



HAL
open science

Caractérisation et formes (BR) des coniques et de leurs faisceaux.

Jean-Paul Becar

► **To cite this version:**

Jean-Paul Becar. Caractérisation et formes (BR) des coniques et de leurs faisceaux.. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 1997. Français. NNT: . tel-00371549

HAL Id: tel-00371549

<https://theses.hal.science/tel-00371549>

Submitted on 29 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de
Valenciennes

Numéro d'ordre : 9728

THESE

présentée à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

JP BECAR

Professeur Agrégé de Mathématiques

FORME (BR) DES CONIQUES ET DE LEURS FAISCEAUX

soutenue le 12 Décembre 1997 devant la commission d'examen

Président :	S. Nicaise
Rapporteurs :	B. Lacolle A. Le Méhauté
Membres :	P. Jeannin J.M. Brun
Directeur de thèse :	J.C. Fiorot

Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Valenciennes, Université
de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, BP 311 Le Mont-Houy 59304 Valenciennes
Cedex.

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de
Valenciennes

Numéro d'ordre : 9728

THESE

présentée à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
par

JP BECAR
Professeur Agrégé de Mathématiques

FORME (BR) DES CONIQUES ET DE LEURS FAISCEAUX

soutenue le 12 Décembre 1997 devant la commission d'examen

Président :	S. Nicaise
Rapporteurs :	B. Lacolle A. Le Méhauté
Membres :	P. Jeamin J.M. Brun
Directeur de thèse :	J.C. Fiorot

Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Valenciennes, Université
de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, BP 311 Le Mont-Houy 59304 Valenciennes
Cedex.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Valenciennes (LIMAV) de l'Université de Valenciennes.

Je remercie Monsieur le Professeur Serge Nicaise de l'Université de Valenciennes d'avoir bien voulu présider le jury.

Je suis reconnaissant au Professeur Jean-Charles FIOROT du sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité, son suivi, son enthousiasme, sa clairvoyance, ont été des éléments précieux dans l'aboutissement de ces travaux.

Je remercie Messieurs les Professeurs Bernard Lacolle de l'Université de Grenoble et Alain Le Méhauté de l'Université de Nantes d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie Messieurs les Professeurs Pierre Jeannin de l'Université du Littoral et Jean-Marc Brun de l'Université de Lyon d'avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie tous mes collègues du laboratoire LIMAV et en particulier Monsieur Jean-Charles Canonne.

Je remercie également Monsieur Bernard HOURIEZ du Département Génie Electrique et Informatique Industrielle de l'Institut Universitaire de Technologie de Valenciennes de m'avoir encouragé à entreprendre cette recherche.

à Dominique,

à Benjamin,

à Camille,

à mes parents.

INTRODUCTION

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la géométrie de la CAO. Il représente une contribution à l'étude, d'un point de vue algorithmique, de la famille de courbes planes élémentaires que sont les coniques et leurs faisceaux.

La particularité de cette étude, malgré l'abondante littérature existant dans ce domaine, depuis Euclide et Archimède, tient au fait que ces courbes rationnelles de degré deux sont ici décrites par une liste de trois vecteurs massiques linéairement indépendants appelée forme (BR) de la conique.

Ce mode de définition des courbes et surfaces rationnelles par des vecteurs massiques (un vecteur massique étant soit un point pondéré, soit un vecteur pur de l'espace dans lequel sont plongées ces courbes rationnelles) a été développé par Fiorot et Jeannin en 1986. Il assure une description exacte et le contrôle des courbes et surfaces destinées soit à des applications industrielles comme l'usinage de pièces mécaniques telles des profilés d'ailes d'avion, des prothèses dentaires ou articulaires soit à la représentation de phénomènes physiques issus de mesures comme c'est le cas par exemple en géologie ou en météorologie.

Ce document se compose de deux parties. La première partie concerne l'étude géométrique des coniques (BR) et fait l'objet des deux premiers chapitres. La seconde partie, détaillée dans les cinq chapitres suivants, traite de la forme (BR) des faisceaux linéaires de coniques.

Le chapitre 1 rappelle les principaux résultats concernant les courbes Bézier - de Casteljau polynomiales et les courbes (BR). Il donne dans le cas général l'écriture (BR) d'une courbe rationnelle. Un exemple concret met en évidence le calcul du polygone massique contrôlant la courbe rationnelle, ce polygone étant composé de vecteurs purs et de points pondérés.

Le chapitre 2 établit le lien entre la définition usuelle d'une conique par foyer, directrice et excentricité et ses différentes formes (BR) *via* trois vecteurs massiques linéairement indépendants. Pour cela, nous utilisons les résultats sur le changement de paramètre homographique dont la particularité est de conserver la longueur du polygone massique de contrôle. Dans un premier temps nous donnons une forme (BR) symétrique d'une conique définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Toutes les autres formes (BR) de la conique sont déduites de cette forme particulière par des changements de paramètre homographique. Dans un deuxième temps, à partir de trois vecteurs massiques linéairement indépendants définissant une conique propre sous forme (BR), nous déterminons, grâce à des changements

de paramètre homographique appropriés, un nouveau polygone de contrôle de la conique.

Dans le cas de la parabole, ce dernier polygone est composé de deux vecteurs purs orthogonaux (l'un dirige l'axe, l'autre la tangente au sommet) et d'un point pondéré donnant le sommet.

Dans le cas de l'ellipse, ce polygone est composé de deux points pondérés (définissant un des axes) et d'un vecteur pur dirigeant une tangente à un sommet orthogonale à cet axe.

Dans le cas de l'hyperbole, ce polygone est composé de deux vecteurs purs de même norme dirigeant les asymptotes et d'un point pondéré définissant son centre.

Les caractéristiques géométriques de la conique (BR) (foyer, directrice, excentricité) s'en déduisent directement. Le procédé est plus particulièrement illustré en ce qui concerne la parabole (BR), le foyer et la directrice sont obtenues par des constructions géométriques élémentaires.

Le chapitre 3 propose deux formes (BR) d'un faisceau linéaire de coniques bitangentes c'est-à-dire passant par deux points fixes et tangentes en ces deux points à deux droites données.

La première forme se présente comme une liste de trois vecteurs massiques représentant une conique (BR). Ces vecteurs massiques sont tels que leurs Π -projections sont fixes, deux d'entre elles sont les points de contact éventuellement à l'infini. Le paramètre du faisceau est exactement la masse du premier point pondéré, elle-même proportionnelle au rayon de courbure de la conique en ce premier point de contrôle. Comme ce mode de paramétrage n'est pas commode pour décrire le faisceau des coniques où l'un des points de contact est à l'infini, nous définissons une deuxième forme (BR) du faisceau de coniques bitangentes par une liste de trois vecteurs massiques dont les Π -projections sont fixes. Le paramètre est ici la masse du deuxième vecteur massique si celui-ci est un point pondéré ou son module s'il s'agit d'un vecteur pur. A titre d'application de ce second mode de représentation et en vue d'une exploitation dans la suite, nous donnons l'expression de la conique (BR) du faisceau passant par un point à distance finie ou non.

Le chapitre 4 propose une forme (BR) d'un faisceau linéaire de coniques passant par trois points fixes et tangentes à une droite donnée en un des points. Il utilise le résultat de la partie précédente sur la détermination de la conique (BR) d'un faisceau de coniques bitangentes passant par un point donné du plan.

L'écriture (BR) de ce faisceau se présente comme une liste de trois vecteurs massiques, représentant une conique (BR), tels que les Π -projections du premier et du dernier vecteur massique soient fixes : l'une d'elles est un point de contact. Le paramètre du faisceau est l'abscisse d'un point de la tangente, Π -projection du deuxième vecteur massique, et pour une valeur particulière, ce paramètre est le module d'un vecteur

directeur de la tangente, vecteur qui représente le deuxième vecteur massique. Comme précédemment, nous donnons la seule conique (BR) du faisceau passant par un point fixé dans le plan à distance finie ou non.

Le chapitre 5 établit une forme (BR) d'un faisceau de coniques passant par quatre points du plan. L'écriture (BR) du faisceau se présente comme une liste de trois vecteurs massiques tels que les Π -projections du premier et du dernier vecteur massique sont deux des quatre points. Le paramètre est ici la pente de la tangente en un des deux points évoqués. Le second vecteur massique est fonction du paramètre qu'il s'agisse d'un point pondéré (cas général) ou d'un vecteur pur (cas particulier).

Le chapitre 6 propose une forme (BR) d'un faisceau de coniques osculatrices c'est-à-dire l'ensemble des coniques propres du plan, tangentes en un point donné à une droite donnée, passant par un deuxième point donné et admettant un même centre de courbure en le premier point. La forme (BR) de ce faisceau se présente comme une liste de trois vecteurs massiques tels que les Π -projections du premier et du dernier vecteur massique soient les deux points donnés du faisceau. Le second vecteur massique a pour Π -projection un point de la tangente dont l'abscisse est exactement le paramètre et sa masse est inversement proportionnelle à ce paramètre. Lorsque l'abscisse est infinie, le second vecteur massique est un vecteur pur dirigeant la tangente. Notons également, en ce qui concerne le second vecteur massique : dans le cas d'un point pondéré, sa masse dépend du rayon de courbure en le premier point, dans le cas d'un vecteur pur c'est son module qui dépend du rayon de courbure.

Le chapitre 7 décrit une forme (BR) d'un faisceau de coniques surosculatrices c'est-à-dire l'ensemble des coniques propres du plan, tangentes en un point donné à une droite donnée, de même centre de courbure en ce point et admettant une même droite comme polaire d'un point fixe de la tangente. Ce point peut-être éventuellement à l'infini. La forme (BR) de ce faisceau se présente comme une liste de trois vecteurs massiques tels que la Π -projection du premier vecteur massique est le point de contact. La Π -projection du deuxième vecteur massique est le point fixé sur la tangente ou un vecteur pur dirigeant la tangente. La Π -projection du troisième vecteur massique est un point variable sur la polaire dont l'abscisse est le paramètre du faisceau. De plus, ce paramètre intervient soit dans la masse du second vecteur massique si celui-ci est un point pondéré soit dans son module s'il s'agit d'un vecteur pur.

Notons enfin que, pour les coniques comme pour leurs faisceaux, les formes (BR) présentent dans la plupart des cas un ou deux vecteurs purs décrivant les points à l'infini de la conique ou du faisceau et les rendant aisément exploitables en CAO.

Table des matières

1	Courbes (BP), courbes (BR)	11
1.1	Courbes Bézier-de Casteljau polynomiales	12
1.1.1	Polynômes de Bernstein	12
1.1.2	Propriétés des courbes BP	12
1.1.3	L'espace des vecteurs massiques $\hat{\mathcal{E}}$	14
1.2	Courbes (BR)	15
2	Forme (BR) d'une conique	19
2.1	Introduction et quelques rappels	21
2.2	Forme (BR) d'une conique	23
2.3	Foyer, directrice, excentricité d'une conique (BR)	25
2.3.1	La parabole	25
2.3.2	L'ellipse	32
2.3.3	L'hyperbole	38
3	Formes (BR) d'un faisceau de coniques bitangentes	45
3.1	Première forme	46
3.2	Deuxième forme	53
3.2.1	Conique du faisceau passant par un point à distance finie.	60
3.2.2	Conique du faisceau passant par un point à l'infini.	62
4	Coniques (BR) définies par trois points et une tangente	65
4.1	Introduction	66
4.2	Coniques (BR) définies par trois points et une tangente	68
4.2.1	Forme (BR) du faisceau.	68
4.2.2	Conique du faisceau passant par un point à distance finie	72
5	Faisceaux de coniques (BR) passant par quatre points	83
6	Forme (BR) d'un faisceau de coniques osculatrices	89
6.1	Définition	90
6.2	Equation du faisceau	90

6.3	Correspondance biunivoque	92
6.4	Forme réduite des coniques (BR)	93
6.5	Forme (BR) du faisceau de coniques osculatrices	94
7	Forme (BR) d'un faisceau de coniques surosculatrices.	103
7.1	Equation cartésienne d'un faisceau de coniques surosculatrices.	104
7.2	Forme (BR) d'un faisceau de coniques surosculatrices	105

Chapitre 1

Courbes (BP), courbes (BR)

Ce chapitre rappelle les principaux résultats concernant les courbes Bézier - de Casteljaou polynomiales (De Casteljaou, 1959 [1], 1985 [2]; Bézier, 1968 [3], 1977 [4], 1984 [5]) et les courbes (BR) (Fiorot et Jeannin, 1986 [6]).

La forme (BR) d'une courbe rationnelle consiste en sa description par une liste de vecteurs massiques. Un vecteur massique est soit un point pondéré soit un vecteur pur de l'espace dans lequel sont plongées ces courbes. Le mode de définition des courbes et surfaces rationnelles par des vecteurs massiques a été développé par Fiorot et Jeannin depuis 1986 [6], [7], [8] dans le but de leur exploitation sur ordinateur.

Ce chapitre donne dans le cas général l'écriture (BR) d'une courbe rationnelle ainsi qu'un exemple de calcul du polygone massique (composé de vecteurs purs et de points pondérés) contrôlant une courbe.

1.1 Courbes Bézier-de Casteljau polynomiales

1.1.1 Polynômes de Bernstein

Définition Les $(n + 1)$ polynômes de Bernstein, définis par

$$B_i^n(t) = C_n^i(1-t)^{n-i}t^i, \quad i = 0 \dots n$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Ils vérifient les propriétés suivantes :

Positivité $\forall t \in [0, 1] \quad B_i^n(t) \geq 0$.

Symétrie $\forall t \in \mathbb{R} \quad B_i^n(1-t) = B_{n-i}^n(t)$.

Partition de l'unité $\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.

Maximum $B_i^n(t_0)$ où $t_0 = \frac{i}{n}$ est le maximum de $B_i^n(t)$ sur $[0, 1]$.

Récurrence $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$ avec $i = 0 \dots n$ et $B_i^n(t) = 0$ pour $i < 0$ ou $i > n$.

Dérivée $(B_i^n(t))' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad i = 0 \dots n$.

1.1.2 Propriétés des courbes BP

Courbes BP Soit $P = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ un $(n + 1)$ -uplet de points d'un espace affine réel, on note

$$BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i.$$

La courbe paramétrée $BP[P_0, P_1, \dots, P_n]$ ensemble des points $BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t)$ quand t décrit $[0, 1]$ s'appelle courbe Bézier Polynomiale (BP) sur $[0, 1]$. Le polygone P est le polygone de contrôle de la courbe Bézier. L'entier n est la longueur du polygone Bézier P où de la courbe $BP[P, [0, 1]]$. Le degré d'une courbe (BP) est inférieur ou égal à sa longueur.

Support d'une courbe BP Le support de la courbe $BP[P_0, P_1, \dots, P_n]$ est contenu dans l'enveloppe convexe des points P_0, P_1, \dots, P_n .

Symétrie $\forall t \in \mathbb{R} \quad BP[P_0, P_1, \dots, P_n](1-t) = BP[P_n, P_{n-1}, \dots, P_0](t)$

Dérivée k-ième $(BP[P])^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} BP[\Delta^k P_0, \Delta^k P_1, \dots, \Delta^k P_{n-k}](t)$

$$BP[P]^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k P_0$$

$$BP[P]^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k P_{n-k}$$

L'opérateur Δ^k est l'opérateur de différence progressive itérée k fois

$$\begin{aligned} \Delta^0 P_i &= P_i \\ \Delta P_i &= P_{i+1} - P_i \\ \Delta^{k+1} P_i &= \Delta^k P_{i+1} - \Delta^k P_i \end{aligned}$$

Algorithme de de Casteljau Calcul d'un point d'une courbe BP.

Soit $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$ un polygone de contrôle d'une courbe BP et t un réel fixé. Le point $BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t)$ est calculé par l'algorithme suivant :

Entrée :

P_0, P_1, \dots, P_n le polygone de contrôle

t le paramètre dans $[0, 1]$.

Sortie :

$BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t)$

Début de { DE CASTELJAU }

{ INITIALISATION }

pour i variant de 0 à n

faire pour j variant de 0 à $n - i$

faire $P_i^0 \leftarrow P_i$

{ RECURRENCE }

pour i variant de 1 à n

faire pour j variant de 0 à $n - i$

faire $P_j^i \leftarrow (1 - t)P_j^{i-1}(t) + tP_{j+1}^{i-1}$

{ RESULTAT }

Ecrire P_0^n

Fin de { de DECASTELJAU }

Cette procédure sera appelée dans la suite $DECAST[P_0, P_1, \dots, P_n; t]$.

De même que les courbes polynomiales sont représentées par un polygone de contrôle, les courbes rationnelles seront caractérisées par un polygone massique (c'est à dire une liste de points pondérés ou de vecteurs du plan) ainsi que l'ont défini Fiorot Jeannin en 1986.

1.1.3 L'espace des vecteurs massiques $\hat{\mathcal{E}}$

\mathcal{E}, \mathcal{F} Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines euclidiens réels de dimension finie, tels que \mathcal{E} soit un hyperplan de \mathcal{F} .

$\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}}$ sont les espaces vectoriels associés à \mathcal{E} et \mathcal{F} respectivement.

$\vec{\mathcal{E}}$ est un sous espace vectoriel de $\vec{\mathcal{F}}$.

$\tilde{\mathcal{E}}$ On note $\tilde{\mathcal{E}}$ le complété projectif de \mathcal{E} , c'est à dire \mathcal{E} complété par les points à l'infini. Le point à l'infini dans la direction de $\vec{u} \neq \vec{0}$ est noté \vec{u}_∞ .

Soit $\Omega \in \mathcal{F}, \Omega \notin \mathcal{E}$, l'espace $\tilde{\mathcal{E}}$ s'identifie à l'ensemble des droites de \mathcal{F} passant par Ω ou encore à l'ensemble des droites vectorielles de $\vec{\mathcal{F}}$.

Les points à l'infini de $\tilde{\mathcal{E}}$ sont identiques :

- aux droites de \mathcal{F} passant par Ω et parallèles à \mathcal{E} .
- aux droites vectorielles de $\vec{\mathcal{F}}$ parallèles à $\vec{\mathcal{E}}$.

$\hat{\mathcal{E}}$ On note $\hat{\mathcal{E}}$ l'espace des vecteurs massiques :

$$\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*) \cup \tilde{\mathcal{E}}.$$

Un vecteur massique est soit un point pondéré, soit un vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$.

$\hat{\mathcal{E}}$ est un espace vectoriel.

L'application $\hat{\Omega} : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ telle que $(m, \lambda) \rightarrow \lambda \overrightarrow{\Omega m}$, $\lambda \neq 0$ et $\vec{u} \rightarrow \vec{u}$ est une bijection.

Addition dans $\hat{\mathcal{E}}$ Soit θ, θ' deux vecteurs massiques $\theta \oplus \theta' = \hat{\Omega}^{-1}(\hat{\Omega}(\theta) + \hat{\Omega}(\theta'))$

Multiplication dans $\hat{\mathcal{E}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha * \theta = \hat{\Omega}^{-1}(\alpha \hat{\Omega}(\theta))$

Lorsque $\theta = (m, \lambda)$, $\alpha * \theta = (m, \alpha \lambda)$

Lorsque $\theta = \vec{u}$, $\alpha * \theta = \alpha \vec{u}$

Opérateur masse $\chi : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta \rightarrow \chi(\theta) = \begin{cases} \lambda & \text{si } \theta = (m, \lambda) \\ 0 & \text{si } \theta = \vec{u} \end{cases}$$

χ est la masse du vecteur massique.

1.2 Courbes (BR)

$\Pi\Omega$ projection de $\overrightarrow{\mathcal{F}} - \{\Omega\}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} \Pi\Omega : \overrightarrow{\mathcal{F}} - \{\Omega\} &\rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{\Omega M} &\rightarrow m \text{ intersection de } \Omega M \text{ avec } \tilde{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{\Omega M} &\rightarrow (\overrightarrow{\Omega M})_\infty, \text{ si } \overrightarrow{\Omega M} \parallel \tilde{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Π projection de $\hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} \Pi : \hat{\mathcal{E}} - \{\vec{0}\} &\rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \\ \theta &\rightarrow m \text{ si } \theta = (m, \lambda) \\ \theta &\rightarrow (\vec{u})_\infty \text{ si } \theta = \vec{u} \end{aligned}$$

Π est une surjection

$$\Pi(\lambda * \theta) = \Pi(\theta)$$

Les projections Π et $\Pi\Omega$ sont reliées par la relation :

$$\Pi = \Pi\Omega \circ \hat{\Omega}$$

Courbes (BR) et courbes rationnelles

Définition : soit $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ un polygone massique de longueur n . La courbe B -rationnelle (BR) de polygone de contrôle θ est décrite par le point $M(t)$

$$M(t) = BR[\theta; [0, 1]](t) = \Pi(BP[\theta; [0, 1]], t \in [0, 1]).$$

C'est à dire qu'une courbe (BR) est la Π -projection d'une courbe Bézier-de Casteljau de l'espace $\hat{\mathcal{E}}$

Théorème 1 *Il y a identité entre les courbes (BR) et les courbes rationnelles.*

Preuve : Théorème 1 de [8] ■

Définition équivalente : Considérons P_i définis par $\overrightarrow{\Omega P_i} = \hat{\Omega}(\theta_i)$ nous avons :

$$BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](t) = \Pi\Omega(BP[P_0, P_1, \dots, P_n](t))$$

Cette définition signifie qu'une courbe (BR) de \mathcal{E} est la $\Pi\Omega$ -projection d'une courbe Bézier-de Casteljau de l'espace \mathcal{F} .

Forme explicite des (BR) Soit $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ un polygone massique de $\hat{\mathcal{E}}$ et soit,

I l'ensemble des indices i pour lesquels θ_i est un point pondéré ($\chi(\theta_i) \neq 0$),
 \bar{I} l'ensemble des indices i pour lesquels θ_i est un vecteur pur ($\chi(\theta_i) = 0$).

$$I \cup \bar{I} = \{0, 1, \dots, n\} \quad I \cap \bar{I} = \emptyset$$

$$\beta(t) = \sum_{i \in I} \chi(\theta_i) B_i^n(t) = \sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t)$$

$$BR[\theta](t) = M(t)$$

$$M(t) = \frac{1}{\beta(t)} \left(\sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) P_i \right) + \frac{1}{\beta(t)} \left(\sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) \vec{U}_i \right) \text{ si } \beta(t) \neq 0$$

$$M(t) = \left(\sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) P_i + \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) \vec{U}_i \right)_{\infty}$$

$$\text{si } \beta(t) = 0 \text{ et } \vec{V}(t) = \sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) P_i + \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) \vec{U}_i \neq \vec{0}$$

$$BR[\theta](t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} BR[\theta](t) \text{ si } \beta(t_0) = 0 \text{ et } \vec{V}(t_0) = \vec{0}.$$

Exemple de mise sous forme (BR) d'une courbe rationnelle

$$x(t) = \frac{6t - 6t^2 + 6t^3}{1 - 3t + 6t^2 - 3t^3} \quad y(t) = \frac{-3t + 4t^3}{1 - 3t + 6t^2 - 3t^3}$$

En coordonnées homogènes :

$$X = 6t - 6t^2 + 6t^3$$

$$Y = -3t + 4t^3$$

$$Z = 1 - 3t + 6t^2 - 3t^3$$

Ecriture des X, Y, Z dans la base des polynômes de Bernstein :

$$X = 0.B_0^3 + 2B_1^2 + 2.B_2^3 + 6.B_3^3$$

$$Y = 0.B_0^3 - 1B_1^3 - 2B_2^3 + 1.B_3^3$$

$$Z = 1.B_0^3 + 0.B_1^3 + 1.B_2^3 + 1.B_3^3$$

d'où

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\theta_0 = ((0, 0); 1) = (A_0; 1)$$

$$\theta_1 = ((2, -1); 0) = \vec{A}_1$$

$$\theta_2 = ((2, -2); 1) = (A_2; 1)$$

$$\theta_3 = ((6, 1); 1) = (A_3; 1)$$

Cette courbe (BR) est représentée par la figure 1.1

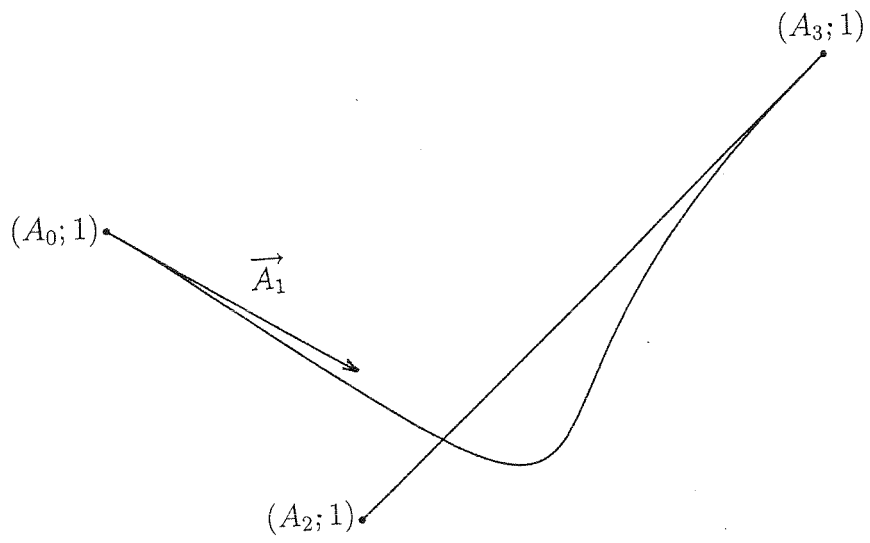


FIG. 1.1 - Une cubique (BR).

Chapitre 2

Liaison entre forme (BR) d'une conique et ses caractéristiques géométriques

Les coniques ont depuis longtemps fait l'objet de nombreuses études que ce soit du point de vue géométrique (Pappus, 4ème siècle avant J.C. [9] ; Euclide, 3ème siècle avant J.C. [10] ; Appolonius, 3ème siècle avant J.C.[11] ; Pascal, 1640 [12] ; Desargues, 1648 [13] ; Monge, 1795 [14], 1922 [15] ; Chasles, 1861 [16], 1865 [17], 1889 [18] ; Poncelet, 1862 [19], 1865 [20] ; Lebesgues, 1942 [21]) ou du point de vue analytique (Lebesgue, 1942 [21] ; Berger, 1990 [22]).

Les coniques jusqu'alors ont été utilisées en CAO en tant que courbes Bézier-rationnelles (Faux, 1979 [23] ; Farin, 1983 [24] ; Lee, 1987 [25]) ; Farin, 1992 [26] ; Hoschek, 1993 [27]). Le point de vue des courbes (BR) est ici développé. Il permet une description complète de la conique, en particulier ses points à l'infini.

Cette partie établit le lien entre la définition usuelle d'une conique par foyer, directrice et excentricité et ses différentes formes (BR) *via* trois vecteurs massiques linéairement indépendants.

Cette étude s'appuie sur les résultats relatifs aux courbes rationnelles décrites par des points et des vecteurs de contrôle (Fiorot et Jeannin, 1986 [6], 1987 [7], 1989 [8]) dans le but d'une exploitation en CAO. Les coniques, en tant que courbes rationnelles du second degré, sont ici décrites par une liste de trois vecteurs massiques linéairement indépendants appelée forme (BR) de la conique (Bécar et Fiorot, 1994 [28], 1996 [29], 1997 [30]) . Les changements de paramètre homographique seront abondamment utilisés dans la suite. Ils offrent la particularité d'être biunivoques et de conserver la longueur du polygone massique de contrôle (Patterson, 1985 [31];

Fiorot et Jeannin, 1991 [32]; Fiorot, Jeannin et Taleb, 1994 [33]).

Dans un premier temps nous donnons une forme (BR) symétrique d'une conique définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Toutes les autres formes (BR) de la conique sont déduites de cette forme particulière par des changements de paramètre homographique.

Dans un deuxième temps, à partir de trois vecteurs massiques linéairement indépendants définissant une conique propre sous forme (BR), nous déterminons, grâce à des changements de paramètre homographique appropriés, un nouveau polygone de contrôle de la conique.

Dans le cas de la parabole, le dernier polygone massique obtenu se compose de deux vecteurs purs (l'un dirigeant l'axe, l'autre la tangente au sommet) et d'un point pondéré donnant le sommet. De cette configuration particulière, nous construisons géométriquement et de manière élémentaire le foyer et la directrice de la parabole (BR).

Dans le cas de l'ellipse, le dernier polygone massique est constitué de deux points pondérés définissant un des axes et d'un vecteur pur dirigeant une tangente à un sommet orthogonale à cet axe. Les paramètres géométriques de cette ellipse (BR) sont déduits directement.

Dans le cas de l'hyperbole, le dernier polygone massique obtenu est formé de deux vecteurs de même norme dirigeant les asymptotes et d'un point pondéré définissant son centre. La somme des deux vecteurs purs dirige l'axe de l'hyperbole (BR) tandis que leur différence dirige les directrices. Les autres éléments géométriques sont déduits de cette dernière configuration.

2.1 Introduction et quelques rappels

Proposition 2.1 *Si $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont trois vecteurs massiques linéairement indépendants de $\hat{\mathcal{E}}$ (\mathcal{E} peut-être \mathbb{R}^2), le support de la courbe $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ est une conique propre du plan bitangente en $\Pi(\alpha_0)$ et $\Pi(\alpha_2)$ aux droites $(\Pi(\alpha_0)\Pi(\alpha_1))$ et $(\Pi(\alpha_2)\Pi(\alpha_1))$. Réciproquement, toute conique propre du plan est le support d'une courbe $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ constituent en base de $\hat{\mathcal{E}}$.*

Preuve : Proposition 5.1.3 de [8]. ■

Notation : Nous notons $|BR[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]|_{\mathcal{J}}$ le support de $BR[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ relatif à \mathcal{J} , i.e $\{BR[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n](t), t \in \mathcal{J}, \text{ où } \mathcal{J} \subset \tilde{\mathbb{R}}, \text{ quand il n'est pas précisé } \mathcal{J} = \tilde{\mathbb{R}}.$

Proposition 2.2 *Dans le plan \mathcal{E} , étant donné une droite d (une directrice), un point F (un foyer) et un scalaire positif e (l'excentricité), une conique est l'ensemble des points M satisfaisant $\frac{MF}{MH} = e$ où H est la projection orthogonale de M sur d .*

Preuve : Dans tout livre élémentaire de géométrie. L'un des plus anciens est celui de Pappus (4ème siècle)[9] Cette propriété était déjà donnée par Euclide (3ème siècle avant J.C.) et par Archimède (vers 287-212 avant J.C.). ■

Dans le cadre de la géométrie de la CAO et en vue d'une utilisation directe des coniques sous forme (BR) nous établissons dans ce chapitre le lien entre les deux précédentes descriptions des coniques. A partir du triplet (F, d, e) nous déterminons une forme (BR) symétrique de la conique. Réciproquement, étant donné trois vecteurs massiques linéairement indépendants (déterminant donc une conique) nous définissons ses caractéristiques géométriques (F, d, e) . Ce dernier point est obtenu *via* des changements de paramètre homographique. Rappelons également le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ trois vecteurs massiques linéairement indépendants de $\hat{\mathcal{E}}$ et $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ la conique associée. Alors,*

si $\chi(\alpha_1)^2 - \chi(\alpha_0)\chi(\alpha_2) > 0$, $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ est une hyperbole,

si $\chi(\alpha_1)^2 - \chi(\alpha_0)\chi(\alpha_2) = 0$, $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ est une parabole,

si $\chi(\alpha_1)^2 - \chi(\alpha_0)\chi(\alpha_2) < 0$, $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ est une ellipse

où χ est la forme linéaire (appelée masse) définie de la manière suivante :

$\chi : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\chi(A; a) = a, \chi(\vec{U}) = 0$.

Preuve : Proposition 5.1.6 de [8] ■

Le changement de paramètre joue un rôle essentiel dans l'étude des coniques. Nous aurons souvent recours à la proposition suivante :

Proposition 2.4 *Considérons le changement de paramètre homographique*

$$t = h(u) = \frac{a(1-u) + bu}{c(1-u) + du}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (2.1)$$

(i) *Alors $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h(u) = BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2](u)$ avec*

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (c-a)^2\alpha_0 \oplus 2a(c-a)\alpha_1 \oplus a^2\alpha_2 \\ \beta_1 &= (c-a)(d-b)\alpha_0 \oplus (bc-2ab+ad)\alpha_1 \oplus ab\alpha_2 \\ \beta_2 &= (d-b)^2\alpha_0 \oplus 2b(d-b)\alpha_1 \oplus b^2\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *sont définis à une proportionnalité près,*

$$|BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]|_{\tilde{\mathbb{R}}} = |BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2]|_{\tilde{\mathbb{R}}}$$

(ii) *les relations (2.2) sont une condition nécessaire et suffisante pour que $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ et $BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2]$ définissent deux coniques de même support.*

Preuve : (i) les coordonnées homogènes de t (resp. $u \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) relativement au repère projectif barycentrique $(0, \frac{1}{2}, 1)$ de $\tilde{\mathbb{R}}$ sont à un coefficient près : $(1-t, t)$ (resp. $(1-u), u$) si t (resp. $u \in \mathbb{R}$), $(-1, 1)$ si $t = \infty$ (resp. $u = \infty$).

$$\text{Nous avons } t = \frac{a(1-u) + bu}{c(1-u) + du} \text{ et } 1-t = \frac{(c-a)(1-u) + (d-b)u}{c(1-u) + du}$$

La fonction homographique $t = h(u)$ s'écrit alors relativement au repère projectif barycentrique $(0, \frac{1}{2}, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-a & d-b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-u \\ u \end{pmatrix}$$

$H = \begin{pmatrix} c-a & d-b \\ a & b \end{pmatrix}$ est une matrice de h relativement au repère projectif barycentrique $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

Appliquons la proposition 5.2 de [33] dans le cas $n = 2$. Le nouveau polygone massique $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ résultant du changement homographique de paramètre $t = h(u)$ s'exprime en fonction de l'ancien $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ à un coefficient de proportionnalité près suivant la relation matricielle :

$$\beta^T = D^{-1} \bar{H} D \alpha^T$$

où $D = \text{diag}(1, 2, 1)$ et \bar{H} est la matrice 3×3 associée à H donnée (cf remarque 3.1 de [33]) par

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} (c-a)^2 & a(c-a) & a^2 \\ 2(c-a)(d-b) & b(c-a) + a(d-b) & 2ab \\ (d-b)^2 & b(d-b) & b^2 \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

Le changement homographique de paramètre h étant une bijection de $\tilde{\mathbb{R}}$ sur $\tilde{\mathbb{R}}$, nous avons $|BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]|_{\tilde{\mathbb{R}}} = |BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2]|_{\tilde{\mathbb{R}}}$.

(ii) La condition est suffisante d'après ce qui précède. Elle est nécessaire d'après la proposition 5.3.4 de [8] les coniques paramétrées $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ et $BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2]$ ont même support si et seulement si, il existe une matrice \tilde{H} inversible d'ordre 2 telle que :

$$\tilde{H}^T \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \tilde{H} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

à une proportionnalité près.

Pour s'en convaincre il suffit d'identifier (2.2) et (2.3) pour obtenir

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} c - a & d - b \\ a & b \end{pmatrix}$$

■

Corollaire 2.1 *Dans le cas particulier où h laisse invariant 0 et 1 ($h(0) = 0$, $h(1) = 1$) h s'écrit $h(u) = \frac{bu}{c(1-u) + bu}$, $bc \neq 0$ et nous obtenons $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h(u) = BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2]$ avec $\beta_0 = c^2\alpha_0$, $\beta_1 = bc\alpha_1$, $\beta_2 = b^2\alpha_2$.*

Preuve : Poser $a = 0$ et $d = b$ dans (2.2) ■

Lorsque $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont simplement des points pondérés il en va de même pour $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, le corollaire est alors un résultat de Patterson [31].

2.2 Détermination de la forme (BR) d'une conique donnée par un foyer F , une directrice d et une excentricité e

Proposition 2.5 *Soit (C) une conique définie par un foyer F , une directrice d et une excentricité e . Considérons A_1 la projection orthogonale de F sur d et les points A_0 et A_2 de (C) symétriques par rapport à F . Définissons les trois vecteurs massiques $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$: $\alpha_0 = (A_0; 1)$, $\alpha_1 = (A_1; e)$, $\alpha_2 = (A_2; 1)$, alors le support (γ) de $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2](t)$, $t \in \tilde{\mathbb{R}}$ est la conique (C) .*

Preuve : D'après les résultats élémentaires de géométrie nous savons que (voir figure 2.1) :

(i) les droites (A_1A_0) et (A_1A_2) sont respectivement tangentes à (C) aux points A_0 et A_2 .

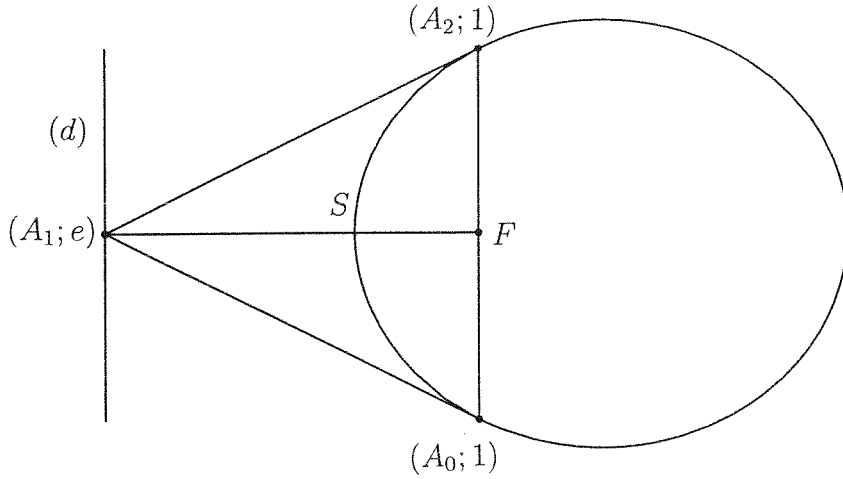


FIG. 2.1 - Forme (BR) symétrique d'une conique.

(ii) le sommet S relatif au foyer F vérifie $\overrightarrow{SF} = -e\overrightarrow{SA_1}$.

Considérons $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ avec $\alpha_0 = (A_0; 1)$, $\alpha_1 = (A_1; e)$, $\alpha_2 = (A_2; 1)$ nous avons successivement :

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2](0) = \Pi\left(\sum_{i=0}^2 B_i^2(0) \star \alpha_i\right) = \Pi(\alpha_0) = A_0,$$

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2](1) = \Pi\left(\sum_{i=0}^2 B_i^2(1) \star \alpha_i\right) = \Pi(\alpha_2) = A_2.$$

D'après la proposition 2.1 les droites $(\Pi(\alpha_0)\Pi(\alpha_1)) = (A_0A_1)$ et $(\Pi(\alpha_2)\Pi(\alpha_1)) = (A_2A_1)$ sont tangentes à (γ) respectivement en $\Pi(\alpha_0) = A_0$ et $\Pi(\alpha_2) = A_2$. De plus :

$$\begin{aligned} BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]\left(\frac{1}{2}\right) &= \Pi\left(\sum_{i=0}^2 B_i^2\left(\frac{1}{2}\right) \star \alpha_i\right) \\ &= \Pi\left(\frac{1}{4}\alpha_0 \oplus \frac{1}{2}\alpha_1 \oplus \frac{1}{4}\alpha_2\right) \\ &= \Pi(\alpha_0 \oplus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \alpha_0 \oplus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2 &= (A_0; 1) \oplus (A_1; 2e) \oplus (A_2; 1) \\ &= \left(\frac{A_0 + A_2}{2}; 2\right) \oplus (A_1; 2e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (F; 2) \oplus (A_1; 2e), \\
&= \left(\frac{F + eA_1}{1 + e}; 2 + 2e \right), \\
&= (S; 2 + 2e),
\end{aligned}$$

alors $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2](\frac{1}{2}) = S$. La conique (γ) support de $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ et (C) ont donc cinq éléments en commun : les points A_0, A_2 et S et deux tangentes (A_1A_0) et (A_1A_2) , elles sont identiques. ■

Dans la proposition précédente la forme (BR) de la conique (C) est une forme simple et symétrique (les deux vecteurs massiques α_0 et α_2 ont une masse égale à un et $\Pi(\alpha_0) = A_0, \Pi(\alpha_2) = A_2$ sont symétriques par rapport à F). A partir de cette forme (BR) symétrique nous pouvons déduire toutes les formes (BR) de longueur 2 de la conique (C) . C'est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 2.2 *La forme (BR) générale (avec trois vecteurs massiques) de la conique (C) définie par le triplet (F, d, e) est :*

$$BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2](u) = BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h(u)$$

où h est donnée par (2.1) ((a, b, c, d) sont définis à un coefficient de proportionnalité près avec $ad - bc \neq 0$),

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = ((A_0; 1), (A_1; e), (A_2; 1))$$

et $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ est défini par (2.2) à un coefficient de proportionnalité près

Preuve : C'est une conséquence de la proposition 2.4 ■

Dans les paragraphes suivants nous traitons le problème réciproque : à partir d'une forme (BR) d'une conique nous déterminons les caractéristiques géométriques (F, d, e) en utilisant des changements de paramètre homographique (c.p.h. en abrégé).

2.3 Détermination du foyer de la directrice et de l'excentricité d'une conique donnée sous forme (BR)

2.3.1 La parabole

Une parabole est définie par trois vecteurs massiques linéairement indépendants $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ satisfaisant $\chi(\alpha_1)^2 - \chi(\alpha_0)\chi(\alpha_2) = 0$ (proposition 2.3). Sa représentation se résume à trois cas :

$$BR[(P_0; 1), (P_1; w), (P_2; w^2)] \quad \text{où } w \neq 0 \quad (2.4)$$

$$BR[(P_0; 1), \vec{A}_1, \vec{A}_2] \quad (2.5)$$

$$BR[\vec{A}_0, \vec{A}_1, (P_2; 1)] \quad (2.6)$$

Un changement affine de paramètre $h(u) = 1 - u$ donne $BR[\vec{A}_0, \vec{A}_1, (P_2; 1)] \circ h = BR[(P_2; 1), \vec{A}_1, \vec{A}_0]$ (il suffit de faire $a = 1, b = 0, c = d = 1$ dans (2.1) de la proposition 2.4). Par suite nous aurons à considérer les cas (2.4) et (2.5).

Proposition 2.6 Soit $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ une parabole où $\alpha_0 = (P_0; 1), \alpha_1 = (P_1; w), \alpha_2 = (P_2; w^2)$, $w \neq 0$. Alors il existe au plus trois c.p.h, h_1, h_2, h_3 donnant successivement :

(i) Si $w = 1$, $h_1(u) = \frac{u}{1-u}$,

$$BR[(P_0; 1), (P_1; w), (P_2; w^2)] \circ h_1 = BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2]$$

avec $\vec{B}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{B}_2 = \overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}$,
si $w \neq 1$, $h_1(u) = \frac{1}{1-w}u$,

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2]$$

avec $\vec{B}_1 = \frac{w}{1-w}\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{B}_2 = (\frac{w}{1-w})^2(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2})$.

Dans les deux cas \vec{B}_2 est la direction de l'axe de la parabole. Si de plus, $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 = 0$, P_0 est le sommet et \vec{B}_1 est la direction de la tangente à P_0 .

(ii) Si $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \neq 0$, $h_2(u) = \frac{ru}{1-u+ru}$ où $r = \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\|\vec{B}_2\|^2}$,

$$BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2] \circ h_2 = BR[(P_0; 1), \vec{C}_1, \vec{C}_2]$$

avec $\vec{C}_1 = r\vec{B}_1, \vec{C}_2 = r^2\vec{B}_2$ et $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = \|\vec{C}_2\|^2$.

(iii) Si $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 \neq 0$ et $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = \|\vec{C}_2\|^2$, $h_3(u) = \frac{-(1-u)+u}{u}$,

$$BR[(P_0; 1), \vec{C}_1, \vec{C}_2] \circ h_3 = BR[(D_0; 1), \vec{D}_1, \vec{D}_2]$$

où $D_0 = P_0 - 2\vec{C}_1 + \vec{C}_2$ est le sommet de la parabole, $\vec{D}_1 = \vec{C}_1 - \vec{C}_2$, $\vec{D}_2 = \vec{C}_2$, $\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$: \vec{D}_2 est la direction de l'axe de la parabole, \vec{D}_1 est la direction de la tangente à D_0 .

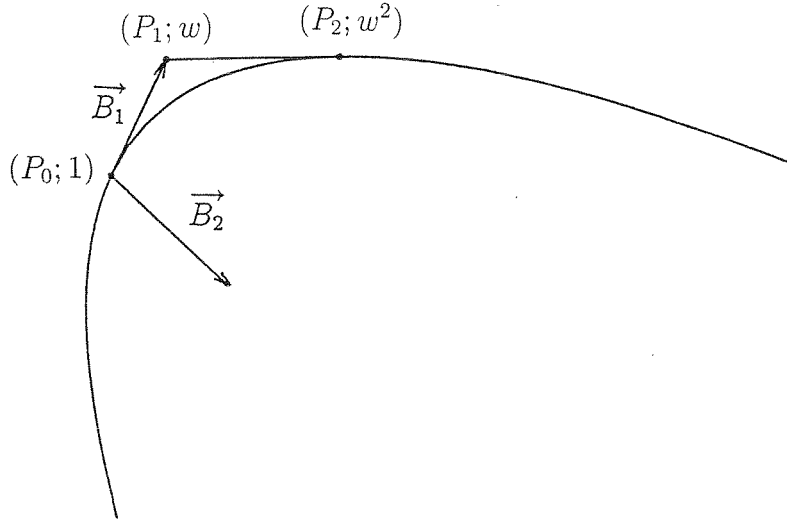


FIG. 2.2 - Nouvelle représentation avec deux vecteurs purs et un point pondéré d'une parabole (BR) définie par trois points pondérés.

Preuve :

(i) Cas $w = 1$. Le c.p.h. h_1 est défini suivant (2.1) avec $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$, les formules (2.2) donnent (voir figure 2.2):

$$\beta_0 = \alpha_0 = (P_0; 1),$$

$$\beta_1 = -\alpha_0 \oplus \alpha_1 = (P_0; -1) \oplus (P_1; 1) = \overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{B}_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_0 \ominus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (P_0; 1) \oplus (P_1; -2) \oplus (P_2; 1) = P_0 - 2P_1 + P_2 = \overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{B}_2.$$

Cas $w \neq 1$. Le c.p.h. h_1 est défini suivant (2.1) avec $a = 0, b = 1, c = d = 1 - w$, les formules (2.2) donnent (voir figure 2.2):

$$\beta_0 = (1 - w)^2 \alpha_0 = (P_0; (1 - w)^2),$$

$$\beta_1 = -(1 - w)w \alpha_0 \oplus (1 - w)w \alpha_1 = (P_0; -(1 - w)w) \oplus (P_1; (1 - w)w),$$

$$\beta_1 = (1 - w)w \overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{B}_1,$$

$$\beta_2 = w^2 \alpha_0 \ominus 2w \alpha_1 \oplus \alpha_2 = (P_0; w^2) \oplus (P_1; -2w^2) \oplus (P_2; w^2),$$

$$\beta_2 = w^2 (\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_1 P_2}) = \vec{B}_2.$$

Avec les notations introduites dans la proposition 2.6, le résultat s'écrit :

$$BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2](u) = BR[(P_0; (1 - w)^2), (1 - w)^2 \vec{B}_1, (1 - w)^2 \vec{B}_2]$$

Nous savons que $BR[(P_0; (1 - w)^2), (1 - w)^2 \vec{B}_1, (1 - w)^2 \vec{B}_2] = BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2]$, d'où le résultat.

Dans les deux cas $BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2](1) = \Pi(\vec{B}_2) = (\vec{B}_2)_\infty$: Le point double à l'infini de la parabole est donc obtenu pour $u = 1$, il est défini par la direction \vec{B}_2 .

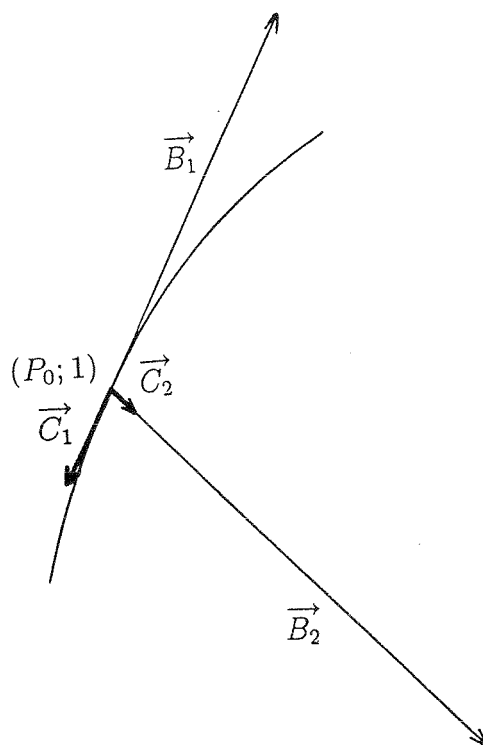


FIG. 2.3 - Ajustement des deux vecteurs purs qui définissent avec un point pondéré une parabole (BR).

De plus $BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2](0) = \Pi(P_0; 1) = P_0$. La dérivée en $u = 0$ (donc au point P_0) à la courbe (BR) est $\frac{d}{du}(BR[(P_0; 1), \vec{B}_1, \vec{B}_2])(0) = 2\vec{B}_1$ (proposition 4.1.1 de [8]).

Si $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 = 0$ alors P_0 est le sommet. (A la fin de (i) nous nous retrouvons avec une parabole sous la forme (2.5).

(ii) Cette fois h_2 est définie suivant (2.1) avec $a = 0, b = r, c = 1, d = r$, d'après les formules (2.2) nous obtenons (voir figure 2.3):

$$\beta_0 = \alpha_0 = (P_0; 1),$$

$$\beta_1 = r\alpha_1 = r\vec{B}_1 (= \vec{C}_1),$$

$$\beta_2 = r^2\alpha_2 = r^2\vec{B}_2 (= \vec{C}_2),$$

Alors $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = r^3 \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$, or $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 = r \|\vec{B}_2\|^2$ d'où $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = r^4 \|\vec{B}_2\|^2$ c'est-à-dire $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = \|\vec{C}_2\|^2$.

(iii) h_3 est définie suivant (2.1) avec $a = -1, b = 1, c = 0, d = 1$ et les formules (2.2) nous donnent (voir figure 2.4):

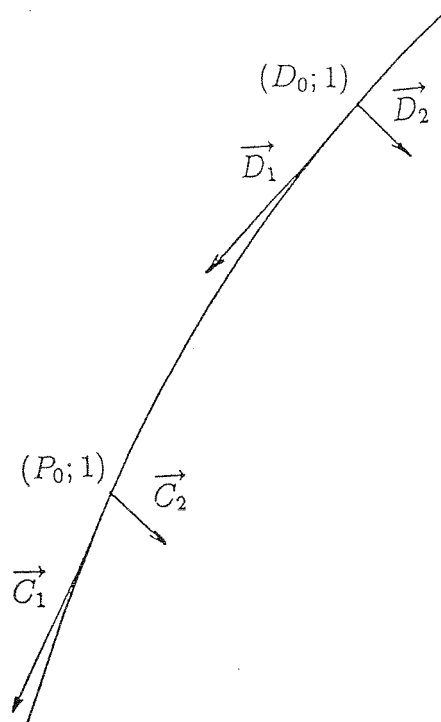


FIG. 2.4 - Nouvelle représentation avec deux vecteurs purs orthogonaux et un point pondéré d'une parabole (BR) définie par deux vecteurs purs et un point pondéré.

$$\beta_0 = \alpha_0 \ominus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (P_0; 1) \ominus 2\vec{C}_1 \oplus \vec{C}_2 = P_0 - 2\vec{C}_1 + \vec{C}_2 (= (D_0; 1)),$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \ominus \alpha_2 = \vec{C}_1 - \vec{C}_2 = \vec{D}_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 (= \vec{D}_1).$$

$$\text{De plus } \vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = (\vec{C}_1 - \vec{C}_2) \cdot \vec{C}_2 = \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 - \|\vec{C}_2\|^2.$$

Nous concluons comme à la fin du (i). ■

Remarque : Dans la proposition 2.6 (ii) (hypothèse $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \neq 0$) prenons P_0 (par exemple) comme origine commune des vecteurs \vec{B}_1, \vec{B}_2 et \vec{C}_1, \vec{C}_2 et notons b_1 (resp. b_2) l'extrémité de \vec{B}_1 (resp. \vec{B}_2). Nous déterminons (après quelques calculs) l'extrémité c_1 (resp. c_2) de \vec{C}_1 (resp. \vec{C}_2) de la manière suivante: la parallèle à (b_1, b_2) passant par le point b'_1 (la projection orthogonale de b_1 sur $(P_0 b_2)$) coupe $(D_0 b_1)$ en C_1 et le point C_2 est la projection orthogonale de C_1 sur $(P_0 b_2)$ (voir figure 2.5)

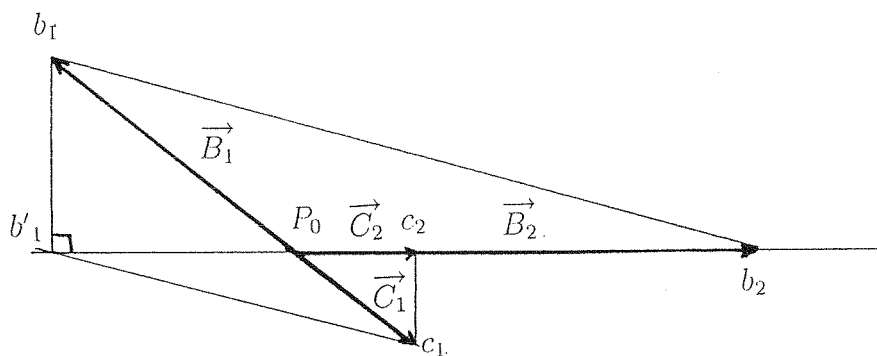


FIG. 2.5 - Construction du nouveau polygone d'une parabole (BR) décrite par deux vecteurs purs et un point pondéré.

Proposition 2.7 Soit $BR[(D_0; 1), \vec{D}_1, \vec{D}_2]$ une parabole avec $\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$. Définissons les points $M = D_0 + \vec{D}_1$, $N = D_0 + \vec{D}_2$, D sur la droite (D_0, \vec{D}_2) tel que sa projection orthogonale sur la droite (MN) soit M et finalement $F = D_0 - \vec{D}_0 \vec{D}$. Alors F est le foyer de la parabole, $d = (D, \vec{D}_1)$ est la directrice (D_0 est le sommet, (D, \vec{D}_2) est l'axe).

Preuve : (figure 2.6)

(i) Définissons $\rho = \frac{\|\vec{D}_1\|}{\|\vec{D}_2\|}$, $\vec{E}_1 = \rho \vec{D}_1$, $\vec{E}_2 = \rho^2 \vec{D}_2$ d'où

$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = \|\vec{D}_0 \vec{D}\|$ et $D = D_0 - \vec{E}_2$.

Considérons alors le c.p.h. $h_4(u) = \frac{\rho u}{(1-u) + \rho u}$, alors $BR[(D_0; 1), \vec{D}_1, \vec{D}_2] \circ h_4 =$

$BR[(D_0; 1), \vec{E}_1, \vec{E}_2]$.

En effet posons $a = 0, b = d = \rho, c = 1$ dans (2.1), les formules (2.2) nous donnent :

$\beta_0 = \alpha_0 = (D_0; 1),$

$\beta_1 = \rho \alpha_1 = \rho \vec{D}_1 (= \vec{E}_1),$

$\beta_2 = \rho^2 \alpha_2 = \rho^2 \vec{D}_2 (= \vec{E}_2),$

Par suite $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$.

(ii) Définissons $h_5(u) = \frac{-(1-u) + u}{2u}$ alors

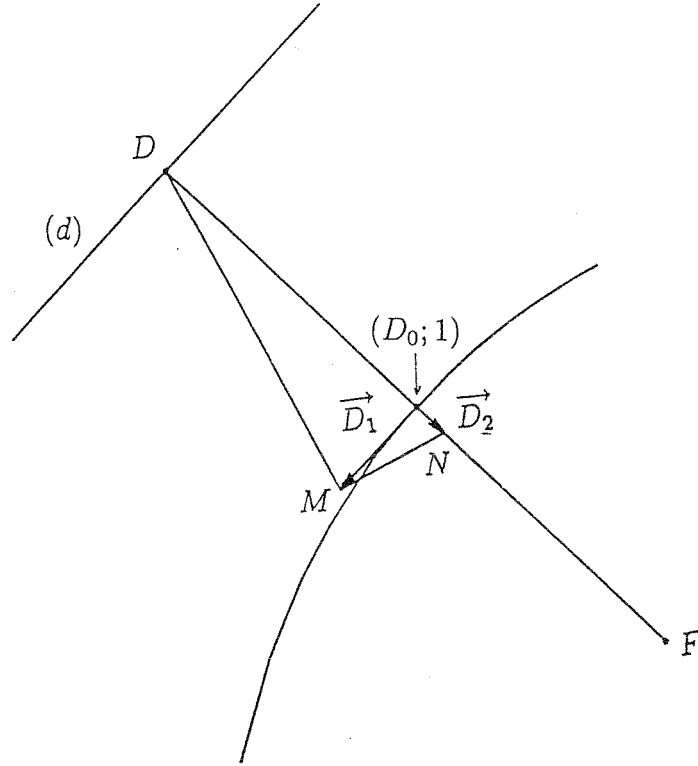


FIG. 2.6 - Foyer et directrice d'une parabole (BR) définie par deux vecteurs purs orthogonaux et un point pondéré de masse 1.

$BR[(D_0; 1), \vec{E}_1, \vec{E}_2] \circ h_5 = BR[(A_0; 1), (D; 1), (A_2; 1)]$ où $A_0 = D_0 - 2\vec{E}_1 + \vec{E}_2$,
 $D = D_0 - \vec{E}_2$, $A_2 = D_0 + 2\vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Pour cela posons $a = -1, b = 1, c = 0, d = 2$ dans (2.1), les formules (2.2) entraînent :

$$\beta_0 = \alpha_0 \ominus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (D_0; 1) - 2\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (D_0 - 2\vec{E}_1 + \vec{E}_2; 1) (= (A_0; 1)),$$

$$\beta_1 = \alpha_0 \ominus \alpha_2 = (D_0; 1) - \vec{E}_2 = (D_0 - \vec{E}_2; 1) (= (D; 1)),$$

$$\beta_2 = \alpha_0 \oplus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2 = (D_0; 1) + 2\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (D_0 + 2\vec{E}_1 + \vec{E}_2; 1) (= (A_2; 1)),$$

Considérons (\mathcal{P}) la parabole ($e=1$) définie par le foyer $F = D_0 + \vec{E}_2 (= D_0 - \overrightarrow{D_0D} = \frac{A_0 + A_2}{2})$ et la directrice $d = (D, \overrightarrow{A_0A_2}) = (D, \vec{D}_1)$. D'après la proposition 2.5

le support de $BR[(A_0; 1), (D; 1), (A_2; 1)]$ (ou celui de $BR[(D_0; 1), \vec{D}_1, \vec{D}_2]$) est la parabole (\mathcal{P}). ■

Finalement si nous partons de la forme (2.4) d'une parabole, le (i) de la proposition 2.6 nous donne une forme (2.5) de la parabole. En suivant les résultats des propositions 2.6 et 2.7 dans cet ordre nous obtenons en au plus cinq étapes (ou cinq changements de paramètre homographique) le foyer et la directrice d'une parabole donnée sous forme (BR).

2.3.2 L'ellipse

Une ellipse est définie par trois vecteurs massiques linéairement indépendants $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ satisfaisant

$$(\chi(\alpha_1))^2 - \chi(\alpha_0)\chi(\alpha_2) < 0 \quad (\text{cf. proposition 2.3}) \quad (2.7)$$

Nous avons six possibilités pour le signe du triplet $(\chi(\alpha_0), \chi(\alpha_1), \chi(\alpha_2))$:

$(+, +, +), (+, -, +), (-, +, -), (-, -, -), (+, 0, +), (-, 0, -)$

Nous savons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* : BR[\lambda\alpha_0, \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2] = BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$. En utilisant cette égalité avec $\lambda = -1$ nous sommes ramenés à trois cas $(+, +, +), (+, -, +), (+, 0, +)$

Considérant le c.p.h. $h(u) = \frac{u}{-(1-u) + u}$ nous obtenons $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h =$

$BR[\alpha_0, -\alpha_1, \alpha_2]$ (la vérification se fait toujours avec les formules (2.1) et (2.2) de la proposition 2.4). Par suite le second cas $(+, -, +)$ se ramène au premier $(+, +, +)$.

En définitive nous pouvons supposer que toute ellipse sous forme (BR) est définie par le polygone massique $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ satisfaisant la relation (2.7) et telle que le signe du triplet $(\chi(\alpha_0), \chi(\alpha_1), \chi(\alpha_2))$ soit $(+, +, +)$ ou $(+, 0, +)$.

Proposition 2.8 Soit $BR[(A_0; a_0), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ une ellipse (où $a_i > 0, a_1^2 - a_0a_2 < 0$). Il existe au plus trois c.p.h. h_1, h_2, h_3 qui donnent successivement

(i) $BR[(A_0; a_0), (A_1; a_1), (A_2; a_2)] \circ h_1 = BR[(A_0; a_0), \overrightarrow{B_1}, (B_2; b_2)]$ avec

$$h_1(u) = \frac{ru}{(1-u) + (1+r)u}, r = -\frac{a_0}{a_1}, \overrightarrow{B_1} = a_0 \overrightarrow{A_1 A_0}, B_2 = \frac{a_0 A_0 + 2a_1 r A_1 + a_2 r^2 A_2}{a_0 + 2a_1 r + a_2 r^2},$$

$$b_2 = a_0 + 2a_1 r + a_2 r^2 > 0.$$

(ii) $BR[(A_0; a_0), \overrightarrow{B_1}, (B_2; b_2)] \circ h_2 = BR[(A_0; 1), \overrightarrow{C_1}, (B_2; 1)]$

$$\text{avec } h_2(u) = \frac{(b_2)^{-1/2} u}{a_0^{-1/2} (1-u) + (b_2)^{-1/2} u}, \overrightarrow{C_1} = (a_0 b_2)^{-1/2} \overrightarrow{B_1}.$$

(iii) Définissons $k_1 = \overrightarrow{A_0 B_2} \cdot \overrightarrow{C_1}, k_2 = \|\overrightarrow{C_1}\|^2 - \frac{1}{4} \|\overrightarrow{A_0 B_2}\|^2,$

si $k_1 = k_2 = 0$, $BR[(A_0; 1), \overrightarrow{C_1}, (B_2; 1)]$ est le cercle de centre $\frac{1}{2}(A_0 + B_2)$ et de

rayon $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{A_0 B_2}\|$, sinon définissons

$$h_3(u) = \frac{\sin \theta \cdot (1-u) + \cos \theta \cdot u}{(\cos \theta + \sin \theta) \cdot (1-u) + (-\sin \theta + \cos \theta) \cdot u},$$

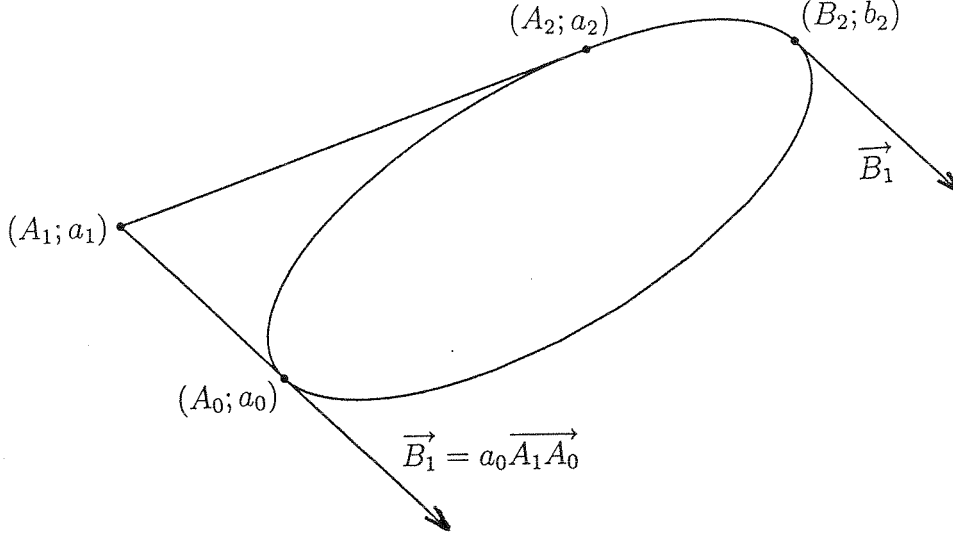


FIG. 2.7 - Nouvelle représentation avec deux points pondérés et un vecteur pur d'une ellipse (BR) définie à partir de trois points pondérés.

avec $\theta = \frac{\pi}{8}$ (resp. $\theta = \frac{1}{4} \text{Arctan} \frac{k_1}{k_2}$) si $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ (resp. $\forall k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \neq 0$),

$BR[(A_0; 1), \vec{C}_1, (B_2; 1)] \circ h_3 = BR[(D_0; 1), \vec{D}_1, (D_2; 1)]$ avec $\overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \vec{D}_1 = 0$,

$$D_0 = \cos^2 \theta \cdot A_0 + \sin^2 \theta \cdot B_2 + \sin 2\theta \cdot \vec{C}_1,$$

$$\vec{D}_1 = \cos 2\theta \cdot \vec{C}_1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \overrightarrow{A_0 B_2},$$

$$D_2 = \sin^2 \theta \cdot A_0 + \cos^2 \theta \cdot B_2 - \sin 2\theta \cdot \vec{C}_1.$$

Preuve: (i) Utilisons la proposition 2.4 avec $a = 0, b = r, c = 1, d = 1 + r$ (définition de h_1), nous obtenons (figure 2.7):

$$\beta_0 = \alpha_0 = (A_0; a_0)$$

$$\beta_1 = \alpha_0 \oplus r\alpha_1 = (A_0; a_0) \oplus (A_1; ra_1) = (A_0; a_0) \oplus (A_1; -a_0) \quad (r = -\frac{a_0}{a_1})$$

$$\beta_1 = a_0 \overrightarrow{A_1 A_0} = \vec{B}_1$$

$$\beta_2 = \alpha_0 \oplus 2r\alpha_1 \oplus r^2\alpha_2 = (A_0; a_0) \oplus (A_1; 2ra_1) \oplus (A_2; r^2a_2)$$

$$\beta_2 = \left(\frac{a_0 A_0 + ra_1 A_1 + r^2 a_2 A_2}{a_0 + ra_1 + r^2 a_2}; b_2 \right)$$

avec $b_2 = a_0 + ra_1 + r^2 a_2 > 0$ ($a_0 + ra_1 + r^2 a_2 = \frac{a_0^2}{a_1^2} a_2 > 0$).

(ii) En posant $a = 0, b = (b_2)^{-1/2}, c = (a_0)^{-1/2}$ et $d = (b_2)^{-1/2}$ (définition de h_2), les formules 2.2 de la proposition 2.4 donnent (figure 2.8)

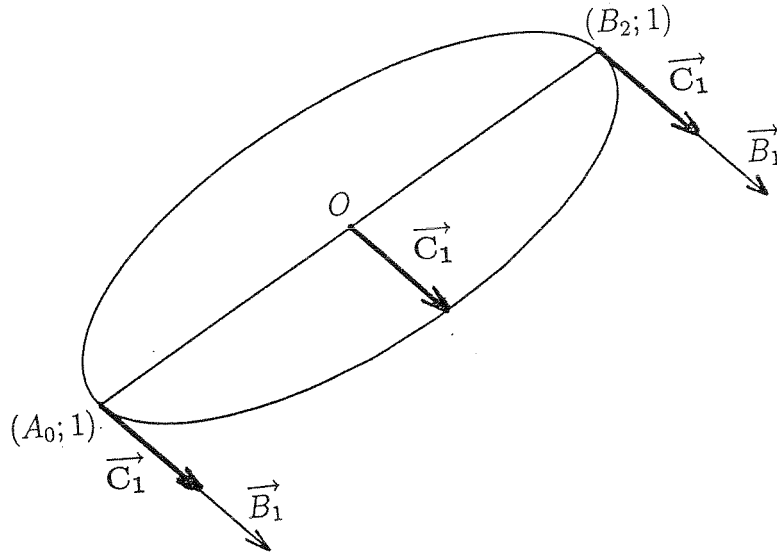


FIG. 2.8 - Ajustement à un des masses des deux points pondérés définissant avec un vecteur pur une ellipse (BR).

$$\beta_0 = \frac{1}{a_0}(A_0; a_0) = (A_0; 1)$$

$$\beta_1 = (a_0 b_2)^{-1/2} \alpha_1 = (a_0 b_2)^{-1/2} \vec{B}_1 (= \vec{C}_1)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{b_2}(B_2; b_2) = (B_2; 1)$$

d'où le résultat.

(iii) Si $k_1 = k_2 = 0$ alors nous savons d'après la proposition 5.4.2 de [8] que l'ellipse est un cercle de centre $\frac{1}{2}(A_0 + B_2)$ et de rayon $\frac{1}{2} \| \overrightarrow{A_0 B_2} \|$.

Dans les autres cas nous utilisons le c.p.h. h_3 défini par $a = \sin \theta, b = \cos \theta, c = \cos \theta + \sin \theta, d = -\sin \theta + \cos \theta$ et la proposition 2.4 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \cos^2 \theta \alpha_0 \oplus 2 \sin \theta \cos \theta \alpha_1 \oplus \sin^2 \theta \alpha_2 \\ \beta_1 &= \ominus \sin \theta \cos \theta \alpha_0 \oplus (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \alpha_1 \oplus \sin \theta \cos \theta \alpha_2 \\ \beta_2 &= \sin^2 \theta \alpha_0 \ominus 2 \sin \theta \cos \theta \alpha_1 \oplus \cos^2 \theta \alpha_2 \end{aligned}$$

soit encore (figure 2.9)

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (\cos^2 \theta A_0 + \sin^2 \theta B_2; 1) \oplus \sin 2\theta \vec{C}_1 \\ \beta_0 &= (\cos^2 \theta A_0 + \sin^2 \theta B_2 + \sin 2\theta \vec{C}_1; 1) (= D_0; 1) \end{aligned}$$

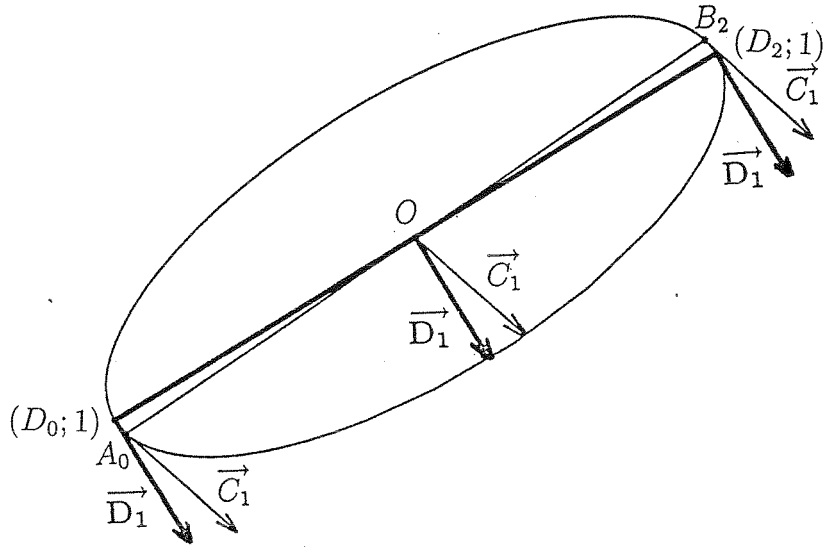


FIG. 2.9 - Nouvelle représentation par deux points pondérés et un vecteur pur définissant ses axes d'une ellipse (BR) décrite par deux points pondérés et un vecteur pur.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \overrightarrow{A_0 B_2} + \cos 2\theta \overrightarrow{C_1} (= \overrightarrow{D_1}) \\ \beta_2 &= (\sin^2 \theta A_0 + \cos^2 \theta B_2; 1) \ominus \sin 2\theta \overrightarrow{C_1} \\ \beta_2 &= (\sin^2 \theta A_0 + \cos^2 \theta B_2 - \sin 2\theta \overrightarrow{C_1}; 1) = (D_2; 1). \end{aligned}$$

Alors quelques calculs montrent que

$$\overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = \sin 4\theta \left(\frac{1}{4} \| \overrightarrow{A_0 B_2} \|^2 - \| \overrightarrow{C_1} \|^2 \right) + \cos 4\theta \overrightarrow{A_0 B_2} \cdot \overrightarrow{C_1},$$

$$\overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = k_1 \cos 4\theta - k_2 \sin 4\theta.$$

Si $k_2 = 0$, $\overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = k_1 \cos 4\theta$ et pour $\theta = \frac{\Pi}{8}$ nous avons bien $\overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = 0$ (le cas $k_1 = 0$ et $k_2 = 0$ a été examiné plus haut).

Si $k_2 \neq 0$ ($k_1 \in \mathbb{R}$) alors $\overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = 0 \iff \theta = \frac{1}{4} \arctan \frac{k_1}{k_2}$ ■

En conclusion l'ellipse est maintenant définie par :

$$BR[(D_0; 1), \overrightarrow{D_1}, (D_2; 1)] \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{D_0 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = 0.$$

Nous sommes en mesure après ces trois étapes ou ces trois changements de paramètre homographique de déterminer les caractéristiques (F, d, e) de l'ellipse.

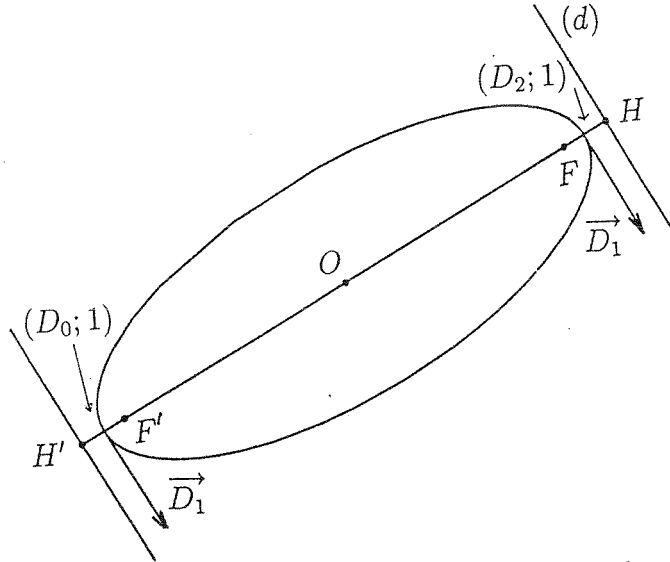


FIG. 2.10 - Foyers et directrices d'une ellipse (BR) décrite par deux points pondérés et un vecteur pur définissant ses axes.

Proposition 2.9 *Considérons l'ellipse sous forme (BR) : $BR[(D_0; 1), \vec{D}_1, (D_2; 1)]$ avec $\vec{D}_0 \vec{D}_2 \cdot \vec{D}_1 = 0$. Alors le point $O = \frac{1}{2}(D_0 + D_2)$ est le centre,*

(i) *Si $\|\vec{D}_0 \vec{D}_2\| > 2 \|\vec{D}_1\|$, définissons $a\vec{i} = \vec{O} \vec{D}_2$, $b\vec{j} = \vec{D}_1$ (\vec{i} et \vec{j} sont des vecteurs orthonormés).*

Si $\|\vec{D}_0 \vec{D}_2\| < 2 \|\vec{D}_1\|$, définissons $a\vec{i} = \vec{D}_1$, $b\vec{j} = \vec{O} \vec{D}_2$.

Alors $c = (a^2 - b^2)^{1/2}$, l'excentricité $e = \frac{c}{a}$, les foyers F et F' sont donnés par

$\vec{O} \vec{F} = -\vec{O} \vec{F}' = c\vec{i}$ et les traces sur l'axe focal (O, \vec{i}) des directrices associées sont

$\vec{O} \vec{H} = -\vec{O} \vec{H}' = \frac{a^2}{c}\vec{i}$.

(ii) *Si $\|\vec{D}_0 \vec{D}_2\| = 2 \|\vec{D}_1\|$, l'ellipse est un cercle.*

Preuve :

(i) Relativement au repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (BR) s'écrit avec les notations introduites (figure 2.10):

1. Si $\|\vec{D}_0 \vec{D}_2\| > 2 \|\vec{D}_1\|$: $D_0 = (-a, 0)$, $\vec{D}_1 = b\vec{j}$, $D_2 = (a, 0)$ d'où
 $x(t) = \frac{-a(1-t)^2 + at^2}{(1-t)^2 + t^2}$, $y(t) = \frac{2t(1-t)b}{(1-t)^2 + t^2}$ et par suite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Si $\|\vec{D}_0 \vec{D}_2\| < 2 \|\vec{D}_1\|$: $D_0 = (0, b)$, $\vec{D}_1 = (a, 0)$, $D_2 = (0, -b)$ d'où

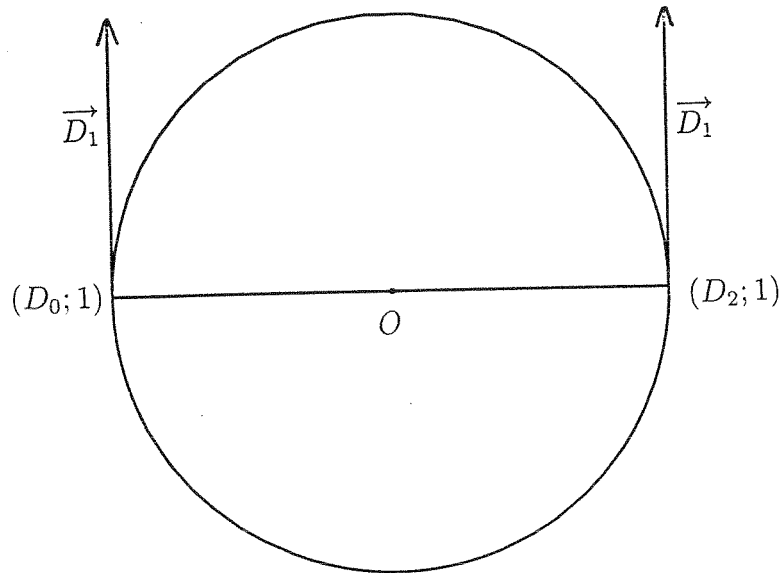


FIG. 2.11 - Cercle (BR) défini par deux points pondérés et un vecteur pur.

$x(t) = \frac{2t(1-t)a}{(1-t)^2 + t^2}$, $y(t) = \frac{(1-t)^2b - t^2b}{(1-t)^2 + t^2}$ et $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d'où le résultat (nous pouvons donner une preuve moins analytique comme celle de la proposition 2.11 relative à l'hyperbole)

(ii) L'ellipse est un cercle d'après la proposition 5.4.2 de [8] (figure 2.11). ■

Nous pouvons donner une représentation (BR) d'une ellipse (à partir de la précédente) dans laquelle figure explicitement l'excentricité et où un foyer et la trace de la directrice associée sont respectivement la Π -projection de la somme et de la différence du premier et du troisième vecteur massique.

Proposition 2.10 Soit l'ellipse $BR[(D_0; 1), \overrightarrow{D_1}, (D_2; 1)]$ avec $\overrightarrow{D_0D_2} \cdot \overrightarrow{D_1} = 0$. Il existe un changement de paramètre homographique conduisant à la représentation de l'ellipse sous la forme (nous supposons que $\|\overrightarrow{D_0D_2}\| > 2 \|\overrightarrow{D_1}\|$):

$$BR[(D_0; 1 + e), (1 - e^2)^{1/2}\overrightarrow{D_1}, (D_2; 1 - e)]$$

où e est l'excentricité.

$$\Pi((D_0; 1 + e) \oplus (D_2; 1 - e)) = F' \text{ (foyer)}$$

$$\Pi((D_0; 1 + e) \ominus (D_2; 1 - e)) = H' \text{ (trace de la directrice associée à } F')$$

Preuve : Soit $h(u) = \frac{\rho u}{(1-u) + \rho u}$ avec $\rho = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{1/2}$ alors nous vérifions que :

$$\begin{aligned} BR[(D_0; 1), \overrightarrow{D_1}, (D_2; 1)] \circ h &= BR[(D_0; 1), \rho \overrightarrow{D_1}, (D_2; \rho^2)] \\ &= BR[(D_0; 1+e), (1-e^2)^{1/2} \overrightarrow{D_1}, (D_2; 1-e)] \end{aligned}$$

$$(D_0; 1+e) \oplus (D_2; 1-e) = \left(\frac{1}{2}(1+e)D_0 + (1-e)D_2; 2\right)$$

$$(D_0; 1+e) \ominus (D_2; 1-e) = \left(\frac{1}{2e}((1+e)D_0 - (1-e)D_2); 2e\right)$$

$$\begin{aligned} \Pi((D_0; 1+e) \oplus (D_2; 1-e)) &= \frac{1}{2}(D_0 + D_2) + \frac{1}{2}e \overrightarrow{D_2 D_0} \\ &= O - ea\vec{i} \\ &= O - c\vec{i} (= F'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi((D_0; 1+e) \ominus (D_2; 1-e)) &= \frac{1}{2}(D_0 + D_2) + \frac{1}{2e} \overrightarrow{D_2 D_0} \\ &= O - \frac{a}{e}\vec{i} \\ &= O - \frac{a^2}{c}\vec{i} (= H') \end{aligned}$$

■

2.3.3 L'hyperbole

Proposition 2.11 Soit $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ une hyperbole. Posons $a_0 = \chi(\alpha_0)$, $a_1 = \chi(\alpha_1)$, $a_2 = \chi(\alpha_2)$ ($a_1^2 - a_0 a_2 > 0$).

(i) (a) $a_0 - 2a_1 + a_2 \neq 0$, soit t_1 et t_2 les deux racines réelles de l'équation du second degré (dénominateur de la (BR))

$$t^2(a_0 - 2a_1 + a_2) + 2t(a_1 - a_0) + a_0 = 0$$

et $h_1(u) = (1-u)t_2 + ut_1$, alors

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR\left[\frac{1}{\chi(\beta_1)} \overrightarrow{B_0}, (B_1; 1), \frac{1}{\chi(\beta_1)} \overrightarrow{B_2}\right] \text{ où}$$

$$\overrightarrow{B_0} = (1-t_2)^2 \alpha_0 \oplus 2t_2(1-t_2)\alpha_1 \oplus t_2^2 \alpha_2,$$

$$B_1 = \Pi(\beta_1), \text{ avec } \beta_1 = (1-t_1)(1-t_2)\alpha_0 \oplus (t_1 - 2t_1 t_2 + t_2)\alpha_1 + t_1 t_2 \alpha_2$$

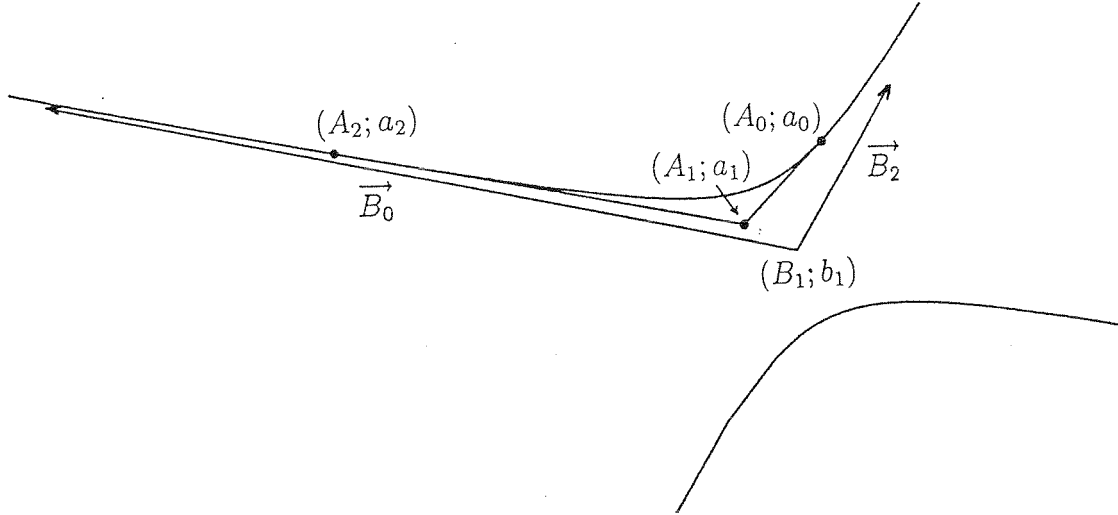


FIG. 2.12 - Nouvelle représentation par deux vecteurs purs et un point pondéré définissant ses asymptotes d'une hyperbole (BR) décrite par trois points pondérés.

$$\vec{B}_2 = (1 - t_1)^2 \alpha_0 \oplus 2t_1(1 - t_1) \alpha_1 \oplus t_1^2 \alpha_2 ,$$

$$(b) a_0 - 2a_1 + a_2 = 0, t_1 = \frac{a_0}{2(a_0 - a_1)}, h_1(u) = \frac{t_1(1 - u) + u}{1 - u}, \text{ alors}$$

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR\left[\frac{1}{\chi(\beta_1)} \vec{B}_0, (B_1; 1), \frac{1}{\chi(\beta_1)} \vec{B}_2\right] \text{ où}$$

$$\vec{B}_0 = (1 - t_1)^2 \alpha_0 \oplus 2t_1(1 - t_1) \alpha_1 \oplus t_1^2 \alpha_2,$$

$$B_1 = \Pi(\beta_1), \text{ avec } \beta_1 = -(1 - t_1) \alpha_0 \oplus (1 - 2t_1) \alpha_1 \oplus t_1 \alpha_2,$$

$$\vec{B}_2 = \alpha_0 \oplus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2 ,$$

$$(ii) h_2(u) = \frac{bu}{\frac{1}{b}(1 - u) + bu}, \text{ avec } b = \left(\frac{\|\vec{B}_0\|}{\|\vec{B}_2\|}\right)^{1/4} \text{ alors}$$

$$BR\left[\frac{1}{\chi(\beta_1)} \vec{B}_0, (B_1; 1), \frac{1}{\chi(\beta_1)} \vec{B}_2\right] \circ h_2 = BR[\vec{C}_0, (B_1; 1), \vec{C}_2]$$

$$\text{avec } \vec{C}_0 = \frac{1}{b^2} \frac{\vec{B}_0}{\chi(\beta_1)}, \vec{C}_2 = b^2 \frac{\vec{B}_2}{\chi(\beta_1)} (\|\vec{C}_0\| = \|\vec{C}_2\|).$$

Preuve : (i)(a) Avec les notations introduites, $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ a pour dénominateur :

$$t^2(a_0 - 2a_1 + a_2) + 2t(a_1 - a_0) + a_0 (= (1 - t)^2 a_0 + 2t(1 - t)a_1 + t^2 a_2) \quad (2.8)$$

Nous supposons $a_0 - 2a_1 + a_2 \neq 0$ et $a_1^2 - a_0 a_2 > 0$, ce trinôme du second degré a deux racines réelles t_1 et t_2 .

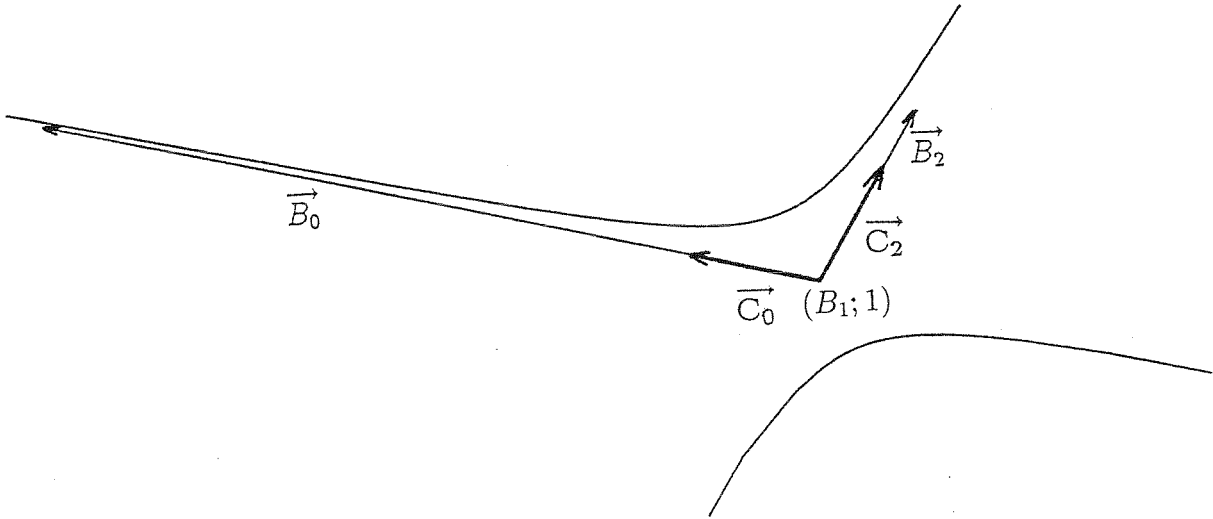


FIG. 2.13 - Ajustement des scalaires de deux vecteurs purs définissant avec un point pondéré une hyperbole (BR).

Soit $h_1(u) = (1-u)t_2 + ut_1$ nous avons (cf proposition 2.4 avec $a = t_2, b = t_1, c = d = 1$):

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR[\beta_0, \beta_1, \beta_2]$$

$$\beta_0 = (1-t_2)^2\alpha_0 \oplus 2t_2(1-t_2)\alpha_1 \oplus t_2^2\alpha_2,$$

$$\chi(\beta_0) = (1-t_2)^2a_0 + 2t_2(1-t_2)a_1 + t_2^2a_2 = 0, \text{ car } t_2 \text{ est racine de (2.8). Le vecteur}$$

massique β_0 est donc un vecteur pur \vec{B}_0 ,

$$\beta_1 = (1-t_2)(1-t_1)\alpha_0 \oplus (t_1 - 2t_1t_2 + t_2)\alpha_1 \oplus t_1t_2\alpha_2,$$

$$\chi(\beta_1) = (1-t_2)(1-t_1)a_0 + (t_1 - 2t_1t_2 + t_2)a_1 + t_1t_2a_2.$$

Comme $t_1 + t_2 = \frac{2(a_0 - a_1)}{a_0 - 2a_1 + a_2}$ et $t_1t_2 = \frac{a_0}{a_0 - 2a_1 - a_2}$, il vient

$$\chi(\beta_1) = \frac{2(a_0a_2 - a_1^2)}{a_0 - 2a_1 + a_2} \neq 0, \text{ donc } \beta_1 \text{ est un point pondéré, posons } B_1 = \Pi(\beta_1),$$

$\beta_2 = (1-t_1)^2\alpha_0 \oplus 2t_1(1-t_1)\alpha_1 \oplus t_1^2\alpha_2$, $\chi(\beta_2) = 0$ car t_1 est racine de (2.8): β_2 est donc un vecteur pur \vec{B}_2 .

Nous avons aussi $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR[\frac{1}{\chi(\beta_1)}\vec{B}_0, (B_1; 1), \frac{1}{\chi(\beta_1)}\vec{B}_2]$ (figure 2.12)

(i)(b) Nous supposons cette fois que $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ et (2.8) a une racine $t_1 = \frac{a_0}{2(a_0 - a_1)}$ ($a_0 \neq a_1$ sinon $a_1^2 - a_0a_2 > 0$ devient $a_1 - a_2 > 0$ et $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ devient $-a_1 + a_2 = 0$ ce qui est impossible).

Considérons $h_1(u) = \frac{t_1(1-u) + u}{1-u}$, nous avons (cf proposition 2.4 avec $a = t_1, b =$

1, $c = 1, d = 0$:

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR[\vec{B}_0, (B_1; \chi(\beta_1)), \vec{B}_2],$$

$$\beta_0 = (1 - t_1)^2 \alpha_0 \oplus 2t_1(1 - t_1)\alpha_1 \oplus t_1^2 \alpha_2,$$

$$\chi(\beta_0) = (1 - t_1)^2 a_0 + 2t_1(1 - t_1)a_1 + t_1^2 a_2 = 0, \text{ car } t_1 \text{ est racine de (2.8),}$$

β_0 est donc un vecteur pur \vec{B}_0 ,

$$\beta_1 = -(1 - t_1)\alpha_0 + (1 - 2t_1)\alpha_1 + t_1\alpha_2,$$

$$\chi(\beta_1) = -(1 - t_1)a_0 + (1 - 2t_1)a_1 + t_1a_2 = a_1 - a_0 \neq 0,$$

β_1 est donc un point pondéré, posons $B_1 = \Pi(\beta_1)$,

$$\beta_2 = \alpha_0 \ominus 2\alpha_1 \oplus \alpha_2,$$

$$\chi(\beta_2) = a_0 - 2a_1 + a_2 = 0, \beta_2 \text{ est donc un vecteur pur } \vec{B}_2.$$

Nous avons aussi :

$$BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h_1 = BR\left[\frac{1}{\chi(\beta_1)}\vec{B}_0, (B_1; 1), \frac{1}{\chi(\beta_1)}\vec{B}_2\right], \text{ (figure 2.12)}$$

(ii) Considérons $h_2(u) = \frac{bu}{\frac{1}{b}(1-u) + bu}$ il vient (cf proposition 2.4 avec $a = 0, b =$

$b, c = \frac{1}{b}, d = b$) :

$$BR\left[\frac{1}{\chi(\beta_1)}\vec{B}_0, (B_1; 1), \frac{1}{\chi(\beta_1)}\vec{B}_2\right] \circ h_2 = BR[\vec{C}_0, (B_1; 1), \vec{C}_2]. \text{ (figure 2.13)}$$

En effet

$$\beta_0 = \frac{1}{b^2}\alpha_0 = \frac{1}{b^2}\frac{\vec{B}_0}{\chi(\beta_1)} (= \vec{C}_0),$$

$$\beta_1 = \alpha_1 = (B_1; 1),$$

$$\beta_2 = b^2\alpha_2 = b^2\frac{\vec{B}_2}{\chi(\beta_1)} (= \vec{C}_2).$$

En tenant compte de la valeur de $b = \left(\frac{\|\vec{B}_0\|}{\|\vec{B}_2\|}\right)^{1/4}$ nous déduisons $\|\vec{C}_0\| = \|\vec{C}_2\|$.

Après ces deux étapes (ou c.p.h.) nous obtenons les caractéristiques géométriques de l'hyperbole. ■

Proposition 2.12 *Considérons l'hyperbole définie par $BR[\vec{C}_0, (B_1; 1), \vec{C}_2]$ avec*

$\|\vec{C}_0\| = \|\vec{C}_2\|$ alors B_1 est le centre de symétrie de l'hyperbole, (B_1, \vec{C}_0) et (B_1, \vec{C}_2) sont les asymptotes.

Définissons $a\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{C}_0 + \vec{C}_2)$, $b\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{C}_0 - \vec{C}_2)$, \vec{i} et \vec{j} sont des vecteurs orthonormés,

alors $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$, l'excentricité $e = \frac{c}{a}$, les foyers sont donnés par $\vec{B}_1\vec{F} =$

$-\vec{B}_1\vec{F}' = c\vec{i}$ et les traces sur l'axe focal (B_1, \vec{i}) des directrices associées sont déterminées

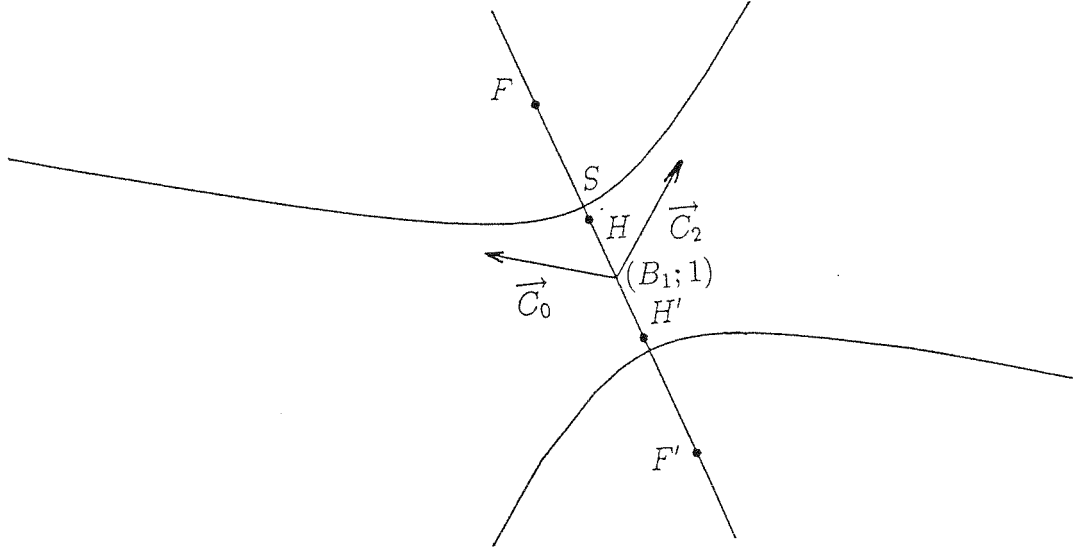


FIG. 2.14 - Foyers, Directrices d'une hyperbole (BR) définie par un point pondéré de masse un et deux vecteurs purs de même module.

$$\text{par } \overrightarrow{B_1 H} = -\overrightarrow{B_1 H'} = \frac{a^2}{c} \vec{i}.$$

Preuve : (figure 2.14)

$$BR[\vec{C}_0, (B_1; 1), \vec{C}_2](0) = \Pi(\vec{C}_0) = (\vec{C}_0)_\infty,$$

$$BR[\vec{C}_0, (B_1; 1), \vec{C}_2](1) = \Pi(\vec{C}_2) = (\vec{C}_2)_\infty,$$

\vec{C}_0 et \vec{C}_2 sont les directions des asymptotes.

$$\begin{aligned} BR[\vec{C}_0, (B_1; 1), \vec{C}_2]\left(\frac{1}{2}\right) &= \Pi\left(\frac{1}{4}\vec{C}_0 \oplus (B_1; \frac{1}{2}) \oplus \frac{1}{4}\vec{C}_2\right) \\ &= \Pi\left(B_1 + \frac{1}{2}(\vec{C}_0 + \vec{C}_2); 2\right) \\ &= B_1 + \frac{1}{2}(\vec{C}_0 + \vec{C}_2). \end{aligned}$$

Nous déduisons que le point $S = B_1 + \frac{1}{2}(\vec{C}_0 + \vec{C}_2)$ est un sommet de l'axe focal de l'hyperbole, que B_1 est son centre de symétrie.

Nous obtenons alors les grandeurs classiques a, b, c associées à l'hyperbole : $a = \|\overrightarrow{B_1 S}\| = \frac{1}{2} \|\vec{C}_0 + \vec{C}_2\|$, $b = \frac{1}{2} \|\vec{C}_0 - \vec{C}_2\|$, $c^2 = a^2 + b^2$, l'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Les foyers F et F' sont donnés par : $\overrightarrow{B_1 F} = -\overrightarrow{B_1 F'} = c\vec{i}$ et les traces H et H' sur l'axe

focal (B_1, \vec{i}) des directrices associées sont déterminées par : $\overrightarrow{B_1H} = -\overrightarrow{B_1H'} = \frac{a^2}{c}\vec{i}$

Remarque :

Nous pouvons vérifier que $F = \Pi(\overrightarrow{C_0} \oplus \frac{2}{e}(B_1; 1) \oplus \overrightarrow{C_2})$ et $H = \Pi(\overrightarrow{C_0} \oplus 2e(B_1; 1) \oplus \overrightarrow{C_2})$

■

Chapitre 3

Formes (BR) d'un faisceau de coniques bitangentes

Ce chapitre propose deux formes (BR) d'un faisceau linéaire de coniques bitangentes c'est-à-dire passant par deux points fixes et tangentes en ces deux points à deux droites données (Bécar et Fiorot, 1995 [34], 1996 [35]). Chaque forme se présente comme une liste de vecteurs de trois vecteurs massiques représentant une conique (BR) tels que leurs Π -projections soient fixes (deux d'entre elles sont les points de contact éventuellement à l'infini).

Dans la première forme le paramètre est la masse du premier vecteur massique de la liste qui est un point pondéré. La Π -projection de ce vecteur massique est un point de contact fixé. Sa masse est proportionnelle au rayon de courbure de la conique en ce point. Une telle paramétrisation élimine naturellement le cas où ce premier point de contact est à l'infini.

C'est pourquoi, dans la deuxième forme, le paramètre est défini par le deuxième vecteur massique. Il représente ici la masse du deuxième vecteur massique si celui-ci est un point pondéré ou son module s'il s'agit d'un vecteur pur. A titre d'application et en vue d'une exploitation dans la suite, nous donnons l'expression de la conique (BR) du faisceau passant par un point à distance finie ou non.

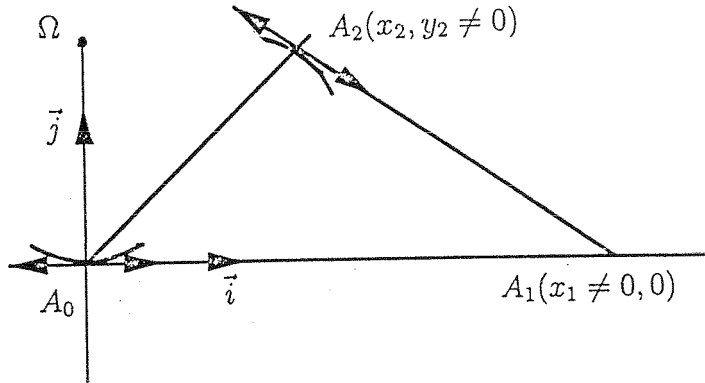


FIG. 3.1 - Conique bitangente dans un repère orthonormé.

Définition : Etant donné trois points A_0, A_1, A_2 le faisceau des coniques passant par A_0 et A_2 tangentes à (A_0A_1) et (A_2A_1) est le faisceau des coniques bitangentes en A_0 et A_2 . (figure 3.1)

3.1 Première forme

Proposition 3.1 *Considérons le repère orthonormé $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$ où \vec{i} est colinéaire à $\overrightarrow{A_0A_1}$. Notons (x_2, y_2) les coordonnées de A_2 ($y_2 \neq 0$) et $(x_1, 0)$ les coordonnées de A_1 ($x_1 > 0$). L'équation du faisceau de coniques bitangentes en A_0 et A_2 s'écrit :*

$$(x_2y - y_2x)^2 + \lambda y(y(x_2 - x_1) - xy_2 + x_1y_2) = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Preuve : Les équations des droites (A_0A_2) , (A_0A_1) et (A_1A_2) sont respectivement $x_2y - y_2x = 0$, $y = 0$, $y(x_2 - x_1) - xy_2 + x_1y_2 = 0$. Il est connu que le faisceau des coniques a pour équation :

$$(x_2y - y_2x)^2 + \lambda y(y(x_2 - x_1) - xy_2 + x_1y_2) = 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (3.1)$$

■

Proposition 3.2 *L'équation du faisceau de coniques bitangentes en A_0 et A_2 s'écrit :*

$$(x_2y - y_2x)^2 - \frac{2Ry_2}{x_2} y(y(x_2 - x_1) - xy_2 + x_1y_2) = 0$$

où le paramètre $R \in \mathbb{R} - \{0\}$ est le rayon de courbure en A_0 .

Preuve : L'équation (3.1) s'écrit encore

$$y^2(x_2^2 + \lambda(x_2 - x_1)) + y(\lambda x_1 y_2 - x(2x_2 y_2 + \lambda y_2)) + x^2 y_2^2 = 0.$$

Si $x_2^2 + \lambda(x_2 - x_1) = 0$ alors $y = x^2 \frac{y_2^2}{x(2x_2 y_2 + \lambda y_2) - \lambda x_1 y_2}$.

Le développement limité de y à l'ordre 2 est :

$$y = -\frac{y_2}{\lambda x_1} x^2 + x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \rightarrow 0, \quad \text{si } x \rightarrow 0.$$

Par suite le rayon de courbure en A_0 est $R = -\frac{\lambda x_1}{2y_2}$.

Considérons le cas général où $x_2^2 + \lambda(x_2 - x_1) \neq 0$, nous obtenons

$$y = \frac{b}{2a} (-1 \pm (1 - \frac{4ac}{b^2})^{1/2}) \text{ avec}$$

$a = x_2^2 + \lambda(x_2 - x_1)$, $b = \lambda x_1 y_2 - x(2x_2 y_2 + \lambda y_2)$ et $c = x^2 y_2^2$. Nous avons,

$$(1 - \frac{4ac}{b^2})^{1/2} = 1 - \frac{2a}{\lambda^2 x_1^2} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0, \text{ si } x \rightarrow 0.$$

Nous savons que $y(0) = 0$ donc prenons le signe $+$ dans \pm il vient

$$y = \frac{b}{2a} (-1 + 1 - \frac{2a}{\lambda^2 x_1^2} x^2 + x^2 \varepsilon(x)) = -\frac{b}{\lambda^2 x_1^2} x^2 + x^2 \varepsilon'(x),$$

$$y = -\frac{\lambda x_1 y_2}{\lambda^2 x_1^2} x^2 + x^2 \varepsilon''(x), \text{ d'où}$$

$$y = -\frac{y_2}{\lambda x_1} x^2 + x^2 \varepsilon''(x).$$

C'est le même résultat que plus haut.

Le rayon de courbure en A_0 est $R = -\frac{\lambda x_1}{2y_2}$ d'où $\lambda = -\frac{2Ry_2}{x_1}$ ■

Proposition 3.3 *L'équation du faisceau bitangent en A_0 et A_2 lorsque A_1 est à l'infini est :*

$$(x_2 y - y_2 x)^2 + \lambda y(y - y_2) = 0.$$

Ce faisceau comporte des ellipses et des hyperboles et éventuellement un cercle. Si nous notons $R(R \in \mathbb{R} - \{0\})$ le rayon de courbure en A_0 , le faisceau s'écrit aussi :

$$(x_2 y - y_2 x)^2 + \frac{2R}{y_2} y(y - y_2) = 0.$$

Preuve : Comme la précédente. ■

Proposition 3.4 *L'équation du faisceau bitangent en A_0 et A_2 lorsque A_2 est à l'infini dans la direction (x_2, y_2) , $y_2 \neq 0$ est*

$$(x_2 y - y_2 x)^2 + \lambda y(y x_2 - x y_2 + x_1 y_2) = 0.$$

Si $R(R \in \mathbb{R} - \{0\})$ est le rayon de courbure en A_0 , le faisceau s'écrit

$$(x_2 y - y_2 x)^2 - \frac{2Ry_2}{x_1} y(y x_2 - x y_2 + x_1 y_2) = 0.$$

Ce faisceau est constitué d'hyperboles.

Preuve : Comme la précédente. ■

Proposition 3.5 L'équation du faisceau bitangent en A_0 et A_2 lorsque A_2 et A_1 sont à l'infini dans respectivement les directions (x_2, y_2) , $y_2 \neq 0$ et \vec{i} , est :

$$(x_2y - y_2x)^2 + \lambda y = 0.$$

Notons R ($R \in \mathbb{R} - \{0\}$) le rayon de courbure en A_0 , le faisceau s'écrit encore :

$$(x_2y - y_2x)^2 - 2y_2Ry = 0.$$

Ce faisceau est constitué de paraboles.

Preuve : Comme la précédente. ■

Proposition 3.6 L'équation du faisceau bitangent en A_0 et A_2 lorsque A_0 et A_2 sont à l'infini dans respectivement les directions \vec{i} et (x_2, y_2) , $y_2 \neq 0$ est

$$y(x_2y - y_2x) + \lambda = 0.$$

Ce faisceau est constitué d'hyperboles.

Preuve : Comme la précédente. ■

En conclusion le faisceau des coniques bitangentes en A_0 et A_2 dépend d'un paramètre, le rayon de courbure des coniques en A_0 (sauf cas particulier où A_0 est à l'infini). D'où la correspondance biunivoque entre l'ensemble des coniques propres et $\mathbb{R} - \{0\}$.

Proposition 3.7 (i) Soit $h(u) = \frac{u}{\frac{1}{a_1}(1-u) + u}$ alors

$$BR[(A_0; a_0), (A_1; a_1), (A_2; 1)] \circ h = BR[(A_0; \frac{a_0}{a_1^2}), (A_1; 1), (A_2; 1)].$$

(ii) Pour $h(u) = \frac{-u}{1-2u}$, nous avons :

$$BR[(A_0; a_0), (A_1; 1), (A_2; 1)] \circ h = BR[(A_0; -a_0), (A_1; 1), (A_2; -1)].$$

(iii) Il n'est pas possible d'écrire $BR[(A_0; a_0), (A_1; 1), (A_2; 1)]$ sous la forme $BR[(A_0; a_0), (A_1; 1), (A_2; -1)]$.

(iv) Il n'est pas possible d'écrire $BR[\vec{i}, (A_1; a_1), \vec{v}]$ sous la forme $BR[\vec{i}, (A_1; a_1), -\vec{v}]$.

Preuve : (i),(ii) Il suffit d'appliquer la proposition 2.4 avec respectivement ($a = 0, b = d = 1, c = \frac{1}{a_1}$ et $a = 0, b = d = -1, c = 1$).

(iii) D'après la proposition 2.4 s'il existe un changement de paramètre homographique nous devrions avoir $\lambda c^2 = 1$ et $\lambda b^2 = -1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ce qui est impossible.

(iv) De même si un changement de paramètre homographique existe nous devrions avoir $\lambda c^2 = 1$, $\lambda = \lambda bc$ et $\lambda b^2 = -1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ce qui est impossible. ■

Première forme (BR) du faisceau de coniques bitangentes

Proposition 3.8 Dans le plan soit le repère $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé et deux points A_1 et A_2 . Le faisceau des coniques bitangentes en A_0 et A_2 a la représentation (BR) suivante où ρ désigne le rayon de courbure en A_0 , $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(i) A_1 et A_2 sont à distance finie : $A_1(x_1, 0)$ avec $x_1 > 0$ et $A_2(x_2, y_2), y_2 \neq 0$:

$$BR[(A_0; \frac{2x_1^2}{y_2}\rho), (A_1; 1), (A_2; 1)].$$

(ii) A_1 est à l'infini dans la direction \vec{i} et $A_2(x_2, y_2), y_2 \neq 0$ à distance finie :

$$BR[(A_0; \frac{2}{y_2}\rho), \vec{U}, (A_2; 1)].$$

avec $\vec{U} = (1, 0)$

(iii) A_2 est à l'infini dans la direction $\vec{v} = (x_2, y_2)$ où nous pouvons choisir $y_2 > 0$, (x_2 de signe quelconque), A_1 à distance finie : $A_1(x_1, 0), x_1 > 0$:

$$BR[(A_0; \frac{2x_1^2}{y_2}\rho), (A_1; 1), \vec{v}].$$

(iv) A_1 et A_2 sont à l'infini dans respectivement les directions \vec{i} et $\vec{v} = (x_2, y_2)$:

$$BR[(A_0; \frac{2}{y_2}\rho), \vec{i}, \vec{v}].$$

(v) A_1 est à distance finie, $(A_1; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, A_0 et A_2 sont à l'infini dans respectivement les directions \vec{i} et $\vec{v} = (x_2, y_2)$ avec $y_2 > 0$ (x_2 de signe quelconque) alors la forme (BR) du faisceau d'hyperbole sont les deux familles :

$$BR[\vec{i}, (A_1; a_1), \vec{v}], a_1 > 0 \quad \text{et} \quad BR[\vec{i}, (A_1; a_1), -\vec{v}], a_1 > 0.$$

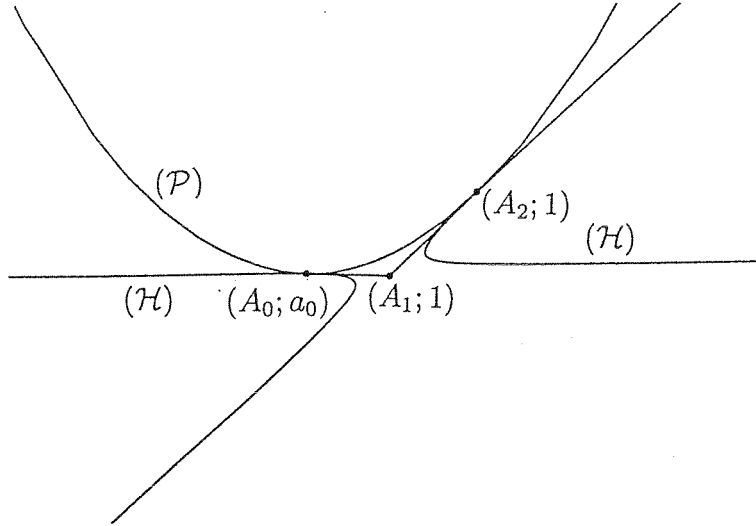


FIG. 3.2 - Faisceau de coniques (BR) bitangentes: les Π -projections des trois vecteurs massiques sont à distance finie.

Preuve :

(i) D'après la proposition 3.7, nous avons à déterminer trois vecteurs massiques $(A_0; a_0)$, $(A_1; 1)$, $(A_2; 1)$ tels que le rayon de courbure en A_0 soit R (figure 3.2).

$$BR[(A_0; a_0), (A_1; 1), (A_2; 1)](t) = \frac{(1-t)^2 a_0 A_0 + 2t(1-t)A_1 + t^2 A_2}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t) + t^2},$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)x_1 + t^2 x_2}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t) + t^2} = \frac{2x_1}{a_0} t + t\varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow 0,$$

$$y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t) + t^2} = \frac{y_2}{a_0} t^2 + t^2 \varepsilon'(t) \text{ avec } \varepsilon'(t) \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow 0.$$

L'équation du cercle tangent en A_0 suivant la direction \vec{i} passant par un point voisin de la courbe $(x(t), y(t))$ de centre $(0, \mu)$ est :

$$\left(\frac{2x_1}{a_0} t + t\varepsilon(t)\right)^2 + \left(\frac{y_2}{a_0} t^2 + t^2 \varepsilon'(t) - \mu\right)^2 = \mu^2.$$

Soit $\frac{4x_1^2}{a_0^2} - \frac{2y_2}{a_0} \mu = \varepsilon''(t)$ avec $\varepsilon''(t) \rightarrow 0$, si $t \rightarrow 0$.

Lorsque $t \rightarrow 0$ nous obtenons l'abscisse du centre de courbure en A_0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu = \frac{2x_1^2}{a_0 y_2} = R.$$

D'où $a_0 = \frac{2x_1^2}{y_2} \frac{1}{R}$. Posons $\frac{1}{R} = \rho$ la courbure en A_0 . La forme (BR) du faisceau des

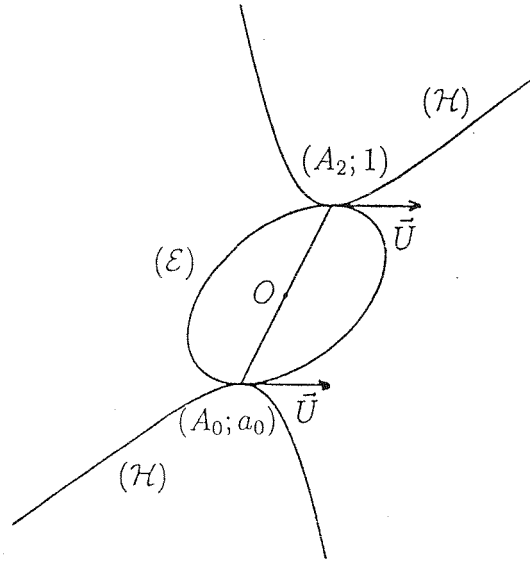


FIG. 3.3 - Faisceau de coniques (BR) bitangentes où la Π -projection du premier et du troisième vecteur massique est à distance finie, le deuxième vecteur massique est un vecteur pur.

coniques bitangentes en A_0 et A_2 lorsque les trois points A_0, A_1, A_2 sont à distance finie est alors :

$$BR[(A_0; \frac{2x_1^2}{y_2}\rho), (A_1; 1), (A_2; 1)].$$

Nous obtenons des ellipses, une parabole, des hyperboles selon que $1 - \frac{2x_1^2}{y_2}\rho$ est négatif, nul, positif. Un cercle existe si $x_2^2 + y_2^2 = 2Ry_2$ et $Ry_2 = x_1x_2$.

(ii) La forme (BR) qui convient est (figure 3.3):

$$BR[(A_0; a_0), \vec{U}, (A_2; 1)](t) = \frac{(1-t)^2 a_0 A_0 + t^2 A_2}{(1-t)^2 a_0 + t^2} + \frac{2t(1-t)\vec{U}}{(1-t)^2 a_0 + t^2}$$

avec $\vec{U} = (1, 0)$.

$$x(t) = \frac{t^2 x_2 + 2t(1-t)}{(1-t)^2 a_0 + t^2} = \frac{2}{a_0} t + t\varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow 0,$$

$$y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2 a_0 + t^2} = \frac{y_2}{a_0} t^2 + t^2 \varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow 0.$$

En procédant comme précédemment, nous obtenons la relation suivante $a_0 = \frac{2}{y_2 R}$

soit $a_0 = \frac{2}{y_2} \rho$.

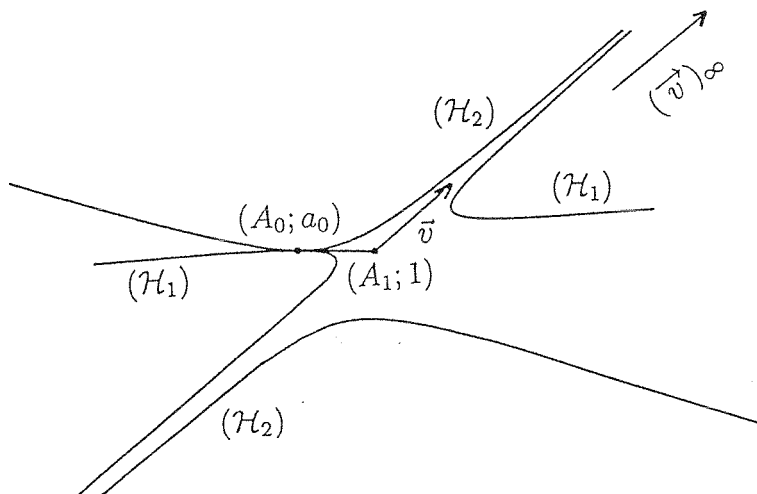


FIG. 3.4 - Faisceau de coniques (BR) bitangentes où les Π -projections des deux premiers vecteurs massiques sont à distance finie, le troisième vecteur massique est un vecteur pur qui dirige une asymptote commune.

Nous avons des ellipses si $-\frac{2}{y_2}\rho < 0$, des hyperboles si $-\frac{2}{y_2}\rho > 0$ (et un cercle si $x_2 = 0$ et $2R = y_2$).

(iii) La forme (BR) est (figure 3.4):

$$BR[(A_0; a_0), (A_1; 1), \vec{v}](t) = \frac{(1-t)^2 a_0 A_0 + 2t(1-t)A_1}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)} + \frac{t^2 \vec{v}}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)},$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)x_1 + t^2 x_2}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)} = \frac{2x_1}{a_0}t + t\varepsilon(t),$$

$$y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2 a_0 + 2t(1-t)} = \frac{y_2}{a_0}t^2 + t^2 \varepsilon'(t),$$

La relation cherchée liant le rayon de courbure R en A_0 et a_0, y_2 est $Ry_2 = \frac{2x_1^2}{a_0}$ d'où

$a_0 = \frac{2x_1^2}{y_2}\rho$. Nous obtenons uniquement des hyperboles.

(iv) Les coniques sont tangentes à la droite de l'infini, ce sont des paraboles. La forme (BR) s'écrit (figure 3.5):

$$BR[(A_0; a_0), \vec{i}, \vec{v}](t) = A_0 + \frac{2t(1-t)\vec{i} + t^2 \vec{v}}{(1-t)^2 a_0}$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t) + t^2 x_2}{(1-t)^2 a_0} = \frac{2}{a_0}t + t\varepsilon(t),$$

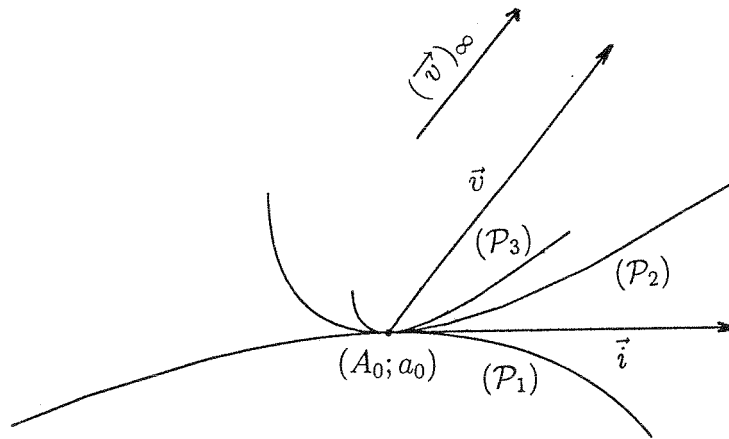


FIG. 3.5 - Faisceau de coniques (BR) bitangentes où la Π -projection du premier vecteur massique est à distance finie, les deux autres vecteurs massiques sont des vecteurs purs, l'un deux dirige l'axe.

$$y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2 a_0} = \frac{y_2}{a_0} t^2 + t^2 \varepsilon'(t).$$

La relation cherchée est $a_0 = \frac{2}{y_2} \rho$.

(v) La forme (BR) s'écrit (figure 3.6): $BR[\vec{i}, (A_1; a_1), \vec{v}](t) = A_1 + \frac{(1-t)^2 \vec{i} + t^2 \vec{v}}{2t(1-t)a_1}$ et $BR[\vec{i}, (A_1; a_1), -\vec{v}](t) = A_1 + \frac{(1-t)^2 \vec{i} - t^2 \vec{v}}{2t(1-t)a_1}$, nous pouvons nous limiter à $a_1 > 0$. ■

3.2 Deuxième forme

Dans la suite $\text{sgn}(x)$ où $x \in \mathbb{R}$ désigne le signe de x , à savoir $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$, 0 sinon.

Proposition 3.9 Soit $h(u) = \frac{\rho u}{(1-u) - \rho u}$ où $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$

(i) Si $a_0 a_2 > 0$ et $\rho = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ alors

$$BR[(A_0; a_0), \alpha_1, (A_2; a_2)] \circ h = BR[(A_0; 1), \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \alpha_1, (A_2; 1)]$$

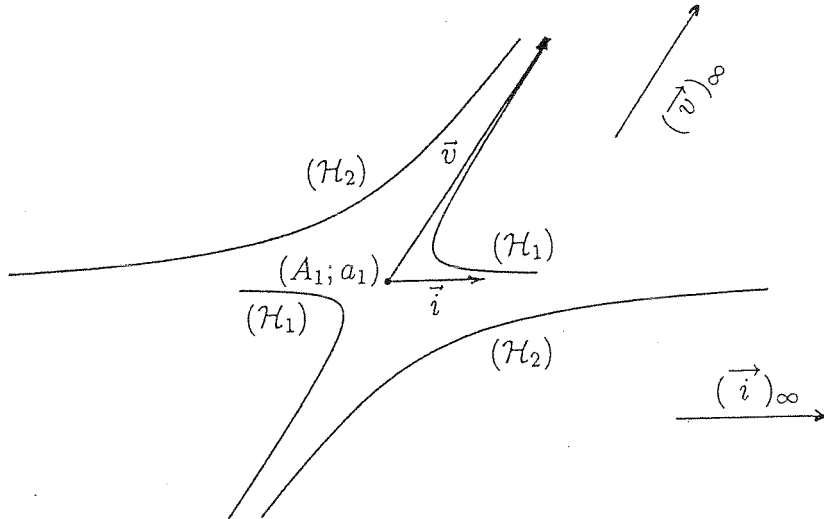


FIG. 3.6 - Faisceau de coniques (BR) bitangentes où la Π -projection du second vecteur massique est à distance finie: c'est le centre commun; les deux autres vecteurs massiques sont des vecteurs purs qui dirigent les asymptotes.

(ii) Si $a_0 a_2 < 0$ et $\rho = \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}$ alors

$$BR[(A_0; a_0), \alpha_1, (A_2; a_2)] \circ h = BR[(A_0; 1), \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \alpha_1, (A_2; -1)]$$

(iii) Il n'est pas possible d'écrire $BR[(A_0; 1), \alpha_1, (A_2; 1)]$ sous la forme $BR[(A_0; 1), \alpha_1, (A_2; -1)]$

Preuve: (i),(ii) il suffit d'appliquer la proposition 2.4 avec respectivement $(a = 0, b = \rho, c = 1, d = \rho)$.

(iii) D'après la proposition 2.4 s'il existe un changement de paramètre homographique nous devrions avoir $\lambda c^2 = 1$ et $c(d - b) = 0$ et $\lambda bc = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Le cas $c = 0$ aboutit à une impossibilité. Lorsque $b = d$ il vient $\lambda b^2(A_2; 1) = (A_2; -1)$ d'où $\lambda b^2 = -1 = -\lambda c^2$ ce qui est impossible. ■

Proposition 3.10 Soit A_0, A_1, A_2 trois points distincts et non alignés du plan à distance finie ou non. Le faisceau des coniques bitangentes en A_0, A_2 aux droites $(A_0 A_1)$ et $(A_2 A_1)$ (respectivement) admet pour représentation (BR) les familles suivantes :

(i) Si A_0, A_1, A_2 sont à distance finie :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$$

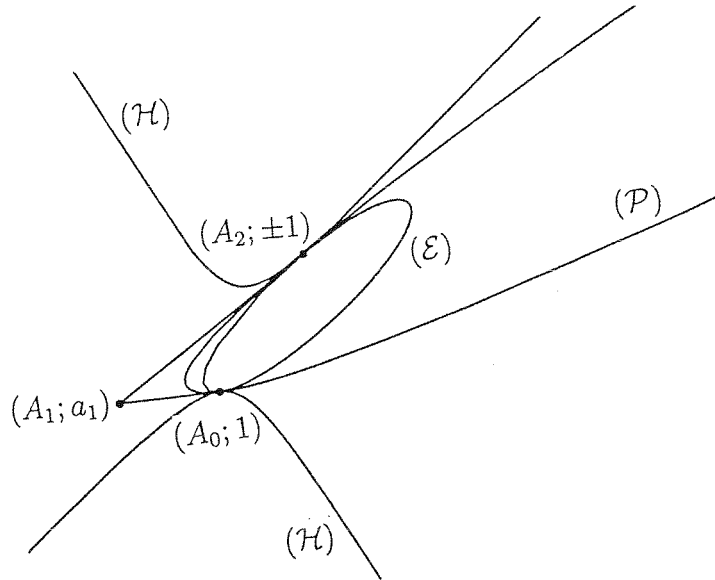


FIG. 3.7 - Faisceau de coniques (BR) bitangentes: les Π -projections des trois vecteurs massiques sont à distance finie.

avec $a_2 \in \{-1, +1\}$, $a_1 > 0$,

(ii) Si A_0, A_1 sont à distance finie, A_2 est l'infini dans la direction de \vec{u} :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$$

où $b \in \{-1, +1\}$, $a_1 > 0$,

(iii) Si A_0, A_2 sont à distance finie, A_1 est à l'infini dans la direction de \vec{u} :

$$BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; a_2)]$$

où $a_2 \in \{-1, +1\}$, $m > 0$,

(iv) Si A_0, A_2 sont à l'infini dans les directions de \vec{u} et \vec{v} (respectivement), A_1 est à distance finie :

$$BR[\vec{u}, (A_1; a_1), b\vec{v}]$$

où $b \in \{-1, +1\}$, $a_1 > 0$,

(v) Si A_1, A_2 sont à l'infini dans les directions de \vec{u} et \vec{v} (respectivement), A_0 est à distance finie :

$$BR[(A_0; 1), m\vec{u}, b\vec{v}]$$

avec $b \in \{-1, +1\}$, $m > 0$.

Preuve : (i) Considérons le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2})$ (figure 3.7). Le faisceau des

coniques bitangentes en A_0, A_2 aux droites (A_0A_1) et (A_0A_1) est engendré par les coniques dégénérées Γ_1 d'équation $(x + y - 1)^2 = 0$ et Γ_2 d'équation $xy = 0$. Γ_1 est la droite double (A_0A_2) . Γ_2 est la réunion des droites (A_0A_1) et (A_1A_2) . Une conique propre de ce faisceau admet pour équation cartésienne dans ce repère :

$$\lambda(x + y - 1)^2 + \mu xy = 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0 \quad (3.2)$$

Une représentation (BR) d'une telle conique est donnée par (cf proposition 3.9) $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ avec $a_2 \in \{-1, +1\}$, $a_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Montrons l'équivalence de ces deux formes.

Pour cela, déterminons, dans le repère considéré une équation cartésienne de la conique (BR).

Soit $M = (x(t), y(t))$ un point de paramètre $t \in \tilde{\mathbb{R}}$ de $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$.

$$x(t) = \frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 2a_1t(1-t) + a_2t^2}, \quad y(t) = \frac{a_2t^2}{(1-t)^2 + 2a_1t(1-t) + a_2t^2}.$$

Considérons (X, Y, Z) les coordonnées homogènes de M :

$$X = (1-t)^2, Y = a_2t^2, Z = (1-t)^2 + 2a_1t(1-t) + a_2t^2.$$

Éliminons t entre X, Y, Z , il vient :

$$(X + Y - Z)^2 = 4a_1^2t^2(1-t)^2 = 4a_1^2a_2XY.$$

La conique (BR) a donc pour équation cartésienne :

$$(x + y - 1)^2 - 4a_1^2a_2xy = 0 \quad (3.3)$$

Notons $\Gamma(\lambda, \mu)$ une conique propre du faisceau définie par 3.2 ($\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ définis à un coefficient de proportionnalité près). Il existe un unique couple de réels ($a_1 > 0, a_2 \in \{-1, +1\}$) tels que $\Gamma(\lambda, \mu) = BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ à savoir

$$a_2 = \text{sgn}(-\lambda\mu) \text{ et } a_1 = \sqrt{\frac{-\mu a_2}{4\lambda}}$$

Remarques :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \sqrt{\frac{-\mu a_2}{4\lambda}}), (A_2; \text{sgn}(-\lambda\mu))] = BR[(A_0; 1), (A_1; -\sqrt{\frac{-\mu a_2}{4\lambda}}), (A_2; \text{sgn}(-\lambda\mu))]$$

car si $h(u) = \frac{-u}{(1-u) - u}$ nous avons grâce à la proposition 2.4 ($a = 0, b = -1, c = 1, d = -1$) $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \circ h = BR[\alpha_0, -\alpha_1, \alpha_2]$.

Le faisceau comporte des ellipses, des hyperboles, une parabole. Il contient un cercle pourvu que $a_2 = 1, a_1 = |\sin \frac{\varphi}{2}|$ où φ désigne l'angle $A_0\hat{A}_1A_2$ (cf proposition 5.4.2 [8])

(ii) Dans le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_1})$ (figure 3.8) où $\vec{u} \neq \vec{0}$ est un vecteur non colinéaire

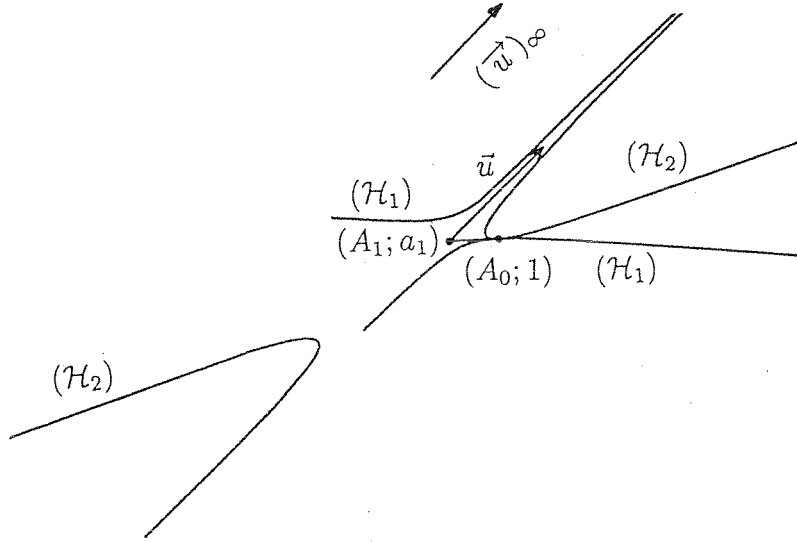


FIG. 3.8 - Faisceau d'hyperboles (BR) bitangentes: le vecteur pur \vec{u} dirige l'asymptote commune.

à $\overrightarrow{A_0A_1}$), le faisceau des coniques propres tangentes en A_0 à la droite (A_0A_1) dont une asymptote est la droite $(A_1 + m\vec{u}, m \in \mathbb{R})$ a pour équation cartésienne

$$\lambda y^2 + \mu x(y - 1) = 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0 \quad (3.4)$$

Les coniques propres de ce faisceau admettent la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$$

où $a_1 \neq 0, b \in \{-1, +1\}$.

En procédant comme précédemment, l'équation cartésienne de cette conique (BR) dans le repère considéré est :

$$y^2 + 4a_1^2bx(y - 1) = 0 \quad (3.5)$$

Notons $\Gamma(\lambda, \mu)$ une conique propre du faisceau définie par 3.4 ($\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ définis à un coefficient de proportionnalité près). Il existe un unique couple de réels ($a_1 > 0, b \in \{-1, +1\}$) tels que $\Gamma(\lambda, \mu) = BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$ à savoir $b = \text{sgn}(\lambda\mu)$ et

$$a_1 = \sqrt{\frac{\mu b}{4\lambda}}$$

Remarques :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \sqrt{\frac{\mu b}{4\lambda}}, b\vec{u})] = BR[(A_0; 1), (A_1; -\sqrt{\frac{\mu b}{4\lambda}}, b\vec{u})].$$

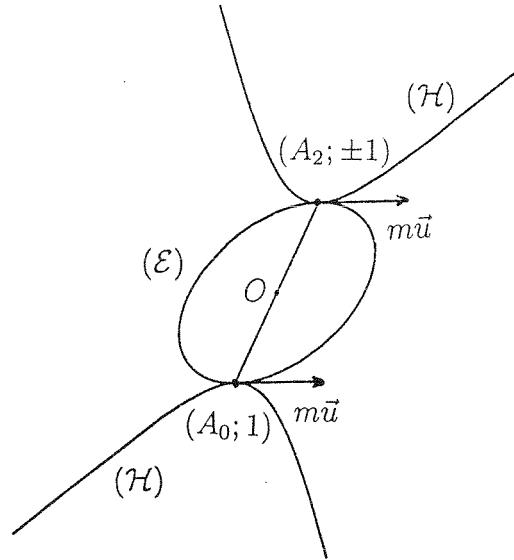


FIG. 3.9 - Faisceau d'hyperboles (BR) et d'ellipses (BR) bitangentes.

Le faisceau comporte uniquement des hyperboles.

(iii) Dans le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_2})$ (figure 3.9) où $\vec{u} \neq \vec{0}$ est un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{A_0A_2}$, le faisceau des coniques propres tangentes en A_0, A_2 aux droites $(A_0 + \alpha\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R})$ et $(A_0 + \alpha\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R})$ respectivement admet pour équation cartésienne :

$$\lambda x^2 + \mu y(y - 1) = 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0 \quad (3.6)$$

Les coniques propres de ce faisceau admettent pour représentation (BR) :

$$BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; a_2)]$$

où $m \neq 0, a_2 \in \{-1, +1\}$. Dans ce repère elles ont pour équation

$$x^2 + 4a_2my(y - 1) = 0 \quad (3.7)$$

Notons $\Gamma(\lambda, \mu)$ une conique propre du faisceau définie par 3.6 ($\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ définis à un coefficient de proportionnalité près). Il existe un unique couple de réels $(a_1 > 0, a_2 \in \{-1, +1\})$ tels que $\Gamma(\lambda, \mu) = BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; a_2)]$ à savoir $a_2 = \text{sgn}(\lambda\mu)$ et $a_1 = \sqrt{\frac{\mu a_2}{4\lambda}}$

Remarquons que ce faisceau contient des ellipses et des hyperboles centrées en $O = \frac{A_0 + A_2}{2}$.

Il contient un cercle si et seulement si $\vec{u} \perp \overrightarrow{A_0A_2}$, $a_2 = 1$ et $2 \|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{A_0A_2}\|$

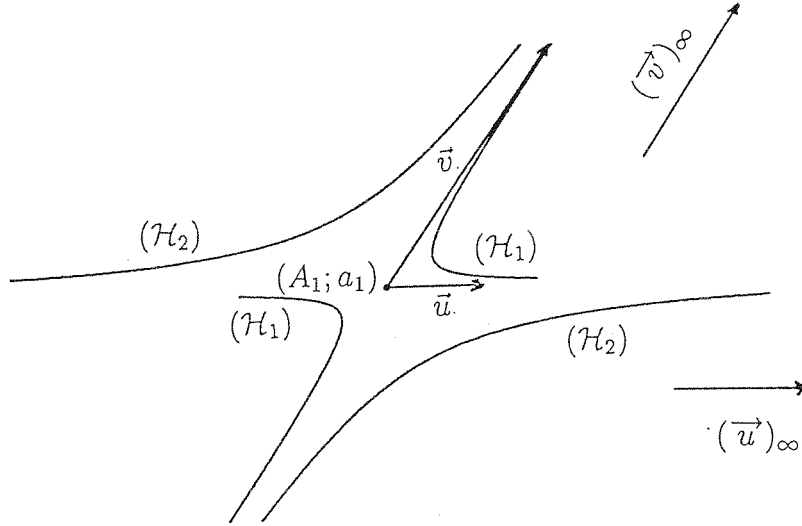


FIG. 3.10 - Faisceau d'hyperboles (BR) bitangentes en l'infini dans les directions \vec{u} et \vec{v} .

(iv) Dans le repère $(A_1; \vec{u}, \vec{v})$ (figure 3.10) où $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ sont deux vecteurs non colinéaires, le faisceau des coniques propres d'asymptotes les droites $(A_1 + \alpha\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R})$ et $(A_1 + \alpha\vec{v}, \alpha \in \mathbb{R})$ admet pour équation cartésienne :

$$\lambda xy + \mu = 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0. \quad (3.8)$$

Les coniques propres de ce faisceau admettent pour représentation (BR) :

$BR[\vec{u}, (A_1; a_1), b\vec{v}]$ où $a_1 \neq 0$, $b \in \{-1, +1\}$. Dans ce repère elles ont pour équation

$$4a_1^2 bxy - 1 = 0. \quad (3.9)$$

Notons $\Gamma(\lambda, \mu)$ une conique propre du faisceau définie par 3.8 ($\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ définis à un coefficient de proportionnalité près). Il existe un unique couple de réels ($a_1 > 0, b \in \{-1, +1\}$) tels que $\Gamma(\lambda, \mu) = BR[\vec{u}, (A_1; a_1), b\vec{v}]$ à savoir $b = \text{sgn}(-\lambda\mu)$

et $a_1 = \sqrt{\frac{-\lambda b}{4\mu}}$.

Ce faisceau ne contient que des hyperboles centrées en A_1 .

(v) Dans le repère $(A_0; \vec{u}, \vec{v})$ (figure 3.11) où $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ sont deux vecteurs non colinéaires, le faisceau des coniques propres tangentes en A_0 à la droite $(A_0 + \alpha\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R})$ ayant \vec{v} pour direction asymptotique admet pour équation cartésienne :

$$\lambda y^2 + \mu x = 0 \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0. \quad (3.10)$$

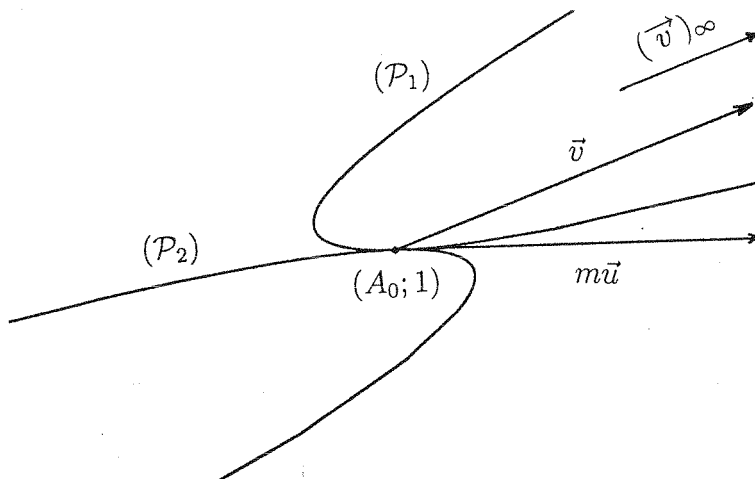


FIG. 3.11 - Faisceau de paraboles (BR) bitangentes, un des points de contact est à l'infini dans la direction \vec{v} .

Les coniques propres de ce faisceau admettent pour représentation (BR) : $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, b\vec{v}]$ où $m \neq 0$, $b \in \{-1, +1\}$. Dans ce repère elles ont pour équation

$$y^2 - 4m^2bx = 0. \quad (3.11)$$

Notons $\Gamma(\lambda, \mu)$ une conique propre du faisceau définie par 3.10 ($\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ définis à un coefficient de proportionnalité près). Il existe un unique couple de réels ($a_1 > 0, b \in \{-1, +1\}$) tels que $\Gamma(\lambda, \mu) = BR[(A_0; 1), m\vec{u}, b\vec{v}]$ à savoir $b = \text{sgn}(-\lambda\mu)$ et $m = \sqrt{\frac{-\mu b}{4\lambda}}$. Ce faisceau ne contient que des paraboles admettant le vecteur \vec{v} pour direction d'axe. ■

3.2.1 Conique du faisceau passant par un point à distance finie.

Proposition 3.11 Soit A_0, A_1, A_2 trois points distincts et non alignés du plan à distance finie ou non et M_0 un point à distance finie non situé sur les droites $(A_0A_1), (A_1A_2), (A_2A_0)$. Notons \mathcal{F}^* le faisceau des coniques propres bitangentes en A_0, A_2 aux droites (A_0A_1) et (A_2A_1) respectivement :

(i) Si A_0, A_1, A_2 sont à distance finie, considérons le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ admet la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)] \quad \text{avec} \quad a_2 = \text{sgn}(x_0y_0), a_1 = \frac{1}{2} \frac{|x_0 + y_0 - 1|}{\sqrt{|x_0y_0|}},$$

(ii) Si A_0, A_1 sont à distance finie, A_2 est à l'infini dans la direction de \vec{u} , considérons le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_1})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ admet la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}] \quad \text{avec} \quad b = \text{sgn}(x_0(1 - y_0)), a_1 = \frac{|y_0|}{2\sqrt{|x_0(1 - y_0)|}},$$

(iii) Si A_0, A_2 sont à distance finie, A_1 est à l'infini dans la direction de \vec{u} , considérons le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_2})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ admet la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; a_2)] \quad \text{avec} \quad a_2 = \text{sgn}(y_0(1 - y_0)), m = \frac{|x_0|}{2\sqrt{|y_0(1 - y_0)|}},$$

(iv) Si A_0, A_2 sont à l'infini dans les directions respectives de \vec{u} et \vec{v} , A_1 est à distance finie, considérons le repère $(A_1; \vec{u}, \vec{v})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ admet la représentation (BR) suivante :

$$BR[\vec{u}, (A_1; a_1), b\vec{v}] \quad \text{avec} \quad b = \text{sgn}(x_0y_0), a_1 = \frac{1}{2\sqrt{|x_0y_0|}},$$

(v) Si A_1, A_2 sont à l'infini dans les directions respectives de \vec{u} et \vec{v} , A_0 est à distance finie, considérons le repère $(A_0; \vec{u}, \vec{v})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ admet la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), m\vec{u}, b\vec{v}] \quad \text{avec} \quad b = \text{sgn}(x_0), m = \frac{|y_0|}{2\sqrt{|x_0|}}.$$

Preuve :

(i) La conique $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ ($a_1 > 0$ et $a_2 \in \{-1, +1\}$) de \mathcal{F}^* passe par $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $(x_0 + y_0 - 1)^2 - 4a_1^2a_2x_0y_0 = 0$ (d'après 3.3). Il nous faut donc $a_2 = \text{sgn}(x_0y_0)$ et $a_1 = \frac{1}{2} \frac{|x_0 + y_0 - 1|}{\sqrt{|x_0y_0|}}$,

(ii) La conique $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$ ($a_1 > 0$ et $a_2 \in \{-1, +1\}$) de \mathcal{F}^* passe par $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $y_0^2 + 4a_1^2bx_0(y_0 - 1) = 0$ (d'après 3.5). Il nous faut donc $b = \text{sgn}(x_0(1 - y_0))$ et $a_1 = \frac{1}{2} \frac{|y_0|}{\sqrt{|x_0(1 - y_0)|}}$,

(iii) La conique $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; a_2)]$ ($m > 0$ et $a_2 \in \{-1, +1\}$) de \mathcal{F}^* passe par $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $x_0^2 + 4a_2m y_0(y_0 - 1) = 0$ (d'après 3.7). Il nous faut donc $a_2 = \text{sgn}(y_0(1 - y_0))$ et $m = \frac{1}{2} \frac{|x_0|}{\sqrt{|y_0(1 - y_0)|}}$,

(iv) La conique $BR[\vec{u}, (A_1; a_1), b\vec{v}]$ ($a_1 > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$) de \mathcal{F}^* passe par $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $4ba_1^2x_0y_0 - 1 = 0$ (d'après 3.9). Il nous faut donc

$$b = \operatorname{sgn}(x_0y_0) \text{ et } a_1 = \frac{1}{2\sqrt{|x_0y_0|}},$$

(v) La conique $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, b\vec{v}]$ ($m > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$) de \mathcal{F}^* passe par $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $y_0^2 - 4m^2bx_0 = 0$ (d'après 3.11). Il nous faut donc

$$b = \operatorname{sgn}(x_0) \text{ et } m = \frac{1}{2} \frac{|y_0|}{\sqrt{|x_0|}}. \blacksquare$$

3.2.2 Conique du faisceau passant par un point à l'infini.

Lemme 3.1 (i) Dans le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2})$, la conique $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ ($a_1 > 0$ et $a_2 \in \{-1, +1\}$) admet les vecteurs $\vec{u}_1(1, a_2x_1^2)$ et $\vec{u}_2(1, a_2x_2^2)$ pour directions asymptotiques éventuellement confondues. Les réels x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}, a_2x^2 + 2xa_1 + 1 = 0$ avec $a_1^2 - a_2 \geq 0$,

(ii) Dans le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_1})$, la conique $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{u}]$ ($a_1 > 0$) admet les vecteurs \vec{u} et $\vec{v}(1, -4a_1^2)$ pour directions asymptotiques.

(iii) Dans le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_2})$, la conique $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; -1), \vec{u}]$ admet les vecteurs $\vec{u}_1(2m, 1)$ et $\vec{u}_2(-2m, 1)$ pour directions asymptotiques.

Preuve: (i) Soit, dans le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2})$, un point M de paramètre $t \in \tilde{\mathbb{R}}$ de la conique $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ ($a_1 > 0$ et $a_2 \in \{-1, +1\}$). Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ vérifient

$$x(t) = \frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 2a_1t(1-t) + a_2t^2}, \quad y(t) = \frac{a_2t^2}{(1-t)^2 + 2a_1t(1-t) + a_2t^2}.$$

Le point M est à l'infini pour une valeur du paramètre t solution de

$$(1-t)^2 + 2a_1t(1-t) + a_2t^2 = 0 \quad (3.12)$$

Cette dernière équation admet des solutions si et seulement si $a_1^2 - a_2 \geq 0$. Notons-les t_1 et t_2 le cas échéant. Les directions asymptotiques de la conique sont alors $\vec{u}_1 = ((1-t_1)^2, a_2t_1^2)$ et $\vec{u}_2 = ((1-t_2)^2, a_2t_2^2)$ ou encore puisque $t = 1$ n'est pas solution de (3.12) : $\vec{u}_1 = (1, \frac{a_2t_1^2}{(1-t_1)^2})$ et $\vec{u}_2 = (1, \frac{a_2t_2^2}{(1-t_2)^2})$. Posons $x_i = \frac{t_i}{(1-t_i)}$, $i = 1, 2$.

L'équation (3.12) s'écrit $1 + 2a_1\frac{t}{1-t} + a_2(\frac{t}{1-t})^2 = 0$. Les réels x_1 et x_2 sont solutions de $x \in \mathbb{R}, a_2x^2 + 2xa_1 + 1 = 0$ avec $a_1^2 - a_2 \geq 0$, d'où $\vec{u}_i(1, a_2x_i^2)$, $i = 1, 2$.

(ii) Soit, dans le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_1})$, un point M de paramètre $t \in \tilde{\mathbb{R}}$ de la conique $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{u}]$ ($a_1 > 0$). Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ vérifient

$x(t) = \frac{t^2}{(1-t)^2 + 2a_1t(1-t)}$, $y(t) = \frac{2a_1t(1-t)}{(1-t)^2 + 2a_1t(1-t)}$. Le point M est à l'infini pour une valeur du paramètre t solution de

$$(1-t)^2 + 2a_1t(1-t) = 0. \quad (3.13)$$

Cette dernière équation admet pour solutions $t_1 = 1$ et $t_2 = \frac{1}{1-2a_1}$. Les directions asymptotiques de la conique sont alors $\vec{u}_1 = \vec{u}$ et $\vec{u}_2 = (t_2^2, 2a_1t_2(1-t_2)) = t_2^2\vec{v}$ avec $\vec{v} = (1; 2a_1(\frac{1-t_2}{t_2})) = (1; -4a_1^2)$.

(iii) Soit, dans le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_2})$, un point M de paramètre $t \in \tilde{\mathbb{R}}$ de la conique $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; -1),]$ ($m > 0$). Ses coordonnées $(x(t), y(t))$ vérifient $x(t) = \frac{2mt(1-t)}{(1-t)^2 - t^2}$, $y(t) = \frac{-t^2}{(1-t)^2 - t^2}$.

Le point M est à l'infini pour une valeur du paramètre t annulant $(1-t)^2 - t^2$ soit $t = \frac{1}{2}$ ou bien pour $t = \infty$. Les directions asymptotiques sont alors $\vec{u}_1(2m, 1)$ et $\vec{u}_2(-2m, 1)$. ■

Proposition 3.12 Soit A_0, A_1, A_2 trois points distincts du plan à distance finie ou non et un vecteur $\vec{i} \neq \vec{0}$ non colinéaire à $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_0A_2}$.

Notons \mathcal{F}^* le faisceau des coniques propres passant par A_0, A_2 tangentes en ces points aux droites (A_0A_1) et (A_1A_2) respectivement :

(i) Dans le cas où A_0, A_1, A_2 sont à distance finie, considérons le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2})$. La seule conique de \mathcal{F}^* dont $\vec{i}(x_0, y_0)$ est une direction asymptotique admet à la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)] \quad \text{avec} \quad a_2 = \text{sgn}(x_0y_0), a_1 = \frac{1}{2} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{|x_0y_0|}},$$

(ii) Si A_0, A_1 sont à distance finie, A_2 est l'infini dans la direction de \vec{u} , considérons le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_1})$. La seule conique de \mathcal{F}^* dont $\vec{i}(x_0, y_0)$ est une direction asymptotique admet à la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}] \quad \text{avec} \quad b = \text{sgn}(-x_0y_0), a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|y_0|}{|x_0|}},$$

(iii) Si A_0, A_2 sont à distance finie, A_1 est à l'infini dans la direction de \vec{u} , considérons le repère $(A_0; \vec{u}, \overrightarrow{A_0A_2})$. La seule conique de \mathcal{F}^* dont $\vec{i}(x_0, y_0)$ est une direction asymptotique admet à la représentation (BR) suivante :

$$BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; -1)] \quad \text{avec} \quad m = \frac{1}{2} \frac{|x_0|}{|y_0|}.$$

Preuve :

(i) Supposons que $\vec{i}(x_0, y_0)$ soit direction asymptotique de $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ avec $a_2 \in \{-1, +1\}, a_1 > 0$. D'après le lemme (i) précédent, déterminons un réel x vérifiant d'une part $x_0 a_2 x^2 - y_0 = 0$ et d'autre part solution de l'équation $a_2 x^2 + 2x a_1 + 1 = 0$ avec $a_1^2 \geq a_2$. Il faut donc $a_2 = \text{sgn}(x_0 y_0)$, $x = \pm \sqrt{\left| \frac{y_0}{x_0} \right|}$ et par suite

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{|x_0 y_0|}}.$$

Réciproquement, le choix de a_2, x, a_1 étant fait comme ci-dessus, vérifions que $a_1^2 - a_2 \geq 0$.

Si $x_0 y_0 > 0$ alors $a_1^2 - a_2 = \frac{(x_0 + y_0)^2}{4x_0 y_0} - 1 = \frac{(x_0 - y_0)^2}{4x_0 y_0} \geq 0$. Si $x_0 y_0 < 0$ alors $a_1^2 - a_2 = a_1^2 + 1 \geq 0$.

Par suite, $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; a_2)]$ admet pour directions asymptotiques $\vec{i}(x_0, y_0)$ et $\vec{j}(y_0, x_0)$.

(ii) Supposons que $\vec{i}(x_0, y_0)$ soit direction asymptotique de $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$ avec $b \in \{-1, +1\}, a_1 > 0$. D'après le lemme (ii) précédent, déterminons un réel $a_1 > 0$ vérifiant $4a_1^2 b x_0 + y_0 = 0$ (car $\vec{u} \neq \vec{i}$ par hypothèse). Nécessairement,

$$b = \text{sgn}(-x_0 y_0) \text{ et } a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|y_0|}{|x_0|}}.$$

Réciproquement, le choix de a_2, a_1 étant fait comme ci-dessus, $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$ admet pour directions asymptotiques $\vec{i}(x_0, y_0)$ et \vec{u} .

(iii) Supposons que $\vec{i}(x_0, y_0)$ soit direction asymptotique de $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; -1)]$ ($m > 0$). D'après le lemme (iii) précédent déterminons un réel $m > 0$ vérifiant $x_0 - 2m y_0 = 0$ ou $x_0 + 2m y_0 = 0$. Nécessairement, $m = \left| \frac{x_0}{2y_0} \right|$. Réciproquement

si $m = \left| \frac{x_0}{2y_0} \right|$ les directions asymptotiques de $BR[(A_0; 1), m\vec{u}, (A_2; -1)]$ sont \vec{i} et $\vec{j}(-x_0, y_0)$ ■

Chapitre 4

Formes (BR) d'un faisceau de coniques passant par trois points et tangentes à une droite donnée en un des points

Dans le chapitre précédent nous avons donné l'écriture (BR) de la seule conique d'un faisceau de coniques bitangentes passant par un point fixé dans le plan. De ce résultat, nous déduisons une forme (BR) du faisceau linéaire de coniques passant par trois points fixes et tangentes à une droite donnée en un des points (Berger, 1990 [22]).

L'écriture (BR) du faisceau de coniques définies par trois points et une tangente se présente comme une liste de trois vecteurs massiques représentant une conique. Les Π -projections du premier et du troisième vecteur massique sont fixes et l'une d'elles est un point de contact. Le paramètre du faisceau est ici l'abscisse d'un point de la tangente, Π -projection du deuxième vecteur massique, et pour une valeur particulière, ce paramètre est le module d'un vecteur directeur de la tangente. Ce dernier vecteur représente le deuxième vecteur massique de la liste.

Nous donnons également l'écriture (BR) de la seule conique de ce faisceau passant par un point fixé dans le plan à distance finie ou non.

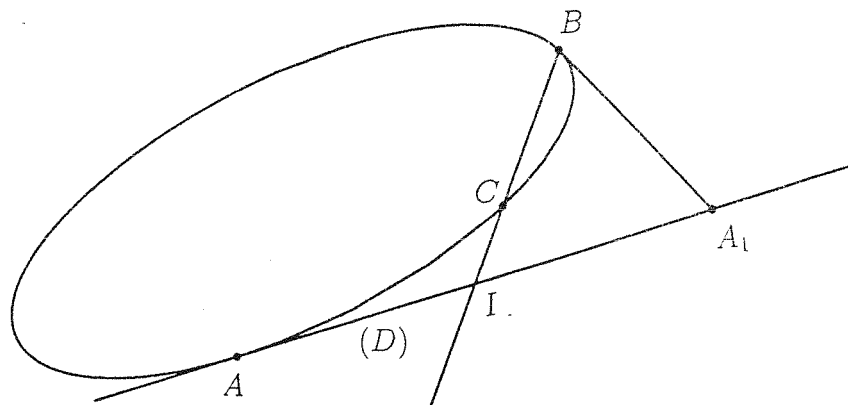


FIG. 4.1 - Faisceau déterminé par trois points et une tangente

4.1 Introduction

Nous déterminons une forme (BR) des faisceaux de coniques passant par trois points distincts A, B, C non alignés à distance finie ou non et tangentes un point donné, par exemple A , à une droite donnée (D) .

Un tel faisceau est engendré par les coniques dégénérées Γ_1 : réunion des droites (AB) et (AC) et Γ_2 : réunion des droites (D) et (BC) .

Proposition 4.1 *Soit A, B, C trois points distincts non alignés à distance finie ou non. Une droite (D) passant par A ne contient pas les points B et C . Notons \mathcal{F}^* le faisceau des coniques propres passant par A, B, C tangentes à (D) en A . Il existe alors une correspondance biunivoque entre \mathcal{F}^* et un point de $(D) - \{A, I\}$ où I est le point d'intersection de (BC) et (D) .*

Preuve: (i) Supposons que A soit à distance finie et considérons un repère attaché à la configuration dans lequel $A(0, 0, 1), B(0, 1, b), C(1, 0, c)$. $(D) : \alpha x + \beta y = 0$ où $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, b, c$ sont des réels fixés (figure 4.1). Avec ces notations, le point I a pour coordonnées $I(-\beta, \alpha, \alpha b - \beta c)$. Définissons $\Gamma(\lambda, \mu)$ où $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ une conique propre de \mathcal{F}^* . Elle admet une équation de la forme :

$$\lambda(cx + by - z)(\alpha x + \beta y) + \mu xy = 0.$$

(x, y, z) désignant les coordonnées homogènes d'un point de la conique. La tangente en B à cette conique a pour équation $(\lambda\beta c + \mu)x + \lambda b\beta y - \lambda\beta z = 0$. Elle coupe la droite (D) en le point $A_1(-\beta\lambda, \alpha\lambda, \lambda(\alpha b - \beta c) - \mu)$. Remarquons que A_1 est différent

de A (sinon $\lambda = 0$) et de I (sinon $\mu = 0$). Soit $x_I = \frac{-\beta}{(\alpha b - \beta c)}$ et $x_1 = \frac{-\beta}{(\alpha b - \beta c) - \frac{\mu}{\lambda}}$

les abscisses des points I et A_1 respectivement sur la droite (D) . L'application φ de \mathcal{F}^* dans $\mathbb{R} - \{0, x_I\}$ qui à toute conique propre $\Gamma(\lambda, \mu)$ ($\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ étant définis à un coefficient multiplicatif près) associe le réel x_1 est une homographie.

(ii) Supposons que A soit à l'infini et que (D) ne soit pas la droite de l'infini. Considérons un repère attaché à la configuration dans lequel $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, b)$, $C(1, 1, c)$, $(D) : y = 0$ où $b \neq c$ (sinon A, B, C seraient alignés) sont des réels fixés. Avec ces notations, le point I a pour coordonnées $I(1, 0, c - b)$. Définissons $\Gamma(\lambda, \mu)$ où $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ une conique propre de \mathcal{F}^* . Elle admet une équation de la forme :

$$\lambda(z - by)(z - cy) + \mu y(x(c - b) + by - z) = 0,$$

(x, y, z) désignant les coordonnées homogènes d'un point de la conique. La tangente en B à cette conique a pour équation $\mu(c - b)x + (-\lambda b(b - c) + \mu b)(y - 1) + (\lambda(b - c) - \mu)(z - b) = 0$. Elle coupe la droite (D) en le point $A_1(\mu - \lambda(b - c), 0, \mu(c - b))$. Remarquons que A_1 est différent de A (sinon $\mu = 0$) et de I (sinon $\lambda = 0$). Soit $x_I = \frac{1}{(c - b)}$ et $x_1 = \frac{1}{(c - b)} + \frac{\lambda}{\mu}$ les abscisses des points I et A_1 respectivement sur la droite (D) . L'application φ de \mathcal{F}^* dans $\mathbb{R} - \{0, x_I\}$ qui à toute conique propre $\Gamma(\lambda, \mu)$ ($\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ étant définis à un coefficient multiplicatif près) associe le réel x_1 est une homographie.

(iii) Supposons que (D) soit la droite de l'infini, A est un point de (D) , les points B et C sont à distance finie. Considérons un repère attaché à la configuration dans lequel $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$. (D) est la droite d'équation : $z = 0$. Avec ces notations, le point I a pour coordonnées $I(0, 1, 0)$. Définissons $\Gamma(\lambda, \mu)$ où $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ une conique propre de \mathcal{F}^* . Elle admet une équation de la forme :

$$\lambda y(y - z) + \mu xz = 0,$$

(x, y, z) désignant les coordonnées d'un point de la conique. La tangente en B à cette conique a pour équation $\mu x - \lambda y = 0$. Elle coupe la droite (D) en le point $A_1(\lambda, \mu, 0)$. Remarquons que A_1 est différent de A (sinon $\mu = 0$) et de I (sinon $\lambda = 0$). Soit $x'_1 = \frac{\lambda}{\mu}$ l'abscisse du point A_1 sur la droite de l'infini (D) . L'application φ de \mathcal{F}^* dans $\mathbb{R} - \{0\}$ qui à toute conique propre $\Gamma(\lambda, \mu)$ ($\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ étant définis à un coefficient multiplicatif près) associe le réel x'_1 est une homographie. ■

4.2 Faisceau de coniques (BR) passant par trois points et tangentes à une droite donnée.

4.2.1 Forme (BR) du faisceau.

Proposition 4.2 Soit A, B, C trois points distincts du plan, non alignés, à distance finie ou non. Soit (D) une droite passant par A et ne contenant pas les points B et C . (D) peut être la droite de l'infini. Notons \mathcal{F}^* le faisceau de coniques propres passant par les points A, B, C et tangentes en A à la droite (D) :

(i) Si A, B, C sont à distance finie, considérons le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce repère la droite (D) a pour direction $\vec{i} = (\alpha, \beta)$ où $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha + \beta \neq 0$. Le faisceau \mathcal{F}^* admet pour représentation (BR) :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda\vec{i}; a_1), (B; b)]$$

$$\text{avec } \lambda \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{\alpha + \beta}\}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1)|}},$$

$$b = \text{sgn}(-\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1))$$

et

$$BR[(A; 1), \frac{\vec{i}}{2\sqrt{|\alpha(\alpha + \beta)|}}, (B; \text{sgn}((-\alpha)(\alpha + \beta)))]$$

(ii) Si A et C sont à distance finie, la droite (D) a pour direction \vec{i} et B est à l'infini dans la direction de $\vec{u} \neq \vec{i}$, considérons le repère $(A; \vec{i}, \vec{u})$ et le point $C = (\alpha, \beta)$ $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Le faisceau \mathcal{F}^* admet pour représentation (BR) :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda\vec{i}; a_1), b\vec{u}]$$

$$\text{avec } \lambda \in \mathbb{R} - \{0, \alpha\}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\lambda\beta(\lambda - \alpha)|}}, \quad b = \text{sgn}(\lambda\beta(\lambda - \alpha))$$

et

$$BR[(A; 1), \frac{|\alpha|}{2\sqrt{|\beta|}}\vec{i}, \text{sgn}(\beta)\vec{u}]$$

(iii) Si A est à distance finie, B et C sont à l'infini dans les directions respectives de \vec{u} et \vec{v} , la droite (D) a pour direction $\vec{i} = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \neq 0$ (les coordonnées sont exprimées dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$). Le faisceau \mathcal{F}^* admet pour représentation (BR) :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda\vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\alpha\lambda|}}), \text{sgn}(\alpha\lambda)\vec{u}] \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

(iv) Si A est à l'infini dans la direction de $\vec{i} \neq \vec{0}$, B et C sont à distance finie, (D) est la droite de direction \vec{i} passant par le point d'intersection I de (D) avec la droite (BC) , notons $C = (0, c)$ dans le repère $(I; \vec{i}, \overrightarrow{IB})$ avec $c \neq 0, c \neq 1$. Le faisceau \mathcal{F}^* admet pour représentation (BR) :

$$BR[(B; 1), (I + \lambda\vec{i}; a_1), b\vec{i}]$$

$$\text{avec } a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|1-c|}{|\lambda c|}}, b = \text{sgn}(\lambda c(c-1))$$

(v) Si A et B sont à l'infini dans les directions respectives de $\vec{i} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{i} \neq \vec{u}$, C est un point à distance finie, notons O le point du plan tel que $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$, (D) est la droite passant par O de direction \vec{i} . La forme (BR) du faisceau \mathcal{F}^* est alors :

$$BR[\vec{i}, (O + \lambda\vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}), \text{sgn}(-\lambda)\vec{u}] \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

(vi) Si A est à l'infini dans la direction de $\vec{i} \neq \vec{0}$, B et C sont à distance finie, (D) est la droite de l'infini. Le faisceau \mathcal{F}^* admet pour représentation (BR) :

$$BR[(B; 1), \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}(\vec{i} + \lambda\overrightarrow{BC}), \text{sgn}(-\lambda)\vec{i}] \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Preuve : (i) (figure 4.2) D'après la proposition précédente, à toute conique propre du faisceau \mathcal{F}^* correspond un unique point commun à la droite (D) et à la tangente en B . Soit A_1 ce point. Une représentation (BR) réduite de la conique est :

soit $BR[(A; 1), (A_1; a_1), (B; b)]$ avec $a_1 > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$ lorsque A_1 est à distance finie (la droite (D) et la tangente en B sont sécantes),

soit $BR[(A; 1), m\vec{i}, (B; b)]$ avec $m > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$ lorsque A_1 est à l'infini dans la direction de \vec{i} (la droite (D) et la tangente en B sont parallèles).

Examinons le cas où la droite (D) et la tangente en B sont sécantes et déterminons a_1 et b pour que C soit un point de la conique. Posons $A_1 = A + \lambda\vec{i}$ avec $\lambda \neq 0$ sinon $A_1 = A$ et $\lambda \neq \frac{1}{\alpha + \beta}$ sinon A_1 est le point d'intersection de (D) et (BC) .

Exprimons les coordonnées de C notées x_C et y_C dans le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1B})$. Il vient : $x_C = \frac{\lambda(\alpha + \beta) - 1}{\lambda\beta}$ et $y_C = -\frac{\alpha}{\beta}$. D'après la proposition 3.11(i) la conique

$BR[(A; 1), (A_1; a_1), (B; b)]$ passe par C ssi $a_1 = \frac{1}{2} \frac{|x_C + y_C - 1|}{\sqrt{|x_C y_C|}}$ et $b = \text{sgn}(x_C y_C)$.

D'où $a_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1)|}}$, $b = \text{sgn}(-\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1))$.

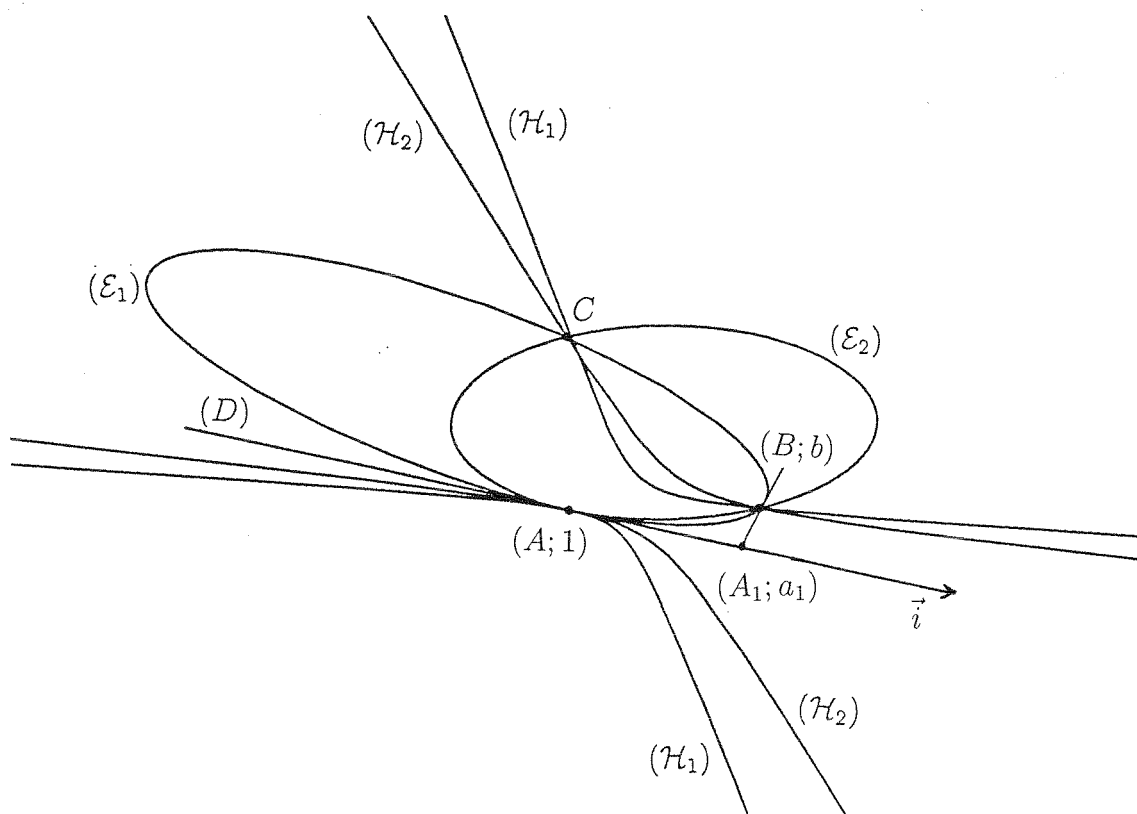


FIG. 4.2 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par deux points à distance finie et tangentes à une droite donnée en un troisième point.

Dans le cas où la droite (D) et la tangente en B sont parallèles, la forme (BR) est $BR[(A; 1), m\vec{i}, (B; b)]$ avec $m > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$. Déterminons m et b pour que C soit un point de la conique. Exprimons les coordonnées de C notées x_C et y_C dans le repère $(A; \vec{i}, \overrightarrow{AB})$. Il vient $x_C = \frac{1}{\beta}$, $y_C = -\frac{\alpha}{\beta}$. D'après la proposition

3.11(iii) la conique $BR[(A; 1), m\vec{i}, (B; b)]$ passe par C ssi $m = \frac{|x_C|}{2\sqrt{|y_C(1-y_C)|}}$ et

$b = \text{sgn}(y_C(1-y_C))$ d'où $m = \frac{1}{2\sqrt{|\alpha(\alpha+\beta)|}}$ et $b = \text{sgn}(-\alpha)(\alpha+\beta)$.

Ce faisceau contient des ellipses, des hyperboles et une parabole.

(ii) (figure 4.3) Pour une conique du faisceau \mathcal{F}^* notons A_1 le point commun à la droite (D) et à la tangente en B à la conique (cette tangente représente ici une asymptote de la conique). Le point A_1 est différent du point A et du point

d'intersection noté I de (D) avec la droite $(C + \lambda\vec{u})\lambda \in \mathbb{R}$.

Une représentation (BR) réduite de la conique du faisceau est :

soit $BR[(A; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$, $a_1 > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$ lorsque A_1 est à distance finie, soit $BR[(A; 1), m\vec{i}, b\vec{u}]$, $m > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$ lorsque A_1 est à l'infini dans la direction de \vec{i} (dans ce cas la tangente est la droite de l'infini).

Dans le cas où la droite (D) et la tangente en B sont sécantes, déterminons a_1 et b pour que C soit un point de la conique. Posons $A_1 = A + \lambda\vec{i}$ avec $\lambda \neq 0$ sinon $A_1 = A$ et $\lambda \neq \alpha$ sinon $A_1 = I$. En procédant comme précédemment, les coordonnées de C dans le repère $(A; \vec{u}, \overrightarrow{AA_1})$ sont $x_C = \beta$ et $y_C = \frac{\alpha}{\lambda}$. D'après la proposition 3.11(ii)

$BR[(A; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$ passe par C ssi $a_1 = \frac{|y_C|}{2\sqrt{|x_C(1-y_C)|}} = \frac{1}{2} \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\lambda\beta(\lambda-\alpha)|}}$ et

$b = \text{sgn}(x_C(1-y_C)) = \text{sgn}(\lambda\beta(\lambda-\alpha))$.

Lorsque la tangente en B est la droite de l'infini, déterminons les réels m et b pour que $BR[(A; 1), m\vec{i}, b\vec{u}]$ passe par C . Les coordonnées de C dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{i})$ sont $x_C = \beta$ et $y_C = \alpha$. D'après la proposition 3.11(v), $BR[(A; 1), m\vec{i}, b\vec{u}]$ passe par

C ssi $m = \frac{1}{2} \frac{|y_C|}{\sqrt{|x_C|}} = \frac{1}{2} \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\beta|}}$ et $b = \text{sgn}(x_C) = \text{sgn}(\beta)$.

Ce faisceau contient des hyperboles et une parabole.

(iii) (figure 4.4) Pour une conique du faisceau \mathcal{F}^* notons A_1 le point commun à la droite (D) et à la tangente en B à la conique (la tangente représente ici une direction asymptotique de la conique). Le point A_1 est différent du point A et n'est pas à l'infini. Ecrivons le sous la forme $A_1 = A + \lambda\vec{i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Une représentation (BR) réduite de la conique du faisceau est $BR[(A; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$, $a_1 > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$. Déterminons a_1 et b pour que l'autre direction asymptotique soit \vec{v} (la conique passe par le point C). Les coordonnées de \vec{v} dans le repère $(A_1; \vec{u}, \overrightarrow{AA_1})$ sont $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ et $y = \frac{1}{\lambda\beta}$.

D'après la proposition 3.12(ii) la direction asymptotique de $BR[(A; 1), (A_1; a_1), b\vec{u}]$ autre que \vec{u} est donnée par $\vec{v} = (x, y)$ ssi $a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|y|}{|x|}} = \frac{1}{2\sqrt{|\alpha\lambda|}}$ et $b = \text{sgn}(-xy) = \text{sgn}(\alpha\lambda)$.

Ce faisceau est composé uniquement d'hyperboles.

(iv) (figure 4.5) Pour une conique du faisceau \mathcal{F}^* notons A_1 le point commun à la droite (D) et à la tangente en B à cette conique. Définissons le par $A_1 = I + \lambda\vec{i}$ avec $\lambda \neq 0$ (sinon $A_1 = I$) et $\lambda \neq \infty$ (sinon $A_1 = A$). Une représentation (BR) réduite de la conique du faisceau est : $BR[(B; 1), (I + \lambda\vec{i}; a_1), b\vec{i}]$ avec $a_1 > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$. Elle passe par C (de coordonnées $x_C = (c-1)\lambda$, $y_C = 1-c$ dans le repère $(B; \vec{i}, \overrightarrow{BA_1})$)

ssi (cf. proposition 3.11(ii)) $a_1 = \frac{|y_C|}{2\sqrt{|x_C(1-y_C)|}} = \frac{1}{2} \frac{|1-c|}{\sqrt{|\lambda c(c-1)|}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|1-c|}{|\lambda c|}}$ et

$$b = \text{sgn}(x_C(1-y_C)) = \text{sgn}(\lambda c(c-1)).$$

Ce faisceau est composé uniquement d'hyperboles.

(v) (figure 4.6) Pour une conique du faisceau \mathcal{F}^* notons A_1 le point commun à la droite (D) et à la tangente en B à cette conique (qui est ici une asymptote). Définissons le par $A_1 = O + \lambda \vec{i}$ avec $\lambda \neq 0$ (sinon $A_1 = O$) et $\lambda \neq \infty$ (sinon $A_1 = A$). Une représentation (BR) réduite de la conique du faisceau est : $BR[\vec{i}, (O + \lambda \vec{i}; a_1), b\vec{u}]$ avec $a_1 > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$. Elle passe par C (de coordonnées $x_C = -\lambda$ et $y_C = 1$ dans le repère $(A_1; \vec{i}, \vec{u})$) ssi (cf. proposition 3.11(iv)) $a_1 = \frac{1}{2\sqrt{|x_C y_C|}} = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}$

et $b = \text{sgn}(x_C y_C) = \text{sgn}(-\lambda)$ Remarquons que ce faisceau ne comporte que des hyperboles centrées sur la droite (D) privée du point O .

(vi) (figure 4.7) Une conique du faisceau \mathcal{F}^* est une parabole passant par B et C de direction d'axe \vec{i} . Notons $\vec{u}(1, \lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$, dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{BC})$ la direction de la tangente en B à la parabole. Sa forme (BR) est $BR[(B; 1), m\vec{u}, b\vec{i}]$ avec $m > 0$ et $b \in \{-1, +1\}$. Elle passe par C (de coordonnées $x_C = -\frac{1}{\lambda}$ et $y_C = \frac{1}{\lambda}$ dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{u})$) ssi (cf. proposition 3.11(v)) $m = \frac{|y_C|}{2\sqrt{|x_C|}} = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}$

et $b = \text{sgn}(x_C) = \text{sgn}(-\lambda)$.

Ce faisceau est composé uniquement de paraboles. ■

4.2.2 Conique du faisceau passant par un point à distance finie

Proposition 4.3 Avec les notations de la proposition 4.2 précédente, considérons un point M_0 à distance finie non situé sur les droites (AB) , (BC) , (CA) et (D) .

(i) Si A, B, C sont à distance finie, la seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ (les coordonnées sont exprimées dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$) est :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; a_1), (B; b)]$$

avec $\lambda = \frac{\beta x_0 y_0}{d}$ où $d = (\beta - x_0 \beta + \alpha y_0)(\beta x_0 - \alpha y_0) + \alpha y_0^2(\alpha + \beta) \neq 0$,

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda \alpha (\lambda \alpha + \lambda \beta - 1)|}},$$

$$b = \text{sgn}\left(\alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha - \beta\right)\right)$$

ou lorsque $d = 0$

$$BR[(A; 1), \frac{\vec{i}}{2\sqrt{|\alpha(\alpha + \beta)|}}, (B; \operatorname{sgn}(-\alpha)(\alpha + \beta))],$$

(ii) Si A et C sont à distance finie, (D) a pour direction \vec{i} et B est à l'infini dans la direction de $\vec{u} \neq \vec{i}$. Considérons le repère $(A; \vec{i}, \vec{u})$ et le point $C = (\alpha, \beta)$ $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ est :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda\vec{i}; a_1), b\vec{u}]$$

avec $\lambda = \frac{\alpha^2 x_0 y_0 - \alpha \beta x_0^2}{\alpha^2 y_0 - \beta x_0^2}$, $\alpha^2 y_0 - \beta x_0^2 \neq 0$ et $b = \operatorname{sgn}(\lambda \beta (\lambda - \alpha))$, $a_1 = \frac{|\alpha|}{|\lambda \beta (\lambda - \alpha)|}$
ou

$$BR[(A; 1), \frac{|\alpha|}{2\sqrt{|\beta|}}\vec{i}, \operatorname{sgn}(\beta)\vec{u}]$$

lorsque $\alpha^2 y_0 - \beta x_0^2 = 0$,

(iii) Si A est à distance finie, B et C sont à l'infini dans les directions respectives de \vec{u} et \vec{v} , la droite (D) a pour direction \vec{i} , considérons le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $B = (\alpha, \beta)$ $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ est :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda\vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\alpha\lambda|}}), \operatorname{sgn}(\alpha\lambda)\vec{u}]$$

où $\lambda = \frac{x_0 y_0}{\beta x_0 - \alpha y_0}$,

(iv) Si A est à l'infini dans la direction de \vec{i} , les points B et C sont à distance finie, (D) a pour direction \vec{i} , notons O le point d'intersection des droites (BC) et (D) . Considérons le repère $(O; \vec{i}, \vec{OB})$ et le point $C = (0, c)$ $c \neq 0, c \neq 1$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ est :

$$BR[(B; 1), (O + \lambda\vec{i}; a_1), b\vec{i}]$$

avec $\lambda = \frac{(1-c)x_0 y_0}{(1-y_0)(y_0-c)}$, $a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|1-c|}{|\lambda c|}}$, $b = \operatorname{sgn}(\lambda c(c-1))$,

(v) Si A est à l'infini dans la direction de \vec{i} , le point B est à l'infini dans la direction de $\vec{u} \neq \vec{i}$, C est un point à distance finie, O est le point d'intersection des droites (D) et $(C + \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R})$, (D) a pour direction \vec{i} , posons $\vec{OC} = \vec{u}$, et considérons le repère $(O; \vec{i}, \vec{u})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ est :

$$BR[\vec{i}, (O + \lambda\vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}), \operatorname{sgn}(-\lambda)\vec{u}]$$

avec $\lambda = \frac{x_0 y_0}{y_0 - 1}$,

(vi) Si A est à l'infini dans la direction de \vec{i} , la droite (D) est la droite de l'infini, B, C sont à distance finie, considérons le repère $(B; \vec{i}, \overrightarrow{BC})$. La seule conique de \mathcal{F}^* passant par $M_0(x_0, y_0)$ est :

$$BR[(B; 1), \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}(\vec{i} + \lambda \overrightarrow{BC}), \text{sgn}(-\lambda)\vec{i}]$$

où $\lambda = \frac{y_0 - y_0^2}{x_0}$.

Preuve : (i) Soit (Γ) une conique propre du faisceau. D'après la proposition 4.2 (i), elle s'écrit soit

$$BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; a_1), (B; b)] \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{\alpha + \beta}\}, a_1 = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1)|}},$$

$b = \text{sgn}(\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1))$ soit

$$BR[(A; 1), \frac{\vec{i}}{2\sqrt{|\alpha(\alpha + \beta)|}}, (B; \text{sgn}(-\alpha)(\alpha + \beta))].$$

Posons $A_1 = A + \lambda \vec{i}$ et déterminons

la valeur de λ si elle existe pour que $(\Gamma) = BR[(A; 1), (A_1; a_1), (B; b)]$ passe par M_0 .

Considérons le repère $(A_1; \overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1B})$ et $M_0 = (X_0, Y_0)$ dans ce repère. D'après la proposition 3.11(i), $BR[(A; 1), (A_1; a_1), (B; b)]$ passe par M_0 ssi $a_1 = \frac{1}{2} \frac{|X_0 + Y_0 - 1|}{\sqrt{|X_0 Y_0|}}$

et $b = \text{sgn}(X_0 Y_0)$. Les coordonnées de M_0 dans $(A_1, \overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1B})$ sont $X_0 = 1 - x_0 + y_0 \frac{\lambda\alpha - 1}{\lambda\beta}$ et $Y_0 = x_0 - \frac{\alpha y_0}{\beta}$.

Par conséquent $a_1 = \frac{1}{2} \frac{|X_0 + Y_0 - 1|}{\sqrt{|X_0 Y_0|}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1)|}}$ et $b = \text{sgn}(X_0 Y_0) =$

$\text{sgn}(\lambda\alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1))$.

Il vient puisque $\lambda \neq 0$,

$$(\lambda(\beta - x_0\beta + \alpha y_0) - y_0)(\beta x_0 - \alpha y_0) = \pm \alpha(\lambda\alpha + \lambda\beta - 1)y_0^2 \text{ et } \text{sgn}(\alpha(1 - \alpha\lambda - \lambda\beta)) = \text{sgn}((\lambda(\beta - x_0\beta + \alpha y_0) - y_0)(\beta x_0 - \alpha y_0)).$$

Le réel λ vérifie donc :

$$\lambda(\beta - x_0\beta + \alpha y_0)(\beta x_0 - \alpha y_0) + \alpha(\alpha + \beta)y_0^2 = \beta x_0 y_0. \text{ Posons } d = (\beta - x_0\beta + \alpha y_0)(\beta x_0 - \alpha y_0) + \alpha(\alpha + \beta)y_0^2. \text{ Le réel } \lambda \text{ vaut alors } \frac{\beta x_0 y_0}{d} \text{ si } d \neq 0.$$

Dans le cas où $d = 0$, (Γ) s'écrit nécessairement :

$$BR[(A; 1), \frac{\vec{i}}{2\sqrt{|\alpha(\alpha + \beta)|}}, (B; \text{sgn}(-\alpha)(\alpha + \beta))].$$

Vérifions-le en utilisant la proposition 3.11(iii). En effet (Γ) passe par $M_0(X_0, Y_0)$ (les coordonnées sont exprimées dans le repère $(A; \vec{i}, \overrightarrow{AB})$) ssi $\frac{1}{2\sqrt{|\alpha(\alpha + \beta)|}} =$

$$\frac{|X_0|}{2\sqrt{|Y_0(1 - Y_0)|}} \text{ et } \text{sgn}(-\alpha(\alpha + \beta)) = \text{sgn}(Y_0(1 - Y_0)).$$

Comme $X_0 = \frac{y_0}{\beta}$ et $Y_0 = x_0 - \frac{\alpha y_0}{\beta}$ il vient,

$$\alpha(\alpha + \beta)y_0^2 = \pm(\beta x_0 - \alpha y_0)(\beta - \beta x_0 + \alpha y_0) \text{ et } \text{sgn}(-\alpha(\alpha + \beta)) = \text{sgn}(\beta x_0 - \alpha y_0)(\beta - \beta x_0 + \alpha y_0) \text{ d'où } \alpha(\alpha + \beta)y_0^2 = -(\beta x_0 - \alpha y_0)(\beta - \beta x_0 + \alpha y_0) \text{ donc } d = 0.$$

(ii) Soit (Γ) une conique propre du faisceau. D'après la proposition 4.2 (ii), elle s'écrit : $BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; a_1), b\vec{u}]$ avec $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \alpha$, $a_1 = \frac{1}{2} \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\lambda\beta(\lambda - \alpha)|}}$,

$$b = \text{sgn}(\lambda\beta(\lambda - \alpha)) \text{ ou } BR[(A; 1), \frac{|\alpha|}{2\sqrt{|\beta|}}\vec{i}, \text{sgn}(\beta)\vec{u}].$$

Déterminons dans le premier cas la valeur de λ si elle existe pour que (Γ) passe par M_0 . Posons $A_1 = A + \lambda \vec{i}$. D'après la proposition 3.11(iii) la conique $BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}, a_1), b\vec{u}]$ passe par M_0 ssi $a_1 = \frac{|Y_0|}{2\sqrt{|X_0(1 - Y_0)|}}$ et $b = \text{sgn}(X_0(1 - Y_0))$ où X_0 et

Y_0 désignent les coordonnées de M_0 dans le repère $(A; \vec{u}, \overrightarrow{AA_1})$. Un simple calcul donne $X_0 = y_0$ et $Y_0 = \frac{x_0}{\lambda}$ d'où $a_1 = \frac{|x_0|}{2\sqrt{|\lambda y_0(\lambda - x_0)|}}$ et $b = \text{sgn}(\lambda y_0(\lambda - x_0))$. Le

réel λ vérifie donc :

$$\frac{1}{2} \frac{|\alpha|}{\sqrt{|\lambda\beta(\lambda - \alpha)|}} = \frac{|x_0|}{2\sqrt{|\lambda y_0(\lambda - x_0)|}} \text{ et } \text{sgn}(\lambda\beta(\lambda - \alpha)) = \text{sgn}(\lambda y_0(\lambda - x_0)) \text{ c'est à}$$

dire :

$$\alpha_2 \lambda y_0(\lambda - x_0) = \pm \lambda \beta(\lambda - \alpha) x_0^2 \text{ et } \text{sgn}(\lambda\beta(\lambda - \alpha)) = \text{sgn}(\lambda y_0(\lambda - x_0)). \text{ d'où } \lambda = \frac{\alpha^2 x_0 y_0 - \alpha \beta x_0^2}{\alpha^2 y_0 - \beta x_0^2} \text{ si } \alpha^2 y_0 - \beta x_0^2 \neq 0.$$

Dans le cas où $\alpha^2 y_0 - \beta x_0^2 = 0$, en appliquant un raisonnement analogue au précédent, la conique $BR[(A; 1), \frac{|\alpha|}{2\sqrt{|\beta|}}\vec{i}, \text{sgn}(\beta)\vec{u}]$ convient.

(iii) Soit (Γ) une conique propre du faisceau. D'après la proposition 4.2 (iii), elle s'écrit : $BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\alpha\lambda|}}), \text{sgn}(\alpha\lambda)\vec{u}]$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Posons $A_1 = A + \lambda \vec{i}$ et

$M_0(X_0, Y_0)$ (ces dernières coordonnées sont exprimées dans le repère $(A; \vec{u}, \overrightarrow{AA_1})$).

Un simple calcul donne $X_0 = x_0 - \frac{\alpha y_0}{\beta}$ et $Y_0 = \frac{y_0}{\lambda\beta}$.

D'après la proposition 3.11(iii) (Γ) passe par M_0 ssi

$$\frac{1}{2\sqrt{|\alpha\lambda|}} = \frac{|Y_0|}{2\sqrt{|X_0(1-Y_0)|}} = \frac{|y_0|}{2\sqrt{|(\lambda\beta x_0 - \alpha\lambda y_0)(\lambda\beta - y_0)|}} \text{ et}$$

$$\text{sgn}(\alpha\lambda) = \text{sgn}(X_0(1-Y_0)) = \text{sgn}((\lambda\beta x_0 - \alpha\lambda y_0)(\lambda\beta - y_0)) \text{ d'où}$$

puisque $\lambda \neq 0$, $\lambda = \frac{x_0 y_0}{\beta x_0 - \alpha y_0}$.

(iv) Soit (Γ) une conique propre du faisceau. D'après la proposition 4.2 (iv), elle s'écrit : $BR[(B; 1), (O + \lambda\vec{i}; a_1), , b\vec{i}]$ avec $\lambda \neq 0$, $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|1-c|}{|\lambda c|}}$, $b = \text{sgn}(\lambda c(c-1))$.

Posons $A_1 = O + \lambda\vec{i}$ et $M_0(X_0, Y_0)$ (ces dernières coordonnées sont exprimées dans le repère $(B; \vec{i}, \overrightarrow{BA_1})$). Un simple calcul donne $X_0 = x_0 + \lambda(y_0 - 1)$ et $Y_0 = 1 - y_0$. D'après la proposition 3.11(iii) (Γ) passe par M_0 ssi

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{|1-c|}{|\lambda c|}} = \frac{|Y_0|}{2\sqrt{|X_0(1-Y_0)|}} = \frac{|1-y_0|}{2\sqrt{|y_0(x_0 + \lambda(y_0 - 1))|}} \text{ et}$$

$$\text{sgn}(\lambda c(c-1)) = \text{sgn}(X_0(1-Y_0)) = \text{sgn}(y_0(x_0 + \lambda(y_0 - 1))) \text{ d'où}$$

puisque $\lambda \neq 0$, $\lambda = \frac{(1-c)x_0 y_0}{(1-y_0)(y_0-c)}$.

(v) Soit (Γ) une conique propre du faisceau. D'après la proposition 4.2 (v), elle s'écrit : $BR[\vec{i}, (O + \lambda\vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}), \text{sgn}(-\lambda)\vec{i}]$ avec $\lambda \neq 0$. Posons $A_1 = O + \lambda\vec{i}$ et

$M_0(X_0, Y_0)$ (ces dernières coordonnées sont exprimées dans le repère $(A_1; \vec{i}, \vec{u})$). Un simple calcul donne $X_0 = x_0 - \lambda$ et $Y_0 = y_0$.

D'après la proposition 3.11(iv) (Γ) passe par M_0 ssi

$$\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} = \frac{1}{2\sqrt{|X_0 Y_0|}} = \frac{1}{2\sqrt{|(x_0 - \lambda)y_0|}} \text{ et}$$

$$\text{sgn}(-\lambda) = \text{sgn}(X_0 Y_0) = \text{sgn}((x_0 - \lambda)y_0) \text{ d'où } \lambda = \frac{x_0 y_0}{y_0 - 1}.$$

(vi) Soit (Γ) une conique propre du faisceau. D'après la proposition 4.2 (vi), elle s'écrit : $BR[(B; 1), \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}(\vec{i} + \lambda\overrightarrow{BC}), \text{sgn}(-\lambda)\vec{i}]$ avec $\lambda \neq 0$. Posons $\vec{u} = \vec{i} + \lambda\overrightarrow{BC}$

et $M_0(X_0, Y_0)$ (ces dernières coordonnées sont exprimées dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{u})$).

Un simple calcul donne $X_0 = x_0 - \frac{y_0}{\lambda}$ et $Y_0 = \frac{y_0}{\lambda}$.

D'après la proposition 3.11(v) (Γ) passe par M_0 ssi

$$\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} = \frac{|Y_0|}{2\sqrt{|X_0|}} = \frac{|y_0|}{2\sqrt{|\lambda^2 x_0 - \lambda y_0|}} \text{ et}$$

$$\text{sgn}(-\lambda) = \text{sgn}(X_0) = \text{sgn}(x_0 - \frac{y_0}{\lambda}) \text{ d'où } \lambda = \frac{y_0 - y_0^2}{x_0}. \blacksquare$$

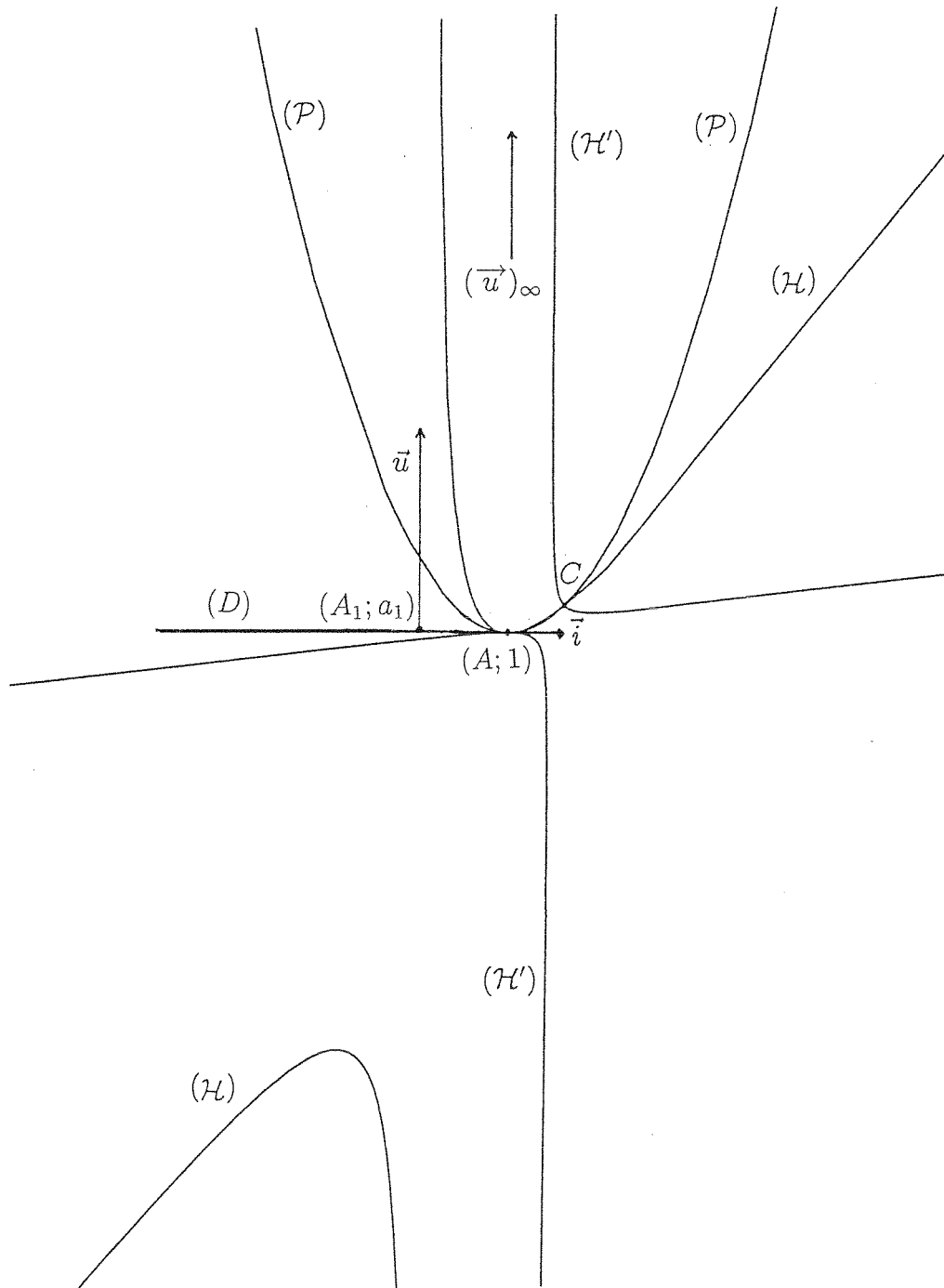


FIG. 4.3 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par un point à distance finie, un deuxième point situé à l'infini et tangentes à une droite donnée en un troisième point.

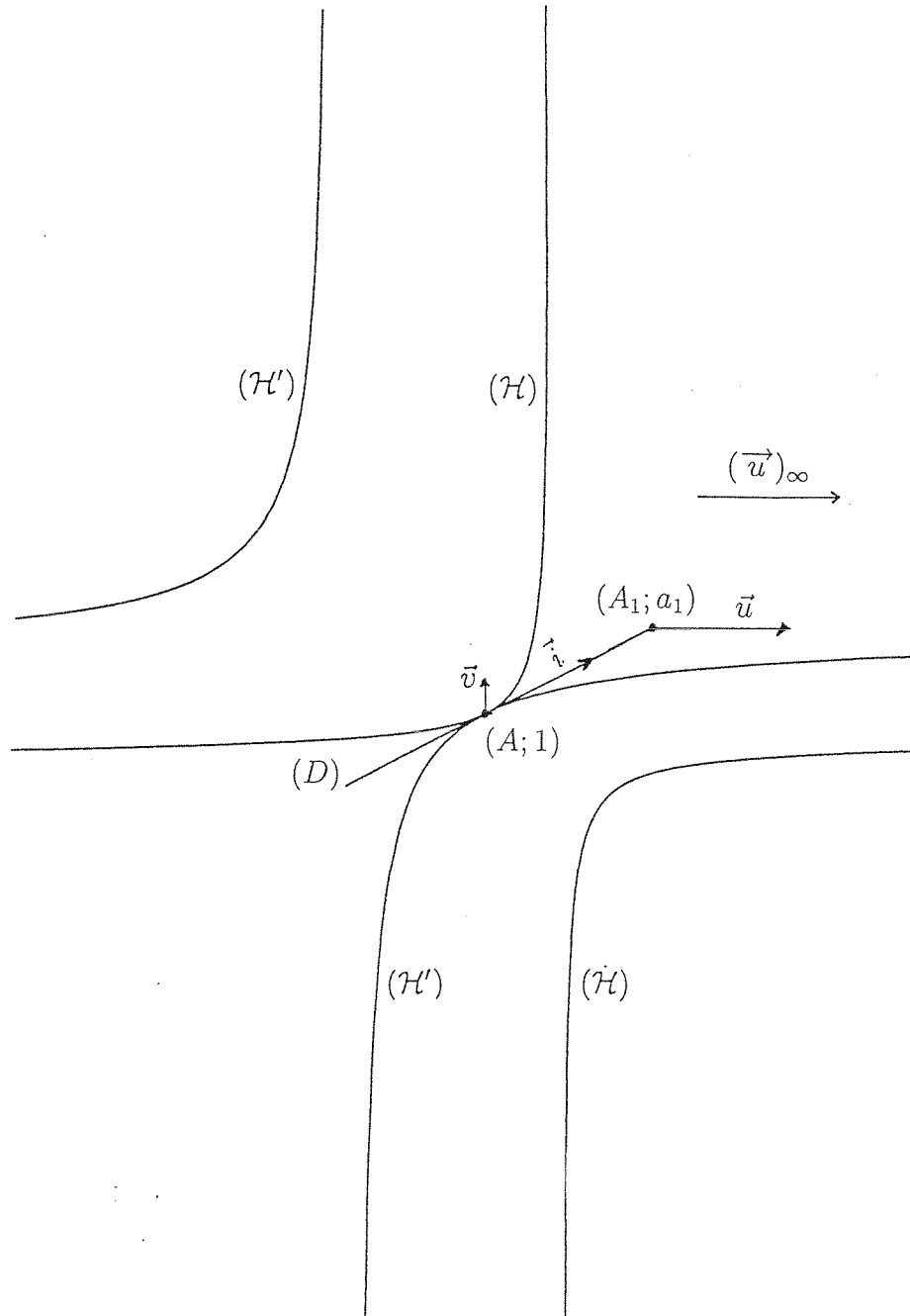


FIG. 4.4 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par deux points situés à l'infini et tangentes à une droite donnée en un troisième point.

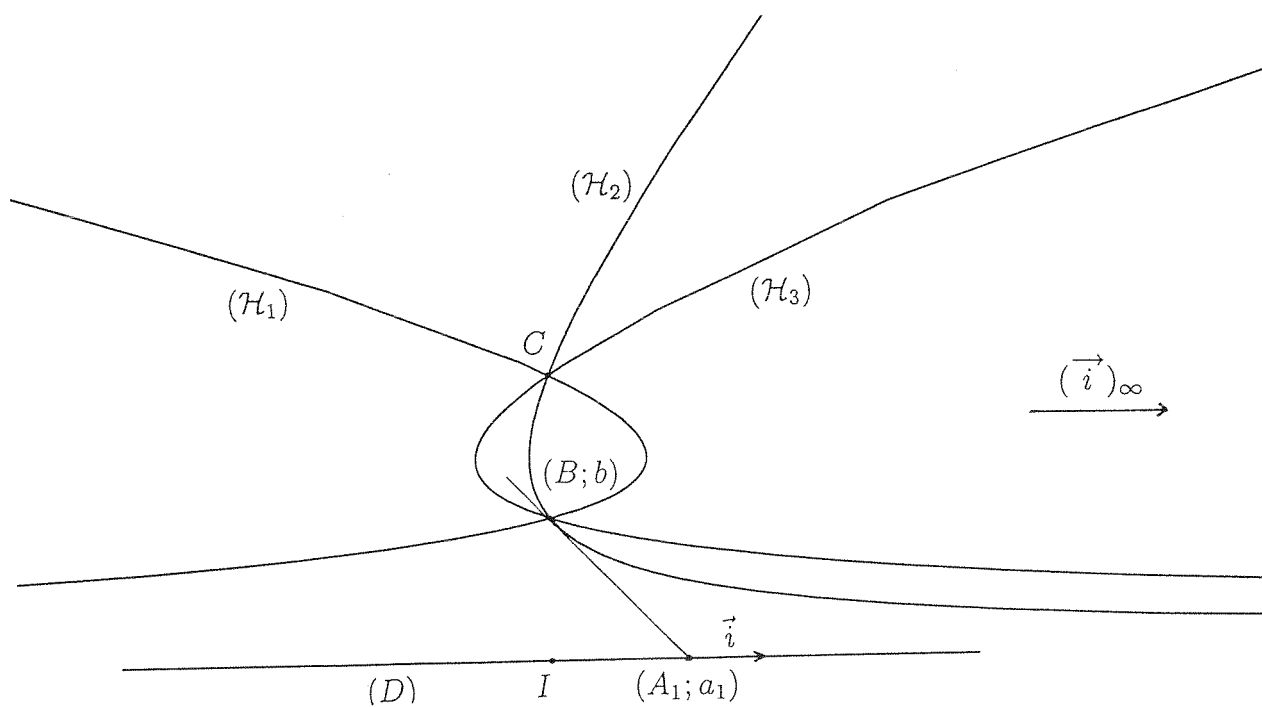


FIG. 4.5 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par deux points à distance finie, et tangentes en l'infini à une droite donnée (D).

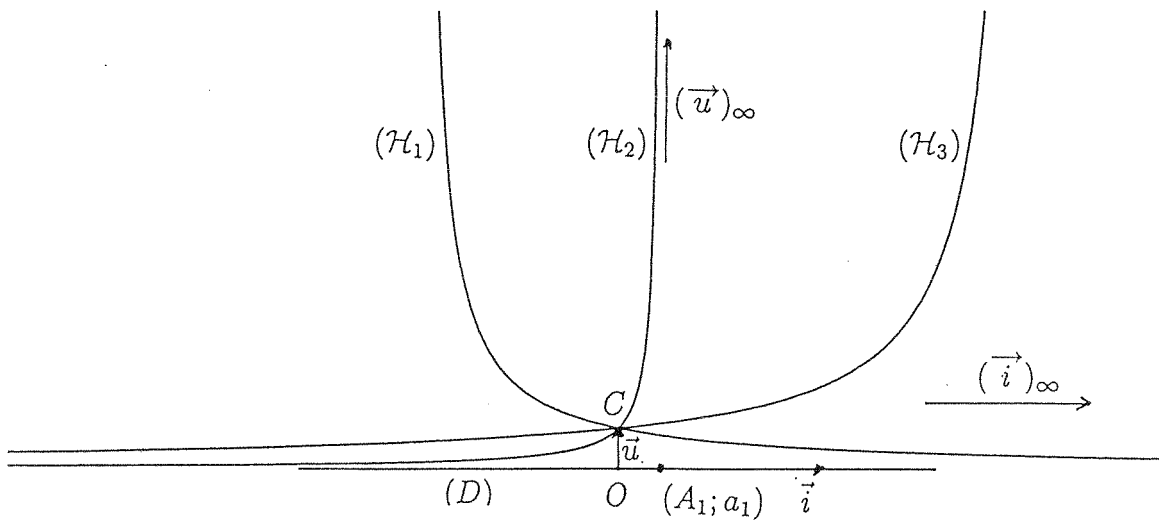


FIG. 4.6 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par deux points dont un à distance finie, l'autre à l'infini et tangentes à une droite donnée (D) à l'infini .

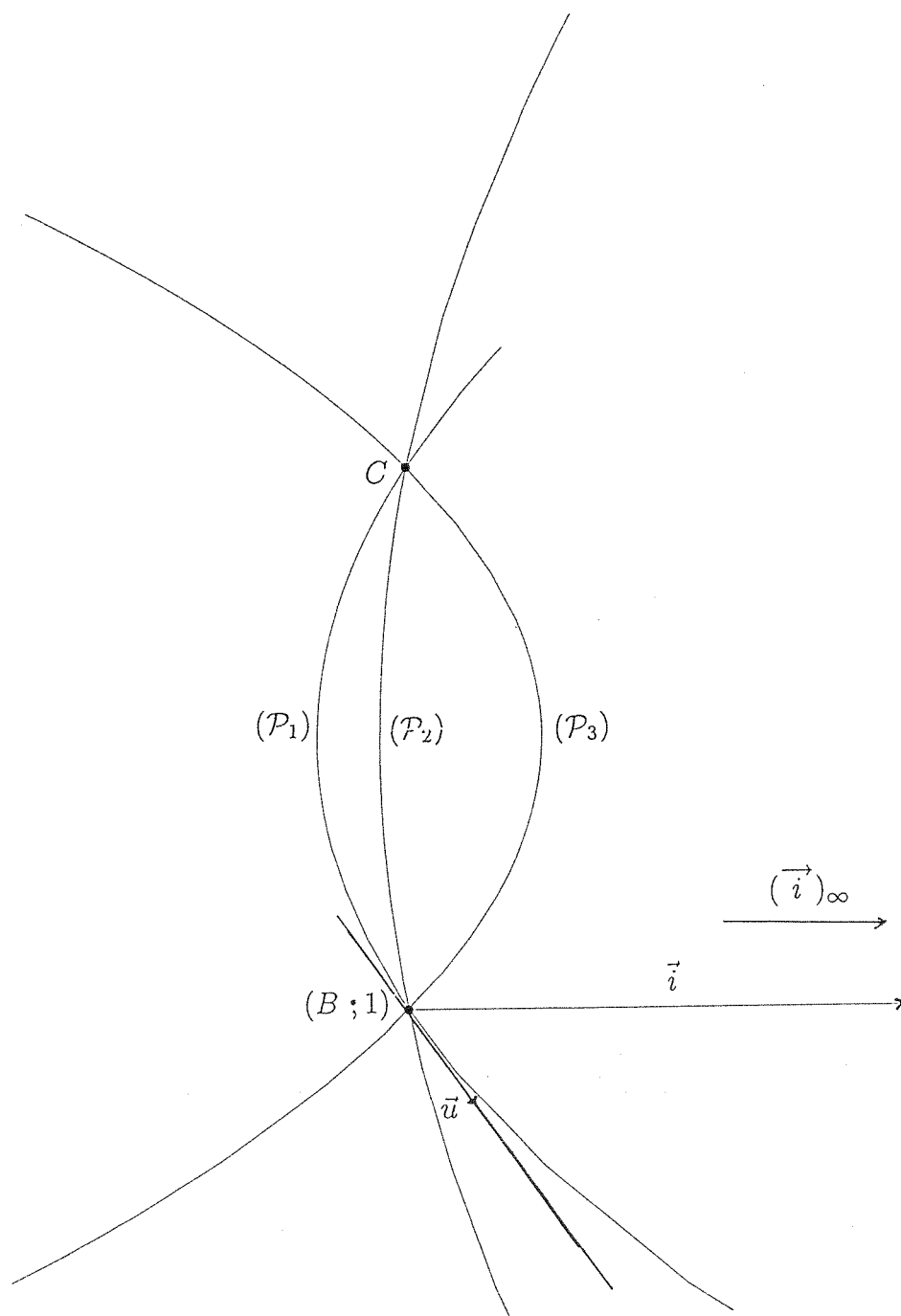


FIG. 4.7 - Forme (BR) du faisceau des coniques (paraboles) passant par deux points à distance finie, et tangentes à la droite de l'infini au point défini par la direction \vec{i} .

Chapitre 5

Faisceaux de coniques (BR) passant par quatre points

Ce chapitre établit une forme (BR) d'un faisceau de coniques passant par quatre points du plan (Berger, 1990 [22]). Nous utilisons le dernier résultat de la partie précédente donnant la seule conique (BR) du faisceau défini par trois points et une tangente et passant par un point fixe du plan à distance finie ou non. La forme (BR) du faisceau de coniques passant par quatre points est une liste de trois vecteurs massiques tels que les Π - projections du premier et du troisième vecteur massique sont deux des quatre points. Le paramètre choisi est ici la pente de la tangente en un des deux points évoqués. Le second vecteur massique est fonction du paramètre qu'il s'agisse d'un point pondéré (cas général) ou d'un vecteur pur (cas particulier).

Proposition 5.1 Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan non alignés trois à trois. Notons \mathcal{F}^* le faisceau des coniques propres passant par ces quatre points.

(i) Si A, B, C, D sont à distance finie. Définissons (x_0, y_0) où $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, x_0 + y_0 - 1 \neq 0$ les coordonnées du point D dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Considérons un vecteur $\vec{i} = (1, m)$ avec $m \notin \{0, \frac{y_0}{x_0}, -1\}$ dans ce repère. Ce vecteur dirige la tangente en A à une conique propre du faisceau. Une représentation (BR) du faisceau \mathcal{F}^* est alors :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; a_1), (B; b)]$$

avec $\lambda = \frac{mx_0y_0}{d}, d = (m - mx_0 + y_0)(mx_0 - y_0) + y_0^2(1 + m) \neq 0,$

$a_1 = \frac{1}{2} \frac{|d|}{\sqrt{|mx_0y_0(mx_0y_0 + m^2x_0y_0 - d)|}}, b = \text{sgn}(mx_0y_0(mx_0y_0 + m^2x_0y_0 - d))$ et

$$BR[(A; 1), \frac{\vec{i}}{2\sqrt{|m+1|}}, (B; \text{sgn}(-m-1))] \quad (d = 0)$$

(ii) Si A, B, C sont à distance finie, D est à l'infini dans la direction de \vec{u} . Définissons (x_0, y_0) où $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, x_0 + y_0 \neq 0$ les coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Considérons un vecteur $\vec{i} = (1, m)$ avec $m \notin \{0, \frac{y_0}{x_0}, -1\}$ dans ce repère. Ce vecteur dirige la tangente en A à une conique du faisceau. Une représentation (BR) du faisceau \mathcal{F}^* est alors :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; a_1), b\vec{u}]$$

avec $\lambda = \frac{-x_0y_0}{y_0^2 + mx_0^2}, y_0^2 + mx_0^2 \neq 0, a_1 = \frac{1}{2} \frac{|y_0^2 + mx_0^2|}{\sqrt{|mx_0y_0(x_0 - y_0)|}}, b = \text{sgn}(mx_0y_0(x_0 - y_0))$ et

$$BR[(A; 1), \frac{y_0}{2} \sqrt{\left| \frac{y_0 - mx_0}{m} \right|} \vec{i}, \text{sgn}(m(mx_0 - y_0))\vec{u}] \quad (y_0^2 + mx_0^2 = 0)$$

(iii) Si A, B sont à distance finie, C, D sont à l'infini dans les directions respectives de \vec{u} et \vec{v} . Définissons (x_0, y_0) où $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$, les coordonnées du point B dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$. Considérons un vecteur $\vec{i} = (1, m)$ avec $m \notin \{0, \frac{y_0}{x_0}\}$ dans ce repère. Ce vecteur dirige la tangente en A à une conique du faisceau. Une représentation (BR) du faisceau \mathcal{F}^* est alors :

$$BR[(A; 1), (A + \lambda \vec{i}; \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}), \text{sgn}(\lambda)\vec{u}]$$

avec $\lambda = \frac{x_0y_0}{mx_0 - y_0}.$

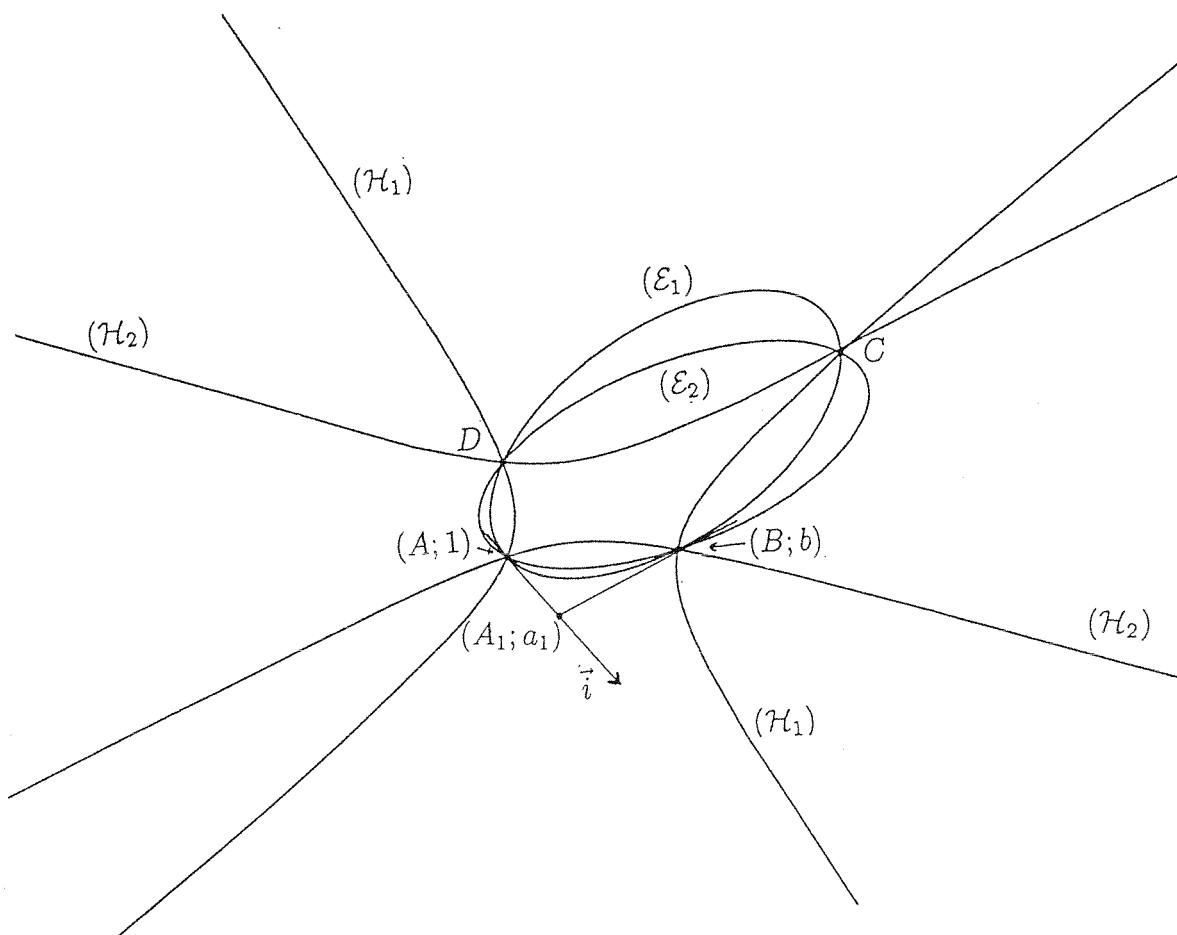


FIG. 5.1 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par quatre points à distance finie.

Preuve : (i) (figure 5.1) Considérons une conique propre du faisceau. Sa tangente en A a pour direction le vecteur \vec{i} . L'expression (BR) de cette conique est obtenue grâce à la proposition 4.3(i),

(ii) (figure 5.2) Considérons une conique propre du faisceau. Sa tangente en A a pour direction le vecteur \vec{i} . L'expression (BR) de cette conique est obtenue grâce à la proposition 4.3(ii) c'est à dire :

soit $BR[(A; 1), (A + \lambda\vec{i}; a_1), b\vec{u}]$ avec $\lambda = \frac{\alpha^2 X_0 Y_0 - \alpha\beta X_0^2}{\alpha^2 Y_0 - \beta X_0^2}$, $\alpha^2 Y_0 - \beta X_0^2 \neq 0$ et $b =$

$\text{sgn}(\lambda\beta(\lambda - \alpha))$, $a_1 = \frac{|\alpha|}{|\lambda\beta(\lambda - \alpha)|}$ ou $BR[(A; 1), \frac{|\alpha|}{2\sqrt{|\beta|}}\vec{i}, \text{sgn}(\beta)\vec{u}]$ lorsque $\alpha^2 Y_0 -$

$\beta X_0^2 = 0$

Le couple de réels (α, β) (resp. (X_0, Y_0)) désignent les coordonnées de B (resp. C)

dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{u})$. Un simple calcul donne $\alpha = \frac{y_0}{y_0 - mx_0}$, $\beta = \frac{-m}{y_0 - mx_0}$
 $X_0 = \frac{-x_0}{y_0 - mx_0}$, $Y_0 = \frac{1}{y_0 - mx_0}$, qui donnent le résultat,

(iii) (figure 5.3) Considérons une conique propre du faisceau. Sa tangente en A a pour direction le vecteur \vec{i} . L'expression (BR) de cette conique est obtenue grâce à la proposition 4.3(iii) ■

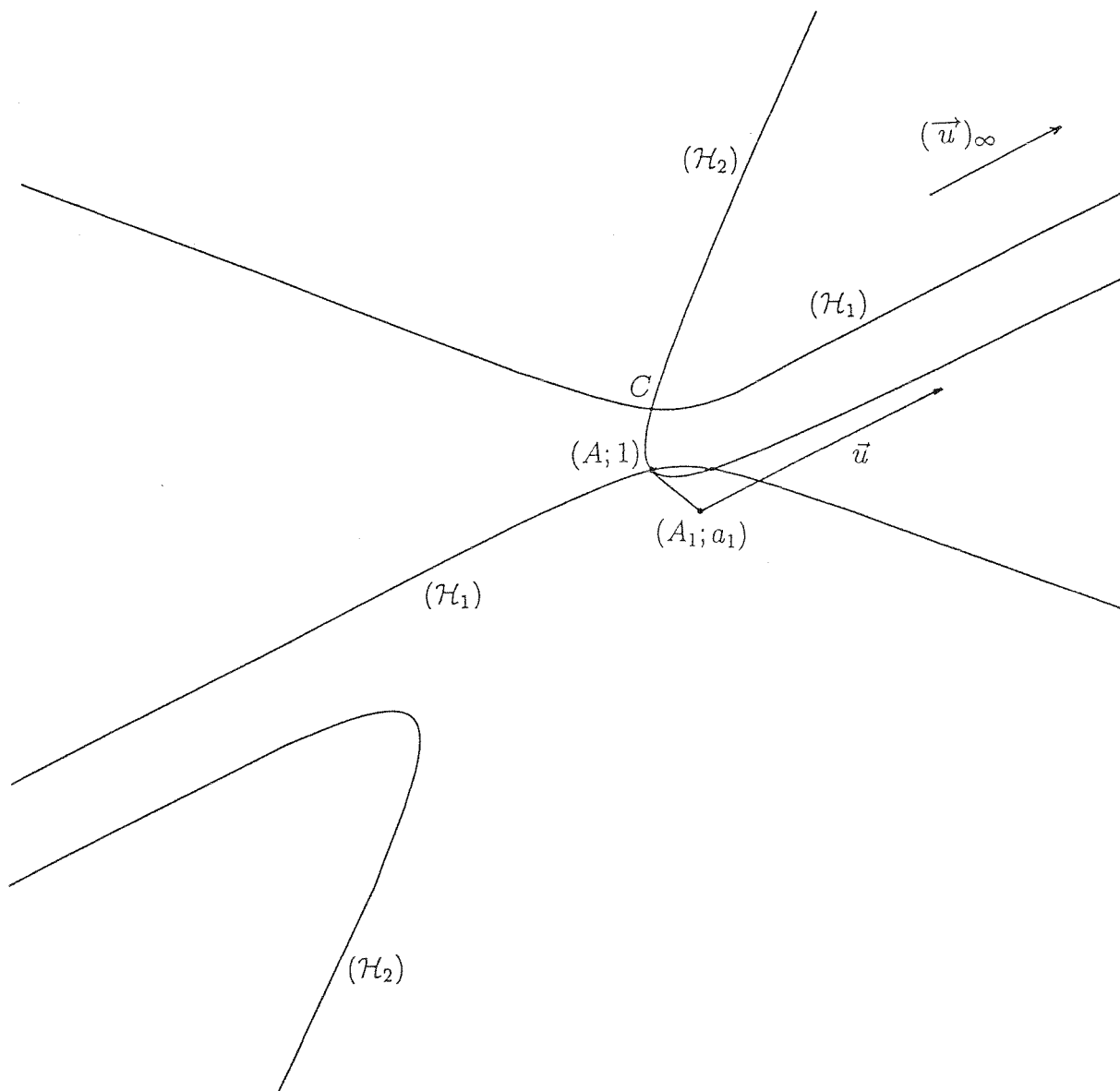


FIG. 5.2 - Forme (BR) du faisceau des coniques (hyperboles) passant par quatre points dont un à l'infini dans la direction \vec{u} .

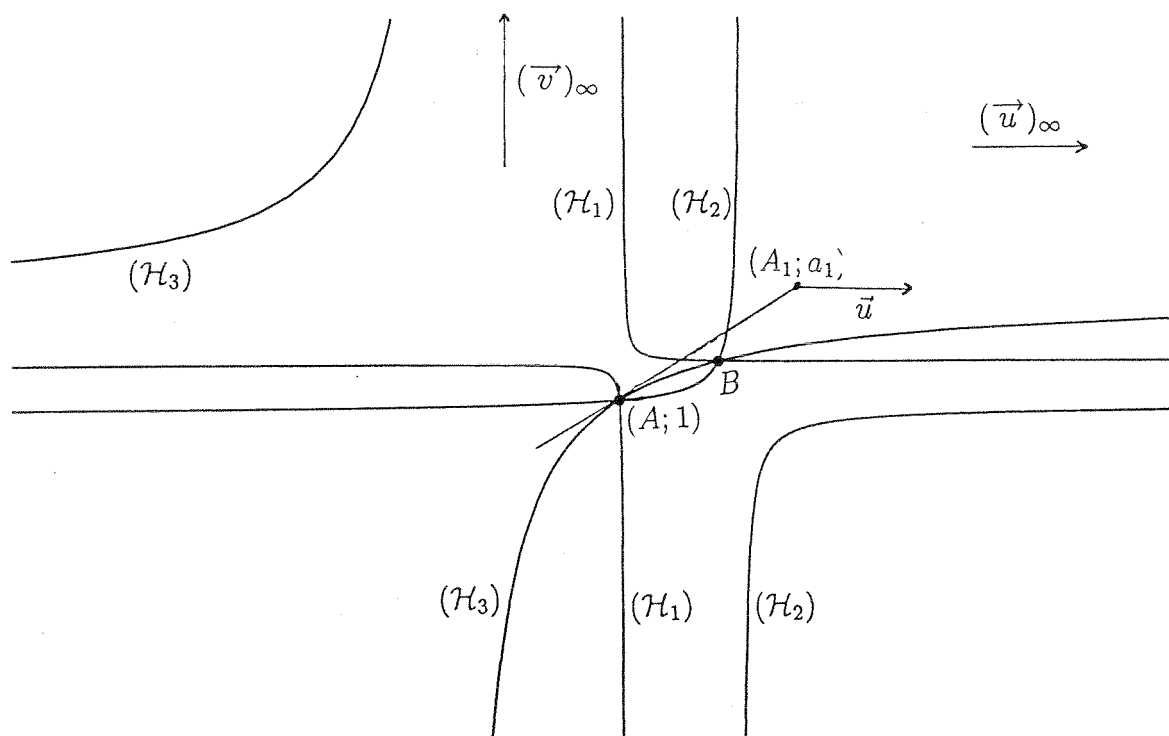


FIG. 5.3 - Forme (BR) du faisceau des coniques passant par deux points à distance finie et deux autres points situés à l'infini.

Chapitre 6

Forme (BR) d'un faisceau de coniques osculatrices

Ce chapitre propose une forme (BR) d'un faisceau de coniques osculatrices c'est-à-dire l'ensemble des coniques propres du plan, tangentes en un point donné à une droite donnée, passant par un deuxième point donné et admettant un même centre de courbure en le premier point.

La forme (BR) de ce faisceau (Bécar Fiorot, 1996 [36]) est définie par une liste de trois vecteurs massiques tels que les Π -projections du premier et du troisième vecteur massique soient les deux points donnés du faisceau. Le paramètre du faisceau est ici l'abscisse de la projection du deuxième vecteur massique situé sur la tangente. Lorsque ce point est à distance finie, la masse du second vecteur massique est d'une part inversement proportionnelle à ce paramètre et d'autre part proportionnelle à la racine carrée du rayon de courbure. Lorsque l'abscisse est infinie, le second vecteur massique est un vecteur pur dirigeant la tangente. Son module est proportionnel à la racine carrée du rayon de courbure.

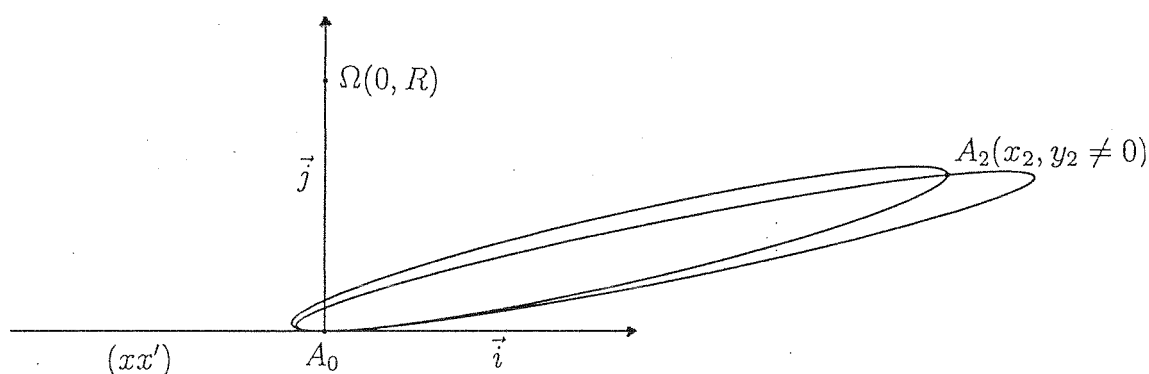


FIG. 6.1 - Coniques osculatrices dans un repère orthonormé.

6.1 Définition

Un faisceau linéaire de coniques osculatrices est défini comme l'ensemble des coniques tangentes en A_0 à une droite (xx') , admettant Ω comme centre de courbure en A_0 et passant par un autre point A_2 .

6.2 Equation du faisceau

Proposition 6.1 *Considérons le repère cartésien $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$ où \vec{i} et \vec{j} sont des vecteurs orthonormés portés par l'axe (xx') et $\overrightarrow{A_0\Omega}$. L'équation générale du faisceau linéaire de coniques tangentes en A_0 à (xx') , et de même centre de courbure $\Omega(0, R)$ (coniques osculatrices en A_0) et passant par un point $A_2(x_2, y_2)$ où $y_2 \neq 0$, est donnée par :*

$$a \left(x^2 - 2Ry - y^2 \left(\frac{x_2^2 - 2Ry_2}{y_2^2} \right) \right) + 2b \left(xy - y^2 \frac{x_2}{y_2} \right) = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

Preuve : (figure 6.1) L' équation générale des coniques (propres) est de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (\Gamma)$$

$A_0 \in \Gamma \implies f = 0$.

(xx') est tangente en A_0 à $\Gamma \implies ax^2 + 2dx = 0$ a une racine double $x = 0$ d'où $d = 0$

L'équation précédente devient $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$, où c et a sont différents de 0 sinon Γ est réduite à deux droites.

Explicitons y : $cy^2 + 2y(bx + e) + ax^2 = 0$. Supposons $c \neq 0$, il vient

$$y = \frac{1}{c}(-bx - e \pm (b^2x^2 + e^2 + 2bex - acx^2)^{1/2})$$

Nous prenons la détermination avec le signe + (il faut $y(0) = 0$)

$$y = \frac{1}{c}(-bx - e + (1 + \frac{2bx}{e} + x^2(\frac{b^2 - ac}{e^2}))^{1/2}) \quad (6.1)$$

Un développement limité à l'ordre 2 donne $y = -\frac{a}{2e}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Exprimons que Ω est centre de courbure en A_0 .

Pour cela considérons un cercle qui est tangent en A_0 à l'axe $x'x$ et qui passe par un point voisin de la courbe (6.1) à savoir le point de coordonnées $(x, -\frac{a}{2e}x^2 + x^2\varepsilon(x))$.

Si μ est l'ordonnée du centre du cercle celui-ci a pour équation :

$$x^2 + (-\frac{a}{2e}x^2 + x^2\varepsilon(x) - \mu)^2 = \mu^2.$$

La limite de μ lorsque $x \rightarrow 0$ définit le centre de courbure nous trouvons $\mu = -\frac{e}{a}$.

Le point $\Omega(0, R)$ sera centre de courbure si $e = -aR$.

Si $c = 0$, alors $y = \frac{-ax^2}{2(bx + e)}$, un développement à l'ordre 2 nous donne aussi la même

valeur principale: $y = -\frac{a}{2e}x^2 + x^2\varepsilon'(x)$ avec $\varepsilon'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. L'équation des coniques tangentes à $(x'x)$ en A_0 et ayant $\Omega(0, R)$ comme centre de courbure en A_0 est: $cy^2 + 2y(bx - aR) + ax^2 = 0$ ($a \neq 0$) ou

$$a(x^2 - 2Ry) + 2bxy + cy^2 = 0. \quad (6.2)$$

Exprimons maintenant que $A_2(x_2, y_2)$ appartient aux coniques (6.2) nous obtenons :

$$c = -\frac{1}{y_2^2}(a(x_2^2 - 2Ry_2) + 2bx_2y_2) \quad y_2 \neq 0.$$

Reportons la valeur de c dans (6.2) :

$$a(x^2 - 2Ry) + 2bxy - \frac{y^2}{y_2^2}(a(x_2^2 - 2Ry_2) + 2bx_2y_2) = 0.$$

$$a(x^2 - 2Ry - \frac{y^2}{y_2^2}(x_2^2 - 2Ry_2)) + 2b(xy - y^2\frac{x_2}{y_2}) = 0, \quad a \neq 0, \quad y_2 \neq 0. \quad (6.3)$$

(6.3) est l'équation du faisceau linéaire de coniques osculatrices en A_0 passant par A_2 . Les coniques de base du faisceau sont la conique $x^2 - 2Ry - \frac{y^2}{y_2^2}(x_2^2 - 2Ry_2) = 0$ et la conique dégénérée $y(x - y\frac{x_2}{y_2}) = 0$ (droites (xx') et (A_0A_2)).

Réciproquement étant donnée une conique dégénérée en deux droites sécantes en A_0 dont l'une est (xx') et une conique propre tangente en A_0 à (xx') , le faisceau engendré par ces deux coniques est composé de coniques osculatrices en A_0 .

Soit $y(x - my) = 0$ (ou $y(mx - y) = 0$ et $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$ (avec a et e différents de 0) la conique propre tangente en A_0 à (xx') , l'équation du faisceau s'écrit : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey + \gamma(xy - my^2) = 0$ ou encore $ax^2 + (2b + \gamma)xy + (c - \gamma m)y^2 + 2ey = 0$.

D'après la première partie nous savons que toutes ces coniques admettent même centre de courbure $(0, -\frac{e}{a})$. Elles sont osculatrices en A_0 . ■

6.3 Correspondance biunivoque entre une conique du faisceau et la trace sur (xx') de sa tangente en A_2 .

L'équation de la tangente en A_2 à une conique du faisceau (6.3) est :

$$x(ax_2 + by_2) + y(\frac{ax_2^2}{y_2} - 2aR + 2bx_2) - aRy_2 = 0 \quad (a \neq 0, y_2 \neq 0),$$

son intersection avec l'axe (xx') est le point $A_1(x_1, 0)$ où $x_1 = \frac{aRy_2}{ax_2 + by_2} (= \frac{Ry_2}{x_2 + \frac{b}{a}y_2})$.

Il y a donc une correspondance biunivoque (homographie) entre une conique du faisceau (définie par (a, b) ou $\frac{b}{a}$) et l'intersection A_1 de sa tangente en A_2 avec l'axe (xx') - $\{A_0\}$.

Si nous notons \mathcal{F}^* l'ensemble des coniques propres (dites osculatrices) du faisceau ($a \neq 0$) alors il existe une bijection de \mathcal{F}^* sur $\tilde{\mathbb{R}} - \{0\} : \Gamma \rightarrow x_1$ (abscisse de A_1).

Remarquons que les propriétés ci-dessus sont également vraies dans le cas particulier où le point A_2 est à l'infini dans la direction (x_2, y_2) ($y_2 \neq 0$) auquel cas le faisceau est un faisceau d'hyperboles (avec une parabole). Pour s'en convaincre il suffit d'écrire

le faisceau (6.3) en coordonnées homogènes cartésiennes : en notant (X, Y, T) les coordonnées d'un point courant, resp. (X_2, Y_2, T_2) celles de A_2 relativement au repère projectif cartésien $((\vec{i})_\infty, (\vec{j})_\infty, A_0, A_0 + \vec{i} + \vec{j})$ nous obtenons :

$$aX^2 + 2bXY - Y^2\left(2b\frac{X_2}{Y_2} + a\frac{X_2^2}{Y_2^2} - 2aR\frac{T_2}{Y_2}\right) - 2aRYT = 0 \quad (6.4)$$

Si A_2 est à l'infini ($T_2 = 0$) le faisceau des coniques osculatrices en A_0 et passant par le point A_2 à l'infini dans la direction $(X_2, Y_2, 0)$ s'écrit :

$$aX^2 + 2bXY - Y^2\left(2b\frac{X_2}{Y_2} + a\frac{X_2^2}{Y_2^2}\right) - 2aRYT = 0, \quad a \neq 0, Y_2 \neq 0 \quad (6.5)$$

et le point d'intersection $A_1(X_1, Y_1, T_1)$ de la tangente en $A_2(X_2, Y_2, 0)$ avec l'axe (xx') est toujours donné par : $X_1 = \frac{aRY_2}{aX_2 + bY_2}T_1$ ie $x_1 = \frac{aRy_2}{ax_2 + by_2} (= \frac{Ry_2}{x_2 + \frac{b}{a}y_2})$.

La parabole du faisceau est obtenue pour le couple $(a, b) = (Y_2, -X_2)$, la tangente en A_2 est la droite de l'infini ($x_1 = \infty$). Dans le cas contraire, la droite (A_1, A_2) est une asymptote à l'hyperbole du faisceau définie par (a, b) .

6.4 Forme réduite des courbes (BR) définies avec trois vecteurs massiques linéairement indépendants.

Proposition 6.2 Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ trois vecteurs massiques linéairement indépendants tels que $\alpha_0 = (A_0; a_0)$, $\alpha_2 = (A_2; a_2)$.

(i) Si $a_0a_2 > 0$ alors il existe un changement de paramètre homographique h tel que $BR[(A_0; a_0), \alpha_1, (A_2; a_2)] \circ h = BR[(A_0; 1), (a_0a_2)^{1/2}\alpha_1, (A_2; 1)]$.

(ii) Si $a_0a_2 < 0$, nous pouvons supposer $a_0 > 0$ et $a_2 < 0$ alors il existe un c.p.h. tel que $BR[(A_0; a_0), \alpha_1, (A_2; a_2)] \circ h = BR[(A_0; 1), (-a_0a_2)^{1/2}, \alpha_1, (A_2; -1)]$.

(iii) Les vecteurs massiques $(A_0; 1), \alpha_1, (A_2; 1)$ ainsi que $(A_0; 1), \theta_1, (A_2; -1)$ étant linéairement indépendants, il n'est pas possible d'écrire $BR[(A_0; 1), \alpha_1, (A_2; 1)]$ sous la forme $BR[(A_0; 1), \theta_1, (A_2; -1)]$

(iv) Les vecteurs massiques $(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; 1)$ étant linéairement indépendants, il n'est pas possible d'écrire $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; 1)]$ sous la forme $BR[(A_0; 1), \vec{U}, (A_2; 1)]$ ou $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; -1)]$ sous la forme $BR[(A_0; 1), \vec{U}, (A_2; -1)]$

Preuve : (i) Si $a_0 < 0$ et $a_2 < 0$ nous redéfinissons la conique avec un premier et un troisième point pondéré de masse positive d'après la relation $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] =$

$BR[-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2]$.

Donc considérons alors le cas $a_0 > 0$ et $a_2 > 0$ et définissons $h(u) = \frac{a_2^{-1/2}u}{a_0^{-1/2}(1-u) + a_2^{-1/2}u}$ nous avons d'après le corollaire 2.1 :

$$BR[(A_0; a_0), \alpha_1, (A_2; a_2)] \circ h = BR[(A_0; 1), (a_0 a_2)^{1/2} \alpha_1, (A_2; 1)]$$

(ii) Soit $h(u) = \frac{(-a_2)^{-1/2}u}{a_0^{-1/2}(1-u) + (-a_2)^{-1/2}u}$ d'où le résultat d'après le corollaire 2.1

(iii) S'il existe h un c.p.h. satisfaisant la proposition 2.4 nous aurions $1 = \lambda(c-a)^2$ et $-1 = \lambda b^2$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ce qui est impossible.

(iv) S'il existe h un c.p.h. satisfaisant la proposition 2.4 nous aurions $1 = \lambda b^2 = \lambda c^2$ et $\lambda b c a_1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ce qui est impossible ($a_1 \neq 0$).

■

Définition Nous appelons les quatre formes :

$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; 1)]$, $BR[(A_0; 1), \vec{U}, (A_2; 1)]$, $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; -1)]$, $BR[(A_0; 1), \vec{U}, (A_2; -1)]$, formes réduites indépendantes. (le premier et le troisième vecteur massique sont des points pondérés de même masse égale à 1 ou de masse égale à 1 et -1).

6.5 Forme (BR) du faisceau de coniques osculatrices

D'après l'étude précédente nous voulons déterminer trois vecteurs massiques linéairement indépendants $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que :

$\Pi(\alpha_0) = A_0$ (fixé)

$\Pi(\alpha_1) = A_1$ (point variable sur $(xx') - \{A_0\}$, éventuellement à l'infini).

$\Pi(\alpha_2) = A_2$ (point fixé du plan, $\notin (xx')$, éventuellement à l'infini).

$|BR[\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2]|$ admet Ω comme centre de courbure en A_0 .

Avec ces conditions $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ sont les coniques tangentes en A_0 à (xx') , de centre de courbure Ω en A_0 et passant par A_2 . C'est le faisceau des coniques propres osculatrices en A_0 . Rappelons que $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, y_2)$, $y_2 \neq 0$ sont les coordonnées de A_1, A_2 dans le repère $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 6.3 Soit A_0 un point d'un axe (xx') . $\Omega \notin (xx')$ tel que $A_0 \Omega$ soit orthogonal à (xx') . Considérons le repère orthonormé $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$ tel que Ω ait pour coordonnées $(0, R)$ avec $R > 0$ et A_1 un point de coordonnées $(x_1, 0)$ dans le cas où il est à distance finie. Le faisceau des coniques osculatrices en A_0 , ayant Ω comme centre de courbure et passant par un point A_2 de coordonnées $(x_2, y_2 \neq 0)$ quand il est à distance finie, a la représentation (BR) suivante.

1. Dans le cas où A_2 est à distance finie, suivant la position de A_2 (signe de y_2)

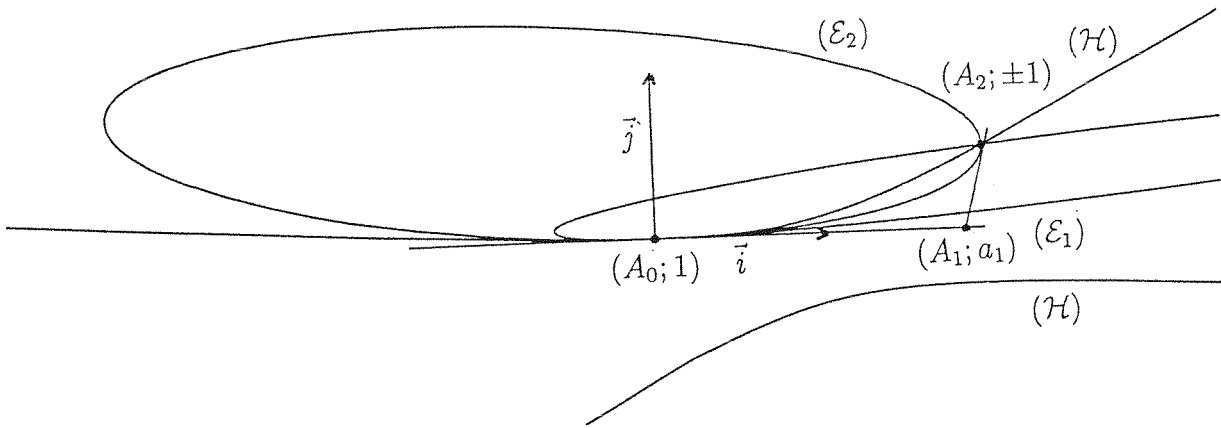


FIG. 6.2 - Forme (BR) du faisceau des coniques osculatrices passant par un point à distance finie situé dans un même demi-plan que le centre de courbure.

nous obtenons :

(i) $y_2 > 0$: $BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{Ry_2}{2})^{1/2}), (A_2; 1)]$, $x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ et

$BR[(A_0; 1), (\frac{Ry_2}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; 1)]$,

(ii) $y_2 < 0$: $BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{-Ry_2}{2})^{1/2}), (A_2; -1)]$, $x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ et

$BR[(A_0; 1), (\frac{-Ry_2}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; -1)]$,

2. Dans le cas où A_2 est à l'infini dans la direction $\vec{v}(x_2, y_2)$ où nous pouvons choisir $y_2 > 0$ (x_2 de signe quelconque) :

$BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{Ry_2}{2})^{1/2}), \vec{v}]$, $x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $BR[(A_0; 1), (\frac{Ry_2}{2})^{1/2}\vec{i}, \vec{v}]$

Preuve :

1. Cas où A_2 est à distance finie dans le plan, $A_2 \notin (xx')$

Utilisons la forme réduite des coniques (BR) pour décrire ce faisceau. Supposons que $A_1(x_1, 0)$ soit à distance finie.

$$(i) \quad BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; 1)](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1 + t^2 A_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 + t^2}$$

Notons $x(t), y(t)$ les coordonnées de la courbe (BR) ci-dessus.

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1 x_1 + t^2 x_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 + t^2} \quad y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 + t^2}$$

En faisant la division suivant les puissances croissantes de t nous obtenons :

$$x(t) = 2ta_1 x_1 + t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = t^2 y_2 + t^2 \varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Nous voulons exprimer que le centre de courbure en A_0 est le point $\Omega(0, R)$. Utilisons la même technique que dans la première partie : un cercle tangent en A_0 à (xx') passant par un point voisin de la courbe $(x(t), y(t))$ et de centre $(0, \mu)$ a pour équation :

$$(2ta_1 x_1 + t\varepsilon(t))^2 + (t^2 y_2 + t^2 \varepsilon'(t) - \mu)^2 = \mu^2$$

soit encore $4t^2 a_1^2 x_1^2 - 2t^2 y_2 \mu = t^2 \varepsilon''(t)$ avec $\varepsilon''(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

La limite de μ lorsque $t \rightarrow 0$ donne la valeur commune de l'ordonnée du centre de courbure en A_0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu = \frac{2a_1^2 x_1^2}{y_2} = R$$

Il faut donc $y_2 > 0$: A_2 et Ω sont dans le même $\frac{1}{2}$ plan par rapport à (xx') . ■

Nous avons alors $a_1 = \pm \frac{1}{x_1} \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2}$, $x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$. Nous savons qu'il suffit de choisir

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2} \text{ car } |BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; 1)]|_{\mathbb{R}} = |BR[(A_0; 1), (A_1; -a_1), (A_2; 1)]|_{\mathbb{R}}$$

Précisons que les dérivées en A_0 ($t=0$) des (BR) ci-dessus valent respectivement $2a_1 \overrightarrow{A_0 A_1}$, $-2a_1 \overrightarrow{A_0 A_1}$ (proposition 4.1.1 de [8]) i.e que les coniques sont parcourues dans des sens différents. La forme (BR) des coniques est alors

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2}), (A_2; 1)], \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ et } y_2 > 0. \quad (6.6)$$

Rappelons qu'à chaque valeur de x_1 (abscisse de A_1) correspond une conique passant par A_0 et A_2 tangente à $(A_1 A_0)$ et $(A_1 A_2)$ et de centre de courbure $\Omega(0, R)$.

La forme (BR) des coniques du faisceau osculateur en A_0 dépend d'un paramètre $x_1 \neq 0$ via la masse du deuxième vecteur massique. Cette masse est une fonction homographique de x_1 . La nature des coniques est donnée par l'expression suivante :

$$\left(\chi(A_1; \frac{1}{x_1} \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2})\right)^2 - \chi(A_0; 1)\chi(A_2; 1) = \frac{Ry_2}{2x_1^2} - 1.$$

Suivant la valeur de $x_1 \neq 0$ ($Ry_2 > 0$) nous obtenons des hyperboles si $2x_1^2 < Ry_2$, deux paraboles si $x_1 = \pm \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2}$, des ellipses si $2x_1^2 > Ry_2$, dans ce dernier cas si

de plus $x_2^2 + y_2^2 = 2Ry_2$ nous obtenons un cercle auquel cas $x_1 = R \frac{y_2}{x_2}$.

Traisons le cas où A_1 est à l'infini. Il s'agit de déterminer la conique du faisceau osculateur telle que sa tangente à A_2 soit parallèle à (xx') .

Sa forme est $BR[(A_0; 1), \vec{U}, (A_2; 1)]$ ou $BR[(A_0; 1), \vec{U}, (A_2; -1)]$ avec $\vec{U} = \rho \vec{i}$.

Considérons d'abord $BR[(A_0; 1), \rho \vec{i}, (A_2; 1)]$

$$BR[(A_0; 1), \rho \vec{i}, (A_2; 1)](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + t^2 A_2}{(1-t)^2 + t^2} + \frac{2t(1-t)\rho \vec{i}}{(1-t)^2 + t^2}$$

$$\text{d'où } x(t) = \frac{t^2 x_2 + 2t(1-t)\rho}{1-2t+2t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2 y_2}{1-2t+2t^2}$$

soit

$$x(t) = 2t\rho + t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = t^2 y_2 + t^2 \varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0$$

L'équation du cercle tangent en A_0 à (xx') passant par un point voisin de la courbe $(x(t), y(t))$, de centre $(0, \mu)$ est :

$$(2t\rho + t\varepsilon(t))^2 + (t^2 y_2 + t^2 \varepsilon'(t) - \mu)^2 = \mu^2$$

$$\text{soit } 2t^2 \rho^2 - t^2 y_2 \mu = t^2 \varepsilon''(t) \quad \varepsilon''(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Lorsque $t \rightarrow 0$ nous obtenons l'abscisse du centre de courbure en A_0 .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu = \frac{2\rho^2}{y_2} = R.$$

Il faut donc $y_2 > 0$: A_2 et Ω sont dans le même demi-plan par rapport à (xx') . Par suite $\rho = \pm \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2}$.

La forme (BR) s'écrit $BR[(A_0; 1), \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2} \vec{i}, (A_2; 1)]$ ou $BR[(A_0; 1), -\left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2} \vec{i}, (A_2; 1)]$,

il s'agit de la même ellipse (la masse vaut -1) parcourue dans des sens différents.

En effet le calcul de la dérivée en $A_0(t=0)$ donne $2\left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2} \vec{i}$ pour la première

forme et $-2\left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2} \vec{i}$ pour la seconde (cf proposition 4.1.1 [8]). Nous proposons

$BR[(A_0; 1), \left(\frac{Ry_2}{2}\right)^{1/2} \vec{i}, (A_2; 1)]$ Les (BR) définies par (6.6) constituent avec cette

dernière ellipse (BR) la forme (BR) des faisceaux de coniques osculatrices en A_0 dans le cas où le centre de courbure Ω et le point A_2 sont d'un même coté par rapport à (xx') (cas $y_2 > 0$). (figure 6.2)

$$(ii) \quad BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; -1)](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1 - t^2 A_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 - t^2}$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1 x_1 - t^2 x_2}{1 + 2t(-1 + a_1) - 2t^2 a_1} \quad y(t) = \frac{-t^2 y_2}{1 + 2t(-1 + a_1) - 2t^2 a_1}$$

Soit encore $x(t) = 2ta_1 x_1 + t\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

$y(t) = -t^2y_2 + t^2\varepsilon'(t)$, $\varepsilon'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

Equation du cercle tangent en A_0 à (xx') passant par un point voisin de la courbe $(x(t), y(t))$ et de centre $(0, \mu)$:

$$(2ta_1x_1 + t\varepsilon(t))^2 + (-t^2y_2 + t^2\varepsilon'(t) - \mu)^2 = \mu^2$$

soit $4t^2a_1^2x_1^2 + 2t^2y_2\mu = t^2\varepsilon''(t)$ avec $\varepsilon''(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

Lorsque $t \rightarrow 0$ nous obtenons l'abscisse commune du centre de courbure en A_0 .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu = -\frac{2a_1^2x_1^2}{y_2} = R$$

Il faut donc $y_2 < 0$: A_2 et Ω sont de part et d'autre de l'axe (xx') . Choisissons

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \left(\frac{-Ry_2}{2} \right)^{1/2}, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

La forme (BR) des coniques est donc :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} (\frac{-Ry_2}{2})^{1/2}), (A_2; -1)], \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ et } y_2 < 0. \quad (6.7)$$

$$\left(\chi(A_1; \frac{1}{x_1} (\frac{-Ry_2}{2})^{1/2}) \right)^2 - \chi(A_0; 1)\chi(A_2; -1) = \frac{-Ry_2}{2x_1^2} + 1 > 0$$

ce sont uniquement des hyperboles.

Considérons maintenant $BR[(A_0; 1), \rho\vec{i}, (A_2; -1)]$ (A_1 est à l'infini)

$$BR[(A_0; 1), \rho\vec{i}, (A_2; -1)](t) = \frac{(1-t)^2A_0 - t^2A_2}{(1-t)^2 - t^2} + \frac{2t(1-t)\rho\vec{i}}{(1-t)^2 - t^2}$$

$$\text{d'où } x(t) = \frac{-t^2x_2 + 2t(1-t)\rho}{1-2t}, \quad y(t) = \frac{-t^2y_2}{1-2t}$$

soit $x(t) = 2t\rho + t\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

$y(t) = -t^2y_2 + t^2\varepsilon'(t)$, $\varepsilon'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

En procédant comme précédemment nous trouvons que le rayon de courbure R en

$$A_0 \text{ vaut } R = -\frac{2\rho^2}{y_2}.$$

Il faut donc $y_2 < 0$: A_2 et Ω sont de part et d'autre de l'axe (xx') . Par suite

$$\rho = \pm \left(\frac{-Ry_2}{2} \right)^{1/2}.$$

La forme (BR) s'écrit $BR[(A_0; 1), (\frac{-Ry_2}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; -1)]$ ou

$BR[(A_0; 1), -(\frac{-Ry_2}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; -1)]$ il s'agit de la même hyperbole (la masse vaut

+1) parcourue dans des sens différents : les dérivées en $A_0(t=0)$ valent respectivement

$$2\left(\frac{-Ry_2}{2}\right)^{1/2}\vec{i} \text{ et } -2\left(\frac{-Ry_2}{2}\right)^{1/2}\vec{i}. \text{ Nous proposons } BR[(A_0; 1), \left(\frac{-Ry_2}{2}\right)^{1/2}\vec{i}, (A_2; -1)].$$

Les (BR) définies par 6.7 constituent avec cette dernière hyperbole (BR) la forme

(BR) des faisceaux de coniques osculatrices en A_0 dans le cas où le centre de courbure

Ω et le point A_2 sont de part et d'autre de l'axe (xx') (cas $y_2 < 0$). (figure 6.3)

2) cas où A_2 est à l'infini dans la direction $\vec{v}(x_2, y_2)y_2 \neq 0$ (figure 6.4)

Déterminons le faisceau sous la forme $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{v}] A_1(x_1, 0)$ où \vec{v} a pour coordonnées (x_2, y_2) avec $y_2 \neq 0$ ($y_2 = 0$ est impossible car alors les coniques auraient trois points alignés : le contact en A_0 et le point à l'infini sur (xx')). Nous pouvons prendre $y_2 > 0$ car x_2 est de signe quelconque.

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{v}](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} + \frac{t^2 \vec{v}}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1}.$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1 x_1 + t^2 x_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} = 2ta_1 x_1 + t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} = t^2 y_2 + t^2 \varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

En procédant comme précédemment : la détermination de la limite (lorsque $t \rightarrow 0$) du cercle tangent à (xx') en A_0 et passant par un point voisin situé sur la courbe ($x(t), y(t)$) nous fournit une relation liant le rayon de courbure et les paramètres

$$a_1, x_1, y_2 : R = \frac{2a_1^2 x_1^2}{y_2}$$

$$\text{Comme } y_2 > 0 : a_1 = \frac{1}{x_1} \left(\frac{Ry_2}{2} \right)^{1/2}.$$

La forme (BR) du faisceau osculateur privé de la conique dont la tangente à A_2 est la droite de l'infini (la parabole) est :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} (\frac{Ry_2}{2})^{1/2}), \vec{v}], \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (6.8)$$

où \vec{v} est fixé : $\vec{v} = (x_2, y_2)$ avec $y_2 > 0$ est la direction du point A_2 à l'infini.

$$\left(\chi(A_1; \frac{1}{x_1} (\frac{Ry_2}{2})^{1/2}) \right)^2 - \chi(A_0; 1) \chi(\vec{v}) = \frac{1}{x_1^2} \frac{Ry_2}{2},$$

ce sont toutes des hyperboles.

Il reste à déterminer la (BR) qui correspond à A_1 à l'infini (la tangente à A_2 est la droite de l'infini). Elle est de la forme (cf 5.1.5.4 de [8])

$$BR[(A_0; 1), \rho \vec{i}, \vec{v}](t) = A_0 + \frac{2t(1-t)\rho \vec{i} + t^2 \vec{v}}{(1-t)^2}$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)\rho + t^2 x_2}{(1-t)^2} = 2t\rho + t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = \frac{t^2 y_2}{(1-t)^2} = t^2 y_2 + t^2 \varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

Après un calcul (cf précédemment) nous déduisons la relation entre R le rayon de courbure en A_0 et les paramètres y_2 et ρ : $R = \frac{2\rho^2}{y_2}$ comme $y_2 > 0$: $\rho = \left(\frac{Ry_2}{2} \right)^{1/2}$.

La parabole (BR) suivante $BR[(A_0; 1), (\frac{Ry_2}{2})^{1/2} \vec{i}, \vec{v}]$ et les (BR) définies par 6.8

constituent avec cette dernière parabole la forme (BR) du faisceau des coniques osculatrices en A_0 dans le cas où le point A_2 est à l'infini dans la direction $\vec{v} = (x_2, y_2 \neq 0)$ où $y_2 > 0$.

Remarquons que dans le cas où A_2 est à l'infini dans la direction de \vec{j} (i.e. $x_2 = 0$) la parabole du faisceau admet (A_0, \vec{j}) comme axe de symétrie.

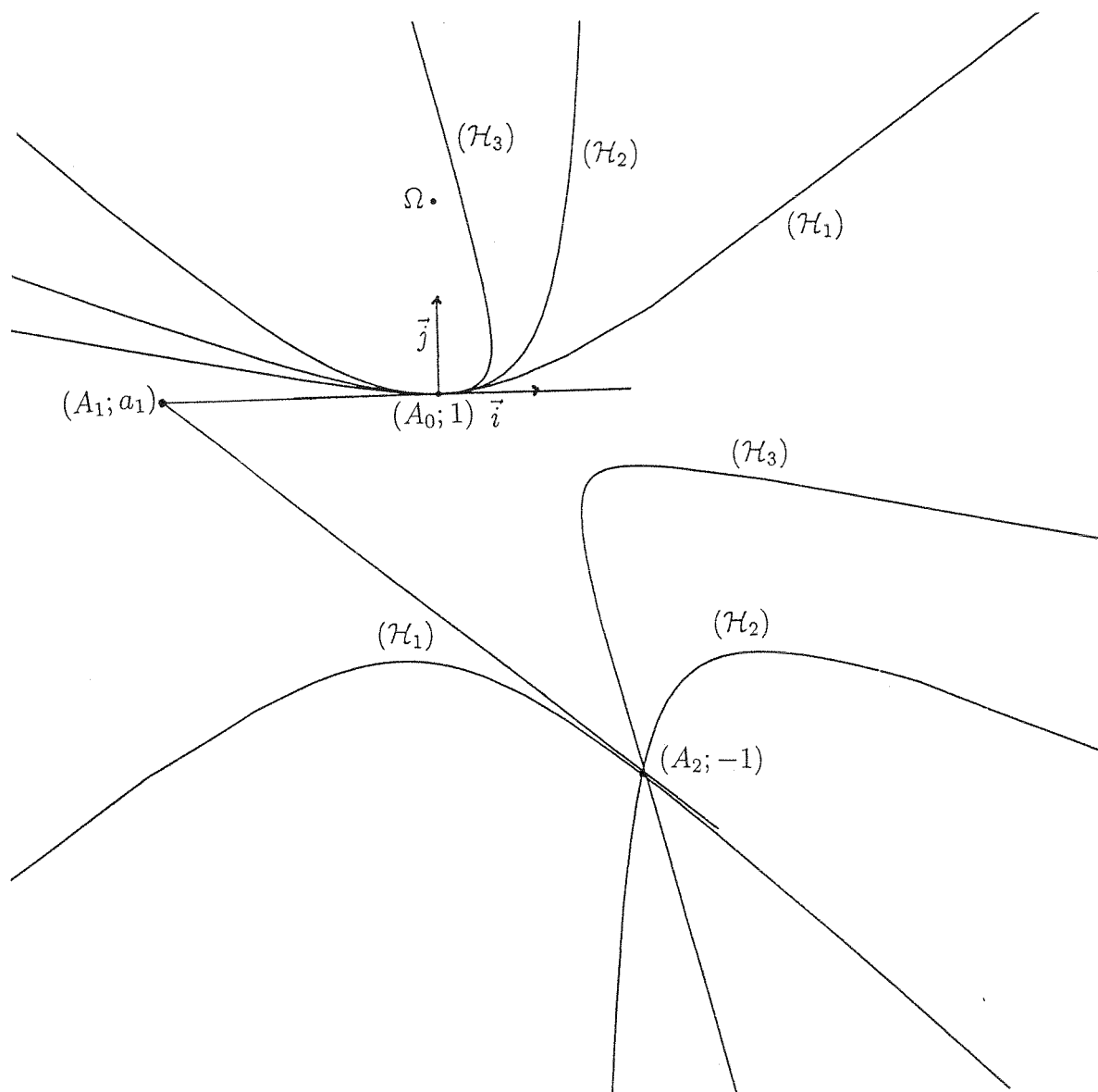


FIG. 6.3 - Forme (BR) du faisceau des coniques osculatrices passant par un point à distance finie non situé dans le même demi-plan que le centre de courbure.

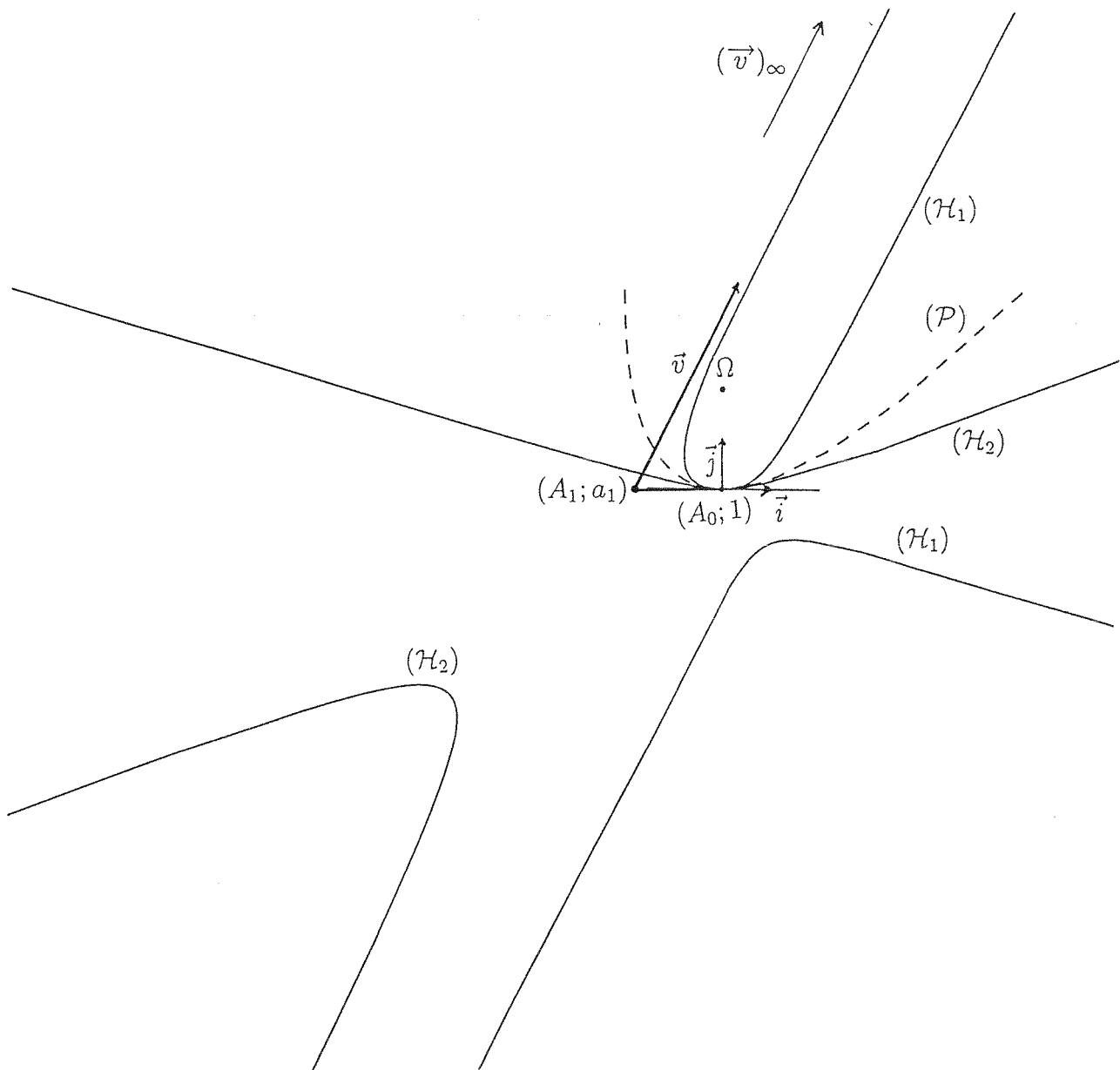


FIG. 6.4 - Forme (BR) du faisceau des coniques osculatrices passant par un point à l'infini.

Chapitre 7

Forme (BR) d'un faisceau de coniques surosculatrices.

Ce chapitre décrit une forme (BR) d'un faisceau de coniques surosculatrices c'est-à-dire l'ensemble des coniques propres du plan, tangentes en un point donné à une droite donnée, de même centre de courbure en ce point et admettant une même droite comme polaire d'un point fixe de la tangente. Ce point peut-être éventuellement à l'infini.

La forme (BR) de ce faisceau est définie par une liste de trois vecteurs massiques. La Π -projection du premier vecteur massique de la liste est le point de contact. Le deuxième vecteur massique est soit un point pondéré soit un vecteur pur. Lorsqu'il s'agit d'un point pondéré, sa Π -projection est le point fixé sur la tangente. Lorsqu'il s'agit d'un vecteur pur, celui-ci dirige la tangente. Le troisième vecteur massique est soit un point pondéré soit un vecteur pur. Lorsqu'il s'agit d'un point pondéré, sa Π -projection est le point mobile sur la polaire. Lorsqu'il s'agit d'un vecteur pur, il est alors un vecteur directeur de la polaire.

L'abscisse du point mobile sur la polaire, constitue le paramètre du faisceau. Ce paramètre figure dans la masse du second vecteur massique s'il s'agit d'un point pondéré ou dans son module si celui-ci est un vecteur pur.

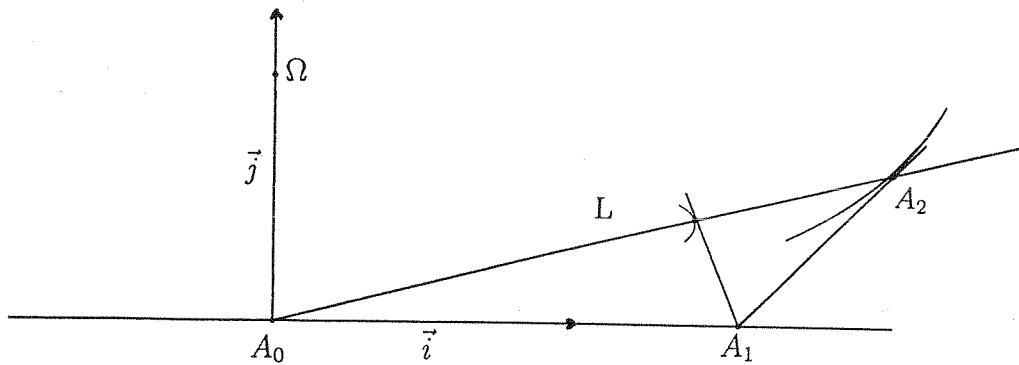


FIG. 7.1 - Coniques surosculatrices dans un repère orthonormé.

7.1 Equation cartésienne d'un faisceau de coniques surosculatrices.

Définition Un faisceau de coniques surosculatrices est défini comme l'ensemble des coniques tangentes en A_0 à une droite (xx') , admettant $\Omega(0, R)$ comme centre de courbure en A_0 et une droite L passant par A_0 , différente de (xx') comme polaire d'un point A_1 de (xx') .

Proposition 7.1 *Considérons le repère cartésien $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$ où \vec{i} et \vec{j} sont des vecteurs orthonormés portés par l'axe (xx') et $\overline{A_0\Omega}$. L'équation générale du faisceau linéaire de coniques tangentes en A_0 à (xx') , de centre de courbure $\Omega(0, R)$ et ayant une droite L passant par A_0 comme polaire d'un point $A_1(X_1, 0, T_1)$ (coniques surosculatrices en A_0) est donnée par :*

$$a(X_1X^2 + 2XY(RT_1 - \alpha X_1) - 2X_1RYT) + cX_1Y^2 = 0 \quad a \neq 0$$

où L est définie par $X - \alpha Y = 0, \alpha \neq 0$.

Preuve : L'équation générale des coniques (propres) tangentes à (xx') en A_0 et admettant $\Omega(0, R)$ comme centre de courbure est (cf (6.2) partie précédente)(figure 7.1)

$$a(X^2 - 2RYT) + 2bXY + cY^2 = 0 \quad (a \neq 0) \quad (7.1)$$

La polaire de $A_1(X_1, 0, T_1)$ par rapport aux coniques est :

$$X(aX_1) + Y(bX_1 - aRT_1) = 0$$

Ecrivons que c'est la droite $L: X - \alpha Y = 0$ d'où la relation entre a et b :

$$a(\alpha X_1 - RT_1) + bX_1 = 0 \quad (7.2)$$

Alors d'après (7.1) et (7.2), l'équation du faisceau des coniques surosculatrices s'écrit:

$$a[X_1X^2 + 2XY(RT_1 - \alpha X_1) - 2X_1RYT] + cX_1Y^2 = 0, \quad a \neq 0$$

Les coniques de base du faisceau sont la conique $X_1X^2 + 2XY(RT_1 - \alpha X_1) - 2X_1RYT = 0$ et la conique dégénérée: la droite double $Y = 0$.

Si nous cherchons l'intersection de deux coniques différentes du faisceau correspondant à $c_1 \neq c_2$ (a est pris égale à 1) nous résolvons le système:

$$X_1X^2 + 2XY(RT_1 - \alpha X_1) - 2X_1RYT + c_1X_1Y^2 = 0$$

$$X_1X^2 + 2XY(RT_1 - \alpha X_1) - 2X_1RYT + c_2X_1Y^2 = 0$$

Par soustraction nous obtenons:

$$X_1(c_1 - c_2)Y^2 = 0$$

D'où $Y^2 = 0$ et $X^2 = 0$: A_0 est un point d'ordre 4, les coniques sont bien surosculatrices.

Réciproquement soit le faisceau défini par une conique tangente en A_0 à (xx') : $aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2eYT = 0$ (a, b, c sont fixés) et la droite double $Y^2 = 0$. Il s'écrit:

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2eYT + \gamma Y^2 = 0$$

Alors d'après une étude précédente nous savons que toutes ces coniques ont même centre de courbure $\Omega(0, R = -\frac{e}{a})$.

Un point quelconque $A_1(X_1, 0, T_1)$ de (xx') a même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau. En effet cette polaire s'écrit $aX_1X + (bX_1 + eT_1)Y = 0$ (indépendante de γ). L'intersection A_2 autre que A_0 de la polaire L avec les coniques du faisceau est:

$$X = 2\alpha X_1R$$

$$Y = 2X_1R$$

$$T = -X_1\alpha^2 + 2\alpha RT_1 + \frac{c}{a}X_1$$

Il existe donc une bijection entre \mathcal{F}^* ensemble des conique propres du faisceau (la droite double $Y^2 = 0$ exclue) et tout point A_2 de $L - \{A_0\}$.

La donnée de $A_2 \in L - \{A_0\}$ détermine donc une conique surosculatrice et la tangente à cette conique en A_2 est alors la droite (A_1A_2) . ■

7.2 Forme (BR) d'un faisceau de coniques surosculatrices

D'après l'étude précédente nous avons à déterminer trois vecteurs massiques linéairement indépendants $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que:

$\Pi(\alpha_0) = A_0$ (fixé)

$\Pi(\alpha_1) = A_1$ (fixé sur $(xx') - \{A_0\}$)

$\Pi(\alpha_2) = A_2$ (variable sur une droite L passant par A_0 , $L \neq (xx')$)

$|BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]|$ admet Ω comme centre de courbure en A_0 .

Alors $BR[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ représente les coniques tangentes en A_0 à (xx') , de centre de courbure Ω en A_0 et sont telles que la polaire de A_1 soit L . C'est le faisceau des coniques surosculatrices en A_0 .

Proposition 7.2 Soit (A_0, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé du plan, (xx') l'axe passant par A_0 portant \vec{i} , $A_1(x_1, 0)$ un point fixé sur (xx') , L une droite différente de (xx') passant par A_0 définie par $x - \alpha y = 0$ et $A_2(\rho\alpha, \rho)$ un point variable de L ($\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Le faisceau des coniques tangentes en A_0 à (xx') , de centre de courbure $\Omega(0, R)$ en A_0 et admettant la droite L comme polaire de A_1 (faisceau de coniques surosculatrices) admet la représentation (BR) suivante selon le signe de R :

1. $R > 0$.

$$(i) BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{R\rho}{2})^{1/2}), (A_2; 1)], \quad \rho > 0$$

$$(ii) BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{R}{2})^{1/2}, \vec{v}], \quad \vec{v} = (\alpha, 1)$$

$$(iii) BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{-R\rho}{2})^{1/2}, (A_2; -1)], \quad \rho < 0$$

$$(iv) BR[(A_0; 1), (\frac{R\rho}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; 1)], \quad \rho > 0$$

$$(v) BR[(A_0; 1), (-\frac{R\rho}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; -1)], \quad \rho < 0$$

$$(vi) BR[(A_0; 1), (\frac{R}{2})^{1/2}\vec{i}, \vec{v}], \quad \vec{v} = (\alpha, 1)$$

2. $R < 0$.

(i) avec $\rho < 0$

(iii) avec $\rho > 0$

(iv) avec $\rho < 0$

(v) avec $\rho > 0$

$$(vii) BR[(A_0; 1), (\frac{-R}{2})^{1/2}\vec{i}, -\vec{v}]$$

$$(viii) BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1}(\frac{-R}{2})^{1/2}), -\vec{v}]$$

Preuve : Déterminons les formes réduites des coniques pour décrire le faisceau.

(i) Considérons le cas où $A_1(x_1, 0)$ est fixé et $A_2(\rho\alpha, \rho)$ variable sont à distance finie sur respectivement (xx') et L (d'équation $x - \alpha y = 0$) (figure 7.2)

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; 1)](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1 + t^2 A_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 + t^2}$$

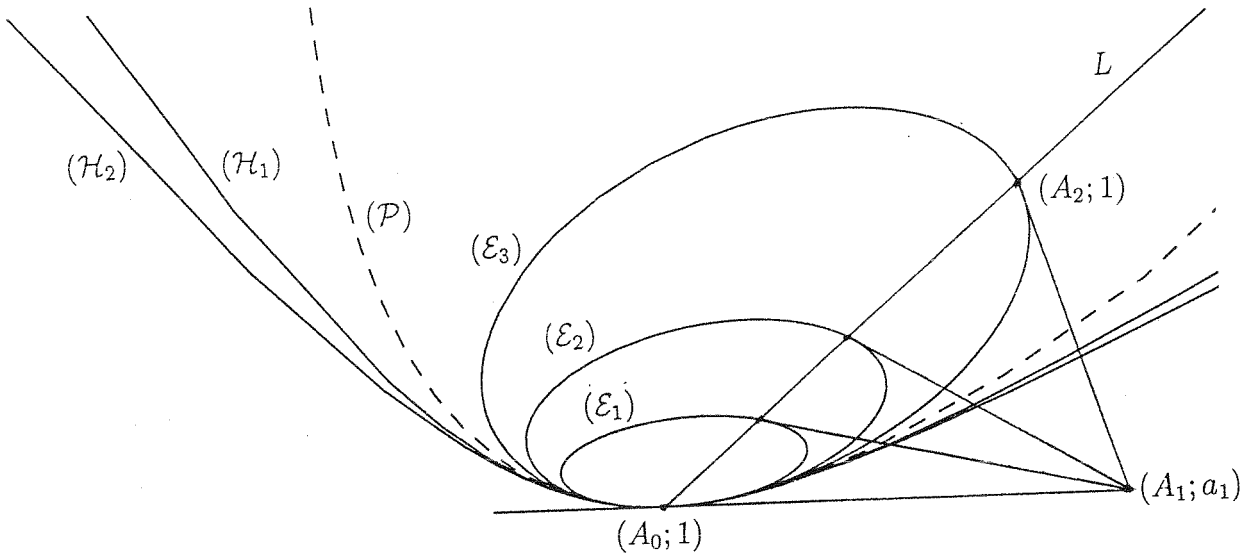


FIG. 7.2 - Forme (BR) du faisceau des coniques surosculatrices où la polaire est celle d'un point à distance finie.

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1x_1 + t^2\rho\alpha}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 + t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2\rho}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 + t^2}$$

Pour exprimer que le centre de courbure des coniques en A_0 est le point $\Omega(0, R)$, effectuons la division selon les puissances croissantes de t pour $x(t)$ et $y(t)$. Nous obtenons :

$$x(t) = 2ta_1x_1 + t^2(\rho\alpha + 2a_1x_1 - 4a_1^2x_1) + t^2\varepsilon(t) \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = t^2\rho + t^2\varepsilon'(t) \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

L'équation du cercle tangent en A_0 à (xx') passant par un point voisin de la courbe $(x(t), y(t))$, de centre $(0, \mu)$ est :

$$(2ta_1x_1 + t^2(\rho\alpha + 2a_1x_1 - 4a_1^2x_1) + t^2\varepsilon(t))^2 + (t^2\rho + t^2\varepsilon'(t) - \mu)^2 = \mu^2$$

soit $4t^2a_1^2x_1^2 - 2t^2\rho\mu = t^2\varepsilon''(t)$ avec $\varepsilon''(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$

Lorsque $t \rightarrow 0$ nous obtenons l'abscisse μ du centre de courbure en A_0 .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu = \frac{2a_1^2x_1^2}{\rho} = R.$$

D'où $a_1^2 = \frac{R\rho}{2x_1^2}$. Il faut $R\rho > 0$.

Par suite $a_1 = \pm \frac{1}{x_1} \left(\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}$. Il suffit de prendre $a_1 = \frac{1}{x_1} \left(\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}$ comme nous l'avons expliqué antérieurement.

La forme (BR) s'écrit :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} \left(\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}), (A_2; 1)], \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}$$

où $R\rho > 0$, $A_1 = (x_1, 0)$, x_1 fixé, $A_2 = (\rho\alpha, \rho)$, $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$.

La forme (BR) dépend du paramètre ρ , celui-ci intervient dans la masse du second point pondéré et dans les coordonnées du troisième point pondéré.

$$\left(\chi(A_1; \frac{1}{x_1} \left(\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2})\right)^2 - \chi(A_0; 1)\chi(A_2; 1) = \frac{R\rho}{2x_1^2} - 1.$$

Comme R et x_1 sont fixés, suivant la valeur de $\rho (\neq 0)$ nous obtenons des hyperboles si $\rho > \frac{2x_1^2}{R}$, une parabole si $\rho = \frac{2x_1^2}{R}$, des ellipses si $\rho < \frac{2x_1^2}{R}$. Nous obtenons un cercle si les deux conditions suivantes sont satisfaites : $\rho = \frac{2R}{\alpha^2 + 1}$ et $R^2 = x_1^2(\alpha^2 + 1)$.

(ii) Examinons le cas où le point A_2 est à l'infini.

La forme (BR) s'écrit :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{v}] \text{ avec } \vec{v} = (\alpha, 1), (BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{v}])(1) = \Pi(\vec{v}) = (\vec{v})_\infty.$$

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), \vec{v}](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} + \frac{t^2 \vec{v}}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1}$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1 x_1 + t^2 \alpha}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} = 2ta_1 x_1 + t^2(\alpha + 2a_1 x_1 - 4a_1^2 x_1) + t^2 \varepsilon(t)$$

$$y(t) = \frac{t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} = t^2 + t^2 \varepsilon'(t),$$

avec $(\varepsilon(t), \varepsilon'(t)) \rightarrow (0, 0)$ si $t \rightarrow 0$

A l'aide de calculs classiques nous trouvons que la conique (BR) a en A_0 un rayon de courbure égal à R si $R = 2a_1^2 x_1^2$. Il faut donc $R > 0$ et alors $a_1 = \frac{1}{x_1} \left(\frac{R}{2}\right)^{1/2}$.

D'où l'hyperbole suivante : $BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} \left(\frac{R}{2}\right)^{1/2}), \vec{v}]$, $\vec{v} = (\alpha, 1)$, l'asymptote (A_1, \vec{v}) est parallèle à la polaire L de A_1 . (figure 7.3)

(iii) Considérons maintenant la forme (BR) suivante : $BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; -1)]$

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), (A_2; -1)](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1 - t^2 A_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 - t^2}$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1 x_1 - t^2 \rho \alpha}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 - t^2} = 2ta_1 x_1 + t^2(-\rho \alpha + 2a_1 x_1 - 4a_1^2 x_1) + t^2 \varepsilon(t),$$

$$y(t) = \frac{-t^2 \rho}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1 - t^2} = -t^2 \rho + t^2 \varepsilon'(t)$$

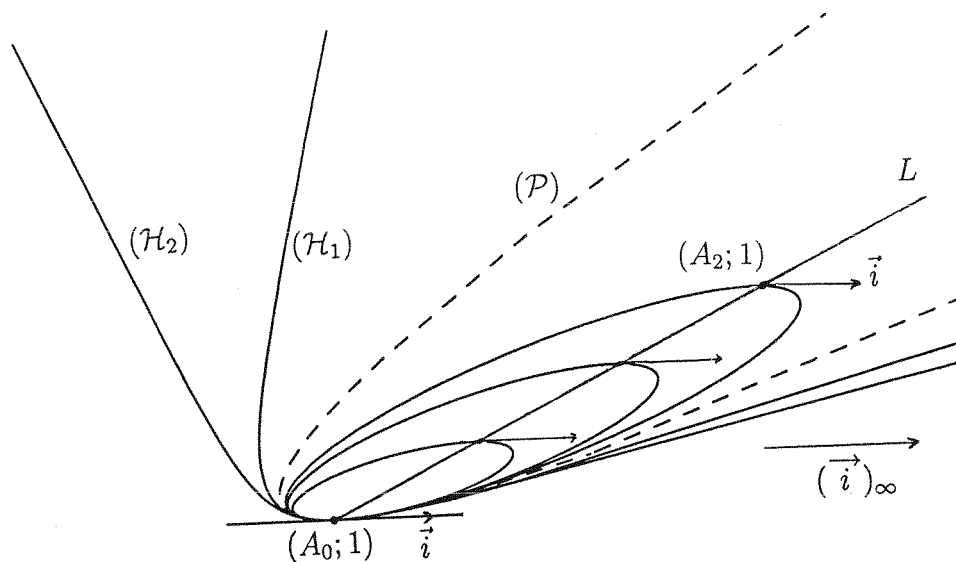


FIG. 7.3 - Forme (BR) du faisceau des coniques surosculatrices où la polaire est celle d'un point à l'infini.

avec $(\varepsilon(t), \varepsilon'(t)) \rightarrow (0, 0)$ si $t \rightarrow 0$

En exprimant que le centre de courbure de ces coniques en A_0 est le point $\Omega(0, R)$, nous obtenons la relation : $R\rho + 2a_1^2x_1^2 = 0$.

Il faut donc $R\rho < 0$, d'où $a_1 = \pm \frac{1}{x_1} \left(-\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}$. Il suffit de prendre $a_1 = \frac{1}{x_1} \left(-\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}$.

La forme (BR) s'écrit

$$BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} \left(-\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}), (A_2; -1)], \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (7.3)$$

où $R\rho < 0, A_1 = (x_1, 0)$ est fixé, $A_2 = (\rho\alpha, \rho) \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$(\chi(A_1; \frac{1}{x_1} \left(-\frac{R\rho}{2}\right)^{1/2}))^2 - \chi(A_0; 1)\chi(A_2; -1) = -\frac{R\rho}{2x_1^2} + 1 > 0$. Ce sont des hyperboles.

(iv) Examinons le cas où la polaire L est un diamètre pour les coniques (le point A_1 est à l'infini sur l'axe (xx')) avec $A_2(\rho\alpha, \rho)$ est variable sur la droite L d'équation $x - \alpha y = 0$. (figure 7.3)

Considérons d'abord $BR[(A_0; 1), k\vec{i}, (A_2; 1)]$

$$BR[(A_0; 1), k\vec{i}, (A_2; 1)](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + t^2 A_2}{(1-t)^2 + t^2} + \frac{2t(1-t)k\vec{i}}{(1-t)^2 + t^2}$$

$$x(t) = \frac{t^2\rho\alpha + 2t(1-t)k}{(1-t)^2 + t^2} = 2tk + t^2(2k + \rho\alpha) + t^2t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = \frac{t^2\rho}{(1-t)^2 + t^2} = t^2\rho + t^2\varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

La relation liant R le rayon de courbure en A_0 et k, ρ est $2k^2 = R\rho$. Il faut donc $R\rho > 0$ d'où $k = \pm(\frac{R\rho}{2})^{1/2}$ et la forme (BR)

$$BR[(A_0; 1), (\frac{R\rho}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; 1)] \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Nous obtenons des ellipses. Dans le cas où $\alpha = 0$ (A_2 est sur l'axe (A_0, \vec{j})) nous obtenons de plus un cercle de diamètre A_0A_2 si $2R = \rho$ (cf proposition 5.4.2 de [8]).

(v) Examinons le cas des (BR) suivantes :

$$BR[(A_0; 1), k\vec{i}, (A_2; -1)]$$

$$BR[(A_0; 1), k\vec{i}, (A_2; -1)](t) = \frac{(1-t)^2A_0 - t^2A_2}{(1-t)^2 - t^2} + \frac{2t(1-t)k\vec{i}}{(1-t)^2 - t^2}$$

$$x(t) = \frac{-t^2\rho\alpha + 2t(1-t)k}{(1-t)^2 - t^2} = 2tk + t^2(-\rho\alpha + 2k) + t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = \frac{-t^2\rho}{(1-t)^2 - t^2} = -t^2\rho + t^2\varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

La relation liant R et les paramètres est $2k^2 + R\rho = 0$. Il faut donc $R\rho < 0$ d'où $k = (-\frac{R\rho}{2})^{1/2}$ d'où la forme (BR) :

$$BR[(A_0; 1), (-\frac{R\rho}{2})^{1/2}\vec{i}, (A_2; -1)] \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Nous obtenons un faisceau d'hyperboles.

(vi) Examinons le cas où A_1 et A_2 sont à l'infini : la droite de l'infini est tangente à la conique (parabole). La (BR) a la forme suivante :

$$BR[(A_0; 1), k\vec{i}, \vec{v}] \text{ avec } \vec{v} = (\alpha, 1)$$

$$BR[(A_0; 1), k\vec{i}, \vec{v}](t) = A_0 + \frac{2t(1-t)k\vec{i} + t^2\vec{v}}{(1-t)^2}.$$

Le calcul liant le rayon de courbure R en A_0 et les paramètres k, α a déjà été effectué dans le chapitre précédent. Nous obtenons $R = 2k^2$. Il faut donc $R > 0$ et $k = (\frac{R}{2})^{1/2}$. La parabole est donc

$$BR[(A_0; 1), (\frac{R}{2})^{1/2}\vec{i}, -\vec{v}] \quad \vec{v} = (\alpha, 1)$$

(vii) Examinons le cas $BR[(A_0; 1), k\vec{i}, -\vec{v}]$ avec $\vec{v} = (\alpha, 1)$

$$BR[(A_0; 1), k\vec{i}, -\vec{v}](t) = A_0 + \frac{2t(1-t)k\vec{i} - t^2\vec{v}}{(1-t)^2}.$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)k - t^2\alpha}{(1-t)^2} = 2tk + t^2(2k - \alpha) + t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

$$y(t) = \frac{-t^2}{(1-t)^2} = -t^2 + t^2\varepsilon'(t), \quad \varepsilon'(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0$$

Nous obtenons $R + 2k^2 = 0$. Il faut $R < 0$ et $k = (\frac{-R}{2})^{1/2}$. La parabole (BR) est donc :

$$BR[(A_0; 1), (\frac{-R}{2})^{1/2}\vec{i}, -\vec{v}] \quad \vec{v} = (\alpha, 1)$$

(viii) Il reste à examiner le cas où A_2 est à l'infini (dans ce cas $R < 0$). La forme (BR) recherchée s'écrit :

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), -\vec{v}] \text{ avec } \vec{v} = (\alpha, 1), BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), -\vec{v}](1) = \Pi(-\vec{v}) = (\vec{v})_\infty$$

$$BR[(A_0; 1), (A_1; a_1), -\vec{v}](t) = \frac{(1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)a_1 A_1}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} + \frac{-t^2 \vec{v}}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1}$$

$$x(t) = \frac{2t(1-t)a_1 x_1 + t^2 \alpha}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} = 2ta_1 x_1 + t^2(-\alpha + 2a_1 x_1 - 4a_1^2 x_1) + t^2 \varepsilon(t)$$

$$y(t) = \frac{-t^2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)a_1} = -t^2 + t^2 \varepsilon'(t)$$

avec $(\varepsilon(t), \varepsilon'(t)) \rightarrow (0, 0)$ si $t \rightarrow 0$

Après calculs nous obtenons la relation $R + 2a_1^2 x_1^2 = 0$. Il faut donc $R < 0$ d'où $a_1 = \pm \frac{1}{x_1} (\frac{-R}{2})^{1/2}$. Il suffit de prendre $a_1 = \frac{1}{x_1} (\frac{-R}{2})^{1/2}$. La forme (BR) de la

conique (c'est une hyperbole) s'écrit : $BR[(A_0; 1), (A_1; \frac{1}{x_1} (\frac{-R}{2})^{1/2}), -\vec{v}]$ ■

Bibliographie

- [1] De Casteljaou, P., Outillage, méthode de calcul, *André Citroën Automobiles*, S.A., Paris, 1959.
- [2] De Casteljaou, P., *Formes à Pôles*, Collection Mathématiques et CAO, volume 2, Hermès, Paris, 1985.
- [3] Bézier, P., Procédé de définition des courbes et des surfaces non mathématiques, *Système Unisurf*, Automatisation, 13, 1968.
- [4] Bézier, P., Essais de définition des courbes et surfaces expérimentales, Thèse d'état, Université de Paris VI, 1977.
- [5] Bézier, P., *Courbes et surfaces*, Collection Mathématiques et CAO, volume 4, Hermès, Paris, 1984.
- [6] Fiorot, J.-C. et P. Jeannin, Courbes Bézier rationnelles, Exposé au XIXème Congrès National d'Analyse Numérique, Port-Barcarès, France, 26-30 Mai 1986.
- [7] Fiorot, J.-C. et P. Jeannin, Nouvelle description des courbes rationnelles à l'aide de points et vecteurs de contrôle, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **305**, Ser. I, 1987, 435-440.
- [8] Fiorot, J.-C. et P. Jeannin, *Courbes et Surfaces Rationnelles, Applications à la CAO*, RMA 12, Masson, Paris, 1989. English translation: *Rational Curves and Surfaces. Applications to CAD*, J. Wiley, Chichester, 1992.
- [9] Pappus, Collection Mathématique (livre 7), A. Blanchard, Paris, 1982.
- [10] Euclide, *Les éléments, Volume I*, traduction et commentaires de B. Vitrac, PUF, Paris, 1990.
- [11] Apollonius de Perge, *Les coniques*, traduction P. Vereecke, A. Blanchard, Paris, 1979.
- [12] Pascal B., *Essai pour les coniques*, 1640.

- [13] Desargues G., *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan*, 1648.
- [14] Monge G., *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, lecture à l'Ecole Normale de Paris, 1795.
- [15] Monge G., *Géométrie descriptive*, Gauthier-Villars, Paris, 1922.
- [16] Chasles M., *Traité de géométrie supérieure*, Gauthier-Villars, Paris, 1861.
- [17] Chasles M., *Traité des sections coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1865.
- [18] Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1889.
- [19] Poncelet J.V., *Application d'analyse et de géométrie*, Mallet-Bachelier, 1862.
- [20] Poncelet J.V., *Traité projective des figures*, Gauthier-Villars, Paris, 1865.
- [21] Lebesgues H., *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
- [22] Berger M., *Géométrie 1, Géométrie 2*, F. Nathan, Paris, 1990.
- [23] Faux, I. E., and M. J. Pratt, *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood, Chichester, 1979.
- [24] Farin, G. E., Algorithms for rational Bézier curves, *Computer Aided Design* **15**, 1983, 73-77.
- [25] Lee, E. T. Y., The rational Bezier representation for conics in *Geometric Modelling: Algorithms and New Trends*, G. Farin (ed.) SIAM, Philadelphia, 1987, 3-19.
- [26] Farin, G. E., *Curves and Surfaces for Computer Aided Design*, Third edition, Academic Press, San Diego, 1992.
- [27] Hoschek, J. and Lasser D., *Fondamental of Computer Aided Design*, A.K.Peters, Wellesley, MA, 1993.
- [28] Bécar J.P. et Fiorot J.C., Une caractérisation (BR) des coniques, Exposé au Colloque "Nouvelles tendances en approximation", CIRM Luminy 14-18 Novembre 1994.
- [29] Bécar J.P. et Fiorot J.C., Massic vectors -based conics modelling, Exposé au Third International Conference Curves and Surfaces, Chamonix Mont-Blanc, June 27-July 3 1996.

- [30] Bécar J.P. and J.C. Fiorot, Massic vectors -based conics modelling in *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*, A. Le Méhauté, C. Rabut, and L.L. Schumaker (eds) Vanderbilt University Press, Nashville, 1997, 17-24.
- [31] Patterson, R. R. , Projective transformations of the parameter of a Bernstein-Bézier curve, *ACM Transactions on Graphics* **6**, 1985, 276-290.
- [32] Fiorot, J.-C. and P. Jeannin, B-rational curves and surfaces, N-rational splines, in : Laurent, P.-J., Le Méhauté A. , Schumaker L. L. , eds. , *Curves and Surfaces*, Academic Press, New-York, 1991, 181-184.
- [33] Fiorot, J.-C., P. Jeannin and S. Taleb, New control massic polygon of a B-Rational curve resulting from a homographic change of parameter, *Numerical Algorithms* **6**, 1994, 379-418.
- [34] Bécar J.P. et Fiorot J.C., Représentation des faisceaux de coniques par les vecteurs massiques, Exposé au Colloque "Approximation hilbertienne : splines, ondelettes, fractals", CIRM Luminy 3-7 Avril 1995.
- [35] Bécar J.P. et Fiorot J.C., Pencils of (BR) conics, Exposé au Third International Conference Curves and Surfaces, Chamonix Mont-Blanc, June 27-July 3 1996.
- [36] Bécar J.P. et Fiorot J.C., Forme (BR) des coniques osculatrices, Exposé au Colloque "Modélisation géométrique et approximation", CIRM Luminy 1-5 Avril 1996.

Résumé :

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la géométrie de la CAO. Il traite d'un point de vue algorithmique des coniques et de leurs faisceaux. Ces courbes rationnelles sont ici décrites par une liste de trois vecteurs massiques linéairement indépendants appelée forme (BR) de la conique. Un vecteur massique est soit un vecteur pur, soit un point pondéré de l'espace dans lequel sont plongées ces courbes rationnelles ainsi que l'ont défini Fiorot et Jeannin en 1986. Le chapitre 1 rappelle les principaux résultats concernant les courbes Bézier-de Casteljaou et les courbes (BR). Le chapitre 2 établit toutes les formes d'une conique définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Les différentes formes (BR) d'une conique sont obtenues par des changements de paramètre homographique. Réciproquement, à partir de trois vecteurs massiques linéairement indépendants et à l'aide de changements de paramètre homographique appropriés, une forme (BR) particulière de la conique est obtenue. Celle-ci donne directement les éléments géométriques remarquables de la conique. Les chapitres suivants traitent de la représentation (BR) des faisceaux de coniques. Chaque type de faisceau se caractérise par une liste de trois vecteurs massiques. Un de ces vecteurs sert à définir le paramétrage du faisceau. Le chapitre 3 donne deux formes (BR) du faisceau de coniques bitangentes. Le chapitre 4 donne une forme (BR) du faisceau des coniques passant par trois points et tangente en un des points à une droite donnée. La forme (BR) d'un faisceau de coniques passant par quatre points du plan est traitée dans le chapitre 5. Les chapitres 6 et 7 traitent respectivement des des faisceaux (BR) de coniques osculatrices et surosculatrices. Notons enfin que, pour les coniques comme pour leurs faisceaux, les formes (BR) présentent dans la plupart des cas un ou deux vecteurs purs décrivant les points à l'infini de la conique et les rendant aisément exploitables en CAO.

Mots Clefs :

coniques, faisceaux de coniques, courbes Bézier-de Casteljaou, changement de paramètre homographique, vecteurs massiques, courbes rationnelles, courbes (BR), coniques bitangentes, coniques osculatrices et surosculatrices.