



HAL
open science

Texture et comportement des matériaux granulaires à grande polydispersité

Charles Voivret

► **To cite this version:**

Charles Voivret. Texture et comportement des matériaux granulaires à grande polydispersité. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2008. Français. NNT: . tel-00372125

HAL Id: tel-00372125

<https://theses.hal.science/tel-00372125>

Submitted on 31 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER 2

— Sciences et Techniques du Languedoc —

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER 2

Spécialité : Mécanique et Génie Civil.

Formation doctorale : Mécanique des matériaux et des milieux complexes,
des structures et des systèmes.

Ecole doctorale : Informations, Structures, Systèmes.

Texture et comportement des matériaux
granulaires à grande polydispersité

par

Charles VOIVRET

Soutenue publiquement le 25/11/08 devant le jury composé de :

Jean-Noël Roux	Rapporteur
Pierre-Yves Hicher	Rapporteur
Olivier Pouliquen	Examineur
Frédéric Donzé	Examineur
François Nicot	Examineur
Jean-Yves Delenne	Co-directeur de thèse
Farhang Radjai	Directeur de thèse
Moulay Saïd El Youssofi	Co-directeur de thèse

Table des matières

Introduction générale	11
I Synthèse Bibliographique	15
1 Les matériaux granulaires polydisperses	17
1.1 Les matériaux granulaires	18
1.1.1 Comportement en régime quasi-statique monotone	19
1.1.2 Eléments de modélisation micromécanique	23
1.2 La polydispersité	28
1.2.1 Définitions et exemple de classification	28
1.2.2 Analyse granulométrique	30
1.2.3 Problématique de l'empilement et du remplissage d'espace	33
II Génération des empilements denses : approche géométrique	39
Introduction	41

2	Gestion de la polydispersité	43
2.1	Génération d'une distribution de tailles suivant une courbe granulométrique . . .	44
2.1.1	Génération par transformation inverse	44
2.1.2	Méthode proposée	46
2.1.3	Discrétisation de l'espace des tailles	47
2.2	Modélisation de la courbe granulométrique	48
2.2.1	Modèle de courbe granulométrique	48
2.2.2	Influence des paramètres de forme	50
2.3	Espaces paramétriques	51
2.3.1	Influence des critères de génération	51
2.3.2	Notions de réalisabilité et d'états accessibles	53
3	Texture d'un matériau polydisperse	57
3.1	Méthode de construction géométrique	58
3.1.1	Choix de la méthode	58
3.1.2	Dépôt gravitationnel	59
3.2	Etude paramétrique	63
3.2.1	Propriétés de remplissage d'espace	63
3.2.2	Réseau de contacts	68
	Conclusion	75
III	Approche dynamique	77
	Introduction	79
4	Simulations dynamiques	81
4.1	Dynamique des contacts	82
4.1.1	Approche non régulière	82
4.1.2	Lois de contact non régulières	83

4.1.3	Equations de la dynamique	85
4.1.4	Traitement local	87
4.1.5	Traitement global	89
4.1.6	Processus de résolution	89
4.1.7	Implémentation	90
4.2	Précautions numériques liées à la polydispersité	91
5	Influence de la polydispersité sur l'état d'équilibre statique	93
5.1	Relaxation biaxiale	94
5.1.1	Protocole numérique	94
5.1.2	Etat d'équilibre statique	95
5.2	Etat de contraintes à l'équilibre	98
5.2.1	Tenseur de contraintes	98
5.2.2	Anisotropie des orientations des contacts	102
5.2.3	Anisotropie des forces	104
5.2.4	Relation contraintes-texture	106
5.3	Réseau de forces	109
5.3.1	Topologie du réseau de contacts	109
5.3.2	Forces de contact	111
5.4	Chaînes de forces	115
6	Cisaillement simple	121
6.1	Cisaillement simple périodique	122
6.2	Comportement macroscopique	123
6.3	Connectivité	127
6.4	Anisotropies	129
6.5	Transmission des forces	133
6.6	Influence de la cohésion	136
	Conclusion	141

Conclusion générale 145

Bibliographie 149

Remerciements

Une thèse étant à mes yeux un travail collaboratif de longue haleine, je tiens à remercier chaleureusement mes encadrants Fahrang Radjai, Moulay Saïd El Youssoufi et Jean-Yves Delenne, pour leurs implications professionnelle et personnelle sans failles durant ces trois années.

Merci aux autres membres de mon jury : Frédéric Donzé, François Nicot, Olivier Pouliquen ainsi que Jean-Noël Roux et Pierre-Yves Hicher qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs.

Je tiens à remercier particulièrement deux "anciens jeunes" Fabien Soulié et Vincent Richefeu qui m'ont beaucoup apporté par les nombreux moments partagés autour de grains numériques ou non et autour de bien d'autres sujets. D'une manière générale, je remercie l'ensemble des grains de l'axe "Solides Granulaires" du LMGC qui constituent d'une certaine façon un terrain idéal à la croissance d'une thèse. Parmi eux, je tiens particulièrement à remercier Vincent Topin pour tous les bons et mauvais moments partagés. Je souhaite aussi remercier affectueusement Reine Bonnet pour sa gentillesse et son dévouement envers ses "petits".

Je remercie bien évidemment ma famille pour son soutien tout au long de mes études. Enfin, mes derniers remerciements vont à Aurélie pour m'avoir supporté (aux deux sens du terme) au cours des moments heureux et difficiles de ces trois années.

à la mémoire de mon frère Robert,

Introduction générale

Sous de nombreuses formes différentes, les matériaux granulaires sont omniprésents dans l'environnement humain et dans la nature. La matière granulaire est notamment à la base de nombreuses industries de transformation : pharmaceutique, minière, verrière, agro-alimentaire ou encore la fabrication de nombreux matériaux de construction comme le béton. Au contraire, elle peut être le résultat d'un procédé de transformation industrielle comme les comprimés ou les résidus de broyages. D'autre part, les sols dans leur diversité sont d'autres exemples de matériaux granulaires naturels dont l'étude est indispensable en géotechnique. Par le riche éventail de comportements mécaniques qu'ils présentent, les milieux granulaires investissent une thématique de recherche qui fédère des communautés scientifiques de tous horizons (génie civil, physique de la matière condensée, génie des procédés, géologie...). Outre les propriétés surprenantes de la matière granulaire (entre solide et liquide), l'étude de couplages multiphysiques avec la matière en grains est un domaine de recherches fondamentale et appliquée très actif ces dernières années. En effet, que ce soit par l'expérimentation physique ou par la simulation numérique, les recherches portent sur des milieux à complexité croissante : formes complexes des particules, présence d'eau dans l'espace poral (de la capillarité à la saturation), cohésion solide entre les particules, transferts thermiques... Cependant, dans ces études, une caractéristique constitutive de la matière en grains, dont l'influence est méconnue, a été souvent négligée : la distribution des tailles de grains appelée aussi *polydispersité*.

La polydispersité, ou granularité, est une propriété fondamentale de nombreux matériaux granulaires : sables issus de l'érosion éolienne ou hydraulique, sols communs, résidus de broyages, massifs rocheux fracturés... La polydispersité peut être alors vue comme une conséquence permettant d'apprécier un phénomène (transport éolien des sables agissant comme un filtre granulométrique). D'autre part, elle peut être vue comme un objectif par l'obtention d'une granularité précise à l'issue d'un procédé industriel. Par exemple, la granularité des composants d'un béton va fortement conditionner ses propriétés mécaniques et notamment sa résistance à la

compression. Dans l'industrie chimique, la maîtrise de la granularité d'une poudre assure une bonne estimation de la surface spécifique et donc le contrôle de la réaction. La granularité des sols conditionne aussi fortement leurs propriétés mécaniques. En physique, la polydispersité est intimement liée, dans les milieux granulaires, à des notions physiques telles que le remplissage d'espace, la transition ordre-désordre et la structure fractale. Cependant, l'influence de la granularité sur le comportement mécanique, autant à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle des grains, est mal connue.

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'influence de la polydispersité, d'une part, sur la structure géométrique appelée aussi *texture* et, d'autres part, sur le comportement statique et quasi-statique d'assemblages granulaires. En d'autres termes, l'étude proposée portera sur l'influence de la polydispersité sur : l'arrangement des particules, les caractéristiques mécaniques macroscopiques telles que la résistance au cisaillement ou la dilatance et sur les propriétés micromécaniques. Comme le comportement macroscopique résulte des mécanismes de transmission de contraintes à l'échelle des particules, il est primordial de comprendre les mécanismes locaux liés à la présence de plusieurs ordres de tailles de particules. Une étude expérimentale complète de l'ensemble de ces phénomènes ne peut pas être envisagée ici. En effet, compte tenu de la difficulté à mesurer des grandeurs locales et à maîtriser la granularité d'un matériau modèle dans toute sa généralité, une telle étude nécessiterait des moyens considérables et une durée prohibitive. Une approche par simulations numériques en éléments discrets constitue une alternative appropriée pour les études envisagées. Ce type d'approche prend naturellement en compte le caractère divisé de la matière granulaire considérée comme une collection de corps en interaction. Afin de cerner l'influence de la granularité, il a été choisi de considérer une configuration bidimensionnelle avec des particules circulaires. Ce choix est justifié par la simplicité de ce milieu modèle bien étudié dans la littérature et dont les propriétés texturales et de comportement mécanique simple sont bien connues ; l'objectif étant de mettre l'accent sur l'effet de la granularité.

La modélisation numérique de matériaux granulaires polydisperses implique un contrôle fin de la granularité en termes d'étalement granulométrique (rapport de tailles entre la plus petite et la plus grosse particule) et de répartition statistique des tailles (courbure de la distribution). Néanmoins, ce contrôle de la granularité implique la représentativité statistique et volumique de chaque classe de tailles, et ce, quel que soit le nombre total de particules considérées. Un autre point critique est la méthode de mise en place initiale (avant l'essai mécanique proprement dit) qui doit s'affranchir du phénomène de ségrégation de tailles propre aux matériaux polydisperses. Bien que moins important en 2D qu'en 3D, ce phénomène entraîne une perte d'homogénéité des assemblages qui n'est pas souhaitable dans cette étude. De même, le protocole d'essai mécanique ne doit pas induire de ségrégation tout en limitant les effets de bords afin de préserver un volume élémentaire représentatif (VER) en termes de texture et de grandeurs mécaniques mesurées.

En apportant une solution à chacune de ces difficultés numériques, nous avons réalisé une étude de l'influence de la polydispersité sur la texture et sur le comportement mécanique des matériaux granulaires. Ce mémoire présente en trois parties les approches mises en œuvre et les

principaux résultats obtenus.

La première partie présente une synthèse des propriétés macroscopiques et de leurs origines locales dans les matériaux granulaires. On décrit ensuite les principales caractéristiques liées à la polydispersité et les problématiques liées à l'emploi de granulats polydisperses.

La deuxième partie, contenant les chapitres 2 et 3, est consacrée au développement d'une méthode de génération de distributions de tailles ainsi qu'à l'étude de l'influence de la polydispersité sur la texture granulaire. Le chapitre 2 détaille une méthode de génération de distributions de tailles basée sur des critères de représentativité explicites à partir d'une courbe granulométrique continue. Cette méthode est couplée à un modèle de courbe granulométrique à trois paramètres permettant de faire varier l'étalement et la forme de la distribution. On introduira alors la notion d'accessibilité numérique en soulignant les limitations des outils développés pour la modélisation de la polydispersité dans toute sa richesse. Le chapitre 3 présente une méthode de dépôt géométrique permettant de créer, à partir des distributions générées par la méthode décrite au chapitre 2, des assemblages granulaires denses. L'efficacité numérique de cette approche a permis de réaliser une étude systématique détaillée de l'influence des paramètres de polydispersité sur la texture en termes de remplissage d'espace et de transition ordre-désordre.

La troisième partie, comprenant les trois derniers chapitres, est dédiée aux études de l'influence de la polydispersité sur les propriétés mécaniques par simulations en éléments discrets. Le chapitre 4 présente une description succincte de la méthode "Dynamique des Contacts" utilisée dans de l'outil numérique développé pour les aspects mécaniques de ces recherches. Les difficultés liées à l'emploi de granulats polydisperses dans les simulations dynamiques ainsi que les solutions apportées seront détaillées. Le chapitre 5 présente une étude des propriétés mécaniques d'assemblages polydisperses à l'état d'équilibre statique. L'état d'équilibre est atteint par relaxation dynamique des échantillons construits géométriquement. L'évolution de la texture entre l'état initial et l'état relaxé est étudiée. L'état d'équilibre statique est ensuite utilisé pour analyser les grandeurs mécaniques en vue de mettre en évidence le rôle des différentes classes de particules. Le chapitre 6 présente l'étude du cisaillement quasi-statique d'échantillons polydisperses initialement relaxés à l'état d'équilibre statique (chapitre 5). Ces échantillons sont alors suffisamment cisailés jusqu'à atteindre un état stationnaire. Les résultats obtenus permettent d'analyser les différentes propriétés de texture au cours de l'évolution du cisaillement pour différents niveaux de polydispersité. L'aspect mécanique est étudié à travers la résistance au cisaillement à l'état stationnaire. Dans ce chapitre, on verra dans quelles mesures les observations faites dans la cas de l'équilibre statique seront maintenues dans le cas de cisaillement quasi-statique. Le cas des matériaux polydisperses cohésifs sera ensuite étudié par l'introduction d'un modèle d'interaction de cohésion que l'on précisera.

Première partie

Synthèse Bibliographique

Les matériaux granulaires polydisperses

Sommaire

1.1	Les matériaux granulaires	18
1.1.1	Comportement en régime quasi-statique monotone	19
1.1.2	Éléments de modélisation micromécanique	23
1.2	La polydispersité	28
1.2.1	Définitions et exemple de classification	28
1.2.2	Analyse granulométrique	30
1.2.3	Problématique de l'empilement et du remplissage d'espace	33

1.1 Les matériaux granulaires

On peut qualifier les matériaux granulaires de milieux solides discrets ou divisés au sens où la phase solide est composée d'une collection d'éléments solides, que l'on appellera grains, chacun étant en interaction mutuelle avec ses voisins. La division de la phase solide fait apparaître une seconde phase qui occupe l'espace poral entre les grains. Le cas le plus intuitif est bien sûr le cas de granulats "à l'air libre" où l'espace poral est entièrement occupé par de l'air (ou un autre gaz) n'influant pas ou très peu sur le comportement des grains. Au contraire, l'espace poral peut être partiellement ou complètement (saturation) occupé par un liquide, de l'eau par exemple, pouvant avoir un effet important sur le comportement des grains [55, 61].

Une des particularités de la matière en grains est sa capacité à "s'adapter" aux sollicitations extérieures et aux conditions limites en adoptant un comportement proche de celui d'un gaz, d'un liquide ou d'un solide. Par exemple, si l'on secoue une boîte remplie de billes dures (verre ou acier par exemple), elles vont s'entrechoquer et ainsi rappeler le mouvement de molécules d'un gaz soumis à l'agitation thermique [11, 48]. Ce régime, dominé par des collisions binaires entre les particules, est intéressant d'un point de vue théorique et statistique mais trouve peu d'applications. Les avalanches, qu'elles soient de neige ou de sable, mettent en avant la capacité d'un matériau granulaire à mimer un liquide en s'écoulant sur une pente [56, 62, 63]. Ce régime dynamique complexe peut se voir de façon simpliste comme un mélange des états solides et gazeux dont les proportions sont données par les conditions d'écoulement [24]. Enfin, l'état "solide" qui va plus particulièrement nous intéresser dans ce travail se caractérise par des matériaux granulaires confinés pouvant supporter un chargement mécanique déviatoire important avant de subir une déformation plastique.

La seule donnée du degré de confinement d'un matériau granulaire ne suffit pas pour affirmer qu'il se comportera comme un solide. Il est nécessaire de prendre en compte le caractère dynamique ou statique de la sollicitation mécanique appliquée. Par exemple, l'impact d'un bloc sur un lit granulaire initialement dense va produire des phénomènes très dynamiques comme l'éjection de particules ou des réarrangements rapides et à grande échelle de la structure du milieu. Au contraire, le dépôt puis le chargement progressif du même bloc vont mettre à jour une résistance à l'enfoncement développée par le lit granulaire. Cette résistance trouve son origine dans la persistance du réseau de forces de contact au cours du temps qui est rendue possible par le faible taux de déformation d'une telle sollicitation. On comprend alors qu'une sollicitation mécanique engendrant une déformation lente et assurant que l'évolution du système reste assimilable à une succession d'états d'équilibre, permettra de considérer un matériau granulaire comme un solide déformable. Une telle sollicitation, qualifiée de "quasi-statique", se traduit par une domination des forces de contact statiques sur les forces impulsives générées par les collisions entre les particules. Afin de caractériser le caractère quasi-statique, ou au contraire dynamique, d'un système confiné, on utilise un nombre sans dimension I appelé nombre d'inertie défini par [35, 49] :

$$I = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{m}{dP}} \quad (1.1)$$

où $\dot{\gamma}$ est la vitesse de cisaillement, m la masse moyenne d'un grain, d le diamètre moyen d'un grain et P la pression de confinement. Ce nombre sans dimension peut être vu comme le rapport de deux temps caractéristiques du réarrangement d'une particule : le temps de relaxation vers une position stable et le temps moyen nécessaire pour parcourir la même distance sous l'action du cisaillement. Pour des valeurs de I inférieures à 10^{-3} on pourra considérer que la sollicitation est quasi-statique et donc que le matériau granulaire se comporte comme un solide élasto-plastique. Pour des valeurs de I comprises entre 10^{-3} et 10^{-1} , le matériau se comportera plutôt comme un liquide visco-plastique et au delà ($I > 10^{-1}$) comme un gaz (régime collisionnel).

1.1.1 Comportement en régime quasi-statique monotone

Le développement constant de la mécanique des sols, depuis les travaux précurseurs de Coulomb à la fin du 18^e siècle, a permis de mettre en place des outils et des modèles permettant d'appréhender le comportement mécanique d'un sol, matériau granulaire par nature. Pour des sollicitations quasi-statiques et des déformations de faible amplitude, la mécanique des sols classique considère qu'un matériau granulaire peut être assimilé à un milieu continu équivalent dont la rhéologie est proche d'un matériau élasto-plastique. Il existe un domaine de comportement élastique pour de très faibles déformations (10^{-5}). Pour des déformations plus importantes, une déformation plastique se développe en raison des réarrangements des particules [58]. Une propriété majeure des matériaux granulaires, et en particulier des sols, est la dépendance du seuil plastique par rapport à la pression moyenne. Par ailleurs, ces matériaux sont génériquement anisotropes de telle sorte que les caractéristiques macroscopiques (modules élastiques, seuil plastique, ...) varient en fonction de la direction de sollicitation. Dans cette section, on se limitera à exposer les concepts essentiels à la caractérisation macroscopique d'un milieu granulaire en déformation monotone.

La figure 1.1(a) présente les courbes déformation axiale-déviateur de contraintes, obtenues à l'aide des essais triaxiaux sur un sable pour différentes pressions de confinement σ'_3 et différents niveaux de compacité [46]. L'échantillon de sable est contenu dans une membrane et soumis, d'une part, à une pression radiale $\sigma'_2 = \sigma'_3$ et, d'autre part, à une compression axiale ε_1 . Le déviateur des contraintes q est donné dans ce cas par :

$$q = \sigma'_1 - \sigma'_2 \quad (1.2)$$

La contrainte moyenne effective p' (contrainte supportée par la phase solide) est donnée par :

$$p = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_2}{3}. \quad (1.3)$$

L'état de compacité est exprimé en terme de l'indice des vides $e = V_v/V_s$ où V_v et V_s sont respectivement les volumes des vides et des particules solides. Dans une géométrie 2D (compression biaxiale), les variables correspondantes sont :

$$p = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2} \quad (1.4)$$

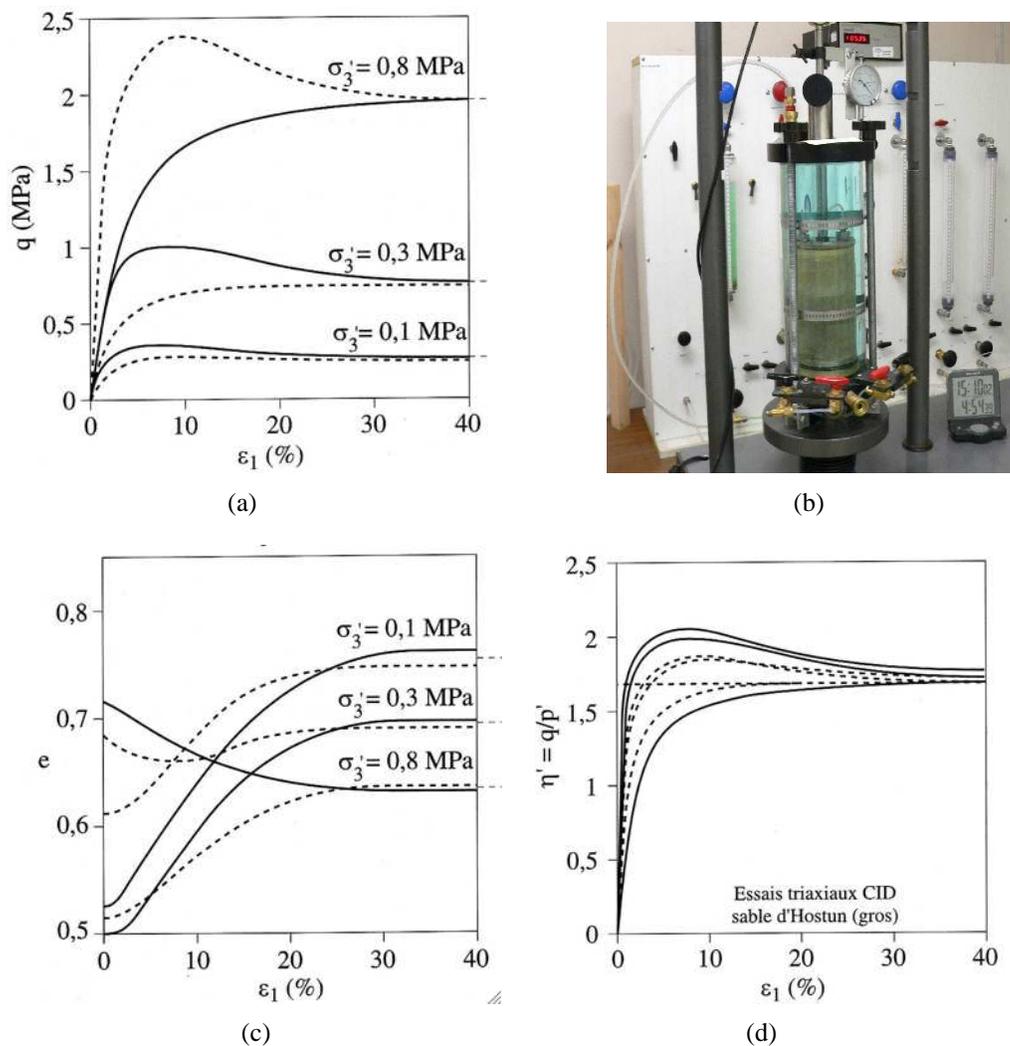


FIG. 1.1 – (a) Déviateur des contraintes en fonction de la déformation axiale pour différentes valeurs de la contrainte de confinement dans un essai triaxial sur un sable ; (b) Vue d'un appareil triaxial ; (c) Indice des vides en fonction de la déformation axiale ; (d) Déviateur des contraintes normalisé par la pression effective moyenne en fonction de la déformation axiale. D'après Hicher [46]

et

$$q = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2}. \quad (1.5)$$

Le déviateur des contraintes dans l'état critique varie avec la pression de confinement. La figure 1.1(d) montre que la valeur critique du déviateur se met à l'échelle avec la contrainte moyenne. On observe aussi sur la figure 1.1(a) que, pour un sable dense, le déviateur passe par un pic avant de relaxer vers sa valeur stationnaire correspondant à l'état critique. On peut alors définir deux angles de frottement, l'un au pic φ_{pic} représentant la résistance maximale et le deuxième pour l'état critique φ_c représentant la résistance à l'état critique. Au contraire, pour un sable lâche, le déviateur augmente d'une manière monotone et tend asymptotiquement vers la valeur critique. En ce qui concerne le changement de volume, la figure 1.1(c) indique que pour une pression de confinement donnée, l'indice des vides, après une diminution initiale, tend vers une même valeur dans l'état critique indépendamment de l'indice des vides initial. Mais la valeur critique de l'indice dépend de la pression de confinement. La variation de e en fonction de la déformation volumétrique est souvent caractérisée par un angle de dilatance donné par :

$$\sin \psi = \varepsilon_q / \varepsilon_p \quad (1.6)$$

où

$$\varepsilon_q = \frac{3}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (1.7)$$

et

$$\varepsilon_p = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2. \quad (1.8)$$

Une valeur positive de $\sin \psi$ traduit une augmentation du volume au cours de la déformation (dilatance) tandis qu'une valeur négative traduit une diminution du volume (contractance). L'angle de dilatance est nul à l'état critique. Remarquons que les variables de déformation en 2D sont

$$\varepsilon_q = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (1.9)$$

et

$$\varepsilon_p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (1.10)$$

Le critère de rupture de Coulomb s'exprime comme une relation entre la contrainte tangentielle maximale σ_t et la contrainte normale σ_n :

$$\sigma_t = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (1.11)$$

où c est la cohésion et φ l'angle de frottement interne. On définit aussi le coefficient de frottement interne $\mu^* = \tan \varphi$.

D'une manière équivalente, on peut écrire le critère de Coulomb à partir des invariants du tenseur de contrainte. En 2D, ce critère s'exprime par la relation suivante :

$$\frac{q}{p} = \sin \varphi + \frac{c}{p} \cos \varphi. \quad (1.12)$$

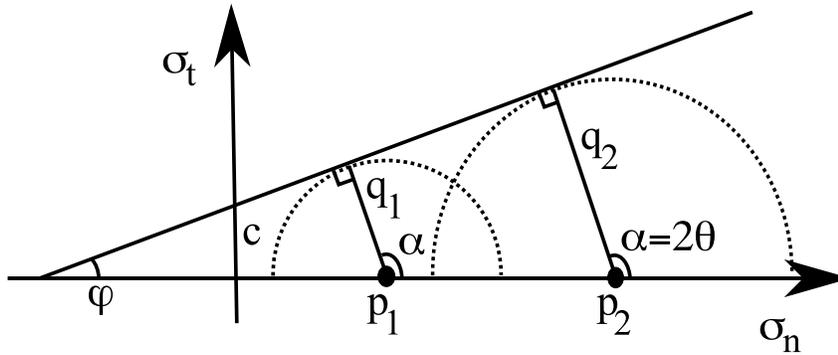


FIG. 1.2 – Enveloppe de Mohr-Coulomb d'un matériau granulaire cohésif.

Cette relation montre que l'effet majeur de la cohésion est d'élargir le domaine élastique (ou rigide) dans l'espace des contraintes. Ce domaine est de largeur non nulle même pour $p = 0$ lorsque $c \neq 0$. En d'autres termes, la cohésion garantit l'intégrité mécanique du matériau même en l'absence de pression de confinement. L'importance relative de ces deux termes est donnée par le rapport c/p ; on considère alors que la cohésion est négligeable pour $c/p \ll 1$. Ainsi, le déviateur de contraintes normalisé q/p s'exprime comme :

Dans le plan (σ_n, σ_t) le critère de Coulomb est représenté par une droite de pente $\tan \varphi$ et d'ordonnée à l'origine c , qui définit l'enveloppe dite de Mohr-Coulomb des états de contraintes admissibles. Le seuil plastique est atteint lorsque le cercle de Mohr touche cette enveloppe. Comme on peut le voir sur la figure 1.2, la connaissance de l'angle de frottement interne permet d'évaluer l'angle θ que fait le plan de cisaillement avec la direction principale majeure. En effet, une rotation d'un angle α par rapport à la direction principale majeure sur le cercle de Mohr se traduit par une rotation de 2α du plan tangent [43]. Ainsi, le plan de cisaillement forme un angle $\theta = \alpha/2 = \varphi/2 + \pi/4$ avec la direction principale majeure. A l'inverse, connaissant l'état de contraintes à la rupture $(\sigma_{nr}, \sigma_{tr})$ à cohésion nulle ($c = 0$), on trouve l'angle de frottement interne du matériau donné par $\sin \varphi = \sigma_{tr}/\sigma_{nr} = q/p$. Pour un matériau non cohésif, un seul essai suffit pour déterminer l'angle de frottement car la droite passe par l'origine ($c = 0$). Par contre, dans le cas d'un matériau cohésif, au moins deux essais à des pressions différentes sont nécessaires pour déterminer c et φ . Ainsi, la seule description du chemin de chargement en terme de q/p permet de décrire les variations de l'angle de frottement et de l'orientation du plan de glissement dans le matériau.

Il faut remarquer que le sens physique de la "rupture" change en fonction de la cohésion. Pour les matériaux non cohésifs, il s'apparente à un seuil plastique qui peut correspondre soit au pic des contraintes soit à l'état "critique" où la déformation est isochore. Lorsque la cohésion est élevée, la rupture se rapporte souvent au seuil de rupture fragile ou ductile en fonction de la nature des interactions cohésives.

1.1.2 Eléments de modélisation micromécanique

Comme on vient de le voir, des phénomènes propres aux matériaux granulaires comme la dilatance, ne peuvent s'expliquer qu'en considérant le caractère discret de ces matériaux. Contrairement aux fluides classiques, des blocages peuvent apparaître au cours de l'écoulement de grains confinés, par exemple dans un silo ou un sablier. Ces blocages sont dûs à des arches de particules qui résultent principalement des forces de frottement entre les particules qui conduisent à créer ainsi une structure "métastable". Dans le but de mieux comprendre les matériaux granulaires, la micromécanique entend, plutôt que de supposer un modèle homogénéisé de milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique, prendre en compte les phénomènes mis en jeu à l'échelle du grain pour expliquer le comportement macroscopique [32]. Dans ce type d'approche, pour un type de sollicitation donné, deux éléments vont jouer un rôle primordial dans le comportement mécanique : les propriétés des grains et les types d'interactions qu'ils développent au cours de la sollicitation. Ces propriétés vont influencer aussi bien le comportement mécanique à l'échelle des particules (échelle locale) que le comportement macroscopique d'un échantillon en termes de grandeurs géométriques englobées sous le terme de texture (compacité, anisotropie des contacts,...) et de grandeurs mécaniques (angle de frottement interne, angle de dilatance,...). Cependant, seules les grandeurs macroscopiques sont le plus souvent accessibles à la mesure expérimentale. L'accès aux grandeurs locales comme le nombre de contact par particule ou encore l'intensité des forces de contact développées dans un milieu granulaire ne sont accessibles qu'avec des moyens expérimentaux lourds [4, 54] ou dans des configurations expérimentales particulières [33, 41]. Un outil polyvalent permettant d'appréhender la richesse des comportements granulaires est la simulation numérique par éléments discrets (ED) initiée par Cundall [10]. Différentes méthodes comme la dynamique moléculaire ou la dynamique des contacts se classent dans cette catégorie et leurs aspects numériques seront détaillés ultérieurement (Chapitre 4). Les méthodes ED permettant de prendre en compte les propriétés des grains et des interactions, donnent accès aux grandeurs locales puis macroscopiques par un processus de moyennage sur un nombre suffisant de grains [24, 40]. Dans cette section, on se propose de décrire les éléments de base de ce type de simulation : les interactions et les grains.

1.1.2.1 Interactions entre grains

En général, la seule modélisation des interactions binaires (entre deux corps) suffit pour prendre en compte un phénomène physique dans les simulations ED. La réponse macroscopique d'un milieu granulaire à une sollicitation sera alors le reflet d'une réponse collective d'une multitude d'interactions locales.

Contact frottant

Le contact entre deux solides se traduit par une contrainte géométrique simple : deux corps en contact ne peuvent s'interpénétrer. La réalisation de cette condition, dite d'unilatéralité géo-

métrique, implique l'apparition de forces de contact répulsives permettant de maintenir les corps en contact ou de les séparer en détruisant le contact [39]. Les contacts sont créés par des collisions entre les particules donnant lieu à des chocs dont la mécanique est bien connue dans le cas de géométries simples comme les sphères [9]. Les lois de la dynamique ne suffisant pas pour résoudre un problème de choc, il faut prendre en compte le comportement des corps au cours de l'impact par une loi d'impact [38]. La plus simple de ces lois d'impact est sûrement celle mettant en jeu un coefficient de restitution qui résume le caractère dissipatif d'un choc à partir des vitesses avant le choc (notée $^-$) et après le choc (notée $^+$). On peut alors définir le coefficient de restitution normal $e_n = -v_n^+ / v_n^-$ comme le rapport des travaux, se réduisant au rapport des vitesses, des efforts mis en jeux lors de la compression du contact par rapport à la phase de restitution (décompression) [64]. Pour un choc parfaitement élastique $e_n = 1$ tandis qu'un choc parfaitement inélastique implique $e_n = 0$ et que les particules restent en contact. De la même manière, dans le cas de collisions non frontales, on peut définir le coefficient de restitution tangentiel $e_t = -v_t^+ / v_t^-$. Ces définitions comportent une simplification importante qui consiste à négliger l'influence mutuelle entre les composantes normales et tangentielles de la vitesse au contact. En toute rigueur, le lien entre les vitesses (v_n^+, v_t^+) avant la collision et les vitesses (v_n^-, v_t^-) après collision s'exprime par une matrice appelée opérateur de collision :

$$\begin{pmatrix} v_n^+ \\ v_t^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{nn} & e_{nt} \\ e_{tn} & e_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n^- \\ v_t^- \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Mais cet opérateur a été peu étudié expérimentalement [14].

Pour un contact binaire, le seul moyen de créer un contact survivant au choc, dit persistant, est que le choc dissipe toute l'énergie cinétique des particules et soit donc parfaitement dissipatif ($e_n = e_t = 0$). Cependant, dans une optique multicontacts comme dans les milieux granulaires denses où une particule possède plusieurs contacts avec des particules voisines, cette condition d'inélasticité n'est plus nécessaire pour créer un contact persistant. En effet, la conservation de la quantité de mouvement ne s'applique plus aux deux seules particules impliquées dans le choc mais à la chaîne de particules en contact. Ainsi, un choc élastique à une extrémité de la chaîne se traduit par l'ouverture d'un contact à l'autre extrémité tandis que la particule impactante reste au contact de la particule impactée. Un exemple simple de ce phénomène est le pendule de Newton.

Au cours d'un contact, qu'il survive au choc ou non, d'autres forces que les forces normales impliquées dans la répulsion des particules apparaissent si des frottements sont générés au contact. Le frottement est classiquement décomposé en deux contributions : le frottement de glissement et le frottement de roulement.

Le frottement de glissement intervient, entre deux solides en contact, par le développement d'une force de frottement F_t s'opposant au mouvement relatif tangent au plan de contact. On résume classiquement les propriétés de la force de frottement par [15] :

- La force de frottement est indépendante de l'aire apparente de la surface de contact.
- La force de frottement en glissement est proportionnelle à la force normale F_n appliquée au contact telle que $F_t = \mu F_n$ où μ est le coefficient de frottement.

- Le coefficient de frottement μ dépend uniquement des matériaux en contact et est constant au cours du glissement.

Le frottement sec trouvant son origine dans la plastification des aspérités des surfaces en contact, on peut montrer l'indépendance de la force de frottement à l'aire apparente [15]. De plus, on distingue en général deux coefficients de frottement : le coefficient de frottement statique μ^s correspondant à la force tangentielle nécessaire pour déclencher le glissement et le coefficient de frottement dynamique μ^d correspondant à la force tangentielle nécessaire pour entretenir le glissement d'un contact [15]. Généralement, il est plus difficile d'initier le glissement que de l'entretenir ce qui impose $\mu^s > \mu^d$. Cette différence est à l'origine du phénomène de mouvement intermittent d'un solide frottant (stick-slip) entraîné par un dispositif élastique capable de stocker puis de restituer de l'énergie [15]. Ce phénomène participe à la création des vibrations sonores souvent émises lorsque le frottement de glissement est mis à contribution (frein, violon, ...). Dans ce travail, nous nous limiterons à la prise en compte du frottement de glissement seulement à travers le coefficient dynamique μ^d tel que $\mu^d = \mu^s = \mu$.

Le frottement de roulement se manifeste à travers le ralentissement progressif, jusqu'à l'arrêt complet, d'un corps roulant librement sans glissement (soumis uniquement à la gravité) sur un plan horizontal. Une manière simple de comprendre ce phénomène est de considérer que, sous un chargement N normal au plan de roulement, la zone de contact se déforme dissymétriquement et génère une résultante des forces de contact d'intensité $(-N)$ mais décalée vers l'avant du corps roulant. Ce décalage implique un moment s'opposant à l'avancement du corps roulant. Par analogie avec le cas du glissement, on établit un coefficient de frottement de roulement comme un nombre sans dimension permettant de fixer un moment seuil M_s au delà (respectivement en deçà) duquel la rotation relative des corps en contact est autorisée (respectivement interdite) tel que $M_s = \mu_r M$. Dans le cas de deux disques, M s'exprime à partir de la force normale au contact F_n et d'une longueur, généralement la moyenne des diamètres des particules en contact.

De nombreux matériaux granulaires, dits pulvérulents, sont caractérisés par le fait que les grains n'interagissent que par des interactions de contact frottant. A l'état naturel, les sables, les graves, les céréales (riz, blé) sont des exemples de granulats pulvérulents. Ce type de matériaux est aussi très employé dans l'industrie à travers, par exemple, les produits de carrières, les comprimés pharmaceutiques ou encore le ballast ferroviaire. En dehors du cas des matériaux granulaires pulvérulents, on distingue une autre classe de matériaux granulaires dits cohésifs. Ils sont caractérisés par la présence de forces, agissant à distance ou à l'interface, qui s'opposent à la séparation des particules.

Interactions de cohésion

On se propose ici de décrire succinctement les différents types de cohésion fréquemment rencontrés dans les matériaux granulaires. Une première distinction peut être faite entre les matériaux à faible cohésion comme les poudres humides et les matériaux granulaires à forte cohésion où un lien solide existe entre les particules, comme c'est le cas pour le béton.

faible cohésion : Pour de très petites particules, de l'ordre de la dizaine de μm , une adhésion d'origine physico-chimique apparaît spontanément entre les particules à travers les forces de Van der Waals, des forces électrostatiques et des éventuelles liaisons chimiques entre les particules [19, 22, 16]. La cohésion des poudres et des suspensions colloïdale résulte de ce type d'interaction. Pour des particules de taille millimétrique, les forces d'adhésions peuvent provenir de l'énergie de surface des particules. Deux modèles, JKR [31] et DMT [13], basés sur la théorie du contact de Hertz s'attachent à décrire la force d'adhésion entre deux particules en contact ou très proches. Un autre type de cohésion d'intensité relativement faible est dû à la présence d'un liquide dans un milieu granulaire : la cohésion par capillarité [55, 61]. Loin de la saturation, un liquide se distribue entre les particules sous la forme de ponts capillaires capables de générer une résistance à la traction. L'intensité de la force d'attraction développée par un pont capillaire dépend de la quantité de liquide, de la nature du liquide, de la distance entre les particules et de leurs propriétés (taille, état de surface). Ce type de cohésion est notamment responsable de la tenue mécanique des sols humides, en particulier des sables.

forte cohésion : La cohésion par cimentation est due à la présence d'un "ciment" au sein d'un matériau granulaire capable de créer des joints solides entre les particules. Le comportement mécanique de cette classe de matériaux, dits matériaux granulaires cimentés, dépend des propriétés du lien solide, de son volume mais aussi des caractéristiques mécaniques de l'interface entre les particules et le liant. Un exemple de ce type de matériau est le béton qui est un granulats composé de sable et gravier noyés dans du ciment hydraulique servant de liant [12].

1.1.2.2 Propriétés des particules

Les principaux facteurs qui influencent le comportement mécanique d'un assemblage de particules sont le matériau constitutif des particules, leurs caractéristiques géométriques et la répartition de leurs tailles.

Matériau : Dans le cas de grains homogènes, la seule matière dont ils sont constitués conditionne fortement leurs caractéristiques physiques et chimiques. Par exemple les argiles, cristaux colloïdaux d'alumino-silicates hydratés, fréquemment rencontrés dans les sols se présentent sous la forme de petites particules allongées (inférieures au μm) capables, en présence d'eau, de générer par réaction chimique une cohésion importante [37]. Au contraire, les minéraux à base de silice (quartz, mica, . . .) donnent naissance à des particules "massives" de tailles supérieures interagissant principalement par contact ; on parle alors de sol granulaire. De plus, la matière constituante "transmet" ses caractéristiques mécaniques (élasticité, résistance à la rupture) aux grains mais pas au matériau granulaire. Dans le cas de grains composites, comme les grains de l'industrie agro-alimentaire (blé, maïs), il suffit de déduire les caractéristiques homogénéisées en fonction des proportions de chaque constituant [65].

Forme : La forme des particules est une caractéristique intrinsèque jouant un rôle majeur dans le comportement mécanique des milieux granulaires [57, 36, 5]. L'introduction d'une élongation des particules change le comportement mécanique [47, 2]. De part les différents minéraux entrant dans leur composition, les sols granulaires sont sûrement les matériaux naturels présentant

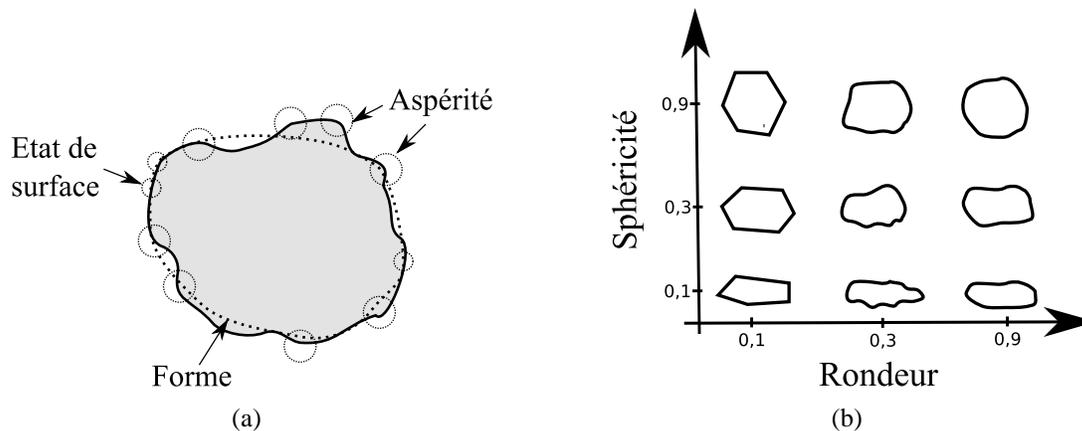


FIG. 1.3 – *Eléments de qualification de la forme d'un grain en fonction de l'échelle d'observation : (a) Classification des grains à l'échelle de la forme en termes de rondeur et de sphéricité (b).*

les formes de grains les plus variées. Dans ce cadre, la forme des grains a fait l'objet de nombreuses classifications dont on ne retiendra que les aspects essentiels [37]. La caractérisation de la forme des particules est dépendante de l'échelle d'observation (figure 1.3(a)). A l'échelle de la particule, on décrit la forme générale de la particule en termes de sphéricité, de rondeur, d'élongation... A une échelle inférieure, celle des aspérités ; on va plutôt décrire l'état de surface des particules en termes de rugosité, rondeurs des sommets... En mécanique des sols, on limite la description des particules à l'échelle observable par des dispositifs optiques. A cette échelle, on peut résumer la forme des particules en termes de sphéricité et de rondeur par opposition à l'élongation et l'angularité. On peut également définir la sphéricité d'une particule comme le rapport du diamètre d'une sphère de volume identique et du diamètre de la sphère circonscrite. De la même manière, la rondeur est définie par le rapport entre le rayon de courbure moyen des "faces" et du rayon de la plus grande sphère inscrite. Ainsi, comme le montre la figure 1.3, la sphéricité qualifie l'élongation de la particule tandis que la rondeur qualifie l'angularité des particules.

Répartition des tailles : Au même titre que les constituants et la forme des grains, un aspect important est la distribution des tailles de grains [52]. La mesure de la taille d'un grain extrait de l'échantillon n'apporte que très peu d'information et se révèle sans intérêt. Par contre, la mesure de la distribution des tailles de grains apporte des informations sur les tailles mises en jeu ainsi que sur les proportions de chaque taille de particules présente dans le matériau. Dans les matériaux granulaires naturels ou industriels, les grains ne sont que rarement de la même taille, on parle alors de polydispersité des tailles. Cette caractéristique constitutive joue un grand rôle dans le comportement mécanique des matériaux granulaires au sens où la présence de différents ordres de grandeurs de taille de grains change radicalement l'arrangement des particules [71]. Le comportement macroscopique étant dépendant du réseau de contacts qui s'établit entre les grains, on comprend qu'une modification de l'arrangement modifie également les caractéris-

tiques, autant locales que macroscopiques, d'un matériau granulaire. Malgré ce constat intuitif, bien peu de travaux se sont intéressés à la polydispersité en tant que problématique d'une étude mécanique [75]. De plus ces travaux se sont souvent limités à des distributions de tailles simples comme des distributions binaires ou ternaires [17, 18, 44]. Le plus souvent, que ce soit expérimentalement ou numériquement, on introduit une légère polydispersité pour éviter des phénomènes de cristallisation lorsqu'on travaille avec des billes sans se préoccuper de son éventuelle influence sur les résultats. Le but de ce travail est précisément de mettre en évidence le rôle spécifique de la polydispersité sur la texture et sur le comportement mécanique des matériaux granulaires.

1.2 La polydispersité

1.2.1 Définitions et exemple de classification

Étymologiquement “polydisperse” signifie plusieurs sources de dispersion que l'on résume, par abus de langage, à la seule dispersion des tailles de particules. Les autres sources de dispersions peuvent être la forme des particules, les masses, ou encore l'état de surface. Par opposition, un matériau est dit monodisperse lorsque toutes ses particules ont strictement les mêmes caractéristiques. Cependant, les collections d'objets monodisperses, singulières à l'état naturel, sont rares car elles supposent une parfaite maîtrise du processus de fabrication. On parlera alors de granularité pour qualifier les proportions de grains de différentes tailles et d'analyse granulométrique pour déterminer, par mesure physique, la granularité d'un matériau granulaire.

Selon les procédés de mesures granulométriques employés (voir détails dans la section suivante), on a accès à deux grandeurs caractérisant la granularité : le nombre de particules en fonction de leur taille ou la masse correspondante en fonction de leur taille. L'information du nombre de particules d'une taille donnée permet d'évaluer la répartition des densités de probabilité des tailles tandis que la masse permet d'évaluer la répartition de la fraction massique que représente chaque taille. Bien sûr, dans le cadre de granularités continues, la probabilité ou la fraction massique d'une taille d n'a pas de sens, seule la prise en compte des particules de tailles comprises entre $d - \delta d$ et $d + \delta d$ permet de calculer des grandeurs pertinentes.

Cette constatation conduit naturellement à construire des distributions, de densité de probabilité ou de fraction massique en fonction de la taille, pour représenter la granularité. Ce type de représentation probabiliste fait naturellement apparaître la notion de classe granulométrique définie par un intervalle fini de taille de grains. En cumulant ces distributions, on obtient respectivement la fonction de répartition de la variable aléatoire “taille des particules” et ce que l'on appelle classiquement la courbe granulométrique cumulative. La figure 1.4 montre que les représentations d'une même distribution en termes de probabilités et de fractions massiques ont des formes bien différentes. Par contre, ces deux courbes soulèvent le problème de la représentativité des tailles extrêmes d'une distribution polydisperse. Que ce soit en terme de probabilité ou de fraction massique, à partir de quelle “intensité” doit-on considérer qu'une classe n'est

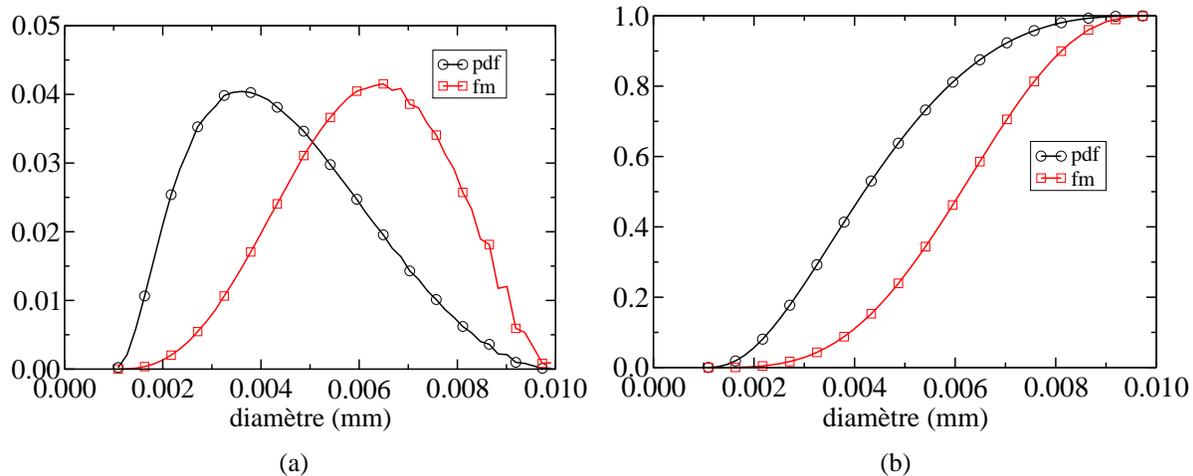


FIG. 1.4 – Granularité d’un matériau dont les tailles sont comprises entre 0,001 mm et 0,01 mm. (a) Représentations non cumulées de la densité de probabilité (pdf) et des fractions massiques (fm). (b) Représentations cumulées de la densité de probabilité (pdf) et des fractions massiques (fm). Pour ne pas alourdir les graphiques les barres de l’histogramme ne sont pas représentées, les courbes passent par le centre de la borne supérieure de chaque barre.

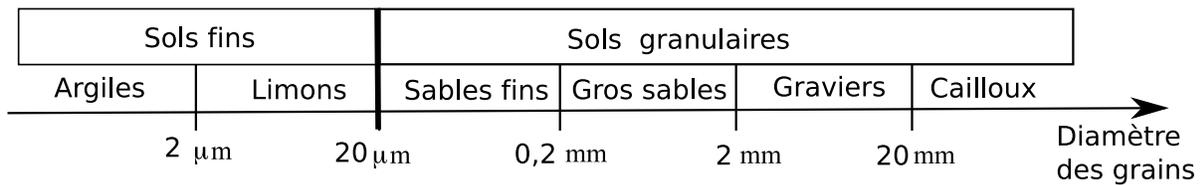


FIG. 1.5 – Classification élémentaire des sols .

pas significative ou en d’autres mots, quelle tailles maximale et minimale doit on attribuer à une granularité ? Dans le cas des sols par exemple, si les tailles maximales sont souvent identifiables avant la mesure, il existe fréquemment une classe de très petites particules d’origines diverses (argile, érosion des particules) appelées fines que l’on peut considérer soit comme parasite soit comme constituant à part entière de la granularité. Ce choix dépend essentiellement de l’usage prévu du sol étudié. Si l’on souhaite un matériau plutôt pulvérulent on éliminera un maximum de particules argileuses et on gardera ces particules si on souhaite un matériau cohésif.

Le besoin de granulats de qualités et adaptés aux besoins du génie civil moderne a conduit à mettre en place des appellations des différentes tailles de granulats ainsi que des qualificatifs concernant la forme de la distribution granulométrique. Une classification élémentaire des sols (correspondant à la norme NF P18-560) en fonction du diamètre des grains est donnée par Schlosser [60] et est représentée figure 1.5.

Ainsi, dans cette classification on distingue deux grandes familles de sols : les sols grenus

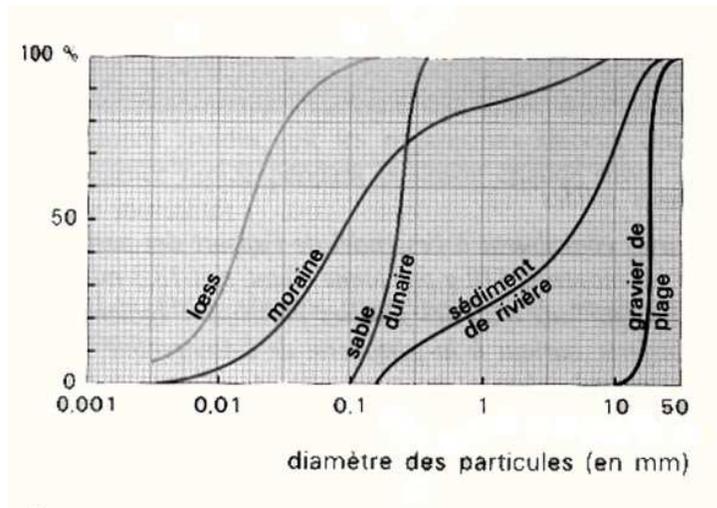


FIG. 1.6 – Exemples de courbes granulométriques.

ou granulaires où les particules interagissent par contact frottant et les sols fins où des interactions de cohésion peuvent apparaître. Comme on le verra en détail dans la section suivante, le diamètre des grains représenté ici n'est qu'une équivalence de taille donnée par la procédure de mesure. Bien d'autres classifications existent (ASTM, AASHTO, MIT [52]) et diffèrent sur les bornes de validité des appellations de chaque type de sol ainsi que sur les sous-classes (fin, moyen, grossier). Ces classifications ne s'intéressent qu'à la taille des particules mais aucunement à leur répartition. La figure 1.6 montre des exemples de courbes granulométriques représentées en échelle semi-logarithmique. Cette représentation permet d'apprécier facilement les différentes classes granulométriques mises en jeu dans un échantillon de sol.

1.2.2 Analyse granulométrique

Dans cette partie, nous allons préciser différents procédés classiques utilisés pour mesurer la granularité. Ces procédés se distinguent principalement par la taille des particules qu'ils sont capables de mesurer ainsi que le type d'information qui en résulte (nombre ou masse). Malgré toutes les précautions d'usage et la précision du dispositif de mesure, une estimation "juste" de la granularité suppose que l'échantillon analysé soit représentatif du milieu réel dont il a été extrait. En effet, l'échantillon ne représente qu'une infime partie d'un matériau granulaire dont l'étude totale est impossible. Il convient alors de multiplier les échantillons en s'assurant que la méthode de prélèvement assure une reproductibilité suffisante.

Une des méthodes de mesure de la granularité des sols grenus est le tamisage. Cela consiste à séparer, au moyen d'une colonne de tamis, un échantillon en plusieurs classes granulaires. Selon la taille des particules passantes à travers le tamis, ce dernier est construit à partir de tôle perforée à trous carrés ou de fils métalliques tissés pour former des ouvertures carrées,



FIG. 1.7 – Tamis en tôle perforée et en maille métallique (a). Tamiseuse en ordre de fonctionnement (b).

figure 1.7(a). On appellera alors l'ouverture nominale d'un tamis, le côté d'une maille carrée dans laquelle un grain peu passer, entachée de la tolérance de construction. Pour les granulats issus de carrières par exemple, l'ouverture nominale des tamis débute à $0,063\text{mm}$ et croit en suivant une progression géométrique de raison $\sqrt[20]{10} \simeq 1,12$ jusqu'à une ouverture maximale de 90mm . Ce type de suites géométriques désignées par R_x , introduites par Charles Renard en 1870, décrivent les $x + 1$ tailles normalisées suivant une progression géométrique de raison $\sqrt[x]{10}$, entre une taille minimale (inclusive) et une taille dix fois plus grande. Pour les granulats supérieurs à 90mm , correspondant aux enrochements, on utilise des tamis formés de barres métalliques d'ouvertures $125, 180, 250$ et 360mm . Ainsi, le tamisage ne fournit que l'estimation d'un diamètre équivalent des particules au sens où les bornes des classes granulométriques sont assimilées à l'ouverture des tamis. Pour des particules très rondes, l'estimation est fiable tandis que pour des particules fortement allongées la seule information d'un diamètre équivalent est insuffisante.

La mesure de granularité par tamisage consiste à placer une masse connue de "grains" au sommet d'une colonne de tamis classés par ouverture de maille décroissante de haut en bas puis à faire vibrer la colonne à l'aide d'une tamiseuse, figure 1.7(b). A la fin de l'essai, le refus de chaque tamis représente la fraction massique des particules de tailles supérieures à l'ouverture du tamis refusant et inférieures à l'ouverture du tamis immédiatement supérieur. Ce type de mesure, facile à mettre en œuvre, présente l'inconvénient de rendre impossible la mesure des très petites particules de l'ordre du μm . En effet, pour ces tailles de particules, les fils employés dans la fabrication des tamis sont très fins rendant les tamis fragiles et déformables. Pour les sols fins et les poudres fines, on procède à la mesure de la granularité par sédimentation.

Les mesures par sédimentation consistent à laisser décanter une suspension de grains dans un liquide visqueux sous l'action de la gravité ou d'une centrifugation. Cette analyse granulométrique repose sur la loi de Stokes donnant la vitesse de chute d'une particule sphérique dans un liquide en fonction du diamètre, de la viscosité du fluide et des masses volumiques des particules et du liquide. De manière similaire au tamisage, on obtiendra des diamètres équivalents aux tailles des particules réelles. Ainsi, à partir d'une suspension homogène, la mesure de la cinétique du front de disparition d'une classe granulométrique depuis la surface permet d'évaluer la masse que représente cette classe. On peut aussi mesurer l'évolution de l'absorbance de la suspension en fonction du temps pour remonter à la granulométrie. Cependant, avec ce type de mesure optique, les phénomènes de diffraction deviennent importants lorsque la taille des particules analysées est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la lumière utilisée. Contrairement à cette méthode où les phénomènes optiques sont indésirables, un autre type de méthode de mesure de granularité en tire profit : la diffraction laser.

De même que la sédimentation, la diffraction laser s'intéresse à la mesure de la granularité des poudres fines à travers la mesure de la diffraction créée par une suspension de particules dans un liquide. Cette méthode introduite dans les années 1970, suppose que les particules en suspension sont sphériques (diamètre équivalent) et opaques, la longueur d'onde du laser est inférieure à la taille des particules et enfin que les particules sont animées d'un mouvement aléatoire. Après estimation de la diffraction générée par le liquide seul, la diffraction créée par les particules en suspension permet d'établir une courbe granulométrique. Les mesures étant très rapides, on peut réaliser des milliers de mesures en quelques secondes afin d'améliorer la statistique des tailles de particules.

Ces méthodes présentent l'inconvénient de ne donner aucune information sur la forme des particules. Pour pallier ce problème, des systèmes optoélectroniques ont été développés pour étudier la forme des particules et ainsi obtenir une granularité très proche de la réalité. Cependant, ces méthodes nécessitent de fixer au préalable des critères morphologiques (plus grand axe d'un ellipsoïde par exemple) pour comparer les tailles de particules entre elles afin de construire la courbe granulométrique. La puissance croissante des ordinateurs a permis de mettre au point des logiciels performants de reconnaissance de forme à partir de clichés ou de numérisation avec un scanner, d'un granulat réparti sur un plan ("ImageJ" par exemple). La statistique des formes est alors réalisée sur la face en contact avec le plan qui est, le plus souvent, la plus grande face. Cependant, cette méthode nécessite une répartition lâche des particules (pas de contact) pour que la reconnaissance soit efficace, ce qui impose un nombre de particules relativement faible.

Pour contourner cette difficulté, un appareil capable d'analyser une grande quantité de granulats a été mis au point, notamment au LCPC depuis les années 1980 [7], le vidéogranulomètre (figure 1.8). Un essai consiste à introduire un échantillon de granulats refusés au tamis de 1mm et passant au tamis de 63mm dans la trémie de l'appareil, les particules sont alors dispersées et positionnées sur leurs plus grandes surfaces par le couloir vibrant. Enfin, elles sont précipitées en chute libre dans la zone d'analyse par le tambour. Dans sa chute, chaque particule crée une ombre sur les cellules photosensibles rendant ainsi possible l'analyse de la forme des particules

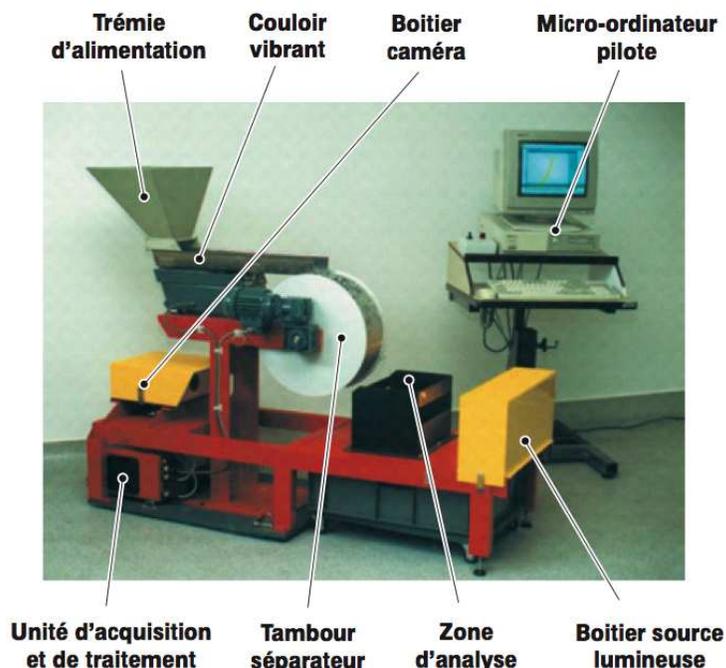


FIG. 1.8 – Vue d'ensemble du vidéogranulomètre développé au LCPC.

en temps réel. En associant un modèle de forme numérique (ellipsoïde) pour chaque grain on peut évaluer des grandeurs pertinentes pour qualifier la forme des particules et déduire ensuite une courbe granulométrique tenant compte de la forme des particules. De part son automatisation poussée, ce dispositif permet de traiter rapidement de gros échantillons de sols pour obtenir une statistique satisfaisante sur la courbe granulométrique.

1.2.3 Problématique de l'empilement et du remplissage d'espace

Comme on l'a évoqué précédemment, pratiquement tous les matériaux granulaires réels sont polydispersés et présentent des variabilités des propriétés de grains telles que la forme, la constitution minéralogique ou les tailles des grains. La variabilité des tailles, résumée sous le terme de granularité, apparaît comme un composant essentiel dans la fabrication et l'usage de la matière en grains.

En effet, la granularité peut être vue comme un objectif à l'issue d'un processus industriel ou encore comme le résultat d'un phénomène naturel. Dans le cadre industriel, les opérations de broyage rencontrées notamment dans les industries chimique, pharmaceutique et agro-alimentaire génèrent des poudres (principe actif, farine de céréales) dont la granularité doit être adaptée à leur usage final. De même, la granularité observée dans les pierriers de montagne résulte du phénomène naturel d'érosion qui, par l'action combinée de plusieurs facteurs (climat, frottement, végétation), décompose des massifs rocheux en une collection de particules de

différentes tailles (figure 1.9(a)).

Au contraire, dans de nombreuses applications industrielles, la maîtrise de la granularité est un point obligatoire vers des applications toujours plus performantes. Par exemple, la granularité d'une poudre conditionne fortement sa surface spécifique et donc sa capacité à réagir chimiquement avec le milieu dispersant qui est généralement l'air ou un liquide. Au lieu d'exploiter les propriétés des grains, les filtres granulaires (à sable dans l'assainissement des eaux domestiques) mettent à profit le caractère poreux des matériaux granulaires à travers leur capacité à laisser s'écouler un fluide tout en retenant des particules en suspension. La granularité intervient alors sur la taille des particules que le filtre peut retenir. Le génie civil emploie beaucoup de granulats de différents ordres de tailles selon le type de l'ouvrage à réaliser. Par exemple, les enrochements (figure 1.9(b)) ou les gabions (figure 1.9(c)) servant à stabiliser un terrain sont souvent constitués de pierres de différentes tailles pour en optimiser la compacité et la tenue à la compression.

D'une manière générale en géotechnique, la possibilité de construire un ouvrage dépend fortement des propriétés naturelles du sol local à supporter les charges inhérentes au fonctionnement prévu. Parmi ces propriétés, la granularité va influencer le comportement à travers les petites particules (limons, argiles) et leurs comportements au contact de l'eau. De nos jours, le matériau de construction le plus couramment utilisé dans la construction d'ouvrages d'art est sûrement le béton (figure 1.9(e)). De même, pour les surfaces de roulement (les routes) ou les surfaces de manutentions, on utilise communément les enrobés bitumineux (figure 1.9(d)). Ces deux matériaux (bétons et enrobés bitumineux) se classent dans la catégorie des matériaux granulaires cimentés : ils sont constitués d'un granulats à granularité étendue lié par un ciment lui conférant une grande résistance à la compression pour les bétons et à l'usure pour les enrobés. On présente ci-dessous divers aspects liés aux bétons afin de mettre en évidence des problématiques rencontrées avec les matériaux granulaires polydispersés.

Le béton est un mélange de granulats à granularité étendue (des graviers aux particules fines) agglomérés par un liant hydraulique (ciment). Si le granulats employé se limite à la classe des sables, on parle alors de mortier ou de ciment de sable. Les qualités d'un béton sont évaluées notamment en termes de facilité de mise en oeuvre sur chantier, de coût, de comportement au séchage (retrait), de résistance à la compression après séchage et de durabilité à l'usure chimique et mécanique. Une de ces qualités est particulièrement dépendante de la granularité utilisée lors de la formulation : la résistance à la compression. En effet, après séchage, elle augmente avec l'étendue granulométrique. La résistance du béton trouvant son origine dans les liens des particules, une augmentation de l'étendue de la granularité vers les éléments les plus fins permet de créer, pour la même quantité de liant, des assemblages de particules plus denses et dont la surface d'interface granulats-liant augmente fortement impliquant ainsi une augmentation de la résistance. Ainsi, l'ajout de particules très fines comme celles d'une fumée de silice permet d'augmenter la résistance d'un béton classique (30 MPa) et de créer un béton haute performance dont la résistance à la compression peut atteindre 200 MPa. Au delà de l'aspect chimique et de l'interface granulats-liant, on va orienter l'étude sur la structure granulaire composant le squelette du béton et préciser les notions mises en jeu dans cette étude.



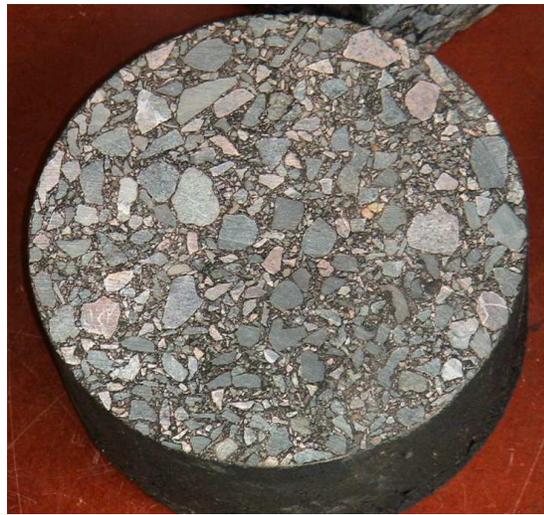
(a)



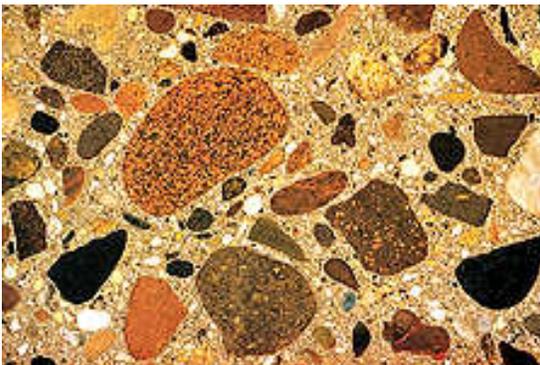
(b)



(c)



(d)



(e)



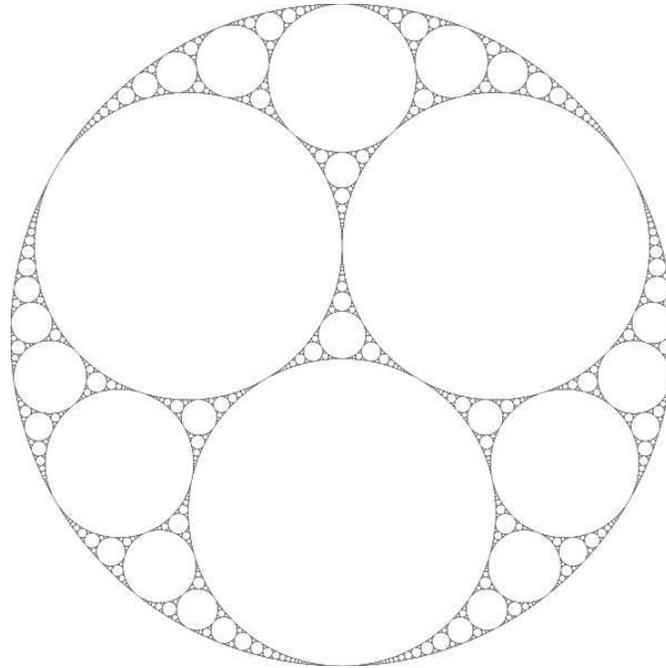
(f)

FIG. 1.9 – (a) Pierrier, (b) Enrochement, (c) Gabion, (d) Enrobé bitumineux, (e) Lamelle de béton, (f) Mur incas.

Comme on vient de le voir, la résistance d'un béton est fortement conditionnée par sa compacité, autrement dit par sa capacité à "bien remplir" l'espace. Le problème d'optimisation de l'espace est un problème universel, il revêt des aspects économiques (transport de marchandises), biologique (cellules de la peau, nids d'abeilles) et technologique. Cette question a été étudiée dans son cas le plus élémentaire par Kepler qui a formulé, dès le début du 17^e siècle, une conjecture énonçant qu'un empilement de sphères identiques présente une compacité maximale s'il est arrangé selon une maille cubique face centrée. Cette conjecture ne fut démontrée qu'à la fin du 20^e siècle par T. Hales. Dans un cadre monodisperse, les notions d'ordre et de compacité maximale sont très liées : un empilement désordonné de particules simples (sphères ou polyèdres réguliers) monodisperses présente une compacité plus faible que son homologue ordonné. Par contre, dans un cadre polydisperse, un ordre cristallin devient beaucoup plus difficile, voir impossible, à obtenir et la compacité d'un granulat polydisperse sera plutôt dépendante de sa capacité à créer un arrangement désordonné dense. Ainsi se pose naturellement la question des conditions nécessaires à la réalisation de tels assemblages en termes de polydispersité et de méthode de construction.

En ces deux seuls termes de méthode d'assemblage et de granularité, on peut distinguer deux approches de remplissage optimal de l'espace : la méthode définit la granularité ou inversement, la granularité définit la méthode de construction. La première approche consiste à sélectionner rigoureusement les particules en vue d'une mise en place selon une méthode définie. Un exemple simple de ce type d'approche est représenté par les murs des forteresses incas constitués de blocs de pierres polygonaux (figure 1.9(f)). Leurs formes sont ajustées en fonction des autres blocs au moment de la pose et ne sont liés par aucun mortier. Ainsi, ces murs remplissent complètement l'espace mais requièrent un ajustement précis de la forme et de la position de chaque particule. Un autre exemple est la construction des cercles d'Appolonius de Perga, mathématicien antique d'origine grecque. Cette construction géométrique repose sur le fait que trois cercles tangents deux à deux et non sécants, possèdent deux autres cercles tangents et non sécants. Ainsi, en partant de trois cercles identiques tangents et en itérant cette règle indéfiniment, on obtient un empilement de disques, présenté figure 1.10, qui tend à remplir complètement l'espace à mesure que les tailles de particules placées tendent vers zéro. Cette construction, extensible au cas tridimensionnel, est fractale et possède une dimension de Hausdorff proche de 1,3. On peut aussi démarrer le processus avec des disques de tailles différentes et placés différemment pourvu qu'ils soient tangents. Dans ce type de procédure, la granularité est fixée par des règles de construction imposant un ordre hiérarchique dans le placement des particules.

La deuxième approche, consistant à adapter la méthode d'assemblage à la granularité, est en fait l'approche naturellement employée lors de l'usage de granulats en créant des assemblages désordonnés. Par exemple, pour remplir une boîte de sable et créer un assemblage lâche, on déposera le sable par pluviation tandis qu'une étape supplémentaire de compactage sera souhaitable pour obtenir un état plus dense. Cependant, l'emploi de granulats polydisperses fait apparaître un phénomène spécifique de l'état granulaire : la ségrégation. En effet, au cours d'une sollicitation, un mélange homogène de grains différents (densité, forme, taille, frottement) a naturellement tendance à disparaître au profit de rassemblements de grains de mêmes

FIG. 1.10 – *Empilement appolonien.*

propriétés créant ainsi des mélanges non homogènes. Par exemple, les bétons autoplaçants sont plus fluides que les bétons classiques pour faciliter leur mise en œuvre mais sont plus sujet à la ségrégation. En effet, les particules étant plus libres, elles ont plus facilement tendance à se séparer au cours de la mise en place et donnent alors lieu à un béton hétérogène. De ce fait, la formulation de tels bétons doit être adaptée pour minimiser la ségrégation. En tenant compte de ce phénomène, surtout dans le cadre d’une étude sur la granularité, la méthode de construction d’assemblages désordonnés, qu’ils soient réels ou numériques, doit garantir l’homogénéité des échantillons quelle que soit la granularité employée.

Ainsi que ce soit au cours de la mise en place ou de l’utilisation normale une fois sec, l’exemple du béton permet de mettre en évidence des problématiques génériques liées aux systèmes polydisperses auxquelles on tâchera de répondre dans ce manuscrit :

- Quelle est l’influence de la granularité sur la structure d’un assemblage homogène ?
- La granularité influence-t-elle le comportement macroscopique à l’équilibre et sous sollicitation quasistatique ?
- La présence de plusieurs échelles de longueurs dans le système influence-t-elle la transmission des forces ?
- Y-a-t-il une “spécialisation” ou un rôle spécifique des particules en fonction de leurs tailles ?
- Comment se comporte un matériau polydispersé en présence de cohésion ?

Deuxième partie

Génération des empilements denses : approche géométrique

Introduction

Lors d'une étude granulométrique, par tamisage par exemple, ou lors d'un essai mécanique en laboratoire, l'échantillon testé doit être représentatif de l'ensemble des propriétés du matériau. Cette condition implique que les différentes fractions granulométriques soient représentées de façon significative, en terme de nombre pour les plus grosses particules et en terme de masse pour les plus petites. Par ailleurs, l'étude mécanique d'un assemblage granulaire suppose que ce dernier a une taille supérieure à celle du Volume Élémentaire Représentatif (VER). Ces considérations s'appliquent bien évidemment à la modélisation et à la simulation numérique de granulats fortement polydisperses. Cependant, malgré l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, le nombre de particules dans une simulation à durée raisonnable est encore limité à quelques dizaines de milliers. Cette limitation impose un contrôle strict de la représentativité statistique et volumique de chaque classe de tailles de particules. Cette partie est consacrée, d'une part, à la résolution de ce problème et, d'autre part, au protocole de mise en place de grands assemblages denses de particules fortement polydisperses. Le chapitre 2 présente une méthode générale de génération de distributions de tailles suivant une courbe granulométrique continue. La représentativité des distributions générées est contrôlée par des critères simples et explicites. L'impact de ces critères sur la qualité des distributions est également étudiée. L'influence de la polydispersité sur la texture granulaire est très peu étudiée dans la littérature. Ceci nous a conduit, dans une première approche, à réaliser des assemblages de particules par un processus purement géométrique. Cette approche, très efficace sur le plan numérique, a permis de réaliser une étude paramétrique détaillée de l'influence de la polydispersité sur la texture granulaire générée par le protocole choisi. Cette étude paramétrique fait l'objet du chapitre 3.

Gestion de la polydispersité

Sommaire

2.1	Génération d'une distribution de tailles suivant une courbe granulométrique	44
2.1.1	Génération par transformation inverse	44
2.1.2	Méthode proposée	46
2.1.3	Discrétisation de l'espace des tailles	47
2.2	Modélisation de la courbe granulométrique	48
2.2.1	Modèle de courbe granulométrique	48
2.2.2	Influence des paramètres de forme	50
2.3	Espaces paramétriques	51
2.3.1	Influence des critères de génération	51
2.3.2	Notions de réalisabilité et d'états accessibles	53

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode générale de génération d'une distribution de tailles de particules respectant une granularité donnée. Cette méthode fait appel à des critères de représentativité explicites dont on précisera l'influence sur la distribution générée. Cette méthode est appliquée à un modèle de courbe granulométrique permettant de varier la forme et l'étalement de la distribution des tailles de particules.

2.1 Génération d'une distribution de tailles suivant une courbe granulométrique

Comme on l'a vu au chapitre précédent, la granularité d'un granulat est relativement facile à mesurer mais l'opération inverse, consistant à générer une distribution de tailles de particules à partir de leur répartition massique, est moins directe. L'enjeu est alors de développer une méthode permettant de générer une distribution de tailles de particules statistiquement représentative d'une courbe granulométrique donnée. Une question importante se pose alors : " Qu'est ce qu'une distribution de tailles statistiquement représentative ? ". Il est difficile de répondre par l'absolu à cette question ; tout dépend de l'usage que l'on souhaite faire de cette distribution. Par exemple, le nombre total de particules peut être un premier indicateur de représentativité. Pour une étude statistique, quelques dizaines de milliers de particules semblent être un nombre minimum tandis que pour des simulations dynamiques, cette limite est plutôt un maximum pour des temps de calcul raisonnables. Dans le cas de simulations dynamiques de matériaux granulaires polydispersés, il apparaît essentiel de parvenir à assurer la représentativité statistique d'une distribution avec un nombre minimum de particules.

2.1.1 Génération par transformation inverse

La méthode de génération par transformation inverse est une méthode classiquement utilisée pour générer un échantillon de n réalisations d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F et de densité de probabilité $f = \frac{\partial F}{\partial X}$. Dans notre cas, la variable aléatoire X est la taille d des particules comprise entre d_{min} et d_{max} et le nombre de réalisations n est le nombre de particules souhaité. Le principe de cette méthode est le suivant :

- Soit Y la variable aléatoire (v.a.) définie par $Y = F(X)$. Cette variable aléatoire suit une densité de probabilité uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$. Sa fonction de répartition G est telle que $G(y) = P[Y < y] = y$.
- Soient y_1, \dots, y_n un échantillon de taille n d'une v.a. uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Les y_i peuvent être considérés comme des réalisations de la v.a. Y .
- Pour calculer les réalisations de x_i , il suffira alors de calculer la valeur de x_i correspondant à une valeur y_i de sa fonction de répartition

$$X = F^{-1}(Y) \Rightarrow x_i = F^{-1}(y_i) \quad (2.1)$$

Pour l'exemple, appliquons cette méthode à la distribution uniforme par fraction volumique (ou massique) dans le cas de particules circulaires. La distribution uniforme en volume $f_{uv}(d)$ est définie par la relation $f_{uv}(d) d^3 = cte$ qui exprime le fait que toutes les classes granulométriques ont le même volume. L'égalité des fractions volumiques implique que la distribution volumique cumulée est une droite passant par les points $(d_{min}; 0)$ et $(d_{max}; 1)$. De plus, f_{uv} représentant une densité de probabilité, son intégrale doit être unitaire ; on déduit alors l'expression (2.2) de $f_{uv}(d)$ et (2.3) de sa fonction de répartition $F_{uv}(d)$:

$$f_{uv}(d) = \frac{d_{max}d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \frac{1}{d} \quad (2.2)$$

$$F_{uv}(d) = \frac{d_{max}}{d_{max} - d_{min}} \frac{d - d_{min}}{d} \quad (2.3)$$

On en déduit facilement l'expression de l'inverse de la fonction de répartition :

$$F_{uv}^{-1}(y) = \frac{d_{max} d_{min}}{d_{max} + y(d_{min} - d_{max})} \quad (2.4)$$

Il suffira alors de générer n nombres aléatoires y_i entre 0 et 1 et de calculer leur image $F_{uv}^{-1}(y_i)$ pour obtenir n tailles de particules suivant une distribution uniforme par fraction volumique.

Cette méthode présente l'avantage d'être très simple à mettre en oeuvre à partir d'un générateur de nombres aléatoires compris dans l'intervalle $[0, 1]$. D'autres méthodes, plus performantes, de génération de distributions non-uniformes existent [34] mais la forme simple choisie suffit pour notre étude où la génération n'est pas une étape critique en terme de performances. Par contre, l'application directe de cette méthode nécessite de connaître l'expression de la fonction de répartition des tailles $F(d)$ et que cette fonction soit inversible. Par sa nature statistique, cette méthode n'assure que la représentativité en nombre des particules sans tenir compte de la représentativité volumique des particules. Autrement dit, les n particules générées sont elles suffisamment nombreuses pour assurer un volume représentatif à chaque classe de tailles ? De plus, pour générer une distribution de tailles à partir de sa répartition volumique cumulée, il faut d'abord évaluer la fonction de répartition correspondante. Hormis pour des distributions simples comme la distribution uniforme par taille des particules, cette étape peut être difficile pour des distributions complexes ou des distributions pour lesquelles on ne dispose pas d'une expression analytique. En effet, par définition on a :

$$h(d) = \frac{\int_{d_{min}}^d V(x)f(x)dx}{\int_{d_{min}}^{d_{max}} V(x)f(x)dx}, \quad (2.5)$$

où $h(d)$ est l'expression de la distribution volumique cumulée et $V(x)$ est le volume d'une particule de taille x . On comprend alors que relier explicitement $F(d)$ et $h(d)$ est délicat dans la majorité des cas. Nous avons alors choisi de développer une méthode de génération basée sur la méthode de transformation inverse mais permettant de s'affranchir de cette étape délicate.

2.1.2 Méthode proposée

La méthode présentée se propose : 1) d'évaluer de manière implicite la fonction de répartition $F(d)$ d'une distribution volumique donnée et 2) de contrôler le nombre de particules générées et leurs représentativités statistique et volumique, autant à l'échelle de la distribution (globale) qu'à l'échelle de chaque classe de tailles (locale), par l'usage de critères de représentativité explicites. Pour cela, on s'impose deux conditions de représentativité :

1. Le nombre de particules $N'_{p/c}$ dans chaque classe de tailles est supérieur à un nombre minimum $N'_{p/c}{}^{min}$.
2. Dans chaque classe de tailles, la fraction volumique d'une seule particule est faible devant celle représentée par la classe entière.

Dans le cas d'une distribution quasi-monodisperse, ces deux conditions sont équivalentes. Par contre, dans le cas polydisperse, ces conditions sont critiques pour les classes les moins peuplées qui sont souvent les classes des plus grosses particules. Ainsi, une valeur élevée de $N'_{p/c}{}^{min}$ garantit que les particules "rares" sont statistiquement représentées et que le volume d'une seule particule est faible devant celui de la classe.

On considère alors que la distribution volumique cumulée est représentée par une fonction croissante continue $h(d)$, satisfaisant les relations $h(d_{min}) = 0$ et $h(d_{max}) = 1$ qui traduisent simplement le fait que toute la masse de la distribution est composée de particules de tailles comprises entre d_{min} et d_{max} . La première étape est de discrétiser l'intervalle $[d_{min}; d_{max}]$ en N_c classes de taille définies sur les sous-intervalles $[d_{min}^i, d_{max}^i]$ d'amplitude $\Delta d_i \equiv d_{max}^i - d_{min}^i$ avec $i \in [1, N_c]$. On peut alors "décumuler" $h(d)$ sur chaque sous-intervalle afin d'obtenir la fraction volumique f_v^i de chaque classe de tailles :

$$f_v^i = h(d_{max}^i) - h(d_{min}^i). \quad (2.6)$$

Dans le cas d'une distribution volumique $h(d)$ non continue, l'étape de discrétisation peut être évitée si les discontinuités de $h(d)$ peuvent servir de classes de tailles. Par exemple, la répartition volumique expérimentale issue d'un tamisage est discontinue et représentée par une fonction en escalier. Les différentes ouvertures des tamis apparaissent alors comme une discrétisation "naturelle" de la distribution des tailles.

On considère alors que les tailles de chaque classe suivent une distribution uniforme par fraction volumique normalisée sur chaque sous-intervalle $F_{uv}^i(d)$. Cela revient à approcher la fonction $h(d)$ par N_c tronçons de droites passant par les points $(d_{min}^i; h(d_{min}^i))$ et $(d_{max}^i; h(d_{max}^i))$. Connaissant le diamètre moyen de chaque classe $d_m^i = F_{uv}^{-1}{}^i(0.5)$, on peut déterminer pour chaque classe une quantité n^i de particules (non entière) correspondant à un volume total unitaire :

$$n^i = \frac{f_v^i}{V(d_m^i)}. \quad (2.7)$$

On multiplie alors la quantité n_i par le facteur $N'_{p/c}{}^{min}/\min(n_i)$ où $\min(n_i)$ représente la valeur de n_i dans la classe la moins peuplée. On en extrait la partie entière afin d'obtenir une première évaluation du nombre de particules par classe N'_i tel que :

$$N'_i = E \left(\frac{N'_{p/c}{}^{min}}{\min(n_i)} n_i \right) \quad (2.8)$$

Cette étape assure que la classe de tailles la moins représentée contiendra au moins $N'_{p/c}{}^{min}$ particules. Le nombre total de particules ainsi évalué $N'_p = \sum_{i=1}^{N_c} N'_i$ dépend directement du nombre de classes N_c et du nombre minimum de particules par classe $N'_{p/c}{}^{min}$. Pour un couple de valeurs de N_c et $N'_{p/c}{}^{min}$ choisi, la valeur de N'_p obtenue peut être insuffisante pour assurer la représentativité globale que l'on s'est fixée. Afin de résoudre ce problème, on introduit le nombre total minimum de particules N_p^{min} . Ainsi, on s'impose que le nombre total de particules soit supérieur à N_p^{min} . Si $N'_p < N_p^{min}$, on multiplie les N'_i par le facteur N_p^{min}/N'_p pour finalement obtenir le nombre de particules N_i dans chaque classe i :

$$N_i = E \left(\frac{N_p^{min}}{N'_p} N'_i \right) \quad (2.9)$$

Les N_i représentent finalement une estimation du nombre de particules nécessaire pour satisfaire les conditions de représentativité que l'on s'est fixées. On peut alors déduire la répartition de densité de probabilité $P_i(d)$ des tailles d pour chaque classe i :

$$P_i(d) = \frac{N_i}{N_p} \quad (2.10)$$

La fonction de répartition correspondante $F(d)$ est obtenue par la somme des $P_i(d)$ pour les classes de tailles inférieures à d . Afin de générer la distribution finale, on réalise dans chaque classe N_i tailles de particule par transformation inverse de la distribution uniforme par fraction volumique normalisée sur chaque classe $F_{uv}^i(d)$.

2.1.3 Discrétisation de l'espace des tailles

Outre le nombre de classes N_c , le type de discrétisation utilisé lors de l'étape de décumulation a une influence sur la qualité de la génération. En effet, un type de discrétisation peut aider à satisfaire les conditions de représentativité tandis qu'un autre type va, au contraire, conduire à leur violation. Prenons l'exemple d'une discrétisation régulière comportant n classes d'amplitudes égales entre d_{min} et d_{max} . Un nombre élevé de classes va fournir une bonne approximation de la courbe mais la fraction massique représentée par chaque classe va diminuer à mesure que n augmente. Ce point est particulièrement critique pour les classes des plus grosses particules où toute la fraction massique peut être représentée par une seule particule et ainsi contrevenir

à la deuxième condition de représentativité. C'est notamment pour éviter ces problèmes que le nombre minimum de grains par classe a été introduit. Un moyen "naturel" d'améliorer ce point est d'utiliser une discrétisation non régulière où l'amplitude des classes croît avec la taille des particules. En effet, pour une même distribution et un même nombre de classes, avec une discrétisation non régulière croissante le nombre de grosses particules sera d'autant plus grand que la fraction massique des grosses particules est grande.

Une discrétisation non régulière adaptée à ce problème est une discrétisation fournissant, après décumulation, des fractions volumiques égales pour chaque classe de tailles. On qualifiera alors cette discrétisation d'équi-volumique. A condition de choisir une fraction volumique "raisonnable", les classes les plus peuplées seront bien représentées. En revanche, pour des distributions où la classe des plus grosses particules représente une faible fraction volumique mais sur plusieurs ordres de taille, ce type de discrétisation pose des difficultés. Dans ce cas, les grosses particules ne seront représentées que par une seule classe de grande amplitude dans laquelle la représentativité statistique sera médiocre. Un autre désavantage de cette discrétisation est sa dépendance vis-à-vis de la forme de la distribution modélisée. En effet, avant d'évaluer la justesse des paramètres de génération, il faut vérifier que ce type de discrétisation est "adapté" à la distribution à modéliser.

Une alternative à ce problème est d'utiliser une discrétisation non-régulière indépendante de la forme de la distribution. C'est le choix que nous avons fait en utilisant une discrétisation uniquement dépendante du nombre de classes N_c . Pour cela, on s'est inspiré des successions de tamis utilisés en laboratoire. L'ouverture des mailles successives suit une progression géométrique. Ainsi, les bornes successives des classes de tailles suivront une progression géométrique de premier terme d_{min} et de raison r donnée par :

$$r = \exp\left(\frac{\ln d_{max} - \ln d_{min}}{n_c}\right). \quad (2.11)$$

2.2 Modélisation de la courbe granulométrique

2.2.1 Modèle de courbe granulométrique

La méthode précédemment introduite permet, à partir de n'importe quelle distribution volumique de tailles, de générer la distribution des tailles correspondantes comprises entre d_{min} et d_{max} . Afin d'étudier l'effet de la polydispersité sur les matériaux granulaires, nous devons disposer d'un outil permettant de faire varier les deux composantes essentielles de la polydispersité : l'étalement et la forme de la distribution volumique. Cet outil va consister en un modèle de courbe granulométrique devant remplir quelques conditions importantes pour nos études ultérieures :

- il doit être simple, donc doit comporter un nombre minimum de paramètres pour varier l'étalement et la forme de la courbe granulométrique ;

- il doit être défini sur un intervalle fini ;
- il doit être capable de reproduire des distributions classiques comme les distributions en loi de puissance ;
- il doit pouvoir reproduire, dans l'optique d'applications, des courbes granulométriques fréquemment rencontrées dans l'ingénierie ; par exemple les courbes à double courbure dans le cas des sols granulaires.

Pour satisfaire ces conditions, nous avons choisi d'utiliser la distribution β sous sa forme cumulée définie par :

$$\beta(x, a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (2.12)$$

où $a > 0$ et $b > 0$ sont les deux paramètres de la distribution dont on discutera l'influence dans la suite. La fonction $B(a, b)$ est donnée par :

$$B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b), \quad (2.13)$$

où Γ est la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (2.14)$$

La distribution β cumulée est définie et normalisée sur l'intervalle $[0, 1]$ donc $\beta(0) = 0$ et $\beta(1) = 1$. Afin d'utiliser la distribution β cumulée comme modèle de courbe granulométrique pour des particules de tailles comprises dans l'intervalle $[d_{min}; d_{max}]$, on remplace l'argument x par le diamètre réduit défini par :

$$d_r(d) = \frac{d - d_{min}}{d_{max} - d_{min}}. \quad (2.15)$$

Quelles que soient les tailles extrêmes mises en jeu, le diamètre réduit présente l'avantage de varier dans l'intervalle $[0, 1]$. Cela nous permettra notamment de comparer, sur un même intervalle des grandeurs associées aux tailles des particules.

Finalement notre modèle de courbe granulométrique $h(d)$ s'exprime comme la distribution β cumulée des diamètres réduits :

$$h(d, a, b) = \beta(d_r(d); a, b). \quad (2.16)$$

Les paramètres a et b permettent de varier la forme de la distribution volumique $h(d)$ mais n'ont aucune influence sur l'étalement ; il faut donc introduire une paramétrisation de cette caractéristique. Une paramétrisation instinctive de l'étalement serait d'utiliser le rapport entre la taille de la plus grosse particule et celle de la plus petite : $R = d_{max}/d_{min}$. Cette paramétrisation est simple et d'interprétation directe ; par contre R n'a pas de borne supérieure. Dans le même esprit que le diamètre réduit d_r , nous contrôlons l'étalement plutôt par le paramètre s défini par :

$$s = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}}. \quad (2.17)$$

Le cas $s = 0$ correspond à une distribution monodisperse tandis que $s = 1$ correspond à une distribution “infiniment” polydisperse. Ainsi le lien entre R et s paraît évident :

$$s = \frac{R - 1}{R + 1}, \quad R = \frac{1 + s}{1 - s}. \quad (2.18)$$

2.2.2 Influence des paramètres de forme

Le modèle de courbe granulométrique développé satisfait deux des quatre conditions que l'on s'est imposées : il ne nécessite que trois paramètres pour faire varier forme et étalement de la distribution et il est défini sur un intervalle fini dans l'espace d_r . De plus, les seuls paramètres de forme a et b donnent accès à un riche éventail de formes de distributions contenant les distributions visées. En fonction des valeurs de a et b , la distribution volumique non cumulée est :

- $a < 1, b < 1$ en forme de U.
- $a < 1, b \geq 1$ ou $a = 1, b > 1$ strictement décroissante
 - $a = 1, b > 2$ strictement convexe
 - $a = 1, b = 2$ une droite
 - $a = 1, 1 < b < 2$ strictement concave
- $a = 1, b = 1$ uniforme sur $[0;1]$
- $a = 1, b < 1$ ou $a > 1, b \leq 1$ strictement croissante
 - $a > 2, b = 1$ strictement convexe
 - $a = 2, b = 1$ une droite
 - $1 < a < 2, b = 1$ strictement concave
- $a > 1, b > 1$ unimodale
- $a = b$ symétrique par rapport à $1/2$

On montre facilement que ce modèle donne accès à des distributions granulométriques cumulées classiques dont certaines sont représentées sur la figure 2.1 :

- $a = b = 1$ uniforme par fraction volumique
- $a = 3, b = 1$ uniforme par taille des particules
- $a = 1, b > 1$ loi de puissance strictement convexe
- $a > 1, b = 1$ loi de puissance strictement concave
- $a > 1, b > 1$ double courbure
- $a < 1, b < 1$ distribution se rapprochant du cas bi-disperse à mesure que a et b diminuent ; les tailles de particules sont concentrées autour de $d_r = 0$ et $d_r = 1$.

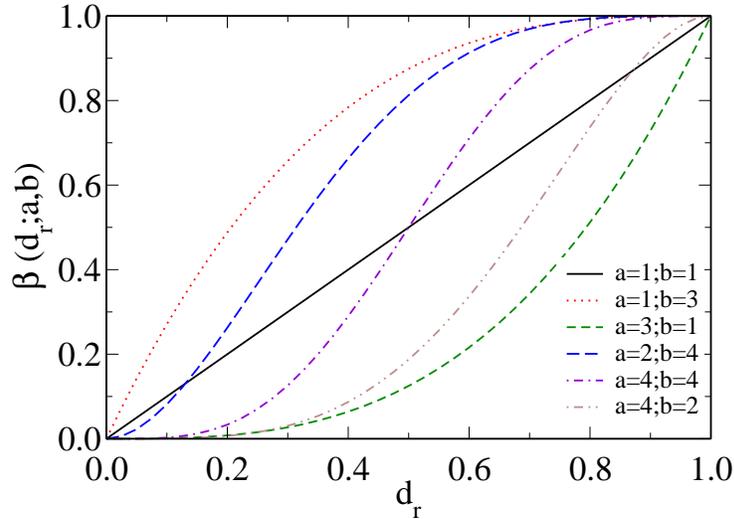


FIG. 2.1 – Exemples de distributions cumulées

2.3 Espaces paramétriques

On s'intéresse ici aux espaces paramétriques de génération ($N_c, N_{p/c}^{min}, N_p^{min}$) et de granulométrie (a, b, s). On mettra en évidence l'influence de chaque critère de génération sur la corrélation entre la granulométrie générée et celle représentée par $h(d)$. On introduira alors les notions de réalisabilité d'une distribution et de formes accessibles.

2.3.1 Influence des critères de génération

2.3.1.1 Protocole de comparaison

La méthode de génération nécessite de fixer trois paramètres majeurs qui sont le nombre de classes N_c , le nombre minimum de particules par classe $N_{p/c}^{min}$ et le nombre total minimum de particules N_p^{min} . Sachant que notre objectif est de générer des distributions représentatives avec un nombre minimum de grains, on étudie l'influence de ces paramètres sur la "qualité" de la distribution générée. Afin d'évaluer la qualité, on va comparer la courbe granulométrique obtenue $y^{exp}(d)$ à la courbe modèle $h(d)$ en calculant un coefficient de régression C_r sur k points défini par :

$$C_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (y^{exp}(d_i) - h(d_i))^2}{\sum_{i=1}^k y^{exp}(d_i)^2}}. \quad (2.19)$$

Les k tailles d_i servant à établir la comparaison suivent une discrétisation régulière géométrique entre d_{min} et d_{max} . Une valeur de C_r proche de 0 indique un bon accord entre la

courbe théorique et celle représentant la distribution générée. Pour établir l'influence des paramètres de génération, on va s'intéresser à trois distributions différentes ($a = 1; b = 3$; $a = b = 3$; $a = 3; b = 1$ et de même étalement $s = 0.98$ correspondant à un rapport $R = 100$). On fixe les valeurs de deux critères et on fait varier le troisième. Les valeurs par défaut des critères constants sont $N_c = 10$, $N_{p/c}^{min} = 10$ et $N_p^{min} = 2000$.

2.3.1.2 Nombre de classes

Le nombre de classes représente le nombre de tronçons de droites avec lesquels on va approcher la courbe de répartition volumique $h(d)$. Pour un type de discrétisation donnée, il est clair qu'un nombre de classes important assurera une bonne approximation de la courbe continue. La figure 2.2(a) montre qu'une dizaine de classes de tailles suffisent pour obtenir une bonne corrélation entre la granulométrie générée et $h(d)$. La figure 2.2(b) montre l'évolution du nombre total de particules en fonction du nombre de classes. Pour chaque distribution, on peut observer l'effet du nombre total minimum de particules pour un faible nombre de classes. Lorsque N_c est suffisamment grand, le nombre de particules générées augmente fortement à cause de la condition de nombre minimum de particules par classe.

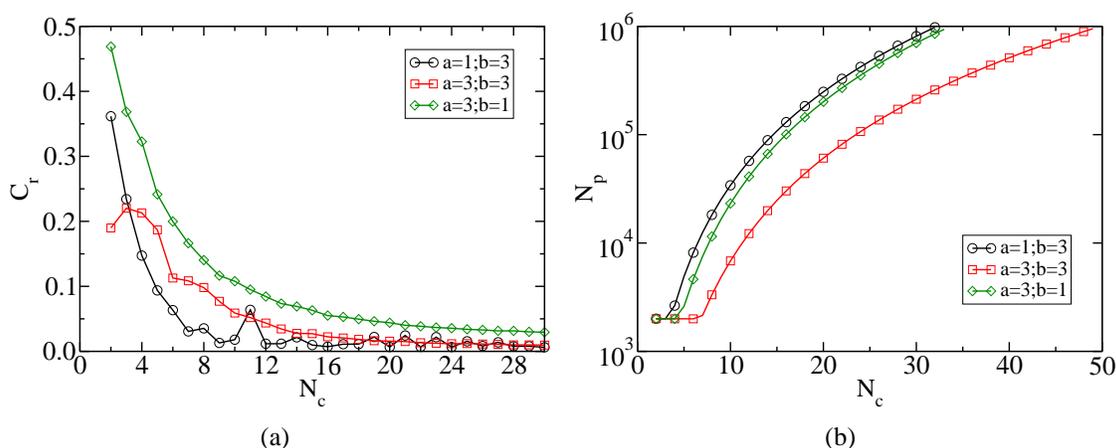


FIG. 2.2 – Influence du nombre de classes N_c sur C_r (a) et sur le nombre de particules générées N_p (b).

2.3.1.3 Nombre minimum de particules par classe

La figure 2.3(a) montre l'évolution de C_r en fonction de $N_{p/c}^{min}$. L'impact de $N_{p/c}^{min}$ apparaît essentiellement sur la distribution $a = 1; b = 3$. La fraction volumique des grosses particules étant relativement faible, une valeur élevée de $N_{p/c}^{min}$ permet de satisfaire simultanément les deux conditions de représentativité dans ces classes, et ainsi de diminuer C_r . D'une manière générale, on peut dire que $N_{p/c}^{min}$ agit sur les classes de tailles extrêmes de la distribution de

tailles. En effet, si N_i est une fonction décroissante (resp. croissante) de la taille d_i , la classe des plus grosses (resp. petites) particules contient $N_{p/c}^{\prime min}$ particules. Cela signifie que, si les tailles extrêmes de particules sont représentatives, la distribution des particules est représentative.

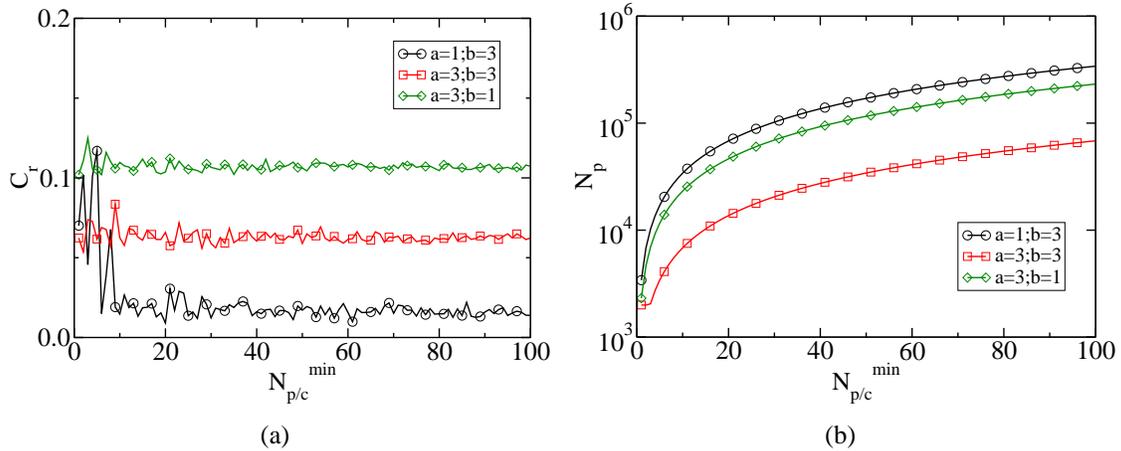


FIG. 2.3 – Coefficient de régression C_r en fonction du nombre minimum de particules par classe $N_{p/c}^{\prime min}$ (a), représentation semi-logarithmique du nombre total de particules N_p en fonction de $N_{p/c}^{\prime min}$ (b).

2.3.1.4 Nombre total minimum de particules

Alors que la représentativité locale est assurée par $N_{p/c}^{\prime min}$, N_p^{min} fixe le nombre de particules à partir duquel on considère qu'une distribution est globalement représentative. On voit sur la figure 2.4(a) que la valeur de N_p^{min} influe peu sur la qualité de la distribution générée. Ainsi, il faut considérer N_p^{min} comme une borne inférieure de représentativité variant en fonction de l'usage souhaité de la distribution. Sur la figure 2.4(b), on distingue deux phases de variations pour chaque distribution : un plateau où N_p est indépendant de N_p^{min} et une évolution linéaire où $N_p = N_p^{min}$. La valeur de N_p associée à chaque plateau correspond au nombre de particules N_i' qui satisfait la relation $N_i' > N_p^{min}$. L'évolution linéaire s'explique par le fait que lorsque cette relation n'est plus satisfaite, le nombre total de particules est égal au nombre total minimum ($N_p = N_p^{min}$).

2.3.2 Notions de réalisabilité et d'états accessibles

Au cours de ce chapitre, nous avons décrit une méthode de génération de distributions de tailles dont la représentativité est fixée par des critères explicites. Parmi ces critères figure le nombre total minimum N_p^{min} de particules que doit contenir une distribution afin de la considérer comme représentative. N_p^{min} ne constituant qu'une limite inférieure, le nombre total de

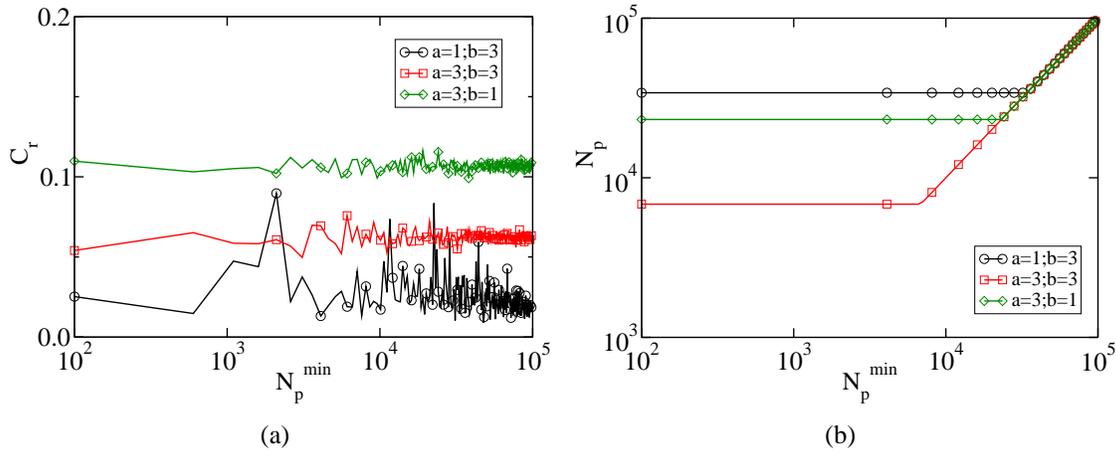


FIG. 2.4 – Représentation semi-logarithmique du coefficient de régression C_r en fonction du nombre total minimum de particules N_p^{\min} (a) ; représentation logarithmique du nombre total de particules N_p en fonction de N_p^{\min} (b).

particules générées N_p peut atteindre des valeurs très élevées en fonction des autres paramètres de génération et des paramètres de forme. On introduit alors une limite de “réalisabilité” N_p^{\max} comme le nombre maximal de particules acceptable en fonction de l’usage de la distribution. A l’heure actuelle, un nombre de particules de l’ordre de la dizaine de milliers semble admissible pour réaliser des simulations dynamiques dans des temps de calcul raisonnables. Si $N_p^{\min} \leq N_p \leq N_p^{\max}$, la distribution est représentative et réalisable. A paramètres de forme constants, l’enjeu est de trouver un compromis entre N_c et $N_{p/c}^{\min}$ permettant de simuler une distribution avec un nombre total de particules compris entre N_p^{\min} et N_p^{\max} .

Malheureusement, à paramètres de génération constants (N_c , $N_{p/c}^{\min}$, N_p^{\min} et N_p^{\max}), toutes les formes de distributions paramétrées par a , b et s ne sont pas réalisables. La limite de réalisabilité définit alors un espace de valeurs de paramètres de forme accessibles. La figure 2.5 montre l’espace des paramètres de formes accessibles a et b pour deux valeurs d’étalement s et pour différentes valeurs de limite de réalisabilité N_p^{\max} . On voit que l’enveloppe des domaines accessibles change peu mais s’étend avec N_p^{\min} . Pour $N_p^{\max} \leq 10^6$, les paramètres de forme supérieurs à 10 ne sont pas réalisables quelle que soit la valeur de l’étalement. L’étalement de la distribution se manifeste par un décalage de l’enveloppe vers les valeurs élevées du paramètre a . Ce décalage s’explique par le fait que les distributions satisfaisant la relation $a > b$ favorisent les fractions volumiques des plus grosses particules. A fractions volumiques égales, il faut alors moins de grosses particules que de petites particules pour représenter une classe. Un raisonnement similaire explique la tendance inverse observable pour la partie $b > a$. On note tout de même que les distributions uniformes par taille ($a = 3; b = 1$) et par fraction volumique ($a = 1; b = 1$) ainsi que les distributions en lois de puissance sont accessibles.

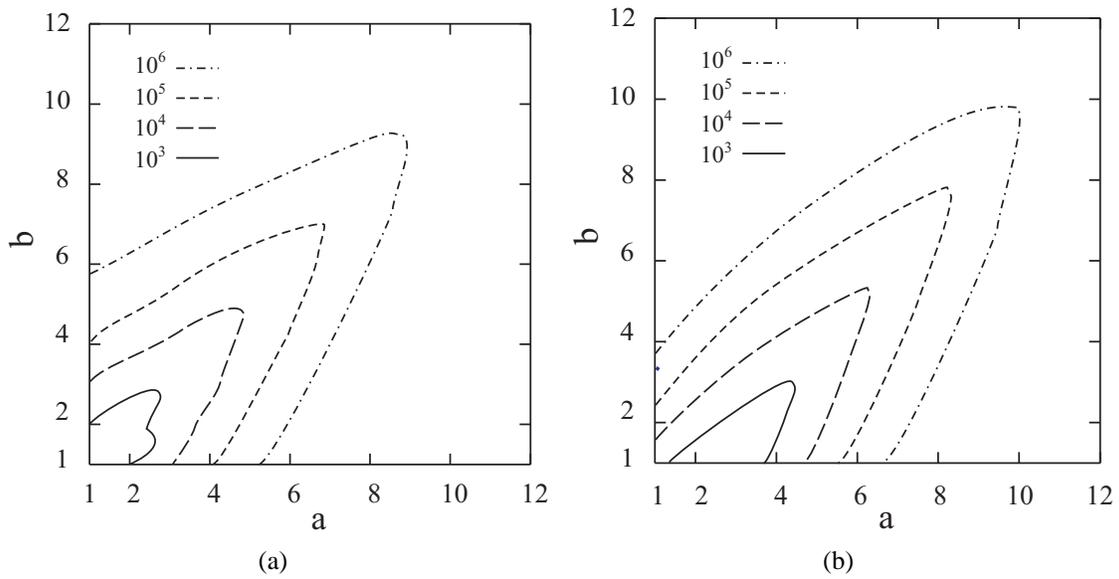


FIG. 2.5 – Domaines des paramètres a et b réalisables pour deux valeurs d'étalement différentes $s = 0.1$ (a) et $s = 0.97$ (b) et pour des valeurs croissantes de nombre maximum de particules admissible N_p^{max} .

Texture d'un matériau polydisperse

Sommaire

3.1	Méthode de construction géométrique	58
3.1.1	Choix de la méthode	58
3.1.2	Dépôt gravitationnel	59
3.2	Etude paramétrique	63
3.2.1	Propriétés de remplissage d'espace	63
3.2.2	Réseau de contacts	68

Ce chapitre constitue une première étape vers la compréhension de l'influence de la granularité sur le comportement mécanique des matériaux granulaires. Avant d'introduire des forces de contact entre les particules et de simuler des essais mécaniques, il est capital d'évaluer l'impact de la granularité sur l'état initial d'un matériau granulaire polydisperse. Ainsi, ce chapitre est centré sur l'étude de l'influence de la granularité sur la *texture*. Le terme de texture granulaire recouvre les propriétés géométriques de l'assemblage des particules et du réseau de contact associé. On s'attachera alors à explorer l'espace des paramètres de forme accessibles et à étudier l'effet de la granularité en termes de remplissage d'espace et de transition ordre-désordre.

Pour créer les assemblages granulaires denses à partir du modèle granulométrique, nous avons choisi d'utiliser une méthode purement géométrique. Cette étude étant systématique, il est nécessaire de balayer une large gamme de paramètres de forme (a, b, s) en conservant des temps de calcul raisonnables. Contrairement aux méthodes de simulations dynamiques comme la dynamique moléculaire, les méthodes géométriques permettent de construire rapidement de grands échantillons. En effet, réaliser un dépôt gravitaire de 10000 particules à partir d'une grille peut prendre plusieurs jours de calcul, tandis que la même réalisation peut être faite "géométriquement" en quelques minutes. Bien sûr, la contrepartie est que l'échantillon obtenu n'est pas mécaniquement stable et que l'on ne dispose d'aucune information sur les forces de contacts. Cependant, si les configurations obtenues ne sont pas stables, elles sont suffisamment proches d'un état mécaniquement acceptable. Ce point sera vérifié en soumettant ces échantillons à une relaxation dynamique par la méthode de dynamique des contacts.

3.1 Méthode de construction géométrique

3.1.1 Choix de la méthode

Il existe plusieurs méthodes de construction géométrique d'assemblage granulaire que l'on peut classer en trois grandes catégories :

1. Les méthodes coopératives où les positions de toutes les particules sont ajustées simultanément par rapport à leurs voisinages respectifs. On pense notamment à l'algorithme de Jodrey-Tory [23, 29] qui ajuste, par un processus itératif, la taille des particules afin d'optimiser la compacité. Cet algorithme est adapté dans le cas de distributions monodisperses, mais devient difficile à mettre en œuvre pour des distributions de tailles plus complexes comme celles envisagées dans notre étude. De plus, la phase itérative peut être consommatrice de temps de calcul et nécessite le plus souvent d'édicter un critère arbitraire de sortie d'itération.
2. Les méthodes d'addition bi- ou tri- dimensionnelle qui s'inspirent du problème unidimensionnel du parking [53]. Un exemple de ces méthodes est l'algorithme d'addition séquentiel aléatoire [76, 67, 68, 77]. Il consiste à placer successivement et aléatoirement des particules dans un espace fini sans interpénétration entre les particules. Pour chaque particule, n positions aléatoires sont testées. Si aucune ne convient, on peut retirer cette

particule de la distribution ou on peut la garder pour réessayer plus tard comme dans l'algorithme développé par Herrmann [21]. Malheureusement avec ce type d'algorithme, à moins d'introduire une hiérarchie dans l'ordre de dépôt, à mesure que la compacité augmente, il devient de plus en plus difficile et coûteux en temps de calcul de placer une particule.

3. Les méthodes de dépôt balistique où la chute de particules est imitée par de simples règles de déplacement géométrique. Ce processus peut être collectif comme dans l'algorithme de Han et al [20], ou séquentiel comme dans les méthodes inspirée par les travaux de Vold [72, 73, 74] parmi lesquels on trouve Visscher et al [70] et surtout le duo Jullien-Meakin [25, 27, 28, 29, 26] qui ont popularisé cette approche qui présente de nombreux avantages : elle est simple à mettre en œuvre même dans le cas polydisperse ; elle respecte la granulométrie initiale en garantissant le dépôt de toutes les particules ; elle n'introduit pas de hiérarchie entre les tailles des particules et enfin elle imite des processus naturels tels que la sédimentation ou la pluiviation de particules.

Pour réaliser cette étude paramétrique, ce dernier type de méthode a été choisi en se plaçant dans le cas 2D qui sera également le cadre des études pour la dynamique des contacts.

3.1.2 Dépôt gravitationnel

3.1.2.1 Méthode aléatoire

Le principe général de cette méthode est assez simple. Comme le montre la figure 3.1(a), elle consiste à déposer des disques les uns après les autres sur un substrat formé des particules déjà déposées. La première étape consiste à lâcher la particule à déposer d'une position aléatoire au dessus du substrat. Après un premier contact, la particule roule en suivant la ligne de plus grande pente jusqu'à rentrer en contact avec une deuxième particule. En 2D, deux contacts suffisent pour équilibrer une particule. Il suffit que la projection du centre de la particule sur la direction perpendiculaire à la gravité se situe entre celles des deux points de contact. On parlera alors de position d'équilibre local stable. Si la particule n'est pas équilibrée, elle continue à rouler jusqu'à atteindre une position d'équilibre stable. Afin de limiter les effets de bords, on utilise une condition de périodicité dans la direction horizontale. La figure 3.1(b) montre un échantillon de petite taille où les particules grisées représentent les images périodiques des particules noires. Une approche similaire peut être menée en trois dimensions, les disques sont remplacés par des sphères qui nécessitent alors trois points de contacts pour être stabilisées.

Avec cette méthode, l'ordre de dépôt des particules étant aléatoire, il n'y a pas de différence de traitement entre les grosses et les petites particules. On voit sur la figure 3.1(b) qu'au cours du dépôt, la taille des plus grosses particules leur permet de fermer des pores non encore remplis et générer ainsi des vides significatifs perturbant l'homogénéité des échantillons. Afin de construire les échantillons les plus denses possibles pour une granularité donnée, il faut éviter ce phénomène et, au contraire, essayer d'améliorer le remplissage des pores avant leur fermeture par une grosse particule. En ce sens, nous avons utilisé une méthode où le dépôt est régi,

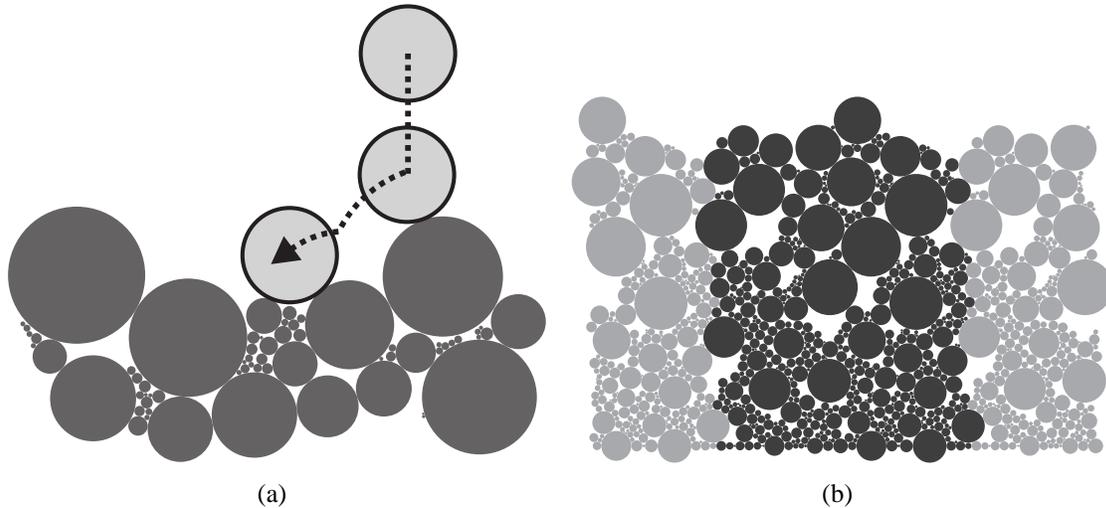


FIG. 3.1 – (a) Méthode de dépôt aléatoire : contact puis descente suivant la ligne de plus grande pente. (b) Echantillon périodique de petite taille déposé par la méthode aléatoire.

non plus par un critère d'équilibre local, mais par la minimisation d'un potentiel global.

3.1.2.2 Méthode par minimisation de potentiel

Au lieu de faire rouler la particule, on la positionne directement de manière à minimiser une fonction énergétique Ψ . Cette fonction peut prendre différentes formes selon le résultat souhaité. Dans notre cas, Ψ va représenter l'énergie potentielle d'une particule de masse m dans le champ de pesanteur g définie par $\Psi = mgz$ où z est simplement l'altitude du centre de la particule. Ainsi, pour minimiser l'énergie potentielle d'une particule de taille r , il suffit de trouver, en fonction de r , la position permise la plus basse possible. Les positions permises sont les positions garantissant deux contacts et aucune interpénétration avec les particules précédemment déposées.

La figure 3.2(a) montre la fonction Ψ dans la même configuration que l'exemple du dépôt aléatoire. La figure 3.2(b) montre la même distribution de particules que sur la figure 3.1(b) mais déposée par la méthode de minimisation. En comparant ces deux figures, on observe que les plus grosses particules ne génèrent plus autant de vides lors de leur dépôt. Ceci est dû non pas à un meilleur placement des grosses particules mais plutôt au placement plus efficace des petites particules. En effet, la fonction Ψ décrit d'autant mieux la complexité de la surface du substrat que la particule à placer est petite. Le nombre de positions possibles va alors augmenter en entraînant une augmentation des probabilités de remplir un pore plutôt que de le fermer. Ce phénomène est illustré par la figure 3.3 où la fonction Ψ est évaluée pour une grosse particule 3.3(a) et pour une petite 3.3(b) dans la même configuration du substrat. Malgré la condition de minimisation, on voit qu'une grosse particule peut fermer un pore mal rempli. Par contre, le

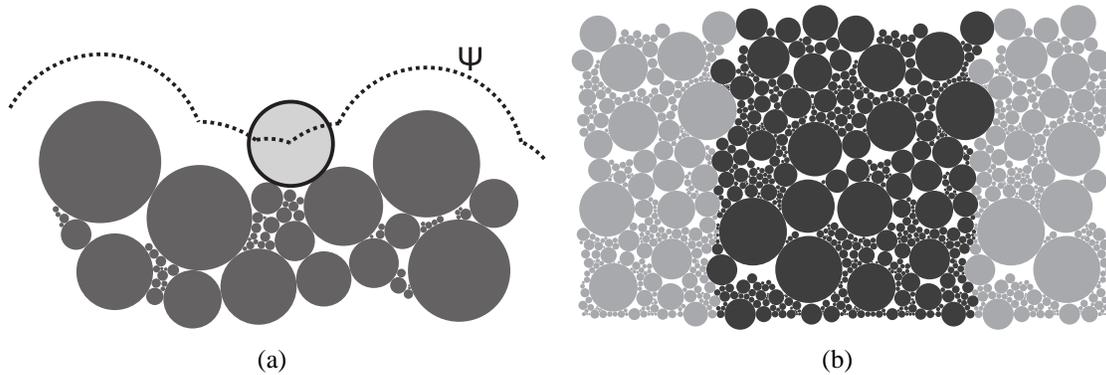


FIG. 3.2 – (a) Méthode par minimisation de potentiel : placement direct à la position la plus basse en fonction de la taille de la particule à placer. (b) Echantillon périodique de petite taille déposé par la méthode de minimisation de potentiel.

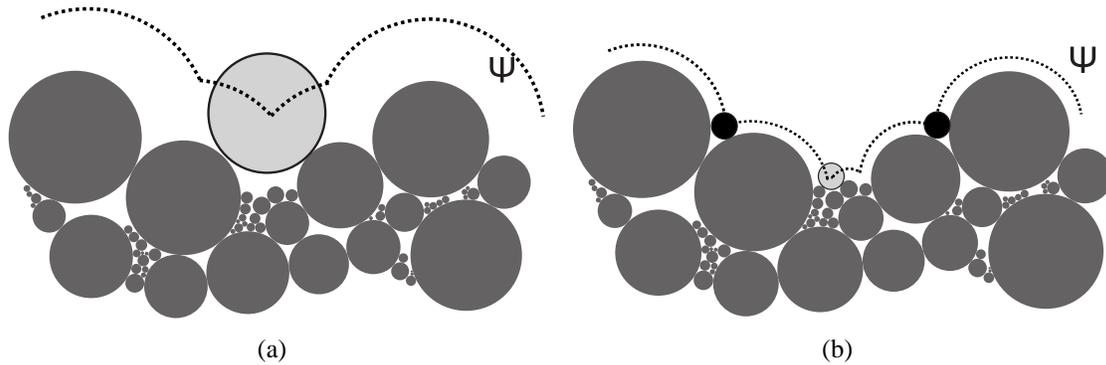


FIG. 3.3 – Effet de la taille de la particule à déposer sur la “précision” de la fonction Ψ : (a) pour une grosse particule ; (b) pour une petite particule ; les particules noires représentent deux positions d’équilibre local.

placement de la petite particule au minimum de potentiel plutôt qu’à des positions d’équilibre local (figurées en noir sur la figure 3.3(b)) favorise le remplissage des pores avant leur fermeture éventuelle.

Pour vérifier l’efficacité de la méthode par minimisation on a tracé sur la figure 3.4(a) l’évolution de la compacité ρ en fonction de l’étalement s pour les deux méthodes de dépôt. Les tailles des particules suivent une distribution uniforme par fraction volumique. Comme espéré, la méthode par minimisation de potentiel conduit toujours à des compacités plus élevées quel que soit l’étalement. De plus, la différence croissante avec l’étalement entre les deux valeurs de compacité semble montrer que le processus de remplissage des pores avec la méthode de minimisation est d’autant plus efficace que l’étalement est grand. Un autre point important est que les deux méthodes donnent des évolutions de compacité similaires avec l’étalement : ρ diminue

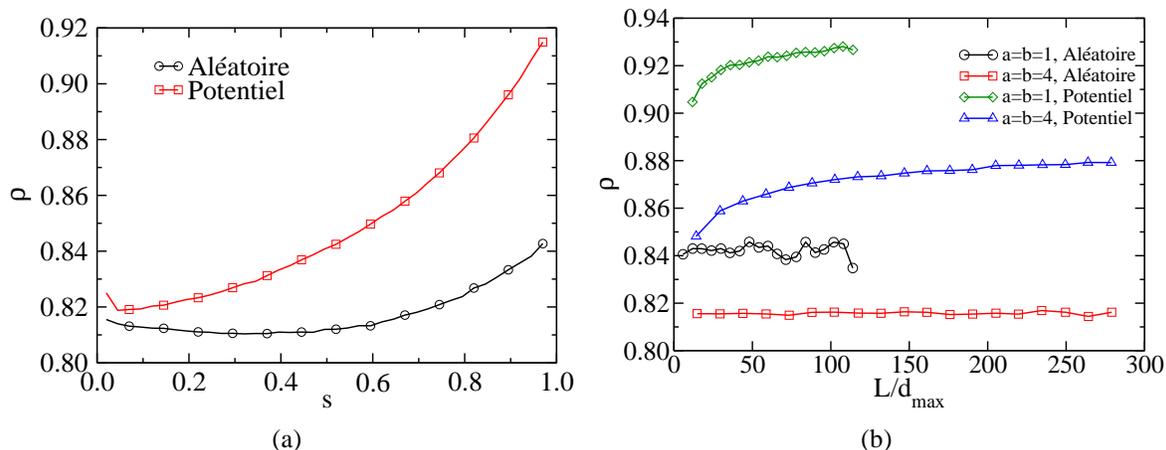


FIG. 3.4 – (a) Compacité ρ en fonction de l'étalement s pour une distribution uniforme par fraction volumique et dans le cas des deux méthodes de dépôt. (b) Compacité ρ en fonction de la période L adimensionnée par le diamètre maximum d_{max} pour deux distributions différentes de même étalement.

d'abord avec s , passe par un minimum puis augmente vers des valeurs élevées. L'interprétation de ces variations sera donnée ultérieurement dans la section 3.2.1.1. La forte augmentation de la compacité laisse supposer que l'utilisation de la méthode par minimisation de potentiel permettra d'obtenir des variations significatives de texture des échantillons. On pourra alors, au moins qualitativement, appliquer les conclusions obtenues avec la méthode de minimisation aux échantillons générés avec la méthode aléatoire.

3.1.2.3 Effets de taille finie

L'usage d'une condition de périodicité dans la direction horizontale permet de limiter les effets de bords mais ne permet pas de s'affranchir des effets de taille finie du système. En effet, dans l'approche par minimisation de potentiel, le nombre de positions possibles dépend essentiellement de deux paramètres : la taille de la particule à déposer et l'amplitude de la période L . Comme on l'a vu précédemment, les particules de petites tailles permettent de bien décrire la surface et ainsi de trouver une position optimisant le remplissage des pores. En augmentant L on augmente le nombre de sites possibles pouvant accueillir une particule. Ainsi la probabilité de placer une particule correctement, sans générer trop de vides autour d'elle, augmente avec L . Ce point est particulièrement important pour les plus grosses particules car ce sont elles qui, en fermant prématurément les pores, ont la capacité de générer beaucoup de vides lors de leur dépôt et sont ainsi les plus "difficiles" à placer.

La figure 3.4(b) montre l'effet de l'amplitude de la période L sur la compacité ρ pour les deux méthodes de dépôt et pour deux distributions différentes mais de même étalement $s = 0,97$ avec 10^5 particules. Avec la méthode par minimisation de potentiel, on voit que la

compacité augmente “logarithmiquement” sur une décade avec l’amplitude de la période. Indépendamment des paramètres de la distribution, la compacité augmente d’environ 0,02 par décade. Avec la méthode aléatoire, la compacité ρ est pratiquement indépendante de l’amplitude de la période. Cela s’explique par le fait qu’avec cette méthode le choix de la position de dépôt est basé sur des considérations locales plutôt que globales comme dans le cas de la méthode par minimisation de potentiel. Dans la suite de ce travail, le rapport L/d_{max} est gardé constant et égal à 100.

3.2 Etude paramétrique

Dans cette partie, on s’intéresse à l’influence de la granularité sur la texture d’un assemblage de particules circulaires. L’influence de la granularité est étudiée à travers deux aspects : le remplissage d’espace et le réseau de contacts. Par remplissage d’espace on entend caractériser l’arrangement relatif des particules et mettre ainsi en évidence quelques propriétés nécessaires au remplissage optimal de l’espace [3] avec un granulats polydisperse. Parallèlement, on s’intéressera aux propriétés du réseau de contacts au cours de la disparition de l’ordre spontané que l’on peut obtenir en deux dimensions pour un matériau monodisperse.

Si ce n’est pas explicitement spécifié, au cours de cette étude les valeurs des paramètres de génération sont constantes et telles que $N_c = 10$, $N_{p/c}^{min} = 10$, $N_p^{min} = 2.5 \cdot 10^4$ et $N_p^{max} = 10^5$. L’étalement s de la distribution varie entre 0,02 et 0,97. Afin d’obtenir les échantillons les plus denses possibles, on utilisera la méthode par minimisation de potentiel. Avec cette méthode et pour les grandes valeurs d’étalement, le dépôt de 10^5 particules s’effectue en une quinzaine de minutes sur un ordinateur de bureau Mac G5.

Dans cette étude on considère six distributions avec les paramètres suivants : ($a = b = 1$); ($a = 1; b = 3$); ($a = 2; b = 4$); ($a = 3; b = 1$); ($a = 4; b = 2$) et ($a = b = 4$) (voir figure 2.1). Les espaces ainsi accessibles à ces valeurs d’étalement sont très proches de ceux présentés sur la figure 2.5. Chaque courbe présentée dans la suite est composée d’environ 50 points représentant chacun une moyenne de deux dépôts indépendants. On étudie six formes de distributions. Pour certaines figures (3.5, 5.7, 3.13(b)), les distributions à grandes valeurs de s ne sont pas statistiquement réalisables pour $N_p^{max} = 10^5$ et donc les courbes correspondantes ne peuvent être tracées sur tout l’intervalle $[0, 02; 0, 97]$.

3.2.1 Propriétés de remplissage d’espace

3.2.1.1 Compacité

La compacité ρ est représentée en fonction de l’étalement s pour l’ensemble des paramètres de forme sur la figure 3.5. Quels que soient les paramètres de forme, on voit que la compacité suit une même tendance : ρ diminue avec s pour $s < 0,1$, évolue peu pour $0,1 < s < 0,4$

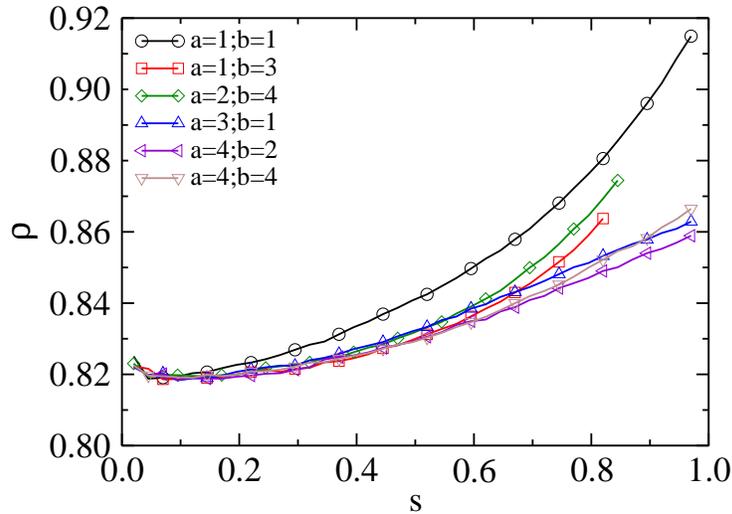


FIG. 3.5 – Compacité ρ en fonction de s pour différents paramètres de forme.

puis tends vers des valeurs élevées pour $s > 0,4$. La diminution de compacité pour les faibles valeurs de s s'explique par le fait que la distribution de tailles est quasi-monodisperse. En effet, les milieux granulaires 2D strictement monodisperses ($s = 0$) ont la capacité de s'arranger spontanément en une structure ordonnée à maille triangulaire très compacte ($\rho \simeq 0,906$). Malheureusement, la moindre déviation des tailles des particules détruit cet arrangement cristallin au profit d'un arrangement dense aléatoire [6, 69] dont la compacité est de l'ordre de 0,81. L'excès de compacité constaté pour les plus faibles valeurs de s s'explique par la présence de particules localement organisées en mailles triangulaires alors que la majorité des particules sont arrangées selon une maille rectangulaire ou complètement désordonnées.

La figure 3.6(a) montre une vue d'un échantillon à très faible étalement $s = 0,02$. La figure 3.6(b) représente la même vue mais sur laquelle on a fait apparaître des régions d'arrangement similaire des particules. On y voit de grandes régions d'arrangement rectangulaire (B) impliquant des corrélations à grande distance. Les régions compactes d'arrangements triangulaires (A) sont beaucoup plus restreintes. Elles sont principalement dues à des perturbations du réseau rectangulaire qui génèrent le décalage d'une ligne de grains et permettent de créer des arrangements plus compacts. Ce mécanisme sera détaillé lors de l'étude du réseau de contacts. Enfin les zones désordonnées (C) se trouvent souvent à l'interface entre deux régions d'arrangement quasi-cristallin (joints de grains).

A part pour la distribution uniforme par fraction volumique, on observe que les paramètres de forme ont peu d'influence sur la compacité lorsque l'étalement est compris entre $s = 0,1$ et $s = 0,4$. La figure 3.7(a) montre une vue d'un échantillon faiblement polydisperse. Les régions cristallisées observées précédemment ont totalement disparu et sont remplacées par un arrangement dense où ne subsiste qu'un ordre à très courte portée. Cela implique que des structures cristallines existent mais sont limitées aux grains qui la composent, elles ne s'étendent pas à

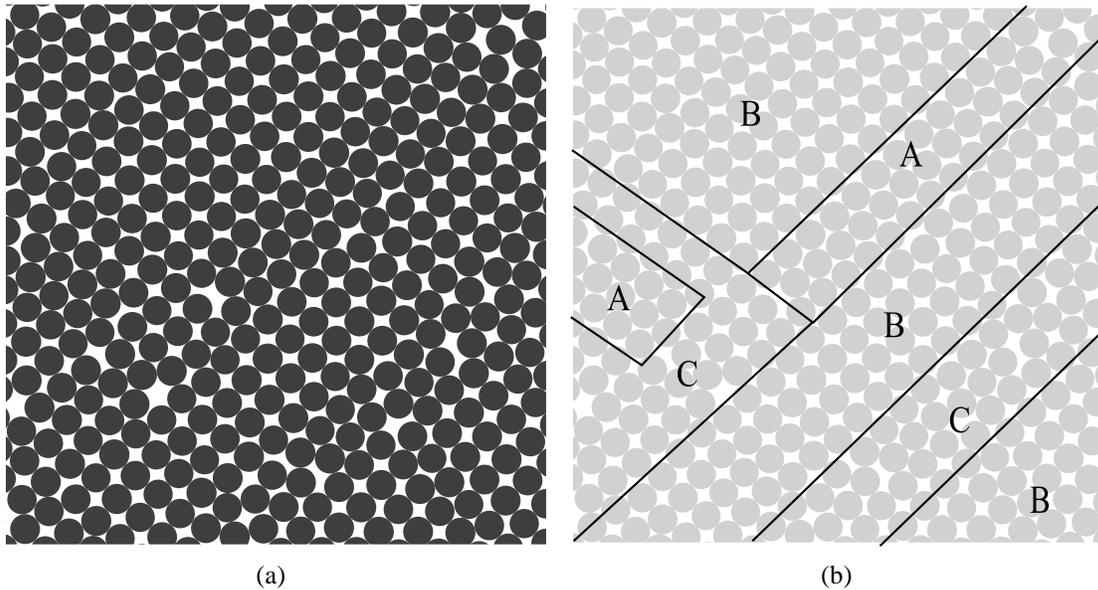


FIG. 3.6 – (a) Structure d'un échantillon quasi-monodisperse $s = 0,02$. (b) Zones d'arrangement des particules : A) triangulaire, B) rectangulaire et C) désordonné.

travers un réseau ordonné. La faible augmentation de la compacité est alors due à une augmentation du désordre plutôt qu'au remplissage effectif des pores. En effet, dans cette gamme d'étalement, les plus petites particules ne le sont pas assez pour être placées entre quatre des plus grosses formant un embryon de structure rectangulaire. Comme le montre la figure 3.8(a) l'insertion d'une particule au cœur d'une maille carrée n'est possible que si la taille des particules formant la maille est d'environ 2,4 fois celle de la particule insérée. Cette condition est réalisée à partir de $s \simeq 0,41$ et constitue une transition géométrique dans la structure du système. Evidemment, les plus grosses particules ne composent pas un réseau carré mais on peut voir que ce phénomène limite l'augmentation de la compacité en deça de $s \simeq 0,4$. En augmentant l'étalement, ce phénomène d'insertion se reproduit successivement avec des générations de particules de plus en plus petites. Ainsi, pour réaliser l'insertion de la n^e génération dans une maille carrée, il faut un étalement, en termes de ratio de tailles extrêmes R , supérieur à $R_c = 2,4^n$. Le même raisonnement peut être mené pour les mailles triangulaires où l'étalement nécessaire à l'insertion est donné par $R_t = 6,46^n$. Cependant, à cause du désordre créé par la polydispersité, seul l'effet de la première génération d'insertion dans une maille carrée est clairement visible. En d'autres termes, cette notion de génération fournit une estimation de l'étalement nécessaire pour que le processus de remplissage des vides entre les grosses par des petites particules soit efficace.

Au delà de cette valeur d'étalement, on distingue deux groupes de distributions dont la compacité n'évolue pas à la même vitesse avec s . Les distributions favorisant le nombre de petites particules ($a = 1; b = 3, a = 2; b = 4$) assurent une augmentation plus rapide de la compacité que celles favorisant plutôt le nombre des grosses particules ($a = 3; b = 1, a = 4; b =$

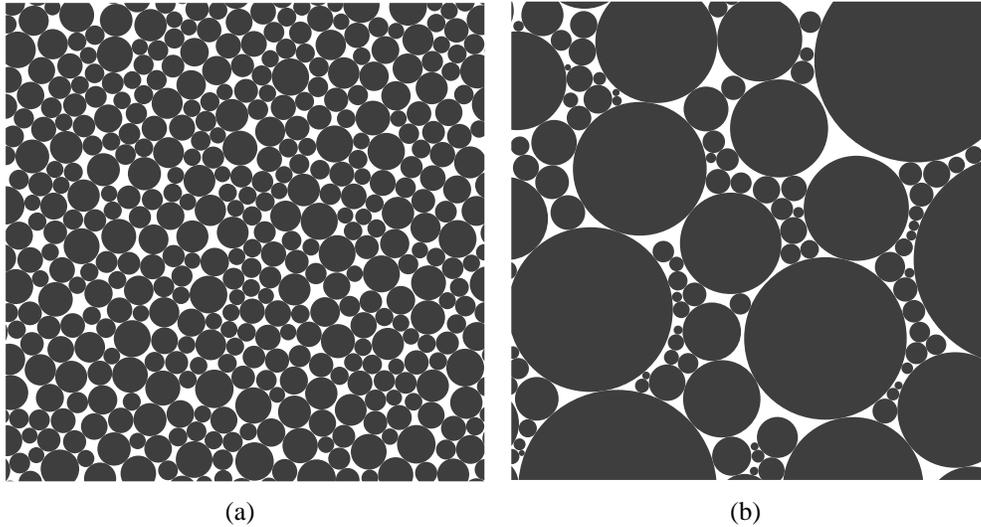


FIG. 3.7 – (a) Vue d'échantillon faiblement polydisperse $s = 0,42$. (b) Vue d'échantillon fortement polydisperse $s = 0,97$.

2). Lorsque les petites particules sont majoritaires, elles sont suffisamment nombreuses pour bien remplir les espaces entre les plus grosses avant leur fermeture. Au contraire, lorsqu'elles sont minoritaires, la fermeture des pores intervient avant leur remplissage. Sur la figure 3.7(b) on voit que les espaces entre les grosses particules sont bien remplis et que les pores générés sont d'une taille bien inférieure à celle des particules qui lui ont donné naissance.

La distribution uniforme par fraction volumique est un cas particulier. En effet, quelle que soit la valeur de l'étalement s , les compacités obtenues sont toujours supérieures aux autres distributions. En considérant les analyses précédentes, cela signifie que cette distribution assure, quel que soit l'étalement, un bon compromis entre le volume des pores générés par les grosses particules et le volume de petites particules disponibles pour les remplir.

3.2.1.2 Distribution radiale

Dans ce paragraphe, on va s'attacher à mettre en évidence la disparition progressive avec l'étalement, d'un ordre spatial au profit d'un désordre favorable à l'augmentation de la compacité. Pour cela, on utilise la fonction de distribution radiale $g(r)$ des positions radiales r des centres des particules. Cette fonction décrit les corrélations spatiales dans le système à travers les variations moyennes de la densité numérique par rapport à la densité numérique moyenne en fonction de la distance radiale. La densité numérique n est définie comme le nombre de centres de particules par unité de surface en 2D. Ainsi la fonction $g(r)$ est définie par :

$$g(r) = \frac{n(r)}{n} \quad (3.1)$$

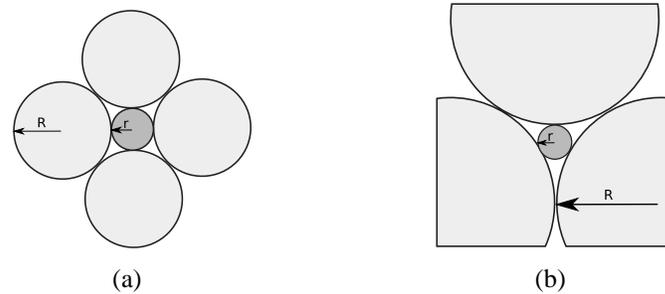


FIG. 3.8 – (a) Insertion d'une particule dans une maille carrée ($R/r \geq 2,4$); (b) Insertion d'une particule dans une maille triangulaire ($R/r \geq 6,46$)

où $n(r)$ est la densité numérique moyenne à la distance r d'une particule. Pratiquement, on calcule la densité numérique $n_i(r)$ dans des couronnes concentriques de rayon r croissant centré sur une particule i . A partir des $n_i(r)$, on calcule facilement $n(r)$ tel que $n(r) = \langle n_i(r) \rangle$.

La figure 3.9(a) montre $g(r)$ pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour différentes valeurs d'étalement s . A très faible étalement $s = 0,02$, on retrouve la signature d'un ordre à longue distance à travers la présence de pics régulièrement espacés avec une période correspondant à un diamètre moyen. L'amplitude du premier pic traduit le fait que l'on a sept fois plus de chance de trouver deux centres de particules espacés d'un diamètre moyen que de les trouver espacés d'une dizaine de diamètres. De plus, la finesse d'un pic traduit la netteté des corrélations (comme dans un cristal parfait) tandis qu'une largeur importante traduit un certain bruit dans les positions autour d'une position moyenne fréquente.

Lorsque l'étalement s augmente, les corrélations se dégradent autant en terme de qualité (largeur des pics) que de longueur d'action. En augmentant s de 0,02 à 0,42, la distance de corrélation passe d'une dizaine de diamètres moyens à environ deux. Au delà de cette valeur d'étalement, correspondant à la transition géométrique, seul le premier pic survit. Avec l'étalement, ce pic unique se déplace vers des distances inférieures au diamètre moyen tout en augmentant son amplitude et sa largeur. Ainsi, seule une corrélation diffuse agit en deça des premières particules voisines.

Dans le cas de matériaux granulaires polydispersés, on peut se demander si la fonction de distribution radiale est le meilleur descripteur des corrélations entre paires de particules. En effet, la densité numérique $n(r)$ paraît être un descripteur naturel du moment que tous les constituants ont le même volume comme c'est le cas des systèmes moléculaires ou des matériaux granulaires monodispersés. Dans le cas polydispersé, il faut prendre en compte la distribution de tailles à travers les différents volumes des particules. Il paraît alors pertinent d'analyser les corrélations spatiales en considérant la compacité $\rho(r)$ en fonction de la position radiale r . De manière similaire au calcul de la distribution radiale, on calcule la compacité dans des couronnes concentriques de rayons croissants centrés sur les centres des particules.

La figure 3.9(b) montre $\rho(r)$ pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour

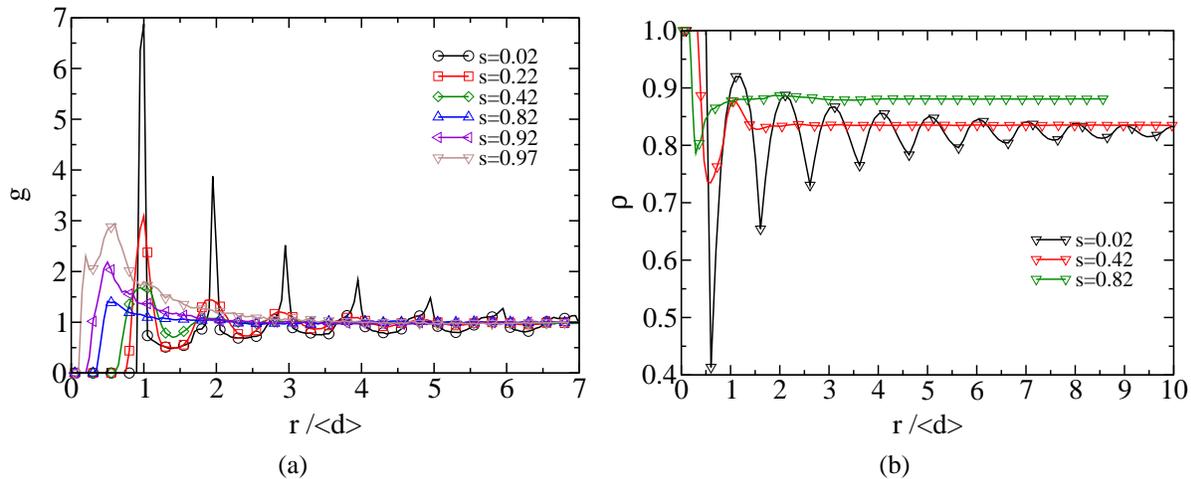


FIG. 3.9 – (a) Fonction de distribution radiale g en fonction de la distance radiale r normalisée par le diamètre moyen $\langle d \rangle$ pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour différentes valeurs d'étalement s . (b) Compacité ρ en fonction de la distance radiale r normalisée par le diamètre moyen $\langle d \rangle$ pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour différentes valeurs d'étalement s .

trois valeurs d'étalement s . Pour toutes les valeurs d'étalement, tant que $r \leq d_{min}/2$, $\rho(r)$ est égale à 1 car on décrit le volume interne de la particule depuis laquelle on mesure $\rho(r)$. En augmentant r , $\rho(r)$ tend vers la compacité du milieu ρ . De façon similaire à la fonction de distribution radiale pour les faibles étalements, la compacité oscille entre des pics et des vallées d'amplitudes décroissantes avec une période proche de $\langle d \rangle$. Ces traces d'ordre dans le système disparaissent avec l'étalement pour qu'il ne subsiste finalement qu'une première vallée suivie d'une augmentation jusqu'à la valeur moyenne ρ . Cette vallée représente alors les vides entre les particules et leur voisinage immédiat. Le retour de $\rho(r)$ à ρ montre la distance à partir de laquelle le milieu peut être considéré comme homogène en termes de volume et de vide. Dans le cas le plus polydisperse où le remplissage des pores est efficace, cette longueur est de l'ordre de deux diamètres moyens. Par contre, il faut souligner le fait que quelques diamètres moyens peuvent représenter beaucoup de petites particules. De plus, en dehors du régime quasi-ordonné $s \leq 0,1$, la longueur de corrélation des volumes change peu en nombre de diamètres moyens.

3.2.2 Réseau de contacts

La compacité et les fonctions de distribution radiale ont permis d'évaluer l'influence de la distribution de tailles sur le désordre métrique. Cependant, la plupart des propriétés mécaniques des matériaux granulaires comme la transmission de forces ou la dilatance, dépendent fortement de la topologie du réseau de contacts. Bien sûr, il ne sera pas ici question de forces de contact mais plutôt de réseau de contacts géométriques en termes de connectivité et d'ordre d'orientation.

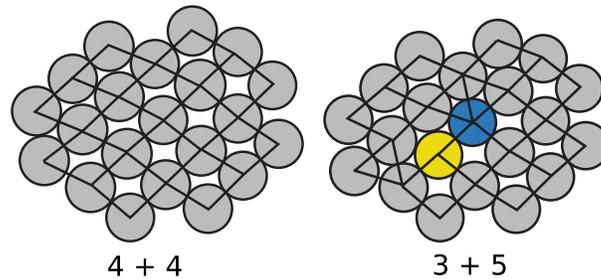


FIG. 3.10 – Illustration de la transformation de deux particules avec 4 contacts (gris) chacune en deux particules ayant respectivement 3 (jaune) et 5 (bleu) contacts à cause d'une faible dispersion des tailles de particules.

3.2.2.1 Connectivité

Comme on l'a vu précédemment, les particules de tailles strictement identiques peuvent être assemblées en un arrangement triangulaire très compact. Dans cette configuration de cristal parfait, le nombre de coordination z , i.e. le nombre moyen de contacts par particule, est égal à 6. Malheureusement, cette limite supérieure est très difficile à atteindre sans un ajustement très précis des positions des particules. La moindre perturbation fait alors chuter le nombre de coordination à $z = 4$. La perturbation peut être une petite erreur sur la position d'une seule particule ou bien, comme dans notre cas, un éloignement croissant du cas monodisperse vers des distributions contenant plusieurs ordres de grandeurs de tailles de particules. Par exemple, à faible étalement $s = 0,02$ le nombre de coordination z est égal à 4.

Une justification de ce résultat est de considérer que chaque particule déposée est soutenue par deux particules et en soutient deux autres. Cela implique que chaque particule doit avoir exactement 4 contacts. Cependant, si cela est vrai en moyenne, ce n'est pas ce que l'on observe au niveau de la microstructure. En effet, pour $s = 0,02$, seule une proportion d'environ 80% des particules possède exactement 4 contacts. Les autres particules ont 3 ou 5 contacts en fraction égale à 10%. Bien sûr cette configuration mène à un nombre de coordination moyen z égal à 4 ($z = 0,8 \times 4 + 0,1 \times 5 + 0,1 \times 3 = 4$). Le fait est que, par construction, chaque particule est supportée par deux particules mais n'en supporte pas forcément deux.

La figure 3.10 montre un exemple du phénomène à la base de cette constatation. A cause d'un petit décalage sur la position d'une particule, deux particules en contact avec quatre autres (4+4) se transforment en deux particules avec respectivement trois et cinq contacts (3+5). Cette transformation de configuration 4+4 à 3+5 conserve le nombre de coordination moyen. On observe aussi que ce réarrangement crée une dislocation dans le réseau, ce qui correspond au glissement de toute une rangée de particules perturbant le réseau cristallin. La figure 3.11 montre deux vues d'échantillons à deux valeurs d'étalement relativement faibles $s = 0,02$ et $s = 0,22$ pour une distribution uniforme par fraction volumique sur lesquelles les particules ont été colorées en fonction de leur nombre de coordination local, i.e. le nombre de contacts. On voit que ce phénomène s'étend souvent à plus de deux particules et génère des zones de désordre

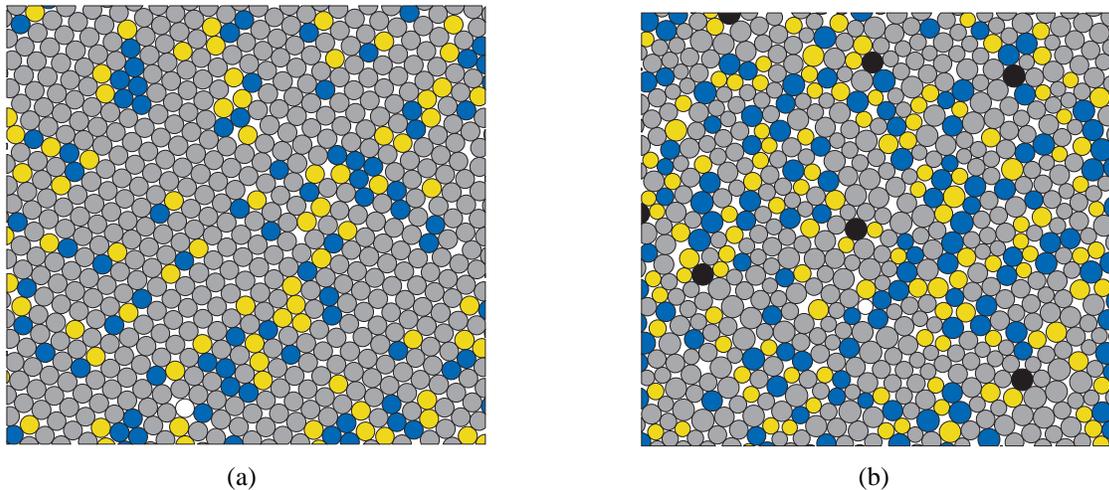


FIG. 3.11 – Vues d'échantillons (a) $s = 0,02$, (b) $s = 0,22$ où les particules sont colorées selon leur nombre de coordination local : 2 contacts en blanc, 3 contacts en jaune, 4 contacts en gris, 5 contacts en bleu et 6 contacts en noir.

corrélées sur de grandes distances.

On vient de voir qualitativement que la distribution de tailles influence fortement la topologie du réseau de contacts. Pour quantifier son influence, on va étudier les variations du nombre de coordination local à travers la “fonction de connectivité” P_k définie par la proportion de particules ayant exactement k contacts. On a alors $\sum_k P_k = 1$ et $\sum_k k P_k = z$. La figure 3.12(a) montre les fonctions P_k pour différentes valeurs de k en fonction de l'étalement s pour la distribution uniforme par fraction volumique. Comme on l'a précisé précédemment, à étalement très faible, on a $P_4 \simeq 0,8$ et $P_3 = P_2 \simeq 0,1$. En augmentant s , P_3 et P_4 augmentent de façon similaire au dépend de P_4 qui décline jusqu'à 0,6 pour $s = 0,2$. Tant que $s < 0,2$, les seules configurations possibles sont des particules à 3, 4 et 5 contacts. Ainsi l'évolution du désordre topologique pour ces faibles valeurs d'étalement est gouvernée par la croissance des deux populations de particules à 3 et 5 contacts.

A partir de $s = 0,2$, l'étalement est suffisamment grand pour permettre des configurations de particules à 2 ou 6 contacts. Simultanément, P_5 arrête d'augmenter et commence à décliner pour $s \simeq 0,4$. Un point intéressant est que P_4 ne fait que décliner au profit de l'apparition de nouvelles populations avec l'étalement. De même P_2 est différente des autres populations au sens où elle ne fait que croître avec l'étalement. Les autres populations commencent par croître jusqu'à un certain niveau puis décroissent vers une valeur asymptotique pour les grandes polydispersités. A grand étalement, les plus grosses particules peuvent avoir jusqu'à 50 contacts mais ces populations à k grand ne sont pas significatives devant celle présentées sur la figure 3.12(a).

Les particules avec 2 contacts sont principalement les petites particules situées dans les

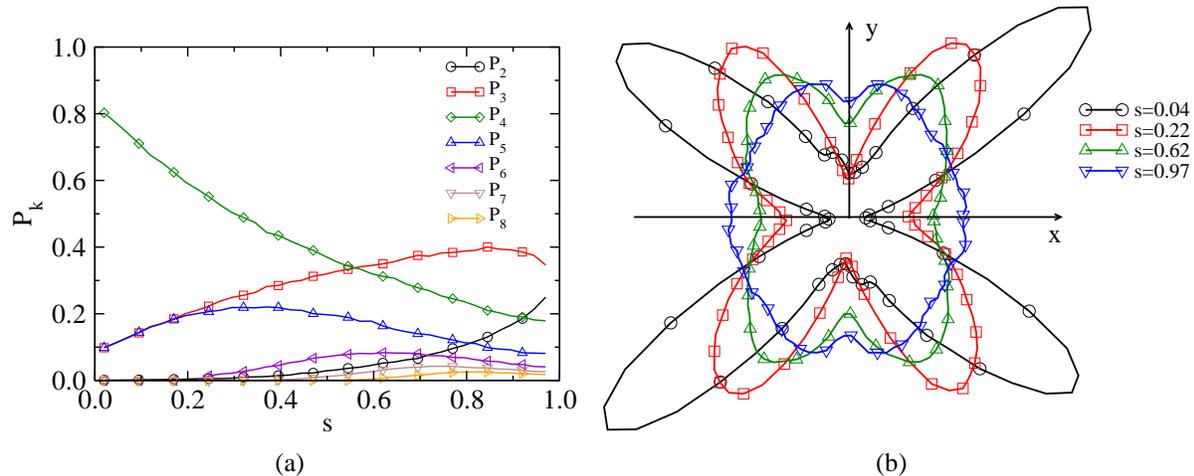


FIG. 3.12 – (a) Fonctions de connectivité P_k pour différentes valeurs de k en fonction de l'étalement s pour la distribution uniforme par fraction volumique. (b) Représentation polaire de la densité de probabilité P_θ des orientations θ des normales de contacts pour la distribution uniforme par fraction volumique et plusieurs valeurs d'étalement.

pores et soutenues par deux autres particules mais n'en soutiennent aucune. P_2 augmente rapidement avec l'étalement et ne semble pas saturer aux grandes valeurs de s . Cette fraction de particules représente alors l'importance des phénomènes d'arches géométriques menant au "masquage" des plus petites particules lors du dépôt. Ce masquage consiste simplement à déposer une particule dans un pore, sans qu'elle ne soutienne d'autres particules par la suite, avant de le fermer. Ainsi, cette population contribue fortement au remplissage des pores dans le domaine des grandes polydispersités.

3.2.2.2 Ordre d'orientation

On s'intéresse ici aux orientations des contacts et plus particulièrement à la recherche de directions de contacts privilégiées dans le système. La notion d'anisotropie des contacts va permettre de décrire cette notion d'ordre d'orientation dans le système : si les orientations de contacts sont toutes équiprobables, le milieu est isotrope, tandis que s'il existe des orientations privilégiées le système est anisotrope et l'anisotropie va décrire le degré d'hétérogénéité de la distribution des orientations de contacts. Au delà de l'aspect purement géométrique, il est important de souligner que l'anisotropie du réseau de contacts est connue pour être un des mécanismes majeurs à l'origine de la résistance au cisaillement des milieux granulaires [59, 57, 50] (voir chapitre 6).

Un moyen d'appréhender l'anisotropie du réseau de contacts est dans un premier temps d'évaluer la distribution $P(\theta)$ des orientations θ des normales \mathbf{n} aux contacts. La figure 3.12(b) montre $P(\theta)$ pour la distribution uniforme par fraction volumique pour plusieurs valeurs d'éta-

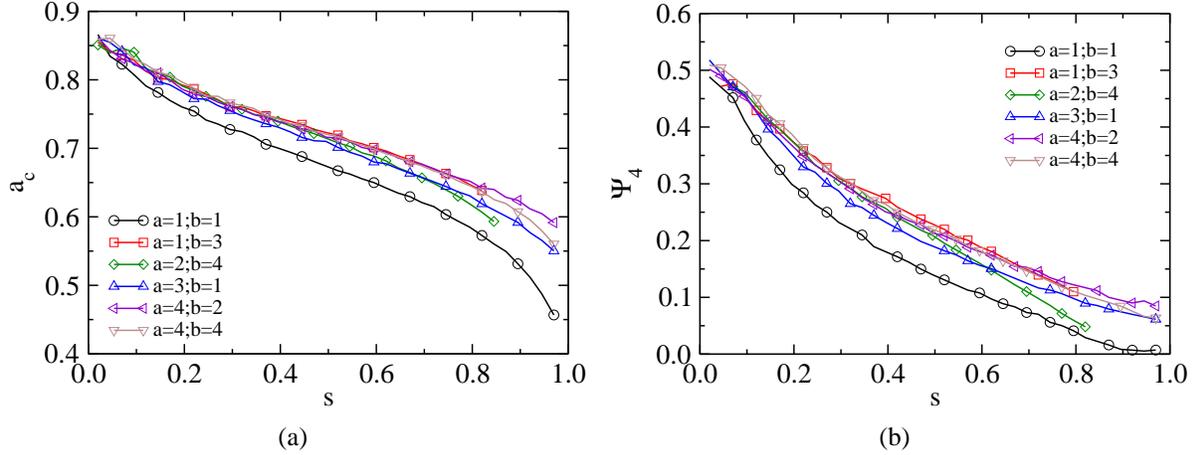


FIG. 3.13 – (a) Anisotropie des contacts calculée sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ en fonction de l'étalement s et pour différents paramètres de formes a et b . (b) Paramètre d'orientation des contacts ψ_4 en fonction de l'étalement s et pour différents paramètres de forme a et b .

lement s . A faible étalement, la distribution est symétrique et fortement marquée par deux modes orientés à $\theta \simeq 45^\circ$ et $\theta \simeq 135^\circ$. Avec l'étalement, les pics s'élargissent et tendent à enrichir la population initialement très pauvre des orientations de contacts proches de la verticale ($\theta \simeq 90^\circ$). Ce caractère bimodal a également été observé lors d'expériences ou de simulations numériques sur des milieux granulaires préparés par un processus aléatoire [8].

L'observation de $P(\theta)$ permet d'apprécier qualitativement l'anisotropie du réseau de contacts. Afin de quantifier l'homogénéité de $P(\theta)$, on peut utiliser une grandeur scalaire appelée anisotropie des contacts a_c calculable à partir du tenseur de fabrique F_{ij} . De plus amples détails sur ces notions seront donnés dans le chapitre suivant (5.2.2). Le tenseur de fabrique est défini par [59] :

$$F_{ij} = \int_0^\pi n_i(\theta)n_j(\theta)P(\theta)d\theta. \quad (3.2)$$

Au premier ordre, l'anisotropie des contacts est donnée par $a_c = 2(F_1 - F_2)$ où F_1 et F_2 sont les valeurs principales de F_{ij} . Cependant, due à la forte symétrie des distributions $P(\theta)$ observée sur la figure 3.12(b), l'application directe de cette définition mène à des valeurs faibles et non représentatives de a_c . Afin de s'affranchir de ce phénomène, nous avons choisi de réduire l'intervalle de calcul du tenseur de fabrique F_{ij} de $[0, \pi]$ à $[0, \pi/2]$. L'anisotropie calculée représentera alors la déviation du cas équiprobable ($a_c \simeq 0$) vers une direction privilégiée impliquant une valeur d'anisotropie forte. La figure 5.7 montre l'anisotropie a_c en fonction de s pour différents paramètres de forme. Indépendamment des paramètres de forme, on voit que a_c diminue avec s . Une fois de plus, la distribution uniforme par fraction volumique se démarque des autres distributions au sens où quel que soit l'étalement, elle fournit les plus faibles valeurs d'anisotropie et donc les échantillons les plus isotropes en terme de direction de contacts.

Un autre moyen de quantifier l'ordre d'orientation des contacts dans un échantillon est de

considérer un paramètre d'ordre scalaire ψ_k défini par [30] :

$$\psi_k = |\langle e^{i k \theta_c} \rangle_c|, \quad (3.3)$$

avec $i^2 = -1$, et où la moyenne est prise sur les c directions de contacts θ_c . ψ_k va mesurer en moyenne à quel point la configuration locale de contacts est proche d'une configuration régulière à k contacts. Par exemple, ψ_6 est nul pour un arrangement aléatoire isotrope et est égal à 1 pour un cristal hexagonal parfait. Dans nos échantillons, la configuration de référence va être la configuration la plus fréquente à faible étalement, autrement dit la configuration à 4 contacts. Ainsi, ψ_4 va mesurer l'évolution des directions de contacts par rapport à un cristal parfait à mailles carrées.

La figure 3.13(b) montre ψ_4 en fonction de s pour différents paramètres de forme. Même à faible étalement, le faible désordre présent dans les échantillons est suffisamment important pour faire chuter ψ_4 à 0,5. En augmentant l'étalement, ψ_4 diminue fortement et tend vers 0 pour la distribution uniforme par fraction volumique. La diminution de ψ_4 est cohérente avec la diminution monotone de la population P_4 des particules à 4 contacts.

Conclusion

La modélisation numérique de distributions fortement polydisperses de tailles de particules nécessite de contrôler la représentativité de chaque classe de tailles en nombre et en volume. Une méthode de génération de distributions polydisperses à partir d'une courbe granulométrique continue a été présentée. Cette méthode est basée sur trois critères de représentativité explicites : le nombre de classes de discrétisation N_c , le nombre minimum de particules par classe $N_{p/c}^{min}$ et le nombre total minimum de particules de la distribution N_p^{min} . La réalisation de ces trois critères conduit à une estimation du nombre de particules nécessaire pour qu'une distribution soit représentative.

Cette méthode a été couplée à un modèle de courbe granulométrique basé sur la distribution β cumulée. Ce modèle introduit seulement trois paramètres pour contrôler la forme et l'étalement de la distribution granulométrique : a, b et s . Les paramètres de forme a et b donnent accès à un riche éventail de distributions (double courbure, loi de puissance, bi-disperse) parmi lesquelles on retrouve des distributions classiques comme la distribution uniforme par taille des particules ou encore la distribution uniforme par fraction volumique. Selon l'usage de la distribution, il convient de compléter la méthode de génération par l'introduction d'une limite de réalisabilité à travers un nombre total maximum de particules admissibles N_p^{max} . Une distribution contenant N_p particules est alors représentative et réalisable si $N_p^{min} \leq N_p \leq N_p^{max}$. Cette notion de réalisabilité définit un ensemble de paramètres de forme (a, b et s) accessible pour des paramètres de génération fixé ($N_c, N_{p/c}^{min}$ et N_p^{min}).

La construction d'assemblages granulaires polydisperses denses et désordonnés a été réalisée par une méthode géométrique de dépôt balistique. Cette méthode classique a été modifiée afin d'optimiser le remplissage d'espace avec les distributions à grande polydispersité et de limiter les effets de bord par l'introduction d'une condition de périodicité dans la direction horizontale. Grâce à l'efficacité numérique de cette méthode géométrique nous avons pu mener une

étude systématique de l'influence de la polydispersité sur la texture des matériaux granulaires.

Plusieurs effets ont été ainsi mis en évidence :

1. L'augmentation de l'étalement granulométrique s permet un meilleur remplissage d'espace par l'insertion des petites particules dans les pores que forment les plus grosses. Ce phénomène d'insertion n'est géométriquement possible que pour des étalements supérieurs à $s = 0,4$; on parle alors de transition d'insertion. En d'autres termes, à partir de $s = 0,4$, une nouvelle génération de particules insérées apparaît et dont la population augmente en fonction de s et des paramètres a et b . En augmentant l'étalement, d'autres générations apparaissent pour les valeurs de s telles que $0,4^n$ et dont l'effet sur la texture est moins clairement visible.
2. Au delà de la transition d'insertion, l'état de compacité d'un échantillon est conditionné par un équilibre entre le volume des pores créés par les plus grosses particules et le volume des petites particules disponibles pour les remplir.
3. Pour les faibles valeurs d'étalement, les échantillons présentant une structure quasi-cristalline, le désordre est principalement d'ordre topologique. Au contraire, à grandes valeurs d'étalement le désordre est principalement d'ordre métrique grâce à la richesse des configurations géométriques possibles. A grand étalement, les échantillons sont désordonnés autant en terme de position des particules qu'en terme d'orientations des directions de contacts.
4. Quelle que soit la valeur de l'étalement, au delà de la transition d'insertion, la distribution uniforme par fraction volumique fournit les échantillons les plus denses, désordonnés et homogènes.

Cette modélisation géométrique constitue une base et un point de départ nécessaires pour une étude du comportement mécanique des systèmes fortement polydisperses. Nous nous intéresserons dans la partie suivante de ce mémoire, d'une part, à la stabilité des échantillons construits géométriquement et, d'autre part, à leur évolution lors d'un cisaillement.

Troisième partie

Approche dynamique

Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude de l'influence de la polydispersité sur les propriétés mécaniques d'un assemblage granulaire. On utilise l'outil de simulation numérique développé en éléments discrets. On présente dans un premier temps (chapitre 4) une description succincte de la méthode "Dynamique des Contacts". On mettra ensuite en évidence les difficultés liées à l'emploi de granulats polydispersés dans les simulations numériques et on proposera des solutions appropriées. L'étude des propriétés mécaniques d'assemblages polydispersés à l'état d'équilibre statique est réalisée au chapitre 5. Cet état d'équilibre est atteint par relaxation dynamique des échantillons construits géométriquement. L'évolution de la texture entre l'état initial et l'état relaxé est étudiée. Le rôle joué par les différentes classes de particules est mis en évidence en analysant les grandeurs mécaniques caractérisant l'état d'équilibre statique. L'étude du cisaillement quasi-statique est présentée au chapitre 6. Elle porte sur des échantillons polydispersés initialement relaxés à l'état d'équilibre statique (chapitre 5). Ces échantillons sont alors suffisamment cisailés jusqu'à atteindre un état stationnaire. Les résultats obtenus permettent d'analyser les différentes propriétés de texture au cours de l'évolution du cisaillement pour différents niveaux de polydispersité. L'aspect mécanique est étudié à travers la résistance au cisaillement à l'état stationnaire. Dans ce chapitre, on verra dans quelles mesures les observations faites dans le cas de l'équilibre statique seront maintenues dans le cas de cisaillement quasi-statique.

Simulations dynamiques

Sommaire

4.1	Dynamique des contacts	82
4.1.1	Approche non régulière	82
4.1.2	Lois de contact non régulières	83
4.1.3	Equations de la dynamique	85
4.1.4	Traitement local	87
4.1.5	Traitement global	89
4.1.6	Processus de résolution	89
4.1.7	Implémentation	90
4.2	Précautions numériques liées à la polydispersité	91

Dans ce chapitre, on va décrire en détail une méthode de simulation par éléments discrets : la dynamique des contacts (DC) qui a été utilisée pour les simulations dynamiques dont l'étude fait l'objet du chapitre suivant. On mettra en évidence les concepts nécessaires à la compréhension de cette méthode de simulation des milieux divisés parfois méconnue.

4.1 Dynamique des contacts

4.1.1 Approche non régulière

Les méthodes aux éléments discrets (MED) consistent à considérer un ensemble de corps comme indépendants et en interaction mutuelle plutôt que comme un milieu homogène équivalent pour décrire le comportement mécanique de l'ensemble des corps. Parmi ces méthodes, la plus populaire est sûrement la Dynamique Moléculaire (DM) initiée par Cundall [10] dans le cadre d'applications à la mécanique des roches. La principale différence entre DM et DC est dans le traitement de la déformation locale du système.

Si ces deux méthodes considèrent que les corps sont des corps rigides, il n'en va pas de même pour la modélisation des contacts. En effet, dans l'approche DM les forces de contact trouvent leur origine dans la déformation des zones de contact. La déformation macroscopique du système provient de la déformation des contacts et du mouvement relatif des particules. Les forces de contact sont alors dictées par des lois reliant les forces aux positions relatives δ des particules et leurs dérivées temporelles $\dot{\delta}$. A cette échelle de modélisation des contacts, le mouvement des particules est régulier au sens où δ est doublement différentiable. Ainsi, la discrétisation temporelle doit être adaptée pour décrire correctement les lois de force à l'échelle du contact.

Au contraire, l'approche CD se place à une échelle de longueur supérieure : elle considère que les corps et les contacts sont parfaitement rigides. Les forces de contact sont alors décrites par des lois de contact impliquant uniquement la vitesse relative des particules en contact. La déformation du système provient uniquement des mouvements relatifs entre les particules sans se préoccuper de l'échelle du contact. Ainsi, la discrétisation temporelle ne doit plus être adaptée à l'échelle du contact mais à la dynamique des particules. Une conséquence directe est que la DC tolère des pas de temps bien plus grands que la DM. En contrepartie, le mouvement des particules n'est plus régulier mais comporte des sauts de vitesse traduisant les collisions entre les particules. En effet, sur un pas de temps δt les collisions multiples dans un système dense impliquent des variations finies de la vitesse des particules et des impulsions des forces de contact. Cette dynamique non-régulière (nonsmooth, en anglais) ne peut être décrite en terme d'accélération et oblige à formuler le problème en terme de vitesses tout en tenant compte des discontinuités.

4.1.2 Lois de contact non régulières

Les lois de contact que nous allons décrire dans cette section sont des lois à l'échelle des particules. Elles ne permettent pas de décrire le comportement d'un contact à l'échelle des rugosités (plastification, force de Van der Waals, etc) mais de modéliser le comportement "effectif" de deux particules en contact. Pour cela, on se limitera dans ce travail à modéliser trois propriétés des contacts : l'unilatéralité du contact, le frottement de Coulomb et le frottement de roulement. D'autres propriétés, telles que la cohésion entre particules, peuvent parfaitement être modélisées dans ce cadre.

4.1.2.1 Unilatéralité géométrique

Derrière ce terme d'unilatéralité se cache une condition simple mais fondamentale : les corps en contact ne peuvent s'interpénétrer. Cette condition, connue aussi sous le nom de *condition de Signorini*, se traduit par des relations entre la distance relative normale δ_n , la vitesse relative normale V_n et l'intensité de la force normale au plan de contact f_n .

Tant que la distance δ_n est positive, la force de contact f_n est nulle ; il n'y a pas de force à distance. Lorsque la distance δ_n est nulle, la force de contact f_n est positive (répulsive) ou nulle et son intensité dépend des autres forces agissant sur les particules en contact. Cependant, un contact établi ($\delta_n = 0$ et $V_n = 0$) peut s'ouvrir sous l'action de f_n impliquant $V_n > 0$. On résume alors la condition de Signorini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_n > 0 \Rightarrow f_n = 0 \\ \delta_n = 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} V_n > 0 \Rightarrow f_n = 0 \\ V_n = 0 \Rightarrow f_n \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.1.2.2 Frottement de Coulomb

La loi de Coulomb établit une relation entre la vitesse de glissement V_t et la force de frottement f_t . Le coefficient de frottement μ donne la force tangentielle nécessaire pour mettre le contact en glissement en fonction de la la force normale f_n exercée au contact. Pour des valeurs de f_t inférieures à μf_n le contact est non glissant ($V_t = 0$), lorsque $f_t = \mu f_n$ le contact devient glissant. En supposant que le vecteur unitaire tangentiel \vec{t} est colinéaire à la direction de glissement, on peut alors écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t > 0 \Rightarrow f_t = -\mu f_n \\ V_t = 0 \Rightarrow -\mu f_n \leq f_t \leq \mu f_n \\ V_t < 0 \Rightarrow f_t = \mu f_n \end{array} \right. \quad (4.2)$$

4.1.2.3 Frottement de roulement

De manière analogue au frottement de Coulomb, on définit un loi de frottement de roulement mettant en jeu la vitesse de rotation relative ω et le moment des forces de contact M . Le coefficient de frottement de roulement μ_r donne le moment nécessaire M_s pour mettre le contact en glissement de roulement en fonction de la force normale f_n . Cependant pour conserver le caractère sans dimension de μ_r il convient d'introduire une longueur λ (généralement la moyenne des tailles des particules en contact) dans la définition de M_s tel que :

$$M_s = \mu_r \lambda f_n. \quad (4.3)$$

On résume alors la loi de frottement de roulement par :

$$\begin{cases} \omega > 0 \Rightarrow M = -\mu_r f_n \\ \omega = 0 \Rightarrow -\mu_r f_n \leq M \leq \mu_r f_n \\ \omega < 0 \Rightarrow M = \mu_r f_n \end{cases} \quad (4.4)$$

4.1.2.4 Vitesses considérées dans les lois de contact

Dans le cadre de la DC, un pas de temps δt ne représente pas une fraction temporelle d'un événement comme une collision (comme avec DM) mais plutôt une unité de temps au cours de laquelle se produit une multitude de collisions entraînant des sauts de vitesses. Tout l'enjeu du problème est alors de prédire, à partir de la configuration à l'instant t , les impulsions aux contacts et les vitesses de particules à l'instant $t + \delta t$. En considérant les vitesses "accessibles" en début V^- et fin V^+ de pas de temps, se pose la question de la vitesse V à confronter dans les relations de Signorini et Coulomb. Une solution simple est de considérer une vitesse V comme une vitesse moyenne pondérée $V = \eta V^- + (1-\eta)V^+$ où η est un paramètre physique du contact. La valeur $\eta = 0$ correspond à la résolution du contact avec la limite temporelle "droite" V^+ qui est la principale inconnue du problème. Cependant, la loi de Signorini implique que la vitesse au contact doit être nulle pour que la force soit non nulle donc $V^+ = V = 0$. Malheureusement, cette valeur de η implique que le contact doit être persistant ($V = 0$ sur deux pas de temps successifs) pour générer une force de contact. Dans ce cas, on ne tient pas compte des chocs à coefficient de restitution e non nul pour lesquels le contact créé n'est pas persistant mais génère une impulsion. On va alors généraliser l'expression de η pour des collisions à coefficient de restitution non nul. Pour un choc binaire, on a $e = -V^+/V^- = -\eta/(1-\eta)$ d'où $\eta = e/(1+e)$. On trouve alors l'expression des vitesses formelles normale V_n et tangentielle V_t , introduite par Moreau, que l'on confrontera dans les lois de contact de Signorini et de Coulomb :

$$V_n = \frac{V_n^+ + e_n V_n^-}{1 + e_n} \quad V_t = \frac{V_t^+ + e_t V_t^-}{1 + e_t} \quad V_\omega = \frac{\omega^+ + e_\omega \omega^-}{1 + e_\omega} \quad (4.5)$$

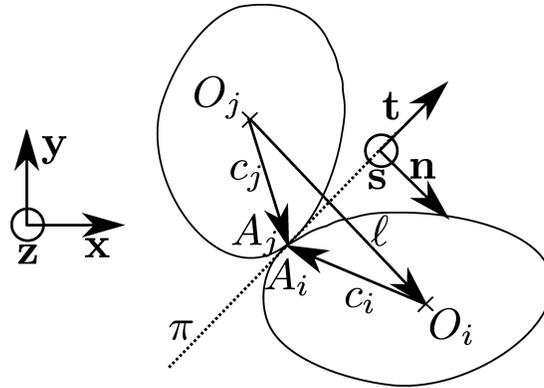


FIG. 4.1 – Configuration géométrique d'un contact

4.1.3 Equations de la dynamique

Pour développer les équations de la dynamique des contacts, on va traiter le cas général de particules convexes. La figure 4.1 montre la configuration géométrique d'un contact que nous appellerons α entre les particules i et j . Le point de contact est immatériel mais est constitué de deux "parties solides" A_i et A_j appartenant chacune à une particule. Pourvu que la surface de ces parties en contact soient suffisamment petites, on pourra considérer le contact comme ponctuel. Contrairement au cas des disques, les vecteurs de contacts \mathbf{c}^i et \mathbf{c}^j (joignant le centre des particules au point de contact) et le vecteur branche l ne sont pas colinéaires. Le plan de contact Π permet de définir un repère local orthonormé $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s})$ où \mathbf{n} est orienté de la particule j vers la particule i .

4.1.3.1 Cinématique du point de contact

Chaque particule k ($k = i, j$) est assimilée à un corps rigide animé d'une vitesse de translation \mathbf{V}^k et d'une vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}^k$. La vitesse du point de contact α est calculée aisément dans le repère global par :

$$\mathbf{V}^\alpha = \mathbf{V}_{A_i} - \mathbf{V}_{A_j} + \boldsymbol{\omega}^i \wedge \mathbf{c}^i - \boldsymbol{\omega}^j \wedge \mathbf{c}^j \quad (4.6)$$

Afin d'utiliser les lois de contact il faut évaluer les vitesses relatives normale, tangentielle et de rotation du point de contact dans le repère local. En développant les produits vectoriels sur le repère local on obtient les vitesses au début (t noté " $-$ ") et en fin de pas de temps ($t + \delta t$ noté " $+$ ") :

$$\begin{aligned} V_n^{\alpha-} &= (\mathbf{V}_{A_i}^- - \mathbf{V}_{A_j}^-) \cdot \mathbf{n} + (-\omega^i c_t^i + \omega^j c_t^j) \\ V_t^{\alpha-} &= (\mathbf{V}_{A_i}^- - \mathbf{V}_{A_j}^-) \cdot \mathbf{t} + (-\omega^i c_n^i + \omega^j c_n^j) \\ \omega^{\alpha-} &= \omega^{i-} - \omega^{j-} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
V_n^{\alpha+} &= (\mathbf{V}_{A_i}^+ - \mathbf{V}_{A_j}^+) \cdot \mathbf{n} + (-\omega^i c_t^i + \omega^j c_t^j) \\
V_t^{\alpha+} &= (\mathbf{V}_{A_i}^+ - \mathbf{V}_{A_j}^+) \cdot \mathbf{t} + (-\omega^i c_n^i + \omega^j c_n^j) \\
\omega^{\alpha+} &= \omega^{i+} - \omega^j
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.1.3.2 Equations de conservation dans le repère global

Pour chaque particule k de masse m_k et de moment d'inertie I_k , les équations de conservation de l'impulsion et du moment cinétique sont écrites sous leurs formes discrétisées :

$$\begin{aligned}
\delta t \mathbf{F}^k &= m_k (\mathbf{V}^{k+} - \mathbf{V}^{k-}) \\
\delta t \mathbf{G}^k &= I_k (\boldsymbol{\omega}^{k+} - \boldsymbol{\omega}^{k-})
\end{aligned} \tag{4.9}$$

\mathbf{F}^k représente la résultante des forces de contact $\mathbf{f}^{k\gamma}$ (γ désignant un contact) et des forces extérieures \mathbf{F}_{ext}^k (comme la gravité) appliquées à la particules k . De même, \mathbf{G}^k représente le moment résultant des forces de contact et des éventuelles transmissions de couple g^γ par frottement de roulement par exemple. D'après le principe d'action-réaction, on a pour le contact α considéré : $\mathbf{f}^{i\alpha} = -\mathbf{f}^{j\alpha} = \mathbf{f}^\alpha$ et $g^{i\alpha} = -g^{j\alpha} = g^\alpha$. Ainsi, en isolant la contribution de la particule associée par le contact α , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^i &= \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{f}^{i\beta} + \mathbf{F}_{ext}^i + \mathbf{f}^\alpha \\
\mathbf{F}^j &= \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{f}^{j\beta} + \mathbf{F}_{ext}^j - \mathbf{f}^\alpha \\
G^i &= \sum_{\beta \neq \alpha} (g^{i\beta} + (\mathbf{c}^{i\beta} \wedge \mathbf{f}^{i\beta}) \cdot \mathbf{z}) + g^\alpha + (\mathbf{c}^{i\alpha} \wedge \mathbf{f}^\alpha) \cdot \mathbf{z} \\
G^j &= \sum_{\beta \neq \alpha} (g^{j\beta} + (\mathbf{c}^{j\beta} \wedge \mathbf{f}^{j\beta}) \cdot \mathbf{z}) - g^\alpha - (\mathbf{c}^{j\alpha} \wedge \mathbf{f}^\alpha) \cdot \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.1.3.3 Projection dans le repère local

En injectant les expressions des vitesses obtenues à partir de l'équation 4.9 dans les équations 4.8, on montre que la vitesse dans le repère local à l'instant $t + \delta t$ s'exprime comme la somme de la vitesse à l'instant t et de la contribution des forces appliquées aux particules i et j :

$$\begin{aligned}
V_n^{\alpha+} &= V_n^{\alpha-} + \delta t \left\{ \left(\frac{\mathbf{F}^i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}^j}{m_j} \right) \cdot \mathbf{n} - \frac{c_t^i G^i}{I_i} + \frac{c_t^j G^j}{I_j} \right\} \\
V_t^{\alpha+} &= V_t^{\alpha-} + \delta t \left\{ \left(\frac{\mathbf{F}^i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}^j}{m_j} \right) \cdot \mathbf{t} - \frac{c_n^i G^i}{I_i} + \frac{c_n^j G^j}{I_j} \right\} \\
\omega^{\alpha+} &= \omega^{\alpha-} + \delta t \left(\frac{G^i}{I_i} - \frac{G^j}{I_j} \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

En remplaçant \mathbf{F}^k et G^k par leurs valeurs (Equation 4.11) et en projetant dans le repère

local, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{V_n^{\alpha+} - V_n^{\alpha-}}{\delta t} = \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{(c_i^i)^2}{I_i} + \frac{(c_j^j)^2}{I_j} \right) f_n^\alpha - \left(\frac{c_t^i c_n^i}{I_i} + \frac{c_t^j c_n^j}{I_j} \right) f_t^\alpha - \left(\frac{c_t^i}{I_i} + \frac{c_t^j}{I_j} \right) g^\alpha + K_n^\alpha \\ \frac{V_t^{\alpha+} - V_t^{\alpha-}}{\delta t} = - \left(\frac{c_t^i c_n^i}{I_i} + \frac{c_t^j c_n^j}{I_j} \right) f_n^\alpha + \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{(c_n^i)^2}{I_i} + \frac{(c_n^j)^2}{I_j} \right) f_t^\alpha - \left(\frac{c_n^i}{I_i} + \frac{c_n^j}{I_j} \right) g^\alpha + K_t^\alpha \\ \frac{\omega^{\alpha+} - \omega^{\alpha-}}{\delta t} = - \left(\frac{c_t^i}{I_i} + \frac{c_t^j}{I_j} \right) f_n^\alpha + \left(\frac{c_n^i}{I_i} + \frac{c_n^j}{I_j} \right) f_t^\alpha + \left(\frac{1}{I_i} + \frac{1}{I_j} \right) g^\alpha + K_\omega^\alpha \end{cases} \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} K_n^\alpha &= \frac{1}{m_i} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{f}^{i\beta} \mathbf{n} + \mathbf{F}_{ext}^i \mathbf{n} \right) - \frac{1}{m_j} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{f}^{j\beta} \mathbf{n} + \mathbf{F}_{ext}^j \mathbf{n} \right) \\ &\quad - \frac{c_t^i}{I_i} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \left(g^{i\beta} + c_n^{i\beta} f_t^{i\beta} - c_t^{i\beta} f_n^{i\beta} \right) \right] + \frac{c_t^j}{I_j} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \left(g^{j\beta} + c_n^{j\beta} f_t^{j\beta} - c_t^{j\beta} f_n^{j\beta} \right) \right] \\ K_t^\alpha &= \frac{1}{m_i} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{f}^{i\beta} \mathbf{t} + \mathbf{F}_{ext}^i \mathbf{t} \right) - \frac{1}{m_j} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{f}^{j\beta} \mathbf{t} + \mathbf{F}_{ext}^j \mathbf{t} \right) \\ &\quad + \frac{c_n^i}{I_i} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \left(g^{i\beta} + c_t^{i\beta} f_t^{i\beta} - c_t^{i\beta} f_n^{i\beta} \right) \right] - \frac{c_n^j}{I_j} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \left(g^{j\beta} + c_t^{j\beta} f_t^{j\beta} - c_t^{j\beta} f_n^{j\beta} \right) \right] \\ K_\omega^\alpha &= \frac{1}{I_i} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \left(g^{i\beta} + c_n^{i\beta} f_t^{i\beta} - c_t^{i\beta} f_n^{i\beta} \right) \right] - \frac{1}{I_j} \left[\sum_{\beta \neq \alpha} \left(g^{j\beta} + c_n^{j\beta} f_t^{j\beta} - c_t^{j\beta} f_n^{j\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.4 Traitement local

Les équations 4.12 montrent que le saut de vitesse relative du contact α sur un pas de temps dépend des forces exercées entre les particules i et j à travers α mais aussi des forces exercées par toutes les autres particules en contact avec i et j . Afin de trouver une solution au problème local, il est nécessaire d'introduire les vitesses formelles décrites précédemment (4.1.2.4). Pour simplifier l'écriture du problème, on définit les matrices M^α et F^α :

$$M = \begin{pmatrix} W_{nn}^\alpha & W_{nt}^\alpha & Y_n^\alpha \\ W_{nt}^\alpha & W_{tt}^\alpha & Y_t^\alpha \\ Y_n^\alpha & Y_t^\alpha & Y_\omega^\alpha \end{pmatrix}, \quad F^\alpha = \begin{pmatrix} f_n^\alpha \\ f_t^\alpha \\ \omega^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} W_{nn}^\alpha &= \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{(c_i^i)^2}{I_i} + \frac{(c_j^j)^2}{I_j} \right) & W_{tt}^\alpha &= \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{(c_n^i)^2}{I_i} + \frac{(c_n^j)^2}{I_j} \right) \\ W_{tn}^\alpha &= W_{nt}^\alpha = \left(\frac{c_t^i c_n^i}{I_i} + \frac{c_t^j c_n^j}{I_j} \right) & Y_n^\alpha &= \left(\frac{c_t^i}{I_i} + \frac{c_t^j}{I_j} \right) \\ Y_t^\alpha &= \left(\frac{c_n^i}{I_i} + \frac{c_n^j}{I_j} \right) & Y_\omega^\alpha &= \left(\frac{1}{I_i} + \frac{1}{I_j} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

En injectant les vitesses formelles, le système 4.12 se met sous la forme :

$$MF^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1+e_n}{\delta t} V_n^\alpha & +a_n^\alpha \\ \frac{1+e_t}{\delta t} V_t^\alpha & +a_t^\alpha \\ \frac{1+e_\omega}{\delta t} \omega^\alpha & +a_\omega^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

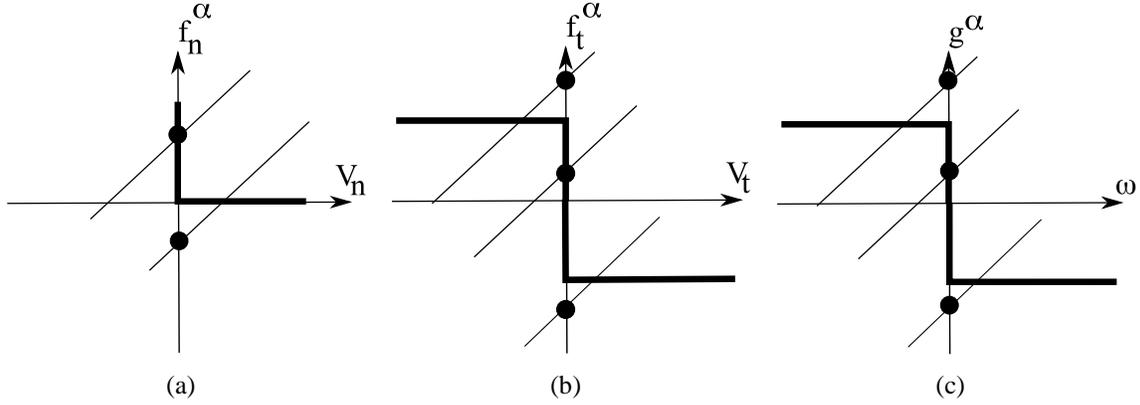


FIG. 4.2 – Traitement du problème local : (a) condition de Signorini, (b) frottement de Coulomb et (c) frottement de roulement.

avec :

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{1+e_n}{\delta t} V_n^{\alpha-} - K_n^\alpha \\
 a_t &= -\frac{1+e_t}{\delta t} V_t^{\alpha-} - K_t^\alpha \\
 a_\omega &= -\frac{1+e_\omega}{\delta t} \omega^{\alpha-} - K_\omega^\alpha
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

A un instant donné et en supposant les K^α connus, on voit que les forces F^α au contact α s'expriment comme des fonctions affines des vitesses formelles V_n, V_t et ω . Le nombre de solutions à ce système étant infini, il est nécessaire de prendre en compte d'autres équations pour trouver F^α : les lois de contact. La solution de ce problème est donnée par l'intersection de la droite que représente les équations 4.16 sur les différents graphes des lois de contact, présentés sur la figure 4.2. La positivité des coefficients W_{kk} et Y_k , impliquant une pente croissante, assure une solution unique pour chaque composante de la force au contact α . Pour trouver la solution locale, il suffit alors de chercher la solution de ce système en imposant une vitesse formelle nulle. En d'autres termes, on cherche l'intersection avec l'axe des forces pour chaque composante et on la compare aux valeurs autorisées par les lois de contact. Cependant, avec ce formalisme, la détermination des forces de contact doit se faire de façon simultanée. Ainsi, on trouve trois valeurs h_n, h_t et h_ω respectivement de f_n, f_t et g que l'on va confronter aux lois de contact.

$$\begin{aligned}
 h_n^\alpha &= \frac{1}{\det M^\alpha} (a_n (W_{tt}^\alpha Y_\omega^\alpha - (Y_t^\alpha)^2) - a_t (W_{nt}^\alpha Y_\omega^\alpha - Y_n^\alpha Y_t^\alpha) + a_\omega (W_{nt}^\alpha Y_t^\alpha - W_{tt}^\alpha Y_n^\alpha)) \\
 h_t^\alpha &= \frac{1}{\det M^\alpha} (a_n (W_{nt}^\alpha Y_\omega^\alpha - Y_n^\alpha Y_t^\alpha) - a_t (W_{nn}^\alpha Y_\omega^\alpha - (Y_n^\alpha)^2) + a_\omega (W_{nn}^\alpha Y_t^\alpha - W_{nt}^\alpha Y_n^\alpha)) \\
 h_\omega^\alpha &= \frac{1}{\det M^\alpha} (a_n (W_{nt}^\alpha Y_t^\alpha - W_{tt}^\alpha Y_n^\alpha) - a_t (W_{nn}^\alpha Y_t^\alpha - W_{nt}^\alpha Y_n^\alpha) + a_\omega (W_{nn}^\alpha W_{tt}^\alpha - (W_{nt}^\alpha)^2))
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

On montre facilement que $\det M$ est positif. Si $h_n^\alpha < 0$, la solution du problème local est immédiate : $f_n^\alpha = f_t^\alpha = \omega^\alpha = 0$. Ce cas correspond à l'ouverture d'un contact au cours du pas de temps considéré. Si $h_n^\alpha \geq 0$, on a $f_n^\alpha = h_n^\alpha$. Grâce à cette valeur de f_n^α , on peut résoudre

le problème de Coulomb pour le contact α . Si $h_t^\alpha > \mu f_n^\alpha$, la force tangentielle est égale à la limite du seuil μf_n^α de coulomb et le contact est glissant dans le sens de \mathbf{t} . Dans le cas contraire ($h_t^\alpha < \mu f_n^\alpha$), $f_t^\alpha = -\mu f_n^\alpha$ et le contact glisse dans le sens opposé à \mathbf{t} . Le cas du contact roulant sans glissement correspondant à $-\mu f_n^\alpha < h_t^\alpha < \mu f_n^\alpha$ a pour solution $f_t^\alpha = h_t^\alpha$. Le même raisonnement peut être mené pour le frottement de roulement en remplaçant respectivement V_t^α et f_t^α par ω^α et g^α .

4.1.5 Traitement global

Dans le paragraphe précédent, on a vu comment trouver la force de contact f^α agissant en un contact α . Cette force dépend de la géométrie des particules à travers M^α et des autres contacts $\beta \neq \alpha$ des particules i et j . La résolution des N_c contacts dans le système doit se faire de façon simultanée et ne peut alors être menée à bien que par une méthode de résolution itérative. Une méthode adaptée à la résolution de ce problème est la méthode dite de ‘‘Gauss-Seidel’’. A l’itération k , en supposant connues toutes les forces de contact $\{f_n^\gamma(k), f_t^\gamma(k), g^\gamma(k)\}$ ainsi que toutes les vitesses relatives $\{V_n^\gamma(k), V_t^\gamma(k), \omega^\gamma(k)\}$ avec $\gamma \in [1, N_c]$, on peut calculer les valeurs des coefficients $\{a_n^\gamma(k), a_t^\gamma(k), a_\omega^\gamma(k)\}$. La résolution du problème local pour chaque contact γ mène à une actualisation des forces de contact $\{f_n^\gamma(k+1), f_t^\gamma(k+1), g^\gamma(k+1)\}$. Au cours des itérations, on peut remarquer qu’il n’est pas nécessaire de mettre à jour les vitesses des particules car les coefficients a_x ne dépendent que des forces de contact. L’utilisation d’une méthode de résolution itérative implique l’édiction d’un critère de convergence permettant l’arrêt des itérations. Un critère classique est la mesure de la stabilité des forces pour chaque contact par rapport aux valeurs de l’itération précédente :

$$\frac{|f^\alpha(k+1) - f^\alpha(k)|}{f^\alpha(k+1)} \leq \epsilon_f \quad \forall \alpha \quad (4.19)$$

A partir des forces de contact ‘‘convergées’’, les vitesses puis les positions des particules peuvent être calculées grâce aux équations de la dynamique (4.9).

4.1.6 Processus de résolution

Ce paragraphe décrit les étapes importantes du processus de résolution effectué au cours d’un pas de temps. A l’instant t , le système est parfaitement déterminé en termes de positions, vitesses et forces. A la fin du pas de temps $t + \delta t$, on doit connaître l’évolution du système dans ces mêmes termes.

1 - Détection des contacts Cette étape consiste à repérer les paires de particules satisfaisant la condition $\delta_n \leq 0$ à l’instant t . A cause des erreurs numériques, la condition stricte de contact (6.2) $\delta_n = 0$ n’est jamais réalisée, une très faible interpénétration est toujours observée. La liste des contacts ainsi détectés va définir l’ensemble des contacts qui vont être pris en compte dans la résolution globale. De plus, cette liste n’évoluant pas au cours

des itérations, l'ouverture ou la création d'un contact ne peut intervenir que dans cette étape de détection comme un résultat de l'actualisation des positions des particules.

2 - Résolution globale Afin d'accélérer la résolution itérative, il est possible d'initialiser les forces aux contacts (transmettant des forces au pas de temps précédent $t - \delta t$) par les valeurs obtenues à la sortie des itérations du pas de temps précédent. Ainsi, si le système a peu évolué, la convergence du système sera d'autant plus rapide que la configuration du réseau de contacts à l'instant t est proche de celle à $t - \delta t$. Si le contact est nouveau, les forces de contact sont prises nulles. On résout itérativement le problème global jusqu'à satisfaire un critère de convergence sur les forces de contact. Si la solution ne converge pas assez vite, on peut interrompre le processus au bout d'un certain nombre d'itérations que l'on juge comme maximal.

3 - Actualisation des vitesses et des positions A l'issue de l'étape 2, on obtient les forces aux contacts à l'instant $t + \delta t$. Grâce à ces forces et aux équations de la dynamique, on peut actualiser les vitesses puis les positions des particules à l'instant $t + \delta t$.

Pour simuler numériquement un ensemble de particules pendant T secondes, il faudra alors effectuer $T/\delta t$ boucles des étapes 1 à 3.

Ce schéma d'intégration est de type implicite pour les vitesses et explicite pour le réseau de contacts. En d'autres termes, les vitesses des particules à la fin de chaque pas sont construites de manière à ce que la mise à jour des positions n'entraîne pas une interpénétration des particules. Cette approche est nécessaire dans le cadre de la dynamique des contacts car, contrairement à la méthode de DM, les interpénétrations entre les particules n'ont pas de signification dynamique. Néanmoins, en raison des erreurs numériques, de petites interpénétrations entre les particules ont lieu et il est nécessaire de choisir un pas de temps suffisamment petit pour éviter l'accumulation de ces erreurs au cours de longues simulations. Ceci dit, en général, le pas de temps en DC est toujours de plusieurs ordres de grandeur supérieur à celui en DM. Comme le pas de temps est plus petit en DM, le temps de calcul est essentiellement consommé par la mise à jour de la liste de contacts tandis qu'en DC ce sont les itérations lors de la résolution du problème global sur un pas de temps qui coûtent le plus en temps de calcul. Il faut aussi remarquer que le nombre d'itérations nécessaire varie très fortement d'un pas à l'autre et s'adapte automatiquement à la complexité du problème global à chaque pas. Pour cette raison, dans certains cas (par exemple dans les écoulements gravitaires), le nombre d'itérations est faible et la DC est nettement plus rapide que la DM. Au contraire, dans d'autres cas (déformation confinée avec une forte pression de confinement) la DM peut être plus rapide car la propagation de l'information mécanique à travers le milieu, à partir des frontières du système où les forces sont imposées, exige un nombre plus élevé d'itérations.

4.1.7 Implémentation

L'algorithme de la Dynamique des Contacts a été développé dans le code de calcul Gdm-tk. Ce code, écrit en langage C++ suivant les concepts de la Programmation Orientée Objet (POO), permet de simuler des collections de particules interagissant par différentes lois de contact. Ce

code gère les particules circulaires, les polygones convexes ainsi que les clumps. Les clumps sont des groupes de particules circulaires et/ou polygonales partageant le même degré de liberté. Un clump est alors assimilable à un corps rigide “insécable”. Un quatrième type de corps est aussi modélisé afin de représenter un mur. L’efficacité de DC couplée à la souplesse d’une POO, permet de mettre rapidement et efficacement en œuvre la simulation d’un système physique donné.

4.2 Précautions numériques liées à la polydispersité

Au cours des simulations qui ont été menées dans ce travail, un phénomène propre à la présence de plusieurs ordres de tailles de particules a été observé : l’éjection puis le vol libre des petites particules à travers les pores créés par les plus grosses particules. En effet, les pores du système n’étant pas tous complètement remplis par les petites particules, le réarrangement d’une grosse particule voisine peut provoquer “l’explosion” du groupe des petites. Par l’absence de gravité, ces petites particules entrent dans une phase de vol libre à plus ou moins grande vitesse selon la brutalité du réarrangement. Ce phénomène fait apparaître dans le système une classe de petites particules dont la dynamique est, de façon intermittente, plus rapide que celle de la sollicitation macroscopique. Ainsi, une conséquence directe est la réduction du pas de temps d’environ un ordre de grandeur (10^{-4} s pour les distributions quasi-monodisperses à 10^{-5} s pour les grandes valeurs d’étalement) afin d’adapter la discrétisation temporelle à la dynamique la plus rapide du système. Une autre conséquence de ce phénomène est la “grande” distance que peuvent parcourir ces particules en peu de temps. Sur quelques pas de temps, la configuration géométrique, et donc le voisinage de chaque particule (essentiel pour la détection des contacts), change radicalement. Il faut alors mettre en place un dispositif performant de détection des contacts.

L’approche classique de l’étape de détection des contacts au pas de temps i comporte deux étapes :

- Tous les N_{ap} pas de temps, on cherche le voisinage de chaque particule par l’évaluation de la distance intergranulaire δ_n . Les paires de particules où $\delta_n < d_v$, où d_{ap} est la distance d’alerte proche, sont considérées comme voisines immédiates et stockées dans la liste de Verlet. Cette liste doit alors contenir toutes les particules pouvant entrer en contact avant sa prochaine mise à jour à l’instant $(i + N_{ap})dt$.
- A chaque pas de temps, on recherche dans la liste de Verlet les particules réellement en contact pour évaluer les forces résultants de leur interaction.

Le calcul direct des distances étant assez coûteux en temps de calcul, différentes méthodes ont été développées pour optimiser la construction de la liste de Verlet [1, 20, 42, 75]. Cependant, ces méthodes peuvent être difficiles à mettre en place et à adapter au cas de distributions très polydisperses. Nous avons alors choisi une méthode simple consistant en une double détection par liste de Verlet. Au lieu de tester tous les couples de particules lors de la mise à jour de la liste de Verlet, on ne teste que les couples de particules issus d’une précédente détection à plus grande distance d’alerte. Ainsi, il suffit d’insérer une étape avant les étapes décrites

précédemment :

- Tous les N_{al} pas de temps, on cherche le voisinage de chaque particule par l'évaluation de la distance intergranulaire δ_n . Les paires de particules où $\delta_n < d_{al}$, où d_{al} est la distance d'alerte lointaine, sont considérées comme "proches" et stockées dans une liste de pré-détection. La liste de Verlet est alors établie tous les $N_{ap} < N_{al}$ pas de temps à partir des couples de particules stockées dans la liste de pré-détection.

Cette double détection permet d'accélérer la mise à jour de la liste de Verlet par la diminution du nombre de couples de particules à tester. Ainsi, on peut reconstruire fréquemment la liste de Verlet sans que cela ne soit trop coûteux en temps de calcul. La distance d'alerte lointaine doit être proche de la taille des plus grands pores pour qu'une petite particule puisse "voir" toutes les grosses particules susceptibles d'interrompre son vol libre à travers le pore. La taille des pores étant de l'ordre des plus grosses particules, il est pratique d'exprimer ces deux distances d'alerte en fonction du rayons r_{max} des plus grosses particules. Dans le cadre de sollicitations quasi-statiques et pour des distributions de tailles faiblement polydisperses, les valeurs $d_{al} \simeq 0,3r_{max}$ et $d_{ap} = 0,05r_{max}$ permettent d'optimiser grandement la vitesse de détection. Pour des distributions à grand étalement des valeurs de $d_{al} \simeq 0,8r_{max}$ et $d_{ap} = 0,2r_{max}$ couplées à une mise à jour fréquente de la liste de Verlet ($N_{ap} \simeq 20$) évitent de rater la détection de nouveaux contacts à l'issus de vols libres tout en gardant un temps de détection raisonnable.

Influence de la polydispersité sur l'état d'équilibre statique

Sommaire

5.1	Relaxation biaxiale	94
5.1.1	Protocole numérique	94
5.1.2	Etat d'équilibre statique	95
5.2	Etat de contraintes à l'équilibre	98
5.2.1	Tenseur de contraintes	98
5.2.2	Anisotropie des orientations des contacts	102
5.2.3	Anisotropie des forces	104
5.2.4	Relation contraintes-texture	106
5.3	Réseau de forces	109
5.3.1	Topologie du réseau de contacts	109
5.3.2	Forces de contact	111
5.4	Chaînes de forces	115

Après avoir étudié l'influence de la granularité sur la texture d'un matériau granulaire au chapitre 3, on va maintenant s'intéresser aux propriétés mécaniques d'un assemblage polydispersé à l'équilibre statique. Pour cela, en utilisant la méthode de dynamique des contacts, on soumet les échantillons construits géométriquement à une compression uniaxiale pour atteindre un état d'équilibre statique. Cette sollicitation mécanique induit un changement de la texture ainsi que l'apparition de forces de contact dont on précisera les propriétés en fonction des paramètres de granularité que sont l'étalement de la distribution s et les paramètres de forme a et b .

5.1 Relaxation biaxiale

La méthode de construction géométrique permet de créer des assemblages granulaires denses mais hors équilibre mécanique. En effet, cette méthode de construction se base uniquement sur les exclusions stériques entre particules, impliquant un positionnement purement géométrique, sans en évaluer les forces résultantes. Ainsi, la moindre sollicitation mécanique conduit à un réarrangement des particules jusqu'à atteindre, selon le type de sollicitation, une configuration d'équilibre statique. Afin de limiter les réarrangements par rapport à la configuration géométrique initiale, nous avons choisi de simuler une compression uniaxiale périodique dont nous allons détailler le protocole.

5.1.1 Protocole numérique

La figure 5.1 montre un échantillon de petite taille (500 particules) au début (gauche) et à la fin de la compression (droite). Le confinement est assuré, d'une part, par la périodicité horizontale héritée du dépôt géométrique et, d'autre part, par deux plateaux de grains extraits de l'échantillon. Ces deux plateaux sont constitués de grains partageant les mêmes degrés de liberté et se comportent donc comme des corps rigides. Ce type de corps, connu sous le nom de clumps ou de clusters, permet de représenter des corps à géométrie complexe à partir d'une association de particules circulaires. Le plateau inférieur, composé d'une ligne de grains, est fixe ; les vitesses de translation et de rotation sont constantes et égales à zéro. Au contraire, le plateau supérieur est libre de se mouvoir verticalement mais les translations horizontales et les rotations sont bloquées. Une pression verticale constante est appliquée sur le plateau supérieur ce qui entraîne un mouvement vertical descendant de celui-ci. Les plateaux assurant le confinement vertical, le confinement horizontal est assuré par la condition de périodicité cinématique introduite dès la phase de construction géométrique. Cette condition se traduit simplement par le fait qu'une particule dont le centre dépasse la limite de périodicité d'un côté de l'échantillon est horizontalement translatée de l'autre côté. Cette translation conserve la vitesse des particules et n'affecte finalement que la composante x de la position en lui ajoutant ou soustrayant une longueur correspondant à la période.

En vue d'obtenir l'état le plus dense possible à l'issue de la relaxation, le coefficient de

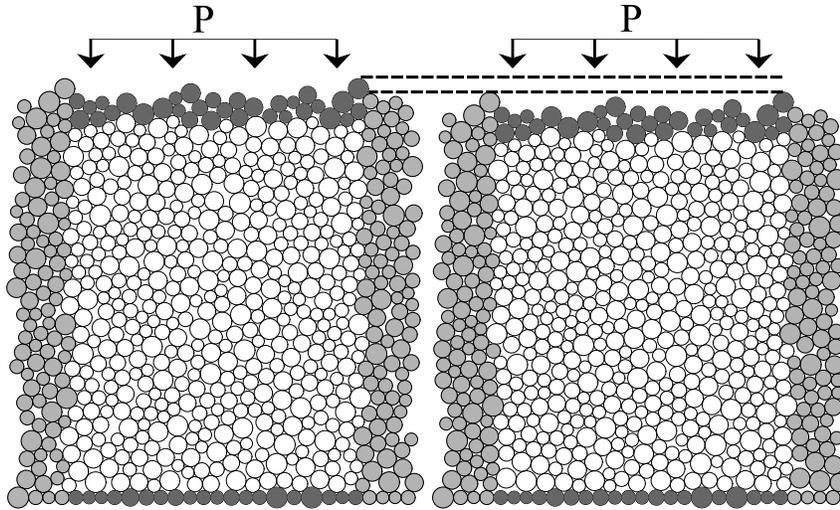


FIG. 5.1 – Compression uniaxiale d'un échantillon de petite taille (500 particules), les clumps figurent en gris foncé, les images périodiques des particules en gris clair et les particules de l'échantillon en blanc.

frottement μ est pris égal à zéro. De plus, l'élimination du frottement au cours de cette phase permet d'obtenir des échantillons plus proche d'un état isotrope en limitant la création d'arches à celles d'origine purement géométrique. Dans la même optique, la gravité est prise égale à zéro.

Pour cette étude, nous avons considéré quatre formes de distributions granulométriques différentes représentées sur la figure 5.2. On retrouve les distributions classiques que sont les distributions uniforme par tailles des particules ($a = 3; b = 1$) et uniforme par fraction volumique ($a = 1; b = 1$). La distribution $a = 2; b = 2$ est piquée sur une valeur centrale tandis que la distribution $a = 1; b = 3$ favorise les plus petites particules. Pour chaque distribution nous avons considéré six valeurs d'étalement correspondant à $s = 0, 2; 0, 73; 0, 82; 0, 92; 0, 96; 0, 98$ ou en termes de ratio des tailles extrêmes $R = 1, 5; 6, 5; 10; 25; 51; 99$. La simulation d'un tel système étant relativement rapide, nous avons réalisé cette étude avec des échantillons contenant $N_{tot} = 10^5$ particules. Cela permet d'assurer une bonne représentativité des classes granulométriques ainsi que des grandeurs mécaniques.

5.1.2 Etat d'équilibre statique

Sous l'effet de la pression, l'échantillon évolue et tend vers une configuration stable plus compacte que la configuration initiale. La figure 5.3(a) montre, en fonction de l'étalement s , les compacités initiales (à l'issue de la construction géométrique) et finale des échantillons composés de particules suivant une distribution uniforme par fraction volumique. Comme constaté lors de l'étude géométrique, on observe que la compacité finale augmente avec l'étalement tradui-

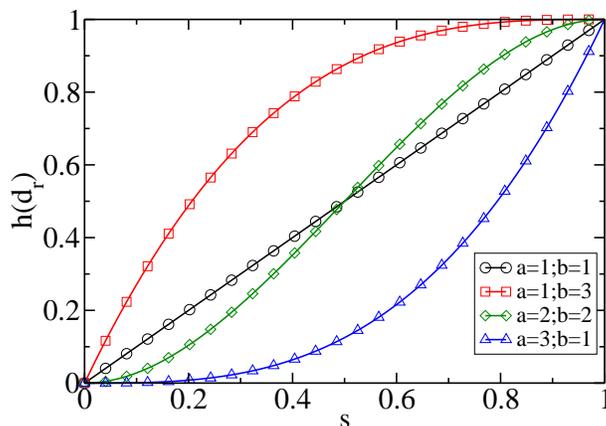


FIG. 5.2 – Distributions granulométriques étudiées.

sant un remplissage plus efficace de l'espace. Par contre, on remarque que le gain de compacité, entre l'état initial et l'état final, est plus important pour les distributions à faible étalement que pour celles à grand étalement. Cela illustre la capacité de la procédure de dépôt à générer des empilements d'autant plus proches de l'équilibre que l'étalement de la distribution est grand. En effet, dans le cas faiblement polydisperse, la taille des pores disparaissant au cours de la compression, est de l'ordre de celle des particules. Ceci implique des mouvements des particules du même ordre de grandeur lors des réarrangements locaux. Au contraire, dans le cas polydisperse, les pores sont bien plus petits que les grosses particules impliquant des réarrangements de faibles amplitudes et une configuration initiale finalement très proche d'un état d'équilibre en terme de position des particules.

La figure 5.3(b) montre la compacité finale ρ en fonction de l'étalement s pour différentes valeurs des paramètres de forme a et b . A faible étalement $s = 0, 2$ on constate que les paramètres de forme n'ont que très peu d'influence ; la compacité est proche de 0,845 quelles que soient les valeurs des paramètres de forme. Il est intéressant de constater qu'une si faible polydispersité amène un gain conséquent de compacité par rapport à la configuration désordonnée dense monodisperse ("random close packing") dont la compacité est proche de 0,82. Pour les étalements supérieurs, on voit qu'au delà de la transition d'insertion géométrique ($s \simeq 0,73$) les paramètres de forme a et b conditionnent fortement les valeurs de compacité accessibles. On retrouve l'efficacité de la distribution uniforme par fraction volumique à bien remplir l'espace ainsi que celle des distributions favorisant les petites particules ($a = 1; b = 3$) plus que les grosses ($a = 3; b = 1$).

Même sans frottement, l'effet d'arche propre aux matériaux granulaires conduit à l'exclusion de particules du réseau actif par lequel transitent les chaînes de forces. Ainsi, l'état d'équilibre statique est atteint quand l'ensemble de ce squelette de particules en contact est persistant (pas de création ni de destruction de contacts) et que les forces de contact sont constantes au cours du temps. Dans ces conditions, le réseau actif est isostatique et le nombre de coordination (limité aux particules du réseau) est égal à quatre. En effet, dans le cas de disques non frot-

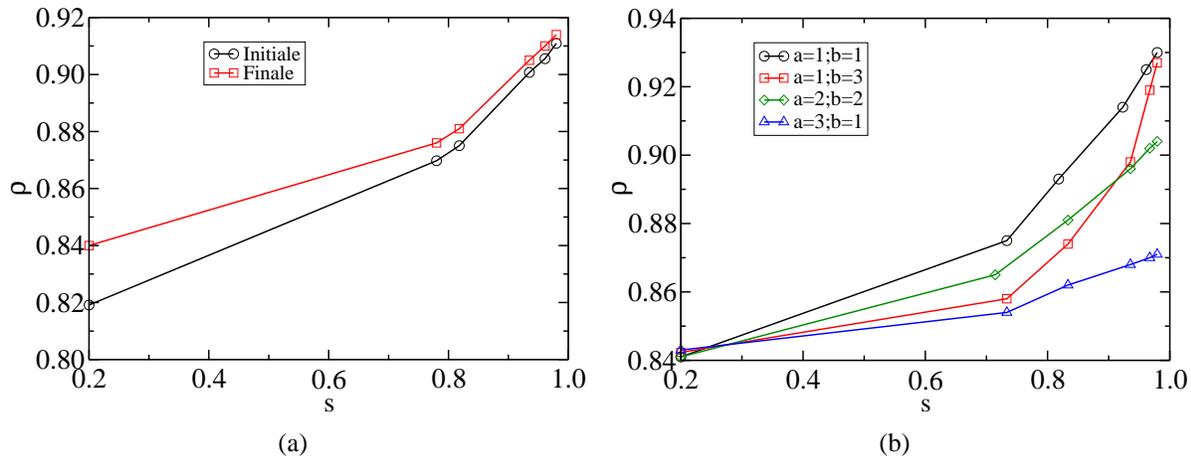


FIG. 5.3 – (a) Compacités initiales et finales en fonction de l'étalement s pour une distribution uniforme par fraction volumique. (b) Compacité finale en fonction de l'étalement s pour les différents paramètres de forme a et b choisis pour cette étude.

tants, nous avons $2N_p$ équations pour l'équilibre statique et N_c inconnues que sont les forces normales. Ainsi, la condition d'isostaticité se traduit par la relation $2N_p = N_c$. En introduisant le nombre de coordination défini par $Z = 2N_c/N_p$ dans cette équation, on trouve que la valeur de Z correspondant à l'équilibre statique est $Z = 4$. Cet indicateur, qui représente le nombre moyen de contacts par particules, permet de déterminer clairement si l'état d'équilibre statique est atteint ou non. En effet, d'autres indicateurs, comme la compacité, tendent vers leur valeur finale plus rapidement que Z sans pour autant garantir que le réseau de contacts soit stable. Dans la suite de cette étude, cette condition d'équilibre du réseau actif $Z = 4$ est satisfaite quelle que soit la granularité. En revanche, nous allons voir par la suite que la granularité influence la proportion de particules exclues du réseau actif ainsi que la topologie du réseau de contacts.

La figure 5.4 montre la proportion X_f de particules flottantes définie par $X_f = (N_{tot} - N_p)/N_{tot}$. Les particules flottantes, présentes uniquement lorsque la gravité est désactivée, sont les particules ne participant pas au réseau actif; elles possèdent au plus un seul contact. Les particules avec un seul contact subissent une force unique mais ne la communiquent pas à d'autres particules; elles ne font donc pas partie du réseau. Cette force est donc nécessairement nulle à l'équilibre. On constate sur la figure 5.4 que la proportion X_f de particules flottantes augmente fortement avec l'étalement pour tous les paramètres de forme. Étonnamment, on voit que la distribution uniforme par fraction volumique mène à des échantillons où moins de la moitié des particules est sollicitée alors qu'il s'agit des échantillons les plus compacts. En effet, la compacité élevée suppose un arrangement dense où les chaînes de forces impliquent un grand nombre de particules dans le réseau actif. Ce résultat, apparemment contradictoire, sera expliqué au cours de cette étude par le rôle joué par la taille des particules dans la transmission des forces.

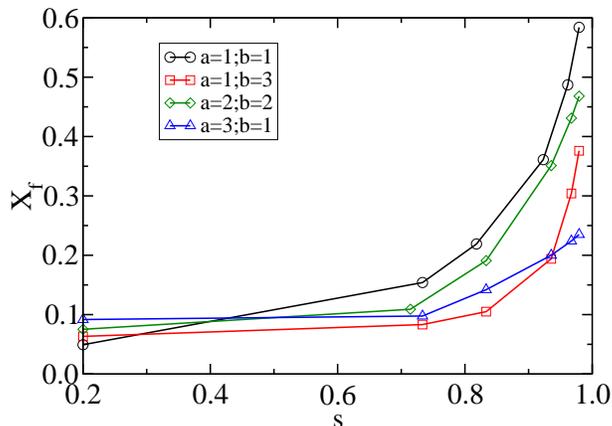


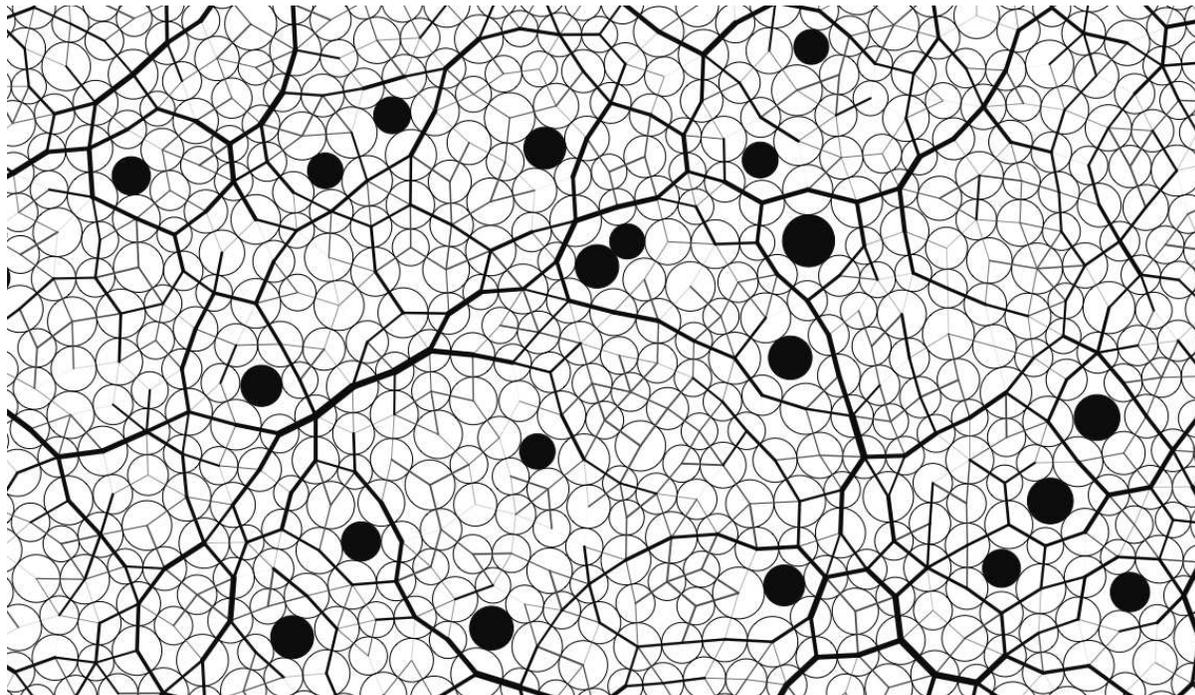
FIG. 5.4 – Fraction des particules flottantes (0 ou 1 contact) en fonction de l'étalement s pour différentes valeurs des paramètres de forme dans l'état relaxé.

5.2 Etat de contraintes à l'équilibre

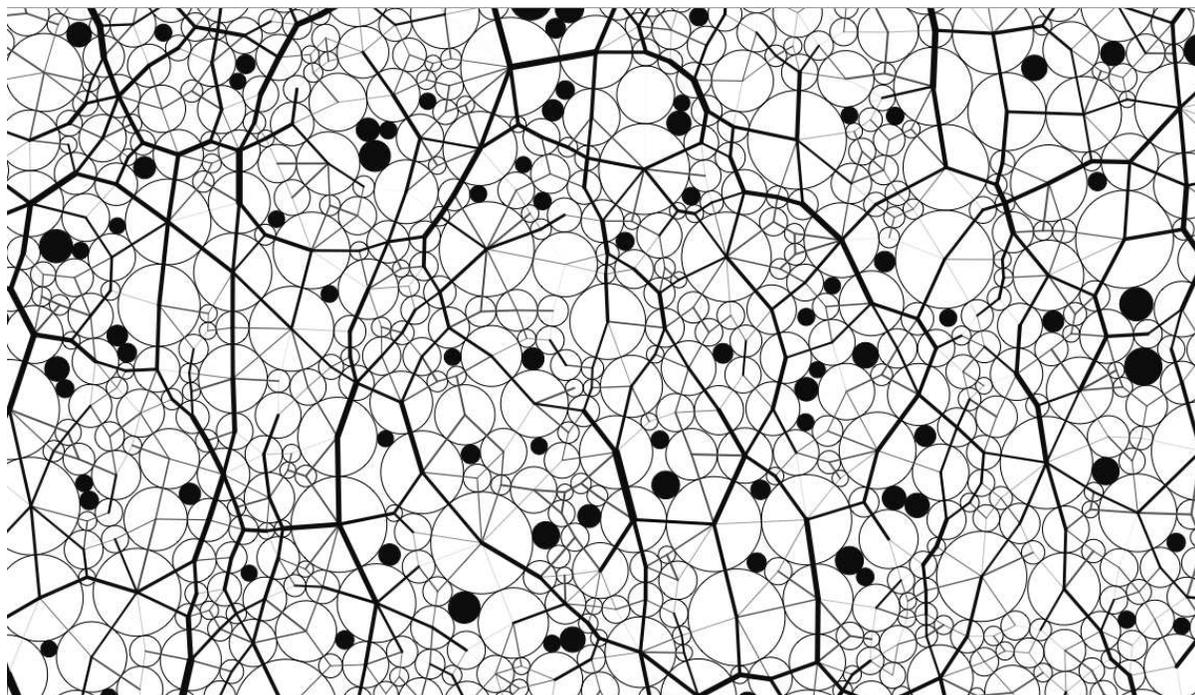
5.2.1 Tenseur de contraintes

La figure 5.5 montre quatre vues d'échantillons dont la distribution granulométrique est uniforme par fraction volumique et pour quatre valeurs d'étalement $s = 0,2$ (figure 5.5(a)), $s = 0,73$ (figure 5.5(b)), $s = 0,82$ (figure 5.5(c)) et $s = 0,98$ (figure 5.5(d)). Les particules colorées en noir correspondent aux particules flottantes. Les forces sont représentées par des segments reliant les centres des particules en contact dont la largeur est proportionnelle à l'intensité de la force. La distinction entre forces du réseau fort ($f > \langle f \rangle$) figurées en noir et celles du réseau faible ($f < \langle f \rangle$) figurées en gris sera précisée ultérieurement. La figure 5.5 permet d'apprécier la situation des particules flottantes et d'en comprendre l'origine. En effet, à faible étalement ($s = 0,2$ (figure 5.5(a))), les particules flottantes sont le plus souvent isolées et résultent de la formation de cellules de forces de géométrie relativement simple (environ six particules autour d'une particule flottante). Avec l'étalement, les particules flottantes se trouvent en groupes de tailles croissantes et la géométrie des cellules de forces se diversifie. Ainsi, pour l'étalement maximal $s = 0,98$ (figure 5.5(d)), on constate qu'à l'échelle des grosses particules, des pores pourtant bien remplis par un grand nombre des petites particules, se retrouvent complètement isolés du réseau actif. Au contraire, certains de ces pores sont inclus dans le réseau actif et entraînent une ramification importante du réseau de contacts dans ces zones très désordonnées.

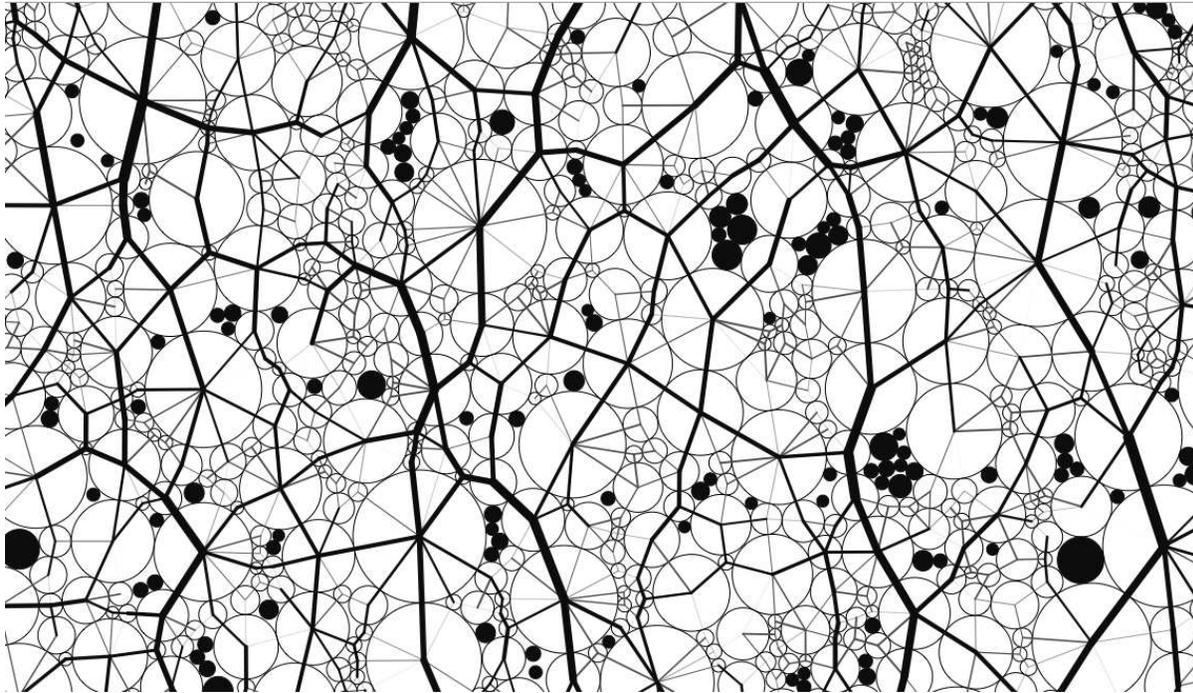
Avant de s'intéresser aux propriétés locales du réseau de forces dans la section suivante 5.3, on va évaluer l'état de contraintes global du système à l'équilibre statique. Si le concept de contrainte est parfaitement défini pour un milieu continu, et ce quel que soit le volume, il n'en va pas de même pour la matière divisée. En effet, il est toujours possible d'évaluer les contraintes dans un volume de contrôle en calculant la densité surfacique (linéique en 2D) de forces exercées par les grains extérieurs sur ceux appartenant au volume de contrôle. Cette évaluation du



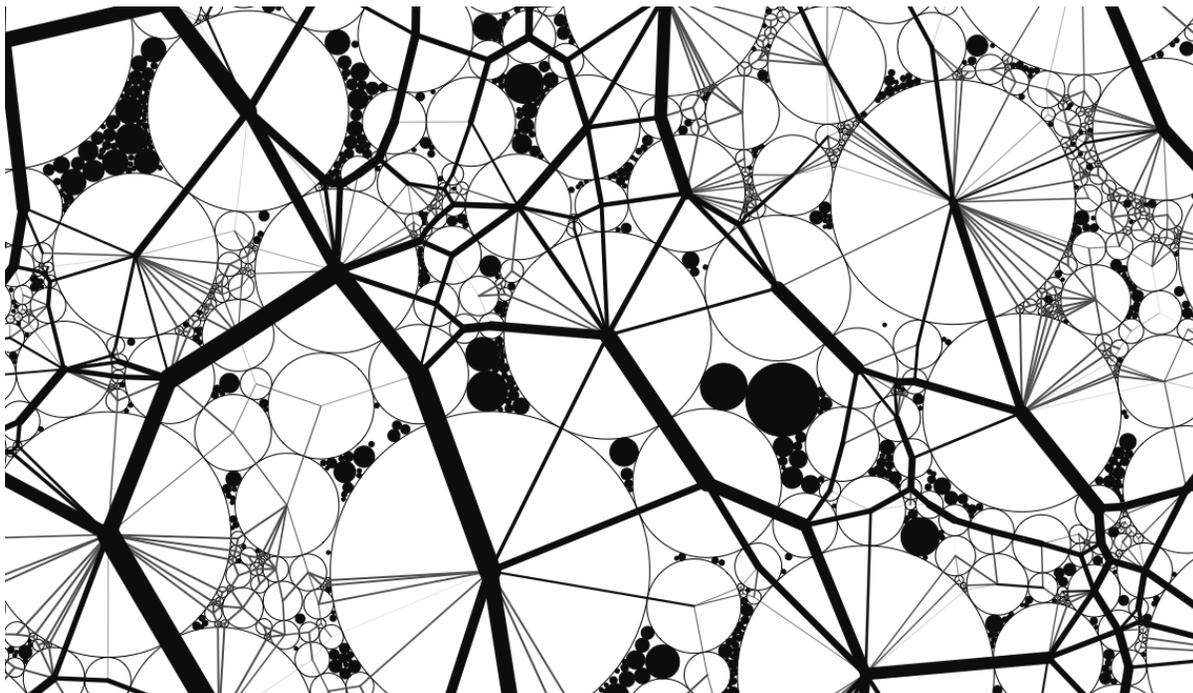
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 5.5 – Vues d'échantillons à différents étirements d'une distribution uniforme par fraction volumique : (a) $s = 0,2$; (b) $s = 0,73$; (c) $s = 0,82$; (d) $s = 0,98$. Les particules colorées en noir correspondent aux particules flottantes. Les forces sont représentées par des segments reliant les centres des particules en contact et dont la largeur est proportionnelle à l'intensité de la force de contact. Les forces figurées en noir représentent les forces appartenant au réseau fort ($f > \langle f \rangle$) et en gris celles appartenant au réseau faible ($f < \langle f \rangle$).

tenseur de contraintes est d'autant plus juste que le volume de contrôle est grand, mais perd son sens mécanique lorsque le volume de contrôle tend vers le volume d'un grain. Afin de résoudre ce problème d'échelle de pertinence du tenseur de contraintes, Moreau a introduit le concept de moment interne [40] défini pour une particule i possédant c contacts par :

$$M_{\alpha\beta}^i = \sum_{c \in i} f_{\alpha}^c r_{\beta}^c \quad (5.1)$$

où f_{α}^c est la composante α de la force exercée sur i au contact c et r_{β}^c est la composante β d'un vecteur position du contact c . Ce moment est additif et indépendant de l'origine du vecteur r^i . Ainsi, pour un ensemble de particules contenues dans un volume V , on peut montrer que le tenseur de contraintes de Cauchy est équivalent à la densité volumique de moment tensoriel :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{V} \sum_{i \in V} \underline{\underline{M}}^i = \langle \underline{\underline{M}}^i \rangle_V. \quad (5.2)$$

Cette expression des contraintes reste valable depuis le volume macroscopique (l'ensemble de l'échantillon) jusqu'au volume élémentaire du grain permettant de définir "correctement" l'état de contraintes d'un grain. Dans ce dernier cas, pour obtenir l'égalité stricte entre la contrainte macroscopique et la somme des M^i/V^i où V_i est le volume de la particule i , il convient de pondérer ce dernier rapport par la compacité ρ exprimée par $\rho = \sum V^i/V$, tel que :

$$\sigma^i = \frac{1}{V} \sum_{i \in V} M^i = \frac{1}{\rho} \sum_{i \in V} \frac{M^i}{V^i}. \quad (5.3)$$

Dans le cadre de sollicitations dynamiques (nombre d'inertie élevé), hors du cadre de ce travail, il faut prendre en compte les effets inertiels dans le calcul des contraintes. Plutôt que d'exprimer le tenseur de contraintes à partir des contributions de chaque particule, il est aussi pratique de l'exprimer à partir des contributions de chaque contact. En effet, la contribution d'un contact à l'ensemble s'exprime comme $f_{\alpha} r_{\beta}^i - f_{\alpha} r_{\beta}^j = f_{\alpha} \ell_{\beta}^{ij}$ où f_{α} est la force de contact et $\ell^{ij} = r^i - r^j$ le vecteur intercentre, ou vecteur branche. Ainsi, le tenseur de contraintes σ correspondant à N_c contacts contenus dans un volume V est donné par :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N_c} f_{\alpha}^c \ell_{\beta}^c = n_c \langle f_{\alpha} \ell_{\beta} \rangle, \quad (5.4)$$

où $n_c = N_c/V$ est la densité numérique de contacts.

La figure 5.6 montre l'évolution du déviateur de contraintes normalisé q/p mesuré sur tout le volume de l'échantillon, en fonction de l'étalement s . A faible étalement ($s = 0, 2$), on constate que la forme de la distribution granulométrique influence très peu l'état de contraintes qui est proche d'un état de contraintes isotrope ($q/p = 0$). Par contre, en augmentant l'étalement, le déviateur augmente, puis passe par un maximum plus ou moins marqué, et diminue finalement pour les grandes valeurs d'étalement. Ainsi, les paramètres de forme s'expriment à travers les différences de valeurs de déviateur atteintes pour le même étalement. Par exemple,

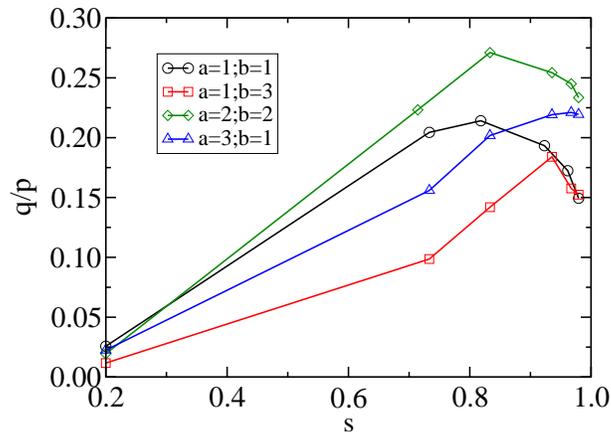


FIG. 5.6 – Déviateur de contraintes normalisé par la pression moyenne pour différents paramètres de forme en fonction de l'étalement s , dans l'état d'équilibre atteint par relaxation.

les distributions favorisant les petites particules ($a = 1; b = 1$ et $a = 1; b = 3$), qui entraînent un remplissage efficace de l'espace, vont engendrer des empilements présentant les plus faibles déviateurs à grands étalements. La non nullité du déviateur, que l'on observe généralement au cours d'un cisaillement, traduit le fait que les grains tendent à s'organiser en une structure anisotrope aussi bien en terme d'orientation de contacts qu'en terme de transmission de forces [45, 57]. Nous allons donc caractériser les propriétés orientationnelles du réseau de forces et les relier à l'état de contraintes moyen du système.

5.2.2 Anisotropie des orientations des contacts

Une première étape consiste à évaluer l'anisotropie du réseau de contact aussi appelée anisotropie de fabrication (ou de texture). Cette évaluation passe par le calcul du tenseur de fabrication [59] permettant de rendre compte de l'orientation moyenne de l'assemblage. Le tenseur de fabrication $\underline{\underline{F}}$ de N_c contacts contenus dans un volume V est donné par :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} n_{\alpha}^c n_{\beta}^c = \langle n_{\alpha} n_{\beta} \rangle_V \quad (5.5)$$

où \mathbf{n}^c est le vecteur unitaire normal au contact c et la moyenne $\langle \rangle_V$ porte sur tous les contacts actifs. Cette formulation, basée sur la connaissance de chaque direction de contacts est bien adaptée aux simulations par éléments discrets mais s'applique difficilement aux expériences où l'accès à la force et à la direction de chaque contact est difficile, voir impossible. On préfère alors évaluer la densité de probabilité $P(\theta)$ d'obtenir un contact dont le vecteur \mathbf{n} est orienté selon la direction θ . Dans les milieux granulaires, cette distribution de probabilité peut, le plus souvent, être approchée par un développement de Fourier à l'ordre 2 et se mettre sous la forme :

$$P(\theta) \simeq \frac{1}{\pi} [1 + a_c \cos(2(\theta - \theta_c))] \quad (5.6)$$

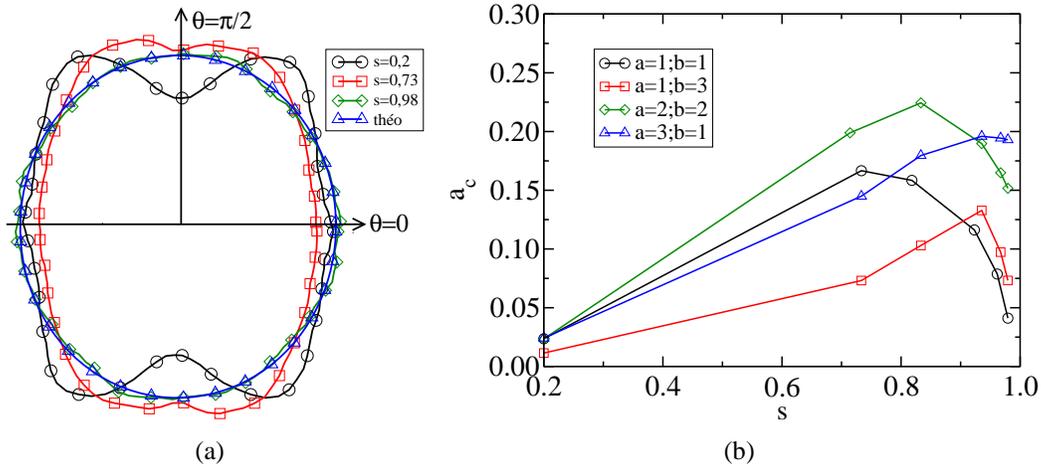


FIG. 5.7 – (a) Représentation polaire de $P(\theta)$ pour la distribution uniforme par fraction volumique ($a = 1; b = 1$) et pour quelques valeurs d'étalement s . La courbe nommée “théo” représente l'approximation par développement de Fourier pour $a_c = 0,025$. (b) Evolution de a_c en fonction de l'étalement s pour différents paramètres de forme.

où a_c correspond à l'anisotropie du réseau de contacts et θ_c correspond à la direction de contacts la plus probable. Nous allons nous référer à cette approximation comme “approximation harmonique” à l'ordre 2. Pour une distribution angulaire $P(\theta)$ uniforme, représentant un milieu parfaitement isotrope, on a $a_c = 0$. Plus on s'éloigne du cas isotrope, plus a_c augmente vers sa valeur maximale 1. En combinant l'écriture intégrale du tenseur de fabrique :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (5.7)$$

et du modèle de distribution angulaire, l'anisotropie de contact a_c est donnée par :

$$a_c = 2(F_1 - F_2), \quad (5.8)$$

où F_1 et F_2 sont les valeurs propres de F . Ainsi, dans l'approximation harmonique, la description des orientations de contacts est décrite par une grandeur scalaire a_c dont on peut suivre l'évolution au cours de la déformation.

La figure 5.7(a) montre la représentation polaire de $P(\theta)$ pour quatre valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. Sur cette figure, la courbe supplémentaire, nommée “théo”, représente l'approximation harmonique de $P(\theta)$ donnée par l'équation 5.8 pour $a_c = 0,025$. On voit que le caractère bimodal de cette distribution, hérité du protocole de dépôt géométrique, persiste et l'approximation harmonique n'ajuste pas correctement la distribution angulaire. Cependant, on observe que par rapport à la figure 3.12(b), les pics sont bien atténués par la compression dynamique et tendent à disparaître complètement pour les grandes valeurs d'étalement. Les considérations avancées lors de l'étude géométrique sur la

pertinence du calcul de l'anisotropie sur une distribution bimodale, à savoir que la symétrie de la distribution fausse le calcul, restent valable ici. Pour prendre en compte cet aspect bimodal, il faut considérer des ordres supérieurs dans le développement de Fourier de $P(\theta)$. Cet aspect disparaissant au cours du cisaillement, et par soucis de cohérence avec l'étude du chapitre suivant (où cet aspect bimodal disparaît), on se limite ici à l'approximation harmonique à l'ordre 2. Dans ces conditions, l'approximation est insuffisante pour décrire les deux pics marqués à faible étalement $s = 0,2$ mais fournit une valeur moyenne tantôt supérieure tantôt inférieure à la distribution réelle $P(\theta)$. Ce fait est illustré par la courbe "théo" correspondant à l'anisotropie calculée par le tenseur de fabrique ($a_c = 0,025$) pour $s = 0,02$. Cependant, cette approximation se révèle plus juste pour $s = 0,98$ où les pics ont disparu et où l'anisotropie calculée est très proche de celle trouvée pour $s = 0,2$.

En effet, la figure 5.7(b) montre l'évolution de l'anisotropie de contact a_c en fonction de s pour différentes valeurs des paramètres de forme. On peut voir que la distribution uniforme par fraction volumique ($a = 1; b = 1$) génère des assemblages possédant la même anisotropie des contacts à faible étalement qu'à grand étalement. Quels que soient les paramètres de forme, à faible étalement l'anisotropie des contacts est faible. En augmentant l'étalement, après l'augmentation de l'anisotropie jusqu'à un maximum dépendant des paramètres de forme, on constate l'existence de deux tendances selon la forme de la distribution granulométrique :

- Pour les distributions générant les empilements les plus denses où le remplissage est efficace, l'augmentation de l'étalement se traduit par une diminution de l'anisotropie de contact. Dans ce cas, l'ajout de petites particules tend à uniformiser l'assemblage en terme de direction de contact
- Pour la distribution uniforme par tailles des particules, on constate que la valeur de a_c ne diminue pas mais reste constante et proche de $0,2$ à partir de $s \simeq 0,9$. La fraction de petites particules étant faible dans cette distribution, l'effet "uniformisateur" du remplissage des pores n'a pas lieu. On caractérise alors un assemblage similaire, quel que soit l'étalement, dont les caractéristiques sont dominées par la fraction des grosses particules.

5.2.3 Anisotropie des forces

Les forces de contact supportées par le réseau de contacts anisotrope s'organisent en un réseau également anisotrope capable, par exemple, de développer une résistance au cisaillement. Pour quantifier le degré d'anisotropie du réseau de forces, on va considérer les distributions angulaires des forces normales moyennes $\langle f_n \rangle(\theta)$ et des forces tangentielles moyennes $\langle f_t \rangle(\theta)$ des contacts dont le vecteur \mathbf{n} est orienté selon la direction θ . De manière similaire à $P(\theta)$ (équation 5.7), on approche $\langle f_n \rangle(\theta)$ et $\langle f_t \rangle(\theta)$ par des développements de Fourier à l'ordre 2 :

$$\langle f_n \rangle(\theta) \simeq \frac{\langle f \rangle}{\pi} \{1 + a_n \cos(2(\theta - \theta_n))\} \quad (5.9)$$

$$\langle f_t \rangle(\theta) \simeq \frac{\langle f \rangle}{\pi} \{-a_t \sin(2(\theta - \theta_t))\} \quad (5.10)$$

où $\langle f \rangle$ est la force normale moyenne, a_n et a_t sont les anisotropies des forces normales et tangentielles et θ_n et θ_t les directions pour lesquelles les forces normales et tangentielles sont, en moyenne, les plus intenses. Afin de calculer a_n et a_t , on introduit les deux tenseur d'ordre deux [50] :

$$\chi_{\alpha\beta}^n = \frac{1}{\langle f \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} f_n n_\alpha^c n_\beta^c = \frac{1}{\langle f \rangle} \langle f_n n_\alpha n_\beta \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle f \rangle} \int_0^\pi \langle f_n \rangle(\theta) n_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta \quad (5.11)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^t = \frac{1}{\langle f \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} f_t t_\alpha^c n_\beta^c = \frac{1}{\langle f \rangle} \langle f_t t_\alpha n_\beta \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle f \rangle} \int_0^\pi \langle f_t \rangle(\theta) t_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (5.12)$$

De manière similaire au tenseur de fabrique, en introduisant les développements de Fourier de $P(\theta)$, $\langle f_n \rangle(\theta)$ et $\langle f_t \rangle(\theta)$ dans les expressions intégrales de $\chi_{\alpha\beta}^n$ et $\chi_{\alpha\beta}^t$, on obtient la relation suivante en négligeant les produits croisés des anisotropies :

$$2 \frac{\chi_1^n - \chi_2^n}{\chi_1^n + \chi_2^n} = a_c + a_n \quad (5.13)$$

où χ_1^n et χ_2^n sont les valeurs propres de χ^n . De plus, en posant $\chi = \chi^n + \chi^t$ on montre que :

$$2 \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} = a_c + a_n + a_t \quad (5.14)$$

où χ_1 et χ_2 sont les valeurs propres de χ .

Le frottement de contact étant désactivé dans cette étude, les forces de contact se réduisent aux seules forces normales. La figure 5.8(a) montre la représentation polaire de la modulation de la force moyenne $\langle f_n \rangle(\theta) / \langle f \rangle$ pour $a = 1$; $b = 1$ et pour différentes valeurs d'étalement. Sur cette figure sont également représentées deux approximations par l'équation 5.9 pour $s = 0, 2$ et $s = 0, 98$ calculées à partir de leurs valeurs respectives de a_n . Sur ces distributions, on constate un héritage du dépôt géométrique à travers la présence de pics mais, contrairement à $P(\theta)$, ils restent visibles à grand étalement. En effet, à part le cas quasi-monodisperse ($s = 0, 20$) on observe, d'une part, que les pics s'accroissent à travers la diminution des forces moyennes dans la direction de chargement et, d'autre part, que l'intensité des forces normales qui augmente à mesure que l'on s'approche de la direction ($\theta = \pi/2$) implique une anisotropie marquée des forces. Le "manque" de force selon la direction $\theta = \pi/2$, que l'on retrouve au centre d'un tas conique de sable, s'explique par la capacité des particules à créer des voûtes qui résistent au chargement vertical empêchant ainsi la transmission des forces dans cette direction.

La figure 5.8(b) présente l'évolution de l'anisotropie des forces normales a_n en fonction de l'étalement s pour différentes valeurs des paramètres de forme a et b . On constate une nouvelle fois le peu d'influence des paramètres de forme sur les propriétés de transmission des forces à

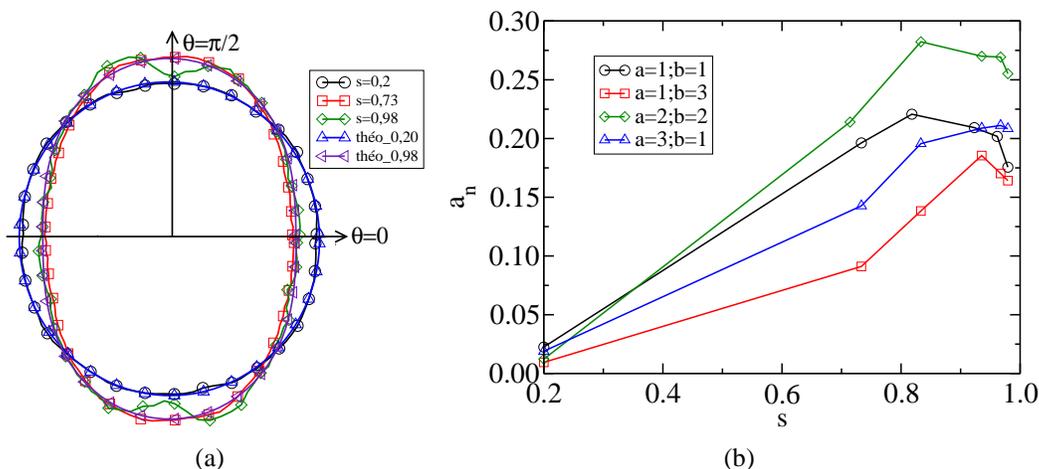


FIG. 5.8 – (a) Représentation polaire de la modulation de la force moyenne $\langle f_n \rangle(\theta) / \langle f \rangle$ pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour quelques valeurs d'étalement. Les courbes nommées "théo_0,20" et "théo_0,98" correspondent à l'approximations harmonique. (b) Anisotropie des forces normales a_n en fonction de l'étalement pour différentes valeurs des paramètres de forme.

faible étalement ($s = 0, 2$). Comme pour l'anisotropie de contact, on distingue deux tendances : les distributions remplissant bien l'espace font diminuer a_n pour les grandes valeurs d'étalement tandis que l'anisotropie des forces reste quasiment constante à grand étalement pour la distribution uniforme par taille des particules. Cependant, les valeurs d'anisotropie des forces a_n pour un étalement donné, s'ordonnent différemment des valeurs d'anisotropie de contact a_c selon les paramètres de forme. Si les distributions ($a = 1; b = 1$) et ($a = 1; b = 3$) fournissent les valeurs de a_c et a_n les plus basses à grand étalement ($s = 0, 98$), l'ordre entre les deux autres distributions ($a = 3; b = 1$) et ($a = 2; b = 2$) s'inverse au passage de a_c à a_n . Ainsi, l'évaluation du couplage entre l'orientation et l'intensité des forces que fournit a_n montre une influence forte et complexe de la forme de la distribution granulométrique sur la transmission des forces.

5.2.4 Relation contraintes-texture

L'intérêt et l'importance physique du calcul de ces anisotropies deviennent clairs en regard du tenseur de contraintes. En effet, dans le cas des disques, le vecteur intercentre ℓ est colinéaire à \mathbf{n} tel que $\ell = \ell \mathbf{n}$. De plus, en négligeant les corrélations entre la distance intercentre ℓ et la force de contact correspondante $\mathbf{f} = f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t}$, on montre que, pour un assemblage granulaire présentant une faible dispersion des distances intercentres autour de la valeur moyenne $\langle \ell \rangle$, on a :

$$\sigma_{\alpha\beta} = n_c \langle f \rangle \langle \ell \rangle \chi_{\alpha\beta}. \quad (5.15)$$

Dans ces conditions, et en supposant que les tenseurs F , χ et σ sont colinéaires, le déviateur de contraintes normalisé q/p , où $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ et $q = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ en 2D, s'exprime en fonction des anisotropies de contact et des forces comme :

$$\frac{q}{p} \simeq \frac{1}{2}(a_c + a_n + a_t) \quad (5.16)$$

Cependant, lorsque l'étalement de la distribution des tailles de particules augmente, la distribution des longueurs intercentres se diversifie entre les bornes $\ell_{min} = 2r_{min}$ et $\ell_{max} = 2r_{max}$ et ne peut plus être réduite à la seule longueur intercentre moyenne $\langle \ell \rangle$. Dans ce cas, on approche la distribution des longueurs intercentres par un développement de Fourier à l'ordre 2 incluant une anisotropie des longueurs a_ℓ :

$$\langle \ell \rangle(\theta) \simeq \frac{\langle \ell \rangle}{\pi} \{1 + a_\ell \cos(2(\theta - \theta_\ell))\} \quad (5.17)$$

La valeur de l'anisotropie des longueurs est évaluée à travers le tenseur d'ordre 2 :

$$\chi_{\alpha\beta}^l = \frac{1}{N_c \langle \ell \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} \ell n_\alpha^c n_\beta^c = \frac{1}{\langle \ell \rangle} \langle \ell n_\alpha n_\beta \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle \ell \rangle} \int_0^\pi \langle \ell \rangle(\theta) n_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (5.18)$$

On en déduit alors la valeur de l'anisotropie des longueurs :

$$2 \frac{\chi_1^\ell - \chi_2^\ell}{\chi_1^\ell + \chi_2^\ell} = a_c + a_\ell \quad (5.19)$$

où χ_1^ℓ et χ_2^ℓ sont les valeurs propres de χ^ℓ .

La figure 5.9(a) montre la distribution des longueurs ($\langle \ell \rangle(\theta)/\langle \ell \rangle$) pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour différentes valeurs d'étalement. Sur cette figure, sont également représentées deux approximations par l'équation 5.17 pour $s = 0, 2$ et $s = 0, 98$ calculées à partir de leurs valeurs respectives de a_l . La figure 5.9(b) montre l'évolution de l'anisotropie des longueurs intercentres a_l en fonction de l'étalement s et pour différents paramètres de forme. On constate que les modulations en terme de longueurs intercentres sont de faible amplitude quel que soit l'étalement. De plus, on observe qu'à grande valeur d'étalement la direction principale des longueurs intercentres n'est plus orientée selon la direction de sollicitation ($\pi/2$) mais plutôt dans la direction horizontale.

Afin de tenir compte de la distribution des longueurs intercentres dans la décomposition additive du déviateur normalisé 5.16, on introduit deux nouveaux tenseurs définis par :

$$\zeta_{\alpha\beta}^n = \frac{1}{\langle f \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} f_n \ell n_\alpha^c n_\beta^c = \frac{1}{\langle f \rangle} \langle f_n \ell n_\alpha n_\beta \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle f \rangle} \int_0^\pi \langle f_n \rangle(\theta) \langle \ell \rangle(\theta) n_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta \quad (5.20)$$

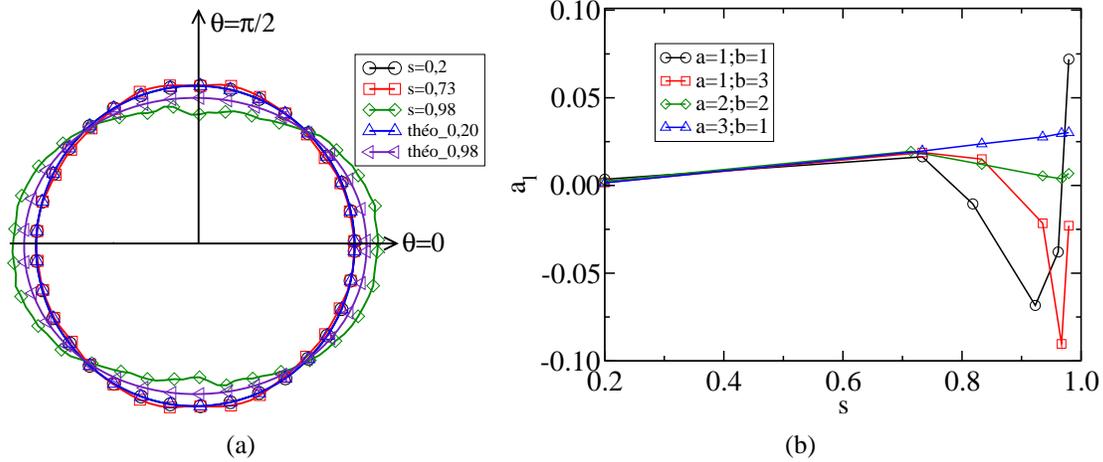


FIG. 5.9 – (a) Représentation polaire de la longueur intercentre moyenne $\langle \ell \rangle(\theta) / \langle \ell \rangle$ pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour quelques valeurs d'étalement. Les courbes “théo_0,20” et “théo_0,98” correspondent respectivement aux approximations par l'équation 5.17. (b) Anisotropie des longueurs intercentres a_l en fonction de l'étalement pour différentes valeurs des paramètres de forme.

$$\zeta_{\alpha\beta}^t = \frac{1}{\langle f \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} f_t l t_{\alpha}^c n_{\beta}^c = \frac{1}{\langle f \rangle} \langle f_t l t_{\alpha} n_{\beta} \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle f \rangle} \int_0^{\pi} \langle f_t \rangle(\theta) \langle \ell \rangle(\theta) t_{\alpha}(\theta) n_{\beta}(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (5.21)$$

Le passage de l'écriture discrète à l'écriture intégrale de ces tenseurs suppose que les corrélations entre f et ℓ sont faibles. Ce point sera discuté dans la suite (cf 5.4). On montre alors que le tenseur de contraintes se met sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = n_c \langle f \rangle (\underline{\underline{\zeta}}^n + \underline{\underline{\zeta}}^t) = n_c \langle f \rangle \underline{\underline{\zeta}} \quad (5.22)$$

En prenant en compte l'anisotropie des longueurs, on obtient :

$$\frac{q}{p} \simeq \frac{1}{2} (a_c + a_n + a_t + a_l) \quad (5.23)$$

La figure 5.10 montre l'évolution de q/p (trait plein) et de la décomposition de q/p en une somme des anisotropies (trait pointillé) en fonction de l'étalement pour différentes valeurs des paramètres de forme. On voit que pour les paramètres de forme impliquant de faibles anisotropies de longueurs ($a = 2; b = 2$ et $a = 3; b = 1$), la décomposition donne des résultats satisfaisants. Cependant, lorsque l'anisotropie de longueur est plus marquée ($a = 1; b = 1$ et $a = 1; b = 3$), l'approximation perd en qualité pour la plupart des échantillons à grands étalements. Une des hypothèses de cette décomposition étant que tous les tenseurs intervenant

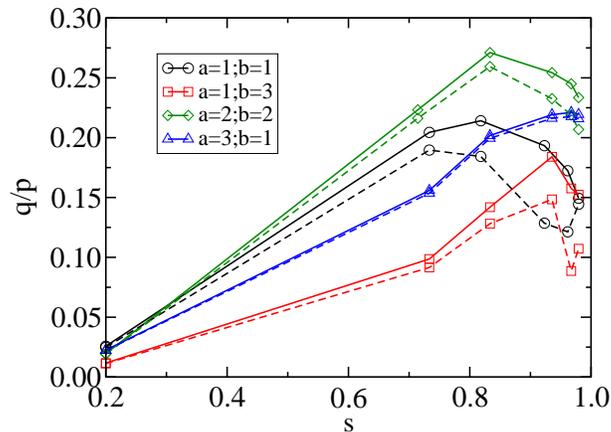


FIG. 5.10 – Les courbes continues représentent le déviateur de contraintes normalisé q/p en fonction de l'étalement s tandis que les courbes en pointillés représentent l'expression de q/p à partir de la décomposition harmonique (équation 5.23) pour différentes valeurs des paramètres de forme.

dans son calcul sont colinéaires, la différence peut être imputée aux changements de direction principale du tenseur χ^l avec l'étalement. Une autre hypothèse de cette décomposition pouvant expliquer cet écart est l'absence de corrélation entre f et ℓ . En effet, avec l'étalement cette corrélation se renforce et détériore la qualité de l'approximation (cf 5.4). Néanmoins, on montrera dans le chapitre suivant que cette décomposition est correcte au cours d'un cisaillement monotone.

5.3 Réseau de forces

5.3.1 Topologie du réseau de contacts

On entend par topologie du réseau de contacts la connectivité des particules à travers les contacts entre elles. Comme on l'a vu précédemment, le nombre de coordination Z , représentant le nombre moyen de contacts par particule, est égal à 4. La figure 5.11(a) montre les fonctions de connectivité P_k définies par la fraction de particules ayant exactement k contacts en fonction de l'étalement et pour la distribution uniforme par fraction volumique. Par définition, on a $\sum_k P_k = 1$ et $\sum_k kP_k = Z$. En l'absence de frottement, il est difficile d'équilibrer une particule avec seulement deux forces de contact non nulles. Donc, contrairement à l'état initial construit géométriquement, dans un assemblage équilibré sans frottement, les particules à deux contacts sont très rares ($P_2 \simeq 0$) quel que soit l'étalement et ne sont donc pas représentées sur la figure 5.11(a). De plus, l'absence de gravité peut exceptionnellement donner naissance à des particules à un seul contact à l'issue de l'interruption d'un "vol libre" à travers un pore de l'échantillon. Par conséquent, la fraction P_1 est proche de zéro et n'est pas représentée sur la figure 5.11(a).

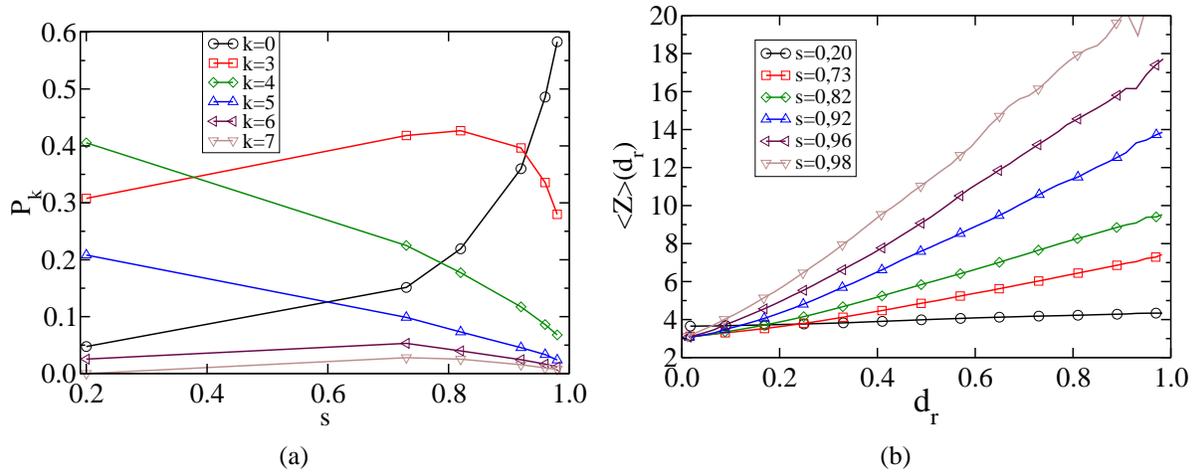


FIG. 5.11 – (a) Fonctions de connectivité P_k en fonction de s pour la distribution uniforme par fraction volumique. (b) Nombre moyen de contacts par particule $\langle Z \rangle$ en fonction du diamètre réduit des particules d_r .

Comme pour l'état initial (figure 3.12(a)), on constate qu'au delà de $s = 0,02$ les populations de particules à 4 et 5 contacts se dépeuplent pour donner naissance, d'une part, à une proportion croissante puis décroissante de particules à trois contacts et, d'autre part, à des particules avec plus de contacts ($k > 5$). Ainsi, en augmentant l'étalement, on diversifie les configurations géométriques jusqu'à atteindre des particules ayant environ $k \simeq 40$ contacts pour $s = 0,98$. Cependant, on constate que ce dépeuplement profite surtout aux particules flottantes ($P_0 \simeq X_f$) qui représentent les particules exclues du réseau de forces. Contrairement à la configuration à deux contacts où les forces appliquées doivent être exactement opposées, une particule équilibrée par trois contacts constitue la première configuration autorisant des variations d'orientation et d'intensité des forces de contact. Dans les matériaux granulaires polydispersés à l'équilibre statique, elle devient, en ce sens, une configuration élémentaire en devenant majoritaire et en assurant l'équilibre statique de nombreuses particules.

La figure 5.11(b) montre l'évolution de la coordinance Z_i (nombre de contacts moyen par particule) en fonction de la taille réduite des particules d_r pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. Quelle que soit la valeur de l'étalement, on constate une relation quasi linéaire entre la taille des particules et le nombre de contacts. Ce résultat est conforme au fait que plus le périmètre, linéaire en rayon, est grand plus une particule possède de contacts. Pour une taille réduite identique, l'augmentation de l'étalement se traduit alors par la complexification de la configuration géométrique au sens où Z_i augmente. Cette relation linéaire implique aussi que les plus petites particules possèdent un faible nombre de contacts. En effet, dès que l'insertion de petites particules est rendu possible par un étalement suffisant $s > 0,4$, on voit que les particules possédant trois contacts (P_3) sont les plus petites particules de la distribution.

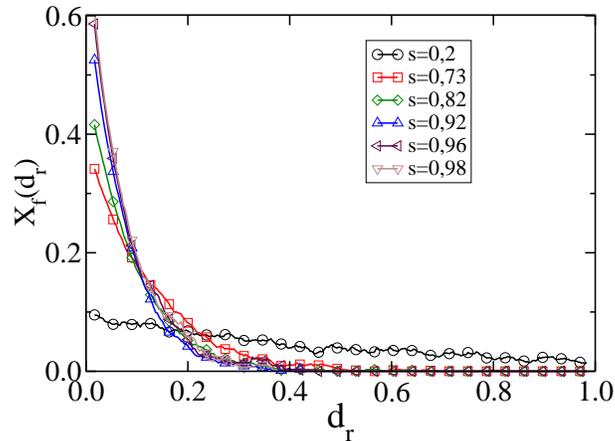


FIG. 5.12 – Fraction de particules flottantes X_f en fonction de la taille réduite des particules d_r .

Comme le montre la fraction des particules flottantes $X_f \simeq P_0$, le nombre de particules exclues du réseau de forces augmente fortement avec l'étalement jusqu'à pratiquement 60% de particules exclues. Cependant, toutes les classes granulométriques ne sont pas sujettes à ce phénomène d'exclusion. La figure 5.12 montre la fraction de particules flottantes X_f en fonction de la taille réduite d_r . Pour la distribution quasi-monodisperse, une fraction de toutes les classes granulométriques est exclue du réseau de force et elle décroît quasi linéairement avec la taille des particules. Pour les valeurs d'étalement supérieures, l'aspect linéaire disparaît au profit d'une décroissance fortement non linéaire. En effet, les plus petites particules de chaque distribution sont les plus exclues du réseau et cette fraction augmente avec l'étalement. Au contraire, avec l'étalement toutes les grosses particules sont incluses dans le réseau de forces. Ce dernier résultat est cohérent avec le fait que ce sont les particules se trouvant dans les pores qui peuvent être exclues du réseau car, à grandes valeurs d'étalement, ce sont les plus grosses particules qui donnent naissance à des pores de tailles inférieures et ne peuvent donc pas s'y trouver.

En combinant ces informations sur la topologie du réseau de contacts et les cartes des forces (figure 5.5), on peut dire que l'augmentation de l'étalement entraîne une diversification des configurations topologiques des particules incluses dans le réseau de forces et que les particules qui en sont exclues sont essentiellement des petites particules. Les petites particules étant le plus souvent regroupées dans les pores entre les plus grosses, on constate que ces groupes de particules peuvent être entièrement exclus du réseau de forces ou au contraire, être inclus et former une structure locale avec peu de contacts par particule.

5.3.2 Forces de contact

On va s'intéresser dans cette partie à l'intensité des forces de contact ainsi qu'au lien entre les forces et la taille des particules impliquées dans le réseau. Une des caractéristiques fondamentales des milieux granulaires est la forte hétérogénéité des forces de contact. Un moyen pour

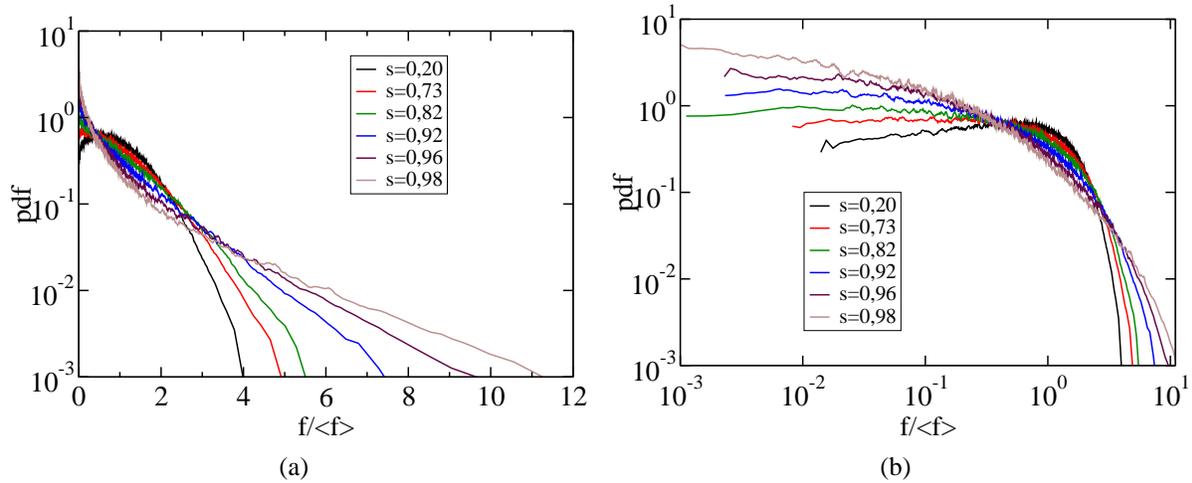


FIG. 5.13 – (a) Densité de probabilité des forces normales normalisées par la force moyenne $\langle f \rangle$ présentée en échelle semi-logarithmique pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. (b) Mêmes données présentées en échelle log-log.

déterminer le degré d'inhomogénéité des forces de contact est d'évaluer la fonction de densité de probabilité des forces. On décompose généralement le réseau de forces en un réseau fort et un réseau faible ayant des propriétés distinctes. On qualifie de forces fortes les forces supérieures à la force moyenne et de faibles celles inférieures à la force moyenne. Ces deux sous-réseaux s'identifient sur la distribution des forces à travers une décroissance quasi-exponentielle pour le réseau fort et une quasi-constance pour le réseau faible avec une probabilité significative des forces les plus faibles. La présence de ces forces faibles est une signature de l'effet d'arche dans le système qui, comme on l'a vu précédemment, crée des structures supportant de grands efforts ne transmettant plus que des efforts faibles au reste du système. On identifie alors le réseau fort à un squelette de forces plutôt orientées selon la direction principale majeure des contraintes et le réseau faible à un liquide interstitiel de forces non orientées selon une direction préférentielle [50].

La figure 5.13(a) montre, en échelle semi-logarithmique, la densité de probabilité des forces normales pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour différentes valeurs d'étalement s . Dans le cas quasi-monodisperse, on retrouve les tendances énoncées précédemment où la force moyenne joue bien le rôle de séparateur entre les deux sous-réseaux. A mesure que l'étalement augmente, le réseau fort s'élargit et l'exposant de la décroissance exponentielle diminue. Afin d'apprécier l'influence de l'étalement sur le réseau faible, ces mêmes données sont tracées sur la figure 5.14(b) en échelle logarithmique. On constate une influence claire de l'étalement autant en terme de densité de probabilité qu'en terme d'intervalle de variation. En effet l'étalement induit un élargissement d'environ une décade de la force entre le cas quasi monodisperse et le cas $s = 0,98$. De plus, cet effet est couplé avec un enrichissement du réseau faible tel que de plus en plus de forces appartiennent à ce réseau. On peut alors dire que l'aug-

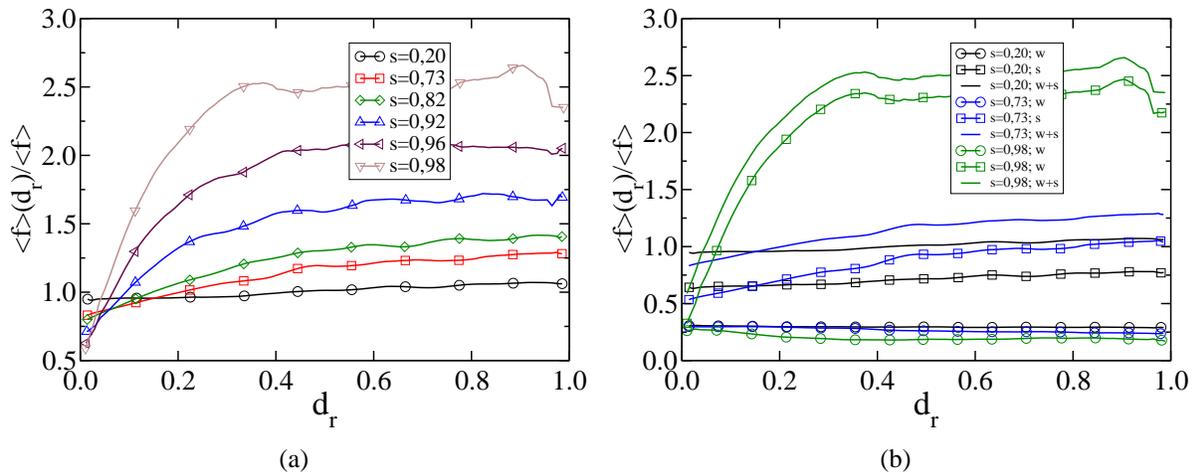


FIG. 5.14 – (a) Evolution de la force de contact moyenne $\langle f \rangle(d_r)$ normalisée par la force moyenne dans tout le système $\langle f \rangle$ en fonction de la taille réduite des particule d_r pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour différentes valeurs d'étalement. (b) Evolution de la force moyenne subie par particule $\langle f \rangle$ décomposée en une contribution des forces fortes $\langle f_s \rangle^*$ et une des forces faibles $\langle f_w \rangle^*$ en fonction de la taille réduite d_r pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique.

mentation de l'étalement granulométrique a un effet dispersif sur les forces de contact au sens où la distribution des forces s'élargit et devient de plus en plus hétérogène.

L'étude de la répartition statistique des forces de contact est une approche classique dans les milieux granulaires quasi-monodisperses pour mettre en évidence les signatures caractéristiques de la matière divisée. Cependant, cette approche ne rend pas compte du rôle joué par chaque classe granulométrique dans la transmission des forces. On propose ici une méthodologie simple pour clarifier ce point.

La figure 5.14(a) montre l'évolution de la force moyenne $\langle f \rangle(d_r)$ que subit une particule de taille réduite d_r . Pour la distribution quasi-monodisperse, la force moyenne par particule augmente linéairement en fonction de d_r . Même si la variation est faible, on constate que les plus grosses particules subissent des forces plus élevées que les petites. Dès que l'étalement est suffisamment grand pour permettre l'insertion géométrique, l'évolution de la force moyenne par particule change radicalement. En effet, on passe d'un régime quasi linéaire à un régime en deux temps composé d'une augmentation rapide avec d_r suivi d'une "saturation" de la force subie par les plus grandes particules. Pendant la phase d'augmentation, on retrouve le caractère dispersif de l'étalement sur les forces au sens où les plus petites particules subissent des forces de plus en plus faibles tandis que la variation s'accélère avec l'étalement pour finalement atteindre des valeurs de saturation elles aussi croissantes avec l'étalement. Ainsi, au delà d'une certaine taille dépendante de l'étalement ($d_r \simeq 0,4$ pour $s = 0,98$), les particules ont toujours la même "vision" du réseau de forces. Cependant, l'information de la force moyenne ne permet pas

de distinguer la contribution du réseau de forces fortes de celle du réseau faible ce qui est intéressant à étudier sachant que ces sous-réseaux ont des rôles mécaniques différents.

Pour cela, on décompose la force moyenne en une contribution du réseau faible (notée w pour weak) et une contribution du réseau fort (notée s pour strong) tel que pour une particule i possédant N_c contacts on a :

$$\langle f \rangle_i = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} f^c = \frac{1}{N_c} \left(\sum_{c=1}^{N_w} f_w^c + \sum_{c=1}^{N_s} f_s^c \right) = \langle f_w \rangle_i^* + \langle f_s \rangle_i^* \quad (5.24)$$

où $N_c = N_w + N_s$. La notation $\langle \rangle^*$ traduit une décomposition de la valeur moyenne en “moyennes additives” permettant d’identifier les contributions de chaque sous-réseau. La figure 5.14(b) montre l’évolution de $\langle f_w \rangle_i^*$ et de $\langle f_s \rangle_i^*$ ainsi que leur somme $\langle f \rangle$ en fonction de d_r pour la distribution uniforme par fraction volumique et pour quelques valeurs d’étalement ($s = 0, 20; 0, 73; 0, 98$). Quel que soit l’étalement de la distribution granulométrique, l’augmentation de $\langle f \rangle$ est uniquement due à l’augmentation de la force moyenne forte $\langle f_s \rangle_i^*$ avec la taille des particules. En effet, la force moyenne faible $\langle f_w \rangle_i^*$ contribue à la force moyenne totale par particule $\langle f \rangle_i$ à hauteur d’environ 0,25 fois la force moyenne indépendamment de la taille réduite d_r et l’étalement de la distribution. En cela, on retrouve l’analogie du réseau faible avec un fluide appliquant, en moyenne, la même force sur toutes les particules quelles que soient leurs tailles. On voit alors que la variation de la force moyenne par particule repose uniquement sur la capacité des particules à “capturer” les forces les plus élevées du réseau de forces. Ce processus de capture étant dépendant de la surface exposée des particules (réduite au périmètre en 2D), on comprend que plus une particule est grande plus elle a de chance de capturer une force forte et d’augmenter ainsi la force moyenne $\langle f \rangle_i$. Cependant, la saturation de la force moyenne au delà de $d_r \simeq 0,4$ montre que ce processus est limité à la classe granulométrique des particules inférieures à cette limite. Au delà de cette valeur, la saturation peut s’expliquer en considérant les surfaces des particules à travers l’évaluation de la pression subie de la part du système par chaque particule.

La pression P_i subie par une particule est calculée comme la moyenne des valeurs propres du tenseur de contraintes d’une particule, définie à l’équation 5.3, telle que

$$P_i = 0,5(\sigma_1^i + \sigma_2^i) \quad (5.25)$$

où σ_1^i et σ_2^i sont les contraintes principales. La figure 5.15 montre l’évolution de la pression par particule $\langle P \rangle_i / \langle P \rangle$ normalisée par la pression moyenne en fonction de la taille réduite d_r . Les résultats montrés correspondent à plusieurs valeurs d’étalements de la distribution uniforme par fraction volumique. A part pour le cas quasi monodisperse, la saturation observée sur la force moyenne se traduit aussi ici par une saturation mais de la pression qui tend vers la pression moyenne. Dans ce régime, on peut dire que les particules sont suffisamment grandes pour que les forces de contact “captées” par leur surfaces constituent un échantillon “bien” représentatif de la distribution des forces dans le système. En ce sens, on peut considérer que ces particules agissent comme des sondes statistiques en mesurant finalement l’état de pression macroscopique du système. Ainsi, la saturation des forces s’explique par un échantillonnage identique

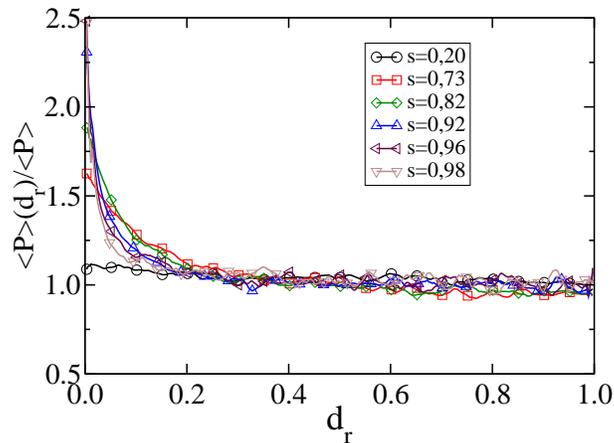


FIG. 5.15 – Pression moyenne subie en fonction de la taille réduite des particules normalisée par la pression moyenne du système pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique.

des forces du système au-delà d'une certaine taille de particules. Cependant, un fait surprenant est que la pression subie par les petites particules ($d_r \leq 0,4$) augmente vers des valeurs supérieures à la pression moyenne avec la diminution de la taille des particules. Malgré la faiblesse des forces captées par les petites particules, il s'avère qu'elles génèrent des états de pression localement supérieurs à la pression moyenne.

5.4 Chaînes de forces

Dans un milieu granulaire, les forces entre les particules sont intimement liées à la notion de contact. A un contact sont associées deux grandeurs dont on a étudié les propriétés : une grandeur "topologique" liée à l'existence même du contact (5.3.1) et une force de contact résultante (5.3.2). Cependant, une troisième grandeur, le vecteur branche reliant les centres des particules en contact, peut être associé à un contact afin de caractériser, par exemple, l'état de contrainte du système. Dans les représentations graphiques du réseau de forces dans un milieu granulaire, dont on trouvera des exemples sur la figure 5.5, on associe le vecteur branche et l'intensité des différentes composantes des forces de contact afin de mettre en évidence une entité caractéristique de la transmission des forces dans les milieux granulaires : les chaînes de forces. L'étude des chaînes de forces, non pas en terme de longueur totale mais plutôt en terme de vecteur branche, permet de mettre en évidence les mécanismes de transmission des forces entre les différentes classes granulométriques d'un granulat polydisperse. En effet, on a constaté que la polydispersité a pour effet de "dispenser" l'intensité des forces de contact et qu'en moyenne les grosses particules sont soumises à des forces plus élevées. Cependant, les forces de contact étant associées, par définition, à deux particules de taille éventuellement très différentes, il est important d'apprécier les couplages entre les forces de contact f et la taille du couple de particules représentée par la norme du vecteur branche ℓ .

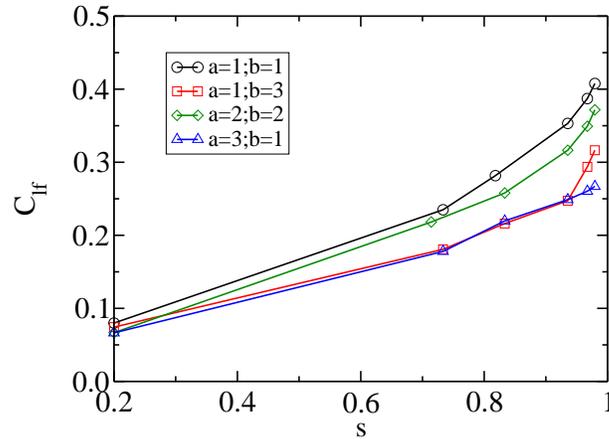


FIG. 5.16 – Coefficient de corrélation linéaire C_{lf} entre la norme du vecteur branche ℓ et la force normale correspondante.

Une première étape dans l'appréciation de ce couplage est d'évaluer le coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre f et ℓ qui permet de qualifier la dépendance de deux variables par un scalaire. Ce coefficient est l'un des indicateurs les plus simples dans l'analyse des corrélations entre variables statistiques. Le coefficient de corrélation C_{XY} entre deux variables centrées $X = x_i - \bar{x}$ et $Y = y_i - \bar{y}$ est défini par :

$$C_{XY} = \frac{\langle XY \rangle}{\sqrt{\langle X^2 \rangle} \sqrt{\langle Y^2 \rangle}}. \quad (5.26)$$

Ce coefficient traduit la dispersion des grandeurs X et Y autour d'une droite. Ainsi, $C_{XY} = 1$ correspond à une corrélation parfaite ($Y = aX + b$) et inversement $C_{XY} = 0$ correspond à un nuage de points désordonnés sans aucune relation statistique.

La figure 5.16 montre le coefficient de corrélation $C_{f\ell}$, calculé sur l'ensemble des contacts de l'échantillon, entre la force de contact f et la norme du vecteur branche correspondant ℓ en fonction de l'étalement pour différentes valeurs des paramètres de forme. Indépendamment des paramètres de forme $C_{f\ell}$ est positif et il augmente avec l'étalement depuis des valeurs faibles pour les distributions quasi-monodisperses jusqu'à des valeurs proches de 0,4 pour les plus grandes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. La positivité et la croissance de $C_{f\ell}$ traduit une corrélation positive croissante entre la force normale et la norme du vecteur branche. Autrement dit, plus la norme du vecteur branche est grande plus la force de contact est grande. En moyenne, on peut alors dire que les chaînes de forces fortes sont portées par les particules générant les plus grandes distances intercentres, donc par les plus grosses particules du système.

Evaluer le degré de corrélation entre deux variables sur la seule valeur du coefficient de corrélation est difficile. En effet, ce coefficient suppose une correspondance linéaire entre X et Y , toutes autres formes de correspondance (normale, quadratique) sera obligatoirement mal décrite et donnera des valeurs peu exploitables. Cependant, la décomposition du déviateur de

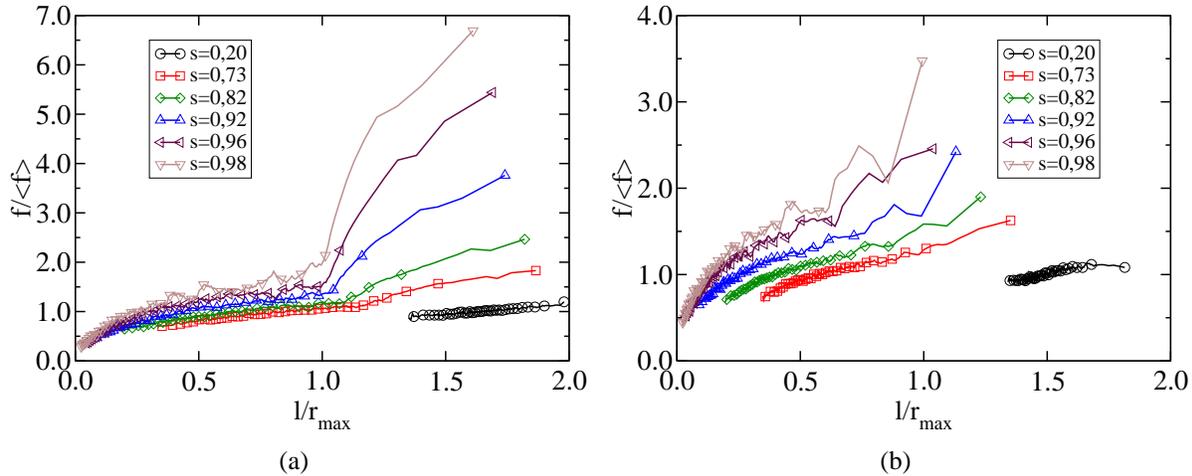


FIG. 5.17 – Force normale adimensionnée par la force moyenne $f/\langle f \rangle$ en fonction de la norme du vecteur branche adimensionnée par le rayon de la plus grande particule du système ℓ/r_{max} pour différentes valeurs d'étalement et pour deux couples de paramètres de forme : (a) ($a = 1; b = 1$), (b) ($a = 1; b = 3$)

contraintes q/p (équation 5.23) supposant que les distributions angulaires des longueurs $\langle \ell \rangle(\theta)$ et des forces normales $\langle f_n \rangle(\theta)$ sont faiblement corrélées, la relative justesse de cette décomposition constatée sur la figure 5.10 permet d'affirmer que les corrélations entre f et ℓ restent faibles quel que soit l'étalement. Ainsi, par la précision de la décomposition, on évalue indirectement les corrélations entre les grandeurs intervenant dans son calcul.

Même si f et ℓ semblent faiblement corrélées, il est intéressant d'apprécier le comportement moyen de l'intensité des forces de contact en fonction de la norme du vecteur branche ou autrement dit, en fonction de la taille des particules en contact. La figure 5.17 montre pour deux couples de paramètres de forme ($a = 1; b = 1$ figure 5.17(a) et $a = 1; b = 3$ figure 5.17(b)) l'évolution de la force normale $f/\langle f \rangle$ en fonction de la norme du vecteur branche adimensionnée par le rayon de la plus grande particule du système ℓ/r_{max} pour différentes valeurs d'étalement. Pour les distributions quasi-monodisperses, on note une faible influence de ℓ sur l'intensité de la force transmise. Au contraire, lorsque l'étalement est suffisant pour permettre l'insertion des plus petites particules entre les plus grosses ($s > 0,73$), on observe deux zones d'influence de ℓ bien visibles dans le cas de la distribution uniforme par fraction volumique. Lorsque la somme des rayons des particules en contact est plus faible que le rayon maximum, la force de contact est faible ($f \lesssim \langle f \rangle$) et augmente peu avec ℓ . Ainsi, après avoir localisé les forces faibles sur les petites particules, on comprend ici que les forces faibles le seront d'autant plus que les deux particules en contact sont de petites tailles.

Ceci implique que le réseau faible est porté, en moyenne, par un mélange de particules dont sont exclues les plus grosses. Au contraire, si une des deux particules en contact est une des plus grosses particules ($\ell > r_{max}$), les forces générées par ces contacts sont plutôt fortes et elles

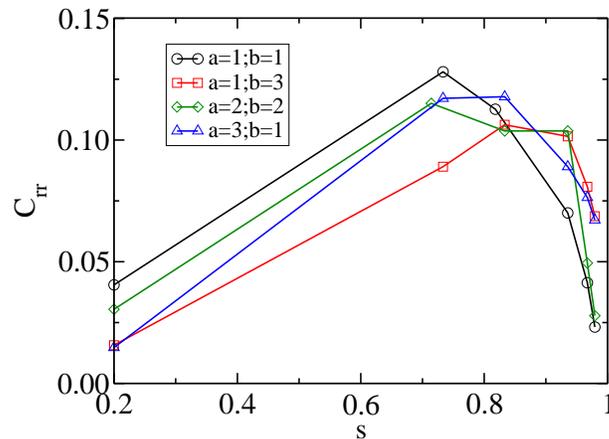


FIG. 5.18 – Coefficient de corrélation linéaire C_{rr} entre les rayons des deux particules impliquées à chaque contact.

augmentent rapidement avec ℓ . Ainsi, le réseau fort est localisé sur un mélange des plus grosses particules dont la somme des rayons est supérieure au rayon maximal. Il semble alors, qu'en plus de la distinction en termes de force, la distinction entre réseaux faible et fort peut s'effectuer à travers la norme du vecteur branche pour les distributions favorisant les petites particules et pour un étalement suffisant. Cependant, la localisation des réseaux fort et faible sur des mélanges de particules pose la question de leur homogénéité et de la présence de ségrégation. On parle de ségrégation de taille lorsque les particules, sous l'action d'une sollicitation dynamique suffisante, se rassemblent en groupes de particules de tailles proche. Ce phénomène, indissociable de l'état granulaire et problématique dans les processus industriels de mélange, pose la question de l'homogénéité du mélange des particules impliquées dans le réseau de forces.

Un premier moyen d'évaluer le degré de ségrégation de l'échantillon est de considérer le coefficient de corrélation, noté C_{rr} , entre les tailles r_1 et r_2 des deux particules en contact. En effet, r_1 et r_2 étant extraits de la même distribution de tailles, une valeur élevée de ce coefficient montrera un effet ségrégant global des forces de contact par la mobilisation de deux particules de tailles proches par contact. La figure 5.18 montre l'évolution de C_{rr} en fonction de l'étalement s pour différentes valeurs des paramètres de forme. On constate que quel que soit l'étalement, les valeurs de C_{rr} sont globalement faibles et ne montrent aucun effet ségrégant des forces. Les valeurs faibles de C_{rr} à petit étalement indiquent que même si les mécanismes d'insertion de particules ne sont pas actifs, la forme de la distribution granulométrique suffit pour en assurer un échantillonnage puis un mélange homogène des particules par les forces de contact. On voit aussi qu'en augmentant l'étalement, C_{rr} passe par un maximum puis diminue vers des valeurs proches de celles à faible étalement. Le pic de C_{rr} correspond au début du processus d'insertion où, comme on peut l'observer sur la figure 5.5(b), les particules de petites et moyennes tailles sont regroupées sans être très mélangées dans les pores.

Un autre moyen, plus précis, d'évaluer la ségrégation est de calculer la densité de probabilité des normes de vecteurs branches ℓ . En effet, une ségrégation forte se traduira par des pics très

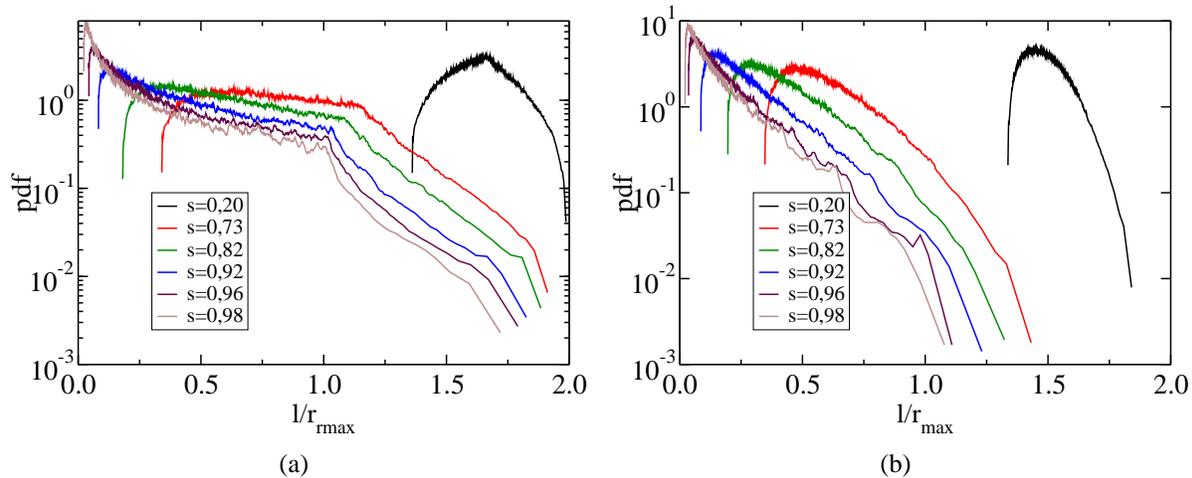


FIG. 5.19 – Distribution de la densité de probabilité des normes de vecteurs branches adimensionnées par le rayon maximal de chaque échantillon l/r_{max} : (a) $a = 1; b = 1$ et (b) $a = 1; b = 3$.

marqués autour des valeurs moyennes de l de chaque groupe de taille, tandis qu'un milieu mélangé s'identifiera à une distribution plus dispersée de la densité de probabilité. La figure 5.19 montre la distribution de l adimensionnée par le rayon maximal présent dans chaque échantillon pour différentes valeurs d'étalement et pour deux couples de paramètres de forme ($(a = 1; b = 1)$ pour la figure 5.19(a) et $(a = 1; b = 3)$ pour la figure 5.19(b)). Mise en relation avec la figure 5.17, la densité de probabilité apporte l'information de la fréquence d'apparition des configurations force-longueur dans un échantillon.

Les courbes issues de la distribution uniforme par fraction volumique (figure 5.19(a)) montrent des comportements marqués dont on pourra appliquer les interprétations aux autres distributions granulométriques. Ainsi, la distribution quasi-monodisperse génère une distribution des longueurs présentant un pic assez large, signe de l'absence de ségrégation due aux contacts. Pour les valeurs d'étalement supérieures, on retrouve les deux zones d'évolution déjà observées sur la figure 5.17 et limitées par le rayon maximal. Avec l'étalement, les contacts impliquant les grosses particules (et des forces fortes) deviennent de plus en plus rares et ne semblent pas induire de ségrégation dans ce mélange contenant les plus grosses particules. Au contraire, il semble qu'une augmentation de l'étalement entraîne une ségrégation croissante des très petites particules. En effet, on constate que pour $s = 0,73$, la distribution des longueurs inférieures à r_{max} est quasiment uniforme pour $0,5r_{max} \lesssim l \lesssim r_{max}$ traduisant un excellent mélange des particules. Lorsque s augmente, on constate que les petites particules se trouvent de plus en plus en contact en donnant naissance à de faibles valeurs de l jusqu'à former un pic relativement net aux grandes valeurs d'étalement ($s = 0,96$ et $s = 0,98$).

En combinant cette information avec les vues d'échantillons à grand étalement (figures 5.5(c) et 5.5(d)), on comprend que ce pic est dû à un remplissage efficace, par les petites par-

ticules, des pores générés par les plus grosses particules. Cependant, la chute de densité de probabilité observée pour les plus faibles valeurs de ℓ , et ce, quelles que soient les valeurs des paramètres de forme et l'étalement, montre le caractère fini de la distribution de tailles à travers l'existence d'une longueur ℓ minimale, très peu probable, impliquant les plus petites particules du système.

Cisaillement simple

Sommaire

6.1	Cisaillement simple périodique	122
6.2	Comportement macroscopique	123
6.3	Connectivité	127
6.4	Anisotropies	129
6.5	Transmission des forces	133
6.6	Influence de la cohésion	136

L'étude de l'état d'équilibre statique effectuée au chapitre précédent (cf chapitre 5) a mis en évidence une influence forte de la granularité sur la texture et sur les propriétés de transmission de forces. Cependant, cette étude a montré que le système étudié, bien que relaxé dynamiquement, reste influencé par un héritage partiel de la texture de la configuration initiale construite géométriquement. Il convient alors de vérifier si les résultats trouvés restent valables pour des configurations indépendantes de l'état initial. On soumet alors les échantillons relaxés à un cisaillement simple périodique quasi-statique. Ce type de sollicitation permettra d'une part, d'étudier l'influence de la granularité sur l'état critique qui est indépendant de la configuration initiale (cf chapitre 1), et d'autre part, d'étudier l'influence de la granularité sur le comportement macroscopique.

6.1 Cisaillement simple périodique

L'essai de cisaillement simple périodique est réalisé avec le même protocole numérique que celui décrit au chapitre précédent. L'échantillon est cette fois soumis à un cisaillement simple périodique par le déplacement horizontal du plateau supérieur. La vitesse de déplacement V_x ($V_x > 0$) du plateau supérieur est ajustée pour que le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = V_x/H$ où H est la hauteur de l'échantillon, soit identique pour tous les échantillons quels que soient les paramètres de granularité. L'application d'une vitesse de translation constante, quels que soient les paramètres de granularité, ne permettrait pas d'assurer le caractère quasi-statique de la sollicitation. Comme on l'a vu au chapitre 1, le caractère quasi-statique peut être décrit par le nombre d'inertie I . L'application d'un taux de cisaillement constant et égal à 10^{-3} s^{-1} et d'une pression de 10^4 Pa pour une masse volumique des grains de 2600 kgm^{-2} , assure que le nombre d'inertie soit inférieur à 10^{-3} . Dans ces conditions, tandis que la gravité reste désactivée, le coefficient de frottement entre les particules μ est pris égal à 0,4. La figure 6.1 montre une vue d'un échantillon de petite taille (500 particules) en cours de cisaillement. Dans ces conditions, après un cisaillement long (plus de 30% de déformation), le système tend vers un état stationnaire que l'on assimilera à l'état critique.

Au cours de cette étude portant sur le comportement quasi-statique des matériaux granulaires polydispersés, nous avons considéré quatre formes de distributions granulométriques légèrement différentes de celles étudiées au chapitre précédent. En effet, pour garder des temps de calcul raisonnables (de l'ordre de quelques jours dans les cas à grand étalement), le nombre de grains de cette étude est réduit à 10^4 particules. Afin d'obtenir une représentativité satisfaisante tout en conservant les paramètres de génération, nous avons réduit la courbure des distributions mono-courbure ($a = 1; b = 3$ et $a = 3; b = 1$) pour que ces distributions soient plus facilement représentables avec un faible nombre de grains. Ainsi, les distributions étudiées sont : ($a = 1; b = 2$), ($a = 2; b = 1$), ($a = 2; b = 2$) et ($a = 1; b = 1$). Pour chaque distribution nous avons considéré quatre valeurs d'étalement telles que $s = 0,20$; $0,73$; $0,88$ et $0,96$ ou en termes de ratio de tailles extrêmes, $R = 1,5$; $6,5$; $16,5$ et 51 .

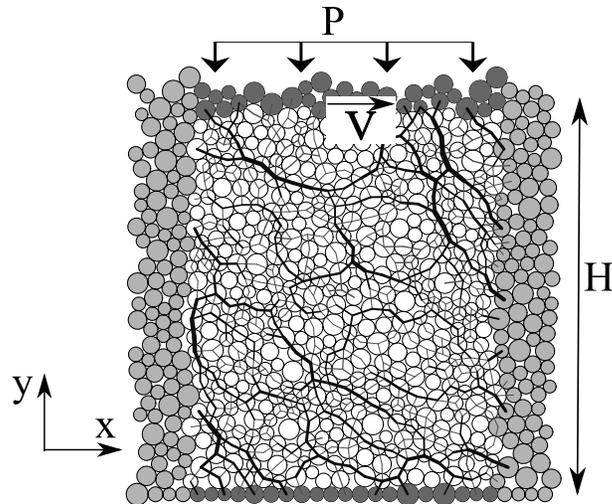
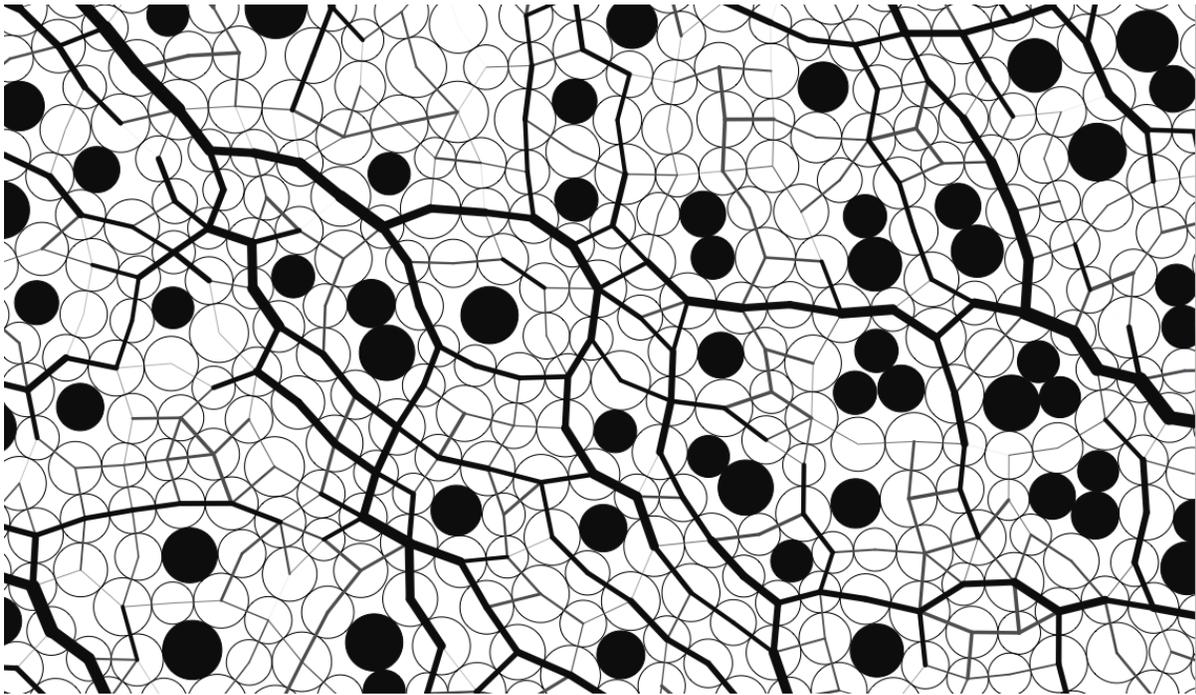


FIG. 6.1 – Cisaillement simple périodique d'un échantillon de petite taille (500 particules), les clumps sont figurés en gris foncé, les images périodiques des particules en gris clair et les particules de l'échantillon en blanc. Les forces normales de contact sont représentées par des segments dont l'épaisseur est proportionnelle à l'intensité de la force.

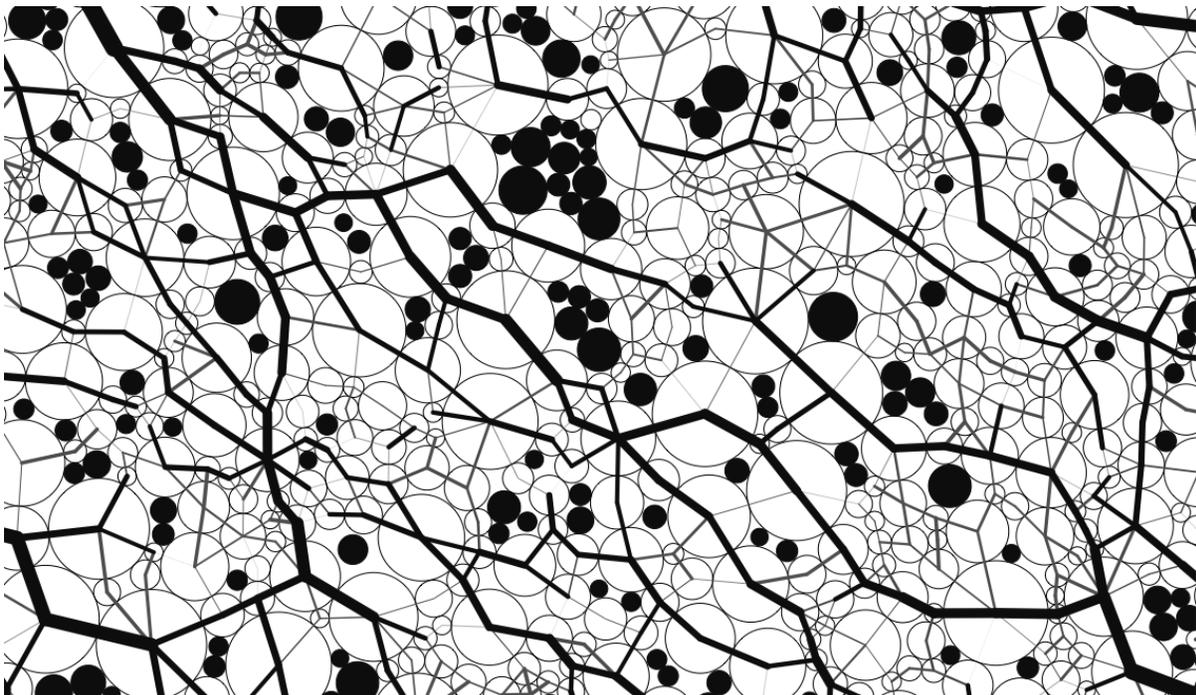
6.2 Comportement macroscopique

La figure 6.2 montre quatre vues instantanées d'échantillons, construits à partir de différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique, à l'état critique. En plus des particules, sont figurées les forces de contact ainsi que les particules flottantes (0 ou 1 contact). On voit immédiatement le caractère anisotrope des échantillons en cisaillement par l'orientation privilégiée des forces de contact qui tendent à s'opposer au déplacement du plateau supérieur (de la gauche vers la droite). On constate que les observations qualitatives faites à l'état initial restent valables à l'état critique : l'augmentation de l'étalement entraîne une fraction croissante du nombre de particules flottantes, une ramification importante du réseau de contacts dans les pores sollicités et une transmission des forces les plus fortes entre les plus grosses particules. Cependant, il semble que ces phénomènes soient amplifiés par le cisaillement. En effet, malgré un remplissage efficace à grandes valeurs d'étalement, un nombre important de pores de grandes tailles remplis de petites particules ne sont absolument pas concernés par le réseau de forces. La vue 6.2(d) étant un instantané, il faut garder à l'esprit que ces pores peuvent être alternativement sollicités puis exclus suivant la configuration des particules dans le pore.

La figure 6.3(a) montre les courbes déformation-contrainte pour les échantillons construits à partir de la distribution uniforme par fraction volumique ($a = 1; b = 1$) et pour différentes valeurs d'étalement s . Les échantillons étant initialement très compacts, la phase d'augmentation de contrainte dans la zone pré-pic est du type "rigide" correspondant à une montée de la contrainte sur un pas de calcul. Ainsi, les premiers états de contraintes visibles sur la figure 6.3(a) correspondent à l'état de contraintes au pic. On observe ensuite une phase d'adoucissement où la contrainte diminue à partir de la contrainte pic vers une valeur constante (à des



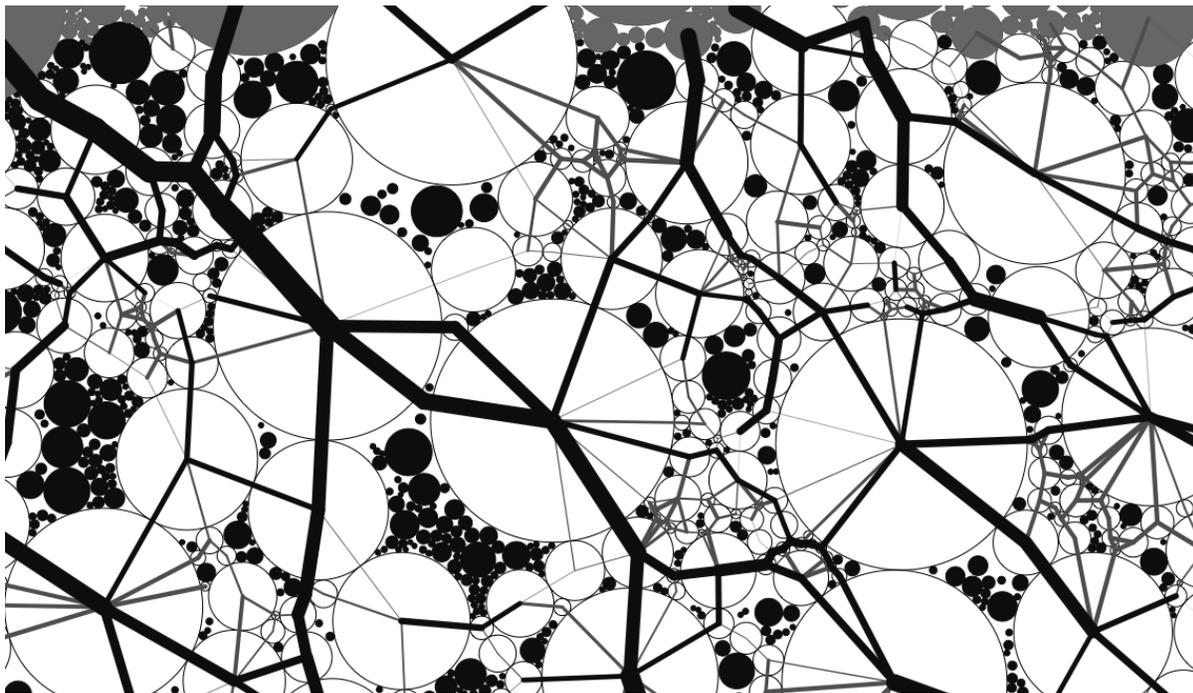
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 6.2 – Vues d'échantillons à différents étirements d'une distribution uniforme par fraction volumique : (a) $s = 0,2$; (b) $s = 0,73$; (c) $s = 0,88$; (d) $s = 0,96$. Les particules colorées en noir correspondent aux particules flottantes. Les forces sont représentées par des segments reliant les centres des particules en contact dont la largeur est proportionnelle à l'intensité de la force de contact. Les forces figurées en noir représentent les forces appartenant au réseau fort ($f > \langle f \rangle$) et en gris celles appartenant au réseau faible ($f < \langle f \rangle$).

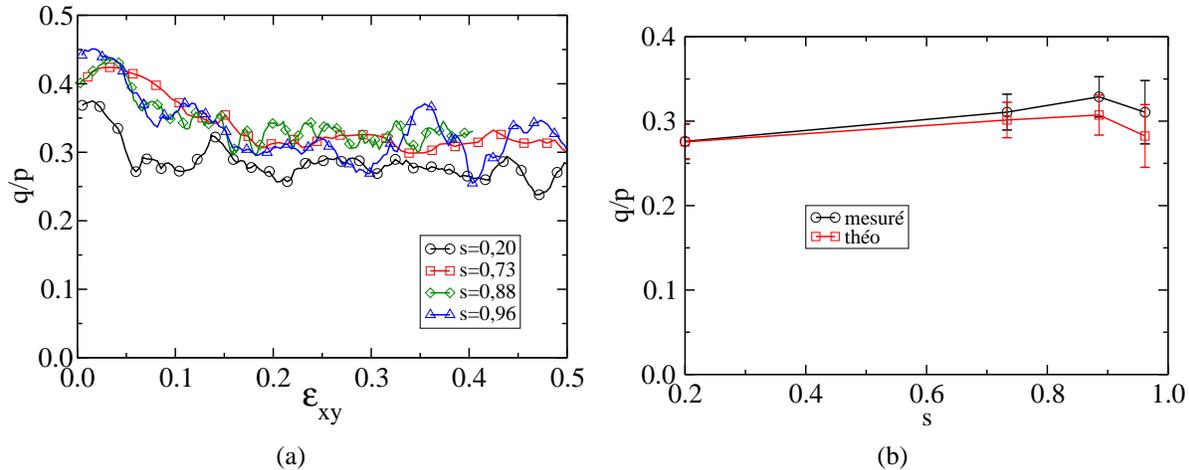


FIG. 6.3 – (a) Déviateur de contraintes normalisé q/p en fonction de la déformation ϵ_{xy} pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. (b) Valeurs du déviateur normalisé mesuré et estimé par l'approximation harmonique (théo).

fluctuations près) qui caractérise l'état "critique" ou stationnaire. Contre toute attente, on observe que l'étalement n'a que très peu d'influence sur l'état de contrainte critique. En effet, à part pour le cas faiblement polydisperse $s = 0,20$ où q/p est légèrement inférieur ($\simeq 0,28$), on observe que pour les échantillons à granularité élevée, $q/p \simeq 0,3$ indépendamment de l'étalement. Comme la contrainte déviatorique normalisée est plutôt fluctuante dans l'état stationnaire, nous avons estimé sa valeur moyenne et son écart-type dans l'état stationnaire. La figure 6.3(b) montre ces valeurs moyennes en fonction de l'étalement s , ainsi qu'une approximation d'après la décomposition harmonique (cf 5.2.4) qui sera discutée dans la suite de ce chapitre. On voit, effectivement que, dans la limite de la précision statistique, la contrainte déviatorique n'est pratiquement pas influencée par l'étalement granulométrique. Remarquons aussi que l'approximation harmonique fournit une estimation assez proche de la contrainte mesurée avec un écart qui augmente légèrement avec s . Nous verrons que cet écart peut être attribué aux corrélations forces-textures qui sont négligées dans l'approximation harmonique.

Cette indépendance de q/p par rapport à l'étalement s s'explique par un mécanisme observé à l'état initial et dont on montrera la pertinence au cours de ce chapitre : le "captage" des forces de contact par les plus grosses particules. En effet, malgré l'effet dispersif des petites particules insérées dans les pores, le réseau de forces fortes, principalement à l'origine de la résistance au cisaillement, s'établit à travers les plus grosses particules présentes dans le système. Par conséquent, quel que soit l'étalement au delà de la transition d'insertion, ce sont toujours les mêmes plus grosses particules qui sont à l'origine de la résistance au cisaillement.

Ainsi, le comportement macroscopique observé résulte en réalité d'une distribution granulométrique "réduite" composée des plus grosses particules. La faible influence de l'étalement sur l'état critique s'explique alors par le fait que l'on caractérise, non pas la distribution granulométrique complète, mais la classe granulométrique "réduite" dont les caractéristiques mécaniques

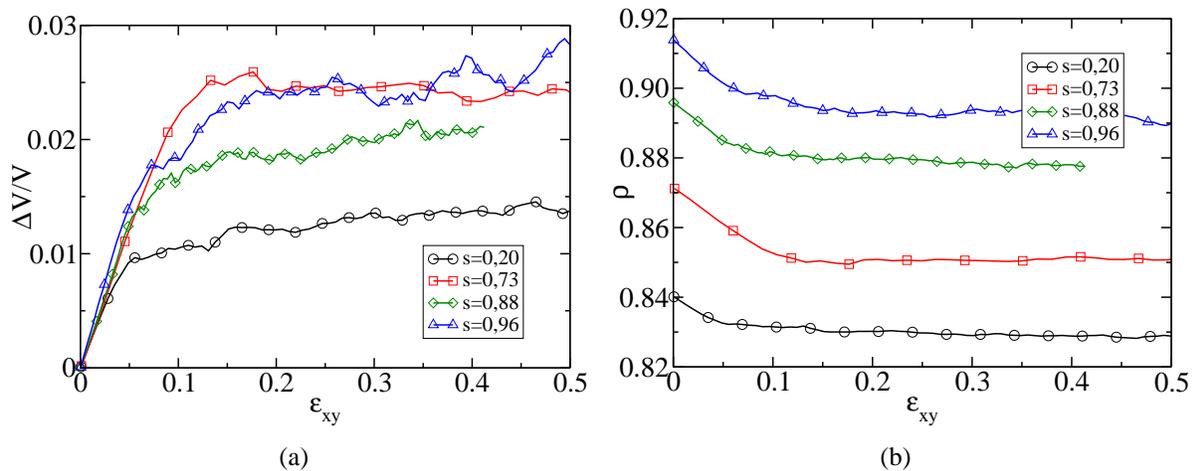


FIG. 6.4 – (a) Changement de volume au cours de la déformation pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. (b) Même information présentée en terme de compacité.

sont faiblement dépendantes de l'étalement. De plus, ce résultat n'est pas propre à la distribution uniforme par fraction volumique et reste valable pour les autres formes de distributions granulométriques étudiées dans ce travail (non présenté). Cependant, la seule évaluation de la résistance au cisaillement est insuffisante pour justifier ce raisonnement ; on s'attachera alors dans la suite de ce chapitre à étudier divers aspects de ce phénomène. Dans un but de concision, seules les données concernant la distribution uniforme par fraction volumique seront présentées.

La figure 6.4(a) montre les variations relatives de volume $\Delta V/V_0$ en fonction de la déformation ϵ_{xy} . La déformation cumulée ϵ_{xy} se calcule, à partir des déplacements cumulés du plateau supérieur horizontalement Δx et verticalement Δy , comme $\epsilon_{xy} = \Delta x/\Delta y$. Le caractère uniquement dilatant de ces échantillons est cohérent avec le comportement quasi-rigide durant la phase pré-pic du chemin de contrainte. On observe que l'augmentation progressive de l'étalement n'induit pas une augmentation graduée de la dilataance ($\Delta V/V_0$) à l'état critique. Cependant, on distingue que, globalement, les échantillons fortement polydisperses ($s > 0, 2$) dilatent plus que l'échantillon faiblement polydisperse ($s = 0, 2$) au cours du cisaillement.

6.3 Connectivité

Le nombre de coordination Z représente de nombre moyen de contacts par particule. Ici seuls les contacts transmettant des forces non nulles sont pris en compte dans le calcul de Z . Ce nombre caractérise alors la connectivité moyenne du squelette de particules impliquées dans la transmission de forces. La figure 6.5 montre l'évolution de Z en fonction de la déformation ϵ_{xy} pour différentes valeurs de s . Quelle que soit la valeur de l'étalement on observe une évolution

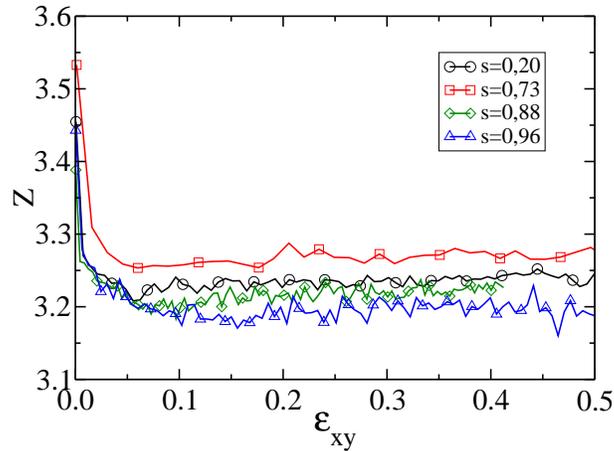


FIG. 6.5 – Nombre de coordination Z en fonction de la déformation pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique.

classique de Z au cours du cisaillement : une chute rapide depuis $Z = 4$ correspondant à notre configuration initiale suivie d'une stabilisation caractérisant l'état du réseau actif dans l'état critique. Cependant, on constate que l'étalement n'a que peu d'influence sur la valeur de Z à l'état critique ; Z est compris entre 3,2 et 3,3. Ceci signifie, qu'en moyenne, le réseau de forces s'établit à travers un réseau de contacts similaire quel que soit l'étalement. Ainsi, Z ne fournit aucune information sur les classes granulométriques impliquées dans le réseau actif, mais indique plutôt l'invariance des propriétés topologiques du réseau de contacts actifs.

On a vu qu'au sein d'un échantillon relaxé, correspondant à l'état initial de l'essai de cisaillement, une fraction croissante de particules étaient exclues du réseau de forces avec l'augmentation de l'étalement. Cette exclusion massive de particules, plus de la moitié dans le cas de la distribution uniforme par fraction volumique, s'explique par l'effet d'arche renforcé par la capacité des plus grosses particules à masquer géométriquement les plus petites. La figure 6.6(a) montre l'évolution de la fraction X_f de particules flottantes en fonction de la déformation ϵ_{xy} . Comme on peut l'observer qualitativement sur la figure 6.2, X_f augmente avec l'étalement et au cours du cisaillement. Par exemple, pour $s = 0,96$, on constate que dans l'état initial 40% des particules sont impliquées dans le réseau actif alors que cette fraction chute à environ 25% dans l'état critique. Ainsi, la caractérisation des propriétés mécaniques s'effectue, non pas sur les 10^4 particules composant l'échantillon, mais sur seulement un quart de ces particules (soit environ 2500). Dans ces conditions, la plupart des grandeurs étudiées vont montrer des fluctuations par le manque de statistique que fournit ce faible nombre de particules.

La figure 6.6(b) montre l'évolution de la fraction de particules flottantes par classes granulométriques en fonction de la taille réduite des particules d_r à l'état critique. Comme à l'état initial, on constate une différence nette entre la distribution faiblement polydisperse et les distributions à étalement important. En effet, dans le cas $s = 0,2$ toutes les classes granulométriques possèdent une fraction de particules flottantes et dont la population diminue avec la taille des particules. Pour les distributions plus étalées, pratiquement toutes les particules de taille supé-

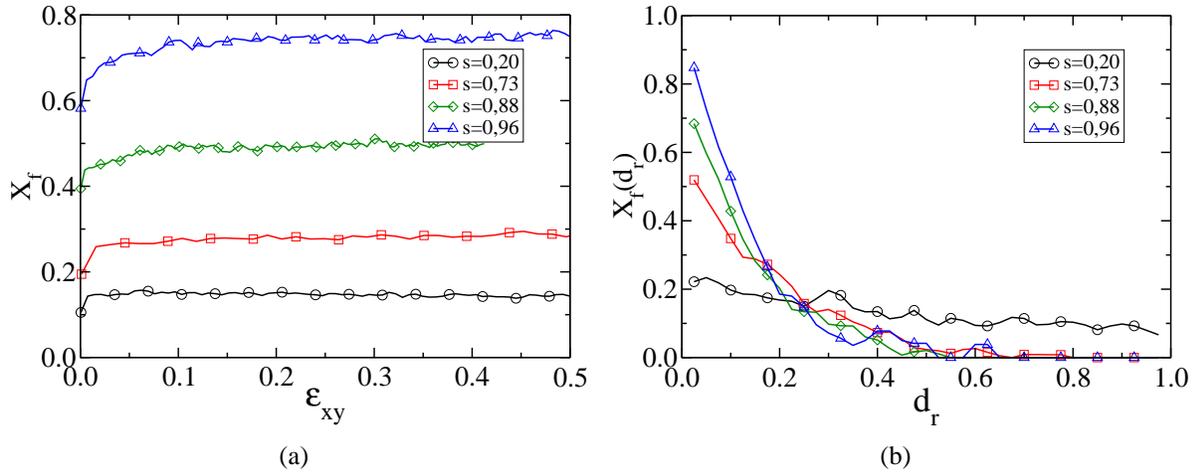


FIG. 6.6 – Données sur les particules flottantes au cours du cisaillement : (a) Fraction de particules flottantes X_f . (b) Fraction de particules flottantes par classe granulométrique en fonction de la taille réduite des particules d_r à l'état critique.

rieure à $d_r \simeq 0,4$ sont impliquées dans le réseau actif. Au contraire, la fraction de particules impliquées chute dramatiquement avec la taille des particules. Ainsi, on voit que 90% des plus petites particules ne sont pas sollicitées et n'occupent qu'un rôle de remplissage d'espace.

6.4 Anisotropies

Au chapitre précédent, nous avons mis en place les outils permettant de relier le déviateur des contraintes normalisé q/p au caractère anisotrope du réseau actif (cf 5.2.4). A l'état initial, nous avons montré que la décomposition harmonique du déviateur de contrainte ($q/p \simeq 0,5(a_c + a_n + a_t + a_\ell)$) était perturbée par la présence de corrélations et par un héritage fort de la texture générée par le dépôt géométrique. Cependant, pour un cisaillement suffisant, les corrélations diminuent (cf 6.5) et tous les tenseurs entrant dans le calcul de la décomposition sont colinéaires. Dans ces conditions, la décomposition constitue une bonne approximation du déviateur des contraintes. La figure 6.7 montre l'évolution de q/p et sa décomposition en fonction de la déformation ϵ_{xy} pour deux valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique. Pour $s = 0,20$, on constate que la décomposition en anisotropies fournit une excellente estimation de q/p . Par contre, pour $s = 0,96$ la décomposition, bien que suivant parfaitement les oscillations de q/p , fournit une estimation toujours inférieure d'environ 10% par rapport à la valeur mesurée. On voit que la décomposition fournit des estimations précises dans la majorité des cas et les éventuelles différences peuvent être imputées aux corrélations persistantes à l'état cisailé entre la norme des vecteurs branches et les forces de contacts (figures 6.13(a)).

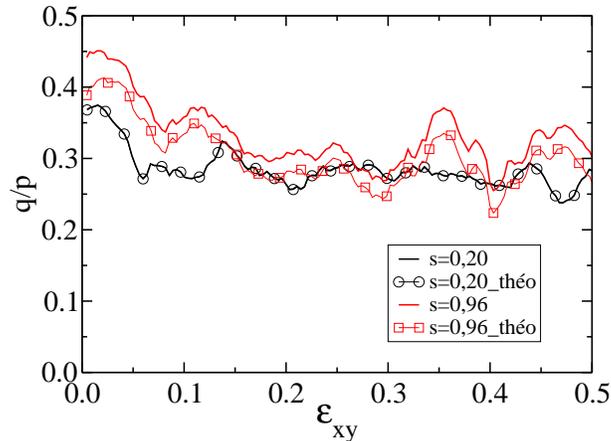


FIG. 6.7 – Contrainte déviatorique q/p et approximation harmonique en fonction de la déformation ϵ_{xy} .

La figure 6.8 montre une représentation polaire des distributions angulaires intervenant dans la décomposition harmonique du déviateur de contrainte pour deux valeurs d'étalement ($s = 0,20$ et $s = 0,96$) : orientation des contacts $P(\theta)$ (fig. 6.8(a)), force normale moyenne $\langle f_n \rangle(\theta)/\langle f_n \rangle$ (fig. 6.8(b)), force tangentielle moyenne $\langle f_t \rangle(\theta)/\langle f_t \rangle$ (fig. 6.8(c)) et longueur intercentre moyenne $\langle \ell \rangle(\theta)/\langle \ell \rangle$ (fig. 6.8(d)). Ces diagrammes polaires ont subi une rotation de $\pi/2 - \theta_{dpm}$ radian où θ_{dpm} représente la direction principale majeure du tenseur associé à la distribution considérée. Ainsi, l'axe vertical de ces diagrammes représente la direction principale majeure. Pour toutes ces distributions, on retrouve des formes bien ajustées par une approximation harmonique.

La figure 6.9 montre l'évolution des anisotropies des orientations des contacts a_c , des forces normales a_n , des forces tangentielle a_t et des longueurs intercentres a_l en fonction de la déformation pour différentes valeurs d'étalement. Au cours du cisaillement, les anisotropies augmentent, passent par un maximum puis diminuent vers une valeur correspondant à l'état critique. Aux fluctuations près, a_n et a_t ne changent pratiquement pas avec s au cours de la déformation, alors que a_c et a_l semblent dépendre de l'étalement. Pour avoir une estimation plus précise de l'influence de l'étalement, critique, nous avons moyenné les anisotropies sur toute la durée de l'état stationnaire. La figure 6.10 montre les anisotropies moyennes en fonction de s avec les barres d'erreurs qui correspondent aux écarts-types. On observe en effet que a_n et a_t sont indépendantes de s . Cependant, il est intéressant de voir que l'effet de l'étalement se traduit par une diminution de a_c accompagnée d'une augmentation de a_l .

D'après l'équation 5.23, pour chaque valeur s de l'étalement dans l'approximation harmonique, nous avons :

$$q/p(s) \simeq \frac{1}{2} \{a_c(s) + a_n(s) + a_t(s) + a_l(s)\} \quad (6.1)$$

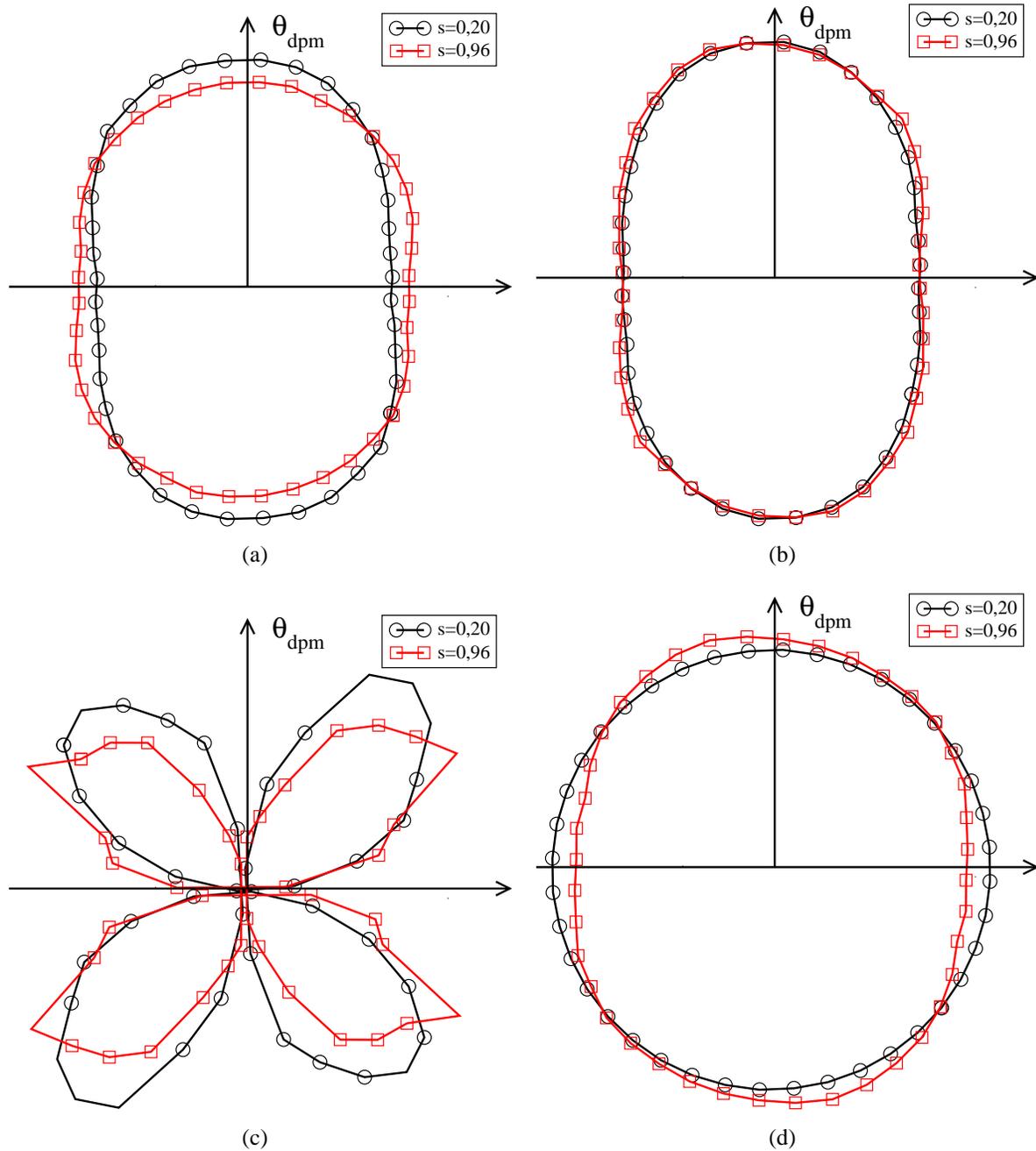


FIG. 6.8 – Représentations polaires des distributions angulaires impliquées dans la décomposition harmonique : (a) orientation des contacts $P(\theta)$, (b) force normale moyenne $\langle f_n \rangle(\theta) / \langle f_n \rangle$, (c) force tangentielle moyenne $\langle f_t \rangle(\theta) / \langle f_t \rangle$, (d) longueur intercentre moyenne $\langle \ell \rangle(\theta) / \langle \ell \rangle$.

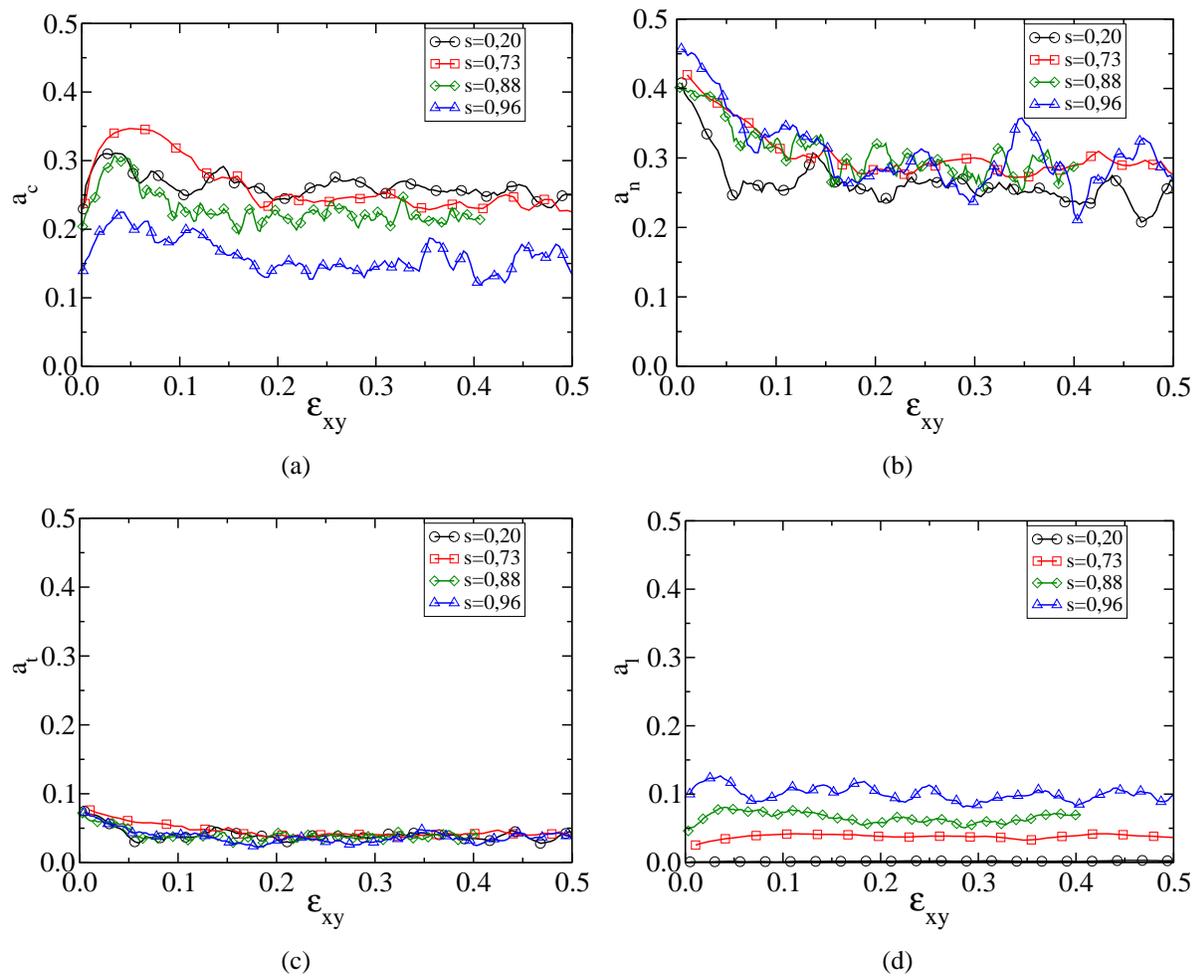


FIG. 6.9 – Différentes anisotropies du réseau actif en fonction de la déformation ϵ_{xy} : (a) anisotropie des orientations des contacts, (b) anisotropie des forces normales, (c) anisotropie des forces tangentielles, (d) anisotropie des longueurs intercentres.

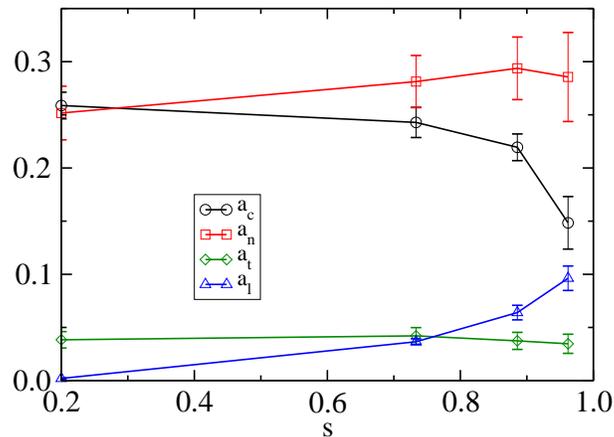


FIG. 6.10 – Valeurs moyennes des anisotropies à l'état critique : orientations des contacts a_c , des forces normales a_n , des forces tangentielle a_t et des longueurs intercentres a_l

Or, nous avons vu que q/p ne dépend pratiquement pas de s . Ceci signifie que la diminution observée de a_c sur la figure 6.10 est exactement compensée par l'augmentation de a_l de manière à ce que q/p reste constant. En d'autres termes, la texture évolue en fonction de s tout en maintenant $a_c + a_l$ constant. Remarquons aussi que $a_c + a_l$ est précisément le double du déviateur du tenseur χ^ℓ défini par l'équation 5.18.

L'indépendance des anisotropies des forces normales a_n et a_t par rapport à s est cohérente avec la remarque faite au début de ce chapitre que le réseau des forces possède les mêmes propriétés orientationnelles, quelle que soit la distribution des tailles des particules. Ceci signifie que les chaînes de forces s'établissent préférentiellement à travers les grosses particules (donnant lieu à des longueurs intercentres importantes) et s'orientent selon la direction principale majeure des contraintes. La diminution de a_c se justifie par le fait que les petites particules insérées entre les plus grosses ont tendance à homogénéiser le système, alors que simultanément les plus grosses particules s'organisent avec une anisotropie des longueurs a_l croissante. C'est cette compensation mutuelle de ces deux phénomènes due à la présence de plusieurs tailles de grains qui explique l'impact inexistant de l'étalement sur la résistance au cisaillement.

6.5 Transmission des forces

La décomposition du réseau de forces en sous-réseaux fort et faible reste valable dans l'état critique. La figure 6.11(a) montre la densité de probabilité des forces normales à l'état critique pour différentes valeurs d'étalement. Malgré le faible nombre de forces entrant dans le calcul de cette statistique, on observe clairement l'effet dispersif de l'étalement sur la distribution des forces. En effet, même si une très faible fraction de petites particules est impliquée dans le réseau actif, le phénomène de ramification du réseau dans les pores sollicités entraîne une

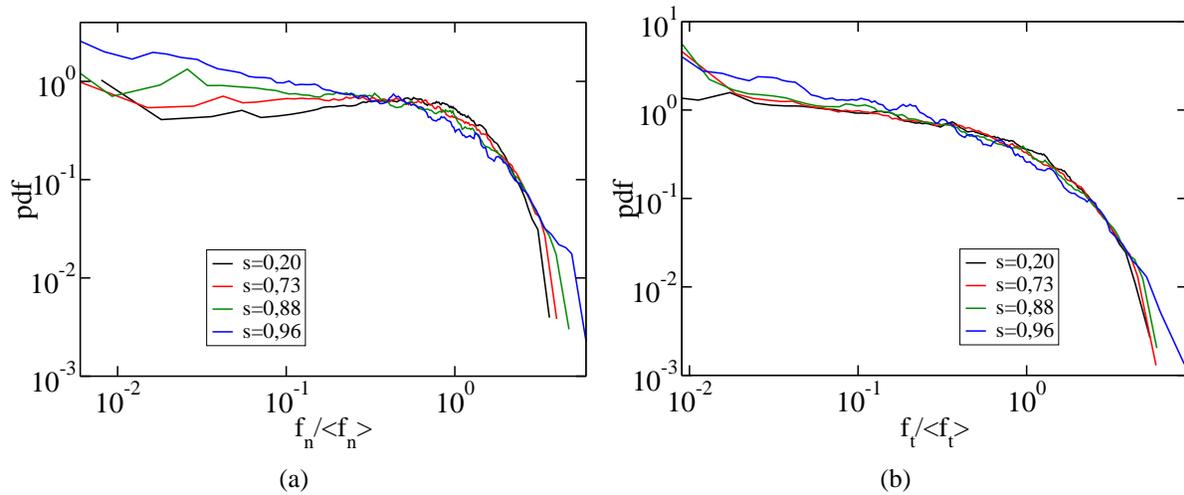


FIG. 6.11 – (a) Densité de probabilité des forces normales normalisée par la force moyenne $\langle f_n \rangle$ en échelle log-log pour différentes valeurs d'étalement. (b) Densité de probabilité des forces tangentielles normalisées par la force moyenne $\langle f_t \rangle$ en échelle log-log pour différentes valeurs d'étalement.

proportion croissante de faibles forces avec l'étalement. La figure 6.11(b) montre la densité de probabilité des forces tangentielles normalisées $f_t / \langle f_t \rangle$ dans l'état critique pour différentes valeurs d'étalement. Bien qu'étant moins marqué que sur les forces normales, l'effet dispersif de l'étalement est visible sur la distribution des forces tangentielles. Cependant, la sensibilité de cette distribution à l'étalement est inférieure à celle des forces normales.

La figure 6.12(a) montre la pression moyenne par particule $\langle P(d_r) \rangle$ normalisée par la pression moyenne P en fonction de la taille réduite d_r pour différentes valeurs d'étalement. L'effet de sonde des plus grosses particules observé à l'état initial persiste au cours du cisaillement. Cependant, les pressions subies par les plus petites particules sont plus importantes au cours du cisaillement qu'à l'état initial. Bien que cela ne soit pas présenté ici, les forces moyennes et les contributions des réseaux faible et fort à la force moyenne montrent les mêmes tendances qu'à l'état initial. La figure 6.12(b) montre le déviateur moyen par particule $\langle Q(d_r) \rangle$ normalisé par la pression moyenne P en fonction de la taille réduite d_r pour différentes valeurs d'étalement de la distribution uniforme par fraction volumique à l'état critique. De manière similaire à la pression, dans le cas quasi-monodisperse, les particules subissent le même déviateur quelles que soient leurs tailles. Pour les valeurs d'étalement importantes, le déviateur diminue avec la taille des particules. Cependant, il semble que l'effet de sonde ne soit pas aussi important que pour la pression. En effet, seules les plus grosses particules de la distribution la plus étalée ($s = 0,96$) subissent un déviateur proche du déviateur macroscopique q/p .

La figure 6.13(a) montre le coefficient de corrélation linéaire C_{lf} (cf 5.4) entre les forces normales et les longueurs intercentres en fonction de la déformation ϵ_{xy} . Malgré l'augmentation du captage des forces fortes par les plus grosses particules, C_{lf} reste constant et égal à la valeur

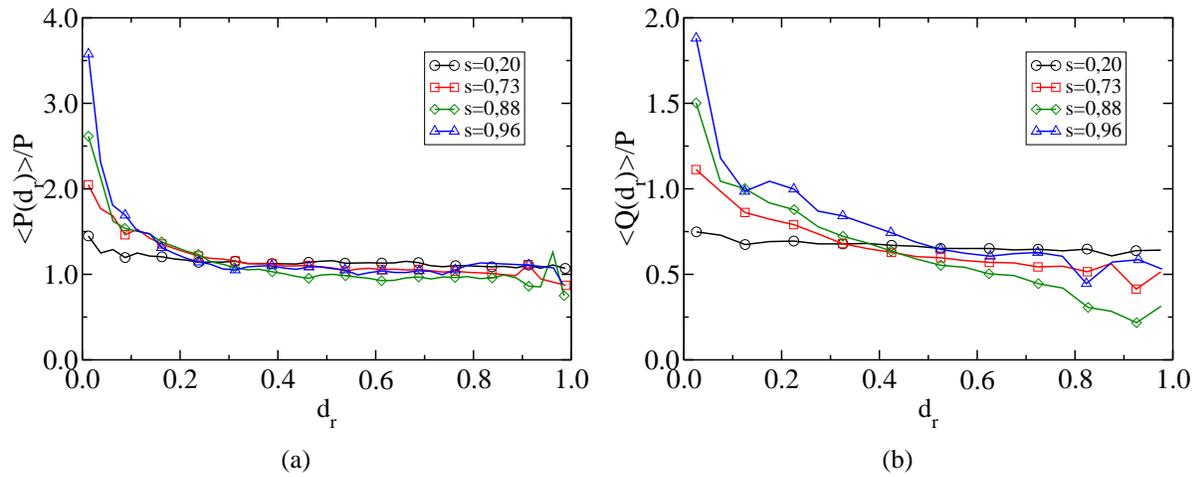


FIG. 6.12 – (a) Pression moyenne en fonction de la taille réduite des particules $\langle P(d_r) \rangle$ normalisée par la pression moyenne P . (b) Déviateur moyen $\langle Q(d_r) \rangle$ en fonction de la taille réduite des particules normalisé par la pression moyenne P .

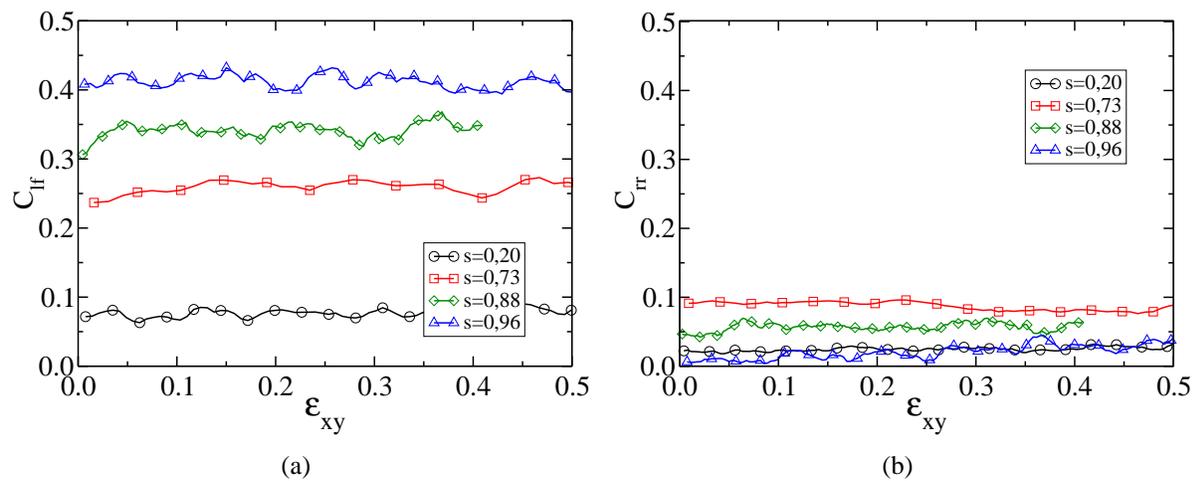


FIG. 6.13 – (a) Coefficient de corrélation linéaire C_{lf} entre la norme du vecteur branche ℓ et la force normale correspondante. (b) Coefficient de corrélation linéaire C_{rr} entre les rayons des deux particules impliquées dans chaque contact.

initiale au cours de la déformation. La persistance de ces corrélations explique l'écart constaté à grandes valeurs d'étalement entre la valeur mesurée de la contrainte déviatorique q/p et celle fournie par l'approximation harmonique 6.3(b). On observe, par ailleurs, que cet écart augmente avec l'étalement tout comme C_{lf} . Dans la dérivation de l'équation 5.15, on avait négligé la corrélation force-longueur. Le fait que cette approximation fournisse néanmoins une bonne estimation de q/p , même pour les grands étalements où C_{lf} est significatif, indique que ces corrélations peuvent être en moyenne négligées par rapport aux corrélations des forces fortes dans le système qui se traduisent par des chaînes de forces à l'origine de la résistance au cisaillement.

Nous avons également évalué le coefficient de corrélation C_{rr} entre les tailles r_1 et r_2 de deux particules en contact en fonction de la déformation ϵ_{xy} (voir équation 5.26). Ce coefficient nous renseigne sur l'évolution du voisinage des particules et une ségrégation éventuelle au cours de la déformation. La figure 6.13(b) montre que les valeurs de C_{rr} évoluent peu avec le cisaillement et restent faibles. En d'autres termes, dans nos simulations, le cisaillement n'entraîne aucune ségrégation de tailles dans le réseau actif.

6.6 Influence de la cohésion

On vient de montrer que, par un phénomène de sélection des plus grosses particules par les forces fortes, la résistance au cisaillement, représentée par la valeur de q/p dans l'état stationnaire, est insensible à la polydispersité. Ce phénomène repose sur la mobilité des petites particules dans les pores qui peuvent être alternativement sollicitées puis exclues du réseau actif. On peut alors s'interroger sur la pertinence de ce phénomène en présence d'interactions de cohésion liant les particules entre elles.

La cohésion se traduit par une résistance à l'écartement des particules. Parmi les nombreux modèles numériques décrivant différents types de cohésion (capillaire [55, 61], solide [66],...), nous avons choisi, dans une première approche, d'utiliser un modèle simple d'adhésion au contact. Dans ce modèle, l'adhésion est indépendante de la taille des particules et n'agit qu'au contact. Ainsi, le seul paramètre est le seuil de la force de traction $-f_c$ avec $f_c > 0$. De même, on fera l'hypothèse que l'adhésion est réversible. La simplicité de ce modèle est un choix volontaire. En effet, un modèle plus riche, par exemple avec une dépendance de l'adhésion par rapport à la taille des particules, ne permet pas de différencier l'influence de la cohésion de celle de la polydispersité sur le comportement mécanique.

Avec ce modèle de cohésion, la condition de Signorini devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_n > 0 \Rightarrow f_n = 0 \\ \delta_n = 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} V_n > 0 \Rightarrow f_n = -f_c \\ V_n = 0 \Rightarrow f_n \geq -f_c \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Le graphe de cette loi de contact n'est autre que le graphe de Signorini en vitesse translaté vers les forces négatives comme le montre la figure 6.14(a). Pour la force de frottement, la loi

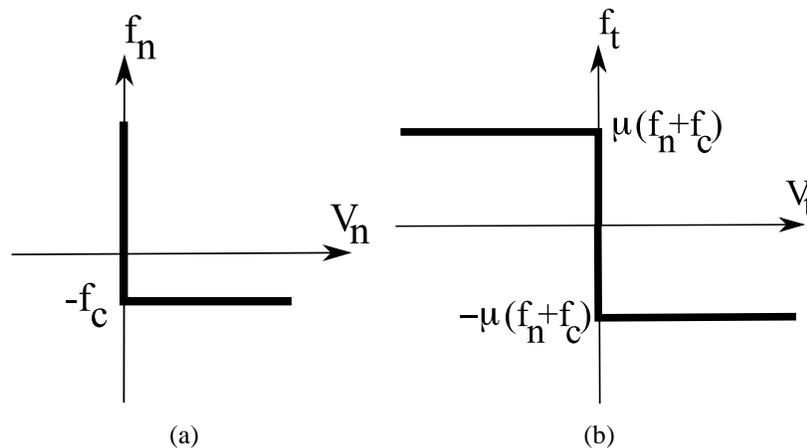


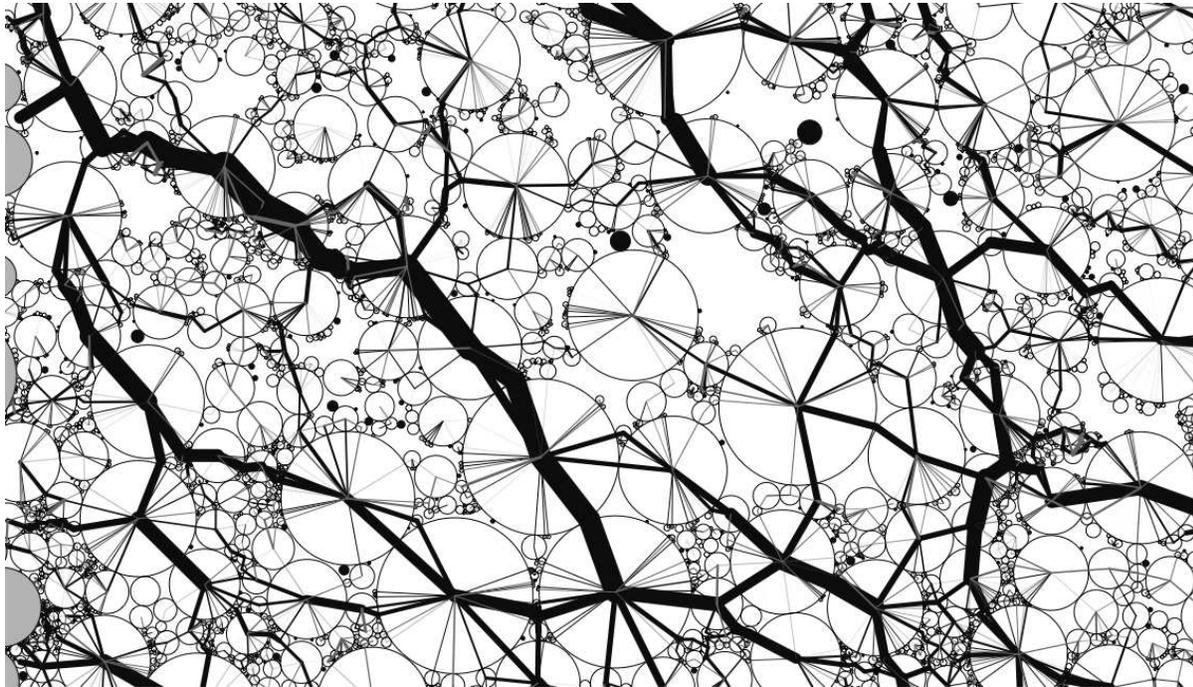
FIG. 6.14 – Résolution du problème local : (a) Graphe des conditions de Signorini avec une force d'adhésion $-f_c$. (b) Graphe de la loi de Coulomb avec adhésion.

de de frottement de Coulomb est appliquée entre la vitesse de glissement et la force $f_n + f_c$ (figure 6.14(b)).

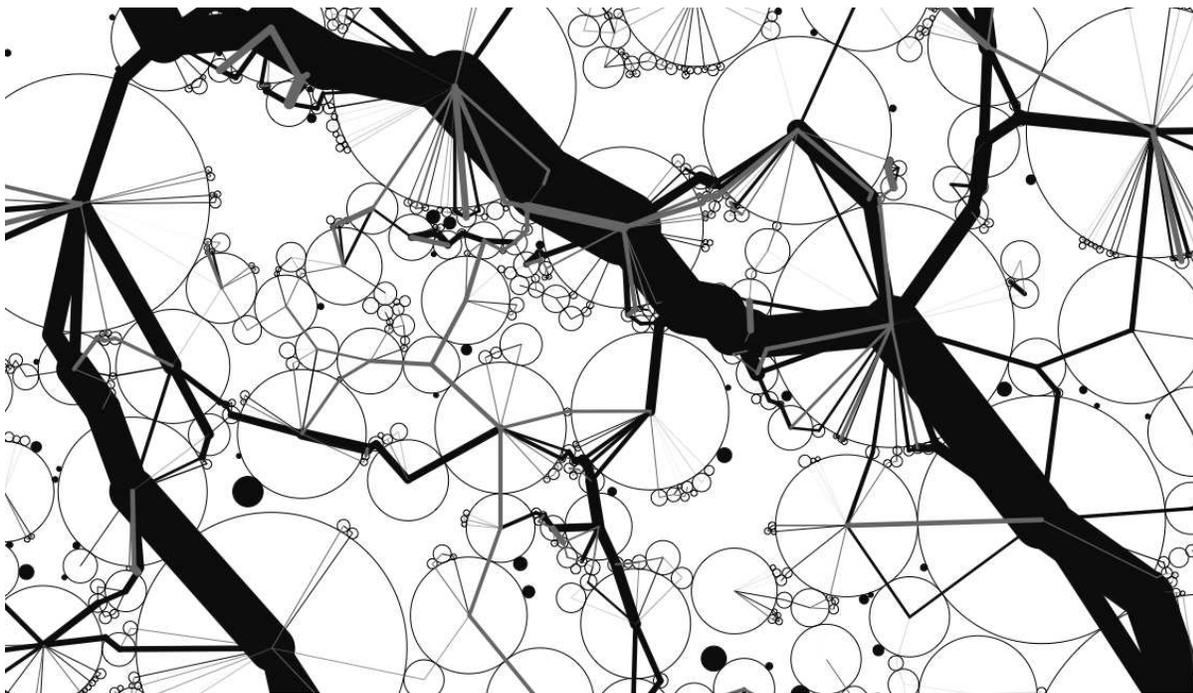
Le protocole numérique consiste à activer la cohésion à partir d'échantillons relaxés sans cohésion et à réaliser un cisaillement simple périodique jusqu'à atteindre l'état stationnaire. Les conditions d'essai sont strictement identiques à celles du cas non cohésif. La force de cohésion est égale à $10^2 N$ indépendamment de l'étalement. On verra que cette valeur permet d'obtenir un système dans lequel les effets de la pression de confinement et de la cohésion sont comparables. Nous considérons quatre valeurs d'étalement s ($s = 0, 20$, $s = 0, 42$, $s = 0, 73$ et $s = 0, 80$) avec une distribution uniforme par fraction volumique.

La figure 6.15 montre deux vues du réseau de forces dans l'état stationnaire pour $s = 0, 97$. La couleur des segments représentant les forces de contact renseigne sur le signe de la force f_n et non pas sur leur appartenance aux réseaux faible ou fort. Le caractère anisotrope des forces positives (contacts en compression) est évident tandis que les forces négatives (contacts en traction) semblent être plus désordonnées. Un point important est la faible fraction de particules flottantes qui est de l'ordre de 10%, nettement plus faible que dans le cas non cohésif pour le même étalement (75%). Cependant, le captage des forces fortes par les plus grosses particules semble persister et s'exprime par la présence de longues chaînes de forces de compression s'opposant au cisaillement.

La figure 6.16(a) montre les valeurs moyennes q_c/p du déviateur de contraintes normalisé dans l'état stationnaire, mesurées et estimées par la décomposition harmonique, pour différentes valeurs d'étalement s . Les barres d'erreurs correspondent à l'écart-type calculé sur les valeurs dans l'état stationnaire. On constate que l'estimation fournie par la décomposition est encore meilleure que dans le cas sans cohésion. Contrairement au cas non cohésif, le déviateur augmente de façon significative avec l'étalement s . Cette augmentation de la résistance au ci-



(a)



(b)

FIG. 6.15 – (a) Vue à grande échelle d'un échantillon cohésif pour $s = 0,97$. Les particules colorées en noir correspondent aux particules flottantes. Les forces sont représentées par des segments dont la largeur est proportionnelle à la valeur absolue de la force normale f_n . Les forces de compression ($f_n > 0$) sont représentées en noir tandis que les forces de traction sont représentées en gris ($f_n < 0$). (b) Zoom sur la partie gauche.

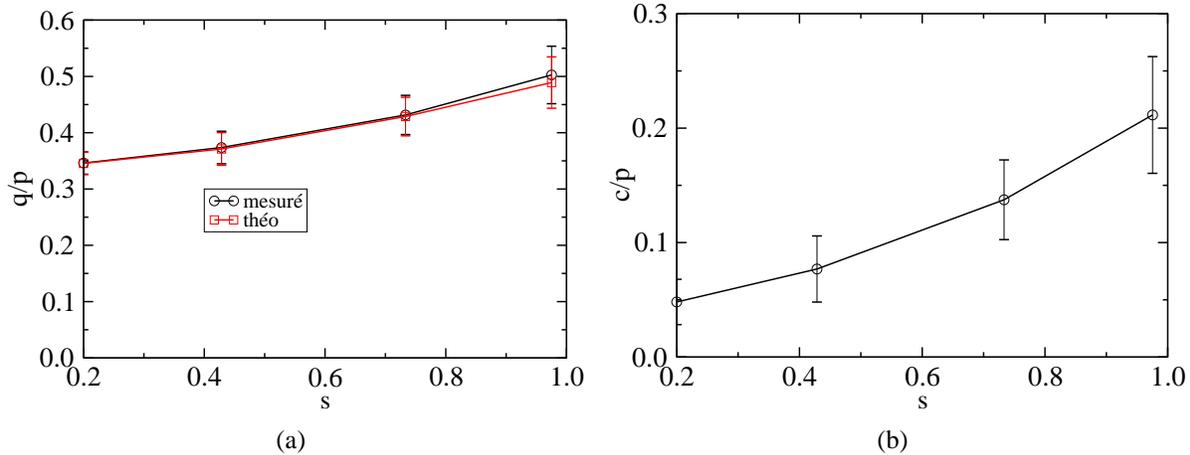


FIG. 6.16 – (a) Valeurs moyennes q/p dans l'état stationnaire, mesurées et estimées par l'approximation harmonique (théo), du déviateur de contrainte normalisé par la pression moyenne p pour différentes valeurs d'étalement s ; (b) Cohésion moyenne c/p dans l'état stationnaire normalisée par la pression moyenne p pour différentes valeurs d'étalement s .

saillement doit être interprétée en termes de cohésion macroscopique de Coulomb c . En effet, étant donné le critère de Coulomb, le déviateur de contraintes est une fonction de la cohésion c et de l'angle de frottement interne φ donnée par

$$\frac{q}{p} = \sin \varphi + \frac{c}{p} \cos \varphi. \quad (6.3)$$

L'angle de frottement interne étant constant avec l'étalement et proche de 17° , seule la cohésion normalisée c/p peut être à l'origine de l'évolution de q/p . La figure 6.16(b) montre l'évolution de c/p en fonction de l'étalement s . On observe une franche augmentation de c/p avec l'étalement de $\simeq 0,05$ pour $s = 0,2$ jusqu'à $\simeq 0,2$ pour $s = 0,97$.

Dans le cas faiblement polydisperse ($s = 0,20$), l'origine de la cohésion macroscopique réside dans la présence de chaînes de forces de traction orientées transversalement à celle des forces de compressions fortes. Les particules impliquées dans le réseau fort sont équilibrées à la fois par des forces de compression faibles et des forces de traction. Ainsi, les forces de traction jouent un rôle similaire aux forces faibles en "soutenant" les chaînes de forces fortes [51]. La "solidité" accrue et la persistance de ces chaînes au cours de la déformation ont pour conséquence d'augmenter la résistance au cisaillement. L'augmentation de c/p avec l'étalement peut être interprétée comme une amplification de ce phénomène de soutien des chaînes de forces fortes. Ce point est parfaitement illustré sur la figure 6.15. On observe que les chaînes fortes sont soutenues par des agrégats de particules de petites tailles. Ces agrégats se retrouvent aussi bien entre les chaînes de forces fortes qu'autour des contacts formant la chaîne. Ces derniers, le plus souvent composés de petites particules, limitent aussi les glissements et le roulement des plus grosses particules. Ainsi, comme dans le cas non cohésif, les plus grosses particules contribuent majoritairement à la résistance au cisaillement mais, contrairement au cas non cohésif,

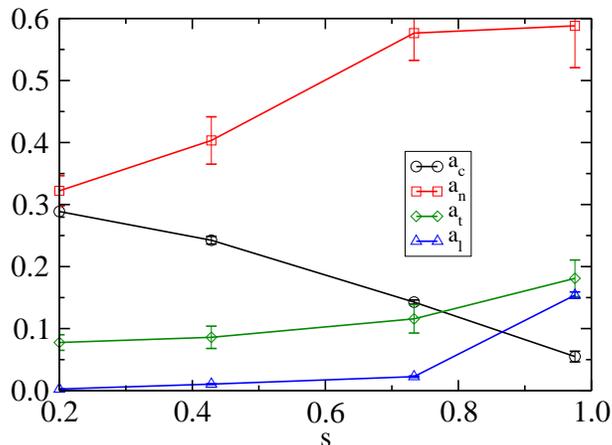


FIG. 6.17 – Valeurs moyennes des anisotropies dans l'état stationnaire : a_c pour les orientations des contacts, a_n pour les forces normales, a_t pour les forces tangentielles et a_l pour les longueurs intercentres. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart-type.

les petites et moyennes particules participent beaucoup plus au réseau actif et y jouent un rôle de soutien vis-à-vis des chaînes de forces fortes.

Nous avons vu sur la figure 6.16(a) que la décomposition harmonique en anisotropies fournit une très bonne estimation du déviateur de contraintes normalisé q/p . La figure 6.17 montre l'évolution des anisotropies moyennes en fonction de l'étalement : a_c pour les orientations des contacts, a_n pour les forces normales, a_t pour les forces tangentielles et a_l pour les longueurs intercentres. Comme dans le cas non cohésif, a_c diminue avec l'étalement tandis que a_l augmente. Cependant, en présence de la cohésion, les anisotropies liées aux forces, et notamment l'anisotropie a_n des forces normales augmentent également avec l'étalement. Cette augmentation est cohérente avec le rôle de soutien des forces d'adhésion vis-à-vis des longues chaînes de forces fortes à travers les grosses particules. La chute de a_c s'explique par le maintien au contact, par les forces d'adhésion, des petites et moyennes particules. Ces petites particules "collées" ont alors un effet uniformisant sur les directions de contacts en créant des structures faiblement dépendantes du chargement.

Conclusion

Dans cette partie une description succincte de la méthode de Dynamique des Contacts, en tant que l'outil numérique de nos études mécaniques, a d'abord été présentée. Cette méthode repose sur des lois de contacts non régulières et une méthode d'intégration implicite des équations de la dynamique. Nous avons mis en évidence les conséquences numériques de la présence de plusieurs ordres de tailles de particules : adaptation du pas de temps à la dynamique des plus petites particules et l'optimisation de la méthode de détection des contacts. L'algorithme de la Dynamique des Contacts a été intégré au code de calcul Gdm-TK, écrit en C++ suivant le concept de la programmation orientée objet.

A partir des échantillons construits géométriquement et étudiés dans la partie II, ce code généraliste a permis de mettre en place un système numérique apte à simuler deux types d'essais mécaniques : une relaxation biaxiale et un cisaillement simple périodique. Le confinement vertical des échantillons est assuré par deux clumps de particules tandis qu'une périodicité cinématique assure le confinement horizontal tout en limitant les effets de bords. Ce système a permis de réaliser deux études paramétriques de l'influence des paramètres de granularité (a , b et s) sur les propriétés mécaniques d'assemblages granulaires denses, d'une part à l'état d'équilibre statique (Chapitre 5) d'autre part, en soumettant les échantillons relaxés au cisaillement quasi-statique (Chapitre 6). Le grand nombre de particules (10^5) employé lors de l'étude de l'état d'équilibre statique a permis d'assurer une bonne représentativité des particules et des grandeurs mécaniques et texturales étudiées. L'état statique a montré, au niveau de la texture, un héritage fort de la procédure de construction géométrique. Des résultats originaux ont pu être obtenus aussi bien dans l'état relaxé que dans l'état stationnaire atteint après un cisaillement long.

Un résultat majeur de ce travail est l'indépendance de la résistance au cisaillement vis-à-vis des paramètres granulométriques. Ce résultat s'explique par les propriétés du réseau de forces

fortes (supérieures à la force moyenne) qui est principalement à l'origine de la résistance au cisaillement. En effet, ces forces s'organisent en un réseau anisotrope en traversant les plus grosses particules du système. L'indépendance du déviateur de contrainte normalisé q/p dans l'état stationnaire s'explique qualitativement par l'invariance, avec l'étalement, des propriétés mécaniques de la distribution "réduite" de ces grosses particules. Ainsi, cette distribution est quasiment insensible aux paramètres granulométriques au delà de la transition d'insertion. La décomposition harmonique du déviateur de contrainte q/p en plusieurs termes d'anisotropies a permis de montrer l'origine géométrique de ce phénomène. Cette décomposition consiste à approcher la valeur de q/p par la demie somme des termes d'anisotropies liés aux différentes distributions angulaires décrivant le réseau actif. Les différents termes sont respectivement liés à l'orientation des directions de contact (a_c), des forces moyennes de contact (a_n et a_t) et des longueurs des vecteurs intercentres (vecteur branche) (a_l). Cette estimation est satisfaisante et les écarts constatés avec la mesure de q/p à grandes valeurs d'étalement paraissent faibles. Ils sont principalement attribués aux corrélations entre les forces normales f et les longueurs intercentres ℓ . Les anisotropies liées aux forces moyennes de contact (a_n et a_t) sont constantes en fonction de s tandis que l'anisotropie des directions de contact a_c diminue avec l'étalement. Parallèlement, l'anisotropie des longueurs a_l augmente. L'invariance des anisotropies liées aux forces moyennes de contact (a_n et a_t) vis-à-vis de s est cohérente avec la persistance des caractéristiques mécaniques de la distribution avec l'étalement. Par conséquent, l'indépendance de q/p par rapport à s est due à la compensation mutuelle des évolutions des anisotropies des directions de contact a_c et de longueur a_l telles que : $a_c + a_l = cte$. La diminution de a_c est associée à l'insertion des petites particules entre les plus grosses ce qui a tendance à harmoniser les directions de contact. Cet effet est d'autant plus important que l'étalement est élevé. Simultanément, les plus grosses particules s'organisent en un réseau dont l'anisotropie des longueurs intercentres augmente avec l'étalement. En présence d'adhésion entre les particules, q/p augmente avec l'étalement. En d'autres termes, l'angle de frottement macroscopique étant invariant par rapport à la polydispersité, la cohésion macroscopique de Coulomb c croît avec l'étalement. La présence de cohésion génère de longues chaînes de forces de compression soutenues, d'une part, par des forces de traction transverses aux chaînes de compression, et d'autre part, par des groupes de petites et moyennes particules collées par les forces cohésives. La stabilité accrue de ces chaînes par rapport au cas non cohésif implique une augmentation franche de a_n et a_t avec l'étalement. Ces chaînes s'établissent toujours à travers les plus grosses particules en un réseau d'anisotropie croissante des longueurs. En maintenant les petites particules en contact, les forces cohésives ont un effet uniformisant sur les directions de contacts ; l'anisotropie a_c diminue avec l'étalement.

Les conclusions tirées de la partie I concernant les propriétés de remplissage d'espace restent valables autant à l'état initial qu'à l'état critique : les compacités atteintes augmentent avec l'étalement et la distribution uniforme par fraction volumique fournit les échantillons les plus compacts quelque soit l'étalement. Malgré leur compacité plus élevée, un étalement important provoque une dilatation relative plus importante à l'état critique que dans le cas d'une distribution quasi monodisperse. L'absence de gravité au cours des sollicitations se traduit par l'apparition de particules dites flottantes, exclues du réseau de forces ou réseau actif, dont la

proportion augmente fortement avec l'étalement. Ce phénomène s'aggrave au cours du cisaillement et on montre qu'à l'état critique le réseau actif s'établit à travers les plus grosses particules des échantillons tandis que les plus petites particules sont presque toutes flottantes. La topologie moyenne des échantillons, représentée par le nombre de coordination Z , est faiblement influencée par l'étalement. Par contre, l'augmentation de l'étalement entraîne une diversification des configurations topologiques en fonction de la taille des particules : le nombre de contact par particule augmente linéairement avec leur taille tandis que les plus petites particules ont au maximum trois contacts. Les petites particules situées dans les pores sollicités ont pour effet de ramifier fortement le réseau de contact dans ces zones d'intense désordre.

Les forces de contact dans un matériau granulaire sont naturellement hétérogènes mais l'augmentation de l'étalement accentue cette hétérogénéité. Cela se traduit par une population croissante des forces faibles (inférieures à la force moyenne) alors que l'intensité des forces fortes (supérieures à la force moyenne) augmente avec l'étalement. Dans les échantillons polydispersés, la force moyenne subie par les particules augmente avec leurs tailles et finit par saturer. Cependant, les contributions des réseaux fort et faible à la force moyenne subie par les particules sont différentes. La contribution du réseau faible paraît constante pour toutes les particules. Cet effet, illustre l'analogie classiquement évoquée entre l'action du réseau faible et l'action d'un fluide. Concernant la contribution du réseau fort, on note qu'elle est corrélée à l'intensité de la force moyenne suivant la taille des particules. Au delà d'une taille critique, les particules sont suffisamment grosses pour que les forces subies reflètent un échantillon statistiquement représentatif de l'ensemble des forces du réseau actif. Ainsi, les pressions subies par ces grosses particules sont proches de la pression macroscopique. Au contraire, les plus petites particules sont en moyenne soumises à une pression supérieure à la pression macroscopique. L'existence d'une corrélation positive et significative entre la force normale f au contact et la distance intercentre ℓ montre que les chaînes de forces fortes transitent essentiellement par les grosses particules tandis que les forces faibles sont dispersées sur les plus petites particules.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail était d'étudier l'influence de la polydispersité sur la texture et sur le comportement mécanique des matériaux granulaires par une approche numérique. La modélisation numérique de matériaux granulaires fortement polydispersés a soulevé plusieurs problèmes techniques dont le principal est celui de la représentativité, statistique et volumique, des particules de différentes tailles. La méthodologie adoptée se décompose en trois phases :

1. Développement d'une méthode originale de génération de distribution de tailles suivant une courbe granulométrique puis association de cette méthode à un modèle simple et riche de courbe granulométrique basé sur deux paramètres de courbure (a et b) et un paramètre d'étalement (s).
2. Assemblage des particules générées par une méthode de dépôt géométrique optimisée pour le cas polydispersé permettant une étude paramétrique détaillée de l'influence de la polydispersité (a , b et s) sur la texture de grands échantillons denses.
3. Développement d'un code de calcul par éléments discrets basé sur la méthode de Dynamique des Contacts : Gdm-tk. A partir des échantillons construits géométriquement, simulation dynamique d'une relaxation biaxiale et d'un cisaillement simple. Le code de calcul est utilisé pour la réalisation d'une étude paramétrique de l'influence de la polydispersité sur la texture et sur le comportement mécanique macroscopique. Il est également utilisé pour l'analyse de divers aspects micromécaniques. Cette étude paramétrique a été réalisée sur les échantillons à l'état d'équilibre statique et à l'état stationnaire après un cisaillement long, avec et sans cohésion.

L'ensemble de ces études a permis de montrer une influence forte de la polydispersité sur la texture et sur le comportement mécanique des matériaux granulaires. Un résultat majeur de ce travail est l'indépendance du déviateur de contrainte normalisé q/p , dans l'état stationnaire après un cisaillement long, vis-à-vis des paramètres granulométriques. Autrement dit,

dans cette configuration d'essais, l'angle de frottement macroscopique φ est indépendant de la polydispersité. Ce résultat a priori inattendu, se comprend parfaitement en approchant q/p par une somme d'anisotropies des grandeurs angulaires décrivant le réseau de forces (décomposition harmonique). L'extension de cette décomposition au cas fortement polydisperse nécessite de prendre en compte l'anisotropie des longueurs intercentres a_l généralement négligée. De plus, cette approximation inclut l'anisotropie des directions de contacts a_c , des forces normales a_n et tangentielles a_t . Un autre fait étonnant, mais cohérent avec l'indépendance de q/p , est que les propriétés directionnelles du réseau de forces représentées par a_n et a_t sont également indépendante vis-à-vis des paramètres granulométriques. A l'inverse, les anisotropies a_c et a_l des directions de contacts et de longueurs, respectivement, dépendent sensiblement de la polydispersité. Cependant, leurs évolutions simultanées en fonction de l'étalement sont telles que $a_c + a_l = cte$. Alors que a_c diminue à cause d'un effet désordonnant des petites particules, a_l augmente et traduit l'établissement du réseau de forces à travers les plus grosses particules. Autrement dit, l'indépendance de q/p par rapport aux paramètres granulométriques est due, d'une part, à l'indépendance des orientations privilégiées des forces, et d'autre part, à une modification de la texture granulaire de telle sorte que les longueurs intercentres et les directions de contacts échangent leurs rôles.

L'introduction d'une adhésion simple entre les particules en contact a permis d'étendre cette analyse au cas des matériaux granulaires polydispersés cohésifs. Dans ce cas, l'augmentation de l'étalement granulométrique entraîne une augmentation nette de la résistance au cisaillement. Au sens de Coulomb, la cohésion macroscopique c augmente avec l'étalement granulométrique. L'analyse des anisotropies montre que l'effet de compensation mutuelle entre a_c et a_l subsiste en présence de l'adhésion et que l'augmentation de la résistance au cisaillement s'explique plutôt par l'augmentation des anisotropies de forces a_n et a_t avec l'étalement. En d'autres termes, l'effet stabilisateur des forces de traction est amplifié par la polydispersité.

Ces résultats ont pu être obtenus sur la base d'une modélisation géométrique maîtrisée de la génération de la distribution des tailles des particules et de la construction d'échantillons homogènes. L'édiction de critères de représentativité explicites assure un niveau de représentativité, statistique et volumique, fixé par leurs valeurs (nombre de classes, nombre minimum de particules par classes, ...). La méthode de génération fournit une estimation du nombre minimum de particules nécessaire pour qu'une distribution soit représentative. Etant données les valeurs des critères, le domaine des configurations granulométriques (a, b et s) réalisables a pu être déterminé. Par ailleurs, l'absence de la ségrégation de taille a pu être vérifiée sur les échantillons étudiés.

La polydispersité soulève d'autres questions intéressantes concernant le remplissage de l'espace et la transition ordre-désordre. L'approche géométrique nous a permis d'étudier ces aspects et d'en vérifier la pertinence à l'aide d'une approche dynamique. L'augmentation de l'étalement se traduit par un remplissage des pores laissés entre les plus grosses particules par les plus petites. Ce phénomène n'est géométriquement possible qu'à partir de $s = 0,4$ qui marque une transition nette dans la texture des échantillons (transition d'insertion). Lorsque $s > 0,4$, le remplissage d'espace caractérisé par la compacité dépend d'un équilibre entre le volume des

petites particules et le volume des pores générés par les plus grosses. En deçà de cette transition, le milieu présente une structure quasi-cristalline où le désordre est principalement d'ordre topologique. Au delà, le phénomène de remplissage des pores, croissant avec s , a plusieurs conséquences dont les principales sont : l'augmentation rapide de la compacité et l'augmentation du désordre en termes de position et d'orientation angulaire. Dans ces conditions et au delà de la transition d'insertion, la distribution uniforme par fraction volumique fournit les compacités les plus élevées. Ainsi, cette distribution apparaît comme particulièrement favorable pour la réalisation d'échantillons denses, désordonnés et homogènes. L'augmentation de l'étalement s se traduit, d'une part, par une diversification des configurations topologiques du réseau de contacts actifs (transmettant des forces) en fonction de la taille des particules et, d'autre part, par un nombre croissant de petites particules, appelées flottantes, qui sont exclues du réseau actif.

Les milieux granulaires sont souvent caractérisés par la distribution très hétérogène des forces de contact. On peut naïvement penser qu'un meilleur remplissage de l'espace avec un étalement croissant, peut rendre cette distribution plus homogène. Or, nous avons montré que l'augmentation de l'étalement, au contraire, accentue cette hétérogénéité. Cela se traduit par une population croissante des forces faibles avec une distribution en loi de puissance dont l'exposant augmente avec l'étalement. De même, on observe une diminution de l'exposant de la décroissance exponentielle du nombre de forces fortes. L'existence d'une corrélation positive entre la force normale au contact et la distance intercentre montre que les chaînes de forces fortes transitent essentiellement par les plus grosses particules tandis que les forces faibles sont dispersées sur les plus petites particules. Il est aussi remarquable que la contribution du réseau faible est constante pour toutes les tailles de particules.

Ces résultats permettent de cerner, en partie, le rôle de la polydispersité dans le comportement des milieux granulaires. La polydispersité est un élément de complexité majeur des matériaux granulaires dans la nature et dans les applications industrielles. Il est donc nécessaire d'étendre ces études à des systèmes à particules de formes variées et à interactions plus riches. Par exemple, pour des interactions par ponts capillaires, l'effet de l'étalement est d'autant plus complexe que les forces capillaires dépendent des tailles des particules et agissent sur une distance dépendante du volume du pont. Par ailleurs, nous avons choisi un modèle d'adhésion réversible dans le but d'étudier son effet dans un régime stationnaire. Il est envisageable de considérer une adhésion irréversible (sans "recollage") pour étudier le comportement à la rupture de matériaux granulaires cohésifs polydispersés comme les bétons par exemple.

A plus long terme, le passage à la configuration tridimensionnelle est essentiel pour la validation de ces résultats, d'une part, d'un point de vue des simulations, et d'autre part, pour les confronter directement à des études expérimentales sur des matériaux modèles comme des billes de verre. En application à la mécanique des sols, il nous paraît essentiel d'étudier l'influence des coefficients d'uniformité et de courbure sur le pic de contraintes et la dilatance associée. Ce passage à 3D implique une extension de la méthode de construction géométrique et une étude des conditions de réalisation des configurations granulométriques d'autant plus que la représentativité d'une distribution nécessite beaucoup plus de particules qu'en 2D.

Bibliographie

- [1] M. P. Allen and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [2] S. J. Antony, R. O. Momoh, and M. R. Kuhn. Micromechanical modelling of oval particulates subjected to bi-axial compression. *Computational Materials Science*, 29(4) : 494–498, April 2004.
- [3] T. Aste and D. Weaire. *The Pursuit of Perfect Packing*. Institute of Physics Publishing, 2000.
- [4] T. Aste, M. Saadatfar, A. Sakellariou, and T. J. Senden. Investigating the geometrical structure of disordered sphere packings. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 339(1-2) :16–23, August 2004.
- [5] E. Azema, F. Radjai, R. Peyroux, and G. Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Phys. Rev. E*, 76(1) :011301–13, July 2007.
- [6] J. G. Berryman. Random close packing of hard spheres and disks. *Phys. Rev. A*, 27(2) : 1053–, February 1983.
- [7] G. Blot and J.-B. Ducassou. Conditions of utilization of the videogranulometer. *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, pages 24–30, 1988. ISSN 0458-5860.
- [8] F. Calvetti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : relation between structure evolution and loading path. *Mech. Coh. Frict. Materials*, 2 :121–163, 1997.
- [9] G.G. Coriolis. *Theorie mathematique des effets du jeu de billard (Reprint 1990)*. Editions Jacques Gabay, 1835.
- [10] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [11] S. H. NOSKOWICZ D. SERERO, I. GOLDBIRSCHE and M.-L. TAN. Hydrodynamics of granular gases and granular gas mixtures. *Journal of Fluid Mechanics*, 554 :237–258, 2006.

-
- [12] F. de Larrard. *Concrete Mixture Proportioning*. E & FN Spon, 1999.
- [13] B. V. Derjaguin, V. M. Muller, and Yu. P. Toporov. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 53(2) :314–326, November 1975.
- [14] S. Dippel. *Microscopic dynamics of granular materials*. PhD thesis, Forschungszentrum Julich.
- [15] J. Duran. *Sables, poudres et grains*. Eyrolles, 1997.
- [16] A. Gerschel. *LIAISONS INTERMOLECULAIRES. Les forces en jeu dans la matiere condensee*. Edp Sciences, 1995.
- [17] A. Gervois and D. Bideau. Some geometrical properties of two-dimensional hard disk packings. In D. Bideau, editor, *Disorder and Granular Media*, Amsterdam, 1993. Elsevier.
- [18] A. Gervois, C. Annic, J. Lemaitre, M. Ammi, L. Oger, and J. P. Troadec. Arrangement of discs in 2d binary assemblies. *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, 218(3-4) : 403–418, September 1995.
- [19] H.C. Hamaker. The london-van der waals attraction between spherical particles. *Physica IV*, 10 :1058, 1937.
- [20] K. Han, Y.T. Feng, and D.R.J. Owen. Sphere packing with a geometric based compression algorithm. *Powder Technology*, 155(1) :33–41, July 2005.
- [21] H. J. Herrmann, R. Mahmoodi Baram, and M. Wackenhut. Searching for the perfect packing. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 330(1-2) :77–82, December 2003.
- [22] J. N. Israelachvili. *Intermolecular and Surface Forces : With Applications to Colloidal and Biological Systems*. Elsevier Science & Technology Books, 1992.
- [23] W. S. Jodrey and E. M. Tory. Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Phys. Rev. A*, 32(4) :2347–, October 1985.
- [24] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094) :727–730, June 2006. ISSN 0028-0836.
- [25] R. Jullien and P. Meakin. Simple three-dimensional models for ballistic deposition with restructuring. *EPL (Europhysics Letters)*, 4(12) :1385–1390, 1987. ISSN 0295-5075.
- [26] R. Jullien and P. Meakin. Computer simulations of steepest descent ballistic deposition. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, 165(1-3) :405–422, May 2000.
- [27] R. Jullien, P. Meakin, and A. Pavlovitch. Three-dimensional model for particle-size segregation by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 69(4) :640–, July 1992.
- [28] R. Jullien, P. Meakin, and A. Pavlovitch. Random packings of spheres built with sequential models. *J. of Phys. A*, 25 :4103, 1992.
- [29] R. Jullien, P. Jund, D. Caprion, and D. Quitmann. Computer investigation of long-range correlations and local order in random packings of spheres. *Phys. Rev. E*, 54(6) :6035–, December 1996.
- [30] A. R. Kansal, T. M. Truskett, and S. Torquato. Nonequilibrium hard-disk packings with controlled orientational order. *JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS*, 113,number 12 : 4844, 2000.
- [31] A.D. Roberts K.L. Johnson, K. Kendall. Surface energy and the contact of elastic solids.

-
- Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 324 :301, 1971.
- [32] J. Lanier. *Micromecanique des materiaux*. Hermes, 2001.
- [33] T.S. Majmudar and R.P. Behringer. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435(7045) :1079–82, June 2005. ISSN 0028-0836.
- [34] G. Marsaglia and W. W. Tsang. The ziggurat method for generating random variables. *Journal of Statistical Software*, 5 no 8, 2000.
- [35] GDR MiDi. On dense granular flows. *The European Physical Journal E - Soft Matter*, 14 (4) :341–365, August 2004.
- [36] A. A. Mirghasemi, L. Rothenburg, and E.L. Matyas. Influence of particle shape on engineering properties of assemblies of two-dimensional polygon-shaped particles. *Geotechnique*, 52 n3 :209–217, 2002.
- [37] J. K. Mitchell and K. Soga. *Fundamentals of Soil Behavior, third edition*. Wiley, 2005.
- [38] J. J. Moreau. Friction less unilateral constraints and inelastic shocks. *Comptes-rendus des seances de l'Academie des sciences*, 296 :1473–1476, 1983.
- [39] J. J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. *Non-smooth Mechanics and Applications*, 302, 1988.
- [40] J. J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In *Proceedings of HLRZ-Workshop on Friction Arching Contact Dynamics*, 1997.
- [41] D. M. Mueth, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, 57(3) :3164–, March 1998.
- [42] A. Munjiza and K. R. F. Andrews. Nbs contact detection algorithm for bodies of similar size. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(1) :131–149, 1998.
- [43] J. Coirier ; C. Nadot-Martin. *Mecanique des milieux continus*. Dunod, 2007.
- [44] M. Newey, J. Ozik, S. M. van der Meer, E. Ott, and W. Losert. Band-in-band segregation of multidisperse granular mixtures. *EPL (Europhysics Letters)*, 66(2) :205–211, 2004. ISSN 0295-5075.
- [45] M. Oda, K. Iwashita, and H. Kazama. Micro-structure developed in shear bands of dense granular soils and its computer simulation – mechanism of dilatancy and failure –. In N. A. Fleck and A. C. E. Cocks, editors, *IUTAM Symposium on Mechanics of Granular and Porous Materials*, pages 353–364. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [46] J.-F. Shao P. Y. Hicher. *Elastoplasticite des sols et des roches*. Hermes, 2000.
- [47] A. Pena, R. Garcia-Rojo, and H. Herrmann. Influence of particle shape on sheared dense granular media. *Granular Matter*, 9(3) :279–291, June 2007.
- [48] N. ; Poschel, T. ; Brilliantov. *Granular gas dynamics*. Springer-Verlag ; Berlin, Germany, 2003.
- [49] O. Pouliquen, C. Cassar, P. Jop, Y. Forterre, and M. Nicolas. Flow of dense granular material : towards simple constitutive laws. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006(07) :P07020–P07020, 2006. ISSN 1742-5468.
- [50] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J.-J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1) :61–64, 1998.
- [51] F. Radjai, I. Preechawuttipong, and R. Peyroux. Cohesive granular texture. *Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials*, pages 149–162, 2001.
- [52] W. D. Kovacs R.D. Holtz. *Introduction a la geotechnique*. Presses internationales Poly-

-
- technique, 1991.
- [53] A. Renyi. On a one-dimensional problem concerning random space-filling. *Publications of Mathematical Institute of Hungarian Academy of Sciences*, 3 :109–127, 1958.
 - [54] P. Richard, P. Philippe, F. Barbe, S. Bourles, X. Thibault, and D. Bideau. Analysis by x-ray microtomography of a granular packing undergoing compaction. *Phys. Rev. E*, 68 (2) :020301–, August 2003.
 - [55] V. Richefeu, M. S. El Youssoufi, and F. Radjai. Shear strength properties of wet granular materials. *Phys. Rev. E*, 73(5) :051304–11, May 2006.
 - [56] P. G. Rognon, J.-N. Roux, M. Naaim, and F. Chevoir. Dense flows of bidisperse assemblies of disks down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 19(5) :058101–4, May 2007.
 - [57] L. Rothenburg and R. J. Bathurst. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Geotechnique*, 39 :601–614, 1989.
 - [58] J.-N. Roux. Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Phys. Rev. E*, 61(6) :6802–, June 2000.
 - [59] M. Satake. Fabric tensor in granular materials. In P. A. Vermeer and H. J. Luger, editors, *Proceedings of the IUTAM symposium on deformation and failure of granular materials, Delft*, pages 63–68, Amsterdam, 1982. A. A. Balkema.
 - [60] P. A. Schlosser. *Elements de mecanique des sols*. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussees, 1988.
 - [61] F. Soulie, M. S. El Youssoufi, J.-Y. Delenne, C. Voivret, and C. Saix. Effect of the crystallization of a solute on the cohesion in granular materials. *Powder Technology*, 175(1) : 43–47, June 2007.
 - [62] L. Staron and F. Radjai. Friction versus texture at the approach of a granular avalanche. *Phys. Rev. E*, 72(4) :041308–5, October 2005.
 - [63] L. Staron, F. Radjai, and J.-P. Vilotte. Granular micro-structure and avalanche precursors. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006(07) :P07014–P07014, 2006. ISSN 1742-5468.
 - [64] W.J. Stronge. *Impact mechanics*. Cambridge, 2000.
 - [65] V Topin. *en cours*. PhD thesis, LMGC, 2008.
 - [66] V. Topin, F. Radjai, J.-Y. Delenne, A. Sadoudi, and F. Mabilie. Wheat endosperm as a cohesive granular material. *Journal of Cereal Science*, 47(2) :347–356, March 2008.
 - [67] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, 2002.
 - [68] S. Torquato and F. H. Stillinger. Exactly solvable disordered sphere-packing model in arbitrary-dimensional euclidean spaces. *Phys. Rev. E*, 73(3) :031106–8, March 2006.
 - [69] S. Torquato, T. M. Truskett, and P. G. Debenedetti. Is random close packing of spheres well defined ? *Phys. Rev. Lett.*, 84(10) :2064–, March 2000.
 - [70] W. M. Visscher and M. Bolstreli. Random packing of equal and unequal spheres in two and three dimensions. *Nature*, 239(5374) :504–507, October 1972.
 - [71] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi. Space-filling properties of polydisperse granular media. *Phys. Rev. E*, 76(2) :021301–12, August 2007.
 - [72] M. J. Vold. A numerical approach to the problem of sediment volume. *Journal of Colloid Science*, 14(2) :168–174, April 1959.

-
- [73] M. J. Vold. Sediment volume and structure in dispersions of anisometric particles. *J. Phys. Chem.*, 63(10) :1608–1612, October 1959. ISSN 0022-3654.
- [74] M. J. Vold. The sediment volume in dilute dispersions of spherical particles. *J. Phys. Chem.*, 64(11) :1616–1619, November 1960. ISSN 0022-3654.
- [75] M. Wackenhut, S. McNamara, and H. Herrmann. Shearing behavior of polydisperse media. *The European Physical Journal E - Soft Matter*, 17(2) :237–246, June 2005.
- [76] Widom. Random sequential addition of hard spheres to a volume. *J. Chem. Phys.*, 44 : 3888–3894, 1966.
- [77] Z. P. Zhang, A. B. Yu, and J. A. Dodds. Analysis of the pore characteristics of mixtures of disks. *Journal of Colloid and Interface Science*, 195(1) :8–18, November 1997.

Résumé : Ce travail de thèse est consacré à la modélisation et à l'étude numérique de la texture et du comportement mécanique des matériaux granulaires à grande polydispersité. La polydispersité est considérée en termes d'étalement et de courbure de la distribution de tailles. Afin d'aboutir à des distributions de tailles représentatives, une méthode de génération ainsi qu'un modèle de courbe granulométrique sont présentés. La mise en place de grands échantillons denses par une méthode géométrique a permis de réaliser une étude systématique de l'influence de la polydispersité sur la texture. Le comportement mécanique est étudié par simulations numériques discrètes sur la base de la méthode de Dynamique des Contacts. Les échantillons sont successivement soumis à une relaxation uniaxiale et à un cisaillement simple avec des conditions aux limites périodiques afin d'atteindre respectivement l'état d'équilibre statique et l'état stationnaire après un cisaillement long. Nos résultats montrent que la distribution uniforme par fraction volumique conduit à la compacité la plus élevée. Dans l'état stationnaire, la résistance au cisaillement est indépendante de la polydispersité. Une analyse systématique de la texture permet de montrer que cette propriété résulte, d'une part, de la compensation mutuelle entre les anisotropies des directions de contact et des longueurs des vecteurs branches et, d'autre part, du fait que les forces fortes sont essentiellement transmises à travers les plus grosses particules. Enfin, en présence de forces d'adhésion, la cohésion de Coulomb augmente avec l'étalement granulométrique.

Title : Texture and behavior of highly polydisperse granular materials

This work is devoted to the numerical modeling of highly polydisperse granular materials in view of investigating the texture and mechanical behavior in quasi-static shearing. The polydispersity is modeled in terms of size span and curvature of the particle size distributions. A method is proposed to generate representative size distributions both in number and volume of size classes, and the accessible polydispersity parameters are determined for tractable number of particles. A geometrical method is used to construct large samples and to study the resulting texture in a systematic manner as a function of size distribution. These samples are then subjected to simple shear with periodic boundary conditions by means of the contact dynamics method. We show that : 1) The highest level of solid fraction corresponds to uniform distribution by particle volume fractions ; 2) The shear strength in the steady state is independent of polydispersity ; 3) A detailed analysis of the texture and force transmission indicates that this property results from the mutual compensation between the anisotropies of contact orientations and branch-vector lengths, and also from the fact that the strong force chains are mainly captured by the largest particles ; 4) In the presence of adhesion between particles, the Coulomb cohesion increases with size span.

Mots clefs : matériaux granulaires, polydispersité, texture, micromécanique, cisaillement simple, simulations, éléments discrets, Dynamique des Contacts