle l_\alpha j_\alpha || Y_L || l_\beta j_\beta \rangle = Y_L(\alpha, \beta). \quad (6.45d)$$

En procédant par identification, on montre alors que les éléments de matrice à deux corps de l'interaction (6.27) prennent la forme suivante,

$$\begin{aligned} V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}^\Gamma(r_1, r_2) &= \langle l_\alpha j_\alpha(1), l_\beta j_\beta(2) || V || l_\gamma j_\gamma(1), l_\delta j_\delta(2) \rangle^\Gamma(r_1, r_2) \\ &= -V_{so} \sum_{L, L', K} V_L(r_1, r_2) f(L, L', K) (-1)^{j_\gamma + j_\beta + \Gamma} \hat{\Gamma} \\ &\quad \left[ a + b_{12} \frac{r_1}{r_2} + b_{21} \frac{r_2}{r_1} + (c_1 r_1 + c_2 r_2) \frac{d}{dr_1} + (d_1 r_1 + d_2 r_2) \frac{d}{dr_2} \right], \end{aligned} \quad (6.46)$$

où les diverses constantes apparaissant dans les crochets sont données par,

$$\begin{aligned} a &= \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \left[ C_K^{L'}(\alpha, \gamma) M_K^L(\beta, \delta) + M_K^L(\alpha, \gamma) C_K^{L'}(\beta, \delta) \right] - \\ &\quad \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}} \left[ S_L^{L'K}(\alpha, \gamma) Y_L(\beta, \delta) + Y_L(\alpha, \gamma) S_L^{L'K}(\beta, \delta) \right], \end{aligned} \quad (6.47a)$$

$$b_{12} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} M_K^{L'}(\alpha, \gamma) C_K^L(\beta, \delta) - \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L' \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}'} Y_{L'}(\alpha, \gamma) S_{L'}^{LK}(\beta, \delta), \quad (6.47b)$$

$$b_{21} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} C_K^L(\alpha, \gamma) M_K^{L'}(\beta, \delta) - \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L' \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}'} S_{L'}^{LK}(\alpha, \gamma) Y_{L'}(\beta, \delta), \quad (6.47c)$$

$$c_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \tilde{C}_K^{L'}(\alpha, \gamma) M_K^L(\beta, \delta) - \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}} \tilde{S}_L^{L'K}(\alpha, \gamma) Y_L(\beta, \delta), \quad (6.47d)$$

$$c_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \tilde{C}_K^L(\alpha, \gamma) M_K^{L'}(\beta, \delta) - \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L' \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}'} \tilde{S}_{L'}^{LK}(\alpha, \gamma) Y_{L'}(\beta, \delta), \quad (6.47e)$$

$$d_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} M_K^{L'}(\alpha, \gamma) \tilde{C}_K^L(\beta, \delta) - \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L' \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}'} Y_{L'}(\alpha, \gamma) \tilde{S}_{L'}^{LK}(\beta, \delta), \quad (6.47f)$$

$$d_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} M_K^L(\alpha, \gamma) \tilde{C}_K^{L'}(\beta, \delta) - \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\gamma & L \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{array} \right\} \frac{\hat{K}}{\hat{L}} Y_L(\alpha, \gamma) \tilde{S}_L^{L'K}(\beta, \delta). \quad (6.47g)$$

Nous regardons maintenant le cas particulier du potentiel Hartree (2.32). La partie directe implique le calcul de la sommation suivante,

$$\sum_{\Gamma} \hat{\Gamma} V_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\Gamma}, \quad (6.48)$$

et donc des quantités suivantes,

$$\tilde{a} = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 a, \quad (6.49a)$$

$$\tilde{b}_{12} = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 b_{12}, \quad (6.49b)$$

$$\tilde{b}_{21} = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 b_{21}, \quad (6.49c)$$

$$\tilde{c}_1 = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 c_1, \quad (6.49d)$$

$$\tilde{c}_2 = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 c_2, \quad (6.49e)$$

$$\tilde{d}_1 = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 d_1, \quad (6.49f)$$

$$\tilde{d}_2 = \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 d_2. \quad (6.49g)$$

A l'aide des expressions (6.47a), nous montrons facilement que,

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = \tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0, \quad (6.50)$$

ce qui élimine tout opérateur différentiel dans la partie directe du potentiel Hartree-Fock (2.32). L'expression du potentiel (2.32a) se simplifie alors considérablement et est donnée dans ...[52].

Nous regardons maintenant la partie d'échange. L'équation intégrro-différentielle (2.31) implique le calcul de l'intégrale suivante,

$$\int dr' E_{\bar{\alpha}}(r, r') u_{\alpha}(r'), \quad (6.51)$$

qui, à son tour, en utilisant les équations (2.32b) et (6.46), implique le calcul des intégrales suivantes,

$$\int dr' r r' u_{\gamma}(r') V_L(r, r') \left[ a + b_{12} \frac{r}{r'} + b_{21} \frac{r'}{r} + (c_1 r + c_2 r') \frac{d}{dr} + (d_1 r + d_2 r') \frac{d}{dr'} \right] \left( \frac{u_{\gamma}(r) u_{\alpha}(r')}{r r'} \right). \quad (6.52)$$

En intégrant par partie, puis en procédant pas identification, on montre sans difficultés que l'intégrale (6.52) peut se mettre sous la forme suivante,

$$\int dr' \left\{ u_{\gamma}(r) u_{\gamma}(r') \left[ V_L(r, r') \left( a - c_1 - 2d_2 + (b_{12} - d_1) \frac{r}{r'} + (b_{21} - c_2) \frac{r'}{r} \right) - (d_1 r + d_2 r') \frac{dV_L(r, r')}{dr'} \right] + u_{\gamma}(r') V_L(r, r') \left( c_1 r + c_2 r' \right) \frac{du_{\gamma}(r)}{dr} - \frac{du_{\gamma}(r')}{dr'} V_L(r, r') \left( d_1 r + d_2 r' \right) du_{\gamma}(r) \right\} u_{\alpha}(r'). \quad (6.53)$$

### 6.2.3 Interaction coulombienne

Dans cette partie, nous calculons dans un premier temps les éléments de matrice à deux corps de l'interaction coulombienne, puis nous calculons explicitement les potentiels direct et d'échange dans le cas particulier des équations Hartree-Fock. Nous montrerons ensuite quels sont les problèmes rencontrés pour le calcul de la partie d'échange, et expliquerons les simplifications utilisées dans le présent exposé.

La forme la plus simple de l'interaction coulombienne entre deux protons repérés par leur position respective  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  est donnée par,

$$V(\vec{r}) = \frac{C}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (6.54)$$

où  $C$  désigne la constante de Coulomb. (6.54) admet le développement multipolaire suivant ...[76],

$$V(\vec{r}) = 4\pi C \sum_L \frac{(-1)^L}{\hat{L}} \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}} \left( Y_L(1) \times Y_L(2) \right)^{0,0}. \quad (6.55)$$

Les éléments de matrice à deux corps 'proton-proton' qui nous intéressent sont alors,

$$\begin{aligned} V_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r_1, r_2) &= \langle l_\alpha j_\alpha(1), l_\beta j_\beta(2) \| V \| l_\gamma j_\gamma(1), l_\delta j_\delta(2) \rangle^\Gamma(r_1, r_2) \\ &= 4\pi C \sum_L (-1)^{\Gamma+j_\gamma+j_\beta} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{L}} \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}} \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & j_\gamma & L \\ j_\delta & j_\beta & \Gamma \end{matrix} \right\} \langle l_\alpha j_\alpha \| Y_L \| l_\gamma j_\gamma \rangle \langle l_\beta j_\beta \| Y_L \| l_\delta j_\delta \rangle, \end{aligned} \quad (6.56)$$

où les éléments de matrice des harmoniques sphériques ont été donnés en (6.22).

Nous nous proposons maintenant de calculer la contribution coulombienne aux potentiels Hartree-Fock (6.32). Les éléments de matrice (6.56) étant des quantités scalaires, nous pouvons écrire,

$$D_\alpha^C(r) = \sum_{\gamma, \Gamma} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}_\alpha^2} \int dr' V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^J(r, r') u_\gamma^2(r'), \quad (6.57a)$$

$$E_\alpha^C(r, r') = - \sum_{\gamma, \Gamma} (-1)^{\Gamma-j_\alpha-j_\gamma} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}_\alpha^2} V_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\alpha}}^J(r, r') u_\gamma(r) u_\gamma(r'), \quad (6.57b)$$

où les sommations sur l'indice  $\gamma$  ne portent que sur les états protons. En utilisant (6.56), la partie directe peut s'écrire,

$$\begin{aligned} D_\alpha^C(r) &= 4\pi C \sum_{\substack{\gamma \\ (protons)}} \sum_{\Gamma, L} \frac{(-1)^{\Gamma+j_\alpha+j_\gamma}}{\hat{L}} \frac{\hat{\Gamma}^2}{\hat{j}_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & j_\alpha & L \\ j_\gamma & j_\gamma & \Gamma \end{matrix} \right\} \langle l_\alpha j_\alpha \| Y_L \| l_\alpha j_\alpha \rangle \\ &\quad \langle l_\gamma j_\gamma \| Y_L \| l_\gamma j_\gamma \rangle \int dr' \frac{r_{>}^L}{r_{<}^{L+1}} u_\gamma^2(r'). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Enfin, en utilisant la relation suivante,

$$\sum_\Gamma (-1)^{\Gamma+j_\alpha+j_\gamma} \hat{\Gamma}^2 \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & j_\alpha & L \\ j_\gamma & j_\gamma & \Gamma \end{matrix} \right\} = \delta_{L,0} \hat{j}_\alpha \hat{j}_\gamma, \quad (6.59)$$

nous obtenons facilement,

$$D_{\alpha}^C(r) = 4\pi C \int dr' \frac{r'^2}{r_{<}} \rho^{\pi}(r'), \quad (6.60)$$

où  $\rho^{\pi}(r)$  est la densité de protons dont l'expression est la suivante,

$$\rho^{\pi}(r) = \sum_{\substack{\gamma \\ (\text{protons})}} \frac{\hat{j}_{\gamma}^2}{4\pi r^2} u_{\gamma}^2(r). \quad (6.61)$$

Il est alors très simple de voir que, pour  $r \rightarrow \infty$ , nous avons,

$$D_{\alpha}^C(r) \sim \frac{C Z}{r}, \quad (6.62)$$

où  $Z$  est le nombre total de protons. La partie d'échange, quant à elle, s'écrit,

$$E_{\alpha}^C(r, r') = -4\pi C \sum_{\substack{\gamma \\ (\text{protons})}} \sum_{\Gamma, L} \frac{\hat{\Gamma}^2}{\hat{j}_{\alpha}^2 \hat{L}} \left\{ \begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & L \\ j_{\alpha} & j_{\gamma} & \Gamma \end{matrix} \right\} \left( \langle l_{\alpha} j_{\alpha} || Y_L || l_{\gamma} j_{\gamma} \rangle \right)^2 \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}} u_{\gamma}(r) u_{\gamma}(r'). \quad (6.63)$$

En utilisant la relation suivante,

$$\sum_{\Gamma} \hat{\Gamma}^2 \left\{ \begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & L \\ j_{\alpha} & j_{\gamma} & \Gamma \end{matrix} \right\} = 1, \quad (6.64)$$

nous obtenons,

$$E_{\alpha}^C(r, r') = -C \sum_{\substack{\gamma \\ (\text{protons})}} \sum_L \hat{L} \hat{j}_{\gamma}^2 \left( \begin{matrix} j_{\alpha} & L & j_{\gamma} \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix} \right)^2 \delta_{(l_{\alpha}+L+l_{\gamma}), \text{pair}} \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}} u_{\gamma}(r) u_{\gamma}(r'). \quad (6.65)$$

Calculons alors,

$$\begin{aligned} \int dr' E_{\alpha}^C(r, r') u_{\alpha}(r') &= -C \sum_{\substack{\gamma \\ (\text{protons})}} \sum_L \hat{L} \hat{j}_{\gamma}^2 \left( \begin{matrix} j_{\alpha} & L & j_{\gamma} \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{matrix} \right)^2 \delta_{(l_{\alpha}+L+l_{\gamma}), \text{pair}} \\ &u_{\gamma}(r) \int dr' \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}} u_{\gamma}(r') u_{\alpha}(r'), \end{aligned} \quad (6.66)$$

où  $u_{\alpha}(r)$  est la fonction radiale d'un état proton. Dans (6.66), nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dr' \frac{r_{<}^L}{r_{>}^{L+1}} u_{\gamma}(r') u_{\alpha}(r') &= \frac{1}{r^{L+1}} \int_0^r dr' r'^L u_{\gamma}(r') u_{\alpha}(r') + r^L \int_r^{\infty} dr' \frac{1}{r'^{L+1}} u_{\gamma}(r') u_{\alpha}(r') \\ &\sim \delta_{L,0} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} dr' u_{\gamma}(r') u_{\alpha}(r'), \end{aligned} \quad (6.67)$$

pour  $r \rightarrow \infty$ , dont on déduit,

$$\int dr' E_{\alpha}^C(r, r') u_{\alpha}(r') \sim -C \frac{1}{r} u_{\alpha}(r). \quad (6.68)$$

Ainsi les équations Hartree-Fock (2.31) admettent-elles la forme asymptotique suivante,

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k_\alpha^2 - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{r^2} - \frac{2m^*}{\hbar^2} \frac{C(Z-1)}{r} \right) u_\alpha(r) = 0, \quad (6.69)$$

ce à quoi l'on pouvait s'attendre. Le problème est alors que les quantités  $F_n(r)$  et  $G_n(r)$  définies en (6.6) divergent. La méthode numérique utilisée ne nous permet donc pas de prendre en compte la partie d'échange. Mais l'équation Hartree-Fock d'un état proton doit vérifier la forme asymptotique (6.69). La partie d'échange étant d'une faible contribution au potentiel coulombien, nous utilisons alors l'astuce visant à multiplier la partie directe par le facteur adéquat. Nous re-définissons donc le potentiel direct coulombien comme suit,

$$D_\alpha^C(r) \longrightarrow \frac{Z-1}{Z} D_\alpha^C(r). \quad (6.70)$$

Il s'agit là d'une forte approximation qui n'est valable que pour de grandes valeurs de  $Z$ .

### 6.3 Le code de modèle en couches

Le code de modèle en couches d'éveloppé pour mener à bien cette étude repose sur le même formalisme que le code ANTOINE, développé par E. Caurier. Aussi ce dernier code a-t'il servi de référence pour effectuer tous les tests nécessaires. La particularité de ce code repose sur l'utilisation d'une base partiellement antisymétrique. En effet, si l'on considère les protons et les neutrons comme des particules différentes, l'antisymétrie n'a lieu d'être qu'au sein de chaque fluide séparément. En notant  $\{|DS_i\rangle_\pi\}$  l'ensemble des déterminants de Slater constitués de  $Z$  états protons, et  $\{|DS_j\rangle_\nu\}$  l'ensemble des déterminants de Slater constitués de  $N$  états neutrons, alors la base de Fock  $\{|\Phi_{ij}\rangle\}$  du système totale est engendrée par tous les produits du type,

$$|\Phi_{ij}\rangle = |DS_i\rangle_\pi |DS_j\rangle_\nu. \quad (6.71)$$

Cette division réduit considérablement la dimension de la base en comparaison d'une base complètement antisymétrique. Numériquement, chaque déterminant de Slater est représenté par un mot binaire dont chaque bit correspond à un état individuel. En terme de nombre d'occupation, un état individuel occupé est alors représenté par le chiffre 1, et un état inoccupé par 0. A chaque configuration d'occupation correspond donc un nombre binaire qui peut être vu comme la mantisse d'un nombre décimal. La principale difficulté est alors d'établir une correspondance biunivoque entre ces nombres et les cases successives d'un tableau afin de pouvoir facilement stocker la base et y avoir accès en un minimum d'opérations mathématiques. La base est générée en schéma 'M', c'est à dire sous une forme non couplée. On sélectionne d'abord toutes les configurations d'occupation pour une parité ainsi qu'un nombre quantique de projection total donnés, obtenant ainsi une base de dimension  $D$ . On génère alors un vecteur aléatoire dans cette base et le projette sur un moment de spin total bien défini  $J_0$  au moyen de l'opérateur suivant,

$$\prod_{J \neq J_0} \frac{\mathcal{J}^2 - J(J+1)}{J_0(J_0+1) - J(J+1)}, \quad (6.72)$$

où l'opérateur  $\vec{\mathcal{J}}$  a été défini en (2.47). Une procédure similaire est utilisée pour obtenir un état projeté sur un moment d'isospin défini. L'état obtenu est alors un *pivot* qui peut servir comme point de départ pour l'algorithme de Lanczos.

La définition (6.71) de la base implique une redéfinition des opérateurs de création et d'annihilation. En effet, la base étant partiellement antisymétrique, ces opérateurs ne vérifient plus les relations d'anticommutation (2.43). En notant  $|a_\pi\rangle, |b_\pi\rangle, \dots$  les états individuels proton, et  $|a_\nu\rangle, |b_\nu\rangle, \dots$  les états individuels neutron, nous avons les relations suivantes,

$$\{a_{a_\pi}^\dagger, a_{b_\pi}^\dagger\} = 0, \quad \{a_{a_\pi}^\dagger, a_{b_\pi}\} = \delta_{a_\pi, b_\pi}, \quad (6.73a)$$

$$\{a_{a_\nu}^\dagger, a_{b_\nu}^\dagger\} = 0, \quad \{a_{a_\nu}^\dagger, a_{b_\nu}\} = \delta_{a_\nu, b_\nu}, \quad (6.73b)$$

$$[a_{a_\pi}^\dagger, a_{b_\nu}^\dagger] = [a_{a_\pi}^\dagger, a_{b_\nu}] = 0. \quad (6.73c)$$

On peut alors démontrer que l'hamiltonien de modèle en couches peut s'écrire, en seconde quantification, de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{a_\pi} \langle a_\pi | h^{sm} | a_\pi \rangle a_{a_\pi}^\dagger a_{a_\pi} + \frac{1}{4} \sum_{a_\pi, b_\pi, c_\pi, d_\pi} \langle a_\pi, b_\pi | V^{sm} | c_\pi, d_\pi \rangle_{as} a_{a_\pi}^\dagger a_{b_\pi}^\dagger a_{d_\pi} a_{c_\pi} \\ &+ \sum_{a_\nu} \langle a_\nu | h^{sm} | a_\nu \rangle a_{a_\nu}^\dagger a_{a_\nu} + \frac{1}{4} \sum_{a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu} \langle a_\nu, b_\nu | V^{sm} | c_\nu, d_\nu \rangle_{as} a_{a_\nu}^\dagger a_{b_\nu}^\dagger a_{d_\nu} a_{c_\nu} \\ &+ \sum_{a_\pi, b_\nu, c_\pi, d_\nu} \langle a_\pi, b_\nu | V^{sm} | c_\pi, d_\nu \rangle a_{a_\pi}^\dagger a_{d_\pi} a_{b_\nu}^\dagger a_{c_\nu} + E_{core}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

où les sommations portent sur les états individuels de l'espace de valence. Nous remarquons alors que l'hamiltonien se scinde en un hamiltonien 'proton-proton', un hamiltonien 'neutron-neutron' et un terme 'proton-neutron'. Notons que l'élément de matrice à deux corps apparaissant dans ce dernier terme n'admet aucune symétrie particulière.

Enfin, nous donnons ci-après les expressions développées des éléments de matrice à un, deux et trois opérateurs apparaissant dans le calcul des éléments de la matrice de couplage des équations homogènes de canaux couplés (annexe (6.4)) ainsi que des termes sources (annexe (6.5)) :

$$\langle T^{j_T} | \tilde{a}_\delta | \Phi^J \rangle = \frac{(-1)^{j_\delta + m_\delta}}{(-1)^{j_t - m_t} \begin{pmatrix} j_T & j_\delta & J \\ -m_T & m_\delta & M \end{pmatrix}} \langle T^{j_T, m_T} | a_{\delta, -m_\delta} | \Phi^{J, M} \rangle, \quad (6.75)$$

avec  $m_\delta = m_T - M$ ,

$$\langle T^{j_T} | (a_\alpha^\dagger \times \tilde{a}_\gamma)^\theta | T^{j_{T'}} \rangle = \frac{1}{(-1)^{j_T - m_T} \begin{pmatrix} j_T & \theta & j_{T'} \\ -m_T & m_\theta & m_{T'} \end{pmatrix}} \sum_{m_\alpha + m_\gamma = m_\theta} \langle j_\alpha j_\gamma, m_\alpha m_\gamma | \theta m_\theta \rangle (-1)^{j_\gamma + m_\gamma} \langle T^{j_T, m_T} | a_{\alpha, m_\alpha}^\dagger a_{\gamma, -m_\gamma} | T^{j_{T'}, m_{T'}} \rangle, \quad (6.76)$$

avec  $m_\theta = m_T - m_{T'}$ ,

$$\langle T^{j_T} | (a_\alpha^\dagger \times (\tilde{a}_\gamma \times \tilde{a}_\delta)^\Gamma)^j | \Phi^J \rangle = \frac{1}{(-1)^{j_T - m_T} \begin{pmatrix} j_T & j & J \\ -m_T & m_j & M \end{pmatrix}} \sum_{m_\alpha + m_\Gamma = m_j} \langle j_\alpha \Gamma, m_\alpha m_\Gamma | j m_j \rangle \sum_{m_\gamma + m_\delta = m_\Gamma} \langle j_\gamma \delta, m_\gamma m_\delta | \Gamma m_\Gamma \rangle (-1)^{j_\gamma + j_\delta + m_\Gamma} \langle T^{j_T, m_T} | a_{\alpha, m_\alpha}^\dagger a_{\gamma, -m_\gamma} a_{\delta, -m_\delta} | \Phi^{J, M} \rangle, \quad (6.77)$$

avec  $m_j = m_T - M$ . Chaque état de modèle en couches est décomposé dans la base de Fock. Par exemple, dans (6.75), nous avons,

$$| T^{j_T m_T} \rangle = \sum_{\{\alpha_i m'_i\}} \mathcal{C}_{\{\alpha_i m'_i\}}^{T^{j_T m_T}} | \alpha_1 m_1, \dots, \alpha_{A-1} m_{A-1} \rangle, \quad (6.78a)$$

$$| \Phi^{J, M} \rangle = \sum_{\{\beta_i m'_i\}} \mathcal{C}_{\{\beta_i m'_i\}}^{\Phi^{J, M}} | \beta_1 m'_1, \dots, \beta_A m'_A \rangle, \quad (6.78b)$$

où nous utilisons la notation suivante,

$$\alpha_k \equiv \{n_k, l_k, j_k, \tau_{zk}\}. \quad (6.79)$$

L'élément de matrice apparaissant dans (6.75) nécessite donc ceux du type,

$$\langle \alpha_1 m_1, \dots, \alpha_{A-1} m_{A-1} | a_{\delta, -m_\delta} | \beta_1 m'_1, \dots, \beta_A m'_A \rangle. \quad (6.80)$$

L'application de l'opérateur  $a_{\delta, -m_\delta}$  sur le ket dans (6.80) se fait numériquement par application d'un opérateur binaire sur le mot représentatif de la configuration d'occupation du déterminant de Slater en question, et la phase est calculée selon la convention introduite en (2.44). Enfin, l'état à  $A - 1$  particules résultant de cette application est recouvert avec le bra, fournissant le coefficient désiré.

Au vu du formalisme proton-neutron énoncé ci-dessus, nous voyons alors apparaître une flagrante incohérence avec le reste du présent exposé. En effet, tous les calculs que nous avons dérivés dans les chapitres (2) et (4) supposent une indiscernabilité des protons et des neutrons, utilisant donc le formalisme de seconde quantification dans ce sens. Cependant, nous pouvons nous livrer à l'argumentation suivante afin de justifier le passage d'un formalisme à l'autre : dans les équations de canaux couplés modélisant la diffusion d'un projectile sur une cible, voire la décroissance d'un noyau instable, l'influence de la structure complexe de cette cible, ou du noyau émetteur, sur le projectile est contenue dans les éléments de matrice à un, deux et trois opérateurs tels que ceux apparaissant dans les équations (6.88) et (6.145). Dans ces équations, nous pouvons voir ces éléments de matrice comme de simples coefficients supposés représenter de la manière la plus correcte possible la structure considérée. Nous identifions donc ces coefficients aux éléments de matrice calculés plus haut, car censés représenter les mêmes quantités. Cette identification nous apparaît alors justifiée si nous nous souvenons du fait que le modèle en couches est à l'heure actuelle l'outil permettant les meilleures descriptions de la structure nucléaire.

## 6.4 Matrice de couplage des équations homogènes

Selon (2.264d) et (2.260b), l'opérateur partiel  $\mathcal{V}_{11}$ , qui couple les états liés aux états du continuum individuels, s'écrit,

$$\mathcal{V}_{11} = - \sum_{\alpha, \gamma, \Gamma} \iint d\beta d\delta \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{as}^{\Gamma} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0}, \quad (6.81)$$

où nous avons remplacé l'indice *nas* par l'indice *as* à l'élément de matrice à deux corps, puisque le facteur défini en (2.251) est égal à l'unité; en effet nous avons  $\alpha \in \mathcal{D} \neq \beta \in \mathcal{C}$  et  $\gamma \in \mathcal{D} \neq \delta \in \mathcal{C}$ . Nous nous proposons donc de calculer les éléments de matrice de ce terme dans la base  $\{ |T^{j_T}, \mathcal{Y}_{\bar{c}} p_{\bar{c}} r \rangle^{J, M} \}$  de l'espace  $\mathcal{P}$ . En utilisant le théorème de Wigner-Eckart pour réduire l'élément de matrice de l'opérateur  $\left( (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger})^{\Gamma} (\tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta})^{\Gamma} \right)^{0,0}$ , nous obtenons,

$$\begin{aligned} & \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{11} | T'^{j_{T'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J, M} = \\ & - \sum_{\alpha, \gamma, \Gamma} \iint d\beta d\delta \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{as}^{\Gamma} \frac{1}{J} \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} || \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^0 || T'^{j_{T'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^J. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Nous recouplons ensuite le produit d'opérateurs actifs de manière à coupler par paires ceux agissant sur les états liés et ceux agissant sur les états de diffusion,

$$\left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^0 = - \sum_{\theta} (-1)^{j_{\beta} + j_{\gamma} + \Gamma + \theta} \hat{\Gamma} \hat{\theta} \left\{ \begin{array}{ccc} j_{\alpha} & j_{\gamma} & \theta \\ j_{\delta} & j_{\beta} & \Gamma \end{array} \right\} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma} \right)^{\theta} \left( a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\theta} \right]^0. \quad (6.83)$$

Dans cette dernière expression, la phase négative supplémentaire provient de l'anticommuation des opérateurs du type  $a_{\beta, m_{\beta}}^{\dagger}$  et  $a_{\gamma, m_{\gamma}}$  (car  $\beta \neq \gamma$ ). Les éléments de matrice réduits du produit d'opérateurs couplés dans le membre de droite de (6.83) peuvent alors s'écrire,

$$\begin{aligned} & \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} || \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma} \right)^{\theta} \left( a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\theta} \right]^0 || T'^{j_{T'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^J = \\ & \frac{\hat{J}}{\theta} (-1)^{j + j_{T'} + J + \theta} \left\{ \begin{array}{ccc} j_T & j_{T'} & \theta \\ j' & j & J \end{array} \right\} \langle T^{j_T} || \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma} \right)^{\theta} || T'^{j_{T'}} \rangle \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} || \left( a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\theta} || \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle, \end{aligned} \quad (6.84)$$

où nous avons utilisé le fait que  $(a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma})^{\theta}$  n'agit que sur les états liés (donc sur les sous états  $|T^{j_T}\rangle$ ) et que  $(a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta})^{\theta}$  n'agit que sur les états de diffusion (donc sur les sous états  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}} p_{\bar{c}} r\rangle$ ). On peut montrer que la phase de réarrangement correspondant à cette séparation est positive. Enfin nous pouvons écrire (6.82) comme suit,

$$\begin{aligned} & \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{11} | T'^{j_{T'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J, M} = \\ & \sum_{\alpha, \gamma, \Gamma} \iint d\beta d\delta \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{as}^{\Gamma} \hat{\Gamma} (-1)^{j_{\beta} + j_{\gamma} + j + j_{T'} + J + \Gamma} \left\{ \begin{array}{ccc} j_{\alpha} & j_{\gamma} & \theta \\ j_{\delta} & j_{\beta} & \Gamma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_T & j_{T'} & \theta \\ j' & j & J \end{array} \right\} \\ & \langle T^{j_T} || \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma} \right)^{\theta} || T'^{j_{T'}} \rangle \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} || \left( a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\theta} || \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Remarquons alors que le terme du membre de droite de l'équation (6.85) est fortement réminiscent des éléments de matrice réduits d'une somme d'opérateurs tensoriels à un

corps d'ordre  $\theta$ , écrits en seconde quantification, agissant dans la base  $\{|\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m p_{\bar{c}} r\rangle\}$ . Nous soulignons ce fait en écrivant,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{11} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \\ \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \left( \sum_{\theta} \iint d\beta d\delta \frac{1}{\theta} \langle \beta | |^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}}^{\theta} | \delta \rangle \left( a_{\beta}^{\dagger} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\theta} \right) | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle, \end{aligned} \quad (6.86)$$

où  $|^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}}^{\theta}$  est un opérateur à un corps dont les éléments de matrice réduits dans la base  $\{|\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m r\rangle\}$  sont donnés par,

$$\langle r, \mathcal{Y}_{\bar{c}} | |^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}}^{\theta} | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle = \frac{1}{r r'} |^J \mathcal{V}_{c,c'}^{\theta}(r, r') = \sum_{\alpha, \gamma, \Gamma} \frac{\Gamma}{\hat{j} \hat{j}'} \varphi_{c,c'}^{\theta, J, \Gamma}(\alpha, \gamma) \langle \alpha, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | | V | | \gamma, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle_{as}^{\Gamma}, \quad (6.87)$$

où nous avons posé,

$$\varphi_{c,c'}^{\theta, J, \Gamma}(\alpha, \gamma) = -\hat{\theta} \hat{j} \hat{j}' (-1)^{j_{\gamma} + j_{\mathbb{T}'} + J + \Gamma} \begin{Bmatrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & \theta \\ j' & j & \Gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{\mathbb{T}} & j_{\mathbb{T}'} & \theta \\ j' & j & J \end{Bmatrix} \langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}} | | \left( a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\gamma} \right)^{\theta} | | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} \rangle. \quad (6.88)$$

En se souvenant des relations entre première et seconde quantification, puis en utilisant la définition (2.166b), nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{11} | \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}} , \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} = \\ \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | |^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}} | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle = \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | | \hat{p} \left( |^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}} \right) \hat{p} | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle, \end{aligned} \quad (6.89)$$

où l'opérateur  $|^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}}$  est défini de la manière suivante,

$$\langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | |^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}} | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle = \frac{1}{r r'} |^J \mathcal{V}_{c,c'}(r, r') = \sum_{\alpha, \gamma, \Gamma} \frac{\Gamma}{\hat{j} \hat{j}'} \varphi_{c,c'}^{J, \Gamma}(\alpha, \gamma) \langle \alpha, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | | V | | \gamma, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle_{as}^{\Gamma}, \quad (6.90)$$

où nous avons introduit,

$$\varphi_{c,c'}^{J, \Gamma}(\alpha, \gamma) = \sum_{\theta} \varphi_{c,c'}^{\theta, J, \Gamma}(\alpha, \gamma). \quad (6.91)$$

Dans l'expression  $|^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}}$ , nous notons le moment total  $J$  en exposant à gauche, rappelant ainsi qu'il ne s'agit pas d'un opérateur tensoriel d'ordre  $J$ , mais bien d'une somme d'opérateurs tensoriels (à savoir les opérateurs  $|^J \mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}}^{\theta}$  définis en (6.87)).

Intéressons nous maintenant plus précisément à l'élément de matrice à deux corps apparaissant dans l'expression (6.90). Ce terme s'écrit,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | | V | | \gamma, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r' \rangle_{as}^{\Gamma} = \\ \langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) | | V | | \gamma(1), \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(2) \rangle^{\Gamma} - (-1)^{\Gamma - j_{\gamma} - j'} \langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) | | V | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(1), \gamma(2) \rangle^{\Gamma}. \end{aligned} \quad (6.92)$$

En insérant une relation de complétude dans l'espace coordonnée de la particule (1), puis en intégrant sur la partie angulaire, nous pouvons écrire la partie directe sous la forme suivante,

$$\langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) | | V | | \gamma(1), \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(2) \rangle^{\Gamma} = \int dr_1 r_1 u_{\alpha}(r_1) V_{\alpha \bar{c} \bar{c}'}^{\Gamma}(r_1, r) \left( \frac{u_{\bar{\gamma}}(r_1)}{r_1} \frac{\delta(r - r')}{r r'} \right), \quad (6.93)$$

où  $V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}'}^\Gamma(r_1, r)$  est défini comme en (2.32), et peut être un opérateur différentiel agissant sur le terme contenu dans les grandes parenthèses. En utilisant les propriétés de la distribution de Dirac, et en supposant que  $V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}'}^\Gamma(r_1, r)$  contient au plus des dérivées radiales premières, nous montrons facilement, étant donnée une fonction d'onde  $\xi$ , la relation suivante,

$$\int dr' r'^2 \langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) || V || \gamma(1), \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(2) \rangle^\Gamma \frac{1}{r'} \xi(r') = \frac{1}{r} \int dr_1 r r_1 u_\alpha(r_1) V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}'}^\Gamma(r_1, r) \left( \frac{u_\gamma(r_1)}{r r_1} \xi(r) \right), \quad (6.94)$$

ce qui nous permet d'identifier l'élément de matrice (6.93) à,

$$\langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) || V || \gamma(1), \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(2) \rangle^\Gamma \equiv \frac{\delta(r - r')}{r r'} \int dr_1 r r_1 u_\alpha(r_1) V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}'}^\Gamma(r_1, r) \left( \frac{u_\gamma(r_1)}{r r_1} \times \right), \quad (6.95)$$

en tant que noyau et opérateur agissant sur  $\xi$ . Suivant la même procédure nous montrons que le terme d'échange de (6.92) peut s'écrire,

$$\langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) || V || \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(1), \gamma(2) \rangle^\Gamma = \int dr_1 r_1 u_\alpha(r_1) V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{c}'\bar{\gamma}}^\Gamma(r_1, r) \left( \frac{\delta(r_1 - r')}{r_1 r'} \frac{u_\gamma(r)}{r} \right), \quad (6.96)$$

menant à l'identification,

$$\langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) || V || \mathcal{Y}_{\bar{c}'} r'(1), \gamma(2) \rangle^\Gamma \equiv \frac{1}{r r'} r r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{c}'\bar{\gamma}}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r)}{r r'} \times \right). \quad (6.97)$$

Enfin, nous résumons en écrivant,

$${}^J \mathcal{V}_{c,c'}(r, r') = \delta(r - r') {}^J D_{c,c'}(r) + {}^J E_{c,c'}(r, r'), \quad (6.98)$$

où les potentiels direct  ${}^J D_{c,c'}$  et d'échange  ${}^J E_{c,c'}$  sont donnés par,

$${}^J D_{c,c'}(r) = \sum_{\substack{\hat{\Gamma} \\ \alpha, \gamma}} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}\hat{j}'} \varphi_{c,c'}^{J,\Gamma}(\alpha, \gamma) \int dr' r r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}'}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \times \right), \quad (6.99a)$$

$${}^J E_{c,c'}(r, r') = - \sum_{\substack{\hat{\Gamma} \\ \alpha, \gamma}} (-1)^{\Gamma - j_\gamma - j'} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}\hat{j}'} \varphi_{c,c'}^{J,\Gamma}(\alpha, \gamma) r r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{c}'\bar{\gamma}}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r)}{r r'} \times \right). \quad (6.99b)$$

Nous pouvons alors écrire,

$$\int dr' r'^2 \langle \mathbb{T}^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{11} | \mathbb{T}^{j_{T'}}, \mathcal{Y}_{\bar{c}'} p_{\bar{c}'} r' \rangle^{J,M} \frac{1}{r'} \xi(r') = \frac{1}{r} {}^J D_{c,c'}(r) (\xi(r)) + \frac{1}{r} \int dr' {}^J E_{c,c'}(r, r') (\xi(r')). \quad (6.100)$$

Le calcul des éléments de matrice du type  $V_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r, r')$  est donné dans l'annexe (6.2) pour chaque partie de l'interaction nucléon-nucléon.

La sommation, dans (6.81), sur les états discrets (indexés par  $\alpha$  et  $\gamma$ ) peut être divisée en une sommation sur les états du coeur de modèle en couche et une sommation sur l'espace de valence. Le coeur est inerte, ce qui implique qu'il est le même pour tous les états à  $A$  (et  $A - 1$ ) corps considérés. Nous en déduisons qu'il ne peut pas y avoir de sommation mixte; en d'autres termes, si l'indice  $\alpha$ , dans (6.81), décrit un état du coeur, alors nécessairement l'indice  $\gamma$  doit décrire un état du coeur, car sinon l'opérateur  $(a_\alpha^\dagger a_\gamma)^\theta$  dans (6.88) ne conservera pas le nombre de particules dans le coeur et l'élément de matrice de cet opérateur sera nul. Nous pouvons alors écrire,

$$\sum_{\alpha, \gamma} \equiv \sum_{(\alpha, \gamma) \in \text{core}} + \sum_{(\alpha, \gamma) \in \text{val}} . \quad (6.101)$$

La contribution de l'espace de valence au potentiel ressenti par la particule se trouvant dans un état de diffusion admet la forme générale donnée en (6.99a). Cependant, la contribution du coeur admet une forme beaucoup plus simple, du fait qu'une seule configuration d'occupation (celle où toutes les particules occupent les états de plus basse énergie) est prise en compte. Nous nous intéressons donc maintenant à cette contribution. Nous notons  $|0\rangle$  l'état du coeur qui, rappelons-le, ne couple qu'au moment de spin nul. suivant la procédure introduite dans la section (2.2.2), nous écrivons les vecteurs d'états à  $A - 1$  corps de la manière suivante,

$$|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}, m_{\mathbb{T}}}\rangle = |0, \mathbb{T}_{\text{val}}^{j_{\mathbb{T}}}\rangle^{j_{\mathbb{T}}, m_{\mathbb{T}}}, \quad (6.102)$$

où l'état  $|\mathbb{T}_{\text{val}}^{j_{\mathbb{T}}}\rangle$  est un mélange de configurations des états de l'espace de valence couplant au moment de spin  $j_{\mathbb{T}}$ . En suivant une procédure analogue à celle introduite au début de cette annexe, nous pouvons diviser l'élément de matrice apparaissant dans (6.88) comme suit,

$${}^{j_{\mathbb{T}}}\langle 0, \mathbb{T}_{\text{val}}^{j_{\mathbb{T}}}\rangle \left\| \left( a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\gamma \right)^\theta \right\| \left| 0, \mathbb{T}_{\text{val}}^{j_{\mathbb{T}'}} \right\rangle^{j_{\mathbb{T}'}} = \delta_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}} \delta_{\theta, 0} \hat{j}_{\mathbb{T}} \langle 0 \left\| \left( a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\gamma \right)^0 \right\| 0 \rangle, \quad (6.103)$$

où nous avons utilisé le fait que  $(\alpha, \gamma) \in \text{core}$  et fait que l'élément de matrice dans le membre de droite est nul si  $\theta \neq 0$ . En utilisant la structure simple du coeur, il n'est pas difficile de montrer que l'on a,

$$\langle 0 \left\| \left( a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\gamma \right)^0 \right\| 0 \rangle = \delta_{\alpha, \gamma} \hat{j}_\gamma, \quad (6.104)$$

nous permettant d'écrire,

$$\varphi_{c, c'}^{J, \Gamma}(\alpha, \gamma) = \delta_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}'}}} \delta_{j, j'} \delta_{\alpha, \gamma} \hat{j}_{\mathbb{T}} \hat{j}_\gamma, \quad (6.105)$$

et donc,

$${}^J \mathcal{V}_{c, c'}(r, r') = \delta_{c, c'} \sum_{\gamma \in \text{core}, \Gamma} \frac{\Gamma}{\hat{j}^2} \langle \gamma, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} \| V \| \gamma, \mathcal{Y}_{\bar{c}} r' \rangle_{as}^\Gamma. \quad (6.106)$$

Enfin, en utilisant la propriété de symétrie suivante,

$$V_{\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\gamma} \bar{\delta}}^\Gamma(r, r') = (-1)^{j_\alpha + j_\beta + j_\gamma + j_\delta} V_{\bar{\beta} \bar{\alpha} \bar{\delta} \bar{\gamma}}^\Gamma(r', r), \quad (6.107)$$

nous démontrons facilement que la contribution du coeur aux potentiels (6.99a) s'écrit,

$${}^J D_{c, c'}(r) = \delta_{c, c'} \sum_{(\gamma) \in \text{core}} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}^2} \int dr' r r' u_\gamma(r') V_{\bar{c} \bar{\gamma} \bar{c} \bar{\gamma}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (6.108a)$$

$${}^J E_{c, c'}(r, r') = -\delta_{c, c'} \sum_{(\gamma) \in \text{core}} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}^2} (-1)^{\Gamma - j_\gamma - j} r r' u_\gamma(r') V_{\bar{c} \bar{\gamma} \bar{\gamma} \bar{c}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (6.108b)$$

à comparer avec les potentiels Hartree-Fock (2.32).

## 6.5 Source des équations inhomogènes

Nous nous intéressons ici au terme source apparaissant dans le membre de droite de l'équation (2.308). Nous commencerons par dériver les éléments de matrice de l'opérateur  $\mathcal{H}_{10}$  et étudierons la correction de l'hamiltonien du centre de masse par la suite. Selon (2.266a), nous avons,

$$\mathcal{H}_{10} = \mathcal{T}_{10} + \mathcal{V}_{10}. \quad (6.109)$$

Intéressons nous tout d'abord au terme  $\mathcal{T}_{10}$ . Selon (2.263b) et (2.260a), ce terme admet l'expression suivante,

$$\mathcal{T}_{10} = \int d\alpha \sum_{\beta} \langle \alpha || t || \beta \rangle \left( a_{\alpha}^{\dagger} \times \tilde{a}_{\beta} \right)^{0,0}. \quad (6.110)$$

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart pour réduire l'élément de matrice du produit d'opérateurs actifs, nous pouvons écrire,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\tau}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{T}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} = \int d\alpha \sum_{\beta} \langle \alpha || t || \beta \rangle \frac{1}{j} \langle \mathbb{T}^{j_{\tau}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \left( a_{\alpha}^{\dagger} \times \tilde{a}_{\beta} \right)^0 | \Phi \rangle^J. \quad (6.111)$$

En utilisant la relation de commutation  $(a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\beta})^0 = -(-1)^{j_{\alpha}+j_{\beta}} (\tilde{a}_{\beta} a_{\alpha}^{\dagger})^0$ , nous pouvons mener à bien la séparation suivante,

$$\langle \mathbb{T}^{j_{\tau}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \left( a_{\alpha}^{\dagger} \times \tilde{a}_{\beta} \right)^0 | \Phi \rangle^J = (-1)^{j+J+j_{\tau}} \frac{1}{j^2} \delta_{j_{\alpha} j_{\beta}} \delta_{j_{\alpha}, j} \langle \mathbb{T}^{j_{\tau}} | \tilde{a}_{\beta} | \Phi \rangle^J \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | a_{\alpha}^{\dagger} | \rangle, \quad (6.112)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\tilde{a}_{\beta}$  n'agit que sur les états liés, que  $a_{\alpha}^{\dagger}$  n'agit que sur les états de diffusion et le fait que la phase de réarrangement correspondant à cette séparation est négative. Dans (6.112),  $|\rangle$  désigne le vide. Aussi pouvons nous écrire,

$$\langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | a_{\alpha}^{\dagger} | \rangle = \frac{1}{(-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & j_{\alpha} & 0 \\ -m & m & 0 \end{pmatrix}} \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | a_{\alpha}^{\dagger} | \rangle \quad (6.113a)$$

$$= -\delta_{\bar{\alpha}, \bar{c}} \hat{j} \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | k_{\alpha} \bar{c} m \rangle, \quad (6.113b)$$

où, rappelons-le, selon nos conventions d'écriture  $|k_{\alpha} \bar{c} m\rangle$  représente le vecteur d'état individuel de nombre d'onde  $k_{\alpha}$  et de nombres quantiques angulaire de spin et d'isospin regroupés sous la notation  $\bar{c}$ , et de projection  $m$ . En utilisant le fait que l'opérateur énergie cinétique conserve ces derniers nombres quantiques, propriété que l'on peut écrire comme suit,

$$\langle \alpha || t || \beta \rangle = \delta_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \langle k_{\alpha} \bar{\alpha} | t | n_{\beta} \bar{\alpha} \rangle = \delta_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \hat{j}_{\alpha} \langle k_{\alpha} \bar{\alpha} m | t | n_{\beta} \bar{\alpha} m \rangle, \quad (6.114)$$

nous pouvons résumer les résultats précédents en écrivant,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j_{\tau}}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{T}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} = \\ -(-1)^{j+J+j_{\tau}} \frac{1}{j} \sum_{n_{\beta}} \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \left[ \int dk_{\alpha} |k_{\alpha} \bar{c} m\rangle \langle k_{\alpha} \bar{c} m| \right] | t | n_{\beta} \bar{c} m \rangle \langle \mathbb{T}^{j_{\tau}} | \tilde{a}_{n_{\beta} \bar{c}} | \Phi \rangle^J \end{aligned} \quad (6.115)$$

En remarquant que,

$$\int dk_{\alpha} |k_{\alpha} \bar{c} m\rangle \langle k_{\alpha} \bar{c} m| = |\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m\rangle \int dk_{\alpha} |u_{k_{\alpha} \bar{c}}\rangle \langle u_{k_{\alpha} \bar{c}}| \langle \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | = |\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m\rangle p_{\bar{c}} \langle \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | = |\mathcal{Y}_{\bar{c}}^m\rangle \langle \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \hat{p}, \quad (6.116)$$

et en utilisant la définition (2.166b), nous pouvons alors écrire,

$$\begin{aligned} \langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{T}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} &= -(-1)^{j+J+j_T} \frac{1}{\hat{j}} \sum_{n_\beta} \langle T^{j_T} | \tilde{a}_{n_\beta, \bar{c}} | \Phi \rangle^J \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \hat{p} \left( t | n_\beta \bar{c} m \right) \rangle \\ &= -(-1)^{j+J+j_T} \frac{1}{\hat{j}} \sum_{n_\beta} \langle T^{j_T} | \tilde{a}_{n_\beta, \bar{c}} | \Phi \rangle^J \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') r' \langle r' \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | t | n_\beta \bar{c} m \rangle. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Les éléments de matrice de l'opérateur énergie cinétique s'écrivent,

$$\langle r' \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | t | n_\beta \bar{c} m \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r'} \left[ \frac{d^2}{dr'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} \right] u_{n_\beta \bar{c}}(r'). \quad (6.118)$$

Intéressons nous maintenant à l'hamiltonien du centre de masse. Nous restons ici dans le cadre de l'approximation introduite dans la section (2.1.1.1) visant à limiter la contribution du centre de masse à l'opérateur,

$$\frac{1}{A} \sum_{i=1}^A t_i. \quad (6.119)$$

La soustraction de cet opérateur à  $\mathcal{T}_{10}$  est alors équivalente à la redéfinition (2.15) de la masse d'un nucléon dans l'expression (6.118). Rappelons alors que la fonction d'onde radiale individuelle  $u_{n_\beta \bar{c}}(r)$  satisfait à l'équation intégrodifférentielle (2.31). Ceci nous permet d'écrire,

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{d^2}{dr'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} \right] u_{n_\beta \bar{c}}(r') = \\ e_{n_\beta \bar{c}} u_{n_\beta \bar{c}}(r') - D_{\bar{c}}(r') u_{n_\beta \bar{c}}(r') - \int dr'' E_{\bar{c}}(r', r'') u_{n_\beta \bar{c}}(r''), \end{aligned} \quad (6.120)$$

où les potentiels Hartree-Fock  $D_{\bar{c}}$  et  $E_{\bar{c}}$  sont données en (2.35), et  $e_{n_\beta \bar{c}}$  est l'énergie de l'état individuel considéré. En remarquant que le terme  $e_{n_\beta \bar{c}} u_{n_\beta \bar{c}}(r)$  disparaît par application du projecteur  $\hat{p}$ , nous pouvons résumer les résultats précédents en écrivant,

$$\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{T}_{10}^* | \Phi \rangle^{J,M} = \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') w_c^{HF}(r'), \quad (6.121)$$

où nous avons posé,

$$w_c^{HF}(r) = (-1)^{j+J+j_T} \frac{1}{\hat{j}} \sum_{n_\beta} \langle T^{j_T} | \tilde{a}_{n_\beta, \bar{c}} | \Phi \rangle^J \left( D_{\bar{c}}(r) u_{n_\beta \bar{c}}(r) + \int dr' E_{\bar{c}}(r, r') u_{n_\beta \bar{c}}(r') \right), \quad (6.122)$$

et où nous avons défini,

$$\mathcal{T}_{10}^* = \mathcal{T}_{10} - \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \hat{t}_i. \quad (6.123)$$

Nous nous intéressons maintenant au terme  $\mathcal{V}_{10}$ . Selon (2.264c) et (2.260b), ce terme s'écrit,

$$\mathcal{V}_{10} = - \sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} \int d\beta \langle \alpha, \beta | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0}. \quad (6.124)$$

Comme d'habitude, nous réduisons l'élément de matrice du produit d'opérateurs actifs pour obtenir,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} = \\ - \sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} \int d\beta \langle \alpha, \beta | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \frac{1}{\hat{j}} \langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^0 | | \Phi \rangle^J. \end{aligned} \quad (6.125)$$

Il n'est pas difficile de montrer que le produit d'opérateurs peut être recouplé de la manière suivante,

$$\left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^0 = -(-1)^{\Gamma-j_{\alpha}-j_{\beta}} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right)^{j_{\beta}} a_{\beta}^{\dagger} \right]^0. \quad (6.126)$$

Les éléments de matrice du produit d'opérateurs couplés dans le membre de droite de l'équation (6.126) peuvent alors se diviser comme suit,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right)^{j_{\beta}} a_{\beta}^{\dagger} \right]^0 | | \Phi \rangle^J = \\ -(-1)^{j+j_{\tau}+J} \frac{1}{\hat{j}} \delta_{\bar{c}, \bar{\beta}} \langle \mathbb{T}^{j\tau} | \left( a_{\alpha}^{\dagger} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right)^j | | \Phi \rangle^J \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | k_{\beta} \bar{c} m \rangle, \end{aligned} \quad (6.127)$$

où nous avons utilisé le fait que  $(a_{\alpha}^{\dagger} (\tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta})^{\Gamma})^j$  n'agit que sur les états liés, que  $a_{\beta}^{\dagger}$  n'agit que sur les états de diffusion et que la phase de réarrangement est négative. En utilisant les résultats précédents, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} = - \sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} \frac{1}{\hat{j} \hat{J}} (-1)^{\Gamma+J+j_{\tau}-j_{\alpha}} \langle \mathbb{T}^{j\tau} | \left( a_{\alpha}^{\dagger} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right)^j | | \Phi \rangle^J \\ \langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \left[ \int dk_{\beta} | k_{\beta} \bar{c} m \rangle \langle \alpha, k_{\beta} \bar{c} | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \right]. \end{aligned} \quad (6.128)$$

Il n'est alors pas difficile de se convaincre de la relation suivante,

$$\langle r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m | \left[ \int dk_{\beta} | k_{\beta} \bar{c} m \rangle \langle \alpha, k_{\beta} \bar{c} | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \right] = \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') r' \langle \alpha, r' \mathcal{Y}_{\bar{c}} | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma}. \quad (6.129)$$

nous permettant enfin d'écrire,

$$\langle \mathbb{T}^{j\tau}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{V}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} = \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') w_c(r'), \quad (6.130)$$

où nous avons posé,

$$w_c(r) = - \sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} \frac{1}{\hat{j} \hat{J}} (-1)^{\Gamma+J+j_{\tau}-j_{\alpha}} \langle \mathbb{T}^{j\tau} | \left( a_{\alpha}^{\dagger} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right)^j | | \Phi \rangle^J r \langle \alpha, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma}. \quad (6.131)$$

Intéressons nous donc à l'élément de matrice à deux corps dans (6.131). Ce terme s'écrit,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | |V| | \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} = \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{\gamma, \delta}}} \left[ \langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) | |V| | \gamma(1), \delta(2) \rangle^{\Gamma} - (-1)^{\Gamma-j_{\gamma}-j_{\delta}} \langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{c}}(2) | |V| | \delta(1), \gamma(2) \rangle^{\Gamma} \right] \end{aligned} \quad (6.132)$$

Puisque, dans (6.131),  $\alpha \in \mathcal{D} \neq \beta \in \mathcal{C}$ , le facteur de normalisation (cf. eq. (2.51)) se résume en effet à  $1/\sqrt{1+\delta_{\gamma,\delta}}$ . En insérant une relation de complétude dans l'espace des états de la particule 1 et en intégrant sur la partie angulaire, nous pouvons écrire le terme direct de la manière suivante,

$$\langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{e}}(2) || V || \gamma(1), \delta(2) \rangle^\Gamma = \int dr' r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r')}{r'} \frac{u_\delta(r)}{r} \right), \quad (6.133)$$

et le terme d'échange comme suit,

$$\langle \alpha(1), r \mathcal{Y}_{\bar{e}}(2) || V || \delta(1), \gamma(2) \rangle^\Gamma = \int dr' r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\delta}\bar{\gamma}}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r)}{r} \frac{u_\delta(r')}{r'} \right). \quad (6.134)$$

Nous pouvons donc écrire le terme source (6.131) sous la forme suivante,

$$w_c(r) = -\frac{1}{\hat{j}\hat{J}} \sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} \sum_{\Gamma} (-1)^{\Gamma+J+j_r-j_\alpha} \langle T^{j_r} || (a_\alpha^\dagger (\tilde{a}_\gamma \tilde{a}_\delta)^\Gamma)^j || \Phi \rangle^J \left[ D_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(u_\delta(r)) + \int dr' E_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\delta}\bar{\gamma}}^\Gamma(r, r') (u_\delta(r')) \right], \quad (6.135)$$

où nous avons posé,

$$D_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r) = \int dr' r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (6.136a)$$

$$E_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r, r') = -(-1)^{\Gamma-j_\gamma-j_\delta} r r' u_\alpha(r') V_{\bar{\alpha}\bar{c}\bar{\delta}\bar{\gamma}}^\Gamma(r', r) \left( \frac{u_\gamma(r)}{r r'} \right) \times, \quad (6.136b)$$

en tant qu'opérateurs agissant sur la fonction radiale individuelle  $u_\delta(r)$ .

Les sommations, dans (6.135), sur les indices  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  peuvent être divisées en plusieurs parties, selon que ces indices appartiennent à l'espace du coeur ou à l'espace de valence. En respectant la convention (2.172) d'ordonnement des indices, ainsi que la conservation du nombre de particules constituant le coeur, nous déduisons que ces sommations se divisent de la manière suivante,

$$\sum_{\alpha, \gamma \leq \delta} = \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \text{core} \\ (\delta) \in \text{val}}} + \sum_{(\alpha, \gamma, \delta) \in \text{val}}. \quad (6.137)$$

La contribution au terme source  $w_c(r)$  de la deuxième sommation du membre de droite de (6.137) admet la forme générale présentée en (6.135). Cependant, la contribution de la première sommation admet une forme plus simple que nous nous proposons d'investiguer maintenant. A cette fin, nous commençons par recoupler le produit d'opérateurs apparaissant dans (6.135) afin de coupler ceux agissant sur l'espace du coeur,

$$\left( a_\alpha^\dagger (\tilde{a}_\gamma \tilde{a}_\delta)^\Gamma \right)^j = \sum_{\theta} (-1)^{j_\alpha+j_\gamma+j+j_\delta} \hat{\theta} \hat{\Gamma} \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & j_\gamma & \theta \\ j_\delta & j & \Gamma \end{matrix} \right\} \left( (a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\gamma)^\theta \tilde{a}_\delta \right)^j. \quad (6.138)$$

Pour calculer les éléments de matrice de cet opérateur, nous suivons la même procédure que celle introduite dans l'annexe (6.4), et notons les états à  $A$  particules liées de la manière suivante,

$$|\Phi\rangle^{J,M} = |0, \Phi_{val}^J\rangle^{J,M}, \quad (6.139)$$

où  $|0\rangle$  désigne l'état du coeur et l'état  $|\Phi_{val}\rangle^J$  est un mélange de configurations des états de l'espace de valence couplant au moment de spin total  $J$ . Les états à  $A - 1$  particules liées sont pour leur part construits selon (6.102). Ainsi pouvons nous aisément calculer les éléments de matrice du produit d'opérateurs couplés du membre de droite de (6.138),

$$\langle T^{j_T} | \left( (a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\gamma)^\theta \tilde{a}_\delta \right)^j | \Phi^J \rangle^J = \langle 0, T_{val}^{j_T} | \left( (a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\gamma)^\theta \tilde{a}_\delta \right)^j | 0, \Phi_{val}^J \rangle^J \quad (6.140a)$$

$$= \delta_{\theta,0} \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{j_\delta,j} \hat{j}_\gamma \langle T_{val}^{j_T} | \tilde{a}_\delta | \Phi_{val} \rangle^J, \quad (6.140b)$$

où nous avons suivi la méthode habituelle, et déduit que la phase de réarrangement est positive. Pour alléger les notations, nous pouvons prendre avantage de la relation suivante,

$$\langle T_{val}^{j_T} | \tilde{a}_\delta | \Phi_{val} \rangle^J = \langle T^{j_T} | \tilde{a}_\delta | \Phi \rangle^J, \quad (6.141)$$

qui se démontre aisément. Enfin, en utilisant (6.140a) et (6.141), ainsi que la relation de symétrie (6.107) et la conservation de la parité dans les éléments de matrice à deux corps, nous déduisons que la contribution du coeur dans la sommation sur les indices  $\alpha$  et  $\gamma$  au terme source (6.135) est donnée par,

$$w_c^{core}(r) = -(-1)^{j+J+j_T} \frac{1}{\hat{j}} \sum_{n_\delta} \langle T^{j_T} | \tilde{a}_{n_\delta \bar{c}} | \Phi \rangle^J \left( D_{\bar{c}}^{core}(r) u_{n_\delta \bar{c}}(r) + \int dr' E_{\bar{c}}^{core}(r, r') u_{n_\delta \bar{c}}(r') \right) \quad (6.142)$$

où nous avons posé,

$$D_{\bar{c}}^{core}(r) = \sum_{\substack{(\gamma) \in core \\ \Gamma}} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}^2} \int dr' r r' u_\gamma(r') V_{\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (6.143a)$$

$$E_{\bar{c}}^{core}(r, r') = - \sum_{\substack{(\gamma) \in core \\ \Gamma}} (-1)^{\Gamma-j_\gamma-j} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}^2} r r' u_\gamma(r') V_{\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times. \quad (6.143b)$$

Nous remarquons donc que le terme (6.142) admet exactement la même forme (mais de signe contraire) que le terme (6.122), à ce détail près que les potentiels  $D_{\bar{c}}^{core}$  et  $E_{\bar{c}}^{core}$  sont générés par les états du coeur uniquement, alors que les potentiels Hartree-Fock  $D_{\bar{c}}$  et  $E_{\bar{c}}$  sont générés par les états du coeur ainsi que par les couches additionnelles moyennant la probabilité d'occupation définie en (2.36).

Nous résumons ici en écrivant,

$$\langle T^{j_T}, r p_{\bar{c}} \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \mathcal{T}_{10}^* + \mathcal{V}_{10} | \Phi \rangle^{J,M} = \frac{1}{r} \int dr' p_{\bar{c}}(r, r') w_c(\Phi^J, r'), \quad (6.144)$$

où le terme source total est défini par,

$$w_c(\Phi^J, r) = (-1)^{j+J+j_T} \frac{1}{\hat{j}} \sum_{n_\delta} \langle T^{j_T} | \tilde{a}_{n_\delta \bar{c}} | \Phi \rangle^J \left[ \left( D_{\bar{c}}(r) - D_{\bar{c}}^{core}(r) \right) u_{n_\delta \bar{c}}(r) + \int dr' \left( E_{\bar{c}}(r, r') - E_{\bar{c}}^{core}(r, r') \right) u_{n_\delta \bar{c}}(r') \right] - \frac{1}{\hat{j}} \sum_{(\alpha,\gamma,\delta) \in val} (-1)^{\Gamma+J+j_T-j_\alpha} \langle T^{j_T} | \left( a_\alpha^\dagger (\tilde{a}_\gamma \tilde{a}_\delta)^\Gamma \right)^j | \Phi \rangle^J \left[ D_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma u_\delta(r) + \int dr' E_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\delta}}^\Gamma(r, r') u_\delta(r') \right]. \quad (6.145)$$

Dans cette dernière expression, nous pouvons écrire,

$$D_{\bar{c}}(r) - D_{\bar{c}}^{core}(r) = \sum_{\substack{(\gamma) \in add \\ \Gamma}} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}_\alpha} P_{j_\gamma}^{occ} \int dr' r r' u_\gamma(r') V_{\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r')}{r r'} \right) \times, \quad (6.146a)$$

$$E_{\bar{c}}(r, r') - E_{\bar{c}}^{core}(r, r') = - \sum_{\substack{(\gamma) \in add \\ \Gamma}} \frac{\hat{\Gamma}}{\hat{j}_\alpha} P_{j_\gamma}^{occ} (-1)^{\Gamma-j-j_\gamma} r r' u_\gamma(r') V_{\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}}^\Gamma(r, r') \left( \frac{u_\gamma(r)}{r r'} \right) \times (6.146b)$$

où nous avons spécifié par  $(\gamma) \in add$  que les sommations ne portent que sur les particules additionnelles au coeur de modèle en couches. Ces termes contribuent donc à la correction discutée dans la section (2.4.4.4).

## 6.6 Représentation radiale des solutions de l'espace $\mathcal{Q}$

Nous nous intéressons dans cette section à la représentation radiale d'un élément de l'espace  $\mathcal{Q}$  de manière à compléter l'expression (2.325) de la solution totale  $|\psi\rangle^+$ . Les états propres de l'hamiltonien effectif  $|\tilde{\Phi}\rangle^{J,M}$  étant des combinaisons linéaires des états propres de l'hamiltonien  $H_{QQ}$  projeté sur l'espace  $\mathcal{Q}$ , nous nous limitons ici au calcul du recouvrement suivant,

$${}^{J,M}\langle \mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}} | \Phi \rangle^{J,M}, \quad (6.147)$$

où l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$ , couplant au moment de spin  $J$  (et projection  $M$ ) vérifie,

$$(E - H_{QQ})|\Phi\rangle^{J,M} = 0. \quad (6.148)$$

En notant  $\{\alpha_i, m_i\}$  une base d'états individuels liés, l'état  $|\Phi\rangle^{J,M}$  peut être décomposé, en schéma  $M$ , dans la base de Fock à  $A$  particules  $\{|\alpha_1 m_1, \dots, \alpha_A m_A\rangle\}$  de la manière suivante,

$$|\Phi\rangle^{J,M} = \sum_{\{\alpha_i m_i\}} \mathcal{C}_{\{\alpha_i m_i\}}^{\Phi^{J,M}} |\alpha_1 m_1, \dots, \alpha_A m_A\rangle, \quad (6.149)$$

où  $\{\alpha_i m_i\}$  symbolise l'ensemble des configurations possibles, et où  $\{\mathcal{C}_{\{\alpha_i m_i\}}^{\Phi^{J,M}}\}$  représentent les coefficients du développement. De même, la cible  $|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}}\rangle$  peut être développée dans une base de Fock à  $A - 1$  particules liées,

$$|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}}\rangle = \sum_{\{\alpha'_i m'_i\}} \mathcal{C}_{\{\alpha'_i m'_i\}}^{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}}} |\alpha'_1 m'_1, \dots, \alpha'_{A-1} m'_{A-1}\rangle, \quad (6.150)$$

nous permettant de construire les états de base,

$$|\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathcal{Y}_{\bar{c}} r\rangle^{J,M} = \sum_{m_{\mathbb{T}}, m} \langle j_{\mathbb{T}} j, m_{\mathbb{T}} m | JM \rangle \sum_{\{\alpha'_i m'_i\}} \mathcal{C}_{\{\alpha'_i m'_i\}}^{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}} m_{\mathbb{T}}}} |\alpha'_1 m'_1, \dots, \alpha'_{A-1} m'_{A-1}, \bar{c} m r\rangle, \quad (6.151)$$

où  $|\bar{c} m r\rangle$  admet la représentation suivante,

$$\langle \vec{r}' | \bar{c} m r \rangle = \frac{\delta(r' - r)}{r' r} \mathcal{Y}_{\bar{c}}^m(\Omega_{r'}), \quad (6.152)$$

et où les fonctions angulaires, de spin et d'isospin  $\mathcal{Y}_{\bar{c}}$  ont été définies en (2.18). Le calcul de la quantité (6.147) implique donc celui du recouvrement suivant,

$$\langle \alpha'_1 m'_1, \dots, \alpha'_{A-1} m'_{A-1}, \bar{c} m r | \alpha_1 m_1, \dots, \alpha_A m_A \rangle, \quad (6.153)$$

qui, selon (4.22), peut s'écrire,

$$\sqrt{A!} \langle \alpha'_1 m'_1(1), \dots, \alpha'_{A-1} m'_{A-1}(A-1), \bar{c} m r(A) | \alpha_1 m_1, \dots, \alpha_A m_A \rangle, \quad (6.154)$$

où l'indexation des particules dans le bra est arbitraire. Le ket de (6.154) peut s'écrire explicitement à l'aide de l'opérateur d'antisymétrisation,

$$|\alpha_1 m_1, \dots, \alpha_A m_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P \hat{P} |\alpha_1 m_1(1), \dots, \alpha_A m_A(A)\rangle, \quad (6.155)$$

où  $\hat{P}$  est un opérateur de permutation, et où la sommation porte sur les  $A!$  permutations. Nous choisissons ici, pour plus de commodité, de faire agir les permutations sur les états plutôt que sur les particules menant à,

$$|\alpha_1 m_1, \dots, \alpha_A m_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P |\alpha_{P_1} m_{P_1}(1), \dots, \alpha_{P_A} m_{P_A}(A)\rangle, \quad (6.156)$$

où  $Pi$  correspond au  $i^{\text{ème}}$  indice obtenu par application de la permutation  $P$  à l'ensemble d'indices  $(1, 2, \dots, A)$ . Enfin, nous pouvons calculer le recouvrement (6.153),

$$\sum_P (-1)^P \langle \alpha'_1 m'_1 | \alpha_{P1} m_{P1} \rangle \cdots \langle \alpha'_{A-1} m'_{A-1} | \alpha_{PA-1} m_{PA-1} \rangle \langle \bar{c} m r | \alpha_{PA} m_{PA} \rangle. \quad (6.157)$$

Dans cette dernière expression, nous avons,

$$\langle \alpha'_i m'_i | \alpha_{Pi} m_{Pi} \rangle = \delta_{\alpha'_i, \alpha_{Pi}} \delta_{m'_i, m_{Pi}}, \quad (6.158a)$$

$$\langle \bar{c} m r | \alpha_{PA} m_{PA} \rangle = \delta_{\bar{c}, \bar{\alpha}_{PA}} \frac{u_{\alpha_{PA}}(r)}{r}. \quad (6.158b)$$

## 6.7 Résolution des équations projetées sur le continuum individuel

### 6.7.1 Solution matricielle

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution des équations projetées (2.300), que nous écrivons ici sous la forme symbolique,

$$\tilde{p} \tilde{\mathcal{K}} \tilde{p} \xi = 0, \quad (6.159)$$

où la solution matricielle  $\xi(r)$  est supposée vérifier la forme asymptotique (2.256). En posant,

$$\tilde{\xi} = \tilde{p} \xi, \quad (6.160)$$

il vient,

$$\tilde{p} \tilde{\mathcal{K}} \tilde{\xi} = 0. \quad (6.161)$$

Une solution générale  $\tilde{\xi}$  de (6.159) doit alors pouvoir s'écrire de la manière suivante,

$$\tilde{\xi}(r) = \xi^h(r) C + \phi(r), \quad (6.162)$$

où  $\xi^h$  est la solution de l'équation non-projetée homogène,

$$\tilde{\mathcal{K}} \xi^h = 0, \quad (6.163)$$

et  $C$  est une matrice constante. Dans (6.162),  $\phi(r)$  doit être, en toute généralité, une solution matricielle de l'équation,

$$\tilde{\mathcal{K}} \phi = U, \quad (6.164)$$

telle que,

$$\tilde{p} U = 0. \quad (6.165)$$

Ecrivons alors cette dernière équation explicitement,

$$\int dr' p_{\bar{c}}(r, r') U_{c, c'}(r') = 0, \quad \forall \{c, c'\}. \quad (6.166)$$

Nous voyons donc que les éléments de la matrice  $U$  de canal sortant  $c$  doivent appartenir à l'espace  $q$  des états liés de nombre quantique angulaire, de spin et d'isospin  $\bar{c}$ . Nous écrivons alors,

$$U_{c, c'}(r) = \sum_n a_c^n u_{n \bar{c}}(r), \quad (6.167)$$

où  $\{a_c^n\}$  sont des constantes, et où  $u_{n \bar{c}}(r)$  représente une fonction d'onde radiale individuelle de nombre de noeuds  $n$  et de nombres quantique angulaire, de spin et d'isospin désignés par  $\bar{c}$ . La sommation doit porter sur tous les états liés existants de nombres quantiques  $\bar{c}$ . Aussi se peut-t'il qu'il n'y en ait aucun, auquel cas la projection sur le continuum se

résume à l'identité. Nous remarquons alors que l'élément de matrice  $U_{c,c'}$  ne dépend pas du canal entrant  $c'$ . Ceci nous permet alors de limiter le terme  $U$  à une forme vectorielle  $\vec{U}$  dont les composantes, en représentation radiale, sont données par,

$$U_c(r) = \sum_n a_c^n u_{n\bar{c}}(r). \quad (6.168)$$

Avant de poursuivre, introduisons la notation suivante,

$$I \equiv \{c_I, n_I\}, \quad (6.169)$$

symbolisant donc un canal donné, ainsi qu'un nombre de noeuds. A l'aide des remarques précédentes, il n'est pas difficile de montrer que les composantes de la solution  $\tilde{\xi}$  peuvent s'écrire,

$$\tilde{\xi}_{c,c'}(r) = \sum_{c''} \xi_{c,c''}^h(r) C_{c'',c'} + \sum_I \xi_c^I D_{c'}^I, \quad (6.170)$$

où la solution vectorielle particulière  $\vec{\xi}^I$  est solution de l'équation,

$$\tilde{\mathcal{K}} \vec{\xi}^I = \vec{U}^I, \quad (6.171)$$

où nous avons posé,

$$U_c^I(r) = \delta_{c_I,c} u_{n_I \bar{c}_I}(r). \quad (6.172)$$

Afin de déterminer les constantes  $D_{c'}^I$ , nous utilisons le fait que la solution  $\tilde{\xi}$  appartient, par définition (cf. eq. (6.160)), au continuum individuel. Puisque que l'ensemble des vecteurs  $\{\vec{U}^I\}$  forment une base complète et orthogonale d'un espace nul par application de l'opérateur  $\tilde{p}$ , nous pouvons écrire,

$$\int dr u_{n_J \bar{c}_J}(r) \tilde{\xi}_{c,c'}(r) = 0, \quad \forall \{J, c'\}. \quad (6.173)$$

En utilisant (6.170), l'équation (6.173) est alors équivalente à,

$$\sum_{c''} A_{c''}^J C_{c'',c'} + \sum_I B^{J,I} D_{c'}^I = 0, \quad (6.174)$$

où nous avons posé,

$$A_{c''}^J = \int dr u_{n_J \bar{c}_J}(r) \xi_{c,c''}^h(r), \quad (6.175a)$$

$$B^{J,I} = \int dr u_{n_I \bar{c}_J}(r) \xi_c^I(r). \quad (6.175b)$$

(6.174) est un simple système linéaire, que nous écrivons ici sous forme matricielle,

$$B \vec{D}_{c'} = - \sum_{c''} \vec{A}_{c''} C_{c'',c'}. \quad (6.176)$$

Enfin, la solution (6.170) s'écrit,

$$\tilde{\xi}_{c,c'}(r) = \sum_{c''} \left[ \xi_{c,c''}^h(r) - \sum_{I,J} \xi_c^I(r) \left( B^{-1} \right)^{I,J} A_{c'}^J \right] C_{c'',c'}. \quad (6.177)$$

Il nous reste maintenant à vérifier la condition asymptotique. Nous supposons donc que pour  $r \geq R$  cette condition est vérifiée. En notant  $M$  la matrice définie par,

$$M_{c,c'} = \xi_{c,c'}^h(R) - \sum_{I,J} \xi_c^I(R) \left( B^{-1} \right)^{I,J} A_{c'}^J, \quad (6.178)$$

ainsi que les matrices  $H^\pm$  et  $\Theta$  définies par,

$$H_{c,c'}^\pm = \delta_{c,c'} H_c^\pm(R), \quad (6.179a)$$

$$\Theta_{c,c'} = \delta_{c,c'} \frac{e^{i\sigma_l}}{k_c}, \quad (6.179b)$$

où les fonctions  $H_c^\pm(r)$  ont été définies en (2.110), la condition de raccordement de la solution physique et de sa dérivée première en  $r = R$  s'écrit,

$$M C = \Theta \left[ H^- + H^+ S \right], \quad (6.180a)$$

$$M' C = \Theta \left[ H'^- + H'^+ S \right], \quad (6.180b)$$

où les quantités primées indiquent la dérivation par rapport à la variable radiale. On montre facilement que la résolution de ce système d'équations matricielles conduit à,

$$C = M^{-1} \Theta \left( H^- + H^+ S \right), \quad (6.181a)$$

$$S = - \frac{1}{\Theta H'^+ - M' M^{-1} \Theta H^+} \left( \Theta H'^- - M' M^{-1} \Theta H^- \right). \quad (6.181b)$$

## 6.7.2 Solution vectorielle

Nous nous intéressons maintenant à la résolution des équations inhomogènes projetées (2.312) que l'on écrit ici sous la forme,

$$\tilde{p} \left[ \tilde{\mathcal{K}} \vec{\omega} = \vec{w} \right], \quad (6.182)$$

où nous avons posé,

$$\vec{\omega} = \tilde{p} \vec{w}. \quad (6.183)$$

Il est alors immédiat que la solution  $\vec{\omega}$  doit s'écrire,

$$\vec{\omega}(r) = \xi^h(r) \vec{C} + \sum_I d^I \vec{\xi}^I(r) + \vec{w}^p(r), \quad (6.184)$$

où  $\xi^h$  est la solution matricielle de (6.163),  $\vec{C}$  est un vecteur constant,  $\vec{\xi}^I$  est la solution vectorielle de (6.171),  $\{d^I\}$  sont des constantes et où  $\vec{\omega}^p$  est la solution particulière satisfaisant à,

$$\tilde{\mathcal{K}} \vec{\omega}^p = \vec{w}. \quad (6.185)$$

De même que dans la section précédente, nous déterminons les constantes  $\{d^I\}$  à l'aide de l'équation,

$$\int dr u_{n,J} \bar{c}_J(r) \tilde{\omega}_{c,J}(r) = 0, \quad \forall J, \quad (6.186)$$

qui est équivalente au système linéaire suivant,

$$\sum_{c'} \vec{A}_{c'} C_{c'} + B \vec{d} + \vec{\varphi} = 0, \quad (6.187)$$

où les vecteurs  $\vec{A}_{c'}$  et la matrice  $B$  ont été définis dans la section précédente, et où nous avons introduit,

$$\varphi^J = \int dr u_{n,J} \bar{c}_J(r) \omega_{c,J}^p(r). \quad (6.188)$$

La solution (6.184) s'écrit enfin,

$$\tilde{\omega}_c(r) = \sum_{c'} \left[ \xi_{c,c'}^h(r) - \sum_{I,J} \xi_c^I(r) (B^{-1})^{I,J} A_{c'}^J \right] C_{c'} + \omega_c^p(r) - \sum_{I,J} \xi_c^I(r) (B^{-1})^{I,J} \varphi^J. \quad (6.189)$$

En définissant le vecteur  $\vec{\Omega}$  par,

$$\Omega_c = \omega_c^p(R) - \sum_{I,J} \xi_c^I(R) (B^{-1})^{I,J} \varphi^J, \quad (6.190)$$

où  $R$  est suffisamment grand pour la condition asymptotique (2.257) soit vérifiée, alors les conditions de raccordement s'écrivent,

$$M \vec{C} + \vec{\Omega} = \Theta H^+ \vec{\Gamma}, \quad (6.191a)$$

$$M' \vec{C} + \vec{\Omega}' = \Theta H'^+ \vec{\Gamma}, \quad (6.191b)$$

menant à,

$$\vec{C} = M^{-1} (\Theta H^+ \vec{\Gamma} - \vec{\Omega}), \quad (6.192a)$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{1}{M' M^{-1} \Theta H^+ - \Theta H'^+} (M' M^{-1} \vec{\Omega} - \vec{\Omega}'). \quad (6.192b)$$

## 6.8 Dérivation de la résolvante avec un nombre arbitraire d'espaces modèles

On considère  $n$  espaces modèles. Les projecteurs sur ces espaces sont notés  $\{P_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . La numérotation est arbitraire. Aussi toute permutation des indices  $\{1, 2, \dots, n\}$  peut être indifféremment utilisée pour décrire l'ensemble des  $n$  espaces. Les projecteurs  $P_i$  sont supposés vérifier,

$$\sum_{i=1}^n P_i = \mathbf{1}, \quad (6.193a)$$

$$P_i P_j = \delta_{i,j} P_i, \quad (6.193b)$$

et les projections de l'hamiltonien  $H$  sont notées,

$$H_{ij} = P_i H P_j. \quad (6.194)$$

En utilisant la relation (2.218), nous pouvons écrire la résolvante totale sous la forme suivante,

$$G = \frac{1}{E - H_{11}} \left[ \mathbf{1} + \left( \sum_{j,i=1}^n H_{ji} - H_{11} \right) G \right]. \quad (6.195)$$

En définissant,

$$G_1 = \frac{P_1}{E - H_{11}}, \quad (6.196)$$

il vient,

$$\begin{aligned} P_1 G &= G_1 \left[ P_1 + \sum_{i \neq 1} H_{1i} G \right] \\ &= G_1 \left[ P_1 + \sum_{i \neq 1,2} H_{1i} G + H_{12} G_2 \left( P_2 + \sum_{i \neq 1,2} H_{2i} G + H_{21} G \right) \right] \\ &= G_1 \left[ P_1 + H_{12} G_2 + \sum_{i \neq 1,2} (H_{1i} + H_{12} G_2 H_{2i}) G \right] + G_1 H_{12} G_2 H_{21} (P_1 G). \end{aligned} \quad (6.197)$$

En factorisant (6.197), puis en multipliant à gauche par  $(G_1)^{-1} = P_1 (E - H_{11}) P_1$  nous obtenons,

$$P_1 (E - H_{11} - H_{12} G_2 H_{21}) G = P_1 + H_{12} G_2 + \sum_{i \neq 1,2} (H_{1i} + H_{12} G_2 H_{2i}) G. \quad (6.198)$$

En définissant les opérateurs suivants,

$$R_1^2 = P_1 + H_{12} G_2, \quad (6.199a)$$

$$H_{1i}^2 = H_{1i} + H_{12} G_2 H_{2i}, \quad (6.199b)$$

$$G_1^2 = P_1 \frac{1}{E - H_{11}^2} P_1, \quad (6.199c)$$

nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned}
P_1 G &= G_1^2 \left[ R_1^2 + \sum_{i \neq 1,2} H_{1i}^2 G \right] \\
&= G_1^2 \left[ R_1^2 + \sum_{i \neq 1,2,3} H_{1i}^2 G + H_{13}^2 G_3^2 \left( R_3^2 + \sum_{i \neq 1,2,3} H_{3i}^2 G + H_{31}^2 G \right) \right] \\
&= G_1^2 \left[ R_1^2 + H_{13}^2 G_3^2 R_3^2 + \sum_{i \neq 1,2,3} (H_{1i}^2 + H_{13}^2 G_3^2 H_{3i}^2) G \right] + G_1^2 H_{13}^2 G_3^2 H_{31}^2 (P_1 G). \quad (6.200)
\end{aligned}$$

En factorisant (6.200), puis en multipliant à gauche par  $(G_1^2)^{-1} = P_1(E - H_{11}^2)P_1$  nous obtenons,

$$P_1(E - H_{11}^2 - H_{13}^2 G_3^2 H_{31}^2)G = R_1^2 + H_{13}^2 G_3^2 R_3^2 + \sum_{i \neq 1,2,3} (H_{1i}^2 + H_{13}^2 G_3^2 H_{3i}^2)G. \quad (6.201)$$

En définissant,

$$R_1^{23} = R_1^2 + H_{13}^2 G_3^2 R_3^2, \quad (6.202a)$$

$$H_{1i}^{23} = H_{1i}^2 + H_{13}^2 G_3^2 H_{3i}^2, \quad (6.202b)$$

$$G_1^{23} = P_1 \frac{1}{E - H_{11}^{23}} P_1, \quad (6.202c)$$

nous pouvons écrire,

$$P_1 G = G_1^{23} \left[ R_1^{23} + \sum_{i \neq 1,2,3} H_{1i}^{23} G \right]. \quad (6.203)$$

Enfin, la récurrence, qui n'est pas difficile à démontrer, mène à,

$$P_1 G = G_1^{23 \dots r} \left[ R_1^{23 \dots r} + \sum_{i \neq 1,2, \dots, r} H_{1i}^{23 \dots r} G \right], \quad (6.204)$$

où les opérateurs multi-indices sont définis de manière auto-similaire comme suit,

$$R_i^{i_1 \dots i_k} = R_i^{i_1 \dots i_{k-1}} + H_{i i_k}^{i_1 \dots i_{k-1}} G_{i_k}^{i_1 \dots i_{k-1}} R_{i_k}^{i_1 \dots i_{k-1}}, \quad R_i = P_i, \quad (6.205a)$$

$$H_{ij}^{i_1 \dots i_k} = H_{ij}^{i_1 \dots i_{k-1}} + H_{i i_k}^{i_1 \dots i_{k-1}} G_{i_k}^{i_1 \dots i_{k-1}} H_{i_k j}^{i_1 \dots i_{k-1}}, \quad (6.205b)$$

$$G_i^{i_1 \dots i_k} = P_i \frac{1}{E - H_{ii}^{i_1 \dots i_k}} P_i. \quad (6.205c)$$

Afin de mener à bien la deuxième partie du calcul, nous procédons à la permutation d'indice suivante,

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow 1 \\
2 &\longrightarrow n \\
3 &\longrightarrow n-1 \\
&\vdots \\
n &\longrightarrow 2.
\end{aligned}$$

En utilisant (6.204) et la permutation ci-dessus, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} P_1 G &= G_1^{n \cdots 2} R_1^{n \cdots 2} \\ P_2 G &= G_2^{n \cdots 3} R_2^{n \cdots 3} + G_2^{n \cdots 3} H_{21}^{n \cdots 3} (P_1 G) \\ P_3 G &= G_3^{n \cdots 4} R_3^{n \cdots 4} + G_3^{n \cdots 4} H_{31}^{n \cdots 4} (P_1 G) + G_3^{n \cdots 4} H_{32}^{n \cdots 4} (P_2 G) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nous introduisons alors les notations simplifiées suivantes,

$$\tilde{G}_i = G_i^{n \cdots i+1}, \quad \tilde{G}_n = G_n, \quad (6.206a)$$

$$\tilde{R}_i = R_i^{n \cdots i+1}, \quad \tilde{R}_n = P_n, \quad (6.206b)$$

$$\tilde{H}_{ij} = H_{ij}^{n \cdots i+1}, \quad \tilde{H}_{nj} = H_{nj}, \quad (6.206c)$$

qui nous permettent d'écrire,

$$\begin{aligned} P_1 G &= \tilde{G}_1 \tilde{R}_1 \\ P_2 G &= \tilde{G}_2 \tilde{R}_2 + \tilde{G}_2 \tilde{H}_{21} (P_1 G) \\ \Rightarrow (P_1 + P_2) G &= \tilde{G}_2 \tilde{R}_2 + (P_1 + \tilde{G}_2 \tilde{H}_{21}) \tilde{G}_1 \tilde{R}_1 \end{aligned} \quad (6.207)$$

En définissant,

$$L_1^2 = P_1 + \tilde{G}_2 \tilde{H}_{21}, \quad (6.208)$$

il vient,

$$(P_1 + P_2) G = \tilde{G}_2 \tilde{R}_2 + L_1^2 \tilde{G}_1 \tilde{R}_1. \quad (6.209)$$

Nous poursuivons alors la procédure,

$$\begin{aligned} P_3 G &= \tilde{G}_3 \tilde{R}_3 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{31} (P_1 G) + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{32} (P_2 G) \\ \Rightarrow (P_1 + P_2 + P_3) G &= \\ &\tilde{G}_3 \tilde{R}_3 + (P_2 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{32}) \tilde{G}_2 \tilde{R}_2 + \left[ P_1 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{31} + (P_2 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{32}) \tilde{G}_2 \tilde{H}_{21} \right] \tilde{G}_1 \tilde{R}_1. \end{aligned} \quad (6.210)$$

Définissant,

$$L_2^3 = P_2 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{32}, \quad (6.211a)$$

$$L_1^3 = P_1 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{32}, \quad (6.211b)$$

$$L_1^{32} = L_1^3 + L_2^3 \tilde{G}_2 \tilde{H}_{21} = P_1 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{31} + (P_2 + \tilde{G}_3 \tilde{H}_{32}) \tilde{G}_2 \tilde{H}_{21}, \quad (6.211c)$$

nous pouvons écrire,

$$(P_1 + P_2 + P_3) G = \tilde{G}_3 \tilde{R}_3 + L_2^3 \tilde{G}_2 \tilde{R}_2 + L_1^{32} \tilde{G}_1 \tilde{R}_1. \quad (6.212)$$

La récurrence, qui est cette fois un peu plus difficile à démontrer, mène à,

$$\sum_{i=1}^n P_i G = \sum_{i=1}^n L_i^{n \cdots i+1} \tilde{G}_i \tilde{R}_i \quad (6.213)$$

où les opérateurs multi-indices sont définis comme suit,

$$L_i^{n \cdots i+1} = L_i^{n \cdots i+2} + L_{i+1}^{n \cdots i+2} \tilde{G}_{i+1} \tilde{H}_{i+1 i}, \quad L_j = P_j. \quad (6.214)$$

Finalement, en définissant,

$$\tilde{L}_i = L_i^{n \cdots i+1}, \quad \tilde{L}_n = P_n, \quad (6.215)$$

la résolvante totale peut s'écrire sous la forme compacte suivante,

$$G = \sum_{i=1}^n \tilde{L}_i \tilde{G}_i \tilde{R}_i. \quad (6.216)$$

## 6.9 Fonctions de spin-isospin à symétrie adaptée

Dans cette annexe, nous utilisons la notation  $Y_m^{[\nu]}$  pour désigner la représentation graphique d'un tableau de Young, et  $[\nu]_m$  la partition correspondante.

Nous considérons la partie de spin d'un système de  $i$  particules. Le schéma de couplage de ces fonctions est le suivant,

$$\left[ \cdots \left[ [1/2, 1/2]^{S_1}, 1/2 \right]^{S_2} \cdots, 1/2 \right]^{S_{i-1}}, \quad (6.217)$$

où  $1/2$  représente un spineur. Les tableaux (6.3,6.4,6.5) présentent la symétrie de ces fonctions de spin sous l'action du groupe des permutations en fonction de l'ensemble des moments  $\{S_1, S_2, \cdots, S_{i-1}\}$  pour  $i = 2, 3, 4$  respectivement. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter les ouvrages ...[61, 77, 62]. Nous adoptons le même schéma de couplage

$S_1$	$Y_m^{[\nu]}$	$[\nu]_m$
1	$\boxed{1\ 2}$	[2]
0	$\begin{array}{ c } \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}$	[1 <sup>2</sup> ]

TAB. 6.3 – Symétrie des fonctions de spin (6.217) pour  $i = 2$ .

$S_1$	$S_2$	$Y_m^{[\nu]}$	$[\nu]_m$
1	$\frac{3}{2}$	$\boxed{1\ 2\ 3}$	[3]
1	$\frac{1}{2}$	$\begin{array}{ c } \hline \boxed{1\ 2} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array}$	[21] <sub>1</sub>
0	$\frac{1}{2}$	$\begin{array}{ c } \hline \boxed{1\ 3} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}$	[21] <sub>2</sub>

TAB. 6.4 – Symétrie des fonctions de spin (6.217) pour  $i = 3$ .

pour la partie isospin,

$$\left[ \cdots \left[ [1/2, 1/2]^{T_1}, 1/2 \right]^{T_2} \cdots 1/2 \right]^{T_{i-1}}, \quad (6.218)$$

où, cette fois-ci,  $1/2$  représente un isospineur. Nous voulons maintenant définir des fonctions de spin-isospin de symétrie bien définie par le produit intérieur des fonctions (6.217) et (6.218). Ces fonctions forment un espace invariant sous l'action du groupe,

$$SU(4) \supset SU(2) \times SU(2). \quad (6.219)$$

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$Y_m^{[\nu]}$	$[\nu]_m$
1	$\frac{3}{2}$	2	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	[3]
1	$\frac{3}{2}$	1	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$[31]_1$
1	$\frac{1}{2}$	1	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$[31]_2$
0	$\frac{1}{2}$	1	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$[31]_3$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	$[22]_1$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$	$[22]_2$

TAB. 6.5 – Symmétrie des fonctions de spin (6.217) pour  $i = 4$ .

Les tableaux (6.6,6.7,6.8) présentent la symétrie de ces fonctions en fonction de  $S_{i-1}$  et  $T_{i-1}$  pour  $i = 2, 3, 4$  ainsi que leur décomposition selon (6.219). Le schéma récursif (par produit extérieur successif) utilisé pour construire ces fonctions de spin-isospin peut être illustré de la manière suivante,

$$\begin{array}{c}
 \square \otimes \square \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \square \square \\ \square \end{array} \right\} \otimes \square \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \square \square \\ 2 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \square \square \end{array} \right\} \otimes \square \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \square \square \square \\ 3 \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ 2 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ 3 \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \square \square \square \end{array} \right\} \quad (6.220)
 \end{array}$$

Enfin, la dimension  $d_{[\nu]}^{SU(N)}$  de la représentation irréductible de  $SU(N)$  associée à la partition  $[\nu] = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N]$  étant donnée par,

$$d_{[\nu]}^{SU(N)} = \prod_{1=i < j}^N \frac{\nu_i - \nu_j + j - i}{j - i}, \quad (6.221)$$

l'analyse dimensionnelle peut être menée à bien à l'aide de (6.220).

$S_1$	$T_1$	$SU(4)$	$SU(2) \times SU(2)$
1	1	[2]	[2] × [2]
0	0	[2]	[1 <sup>2</sup> ] × [1 <sup>2</sup> ]
1	0	[1 <sup>2</sup> ]	[2] × [1 <sup>2</sup> ]
0	1	[1 <sup>2</sup> ]	[1 <sup>2</sup> ] × [2]

TAB. 6.6 – *Fonctions de spin-isospin à symétrie adaptée pour  $i = 2$ .*

$S_2$	$T_2$	$SU(4)$	$SU(2) \times SU(2)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	[3]	[3] × [3]
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	[3]	$\frac{1}{\sqrt{2}}([21]_1 \times [21]_1 + [21]_2 \times [21]_2)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	[21] <sub>1</sub>	$\frac{1}{\sqrt{2}}([21]_1 \times [21]_1 - [21]_2 \times [21]_2)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	[21] <sub>1</sub>	[21] <sub>1</sub> × [3]
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	[21] <sub>1</sub>	[3] × [21] <sub>1</sub>
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	[21] <sub>2</sub>	$-\frac{1}{\sqrt{2}}([21]_1 \times [21]_2 + [21]_2 \times [21]_1)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	[21] <sub>2</sub>	[21] <sub>2</sub> × [3]
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	[21] <sub>2</sub>	[3] × [21] <sub>2</sub>
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	[1 <sup>3</sup> ]	$\frac{1}{\sqrt{2}}([21]_1 \times [21]_2 - [21]_2 \times [21]_1)$

TAB. 6.7 – *Fonctions de spin-isospin à symétrie adaptée pour  $i = 3$ .*

TAB. 6.8 – Fonctions de spin-isospin à symétrie adaptée pour  $i = 4$ .

$S_3$	$T_3$	$SU(4)$	$SU(2) \times SU(2)$
2	2	[4]	[4] × [4]
1	1	[4]	$\frac{1}{\sqrt{3}}([31]_1 \times [31]_1 + [31]_2 \times [31]_2 + [31]_3 \times [31]_3)$
0	0	[4]	$\frac{1}{\sqrt{2}}([22]_1 \times [22]_1 + [22]_2 \times [22]_2)$
1	2	[31] <sub>1</sub>	[31] <sub>1</sub> × [4]
2	1	[31] <sub>1</sub>	[4] × [31] <sub>1</sub>
1	1	[31] <sub>1</sub>	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2[31]_1 \times [31]_1 - [31]_2 \times [31]_2 - [31]_3 \times [31]_3)$
1	0	[31] <sub>1</sub>	$\frac{1}{\sqrt{2}}([31]_2 \times [22]_1 + [31]_3 \times [22]_2)$
0	1	[31] <sub>1</sub>	$\frac{1}{\sqrt{2}}([22]_1 \times [31]_2 + [22]_2 \times [31]_3)$
1	2	[31] <sub>2</sub>	[31] <sub>2</sub> × [4]
2	1	[31] <sub>2</sub>	[4] × [31] <sub>2</sub>
1	1	[31] <sub>2</sub>	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-[31]_1 \times [31]_2 - [31]_2 \times [31]_1 + \sqrt{2}[31]_2 \times [31]_2 - \sqrt{2}[31]_3 \times [31]_3)$
1	0	[31] <sub>2</sub>	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}[31]_1 \times [22]_1 + [31]_2 \times [22]_1 - [31]_3 \times [22]_2)$
0	1	[31] <sub>2</sub>	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}[22]_1 \times [31]_1 + [22]_1 \times [31]_2 - [22]_2 \times [31]_3)$
1	1	[211] <sub>1</sub>	$\frac{1}{\sqrt{2}}([31]_1 \times [31]_2 - [31]_2 \times [31]_1)$
1	0	[211] <sub>1</sub>	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}[31]_1 \times [22]_1 - [31]_2 \times [22]_1 + [31]_3 \times [22]_2)$
0	1	[211] <sub>1</sub>	$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}[22]_1 \times [31]_1 - [22]_1 \times [31]_2 + [22]_2 \times [31]_3)$
1	1	[211] <sub>2</sub>	$\frac{1}{\sqrt{2}}([31]_1 \times [31]_3 - [31]_3 \times [31]_1)$
1	0	[211] <sub>2</sub>	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}[31]_1 \times [22]_2 + [31]_2 \times [22]_2 + [31]_3 \times [22]_1)$
0	1	[211] <sub>2</sub>	$-\frac{1}{2}(\sqrt{2}[22]_2 \times [31]_1 + [22]_2 \times [31]_2 + [22]_1 \times [31]_3)$

TAB. 6.8 – suite ...

1	1	$[211]_3$	$\frac{1}{\sqrt{2}}([31]_2 \times [31]_3 - [31]_3 \times [31]_2)$
1	0	$[211]_3$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}([31]_1 \times [22]_2 - [31]_2 \times [22]_2)$
0	1	$[211]_3$	$\frac{1}{\sqrt{2}}([22]_2 \times [31]_1 - [22]_2 \times [31]_2)$
2	0	$[22]_1$	$[4] \times [22]_1$
0	2	$[22]_1$	$[22]_1 \times [4]$
1	1	$[22]_1$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}[31]_1 \times [31]_2 + \sqrt{2}[31]_2 \times [31]_1 + [31]_2 \times [31]_2 - [31]_3 \times [31]_3)$
0	0	$[22]_1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}([22]_1 \times [22]_1 - [22]_2 \times [22]_2)$
2	0	$[22]_2$	$[4] \times [22]_2$
0	2	$[22]_2$	$[22]_2 \times [4]$
1	1	$[22]_2$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}[31]_1 \times [31]_3 + \sqrt{2}[31]_3 \times [31]_1 - [31]_2 \times [31]_3 - [31]_3 \times [31]_2)$
0	0	$[22]_2$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}([22]_1 \times [22]_2 + [22]_2 \times [22]_1)$
0	0	$[1^4]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}([22]_1 \times [22]_2 - [22]_2 \times [22]_1)$

## 6.10 Projection des équations avec deux particules dans le continuum

Pour les besoins de la présente section, nous changeons légèrement les notations introduites en (6.19), et noterons,

$$\alpha_k \equiv \{n_k, l_k, j_k, \tau_{zk}\}. \quad (6.222)$$

Nous développons ici une technique de projection des équations de canaux couplés dans le cas où seulement deux particules peuplent les états du continuum individuel. La généralisation à un nombre plus élevé de particules dans un état de diffusion est envisageable. Nous devons néanmoins garder à l'esprit que la convergence de la présente méthode n'a pas fait l'objet de tests quantitatifs.

Nous considérons le projecteur introduit en (4.32) dans le cas où  $i = 2$ ,

$${}^2p = \hat{p}(1) \otimes \hat{p}(2). \quad (6.223)$$

Nous cherchons alors un ensemble d'états, que l'on note  $|U_i\rangle$ , orthogonaux à l'espace sur lequel projette l'opérateur (6.223),

$${}^2p|U_i\rangle \equiv 0. \quad (6.224)$$

Dans le cas présent, il existe trois types d'états satisfaisant à cette condition, à savoir,

$$|U_1\rangle = |\alpha_1 m_1(1) \otimes \varphi(2)\rangle, \quad (6.225a)$$

$$|U_2\rangle = |\varphi(1) \otimes \alpha_2 m_2(1)\rangle, \quad (6.225b)$$

$$|U_3\rangle = |\alpha_1 m_1(1) \otimes \alpha_2 m_2(1)\rangle, \quad (6.225c)$$

où  $|\alpha_i m_i\rangle$  représente un état lié, et  $|\varphi\rangle$  est un état individuel quelconque. Tout comme dans la section (2.4.4.3), la résolution des équations projetées passe par la résolution des équations inhomogènes avec comme terme source les états mentionnés plus haut. Le problème est alors que, pour les solutions du type 1 et 2, ces équations doivent être résolues pour tous les états  $|\varphi\rangle$  d'un ensemble complet dans l'espace des états individuels, ou du moins pour un nombre de ces états formant un ensemble presque complet dans la région de l'espace qui nous intéresse. Nous choisissons alors une base d'oscillateurs harmoniques pour les états  $|\varphi\rangle$ ,

$$|\varphi\rangle \equiv |u_{nl}^{ho}\rangle |Y_l^{m_l}\rangle |\chi_{m_s}\rangle |\tau_{\tau_z}\rangle, \quad (6.226)$$

où  $|u_{nl}^{ho}\rangle$  est la partie radiale de nombre de noeud  $n$ ,  $|Y_l^{m_l}\rangle$  est une harmonique sphérique d'ordre  $l$  et de projection  $m_l$ ,  $|\chi_{m_s}\rangle$  est le spineur et  $|\tau_{\tau_z}\rangle$  l'isospineur. Nous regroupons parties radiale et angulaire de l'oscillateur harmonique sous la notation suivante,

$$|u_{nl}^{ho}\rangle |Y_l^{m_l}\rangle \equiv |nlm_l\rangle. \quad (6.227)$$

Nous nous intéressons à l'état de type  $|U_1\rangle$ . L'état lié  $|\alpha_1 m_1\rangle$  peut se décomposer de la manière suivante,

$$|\alpha_1 m_1\rangle = \sum_{m_{l_1}, m_{s_1}} \langle l_1 1/2, m_{l_1} m_{s_1} | j_1 m_1 \rangle |u_{\alpha_1}\rangle |Y_{l_1}^{m_{l_1}}\rangle |\chi_{m_{s_1}}\rangle |\tau_{\tau_{z_1}}\rangle, \quad (6.228)$$

où  $|u_{\alpha_1}\rangle$  représente la partie radiale. Du fait de sa localisation dans l'espace, cette dernière partie peut facilement être développée dans une base radiale d'oscilateur harmonique (de même moment angulaire pour accélérer la convergence) car elles y forment une base complète (sur le nombre de noeuds),

$$|u_{\alpha_1}\rangle = \sum_{n_1} \langle u_{n_1 l_1}^{ho} | u_{\alpha_1} \rangle |u_{n_1 l_1}^{ho}\rangle. \quad (6.229)$$

En utilisant la notation (6.227), nous pouvons donc écrire l'état lié (6.228) sous la forme suivante,

$$|\alpha_1 m_1\rangle = \sum_{m_{l_1}, m_{s_1}, n_1} \langle l_1 1/2, m_{l_1} m_{s_1} | j_1 m_1 \rangle \langle u_{n_1 l_1}^{ho} | u_{\alpha_1} \rangle |n_1 l_1 m_{l_1}\rangle |\chi_{m_{s_1}}\rangle |\tau_{\tau_{z_1}}\rangle, \quad (6.230)$$

et enfin,

$$|U_1\rangle = \sum_{m_{l_1}, m_{s_1}, n_1} \langle l_1 1/2, m_{l_1} m_{s_1} | j_1 m_1 \rangle \langle u_{n_1 l_1}^{ho} | u_{\alpha_1} \rangle |n_1 l_1 m_{l_1}, n_2 l_2 m_{l_2}\rangle |\chi_{m_{s_1}}, \chi_{m_{s_2}}\rangle |\tau_{\tau_{z_1}}, \tau_{\tau_{z_2}}\rangle, \quad (6.231)$$

où nous oublions l'indexation des particules afin de simplifier les expressions. En recouplant de manière adéquate, puis en utilisant la transformation de Talmi-Moshinsky ...[78, 79], nous dérivons,

$$|n_1 l_1 m_{l_1}, n_2 l_2 m_{l_2}\rangle = \sum_{\substack{\theta, M \\ n'_1, l'_1 \\ n'_2, l'_2}} \langle l_1 l_2, m_{l_1} m_{l_2} | \theta M \rangle \langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2 | n_1 l_1, n_2 l_2 \rangle^\theta |n'_1 l'_1, n'_2 l'_2\rangle^{\theta, M}. \quad (6.232)$$

La figure (6.10) illustre le changement de coordonnées correspondant à cette transformation.

Nous recouplons ensuite la partie de spin à un moment total  $S$  (et de projection  $S_z$ ),

$$|\chi_{m_{s_1}}, \chi_{m_{s_2}}\rangle = \sum_{S, S_z} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, m_{s_1} m_{s_2} | S S_z \rangle |S, S_z\rangle, \quad (6.233)$$

ainsi que la partie d'isospin à un moment total  $T$  (et projection  $T_z$ ),

$$|\tau_{\tau_{z_1}}, \tau_{\tau_{z_2}}\rangle = \sum_{T, T_z} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, \tau_{\tau_{z_1}} \tau_{\tau_{z_2}} | T T_z \rangle |T, T_z\rangle. \quad (6.234)$$

Nous résumons en écrivant l'état (6.231),

$$|U_1\rangle = \sum_{\substack{m_{l_1}, m_{s_1}, n_1, \theta, M \\ n'_1, l'_1, n'_2, l'_2 \\ S, S_z, T, T_z \\ j, m}} \langle l_1 1/2, m_{l_1} m_{s_1} | j_1 m_1 \rangle \langle u_{n_1 l_1}^{ho} | u_{\alpha_1} \rangle \langle l_1 l_2, m_{l_1} m_{l_2} | \theta M \rangle \langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2 | n_1 l_1, n_2 l_2 \rangle^\theta \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, m_{s_1} m_{s_2} | S S_z \rangle \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, \tau_{\tau_{z_1}} \tau_{\tau_{z_2}} | T T_z \rangle \langle \theta S, M S_z | j m \rangle \left( |n'_1 l'_1, n'_2 l'_2\rangle^\theta \times |S\rangle \right)^{j, m} |T, T_z\rangle. \quad (6.235)$$

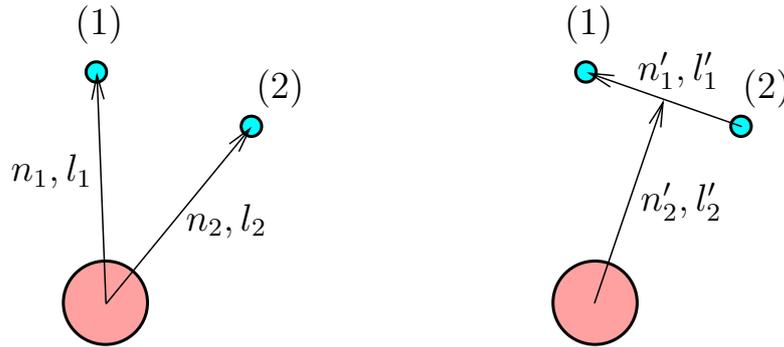


FIG. 6.1 – *A gauche, les particules (1) et (2) sont dans des états d'oscillateur harmonique spécifiés par les nombres quantiques  $n_1, l_1$  et  $n_2, l_2$  respectivement et évalués dans le référentiel cible. La transformation de Talmi-Moshinsky permet un développement analytique des états  $|n_1 l_1, n_2 l_2\rangle^\theta$ , couplant au moment angulaire total  $\theta$ , dans la base engendrée par les états  $|n'_1 l'_1, n'_2 l'_2\rangle^\theta$  où, cette fois-ci, l'oscillateur harmonique de nombres quantiques  $n'_1, l'_1$  correspond au mouvement relatif des deux particules, et celui spécifié par  $n'_2, l'_2$  correspond au mouvement du centre de masse des particules (1) et (2) par rapport à celui de la cible.*

Pour plus de clarté, nous écrivons le produit tensoriel d'états apparaissant dans (6.235) sous la forme suivante,

$$\left(|n'_1 l'_1, n'_2 l'_2\rangle^\theta \times |S\rangle\right)^{j,m} |T, T_z\rangle \equiv \left|u_{n'_1 l'_1}^{ho}, u_{n'_2 l'_2}^{ho}, \left((l'_1, l'_2)^\theta, S\right)^{j,m}, T, T_z\right\rangle, \quad (6.236)$$

où nous avons séparé parties radiale et angulaire. Nous voulons maintenant calculer explicitement la représentation de l'état  $|U_1\rangle$  dans la base,

$$|\mathcal{Y}_{\bar{e}}, r\rangle \equiv \left| \left(l, P_2^{j_p}\right)^{j,m}, r \right\rangle, \quad (6.237)$$

afin d'obtenir un terme source aux équations intégral-différentielles. Ce terme source, que l'on note  $w$ , est donc défini par,

$$\frac{1}{r} w(r) = \left\langle \left(l, P_2^{j_p}\right)^{j,m}, r | U_1 \right\rangle, \quad (6.238)$$

où  $|P_2^{j_p}\rangle$  est l'état intrinsèque du projectile (cf. section (4.2.2.4)),  $r$  est la distance relative entre les deux fragments et  $l$  est le moment angulaire cible-projectile. La construction des états du projectile a été donnée dans la section (4.2.2.4) pour le cas général. Cependant, dans le cas où le projectile n'est constitué que de deux particules, ce calcul se trivialise. Une base angulaire, de spin et d'isospin d'un système de deux fermions peut s'écrire, sous forme couplée,

$$\left| \left(L \times S\right)^{j_p, m_p}, T, T_z \right\rangle, \quad (6.239)$$

où  $L$  est le moment angulaire relatif,  $S$  le moment de spin total et  $T$  le moment d'isospin total. Cette base doit satisfaire au principe de Pauli, ce qui limite les valeurs possibles de

ces dernier nombres quantiques. Ainsi doit-t'on avoir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L pair} \Rightarrow \\ \text{L impair} \Rightarrow \end{array} \begin{array}{c|c} S & T \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline S & T \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right. \quad (6.240)$$

Nous notons les états du projectile de la manière suivante,

$$|P_2^{j_p m_p}\rangle = \sum_{(LST)_{as}} |P_{LST}^{j_p}, (LS)^{j_p m_p}, T, T_z\rangle, \quad (6.241)$$

où nous spécifions par  $(LST)_{as}$  que la sommation sur les nombres quantiques  $L$ ,  $S$  et  $T$  est limitée aux possibilités indiquées plus haut. Nous notons  $\vec{\rho}$  la coordonnée relative entre les deux nucléons. Nous avons donc,

$$\langle \vec{\rho} | P_2^{j_p m_p} \rangle = \sum_{(LST)_{as}} \frac{1}{\rho} P_{LST}^{j_p}(\rho) Y_{LST T_z}^{j_p m_p}(\Omega), \quad (6.242)$$

où  $\rho$  et  $\Omega$  sont respectivement le module et la partie angulaire de la variable  $\vec{\rho}$ . En recouplant, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} |(l, P_2^{j_p})^{j, m}, r\rangle = \\ \sum_{\substack{(LST)_{as} \\ \theta}} (-1)^{\theta+j+S} \hat{\theta} \hat{j}_p \left\{ \begin{array}{ccc} l & L & \theta \\ j & S & j_p \end{array} \right\} |P_{LST}^{j_p}, ((L, l)^\theta, S)^{j, m}, T, T_z, r\rangle. \end{aligned} \quad (6.243)$$

Enfin, le calcul du recouvrement (6.238) nécessite celui du type,

$$\begin{aligned} \langle P_{LST}^{j_p}, ((L, l)^\theta, S)^{j, m}, T, T_z, r | u_{n'_1 l'_1}^{ho}, u_{n'_2 l'_2}^{ho}, ((l'_1, l'_2)^{\theta'}, S')^{j', m'}, T', T'_z \rangle = \\ \delta_{L, l'_1} \delta_{l, l'_2} \delta_{\theta, \theta'} \delta_{S, S'} \delta_{(j, m), (j', m')} \delta_{(T, T_z), (T', T'_z)} \langle P_{LST}^{j_p}, r | u_{n'_1 L}^{ho}, u_{n'_2 l}^{ho} \rangle, \end{aligned} \quad (6.244)$$

où nous avons,

$$\langle P_{LST}^{j_p}, r | u_{n'_1 L}^{ho}, u_{n'_2 l}^{ho} \rangle = \left[ \int d\rho P_{LST}^{j_p}(\rho) u_{n'_1 L}^{ho}(\rho) \right] u_{n'_2 l}^{ho}(r). \quad (6.245)$$

## 6.11 Eléments de la matrice de couplage dans la partition de masse « 2 »

Nous nous proposons ici de dériver les éléments de matrice de l'interaction  $\mathcal{V}_{11}$  dans la base à deux fragments construite dans la section (4.2.2.5). Nous nous limiterons au cas particulier où le projectile n'est composé que de deux nucléons, car les expressions deviennent vite très complexes pour le cas général.

Selon les notations introduites dans la section (4.2.2.5), la base partielle (moment relatif cible-projectile + état du projectile) pour un projectile composé de deux nucléons est,

$$|\mathcal{Y}_{\bar{c}_2} r\rangle \equiv |(l_2, P_2^{j_P})^j, r\rangle, \quad (6.246)$$

où nous omettons le nombre quantique de projection pour alléger les notations. Nous avons, dans l'annexe (6.11), construit une telle base. En substituant, dans l'équation (6.243),  $l$  par  $l_2$ ,  $L$  par  $l_1$  et  $\theta$  par  $L_2$ , et en notant  $\vec{\rho}_2$  la coordonnée relative entre les deux nucléons du projectile, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} |(l_2, P_2^{j_P})^j, r\rangle &= \sum_{\substack{(l_1 S T)_{as} \\ L_2}} (-1)^{L_2+j+S} \hat{L}_2 \hat{j}_P \left\{ \begin{array}{ccc} l_2 & l_1 & L_2 \\ j & S & j_P \end{array} \right\} \\ &\int d\rho_2 \rho_2 P_{l_1 S T}^{j_P}(\rho_2) \left| \left[ (l_1, l_2)^{L_2}, S \right]^j, TT_z, \rho_2, r \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.247)$$

En utilisant la relation (4.181), nous pouvons passer de la représentation à deux corps (cible-projectile) à une représentation à trois corps (la cible et les deux nucléons du projectile), de la manière suivante,

$$\left| (l_1, l_2)^{L_2}, \rho_2, r \right\rangle = \sum_{K_2} F_{l_1 l_2 K_2}^\dagger(\bar{\phi}_2) \left| [K]_3^{L_2}, \bar{\rho}_3, \right\rangle, \quad (6.248)$$

où nous faisons usage des notations introduites dans la section (4.2.2.1) pour la base hyperangulaire, soit,

$$|[K]_3^{L_2}\rangle \equiv |(l_1, l_2)^{L_2}, K_2\rangle. \quad (6.249)$$

Dans (6.248), nous avons, selon (4.182),

$$\bar{\phi}_2 = \arctan\left(\frac{\alpha r}{\rho_2}\right), \quad (6.250a)$$

$$\bar{\rho}_3 = \sqrt{\rho_2^2 + (\alpha r)^2}. \quad (6.250b)$$

Rappelons alors que l'interaction entre le projectile et la cible admet la forme suivante,

$$\sum_{k \in \mathcal{C}} J \mathcal{V}_{T^{j_T}, T'^{j'_T}}(k), \quad (6.251)$$

où  $J \mathcal{V}_{T^{j_T}, T'^{j'_T}}(k)$  représente l'interaction du nucléon numéroté  $k$  avec la structure interne de la cible. La somme porte sur les particules occupant un état de diffusion. Aussi, tous les

nucléons constituant le projectile sont supposés être dans le continuum relativement à la cible. Les solutions particulières où cette condition n'est pas vérifiée sont supprimées au moyen de la technique de projection introduite dans la section (6.12). Aussi nous limitons-nous ici au calcul des éléments de matrice (4.203) sans les projecteurs, la sommation, dans (6.251), portant donc sur les nucléons constituant le projectile, que ces derniers soient dans un état de diffusion par rapport à la cible, ou non. Nous traitons ici l'interaction entre le nucléon numéroté (1) et la structure de la cible. La figure (6.2) illustre schématiquement le système de coordonnées intrinsèque correspondant à la base hyper-angulaire (6.249). Nous

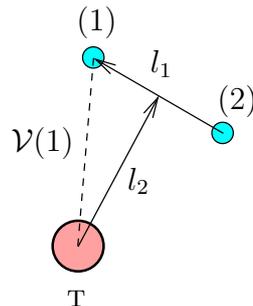


FIG. 6.2 – Illustration schématique du système de coordonnées intrinsèque correspondant à la base hyper-angulaire (6.249). Est également illustrée l'interaction entre le nucléon (1) et la structure de la cible T.

voyons donc la nécessité d'utiliser une rotation cinématique (cf. section (4.2.2.2)) afin de passer dans un système de coordonnées où l'interaction  ${}^J\mathcal{V}_{T^jT,T'^jT}(1)$  se calcul aisément. Cette transformation est un cas particulier de la transformation (4.128),

$$|[K]_3^{L_2}\rangle = \sum_{\tilde{l}_1, \tilde{l}_2} \langle [\tilde{K}_3] | [K]_3 \rangle^{L_2} |[\tilde{K}]_3^{L_2}\rangle, \quad (6.252)$$

où les coefficients  $\langle [\tilde{K}_3] | [K]_3 \rangle^{L_2}$  sont les coefficients de Raynal-Revai. La figure (6.3) illustre schématiquement le changement de coordonnées correspondant à cette transformation.

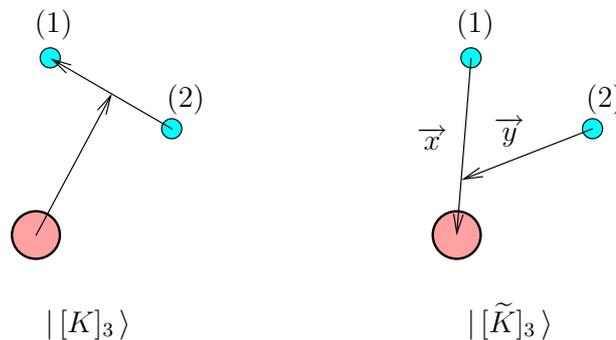


FIG. 6.3 – Illustration de la rotation cinématique (6.252) passant des coordonnées intrinsèques correspondant à la base hyper-angulaire  $|[K]_3^{L_2}\rangle$  aux coordonnées intrinsèques correspondant à la base hyper-angulaire  $|[\tilde{K}]_3^{L_2}\rangle$ . Les nouvelles coordonnées de Jacobi sont notées  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

Nos conventions de notations pour la nouvelle base hyper-angulaire sont les suivantes,

$$|[\tilde{K}]_3^{L_2}\rangle \equiv |(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)^{L_2}, K_2\rangle. \quad (6.253)$$

En recouplant de manière adéquate, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} |[\tilde{K}]_3^{L_2}, S\rangle^j &\equiv |(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)^{L_2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^S, K_2\rangle^j \\ &= \sum_{j_1, j_2} \hat{L}_2 \hat{S} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 & L_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ j_1 & j_2 & j \end{array} \right\} |(\tilde{l}_1, \frac{1}{2})^{j_1}, (\tilde{l}_2, \frac{1}{2})^{j_2}, K_2\rangle^j. \end{aligned} \quad (6.254)$$

Nous découplons ensuite la partie isospin du projectile,

$$|TT_z\rangle = \sum_{\tau_{z1}, \tau_{z2}} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \tau_{z1} \tau_{z2} | TT_z \rangle | \tau_{z1}, \tau_{z2} \rangle. \quad (6.255)$$

A l'aide des résultats précédents, nous pouvons écrire la base partielle (6.246) comme suit,

$$\begin{aligned} |(l_2, P_2^{j_p})^j, r\rangle &= \sum_{\substack{(l_1 ST)_{as} \\ L_2, K_2, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \\ j_1, j_2, \tau_{z1}, \tau_{z2}}} (-1)^{L_2+j+S} \hat{L}_2 \hat{j}_p \left\{ \begin{array}{ccc} l_2 & l_1 & L_2 \\ j & S & j_p \end{array} \right\} \\ &\hat{L}_2 \hat{S} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \left\{ \begin{array}{ccc} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 & L_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ j_1 & j_2 & j \end{array} \right\} \langle [\tilde{K}_3] | [K]_3 \rangle^{L_2} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \tau_{z1} \tau_{z2} | TT_z \rangle \\ &\int d\rho_2 \rho_2 P_{l_1 ST}^{j_p}(\rho_2) F_{l_1 l_2 K_2}^\dagger(\bar{\phi}_2) \left| \left[ (\tilde{l}_1, \frac{1}{2})^{j_1} \tau_{z1}, (\tilde{l}_2, \frac{1}{2})^{j_2} \tau_{z2} \right]^j, K_2, \bar{\rho}_3 \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.256)$$

Enfin, nous pouvons intégrer sur l'hyper-angle pour faire apparatre une dépendence en  $x$  et  $y$  qui sont les modules des nouvelles coordonnées de Jacobi  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  respectivement (cf. figure (6.3)),

$$\begin{aligned} \left| \left[ (\tilde{l}_1, \frac{1}{2})^{j_1} \tau_{z1}, (\tilde{l}_2, \frac{1}{2})^{j_2} \tau_{z2} \right]^j, K_2, \bar{\rho}_3 \right\rangle &= \\ \int d\phi \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) F_{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 K_2}(\phi) \left| (\tilde{l}_1, \frac{1}{2})^{j_1} \tau_{z1} x, (\tilde{l}_2, \frac{1}{2})^{j_2} \tau_{z2} y \right\rangle^j. \end{aligned} \quad (6.257)$$

Les variables  $x$  et  $y$  sont alors respectivement données par,

$$x = \bar{\rho}_3 \cos(\phi), \quad (6.258a)$$

$$y = \bar{\rho}_3 \sin(\phi). \quad (6.258b)$$

Nous somme maintenant en mesure de calculer les éléments de matrice suivants,

$$\langle \mathcal{Y}_{\bar{c}_2} r | |^J \mathcal{V}_{T^j T, T'^j T'}(1) | | \mathcal{Y}_{\bar{c}'_2} r' \rangle. \quad (6.259)$$

L'interaction  ${}^J\mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}'^{j'_{\mathbb{T}}}}(1)$  est une somme d'opérateurs tensoriels (cf. annexe (6.4)),

$${}^J\mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}'^{j'_{\mathbb{T}}}}(1) = \sum_{\theta} {}^J\mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}'^{j'_{\mathbb{T}}}}^{\theta}(1). \quad (6.260)$$

Le calcul des éléments de matrice (6.259) nécessite donc le calcul des éléments de matrice suivants,

$$\begin{aligned} & j \left\langle \left( \tilde{l}_1, \frac{1}{2} \right)^{j_1} \tau_{z1} x, \left( \tilde{l}_2, \frac{1}{2} \right)^{j_2} \tau_{z2} y \left\| \left\| {}^J\mathcal{V}_{\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \mathbb{T}'^{j'_{\mathbb{T}}}}^{\theta}(1) \right\| \left\| \left( \tilde{l}'_1, \frac{1}{2} \right)^{j'_1} \tau'_{z1} x', \left( \tilde{l}'_2, \frac{1}{2} \right)^{j'_2} \tau'_{z2} y' \right\rangle^{j'} \right. \\ & \quad = \delta_{(\tilde{l}_2 j_2 \tau_{z2}), (\tilde{l}'_2 j'_2 \tau'_{z2})} \hat{j} \hat{j}' (-1)^{j_1 + j'_1 + j_2 + \theta + \tilde{l}_1 + \tilde{l}'_1} \begin{Bmatrix} j & j' & \theta \\ j_1 & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \\ & \quad \quad \frac{1}{xx'} {}^J\mathcal{V}_{(\mathbb{T}^{j_{\mathbb{T}}}, \tilde{l}_1 j_1 \tau_{z1}), (\mathbb{T}'^{j'_{\mathbb{T}}}, \tilde{l}'_1 j'_1 \tau'_{z1})}^{\theta}(x, x') \frac{\delta(y - y')}{yy'}. \end{aligned} \quad (6.261)$$

Dans (6.261), la phase supplémentaire  $(-1)^{\tilde{l}_1 + \tilde{l}'_1}$  provient de l'inversion des coordonnées  $\vec{x}$  et  $\vec{x}'$ . Nous montrons sans difficultés que l'on a,

$$\frac{\delta(y - y')}{yy'} = \frac{\delta(\rho'_2 - \bar{\rho}'_2)}{\bar{\rho}'_2 \bar{\rho}_3 \sin(\phi) \sin^2(\phi')}, \quad (6.262)$$

où nous avons posé,

$$\bar{\rho}'_2 = \left[ \left( \rho_2^2 + (\alpha r)^2 \right) \frac{\sin^2(\phi)}{\sin^2(\phi')} - (\alpha r')^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.263)$$

## 6.12 Exemple de calcul de sources pour les équations inhomogènes

Selon (6.190) et (6.206a), et en utilisant les notations introduites dans la section (4.2.2.5), nous pouvons décomposer le vecteur d'état du système total projeté sur l'espace  $\mathcal{P}_j$  contenant  $j$  particules dans le continuum (et se trouvant dans la partition de masse  $i$  dans le canal entrant) de la manière suivante,

$$|\Psi_j\rangle_i^+ = \sum_{J,M,c_j,c_i} \Xi_{c_i}^{J,M}(m_{\text{T}_{A-i}}, m_{\text{P}_i}, \Omega_{q_i}) \int dr r \Psi_{c_j,c_i}^J(r) |\text{T}_{A-j}^{j\text{T}}, {}^j p \mathcal{Y}_{\bar{c}_j} r\rangle^{J,M}. \quad (6.264)$$

La représentation radiale du terme source apparaissant dans (4.59) peut alors s'écrire,

$${}^{J,M} \langle \text{T}_{A-f}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} {}^f p | H | \Psi_j \rangle_i^+ = \sum_{c_j,c_i} \Xi_{c_i}^{J,M}(m_{\text{T}_{A-i}}, m_{\text{P}_i}, \Omega_{q_i}) \int dr' r' \Psi_{c_j,c_i}^J(r') {}^{J,M} \langle \text{T}_{A-f}^{j\text{T}}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_f} {}^f p | H | \text{T}_{A-j}^{j\text{T}}, {}^j p \mathcal{Y}_{\bar{c}_j} r' \rangle^{J,M}. \quad (6.265)$$

Afin d'alléger les expressions, nous utiliserons par la suite les notations suivantes,

$$|\text{T}^{j\text{T}}\rangle \equiv |\text{T}_{A-f}^{j\text{T}}\rangle, \quad (6.266a)$$

$$|\text{T}'^{j\text{T}}\rangle \equiv |\text{T}_{A-j}^{j\text{T}}\rangle, \quad (6.266b)$$

$$\bar{c}_f \equiv \{l, \text{P}_f^j, j\}, \quad (6.266c)$$

$$\bar{c}_j \equiv \{l', \text{P}_j^{j'}, j'\}. \quad (6.266d)$$

Nous substituons ensuite l'hamiltonien intrinsèque  $H$  par l'hamiltonien défini en (2.258) auquel l'on soustrait celui du centre de masse du système total,

$$H = \mathcal{H} - \frac{P_{cm}^2}{2Am}. \quad (6.267)$$

Dans cette section, nous nous limiterons au calcul de la contribution de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  au terme source, et oublierons celle du centre de masse, qui se fait de manière analogue. En utilisant les résultats de la section (2.4.4.2), les projections de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'écrivent,

$$P_f \mathcal{H} P_j = \begin{cases} \mathcal{H}_{12} & j = f + 1 \geq 2 \\ \mathcal{H}_{01} & j = 1, f = 2 \\ \mathcal{H}_{02} & j = f + 2 \geq 2 \end{cases} \quad (6.268)$$

ainsi que les expressions conjuguées (en permutant les indices  $f$  et  $j$ ). Nous voyons donc que le calcul des termes sources apparaissant dans les équations (4.59) doit se faire au cas par cas. Aussi nous limiterons-nous ici au cas particulier où  $f = 1$  et  $j = 3$ , qui a « l'avantage » de regrouper un grand nombre de difficultés que l'on peut rencontrer dans ce type de calcul. Nous avons donc,

$$P_1 \mathcal{H} P_3 = P_1 \mathcal{H}_{02} P_3, \quad (6.269)$$

et, selon (2.266c), (2.264e) et (2.260b),

$$\mathcal{H}_{0,2} = \mathcal{V}_{0,2} = - \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ \Gamma}} \iint_{\gamma \leq \delta} d\gamma d\delta \langle \alpha, \beta || V || \gamma, \delta \rangle_{nas}^{\Gamma} \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0}. \quad (6.270)$$

Nous commençons donc par calculer les éléments de matrice du produit d'opérateurs couplés,

$$\begin{aligned} & {}^{J,M} \langle \Gamma^{j_{\Gamma}}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} p || \left[ \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} \right]^{0,0} | \Gamma^{j'_{\Gamma}}, {}^3 p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle = \\ & \frac{1}{\tilde{\Gamma}} (-1)^{j+j'+J+\Gamma} \left\{ \begin{matrix} j_{\Gamma} & j'_{\Gamma} & \Gamma \\ j' & j & J \end{matrix} \right\}^{j_{\Gamma}} \langle \Gamma || \left( a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} \right)^{\Gamma} || \Gamma' \rangle^{j'_{\Gamma}} \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} p || \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} || {}^3 p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle, \end{aligned} \quad (6.271)$$

où nous avons utilisé le fait que le produit  $(a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger})^{\Gamma}$  n'agit que sur les états liés et que le produit  $(\tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta})^{\Gamma}$  n'agit que sur les états de diffusion. Le calcul des éléments de matrice dans la base des états liés  $|\Gamma^{j_{\Gamma}}\rangle$  et  $|\Gamma^{j'_{\Gamma}}\rangle$  se fait de manière analogue à ceux mentionnés à la fin de l'annexe (6.3). Nous nous intéressons donc tout particulièrement aux éléments de matrice du produit d'opérateurs d'annihilation des états du continuum. En découplant, nous montrons facilement que l'on a (utiliser la relation entre les Wigner  $3j$  et les coefficients de Clebsch-Gordan),

$$\begin{aligned} \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} p || \left( \tilde{a}_{\gamma} \tilde{a}_{\delta} \right)^{\Gamma} || {}^3 p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle &= -\frac{1}{\tilde{j}'} (-1)^{j+j'+\Gamma} \sum_{m, M, m'} \langle j\Gamma, m - M | j' m' \rangle \\ & \sum_{m_{\gamma}, m_{\delta}} \langle j_{\gamma} j_{\delta}, m_{\gamma} m_{\delta} | \Gamma - M \rangle \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}^m p | a_{\gamma, m_{\gamma}} a_{\delta, m_{\delta}} | {}^3 p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r' \rangle. \end{aligned} \quad (6.272)$$

La base partielle de l'espace contenant 3 particules dans le continuum peut s'écrire, en utilisant (6.35) et (4.32),

$$\begin{aligned} |{}^3 p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r' \rangle &\equiv {}^3 p | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r' \rangle \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 m_1 \\ \alpha_2 m_2 \\ \alpha_3 m_3}} | \alpha_1 m_1(1), \alpha_2 m_2(2), \alpha_3 m_3(3) \rangle \langle \alpha_1 m_1(1), \alpha_2 m_2(2), \alpha_3 m_3(3) | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r' \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\substack{\alpha_1 m_1 \\ \alpha_2 m_2 \\ \alpha_3 m_3}} | \alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2, \alpha_3 m_3 \rangle \langle \alpha_1 m_1(1), \alpha_2 m_2(2), \alpha_3 m_3(3) | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r' \rangle, \end{aligned} \quad (6.273)$$

où nous utilisons la notation suivante,

$$\alpha_i \equiv \{k_i, l_i, j_i, \tau_{zi}\}. \quad (6.274)$$

Dans (6.273), nous avons utilisé la relation (4.22), sachant que le ket  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r' \rangle$  est une combinaison antisymétrique à 3 corps. En utilisant les résultats de la sections (2.2.2) sur

le formalisme de seconde quantification, nous pouvons calculer,

$$\begin{aligned}
a_{\gamma, m_\gamma} a_{\delta, m_\delta} |\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2, \alpha_3 m_3\rangle = & \\
& \left( \delta_{(\gamma m_\gamma), (\alpha_2 m_2)} \delta_{(\delta m_\delta), (\alpha_3 m_3)} - \delta_{(\delta m_\delta), (\alpha_2 m_2)} \delta_{(\gamma m_\gamma), (\alpha_3 m_3)} \right) |\alpha_1, m_1\rangle - \\
& \left( \delta_{(\gamma m_\gamma), (\alpha_1 m_1)} \delta_{(\delta m_\delta), (\alpha_3 m_3)} - \delta_{(\delta m_\delta), (\alpha_1 m_1)} \delta_{(\gamma m_\gamma), (\alpha_3 m_3)} \right) |\alpha_2, m_2\rangle + \\
& \left( \delta_{(\gamma m_\gamma), (\alpha_1 m_1)} \delta_{(\delta m_\delta), (\alpha_2 m_2)} - \delta_{(\delta m_\delta), (\alpha_1 m_1)} \delta_{(\gamma m_\gamma), (\alpha_2 m_2)} \right) |\alpha_3, m_3\rangle, \quad (6.275)
\end{aligned}$$

qui mène sans difficultés à,

$$a_{\gamma, m_\gamma} a_{\delta, m_\delta} |{}^3p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r'\rangle = \sum_{\alpha_1, m_1} |\alpha_1 m_1\rangle \langle \alpha_1 m_1, \gamma m_\gamma, \delta m_\delta | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3}^{m'} r'\rangle, \quad (6.276)$$

et enfin, permettant d'écrire (6.272) sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}
\langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} p | (\tilde{a}_\gamma \tilde{a}_\delta)^\Gamma | {}^3p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle = & \\
& - \frac{1}{\hat{j} \sqrt{6}} (-1)^{j+j'+\Gamma} \int dk_1 \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} | k_1 \bar{c}_1 \rangle \langle [k_1 \bar{c}_1, (\gamma, \delta)^\Gamma]^{j'} | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle. \quad (6.277)
\end{aligned}$$

La contribution des éléments de matrice de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  au terme source (6.265) prend alors la forme,

$$\begin{aligned}
J, M \langle \mathbb{T}^{j_\mathbb{T}}, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} p | \mathcal{H} | \mathbb{T}^{j'_\mathbb{T}}, {}^3p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle = & \\
& - \frac{1}{\hat{j}} (-1)^{j+j'_\mathbb{T}+J} \sum_{\Gamma} \frac{1}{\hat{\Gamma}} \left\{ \begin{matrix} j_\mathbb{T} & j'_\mathbb{T} & \Gamma \\ j' & j & J \end{matrix} \right\} \sum_{\alpha \leq \beta} j_\mathbb{T} \langle \mathbb{T} | (a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger)^\Gamma | \mathbb{T}' \rangle^{j'_\mathbb{T}} \\
& \sum_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}} \iiint dk_1 dk_\gamma dk_\delta \langle \alpha, \beta | V | \gamma, \delta \rangle_{nas}^\Gamma \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} | k_1 \bar{c}_1 \rangle \langle [k_1 \bar{c}_1, (\gamma, \delta)^\Gamma]^{j'} | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle, \quad (6.278)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations suivantes,

$$\hat{p} | k_1 \bar{c}_1 \rangle = | k_1 \bar{c}_1 \rangle, \quad (6.279a)$$

$${}^3p | [k_1 \bar{c}_1, (\gamma, \delta)^\Gamma]^{j'} \rangle = | [k_1 \bar{c}_1, (\gamma, \delta)^\Gamma]^{j'} \rangle. \quad (6.279b)$$

Remarquons que l'on peut écrire (toujours à l'aide de la relation (4.22)),

$$\langle [k_1 \bar{c}_1, (\gamma, \delta)^\Gamma]^{j'} | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle = \sqrt{6} \langle [k_1 \bar{c}_1(1), (\gamma(2), \delta(3))^\Gamma]^{j'} | \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle. \quad (6.280)$$

Les éléments de matrice à deux corps antisymétrisés apparaissant dans (6.278) s'écrivent,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \beta | V | \gamma, \delta \rangle_{nas}^\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{\alpha, \beta}} \sqrt{1 + \delta_{\gamma, \delta}}} \left[ \right. \\
\left. \langle \alpha(2), \beta(3) | V | \gamma(2), \delta(3) \rangle^\Gamma - (-1)^{\Gamma - j_\gamma - j_\delta} \langle \alpha(2), \beta(3) | V | \delta(2), \gamma(3) \rangle^\Gamma \right], \quad (6.281)
\end{aligned}$$

offrant donc deux contributions : une contribution directe et une contribution d'échange. Notons que l'indexation des particules est arbitraire. Nous nous intéressons dans cette section à la contribution directe seulement (la contribution d'échange se faisant de manière totalement analogue). La partie directe de (6.281) mène, dans (6.278), au calcul de la quantité suivante,

$$\langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}(1) || k_1 \bar{c}_1(1) \rangle \langle \alpha(2), \beta(3) || V || \gamma(2), \delta(3) \rangle^\Gamma = \frac{\hat{j}\hat{\Gamma}}{\hat{j}'} \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}(1), (\alpha(2), \beta(3))^\Gamma || [\mathbb{1}(14) \times V(23)]^0 || k_1 \bar{c}_1(1), (\gamma(2), \delta(3))^\Gamma \rangle^{j'}, \quad (6.282)$$

qui s'apparente à un élément de matrice à trois corps. Dans (6.278) apparaît donc le projecteur suivant,

$$\iiint dk_1 dk_\gamma dk_\delta |k_1 \bar{c}_1(1), (\gamma(2), \delta(3))^\Gamma \rangle^{j'} \langle k_1 \bar{c}_1(1), (\gamma(2), \delta(3))^\Gamma |, \quad (6.283)$$

qui n'est autre que le projecteur  ${}^3p$  limité à certains nombres quantiques angulaires de spin et d'isospin. En utilisant les résultats précédents, nous pouvons alors écrire,

$$\begin{aligned} & \iiint dk_1 dk_\gamma dk_\delta \langle \alpha(2), \beta(3) || V || \gamma(2), \delta(3) \rangle^\Gamma \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}(1) || k_1 \bar{c}_1(1) \rangle \langle [k_1 \bar{c}_1(1), (\gamma(2), \delta(3))^\Gamma]^{j'} || \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle \\ &= \frac{\hat{j}\hat{\Gamma}}{\hat{j}'} \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}(1), (\alpha(2), \beta(3))^\Gamma || [\mathbb{1}(14) \times V(23)]^0 || {}^3p \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle. \end{aligned} \quad (6.284)$$

Dans (6.264), la fonction d'onde radiale  $\Psi_{c_j, c_i}^J(r)$  est supposée avoir été calculée de manière à ce que le vecteur d'état  $|\Psi_j\rangle_i^+$  appartienne à l'espace  $\mathcal{P}_j$ . Aussi le projecteur  ${}^j p$  apparaissant dans (6.264) est-t'il redondant. Ce dernier projecteur ne nous a servi jusqu'alors qu'à scinder de manière formelle le produit d'opérateurs couplés apparaissant dans l'hamiltonien  $\mathcal{H}$ . Nous pouvons donc, à présent, supprimer ce projecteur des équations et écrire l'élément de matrice (6.278) sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\hat{j}'} (-1)^{j'+j'+J} \sum_{\Gamma} \left\{ \begin{array}{ccc} j_{\Gamma} & j'_{\Gamma} & \Gamma \\ j' & j & J \end{array} \right\} \sum_{\alpha \leq \beta} j_{\Gamma} \langle \Gamma || (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger})^{\Gamma} || \Gamma' \rangle^{j'_{\Gamma}} \\ & \langle r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}(1), (\alpha(2), \beta(3))^\Gamma || [\mathbb{1}(14) \times V(23)]^0 || \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle. \end{aligned} \quad (6.285)$$

La figure (6.4) illustre schématiquement les différents systèmes de coordonnées définissant bra et ket dans l'élément de matrice à trois corps apparaissant dans (6.285). L'indexation des particules utilisée jusqu'ici a permis une dérivation commode de l'expression (6.285). Elle n'est cependant pas appropriée pour continuer plus avant. Cette indexation étant arbitraire, nous effectuons la permutation suivante,

$$\begin{aligned} 1 & \longrightarrow 3 \\ 2 & \longrightarrow 1 \\ 3 & \longrightarrow 2 \end{aligned} \quad (6.286)$$

menant à une re-définition de la base à trois corps,

$$|\mathcal{Y}_{\bar{c}_1} r(3), (\alpha(1), \beta(2))^\Gamma \rangle^{j'} = (-1)^{j'+j+\Gamma} |(\alpha(1), \beta(2))^\Gamma, \mathcal{Y}_{\bar{c}_1} r(3) \rangle^{j'}. \quad (6.287)$$

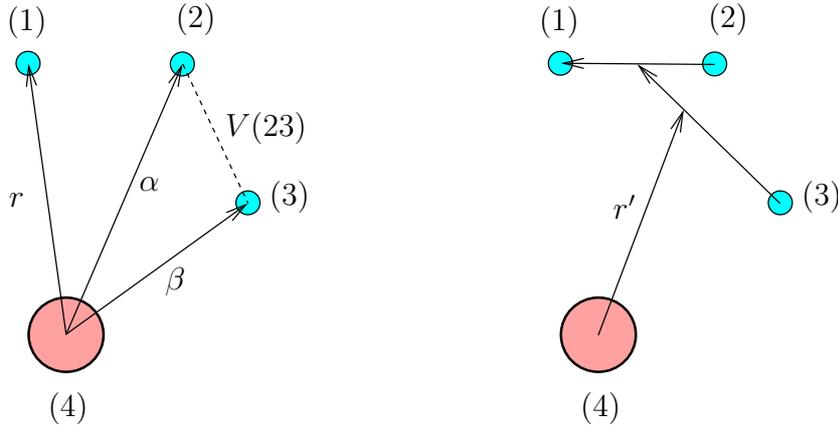


FIG. 6.4 – Illustration schématique des différents systèmes de coordonnées définissant bra et ket dans l'élément de matrice à trois corps apparaissant dans (6.285). A gauche, les états  $|\alpha\rangle$  et  $|\beta\rangle$  sont liés par rapport à la cible (considérée ici comme une particule ponctuelle numérotée 4), et la variable  $r$  représente la distance relative du nucléon numéroté 1 par rapport à la cible. Est également représentée l'interaction  $V(23)$  entre les nucléons 2 et 3. A droite est schématisé l'élément de la base partielle  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle$  où  $r'$  représente la distance relative entre le centre de masse de la cible et celui du projectile (composé des particules 1, 2 et 3).

L'élément de matrice, centre de nos préoccupations, devient alors,

$$\langle (\alpha(1), \beta(2))^\Gamma, r \mathcal{Y}_{\bar{c}_1}(3) || [V(12) \times 1(34)]^0 || \mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r' \rangle. \quad (6.288)$$

Pour calculer cet élément de matrice, nous devons projeter le ket (6.287) sur un système de coordonnées approprié. Nous commençons par factoriser la base à deux corps des particules 1 et 2 de la manière suivante (nous oublions l'indexation des particules pour plus de lisibilité),

$$|\alpha, \beta\rangle^\Gamma \equiv |u_\alpha, u_\beta\rangle \left| \left( l_\alpha, \frac{1}{2} \right)^{j_\alpha}, \left( l_\beta, \frac{1}{2} \right)^{j_\beta} \right\rangle^\Gamma |\tau_{z\alpha}, \tau_{z\beta}\rangle, \quad (6.289)$$

où nous avons séparé parties radiales, angulaires-spin et d'isospin. Les fonctions d'onde radiales liées  $|u_\alpha\rangle$  et  $|u_\beta\rangle$  peuvent être facilement développées dans une base d'oscillateur harmonique, menant à,

$$|u_\alpha, u_\beta\rangle = \sum_{n_1, n_2} \langle u_{n_1 l_\alpha}^{ho} | u_\alpha \rangle \langle u_{n_2 l_\beta}^{ho} | u_\beta \rangle |u_{n_1 l_\alpha}, u_{n_2 l_\beta}^{ho}\rangle. \quad (6.290)$$

Nous recouplons ensuite la partie angulaire et de spin,

$$\left| \left( l_\alpha, \frac{1}{2} \right)^{j_\alpha}, \left( l_\beta, \frac{1}{2} \right)^{j_\beta} \right\rangle^\Gamma = \sum_{L, S} \hat{j}_\alpha \hat{j}_\beta \hat{L} \hat{S} \left\{ \begin{array}{ccc} l_\alpha & \frac{1}{2} & j_\alpha \\ l_\beta & \frac{1}{2} & j_\beta \\ L & S & \Gamma \end{array} \right\} \left| \left( l_\alpha, l_\beta \right)^L, \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^S \right\rangle^\Gamma. \quad (6.291)$$

L'élément de la base  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}_1} r\rangle$  peut également être développée dans une base d'oscillateur harmonique,

$$|\mathcal{Y}_{\bar{c}_1} r\rangle \equiv \left| \left( l, \frac{1}{2} \right)^j r \right\rangle |\tau_z\rangle = \sum_{n_3} \frac{u_{n_3 l}^{ho}(r)}{r} |u_{n_3 l}^{ho}\rangle \left| \left( l, \frac{1}{2} \right)^j \right\rangle |\tau_z\rangle. \quad (6.292)$$

Le développement (6.292) est purement formel : La base radiale harmonique  $|u_{n_3 l}^{ho}\rangle$  étant complète, cette expression est exacte pourvu que la sommation sur  $n_3$  soit infinie. Cependant, du fait de la localisation du terme source à une région limitée de l'espace, la convergence sur  $n_3$  dans le calcul de l'élément de matrice (6.288) doit être assez rapide. Nous résumons les résultats précédents en écrivant le ket (6.287) sous la forme suivante,

$$\left| \left( \alpha(1), \beta(2) \right)^\Gamma, \mathcal{Y}_{\bar{e}_1} r(3) \right\rangle^{j'} = \sum_{\substack{n_1 n_2 n_3 \\ L \hat{S}}} \langle u_{n_1 l_\alpha}^{ho} | u_\alpha \rangle \langle u_{n_2 l_\beta}^{ho} | u_\beta \rangle \hat{j}_\alpha \hat{j}_\beta \hat{L} \hat{S} \begin{Bmatrix} l_\alpha & \frac{1}{2} & j_\alpha \\ l_\beta & \frac{1}{2} & j_\beta \\ L & \hat{S} & \Gamma \end{Bmatrix} \\ \frac{u_{n_3 l}^{ho}(r)}{r} \left| \left[ \left( n_1 l_\alpha, n_2 l_\beta \right)^L, \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S_1 \Gamma} \right]^\Gamma, n_3 \left( l, \frac{1}{2} \right)^j \right\rangle^{j'} | \tau_{z\alpha}, \tau_{z\beta}, \tau_z \rangle, \quad (6.293)$$

où nous utilisons la notation simplifiée,

$$|n, l\rangle \equiv |u_{nl}^{ho}\rangle |Y_l\rangle, \quad (6.294)$$

avec  $|Y_l\rangle$  une simple harmonique sphérique d'ordre  $l$ . Un dernier recouplage des parties angulaires et de spin nous permet d'écrire,

$$\left| \left[ \left( l_\alpha, l_\beta \right)^L, \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S_1 \Gamma} \right]^\Gamma, \left( l, \frac{1}{2} \right)^j \right\rangle^{j'} = \\ \sum_{L_3, S_2} \hat{\Gamma} \hat{j} \hat{L}_3 \hat{S}_2 \begin{Bmatrix} L & S & \Gamma \\ l & \frac{1}{2} & j \\ L_3 & S_2 & j' \end{Bmatrix} \left| \left[ \left( l_\alpha, l_\beta \right)^L, l \right]^{L_3}, \left[ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^S, \frac{1}{2} \right]^{S_2} \right\rangle^{j'}. \quad (6.295)$$

Les états des particules 1, 2 et 3 sont maintenant développés dans une base d'oscillateurs harmoniques évalués dans le référentiel cible. En effectuant successivement deux transformations de Moshinsky (cf. annexe (6.11)), ainsi que des recouplages adéquats, nous dérivons,

$$\left| \left( n_1 l_\alpha, n_2 l_\beta \right)^L, n_3 l \right\rangle^{L_3} = \\ \sum_{n'_1 l_1, n'_2 l_2, n'_3 l_3, L_2} \left\langle n'_1 l_1, \left( n'_2 l_2, n'_3 l_3 \right)^{L_2} \left| \left( n_1 l_\alpha, n_2 l_\beta \right)^L, n_3 l \right\rangle^{L_3} \left| n'_1 l_1, \left( n'_2 l_2, n'_3 l_3 \right)^{L_2} \right\rangle^{L_3}, \quad (6.296)$$

où nous avons défini,

$$\left\langle n'_1 l_1, \left( n'_2 l_2, n'_3 l_3 \right)^{L_2} \left| \left( n_1 l_\alpha, n_2 l_\beta \right)^L, n_3 l \right\rangle^{L_3} = \sum_{n''_2, l''_2} \langle n'_1 l_1, n''_2 l''_2 | n_1 l_\alpha, n_2 l_\beta \rangle^L \\ (-1)^{l_1 + l''_2 + L_3 + l} \hat{L} \hat{L}_2 \begin{Bmatrix} l_1 & l''_2 & L \\ l & L_3 & L_2 \end{Bmatrix} \langle n'_2 l_2, n'_3 l_3 | n''_2 l''_2, n_3 l \rangle^L. \quad (6.297)$$

La figure (6.5) illustre ces deux transformations successives.

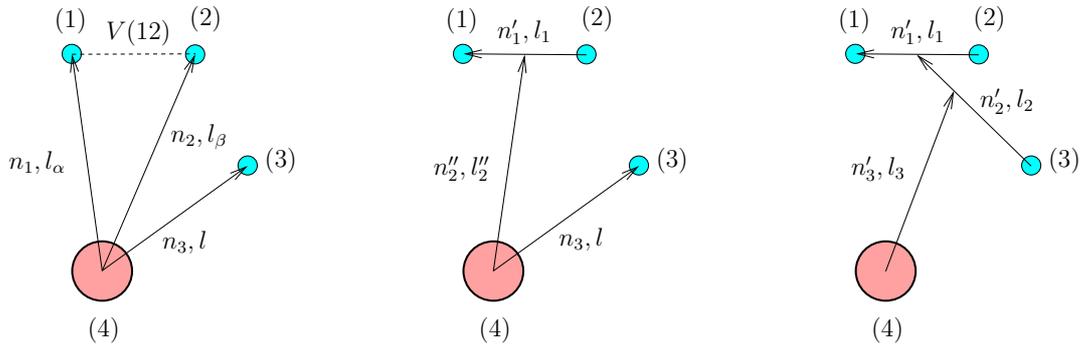


FIG. 6.5 – De gauche à droite : illustration des deux transformations successives de Mo-shinsky (cf. equ. (6.296)).

Enfin, nous passons en représentation coordonnée,

$$\left| n'_1 l_1, \left( n'_2 l_2, n'_3 l_3 \right)^{L_2} \right\rangle^{L_3} = \iiint dx_1 dx_2 dx_3 x_1 x_2 x_3 u_{n'_1 l_1}^{ho}(x_1) u_{n'_2 l_2}^{ho}(x_2) u_{n'_3 l_3}^{ho}(x_3) \left| x_1 l_1, \left( x_2 l_2, x_3 l_3 \right)^{L_2} \right\rangle^{L_3}, \quad (6.298)$$

où les variables radiales sont illustrées sur la figure (6.6). Nous nous intéressons maintenant

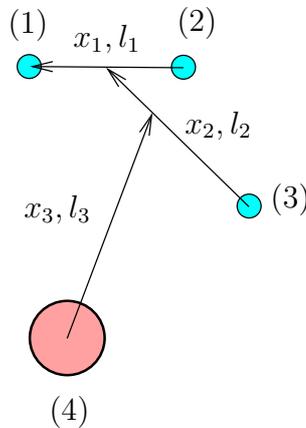


FIG. 6.6 – Illustration de la représentation coordonnée (6.298).

au ket  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle$ . D'après (6.183), cet élément peut s'écrire comme une superposition d'états du type,

$$\left| \left( [K]_4^{L_3}, [S]^{S_2} \right)^{j'}, [T]^{T_2, T_{z^2}}, \bar{\rho}_4 \right\rangle. \quad (6.299)$$

Nous rappelons alors les conventions de notations introduites dans le section (4.2.2.1) en ce qui concerne la base d'harmoniques hypersphériques,

$$|[K]_4^{L_3}\rangle \equiv \left| \left[ \left( l_1, l_2 \right)^{L_2}, l_3 \right]^{L_3}, K_2, K_3 \right\rangle. \quad (6.300)$$

En recouplant et en intégrant sur les deux hyper-angles, nous pouvons écrire l'élément  $|\mathcal{Y}_{\bar{c}_3} r'\rangle$  comme superposition des états suivants,

$$\left| \left[ l_1, \left( l_2, l_3 \right)^{L_2} \right]^{L_3}, K_2, K_3 \right\rangle = \iint d\phi_2 d\phi_3 \cos^2 \phi_2 \sin^2 \phi_2 \cos^5 \phi_3 \sin^2 \phi_3 \\ F_{l_1 l_2 K_2}(\phi_2) F_{K_2 l_3 K_3}(\phi_3) \left| x_1 l_1, \left( x_2 l_2, x_3 l_3 \right)^{L_2} \right\rangle^{L_3}, \quad (6.301)$$

où les fonctions  $F_{K_{i-1} l_i K_i}$  ont été définies en (6.80), et où,

$$x_1 = \bar{\rho}_4 \cos \phi_3 \cos \phi_2, \quad (6.302a)$$

$$x_2 = \bar{\rho}_4 \cos \phi_3 \sin \phi_2, \quad (6.302b)$$

$$x_3 = \bar{\rho}_4 \sin \phi_3. \quad (6.302c)$$

Ainsi le calcul de l'élément de matrice (6.288) implique celui des éléments de matrice du type,

$$\left\langle \left[ \left( x_1 l_1, \left( x_2 l_2, x_3 l_3 \right)^{L_2} \right)^{L_3}, \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S_1}, \frac{1}{2} \right)^{S_2} \right]^{j'} \right\rangle \left| \left( \tau_{z\alpha}, \tau_{z\beta}, \tau_z \right) \right\rangle \left\| V(12) \right\| \left\| \left[ \left( x'_1 l'_1, \left( x'_2 l'_2, x'_3 l'_3 \right)^{L'_2} \right)^{L'_3}, \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S'_1}, \frac{1}{2} \right)^{S'_2} \right]^{j'} \right\rangle \left| \left( \tau'_{z\alpha}, \tau'_{z\beta}, \tau'_z \right) \right\rangle. \quad (6.303)$$

En supposant que l'interaction nucléon-nucléon  $V(12)$  puisse se décomposer de la manière suivante,

$$V(12) = \left( A^{(\theta)} \cdot B^{(\theta)} \right) I = (-1)^\theta \hat{\theta} \left[ A^\theta \times B^\theta \right]^{0,0} I, \quad (6.304)$$

où  $A^\theta$  est un opérateur tensoriel d'ordre  $\theta$  n'agissant que sur les parties radiale et angulaire,  $B^\theta$  est un opérateur de spin d'ordre  $\theta$  et  $I$  n'agit que sur la partie isospin, l'élément de matrice (6.303) peut se décomposer de la manière suivante,

$$(-1)^{S_2+L'_3+j'} \hat{j}' \left\{ \begin{array}{ccc} L_3 & L'_3 & S'_2 \\ S_2 & \theta & j' \end{array} \right\} \\ L_3 \left\langle x_1 l_1, \left( x_2 l_2, x_3 l_3 \right)^{L_2} \right\rangle \left\| A^\theta \right\| \left| x'_1 l'_1, \left( x'_2 l'_2, x'_3 l'_3 \right)^{L'_2} \right\rangle^{L'_3} \\ S_2 \left\langle \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S_1}, \frac{1}{2} \right\rangle \left\| B^\theta \right\| \left\langle \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S'_1}, \frac{1}{2} \right\rangle^{S'_2} \\ \left\langle \tau_{z\alpha}, \tau_{z\beta}, \tau_z \right\rangle \left| \left( \tau'_{z\alpha}, \tau'_{z\beta}, \tau'_z \right) \right\rangle. \quad (6.305)$$

Dans cette dernière expression, nous pouvons simplifier,

$$L_3 \left\langle x_1 l_1, \left( x_2 l_2, x_3 l_3 \right)^{L_2} \right\rangle \left\| A^\theta \right\| \left| x'_1 l'_1, \left( x'_2 l'_2, x'_3 l'_3 \right)^{L'_2} \right\rangle^{L'_3} = \\ \delta_{L_3, L'_3} \hat{L}_3 (-1)^{L_2+l'_1+L_3+\theta} \left\{ \begin{array}{ccc} l_1 & l'_1 & \theta \\ L_2 & L_2 & L_3 \end{array} \right\} \\ \delta_{(l_2, l_3, L_2), (l'_2, l'_3, L'_2)} \frac{\delta(x_1 - x'_1)}{x_1 x'_1} \frac{\delta(x_2 - x'_2)}{x_2 x'_2} \frac{\delta(x_3 - x'_3)}{x_3 x'_3} A_{l_1, l'_1}^\theta(x_1), \quad (6.306)$$

ainsi que,

$$s_2 \left\langle \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S_1}, \frac{1}{2} \middle| B^\theta \middle| \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{S'_1}, \frac{1}{2} \right\rangle^{S'_2} = (-1)^{S'_1 + S_2 + \theta + 1/2} \delta_{S_2, S'_2} \hat{S}_2 \left\{ \begin{array}{ccc} S_1 & S'_1 & \theta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_2 \end{array} \right\} B_{S_1, S'_1}^\theta. \quad (6.307)$$

Quant à la partie isospin, c'est en général la plus triviale à calculer.

# Bibliographie

- [1] R.D. Lawson, *Theory of the nuclear shell model*, Clarendon Press, Oxford (1980).
- [2] Kris L.G. Heyde, *The Nuclear Shell Model*, Springer-Verlag (1994).
- [3] P.J. Brussaard, P. W. M. Glaudemans, *Shell model applications in nuclear spectroscopy*, North-Holland (1977).
- [4] E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, A.P. Zuker, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 427.
- [5] B.A. Brown, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **47** (2001) 517.
- [6] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, K. Bennaceur, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 042502. ;  
N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, J. Okołowicz, *Phys. Rev. C* **67** (2003) 054311 ;
- [7] R. Id Betan, R.J. Liotta, N. Sandulescu, T. Vertse, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 042501 ;  
R. Id Betan, R.J. Liotta, N. Sandulescu, T. Vertse, *Phys. Rev. C* **67** (2003) 014322.
- [8] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, *Phys. Rev. C* **70** (2004) 064313 ;  
N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, J. Rotureau, *Rev. Mex. Fis.* **50** Suppl. 2 (2004) 74.
- [9] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **31** (2005) S1321.
- [10] R. Id Betan, R.J. Liotta, N. Sandulescu, T. Vertse, *Phys. Lett. B* **584** (2004) 48.
- [11] N. Michel, W. Nazarewicz, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, *Nucl. Phys. A* **752** (2005) 335c.
- [12] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, J. Rotureau, *Phys. Rev. C* **74** (2006) 054305.
- [13] G. Hagen, M. Hjorth-Jensen, J.S. Vaagen, *Phys. Rev. C* **71** (2005) 044314.
- [14] G. Hagen, M. Hjorth-Jensen, N. Michel, *Phys. Rev. C* **73** (2006) 064307.
- [15] G.A. Gamow, *Zs. f. Phys.*, **51** (1928) 204.
- [16] T. Berggren, *Nucl. Phys. A* **109** (1968) 265 ;  
T. Berggren, P. Lind, *Phys. Rev. C* **47** (1993) 768 ;  
P. Lind, *Phys. Rev. C* **47** (1993) 1903.
- [17] H. Feshbach, *Ann. Phys. (N.Y.)* **5** (1958) 357 ; **19** (1962) 287 ;  
U. Fano, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.
- [18] C. Mahaux, H. Weidenmüller, *Shell Model Approaches to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969).
- [19] H. W. Bartz, I. Rotter, J. Höhn, *Nucl. Phys. A* **275** (1977) 111 ; **307** (1977) 285.
- [20] I. Rotter, *Rep. Prog. Phys.* **54** (1991) 635.

- [21] K. Bennaceur, F. Nowacki, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **24** (1998) 1631.
- [22] K. Bennaceur, F. Nowacki, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. A **651** (1999) 289.
- [23] K. Bennaceur, F. Nowacki, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. A **671** (2000) 203.
- [24] J. Okołowicz, M. Płoszajczak, I. Rotter, Phys. Rep. **374** (2003) 271.
- [25] R. Chatterjee, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. A **764** (2006) 528.
- [26] R. Shyam, K. Bennaceur, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. A **669** (2000) 65.
- [27] N. Michel, J. Okołowicz, F. Nowacki, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. A **703** (2002) 202.
- [28] J. Rotureau, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Acta Physica Polonica **35** (2004) 1283 ;  
J. Rotureau, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 042503 ;  
J. Rotureau, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. A **767** (2006) 13.
- [29] A. deShalit, H. Feshbach, 'Theoretical Nuclear Physics', Vol. 1 : *Nuclear Structure*.
- [30] M. Bender, K. Rutz, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, Eur. Phys. J. A **7** (1999) 467.
- [31] A.R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*, Princeton University Press (1960).
- [32] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*, Springer-Verlag (1983).
- [33] R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Springer-Verlag, 2nd ed.
- [34] G. R. Satchler, *Direct Nuclear Reactions*, Oxford University Press (1983).
- [35] M.C. Birse, E.F. Redish, Nucl. Phys. A **406** (1983) 149.
- [36] S. R. Cotanch, C. M. Vincent Phys. Rev. C **14** (1976) 1739.
- [37] R.O. Barrachina, J.H. Macek, J. Math. Phys. **30** (1989) 2581.
- [38] J. D. Dollard, J. Math. Phys. **5** (1964) 729.
- [39] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications (1972).
- [40] C.J. Joachin, *Quantum Collision Theory*, North-Holland Publishing Company.
- [41] V.I. Kukulin, V.M. Krasnopol'sky, J. Horacek, *Theory of Resonances*, Kluwer Academic Publishers (1986).
- [42] R. G. Newton, J. Math. Phys. **1** (1960) 319.
- [43] B. Mulligan, L. G. Arnold, B. Bagchi, T. O. Krause, Phys. Rev. C **13** (1976) 2131.
- [44] L. Fonda, R.G. Newton, Il Nuovo Cimento **14** (1959) 1027.
- [45] B. Bagchi, T. O. Krause, B. Mulligan, Phys. Rev. C **15** (1977) 1623.
- [46] B. Bagchi, B. Mulligan, S. B. Quadri, Phys. Rev. C **20** (1979) 1251.
- [47] B. Mulligan, Phys. Rev. C **24** (1981).
- [48] B. Bagchi, B. Mulligan, S. B. Qadri, Phys. Rev. C **20** (1979) 1251.
- [49] W. L. Wang, C. M. Shakin, Phys. Lett. B **32** (1970) 421.
- [50] S. Yoshida, S. Adashi, Z. Phys. A **325** (1986) 441.
- [51] D.M. Brink, E. Boeker, Nucl. Phys. A **91** (1967) 1-26.
- [52] A.R. Bautista, G.Co', A.M. Lallena, Il Nuovo Cimento A **112** (1999) 1117.
- [53] A.P. Zuker, B. Buck, J.B. Mc Grory, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 39.
- [54] R.A. Blue, W. Haeberli, Phys. Rev. B **137** (1965) 284.

- [55] I. J. Thompson, *Comp. Phys. Rep.* **7** (1988) 167.
- [56] M.C. Birse, *Phys. Rev. C* **28** (1983) 2204.
- [57] J. L. Ballot, M. Fabre De La Rippelle, *Ann. Phys.* **127** (1980) 62.
- [58] J. Raynal, J. Ravai, *Il Nuovo Cimento A* **39**, (1970) 612.
- [59] R.I. Jibuti, N.B. Krupennikova, N.I. Shubitidze, *Theor. Math. Phys.* **32**, (1977) 704.
- [60] A. Novoselsky, J. Katriel, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 833.
- [61] J.Q. Chen, J. Ping, F. Wang, *Group Representation Theory for Physicists*, World Scientific (2002), 2<sup>nd</sup> edition.
- [62] M. Hamermesh, *Group Theory and its application to physical problems*, Addison-Wesley Publishing Company (1964) 2<sup>nd</sup> printing.
- [63] Md.A. Khan, S.K. Dutta, T.K. Das, *FIZIKA B (Zagreb)* **8** (1999) 469.
- [64] G.A. Parker, M. Keil, M.A. Morrison, *J. of Chem. Phys.* **113** (2000) 957.
- [65] D.C. Zheng, B.R. Barrett, L. Jaqua, J.P. Vary, R.L. McCarthy, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 1083; D.C. Zheng, J.P. Vary, B.R. Barrett, *Phys. Rev. C* **50** (1994) 1994; D.C. Zheng, B.R. Barrett, J.P. Vary, W.C. Haxton, C.L. Song, *Phys. Rev. C* **52** (1995) 2488.
- [66] P. Navrátil, B.R. Barrett, *Phys. Rev. C* **54** (1996) 2986; *Phys. Rev. C* **57** (1998) 3119.
- [67] P. Navrátil, B.R. Barrett, *Phys. Rev. C* **57** (1998) 562.
- [68] P. Navrátil, J.P. Vary, B.R. Barrett, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 57258; *Phys. Rev. C* **62** (2000) 054311.
- [69] K. Suzuki, S.Y. Lee, *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980) 2091; K. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **68** (1983) 246.
- [70] K. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 246; K. Suzuki, R. Okamoto, *Prog. Theor. Phys.* **70** (1983) 439.
- [71] R.B. Wiringa, V.G. J. Stoks, R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51** (1995) 38.
- [72] D. Vautherin, M. Vénéroni, *Phys. Lett. B* **25** (1967) 175.
- [73] K.A. Brueckner, J.L. Gammel, H. Weitzner, *Phys. Rev.* **110** (1958) 431
- [74] K.S. Masterson Jr., 'Methods in Computational Physics', Vol. 6 : *Numerical Methods for the Many-Body Theory of Finite Nuclei*.
- [75] W.H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (1991).
- [76] Igal Talmi, 'Contemporary Concepts in Physics', Vol. 7 : *Simple Models of Complex Nuclei*, Harwood Academic Publishers.
- [77] Fl. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, Clarendon Press (1996).
- [78] M. Moshinsky, *Nucl. Phys.* **13** (1959) 104.
- [79] L. Trlifaj, *Phys. Rev. C* **5** (1972) 1534.
- [80] J. Dobaczewski, N. Michel, W. Nazarewicz, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, J. Rotureau, arXiv :nucl-th/0701047, *Progr. in Part. and Nucl. Phys.* (2007).
- [81] K. Ikeda, N. Takigawa, H. Horiuchi, *Progr. Theor. Phys. Suppl. Extra Number* (1968) 467.

**Résumé :**

L'unification entre structure et réaction a toujours été un grand défi de la physique nucléaire. L'extrême complexité rencontrée dans la description des systèmes quantiques finis a en effet mené la théorie nucléaire à dissocier ces deux approches. Une voie possible pour les réconcilier est le modèle en couches avec couplage aux états du continuum. Jusqu'alors, les applications numériques reposant sur ce modèle utilisaient un puit de potentiel local pour générer la base individuelle et une interaction résiduelle schématisée de portée nulle pour les couplages au continuum. Nous avons développé le formalisme du modèle en couches avec couplage aux états du continuum avec une interaction nucléon-nucléon de portée finie. Nous avons ensuite généralisé le formalisme de manière à prendre en compte un nombre arbitraire de particules dans un état de diffusion. Le grand avantage de cette approche réside dans le fait que la même interaction est utilisée pour la construction de la base individuelle et pour le couplage aux états du continuum. Nous avons donc posé les bases nécessaires à un calcul *ab initio*, le but étant de dériver le champ moyen, les mélanges de configurations et le couplage aux états du continuum à partir de la seule interaction nucléon-nucléon dans le vide. Nous avons effectué une première application réaliste en calculant les spectres de  $^{17}F$  et  $^{17}O$ , et les déphasages de diffusion élastique  $^{16}O(p,p)^{16}O$ .

**Mots clés :** structure nucléaire, réactions nucléaires, modèle en couches (physique nucléaire), méthode Hartree-Fock, décroissance radioactive, isotopes du fluor.

**Use of a finite range nucleon-nucleon interaction in the continuum shell model.****Abstract :**

The unification of nuclear structure and nuclear reactions was always a great challenge of nuclear physics. The extreme complexity of finite quantum systems lead in the past to a separate development of the nuclear structure and the nuclear reactions. A unified description of structure and reactions is possible within the continuum shell model. All previous applications of this model used the zero-range residual interaction and the finite depth local potential to generate the single-particle basis. In the thesis, we have presented an extension of the continuum shell model for finite-range nucleon-nucleon interaction and an arbitrary number of nucleons in the scattering continuum. The great advantage of the present formulation is the same two-body interaction used both to generate the single-particle basis and to describe couplings to the continuum states. This formulation opens a possibility for an *ab initio* continuum shell model studies with the same nucleon-nucleon interaction generating the nuclear mean field, the configuration mixing and the coupling to the scattering continuum. First realistic applications of the above model has been shown for spectra of  $^{17}F$  and  $^{17}O$ , and elastic phase-shifts in the reaction  $^{16}O(p,p)^{16}O$ .

**Keywords :** nuclear structure, nuclear reactions, shell model (nuclear physics), Hartree-Fock method, radioactive decay, fluorine isotopes.

**Discipline :** Constituants élémentaires

Grand Accélérateur National d'Ions Lourds (GANIL), CEA/DSM-CNRS/IN2P3,  
Bvd Henri Becquerel, BP 55027, F-14076 CAEN, Cedex 5, France