



Quelques propriétés des représentations de la super-algèbre de Lie $gl(m,n)$

Francois Drouot

► To cite this version:

Francois Drouot. Quelques propriétés des représentations de la super-algèbre de Lie $gl(m,n)$. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2008. Français. NNT : 2008NAN10069 . tel-00371432

HAL Id: tel-00371432

<https://theses.hal.science/tel-00371432>

Submitted on 27 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

François DROUOT

**Quelques propriétés des représentations de la
super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$**

Thèse soutenue publiquement le 4 décembre 2008

Composition du jury

Directeur de Thèse :	Caroline GRUSON	Professeur, UHP-Nancy I
Rapporteurs :	Bernhard KELLER	Professeur, Paris 7
	Peter LITTELMANN	Professeur, Cologne
	Vera SERGANOVA	Professeur, Berkeley
Examineurs :	Michel DUFLO	Professeur émérite, Paris 7
	Guy ROUSSEAU	Professeur, UHP-Nancy I (président)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Caroline GRUSON, qui m'a accompagné et m'a appris de "jolies mathématiques" depuis ma maîtrise. J'ai beaucoup apprécié la liberté que j'avais pour mener ce travail, sa grande disponibilité aux moments où j'en avais le plus besoin, ainsi que toutes les discussions que nous avons eues (qu'elles soient mathématiques ou pas).

Bernhard KELLER, Peter LITTELMANN et Vera SERGANOVA m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse, je leur adresse mes remerciements pour ce travail. Leurs lectures minutieuses et leurs commentaires ont grandement amélioré ce mémoire. Peter LITTELMANN m'a aussi accueilli pendant cinq mois à Cologne, il a beaucoup contribué à la réalisation du chapitre trois, qui a été réalisé en grande partie dans cette ville accueillante. J'ai pu profiter de la grande connaissance (et intuition) de Vera SERGANOVA de la théorie des représentations des super-algèbres de Lie, que ce soit pendant une de ses visites à Nancy que par mël, ce qui a grandement contribué à ce mémoire.

C'est avec joie que je compte Michel DUFLO et Guy ROUSSEAU parmi les membres de mon jury.

J'aimerais remercier l'ensemble des membres de l'Institut Elie Cartan, ainsi que son personnel administratif et technique, pour les conditions de travail dont on dispose. La liste des gens à remercier est grande, que ce soit les membres de l'équipe "Groupe de Lie et analyse harmonique" (en particulier Stéphane Gaussent et Nicole Bardy qui composent, en plus de Caroline et Guy, le "groupe de travail algébrique"), les autres doctorants (en particulier Pierre, Benoît, Lucas, Joseph, etc.), les volleyeurs du Lundi (Vincent, Julien, Oussama, etc.), ceux du midi (Régine, Olivier, etc.), ceux dont j'ai profité des connaissances mathématiques (en particulier Alain Genestier, Lionel Berard-Bergery et Séverine Leidwanger), et mes co-bureaux successifs (Lars, Julien et Bruno).

J'ai eu plusieurs fois l'occasion de discuter avec Laurent GRUSON, son esprit clair et son intérêt pour mon travail m'ont beaucoup apporté.

Mon amitié va aussi au laboratoire de mathématique de Cologne, pour l'accueil lors de mon séjour, je tiens particulièrement à remercier Stephen Koenig et Stéphanie Cupit-Foutou.

Pour finir, j'aimerais remercier l'ensemble de mes amis, ainsi que ma famille et mes parents pour m'avoir soutenu dans mes choix.

Table des matières

Introduction	vii
1 Contexte et notations	1
1.1 Construction de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$	2
1.2 Représentations de $\mathfrak{g}$	3
1.3 Supertrace et forme de Killing	3
1.4 Système de racines	4
1.5 Algèbre enveloppante	7
1.6 Construction de représentations à plus haut poids	8
1.7 Caractère infinitésimal	9
1.8 Caractères des représentations	10
1.9 Typicité	11
1.10 Catégorie $\mathcal{F}$	12
2 Décomposition en $\mathfrak{g}_0$-modules simples	15
Introduction	16
2.1 Suite de composition des modules de Kac	17
2.2 Quelques lemmes préliminaires pour $\mathfrak{gl}(m, n)$	20
2.3 Décomposition des modules de Kac	22
2.4 Décomposition des modules simples	24
3 Cristaux dans $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$	31
Introduction	32
3.1 Groupe quantique $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$	33
3.1.1 Définition du groupe quantique	33
3.1.2 Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$	35
3.1.3 Catégories de modules	36
3.2 Cristaux dans $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$	39
3.2.1 Opérateurs modifiés	39
3.2.2 Réseau et base cristalline	40
3.2.3 Cristaux de représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$	44
3.2.4 Produit tensoriel	45
3.3 Résultats sur les cristaux dans $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$	49

3.3.1	Connexité de la base cristalline	49
3.3.2	Base cristalline et filtration par socle	51
3.3.3	Le cas $U_q(\mathfrak{gl}(2, 2))$	54
4	Bloc maximalement atypique de $\mathcal{F}(\mathfrak{gl}(2, 2))$	61
	Introduction	62
4.1	Les modules projectifs indécomposables	62
4.2	Construction de certains modules indécomposables	67
4.3	Morphismes entre les modules projectifs indécomposables	69
4.3.1	Dimension des espaces de morphismes	69
4.3.2	Anneau des endomorphismes d'un module projectif indécomposable	69
4.4	Une conjecture	70
	Bibliographie	77

Introduction

Le but de ce travail est l'étude de certaines propriétés de la catégorie des représentations de dimension finie de la super algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Notons $\mathcal{F}$ la catégorie des modules de dimension finie sur une super algèbre de Lie sur lesquels une sous-algèbre de Cartan agit de manière diagonalisable, contrairement à ce qui se passe dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, cette catégorie n'est pas semi-simple. La question de trouver le caractère des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{gl}(m, n)$ est longtemps restée ouverte. En 1996 ([Ser96]), Vera Serganova a donné une solution à ce problème. En 2003, Brundan ([Bru03]) a également apporté une réponse, par des méthodes totalement différentes, en utilisant le groupe quantique associé à $\mathfrak{gl}_\infty$.

Pour certaines super algèbres de petit rang, la catégorie $\mathcal{F}$ est bien comprise : c'est le cas de $\mathfrak{sl}(1, 2)$ (Germoni, [Ger97]) et de $\mathfrak{osp}(3, 2)$ (Gruson, [Gru03]).

Les chapitres 2 et 4 de cette thèse sont consacrés à la catégorie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{gl}(2, 2)$.

Les formules de caractères de Serganova et de Brundan sont écrites comme des sommes infinies, dont on sait a priori qu'elles sont finies. Pour avoir une formule des caractères de longueur finie, et donc plus propice aux calculs, on décompose les $\mathfrak{gl}(2, 2)$ -modules simples de dimension finie en $\mathfrak{gl}(2) \times \mathfrak{gl}(2)$ -modules simples (théorème 2.4.1). Pour ce faire, on regarde d'abord ces décompositions pour une classe de modules indécomposables (dont les modules simples sont des quotients) appelés les modules de Kac (proposition 2.3.2).

Pour connaître $\mathcal{F}$, on veut comprendre qui sont ses modules projectifs indécomposables : les suites de composition de Loewy de ces modules sont données dans la proposition 4.1.7. De plus, on veut connaître les morphismes entre ces modules projectifs et leur composition d'après [Gab62], chap. I, prop. 14, la connaissance de la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ formée des objets projectifs permet de reconstituer $\mathcal{F}$. Toutefois, on ne connaît pas entièrement la composition des morphismes, qui fait l'objet d'une conjecture en fin de chapitre.

Benkart, Kang et Kashiwara, en 2000 [BKK00], ont introduit le groupe

quantique associé à $\mathfrak{gl}(m, n)$ et construit des bases cristallines pour une catégorie de modules, dont les simples sont des facteurs directs de puissances tensorielles de la représentation standard.

Dans le chapitre 3, on construit des bases cristallines pour un ensemble plus large de représentations.

Les chapitres 2,3 et 4 disposent chacun d'une introduction détaillée.

Chapitre 1

Contexte et notations

1.1 Construction de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$

Dans l'ensemble de ce travail, le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, sauf mention explicite du contraire. Soient m et n deux entiers strictement positifs, on définit la super-algèbre de Lie (sur $\mathbb{C}$) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$: on considère l'ensemble des matrices $(m+n) \times (m+n)$ de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right), \text{ où } A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}), D \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$$

muni de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation suivante :

$$\mathfrak{g}_{\underline{0}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right), A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}), D \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{\underline{1}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right), B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \right\}.$$

On définit alors un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ pour tous éléments homogènes u et v (c'est-à-dire u est dans $\mathfrak{g}_{p(u)}$ et v dans $\mathfrak{g}_{p(v)}$) par

$$[u, v] := uv - (-1)^{p(u)p(v)}vu,$$

que l'on prolonge par bilinéarité. Ce crochet est super-anti-symétrique et vérifie la version $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduée de l'identité de Jacobi (c'est-à-dire pour tout u, v, w homogène dans $\mathfrak{g}$ on a $[u, [v, w]] + (-1)^{p(u)(p(v)+p(w))} [v, [w, u]] + (-1)^{p(w)(p(u)+p(v))} [w, [u, v]] = 0$).

Remarque 1.1.1.

La super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$ peut aussi se construire en prenant un super-espace-vectoriel $V = V_{\underline{0}} \oplus V_{\underline{1}}$ (avec $\dim V_{\underline{0}} = m$ et $\dim V_{\underline{1}} = n$, on notera $\text{sdim } V = m + \varepsilon n$ où $\text{sdim } V$ est la super-dimension de V et ε est une variable formelle de carré 1) et en munissant $\text{End}(V)$ d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation :

$$\text{End}(V)_{\underline{0}} = \{u \in \text{End}(V) / u(V_{\underline{i}}) \subset V_{\underline{i}}, \underline{i} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\},$$

$$\text{End}(V)_{\underline{1}} = \{u \in \text{End}(V) / u(V_{\underline{i}}) \subset V_{\underline{i+1}}, \underline{i} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\},$$

avec le super-crochet $[x, y] = x \circ y - (-1)^{p(x)p(y)}y \circ x$ (pour x et y homogènes de parité $p(x)$ et $p(y)$, étendu par bilinéarité). Le choix de bases de $V_{\underline{0}}$ et de $V_{\underline{1}}$ permet d'identifier cette super-algèbre de Lie (que l'on note $\mathfrak{gl}(V)$) avec $\mathfrak{gl}(m, n)$.

On remarque que $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$ est l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. De plus $\mathfrak{g}_{\underline{1}}$ est un $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$ -module.

1.2 Représentations de $\mathfrak{g}$

Définition 1.2.1.

Soit $M = M_{\underline{0}} \oplus M_{\underline{1}}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué. La donnée d'un morphisme de super-algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ munit M d'une structure de $\mathfrak{g}$ -module. On dit aussi que ρ est une représentation de $\mathfrak{g}$ sur M (ou que M est une représentation de $\mathfrak{g}$).

Définition 1.2.2.

Une représentation non nulle M sera dite simple (ou irréductible) si elle n'admet pas de sous-représentation non triviale.

Une représentation M telle qu'il existe des sous-représentations irréductibles M_i pour i allant de 1    s telles que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ sera dite semi-simple (ou complètement réductible).

Un module que l'on ne peut pas décomposer en somme directe de modules non triviaux sera dit indécomposable.

Remarque 1.2.3.

Les modules irréductibles sont indécomposables, cependant (contrairement au cas des représentations de $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$ où le centre de $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$ agit de manière diagonalisable) il existe des modules indécomposables qui ne sont pas irréductibles.

Définition 1.2.4.

Soit M une représentation de $\mathfrak{g}$, on appelle suite de composition de M une suite $(M_0, \dots, M_s)$ de sous- $\mathfrak{g}$ -modules de M tel que $\{0\} = M_n \subset \dots \subset M_1 \subset M_0 = M$. Si de plus les $\mathfrak{g}$ -modules quotients M_i/M_{i+1} sont simples, on parlera de suite de composition de Jordan-Hölder.

Remarque 1.2.5.

Soit (M, ρ) un $\mathfrak{g}$ -module, alors en restreignant ρ à $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$, M a aussi une structure de $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$ -module.

1.3 Supertrace et forme de Killing

Sur $\mathfrak{g}$ (resp. $\text{End}(\mathfrak{g})$) on définit la *supertrace* par :

$$\text{str}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \text{tr}(A) - \text{tr}(D).$$

Cette supertrace nous permet de définir une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$, $B(a, b) = \text{str}(a.b)$ appelée *forme de Killing*.

Proposition 1.3.1. *[Kac77b]*

La forme bilinéaire B est :

- (i) cohérente, ie. $B(a, b) = 0$ pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes de $\mathfrak{g}$, a pair et b impair,
- (ii) supersymétrique, ie. $B(a, b) = (-1)^{p(a)p(b)} B(b, a)$ pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes de $\mathfrak{g}$,
- (iii) invariante, ie. $B([a, b], c) = B(a, [b, c])$ pour tout a, b et c dans $\mathfrak{g}$,
- (iv) non dégénérée sur $\mathfrak{g}$.

1.4 Système de racines

Soit $\mathfrak{h}$ l'ensemble des matrices diagonales, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, on dira aussi que c'est une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$. On remarque que $\mathfrak{h}$ contient le centre de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ (et le centre de dimension 2 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$).

La restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme bilinéaire B reste non dégénérée, on en déduit un produit scalaire non dégénéré $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{h}^*$.

Définition 1.4.1.

Une représentation M est dite $\mathfrak{h}$ -diagonalisable si :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda,$$

où :

$$M_\lambda = \{v \in M \mid hv = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

La représentation adjointe étant $\mathfrak{h}$ -diagonalisable, on a la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{g \in \mathfrak{g}, [h, g] = \alpha(h)g \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Ceci nous permet de définir ce qu'on appelle le *système de racines* Δ de $\mathfrak{g}$ comme étant l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ non nuls et tels que $\mathfrak{g}_\alpha$ est non trivial.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ étant une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$, on peut voir Δ comme la réunion de Δ_0 et de Δ_1 , où Δ_0 est le système de racines (au sens de Bourbaki) de l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}_0$ et où Δ_1 est l'ensemble des poids du $\mathfrak{g}_0$ -module $\mathfrak{g}_1$.

Soit $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ la base standard de $\mathfrak{h}^*$ (ie. pour $H \in \mathfrak{h}$, $H = \text{Diag}(h_1, \dots, h_{m+n})$ on a $\varepsilon_i(H) = h_i$ et $\delta_j(H) = h_{m+j}$ pour tout i entre 1 et m et pour tout j entre 1 et n).

On a :

$$\Delta_0 = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j), 1 \leq i, j \leq m\} \cup \{\pm(\delta_i - \delta_j), 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\},$$

$$\Delta_1 = \{\pm(\varepsilon_i - \delta_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

De plus, on peut remarquer que pour $1 \leq i, j \leq m$, on a $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$, que pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $\langle \delta_i, \delta_j \rangle = -\delta_{ij}$ et que pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a $\langle \varepsilon_i, \delta_j \rangle = 0$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les racines impaires sont donc toutes isotropes.

Remarque 1.4.2.

On peut également munir $\mathfrak{g}$ d'une $\mathbb{Z}$ -graduation de longueur 3 compatible avec la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation :

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0,$$

$$\mathfrak{g}^{+1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right), C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \right\}.$$

Soit $\mathfrak{b}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, si on note $\mathfrak{b}_0$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_0$ composée des matrices triangulaires supérieures par blocs, on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$. On dira que $\mathfrak{b}$ est la *sous-algèbre de Borel distinguée* de $\mathfrak{g}$ (correspondant à $\mathfrak{b}_0$), elle a été introduite dans [Kac77b].

Elle correspond à choisir comme racines positives les racines positives de $\Delta_{\underline{0}}$ qui correspondent au choix de $\mathfrak{b}_{\underline{0}}$, et les poids du $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$ -module $\mathfrak{g}^{+1}$. On a alors :

$$\Delta^+ = \Delta_{\underline{0}}^+ \cup \Delta_{\underline{1}}^+,$$

$$\Delta_{\underline{0}}^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{\delta_i - \delta_j, 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\Delta_{\underline{1}}^+ = \{\varepsilon_i - \delta_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Les racines simples sont :

$$\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_m - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n\}$$

Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$: c'est $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$.

Remarque 1.4.3.

Dans le cas des algèbres de Lie réductives, les sous-algèbres de Borel contenant une sous-algèbre de Cartan fixée sont deux-à-deux conjuguées par le groupe de Weyl. Ce n'est plus le cas dans ce contexte, mais le nombre de classes de conjugaison est fini.

Définition 1.4.4. Soit $\rho = \rho_{\underline{0}} - \rho_{\underline{1}}$, où $\rho_{\underline{0}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{\underline{0}}^+} \alpha$ et $\rho_{\underline{1}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{\underline{1}}^+} \alpha$.

On remarque que :

$$\rho_{\underline{0}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{i=m} (m - 2i + 1) \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{j=n} (m - 2j + 1) \delta_j \right),$$

et que

$$\rho_{\underline{1}} = \frac{1}{2} \left(n \sum_{i=1}^{i=m} \varepsilon_i - m \sum_{j=1}^{j=n} \delta_j \right).$$

On peut faire agir le groupe de Weyl de deux manières sur l'ensemble des poids, soit par l'action usuelle (notée $w(\lambda)$), soit par l'action tordue (notée $w \cdot \lambda$) qui est définie par $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$.

Définition 1.4.5. Soit Λ (resp. Λ^+) l'ensemble des poids entiers (resp. entiers dominants), ce sont ceux qui le sont pour $\mathfrak{g}_{\underline{0}}$, c'est-à-dire les poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\langle \lambda, \alpha \rangle$ est dans $\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{N}$) pour tout α dans $\Delta_{\underline{0}}$. Pour λ et μ dans Λ^+ , on dit que λ est inférieur à μ (noté $\lambda \leq \mu$) si $\mu - \lambda$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines positives. Il est à remarquer qu'il existe une infinité de poids dominants plus petits qu'un poids dominant fixé.

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on écrira $\lambda = (a_1, \dots, a_m | b_1, \dots, b_n)$ à la place de : $\lambda = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_m\varepsilon_m + b_1\delta_1 + \dots + b_n\delta_n$. Avec cette notation un poids entier dominant est un poids $\lambda = (a_1, \dots, a_m | b_1, \dots, b_n)$ tel que $a_i \geq a_{i+1}$ et $b_j \geq b_{j+1}$ pour tous les i et j possibles.

Remarque 1.4.6.

Pour faciliter les calculs on peut remarquer que $\rho = \rho' - \frac{m+n+1}{2}\mathbb{1}$ avec $\rho' = (m, \dots, 2, 1 | -1, -2, \dots, -n)$ et $\mathbb{1} = (1, \dots, 1 | -1, \dots, -1)$ et utiliser ρ' en lieu et place de ρ , en effet pour tout w dans W on a $w(\mathbb{1}) - \mathbb{1} = 0$ et pour tout i, j on a $(\mathbb{1}, \varepsilon_i - \delta_j) = 0$, et donc pour tout λ on a $w(\lambda + \rho) - \rho = w(\lambda + \rho') - \rho'$ et $(\lambda + \rho', \varepsilon_i - \delta_j) = (\lambda + \rho, \varepsilon_i - \delta_j)$. Notons que Brundan ([Bru03]) utilise la notation ρ pour notre ρ' .

1.5 Algèbre enveloppante

Définition 1.5.1.

Soit $\mathfrak{g}$ une super-algèbre de Lie, on note $T(\mathfrak{g})$ son algèbre tensorielle.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les $x \otimes y - (-1)^{p(x)p(y)}y \otimes x$, pour x et y homogènes dans $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ est le quotient de $T(\mathfrak{g})$ par $\mathcal{I}$.

Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les $x \otimes y - (-1)^{p(x)p(y)}y \otimes x - [x, y]$, pour x et y homogènes dans $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est le quotient de $T(\mathfrak{g})$ par $\mathcal{J}$.

Remarque 1.5.2.

1. On a $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}_0) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)$.
2. On peut munir $S(\mathfrak{g})$ d'une graduation sur $\mathbb{N}$:

$$S^m(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^m S^k(\mathfrak{g}_0) \otimes \Lambda^{m-k}(\mathfrak{g}_1).$$

3. On a un morphisme j canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (c'est la composition de l'injection de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ par la surjection sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$).

Proposition 1.5.3. *Propriété universelle de l'algèbre enveloppante.*

Pour tout $f : \mathfrak{g} \rightarrow A$ morphisme de super-algèbre de Lie (au sens $f([x, y]) = f(x)f(y) - (-1)^{p(x)p(y)}f(y)f(x)$ pour tous x et y homogènes dans $\mathfrak{g}$), où A est une algèbre associative, alors f se factorise de manière unique par $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire $f = \bar{f} \circ j$ où $\bar{f}$ est un morphisme d'algèbres associatives.

Théorème 1.5.4. *Poincaré-Birkhoff-Witt*

Soient $\mathfrak{g}$ une super-algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ contenant $\mathbb{Q}$, $(x_i)_{i=1\dots p}$ (resp. $(y_j)_{j=1\dots q}$) une base de sa partie paire (resp. impaire). Alors une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est donnée par :

$$x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} y_1^{l_1} \dots y_q^{l_q} \text{ avec } k_i \in \mathbb{N} \text{ et } l_j \in \{0, 1\}.$$

1.6 Construction de représentations à plus haut poids

Soit $\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (resp. triangulaires inférieures strictes), on a alors les décompositions :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Définition 1.6.1.

Soit V un $\mathfrak{g}$ -module on dit que c'est un module de plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ s'il existe $v_\lambda \in V$ non nul tel que :

- $\mathfrak{n}^+ v_\lambda = 0$.
- $h v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$.
- $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_\lambda = V$.

Dans ce cas, v_λ est appelé vecteur de plus haut poids de V .

Remarque 1.6.2.

- (i) Les modules de plus haut poids sont $\mathfrak{h}$ -diagonalisables, c'est-à-dire : $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ où $V_\lambda = \{v \in V / hv = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$, et il en est de même pour ses sous-modules et ses quotients.
- (ii) On peut aussi définir les vecteurs générateurs, ce sont les $v \in V$ tel que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v = V$.
- (iii) Si un vecteur v vérifie les deux premiers points de la définition 1.6.1 on dit que c'est un vecteur primitif. Il engendre alors un sous-module de V à plus haut poids.

Soit λ dans $\mathfrak{h}^*$ entier, et soit $\mathbb{C}_\lambda$ le caractère de $\mathfrak{h}$ étendu trivialement à $\mathfrak{n}^+$, ce qui en fait un $\mathfrak{b}$ -module. On définit le *module de Verma* de plus haut poids λ par :

$$M_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathbb{C}_\lambda$$

C'est un $\mathfrak{g}$ -module qui admet un unique sous-module maximal, on note L_λ son unique quotient simple, c'est le *$\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids λ* .

Soit λ dans $\mathfrak{h}^*$ entier dominant, notons $L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$ le $\mathfrak{g}_0$ -module simple de plus haut poids λ (il est de dimension finie). On garde la même notation lorsqu'on l'étend trivialement à $\mathfrak{g}^{+1}$. On définit le *module de Kac de plus haut poids λ* par :

$$K_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} L_\lambda(\mathfrak{g}_0).$$

L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}^{-1}$ est isomorphe (comme $\mathbb{C}$ -algèbre) à l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}^{-1}$ (qui est de dimension finie), et donc en faisant l'induction on obtient un module de dimension finie. Le module simple L_λ est un quotient de K_λ . De plus K_λ est isomorphe, en tant que $\mathfrak{g}_0$ -module, à $\Lambda(\mathfrak{g}^{-1}) \otimes L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$.

Le centre de $\mathfrak{g}$ agit par un scalaire sur chaque module indécomposable. Notons que le $\mathfrak{g}$ module simple de plus haut poids $(a, \dots, a | -a, \dots, -a)$ correspond donc toujours à un module de dimension 1, qui diffère du module trivial par l'action du centre.

1.7 Caractère infinitésimal

Remarque 1.7.1.

Soit λ un poids entier dominant, le lemme de Schur implique que le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ agit par un scalaire sur M_λ (et tous ses modules quotients), ce qui permet de définir le caractère infinitésimal $\chi_\lambda : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Remarque 1.7.2.

Soit $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ alors on a une décomposition $z = u_z + \sum u_i^- u_i^0 u_i^+$ avec u_z, u_i^0 dans $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ et $u_i^\pm$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^\pm)$.

Soit le morphisme $\beta : \mathcal{U}(\mathfrak{g})^0 \rightarrow S(\mathfrak{h})$ (où $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ désigne les éléments de poids 0 de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$), $z \mapsto u_z^0$ (c'est la projection sur $S(\mathfrak{h})$ parallèlement à $\mathfrak{n}^- \mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \mathfrak{n}^+$).

Soit $\alpha : \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ défini par $\alpha(P(\lambda)) = P(\lambda - \rho)$. On définit

$$\text{HC} : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{h})^W,$$

c'est la restriction à $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de $\alpha \circ \beta$: c'est le morphisme de Harish-Chandra. Dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple complexe c'est un isomor-

phisme. Attention dans le cas d'une super-algèbre de Lie ce n'est en général pas le cas (cf. théorème 1.7.3).

Théorème 1.7.3. [Ser87][Ser88][Kac84]

Soit $\mathfrak{g}$ la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$ et soit $\text{HC} : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{h})^W$ l'homomorphisme de Harish-Chandra. On a alors :

$$\text{Im}(\text{HC}) = \{f \in S(\mathfrak{h})^W \text{ tel que } \forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ avec } A_\lambda \neq \emptyset \\ \text{on a } f(\lambda + t\alpha) = f(\lambda) \forall \alpha \in A_\lambda, \forall t \in \mathbb{C}\},$$

où

$$A_\lambda = \left\{ \alpha \in \Delta_{\bar{1}}^+, \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0 \right\}.$$

Remarque 1.7.4.

En particulier le centre de l'algèbre enveloppante n'est pas un anneau de polynômes pour $\mathfrak{gl}(m, n)$.

De plus contrairement au cas des algèbres de Lie réductives, comme le montre le théorème 1.9.5 (c'est la proposition 2.6 de [Kac77a]), le caractère infinitésimal ne sépare pas nécessairement les poids dominants.

1.8 Caractères des représentations

Définissons comme dans [Ser96] l'anneau des caractères $\mathcal{Ch}$ (c'est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[\varepsilon, (e^\mu)_{\mu \in \Lambda}]$) par :

$$\mathcal{Ch} := \left\{ \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} a_\mu e^\mu, a_\mu \in \mathbb{Z}[\varepsilon], a_\mu = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } \mu \right\}.$$

Définition 1.8.1.

Soit V une représentation de dimension finie $\mathfrak{h}$ -diagonalisable de $\mathfrak{g}$, et telle que pour tout μ dans $\mathfrak{h}^*$ on ait $\dim V_\mu < \infty$. On dit d'une telle représentation qu'elle possède un caractère. On définit alors le caractère $\text{ch } V$ de V comme étant l'élément de $\mathcal{Ch}$ donné par :

$$\text{ch } V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (\text{sdim } V_\mu) e^\mu$$

Proposition 1.8.2.

Soient V et W deux représentations de $\mathfrak{g}$ possédant un caractère, on a alors :

$$\begin{aligned} \text{ch}(V \oplus W) &= (\text{ch } V) + (\text{ch } W), \\ \text{ch}(V \otimes W) &= (\text{ch } V) \cdot (\text{ch } W). \end{aligned}$$

Exemple 1.8.3.

Le module de Kac étant un module induit, on connaît son caractère puisqu'on connaît le caractère des $\mathfrak{g}_0$ -modules :

$$\text{ch } K_\lambda = (\text{ch } \Lambda(\mathfrak{g}^{-1}))(\text{ch } L_\lambda(\mathfrak{g}_0)).$$

De plus, en utilisant la formule des caractères de Weyl pour l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}_0$ on a :

$$\text{ch } K_\lambda = \frac{N}{D} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho},$$

où on a posé :

$$D := \prod_{\alpha \in \Delta_0^+} (1 - e^{-\alpha}),$$

$$N := \prod_{\alpha \in \Delta_1^+} (1 + e^{-\alpha}).$$

1.9 Typicité

Définition 1.9.1. [Kac77b]

Un poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ dominant est dit typique si $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \neq 0$ pour tout α dans Δ_1 , sinon on dit qu'il est atypique

De plus si λ est typique (resp. atypique) on dira que le module simple L_λ est typique (resp. atypique).

Définition 1.9.2.

Soit λ un poids entier dominant, on pose :

$$A_\lambda := \left\{ \alpha \in \Delta_1^+ / \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0 \right\},$$

alors on appelle degré d'atypicité le cardinal de A_λ , et on le note $\sharp \lambda$.

Un poids est typique si son degré d'atypicité est 0.

Théorème 1.9.3. [Kac84][Ser87]

Soient λ un poids entier dominant et μ un poids entier. On a alors :

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \text{ si et seulement si } \lambda \sim \mu,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $\lambda \sim w \cdot \lambda$ pour tout w dans W , et par $\lambda \sim \lambda + \alpha$ pour tout α dans $\Delta_{\perp}^+$ tel que $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$.

Si μ est dominant on a $\sharp\lambda = \sharp\mu$. Si μ n'est pas dominant on définit son degré d'atypicité comme étant celui de λ .

Définition 1.9.4.

Soit χ un caractère de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, on dira que c'est un caractère infinitésimal dominant si il existe $\lambda \in \Lambda^+$ tel que $\chi = \chi_\lambda$.

On définit le degré d'atypicité $\sharp\chi$ de χ comme étant le degré d'atypicité de λ .

Théorème 1.9.5. [Kac77a][Kac78]

Soit λ un poids entier dominant, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) λ est typique,
- (ii) pour tout μ dans $\mathfrak{h}^*$ tel que $\chi_\lambda = \chi_\mu$ il existe w dans W tel que $\mu + \rho = w(\lambda + \rho)$,
- (iii) $L(\lambda) = K(\lambda)$,
- (iv) $K(\lambda)$ est un $\mathfrak{g}$ -module irréductible.

1.10 Catégorie $\mathcal{F}$

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des $\mathfrak{g}$ -modules de dimension finie.

Soit χ un caractère infinitésimal dominant, et $\mathcal{F}_\chi$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ constituée des modules ayant χ comme caractère infinitésimal. On a :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\chi} \mathcal{F}_\chi$$

Les catégories $\mathcal{F}_\chi$ sont appelées les *blocs* de $\mathcal{F}$. D'après le théorème 1.9.3 tous les modules d'un bloc ont le même degré d'atypicité. De plus, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(k, k)$, il existe un unique bloc possédant le degré d'atypicité maximale (qui est k , on l'appelle le bloc maximale atypique de $\mathcal{F}$, et on le note $\mathcal{F}_{\chi_0}$ (car il contient le module trivial).

Proposition 1.10.1. *[Ser98]*

On a une équivalence de catégorie entre deux blocs $\mathcal{F}_{\chi_1}$ et $\mathcal{F}_{\chi_2}$ si et seulement si $\sharp\chi_1 = \sharp\chi_2$.

Remarque 1.10.2.

Les blocs typiques sont bien connus, en effet si on note $\mathcal{F}_\lambda^0$ la catégorie des $\mathfrak{g}_0$ -modules de dimension finie dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à $L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$ pour λ typique, on définit des foncteurs Ind et Inv par :

$$\text{Ind } M = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \text{ et } \text{Inv } N = N^{\mathfrak{g}^{+1}} = \{n \in N, \mathfrak{g}^{+1}.n = 0\}$$

où M est un $\mathfrak{g}_0$ -module étendu trivialement sur $\mathfrak{g}^{+1}$ et M un $\mathfrak{g}$ -module. Ces deux foncteurs donnent une équivalence de catégorie entre $\mathcal{F}_\chi$ et $\mathcal{F}_\lambda^0$ pour $\chi = \chi_\lambda$ avec $\lambda \in \Lambda^+$ typique.

De plus, si on note $\mathfrak{z}$ le centre (de dimension deux) de $\mathfrak{g}_0$ cette catégorie est aussi équivalente (via $M \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(M, L_\lambda(\mathfrak{g}_0))$ et $N \mapsto N \otimes_{\mathbb{C}} L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$) à la catégorie des $\mathfrak{z}$ -modules nilpotents de dimension finie.

Remarque 1.10.3.

Dans [Ser98], Serganova donne une équivalence de catégories entre le bloc $\mathcal{F}_\chi$ et le bloc $\mathcal{F}_{\chi_0}(\mathfrak{gl}(k, k))$ (le bloc maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(k, k)$), pour tout caractère infinitésimal dominant χ de $\mathfrak{gl}(m, n)$ de degré d'atypicité k .

Nous explicitons des propriétés de $\mathcal{F}$ dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Décomposition des
 $\mathfrak{gl}(2, 2)$ -modules simples de
dimension finie en
 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$ -modules irréductibles

Introduction

On utilise les notations du chapitre 1.

En 1996, Serganova (dans [Ser96]) démontre une formule des caractères pour les modules simples de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$. Pour cela elle calcule, grâce à des polynômes de Poincaré, les multiplicités des modules simples dans des suites de compositions de modules de Kac, puis grâce à une inversion formelle, elle donne une formule des caractères. De même que la formule démontrée (de manière très différente) en 2003 par Brundan ([Bru03]), elle consiste en une somme infinie, et n'est pas propice aux calculs.

Un $\mathfrak{gl}(m, n)$ -module est, par restriction, un $\mathfrak{gl}_m \times \mathfrak{gl}_n$ -module, il est donc complètement réductible par rapport à cette algèbre de Lie réductive. La connaissance de cette décomposition, combinée avec une formule des caractères des modules simples de cette algèbre de Lie (par exemple la formule des caractères de Weyl) nous donne une formule des caractères de longueur finie. De plus si on choisit une formule des caractères de type combinatoire (avec des tableaux de Young par exemple), on obtient une formule des caractères de type combinatoire.

Si on prend λ un poids entier dominant, le module de Kac correspondant K_λ est un module induit, on connaît donc son caractère, grâce aux lemmes 2.2.5 et 2.2.4, on a :

$$\text{ch } K_\lambda = \sum_{\substack{I \subset \Delta_1^+ \\ \lambda_I \text{ régulier}}} \varepsilon^{\#I} \text{sgn}(w_I) \text{ch } L_{w_I \cdot \lambda_I}(\mathfrak{g}_0)$$

où $\lambda_I = \lambda - \sum_{\beta \in I} \beta$ est dit régulier s'il existe w_I dans le groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$ tel que $w_I \cdot \lambda_I$ ($\cdot$ désigne l'action tordue par ρ) soit dominant et où $\text{ch } L_{w_I \cdot \lambda_I}(\mathfrak{g}_0)$ est le caractère du $\mathfrak{gl}_m \times \mathfrak{gl}_n$ -module simple de dimension finie de plus haut poids $w_I \cdot \lambda_I$.

On montre pour $\mathfrak{gl}(2, 2)$ (lemme 2.3.1), que si, dans cette somme, un des w_I est de signature -1 alors il existe un ensemble J (avec le même cardinal que I) tel que w_J soit de signature 1 et que $w_I \cdot \lambda_I = w_J \cdot \lambda_J$, ce qui fait que les facteurs correspondants se compensent.

La connaissance explicite de ces couples (I, J) donne la $\mathfrak{g}_0$ -décomposition de K_λ (proposition 2.3.2).

Le module simple L_λ est l'unique quotient simple de K_λ , sa $\mathfrak{g}_0$ -décomposition est donc extraite de celle de K_λ . Si on note Π_{K_λ} l'ensemble des poids λ_I de la $\mathfrak{g}_0$ -décomposition de K_λ , alors on peut montrer que (théorème 2.4.1) :

$$\text{ch } L_\lambda = \sum_{\substack{\lambda_I \in \Pi_{K_\lambda} \\ I \text{ t.q. } \forall \beta \in I \langle \lambda + \rho, \beta \rangle \neq 0}} \varepsilon^{\#I} \text{ch } L_{\lambda_I}(\mathfrak{g}_0)$$

Si λ est typique alors $K_\lambda = L_\lambda$, si λ est simplement atypique on connaît une formule des caractères pour L_λ (c'est la formule de Bernstein et Leites, [BL80]), et on peut retrouver la $\mathfrak{g}_0$ -décomposition de manière similaire à celle de K_λ . Pour un poids doublement atypique on utilise les suites de compositions des modules de Kac données par Serganova (rappelées dans le théorème 2.1.2) pour démontrer cette formule par récurrence sur l'éloignement du poids par rapport aux murs définis par l'action du groupe de Weyl.

En corollaire on obtient qu'un module simple, qui n'est pas de dimension 1, de plus haut poids λ (i.e. n'est pas de la forme $(a, a| - a - a)$) de $\mathfrak{gl}(2, 2)$ vérifie la formule des caractères de Bernstein et Leites.

On rappelle dans un premier temps le résultat de Serganova. On calcule ensuite la $\mathfrak{g}_0$ -décomposition des modules de Kac, puis celle des modules simples.

2.1 Suite de composition des modules de Kac

Rappelons les résultats de Serganova sur la formule des caractères. En premier lieu, elle calcule la multiplicité $[K_\lambda : L_\mu]$ du module simple de plus haut poids μ dans une suite de composition de Jordan Hölder du module de Kac de plus haut poids λ , que nous noterons $a_{\lambda, \mu}$. D'un autre côté les modules simples admettent des résolutions (analogues à celle de Bernstein, Gelfand et Gelfand, mais de longueur infinie dans le cas atypique) par des modules qui ont des filtrations dont les quotients sont des modules de Kac, ce qui permet d'avoir une formule du type :

$$\text{ch } L_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} b_{\lambda, \mu} \text{ch } K_\mu.$$

Les matrices $A = (a_{\lambda, \mu})$ et $B = (b_{\lambda, \mu})$ sont triangulaires et inverses l'une de l'autre.

Serganova introduit dans [Ser96] les polynômes de Kazhdan-Lusztig :

$$K_{\lambda, \mu}(q) = \sum_{i=0}^{\infty} [H_i(\mathfrak{g}^{-1}; L_\lambda) : L_\mu(\mathfrak{g}_0)] q^i.$$

En passant à la caractéristique d'Euler, on obtient que le coefficient $b_{\lambda, \mu}$ est l'évaluation en -1 du polynôme $K_{\lambda, \mu}$.

Pour pouvoir énoncer les théorèmes de Serganova qui donnent ces coefficients, nous avons besoin d'un peu plus de matériel et de notations :

Notons $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$ le *groupe de Grothendieck* de la catégorie $\mathcal{F}$, c'est le $\mathbb{Z}$ -module libre ayant pour base les classes d'isomorphismes $[L_\mu]$ des $\mathfrak{g}$ -modules simples, $\mathfrak{h}$ -diagonalisables et de dimension finie. Soit q une indéterminée. Soit enfin $\mathcal{H}$ le $\mathbb{C}[q, \varepsilon]$ -module libre de base $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^+}$ indexée par les poids entiers dominants. Définissons alors par récurrence des opérateurs σ_α :

Définition 2.1.1.

Soit $\alpha \in \Delta_+^+$, pour $\mu \in \Lambda$, on note $\text{rk } W_\mu$ le rang du stabilisateur de μ dans W (rang comme groupe de Coxeter),

$$l(\mu, \alpha) := \text{rk}(W_{\mu-\rho}) - \text{rk}(W_{\mu-\alpha} \cap W_\mu)$$

et, pour un polynôme de Laurent P en q , $[P(q)]_+$ sa partie polynômiale de degré strictement positif.

On définit l'opérateur σ_α sur $\mathcal{H}$ par :

- (i) $\sigma_\alpha(T_\lambda) = 0$ si $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$.
- (ii) $\sigma_\alpha(T_\lambda) = \varepsilon [q^{l(\lambda, \alpha)-1} \sigma_\alpha(T_{\lambda-\alpha})]_+ \varepsilon q T_{\lambda-\alpha}$ si $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$.
- (iii) Si $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ et si λ et α sont dans la même chambre alors $\sigma_\alpha(T_\lambda) = \varepsilon q T_{\lambda-\alpha}$.

On définit l'opérateur $\mathbb{C}[q, \varepsilon]$ -linéaire $\Xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}[q] \otimes \mathcal{K}[\mathcal{F}]$ par $\Xi(T_\lambda) = [L_{\tilde{\lambda}-\rho}]$ si $\tilde{\lambda} - \rho \in \Lambda^+$ et $\Xi(T_\lambda) = 0$ sinon, où on a noté $\tilde{\lambda}$ le W -conjugué dominant de λ .

Ceci nous permet de définir les opérateurs $\tilde{s}_\alpha$ et s_α de $\mathbb{C}[q] \otimes \mathcal{K}[\mathcal{F}]$ et $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$ respectivement par $\tilde{s}_\alpha[L_\lambda] = \Xi(\sigma_\alpha(T_\lambda + \rho))$, s_α étant l'évaluation en $q = -1$ de $\tilde{s}_\alpha$.

Le théorème de 2.2 de [Ser96], permet de calculer les suites de composition de Jordan-Hölder des modules de Kac et donc de calculer les coefficients $a_{\lambda, \mu}$, un algorithme pour calculer explicitement ces coefficients est d'ailleurs présent dans l'article de Serganova. Dans [Gru06], Caroline Gruson a donné, dans le cas maximale atypique de $\mathfrak{gl}(k, k)$, un algorithme utilisant des diagrammes de Young.

Théorème 2.1.2. [Ser96]

On a la relation suivante dans $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$:

$$[K_\lambda] = \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+^+}^{\leftarrow} (1 - s_\alpha) \right) [L_\lambda],$$

où l'ordre du produit est compatible avec l'ordre partiel $\geq$ sur $\Delta_{\perp}^+$.

Soit ψ l'application $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ -linéaire de $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$ dans l'anneau des caractères $\mathcal{Ch}$ définie par $\psi[L_{\lambda}] := \text{ch } K_{\lambda}$. On a alors, via une inversion formelle du théorème précédent, une formule des caractères :

Théorème 2.1.3. [Ser96]

Pour un poids entier dominant λ ,

$$\text{ch } L_{\lambda} = \psi \left(\left(\prod_{\alpha \in \Delta_{\perp}^+}^{\rightarrow} (1 - s_{\alpha})^{-1} \right) [K_{\lambda}] \right)$$

où l'ordre du produit est compatible avec l'ordre partiel $\leq$ sur $\Delta_{\perp}^+$.

Cependant, cette formule est de longueur infinie (en effet $(1 - s_{\alpha})^{-1} = 1 + s_{\alpha} + s_{\alpha}^2 + \dots$), il est donc assez compliqué de calculer explicitement les coefficients $b_{\lambda, \mu}$ de la formule des caractères.

Comme cela est remarqué dans [Gru06], dans le cas d'un poids entier dominant maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(k, k)$ qui est loin des W -murs, la formule du théorème 2.1.2 peut s'écrire plus facilement :

Remarque 2.1.4.

Les poids dominants maximalement atypiques de $\mathfrak{gl}(k, k)$ sont de la forme $\lambda = (a_1, \dots, a_k | -a_k, \dots, -a_1)$. On suppose de plus la condition (d'éloignement des W -murs) $a_i - a_{i+1} \geq 2$ pour tout i entre 1 et $k - 1$. On a alors, si on pose $\alpha_i = \varepsilon_{k-i+1} - \delta_i$ pour i allant de 1 à k :

$$[K_{\lambda}] = [L_{\lambda}] + \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq k} [L_{\lambda - \alpha_i}] + \sum_{1 \leq i < j \leq k} [L_{\lambda - \alpha_i - \alpha_j}] + \dots + \varepsilon^k [L_{\lambda - \sum_{i=1}^k \alpha_i}]$$

Exemple 2.1.5.

Prenons, pour $\mathfrak{gl}(2, 2)$, un poids entier dominant maximalement atypique $(a, b | -b, -a)$ (que l'on notera (a, b)).

Si $a = b$ on a :

$$[K_{(a,a)}] = [L_{(a,a)}] + \varepsilon [L_{(a,a-1)}] + [L_{(a-2,a-2)}]$$

Si $a = b + 1$ on a :

$$[K_{(a+1,a)}] = [L_{(a+1,a)}] + \varepsilon [L_{(a,a)}] + \varepsilon [L_{(a+1,a-1)}] + \varepsilon [L_{(a-1,a-1)}] + [L_{(a,a-1)}]$$

Sinon (i.e. si $a \geq b + 2$) :

$$[K_{(a,b)}] = [L_{(a,b)}] + \varepsilon [L_{(a-1,b)}] + \varepsilon [L_{(a,b-1)}] + [L_{(a-1,b-1)}]$$

2.2 Quelques lemmes préliminaires pour $\mathfrak{gl}(m, n)$

Définition 2.2.1.

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ on définit :

$$\begin{aligned}\phi_W(\lambda) &= \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}, \\ \phi_K(\lambda) &= N \cdot \phi_W(\lambda), \\ &= \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho} \prod_{\alpha \in \Delta_+^+} (1 + \varepsilon e^{-w(\alpha)}), \\ \phi_{BL}(\lambda) &= \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho} \prod_{\alpha \in A_\lambda} (1 + \varepsilon e^{-w(\alpha)}).\end{aligned}$$

où $A_\lambda = \Delta_+^+ \setminus \{\alpha, \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0\} = \{\alpha \in \Delta_+^+, \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \neq 0\}$
et où D et N sont définis comme dans le paragraphe 1.8.

Remarque 2.2.2.

Pour λ dominant on sait que $\phi_W(\lambda) = \text{ch } L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$, $\phi_K(\lambda) = \text{ch } K_\lambda$.

Si λ est typique on a $\phi_K(\lambda) = \text{ch } L_\lambda$.

Si λ est simplement atypique on a, par la formule de Bernstein-Leites :
 $\phi_{BL}(\lambda) = \text{ch } L_\lambda$.

Pour un sous-ensemble I de Δ_1^+ , on pose $\lambda_I = \lambda - \sum_{\beta \in I} \beta$. On dit que λ_I est régulier si il existe un élément $w_I \in W$ tel que $w_I \cdot \lambda_I \in \Lambda^+$.

Proposition 2.2.3.

Soit λ un poids entier dominant, et soit K_λ le module de Kac associé. On a :

$$\text{ch } K_\lambda = \sum_{\substack{I \subset \Delta_1^+ \\ \lambda_I \text{ régulier}}} \varepsilon^{\#I} \text{sgn}(w_I) \text{ch } L_{w_I \cdot \lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

En fait, il existe un résultat qui nous permet de connaître ϕ_W :

Lemme 2.2.4.

Soit λ un poids entier, on est dans l'un des deux cas suivants :

– Cas 1 : λ régulier :

$$\phi_W(\lambda) = \text{sgn}(w) \text{ch } L_{w \cdot \lambda}(\mathfrak{g}_0)$$

- Cas 2
pour tout w dans W , $w \cdot \lambda$ n'est pas dominant alors

$$\phi_W(\lambda) = 0$$

De plus le Cas 2 est équivalent à :

Il existe w dans W tel que $\text{sgn}(w) = -1$ et que $w \cdot \lambda = \lambda$.

Le lemme suivant exprime le caractère d'un module de Kac de plus haut poids entier dominant λ en fonction de ϕ_W , il nous donne en réalité les candidats à être des plus hauts poids pour la décomposition en $\mathfrak{g}_0$ -modules irréductibles :

Lemme 2.2.5.

Soit λ entier dominant, pour un sous-ensemble I de $\Delta_{\frac{1}{2}}^+$ nous posons λ_I le poids $\lambda - \sum_{\beta \in I} \beta$ (il n'est pas nécessairement dominant), et $\lambda_{\emptyset} = \lambda$. On a alors :

$$\text{ch } K_{\lambda} = \sum_{I \subset \Delta_{\frac{1}{2}}^+} \varepsilon^{\#I} \phi_W(\lambda_I).$$

Démonstration.

Soit λ dominant, on a :

$$\text{ch } K_{\lambda} = \prod_{\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}^+} (1 + \varepsilon e^{-\alpha}) \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda + \rho) - \rho}.$$

Or

$$\prod_{\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}^+} (1 + \varepsilon e^{-\alpha}) = 1 + \sum_{\alpha_i \in \Delta_{\frac{1}{2}}^+} \varepsilon e^{-\alpha_i} + \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \Delta_{\frac{1}{2}}^+} e^{-\alpha_i - \alpha_j} + \dots + \varepsilon^{\#(\Delta_{\frac{1}{2}}^+)} e^{-\sum_{\alpha_i \in \Delta_{\frac{1}{2}}^+} \alpha_i},$$

d'où, en notant 0 le poids $(0, \dots, 0 | 0, \dots, 0)$:

$$\prod_{\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}^+} (1 + \varepsilon e^{-\alpha}) = \sum_{I \subset \Delta_{\frac{1}{2}}^+} \varepsilon^{\#I} e^{0_I}.$$

De plus, si α parcourt $\Delta_{\frac{1}{2}}^+$, il en est de même pour $w(\alpha)$ pour $w \in W$ (on a le même résultat pour des sommes de racines impaires positives).

On a donc :

$$\text{ch } K_{\lambda} = \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \sum_{I \subset \Delta_{\frac{1}{2}}^+} \text{sgn}(w) \varepsilon^{\#I} e^{w(\lambda_I + \rho) - \rho}.$$

C'est-à-dire que :

$$\text{ch } K_\lambda = \sum_{I \subset \Delta_1^+} \varepsilon^{\#I} \phi_W(\lambda_I).$$

□

La proposition 2.2.3 découle directement de ces deux lemmes.

2.3 Décomposition des modules de Kac

Plaçons-nous maintenant dans $\mathfrak{gl}(2, 2)$. On a alors :

$$\Delta^+ = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \delta_1 - \delta_2\} \cup \{\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_1 - \delta_2, \varepsilon_2 - \delta_1, \varepsilon_2 - \delta_2, \}.$$

On pose $\beta_{i,j} = \varepsilon_i - \delta_j$ pour i et j valant 1 ou 2.

De plus un poids dominant $\lambda = (a, b|c, d)$ est typique si les nombres $a + c + 1$, $a + d$, $b + c$, $b + d - 1$ sont non nuls. Sinon il est atypique, il peut être au maximum doublement atypique, dans ce cas $\lambda = (a, b| -b, -a)$, ce qui est le cas du poids 0.

Le groupe de Weyl est ici $W = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, quand on parle de W -conjugué d'un poids, c'est par l'action tordue (par ρ) de W , par contre quand on parle de W -murs, c'est pour l'action standard. Un poids $\lambda = (a, b|c, d)$ est sur un des deux W -murs si $a = b$ ou $c = d$.

Lemme 2.3.1.

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^$ entier dominant.*

Soit $I \subset \Delta_1^+$ tel qu'il existe $w_I \in W$ tel que $\text{sgn}(w_I) = -1$ et $w_I \cdot \lambda_I$ dominant.

Alors il existe $J \subset \Delta_1^+$ tel qu'il existe $w_J \in W$ vérifiant $\text{sgn}(w_J) = 1$ et $w_I \cdot \lambda_I = w_J \cdot \lambda_J$.

Avant de commencer la démonstration, définissons les ensembles suivants :

$$I_1 := \{\beta_{1,1}, \beta_{1,2}\},$$

$$I_2 := \{\beta_{1,2}, \beta_{2,2}\},$$

$$J_a := \{\beta_{1,1}, \beta_{2,2}\},$$

$$J_b := \{\beta_{1,2}, \beta_{2,1}\}.$$

On remarque que $\lambda_{J_a} = \lambda_{J_b}$.

Démonstration.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ un poids entier dominant.

Si $a \neq b$ et $c \neq d$ alors tous les λ_I , sauf peut-être λ_{I_1} et λ_{I_2} , sont dominants. On remarque que λ_{I_1} est soit dominant (si $a > b + 1$), soit non régulier (si $a = b + 1$), il en est de même pour λ_{I_2} (dominant si $c > d + 1$ et non régulier $c = d + 1$).

Si $a = b$ et/ou $c = d$

Sauf peut-être λ_{I_1} et λ_{I_2} , tous les λ_I sont soit dominants, soit non réguliers.

Pour $a = b$ on a λ_{I_1} régulier non dominant, de même pour λ_{I_2} si $c = d$. On remarque que les couples (I_1, J_a) pour $a = b$, et (I_2, J_b) pour $c = d$ conviennent. $\square$

On a d'ailleurs remarqué dans cette démonstration, que pour $\mathfrak{gl}(2, 2)$, on a si λ_I est régulier et $\text{sgn}(w_I) = 1$ alors $w_I = \text{Id}$

On résume tout ceci dans la proposition :

Proposition 2.3.2.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ entier dominant.

Si $\langle \lambda + \rho, \beta_{2,2} \rangle \neq 0$ posons : $J_1 := J_a$ et $J_2 := J_b$.

Si $\langle \lambda + \rho, \beta_{2,2} \rangle = 0$ posons : $J_1 := J_b$ et $J_2 := J_a$.

On définit l'ensemble $N\Pi_{K_\lambda}$ par :

si $a = b$ (resp. $c = d$) alors $N\Pi_{K_\lambda} = \{J_1\}$ (resp. $\{J_2\}$),

si $a = b$ et $c = d$ alors $N\Pi_{K_\lambda} = \{J_1, J_2\}$,

sinon $N\Pi_{K_\lambda} = \emptyset$.

Posons :

$$\Pi_{K_\lambda} = \{\lambda_I, I \subset \Delta_{\underline{1}}^+, \lambda_I \text{ régulier}, \lambda_I \notin N\Pi_{K_\lambda}\}.$$

On a alors l'isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$ -modules :

$$K_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda_I \in \Pi_{K_\lambda}} L_{\lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

Le choix de J_1 et J_2 est ici sans importance, par contre il sera essentiel pour le théorème 2.4.1 ($\mathfrak{g}_0$ -décomposition des modules simples).

Exemples 2.3.3.

Pour le poids nul, correspondant au module simple trivial, on a $K_0 \simeq \Lambda(\mathfrak{g}^{-1})$, et la décomposition en 6 $\mathfrak{g}_0$ -composantes :

$$\begin{aligned} K_{(0,0|0,0)} \simeq & L_{(0,0|0,0)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(0,-1|1,0)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(0,-2|1,1)}(\mathfrak{g}_0) \oplus \\ & \oplus L_{(-1,-1|2,0)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(-1,-2|2,1)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(-2,-2|2,2)}(\mathfrak{g}_0). \end{aligned}$$

Pour le poids doublement atypique $(1, 0|0, -1)$ on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{K_{(1,0|0,-1)}} = \{ & (1, 0|0, -1), (1, -1|1, -1), (1, -1|0, 0), (1, -2|1, 0), (0, 0|1, -1), \\ & (0, 0|0, 0), (0, -1|2, -1), (0, -1|1, 0), (0, -1|1, 0), (0, -2|1, 1), \\ & (0, -2|2, 0), (-1, -1|1, 1), (-1, -1|2, 0), (-1, -2|2, 1) \} \end{aligned}$$

Pour le poids $(2, 2| - 3, -4)$ simplement atypique relativement à $\beta_{1,1}$ on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{K_{(2,2|-3,-4)}} = \{ & (2, 2| - 3, -4), (2, 1| - 2, -4), (2, 1| - 3, -3), (1, 1| - 1, -4), \\ & (1, 1| - 2, -3), (2, 0| - 2, -3), (1, 0| - 2, -2), (1, 0| - 1, -3), \\ & (0, 0| - 1, -2) \} \end{aligned}$$

Corollaire 2.3.4.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ un poids entier dominant, on remarque que le nombre de $\mathfrak{g}_0$ -composantes du module K_λ ne dépend que de l'éloignement de λ des W -murs, et on a 6 cas possibles :

- Si $a - b \geq 2$ et $c - d \geq 2$ alors K_λ possède 16 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.
- Si $a - b \geq 2$ et $c = d + 1$ (ou si $a = b + 1$ et $c - d \geq 2$) alors K_λ possède 15 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.
- Si $a = b + 1$ et $c = d + 1$ alors K_λ possède 14 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.
- Si $a - b \geq 2$ et $c = d$ (ou si $a = b$ et $c - d \geq 2$) alors K_λ possède 10 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.
- Si $a = b + 1$ et $c = d$ (ou si $a = b$ et $c = d + 1$) alors K_λ possède 9 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.
- Si $a = b$ et $c = d$ alors K_λ possède 6 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.

2.4 Décomposition des modules simples

Théorème 2.4.1.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ un poids entier dominant.

On utilise les notations de la proposition 2.3.2 ($\mathfrak{g}_0$ -décomposition des modules de Kac)

On a l'isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$ -modules suivant :

$$L_\lambda \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda_I \in \Pi_{K_\lambda} \\ I \text{ t.q. } \forall \beta \in I \langle \lambda + \rho, \beta \rangle \neq 0}} L_{\lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

De plus on a aussi :

$$\text{ch } L_\lambda = \sum_{\substack{\lambda_I \in \Pi_{K_\lambda} \\ I \text{ t.q. } \forall \beta \in I \langle \lambda + \rho, \beta \rangle \neq 0}} \varepsilon^{\#I} \text{ch } L_{\lambda_I}(\mathfrak{g}_0).$$

Démonstration.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ entier dominant.

- Cas où le poids λ est typique.

Comme K_λ est simple, ce théorème ne dit rien de plus que la proposition 2.3.2.

- Cas où le poids λ est simplement atypique relativement à $\gamma \in \Delta_{\underline{1}}^+$.

D'après [BL80] on a $\text{ch } L_\lambda = \phi_{BL}(\lambda)$, avec ici $A_\lambda = \Delta_{\underline{1}}^+ \setminus \{\gamma\}$. De manière identique au lemme 2.2.5 on a :

$$\text{ch } L_\lambda = \sum_{I \subset A_\lambda} \varepsilon^{\#I} \phi_W(\lambda_I).$$

Dans ce cas, démontrer le théorème revient à vérifier que s'il existe un couple (I, J) vérifiant les hypothèses du lemme 2.3.1, alors γ est soit un élément de $I \cap J$, soit n'est pas un élément de $I \cup J$.

On remarque que si $\gamma = \beta_{1,2}$ ou $\beta_{2,1}$ alors $a \neq b$ et $c \neq d$ (sinon on aurait $a = b = -c = -d$ et λ serait maximalement atypique), et donc il n'y a pas de I qui vérifie les hypothèses du lemme 2.3.1.

Les choix de J_1 et J_2 de la proposition 2.3.2 impliquent le résultat dans les cas où $\gamma = \beta_{1,1}$ ou $\beta_{2,2}$.

Ce qui démontre le théorème dans le cas simplement atypique.

- Cas où le poids λ est maximalelement atypique.

Dans ce cas $\lambda = (a, b| -b, -a)$, remarquons tout d'abord que :

$$L_\lambda = L_{(a-b, 0|0, b-a)} \otimes L_{(b, b|-b, -b)},$$

avec $\dim L_{(b, b|-b, -b)} = 1$. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $L_{(c, 0|0, -c)}$ pour tout entier positif c .

Pour $c = 0$ le théorème dit que $L_{(0, 0|0, 0)} \simeq L_{(0, 0|0, 0)}(\mathfrak{g}_0)$.

Pour $c = 1$, il faut montrer que :

$$L_{(1, 0|0, -1)} \simeq L_{(1, 0|0, -1)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(0, 0|1, -1)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(1, -1|0, 0)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(0, -1|1, 0)}(\mathfrak{g}_0).$$

Or d'après l'exemple 2.1.5 on a :

$$[K_{(1, 1|-1, -1)}] = [L_{(1, 1|-1, -1)}] + \varepsilon[L_{(1, 0|0, -1)}] + [L_{(-1, -1|1, 1)}].$$

Ceci donne un isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$ -modules. Or on connaît les $\mathfrak{g}_0$ -facteurs du module de Kac et des deux modules de dimension 1. Ce qui permet de montrer le théorème pour $c = 1$.

Montrons maintenant par récurrence sur $c \geq 2$ que :

$$\begin{aligned} L_{(c, 0|0, -c)} &\simeq L_{(c, 0|0, -c)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(c-1, 0|1, -c)}(\mathfrak{g}_0) \oplus \\ &\oplus L_{(c, -1|0, 1-c)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(c-1, -1|1, 1-c)}(\mathfrak{g}_0). \end{aligned}$$

Pour $c = 2$, toujours d'après l'exemple 2.1.5

$$[K_{(2, 1|-1, -2)}] = [L_{(2, 1|-1, -2)}] + \varepsilon[L_{(1, 1|-1, -1)}] + [L_{(0, 0|0, 0)}] + \varepsilon[L_{(2, 0|0, -2)}] + \varepsilon[L_{(1, 0|0, -1)}].$$

De même que pour $c = 1$ on peut vérifier le résultat.

Pour c quelconque, toujours d'après l'exemple 2.1.5 :

$$[K_{(c, 1|-1, -c)}] = [L_{(c, 1|-1, -c)}] + \varepsilon[L_{(c-1, 1|-1, 1-c)}] + \varepsilon[L_{(c, 0|0, -c)}] + [L_{(c-1, 0|0, -c-1)}].$$

On en déduit la $\mathfrak{g}_0$ -décomposition de $L_{(c, 0|0, -c)}$ dès que l'on connaît celle de $L_{(c-1, 0|0, 1-c)}$, $L_{(c-2, 0|0, 2-c)}$ et de $K_{(c, 1|-1, -c)}$, une simple vérification permet de conclure cette récurrence, ainsi que la démonstration du théorème. $\square$

Exemple 2.4.2.

Pour le poids $\lambda = (2, 2| - 3, -4)$ ($\lambda + \rho' = (4, 3| - 4, -6)$), simplement atypique relativement à $\beta_{1,1}$, on a :

$$\begin{aligned} L_{(2,2|-3,-4)} \simeq & L_{(2,2|-3,-4)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(2,1|-2,-4)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(2,1|-3,-3)}(\mathfrak{g}_0) \oplus \\ & \oplus L_{(1,1|-2,-3)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(2,0|-2,-3)}(\mathfrak{g}_0) \oplus L_{(1,0|-2,-2)}(\mathfrak{g}_0). \end{aligned}$$

Corollaire 2.4.3.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ entier dominant.

Si $a = b = -c = -d$ on a :

$$\text{ch } L_\lambda = e^\lambda.$$

Sinon, la formule de Bernstein et Leites est vérifiée :

$$\text{ch } L_\lambda = \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho} \prod_{\alpha \in A_\lambda} (1 + \varepsilon e^{-w(\alpha)}).$$

Corollaire 2.4.4.

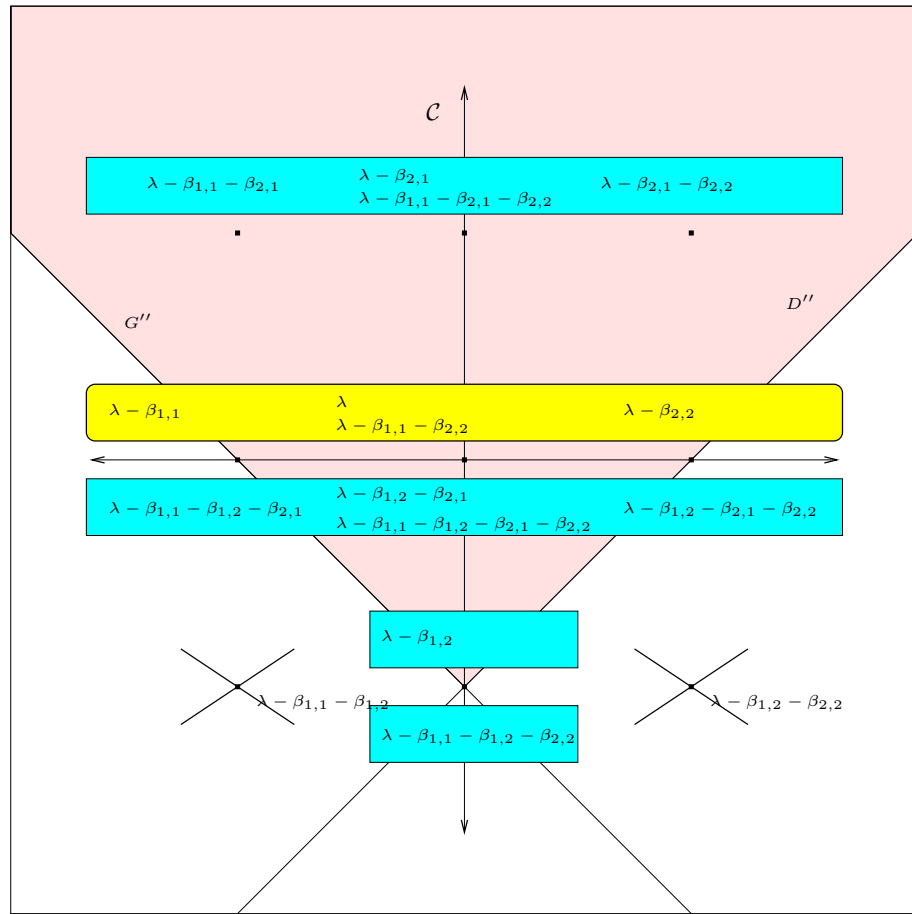
On remarque que soit les modules simples maximalement atypiques sont de dimension 1, soit ils possèdent exactement 4 $\mathfrak{g}_0$ -composantes.

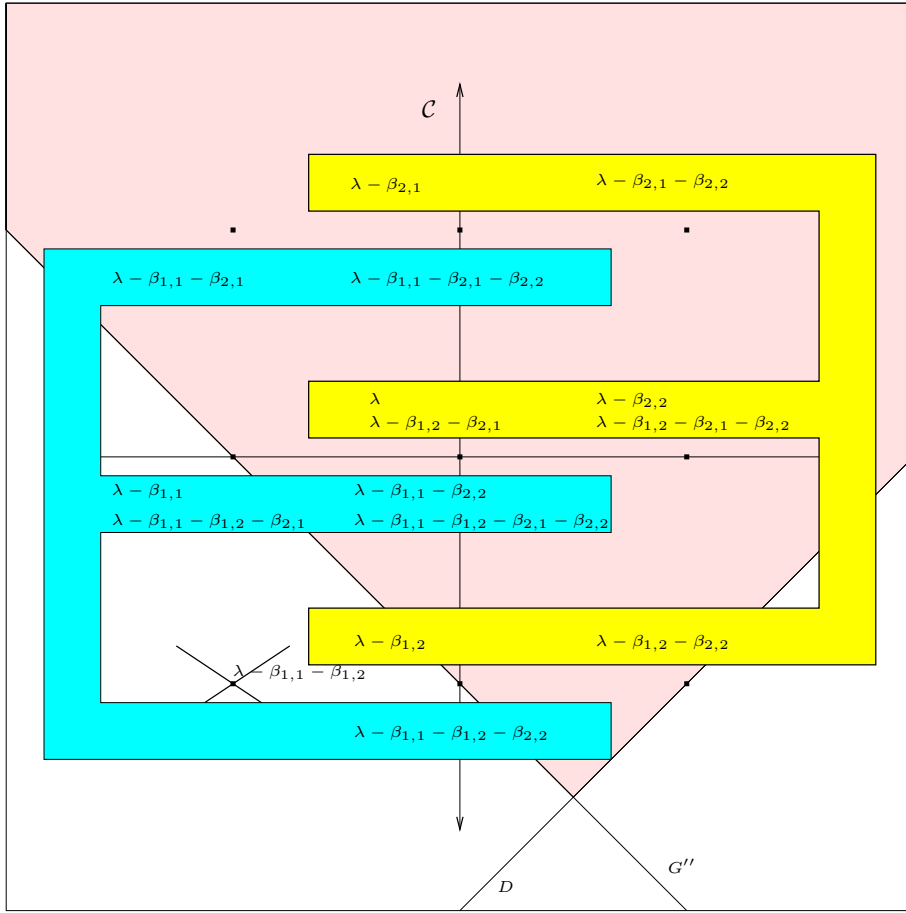
Exemples 2.4.5.

Soit $\lambda = (a, b|c, d)$ un poids entier dominant, on représente les poids λ_I pour $I \subset \Delta_\perp^+$ modulo la droite engendrée par $(1, 1| - 1, -1)$ sur un plan dont les axes correspondent aux racines impaires $\beta_{1,1}$ et $\beta_{1,2}$ (on remarque que $\beta_{2,1} = -\beta_{1,2} + (1, 1| - 1, -1)$ et que $\beta_{2,2} = -\beta_{1,1} + (1, 1| - 1, -1)$). Tous ces poids sont dans un même plan passant par λ .

Pour $\lambda = (1, 0|0, -1)$ (maximalement atypique), on résume sur la figure 2.1 (page 28) le fait que $K_\lambda \simeq L_\lambda \oplus L_{\lambda-\beta_{2,1}} \oplus L_{\lambda-\beta_{1,2}-\beta_{2,1}} \oplus L_{\lambda-\beta_{1,2}} \oplus L_{\lambda-\beta_{1,1}-\beta_{1,2}-\beta_{2,2}}$ (comme $\mathfrak{g}_0$ -module), et les $\mathfrak{g}_0$ -décompositions de ces quatre $\mathfrak{g}$ -modules simples. Les deux droites correspondent à l'intersection de ce plan Λ^+ , les cinq boîtes correspondent aux cinq modules simples, dans ces boîtes on a les $\mathfrak{g}_0$ plus hauts poids.

Pour $\lambda = (1, 0| - 2, -4)$ (atypique relativement à $\beta_{1,1}$), on a résumé sur la figure 2.2 (page 29) le fait que $K_\lambda \simeq L_\lambda \oplus L_{\lambda-\beta_{1,1}}$ (comme $\mathfrak{g}_0$ -module), ainsi que les $\mathfrak{g}_0$ -décompositions de ces deux $\mathfrak{g}$ -modules simples.

FIG. 2.1 – Décomposition de $K_{(1,0|0,-1)}$ et de $L_{(1,0|0,-1)}$

FIG. 2.2 – Décomposition de $K_{(1,0|-2,-4)}$ et de $L_{(1,0|-2,-4)}$

Chapitre 3

Bases cristallines des représentations irréductibles de $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$

Introduction

Benkart, Kang et Kashiwara dans [BKK00] introduisent une déformation quantique $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$ de l'algèbre enveloppante de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Ils étudient la catégorie semi-simple $\mathcal{O}_{BKK}$ formée des modules obtenus comme facteur direct des puissances tensorielles de la représentation standard $\mathbf{V}$ de $\mathfrak{gl}(m, n)$ de dimension $m + \varepsilon n$.

Ils construisent des bases cristallines pour ces modules.

La catégorie $\mathcal{F}$ des $\mathfrak{gl}(m, n)$ -modules de dimension finie diagonalisables sous l'action d'une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{gl}(m, n)$ contient les modules de $\mathcal{O}_{BKK}$. Les modules simples de $\mathcal{F}$ sont indexés par leur plus haut poids. La catégorie $\mathcal{F}$ n'est pas semi-simple, contrairement à $\mathcal{O}_{BKK}$. Le défaut de semi-simplicité de la catégorie $\mathcal{F}$ provient de l'existence de modules dits atypiques (cf. [Kac77b]).

En 1996, Serganova ([Ser96]) décrit le caractère de tous les modules simples de $\mathcal{F}$. Brundan ([Bru03]) trouve par d'autres méthodes un résultat analogue, dans les deux cas le caractère d'un $\mathfrak{gl}(m, n)$ -module simple de dimension finie est exprimé comme somme infinie avec signes, peu propice aux calculs.

Le but de cet article est de construire des bases cristallines pour tous les modules simples de $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$, ce qui permet en particulier d'obtenir une formule des caractères de type combinatoire.

Nous introduisons la catégorie $\mathcal{O}_{BKK}^*$, analogue de $\mathcal{O}_{BKK}$ pour la représentation $\mathbf{V}^*$, elle possède les mêmes propriétés que $\mathcal{O}_{BKK}$.

Tous les modules simples de dimension finie de $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$ peuvent être obtenus comme sous-quotient du produit tensoriel $M \otimes N$, avec M dans $\mathcal{O}_{BKK}$ et N dans $\mathcal{O}_{BKK}^*$. Le théorème 3.2.9 donne l'existence de bases cristallines pour ces modules $M \otimes N$ (au prix d'un affaiblissement de la notion de base cristalline).

Le théorème 3.3.7 permet, sous certaines conditions, de construire des bases cristallines pour les sous-modules (resp. modules quotient) apparaissant dans $M \otimes N$ (si on connaît une base cristalline de $M \otimes N$). Dans le cas $m = n = 2$ un calcul explicite montre que les conditions sont vérifiées.

Le plan de cet article est le suivant : Dans la première partie on rappelle les définitions du groupe quantique $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$ et des catégories de modules étudiées.

Dans la deuxième partie on rappelle la définition des opérateurs modifiés

(étendus à notre cas) et on donne celle de base cristalline, puis on démontre le théorème 3.2.9.

Dans la troisième et dernière partie on démontre le théorème 3.3.7 et on donne explicitement en exemple les bases cristallines pour les modules simples doublement atypiques de $U_q(\mathfrak{gl}(2, 2))$.

3.1 Groupe quantique $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$

3.1.1 Définition du groupe quantique

On utilise la même définition (et les mêmes notations) que Benkart, Kang et Kashiwara dans [BKK00].

Soient deux entiers positifs m et n , on pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$.

Soit $\mathfrak{h}$ l'ensemble des matrices diagonales, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Le réseau des poids P est alors dans le dual de $\mathfrak{h}$, notons $\{\varepsilon_{\overline{m}}, \dots, \varepsilon_{\overline{1}}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ sa base canonique.

Contrairement au cas des algèbres de Lie réductives, les sous algèbres de Borel contenant $\mathfrak{h}$ ne sont pas toutes deux-à-deux conjuguées ; on fait le choix de prendre la sous-algèbre de Borel distinguée, c'est-à-dire que les racines simples sont indexées par $I = I_{\underline{0}} \cup I_{\underline{1}}$ où $I_{\underline{0}} = \{\overline{m-1}, \dots, \overline{1}, 1, \dots, n-1\}$ et $I_{\underline{1}} = \{0\}$. On posera $p(i) = 0$ si $i \in I_{\underline{0}}$ et $p(i) = 1$ si $i \in I_{\underline{1}}$.

À un élément i de I correspond la racine simple α_i de P et la co-racine h_i de P^* , on a :

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_{\overline{a+1}} - \varepsilon_{\overline{a}} & \text{si } i = \overline{a} \text{ avec } a \in \{m-1, \dots, 1\} \\ \varepsilon_{\overline{1}} - \varepsilon_1 & \text{si } i = 0 \\ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & \text{si } i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Soit $(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire symétrique sur P définie par :

$$(\varepsilon_a, \varepsilon_{a'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = a' \in \{\overline{m-1}, \dots, \overline{1}\} \\ -1 & \text{si } a = a' \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application naturelle de $P \times P^*$ dans $\mathbb{Z}$.

On a $\langle h_i, \alpha_i \rangle = 2$ si $i \in I_{\underline{0}}$, $\langle h_i, \alpha_i \rangle = 0$ si $i \in I_{\underline{1}}$ et $\langle h_i, \alpha_j \rangle \leq 0$ si $i \neq j$. On a alors, en posant $l_i = 1$ si $i \in \{\overline{m-1}, \dots, \overline{1}, 0\}$ et $l_i = -1$ si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $l_i \langle h_i, \lambda \rangle = (\alpha_i, \lambda)$ pour tout λ dans P .

Soit q une indéterminée. Soit $U'_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre associative unitaire sur $\mathbb{Q}(q)$ engendrée par des éléments e_i, f_i (i dans I), q^h ($h \in P^*$) et satisfaisant les

relations :

$$\begin{aligned} q^h &= 1 \text{ pour } h = 0, \\ q^{h_1+h_2} &= q^{h_1}q^{h_2} \text{ pour } h_1, h_2 \in P^*, \\ q^h e_i q^{-h} &= q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i \text{ pour } h \in P^* \text{ et } i \in I, \\ q^h f_i q^{-h} &= q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i \text{ pour } h \in P^* \text{ et } i \in I, \\ [e_i, f_j] &= \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \end{aligned}$$

où $q_i = q^{l_i}$, $t_i = q^{l_i h_i}$ et où $[e_i, f_j] = e_i f_j - (-1)^{p(i)p(j)} f_j e_i$.

On demande de plus :

$$\begin{aligned} &\text{pour } a \in U_q^{++}(\mathfrak{g}), \text{ si } f_i a \in U_q^+(\mathfrak{g}) f_i \text{ pour tout } i \text{ alors } a = 0, \\ &\text{pour } a \in U_q^{--}(\mathfrak{g}), \text{ si } e_i a \in U_q^-(\mathfrak{g}) e_i \text{ pour tout } i \text{ alors } a = 0, \end{aligned}$$

où $U_q^+(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})$) est la sous-algèbre de $U'_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les e_i (resp. f_i) et $U_q^{++}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^{--}(\mathfrak{g})$) est l'idéal de $U_q^+(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})$) engendré par les e_i (resp. f_i).

Remarque 3.1.1.

(i) Pour $\mathfrak{gl}(2, 2)$ ces deux dernières conditions impliquent que :

$$\begin{aligned} e_{\bar{1}} e_1 &= e_1 e_{\bar{1}}, \\ f_{\bar{1}} f_1 &= f_1 f_{\bar{1}}, \\ e_i^2 e_0 + e_0 e_i^2 &= (q + q^{-1}) e_i e_0 e_i \text{ pour } i \in \{\bar{1}, 1\}, \\ f_i^2 f_0 + f_0 f_i^2 &= (q + q^{-1}) f_i f_0 f_i \text{ pour } i \in \{\bar{1}, 1\}, \\ e_0 e_{\bar{1}} e_0 e_1 + e_0 e_1 e_0 e_{\bar{1}} + e_{\bar{1}} e_0 e_1 e_0 + e_1 e_0 e_{\bar{1}} e_0 &= (q + q^{-1}) e_0 e_{\bar{1}} e_1 e_0, \\ f_0 f_{\bar{1}} f_0 f_1 + f_0 f_1 f_0 f_{\bar{1}} + f_{\bar{1}} f_0 f_1 f_0 + f_1 f_0 f_{\bar{1}} f_0 &= (q + q^{-1}) f_0 f_{\bar{1}} f_1 f_0, \\ e_0^2 &= 0, \\ f_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Le sous-groupe quantique engendré par les éléments pairs (i.e. tous sauf e_0 et f_0) est isomorphe au groupe quantique $U_q(\mathfrak{gl}_m) \otimes U_{q^{-1}}(\mathfrak{gl}_n)$.

On introduit un opérateur de parité σ sur $U'_q(\mathfrak{g})$ défini par :

$$\begin{aligned} \sigma(e_i) &= (-1)^{p(i)} e_i \text{ pour tout } i \text{ dans } I, \\ \sigma(f_i) &= (-1)^{p(i)} f_i \text{ pour tout } i \text{ dans } I, \\ \sigma(q^h) &= q^h \text{ pour tout } h \text{ dans } P^*. \end{aligned}$$

Alors σ s'étend en un automorphisme de $U'_q(\mathfrak{g})$ avec $\sigma^2 = 1$.

Définition 3.1.2. On note $U_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre $U'_q(\mathfrak{g}) \oplus U'_q(\mathfrak{g})\sigma$, où la multiplication est donnée par $\sigma^2 = 1$ et $\sigma x \sigma = \sigma(x)$ pour tout x dans $U'_q(\mathfrak{g})$.

On peut munir $U_q(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf, où le co-produit Δ , l'antipode S et la co-unité ε sont donnés par :

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma) &= \sigma \otimes \sigma, \\ \Delta(q^h) &= q^h \otimes q^h, \\ \Delta(e_i) &= e_i \otimes t_i^{-1} + \sigma^{p(i)} \otimes e_i, \\ \Delta(f_i) &= f_i \otimes 1 + \sigma^{p(i)} t_i \otimes f_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(\sigma) &= \sigma, \\ S(q^h) &= q^{-h}, \\ S(e_i) &= -\sigma^{p(i)} e_i t_i, \\ S(f_i) &= -\sigma^{p(i)} t_i^{-1} f_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) &= 1 = \varepsilon(q^h), \\ \varepsilon(e_i) &= 0 = \varepsilon(f_i).\end{aligned}$$

De plus pour i dans I on notera $U_q(\mathfrak{g})_i$ la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par e_i, f_i et t_i . Pour i dans I_0 , on a $U_q(\mathfrak{g})_i$ isomorphe à l'algèbre enveloppante quantique $U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$, tandis que pour i dans I_1 , on a $U_q(\mathfrak{g})_i$ isomorphe à $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$.

D'après [BKK00], le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt reste valable dans ce contexte. On peut donc construire des modules de Verma, qui ont un unique sous-module maximal. On obtient alors (par passage au quotient) les modules simples à plus haut poids. Pour $\lambda \in P$, on note L_λ le module de plus haut poids λ .

3.1.2 Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$

On note, dans ce paragraphe seulement, U_q le groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$ (de générateurs e_0, f_0 et t_0) et M un $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$ -module à poids, c'est-à-dire que l'on a :

$$M = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}} M_\mu \text{ où } M_\mu = \{v \in M / t_0 v = q^\mu v\} \text{ et } \dim M_\mu < \infty$$

Il existe une base de L_μ telle que on ait l'action suivante de U_q :

- si $\mu > 0$, $\dim(L_\mu) = 2$,

$$e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & [\mu] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, t_0 \mapsto \begin{pmatrix} q^\mu & 0 \\ 0 & q^\mu \end{pmatrix}$$

- si $\mu = 0$, $\dim(L_\mu) = 1$,

$$e_0 \mapsto 0, f_0 \mapsto 0, t_0 \mapsto 1,$$

- si $\mu < 0$, $\dim(L_\mu) = 2$,

$$e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\mu] & 0 \end{pmatrix}, t_0 \mapsto \begin{pmatrix} q^\mu & 0 \\ 0 & q^\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{où } [\mu] = \frac{q^\mu - q^{-\mu}}{q - q^{-1}}.$$

Comme remarqué dans [Zou99], on a les deux lemmes suivants qui gardent les mêmes démonstrations, malgré la différence de définition des groupes quantiques.

Lemme 3.1.3.

La décomposition en poids dans U_q est une décomposition en U_q -sous-modules.

Lemme 3.1.4.

Pour $\mu \neq 0$, M_μ est semi-simple et on a :

$$M_\mu = (L_\mu)^{\frac{\dim M_\mu}{2}}.$$

Pour $\mu = 0$, soit P_0 la couverture projective de L_0 , alors ce projectif indécomposable est de dimension 4 et on peut en construire une base telle que :

$$e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, t_0 \mapsto \text{Id},$$

autrement dit U_q agit comme l'algèbre extérieure à deux générateurs.

Alors M_0 est une somme directe de quotients de P_0 .

3.1.3 Catégories de modules

Définition 3.1.5.

Soit $\mathcal{O}_{int}$ la catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules M vérifiant :

- (i) *M a une décomposition en poids :*

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda \text{ où } M_\lambda = \left\{ u \in M / q^h u = q^{<h, \lambda>} u \forall h \in P^* \right\}.$$

- (ii) *$\dim M_\lambda < \infty$ pour tout λ dans P .*

(iii) Pour tout $i \in I_0$, M est localement $U_q(\mathfrak{g})_i$ -fini (i.e. $\dim U_q(\mathfrak{g})_i u < \infty$ pour tout u dans M).

Définition 3.1.6. ([BKK00])

Soit $\mathcal{O}_{BKK}$ la catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules M de $\mathcal{O}_{int}$, M vérifiant :

(iv) Pour tout $i \in I_1$ et $\mu \in P$, $M_\mu \neq 0$ implique $\langle h_i, \mu \rangle \geq 0$

(v) Pour tout $i \in I_1$ et $\mu \in P$ tel que $\langle h_i, \mu \rangle = 0$ on a $e_i M_\mu = f_i M_\mu = 0$

Définition 3.1.7.

Soit $\mathcal{O}_{BKK}^*$ la catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules M de $\mathcal{O}_{int}$ M vérifiant :

(iv)* Pour tout $i \in I_1$ et $\mu \in P$, $M_\mu \neq 0$ implique $\langle h_i, \mu \rangle \leq 0$

(v) Pour tout $i \in I_1$ et $\mu \in P$ tel que $\langle h_i, \mu \rangle = 0$ on a $e_i M_\mu = f_i M_\mu = 0$

Remarque 3.1.8.

1. La catégorie $\mathcal{O}_{int}$ correspond à la définition des modules intégrables dans le cas classique, tandis que pour les deux autres catégories on impose des restrictions importantes sur les modules appartenant à ces catégories (en particulier ils sont semi-simples)

2. La catégorie $\mathcal{O}_{BKK}^*$ est duale de la catégorie $\mathcal{O}_{BKK}$.

Exemple 3.1.9.

1. Soit $\mathbf{V}$ la représentation standard (de dimension $m + \varepsilon n$) de $U_q(\mathfrak{g})$, on a $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1$, où $\mathbf{V}_0 = \bigoplus_{a \in \{\bar{m}, \dots, \bar{1}\}} \mathbb{Q}(q)v_a$ et $\mathbf{V}_1 = \bigoplus_{a \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{Q}(q)v_a$

avec comme action :

$$\begin{aligned} \sigma|_{\mathbf{V}_0} &= \text{Id}_{\mathbf{V}_0}, \\ \sigma|_{\mathbf{V}_1} &= -\text{Id}_{\mathbf{V}_1}, \\ q^h v_a &= q^{\varepsilon_a(h)} v_a, \\ e_i v_a &= \begin{cases} v_{\overline{k+1}} & \text{si } i = \overline{k} \text{ et } a = \overline{k} \text{ pour } k = m-1, \dots, 1, \\ v_{\overline{1}} & \text{si } i = 0 \text{ et } a = 1, \\ v_k & \text{si } i = k \text{ et } a = k+1 \text{ pour } k = 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ f_i v_a &= \begin{cases} v_{\overline{k}} & \text{si } i = \overline{k} \text{ et } a = \overline{k+1} \text{ pour } k = m-1, \dots, 1, \\ v_1 & \text{si } i = 0 \text{ et } a = \overline{1}, \\ v_{k+1} & \text{si } i = k \text{ et } a = k \text{ pour } k = 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

C'est le $U_q(\mathfrak{g})$ -module simple de plus haut poids $\varepsilon_{\overline{m}}$.

2. Soit $\mathbf{V}^*$ le dual de la représentation standard (de dimension $m + \varepsilon n$) de $U_q(\mathfrak{g})$, on a $\mathbf{V}^* = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1$, où $\mathbf{W}_0 = \bigoplus_{a \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{Q}(q)w_{-a}$ et $\mathbf{W}_1 = \bigoplus_{a \in \{\overline{m}, \dots, \overline{1}\}} \mathbb{Q}(q)w_{-a}$ avec comme action :

$$\begin{aligned} \sigma|_{\mathbf{W}_0} &= \text{Id}_{\mathbf{W}_0} \\ \sigma|_{\mathbf{W}_1} &= -\text{Id}_{\mathbf{W}_1} \\ q^h w_a &= q^{-\varepsilon_a(h)} w_a \\ e_i w_a &= \begin{cases} w_{-(k+1)} & \text{si } i = k \text{ et } a = -k \text{ pour } k = 1, \dots, n-1 \\ w_{-1} & \text{si } i = 0 \text{ et } a = -\overline{1} \\ w_{-\overline{k}} & \text{si } i = \overline{k} \text{ et } a = -\overline{k+1} \text{ pour } k = m-1, \dots, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_i w_a &= \begin{cases} w_{-k} & \text{si } i = k \text{ et } a = -(k-1) \text{ pour } k = 1, \dots, n-1 \\ w_{\overline{1}} & \text{si } i = 0 \text{ et } a = -1 \\ w_{-(\overline{k+1})} & \text{si } i = \overline{k} \text{ et } a = -\overline{k} \text{ pour } k = m-1, \dots, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

C'est le $U_q(\mathfrak{g})$ -module simple de plus haut poids $-\varepsilon_n$.

Proposition 3.1.10. [BKK00]

- (1) Une représentation irréductible de $\mathcal{O}_{BKK}$ est un facteur direct de la représentation semi-simple $\mathbf{V}^{\otimes k} \otimes S$ pour un certain entier k et où S est une représentation de dimension 1.
- (2) Soit $\lambda \in P$, L_λ est un objet de $\mathcal{O}_{BKK}$ si et seulement si :
 - (a) $\langle h_i, \lambda \rangle \geq 0$ pour tout $i \in I$.

- (b) Pour k dans $\{1, \dots, n-1\}$ tel que $\langle h_k, \lambda \rangle > 0$ on a
- $$\langle h_0 - h_1 - \dots - h_k, \lambda \rangle \geq k.$$

Remarque 3.1.11.

Soit $\lambda \in P$ tel que L_λ est un objet de $\mathcal{O}_{BKK}$. Si on note λ^* l'opposé du plus bas poids de L_λ , alors L_{λ^*} est dans $\mathcal{O}_{BKK}^*$, et on obtient tous les modules simples de $\mathcal{O}_{BKK}^*$ de cette manière (cf. [Zha98]).

On déduit un résultat similaire à la proposition 3.1.10 pour $\mathcal{O}_{BKK}^*$.

Proposition 3.1.12.

Une représentation simple de $\mathcal{O}_{BKK}^*$ est un facteur direct de la représentation semi-simple $(\mathbf{V}^*)^{\otimes k} \otimes S$ pour un certain entier k et où S est une représentation de dimension 1.

Exemple 3.1.13.

On se place dans $\mathfrak{gl}(2, 2)$, on a alors que $\mathbf{V} = L_{\varepsilon_2}$ et $\mathbf{V}^* = L_{-\varepsilon_2}$. On regarde les carrés tensoriels de ces représentations :

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon_2} \otimes L_{\varepsilon_2} &\simeq L_{2\varepsilon_2} \oplus L_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ L_{-\varepsilon_2} \otimes L_{-\varepsilon_2} &\simeq L_{-2\varepsilon_2} \oplus L_{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \end{aligned}$$

On remarque que ε_2 (resp. ε_2) est le plus bas poids de L_{ε_2} (resp. $L_{-\varepsilon_2}$).

Et de même on remarque que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (resp. $2\varepsilon_2$) est le plus bas poids de $L_{2\varepsilon_2}$ (resp. $L_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$).

3.2 Cristaux dans $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$

3.2.1 Opérateurs modifiés

Tout d'abord on définit les opérateurs modifiés $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ pour $i \in I_0$. Soient $M \in \mathcal{O}_{int}$, et $u \in M$ de poids $\lambda \in P$, alors on a une écriture unique de u sous la forme :

$$u = \sum_{k=0}^{l_i \langle h_i, \lambda \rangle} f_i^{(k)} u_k,$$

avec $e_i u_k = 0$ pour tout k on a posé :

$$f_i^{(n)} = \frac{1}{[n]_i!} f_i^n,$$

avec

$$[n]_i = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}},$$

$$[n]_i! = \prod_{k=1}^n [k]_i.$$

On convient que $f_i^{(n)} = 0$ pour $n < 0$.

Posons $p_k = \langle h_i, \lambda + k\alpha_i \rangle$. On définit alors les opérateurs modifiés par :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(u) &= \begin{cases} \sum_k f_i^{(k-1)} u_k & \text{si } l_i > 0, \\ \sum_k q_i^{p_k - 2k + 1} f_i^{(k-1)} u_k & \text{si } l_i < 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_i(u) &= \begin{cases} \sum_k f_i^{(k+1)} u_k & \text{si } l_i > 0, \\ \sum_k q_i^{-p_k + 2k + 1} f_i^{(k+1)} u_k & \text{si } l_i < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $i = 0$ on pose $\lambda_0 = \langle h_0, \lambda \rangle$, on définit de manière similaire à [BKK00] (la seule différence étant qu'ils sont aussi définis pour $\lambda_0 < 0$) les opérateurs modifiés par :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0(u) &= \begin{cases} q^{\lambda_0 - 1} e_0 u & \text{si } \lambda_0 > 0, \\ e_0 u & \text{si } \lambda_0 \leq 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_0(u) &= \begin{cases} f_0 u & \text{si } \lambda_0 \geq 0, \\ -q^{-\lambda_0 - 1} f_0 u & \text{si } \lambda_0 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $u \in M$ avec $e_0 u = 0$ et de poids $wt(u)$ tel que $\langle h_0, wt(u) \rangle \neq 0$ alors, pour $q = 0$, $\tilde{e}_0(\tilde{f}_0(u)) = u$.

3.2.2 Réseau et base cristalline

On note A le sous-anneau de $\mathbb{Q}(q)$ formé des fonctions régulières en $q = 0$, c'est un anneau local, d'un unique idéal maximal qA , l'application de A/qA dans $\mathbb{Q}$ qui à f associe $f(0)$ est un isomorphisme, de plus $\mathbb{Q}(q) = \bigcup_{n \geq 0} q^{-n} A$, donc A est un anneau de valuation discrète. En particulier tout sous- A -module d'un module libre est libre. De plus on peut remarquer que les éléments de $1 + qA$ sont inversibles.

Définition 3.2.1. [BKK00]

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module dans la catégorie $\mathcal{O}_{int}$.

Un sous- A -module libre $\mathcal{L}$ de M est appelé réseau cristallin si :

- (i) $\mathcal{L}$ engendre M comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}(q)$.
- (ii) $\sigma\mathcal{L} = \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ a une décomposition en poids $\mathcal{L} = \bigoplus \mathcal{L}_\lambda$ où $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} \cap M_\lambda$.
- (iii) $\tilde{e}_i(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ et $\tilde{f}_i(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ pour tout i dans I .

Exemple 3.2.2.

Pour la représentation standard $\mathbf{V}$, si on pose :

$$\mathbf{L} = \bigoplus_{a \in \{\bar{m}, \dots, \bar{1}\}} Av_a \oplus \bigoplus_{a \in \{1, \dots, n\}} Av_a$$

$\mathbf{L}$ est un réseau cristallin de $\mathbf{V}$.

Définition 3.2.3. [BKK00]

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module dans la catégorie $\mathcal{O}_{BKK}$ (ou $\mathcal{O}_{BKK}^*$).

Une base cristalline de M est une paire $(\mathcal{L}, B)$ telle que :

- (i) $\mathcal{L}$ est un réseau cristallin.
- (ii) B est un sous-ensemble de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ tel que $\sigma b = \pm b$ pour tout $b \in B$ et B a une décomposition en poids $B = \coprod B_\lambda$ où $B_\lambda = B \cap (\mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda)$.
- (iii) B est une pseudo-base de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ (i.e. $B = B^\bullet \cup (-B^\bullet)$ pour une base $B^\bullet$ sur $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$).
- (iv) $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$ pour tout $i \in I$.
- (v) Pour tous b et b' de B la condition $b = \tilde{f}_i b'$ est équivalente à $b' = \tilde{e}_i b$.

La définition qui suit concerne les bases cristallines pour les objets de $\mathcal{O}_{BKK} \otimes \mathcal{O}_{BKK}^*$. On est obligé d'affaiblir la notion de cristal. Pour un vecteur de poids de M , b , on note $wt(b)$ le poids de b . L'affaiblissement de la condition (v) (pour des éléments b tel que $\langle h_0, wt(b) \rangle = 0$) est une conséquence du fait que les modules regardés ne sont pas nécessairement complètement réductibles, les autres modifications (pour les conditions (iv) et (v)) sont nécessaires pour pouvoir construire des cristaux en tensorisant deux cristaux, mais n'entraînent que des lourdeurs techniques supplémentaires.

Définition 3.2.4.

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module dans la catégorie $\mathcal{O}_{int}$.

Une base cristalline est une paire $(\mathcal{L}, B)$ tel que :

- (i) $\mathcal{L}$ est un réseau cristallin.

- (ii) B est un sous-ensemble de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ tel que $\sigma b = \pm b$ pour tout $b \in B$ et B a une décomposition en poids $B = \coprod B_\lambda$ où $B_\lambda = B \cap (\mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda)$.
- (iii) B est une pseudo-base de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ (i.e. $B = B^\bullet \cup (-B^\bullet)$ pour une base $B^\bullet$ sur $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$).
- (iv)
 - Pour $i \in I_0$ on a $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$.
 - Pour $i \in I_1$ et $b \in B$ on a :
 - (a) Si $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \neq 1$ alors $\tilde{e}_i b \in B \sqcup \{0\}$.
 - (b) Si $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \neq -1$ alors $\tilde{f}_i b \in B \sqcup \{0\}$.
 - (c) Si $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = 1$ alors il existe b_1 et b_2 dans $B \sqcup \{0\}$ tel que $\tilde{e}_i b = b_1 + b_2$ avec $\tilde{f}_i b_1 = b$ et $\tilde{f}_i b_2 = 0$.
 - (d) Si $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = -1$ alors il existe b_1 et b_2 dans $B \sqcup \{0\}$ tel que $\tilde{f}_i b = b_1 + b_2$ avec $\tilde{e}_i b_2 = b$ et $\tilde{e}_i b_1 = 0$.
- (v) Pour tout b et b' dans B .
 - (a) Si $i \in I_0$ alors la condition $b = \tilde{f}_i b'$ est équivalente à $b' = \tilde{e}_i b$.
 - (b) Si $i \in I_1$ et $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \notin \{0, \pm 1\}$ alors la condition $b = \tilde{f}_i b'$ est équivalente à $b' = \tilde{e}_i b$.
 - (c) Si $i \in I_1$ et $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = 1$ alors la condition $b = \tilde{f}_i b'$ est équivalente à $b' + b'' = \tilde{e}_i b$ pour $b'' \in B \sqcup \{0\}$ tel que $\tilde{f}_i b'' = 0$.
 - (d) Si $i \in I_1$ et $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = -1$ alors la condition $b = \tilde{e}_i b'$ est équivalente à $b' + b'' = \tilde{f}_i b$ pour $b'' \in B \sqcup \{0\}$ tel que $\tilde{e}_i b'' = 0$.

Soit $(\mathcal{L}, B)$ une base cristalline d'un module M de $\mathcal{O}_{int}$. On lui associe un graphe cristallin (qu'on appellera aussi cristal) : c'est le graphe colorié ayant $B/\{\pm 1\}$ comme ensemble de sommets, et où on relie b et b' (de $B/\{\pm 1\}$), par une flèche de type i pour $I \in I_0$, $b \xrightarrow{i} b'$, si $b' = \tilde{f}_i b$, et par une des flèches impaires ($i \in I_1$) :

$$b \xrightarrow{i} b' \text{ si } b' = \tilde{f}_i b \text{ et } b = \tilde{e}_i b',$$

$$b \xrightarrow{i} b' \text{ si } \tilde{f}_i b = b'' + b' \text{ avec } b = \tilde{e}_i b' \text{ et } b'' \neq 0 \text{ ou si } \tilde{e}_i b' = b + b'' \text{ avec } b = \tilde{e}_i b' \text{ et } b'' \neq 0,$$

$$b \xrightarrow{i} b' \text{ si } b' = \tilde{f}_i b \text{ et } \tilde{e}_i b' \neq b,$$

$$b \xrightarrow{i} b' \text{ si } \tilde{f}_i b \neq b' \text{ et } b = \tilde{e}_i b'.$$

Remarque 3.2.5.

On retrouve les graphes cristallins de [BKK00] pour les modules de $\mathcal{O}_{BKK}$.

Exemple 3.2.6.

Pour la représentation standard $\mathbf{V}$, on pose :

$$\mathbf{B} = \{\pm v_a \bmod \mathbf{L} / a \in \{\bar{m}, \dots, \bar{1}, 1, \dots, n\}\}$$

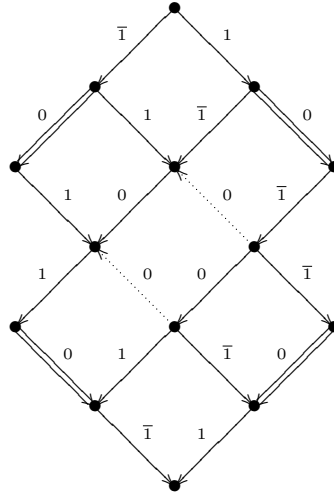
On a alors que $(\mathbf{L}, \mathbf{B})$ est une base cristalline de $\mathbf{V}$. Le graphe cristallin associé est :

$$\boxed{\bar{m}} \xrightarrow{\bar{m}-1} \boxed{\bar{m}-1} \xrightarrow{\bar{m}-2} \dots \xrightarrow{\bar{1}} \boxed{\bar{1}} \xrightarrow{0} \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{n-2} \boxed{n-1} \xrightarrow{n-1} \boxed{n}$$

Exemple 3.2.7.

On regarde pour $U_q(\mathfrak{gl}(2, 2))$ le module simple de plus haut poids $\varepsilon_{\bar{2}} - \varepsilon_2$ (ce module est dans $\mathcal{O}_{int}$)

Un calcul permet de voir que ce module possède une base cristalline dont le graphe cristallin est :



Soit v un vecteur primitif de plus haut poids $(1, 0 | 0 - 1)$ qui engendre $L_{(1,0|0,-1)}$, le calcul consiste juste à appliquer les opérateurs modifiés à v et à construire tous les vecteurs possibles, puis, dans le cas où on a un choix, à vérifier qu'ils sont égaux en $q = 0$. Dans cet exemple, l'espace de poids 0 est de dimension 2, et on a 3 manières d'aller de v à un vecteur de poids 0 en utilisant seulement les opérateurs $\tilde{f}_i$ (on en a plus si on utilise aussi les $\tilde{e}_i$), ce sont :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_{\bar{1}} v &= f_0 f_1 f_{\bar{1}} v, \\ \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 \tilde{f}_{\bar{1}} v &= f_1 f_0 f_{\bar{1}} v, \\ \tilde{f}_{\bar{1}} \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 v &= q f_{\bar{1}} f_0 f_1 v. \end{aligned}$$

Or on peut remarquer que $(q + q^{-1})f_0 f_{\bar{1}} f_1 v = f_{\bar{1}} f_0 f_1 v + f_1 f_0 f_{\bar{1}} v$ (pour le voir on note que la différence est annulée par e_i pour tout i , ce qui implique que cette différence est nulle).

Ceci donne la relation :

$$(1 + q^2)\tilde{f}_0\tilde{f}_1\tilde{f}_{\bar{1}}v = q\tilde{f}_1\tilde{f}_0\tilde{f}_{\bar{1}}v + \tilde{f}_{\bar{1}}\tilde{f}_0\tilde{f}_1v.$$

On a donc en $q = 0$ seulement deux vecteurs différents. Le reste du calcul se fait exactement de la même manière.

Pour $b \in B$ et $i \in I$ on pose :

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(b) &= \max \{n \in \mathbb{N} / \tilde{e}_i^n(b) \neq 0\}, \\ \varphi_i(b) &= \max \{n \in \mathbb{N} / \tilde{f}_i^n(b) \neq 0\}.\end{aligned}$$

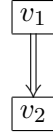
D'après la théorie des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ on a :

$$\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \text{ pour } i \in I_{\underline{0}}.$$

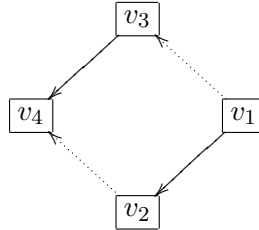
Pour $i \in I_{\underline{1}}$ on a (d'après la théorie des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$) $\varphi_i(b) + \varepsilon_i(b)$ qui vaut 1 si $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \neq 0$, et qui vaut 0, 1 ou 2 si $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = 0$

3.2.3 Cristaux de représentations de $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$

On reprend les notations du paragraphe 3.1.2 sur $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$, on a pour $\mu \neq 0$ et en prenant v_1 et v_2 comme base de L_μ (celle donnant les actions décrites), on a $L_\mu = \mathbb{Q}(q)v_1 \oplus \mathbb{Q}(q)v_2$, alors $\mathcal{L}_\mu = \mathbb{Q}(q)v_1 \oplus \mathbb{Q}(q)v_2$ et $B_\mu = \{\pm v_1, \pm v_2\}$ forment une base cristalline de L_μ de graphe cristallin :



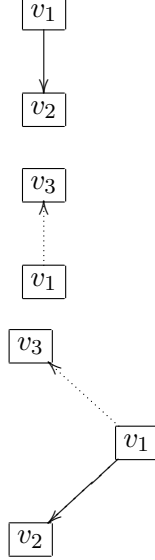
Pour $\mu = 0$, on a le projectif indécomposable de graphe cristallin :



Comme quotient il admet le module trivial de graphe cristallin :



Mais aussi trois autres modules indécomposables :



3.2.4 Produit tensoriel

Soient M_1 et M_2 deux $U_q(\mathfrak{g})$ -modules (chacun dans l'une des catégories $\mathcal{O}_{BKK}$ ou $\mathcal{O}_{BKK}^*$) admettant des bases cristallines $(\mathcal{L}_1, B_1)$ et $(\mathcal{L}_2, B_2)$. On pose $M = M_1 \otimes M_2$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_A \mathcal{L}_2$ et $B = B_1 \otimes B_2 \subset \mathcal{L}/q\mathcal{L}$.

En utilisant le co-produit et la définition des opérateurs modifiés on en déduit les actions tordues dans B :

A. Pour $i \in I_0$:

A.1. Cas $l_i > 0$ (i.e. i dans $\{\overline{m-1}, \dots, \overline{1}\}$) :

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i(b_2) & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i(b_2) & \text{si } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

A.2. Cas $l_i < 0$ (i.e. i dans $\{1, \dots, n-1\}$) :

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_2) > \varepsilon_i(b_1), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i(b_2) & \text{si } \varphi_i(b_2) \leq \varepsilon_i(b_1). \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_2) \geq \varepsilon_i(b_1), \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i(b_2) & \text{si } \varphi_i(b_2) < \varepsilon_i(b_1). \end{cases}$$

B. Pour $i \in I_1$ (i.e. $i = 0$), en posant $\eta_1 = \langle h_0, \text{wt}(b_1) \rangle$ et $\eta_2 = \langle h_0, \text{wt}(b_2) \rangle$, on a :

B.1. Cas M_1 et M_2 dans $\mathcal{O}_{BKK}$ (donc $\eta_1 \geq 0$ et $\eta_2 \geq 0$) :

$$\tilde{f}_0(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_0(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \eta_1 > 0, \\ \sigma b_1 \otimes \tilde{f}_0(b_2) & \text{si } \eta_1 = 0. \end{cases}$$

$$\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_0(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \eta_1 > 0, \\ \sigma b_1 \otimes \tilde{e}_0(b_2) & \text{si } \eta_1 = 0. \end{cases}$$

B.2. Cas M_1 et M_2 dans $\mathcal{O}_{BKK}^*$ (donc $\eta_1 \leq 0$ et $\eta_2 \leq 0$) :

$$\tilde{f}_0(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_0(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \eta_2 = 0, \\ \sigma b_1 \otimes \tilde{f}_0(b_2) & \text{si } \eta_2 < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_0(b_1) \otimes b_2 & \text{si } \eta_2 = 0, \\ \sigma b_1 \otimes \tilde{e}_0(b_2) & \text{si } \eta_2 < 0. \end{cases}$$

B.3. Cas M_1 dans $\mathcal{O}_{BKK}$ et M_2 dans $\mathcal{O}_{BKK}^*$ (donc $\eta_1 \geq 0$ et $\eta_2 \leq 0$) :

$$\tilde{f}_0(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_0(b_1) \otimes b_2 & \text{si } (\eta_1 + \eta_2) \geq 0, \\ \sigma b_1 \otimes \tilde{f}_0(b_2) & \text{si } (\eta_1 + \eta_2) < -1, \\ -\tilde{f}_0(b_1) \otimes b_2 + \sigma b_1 \otimes \tilde{f}_0(b_2) & \text{si } (\eta_1 + \eta_2) = -1. \end{cases}$$

$$\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_0(b_1) \otimes b_2 & \text{si } (\eta_1 + \eta_2) > 1, \\ \sigma b_1 \otimes \tilde{e}_0(b_2) & \text{si } (\eta_1 + \eta_2) \leq 0, \\ \tilde{e}_0(b_1) \otimes b_2 + \sigma b_1 \otimes \tilde{e}_0(b_2) & \text{si } (\eta_1 + \eta_2) = 1. \end{cases}$$

On rappelle un résultat de [BKK00] :

Proposition 3.2.8. *Si on a pris deux modules dans $\mathcal{O}_{BKK}$ (resp. $\mathcal{O}_{BKK}^*$) alors le produit tensoriel B des deux cristaux est un cristal du produit tensoriel M des deux modules.*

Théorème 3.2.9.

Soient M dans $\mathcal{O}_{BKK}$ et N dans $\mathcal{O}_{BKK}^$, alors $M \otimes N$ possède une base cristalline, qui est le produit tensoriel des deux bases cristallines.*

Démonstration.

Il faut montrer que B est bien une base cristalline de M , clairement B vérifie les trois premiers points de la définition de bases cristallines, il a le bon rang pour être celle de M , il reste donc à montrer que nous avons les actions voulues de $U_q(\mathfrak{g})$. Pour ce faire, il est suffisant de le montrer au niveau de $U_q(\mathfrak{g})_i$ pour $i \in I$. Pour le cas $i \in I_0$ il suffit de remarquer (comme dans [BKK00]) que $e_i, f_i, t_i^{l_i}$ engendrent une sous-algèbre isomorphe à $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ et que c'est donc déjà montré dans [Kas90] et [Kas91] (en faisant attention comme dans

[BKK00] pour le cas $l_i < 0$).

Pour $i \in I_{\underline{1}}$ (i.e. $i = 0$), il suffit de le montrer pour les $U_q(\mathfrak{g})_0$ -modules simples, c'est à dire $M_1 = L_a$ et $M_2 = L_b$ pour a, b dans $\mathbb{Z}$ (on reprend les notations du paragraphe 3.1.2 sur $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$). De plus on peut supposer $a \neq 0$ et $b \neq 0$, en effet si (par exemple) $a = 0$ alors $L_a \otimes L_b \simeq L_b$ (i.e. L_a est le module trivial).

Comme $a > 0$ car $L_a \in \mathcal{O}_{BKK}$, il existe une base v_1, v_2 de L_a telle que les actions de e_0 et f_0 soient données par :

$$e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & [a] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, t_0 \mapsto \begin{pmatrix} q^a & 0 \\ 0 & q^a \end{pmatrix}$$

Comme $b < 0$ car $L_b \in \mathcal{O}_{BKK}^*$, il existe une base w_1, w_2 de L_b telle que les actions de e_0 et f_0 soient données par :

$$e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [b] & 0 \end{pmatrix}, t_0 \mapsto \begin{pmatrix} q^b & 0 \\ 0 & q^b \end{pmatrix}$$

• Cas $a + b > 0$.

D'après ce que l'on sait sur les $U_q(\mathfrak{sl}(1, 1))$ -modules, on a :

$$L_a \otimes L_b \simeq L_{a+b} \oplus L_{a+b}$$

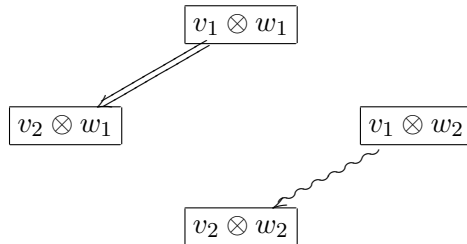
On pose :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \otimes w_1, & u_2 &= v_2 \otimes w_1 + q^{a+b+1} \frac{1-q^{-2b}}{q^2-1} v_1 \otimes w_2, \\ u_3 &= \frac{q^{2a}-1}{q^2-1} v_1 \otimes w_2 - q^{a+b-1} v_2 \otimes w_1, & u_4 &= v_2 \otimes w_2. \end{aligned}$$

Alors $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de $L_a \otimes L_b$, de plus $\{u_1, u_2\}$ (resp. $\{u_3, u_4\}$) est une base d'un sous-module isomorphe à L_{a+b} . On a deux cas, soit $a+b > 1$, et il n'y a aucun problème en $q = 0$, soit $a+b = 1$, et en $q = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(v_1 \otimes w_1) &= v_2 \otimes w_1, & \tilde{e}_0(v_2 \otimes w_1) &= v_1 \otimes w_1, \\ \tilde{f}_0(v_1 \otimes w_2 + v_2 \otimes w_1) &= v_2 \otimes w_2, & \tilde{e}_0(v_2 \otimes w_2) &= v_1 \otimes w_2. \end{aligned}$$

Le graphe cristallin est ici :



Le produit tensoriel du cristal est donc bien un cristal du produit tensoriel.

- Cas $a + b < 0$.

Ce cas est similaire au cas précédent.

- Cas $a + b = 0$.

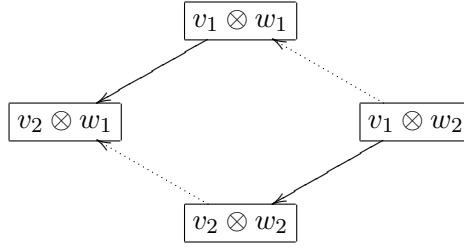
On pose :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \otimes w_1, & u_2 &= v_2 \otimes w_1 + q^{\frac{1-q^{2a}}{q^2-1}} v_1 \otimes w_2, \\ u_3 &= v_1 \otimes w_2, & u_4 &= v_2 \otimes w_2. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(u_1) &= u_2, & \tilde{e}_0(u_4) &= -u_2, \\ \tilde{f}_0(u_2) &= u_4, & \tilde{e}_0(u_2) &= u_1. \end{aligned}$$

D'où, en $q = 0$, on a le graphe cristallin :



Ceci permet de conclure, on peut remarquer qu'on a montré de plus que :

$$L_a \otimes L_{-a} \simeq P_0,$$

on rappelle que P_0 désigne la couverture projective de L_0 . □

Exemple 3.2.10.

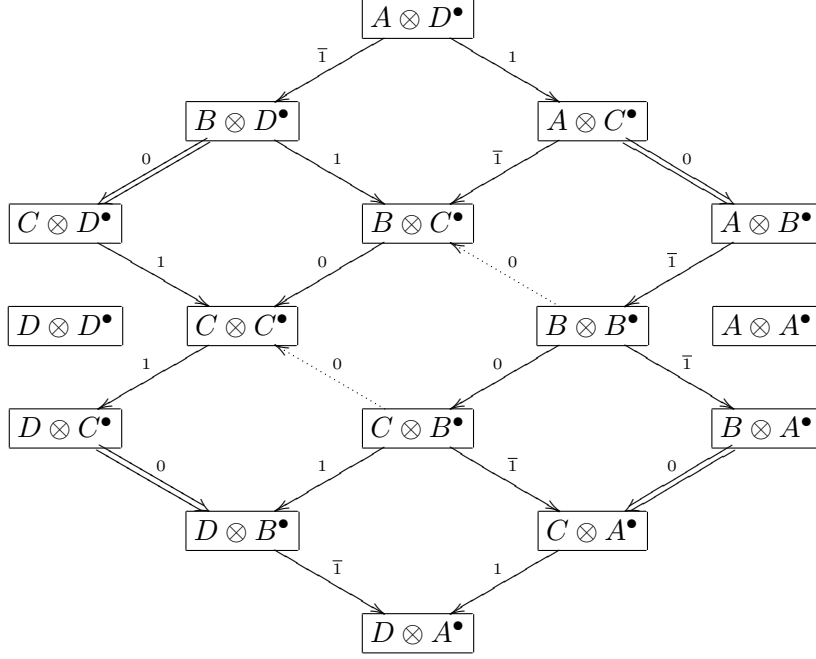
On regarde pour $U_q(\mathfrak{gl}(2, 2))$ le cristal du produit tensoriel de $\mathbf{V}$ par $\mathbf{V}^*$. Le graphe cristallin de $\mathbf{V}$ est :

$$\boxed{A} \xrightarrow{\bar{1}} \boxed{B} \rightleftharpoons \boxed{C} \xrightarrow{1} \boxed{D} \quad .$$

Le graphe cristallin de $\mathbf{V}^*$ est :

$$\boxed{D^\bullet} \xrightarrow{1} \boxed{C^\bullet} \rightleftharpoons \boxed{B^\bullet} \xrightarrow{\bar{1}} \boxed{A^\bullet} \quad .$$

Le graphe cristallin de $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ est alors :



On remarque que le graphe cristallin de $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ est la somme directe du graphe cristallin du module simple de plus haut poids $\varepsilon_{\bar{2}} - \varepsilon_2$ et de deux copies du graphe cristallin de la représentation triviale.

Attention on ne peut pas conclure que $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ est la somme directe des trois $U_q(\mathfrak{g})$ -modules correspondants, en effet pour cela il faudrait montrer que l'on peut remonter $D \otimes D^\bullet$ et $A \otimes A^\bullet$ dans le réseau cristallin de sorte que $\tilde{e}_0, \tilde{f}_0$ agissent par zéro sur ces éléments et aussi qu'ils ne sont pas l'image par $\tilde{e}_0$ et $\tilde{f}_0$ d'éléments de la composante connexe contenant $A \otimes D^\bullet$.

3.3 Résultats sur les cristaux dans $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$

3.3.1 Connexité de la base cristalline

Définition 3.3.1.

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module ayant $(\mathcal{L}, B)$ pour base cristalline, on dit que B est connexe si pour tout b et b' dans B il existe deux suites $(b_0, \dots, b_p)$ et

$(b'_0, \dots, b'_p)$ d'éléments de B et des suites $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_q)$ d'éléments de $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i / i \in I\}$ tel que :

$$\begin{array}{ll} b_0 = b & b'_0 = b' \\ b_p = b' & b'_p = b \\ b_k = x_k b_{k-1} \quad \forall k = 1 \dots p & b'_l = y_l b'_{l-1} \quad \forall l = 1 \dots q \end{array}$$

Remarque 3.3.2.

Attention, contrairement au cas classique, il est possible d'avoir deux éléments b et b' tels que l'on puisse relier b à b' mais pas b' à b . Ceci est dû aux modifications de la condition (v) (cas $\langle h_0, \text{wt}(b) \rangle = 0$) de la définition de base cristalline.

L'autre modification (la base cristalline n'est pas nécessairement stable par les $\tilde{e}_i$ et les $\tilde{f}_i$) ne pose pas trop de problèmes, en effet on contourne en demandant en plus du fait que $B' \subset B$ est une composante connexe, que le sous-module (libre) lui correspondant dans $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ vérifie des propriétés analogues.

De plus si $\tilde{f}_0 b$ (resp. $\tilde{e}_0 b$) est la somme $b_1 + b_2$ avec $\tilde{e}_0 b_1 = b$ (resp. $\tilde{f}_0 b_2 = b$) et les deux sont non nuls, le seul cas qui pose problème est lorsque b_1 et b_2 ne sont pas dans la même composante connexe, en pratique on quotiente par la composante connexe contenant b_2 (resp. b_1) et le problème disparaît.

Lemme 3.3.3.

Soient M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module, $(\mathcal{L}, B)$ et $(\mathcal{L}', B')$ deux bases cristallines de M et un poids λ tel que $\dim M_\lambda = 1$.

Alors la composante connexe de B contenant B_λ est isomorphe à la composante connexe de B' contenant B'_λ .

Démonstration.

On peut supposer que $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}'_\lambda$ et que $B_\lambda = B'_\lambda = \{\pm b_\lambda\}$.

Soit $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} + \mathcal{L}'$, alors $\mathcal{L}''$ est un réseau cristallin de M .

Soient $\psi : \mathcal{L}/q\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}''/q\mathcal{L}''$ et $\psi' : \mathcal{L}'/q\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}''/q\mathcal{L}''$ les morphismes induits.

Soit $\tilde{B}$ (resp. $\tilde{B}'$) la composante connexe de B (resp. B') contenant B_λ .

L'application $\tilde{B} \rightarrow \psi(\tilde{B})$ commute avec $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$, de plus, par la connexité de B , elle est injective, donc bijective.

En effet on a $\psi(b_\lambda) \neq 0$, or pour tout $b \in \tilde{B}$ il existe y tel que $b_\lambda = yb$, d'où $\psi(b_\lambda) = y\psi(b)$, on a $y\psi(b) \neq 0$ d'où $\psi(b) \neq 0$.

En faisant la même chose avec l'autre base cristalline, et en remarquant que $\psi(\tilde{B})$ et $\psi(\tilde{B}')$ sont égaux (car ce sont des composantes connexes d'intersection non vide), on peut conclure. $\square$

Lemme 3.3.4.

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module ayant $(\mathcal{L}, B)$ comme base cristalline, et tel que :

- (a) Le cristal est connexe.
- (b) Il existe un poids λ tel que $\dim M_\lambda = 1$.

Alors :

- (i) $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ est irréductible (comme module sur l'algèbre engendrée par les $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$).
- (ii) M est irréductible.
- (iii) pour tout réseau cristallin $\mathcal{L}'$ de M , $\mathcal{L}'_\lambda = \mathcal{L}_\lambda$ implique $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.
- (iv) La base cristalline de M est unique (à multiplication par une constante près).

Démonstration.

- (i) Soit K un sous-espace de $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ stabilisé par les $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ non nul.

Soit $v \in K$ un vecteur non nul de poids μ , on a $v = \sum_{b \in C} a_b b$ où C est une partie libre de B_μ et les a_b sont des scalaires.

Soit $b \in C$ tel que $a_b \neq 0$, par connexité il existe des combinaisons x et y de $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ tel que $xb \in B_\lambda$ et $yb_\lambda = b$ (où $B_\lambda = \{\pm b_\lambda\}$)

Nécessairement pour tout b' de C différent de b on a $xb' = 0$ (sinon $xb' = \pm b_\lambda$ et donc $b' = \pm b$, or C est une famille libre), on a donc $xv = a_b b_\lambda$, donc $B_\lambda \subset K$, donc $B \subset K$, ce qui fait que $K = \mathcal{L}/q\mathcal{L}$.

Pour (ii), (iii) et (iv) la preuve est exactement la même que dans [BKK00] $\square$

3.3.2 Base cristalline et filtration par socle

Exemple 3.3.5.

Il existe des modules indécomposables qui ne sont pas simples, par exemple

dans $\mathfrak{gl}(2, 2)$, si on note

$$\mathfrak{g}^{+1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \right\},$$

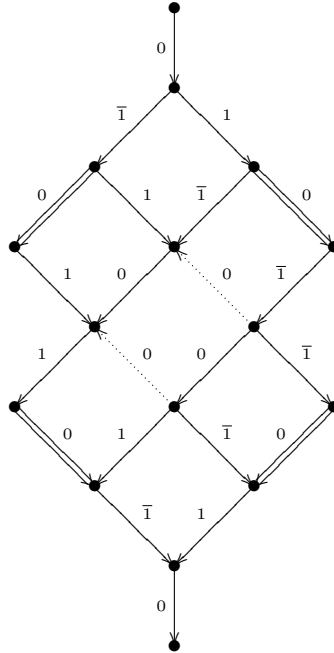
$$\mathfrak{g}^{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right), C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \right\},$$

et que l'on regarde la représentation (de $\mathcal{O}_{int}$) $K_{(0,0|0,0)} = \text{Ind}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$ (qui est isomorphe comme espace vectoriel à $\bigwedge(\mathfrak{g}^{-1})$), elle est indécomposable, en effet elle admet un vecteur de plus bas poids qui est contenu dans tous ses sous-modules.

Le théorème 2.2 de Serganova dans [Ser96] (ou plutôt sa version combinatoire exposée dans [Gru06]) donne la liste des sous-quotients simples (avec parité), ce sont $L_{(0,0|0,0)}$, $L_{(-2,-2|2,2)}$ (qui sont pairs), et $L_{(0,-1|1,0)}$ (impair).

Sachant que ce module admet comme unique quotient simple le module $L_{(0,0|0,0)}$ et que l'action de la racine simple impaire change la parité on peut en déduire qu'il admet comme suite de Jordan-Hölder : $V_0 \subset V_1 \subset V_2$ avec $V_2 = K_{(0,0|0,0)}$, $V_2/V_1 = L_{(0,0|0,0)}$, $V_1/V_0 = L_{(0,-1|1,0)}$ et $V_0 = L_{(-2,-2|2,2)}$.

On connaît les cristaux de ces trois sous-quotients simples, il reste donc à voir s'il est possible de les relier pour former un cristal de $K_{(0,0|0,0)}$. Pour cela il suffit de remarquer que si on prend un vecteur v primitif qui engendre $K_{(0,0|0,0)}$, alors les vecteurs radiciels des racines paires agissent par 0 sur lui, et que $f_0(v)$ est un vecteur primitif qui engendre un module ayant $L_{(0,-1|1,0)}$ comme unique quotient simple. Puis on fait de même avec le vecteur de plus bas poids (qui est ici primitif et engendre $L_{(-2,-2|2,2)}$).



On remarque que ce graphe cristallin possède trois composantes connexes, qui correspondent aux sous-quotients simples de la représentation.

Proposition 3.3.6.

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module ayant $(\mathcal{L}, B)$ comme base cristalline.

Soit $\mathcal{L}'$ un A -sous-module de $\mathcal{L}$ stabilisé par les $\tilde{e}_i$ et les $\tilde{f}_i$ et tel qu'il existe une pseudo-base B' de $\mathcal{L}'/q\mathcal{L}'$ telle que $B' \subset B$

- (1) *Il existe un sous-module N de M tel que $(\mathcal{L}', B')$ soit une base cristalline de N .*
- (2) *Le module M/N admet $(\mathcal{L}/\mathcal{L}', B \setminus B')$ comme base cristalline.*
- (3) *Si de plus B' est connexe, alors N est un facteur direct de M .*

Démonstration.

A tout $b \in B$ on associe un élément $\bar{b}$ de $\mathcal{L}$ tel que $b \equiv \bar{b} \pmod{q\mathcal{L}}$, par le lemme de Nakayama les éléments $\bar{b}$ engendrent $\mathcal{L}$.

Alors $\mathcal{L}'$ est le A -sous-module libre engendré par les $\bar{b}$ pour $b \in B'$.

- (1) On pose $N = \mathbb{Q}(q) \otimes \mathcal{L}'$ alors N est un sous-module de M de base cristalline $(\mathcal{L}', B')$.
- (2) On remarque que $B \setminus B'$ est une pseudo-base de $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$, et on a alors que $(\mathcal{L}/\mathcal{L}', B \setminus B')$ est une base cristalline du module $\mathbb{Q}(q) \otimes \mathcal{L}/\mathcal{L}'$ qui est isomorphe à M/N .
- (3) Soit $\mathcal{L}''$ engendré par les $\bar{b}$ pour $b \in B''$ où B'' est le complémentaire de B' dans B . Par la connexité de B' , on a $\mathcal{L}''$ stable par les $\tilde{e}_i$ et les $\tilde{f}_i$, et donc $C = \mathbb{Q}(q) \otimes \mathcal{L}''$ est un sous-module de M , et comme $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ on a $M = N \oplus C$.

□

Ces différents lemmes et cette proposition permettent d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.3.7.

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module ayant $(\mathcal{L}, B)$ comme base cristalline et tel que pour chaque composante connexe du cristal on est dans les hypothèses de la proposition précédente.

On pose $M_0 = M$ et $(\mathcal{L}_0, B_0) = (\mathcal{L}, B)$.

On construit des sous-modules M_k de M , pour k allant de 1 au plus petit entier l vérifiant $M_l = \{0\}$ par le procédé :

Soit B_k la plus grosse réunion de composantes connexes de B_{k-1} qui est stabilisée par les $\tilde{e}_i$ et les $\tilde{f}_i$, on pose $\mathcal{L}_k$ le A -sous-module de $\mathcal{L}_{k-1}$ engendré par B_k , et M_k le sous-module de M_{k-1} ayant $(\mathcal{L}_k, B_k)$ comme base cristalline.

Alors $M_k = \text{rad}^k(M)$ pour tout k entre 0 et l , et l est la longueur de Loewy de M .

Soit S le module simple de plus haut poids :

$$\lambda = a_{\overline{m}}\varepsilon_{\overline{m}} + \dots + a_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{1}} + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$$

pour des entiers $a_{\overline{m}} \geq \dots \geq a_{\overline{1}}$ et des entiers $a_1 \geq \dots \geq a_n$.

On remarque que le module simple V_g de plus haut poids $a_{\overline{m}}\varepsilon_{\overline{m}} + \dots + a_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{1}}$ est dans $\mathcal{O}_{BKK}$, et que le module simple V_d de plus haut poids $a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n$ est dans $\mathcal{O}_{BKK}^*$.

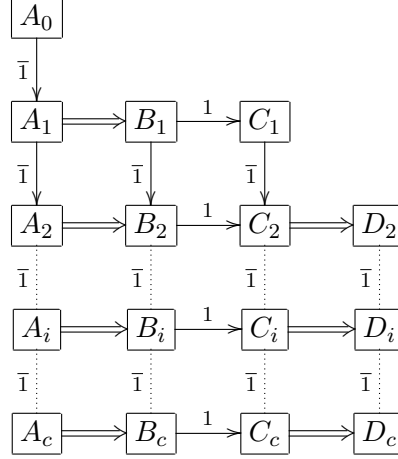
Donc le module $V = V_g \otimes V_d$ admet une base cristalline $(\mathcal{L}, B)$ construite comme produit tensoriel des bases cristallines $(\mathcal{L}_g, B_g)$ de V_g et $(\mathcal{L}_d, B_d)$ de V_d . Soit b_g (resp. b_d) l'élément (unique au signe près) de B_g (resp. B_d) de plus haut poids, ils correspondent à des vecteurs primitifs. Alors $b_g \otimes b_d$ correspond à un vecteur primitif de V , il engendre donc un sous-module de V ayant S comme unique quotient simple. Si le complémentaire de la composante connexe contenant $b_g \otimes b_d$ correspond à un sous-réseau-cristallin stabilisé par les opérateurs modifiés, alors la composante connexe contenant $b_g \otimes b_d$ est le graphe cristallin de S .

3.3.3 Le cas $U_q(\mathfrak{gl}(2, 2))$

Déterminons les cristaux des représentations simples maximales atypiques de $U_q(\mathfrak{gl}(2, 2))$, ce sont les modules simples de plus haut poids $a\varepsilon_{\overline{2}} + b\varepsilon_{\overline{1}} - a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2$ pour $a \geq b$ (on le notera $(a, b | -b, -a)$), on peut se restreindre à $a = c \in \mathbb{N}$ et $b = 0$, le cas $c = 0$ correspond au module trivial, et le cas $c = 1$ à déjà été traité dans l'exemple 3.2.10, supposons maintenant $c \geq 2$.

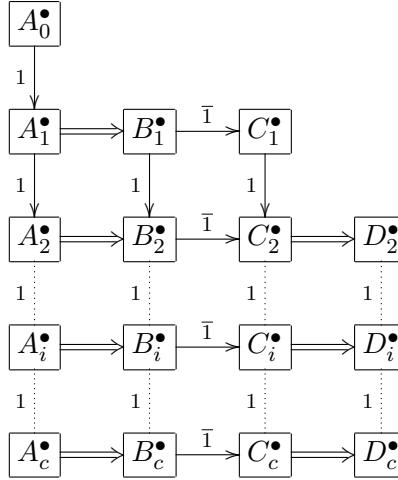
Posons $U_q(\mathfrak{g})_{\underline{0}}$ le sous groupe quantique de $U_q(\mathfrak{g})$ engendré par e_i, f_i , et q^h pour tout h et pour $i \in I_{\underline{0}}$ (il est isomorphe à $U_q(\mathfrak{gl}_2) \oplus U_{q^{-1}}(\mathfrak{gl}_2)$). Pour mener ce calcul, on construit le cristal de ce module vu comme $U_q(\mathfrak{g})_{\underline{0}}$ -module, puis on calcule l'action des opérateurs impairs, ce qui donne le cristal comme $U_q(\mathfrak{g})$ -module.

Le module simple de plus haut poids $(c, 0|0, 0)$ est dans la catégorie $\mathcal{O}_{BKK}$, il possède une base cristalline dont le graphe cristallin est :



où $\text{wt}(A_i) = (c-i, i|0, 0)$, $\text{wt}(B_i) = (c-i, i-1|1, 0)$, $\text{wt}(C_i) = (c-i, i-1|0, 1)$ et $\text{wt}(D_i) = (c-i, i-2|1, 1)$. En particulier A_0 correspond au vecteur primitif, tandis que A_0 , B_1 et D_2 correspondent aux vecteurs primitifs du module vu comme module du sous groupe quantique de $U_q(\mathfrak{g})$ engendré par e_i , f_i , et q^h pour tout h et pour $i \in I_0$.

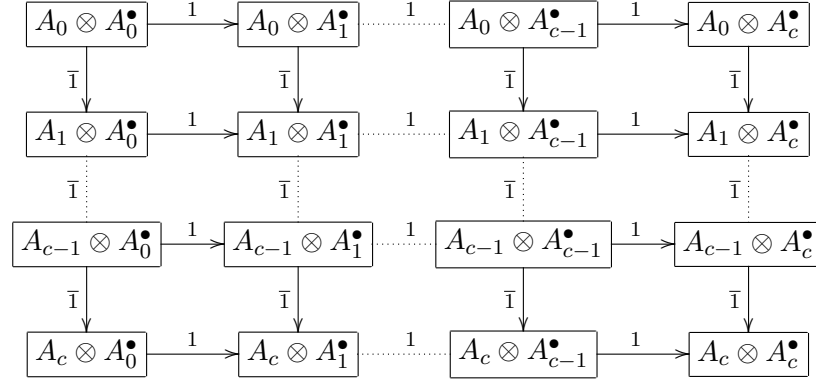
Le module simple de plus haut poids $(0, 0|0, -c)$ est dans la catégorie $\mathcal{O}_{BKK}^*$, il possède une base cristalline dont le graphe cristallin est :



où $\text{wt}(A_i^\bullet) = (0, 0|-i, i-c)$, $\text{wt}(B_i^\bullet) = (0, -1|1-i, i-c)$, $\text{wt}(C_i^\bullet) = (-1, 0|1-i, i-c)$ et $\text{wt}(D_i^\bullet) = (-1, -1|2-i, i-c)$. En particulier $A_0^\bullet$ correspond au vecteur primitif, tandis que $A_0^\bullet$, $B_1^\bullet$ et $D_2^\bullet$ correspondent aux vecteurs primitifs du module vu comme $U_q(\mathfrak{g})_{\underline{0}}$ -module.

On remarque que $A_0 \otimes A_0^\bullet$ correspond à un vecteur primitif (annulé par $\tilde{e}_i$ pour tout i) de plus haut poids $(c, 0|0, -c)$, la composante connexe le contenant sera donc une base cristalline d'un module indécomposable ayant une tête simple qui sera le module simple recherché (c'est-à-dire qu'il existe un sous-module tel que le quotient par ce sous-module est $L_{(c,0|0,-c)}$).

Regardons la composante connexe contenant $A_0 \otimes A_0^\bullet$, pour ce faire regardons tout d'abord uniquement les actions des opérateurs correspondant aux racines paires.



Regardons maintenant les actions de $\tilde{f}_0$:

Pour $i > j$

Pour $i < j - 1$

Pour $i = j - 1$

Pour $i = j$

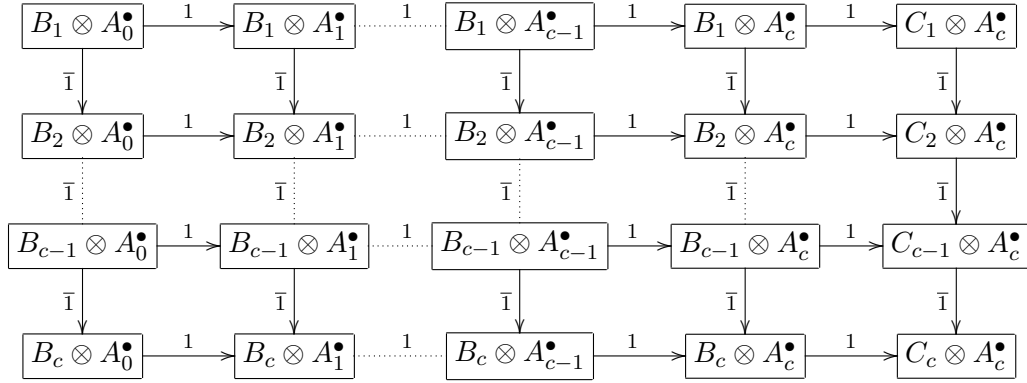
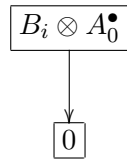
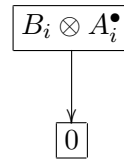
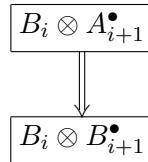
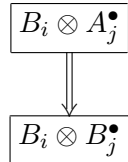
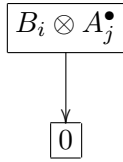
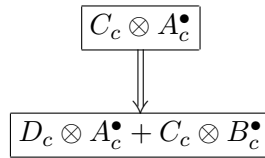
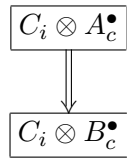
$$\begin{array}{c} A_i \otimes A_j^\bullet \\ \Downarrow \\ B_i \otimes A_j^\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A_i \otimes A_j^\bullet \\ \Downarrow \\ A_i \otimes B_j^\bullet \end{array}$$

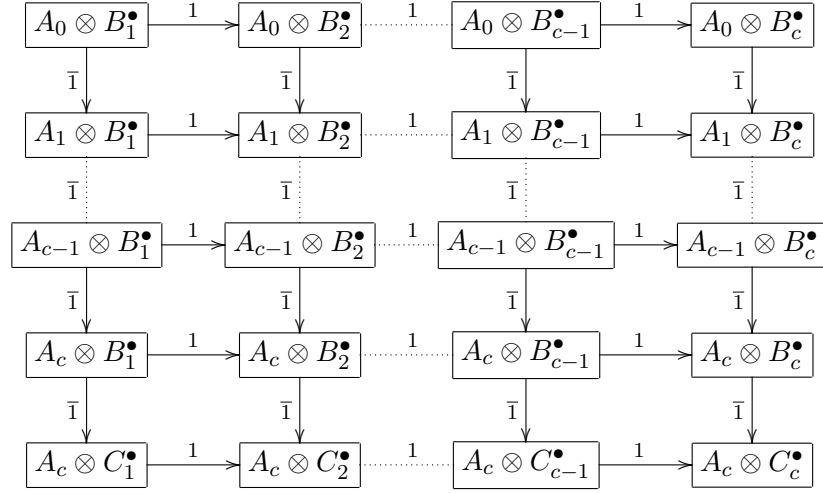
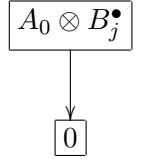
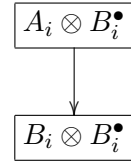
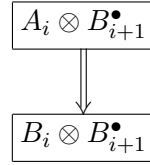
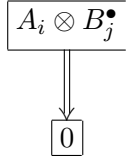
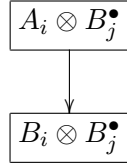
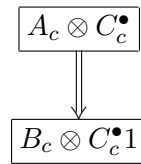
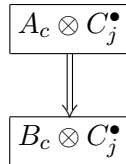
$$\begin{array}{c} A_i \otimes A_{i+1}^\bullet \\ \Downarrow \\ A_i \otimes B_{i+1}^\bullet + B_i \otimes A_{i+1}^\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A_i \otimes A_i^\bullet \\ \Downarrow \\ B_i \otimes A_j^\bullet \end{array}$$

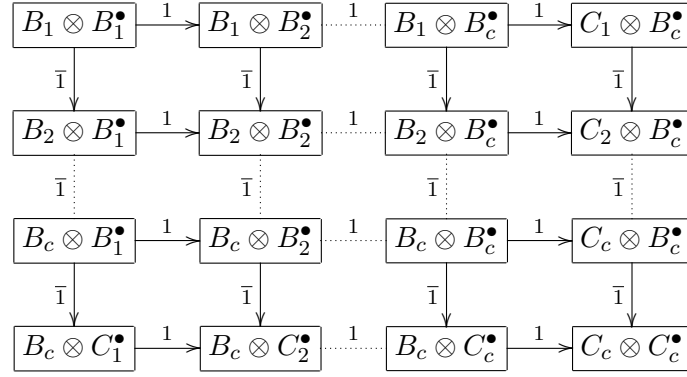
On remarque que les éléments $B_1 \otimes A_0^\bullet$ et $A_0 \otimes B_1^\bullet$ correspondent à des vecteurs $U_q(\mathfrak{g})_0$ -primitifs, et qu'on peut obtenir les autres $B_i \otimes A_j^\bullet$ et $A_i \otimes B_j^\bullet$ à partir de ces deux là en utilisant les opérateurs pairs.

Pour $i > j$ Pour $i < j - 1$ Pour $i = j - 1$ Pour $i = j$ Pour i Pour $i < c - 1$ Pour $i = c$ 

avec $\tilde{e}_0(D_c \otimes A_c^\bullet) = 0$ et $\tilde{e}_0(C_c \otimes B_c^\bullet) = C_c \otimes A_c^\bullet$ (i.e. c'est ce qu'on note $C_c \otimes A_c^\bullet \rightsquigarrow C_c \otimes B_c^\bullet$ dans le graphe cristallin). D'ailleurs on quotientera par la composante connexe contenant $D_c \otimes A_c^\bullet$.

Pour $i > j$ Pour $i < j - 1$ Pour $i = j - 1$ Pour $i = j$ Pour j Pour $j < c - 1$ Pour $j = c$ 

On remarque que $B_1 \otimes B_1^\bullet$ correspond à un $U_q(\mathfrak{g})_0$ -primitif, et que tous les éléments (sauf $D_c \otimes A_c^\bullet$) qu'on a atteint sont obtenus par des actions des opérateurs pairs sur $B_1 \otimes B_1^\bullet$.

Pour i, j Pour $j < c - 1$ Pour $i < c - 1$

$$\begin{array}{c} B_i \otimes B_j^\bullet \\ \Downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B_c \otimes C_j^\bullet \\ \Downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_i \otimes B_c^\bullet \\ \Downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B_c \otimes C_c^\bullet \\ \Downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_c \otimes C_c^\bullet \\ \Downarrow \\ D_c \otimes C_c^\bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_c \otimes B_c^\bullet \\ \Downarrow \\ D_c \otimes B_c^\bullet \end{array}$$

avec $\tilde{e}_0(D_c \otimes C_c^\bullet) = 0$ et avec $\tilde{e}_0(D_c \otimes B_c^\bullet) = D_c \otimes A_c^\bullet$.

On peut montrer que l'union de la composante connexe contenant $D_c \otimes A_c^\bullet$ et de celle contenant $D_c \otimes C_c^\bullet$ est d'intersection vide avec la composante connexe de $A_0 \otimes A_0^\bullet$. En quotientant (au niveau des $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ -modules) on arrive à un sous-quotient du produit tensoriel qui possède une base cristalline connexe, c'est donc un module simple, et c'est nécessairement le module simple de plus haut poids $(c, 0|0, -c)$.

Chapitre 4

Le bloc maximale-
ment atypique de la catégorie des
représentations de dimension
finie de $\mathfrak{gl}(2, 2)$

Introduction

Les notations sont celles des deux premiers chapitres.

La catégorie $\mathcal{F}$ des $\mathfrak{gl}(m, n)$ -modules de dimension finie, dans lesquels l'action d'une sous-algèbre de Cartan est diagonalisable, se décompose, via le caractère infinitésimal, en blocs. A chaque bloc on associe un entier appelé degré d'atypicité. Serganova (dans [Ser98]), a décrit une équivalence de catégorie (foncteur de translation) entre un bloc de degré d'atypicité $k \geq 1$ de $\mathfrak{gl}(m, n)$ et le bloc de $\mathfrak{gl}(k, k)$ contenant le module trivial (appelé bloc maximalement atypique).

Les blocs typiques (de degré d'atypicité nul) (resp. simplement atypiques) sont décrits dans Kac [Kac77a] (resp. Germoni [Ger97]).

Rappelons d'autre part que la catégorie $\mathcal{F}$ a des enveloppes injectives et des couvertures projectives et que les modules projectifs sont basculants donc injectifs, ceci est démontré par Brundan dans [Bru03].

Le but de ce chapitre est de comprendre le bloc maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(2, 2)$, ou, ce qui revient au même, la catégorie additive des objets projectifs de $\mathcal{F}$.

Soit λ un poids dominant doublement atypique. On note L_λ le module simple de plus haut poids λ et P_λ sa couverture projective. Le module P_λ possède une filtration dont les quotients successifs sont des modules de Kac ([Bru03], [Zou96]). On calcule les Ext^1 entre les modules simples (resp. les modules de Kac) dans le lemme 4.1.6. On en déduit la suite de Loewy des modules P_λ (proposition 4.1.7). Cette suite est de longueur 5, L_λ est de multiplicité 2 dans $\text{rad}^2 P_\lambda / \text{rad}^3 P_\lambda$; la filtration par des modules de Kac permet de distinguer deux facteurs.

Etant donnés deux poids dominants maximalement atypiques λ et μ , on calcule $\dim \text{Hom}_{\mathfrak{gl}(2, 2)}(P_\lambda, P_\mu)$ (paragraphe 4.3.1). On montre ensuite que $\text{End}_{\mathfrak{gl}(2, 2)}(P_\lambda)$ est un anneau de Gorenstein. Enfin, on propose une conjecture plus précise sur la structure de cette catégorie additive.

4.1 Les modules projectifs indécomposables

Proposition 4.1.1. [Ger97]

La catégorie des $\mathfrak{gl}(m, n)$ -modules de dimension finie $\mathcal{F}$ a les propriétés suivantes :

- A. L'anneau des endomorphismes d'un objet indécomposable est local.
- B. Tout objet M satisfait au théorème de Krull-Schmidt, i.e. se décompose en somme directe d'objets indécomposables, et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs et à isomorphisme près.
- C. Tout projectif indécomposable P a un unique quotient simple.
- D. Tout objet M a une couverture projective, unique (à isomorphisme près).
- E. Tout objet M est de longueur finie.

La description des modules projectifs indécomposables est connue :

Proposition 4.1.2. [Zou96][Ger97]

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des $\mathfrak{gl}(m, n)$ -modules de dimension finie.

Alors les indécomposables projectifs admettent des suites de composition dont les quotients successifs sont des modules de Kac.

De plus, tout module ayant L_λ pour tête est un quotient de P_λ .

Les suites de composition d'un module projectif indécomposable dont les quotients successifs sont des modules de Kac, sont rendues plus claires par le théorème de dualité suivant :

Théorème 4.1.3. (Réciprocité de BGG) [Zou96][Ger97]

Notons P_λ la couverture projective du module simple L_λ de plus haut poids λ de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$, K_μ le module de Kac de plus haut poids μ .

Fixons une suite de composition de P_λ dont les quotients successifs sont des modules de Kac et notons $(P_\lambda : K_\mu)$ la multiplicité de K_μ dans cette suite. On note $[K_\mu : L_\lambda]$ la multiplicité de L_λ dans une suite de Jordan-Hölder de K_μ .

Alors pour $\lambda, \mu \in \Lambda^+$ on a :

$$(P_\lambda : K_\mu) = [K_\mu : L_\lambda].$$

Remarque 4.1.4.

Ce théorème reste vrai pour une super-algèbre de Lie classique de type I sous l'hypothèse que pour tout λ dans Λ^+ on a $[K_\lambda : L_\lambda] = 1$, ce qui n'est pas le cas pour la super algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, 2)$ (formée des éléments de $\mathfrak{gl}(2, 2)$ de supertrace nulle) avec par exemple $\lambda = (1, 0|0, -1)$.

Il faut donc être soigneux hors du cas $\mathfrak{gl}(m, n)$.

En combinant le théorème avec l'exemple 2.1.5 du chapitre 2, on montre :

Corollaire 4.1.5.

Soit $\lambda = (a, b | -b, -a)$ un poids entier dominant maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(2, 2)$, si on prend une filtration de P_λ telle que les quotients successifs sont des modules de Kac, alors les modules de Kac qui apparaissent sont :

- A. $K_\lambda, K_{\lambda+\alpha_1}, K_{\lambda+2\alpha_1+\alpha_2}$ et $K_{\lambda+2\alpha_1+2\alpha_2}$ si $a = b$
- B. $K_\lambda, K_{\lambda+\alpha_1}, K_{\lambda+\alpha_2}$ et $K_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2}$ si $a \geq b + 1$

Lemme 4.1.6.

Soit $\lambda = (a, b | -b, -a)$ un poids entier dominant maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(2, 2)$, et générique (i.e. $a \geq b + 2$). On a :

$$\text{Ext}^1(K_\lambda, K_\mu) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \mu \in \{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Ext}^1(L_\lambda, L_\mu) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \mu \in \{\lambda \pm \alpha_1, \lambda \pm \alpha_2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

On montre que $\text{Ext}^1(K_{\lambda+\alpha_1}, K_{\lambda+\alpha_2}) = 0$.

On suppose qu'on a une suite exacte non scindée :

$$0 \rightarrow K_{\lambda+\alpha_2} \rightarrow M \rightarrow K_{\lambda+\alpha_1} \rightarrow 0.$$

Elle définit un morphisme non nul u du noyau N de la projection de $P_{\lambda+\alpha_1}$ sur $K_{\lambda+\alpha_1}$ dans $K_{\lambda+\alpha_2}$. Le morphisme u n'est pas surjectif car $K_{\lambda+\alpha_2}$ n'est pas un quotient de N .

Au vu des poids intervenant, si l'image de u est non nulle, alors elle contient le socle de $K_{\lambda+\alpha_2}$, i.e. $L_{\lambda-\alpha_1}$, qui n'intervient pas dans les facteurs de composition de N , d'où la contradiction.

On a donc que $\text{Ext}^1(K_{\lambda+\alpha_1}, K_{\lambda+\alpha_2}) = 0$.

De plus, la tête de K_λ (resp. le socle de $K_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2}$) est isomorphe à L_λ . Ceci implique l'existence et l'unicité d'une filtration de P_λ :

$$P_\lambda = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4$$

Avec $M_1/M_2 \simeq K_\lambda$, $M_2/M_3 \simeq K_{\lambda+\alpha_1} \oplus K_{\lambda+\alpha_2}$ et $M_4 \simeq K_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2}$.

On a donc le résultat pour $\text{Ext}^1(K_\lambda, K_\mu)$.

Notons N le noyau de la surjection $P_\lambda \twoheadrightarrow L_\lambda$. Sa tête contient le module simple L_μ avec la multiplicité $\dim \text{Ext}^1(L_\lambda, L_\mu)$. La filtration précédente montre qu'elle contient $L_{\lambda-\alpha_1}$ et $L_{\lambda-\alpha_2}$. D'autre part, on sait que $\text{Ext}^1(L_\lambda, L_\mu) \simeq \text{Ext}^1(L_\mu, L_\lambda)$ (grâce au foncteur de dualité D , qu'utilise Germoni, construit à partir de l'anti-automorphisme de Chevalley). Donc la tête de N contient aussi $L_{\lambda+\alpha_1}$ et $L_{\lambda+\alpha_2}$. De plus, la tête de N ne peut contenir d'autre module simple que ceux qui figurent dans la tête de l'image de N dans K_λ et ceux qui figurent dans la tête de M_2 . D'où le fait que $\text{Ext}^1(L_\lambda, L_\mu)$ est soit de dimension 1 (dans le cas où μ est égal à $\lambda \pm \alpha_1$ ou $\lambda \pm \alpha_2$) soit nul. □

Un argument identique permet de calculer $\text{Ext}^1(K_\lambda, K_\mu)$ et $\text{Ext}^1(L_\lambda, L_\mu)$ sans hypothèse de généralité.

L'ensemble de ces résultats est résumé par la figure 4.1 (page 73) : on y représente un graphe dont les sommets sont les classes des modules simples L_λ , et les arêtes (dessinées en pointillés) joignant L_λ et L_μ sont en nombre $\dim \text{Ext}^1(L_\lambda, L_\mu) = \dim \text{Ext}^1(L_\mu, L_\lambda)$. En dédoublant chaque arête en deux flèches de directions opposées, on obtient le Ext-carquois du bloc doublement atypique.

Les suites de compositions des modules de Kac de plus haut poids $\lambda = (a, b| -b, -a)$ sont données dans la figure 4.2 (page 74), on a trois cas qui correspondent à $a = b$, $a = b + 1$ et $a \geq b + 2$. Sur le dessin les $\square$ correspondent à la tête, les $\bigcirc$ correspondent aux éléments de $\text{rad } K_\lambda / \text{rad}^2 K_\lambda$, et les $\blacksquare$ correspondent au socle.

Les modules simples qui apparaissent dans les suites de composition des modules projectifs sont dessinés dans les figures 4.3 et 4.4 (pages 75 et 76) où sont représentés quatre cas différents d'éloignement des murs. Les $\square$ correspondent aux têtes, les nombres aux multiplicités.

Proposition 4.1.7.

Soit $\lambda = (a, b| -b, -a)$ un poids entier dominant maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(2, 2)$, soit P_λ la couverture projective du module simple L_λ .

Alors :

– si $a \geq b + 3$ la suite de Loewy de P_λ est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & L_\lambda & & & & \\ & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_2} & & \\ L_\lambda & L_{\lambda+\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2} & L_{\lambda-\alpha_1+\alpha_2} & L_\lambda & \\ & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_1} & & \\ & & & L_\lambda & & & \end{array} ,$$

– si $a = b + 2$ la suite de Loewy de P_λ est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & L_\lambda & & & & \\ & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_2} & & \\ L_\lambda & L_{\lambda+\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2} & L_{\lambda-\alpha_1+\alpha_2} & L_{\lambda-2\alpha_1} & L_\lambda \\ & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_2} & & \\ & & & L_\lambda & & & \end{array} ,$$

– si $a = b + 1$ la suite de Loewy de P_λ est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & L_\lambda & & & & \\ & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_2} & L_{\lambda-2\alpha_1-\alpha_2} & \\ L_\lambda & L_{\lambda+\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2} & L_\lambda & & \\ & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_2} & L_{\lambda-2\alpha_1-\alpha_2} & \\ & & & L_\lambda & & & \end{array} ,$$

– si $a = b$ la suite de Loewy de P_λ est :

$$\begin{array}{ccccccc} & & L_\lambda & & & & \\ & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+2\alpha_1+\alpha_2} & & & \\ 2L_\lambda & L_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda-2\alpha_1-2\alpha_2} & L_{\lambda+\alpha_1-\alpha_2} & L_{\lambda+2\alpha_1} & L_{\lambda+\alpha_1+\alpha_2} & L_{\lambda+2\alpha_1+2\alpha_2} \\ & & L_{\lambda+\alpha_1} & L_{\lambda-\alpha_2} & L_{\lambda+2\alpha_1+\alpha_2} & & \\ & & & L_\lambda & & & \end{array} .$$

Démonstration.

Soit M un module de tête L_λ . Alors les μ tels que L_μ soit un facteur de $\text{rad}^i M / \text{rad}^{i+1} M$ sont tels que μ diffère de λ par une somme de racines impaires en nombre de parité $i \equiv 2$. Ceci se démontre par récurrence sur i en utilisant le fait que $\text{Ext}^1(L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}) \neq 0$ seulement si λ_2 diffère de λ_1 par une seule (ou trois) racine(s) impaire(s).

Soit λ un poids dominant maximalement atypique et soit P_λ la couverture projective de L_λ . On connaît $\text{rad}^0 P_\lambda / \text{rad}^1 P_\lambda = L_\lambda$ et $\text{rad}^1 P_\lambda / \text{rad}^2 P_\lambda = \bigoplus_{i=1,2} L_{\lambda \pm \alpha_i}$ (il faut ajouter $L_{\lambda-2\alpha_1-\alpha_2}$ si λ est à distance 1 des murs et $L_{\lambda+2\alpha_1+\alpha_2}$ si λ est à distance 0 des murs) : pour simplifier on suppose dorénavant que λ est à distance au moins 2 des murs.

Comme P_λ admet comme quotient K_λ , et que $\text{rad}^2 K_\lambda / \text{rad}^3 K_\lambda = L_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2}$ on voit que $\text{rad}^2 P_\lambda / \text{rad}^3 P_\lambda$ contient $L_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2}$ et en changeant de sous-algèbre de Borel distinguée (i.e. en changeant de $\mathfrak{b}_0$), on trouve de même que $\text{rad}^2 P_\lambda / \text{rad}^3 P_\lambda$ contient $L_{\lambda\pm\alpha_1\pm\alpha_2}$ pour tous les choix de signes (si λ est à distance 2 des murs, il contient aussi $L_{\lambda-2\alpha_1}$).

Pour terminer la démonstration, il suffit de voir qu'il contient également deux copies de L_λ ; en effet il ne peut pas contenir le socle de P_λ et les poids des modules simples restants sont les $\lambda \pm \alpha_i$ qui sont forcément dans $\text{rad}^3 P_\lambda / \text{rad}^4 P_\lambda$ pour des raisons de parité.

D'autre part, comme $\text{Ext}^1(K_\lambda, K_{\lambda+\alpha_1}) = \mathbb{C}$, il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow K_{\lambda+\alpha_1} \rightarrow M \rightarrow K_\lambda \rightarrow 0$$

où M est un quotient de P_λ ; et ce module est de longueur de Loewy 4 et pour des raisons de parité L_λ figure au premier et au troisième étage. Donc $\text{rad}^2 P_\lambda / \text{rad}^3 P_\lambda$ contient un facteur L_λ d'image non nulle dans M . En faisant de même avec $K_{\lambda+\alpha_2}$, on obtient le deuxième facteur L_λ . □

4.2 Construction de certains modules indécomposables

Soient λ et μ deux poids dominants maximalelement atypiques et génériques (i.e. de la forme $(a, b| - b, -a)$ avec $a \geq b + 2$).

Dans ce paragraphe on donne une description partielle des modules indécomposables M ayant une tête simple L_λ et un socle simple L_μ . On ne traitera pas complètement le cas où $\mu = \lambda$ et où la longueur de Loewy est 3.

Distinguons plusieurs cas selon la longueur de Loewy r de M .

- Longueur de Loewy 1.

Le cas $r = 1$ est trivial.

- Longueur de Loewy 2.

Le cas $r = 2$ est réglé par le lemme 4.1.6.

- Longueur de Loewy 3.

Lemme 4.2.1.

Soit $\lambda = (a, b| - b, -a)$ un poids entier dominant maximalelement atypique et

générique (i.e. $a \geq b + 2$).

Alors pour tout μ de la forme $\lambda \pm \alpha_1 \pm \alpha_2$ il existe un module M indécomposable, de longueur de Loewy 3, avec L_λ comme tête et L_μ comme socle.

Démonstration.

Soient κ_1 et κ_2 dans $\{\pm 1\}$.

Posons $P = L_\lambda$, $Q = L_{\lambda + \kappa_1 \alpha_1 + \kappa_2 \alpha_2}$ et $R = L_{\lambda + \kappa_1 \alpha_1} \oplus L_{\lambda + \kappa_2 \alpha_2}$.

Soit x (resp. y) un élément de $\text{Ext}^1(P, R)$ (resp. $\text{Ext}^1(R, Q)$). Le produit de Yoneda $y \bullet x$ est un élément de $\text{Ext}^2(P, Q)$; il s'annule si et seulement si il existe un module M admettant une filtration

$$M = X^0 \supset X^1 \supset X^2 \supset X^3 = \{0\},$$

dont les quotients successifs vérifient $X^0/X^1 \simeq P$ et $X^1/X^2 \simeq R$ et $X^2 \simeq Q$, de plus X^0/X^2 correspond à x et X^1/X^3 à y . Ce sont les extensions panachées de Grothendieck ([SGA72] exposé 9, page 103).

D'après le lemme 4.1.6, $\text{Ext}^1(P, Q) = 0$, $\text{Ext}^1(R, Q) = \mathbb{C}^2$ et on peut montrer que $\text{Ext}^2(P, Q) = \mathbb{C}$ et que le produit de Yoneda est non dégénéré.

On peut donc choisir x et y de façon que $y \bullet x = 0$ et que x (resp. y) ait ses deux coordonnées non nulles.

□

Remarque 4.2.2.

On peut montrer que chacun des quatre modules du lemme précédent, correspondant aux choix de κ_1 et κ_2 , est unique à isomorphisme près. Ce sont des modules de Kac associés aux quatre choix possibles de sous-algèbres de Borel distinguées de $\mathfrak{gl}(2, 2)$ contenant $\mathfrak{h}$.

- Longueur de Loewy 4.

Pour $\mu = \lambda - \alpha_1$ (resp. $\mu = \lambda - \alpha_2$) il suffit de prendre le module correspondant à un élément non trivial de $\text{Ext}^1(K_\lambda, K_{\lambda + \alpha_1})$ (resp. $\text{Ext}^1(K_\lambda, K_{\lambda + \alpha_2})$). Pour $\mu = \lambda + \alpha_1$ (resp. $\mu = \lambda + \alpha_2$) les duals (pour le foncteur de dualité D de la remarque précédente) de ces derniers donnent les modules recherchés. Cette liste est exhaustive.

- Longueur de Loewy 5.

Pour la longueur 5 on a $M = P_\lambda$ et $\mu = \lambda$.

4.3 Morphismes entre les modules projectifs indécomposables

4.3.1 Dimension des espaces de morphismes

Proposition 4.3.1.

Soit λ, μ deux poids entiers dominants maximalelement atypiques de $\mathfrak{gl}(2, 2)$. Soit P_λ (resp. P_μ) la couverture projective du module simple L_λ (resp. L_μ) de plus haut poids λ (resp. μ).

On a :

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{gl}(2,2)}(P_\lambda, P_\mu) = [P_\mu : L_\lambda].$$

Démonstration.

Comme le foncteur $\operatorname{Hom}(P_\lambda, \)$ est exact, le premier membre est égal à

$$\sum_{\nu} [P_\mu : L_\nu] \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{gl}(2,2)}(P_\lambda, L_\nu).$$

□

Soit $\lambda = (a, b | -b - a)$ un poids maximalelement atypique de $\mathfrak{gl}(2, 2)$. On a montré que, dans le cas générique (cas $a \geq b + 2$) :

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{gl}(2,2)}(P_\lambda, P_\mu) = \begin{cases} 4 & \text{si } \mu = \lambda \\ 2 & \text{si } \mu = \lambda \pm \alpha_1 \text{ ou } \mu = \lambda \pm \alpha_2 \\ 1 & \text{si } \mu = \lambda \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les images des morphismes de P_λ dans P_μ pour $\lambda \neq \mu$ font partie des modules construits dans le paragraphe précédent.

4.3.2 Anneau des endomorphismes d'un module projectif indécomposable

Proposition 4.3.2.

Soit λ un poids dominant de $\mathfrak{gl}(m, n)$. On note P_λ la couverture projective du $\mathfrak{gl}(m, n)$ -module simple L_λ de plus haut poids λ . Notons C_λ l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{gl}(m, n)$ -linéaires de P_λ .

Alors C_λ est un anneau de Gorenstein.

Démonstration.

Notons $\mathcal{F}_\lambda$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}$ formée des modules n'ayant pas L_λ comme sous quotient. C'est une sous-catégorie épaisse (i.e. stable par quotient, sous-objet et extension) de $\mathcal{F}$.

On peut former la catégorie quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda$, puis construire comme Gabriel dans [Gab62], des adjoints à gauche et à droite du foncteur naturel de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda$.

Décrivons sommairement l'adjoint à gauche. Soit $M \in \mathcal{F}$, soit M/M' le plus grand quotient dans $\mathcal{F}_\lambda$ (il peut être nul). On a alors M' isomorphe à M dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda$.

Soit $P_{M'}$ la couverture projective de M' dans $\mathcal{F}$, et N vérifiant la suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow P_{M'} \rightarrow M' \rightarrow 0.$$

Soit N/N' le plus grand quotient de N dans $\mathcal{F}_\lambda$. Posons : $M'' = P_{M'}/N'$, ce module est isomorphe à M dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda$.

On a ainsi défini un foncteur $M \rightsquigarrow M''$, c'est l'adjoint à gauche cherché ; on appelle M'' la $\mathcal{F}_\lambda$ -couverture de M .

Comme P_λ est sa propre couverture, on a $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P_\lambda,) = \text{Hom}_{\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda}(P_\lambda,)$; ce foncteur est une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda$ et celle des C_λ -modules de longueur finie, d'après le théorème de Morita.

De même, en utilisant cette fois l'adjoint à droite, on obtient $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(, P_\lambda) = \text{Hom}_{\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda}(, P_\lambda)$ donc P_λ est un objet injectif de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\lambda$ et C_λ est un C_λ -module injectif.

□

Conjecture 4.3.3.

Soit $\lambda = (a, b | -b, -a)$ un poids dominant maximalement atypique de $\mathfrak{gl}(2, 2)$. On note P_λ la couverture projective du $\mathfrak{g}$ -module simple L_λ de plus haut poids λ . Notons C_λ l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{g}$ -linéaires de P_λ .

Si $a = b$, C_λ est isomorphe à une algèbre extérieure à deux générateurs. Sinon C_λ est isomorphe à $\mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^2)$.

4.4 Une conjecture

Commençons par expliquer comment on décrit le bloc contenant le module trivial de $\mathfrak{sl}(1, 1)$. Il existe une seule racine positive qui est impaire et isotrope et que l'on note α . Les modules simples atypiques de dimension finie

sont paramétrés par les entiers. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note L_a le module simple atypique, de dimension 1, de plus haut poids $(a| - a)$. Sa couverture projective P_a est de dimension 4, comme nous l'avons vu en 3.1.2, et sa suite de Loewy est $L_a, L_{a-1} \oplus L_{a+1}, L_a$. On sait de plus que $\text{End}(P_a)$ est de la forme $\mathbb{C}[X]/X^2$ et $\text{Hom}(P_a, P_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } |b - a| \geq 2 \\ 1 & \text{si } |b - a| = 1 \end{cases}$. La composition des morphismes est la suivante : si on note u_a (resp. v_a) le morphisme non nul, défini à homothétie près, de P_a dans P_{a+1} (resp. P_a dans P_{a-1}), alors $v_{a+1} \circ u_a$ est proportionnel à $u_{a-1} \circ v_a$ car ces deux morphismes sont non nuls et envoient la tête de P_a dans le socle de P_a .

Examinons maintenant le cas de $\mathfrak{gl}(2, 2)$, pour lequel nous voulons formuler la conjecture.

Soit $\lambda = (a, b| - b, -a)$ un poids dominant maximale atypique, que l'on suppose loin des murs, $|b - a| \geq 3$, la proposition 4.1.7 donne la suite de Loewy de P_λ . On rappelle que $C_\lambda = \text{End}(P_\lambda) = \mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^2)$ et que

$$\dim \text{Hom}(P_\lambda, P_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sup(|a - a'|, |b - b'|) \geq 2 \\ 1 & \text{si } |a - a'| = |b - b'| = 1 \\ 2 & \text{si } |a - a'| + |b - b'| = 1 \end{cases}.$$

Les images de tous ces morphismes ont un socle et une tête simples.

Remarquons que les sous-modules de P_λ à tête simple sont les suivants : le socle, L_λ , quatre modules de longueur de Loewy 2 dont les têtes sont $L_{\lambda \pm \alpha_i}$, $i = 1, 2$. Parmi les modules de longueur de Loewy 3, quatre qui ont pour tête $L_{\lambda \pm \alpha_1 \pm \alpha_2}$ et une famille à un paramètre de modules ayant L_λ pour tête (et socle), lesquels sont généralement de longueur 6 comme $\mathfrak{gl}(2, 2)$ -module, avec au plus 4 "accidents". Enfin, il y a quatre sous-modules de longueur de Loewy 4 de tête $L_{\lambda \pm \alpha_i}$, $i = 1, 2$.

Soit $i = 1$ ou 2 . Soit u un morphisme non nul de P_λ dans $P_{\lambda - \alpha_i}$ qui engendre $\text{Hom}(P_\lambda, P_{\lambda - \alpha_i})$ comme C_λ -module. De même, on choisit v de $P_{\lambda + \alpha_i}$ dans P_λ .

Alors, l'image de $v \circ u$ est un sous-module de P_λ qui ne dépend pas des choix de u et v et que l'on note $I(\lambda, i)$. Ce module a pour tête et socle L_λ et, comme ce n'est ni P_λ ni L_λ , il est de longueur de Loewy 3. De plus, $L_{\lambda - \alpha_i}$ ne figure pas dans l'étage $\text{rad}^1(I(\lambda, i))/\text{rad}^2(I(\lambda, i))$.

Conjecture 4.4.1.

La suite de Loewy de $I(\lambda, i)$ est la suivante :

$$L_\lambda, L_{\lambda - \alpha_j} \oplus L_{\lambda + \alpha_j}, L_\lambda,$$

avec $j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \\ 2 & \text{si } i = 1 \end{cases}$, ce qui implique que $u \circ v \circ u = 0$.

Remarque 4.4.2.

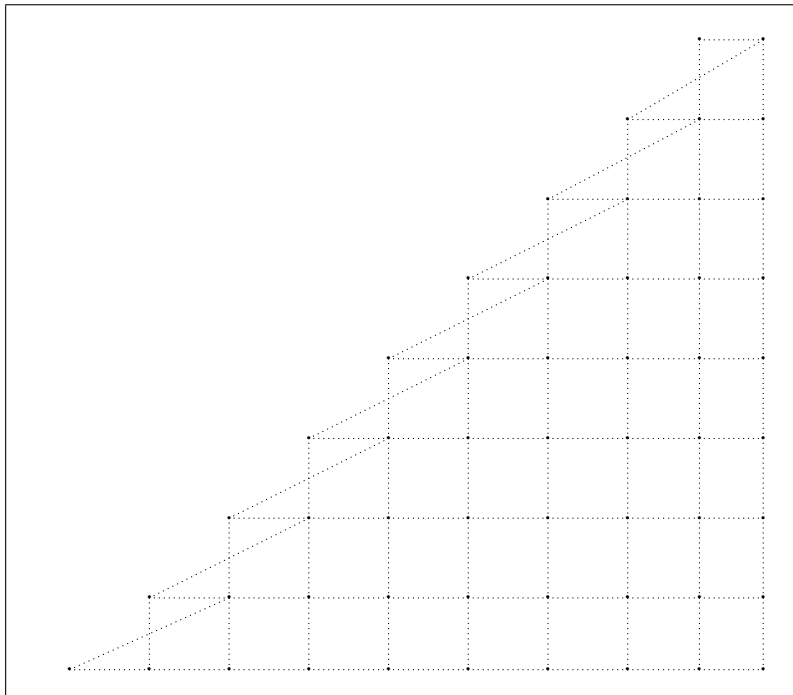
Cette conjecture explique la composition des morphismes entre modules loin des murs. Lorsqu'on se rapproche des murs, les espaces de morphismes font

apparaître des morphismes entre des modules plus éloignés (par exemple entre P_λ et $P_{\lambda-2\alpha_1-2\alpha_2}$ si $\lambda = (a, a | -a, -a)$) et on n'a pas cherché à prévoir les compositions de ces morphismes...

Il existe une version géométrique de cette conjecture. Soit $\mathbb{P}^{1|1}$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $1 + \varepsilon$ de la représentation standard de $\mathfrak{gl}(2, 2)$. C'est une super variété algébrique qui est un espace homogène, il lui correspond une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{gl}(2, 2)$ contenant $\mathfrak{b}_0$. La sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{gl}(1, 1) \times \mathfrak{gl}(1, 1)$. On identifie un $\mathfrak{l}$ -module et son extension triviale à $\mathfrak{p}$.

En recopiant la construction du livre de Jantzen, [Jan03], celle-ci est effectuée pour les groupes algébriques en caractéristique positive mais garde un sens dans notre cadre, on peut définir un foncteur exact à gauche Ind , qui va de la catégorie des $\mathfrak{p}$ -modules de dimension finie dans celle des $\mathfrak{g}$ -modules de dimension finie, et ses dérivés droits R^1 et R^2 (les suivants sont nuls).

Notre conjecture revient à dire que “loin des murs” (auquel cas seul R^1 est non nul), le foncteur R^1 transforme les injectifs atypiques par rapport aux deux facteurs de $\mathfrak{gl}(1, 1) \times \mathfrak{gl}(1, 1)$ en injectifs doublement atypiques pour $\mathfrak{gl}(2, 2)$.

FIG. 4.1 – Ext-Carquois du bloc maximale atypique de $\mathfrak{gl}(2,2)$

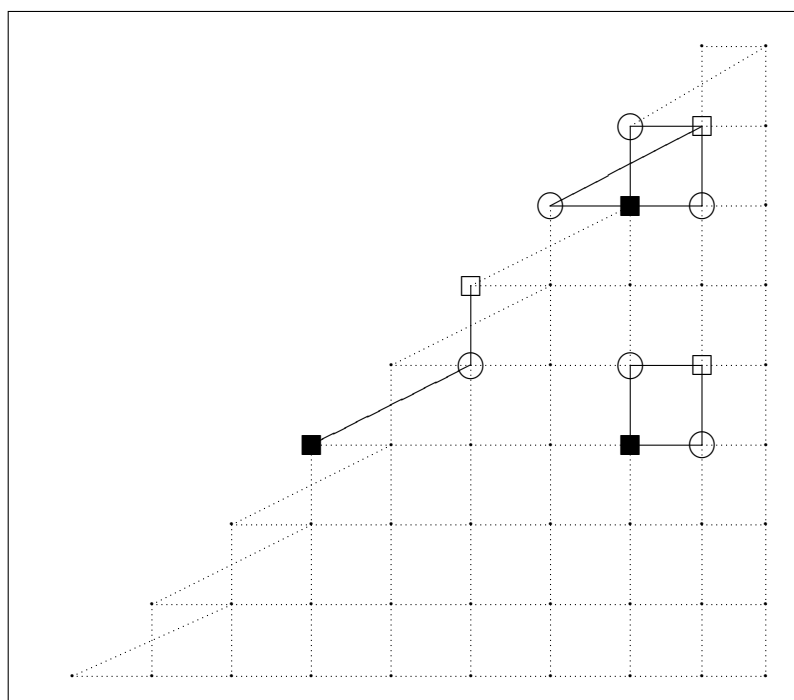


FIG. 4.2 – Suite de composition des modules de Kac maximalement atypiques

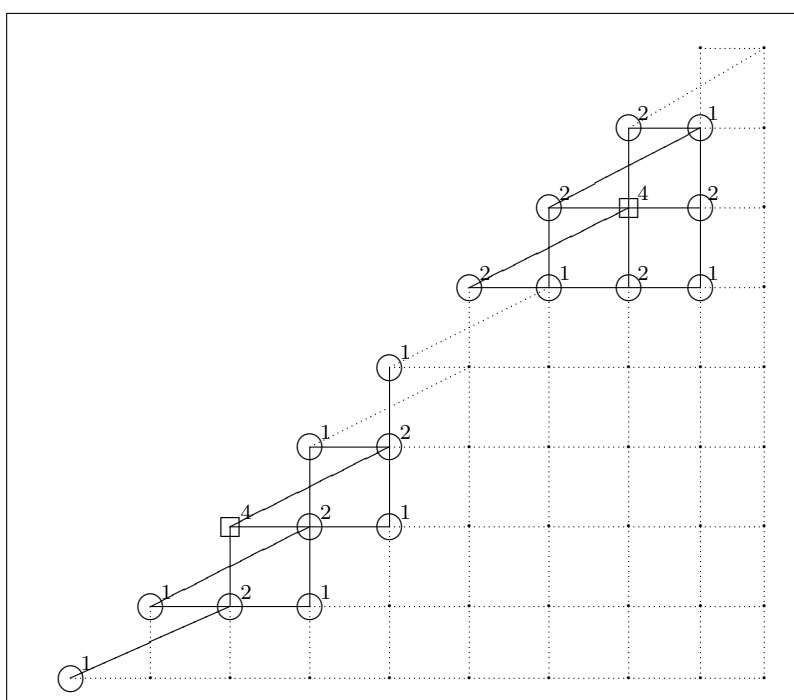


FIG. 4.3 – Suite de composition des modules projectifs indécomposables
maximalement atypiques

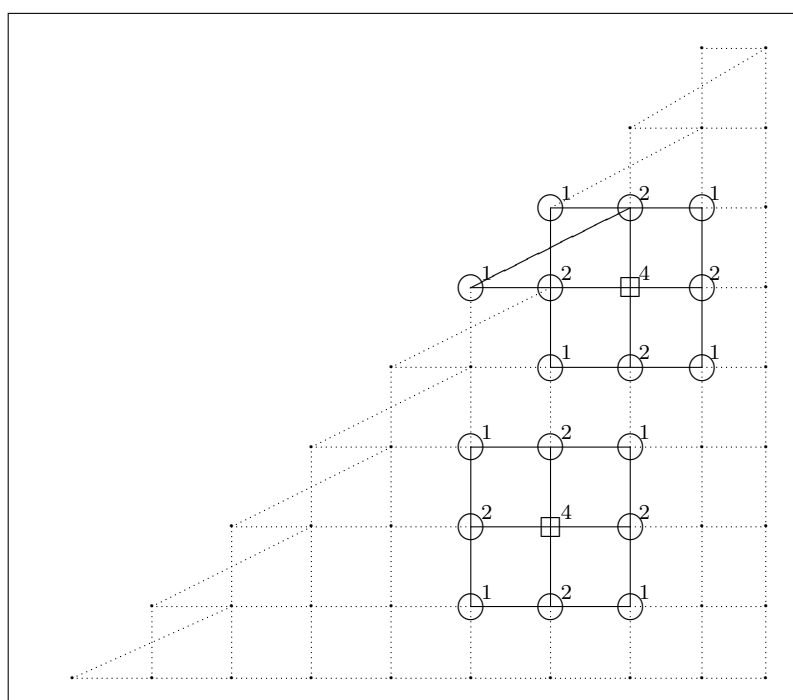


FIG. 4.4 – Suite de composition des modules projectifs indécomposables maximalement atypiques

Bibliographie

- [BKK00] G BENKART, S.-J KANG, et M KASHIWARA. Crystal bases for the quantum superalgebra $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$. *Journal of the American Mathematical Society*, Volume 13, Numéro 2 pp.295–331, 2000.
- [BL80] J BERNSTEIN et D LEITES. A formula for the character of the irreducible finite dimensional representation of Lie superalgebras of series $\mathfrak{gl}$ and $\mathfrak{sl}$. *CR Acad. Bulgare Sci.*, 33 pp.1049–1051, 1980.
- [Bru03] J BRUNDAN. Kazhdan-Lusztig Polynomials and Character formulae for the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m, n)$. *Journal of the American Mathematical Society*, Volume 16 No 1 pp.185–231, 2003.
- [Gab62] P GABRIEL. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 323–448, 1962.
- [Ger97] J GERMONI. *Représentations indécomposables des superalgèbres de Lie spéciales linéaires*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg, 1997.
- [Gru03] C GRUSON. Cohomologie des modules de dimension finie sur la super algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(3, 2)$. *Journal of algebra*, 259/2 pp.581–598, 2003.
- [Gru06] C GRUSON. Sur les représentations de dimension finie de la super algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$ [d’après Serganova]. *Séminaire Bourbaki*, Exposé 963, 2006.
- [Jan03] J. C JANTZEN. *Representations of Algebraic Groups*, volume 107 de *Mathematical series and monographs*. AMS, 2003.
- [Kac77a] V KAC. Characters of typical representations of classical Lie superalgebras. *Communication in Algebra*, Volume 5 No 8 pp.889–897, 1977.
- [Kac77b] V KAC. Lie superalgebras. *Advances in Mathematics*, Volume 26 pp.8–96, 1977.
- [Kac78] V KAC. Representations of classical Lie superalgebras. *Lecture Notes in Mathematics*, Volume 676 pp.597–626, 1978.
- [Kac84] V KAC. Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Volume 81 pp.645–647, 1984.

- [Kas90] M KASHIWARA. Crystallizing the q -analogue of universal enveloping algebras. *Commun. Math. Phys.*, Volume 133 pp.249–260, 1990.
- [Kas91] M KASHIWARA. On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, Volume 63 pp.465–516, 1991.
- [Ser87] A SERGEEV. *Enveloping algebra for Lie superalgebras GL and Q*. Thèse de doctorat, Moscow State University, 1987.
- [Ser88] A SERGEEV. Invariant functions and Laplace-Casimir operators on Lie superalgebra. *Seminar on supermanifold*, Volume 32 pp.44–95, 1988.
- [Ser96] V SERGANOVA. Kazhdan-Lusztig Polynomials and Character Formula for the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m, n)$. *Selecta Mathematica*, Volume 2 No 4 pp.607–651, 1996.
- [Ser98] V SERGANOVA. Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras. *Documenta Mathematica*, Extra Volume 2 pp.583–593, 1998.
- [SGA72] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1967–1969 (SGA 7 I)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Zha98] R ZHANG. Structure and Representations of the Quantum General Linear Supergroup. *Commun. Math. Phys.* 195, 195 pp.525–547, 1998.
- [Zou96] Y. M ZOU. Categories of Finite Dimensional Weight Modules over Type I Classical Lie Superalgebras. *Journal of Algebra*, 180 pp.459–482, 1996.
- [Zou99] Y. M ZOU. Crystal bases for $U_q(\mathfrak{sl}(2, 1))$. *Proceeding of the American Mathematical Society*, Volume 127 No 8 pp.2213–2223, 1999.

Cette thèse consiste en une étude des représentations de dimension finie de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$. Dans le premier chapitre nous rappelons des résultats sur ces super-algèbres de Lie. Dans le second chapitre nous étudions les représentations simples de $\mathfrak{gl}(2, 2)$. Ces modules peuvent être obtenus comme quotient de modules induits dont on connaît les suites de composition, ce qui nous permet de calculer une formule des caractères finie explicite. Dans le troisième chapitre nous étudions les représentations d’une déformation quantique de l’algèbre enveloppante de $\mathfrak{gl}(m, n)$. Nous rappelons tout d’abord la construction des bases cristallines pour les facteurs directs de puissances tensorielles de la représentation standard. Nous montrons, en affaiblissant la notion de cristal, l’existence de bases cristallines pour des modules qui ne sont pas semi-simples, et nous donnons une méthode pour les construire. Le quatrième chapitre porte sur le dévissage du bloc maximallement atypique de la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{gl}(2, 2)$. La connaissance de la sous-catégorie pleine des modules projectifs maximallement atypiques nous permet de reconstituer la catégorie. Nous étudions dans un premier temps les modules projectifs indécomposables et nous donnons leurs suites de Loewy. Puis dans un deuxième temps nous étudions leurs morphismes. Pour terminer nous formulons une conjecture sur la composition de ces morphismes.

This thesis is a study of finite dimensional representations of the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m, n)$. In the first chapter we recall some results on these Lie superalgebra. In the second chapter we study the simple representations of $\mathfrak{gl}(2, 2)$. These modules can be obtained as quotient of some induced modules, the knowledge of the composition series of these modules allow us to compute an explicit finite character formula for simple modules. In the third chapter we look at representations of a quantum deformation of the universal enveloping algebra of $\mathfrak{gl}(m, n)$. We first recall the construction of crystal bases for the direct factors of a tensor power of the standard representation. We show by weakening the definition of crystal, that there exist crystal bases for non-semisimple modules, and we give a way to construct them. The fourth chapter focuses on the understanding of the maximally atypical block of the category of finite dimensional representations of $\mathfrak{gl}(2, 2)$. Knowing the full subcategory of projective maximally atypical modules allows us to reconstruct the category. First, we study the projective indecomposable modules, and we compute their Loewy series. We then study their morphisms. Finally we make a conjecture on the composition of those morphisms.

Super algèbre de Lie, représentations, caractère. Groupe quantique, base cristalline. Sous-algèbre de Borel, sous-algèbre parabolique, restriction, induction. Module projectif.