



**HAL**  
open science

# Problèmes inverses de sources et lien avec l'Electro-Encéphalo-Graphie

Maha Farah

► **To cite this version:**

Maha Farah. Problèmes inverses de sources et lien avec l'Electro-Encéphalo-Graphie. Mathématiques [math]. Université de Technologie de Compiègne, 2007. Français. NNT : . tel-00372423

**HAL Id: tel-00372423**

**<https://theses.hal.science/tel-00372423>**

Submitted on 1 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE  
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE COMPIÈGNE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

Discipline : Technologies de l'Information et des Systèmes

par

Maha FARAH

PROBLÈMES INVERSES DE SOURCES ET LIEN AVEC  
L'ELECTRO-ENCÉPHALO-GRAPHIE

Thèse soutenue le 18 Juin 2007 devant le jury composé de :

MM.	S. BAILLET	Chargé de Recherche, CNRS, Hôpital Salpêtrière, Paris XIII	Rapporteur
	J. BLUM	Professeur des Universités, Université de Nice Sophia-Antipolis	Rapporteur
	M. BONNET	Directeur de Recherche, Ecole Polytechnique Palaiseau	Rapporteur
	A. EL-BADIA	Professeur des Universités, UTC	Directeur
	J. GIROIRE	Professeur des Universités, UTC	Examineur
	T. HA-DUONG	Professeur des Universités, UTC	Directeur
	J.C. NÉDÉLEC	Professeur, CMAP, Ecole Polytechnique Palaiseau	Président
	F. WALLOIS	Maître de Conférences, Faculté de Médecine	Examineur



*à ma famille,  
Maman, Papa, Rami, Ghassan,  
Tayta, Jeddo.*



## Merci...

Cette thèse aujourd'hui terminée n'aurait probablement pas eu lieu ou aurait été moins facile, moins passionnante et moins riche sans quelques personnes que je souhaite remercier ici.

En premier lieu, je tiens à remercier mes directeurs de thèse Abdellatif EL-BADIA et Tuong HA-DUONG pour leur encadrement, leurs précieux conseils, leur patience et leur confiance. Ils ont su orienter mes recherches aux bons moments et j'ai beaucoup appris à leurs côtés. De mon travail avec eux, je garderai un formidable souvenir professionnel et humain.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait M. Jean-Claude NEDELEC en acceptant de présider mon jury de thèse. J'adresse toute ma gratitude à MM. Sylvain BAILLET, Jacques BLUM et Marc BONNET pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail ainsi qu'à MM. Jean GIROIRE et Fabrice WALLOIS pour leur participation à mon jury de thèse. Je les remercie pour leurs remarques constructives.

Je tiens à remercier la région Picardie qui a financé cette thèse dans le cadre d'un projet HTSC.

Je remercie notre secrétaire Béatrice RAMONELL pour sa disponibilité, son efficacité, sa bonne humeur et son aide.

Je tiens à remercier également tous les membres du LMAC qui ont participé plus ou moins directement au bon déroulement de cette thèse, tout particulièrement Marie-Claude, Faker, Céline.

Je garde une pensée pour les amis de route, notamment mes collègues de bureau Lekbir, Gaël et les autres thésards du LMAC-GI Vlad, Samis, Fathia, Adel, Nathalie, Julien, Céline, Hassane et Alfredo. Je remercie spécialement Vincent PAVAN pour toute son aide en programmation.

Mes chères amies de Compiègne, Dima, Sandy et Claudia milles mercis pour avoir été toujours en première ligne dans les bons moments comme les mauvais, pour m'avoir prêté une oreille toujours attentive, pour m'avoir soutenue pendant mes périodes de doutes, pour avoir supporté mes baisses de moral et de m'avoir encouragée toujours. Merci pour tous les repas et les soirées ensemble, les promenades au bord de l'Oise et dans la forêt, les sorties, les discussions, les conseils...

Je n'oublie pas également mes autres amis de Compiègne, spécialement Joseph, Bouchra et Fouad.

Je remercie également mes amis, plus ou moins loins, pour leur soutien continuel et pour leur précieuse amitié, Grace, Sonia, Chady, Chadi, Maya, mes cousines Fadia, Rania et Dania.

Ma meilleure amie de Liban Sandy (Doua'a), merci d'avoir été toujours là pour moi et de t'être intéressée à mes préoccupations même si parfois elles étaient trop différentes des tiennes. Merci de m'avoir supportée dans les moments très difficiles et de m'avoir écoutée pendant de longs moments. Merci pour tous tes conseils, ton soutien, tes mots rassurants et tes encouragements... Plus le temps passe, j'apprécie mieux cette chance exceptionnelle de t'avoir comme amie.

Je n'oublie pas également ma "seconde famille", tante Mounira, ammo Saad, Sandy, Simon, Silina et Katie qui ont une place très importante dans mon coeur.

Je remercie évidemment ma famille pour son irremplaçable soutien. Maman Angèle, Papa Milad et mon frère Ghassan, c'est à vous que je retourne en premier pour partager les joies, pour me faire soigner les blessures, pour écarter les doutes et les peurs, pour regagner confiance en moi et me sentir forte. Cette thèse est la votre aussi et je tiens à vous exprimer par ces quelques lignes mon amour et ma gratitude. Maman, papa, je vous remercie pour votre amour inconditionnel, pour votre confiance en moi, pour tout ce que vous m'avez offert et qui a fait de moi ce que je suis maintenant et merci de m'avoir donné toujours la liberté de faire ce que je veux. Tout simplement merci d'être des parents idéaux! Mon cher Ghassan, merci pour ton amour, ta tendresse, ta complicité, ton soutien et merci pour avoir toujours trouvé un moyen de me remonter le moral et de me faire sourire...

Un grand merci aussi à ma grand-mère Tayta Malkeh pour toutes ses prières et pour son amour angélique. Une profonde pensée à mon grand-père qui, grâce à lui, j'ai aimé les mathématiques. Merci grand-père pour ton amour intense dont j'ai pu bénéficier et qui est toujours présent même si tu n'es plus là.

Je tiens également à remercier une personne qui a bouleversé ma vie en lui donnant un goût si spécial. Elle se reconnaîtra dans les lignes suivantes

*So close, no matter how far  
Couldn't be much more from the heart  
Forever trusting who we are  
and nothing else matters*

*Never opened myself this way  
Life is ours, we live it our way  
All these words I don't just say  
and nothing else matters*

*Trust I seek and I find in you  
Every day for us something new  
Open mind for a different view  
and nothing else matters*

Et pour en finir, merci aux gens oubliés ici et qui ont permis, d'une manière quelconque, l'accomplissement de ce travail et merci à tous ceux qui s'intéressent à lire ce manuscrit.

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Avant Propos</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
1.1	Physiologie et contexte médical . . . . .	15
1.1.1	Electromagnétisme de l'activité cérébrale . . . . .	15
1.1.2	Techniques de mesure de l'activité cérébrale . . . . .	21
1.1.3	L'épilepsie . . . . .	26
1.2	Modélisation mathématique du problème . . . . .	27
1.2.1	Les équations de Maxwell . . . . .	27
1.2.2	Problème direct et problème inverse . . . . .	29
1.2.3	Modélisation des sources de courant . . . . .	29
1.2.4	Modélisation de la géométrie de la tête . . . . .	30
1.2.5	Conductivités des tissus de la tête . . . . .	31
1.3	Modèles considérés . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Problème direct : résolution par la méthode des éléments frontières</b>	<b>34</b>
2.1	Problème direct en EEG . . . . .	34
2.1.1	Mise en équations . . . . .	34
2.1.2	Formulation variationnelle . . . . .	36
2.1.3	Méthodes de résolution du problème direct en EEG . . . . .	38
2.2	Méthode des équations intégrales de frontières (BEM) . . . . .	40
2.2.1	Relation de l'angle solide . . . . .	41
2.2.2	Potentiels de simple et de double couche . . . . .	41
2.2.3	Opérateurs intégraux . . . . .	42
2.2.4	Quelques propriétés des opérateurs de potentiel de simple et double couche	42
2.3	Résolution du problème direct en EEG par la BEM . . . . .	42
2.3.1	Formulation en équations intégrales . . . . .	44
2.3.2	Mise en oeuvre numérique des équations intégrales . . . . .	48
2.3.3	Validation numérique . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Problème inverse en EEG</b>	<b>52</b>
3.1	Introduction . . . . .	52
3.2	Position du problème inverse . . . . .	53
3.2.1	Identifiabilité . . . . .	54
3.2.2	Stabilité . . . . .	55
3.3	Revue bibliographique sur les méthodes d'identification . . . . .	59
3.3.1	Méthode des moindres carrées . . . . .	59
3.3.2	Approches "dipolaires" . . . . .	59
3.3.3	Approches "distribuées" . . . . .	62
3.3.4	Conclusion . . . . .	63

<b>4</b>	<b>Résolution d'un problème de Cauchy en EEG</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Préliminaires . . . . .	66
4.3	Position du problème . . . . .	67
4.4	Problème mal-posé . . . . .	68
4.4.1	Unicité de la solution du problème de Cauchy . . . . .	68
4.4.2	Compatibilité des données . . . . .	69
4.5	Revue bibliographique sur les méthodes de résolution du problème de Cauchy . . . . .	71
4.5.1	Comparaison entre les principales méthodes de résolution . . . . .	73
4.6	La méthode itérative alternative de <i>Kozlov &amp; al.</i> . . . . .	73
4.6.1	Principe de la méthode . . . . .	73
4.6.2	Le schéma de l'algorithme : <i>approche successive</i> . . . . .	74
4.6.3	Le schéma de l'algorithme : <i>approche simultanée</i> . . . . .	76
4.6.4	Théorème de convergence . . . . .	76
4.6.5	Caractère régularisant de l'algorithme . . . . .	81
4.6.6	Synthèse des travaux effectués sur cette méthode . . . . .	82
4.7	Résolution des problèmes directs aux conditions aux limites mêlées . . . . .	83
4.7.1	Résolution des problèmes aux conditions aux limites mêlées de l'approche <i>successive</i> . . . . .	84
4.7.2	Résolution des problèmes aux conditions aux limites mêlées de l'approche <i>simultanée</i> . . . . .	95
4.7.3	Tests numériques . . . . .	96
4.8	Expériences numériques pour le problème de Cauchy . . . . .	97
4.8.1	Résultats obtenus dans une couronne pour une fonction analytique . . . . .	98
4.8.2	Résultats obtenus dans une couronne avec des mesures simulées . . . . .	104
4.8.3	Critère d'arrêt . . . . .	107
4.8.4	Expériences numériques dans deux couronnes . . . . .	109
4.9	Conclusion . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Résolution du problème inverse par la méthode de Kohn-Vogelius</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction . . . . .	115
5.2	Méthode de <i>Kohn-Vogelius</i> . . . . .	117
5.2.1	Définition de la fonctionnelle coût . . . . .	118
5.2.2	Problème d'optimisation . . . . .	118
5.2.3	Calcul du gradient . . . . .	119
5.3	Résolution des problèmes directs . . . . .	123
5.4	Stabilité de la méthode . . . . .	124
5.5	La méthode d'optimisation utilisée . . . . .	129
5.6	Expériences numériques . . . . .	130
5.6.1	Tests sur une géométrie sphérique . . . . .	130
5.6.2	Tests sur une géométrie réaliste . . . . .	143
5.6.3	Comparaison entre la méthode de <i>Kohn-Vogelius</i> et la méthode des moindres carrées . . . . .	144
5.7	Synthèse . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Synthèse générale</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Calcul des intégrales élémentaires discrètes</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Méthode algébrique pour la résolution du problème inverse en EEG</b>	<b>159</b>





# Chapitre 0

## Avant Propos

L'objet de cette thèse est l'identification des sources de l'activité électrique cérébrale telle qu'elle peut être mesurée à la surface de la tête par l'Electro-Encéphalo-Graphie (EEG), notamment, le cas de sources épileptiques modélisées par des dipôles. Ce sujet nous fût proposé par la région de Picardie en collaboration avec une équipe de médecins au CHU d'Amiens. Leurs principales attentes étaient d'obtenir une localisation assez précise des foyers épileptogènes, de concevoir une méthode anatomiquement réaliste et un logiciel de résolution complet.

L'épilepsie est une maladie neurologique qui se manifeste par des crises répétées qui peuvent avoir des conséquences graves. Quand il s'agit des épilepsies partielles pharmacorésistantes, on a recours à la chirurgie pour enlever les foyers épileptogènes, centres des décharges électriques dans le cerveau. L'efficacité du traitement chirurgical réside dans la localisation la plus précise possible de ces foyers, afin de limiter les risques de provoquer des déficits postopératoires.

Le modèle de base repose sur les équations de Maxwell qui dans le cas quasi-statique, vérifié par les basses fréquences, aboutissent à une équation elliptique de sources. Ainsi, le problème revient à identifier ces sources à partir des mesures du potentiel qu'elles auraient générées. Dans le présent travail, ce problème est appliqué à l'EEG mais reste valable pour tout autre modèle physique gouverné par les mêmes équations avec des sources dipolaires ou monopolaires.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, nous présentons l'aspect physiologique du problème en présentant les notions essentielles d'anatomie cérébrale et neurophysiologiques, en exposant les principales techniques de mesure de l'activité électromagnétique cérébrale et en décrivant l'épilepsie. Les équations fondamentales du problème sont ensuite rappelées, les différents modèles de sources de courant et de la géométrie de la tête sont également décrits. Enfin, une présentation des modèles considérés dans ce travail est donnée.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons le problème direct en EEG et sa formulation variationnelle. Une simple revue des méthodes de sa résolution numérique est présentée, parmi elles la méthode des éléments frontières pour laquelle nous avons opté. Un bref rappel sur cette méthode, qui sera également utilisée pour résoudre d'autres problèmes directs dans la suite, est exposé. La formulation de notre problème en équations intégrales est détaillée. Son équivalence avec le problème direct, certes classique est établie ainsi que sa discrétisation. Le calcul des différentes intégrales qui apparaissent dans le système discret est détaillé dans l'annexe A. A la

fin de ce chapitre, nous présentons des expériences numériques sur une géométrie sphérique afin de tester la validité de cette méthode.

Dans le chapitre 3, nous abordons le problème inverse en EEG. Nous montrons un résultat d'identifiabilité et un résultat de stabilité locale pour un terme source modélisé en somme finie de dipôles. Ensuite, une revue bibliographique sur les méthodes de résolution de ce problème est présentée. Pour le modèle des sources dipolaires ponctuelles, nous décrivons dans l'annexe B une méthode directe dite méthode "algébrique". Cette méthode, développée au sein de notre laboratoire, consiste à identifier le nombre, les positions et les moments des dipôles dans le cerveau à l'aide des relations algébriques qui lient ces paramètres avec les données du potentiel et du flux sur la surface du cerveau. Ce point a motivé la résolution d'un problème de Cauchy en EEG.

Le chapitre 4 est consacré à la résolution d'un problème de Cauchy en EEG. Le but de cette résolution est de calculer le potentiel et le flux à la surface du cerveau à partir des données connues partiellement sur la surface du scalp, ainsi deux approches ont été proposées. L'approche *simultanée* qui consiste à résoudre un problème de Cauchy dans le domaine non-homogène formé par l'union du scalp et du crâne, et l'approche *successive* qui consiste à résoudre successivement deux problèmes de Cauchy dans deux domaines homogènes le scalp et le crâne. Pour les deux approches nous discutons de la compatibilité des données, tenant compte du cas particulier des mesures EEG. Une revue bibliographique sur les méthodes de résolution du problème de Cauchy est ensuite présentée. Parmi ces méthodes, nous avons choisi une méthode itérative alternative proposée par *Kozlov & al.* [70]. Cette méthode est décrite en détails, nous expliquons son principe, écrivons les schémas de l'algorithme pour les deux approches, donnons un théorème de convergence pour le problème non-homogène en adaptant la démonstration faite pour le problème homogène dans [70] et décrivons le caractère régularisant de l'algorithme. Différents problèmes directs apparaissent dans les schémas de l'algorithme, leur résolution par les équations intégrales et quelques tests numériques sont présentés. A la fin de ce chapitre, nous présentons des expériences numériques pour le problème de Cauchy sur des géométries sphérique et réaliste. Dans un premier lieu, nous faisons des tests dans une couronne sphérique avec une fonction analytique afin d'étudier le comportement numérique de l'algorithme, la sensibilité par rapport au choix initial et par rapport à l'épaisseur de la couronne, la stabilité par rapport aux perturbations des données et le comportement en fonction du manque de données. Nous discutons également du critère d'arrêt de l'algorithme. Ensuite, nous présentons des résultats obtenus dans le domaine non-homogène formé par le scalp et le crâne en considérant des mesures EEG simulées. Des tests sont appliqués sur une géométrie sphérique et sur une géométrie réaliste, pour les deux approches *successive* et *simultanée*.

Dans le chapitre 5, nous considérons la méthode de *Kohn-Vogelius* [69] et l'adaptions au problème inverse en EEG où nous proposons d'identifier les positions et les moments des dipôles en supposant leur nombre connu. Nous définissons la fonctionnelle coût écrite pour notre problème, posons le problème d'optimisation correspondant et démontrons que, pour des données compatibles, ce problème admet un unique minimum qui est la solution du problème inverse. Nous calculons la dérivée au sens de Gâteaux de la fonctionnelle coût et explicitons son gradient. La robustesse de la méthode est également démontrée. A la fin du chapitre, des expériences numériques sur des géométries sphérique et réaliste, sont présentées afin d'étudier la performance de la méthode en fonction de plusieurs critères tels que le nombre de dipôles à localiser, leurs emplacements à l'intérieur du cerveau et leurs séparations. La stabilité numérique, la sensibilité de la méthode par rapport au manque des données et par rapport à la perturbation de la conductivité et de la surface du crâne ont été également étudiées. En outre, et afin d'évaluer l'apport de cette

méthode, une comparaison avec la méthode des moindres carrés est présentée.



# Chapitre 1

## Introduction générale

Ce chapitre a pour objet d'introduire le contexte physiologique et mathématique de la résolution du problème inverse en Eléctro-Encéphalo-Graphie (EEG). Il s'agit d'une compilation et synthèse de certains travaux et thèses. Nous introduisons d'abord le contexte physiologique et médical du problème en décrivant les phénomènes électromagnétiques de l'activité cérébrale et les techniques de mesure de cette activité, nous parlons également de l'épilepsie, une maladie neurologique due à un dysfonctionnement de l'activité électrique cérébrale. Ensuite, nous présentons la modélisation mathématique du problème notamment les équations de Maxwell et la modélisation des sources de courant et des modèles de la tête. Nous présentons également les problèmes direct et inverse en EEG. Enfin, nous concluons en donnant les modèles adaptés dans le cadre de notre travail.

### 1.1 Physiologie et contexte médical

Le but de cette partie est de décrire les propriétés anatomiques et physiologiques élémentaires du système nerveux, les différentes techniques de mesure de l'activité électrique et l'épilepsie.

#### 1.1.1 Electromagnétisme de l'activité cérébrale

##### Le cerveau

Le système nerveux central et périphérique est un immense réseau fonctionnel, composé de dizaines de milliards de cellules qui ont la particularité de communiquer entre elles par des signaux électriques et chimiques. Le coordinateur de cet ensemble complexe est bien évidemment le cerveau (Fig. 1.1). Les réseaux neuronaux reçoivent les informations périphériques et centrales. Ils analysent et intègrent ces informations, et développent ensuite des stratégies électrochimiques qui permettent d'adapter le comportement de l'organisme aux besoins. Le cerveau (ou encéphale) est une masse gélatineuse de couleur gris-rose, il est logé sous la voûte crânienne et baigne dans un liquide nourricier et protecteur : le liquide céphalo-rachidien (LCR). Sa surface est constituée d'un seul et même manteau qui est appelé le cortex. Le cortex est une fine couche de *substance grise* (ou *matière grise*) qui délimite la partie la plus superficielle des circonvolutions cérébrales (Fig. 1.2). Sous la substance grise se trouve la *substance blanche* (ou *matière blanche*) dont la couleur blanche est due à la présence de myéline qui entoure les fibres nerveuses, constituants principaux de cette partie interne du cerveau.

Tous les tissus vivants sont composés de cellules. La cellule nerveuse, appelée neurone, forme la matière première de nos fonctions émotives, perceptives et cognitives. Le cerveau comporte entre dix et cent milliards neurones.

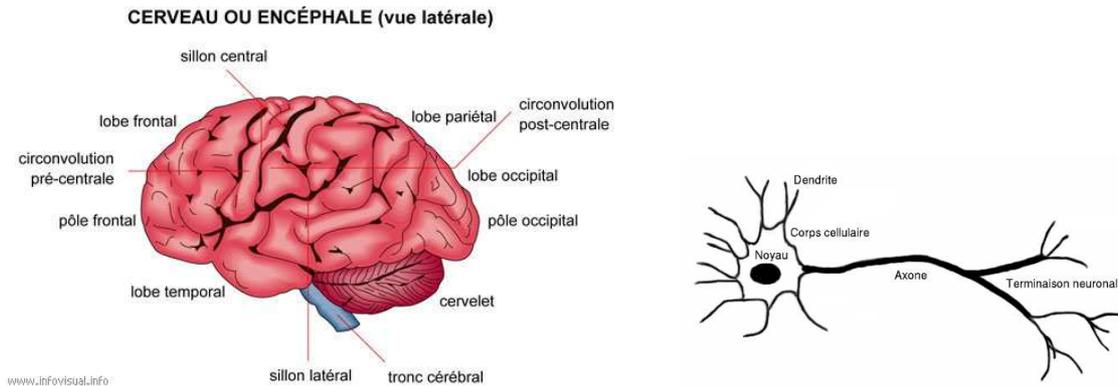


FIG. 1.1 – Le cerveau - vue latérale (gauche) [58]; Un neurone (droite) [114].

## Le neurone

Comme tout organe du corps humain, le cerveau est constitué de cellules différenciées dont l'anatomie et la physiologie sont adaptées à leurs fonctions. On distingue essentiellement deux types de cellules, les cellules gliales (du mot "glu") et les neurones. Les premières, beaucoup plus nombreuses que les neurones, ont un rôle essentiel de soutien et de protection du tissu neuronal. Les secondes constituent l'élément de base de la communication nerveuse entre les régions cérébrales et l'ensemble du système nerveux périphérique.

Le neurone est composé de trois parties (Fig. 1.1). *Le corps cellulaire*, aussi appelé *soma*, abrite le noyau avec ses chromosomes et ses gènes. La fonction générale du *soma* est de traiter les signaux qu'il reçoit des dendrites, d'intégrer les informations et d'élaborer une réponse sous la forme d'émissions de potentiels d'actions dont le nombre et la fréquence codent les paramètres de celles-ci. Ces potentiels d'actions sont transmis le long des axones vers d'autres cellules ou structures cibles.

*L'axone* est un prolongement unique du *soma*. Son principal rôle est de transmettre l'information électrique et chimique aux neurones qui l'entourent et avec qui il fait des connexions appelées *synapses*.

*Les dendrites*, troisième élément du neurone, sont des ramifications courtes et arborescentes liées au *soma*. Leur fonction consiste à recevoir l'information et à l'acheminer vers le corps de la cellule.

On trouve principalement dans le cortex deux types de neurones, les neurones pyramidaux et les neurones étoilés, qui diffèrent par leur forme et par leur organisation dans les couches corticales (Fig. 1.3). Les neurones de type pyramidal ont la forme d'un cône, leur dendrite principal se dirige vers la surface tandis que l'axone se dirige vers la substance blanche. Ces cellules se projettent vers la moelle (voies motrices, etc), vers des structures sous-corticales (les noyaux gris centraux, le cervelet, etc) ou vers d'autres régions corticales appartenant au même hémisphère ou à l'autre. Les neurones en étoile ont un corps cellulaire plus petit, et leur arborisation dendritique s'étend sur toute la surface du corps cellulaire donnant ainsi un aspect étoilé. Ces neurones constituent des inter-neurones et sont reliés aux neurones de proximité. Les dendrites des cellules pyramidales sont orientés parallèlement entre eux et ont tendance à être perpendiculaires à la surface du cortex, tandis que ceux des neurones étoilés n'ont pas d'orientation préférentielle. Ainsi, les cellules pyramidales vont voir leurs courants produits s'ajouter lorsque l'activité d'un groupe de neurones se fait plus ou moins en phase, alors que l'organisation géométrique des cellules en étoile fait que les courants produits ont tendance à s'annuler.

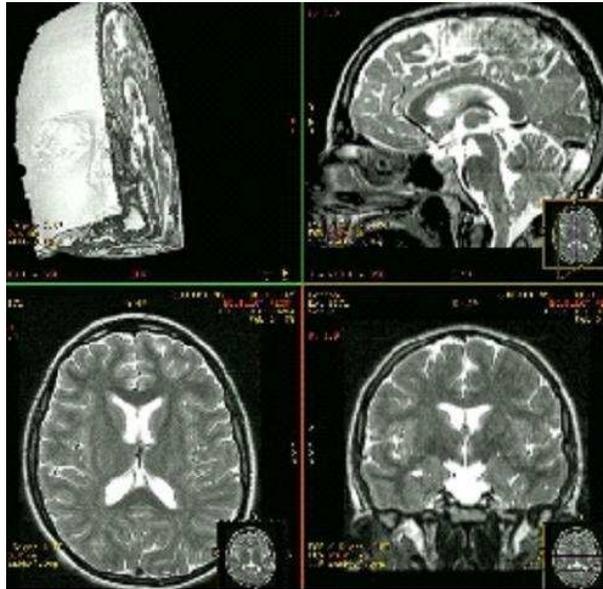


FIG. 1.2 – Une IRM de la tête.

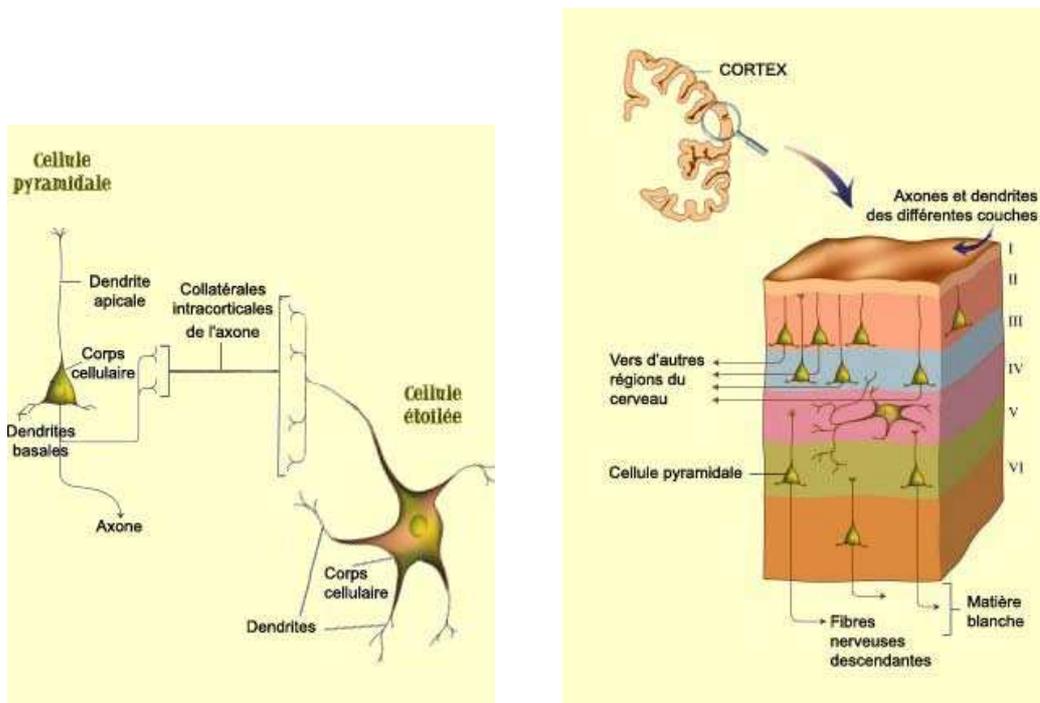


FIG. 1.3 – Description d'un neurone pyramidal et d'un neurone étoilé (gauche) ; L'organisation cellulaire du cortex visuel (droite) [76].

## Les phénomènes électromagnétiques

L'information nerveuse est de nature électrique. Les cellules nerveuses étant excitables, elles répondent à une stimulation électrique par un signal électrique.

Une cellule nerveuse au repos a une différence de potentiel ( $V_m = V_i - V_e$ ) par rapport au milieu extérieur d'environ  $70mV$  (*millivolts*). Il y a davantage de charges négatives à l'intérieur qu'à l'extérieur et plus de charges positives à l'extérieur. Ce qui s'exprime alors par un potentiel de repos (ou potentiel de membrane) négatif :  $V_m = V_r \approx -70mV$ .

**Le potentiel post-synaptique** Le passage de l'information d'un neurone à un autre fait intervenir un fonctionnement spécifique à travers les synapses. Il fait appel à un processus biochimique particulier : libération de neuromédiateurs (ou neurotransmetteurs) du terminal présynaptique, lesquels en se fixant sur la membrane postsynaptique provoquent l'ouverture de canaux ioniques perméables aux ions tels que les canaux sodium  $Na^+$  ou les canaux chlore  $Cl^-$ . Il s'ensuit un mouvement de charges (un courant électrique) et par suite une modification du potentiel électrique transmembranaire  $V_m$  du neurone postsynaptique. Cette variation de potentiel  $\Delta V_m$ , appelée potentiel postsynaptique (PPS) s'ajoute au potentiel  $V_m$  de la membrane.

Deux cas se présentent alors :

- Les canaux inhibiteurs tels que " $Cl^-$ " s'ouvrent, il s'agit alors d'un potentiel post-synaptique inhibiteur (*PPSI*). Ce potentiel crée une hyperpolarisation de la membrane  $V_m < V_r$ , ce qui empêche alors l'excitation de la cellule et la propagation de l'influx par son axone.
- Les canaux excitateurs tels que " $Na^+$ " s'ouvrent, il s'agit alors d'un potentiel post-synaptique exciteur (*PPSE*). Ce potentiel crée une dépolarisation de la membrane  $V_m > V_r$  et, si cette excitation est suffisamment intense un potentiel d'action apparaîtra.

Après une stimulation, inhibitrice ou excitatrice, le potentiel transmembranaire retrouve sa valeur de repos. Cependant, une excitation donnant lieu à un potentiel d'action est suivie d'une courte période, dite réfractaire, pendant laquelle le neurone n'est plus excitable.

**Le potentiel d'action** Si la somme des potentiels excitateurs et inhibiteurs, que reçoit le neurone, atteint le seuil d'excitation du neurone  $\cong -50mV$ , une phase de dépolarisation transitoire et locale de cet état de repos est alors déclenchée et un nouveau potentiel est généré, appelé le potentiel d'action (*PA*). Les canaux sodiques s'ouvrent et laissent entrer les ions sodium  $Na^+$  à l'intérieur de la cellule, ce qui dépolarise davantage le neurone. Quand la dépolarisation atteint son maximum ( $\cong +35mV$ ), elle finit par inactiver graduellement les canaux  $Na^+$ , ce qui provoque l'ouverture des canaux potassiques qui font sortir les ions potassium  $K^+$  du neurone. Ces canaux ne s'inactivant pas (à cette échelle de temps), la membrane interne passe alors par une phase d'hyperpolarisation transitoire avant que le potentiel de repos ne soit restauré, et les pompes " $Na^+/K^+$ " font sortir le sodium vers l'extérieur et entrer le potassium vers l'intérieur, restaurant ainsi la distribution originale des ions de part et d'autre de la membrane. L'influx nerveux se propage ainsi de proche en proche tout au long de l'axone (Fig. 1.4). Notons que le travail des pompes " $Na^+/K^+$ " demande de l'énergie qui est procurée par l'hydrolyse de la molécule d'ATP (adénosine triphosphate) qui se dégrade en adénosine-diphosphate (ADP).

Une fois l'influx nerveux arrivé au pied de la cellule, ce sont les terminaisons synaptiques qui

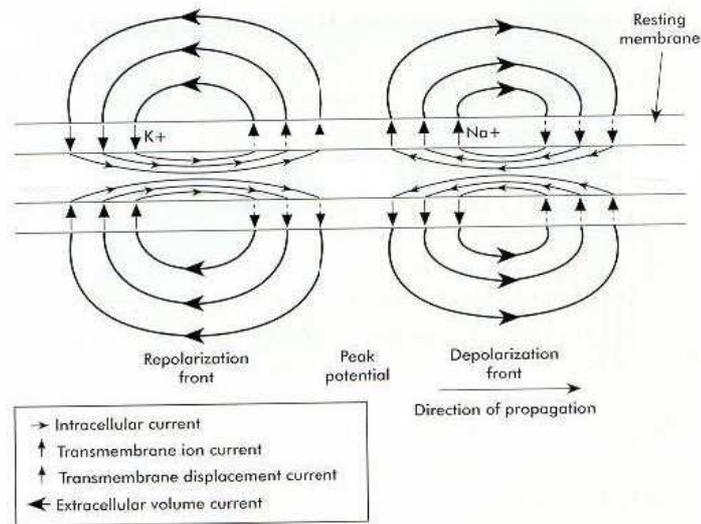


FIG. 1.4 – Repolarisation et dépolarisation [73].

transmettent ou pas l'information à un autre neurone et provoquent l'excitation ou l'inhibition de neurones afférents.

### Caractéristiques du potentiel post-synaptique et du potentiel d'action

Le potentiel post-synaptique (*PPS*) dure en moyenne quelques dizaines de millisecondes, tandis que le potentiel d'action (*PA*) ne dure qu'une milliseconde environ. Par ailleurs, le potentiel post-synaptique peut être modélisé par un dipôle de courant, un puits et une source, qui se trouve à l'extrémité postsynaptique, au niveau de l'arbre dendritique. D'autre part, l'alternance de dépolarisation et d'hyperpolarisation dans le potentiel d'action s'assimile plutôt à l'activité de deux dipôles de courants parallèles, de même intensité mais de sens opposé, et donc un potentiel d'action est modélisé par le quadrupôle formé de ces deux dipôles (Fig. 1.5).

**Remarque 1** *Le potentiel créé par un dipôle varie proportionnellement à l'inverse du carré de la distance entre la source de courant et le point d'observation sur le scalp, alors qu'il varie proportionnellement à l'inverse du cube de cette distance quand il provient d'un quadrupôle.*

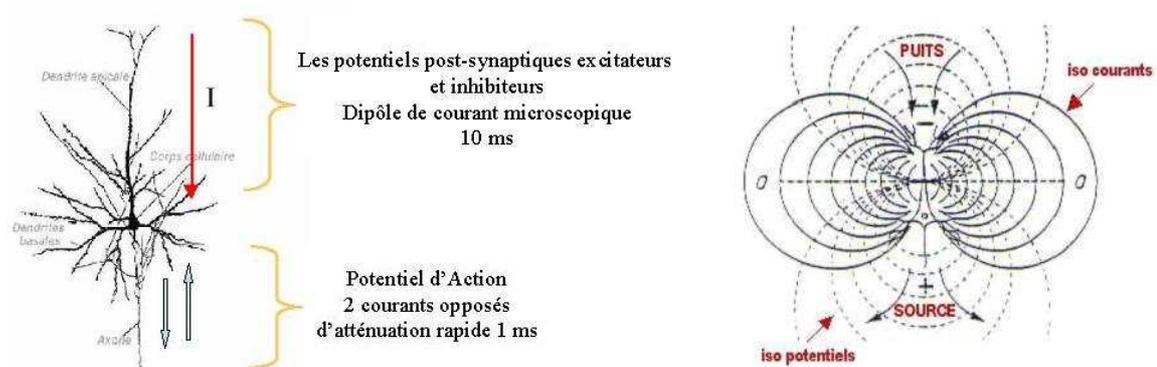


FIG. 1.5 – Les courants primaires et volumiques [112].

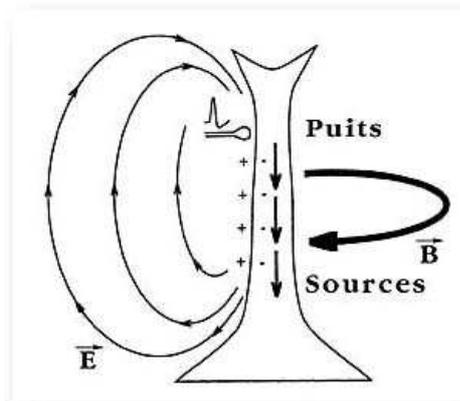


FIG. 1.6 – Les champs électrique et magnétique.

**Les courants intra et extra-cellulaires résultants de l'activité cérébrale** Les variations des potentiels d'action (*PA*) et des potentiels post-synaptiques (*PPS*) provoquent des mouvements de particules chargées à proximité des membranes cellulaires, ce qui génère des courants intracellulaires dits aussi *courants primaires* ou *courants sources*. Ces courants primaires proviennent essentiellement des (*PPS*) puisque le (*PA*) est quadripolaire et donc décroît rapidement avec la distance.

Ces courants intracellulaires sont associés à des courants extracellulaires dits *courants secondaires* ou *courants volumiques*. Quantitativement, la somme des courants secondaires doit correspondre aux courants primaires (conservation de la charge); les lignes de courant ainsi formées se referment après circulation dans le volume entier de la tête (Fig. 1.5).

Les courants extracellulaires sont à l'origine d'un champ électrique que nous notons  $\vec{E}$ . Et les courants intracellulaires, d'intensité plus forte et de même orientation, sont à l'origine d'un champ magnétique que nous notons  $\vec{B}$  (Fig. 1.6).

Les champs électrique et magnétique créés par un seul neurone ne sont pas mesurables en pratique, mais c'est la mise en synchronie dans l'espace et dans le temps d'assemblées de neurones (entre  $10^7$  et  $10^9$  neurones) concentrés dans quelques millimètres cubes de cortex, que l'on nomme macrocolonne qui induit des courants détectables à distance. La synchronie spatiale est principalement avatagée par les neurones de type pyramidal. La synchronie temporelle est due aux potentiels post-synaptiques qui, grâce à leur "longue" durée, ont une plus grande probabilité d'être en phase et favorisent ainsi la synchronisation d'un ensemble important de cellules tout en ayant une distribution dipolaire. Chaque macrocolonne se comporte comme un dipôle électrique dont la direction moyenne est celle des dendrites de cette macrocolonne. Les courants résultants de l'activité d'une macrocolonne sont modélisés par un dipôle de courant macroscopique dont la direction est donnée par l'orientation principale des dendrites, c'est-à-dire localement perpendiculaire à la surface corticale, et dont l'amplitude représente l'intégrale des densités de courant dans la colonne considérée. L'amplitude moyenne d'un dipôle résultant de l'activité synchronisée de  $10^5$  neurones est de l'ordre de 10 nA.m.

### Quelques unités

Nous donnons dans ce paragraphe quelques unités dérivées du système international (SI) :

- le courant électrique : Ampère (*A*).
- le champ électrique : Volt/mètre ( $Vm^{-1}$ ) ou aussi Newton/Coulomb ( $NC^{-1}$ ).

- le potentiel électrique : Volt ( $V$ ).
- le moment électrique : Ampère.mètre ( $Am$ ).
- la conductivité électrique : Siemens/mètre ( $Sm^{-1}$ ) ou aussi 1/Ohm.mètre ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ ).
- l'induction magnétique : Tesla ( $T$ ).
- le signal électrique mesuré par l'EEG : Hertz ( $Hz$ ) ou aussi 1/seconde ( $s^{-1}$ ).

### Quelques chiffres

- le cerveau pèse environ  $1.4kg$  et a un diamètre d'une vingtaine de centimètres environ.
- le cortex représente 50% du volume cérébral, soit environ  $500cm^3$ , son épaisseur varie entre 2 et 4  $mm$ .
- le cerveau contient au minimum  $10^{10}$  à  $10^{11}$  neurones.
- le diamètre du corps des neurones varie selon leur type de 5 à 150  $\mu m$  (micro-mètre).
- l'axone a un diamètre compris entre 1 et 15  $\mu m$ , sa longueur varie d'un millimètre à plus d'un mètre.
- chaque neurone du cerveau est interconnecté avec plus de 10000 voire 100000 autres neurones.
- la durée du potentiel postsynaptique est  $10ms$  (milli-seconde).
- la durée du potentiel d'action est  $1ms$ .
- l'intensité d'un dipôle équivalent (cf §1.2.3) correspondant à l'activité électrique d'un seul neurone est  $20fA.m$  (femto-Ampère-mètre <sup>a</sup>).
- l'intensité du moment du dipôle formé par  $10^5$  neurones est  $10nAm$  (nano-Ampère-mètre <sup>b</sup>).
- l'amplitude du potentiel électrique recueilli au scalp est d'une dizaine de micro-volts.
- le champ magnétique cérébral mesure un dixième de pico-tesla, c'est-à-dire 1 milliard de fois plus petit que le champ magnétique terrestre.

Le contexte physiologique étant décrit, nous présentons maintenant les techniques de mesure associées à ces phénomènes électromagnétiques.

#### 1.1.2 Techniques de mesure de l'activité cérébrale

Un des principaux enjeux de l'imagerie cérébrale est de suivre en temps réel l'activité du cerveau vivant sans altérer son fonctionnement, afin de permettre aux neurologues de comprendre la structure et le rôle des différentes parties du cerveau, de localiser les zones cérébrales affectées par des désordres neurologiques et de développer de nouvelles stratégies pour traiter les désordres du cerveau.

Nous distinguons généralement l'imagerie anatomique et l'imagerie fonctionnelle. La première est conçue pour mettre en valeur les structures cérébrales et tout ce qui peut les perturber (tumeurs, hémorragies, caillots ou autres déformations présentes à la naissance). L'imagerie fonctionnelle mesure de son côté l'activité de certaines régions du cerveau durant certaines tâches. On l'utilise surtout pour la recherche fondamentale qui vise à mieux comprendre le rôle de nos diverses structures cérébrales, mais aussi pour diagnostiquer des foyers épileptiques ou pour identifier les structures cérébrales fonctionnelles essentielles qu'il faudrait conserver dans la mesure du possible lors des opérations chirurgicales. La technique d'imagerie anatomique est cependant très souvent utilisée de paire avec la technique fonctionnelle pour mieux cerner l'anatomie et la fonction d'une aire cérébrale chez un individu particulier.

---

<sup>a</sup>1 femto =  $10^{-15}$ .

<sup>b</sup>1 nano =  $10^{-9}$ .

Les techniques de mesure, anatomique ou fonctionnelle, n'exploitent pas les mêmes phénomènes physiologiques. Certaines mesurent indirectement l'activité du cerveau en détectant les effets métaboliques résultants comme la Tomographie par Emission de Positons (TEP), la Tomographie par Emission de Simples Photons (TESP) et l'Imagerie par Résonance Magnétique fonctionnelle (IRMf). D'autres mesurent directement l'activité électromagnétique cérébrale comme l'Eléctro-Encéphalo-Graphie (EEG) et la Magnéto-Encéphalo-Graphie (MEG). C'est cette distinction qui nous guide dans la description suivante de ces techniques.

### Techniques de mesure indirecte de l'activité cérébrale

L'activation des cellules nerveuses engendre une dépense d'énergie relativement importante par consommation d'ATP (cf § 1.1.1). Cette consommation d'ATP engendre des modifications locales du débit sanguin cérébral et une consommation accrue d'oxygène et de glucose. Ces effets métaboliques indirects de l'activation neuronale sont utilisés par la TEP, la TESP et par l'IRMf pour localiser les zones activées dans le cerveau.

**La Tomographie par Émission de Positons** La TEP consiste à injecter dans le sang un marqueur radioactif contenant un isotope qui se désintègre en émettant un positon. Ce positon, après un parcours de quelques millimètres, rencontre un électron avec lequel il s'annihile en émettant deux photons gamma. La TEP consiste ainsi à détecter ces photons autour de la tête. En détectant la coïncidence de l'arrivée de deux photons on peut déterminer l'emplacement de la désintégration. En imagerie cérébrale l'isotope principal utilisé est l'oxygène 15 qui permet d'imager les zones du cerveau où le débit sanguin s'est élevé suite à une excitation. Un algorithme de reconstruction permet d'aboutir à une carte en trois dimensions des zones d'émission. La résolution spatiale de la TEP est de  $2 - 10mm$  et sa résolution temporelle est de  $20s - 1min$ .

**La Tomographie par Émission de Simples Photons** La tomographie par émission de simples photons fait appel, comme la TEP, à des traceurs radioactifs. Les noyaux mis en jeu se désintègrent en émettant un seul photon gamma. Cette méthode est globalement moins précise que la TEP.

**L'Imagerie par Résonance Magnétique fonctionnelle** L'IRMf est la méthode d'imagerie la plus moderne. C'est une technique sous jacente au principe général de la résonance magnétique, l'IRM, qui consiste à observer les tissus biologiques moyennant les propriétés magnétiques du noyau d'hydrogène présent dans l'un de leurs constituants majoritaires, l'eau. En effet, le proton qui constitue le noyau de l'atome d'hydrogène possède un moment magnétique, une sorte de petit aimant appelé *spin*. Lorsque l'on place un sujet dans un champ magnétique, les spins des noyaux d'hydrogène s'orientent dans la direction de ce champ. Une des façons d'acquérir l'image est de mesurer l'aimantation résultante en chaque point des tissus analysés. Comme cette aimantation est proportionnelle à la quantité de noyaux d'hydrogène présents et que les tissus se distinguent par leur contenu en eau, la carte des aimantations résultantes reproduit l'anatomie des tissus.

Contrairement à l'IRM qui permet de visualiser l'anatomie des structures cérébrales, l'IRMf nous renseigne sur l'activité des différentes régions cérébrales en fournissant des images fonctionnelles. L'appareillage qui entoure le sujet et le fonctionnement de base est sensiblement le même qu'avec l'IRM, mais les ordinateurs qui analysent le signal diffèrent. L'IRMf est basée sur l'observation en temps réel des variations de l'oxygénation du sang. Elle donne une image du niveau d'oxygénation sanguin grâce aux propriétés paramagnétiques de la désoxyhémoglobine (effet Blood Oxygenation Level Dependent - BOLD). La diminution du taux local en désoxyhémoglobine lors d'une tâche sur le versant veineux de l'arborisation vasculaire à proximité des zones activées provoque

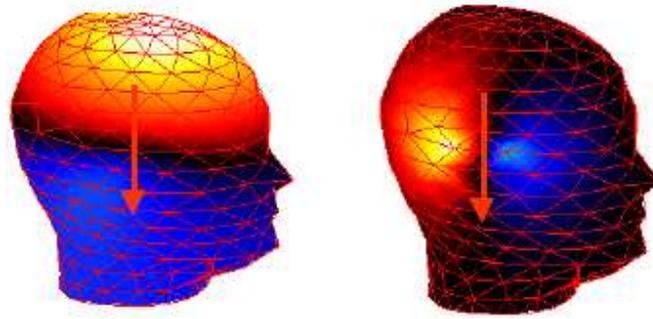


FIG. 1.7 – Les réponses topographiques de l’EEG (à gauche) et du MEG (à droite) [73].

une variation du signal IRM comparativement à une image acquise au repos. L’objectif final est de distinguer par analyse statistique les différences entre une image acquise au repos, c’est-à-dire sans activité particulière du sujet et une image acquise durant la réalisation d’une tâche.

Selon les techniques utilisées, l’IRM permet d’obtenir en trois dimensions deux principaux types d’images numériques de la tête : les images anatomiques et les images fonctionnelles. Les premières permettent, après segmentation, d’obtenir des modèles 3D réalistes de la tête de chaque sujet en distinguant les différents milieux (liquide céphalo-rachidien, cortex, substance blanche et les noyaux gris centraux). Les deuxièmes permettent de localiser une activité cérébrale par la consommation d’oxygène qu’elle occasionne. Alors que les images anatomiques présentent une résolution spatiale inférieure à  $1mm$ , les images fonctionnelles, ayant un temps d’acquisition beaucoup plus court, présentent une résolution spatiale plus faible ( $3mm$ ).

### Techniques de mesure directe de l’activité cérébrale

On peut également enregistrer une image de l’activité des cellules nerveuses grâce à la propagation des champs électriques ou magnétiques induits à la surface de la tête. Ainsi on pourra donc recueillir l’activité spontanée du cerveau ou des activités évoquées par une stimulation ou une tâche particulière.

**L’Électro-Encéphalo-Graphie** L’EEG est une méthode non invasive qui permet de mesurer directement l’activité électrique cérébrale.

Cette technique a été créée en 1924 par Hans Berger en Allemagne. Elle mesure les différences de potentiel électrique entre deux électrodes disposées à la surface de la tête, le scalp. Pour avoir une carte détaillée de l’activité électrique des cellules nerveuses du cerveau, il faut positionner autant d’électrodes que possible. Ces électrodes sont réparties uniformément sur la surface du scalp avec une disposition répondant à des standards internationaux et sont disposées dans un bonnet élastique comportant environ 27 à 128 électrodes, plus typiquement 64. Chaque électrode couvre une surface de quelques millimètres carrés, le contact électrique avec le cuir chevelu est assuré par un gel conducteur. Dans le cas de l’épilepsie (cf §1.1.3), on a recours à des enregistrements de plusieurs jours et les électrodes sont alors collées directement sur le scalp. Chaque électrode doit relever une mesure de potentiel de surface, puis transmettre ce signal, qui est ensuite amplifié et enregistré par un numériseur, puis sauvegardé sur ordinateur (EEG numérique). Etant donné qu’on ne peut pas mesurer le potentiel absolu, le choix d’une électrode de référence est indispensable.

L’EEG offre une excellente résolution temporelle,  $0.4 - 1ms$ , et un coût moins élevé que l’IRMf ou le TEP-scan (TEP couplé au scan), mais sa résolution spatiale demeure toutefois faible

(> 5mm). Malgré tout, l'EEG est le seul outil de référence pour l'aspect électrique du diagnostic de l'épilepsie. Il apporte des informations sur le fonctionnement cérébral en dehors des crises et durant les crises. L'analyse des pointes graphoéléments intercritiques, etc, sont des éléments parfois suffisamment spécifiques pour permettre une orientation diagnostique.

Les cartographies cérébrales faites avec l'EEG utilisent aussi fréquemment ce que l'on appelle des "potentiels évoqués". Il s'agit d'une procédure où l'on soumet le sujet à un stimulus particulier (une image, un mot, une stimulation tactile...) de façon à enregistrer une réponse neuronale associée à ce stimulus dans le cerveau. Enfin, notons que les enregistrements EEG souffrent d'une diffusion importante due à la faible conductivité de l'os (cf §1.2.5). Cette forte inhomogénéité électrique est à l'origine de cartes de potentiels diffuses qui rendent difficile l'interprétation des signaux provenant de sources profondes.

**La Magnéto-Encéphalo-Graphie** La MEG mesure les champs magnétiques accompagnants le courant généré dans les neurones. Elle utilise un certain nombre de capteurs placés à proximité de la tête. Ces capteurs utilisent des bobines réceptrices de flux couplées à des anneaux supraconducteurs appelés SQUIDS (Superconducting Quantum Interference Device) qui transforment le flux magnétique en courants électriques [51]. L'ensemble des capteurs est immergé dans de l'hélium liquide contenu dans une cuvette cryogénique appelée cryostat. La température très froide de l'hélium ( $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) attribue aux capteurs des capacités supraconductrices et, par conséquent, une sensibilité suffisante pour détecter les signaux extrêmement faibles du cerveau. En effet, les champs magnétiques cérébraux sont de l'ordre de quelques femto-Teslas, et doivent donc être isolés des champs magnétiques externes. Ainsi, l'appareil de la MEG doit être placé dans une pièce isolée magnétiquement, souvent c'est une pièce blindée formée de parois en  $\mu$ -métal qui atténue d'un facteur  $10^3$  à  $10^4$  les champs magnétiques extérieurs. A cause de la chambre blindée et de la technologie des supraconducteurs basse température, la MEG est une technologie d'imagerie relativement coûteuse.

### Comparaison entre les différentes techniques de mesure fonctionnelles

Nous comparons dans le tableau (Tab. 1.1) les différentes techniques d'imagerie cérébrale *fonctionnelle* décrites ci-dessus : la TEP, l'IRMf, la MEG et l'EEG .

D'après ce tableau, nous concluons que les techniques TEP et IRMf ont une bonne résolution spatiale, particulièrement l'IRMf, mais elles sont limitées par la faible résolution temporelle et sont contraignantes sur plusieurs niveaux. D'autre part, l'EEG et la MEG ont une excellente résolution temporelle, qui leur permettent une acquisition temps réel et donc l'étude de la dynamique du réseau d'activations, mais elles présentent une résolution spatiale pauvre.

Vu ses multiples avantages (Tab. 1.1), l'EEG reste actuellement la technique de mesure la plus pratiquée, en particulier chez les patients épileptiques.

Finalement, toutes ces techniques présentent des résultats complémentaires et donc afin d'obtenir les informations les plus complètes possibles sur l'organisation anatomo-fonctionnelle du cerveau, le mieux serait d'exploiter chacune de ces modalités et de mettre en commun leurs résultats, ce qui est connu plutôt sous le terme générique de *fusion* [27, 85, 105, 9], ...

Dans la section suivante, nous décrivons la maladie neurologique à la base de notre travail, l'épilepsie.

TAB. 1.1 – Tableau comparatif entre la TEP, l'IRM, la MEG et l'EEG.

	TEP	IRMf	MEG	EEG
Ancienneté	1973	1990	1972	1929
Origine	débit sanguin	oxygénation, débit sanguin	potentiels postsynaptiques	potentiels postsynaptiques
Localisation	capillaires, tissu cérébral	capillaires veinules	synapses	synapses
Résolution spatiale	2-10mm	1-3mm	>5 mm	>5 mm
Résolution temporelle	20s-1min	5-8s	0.4-1ms	0.4-1ms
Durée typique d'examen	120 min	20 à 40 min	14 min	14 min + 30 min de préparation
Points positifs	<ul style="list-style-type: none"> <li>- bonne résolution spatiale</li> <li>- imager des composés métaboliques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- la meilleure résolution spatiale</li> <li>- fournit des images de très bonne qualité</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- excellente résolution temporelle (<i>msec</i>)</li> <li>- non invasive,</li> <li>- inoffensive (pas de radio-activité, ni injection, ni champ magnétique),</li> <li>- distorsion faible par l'os</li> <li>- appareil non bruyant</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- excellente résolution temporelle (<i>msec</i>)</li> <li>- non invasive,</li> <li>- inoffensive</li> <li>- appareil non bruyant</li> <li>- peu coûteux</li> <li>- enregistrements possibles à longue durée</li> <li>- non contraignant</li> <li>- seul examen pouvant être réalisé répétitivement sur de longues durées pour l'enregistrement des crises</li> </ul>
Points négatifs	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pauvre résolution temporelle</li> <li>- invasive</li> <li>- le patient doit rester allongé</li> <li>- coûteux</li> <li>- bruit gênant</li> <li>- danger possible pour enfants et femmes enceintes</li> <li>- un examen/an</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pauvre résolution temporelle</li> <li>- champ magnétique fort</li> <li>- innocuité inconnue</li> <li>- confinement dans l'imageur</li> <li>-interdit aux patients avec stimulateur cardiaque et prothèses...</li> <li>- bruit gênant</li> <li>- coûteux</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pauvre résolution spatiale</li> <li>- coûteux, délicat</li> <li>- aveugle aux sources radiales et aux sources profondes</li> <li>- le sujet doit rester immobile</li> <li>- infrastructure lourde</li> <li>- pas compatible avec les crises</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pauvre résolution spatiale</li> <li>- distorsion forte par l'os</li> <li>- aveugle aux sources qui génèrent une boucle de courant</li> </ul>

### 1.1.3 L'épilepsie

On désigne par épilepsie les manifestations cliniques, ou crises, paroxystiques (motrices, sensitives, sensorielles ou psychiques) qui peuvent s'accompagner d'une perte de connaissance et qui sont liées à une décharge hypersynchrone de populations neuronales hautement organisées. Ces crises peuvent survenir n'importe où dans le système nerveux central. On croit cependant qu'elles prennent naissance dans des régions précises, principalement dans le cortex cérébral.

L'épilepsie est une des maladies neurologiques les plus communes et constitue, après la migraine, la première raison de consultation d'un neurologue. Elle ne diminue pas de façon marquée l'espérance de vie, mais lorsque les crises sont fréquentes, la qualité de vie du malade peut être gravement compromise. Dans le monde, plus de 40 millions de personnes sont concernées par cette maladie. En France, environ 450 000 personnes sont répertoriées dont 250 000 jeunes de moins de 20 ans. De fait, chaque jour, 100 personnes présentent une première crise, soit près de 40 000 par an. Une fois sur deux, cette crise peut inaugurer une maladie épileptique qui est surtout caractérisée par la répétition chronique de ces crises.

Les scientifiques classent les différentes formes d'épilepsie selon deux groupes :

- *épilepsies généralisées* : elles se caractérisent par des décharges d'une population de neurones cérébraux qui se propagent au niveau des deux hémisphères d'une façon bilatérale et plus ou moins symétrique. Les crises se traduisent alors souvent par une perte de connaissance avec chute et des convulsions de l'ensemble des muscles, ou par une brève suspension de la conscience connue sous le nom d'absence.
- *épilepsies partielles ou focales* : dans ce cas les décharges siègent dans des régions circonscrites du cerveau, s'organisant en foyers, uniques ou multiples. Les crises partielles n'affectent que certaines parties du corps. Elles peuvent se traduire par des troubles moteurs, des troubles sensoriels et sensitifs, des troubles transitoires de la mémoire ou de la conscience, associés parfois à des hallucinations ou à une activité gestuelle automatique. Certaines de ces crises partielles peuvent évoluer vers une crise généralisée.

Les cliniciens peuvent traiter l'épilepsie de deux façons, la pharmacothérapie et la chirurgie. Des 450 000 cas épileptiques en France, on estime que 80 à 100 000 d'entre eux présentent des crises pharmaco-résistantes, et qu'il s'agit le plus souvent d'une épilepsie partielle. Pour ces cas, on peut avoir recours à la chirurgie qui guérit les patients de leurs crises ou diminue très fortement leur fréquence en enlevant les foyers épileptogènes ou en interrompant leurs voies de propagation. L'intervention chirurgicale peut être pratiquée uniquement lorsqu'elle ne risque pas d'endommager les régions saines du cerveau.

Plusieurs aspects sont considérés pour la localisation des zones épileptogènes :

- Aspect clinique : la sémiologie des crises. C'est l'ensemble des manifestations cliniques associées à la crise. Leur observation dans le temps, au cours de plusieurs crises, permet d'identifier les signes caractéristiques d'une crise et donc d'en localiser l'origine en se basant sur la connaissance que l'on a des différentes zones fonctionnelles du cerveau. Par exemple, les signes cliniques les plus fréquents d'une crise dont l'origine se situe dans le lobe frontal peuvent être : rupture du contact, chute brutale, déviation de la tête et des yeux, perturbations du comportement moteur ou automatismes. On a alors une localisation assez grossière des générateurs.

- Aspect électromagnétique : l'EEG, la MEG et la Stéréo-Electro-Encéphalo-Graphie (SEEG). La SSEG est une méthode stéréotaxique basée sur le même principe que l'EEG mais qui consiste à implanter les électrodes d'enregistrement dans les structures cérébrales. On peut ainsi mesurer l'activité électrique cérébrale à l'intérieur même du cerveau, évitant le phénomène de lissage obtenu en surface. Le choix de l'emplacement des électrodes intracérébrales se fait sur la base des données cliniques, EEG et anatomiques. C'est jusqu'à présent la méthode la plus fiable de localisation des foyers épileptogènes.
- Aspect spatiotemporel : la cartographie spatiotemporelle. Qu'elle soit de surface ou de profondeur (basée sur l'EEG ou la SEEG), elle permet de voir la propagation de l'activité et donc de percevoir l'organisation des générateurs.
- Aspect étiologique (ou anatomique) : l'IRM (ou le scanner X) permet de vérifier ou d'infirmer la présence d'une lésion (tumorale, vasculaire,...) ce qui fournit des informations complémentaires pour diagnostiquer les causes de l'épilepsie.
- Aspect scientifique (ou informatique) : s'ajoutent à toutes ces techniques, la validation de la localisation des foyers en utilisant des algorithmes de localisation à partir des enregistrements réalisés sur le scalp par des capteurs EEG/MEG.

Actuellement, la localisation de la zone épileptogène se fait à l'aide d'électrodes implantées dans le cerveau. Une meilleure localisation du foyer épileptogène par EEG, MEG ou par les algorithmes de localisation permettrait de mieux cibler la zone où doivent être implantées les électrodes intra-cérébrales. Dans le meilleur des cas, cela permettrait d'éviter cette implantation qui est une procédure lourde et coûteuse.

Notre travail concerne la localisation des foyers épileptogènes à l'aide de méthodes numériques, afin de compléter et/ou valider le travail des cliniciens et apporter plus de précision sur la délimitation des zones épileptiques. Pour ce fait, on est amené à exprimer ce phénomène de localisation de sources par des modèles mathématiques, à modéliser la tête et les sources de courant et déterminer les caractéristiques des différents milieux de la tête.

## 1.2 Modélisation mathématique du problème

### 1.2.1 Les équations de Maxwell

Les équations de base gouvernant le comportement électrique du cerveau dérivent des équations de Maxwell. La tête est considérée comme un milieu conducteur fini inhomogène, constitué de plusieurs tissus excitables et qui présente une conductivité électrique  $\sigma(x)$  dépendante de la position  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Dans ce milieu conducteur (isolé dans l'air), le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $B$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \text{(Maxwell-Faraday),} \\ \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon} & \text{(Maxwell-Gauss),} \\ \nabla \times B &= \mu \left( J + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) & \text{(Maxwell-Ampère),} \\ \nabla \cdot B &= 0 & \text{(conservation du flux),} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $J$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  et  $\epsilon$  désignent respectivement la densité volumique de courant, la densité volumique de charge, la perméabilité magnétique et la permittivité électrique. Par ailleurs,  $\mu$  et  $\epsilon$  sont habituellement considérées comme égales à celles du vide, soit  $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$  et  $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$  c.

### Approximation quasi-statique

Les études dans le domaine de l'électrophysiologie, en particulier l'EEG, utilisent le modèle quasi-statique du fait de la faible fréquence du signal et la faible capacité électrique des tissus de la tête [51]. En effet, la fréquence des signaux EEG varie le plus souvent entre  $1\text{Hz}$  et  $100\text{Hz}$  environ et les fréquences d'échantillonnage des mesures sont de l'ordre du *kiloHz*, par suite les variations des champs peuvent être considérées comme très lentes. D'autre part, les tissus de la tête apparaissent comme des conducteurs passifs on peut donc considérer que les courants électriques et les champs magnétiques se comportent à tout instant de façon stationnaire. Ce qui permet alors de négliger les variations  $\frac{\partial E}{\partial t}$  et  $\frac{\partial B}{\partial t}$ . Cette approximation est celle du régime quasi-statique et conduit aux équations de Maxwell simplifiées

$$\begin{cases} \nabla \times E &= 0, \\ \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times B &= \mu_0 J, \\ \nabla \cdot B &= 0. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Cette approximation entraîne alors le découplage entre le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $B$ .

L'équation  $\nabla \times E = 0$  implique que  $E$  dérive d'un potentiel scalaire  $u$ , défini à une constante près :

$$E = -\nabla u. \quad (1.2.3)$$

D'autre part, le courant  $J$  produit par l'activité neuronale est divisé en deux parties (cf § 1.1.1), le courant source  $J^s$  et le courant volumique  $J^v$ . D'après la loi d'Ohm dans un conducteur passif de conductivité  $\sigma$ , on peut écrire  $J^v = \sigma E$ . Nous avons alors

$$J(x) = J^s(x) + \sigma(x)E(x) = J^s(x) - \sigma(x)\nabla u(x). \quad (1.2.4)$$

En substituant l'équation (1.2.4) dans la troisième équation de (1.2.2) nous obtenons

$$\nabla \times B = \mu_0 J = \mu_0 (J^s - \sigma \nabla u).$$

En appliquant la divergence à cette équation nous avons

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \nabla \cdot (J^s - \sigma \nabla u).$$

Ce qui donne alors l'équation elliptique suivante :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot J^s \equiv -j^s, \quad (1.2.5)$$

où  $j_s$  est la densité de sources ou puits de courant par unité de volume. Par abus de notation, nous écrirons :  $-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = j^s$

Dans un domaine homogène, de conductivité constante, nous obtenons l'équation de Poisson suivante

$$-\sigma \Delta u = j^s. \quad (1.2.6)$$

En tout point de l'espace où il n'y a pas de courants sources, le potentiel scalaire vérifie l'équation de Laplace suivante

$$-\Delta u = 0. \quad (1.2.7)$$

---

<sup>c</sup>H  $m^{-1}$  = Henry . mètre<sup>-1</sup> , F  $m^{-1}$  = Farads . mètre<sup>-1</sup>

### 1.2.2 Problème direct et problème inverse

Le problème direct en EEG consiste à estimer les potentiels électriques recueillis sur le scalp et engendrés par une configuration de sources connue. Ceci nécessite la prise en compte de la géométrie et des propriétés de conduction de tous les tissus cérébraux. Autrement dit, le problème direct en EEG consiste à calculer le potentiel  $u$  sur le scalp dans l'équation (1.2.5), étant donné le courant source  $J^s$  et la conductivité  $\sigma$ . Inversement, en partant d'une répartition du potentiel à la surface du scalp, localiser des générateurs intracérébraux dont l'activité est susceptible de nous expliquer la dite répartition, est le problème inverse en EEG. Il s'agit donc d'estimer le courant source  $J^s$  dans l'équation (1.2.5), étant données la conductivité  $\sigma$  et des mesures du potentiel  $u$  en quelques points sur la surface de la tête.

### 1.2.3 Modélisation des sources de courant

L'activité électrique cérébrale est concentrée dans un petit nombre d'aires dont la dimension est petite comparée à leur distance aux capteurs placés à la surface de la tête. Dans chacune de ces aires, l'activité électrique est assimilée à un groupe de charges négatives et un groupe de charges positives, un puits et une source, qui, vu de loin, se comporte comme un dipôle de courant. Le modèle dipolaire est le plus largement utilisé dans la résolution du problème inverse en EEG, il existe principalement deux variantes de ce modèle (Fig. 1.8) :

- *le dipôle équivalent* (ou *source dipolaire ponctuelle*) : il est caractérisé par une position et un moment <sup>d</sup>, c'est-à-dire 6 paramètres. On aura donc à estimer  $6m$  paramètres si l'on dispose de  $m$  dipôles et si tous les paramètres sont laissés libres. Cependant, certaines méthodes considèrent la position fixe au cours du temps et donc seul le moment reste inconnu et d'autres fixent la position et l'orientation du dipôle et cherchent à trouver son intensité. En général, pour avoir une solution au problème inverse, le nombre de paramètres à estimer ( $6m$ ) ne doit pas excéder celui du nombre des données. Par exemple, les données EEG recueillies dans un montage utilisant 27 électrodes ne pourront être expliquées avec plus de 4 dipôles, qu'en ajoutant des contraintes supplémentaires.
- *la couche dipolaire* (ou *source dipolaire distribuée, diffuse, étendue*) : elle est formée d'un nombre important de dipôles répartis régulièrement dans une partie ou dans la totalité du volume cérébral. Des contraintes anatomiques peuvent alors être introduites en restreignant le volume de recherche à la surface corticale, extraite à partir de l'IRM anatomique. De plus, comme les courants sont émis par les dendrites de neurones disposés perpendiculairement au cortex, l'orientation de chaque dipôle peut être contrainte à être orthogonale à la surface corticale. La position et l'orientation étant alors connues, l'amplitude de chaque dipôle reste la seule inconnue. La difficulté dans ce choix du modèle réside dans le fait que le nombre de dipôles est très grand et que la reconstruction de l'amplitude est alors un problème inverse sous-déterminé.

Bien que l'activité cérébrale ait une structure souvent complexe, il a été prouvé que la plupart des phénomènes observés sur le scalp peuvent être compris en prenant pour modèle de source le dipôle équivalent ou la couche dipolaire. En effet, les solutions du problème inverse trouvées en considérant ces modèles de source étaient en général compatibles avec les connaissances neurophysiologiques des fonctions sensorielles ou motrices. Cependant, des travaux récents utilisent

<sup>d</sup>Le vecteur moment dipolaire indique à la fois l'orientation et l'intensité du dipôle.

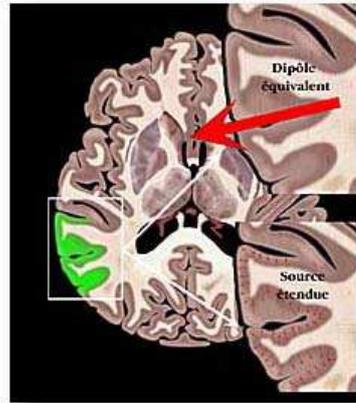


FIG. 1.8 – Modèle de sources - [105]

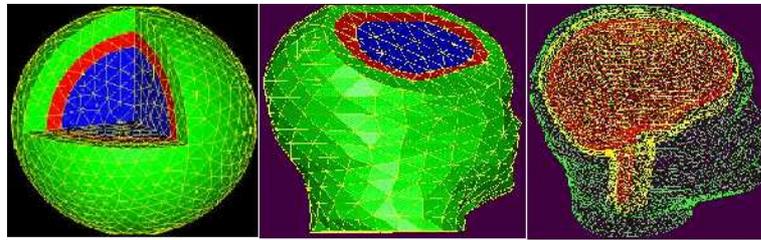


FIG. 1.9 – Les différents modèles de la tête. De gauche à droite : modèle sphérique, modèle réaliste inhomogène, modèle réaliste homogène par couches [73].

des modèles multipolaires d'ordre supérieur à deux, notamment le modèle quadripolaire. L'utilisation de tels modèles a pour but d'assurer une meilleure représentation de l'étendue des régions cérébrales actives [97, 91].

#### 1.2.4 Modélisation de la géométrie de la tête

Deux modèles sont utilisés pour représenter la tête, le modèle sphérique et le modèle réaliste. Le premier modèle est le plus ancien et le plus utilisé. Le deuxième modèle a surtout fait son apparition avec l'avancée des techniques de mesure anatomiques telle que l'IRM et il est proposé selon deux approches : volumique et surfacique (Fig. 1.2.3).

##### Le modèle sphérique

C'est le premier modèle à être employé et le plus simpliste. Il considère la tête comme une suite de sphères concentriques à conductivités homogènes et isotropes. Les modèles les plus simplifiés sont constitués de trois couches : le scalp, l'os et le volume intra-crânien (ou tout simplement le cerveau). Les modèles à 4 couches rajoutent une couche pour le liquide céphalo-rachidien entre l'os et le cerveau, les modèles les plus complets comprennent cinq couches, ils rajoutent la matière grise et la matière blanche. La distance entre les différentes sphères correspond à la distance réelle moyenne (*in-vivo*) entre les tissus représentés. Pour ce modèle, on connaît une solution analytique pour le problème direct (cf chapitre 2). Ainsi, le modèle sphérique sert souvent de référence pour une première validation et évaluation des méthodes numériques. Le modèle à trois couches est le plus utilisé en clinique et en recherche, ce sont Rush et Driscoll en 1968 les premiers à l'avoir étudié [103]. Ils ont utilisé trois sphères concentriques avec des

valeurs typiques de rayons :  $R_{\text{cerveau}} = 8\text{cm}$ ,  $R_{\text{crâne}} = 8.5\text{cm}$  et  $R_{\text{scalp}} = 9.2\text{cm}$  (ou aussi après adimensionnement : 0.87, 0.92 et 1). Des modèles de sphères excentriques ou d'ellipsoïdes ont été également utilisés pour tenter de mieux représenter la géométrie des tissus de la tête [89].

### Le modèle réaliste

Ce modèle représente la géométrie de la tête en adoptant au mieux sa forme réelle. C'est un modèle propre à chaque sujet, sa construction nécessite tout d'abord l'acquisition d'images de l'anatomie du sujet à l'aide de l'IRM. Ensuite, des méthodes de traitement d'images permettent de segmenter les images ainsi obtenues en étiquetant les pixels appartenant aux différentes structures. Une modélisation surfacique ou volumique de ces structures peut alors être réalisée. Ce modèle ne comporte généralement que trois couches car le liquide céphalorachidien et la matière blanche sont difficiles à extraire. Comme il ne permet pas une solution analytique pour le problème direct en EEG, on a ainsi recours aux méthodes numériques (cf chapitre 2).

**Modèle réaliste surfacique** Ce modèle considère la tête comme un ensemble de couches conductrices finies et électriquement homogènes, imbriquées les unes dans les autres. Ainsi seules les interfaces qui limitent ces couches nécessitent une modélisation et sont approchées par des éléments surfaciques ; ce qui implique donc un maillage bidimensionnel. Ce modèle permet la prise en compte des formes non sphériques du cerveau et des variations locales importantes de la géométrie des massifs osseux.

**Modèle réaliste volumique** Ce modèle permet de prendre en compte l'hétérogénéité et l'anisotropie locale des tissus de la tête. Il implique un maillage tridimensionnel de ces tissus qui sont approchés par des éléments volumiques, chaque élément possédant ses propres propriétés de conduction. Cette approche permet la description la plus réaliste de toutes les propriétés géométriques et de conductivité de la tête.

### Comparaison

Certes, la modélisation sphérique n'est qu'une approximation grossière de la géométrie de la tête. Et, il est nécessaire de construire un modèle représentatif pour chaque sujet, d'où l'intérêt des modèles réalistes. Cependant, les modèles réalistes ont également leurs inconvénients. Il est impossible d'identifier la surface de l'os du crâne sur des images IRM, ceci nécessite des techniques de traitement d'images 3D qui interpolent cette surface à partir des surfaces du cortex et du scalp. En outre, le maillage lui-même nécessite le développement de méthodes spécifiques, notamment pour les maillages volumiques. La mise en oeuvre des maillages réalistes est ainsi beaucoup plus contraignante que pour les modèles sphériques, et une bonne description de la géométrie de la tête requiert un grand nombre d'éléments et conduit à des temps de calcul très longs.

#### 1.2.5 Conductivités des tissus de la tête

Les conductivités électriques des différents tissus de la tête sont difficiles à mesurer et elles sont fortement anisotropiques, c'est-à-dire leurs valeurs dépendent de la direction du courant. Les premières mesures chez l'homme ont concerné des tissus morts et ont été effectuées *in vitro* et les premières mesures *in vivo* ont été menées chez l'animal, en particulier sur des chats ou des lapins anesthésiés. Mais ces approches ne sont pas optimales. D'une part, les tissus vivants ne présentent pas les mêmes propriétés de conduction que les tissus morts et d'autre part, il existe certainement une différence entre les conductivités des animaux et celles de l'homme, sans oublier l'importante variabilité d'un être humain à l'autre. Ce n'est que récemment, avec l'essor des

techniques non invasives, telles que la tomographie d'impédance électrique (TIE), qu'on arrive à pratiquer des mesures *in vivo* chez l'homme [53].

Malgré toutes ces différences, il y a des propriétés relatives telles que :

- l'os du crâne a une conductivité beaucoup plus faible que l'ensemble des autres tissus. Un rapport de l'ordre de 80 fois avec celles de la peau et du cerveau, qui sont du même ordre de grandeur, est souvent évoqué [43].
- la conductivité du crâne est anisotrope, sa valeur dans la direction tangentielle est environ 3 fois plus élevée que dans la direction radiale.
- le milieu extérieur (l'air) est toujours considéré comme un isolant parfait, de conductivité nulle ou négligeable.

Pour le modèle de tête à trois couches, on considère souvent deux valeurs de conductivités, une pour le crâne et une pour le cerveau et le scalp. Le modèle le plus utilisé consiste à prendre un rapport de 80 entre la conductivité du cerveau et celle du crâne. Cependant, certains travaux estiment un rapport plus faible, de l'ordre de 15 à 40 [47, 98]. L'estimation des conductivités demeure un problème ouvert et de plus en plus de chercheurs s'intéressent à cette question [25, 34], etc.

Nous dressons dans le tableau (TAB. 1.2) quelques valeurs de conductivité utilisées dans la littérature pour le modèle de tête à trois couches.

Référence	scalp	crâne	cerveau
Hämäläinen et Sarvas [52]	1	de 0.01 à 0.5	1
Schlitt et al. [104]	1	0.01	1
Rush et Driscoll [103]	1	0.0125	1
Cuffin [28]	0.33	0.0041	0.33

TAB. 1.2 – Quelques valeurs de conductivité proposées dans la littérature pour un modèle de tête à trois couches [85].

### 1.3 Modèles considérés

Nous avons présenté dans ce chapitre l'aspect physiologique, médical et mathématique de notre travail qui consiste à localiser les sources de courant qui sont à l'origine des décharges électriques, telles que l'épilepsie. En d'autres termes, il s'agit de résoudre un problème inverse en EEG.

Dans le contexte de cette thèse, nous travaillons dans le cadre suivant :

- sources de courant modélisées en dipôles équivalents,

- 
- modèle de tête à trois couches : scalp, os, cerveau,
  - les conductivités du scalp et du cerveau sont prises égales à 1, celle du crâne à  $\frac{1}{80}$ ,
  - les maillages sont sphériques et réalistes surfaciques.

## Chapitre 2

# Problème direct : résolution par la méthode des éléments frontières

Le problème direct en EEG consiste à déterminer le potentiel électrique généré par des sources de courant situées à l'intérieur du cerveau, étant connues les sources, la géométrie de la tête et les conductivités électriques. Dans le contexte de notre travail, résoudre le problème direct n'est pas un but en soi mais constitue une étape pour la résolution du problème inverse de localisation des sources électriques. En effet, ce problème nous servira, d'une part, à reconstruire des mesures simulées afin de valider les méthodes développées, et d'autre part, il interviendra dans la définition de la fonctionnelle coût présentée au chapitre 5.

Pour le problème direct en EEG, ainsi que pour d'autres problèmes directs rencontrés dans le reste de ce manuscrit, nous sommes amenés à calculer les valeurs du potentiel et du flux uniquement sur les interfaces qui séparent les différentes couches homogènes de la tête. Dans ce contexte, la méthode des éléments frontières (BEM) semble être un bon candidat pour résoudre ces problèmes.

Dans ce chapitre, nous présentons la mise en équations du problème direct en EEG, décrivons brièvement la méthode des éléments frontières et présentons la formulation intégrale en potentiel de simple et double couche utilisée pour résoudre tous les problèmes directs rencontrés dans ce travail. Nous concluons ce chapitre en donnant comme application la résolution du problème direct en EEG par cette méthode.

Notons que, l'objet de la résolution du problème direct en EEG par la méthode des éléments frontières n'est pas de présenter une formulation concurrente à celles qui existent déjà et dont la littérature est abondante. Mais le but est de choisir une formulation convenable à tous les problèmes directs pour les résoudre numériquement avec une bonne précision.

## 2.1 Problème direct en EEG

### 2.1.1 Mise en équations

La tête est assimilée à un volume conducteur fini et inhomogène noté  $\Omega$ . Nous supposons le domaine  $\Omega$  un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^3$  constitué de trois sous-domaines emboîtés  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , qui représentent respectivement le cerveau, le crâne et le scalp (Fig. 2.1). Dans chaque domaine  $\Omega_i$ , la conductivité  $\sigma_i$  est supposée constante. Nous notons  $\Gamma_i$  l'interface entre  $\Omega_i$  et  $\Omega_{i+1}$  pour  $i = 1, 2$  et  $\Gamma_3 = \Gamma = \partial\Omega$ . Ces frontières que nous supposons suffisamment régulières sont telles

que,

$$\begin{cases} \partial\Omega_1 = \Gamma_1 \\ \partial\Omega_i = \Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i & i = 2, 3 \\ \Gamma_{i-1} \cap \Gamma_i = \emptyset & i = 2, 3. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Par ailleurs, nous désignons par  $\vec{\nu}$  le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur comme le montre la figure (Fig. 2.1).

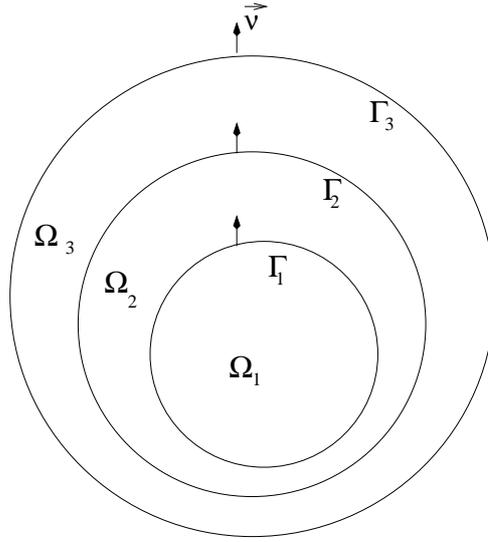


FIG. 2.1 – Le domaine de la tête

L'activité électromagnétique dans la tête est régie par les équations de Maxwell qui, dans le cadre d'une approximation quasi-statique, mènent à l'équation elliptique suivante (cf chapitre 1),

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F \quad (2.1.2)$$

où  $F = -\nabla \cdot J^s$  est le terme source de courant.

En outre, la non conductivité de l'air impose que le flux soit nul sur la surface du scalp  $\Gamma_3$ . Donc, le potentiel électrique  $u$  vérifie dans le domaine de la tête le système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Par ailleurs, comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, nous prenons comme modèle de sources, les dipôles équivalents, dont nous désignons respectivement par  $m$ ,  $S_j$  et  $q_j$  le nombre, les positions et les moments. Puisque les sources sont supposées confinées à l'intérieur du cerveau, alors les  $S_j$  sont dans  $\Omega_1$ . Le terme source  $F$  s'écrit donc sous la forme

$$F = \sum_{j=1}^m q_j \vec{\nabla} \delta_{S_j}. \quad (2.1.4)$$

Aux interfaces entre les domaines  $\Omega_i$ , le potentiel électrique  $u$  est continu ainsi que la quantité

$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}$ <sup>a</sup>, ce qui se traduit par

$$[u]_{|\Gamma_i} = \left[ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{|\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

où  $[h]_{|\Gamma_i}$  désigne le saut de la fonction  $h$  à travers la surface  $\Gamma_i$  et s'écrit comme suit

$$[h]_{|\Gamma_i}(x) = h^-(x) - h^+(x) \quad (2.1.5)$$

avec

$$\begin{aligned} h^-(x) &= \lim_{\beta \rightarrow 0^-} h(x + \beta \vec{\nu}) \\ h^+(x) &= \lim_{\beta \rightarrow 0^+} h(x + \beta \vec{\nu}) \end{aligned}$$

Tenant compte de ces propriétés de continuité, des propriétés de la géométrie, que  $F$  est à support dans  $\Omega_1$  et que les conductivités sont supposées constantes dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$ , le système (2.1.3) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta u & = F & \text{dans } \Omega_1 \\ -\Delta u & = 0 & \text{dans } \Omega_2 \cup \Omega_3 \\ [u] = \left[ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] & = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

**Remarque 2** Dans le paragraphe suivant nous étudions la formulation variationnelle du problème défini ci-dessus pour le cas où  $\sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$  sur  $\Gamma_3$ , avec  $g$  quelconque dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ . Ensuite, nous remplacerons  $g$  par 0 dans le reste de ce chapitre.

### 2.1.2 Formulation variationnelle

Comme la source  $F$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^3)$  pour  $s < -\frac{5}{2}$ , une formulation variationnelle du problème (2.1.6) n'est pas possible, néanmoins, nous procédons de la manière suivante.

Nous considérons la solution fondamentale  $G$  de l'opérateur  $-\Delta$ , notée fonction de Green et définie par

$$-\Delta G = \delta_0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

et qui est donnée explicitement par

$$G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (2.1.7)$$

Ici  $|x|$  désigne la norme euclidienne du vecteur  $x$  et  $\delta_0$  la fonction de Dirac à l'origine.

Nous introduisons ensuite, par convolution, la fonction

$$\tilde{u}(x) = \left( \frac{1}{\sigma_1} \right) (G * F)(x) \quad (2.1.8)$$

qui peut être explicitée comme suit

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \frac{q_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3} \quad (2.1.9)$$

<sup>a</sup>la continuité de la quantité  $\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}$  à travers les interfaces provient conjointement de la continuité du courant électrique et de l'approximation quasi-statique qui donne  $\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\nu \cdot (\sigma E)$ .

et dont nous vérifions qu'elle est solution dans  $\mathbb{R}^3$  de l'équation

$$-\sigma_1 \Delta \tilde{u} = F.$$

Et enfin nous posons

$$w = u - \tilde{u}, \quad (2.1.10)$$

dont nous vérifions qu'elle est solution du système

$$\begin{cases} -\sigma_i \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega_i, i = 1, 2, 3 \\ [w] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w}{\partial \nu} = g - \sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

La résolution du problème direct (2.1.6) revient donc à celle de (2.1.11). Comme la fonction  $\tilde{u}$  est analytique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup S_j$  et  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$  une formulation variationnelle pour le problème (2.1.11) est possible.

### Formulation variationnelle du problème (2.1.11)

Par multiplication de la première équation du système (2.1.11) par  $v \in H^1(\Omega)$ , par intégration par parties et par la formule de Green dans chaque  $\Omega_i$ , nous obtenons

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sigma_i \nabla w \nabla v \, dx = \sum_{i=1}^2 (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} v \, ds + \int_{\Gamma_3} (g - \sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}) v \, ds \quad (2.1.12)$$

La formulation variationnelle du problème (2.1.11) est donc la suivante,

déterminer  $w \in H^1(\Omega)$  telle que

$$a(w, v) = \ell(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \quad (2.1.13)$$

où

$$a(w, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sigma_i \nabla w(x) \nabla v(x) \, dx$$

et

$$\ell(v) = \sum_{i=1}^2 (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x) v(x) \, ds(x) + \int_{\Gamma_3} \left( g(x) - \sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x) \right) v(x) \, ds(x)$$

Comme  $\sigma_i > 0$ , la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et coercive sur l'espace quotient  $H^1(\Omega)/R \times H^1(\Omega)/R$ . Par conséquent le problème variationnel ci-dessus est bien posé dans  $H^1(\Omega)/R$  si le second membre est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)/R$ , soit si  $\ell(1) = 0$ . Nous allons montrer que ceci est possible sous la condition de compatibilité

$$\int_{\Gamma_3} g(x) \, ds(x) = 0. \quad (2.1.14)$$

Pour la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 1** Soit  $y$  un point quelconque de  $\Omega_1$  et  $q$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Posons  $u_0$  la solution de  $-\Delta u_0 = q \cdot \nabla_x \delta_y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_x}(x) ds(x) = 0, \quad \forall x \neq y \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.15)$$

**Preuve.** Nous avons

$$u_0(x, y) = G * (q \cdot \nabla_x \delta_y) = q \cdot \nabla_x (G * \delta_y) = q \cdot \nabla_x G(x - y) = -q \cdot \nabla_y G(x - y), \quad \forall x \neq y$$

En intégrant sur  $\Gamma_1$  nous obtenons

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_x}(x) ds(x) = -q \cdot \nabla_y \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x - y) ds(x) = 0, \quad \forall x \neq y$$

d'après la formule de l'angle solide décrite ultérieurement (2.2.20).  $\square$

Nous revenons à la preuve de  $\ell(1) = 0$ . En effet, d'une part, par application de la formule de Green dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  aux fonctions  $\tilde{u}$  et 1, nous obtenons

$$\int_{\Gamma_3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x) ds(x) = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x) ds(x) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x) ds(x). \quad (2.1.16)$$

Et, d'autre part, en appliquant la formule (2.1.15) à la fonction  $\tilde{u}$  donnée par (2.1.8), nous obtenons

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_x}(x) ds(x) = 0 \quad (2.1.17)$$

D'où

$$\ell(1) = \int_{\Gamma_3} g(x) ds(x) = 0$$

d'après la relation de compatibilité (2.1.14).

Le théorème de Lax-Milgram permet donc de conclure à l'existence et l'unicité d'une fonction  $w$  dans  $H^1(\Omega)/R$  solution du problème (2.1.11) et par suite le problème (2.1.6) est bien posé. Par ailleurs, comme la fonction  $\tilde{u}$  est analytique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus S_j$ , la trace sur  $\Gamma_3$  de la fonction  $u$  est bien définie dans l'espace quotient  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)/R$ .

Notons que dans le cas où le flux  $g = 0$ , la condition de compatibilité (2.1.14) est satisfaite.

### 2.1.3 Méthodes de résolution du problème direct en EEG

Les méthodes de résolution du problème direct s'appuient essentiellement sur le modèle de la tête considéré. Comme nous l'avons déjà expliqué au premier chapitre, il existe plusieurs modèles pour représenter la géométrie de la tête : le modèle sphérique, le modèle réaliste volumique et le modèle réaliste surfacique. Dans le cas du modèle sphérique le potentiel peut être calculé analytiquement. Par contre, la résolution du problème direct avec les modèles réalistes n'est réalisable qu'à l'aide des méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies pour le modèle réaliste volumique et la méthode des éléments frontières pour le modèle réaliste surfacique.

Dans le cadre d'un modèle sphérique, le potentiel électrique peut être calculé par une méthode analytique. Cette méthode consiste à décomposer la solution  $u$  en une partie régulière  $u_r$  qui tient compte des conditions de continuité aux interfaces, et une partie singulière  $u_s$  qui tient compte

du terme source (comme dans (2.1.10)). Ensuite, on transforme en coordonnées sphériques et on décompose ces deux parties solutions sur des bases d'harmoniques sphériques permettant de tirer parti de la symétrie du problème et d'établir des formules analytiques. Enfin, on rassemble les termes pour obtenir la solution  $u$  qui sera alors exprimée en une série infinie convergente qu'il faut tronquer ou approximer. Les coefficients de cette série seront déterminés grâce aux conditions sur les interfaces, voir par exemple [54, 93, 89].

Dans le cas du modèle réaliste volumique de la tête, on a recours aux méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (MEF) et celle des différences finies (MDF). La première a été utilisée pour la première fois en 1983 par *Sepulveda & al* [107] dans le but de résoudre le problème direct en EEG sur un modèle bidimensionnel. Ce n'est qu'aux débuts des années 90 que cette méthode fût développée en 3D avec Nunez [117]. Et depuis, elle a été étudiée par beaucoup de chercheurs, notamment [110, 84], ainsi que les références qui y sont citées.

La MDF constitue une alternative de la MEF pour la résolution du problème direct sur des maillages réalistes volumiques. Elle fût la première méthode employée pour mettre au point un modèle réaliste en 1972. Plus récemment et sans doute grâce à l'essor des moyens informatiques, puissance de calcul et capacité de mémoire, elle a fait l'objet de plusieurs travaux et plusieurs approches ont été proposées. Certains schémas se basent sur la loi de Kirchhoff<sup>b</sup> ou sur des approches de type volumes finis [54, 55].

Dans le cas du modèle réaliste surfacique, on a recours à la méthode des éléments frontières qui consiste à calculer les grandeurs physiques d'un problème à partir de leurs valeurs sur la frontière et non pas dans le domaine. Elle s'applique dans le cas où le domaine est partitionné en un ensemble d'ouverts de caractéristiques physiques constantes séparés par des interfaces assez régulières. Cette méthode, encore appelée méthode des équations intégrales, méthode des éléments de surface, méthode des intégrales de frontière, méthode des intégrales de surface, est surtout reconnue par son terme anglais Boundary Element Method (BEM). Utilisée dans plusieurs domaines (électromagnétisme, acoustique, mécanique, milieu pétrolier, ...), elle a été introduite pour la première fois dans la résolution du problème direct de l'EEG en 1967 par Geselowitz [44], et depuis elle est adaptée par de plus en plus d'équipes [1, 2, 27, 89, 86, 51] et est même disponible dans plusieurs logiciels commerciaux, comme par exemple le logiciel ASA de la société ANT Software.

### Comparaison entre les différentes méthodes numériques

Dans ce paragraphe, nous comparons entre la MEF, la MDF et la BEM. Cette comparaison porte sur la construction du maillage, la prise en compte de l'hétérogénéité électrique des tissus de la tête, la simplicité d'implémentation et les résultats de convergence déjà connus.

1. **Construction du maillage.** La construction du maillage constitue une difficulté importante pour toutes ces méthodes, une bonne description de la géométrie de la tête requiert un grand nombre d'éléments et conduit à des temps de calcul très longs. Le maillage pour la BEM est simple, il s'agit d'une triangulation d'une surface. Pour la MEF, le maillage est formé par des tétraèdres et donc plus difficile à construire. Cependant, pour la MDF, l'étape de construction du maillage peut être évitée puisqu'elle utilise une grille régulière formée à partir des voxels d'images IRM. Ceci constitue alors un principal avantage pour la MDF sur la MEF et la BEM.
2. **Prise en compte des propriétés de conductivité.** Un deuxième point important dans la résolution du problème direct en EEG est la prise en compte de l'anisotropie et

---

<sup>b</sup>L'énoncé de cette loi est : *La somme des courants entrants et des courants sortants en chaque noeud de la grille est nulle.*

de l'hétérogénéité électriques de chacun des tissus, en particulier la forte anisotropie de l'os. Ceci constitue un point faible pour la BEM puisqu'elle exige un domaine homogène par morceaux. Par contre, la MEF et la MDF permettent une modélisation précise des propriétés de conductivité des différents tissus. Mais ce point positif pour la MEF et la MDF reste limité et pas totalement exploité du fait du manque de connaissance des conductivités mesurées in-vivo.

3. **Définition des schémas et résolution du système linéaire obtenu.** La définition du schéma de la MDF est assez délicat près des surfaces de discontinuité [54], alors que le schéma numérique de la BEM est assez simple et celui de la MEF est également simple si le maillage suit les surfaces entre les différents sous-domaines [54].

Par ailleurs, les trois méthodes amènent à la résolution d'un système linéaire de la forme  $AU = b$ . Pour la MEF et la MDF, nous obtenons une grande matrice creuse, alors que la BEM donne une matrice pleine.

4. **Etude de la convergence.** Pour la MEF, l'étude de la convergence est quasi-systématique, celle de la BEM y est similaire. Par contre, l'étude de la convergence globale de la MDF est délicate et peut poser des difficultés théoriques [54].

Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients. La MEF semble poser de réels problèmes au niveau du maillage volumique qui est nettement plus compliqué à construire qu'un maillage surfacique, et entre la MDF et la BEM c'est cette dernière qui semble être la plus simple à implémenter. En outre, la BEM ramène les calculs d'un problème posé en  $3D$  à des surfaces en  $2D$ , ce qui donne un gain non négligeable au niveau du temps des calculs et de la mémoire. Cependant, cette méthode souffre de la non prise en compte de l'hétérogénéité et de l'anisotropie. Pour résoudre ce problème, la BEM peut être couplée avec des méthodes d'éléments finis ou volumes finis, afin de tirer les avantages de chacune des méthodes. Ce couplage a été exploité dans plusieurs domaines, sur cela nous citons les références suivantes [61, 26, 60], etc.

Pour résoudre le problème direct en EEG, nous sommes amenés à résoudre le problème direct à condition de Neumann (2.1.11). Pour la résolution de ce problème, ainsi que d'autres problèmes directs considérés dans la suite de ce mémoire, nous avons opté pour la BEM. Ce choix est motivé d'une part par l'homogénéité par couche du domaine  $\Omega$  considéré (tête), d'autre part, seules les valeurs du potentiel et du flux sur les interfaces  $\Gamma_j$  nous seront nécessaires pour tous les problèmes considérés dans la suite.

Nous décrivons dans ce qui suit la méthode des équations intégrales et présentons la résolution du problème (2.1.11).

## 2.2 Méthode des équations intégrales de frontières (BEM)

Nous donnons ici un bref rappel sur la théorie des équations intégrales, pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [71, 95].

Nous présentons la formule de représentation intégrale, rappelons la relation d'angle solide, décrivons le potentiel de simple couche et le potentiel de double couche et donnons quelques propriétés pour les opérateurs intégraux utilisés dans la suite.

### **Théorème 1 (Formule de représentation intégrale)**

Soit  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial D$  suffisamment régulière. Soit  $u \in H^1(D)$  une

fonction harmonique. Soit

$$C(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in D \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \partial D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2.18)$$

alors

$$C(y)u(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu_x}(x)G(x-y) ds(x) - \int_{\partial D} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) ds(x) \quad (2.2.19)$$

### 2.2.1 Relation de l'angle solide

Nous rappelons que la solution fondamentale  $G$  (2.1.7) satisfait la relation de l'angle solide suivante [71],

$$\int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) ds(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } y \in D \\ -\frac{1}{2} & \text{si } y \in \partial D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2.20)$$

### 2.2.2 Potentiels de simple et de double couche

Nous désignons, respectivement, par potentiel de simple et de double couche de densité  $\eta \in L^2(\partial D)$  les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} u_S(y) \equiv S\eta(y) &= \int_{\partial D} \eta(x)G(x-y) ds(x), \quad y \notin \partial D \\ u_D(y) \equiv D\eta(y) &= \int_{\partial D} \eta(x)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x-y) ds(x), \quad y \notin \partial D \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Le potentiel de simple couche  $u_S$  est continu à travers la frontière  $\partial D$  tandis que sa trace normale vérifie les relations de saut suivantes

$$\frac{\partial u_S^-}{\partial \nu}(y) = \frac{\eta(y)}{2} + \int_{\partial D} \eta(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) ds(x) \quad (2.2.22)$$

$$\frac{\partial u_S^+}{\partial \nu}(y) = -\frac{\eta(y)}{2} + \int_{\partial D} \eta(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) ds(x) \quad (2.2.23)$$

Quant au potentiel de double couche c'est sa trace normale qui est continue à travers la frontière  $\partial D$ ,

$$\frac{\partial u_D}{\partial \nu}(y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} \int_{\partial D} \eta(x)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x-y) ds(x)$$

tandis que sa trace vérifie les relations de saut suivantes

$$u_D^-(y) = -\frac{\eta(y)}{2} + \int_{\partial D} \eta(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) ds(x) \quad (2.2.24)$$

$$u_D^+(y) = \frac{\eta(y)}{2} + \int_{\partial D} \eta(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) ds(x) \quad (2.2.25)$$

### 2.2.3 Opérateurs intégraux

Pour simplifier l'écriture et dans le cas du domaine  $\Omega$  (tête), nous noterons désormais les différents opérateurs intégraux de la manière suivante, pour  $i, j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
S_{i,j} \eta(y) &= \int_{\Gamma_j} G(x-y) \eta(x) ds(x), & y \in \Gamma_i \\
D_{i,j} \eta(y) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \eta(x) ds(x), & y \in \Gamma_i \\
D_{i,j}^* \eta(y) &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x-y) \eta(x) ds(x), & y \in \Gamma_i \\
N_{i,j} \eta(y) &= \frac{\partial}{\partial \nu_y} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \eta(x) ds(x), & y \in \Gamma_i
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Ces opérateurs intégraux présentent des singularités pour  $x$  voisin de  $y$ ,  $x$  et  $y$  sur  $\Gamma_i$  :

$$\begin{aligned}
S_{i,i} &: \frac{1}{|x-y|} &= O(|x-y|^{-1}) \\
D_{i,i} &: \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) &= \frac{(x-y, \nu_x)}{|x-y|^3} = O(|x-y|^{-1}) \\
D_{i,i}^* &: \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) &= \frac{(x-y, \nu_y)}{|x-y|^3} = O(|x-y|^{-1}) \\
N_{i,i} &: \frac{\partial^2}{\partial \nu_y \partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) &= \frac{(\nu_x, \nu_y)}{|x-y|^3} - 3 \frac{(x-y, \nu_x)(x-y, \nu_y)}{|x-y|^5} = O(|x-y|^{-3})
\end{aligned}$$

Les noyaux de  $S_{i,i}$ ,  $D_{i,i}$  et  $D_{i,i}^*$  sont intégrables, par contre le noyau de  $N_{i,i}$  ne l'est pas.

### 2.2.4 Quelques propriétés des opérateurs de potentiel de simple et double couche

Dans la suite de notre travail nous aurons besoin uniquement des propriétés des opérateurs  $S_{i,j}$  et  $D_{i,j}$ , dont nous rappelons quelques unes ici [71],

- Pour  $i \neq j$ , les frontières  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  sont disjointes et donc  $S_{i,j}$  et  $D_{i,j}$  sont des opérateurs à noyau continu et par suite sont compacts,
- Pour  $i = j$ , l'opérateur  $D_{i,i}$  est continu  $L^2(\Gamma_i) \longrightarrow H^1(\Gamma_i)$  et comme l'injection  $H^1 \hookrightarrow L^2$  est compacte, alors  $D_{i,i} : L^2(\Gamma_i) \longrightarrow L^2(\Gamma_i)$  est compact,
- $S_{i,j} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$  est un isomorphisme.

## 2.3 Résolution du problème direct en EEG par la BEM

La méthode des équations intégrales a été utilisée par plusieurs chercheurs pour résoudre le problème direct en EEG. Une littérature abondante existe à ce sujet, tels que [44, 56, 72, 1, 27, 89, 86],  $\dots$ . La formulation la plus fréquente est celle introduite par *Geselowitz* [44], c'est

une formule de représentation par potentiel de double couche. Les équations intégrales obtenues sont :

$$\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} u(y) = \sigma_1 \tilde{u} + \sum_k (\sigma_{k+1} - \sigma_k) \int_{\Gamma_k} \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x-y) u(x) ds_k(x) , \quad y \in \Gamma_i , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.27)$$

où  $\tilde{u}$  est défini par (2.1.8) et  $u$  est le potentiel électrique solution du problème direct.

D'autre part, une formulation symétrique en simple et double couche a été utilisée récemment par *G. Adde* [1]. Nous présentons ici brièvement la démarche suivie pour obtenir cette formulation.

Pour chaque  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), il définit  $V_{\Omega_i} = u - \frac{1}{\sigma_i} v_{\Omega_i}$  dans  $\Omega_i$  et  $V_{\Omega_i} = -\frac{1}{\sigma_i} v_{\Omega_i}$  dans le complémentaire de  $\Omega_i$ , avec  $v_{\Omega_i}$  est solution de  $-\Delta v_{\Omega_i} = f_{\Omega_i}$  dans  $\Omega_i$  et  $f_i$  est telle que  $F = \sum_{i=1}^3 f_{\Omega_i}$ ,  $F$  étant le terme source.

Il écrit la formule de représentation (2.2.19) sur  $\Gamma_i$  pour la fonction  $V_{\Omega_j}$  une fois en  $y \in \Omega_i$  et une fois en  $y \in \Omega_{i+1}$ , puis il retranche les deux équations obtenues<sup>c</sup>. Il fait de même pour le flux en utilisant une formule de représentation pour la dérivée normale [1].

Les équations obtenues sont les suivantes, pour  $i = 1, 2, 3$  avec les notations  $p_i = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\Gamma_i}^-$  et  $u_i = u|_{\Gamma_i}$  :

$$\begin{aligned} D_{i,i-1} u_{i-1} - 2D_{i,i} u_i + D_{i,i+1} u_{i+1} - \frac{1}{\sigma_i} S_{i,i-1} p_{i-1} + \left(\frac{1}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma_{i+1}}\right) S_{i,i} p_i - \frac{1}{\sigma_{i+1}} S_{i,i+1} p_{i+1} \\ = \frac{1}{\sigma_{i+1}} (v_{\Omega_{i+1}})_{\Gamma_i} - \frac{1}{\sigma_i} (v_{\Omega_i})_{\Gamma_i} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i N_{i,i-1} u_{i-1} - (\sigma_i + \sigma_{i+1}) N_{i,i} u_i + \sigma_{i+1} N_{i,i+1} u_{i+1} - D_{i,i-1}^* p_{i-1} + 2D_{i,i}^* p_i - D_{i,i+1}^* p_{i+1} \\ = (\partial_\nu v_{\Omega_{i+1}})_{\Gamma_i} - (\partial_\nu v_{\Omega_i})_{\Gamma_i} \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

La matrice obtenue après discrétisation est symétrique et diagonale par blocs<sup>d</sup>.

Nous avons également choisi de travailler avec la formule de représentation de simple et double couche (2.2.19) pour la résolution du problème (2.1.11) dont la solution détermine le potentiel électrique  $u$ . Mais notre formulation est différente de celle exposée ci-dessus.

Dans ce qui suit, nous présentons la résolution du problème (2.1.11) et montrons l'équivalence entre ce problème et le système d'équations intégrales obtenu. Les techniques de résolution et de discrétisation présentées ici pour ce problème seront utilisées ultérieurement pour d'autres problèmes directes.

Désormais, dans la suite de ce chapitre le flux  $g$  défini sur  $\Gamma_3$  sera pris égal à 0.

<sup>c</sup>rappelons que  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_{i+1} = \Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ .

<sup>d</sup>elle contient quatre diagonales blocs pour un modèle de trois couches.

### 2.3.1 Formulation en équations intégrales

Nous appliquons le théorème 1 à chacune des restrictions  $w_i$  de  $w$  sur  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nous obtenons ainsi les équations suivantes

$$C_1(y)w_1(y) = \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_1(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \quad (2.3.30)$$

$$\text{avec } C_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega_1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_2(y)w_2(y) &= \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial w_2^-}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_2(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x) \\ &- \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial w_2^+}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_2(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

$$\text{avec } C_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega_2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_3(y)w_3(y) &= \int_{\Gamma_3} \left( \frac{\partial w_3^-}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_3(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x) \\ &- \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial w_3^+}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_3(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

$$\text{avec } C_3(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega_3 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la simplicité d'écriture, nous posons en tenant compte des conditions de transmission (2.1.11),

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\sigma_1 - \sigma_2)w_1|_{\Gamma_1} = (\sigma_1 - \sigma_2)w_2|_{\Gamma_1} \\ \varphi_2 &= (\sigma_2 - \sigma_3)w_2|_{\Gamma_2} = (\sigma_2 - \sigma_3)w_3|_{\Gamma_2} \\ \varphi_3 &= \sigma_3 w_3|_{\Gamma_3} \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \left[ \sigma \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_1} = (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} \\ p_2 &= \left[ \sigma \frac{\partial w_2}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_2} = (\sigma_3 - \sigma_2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}|_{\Gamma_2} \\ p_3 &= \sigma_3 \frac{\partial w_3^-}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Nous multiplions l'équation (2.3.30) par  $\sigma_1$ , l'équation (2.3.31) par  $\sigma_2$  et l'équation (2.3.32) par  $\sigma_3$ . En les sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}^3, \\ \sigma_1 C_1(y) w_1(y) + \sigma_2 C_2(y) w_2(y) + \sigma_3 C_3(y) w_3(y) = \int_{\Gamma_1} G(x-y) p_1(x) ds(x) + \int_{\Gamma_2} G(x-y) p_2(x) ds(x) \\ + \int_{\Gamma_3} G(x-y) p_3(x) ds(x) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_1(x) ds(x) \\ - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_2(x) ds(x) - \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_3(x) ds(x) \end{aligned}$$

En écrivant l'équation ci-dessus respectivement pour  $y \in \Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nous obtenons sur  $\Gamma_1$

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} w_1(y) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_1(x) ds(x) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_2(x) ds(x) \\ + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_3(x) ds(x) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} G(x-y) p_j(x) ds(x) \end{aligned}$$

sur  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} w_2(y) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_1(x) ds(x) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_2(x) ds(x) \\ + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_3(x) ds(x) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} G(x-y) p_j(x) ds(x) \end{aligned}$$

sur  $\Gamma_3$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_3}{2} w_3(y) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_1(x) ds(x) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_2(x) ds(x) \\ + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \varphi_3(x) ds(x) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} G(x-y) p_j(x) ds(x) \end{aligned}$$

Posons maintenant  $\psi_i(y) = \sum_{j=1}^3 S_{i,j} p_j(y)$ ,  $y \in \Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.35)$$

et

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \frac{I_1}{2} + D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} \\ D_{2,1} & \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \frac{I_2}{2} + D_{2,2} & D_{2,3} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & \frac{I_3}{2} + D_{3,3} \end{bmatrix}$$

où  $I_j$  désigne l'opérateur identité sur  $\Gamma_j$ .

Le système d'équations intégrales là-dessus se réécrit donc sous la forme

$$\mathcal{A}\Phi = \Psi. \quad (2.3.36)$$

Dans ce qui suit, nous étudions l'équivalence entre ce système et le problème (2.1.11) au moyen de l'alternative de Fredholm.

### Etude du système (2.3.36)

D'après les propriétés de compacité déjà évoquées des opérateurs  $D_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , l'opérateur  $\mathcal{A} : L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_3)$  est de type Fredholm, considéré comme perturbation compacte de l'identité. Nous étudions donc le noyau de son adjoint  $\mathcal{A}^*$  afin de préciser, selon l'alternative de Fredholm, les conditions éventuelles d'orthogonalité que doit satisfaire le second membre de (2.3.36).

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in Ker(\mathcal{A}^*)$ ,

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right) \frac{I_1}{2} + D_{1,1}^* & D_{1,2}^* & D_{1,3}^* \\ D_{2,1}^* & \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}\right) \frac{I_2}{2} + D_{2,2}^* & D_{2,3}^* \\ D_{3,1}^* & D_{3,2}^* & \frac{I_3}{2} + D_{3,3}^* \end{bmatrix}$$

Nous considérons la fonction harmonique suivante

$$\theta(y) = \int_{\Gamma_1} G(x-y)\alpha(x)ds(x) + \int_{\Gamma_2} G(x-y)\beta(x)ds(x) + \int_{\Gamma_3} G(x-y)\gamma(x)ds(x) \quad , \quad y \notin \cup \Gamma_i$$

dont les traces normales sur  $\Gamma_1$  vérifient les relations suivantes

$$\frac{\partial \theta^-}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \frac{\alpha}{2} + D_{1,1}^* \alpha + D_{1,2}^* \beta + D_{1,3}^* \gamma \quad (2.3.37)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = -\frac{\alpha}{2} + D_{1,1}^* \alpha + D_{1,2}^* \beta + D_{1,3}^* \gamma \quad (2.3.38)$$

ce qui implique

$$\left[ \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_1} = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \alpha + (\sigma_1 - \sigma_2) D_{1,1}^* \alpha + (\sigma_1 - \sigma_2) D_{1,2}^* \beta + (\sigma_1 - \sigma_2) D_{1,3}^* \gamma$$

Comme  $(\alpha, \beta, \gamma) \in Ker(\mathcal{A}^*)$ , nous avons

$$\left[ \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_1} = 0 \quad (2.3.39)$$

De façon similaire sur  $\Gamma_2$ , nous obtenons

$$\left[ \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_2} = 0 \quad (2.3.40)$$

Par ailleurs, le calcul de la trace normale intérieure de  $\theta$  sur  $\Gamma_3$  donne

$$\frac{\partial \theta^-}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = D_{3,1}^* \alpha + D_{3,2}^* \beta + \frac{\gamma}{2} + D_{3,3}^* \gamma \quad (2.3.41)$$

et par suite

$$\frac{\partial \theta^-}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_3} = 0. \quad (2.3.42)$$

Puisque la fonction  $\theta$  est somme des potentiels de simple couche, elle est continue à travers les surfaces  $\Gamma_i$ , c.à.d.  $[\theta]_{\Gamma_i} = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Par conséquent,  $\theta$  est solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \theta) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.3.43)$$

Donc  $\theta = C$  ( $C$  étant une constante) dans  $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \cup \Omega_3$  et par suite ses traces normales sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont nulles.

Par soustraction des équations (2.3.37) et (2.3.38), nous obtenons

$$\alpha = 0$$

et de façon similaire pour  $\Gamma_2$ , nous obtenons

$$\beta = 0.$$

Ainsi  $\theta(y) = \int_{\Gamma_3} G(x-y)\gamma(x)ds(x)$  est constante dans  $\Omega$  et donc, c'est l'unique solution du problème extérieur suivant

$$\begin{cases} -\Delta \theta = 0 & \text{dans } \overline{\Omega}^c \\ \theta = C & \text{sur } \Gamma_3 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = -\gamma & \text{sur } \Gamma_3 \\ \theta = o\left(\frac{1}{r}\right) & \text{quand } r = |y| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.3.44)$$

Nous introduisons maintenant la fonction  $\theta_0$  solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta \theta_0 = 0 & \text{dans } \overline{\Omega}^c \\ \theta_0 = 1 & \text{sur } \Gamma_3 \\ \theta_0 = o\left(\frac{1}{r}\right) & \text{quand } r = |y| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.3.45)$$

Par unicité nous déduisons que  $\theta = C\theta_0$  dans  $\overline{\Omega}^c$  et par suite  $\gamma = -\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = -C\frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} = -C\bar{\gamma}$  où nous avons posé  $\bar{\gamma} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu}$ .

Nous venons donc de montrer que  $Ker(\mathcal{A}^*)$  est un sous espace vectoriel de dimension 1 de  $L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_3)$  engendré par  $(0, 0, \bar{\gamma})$ . Par conséquent le système (2.3.36) admet une solution si et seulement si son second membre est orthogonal au noyau de  $\mathcal{A}^*$ , ce qui signifie

$$\int_{\Gamma_3} \bar{\gamma}(y) \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} p_i(x) G(x-y) ds(x) ds(y) = 0,$$

soit

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} p_i(x) \int_{\Gamma_3} \bar{\gamma}(y) G(x-y) ds(y) ds(x) = 0 \quad (2.3.46)$$

Nous vérifions que le potentiel de simple couche  $\int_{\Gamma_3} \bar{\gamma}(y) G(x-y) ds(y)$  vaut  $-1$  pour  $x \in \Omega$ , par conséquent (2.3.46) se réduit à

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} p_i(x) ds(x) = 0,$$

ce qui est clairement vérifiée d'après (2.1.16) et (2.1.17).

En conclusion, le système (2.3.36) admet une unique solution dans  $L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_3) / Ker(\mathcal{A})$ .

### Caractérisation de $Ker(\mathcal{A})$ et équivalence des problèmes (2.1.11) et (2.3.36)

En utilisant les relations de l'angle solide (2.2.20), nous déduisons que

$$X = (\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3) \in Ker(\mathcal{A})$$

Par ailleurs comme  $ker(\mathcal{A})$  et  $ker(\mathcal{A}^*)$  sont de même dimension et que ce dernier est de dimension égale à 1, nous déduisons que le noyau de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est le sous espace vectoriel de  $L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_3)$  engendré par le vecteur  $X$ . Par conséquent, d'après (2.3.33) le système d'équations intégrales admet une solution unique en  $(w_1, w_2, w_3)$  à une constante additive près. Ce qui montre l'équivalence des systèmes (2.1.11) et (2.3.36).

### 2.3.2 Mise en oeuvre numérique des équations intégrales

Il existe plusieurs méthodes numériques pour discrétiser une équation intégrale. Les méthodes les plus utilisées sont la méthode de collocation et la méthode de Galerkin. La méthode de Galerkin est plus coûteuse que la méthode de collocation, puisqu'elle amène à une intégration de plus, mais elle est plus stable. Récemment, *Graham & al.* ont développé une méthode de Galerkin hybride dans le but de réduire le coût de calcul de la méthode de Galerkin, nous ne l'exposons pas ici, pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [48].

Pour la mise en oeuvre numérique du système (2.3.36) notre choix s'est porté sur la méthode de Galerkin. Ce qui induit la formulation variationnelle suivante.

#### Formulation variationnelle

Posons  $V = L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times L^2(\Gamma_3)$  et  $v = (v_1, v_2, v_3) \in V$ . La formulation variationnelle du système (2.3.36) est la suivante,

$$\text{Déterminer } \Phi \in V : \langle \mathcal{A}\Phi, v \rangle = \langle \Psi, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (2.3.47)$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  sont définis dans (2.3.35) et  $\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} f_j g_j ds$ , avec  $f = (f_1, f_2, f_3)$  et  $g = (g_1, g_2, g_3)$  éléments de  $V$ .

#### Problème discret

Nous désignons par  $n_i$  le nombre de noeuds de la surface discrétisée en facettes planes triangulaires  $\Gamma_i^h$  de la surface  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (voir [17] pour plus de détails). Nous posons  $V_i = L^2(\Gamma_i)$  et notons  $V_i^h$  le sous espace de  $V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de dimension finie engendré par une base des fonctions polynômiales continues par morceaux de degré 1, connue sous le nom base  $\mathbb{P}^1$ . Nous notons  $(\phi_j^{(i)})_{j=1, \dots, n_i}$  les éléments de cette base.

Nous approchons  $\varphi_i \in V_i$  par  $\varphi_i^h \in V_i^h$  comme suit

$$\varphi_i^h(y) = \sum_{j=1}^{n_i} \mu_j^{(i)} \phi_j^{(i)}(y) \quad (2.3.48)$$

Nous approchons les fonctions  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  définies dans (2.3.34) par  $p_i^h \in V_i^h$  de la façon suivante

$$p_i^h(y) = \sum_{j=1}^{n_i} \rho_j^{(i)} \phi_j^{(i)}(y) \quad (2.3.49)$$

Nous écrivons maintenant le système approché de (2.3.47) en faisant parcourir les fonctions tests  $v_i^h$  sur  $\Gamma_i^h$  parmi les fonctions de base  $\phi_j^{(i)}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Auparavant, nous notons  $I_p^h$ ,  $D_{p,q}^h$  et  $S_{p,q}^h$ ,  $p, q \in \{1, 2, 3\}$  les matrices de coefficients respectifs

$$\left\{ \begin{array}{l} I_p^h(i, j) = \int_{\Gamma_p^h} \phi_j^{(p)}(x) \phi_i^{(p)}(x) ds_p(x) \quad 1 \leq i, j \leq n_p \\ D_{p,q}^h(i, j) = \int_{\Gamma_p^h} \int_{\Gamma_q^h} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \phi_j^{(q)}(x) \phi_i^{(p)}(y) ds_q(x) ds_p(y) \quad 1 \leq i \leq n_p, 1 \leq j \leq n_q \\ S_{p,q}^h(i, j) = \int_{\Gamma_p^h} \int_{\Gamma_q^h} G(x-y) \phi_j^{(q)}(x) \phi_i^{(p)}(y) ds_q(x) ds_p(y) \quad 1 \leq i \leq n_p, 1 \leq j \leq n_q \end{array} \right. \quad (2.3.50)$$

Posons

$$\mu^{(i)} = (\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_{n_i}^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\rho^{(i)} = (\rho_1^{(i)}, \dots, \rho_{n_i}^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3.$$

le problème discret est donc le suivant,

$$\text{Déterminer } \Phi^h : \mathcal{A}^h \Phi^h = \Psi^h \quad (2.3.51)$$

où

$$\Phi^h = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \\ \mu^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \Psi^h = \mathcal{S}^h \cdot \begin{pmatrix} \rho^{(1)} \\ \rho^{(2)} \\ \rho^{(3)} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{S}^h = \begin{bmatrix} S_{1,1}^h & S_{1,2}^h & S_{1,3}^h \\ S_{2,1}^h & S_{2,2}^h & S_{2,3}^h \\ S_{3,1}^h & S_{3,2}^h & S_{3,3}^h \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{A}^h = \begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \frac{I_1^h}{2} + D_{1,1}^h & D_{1,2}^h & D_{1,3}^h \\ D_{2,1}^h & \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \frac{I_2^h}{2} + D_{2,2}^h & D_{2,3}^h \\ D_{3,1}^h & D_{3,2}^h & \frac{I_3^h}{2} + D_{3,3}^h \end{bmatrix}$$

Parmi les termes intégraux qui apparaissent dans les matrices du système (2.3.51), certains sont réguliers et d'autres faiblement singuliers. Ces singularités sont dues à la présence du noyau  $G(x-y)$  et de sa dérivée normale. Cette difficulté rend délicate l'utilisation de l'intégration numérique, du moins lorsque les points  $x$  et  $y$  risquent d'être trop proches, c'est-à-dire, lorsque les deux facettes triangulaires contenant ces deux points sont proches. Dans ce cas, nous calculerons l'intégrale analytiquement, par contre, lorsque les deux facettes sont suffisamment éloignées, nous aurons recours à l'intégration numérique. Ceci est détaillé dans l'annexe A.

	scalp	crâne	cerveau
rayon	1	0.92	0.87
conductivité	1	1/80	1

TAB. 2.1 – Description de la géométrie sphérique de la tête

	noeuds/couche	triangles/couche
<i>Mesh1</i>	42	80
<i>Mesh2</i>	162	320
<i>Mesh3</i>	642	1280

TAB. 2.2 – Description des trois maillages de la géométrie sphérique

### 2.3.3 Validation numérique

Pour valider notre méthode de résolution du problème direct en EEG, nous avons mené une série d'expériences sur une géométrie sphérique modélisant la tête en trois couches pour laquelle nous disposons de trois maillages en facettes planes triangulaires *Mesh1*, *Mesh2* et *Mesh3*. La description de la géométrie et les maillages correspondants sont donnés dans les tableaux (Tab. 2.1) et (Tab. 2.2).

Nous avons effectué des tests dans le cas d'un dipôle placé à l'intérieur du cerveau tout en variant sa proximité à la surface du cerveau. Cinq cas ont été considérés :

- **dipôle 1** : *position* :  $S_1 = (0, 0, 0.4250)$ .
- **dipôle 2** : *position* :  $S_2 = (0, 0, 0.6800)$ .
- **dipôle 3** : *position* :  $S_3 = (0, 0, 0.7650)$ .
- **dipôle 4** : *position* :  $S_4 = (0, 0, 0.8075)$ .
- **dipôle 5** : *position* :  $S_5 = (0, 0, 0.8415)$ .

Le moment est pris égal à  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ .

Nous avons comparé pour chacun de ces dipôles les valeurs du potentiel obtenues sur les trois couches par notre méthode avec les valeurs obtenues en résolvant analytiquement le problème direct. Les solutions analytiques ainsi que les trois maillages définis ci-dessus nous ont été fournis par d'autres chercheurs - Projet Odyssée - INRIA [2].

Nous donnons dans le tableau (Tab. 2.3) l'erreur relative en norme  $L^2$  calculée de la façon suivante,

$$err(u) = \frac{\|u_1^a - u_1^c\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|u_2^a - u_2^c\|_{L^2(\Gamma_2)} + \|u_3^a - u_3^c\|_{L^2(\Gamma_3)}}{\|u_1^a\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|u_2^a\|_{L^2(\Gamma_2)} + \|u_3^a\|_{L^2(\Gamma_3)}} \quad (2.3.52)$$

où  $u_i^a$  désigne le potentiel calculé analytiquement sur la *i*ème couche et  $u_i^c$  est celui calculé numériquement par notre méthode.

Nous tirons d'après ces résultats les remarques suivantes :

- Les valeurs calculées pour des dipôles placés dans la région profonde du cerveau sont précises.

	<i>Mesh1</i>	<i>Mesh2</i>	<i>Mesh3</i>
dipôle 1	$1.10^{-3}$	$4.10^{-5}$	$1.10^{-5}$
dipôle 2	$1.10^{-2}$	$9.10^{-4}$	$6.10^{-5}$
dipôle 3	2.81	$3.10^{-3}$	$5.10^{-4}$
dipôle 4	93.8	0.15	$1.10^{-3}$
dipôle 5	2054	49.08	2.28

TAB. 2.3 – Problème direct en EEG : erreurs relatives euclidiennes sur le potentiel obtenues sur trois maillages sphériques.

- Plus le dipôle est proche de la surface, plus la précision sur les résultats diminue et pour obtenir une bonne précision il faudrait raffiner le maillage. Ceci est expliqué par le fait qu'un dipôle proche de la surface génère un potentiel disproportionné à la surface du scalp, ce potentiel est "focalisé" dans la zone du scalp correspondante à l'emplacement du dipôle alors qu'il est presque négligeable partout ailleurs.
- L'erreur sur les valeurs calculées diminue avec le raffinement du maillage.

Ces résultats correspondent à ce qui est déjà connu dans la littérature et sont obtenus avec une précision relative acceptable. Ceci constitue donc une validation de l'approche utilisée afin de résoudre les problèmes directs.

# Chapitre 3

## Problème inverse en EEG

Dans ce chapitre nous présentons le problème inverse en EEG, établissons un résultat d'identifiabilité et un résultat de stabilité et donnons une revue des principales méthodes d'identification qui existent dans la littérature. Une de ces méthodes, la méthode "algébrique" a motivée l'étude du problème de Cauchy qui sera présenté au chapitre 4. Par ailleurs, nous proposerons au chapitre 5, une nouvelle méthode pour résoudre le problème inverse en EEG, cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius*.

### 3.1 Introduction

Le problème inverse en EEG consiste à reconstruire, à partir des mesures du potentiel sur le scalp, une distribution de sources de courant ayant pu générer ces mesures. Une fois le modèle de sources choisi, le problème consiste en l'estimation des paramètres de ce modèle. La résolution de ce problème est importante en EEG (cf chapitre 1) mais elle est très délicate vu que les problèmes inverses sont en général mal posés au sens de Hadamard [50].

**Définition 1** *Un problème est dit bien posé au sens de Hadamard s'il vérifie les trois conditions suivantes :*

1. *existence de la solution,*
2. *unicité de la solution (identifiabilité),*
3. *dépendance continue de la solution en fonction des données (stabilité).*

Examinons ces conditions pour le problème inverse.

1. L'existence est assurée du fait que pour chaque jeu de mesures on peut trouver une distribution de sources expliquant ces mesures.
2. S'il existe toujours une solution au problème inverse, elle n'est quasiment jamais unique, et ceci est dû au nombre trop restreint de capteurs de mesures. En effet, étant donné un nombre fini de positions sur le scalp où le potentiel est mesuré à un instant donné, il est théoriquement possible d'obtenir une infinité de configurations de sources intracérébrales expliquant ces potentiels <sup>a</sup>.
3. Enfin, la stabilité de la solution retenue n'est pas assurée, de telle sorte qu'un bruit d'un niveau très faible s'ajoutant aux mesures peut créer un grand écart entre la solution à ce problème et celle du problème non perturbé.

---

<sup>a</sup>Par exemple, en EEG, les boucles de courant n'engendrent pas de différences de potentiel à la surface du crâne.

Pour remédier au caractère mal-posé du problème inverse en EEG, il faudrait alors introduire des contraintes sur la recherche des sources. On fixe ainsi des contraintes de localisation, telles que les sources sont supposées confinées à l'intérieur du cerveau, ce qui réduit de façon considérable le nombre de solutions. Par ailleurs, le choix du modèle de sources joue un rôle important dans l'unicité de la solution. En effet, pour le modèle de dipôle de courant équivalent nous avons un résultat d'identifiabilité (§3.2.1), par contre, dans le cas du modèle de sources distribuées, le problème inverse est fortement sous-déterminé et une régularisation est ainsi nécessaire en introduisant des contraintes supplémentaires basées sur des informations *à priori*.

### 3.2 Position du problème inverse

Reprenons le problème direct en EEG étudié au chapitre 2 :

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u) = F & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où la conductivité  $\sigma$  supposée constante par morceaux est donnée,  $\vec{\nu}$  est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur comme le montre la figure (Fig. 3.1) et  $F$  le terme source donné par

$$F = \sum_{j=1}^m \vec{q}_j \cdot \vec{\nabla} \delta_{S_j} \quad (3.2.2)$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S_j \in \Omega_1$  et  $q_j \in \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1, \dots, m$  représentent respectivement le nombre, les positions et les moments des dipôles.

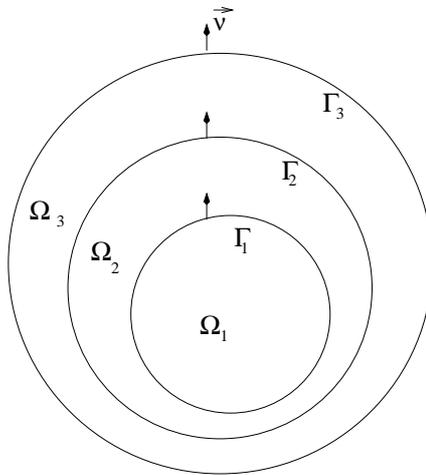


FIG. 3.1 – Le domaine de la tête

Nous avons démontré au chapitre 2 que le problème direct (3.2.1) est bien posé et que la trace  $u|_{\Gamma_3}$  est bien définie dans l'espace quotient  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)/R$ . Par conséquent nous pouvons définir l'opérateur d'observation suivant

$$B[F] := u|_S \quad (3.2.3)$$

où  $S \subset \Gamma_3$  une partie ouverte de la frontière  $\Gamma_3$  d'intérieur non vide.  $S$  correspond à la partie du scalp où nous disposons des mesures, là où on peut mettre le casque à électrodes.

Le problème inverse auquel nous nous intéressons est le suivant. Etant données les mesures  $f \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ , déterminer  $F$  tel que

$$B[F] = f. \quad (3.2.4)$$

Il s'agit ainsi de répondre aux questions suivantes :

1. **identifiabilité** : Est ce que la solution  $F$  de la forme (3.2.2) du problème inverse (3.2.4) est unique ?
2. **stabilité** : Est ce que cette solution dépend de façon continue de  $f$  ?
3. **identification** : Est ce qu'il existe une méthode d'identification pour déterminer cette solution ?

Les deux premières questions sont traitées aux paragraphes §3.2.1 et §3.2.2. Et dans la section §3.3 nous rappelons les principales méthodes d'identification dans le cas des sources dipolaires ponctuelles (dipôles équivalents) et le cas des sources dipolaires distribuées, parmi lesquelles nous décrivons une méthode analytique développée au sein de notre laboratoire (voir annexe B). Et dans le chapitre 5, nous présentons une autre approche d'identification basée sur la minimisation d'une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius*.

### 3.2.1 Identifiabilité

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, l'identifiabilité des fonctions sources à partir des mesures n'est pas assurée en général. Cependant, dans ce paragraphe nous vérifions l'identifiabilité pour une source de la forme (3.2.2) ; ceci signifie que le problème inverse (3.2.4) est bien posé dans le sens suivant, si deux mesures de potentiel coïncident sur  $S$  alors elles sont générées par la même source de la forme (3.2.2).

**Théorème 2** *La source  $F$  de la forme (3.2.2) solution du problème inverse (3.2.4) est déterminée de manière unique à partir de la mesure  $f$  sur la partie  $S$ .*

**Preuve.**

Soit

$$F^{(i)} = \sum_{j=1}^{m_i} q_j^{(i)} \cdot \nabla \delta_{S_j^{(i)}}, \quad i = 1, 2.$$

Soit  $u^{(i)}$  la solution du problème direct (3.2.1) correspondant au terme source  $F^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Il s'agit de montrer que si  $u^{(1)} = u^{(2)}$  sur  $S$  alors  $F^{(1)} = F^{(2)}$  ce qui veut dire  $m^{(1)} = m^{(2)}$ ,  $q_j^{(1)} = q_j^{(2)}$  et  $S_j^{(1)} = S_j^{(2)}$  (avec une éventuelle permutation).

En effet, nous considérons la différence  $\omega = u^{(2)} - u^{(1)}$  dont nous vérifions qu'elle est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla \omega) &= F^{(2)} - F^{(1)} & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} &= 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

De plus, nous avons

$$\omega = 0 \text{ sur } S.$$

D'abord, d'après le théorème de Holmgren [102], nous obtenons  $\omega = 0$  dans  $\Omega \setminus \cup S_j^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, m_i$ ). Ensuite, le prolongement de  $\omega$  par 0 à l'extérieur de  $\Omega$ , noté  $\bar{\omega}$  est identiquement nul dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup S_j^{(i)}$ . Par conséquent,  $\bar{\omega}$  est une combinaison linéaire finie de Dirac et ses dérivées aux points  $S_j^{(i)}$  [106]. Donc sa régularité est au plus celle de la fonction dirac dans  $\mathbb{R}^3$  qui est dans  $H^s$  pour  $s < -\frac{3}{2}$ . Enfin, comme  $F^{(i)} \in H^s$  pour  $s < -\frac{5}{2}$ ,  $\bar{\omega} \in H^\varepsilon$  avec  $\varepsilon < -\frac{1}{2}$ , ce qui contredit le degré de régularité déjà évoqué et donc les coefficients de la combinaison linéaire doivent être nuls. Par suite

$$w = 0 \text{ dans } \Omega$$

et  $F^{(1)} = F^{(2)}$ . L'unicité du nombre, des positions et des moments des sources s'en déduit aisément.  $\square$

### 3.2.2 Stabilité

Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité du problème inverse pour une source de la forme (3.2.2). En d'autres termes, nous étudions la dépendance continue du terme source  $F$  par rapport à la mesure  $f$  sur  $S$ .

Le résultat que nous donnons dans cette section est de type stabilité lipschitzienne locale. Avant de l'établir, nous introduisons quelques notations et donnons des résultats préliminaires.

Nous considérons

$$F = \sum_{j=1}^m q_j \cdot \nabla \delta_{S_j} \quad (3.2.6)$$

où le nombre de dipôles  $m$  est supposé connu.

Soit  $S$  un point de  $\Omega_1$ , soit  $d(\Gamma_1, S)$  la distance euclidienne entre  $S$  et la surface  $\Gamma_1$ . Nous posons

$$\alpha = \min_j d(\Gamma_1, S_j)$$

qui est strictement positif puisque  $\Omega_1$  est un ouvert, et définissons

$$\Omega_\alpha = \{x \in \Omega_1 / d(\Gamma_1, x) \geq \alpha\}.$$

Au terme source  $F$  (3.2.6) nous faisons correspondre le vecteur  $\phi = ((q_j)_{1 \leq j \leq m}, (S_j)_{1 \leq j \leq m})$  élément de l'ensemble des valeurs admissibles  $\Phi_{ad} = (\mathbb{R}^3)^m \times (\Omega_\alpha)^m$ . Pour plus de commodité,  $\phi$  sera noté  $\phi = (q_j, S_j)$ .

Soit  $\phi = (q_j, S_j)$  et  $\psi = (p_j, T_j)$  deux éléments de  $\Phi_{ad}$ . Pour  $h \neq 0$  suffisamment petit, nous vérifions que  $\phi^h := \phi + h\psi$  appartient aussi à  $\Phi_{ad}$ .

Nous définissons maintenant le terme source

$$F^h = \sum_{j=1}^m (q_j + hp_j) \cdot \nabla \delta_{(S_j + hT_j)}, \quad (3.2.7)$$

considérons le problème

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u^h) & = F^h & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial u^h}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

où posons  $f^h = B[F^h] \equiv u^h|_S$  où la trace  $u^h|_S$  a bien un sens dans  $H^{1/2}(S)/R$ .

**Proposition 1**

$$F^h = F + hF^1 + h^2F^2(h) \quad (3.2.9)$$

avec

$$F^1 = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \nabla \delta_{S_j} - q_j \cdot H_j T_j \quad (3.2.10)$$

où  $H_j$  est la matrice hessienne  $H_j = (\partial_{x_k x_l}^2 \delta_{S_j})_{1 \leq l, k \leq 3}$ , et donc le terme  $q_j \cdot H_j T_j$  est la distribution définie comme suit

$$q_j \cdot H_j T_j = \sum_{k,l}^3 q_j^k T_j^l \partial_{x_k x_l}^2 (\delta_{S_j}) \quad (3.2.11)$$

et

$$F^2(h) = - \sum_{j=1}^m p_j \cdot H_j T_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 (q_j^i + h p_j^i) \sum_{k,l}^3 T_j^k T_j^l \partial_{x_k x_l}^2 \partial_{x_i} (\delta_{S_j} + \theta^i h T_j) \quad (3.2.12)$$

où  $0 < \theta^i < 1$ .

**Preuve.**

Soit  $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ , nous avons

$$\langle F^h, \zeta \rangle = - \sum_{j=1}^m (q_j + h p_j) \vec{\nabla} \zeta(S_j + h T_j) = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 (q_j^i + h p_j^i) \partial_{x_i} \zeta(S_j + h T_j)$$

Le développement de Taylor Lagrange à l'ordre 2 appliqué à la fonction  $\partial_{x_i} \zeta(S_j + h T_j)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , au voisinage du point  $S_j$  implique que pour tout  $i = 1, 2, 3$ , il existe un réel  $\theta^i \in ]0, 1[$  tel que :

$$\partial_{x_i} \zeta(S_j + h T_j) = \partial_{x_i} \zeta(S_j) + h \sum_{k=1}^3 T_j^k \partial_{x_k} \partial_{x_i} \zeta(S_j) + \frac{h^2}{2} \sum_{k,l=1}^3 T_j^k T_j^l \partial_{x_k x_l}^2 \partial_{x_i} \zeta(S_j + \theta^i h T_j)$$

par suite

$$\begin{aligned} \langle F^h, \zeta \rangle = & - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 \left[ q_j^i \partial_{x_i} \zeta(S_j) + h p_j^i \partial_{x_i} \zeta(S_j) + h q_j^i \sum_{k=1}^3 T_j^k \partial_{x_k} \partial_{x_i} \zeta(S_j) \right. \\ & \left. + h^2 p_j^i \sum_{k=1}^3 T_j^k \partial_{x_k} \partial_{x_i} \zeta(S_j) + \frac{h^2}{2} (q_j^i + h p_j^i) \sum_{k,l=1}^3 T_j^k T_j^l \partial_{x_k x_l}^2 \partial_{x_i} \zeta(S_j + \theta^i h T_j) \right] \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Ce qui donne

$$F^h = F + h F^1 + h^2 F^2(h).$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de stabilité suivant.

**Théorème 3** (*Stabilité lipschitzienne locale*)

S'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $p_j \neq 0$  ou  $T_j \neq 0$ , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B[F^h] - B[F]}{h} \neq 0.$$

**Preuve.**

Soient  $u^1$  et  $u^2(h)$  les solutions des problèmes suivants

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u^1) & = F^1 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial u^1}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u^2(h)) & = F^2(h) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial u^2(h)}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Puisque  $h$  est suffisamment petit, les points  $S_j + h\theta^i T_j$  sont suffisamment loins de  $\Gamma_3$  et comme  $F^1$  et  $F^2(h)$  ont comme supports respectifs  $\cup S_j$  et  $\cup S_j + h\theta^i T_j$ , les problèmes (3.2.14) et (3.2.15) admettent chacun une solution unique définie à une constante additive près<sup>b</sup>, dont la trace sur  $\Gamma_3$  est bien définie dans  $H^{1/2}(\Gamma_3)/R$ .

D'autre part, puisque  $F^h = F + hF^1 + h^2F^2(h)$ , nous obtenons à une constante additive près

$$u^h = u + hu^1 + h^2u^2(h) \quad (3.2.16)$$

et donc nous déduisons l'égalité suivante (écrite dans  $H^{1/2}(S)/R$ ),

$$B[F^h] = B[F] + hB[F^1] + h^2B[F^2(h)].$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B[F^h] - B[F]}{h} = B[F^1].$$

Ainsi, pour achever la preuve du théorème, il suffit de prouver que s'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $p_j \neq 0$  ou  $T_j \neq 0$ , alors  $B[F^1] \neq 0$ . Cela fait l'objet du lemme suivant. Mais avant cela, nous donnons une remarque concernant l'égalité énoncée dans (3.2.16).

**Remarque 1** *Pour que l'égalité (3.2.16) ait un sens il faut normaliser les quantités. Nous pouvons, par exemple, imposer  $u^h(O) = u(O) = cte$  et  $u^1(O) = u^2(O) = 0$ , pour un point fixé  $O$ .*

**Lemme 2** *Si  $B[F^1] = 0$ , alors  $p_j = T_j = 0, \forall j = 1, \dots, m$ .*

**Preuve.**

$B[F^1] = 0$  veut dire que la solution  $u^1$  du problème (3.2.14) vérifie  $u^1|_S = 0$ . Comme nous avons aussi  $\frac{\partial u^1}{\partial \nu}|_S = 0$ , en appliquant successivement le théorème de Holmgren dans  $\Omega_3$  et  $\Omega_2$ , nous obtenons  $u^1|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u^1}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0$ .

Donc  $u^1$  vérifie dans  $\Omega_1$  le problème suivant

$$\begin{cases} -\sigma_1 \Delta u^1 & = F^1 & \text{dans } \Omega_1 \\ u^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u^1}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Nous prolongeons maintenant  $u^1$  par 0 à l'extérieur de  $\Omega_1$ . Nous notons  $\bar{u}^1$  ce prolongement, qui vérifie

$$-\Delta \bar{u}^1 = \frac{1}{\sigma_1} F^1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad (3.2.18)$$

d'où  $\bar{u}^1 = \frac{1}{\sigma_1} G * F^1$ . Ce qui s'écrit explicitement comme suit

$$\bar{u}^1(x) = \sum_{j=1}^m -\frac{p_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3} + \frac{q_j \cdot T_j}{|x - S_j|^3} - 3 \frac{(x - S_j) \cdot A_j(x - S_j)}{|x - S_j|^5} \quad \forall x \neq S_j \quad (3.2.19)$$

<sup>b</sup>Ici, nous avons utilisé le même raisonnement fait pour le problème direct dans le chapitre 2.

où la matrice  $A_j$  est définie par

$$A_j = q_j T_j^t. \quad (3.2.20)$$

Puisque  $\bar{u}^1$  est analytique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup S_j$  et nulle à l'extérieur de  $\Omega_1$ , nous avons

$$\sum_{j=1}^m \frac{p_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3} + \frac{q_j \cdot T_j}{|x - S_j|^3} - 3 \frac{(x - S_j) \cdot A_j (x - S_j)}{|x - S_j|^5} = 0, \quad \forall x \neq S_j \quad (3.2.21)$$

en particulier, pour  $x = S_j + \beta_j y$  où  $\beta_j > 0$  et  $y \neq 0$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .

Nous rappelons que nous voulons démontrer  $p_j = T_j = 0, \forall j = 1, \dots, m$ . Pour cela, nous prenons  $k \in \{1, \dots, m\}$ , multiplions l'équation (3.2.21) par  $|x - S_k|^3$  pour  $x = S_k + \beta_k y$  et faisons tendre  $\beta_k \rightarrow 0$ . Nous obtenons ainsi

$$q_k \cdot T_k - 3 \frac{y A_k y}{|y|^2} = 0, \quad \forall y \neq 0. \quad (3.2.22)$$

Ensuite, en multipliant l'équation (3.2.21) par  $|x - S_k|^2$  et faisant tendre  $\beta_k \rightarrow 0$ , et tenant compte de (3.2.22) nous obtenons

$$p_k = 0. \quad (3.2.23)$$

Il reste donc à démontrer que  $T_k = 0$ . Pour cela, nous fixons  $k \in \{1, \dots, m\}$  et posons

$$q_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_k = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Nous avons  $q_k \neq 0$ <sup>c</sup>. Si  $T_k = 0$ , alors il n'y a rien à prouver. Sinon,  $\text{rang}(A_k) = \text{rang}(q_k T_k^t) = 1$  et donc cette matrice admet 0 comme valeur propre. Notons  $V$  le vecteur propre associé. En écrivant l'équation (3.2.22) pour  $y = V$ , nous obtenons  $q_k \cdot T_k = 0$  ce qui implique

$$\frac{y A_k y}{|y|^2} = 0, \quad \forall y \neq 0. \quad (3.2.24)$$

En prenant successivement  $y = e_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) où les  $e_i$  constituent les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , nous obtenons

$$a_i b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.25)$$

Ensuite, en prenant respectivement :  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et en se servant

de (3.2.25), nous obtenons

$$\begin{cases} a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \\ a_1 b_3 + a_3 b_1 = 0 \\ a_2 b_3 + a_3 b_2 = 0 \end{cases} \quad (3.2.26)$$

Puisque  $q_k \neq 0$ , il existe au moins un  $a_i$  non nul, ce qui implique, d'après les relations dans (3.2.26), que  $b_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . D'où  $T_k = 0$ .  $\square$

Ceci termine la preuve du lemme et par conséquent celle du théorème.  $\square$

**Remarque 2** Le résultat du théorème 3 signifie que les mesures du potentiel électrique  $u$  prises sur  $S$  permettent de distinguer entre deux configurations  $F$  et  $F^h$  pourvu que l'erreur sur ces mesures soit d'ordre  $\theta(h)$ .

<sup>c</sup> $q_k$  est un moment dipolaire, et donc s'il est nul alors il n'y a pas de source en  $S_k$ .

### 3.3 Revue bibliographique sur les méthodes d'identification

Le problème inverse en EEG a donné lieu à d'intenses recherches. Les méthodes utilisées sont très variées et peuvent être classées en différentes catégories. Nous en distinguons les méthodes directes et les méthodes itératives, les méthodes qui dépendent du modèle de sources utilisé, les méthodes qui tiennent en compte l'aspect temporel du problème inverse (résolution du problème sur un bloc de plusieurs mesures) et d'autres qui résolvent le problème en un instant donné, et il y a les méthodes probabilistes et celles qui sont déterministes.

Nous donnons dans cette section une simple revue sur les principales méthodes utilisées dans la résolution du problème inverse en EEG pour les deux modèles de sources dipolaires : nombre fini de dipôles équivalents et sources étendues (distribuées). Ces méthodes sont communément divisées en deux groupes, les approches dites "dipolaires" qui prennent le dipôle équivalent comme source de courant et les approches dites "distribuées" qui considèrent des sources distribuées. Avant de décrire ces deux approches, nous présentons la méthode "classique" des moindres carrés qui est largement utilisée en EEG. Et, nous concluons cette section en comparant entre les différentes méthodes exposées et en invoquant une nouvelle méthode d'optimisation que nous avons proposée dans ce travail et qui sera traitée au chapitre 5.

#### 3.3.1 Méthode des moindres carrés

Cette méthode vise à identifier une configuration de sources qui explique au mieux les mesures obtenues par l'EEG en minimisant l'erreur quadratique entre ces mesures et celles calculées à l'aide du problème direct. Ce qui se traduit par le problème d'optimisation non-linéaire suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{F} = \min J_{mc}(F) \\ J_{mc}(F) = \|u(F)|_S - f\|_{L^2(S)}^2 \end{cases} \quad (3.3.27)$$

où  $u(F)|_S$  est la solution du problème direct correspondant au terme source  $F$  et  $f$  représente les mesures.

Cette méthode peut prendre en compte l'aspect temporel c'est-à-dire qu'elle s'applique dans le cas où il y a plusieurs échantillons temporels de mesures, soit simultanément sur l'ensemble de tous les échantillons. Elle s'applique également pour tout modèle de sources, mais elle est incapable de déterminer le nombre de dipôles quand il s'agit d'un terme source modélisé en un nombre fini de dipôles équivalents. Dans le chapitre 5, nous reviendrons sur cette méthode en l'appliquant au cas des dipôles équivalents. Nous calculerons son gradient et donnerons des résultats numériques.

Pour plus de détails sur cette méthode, nous renvoyons à [41, 51, 90], etc.

#### 3.3.2 Approches "dipolaires"

L'approche dipolaire utilise un nombre fini de dipôles équivalents (4 ou 5 tout au plus) pour représenter l'ensemble de sources électriques potentiellement actives. Nous avons alors un nombre fini de paramètres à estimer  $6m$  où  $m$  est le nombre de dipôles et les six paramètres sont trois paramètres pour la position et trois paramètres pour le vecteur moment, 2 pour l'orientation (sens + direction) et 1 pour l'amplitude.

Nous distinguons les méthodes itératives et les méthodes directes (analytiques). Ces dernières ont l'avantage de déterminer le nombre de dipôles, mais ne prennent pas (encore) en compte l'aspect temporel du problème inverse. Par contre, les premières méthodes s'appliquent au modèle spatio-temporel et sont principalement des méthodes de balayage. La solution recherchée est celle qui

minimise le critère des moindres carrées sur un bloc de  $N$  échantillons temporels de mesures. Mais au lieu de modifier pas à pas les paramètres à identifier, ces méthodes balayent le volume d'intérêt à la recherche de la solution qui explique au mieux les mesures. Une discrétisation de l'espace solution est donc appliquée à l'aide d'une simple grille régulière ou d'un maillage fin, ainsi, chaque noeud représente une source potentielle d'activité modélisée par un dipôle (de position fixe). Parmi ces méthodes, nous citons l'approche MUSIC et les approches "beamforming".

**l'approche MUSIC** ou Multiple Signal Classification est une méthode de balayage. Elle consiste d'abord, à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières, à distinguer les sous-espaces orthogonaux relatifs respectivement au signal d'intérêt (grandes valeurs singulières) et au bruit (faibles valeurs singulières). Ensuite, elle parcourt l'espace des solutions discrétisé et prédéfini, pour sélectionner les sources dont la contribution sur le scalp présente une projection minimale, voire nulle, sur le sous-espace relatif au bruit. Pour plus de détails voir [90], ainsi que [88] pour une amélioration de cette méthode en un algorithme appelé RAP-MUSIC, Recursively Applied and Projected MUSIC) où le sous-espace bruit est réestimé à chaque fois où une source a été localisée.

**les approches "beamforming"** Ces approches ont été récemment appliquées au domaine médical après avoir été initialement développées en traitement du signal radar et sonar. Elles consistent également à faire un balayage de l'espace source, et pour chaque position du volume discret prédéfini elles effectuent un filtrage spatial des données pour quantifier la part du signal engendrée par cette position. Pour des détails voir les références dans [1] telles que [113, 108].

### Méthodes directes

Les méthodes directes s'appliquent au problème inverse statique<sup>d</sup> en considérant un modèle de la tête homogène par morceaux. Elles supposent connues les données de Cauchy (potentiel  $u$  et flux  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ) sur la surface du cerveau  $\Gamma_1$  et permettent de calculer les paramètres du terme source explicitement à partir de ces données.

Parmi ces méthodes, nous citons une méthode "algébrique" développée par *El-Badia & Ha-Duong* [35, 31], une méthode basée sur les approximations méromorphiques [12, 10] et une méthode "projective" [94].

Nous présentons ici en bref le principe de ces méthodes. La première méthode, qui a fait l'objet d'un travail numérique d'un post-doc au sein de notre laboratoire est détaillée à l'annexe B.

Toutes ces méthodes résolvent dans le domaine  $\Omega_1$  du cerveau le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= \sum_{j=1}^m \vec{q}_j \cdot \vec{\nabla} \delta_{S_j} & \text{dans } \Omega_1 \\ u &= f_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_1 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.3.28)$$

Les données de Cauchy  $f_1$  et  $g_1$  sur la surface  $\Gamma_1$  sont obtenues en fonction de la mesure  $f$  donnée sur  $S$  en résolvant un problème de Cauchy, ce problème sera étudié au chapitre suivant.

<sup>d</sup>On considère uniquement un seul échantillon de mesures, souvent ce sont les mesures qui correspondent au pic du signal EEG.

**Méthode algébrique** Le principe de cette méthode repose sur la relation de réciprocité suivante (cf [35] et les références qui y sont citées)

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v) = - \int_{\Gamma_1} (f_1 \frac{\partial v}{\partial \nu} - g_1 v) ds \quad (3.3.29)$$

où  $v$  est une fonction harmonique dans  $\Omega_1$  et

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v) = \sum_{j=1}^m q_j \cdot \nabla v(S_j) , \quad (3.3.30)$$

Etant donné un majorant  $M$  du nombre de dipôles, cette méthode cherche, à l'aide des outils algébriques, à déterminer  $m$ ,  $q_j$  et  $S_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) et ceci en travaillant d'abord dans le plan  $(xOy)$  et en appliquant l'opérateur de réciprocité  $\mathcal{R}$  aux fonctions  $v_k(x, y) = (x + iy)^k$ . Ensuite le nombre  $m$  est obtenu en calculant le rang d'une certaine matrice constituée à partir des coefficients  $\frac{\mathcal{R}(f_1, g_1, v_k)}{k}$ , les projections des  $S_j$  sur le plan  $(xOy)$  sont les valeurs propres d'une certaine matrice  $T$  et les projections des  $q_j$  s'obtiennent en résolvant un certain système linéaire (cf annexe B). Enfin, les troisièmes coordonnées des  $S_j$  et  $q_j$  sont construites à l'aide d'un choix spécifié des fonctions harmoniques sur lesquelles est appliqué le principe de réciprocité. Cette méthode est décrite en détails dans l'annexe B. Pour un exposé plus général de cette méthode nous renvoyons à [35] et à [31] pour le cas d'un problème elliptique anisotrope.

Comme nous l'avons déjà signalé, cette méthode a été implémentée numériquement lors d'un stage post-doctoral par *V. Pavan*. Nous donnons ici une synthèse des résultats obtenus sur des géométries sphériques et réalistes [37]. Cette méthode semble être fiable pour localiser un seul dipôle. Cependant, pour 2 ou 3 dipôles, la fiabilité de l'algorithme dépend de la manière avec laquelle les dipôles sont répartis à l'intérieur du cerveau. Ainsi, c'est de plus en plus difficile de détecter les dipôles quand ils sont proches, ou quand ils sont à proximité de la surface  $\Gamma_1$  du cerveau. Et, pour plus que 5 dipôles, cette méthode ne donne plus des résultats satisfaisants. Quelques résultats numériques de cette méthode sont donnés à l'annexe B.

**Méthode des approximations méromorphiques** Cette méthode est d'abord développée sur un disque et ensuite extrapolée à un domaine sphérique ( $\Omega_1$  est la boule unité  $\mathbb{B}$ ).

En  $2D$ , le plan  $\mathbb{R}^2$  est assimilé à  $\mathbb{C}$  et la solution  $u$  est décomposée en deux parties  $w + \tilde{u}$ ,  $w$  est harmonique et  $\tilde{u}$  est singulière en  $S_j$  ( $\tilde{u} = \frac{1}{\sigma_1} G * F$ ). Ensuite on démontre que  $u$  peut être écrite comme la partie réelle d'une fonction  $\phi$  :

$$\begin{cases} u(\xi) = Re(\phi(\xi)) , \quad \xi \in \mathbb{B} \setminus \{S_j\} \\ \phi(\xi) = \mathcal{A}(\xi) + \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{2\pi(\xi - S_j)} \end{cases} \quad (3.3.31)$$

où  $\xi = x + iy$  est le nombre complexe assimilé à  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{A}$  est une fonction analytique ( $w = Re(\mathcal{A})$ ). Et d'après les équations de Cauchy-Riemann on obtient :

$$\phi(\xi) = f_1(\xi) + i \int_{\xi_0}^{\xi} g_1(\xi) ds(\xi) , \quad \forall \xi \in \partial \mathbb{B} , \xi_0 \text{ fixé}$$

Ainsi, résoudre le problème inverse en  $2D$  revient à trouver les pôles de la fonction anti-analytique  $\mathcal{B} = \phi - \mathcal{A}$ .

A partir des données  $f_1$  et  $g_1$ , on calcule  $\phi$  et donc aussi  $\mathcal{B}$  sur la frontière. On cherche ensuite une approximation méromorphique de  $\mathcal{B}$  : une approximation  $L^2$  rationnelle ou une approximation

méromorphe uniforme aussi appelée approximation AAK [10]. Or cette fonction est déjà une fonction rationnelle de degré  $m$ , donc elle va coïncider avec son approximant de degré  $n$  et donne 0 comme erreur pour  $n \geq m$ . Ce qui permet alors de retrouver le nombre  $m$  des pôles, avec les positions et les résidus (les moments).

En  $3D$ , on divise la boule unité en des tranches : pour  $p = -P \cdots P$ ,  $P \in \mathbb{N}$ , on fixe  $z = z_p$ , et on considère le disque  $D_p$  centré en 0 et de rayon  $r_p$  où  $r_p^2 = 1 - z_p^2$ . Pour  $\xi \in T_p = \partial D_p$ , on considère la fonction  $u_p(\xi) = \tilde{u}(x, y, z_p)$  qui est une fonction rationnelle de degré  $m$  et on cherche ses pôles comme dans le cas de  $2D$ . Ainsi, si on note  $\xi_p^j \in D_p$  le pôle correspondant à la  $j$ ème source, pour  $p = -P \cdots P$ ,  $P$  suffisamment grand, la position de la source recherchée est obtenue quand  $\left| \xi_p^j \right|$  atteint son maximum.

Pour plus de détails sur cette méthode, nous renvoyons à [12, 10].

**Méthode de projection** Nara & Ando ont appliqué dans [94] une méthode de projection en utilisant deux approches différentes. D'abord ils ont exprimé le potentiel  $\tilde{u}$  qui est le potentiel créé par le terme source  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$  ( $\tilde{u} = \frac{1}{\sigma_1} G * F$ ) sur un développement multipolaire qui en  $3D$  revient à développer sur la base des harmoniques sphériques. Ensuite, la première approche consiste à projeter sur le plan  $(x, y)$ , ce qui constitue alors une alternative à la méthode algébrique ci-dessus, et ils ont obtenu les mêmes équations. La deuxième approche consiste à projeter sur une sphère de Riemann contenant le domaine du cerveau  $\Omega_1$ . Leurs résultats ont montré que la première approche était meilleure que la deuxième pour des dipôles profonds et bien éloignés alors que la deuxième est plus adaptée aux dipôles proches de la surface du cerveau. Ils ont également donné un algorithme pour identifier le nombre  $m$  des dipôles en suivant le même principe que dans [35].

### 3.3.3 Approches "distribuées"

Les approches distribuées (ou approches image) quant à elles, utilisent comme terme source une distribution de dipôles répartis sur le cortex de moments orthogonales à la surface de ce dernier. Les positions et les orientations des dipôles sont supposées connues, seules les amplitudes sont à estimer.

Pour ce modèle de sources, le nombre de paramètres pour un instant donné dépasse largement la quantité d'informations disponibles pour ce même instant. Le problème inverse est alors fortement sous-déterminé. L'introduction des informations à *priori* de natures très différentes<sup>e</sup> est alors nécessaire afin de contraindre l'espace de solutions. Les méthodes distribuées relèvent des méthodes de régularisation, elles introduisent un terme de pénalité à la solution des moindres carrées qui peut être quadratique ou non-quadratique, et cherchent un compromis entre la cohérence de l'estimation avec les mesures et le respect des contraintes imposées.

**Approche de norme minimale** La manière la plus simple de régulariser le problème inverse est d'imposer une contrainte dite de norme minimale [51]. Elle consiste à ajouter au critère de moindre carrées, le terme de pénalité suivant :  $\alpha \|F\|^2$  où  $\alpha$  est un paramètre qui détermine l'importance accordée à l'*a priori* de norme minimale par rapport au terme d'attache aux données. Le critère à minimiser s'écrit alors  $J(F) = \|u_{|S} - f\|^2 + \alpha \|F\|^2$ .

Une forme générale de la régularisation est présentée dans l'approche suivante.

<sup>e</sup>contraintes spatiales, temporelles, globales ou locales, ou encore anatomiques ou fonctionnelles

**Approche bayésienne** La formule de Bayes permet d'exprimer la probabilité à *posteriori*  $p(F|f)$  d'avoir une distribution d'activité  $F$  connaissant les données  $f$  comme suit

$$p(F|f) = \frac{p(f|F)p(F)}{p(f)}$$

$p(f|F)$  désigne la probabilité des mesures sachant la source  $F$ ,  $p(F)$  est une probabilité à *priori* que l'on se donne sur les sources et  $p(f)$  est la probabilité d'obtenir les mesures  $f$  (on la prend uniforme). Dans ce modèle, toutes les mesures sont considérées comme équiprobables. Dans ce cadre, le problème inverse est résolu en maximisant la probabilité à *posteriori*  $p(F|f)$  :

$$\hat{F} = \underset{F}{\operatorname{argmax}} p(f|F)p(F) = \underset{F}{\operatorname{argmax}} \ln(p(f|F)) + \ln(p(F))$$

Après certaines considérations et en supposant que la probabilité à *priori*  $p(F)$  peut se mettre sous la forme d'une loi exponentielle [8], la maximisation peut être traitée via la minimisation de la quantité suivante

$$J(F) = \|u|_S - f\|^2 + \alpha\theta(F) \quad (3.3.32)$$

où  $\alpha$  joue le rôle de pondérateur entre la confiance accordée aux données et celle attribuée aux informations à *priori*. L'équation (3.3.32), à laquelle on a abouti à l'aide du formalisme bayésien, résume le principe général de régularisation. La fonction  $\theta$  contient les informations à *priori* qui contraignent la source  $F$ . On distingue cependant deux types de contraintes :

1. *critères quadratiques*. Ceci correspond à une écriture de  $\theta$  comme suivant  $\theta(F) = \|WF\|^2$ , où  $W$  est une matrice de pondération, portant les informations à *priori* sur la variable  $F$ . Le critère global à minimiser s'écrit alors  $J(F) = \|u|_S - f\|^2 + \alpha \|WF\|^2$ .

Plusieurs configurations pour  $W$  ont été proposées, parmi elles **(1)**  $W = I$ , ce qui ramène à la solution de norme minimale, **(2)**  $W$  est un opérateur de gradient spatial ou de Laplacien spatial sur un voisinage des sources du modèle distribué. Ce type de contraintes exprime l'*a priori* d'activité synchrone de deux populations de neurones adjacentes. C'est le cas de la méthode LORETA (*LOW REsolution TomogrAphy*).

2. *critères non-quadratiques*. Ici, les méthodes de régularisation sont basées sur des métriques à base d'entropie et sur les normes  $L_p$  pour  $p < 2$ . En effet, plus  $p$  est grand, plus la solution est diffuse. Et, pour le cas  $p = 1$ , la minimisation peut être mise sous la forme d'un problème de programmation linéaire [1].

Une autre approche, issue du traitement d'image, a été appliquée également à la régularisation du problème inverse. Elle est bâtie autour des champs markoviens (cf les références dans [85]).

### 3.3.4 Conclusion

Bien que les méthodes distribuées traduisent l'activité de réseaux étendus de neurones, ce qui est très proche de la réalité, cependant leur mise en oeuvre est coûteuse et nécessite des algorithmes lourds vu le grand nombre d'inconnus. Ces méthodes souffrent également du choix du paramètre de régularisation et donnent des solutions sous forme d'activités distribuées parfois très lissées. Toutes ces limitations freinent l'emploi des méthodes distribuées qui sont, pour la plupart validées et évaluées par comparaison avec les méthodes dipolaires. De leur part, les méthodes dipolaires souffrent de la limitation du modèle de dipôle équivalent qui n'est pas bien adapté à la représentation de régions actives étendues. Mais elles ont sur leur compte la détermination du nombre de sources. Et, malgré qu'elles s'appliquent au cas statique et sur un modèle de la tête homogène par morceaux, elles ont donné de bons résultats qui répondaient à ce qu'attendaient les neurologues et sont exploitées dans de nombreux logiciels tel que le logiciel BESA.

Par ailleurs, certains ont cherché à exploiter et combiner les différents avantages des méthodes dipolaires et des méthodes distribuées, pour en tirer profit de leur complémentarité, d'où sont nées certaines méthodes hybrides entre les deux (voir les références dans [85]).

Nous avons choisi de travailler avec le terme source modélisé en dipôles équivalents, donc nos méthodes pour résoudre le problème inverse en EEG rentrent dans le cadre des méthodes dipolaires. Parmi les méthodes déjà exposées, nous avons abordé, dans le cadre de ce travail, la méthode de moindres carrés et la méthode algébrique. La première méthode est décrite au chapitre 5 où des résultats numériques seront présentés. La méthode algébrique, qui n'a pas fait l'objet des travaux personnels, ne sera pas présentée en détails dans ce manuscrit, mais décrite brièvement à l'annexe B. L'application de cette méthode pour la résolution du problème inverse en EEG, nécessite la connaissance du potentiel et du flux sur la surface du cerveau (3.3.28), ceci nous a amené à résoudre donc un problème de Cauchy dans le domaine formé par le scalp et le crâne, afin de transmettre les mesures dont nous disposons à la surface du scalp jusqu'à la surface du cerveau. Ce problème et sa résolution feront l'objet du chapitre suivant.

Par ailleurs, nous proposons dans ce travail, une méthode de minimisation d'une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius*. Cette méthode a été utilisée dans d'autres applications de problème inverse tels que l'identification de conductivités [69], l'identification des sources de pollution [36] et d'autres problèmes [21], mais n'a pas encore été appliquée au problème inverse en EEG. Nous avons ainsi adapté cette méthode à la résolution du problème inverse en EEG. Ceci fera l'objet du chapitre 5.

## Chapitre 4

# Résolution d'un problème de Cauchy en EEG

### 4.1 Introduction

L'étude du problème de Cauchy en EEG est motivé par la méthode "algébrique" mentionnée dans le chapitre précédent et décrite dans l'annexe B. En effet, celle-ci nécessite le calcul du potentiel et du flux à la surface du cerveau à partir des données connues partiellement sur la surface du scalp.

Le problème de Cauchy est connu d'être un problème mal posé au sens de Hadamard [49] et a été largement étudié et expérimenté dans plusieurs applications. Nous présentons dans ce chapitre le problème de Cauchy dans le cadre EEG en tenant compte de la géométrie de la tête et de la nature des données dont nous disposons. Nous proposons deux approches de résolution l'approche "*successive*" qui consiste à résoudre successivement deux problèmes de Cauchy dans deux domaines homogènes le scalp et le crâne, et l'approche "*simultanée*" qui consiste à résoudre un problème de Cauchy dans le domaine non-homogène formé par l'union du scalp et du crâne.

Dans la littérature, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre le problème de Cauchy, nous en donnons une revue au paragraphe §4.5. Parmi elles, nous avons choisi une méthode itérative alternative initialement proposée par *Kozlov & al.* [70]. Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes elliptiques bien posés aux conditions aux limites mêlées dont la solution converge, pour des données compatibles, vers la solution du problème de Cauchy considéré.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Nous présentons d'abord le problème de Cauchy pour les deux approches *successive* et *simultanée* et discutons de la compatibilité des données. Nous développons les algorithmes pour les deux approches, montrons un théorème de convergence dans le cas non-homogène en adaptant les techniques de démonstration établie par *Kozlov & al.* dans le cas homogène [70].

Dans le paragraphe §4.7 nous étudions les problèmes aux conditions aux limites mêlées qui apparaissent dans les algorithmes proposés, présentons leur résolution par la méthode des équations intégrales et donnons des tests numériques.

Ensuite au paragraphe §4.8, nous présentons des résultats numériques pour le problème de Cauchy posé dans une couronne sphérique avec la fonction analytique  $u(x, y, z) = \frac{x}{r^3}$ . Nous étudions

ainsi le comportement de l'algorithme proposé en fonction du choix initial, de l'épaisseur de la couronne, de la perturbation des données ainsi que du "manque" des données. Nous discutons également du critère d'arrêt de l'algorithme. Ensuite, nous comparons sur le domaine formé par le scalp et le crâne entre les deux approches *simultanée* et *successive* pour des mesures simulées, en considérant une géométrie sphérique et une géométrie réaliste.

Enfin, nous tirons quelques conclusions à la dernière section.

## 4.2 Préliminaires

Dans ce chapitre,  $\Omega$  désigne le domaine formé par les deux couronnes qui sont le scalp et le crâne,  $\Omega = \Omega_2 \cup \Gamma_2 \cup \Omega_3$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ . Le vecteur normal unitaire  $\vec{\nu}$  est dirigé vers l'extérieur comme le montre la figure (Fig. 4.1).

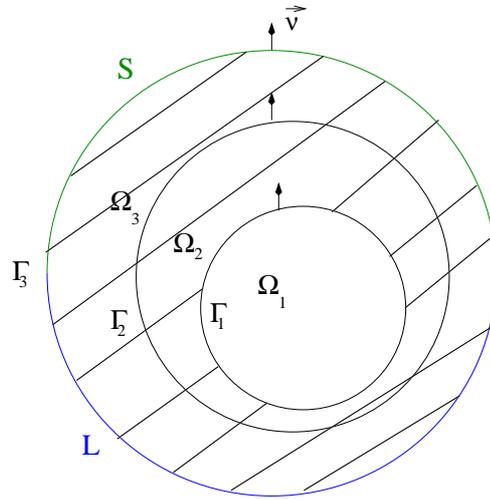


FIG. 4.1 – Le domaine  $\Omega$  formé par les couches scalp et crâne.

$S$  et  $L$  sont deux ouverts disjoints non vides de  $\Gamma_3$  telles que  $\bar{S} \cup \bar{L} = \Gamma_3$  et  $\bar{S} \cap \bar{L} = \gamma$ , une courbe dans  $\mathbb{R}^3$  que nous supposons régulière.  $S$  désigne la partie du scalp où on connaît les mesures du potentiel obtenues par l'EEG, et  $L$  est la partie complémentaire.

Pour  $S$  une partie non vide de  $\Gamma \equiv \Gamma_3$ , nous introduisons les espaces suivants [80],

- $H^{1/2}(S)$  : espace des restrictions sur  $S$  des éléments de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Il est muni de la norme suivante,

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(S)} = \inf \left\{ \|\bar{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \bar{u} = u \text{ sur } S \right\}$$

- $H_{00}^{\frac{1}{2}}(S)$  : sous-espace de  $H^{\frac{1}{2}}(S)$  dont les éléments prolongés par 0 sur  $\Gamma$  appartiennent à  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,
- $H_{0,S}^1(\Omega)$  : sous espace de  $H^1(\Omega)$  dont les éléments ont une trace nulle sur  $S$ .

Par ailleurs, nous avons les injections continues suivantes

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(S) \subset H^{\frac{1}{2}}(S) \subset L^2(S) \subset H^{-\frac{1}{2}}(S) \subset (H_{00}^{\frac{1}{2}}(S))'$$

où  $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(S))'$  est l'espace dual de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(S)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(S) = (H^{\frac{1}{2}}(S))'$ .

**Remarque 3** Nous donnons quelques remarques [80, 109] qui nous seront utiles dans la suite

1. Si  $v \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  alors son prolongement par zéro  $\bar{v}$  sur toute  $\Gamma$  n'est pas forcément dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Et, pour obtenir cela il faut que  $v \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(S)$ , et nous avons ainsi

$$\exists c > 0, \forall v \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(S), c \|v\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(S)} \leq \|\bar{v}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \|v\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(S)}$$

2. Si  $T \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  alors sa restriction (au sens de distribution) sur  $S$  n'est pas forcément dans  $H^{-\frac{1}{2}}(S)$  mais elle est dans  $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(S))'$ . Par contre, si  $T \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et sa restriction sur  $L$  est nulle alors  $T|_S \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$ .

3. Une fonction  $v \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  se prolonge par continuité en une fonction de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

• Nous écrivons ici la formule de Green dans le cas non-homogène pour  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \nabla(\sigma(x)\nabla u(x)) v(x) dx = - \int_{\Omega} \sigma(x)\nabla u(x)\nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x) ds(x) \quad (4.2.1)$$

• L'application suivante définit un produit scalaire sur l'espace  $H_{0,S}^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} H_{0,S}^1(\Omega) \times H_{0,S}^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow \langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \sigma(x)\nabla u(x)\nabla v(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

et la norme associée à ce produit scalaire  $\|v\|_{0,S} = \left( \int_{\Omega} \sigma(x) |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$  est équivalente à la norme induite par  $H^1(\Omega)$ .

En effet, la bilinéarité et la symétrie de cette application est évidente. D'autre part,  $\sigma_j > 0$  ( $j = 2, 3$ ), donc  $\langle v, v \rangle$  est positif et  $\langle v, v \rangle = 0$  implique  $\nabla v = 0$  dans  $\Omega$ . Or  $v|_S = 0$  donc  $v = 0$  dans  $\Omega$ .

L'équivalence entre la norme  $\|\cdot\|_{0,S}$  et la norme induite de  $H^1(\Omega)$  est assurée par l'inégalité de Poincaré tout en tenant compte du fait que  $\sigma_j > 0$ .

### 4.3 Position du problème

Le but de ce chapitre consiste à calculer le potentiel et le flux sur la surface  $\Gamma_1$  du cerveau :  $u|_{\Gamma_1}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$  à partir des valeurs connues partiellement sur la surface du scalp :  $u|_S = f$  et  $\sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = g$ , où  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ .

Le cas particulier de l'EEG correspond à  $g = 0$  et  $f$  une mesure générée par un terme source placé dans le cerveau.

Afin de résoudre ce problème, nous utilisons deux approches, *approche simultanée* et *approche successive* :

1. **approche simultanée.** Cette approche consiste à résoudre un problème de Cauchy sur le domaine non-homogène  $\Omega = \Omega_2 \cup \Gamma_2 \cup \Omega_3$  défini comme suit

$$(PC_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u & = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

2. **approche successive.** Cette approche consiste à résoudre successivement deux problèmes de Cauchy homogènes. Il s'agit d'abord de résoudre un premier problème de Cauchy dans  $\Omega_3$  (scalp) ensuite, avec les valeurs du potentiel et du flux calculées sur  $\Gamma_2$ , résoudre un deuxième problème de Cauchy dans  $\Omega_2$  (crâne).

Le premier problème à résoudre est le suivant,

$$(PC_{scalp}) \begin{cases} -\Delta u_3 & = 0 & \text{dans } \Omega_3 \\ u_3 & = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu} & = g & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

La résolution de ce problème nous permet alors d'obtenir les traces du potentiel et du flux sur  $\Gamma_2$  :  $(u_3)|_{\Gamma_2}$  et  $\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu}|_{\Gamma_2}$  qui servent comme données pour résoudre le deuxième problème de Cauchy qui s'écrit comme suit,

$$(PC_{crâne}) \begin{cases} -\Delta u_2 & = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 & = u_3 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} & = -\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

## 4.4 Problème mal-posé

Le problème de Cauchy est connu pour être un problème mal posé [49]. L'existence de la solution n'est pas forcément assurée pour des données quelconques, nous parlons alors des données compatibles lorsqu'une solution existe (cf définition 2). Quand une solution existe elle est unique (cf §4.4.1). Cependant, de faibles perturbations sur les données définies sur la partie "sur-déterminée" peuvent briser leur compatibilité et entraîner une instabilité dans la solution du problème de Cauchy.

### 4.4.1 Unicité de la solution du problème de Cauchy

Nous considérons le problème de Cauchy (4.3.3) pour lequel nous prouvons l'unicité de la solution.

En effet, soit  $f \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  et  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$  deux fonctions données et soit  $u$  et  $v$  deux solutions du problème de Cauchy (4.3.3) correspondant à  $f$  et  $g$ . Nous posons  $w = v - u$ . Nous avons alors  $-\nabla(\sigma \nabla w) = 0$  dans  $\Omega$  et  $w|_S = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_S = 0$ , ce qui implique, d'après le théorème de Holmgren,  $w = 0$  dans  $\Omega$ .  $\square$

De la même manière nous démontrons l'unicité de la solution des problèmes de Cauchy (4.3.4) et (4.3.5) définis dans  $\Omega_3$  et  $\Omega_2$ .

#### 4.4.2 Compatibilité des données

Nous notons  $\mathcal{X}_{sim} \subset H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$  l'ensemble des données de Cauchy  $(f, g)$  compatibles pour le problème  $(PC_{sim})$  selon la définition suivante,

**Définition 2** Soit  $(\alpha, \beta) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ . Nous dirons que les données de Cauchy  $(\alpha, \beta)$  sont compatibles pour le problème de Cauchy <sup>a</sup> (4.3.3) s'il existe une fonction  $U \in H^1(\Omega)$  telle que  $-\nabla(\sigma \nabla U) = 0$  dans  $\Omega$ ,  $\alpha = U|_S$  et  $\beta = \sigma_3 \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{\Gamma_3}$ .

Nous notons  $\mathcal{X}_{scalp} \subset H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$  l'ensemble des données compatibles pour le problème  $(PC_{scalp})$  et  $\mathcal{X}_{crâne} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$  celui des données compatibles pour le problème  $(PC_{crâne})$ .

Nous vérifions aisément que  $\mathcal{X}_{sim} \subset \mathcal{X}_{scalp}$ ; si les données de Cauchy  $(f, g)$  sont compatibles pour le problème de Cauchy  $(PC_{sim})$  alors elles le sont aussi pour le problème  $(PC_{scalp})$ . Par contre, si  $u_3$  est une solution du problème  $(PC_{scalp})$ , alors ses traces  $(u_3|_{\Gamma_2}, -\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu}|_{\Gamma_2})$  ne sont pas forcément compatibles pour le problème  $(PC_{crâne})$ . Nous posons ainsi l'ensemble suivant

$$\mathcal{X}_{suc} = \{(f, g) \in \mathcal{X}_{scalp} \text{ t.q. } \mathcal{T}(f, g) \in \mathcal{X}_{crâne}\}$$

avec  $\mathcal{T} : \mathcal{X}_{scalp} \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$  qui à  $(f, g)$  associe  $\mathcal{T}(f, g) := (u_3|_{\Gamma_2}, -\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu}|_{\Gamma_2})$  où  $u_3$  est la solution du problème  $(PC_{scalp})$  correspondant aux données  $(f, g)$ .

Nous vérifions facilement :  $\mathcal{X}_{sim} = \mathcal{X}_{suc}$ .

Donc, la définition 2 de compatibilité que nous avons donné aux données de Cauchy est valable pour les trois problèmes de Cauchy.

#### Cas des données EEG

• Dans le cas particulier où  $g = 0$ , nous disons tout simplement que  $f \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  est une donnée compatible pour le problème (4.3.3) et désignons par  $\mathcal{X}_{sim}^0$  l'ensemble des données compatibles :

$$\mathcal{X}_{sim}^0 = \left\{ f \in H^{\frac{1}{2}}(S), \exists U \in H^1(\Omega) : -\nabla(\sigma \nabla U) = 0, U|_S = f, \sigma_3 \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = 0 \right\}$$

Nous démontrons dans ce qui suit que cet espace est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(S)$ .

**Lemme 3** L'ensemble  $\mathcal{X}_{sim}^0$  est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(S)$ .

**Preuve.**

En effet, comme  $\mathcal{X}_{sim}^0$  est un s.e.v. de  $H^{\frac{1}{2}}(S)$  et par suite  $\overline{\mathcal{X}_{sim}^0} = (\mathcal{X}_{sim}^0)^\perp$ , il suffit de démontrer que  $\mathcal{X}_{sim}^0{}^\perp = \{0\}$ .

Soit  $\Phi \in \mathcal{X}_{sim}^0{}^\perp$ , donc  $\Phi \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$  et  $\langle \Phi, f \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{X}_{sim}^0$ . Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial \nu} = \Phi & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.4.6)$$

<sup>a</sup>Nous disons aussi le problème de Cauchy est consistant pour ces données.

Soit  $\theta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , nous définissons la fonction  $Z$  par :

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla Z) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ Z & = \theta & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial Z}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Par la formule de Green pour le cas non-homogène (4.2.1) appliquée aux fonctions  $v$  et  $Z$  nous obtenons

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \theta ds = \int_S \Phi Z ds$$

Comme  $Z|_S \in \mathcal{X}_{sim}^0$  par définition,  $\int_S \Phi Z ds = 0$ . D'où

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \theta ds = 0, \quad \forall \theta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

Ce qui implique  $\frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0$ . Donc  $v$  vérifie dans  $\Omega$ ,  $-\nabla(\sigma \nabla v) = 0$  et  $v|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0$ . Le théorème de Holmgren implique alors  $v = 0$  dans  $\Omega$  et donc  $\Phi = 0$ .  $\square$

**Remarque 3** Comme  $\mathcal{X}_{sim}^0$  est dense dans l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(S)$  alors  $\mathcal{X}_{sim}$  l'est aussi dans  $H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ .

• Dans le cas particulier où  $f$  est une mesure EEG, nous introduisons la définition suivante

**Définition 3** Soit  $f \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ . Nous dirons que  $f$  est une mesure compatible pour le problème (4.3.3) s'il existe  $(m, q_1, \dots, q_m, S_1, \dots, S_m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{3m} \times \Omega_1^m$  tels que  $f = U|_S$  où  $-\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = \sum_{j=1}^m q_j \nabla \delta_{S_j}$  dans  $\Omega_T$  et  $\sigma_3 \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = 0$  avec  $\Omega_T = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \Omega_3$ .

Nous posons  $\mathcal{X}_{mes}$  l'ensemble des mesures compatibles et démontrons dans le lemme suivant qu'il est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(S)$ .

**Lemme 4** L'ensemble  $\mathcal{X}_{mes}$  est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(S)$ .

**Preuve.**

En effet,  $\mathcal{X}_{mes}$  est un s.e.v. donc il suffit de démontrer que  $\mathcal{X}_{mes}^\perp = \{0\}$ .

Soit  $\Psi \in \mathcal{X}_{mes}^\perp$ , donc  $\Psi \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$  et  $\langle \Psi, f \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{X}_{mes}$ .

Soit  $v$  la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla v) & = 0 & \text{dans } \Omega_T \\ \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial \nu} & = \Psi & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.4.8)$$

Ce problème est bien posé dans l'espace quotient  $H^1(\Omega_T)/R$ .

Soit  $y$  un point quelconque de  $\Omega_1$ , posons

$$F^i(y) = \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla} \delta(x - y)$$

où  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  est le  $i$ ème vecteur de la base canonique dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $U^i$  la solution (à une constante additive près) du problème

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla U^i) = F^i & \text{dans } \Omega_T \\ \sigma_3 \frac{\partial U^i}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.4.9)$$

Puisque  $F^i$  est à support ponctuel dans  $\Omega_1$ , alors  $U^i$  est harmonique dans  $\Omega_2 \cup \Omega_3$ . Par ailleurs, nous avons  $\langle F^i, v \rangle = \int_S \Psi U^i ds$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Et puisque  $U^i|_S \in \mathcal{X}_{mes}$ ,  $\int_S \Psi U^i ds = 0$ . Ce qui implique  $\nabla v(y) = 0$  dans  $\Omega_1$ , et donc  $\Psi = 0$ .  $\square$

**Remarque 4** Si nous posons  $\mathcal{X}_{scalp}^0$  l'ensemble suivant

$$\mathcal{X}_{scalp}^0 = \left\{ f \in H^{\frac{1}{2}}(S); \exists u_3 \in H^1(\Omega_3) : -\Delta u_3 = 0 \text{ dans } \Omega_3, u_3|_S = f, \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \right\}$$

Nous vérifions aisément les inclusions suivantes

$$\mathcal{X}_{mes} \subset \mathcal{X}_{sim}^0 \subset \mathcal{X}_{scalp}^0$$

## 4.5 Revue bibliographique sur les méthodes de résolution du problème de Cauchy

Le problème de Cauchy étant mal-posé, il ne peut pas être résolu directement puisque toute approche directe, comme par exemple utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire obtenu après discrétisation, produirait une solution fortement instable. Et appliquer une méthode de moindres carrés seule n'est pas stable non plus puisque cette méthode consiste à approcher les données connues sur  $S$  avec les valeurs calculées en résolvant un problème direct, or cette démarche n'exclut rien au caractère mal-posé du problème de Cauchy qui se traduit d'après [11] par le fait qu'on peut approcher aussi exactement qu'on le souhaite les données sur  $S$  par des traces d'une fonction harmonique au prix d'un comportement très "agité" des traces de cette fonction sur la partie restante du bord.

Ce manque de stabilité a poussé les chercheurs à développer différentes méthodes afin de régulariser le problème et pouvoir le résoudre numériquement.

D'une part, il y a les méthodes qui consistent à rapporter le problème de Cauchy à la classe des problèmes bien posés au sens de Tikhonov <sup>b</sup>. Parmi ces méthodes nous citons la méthode de quasi-réversibilité. Cette méthode initialement introduite par *Lattès & Lions* [74] consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème différentiel bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre, la convergence au problème d'origine est assurée quand ce paramètre tend vers 0. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre le problème de Cauchy, notamment *Klibanov & Santosa* [67] et plus récemment *Bourgeois* [18]. Ce dernier a donné une "formulation mixte" de cette méthode qui consiste à remplacer le problème différentiel bien-posé obtenu par la formulation classique par un système de deux équations différentielles d'ordre 2. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux [67, 18] et aux références qui y sont citées.

<sup>b</sup>voir la référence [75] dans [70].

D'autre part, nous trouvons les méthodes qui régularisent le problème de Cauchy à l'aide des fonctions paramétriques de Tikhonov. Il existe une littérature abondante sur les techniques de régularisation, la plus utilisée est la méthode de régularisation de Tikhonov [111] qui consiste en un problème de minimisation (au sens de moindres carrés) auquel est ajouté un terme de pénalité qui dépend d'un paramètre dit paramètre de régularisation. Il existe dans la littérature plusieurs méthodes pour le choix optimal de ce paramètre, comme par exemple la méthode de *L-curve* et le principe de Mozorov [23]. Parmi les travaux appliquant cette méthode au problème de Cauchy nous citons le travail de *Falk & Monk* [39], celui de *Cimetière & al.* [24] où le terme de pénalité porte sur la distance entre deux solutions itératives successives, ainsi que [101], [23] etc .

Une autre classe de méthodes regroupe les méthodes itératives qui sont à caractère régularisant. Ces méthodes ont été largement appliquées aux problèmes inverses. Parmi elles, nous citons celle proposée par *Kozlov & al.* [70] dont les paramètres de régularisation dépendent du nombre d'itérations et du choix initial du schéma itératif. Cette méthode est basée sur une procédure itérative qui consiste à résoudre une suite alternative de problèmes bien-posés aux conditions aux limites mêlées, jusqu'à satisfaire un certain critère d'arrêt défini à l'avance. Cette méthode sera décrite en détails dans la section suivante. Nous citons également dans ce groupe de méthodes, la méthode itérative de Mann développée par *Engl & Leitão* [38] et la méthode de Backus-Gilbert appliquée sur une formulation en un problème de moment comme par exemple le travail de *Hon & Wei* [57].

Plus récemment, des travaux ont été faits sur le problème de Cauchy par *Andrieux & al.* [4] et *Ben Belgacem & al.* [14, 15]. Dans le premier [4], une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius*<sup>c</sup> a été introduite, elle évoque les valeurs sur la partie *sur-déterminée* et la partie *sous-déterminée*. Le problème de Cauchy est ainsi transformé en un problème d'optimisation résolu par la méthode de région de confiance. Ils ont également démontré que l'algorithme proposé par *Kozlov & al.* peut être interprété comme une méthode de minimisation de directions alternées de leur fonctionnelle coût.

D'autre part, dans [14, 15], le problème de Cauchy a été étudié théoriquement et numériquement. Une approche variationnelle *non standard* a été présentée, elle transforme le problème de Cauchy en une équation variationnelle pseudo-différentielle de type Steklov-Poincaré. Cette équation est posée sur la partie de la frontière où les valeurs du potentiel et du flux sont inconnues. Pour résoudre ce problème de Steklov-Poincaré, les auteurs ont considéré la méthode des moindres carrés, ils ont démontré que pour des données incompatibles, le problème de Steklov-Poincaré qui n'a pas de solution en général a au moins une solution pseudo-consistante qui est une suite minimisante. Ils ont également démontré que la fonctionnelle coût de moindre carrés correspondante au problème de Steklov-Poincaré diffère d'une constante additive de la fonctionnelle de *Kohn-Vogelius* écrite pour ce problème. Ensuite dans [15], ils ont résolu numériquement le problème variationnel de Steklov-Poincaré en appliquant un schéma de régularisation de Tikhonov et une approximation par la méthode des éléments finis.

Dans le paragraphe suivant, nous comparons entre les trois principales classes des méthodes de résolution du problème de Cauchy décrites ci-dessus, principalement la méthode de quasi-réversibilité, la méthode de régularisation de Tikhonov et la méthode itérative alternative proposée par *Kozlov & al.*

---

<sup>c</sup>nous utiliserons ce type de fonctionnelle dans le chapitre suivant afin de résoudre le problème inverse en EEG.

### 4.5.1 Comparaison entre les principales méthodes de résolution

La méthode de quasi-réversibilité est efficace puisqu'elle résout le problème directement. Grâce aux expériences numériques validées, cette méthode semble être précise et robuste, mais reste à voir si l'on obtient de bons résultats sur des applications réalistes. Cependant, cette méthode présente aussi certains inconvénients comme le choix particulier du paramètre introduit qui peut être difficile à réaliser dans des circonstances réelles et la difficulté de prendre en compte les contraintes physiques qui peuvent être liées au problème en considération.

Quant à la méthode de régularisation de Tikhonov, elle est largement répandue dans les applications et elle a produit les principaux résultats dans la littérature. C'est une méthode robuste et donne des solutions bien précises. Cependant, elle est coûteuse en termes de calcul et de mémoire. Là également, on est en face du problème du choix particulier du paramètre de régularisation.

Finalement, la méthode proposée par *Kozlov & al.* a été largement expérimentée et les travaux réalisés sur cette méthode ont fait preuve de robustesse et de précision. En outre, cette méthode a beaucoup d'avantages, comme la simplicité du calcul, la similarité du schéma pour les opérateurs linéaires et non-linéaires, et la facilité de prendre en considération toute contrainte (physique) qui peut être liée au problème. Et surtout, elle n'exige aucun paramètre de sélection choisi *a priori* comme les deux précédentes méthodes. Un possible inconvénient reporté dans les travaux faits est le grand nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence, pour remédier à ce problème des procédures de relaxation ont été proposées. Mais, dans le cadre de notre problème, nous n'avons pas rencontré ce problème pour des raisons qui seront commentées dans la section des résultats numériques.

Pour résoudre le problème de Cauchy, nous avons opté pour la méthode itérative de *Kozlov & al.* vu ses avantages multiples. C'est une méthode simple à implémenter, le schéma est applicable pour les deux approches *successive* et *simultanée* décrites auparavant et pour le cas où le bord est formé de plus que deux composantes. En outre, cette méthode peut être couplée aisément avec la méthode des équations intégrales et de ce fait, elle n'est pas coûteuse puisqu'il y aura deux matrices à inverser une fois pour toutes les itérations.

## 4.6 La méthode itérative alternative de *Kozlov & al.*

Dans cette section, nous présentons la méthode itérative alternative proposée par *Kozlov & al.*<sup>d</sup> [70]. Nous en décrivons d'abord le principe et donnons ensuite le schéma de l'algorithme pour les deux approches *successive* et *simultanée* décrites au paragraphe §4.3. Puis, nous reprenons le théorème de convergence démontré dans [70] pour un domaine homogène et l'adaptions au cas du problème non-homogène ( $PC_{sim}$ ). Enfin, nous présentons une synthèse de certains travaux effectués sur cette méthode.

### 4.6.1 Principe de la méthode

Pour illustrer le principe de cette méthode, nous prenons le domaine  $\mathcal{C}$  formé par une couronne (Fig. 4.2) et considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (4.6.10)$$

<sup>d</sup>Cette méthode est nommée par certains auteurs : la méthode (ou solveur) de *Dirichlet-to-Neumann*

où  $f$  et  $g$  sont les données de Cauchy définies sur toute la surface extérieure  $\Gamma_e$ . Il s'agit de déterminer sur la surface intérieure  $\Gamma_i$  les traces  $u|_{\Gamma_i}$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}$  que nous notons respectivement  $f^*$  et  $g^*$ , ce qui revient donc à déterminer  $u$  solution du problème suivant

$$(4.6.11) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_e \\ u = f^*, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g^* & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$$

Ce problème peut être divisé en deux sous-problèmes bien-posés, l'un avec une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_e$  et une condition de Neumann sur  $\Gamma_i$  et l'autre avec une condition de Neumann sur  $\Gamma_e$  et une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_i$  définis comme suit

$$(4.6.12) \quad (P_{\hat{u}}) \begin{cases} -\Delta \hat{u} = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_e \\ \hat{u} = f^* & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (P_{\check{u}}) \begin{cases} -\Delta \check{u} = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \check{u} = f & \text{sur } \Gamma_e \\ \frac{\partial \check{u}}{\partial \nu} = g^* & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$$

Résoudre le problème de Cauchy (4.6.10) est déterminer  $u$  qui vérifie le problème (4.6.11) qui est assuré quand  $\hat{u}$  et  $\check{u}$  coïncident. C'est de cette idée que découle le principe de la méthode itérative de *Kozlov & al.* En partant d'une estimation initiale du potentiel  $u = f^*$  sur  $\Gamma_i$ , la méthode consiste à résoudre alternativement un problème de type  $(P_{\hat{u}})$  et un autre de type  $(P_{\check{u}})$  tels que, à chaque itération pour chacun de ces problèmes la condition au bord  $\Gamma_i$  est déduite de l'autre problème résolu précédemment.

Une suite de problèmes bien posés aux conditions limites mêlées est ainsi construite et le procédé itératif s'arrête quand un certain critère d'arrêt pré-défini à l'avance est atteint.

Dans [70], *Kozlov & al.* ont étudié théoriquement cette méthode, démontré la convergence de l'algorithme pour des données compatibles (cf §4.6.4), mis en évidence son caractère régularisant et établi une estimation de stabilité (cf §4.6.5).

#### 4.6.2 Le schéma de l'algorithme : *approche successive*

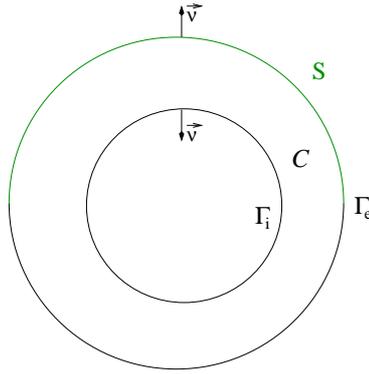
Dans l'approche *successive*, nous avons deux problèmes de Cauchy à résoudre, le premier ( $PC_{scalp}$ ) décrit dans (4.3.4) et le second ( $PC_{crâne}$ ) décrit dans (4.3.5). Dans les deux cas, il s'agit de résoudre un problème de Cauchy dans un domaine homogène représenté par une couronne afin de déterminer les valeurs inconnues du potentiel  $u$  et du flux  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  sur  $\Gamma_i$  comme suit

$$(4.6.13) \quad (PC_{suc}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ u = f_e & \text{sur } S \subset \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_e & \text{sur } \Gamma_e \end{cases}$$

où  $\mathcal{C}$  est une couronne dans  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 4.2),  $\Gamma_e$  est la surface extérieure de la couronne et  $\Gamma_i$  la surface intérieure,  $\vec{\nu}$  est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de la couronne comme le montre la figure (Fig. 4.2) et  $g_e \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$ ,  $f_e \in H^{\frac{1}{2}}(S)$ .

Dans le cas du problème ( $PC_{scalp}$ ) nous avons  $S \subset \Gamma_e$  une sous partie stricte tandis que pour le problème ( $PC_{crâne}$ ),  $S = \Gamma_e$ .

Pour le problème ( $PC_{suc}$ ), l'algorithme s'écrit comme suit :

FIG. 4.2 – Le domaine  $\mathcal{C}$  de la couronne

- Etant donné  $f^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$  une approximation initiale du potentiel sur  $\Gamma_i$ .

Pour  $k \geq 0$ ,

- résoudre :

$$(P1_{suc}) \begin{cases} -\Delta u^{2k} = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ u^{2k} = f^k & \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial u^{2k}}{\partial \nu} = g_e & \text{sur } \Gamma_e \end{cases}$$

$$\text{Poser } g^k = \frac{\partial u^{2k}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_i}$$

- Résoudre ensuite :

$$(P2_{suc}) \begin{cases} -\Delta u^{2k+1} = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial u^{2k+1}}{\partial \nu} = g^k & \text{sur } \Gamma_i \\ u^{2k+1} = f_e & \text{sur } S \\ \frac{\partial u^{2k+1}}{\partial \nu} = g_{e|L} & \text{sur } L = \Gamma_e \setminus S \end{cases}$$

$$\text{Poser } f^{k+1} = u_{\Gamma_i}^{2k+1}.$$

L'algorithme s'arrête quand un certain critère d'arrêt est atteint.

Nous pouvons également partir d'un choix initial du flux donné sur  $\Gamma_i$  en modifiant convenablement les problèmes directs de chaque itération.

**Remarque 5** Ce schéma correspond au cas des données partielles du problème ( $PC_{scalp}$ ). Dans le cas du passage crâne/cerveau, nous connaissons  $u = f_e$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_e$  sur toute  $\Gamma_e$  et donc il faut changer convenablement les conditions aux limites dans le problème ( $P2_{suc}$ ) de la suite impaire du schéma. Il s'agit ainsi de remplacer les deux conditions sur  $S$  et  $L$  par la condition de Dirichlet suivante :  $u^{2k+1} = f_e$  sur  $\Gamma_e$ .

### 4.6.3 Le schéma de l'algorithme : *approche simultanée*

Il s'agit de résoudre le problème de Cauchy ( $PC_{sim}$ ) que nous réécrivons ci-dessous

$$(PC_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u & = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.6.14)$$

L'algorithme de *Kozlov & al.* adapté à ce problème s'écrit de la manière suivante.

- Choisir une approximation initiale du potentiel sur  $\Gamma_1$  :  $f^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

Puis pour  $k \geq 0$ ,

- Résoudre :

$$(P1_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u^{2k}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{2k} & = f^k & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial u^{2k}}{\partial \nu} & = g & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

$$\text{Poser } g^k = \sigma_2 \frac{\partial u^{2k}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}.$$

- Puis résoudre :

$$(P2_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u^{2k+1}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_2 \frac{\partial u^{2k+1}}{\partial \nu} & = g^k & \text{sur } \Gamma_1 \\ u^{2k+1} & = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u^{2k+1}}{\partial \nu} & = g & \text{sur } L \end{cases}$$

$$\text{Poser } f^{k+1} = u^{2k+1} \Big|_{\Gamma_1}.$$

Dans le paragraphe suivant nous adapterons la démonstration de la convergence de l'algorithme donnée par *Kozlov & al.* dans le cas d'un problème homogène au cas du problème non-homogène ( $PC_{sim}$ ) décrit dans (4.6.14).

### 4.6.4 Théorème de convergence

Dans leur papier, *Kozlov & al.* ont établi un théorème de convergence de l'algorithme écrit pour le problème de Laplacien dans un domaine homogène simplement connexe. Dans ce paragraphe, en adaptant les mêmes techniques, nous établissons un théorème de convergence pour le schéma écrit pour le problème ( $PC_{sim}$ ) dans le domaine non-homogène<sup>e</sup> et doublement connexe  $\Omega$ ; la démonstration est quasiment identique.

<sup>e</sup>Dans notre cas, nous avons  $\sigma$  est constante par morceaux, mais tout ce qui est fait ici reste applicable dans le cas où  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\sigma(x)$  strictement positif  $\forall x \in \Omega$ .

**Théorème 4** (*Théorème de convergence*)

Pour des données compatibles, la suite  $(u^k)_k$  converge dans  $H^1(\Omega)$  vers la solution du problème de Cauchy (4.6.14) pour tout choix initial  $f^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

**Preuve.**

Soit  $f^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  et soit  $(\alpha, \beta) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$  des données compatibles dans le sens :  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{X}_{sim}$  (cf §4.4.2). Donc il existe  $U \in H^1(\Omega)$  tel que  $-\nabla(\sigma \nabla U) = 0$  dans  $\Omega$ ,  $U|_S = \alpha$  et  $\sigma_3 \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = \beta$ .

Pour toute itération  $k \geq 0$ , nous définissons l'application linéaire  $R_k$  qui associe à  $(\alpha, \beta, f^0) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  la solution à l'itération  $k$ ,  $u^k = R_k(\alpha, \beta, f^0) \in H^1(\Omega)$ , qui est continue car le problème aux conditions aux limites mêlées est bien posé (cf §4.7).

Nous voulons démontrer que  $(u^k)_k$  converge vers  $U$ . Puisque  $U = R_k(\alpha, \beta, U|_{\Gamma_1})$  alors  $R_k(\alpha, \beta, f^0) - U = R_k(0, 0, f^0 - U|_{\Gamma_1})$  et donc il suffit de démontrer que  $r_k(\eta) \equiv R_k(0, 0, \eta)$  converge dans  $H^1(\Omega)$  vers 0, pour tout  $\eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

Cette démonstration se déroule de la façon suivante. D'abord nous démontrons que si pour un  $\eta \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  donné, la sous-suite impaire  $(r_{2k-1})_k$  (ou paire  $(r_{2k})_k$ ) converge alors la suite  $(r_k)_k$  converge et sa limite est la fonction nulle. Ensuite nous démontrons que l'ensemble des  $\eta$  pour lesquelles la suite  $(r_k)_k$  converge est  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

En effet, soit  $\eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , nous considérons les systèmes suivants satisfaits par  $r_0(\eta)$ ,  $r_{2k-1}(\eta)$  et  $r_{2k}(\eta)$  :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla r_0) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ r_0 & = \eta & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial r_0}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.6.15)$$

et pour  $k \geq 1$ ,

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla r_{2k-1}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_2 \frac{\partial r_{2k-1}}{\partial \nu} & = \sigma_2 \frac{\partial r_{2k-2}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1 \\ r_{2k-1} & = 0 & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial r_{2k-1}}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.6.16)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla r_{2k}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ r_{2k} & = r_{2k-1} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial r_{2k}}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.6.17)$$

Au moyen de la formule de Green (4.2.1) nous obtenons

$$\begin{cases} \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma |\nabla r_k|^2 dx & = - \int_{\Gamma_1} \sigma_2 \left( \frac{\partial r_k}{\partial \nu} \right) r_k ds(x) \\ \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma \nabla r_{2k-1} \nabla r_{2k} dx & = - \int_{\Gamma_1} \sigma_2 \left( \frac{\partial r_{2k-1}}{\partial \nu} \right) r_{2k} ds(x) \\ \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma \nabla r_{2k+1} \nabla r_{2k} dx & = - \int_{\Gamma_1} \sigma_2 \left( \frac{\partial r_{2k+1}}{\partial \nu} \right) r_{2k} ds(x) \end{cases} \quad (4.6.18)$$

Ce qui implique les relations suivantes que nous utiliserons dans la suite,

$$\int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma |\nabla (r_{2k} - r_{2k-1})|^2 dx = \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma (|\nabla r_{2k-1}|^2 - |\nabla r_{2k}|^2) dx \quad (4.6.19)$$

$$\int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma |\nabla (r_{2k+1} - r_{2k})|^2 dx = \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \sigma (|\nabla r_{2k}|^2 - |\nabla r_{2k+1}|^2) dx \quad (4.6.20)$$

Pour la preuve du théorème, nous avons besoin du résultat suivant que nous donnons sous forme de proposition.

**Proposition 2** *Si l'une des sous-suite impaire ou paire converge dans  $H^1(\Omega)$  alors la suite  $(r_k)_k$  converge. Et la limite est la fonction nulle.*

**Preuve.**

Supposons la sous-suite impaire  $(r_{2k-1})_k$  converge dans  $H^1(\Omega)$  vers la limite  $r^i$  et définissons la fonction  $r^p$  par

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla r^p) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ r^p & = r^i & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial r^p}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.6.21)$$

et posons  $\theta^k = r_{2k} - r^p$ , dont nous vérifions qu'elle est solution de

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla \theta^k) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \theta^k & = r_{2k-1} - r^i & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial \theta^k}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.6.22)$$

Comme  $r_{2k-1} \xrightarrow[k]{} r^i$  dans  $H^1(\Omega)$  alors  $r_{2k-1}|_{\Gamma_1} \xrightarrow[k]{} r^i|_{\Gamma_1}$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  et donc  $\theta^k \xrightarrow[k]{} 0$  dans  $H^1(\Omega)$ . Ce qui implique que  $r_{2k} \xrightarrow[k]{} r^p$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Montrons maintenant que  $r^i = r^p = 0$  dans  $\Omega$ . En effet, puisque  $\frac{\partial r_{2k-1}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \frac{\partial r_{2k-2}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$ , la différence  $z = r^i - r^p$ , satisfait  $-\nabla(\sigma \nabla z) = 0$  dans  $\Omega$ ,  $z|_{\Gamma_1} = 0$  et  $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0$ . Le théorème de Holmgren implique que  $z = 0$  et par suite  $r^i = r^p \equiv r$  dans  $\Omega$ . Par ailleurs,  $r^i|_S = 0$  puisque  $r_{2k-1}|_S = 0$  et d'après (4.6.21)  $\frac{\partial r^p}{\partial \nu}|_S = 0$ . D'où  $r|_S = \frac{\partial r}{\partial \nu}|_S = 0$  et à nouveau le théorème de Holmgren donne  $r = 0$  dans  $\Omega$ .

Pour achever la démonstration du théorème de convergence il reste à prouver que la suite  $(r_k(\eta))_k$  converge dans  $H^1(\Omega)$  pour tout  $\eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

Nous posons alors  $\mathcal{R} = \left\{ \eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) : \text{la suite } (r_k(\eta))_k \text{ converge dans } H^1(\Omega) \right\}$  et nous cherchons à montrer que  $\mathcal{R} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Cette démonstration se fait en deux étapes. Nous montrons d'abord que l'ensemble  $\mathcal{R}$  est fermé et ensuite qu'il est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

• Montrons que  $\mathcal{R}$  est fermé. Soit  $\bar{\eta} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  et  $(\eta_j)_j$  une suite de  $\mathcal{R}$  qui converge vers  $\bar{\eta}$ . Il s'agit de montrer que  $\bar{\eta} \in \mathcal{R}$ .

Nous considérons la sous-suite impaire  $(r_{2k-1})_k$  qui est dans  $H_{0,S}^1(\Omega)$ . D'une part de (4.6.19) et (4.6.20) nous savons que  $\left( \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_k|^2 dx \right)_{k \geq 0}$  est une suite positive décroissante et donc convergente, et posons  $l_{\bar{\eta}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\bar{\eta})|^2 dx$ . D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons  $\forall j$  :

$$0 \leq \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\bar{\eta})|^2 dx \leq \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\bar{\eta} - \eta_j)|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\eta_j)|^2 dx \\ + 2 \left( \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\bar{\eta} - \eta_j)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\eta_j)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6.23)$$

et comme la suite  $\left( \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_k|^2 dx \right)_{k \geq 0}$  est décroissante, nous avons  $\forall k, \forall j$ ,

$$0 \leq \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\bar{\eta})|^2 dx \leq \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_0(\bar{\eta} - \eta_j)|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\eta_j)|^2 dx \\ + 2 \left( \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_0(\bar{\eta} - \eta_j)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\eta_j)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6.24)$$

En faisant tendre  $k \rightarrow \infty$ , nous obtenons  $r_{2k-1}(\eta_j) \xrightarrow[k]{} 0$  car  $\eta_j \in \mathcal{R}$  et par conséquent

$$0 \leq l_{\bar{\eta}} \leq \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_0(\bar{\eta} - \eta_j)|^2 dx \quad (4.6.25)$$

En faisant tendre maintenant  $j \rightarrow \infty$  dans l'inégalité ci-dessus nous obtenons  $l_{\bar{\eta}} = 0$  car  $\eta_j \xrightarrow[j]{} \bar{\eta}$ . Ce qui veut dire,

$$\|r_{2k-1}(\bar{\eta})\|_{0,S}^2 \equiv \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\bar{\eta})|^2 dx \xrightarrow[k]{} 0$$

Comme les normes  $\|\cdot\|_{0,S}$  et  $\|\cdot\|_{H^1}$  sont équivalentes (cf 4.2.2) et  $(r_{2k-1}(\bar{\eta}))_k$  converge dans  $H_{0,S}^1(\Omega)$  alors  $(r_k(\bar{\eta}))_k$  converge dans  $H^1(\Omega)$  et donc  $\bar{\eta} \in \mathcal{R}$ .

• Montrons maintenant que  $\mathcal{R}$  est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Considérons l'opérateur linéaire  $\Lambda$  défini comme suit

$$\begin{aligned} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ \eta &\rightarrow \Lambda\eta = r_2(\eta)|_{\Gamma_1} - \eta \end{aligned} \quad (4.6.26)$$

montrons d'abord que **(i)**  $Im(\Lambda) \subset \mathcal{R}$  et ensuite **(ii)**  $Im(\Lambda)$  est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ .

**(i)** Soit  $\xi = r_2(\eta)|_{\Gamma_1} - \eta \in Im(\Lambda)$ . Par linéarité nous avons  $r_{2k}(\xi) = r_{2k+2}(\eta) - r_{2k}(\eta)$ . Il s'agit de démontrer que  $\xi \in \mathcal{R}$ , c'est à dire que la suite  $(r_k(\xi))_k$  converge dans  $H^1(\Omega)$ .

Or nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\xi)|^2 dx &= \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k+2}(\eta) - \nabla r_{2k}(\eta)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k+2}(\eta)|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\eta)|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \sigma \nabla r_{2k+2}(\eta) \nabla r_{2k}(\eta) dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k+2}(\eta)|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\eta)|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k+1}(\eta)|^2 dx \end{aligned}$$

Et comme, d'après les relations (4.6.19) et (4.6.20), la suite  $(\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_k(\eta)|^2 dx)_k$  est décroissante, nous avons

$$\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\xi)|^2 dx \leq \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k+2}(\eta)|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\eta)|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k+2}(\eta)|^2 dx$$

Et donc

$$\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\xi)|^2 dx \leq \int_{\Omega} \sigma (|\nabla r_{2k}(\eta)|^2 - |\nabla r_{2k+2}(\eta)|^2) dx \quad (4.6.27)$$

Par ailleurs, les deux suites  $(\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\xi)|^2 dx)_k$  et  $(\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k}(\eta)|^2 dx)_k$  sont convergentes (car positives décroissantes). Si nous désignons leurs limites respectivement par  $l_{\xi}$  et  $l_{\eta}$ , d'après (4.6.27), nous obtenons  $0 \leq l_{\xi} \leq l_{\eta} - l_{\eta}$ , et donc  $l_{\xi} = 0$ . Ce qui implique, puisque la suite  $(\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_k(\xi)|^2 dx)_k$  est décroissante, la convergence vers 0 de la suite  $(\int_{\Omega} \sigma |\nabla r_{2k-1}(\xi)|^2 dx)_k$ . Par suite  $r_{2k-1}(\xi) \xrightarrow[k]{k} 0$  dans  $H^1(\Omega)$  et enfin la proposition 2 implique la convergence de la suite  $(r_k(\xi))_k$  dans  $H^1(\Omega)$ .

(ii) Montrons que  $Im(\Lambda)$  est dense dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ . Ce qui revient à montrer que  $Ker(\Lambda^*) = \{0\}$  où  $\Lambda^*$  est l'opérateur adjoint de  $\Lambda$ .

Soit  $\phi \in Ker(\Lambda^*)$ , donc  $\phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  et  $\Lambda^* \phi = 0$ . Par conséquent,  $\forall \eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , nous avons  $\langle \Lambda^* \phi, \eta \rangle = \langle \phi, \Lambda \eta \rangle = 0$ , et par suite :

$$\int_{\Gamma_1} (r_2(\eta) - \eta) \phi ds = 0 \quad \forall \eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \quad (4.6.28)$$

Soit maintenant  $v$  telle que :

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla v) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \phi & \text{sur } \Gamma_1 \\ v &= 0 & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.6.29)$$

Par application de la formule de Green dans  $\Omega$  pour  $v$  et  $r_1(\eta)$  et au moyen de (4.6.28), nous obtenons

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_2 \frac{\partial r_1}{\partial \nu}(\eta) v ds = \int_{\Gamma_1} \eta \phi ds \quad (4.6.30)$$

Nous considérons ensuite la fonction  $w$  solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma\nabla w) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ w & = v & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial w}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.6.31)$$

Par la formule de Green dans  $\Omega$  pour  $w$  et  $r_0(\eta)$ , et au moyen de l'équation obtenue (4.6.30), nous obtenons l'équation suivante

$$\int_{\Gamma_1} \left( \phi - \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \eta \, ds = 0, \quad \forall \eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \quad (4.6.32)$$

D'où  $\sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} = \phi$  sur  $\Gamma_1$ .

Posons maintenant  $z = v - w$ . Comme  $\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \phi$ , nous avons  $z|_{\Gamma_1} = \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0$  et  $-\nabla(\sigma\nabla z) = 0$  dans  $\Omega$ . D'après le théorème de Holmgren nous obtenons  $z = 0$  dans  $\Omega$  et donc  $v = w$ . Et puisque  $v|_S = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_S = 0$  nous avons alors  $v = w = 0$  dans  $\Omega$ , et donc  $\phi = 0$ .

**Remarque 6** *En suivant [70], nous pouvons également démontrer que si l'on a  $(\alpha, \beta) \in H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$  et si pour un certain  $f^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  la suite  $(R_k(\alpha, \beta, f^0))_k$  converge vers un  $U$  dans  $H^1(\Omega)$  alors  $U$  est solution du problème suivant :*

$$-\nabla(\sigma\nabla U) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad U|_S = \alpha, \quad \sigma_3 \frac{\partial U}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = \beta.$$

#### 4.6.5 Caractère régularisant de l'algorithme

Nous considérons le problème  $(PC_{sim})$  défini dans (4.6.14),  $f$  et  $g$  les données exactes définies sur  $S$  et  $\Gamma_3$  respectivement,  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  des perturbations de  $f$  et de  $g$ . Nous désignons par  $U$  la solution exacte du problème de Cauchy  $(PC_{sim})$  correspondant à  $f$  et  $g$  et considérons pour un  $f^0$  donné, la famille des opérateurs  $R_k(\cdot, \cdot, f^0) : H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \rightarrow H^1(\Omega)$  qui associe à  $(f, g)$  la solution  $u^k$  à l'itération  $k$  de l'algorithme itératif,  $k = 0, 1, \dots$ . Notre but dans ce paragraphe est d'éditer le caractère régularisant de l'algorithme comme dans [70].

**Définition 4** *(famille régularisante)*

*La famille des opérateurs  $R_k(\cdot, \cdot, f^0) : H^{\frac{1}{2}}(S) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \rightarrow H^1(\Omega)$  pour  $k = 0, 1, \dots$  est dite régularisante pour le problème de Cauchy  $(PC_{sim})$  de solution exacte  $U$  s'il existe un réel positif  $\delta_0$  et des fonctions  $k(\delta)$  et  $\varepsilon(\delta)$  définies en  $(0, \delta_0)$  tels que  $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  et l'inégalité*

$$\|f - \tilde{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(S)} + \|g - \tilde{g}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \delta$$

*implique l'estimation suivante :*

$$\|R_{k(\delta)}(\tilde{f}, \tilde{g}, f^0) - U\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon(\delta)$$

*Ici  $f^0$  joue le rôle de paramètre pour la famille des opérateurs  $(R_k)_k$ .*

Dans [70], les auteurs ont démontré que la suite des opérateurs  $(R_k)_k$  de l'algorithme est régularisante pour le problème de Cauchy. En adaptant les calculs menés dans la preuve, nous obtenons l'estimation suivante

$$\left\| R_k(\tilde{f}, \tilde{g}, f^0) - U \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho_k \delta + \left\| r_k(f^0 - U_{|\Gamma_1}) \right\|_{H^1(\Omega)}$$

où  $r_k(f^0 - U_{|\Gamma_1}) = R_k(0, 0, f^0 - U_{|\Gamma_1})$  définie précédemment dans le théorème 4 et  $\rho_k$  est la norme de l'opérateur  $R_k(\cdot, \cdot, 0)$  dont l'estimation ci-dessous est donnée dans [70]

$$\rho_k \leq c k$$

avec  $c$  est une constante qui dépend de la géométrie et de l'opérateur elliptique du problème de Cauchy. Donc finalement, nous avons

$$\left\| R_k(\tilde{f}, \tilde{g}, f^0) - U \right\|_{H^1(\Omega)} \leq c k \delta + \left\| r_k(f^0 - U_{|\Gamma_1}) \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi  $k(\delta)$  est défini comme étant la plus petite itération telle que

$$c k \delta + \left\| r_k(f^0 - U_{|\Gamma_1}) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon(\delta) \quad (4.6.33)$$

Cette estimation montre la délicatesse du choix du critère d'arrêt de l'algorithme. Il s'agit de trouver l'itération optimale  $k_0$  qui dépend de  $\delta$  et de  $f^0$  et pour laquelle (4.6.33) est vérifiée.

Ce point va être traité numériquement (§4.8.3) où nous explorerons plusieurs critères et nous les testerons sur une fonction analytique et sur des données simulées.

#### 4.6.6 Synthèse des travaux effectués sur cette méthode

Dans [70], la méthode a été étudiée seulement théoriquement et aucune expérience numérique n'a été présentée. Mais depuis, cette méthode a été reprise et expérimentée par d'autres chercheurs et dans plusieurs applications. Principalement, nous citons les travaux de *Lesnic & al.* [79, 87], *Jourhmane & al.* [64, 65, 63], *Leitão* [77] et plus récemment *Azaiez & al.* [6].

Ces travaux ont traité la méthode itérative de Kozlov de point de vue théorique et numérique. Cependant, les applications présentées ont été toutes implémentées en 2D avec des tests analytiques<sup>f</sup> et sur un domaine homogène, le plus souvent sur un carré. Le cas de l'anneau a été cependant traité par *Leitão* dans [77] et par *Azaiez & al.* [6]. Mais, aucune application réaliste n'a été présentée.

Pour la résolution numérique du problème aux conditions mêlées, certains auteurs ont choisi la méthode des éléments finis [65, 77, 6], et d'autres la méthode des équations intégrales [79, 64, 63]. Tous ces travaux montrent l'efficacité de la méthode et son caractère régularisant pour des données faiblement perturbées, mais pointent une convergence numérique lente spécialement pour un choix initial de l'algorithme relativement loin de la solution exacte. Néanmoins, les expériences présentées dans [77] montrent que la convergence numérique est plus rapide dans une couronne sphérique que dans un carré et que dans une couronne les résultats sont d'autant meilleurs que si l'épaisseur diminue. D'autre part, signalons que les résultats de *Lesnic & al.* dans [79] montrent que le flux  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  est plus difficile à calculer avec une bonne précision telle que le potentiel  $u$ . Et dans le cas où les surfaces  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_e$  de la couronne  $\mathcal{C}$  ne sont pas régulières, les résultats sont moins bons.

<sup>f</sup>On retrouve souvent la fonction  $u(x, y) = \cos(x)\cosh(y) + \sin(x)\sinh(y)$  testée sur un carré.

Pour accélérer la convergence numérique, certains auteurs ont cherché à relaxer le schéma de l'algorithme. Ainsi, *Jourhmane & al.* [64, 65] ont relaxé le calcul de  $f^k$  à chaque itération, et *Mera & al.* [87] ont relaxé la condition de calcul de  $g^k$  et ont présenté un schéma de relaxation de  $f^k$  et  $g^k$  à la fois ainsi qu'une comparaison entre ces différents schémas. Par ailleurs, une stratégie pour choisir le paramètre optimal de relaxation a été également présentée dans [65, 63].

Dans le cadre de notre problème, nos résultats sont effectués sur un domaine  $3D$  homogène par morceaux (géométrie sphérique et géométrie réaliste), nous présentons des applications avec une fonction analytique et avec des données simulées. Contrairement à ce qui a été rapporté dans la majorité des résultats présentés sur un carré, la convergence numérique de notre algorithme ne nécessite pas un très grand nombre d'itérations (cf §4.8) et donc nous n'avons pas besoin des schémas de relaxation.

## 4.7 Résolution des problèmes directs aux conditions aux limites mêlées

Dans cette section nous présentons la résolution des problèmes aux conditions aux limites mêlées qui apparaissent dans les algorithmes écrits pour les deux approches *successive* et *simultanée* (cf §4.6.2 et §4.6.3). Nous avons choisi la méthode des équations intégrales pour ses multiples avantages décrits dans le chapitre 2, d'autant plus qu'elle est plus appropriée pour résoudre ces problèmes que d'autres méthodes vu que nous n'avons besoin à chaque itération de l'algorithme que des valeurs du potentiel et du flux sur la frontière.

Les problèmes directs en question sont les suivants,

– approche *successive*,

1. suite paire :

$$(P1_{suc}) \begin{cases} -\Delta u & = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ u & = \phi & \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (4.7.34)$$

$$\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i), g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e).$$

2. suite impaire :

$$(P2_{suc}) \begin{cases} -\Delta u & = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = \psi & \text{sur } \Gamma_i \\ u & = f & \text{sur } S \subset \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g_L & \text{sur } L = \Gamma_e \setminus S \end{cases} \quad (4.7.35)$$

$$\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i), f \in H^{\frac{1}{2}}(S) \text{ et } g_L \text{ est la restriction sur } L \text{ d'un } g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e).$$

– approche *simultanée*,

1. suite paire :

$$(P1_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.7.36)$$

$$\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3).$$

2. suite impaire :

$$(P2_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_L & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.7.37)$$

$$\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), f \in H^{\frac{1}{2}}(S) \text{ et } g_L \text{ est la restriction sur } L \text{ d'un } g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3).$$

Nous présentons dans le paragraphe suivant la résolution des problèmes directs de l'approche *successive*, celle des problèmes de l'approche *simultanée* sera présentée au paragraphe §4.7.2.

#### 4.7.1 Résolution des problèmes aux conditions aux limites mêlées de l'approche *successive*

Il s'agit de résoudre les problèmes  $(P1_{suc})$  et  $(P2_{suc})$  décrits ci-dessus. Nous présentons dans ce qui suit l'étude du problème  $(P2_{suc})$ , celle du problème  $(P1_{suc})$  étant similaire.

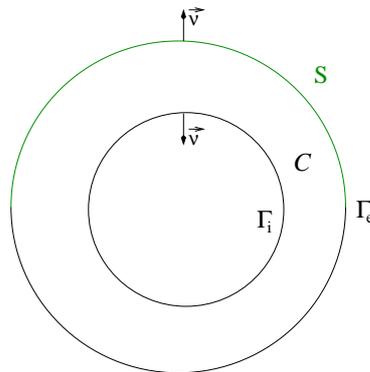


FIG. 4.3 – Le domaine  $\mathcal{C}$  de la couronne

Notons que pour le problème de Cauchy  $(PC_{scalp})$  nous considérons  $S$  une sous partie stricte de  $\Gamma_e$  et pour le problème de Cauchy  $(PC_{crâne})$  nous avons  $S = \Gamma_e$ .

**Formulation variationnelle du problème** ( $P2_{suc}$ )

$$(P2_{suc}) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{sur } \Gamma_i \\ u = f & \text{sur } S \subset \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_L & \text{sur } L = \Gamma_e \setminus S \end{cases} \quad (4.7.38)$$

Soit  $\bar{f} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  un prolongement continu de  $f \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  (cf §4.2). Nous considérons le problème suivant

$$(P_{\bar{u}}) \begin{cases} -\Delta \bar{u} = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_i \\ \bar{u} = \bar{f} & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (4.7.39)$$

et introduisons la différence  $w = u - \bar{u}$  dont nous observons qu'elle satisfait le système

$$(P_w) \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = \psi & \text{sur } \Gamma_i \\ w = 0 & \text{sur } S \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = g_L - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}|_L & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.7.40)$$

dont nous étudions la formulation variationnelle dans l'espace  $H_{0,S}^1(\mathcal{C})$  défini dans le paragraphe §4.2.

Soit  $v \in H_{0,S}^1(\mathcal{C})$ . En appliquant la formule de Green dans  $\mathcal{C}$  sur  $(w, v)$  nous obtenons

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla w \cdot \nabla v dx = \int_L (g_L - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}|_L) v ds + \int_{\Gamma_i} \psi v ds \quad (4.7.41)$$

Le premier terme dans le second membre représente le produit de dualité sur  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(L)$  et le dernier représente le produit de dualité sur  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ .

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit alors

$$a(w, v) = \ell(v) \quad \text{pour tout } v \in H_{0,S}^1(\mathcal{C}) \quad (4.7.42)$$

où

$$a(w, v) = \int_{\mathcal{C}} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$\ell(v) = \int_L (g_L - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}|_L) v ds + \int_{\Gamma_i} \psi v ds$$

Nous munissons l'espace  $H_{0,S}^1(\mathcal{C})$  du produit scalaire et de sa norme induite définis dans (4.2.2) pour  $\sigma = 1$ , qui en fait un espace hilbertien [30].

D'autre part, nous avons  $a(v, v) = \|\cdot\|_{0,S}^2$ . Donc  $a$  est  $\|\cdot\|_{0,S}$ -coercive sur  $H_{0,S}^1(\mathcal{C})$  et l'inégalité de

Cauchy-Schwarz assure sa continuité.

Reste à vérifier que  $\ell(\cdot)$  est une forme linéaire continue sur  $H_{0,S}^1(\mathcal{C})$ . En effet,

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \left| \int_L (g_L - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}|_L) v \, ds \right| + \left| \int_{\Gamma_i} \psi v \, ds \right| \\ &\leq \|v\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(L)} \left\| g_L - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}|_L \right\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(L))'} + \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} \|\psi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} \end{aligned}$$

Or  $\|v|_L\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(L)} \leq c_L \cdot \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)}$  [109], donc avec la continuité de la trace nous obtenons

$$|\ell(v)| \leq cte \|v\|_{H^1(\mathcal{C})}. \quad (4.7.43)$$

Ainsi, le théorème de Lax-Milgram nous donne l'existence et l'unicité d'une solution  $w$  dans  $H_{0,S}^1(\mathcal{C})$  au problème (4.7.40) et ceci pour un  $\bar{u}$  fixé qui dépend du prolongement  $\bar{f}$ . Il en découle alors l'existence d'une solution  $u$  dans  $H^1(\mathcal{C})$  du problème ( $P2_{suc}$ ). Cette solution est unique car s'il existe une autre solution  $u_1$  alors leur différence  $z = u - u_1$  vérifiera le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta z = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ z = 0 & \text{sur } S \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } L \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (4.7.44)$$

qui admet comme unique solution la solution nulle. Donc  $u = v$ . □

### Formulation du problème ( $P2_{suc}$ ) en équations intégrales

Nous étudions dans ce paragraphe la résolution du problème ( $P2_{suc}$ ) par la méthode des équations intégrales. Nous distinguons deux cas, le cas où  $S = \Gamma_e$  tel est le cas pour le problème ( $PC_{crâne}$ ) et le cas où  $S$  est une sous partie stricte de  $\Gamma_e$ , c'est le cas du problème ( $PC_{scalp}$ ).

#### Cas où $S = \Gamma_e$

Nous supposons dans ce paragraphe  $S = \Gamma_e$ , donc le problème à résoudre est le suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{sur } \Gamma_i \\ u = f & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (4.7.45)$$

Nous poursuivons la même démarche que celle du chapitre 2 afin de présenter une formulation en équations intégrales de ce problème.

D'après le théorème 1 (cf chapitre 2) nous avons

$$\frac{u(y)}{2} = - \int_{\partial \mathcal{C}} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) u(x) ds(x) + \int_{\partial \mathcal{C}} G(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds(x), \quad y \in \partial \mathcal{C}$$

que nous écrivons sur  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_e$  respectivement

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{2}(y) = & - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u_i(x)ds(x) - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u_e(x)ds(x) \\ & + \int_{\Gamma_i} G(x-y)p_i(x)ds(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)p_e(x)ds(x) \quad , \quad y \in \Gamma_i \end{aligned} \quad (4.7.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_e}{2}(y) = & - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u_i(x)ds(x) - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u_e(x)ds(x) \\ & + \int_{\Gamma_i} G(x-y)\frac{\partial u_i(x)}{\partial \nu}ds(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)\frac{\partial u_e(x)}{\partial \nu}ds(x) \quad , \quad y \in \Gamma_e \end{aligned} \quad (4.7.47)$$

où nous avons noté  $u_e \equiv u|_{\Gamma_e}$ ,  $u_i \equiv u|_{\Gamma_i}$ ,  $p_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}$  et  $p_e \equiv \frac{\partial u_e}{\partial \nu}|_{\Gamma_e}$ .

En reprenant les notations du potentiel de simple couche et de double couche définies au chapitre 2, nous obtenons le système suivant

$$\frac{u_i}{2} = -D_{i,i}u_i - D_{i,e}u_e + S_{i,i}p_i + S_{i,e}p_e \quad (4.7.48)$$

$$\frac{u_e}{2} = -D_{e,i}u_i - D_{e,e}u_e + S_{e,i}p_i + S_{e,e}p_e \quad (4.7.49)$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{I_i}{2} + D_{i,i} & -S_{i,e} \\ D_{e,i} & -S_{e,e} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_2} \begin{pmatrix} u_i \\ p_e \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{i,i} & -D_{i,e} \\ S_{e,i} & -\frac{I_e}{2} - D_{e,e} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_1} \begin{pmatrix} p_i \\ u_e \end{pmatrix} \quad (4.7.50)$$

Ainsi pour le problème ( $P1_{suc}$ ) il faut inverser la matrice  $\mathcal{A}_1$  et pour ( $P2_{suc}$ ) il faut inverser la matrice  $\mathcal{A}_2$ .

Posons

$$\begin{pmatrix} b_i \\ b_e \end{pmatrix} \equiv \mathcal{A}_1 \cdot \begin{pmatrix} p_i \\ u_e \end{pmatrix} \quad (4.7.51)$$

et considérons le système

$$\mathcal{A}_2 \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ p_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i \\ b_e \end{pmatrix} \quad (4.7.52)$$

Nous avons  $(u_i, u_e, p_i, p_e) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  et  $b = (b_i, b_e) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$ .

### Equivalence des systèmes (4.7.52) et (4.7.45)

Dans ce paragraphe, nous démontrons que le système d'équations intégrales (4.7.52) est équivalent au problème (4.7.45). Il est facile de voir que la solution de ce dernier est aussi solution du système (4.7.52). Nous démontrons dans ce qui suit la réciproque en vérifiant que le système (4.7.52) admet une solution unique.

Considérons donc l'opérateur matriciel associé à ce système

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{I_i}{2} + D_{i,i} & -S_{i,e} \\ D_{e,i} & -S_{e,e} \end{pmatrix} \quad (4.7.53)$$

Comme les opérateurs  $D_{i,i} : L^2(\Gamma_i) \rightarrow L^2(\Gamma_i)$ ,  $D_{e,i} : L^2(\Gamma_i) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  et  $S_{i,e} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \rightarrow L^2(\Gamma_i)$  sont compacts et que l'opérateur  $S_{e,e} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  est un isomorphisme (voir §2.2.3 dans le chapitre 2),  $\mathcal{A}_2 : L^2(\Gamma_i) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \rightarrow L^2(\Gamma_i) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  est un opérateur de type Fredholm. Par conséquent l'étude de la solution du système d'équations intégrales (4.7.52) revient à celle du noyau de l'opérateur adjoint

$$\mathcal{A}_2^* = \begin{pmatrix} \frac{I_i}{2} + D_{i,i}^* & D_{i,e}^* \\ -S_{e,i} & -S_{e,e} \end{pmatrix} \quad (4.7.54)$$

Soit  $X = (\alpha, \beta) \in \text{Ker}(\mathcal{A}_2^*)$ , nous définissons  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^3$  comme suit :

$$\begin{aligned} \theta(y) &= \int_{\Gamma_i} G(x-y)\alpha(x)ds(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)\beta(x)ds(x), \quad \text{pour } y \notin \Gamma_i \cup \Gamma_e \\ &:= S_i\alpha(y) + S_e\beta(y) \end{aligned}$$

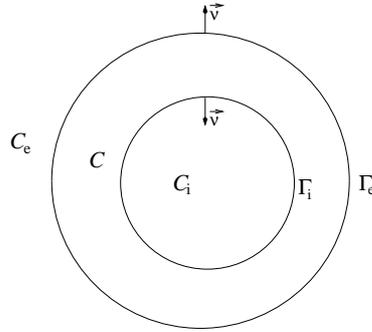


FIG. 4.4 – Domaines intérieure et extérieure à la couronne  $\mathcal{C}$

Nous remarquons immédiatement que  $\theta$  est harmonique dans  $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_e$  où  $\mathcal{C}_i$  est le domaine intérieur à la frontière  $\Gamma_i$  et  $\mathcal{C}_e$  est le domaine extérieur à  $\Gamma_e$  comme le montre la figure (Fig. 4.4).

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in \text{Ker}(\mathcal{A}_2^*) &\Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{I_i}{2} + D_{i,i}^*)\alpha + D_{i,e}^*\beta = 0 \\ -S_{e,i}\alpha - S_{e,e}\beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu}|_{\Gamma_i} = 0 \\ \theta|_{\Gamma_e} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7.55)$$

La fonction  $\theta$  satisfait dans  $\mathcal{C}$  le problème aux conditions aux limites mêlées suivant

$$\begin{cases} -\Delta \theta = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \theta|_{\Gamma_e} = 0 \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu}|_{\Gamma_i} = 0 \end{cases} \quad (4.7.56)$$

Donc  $\theta = 0$  dans  $\mathcal{C}$  et par suite

$$\begin{cases} \theta|_{\Gamma_i} = 0 \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu}|_{\Gamma_e} = 0 \end{cases} \quad (4.7.57)$$

Dans le domaine  $\mathcal{C}_i$ ,  $\theta$  vérifie le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta\theta & = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_i \\ \theta|_{\Gamma_i} & = 0 \end{cases} \quad (4.7.58)$$

D'où  $\theta = 0$  dans  $\mathcal{C}_i$  et donc

$$\frac{\partial\theta^+}{\partial\nu|_{\Gamma_i}} = 0 \quad (4.7.59)$$

Cette équation avec l'équation  $\frac{\partial\theta^-}{\partial\nu|_{\Gamma_i}} = 0$  (4.7.55) donnent  $\left[\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_i} = 0$ . Or d'après les relations de saut du potentiel de simple couche évoquées au chapitre 2, nous avons  $\left[\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_i} = \alpha$  ce qui implique alors

$$\alpha = 0 \quad (4.7.60)$$

D'autre part,  $\theta$  satisfait dans  $\mathcal{C}_e$  le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta\theta & = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_e \\ \theta|_{\Gamma_e} & = 0 \\ \theta(y) = O\left(\frac{1}{r}\right), & r = |y| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.7.61)$$

donc  $\theta = 0$  dans  $\mathcal{C}_e$  et par suite sa trace normale est nulle :

$$\frac{\partial\theta^+}{\partial\nu|_{\Gamma_e}} = 0 \quad (4.7.62)$$

Cette équation avec l'équation  $\frac{\partial\theta^-}{\partial\nu|_{\Gamma_e}} = 0$  (4.7.57) donnent  $\left[\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_e} = 0$ . Or  $\left[\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right]_{\Gamma_e} = \beta$  d'où

$$\beta = 0 \quad (4.7.63)$$

Et donc  $X = 0$ . □

### Mise en oeuvre numérique du système d'équations intégrales

Nous avons choisi la méthode de Galerkin (cf chapitre 2) pour résoudre numériquement le système d'équations intégrales obtenu et qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{u_i(y)}{2} + \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial\nu}(x-y)u_i(x)ds(x) - \int_{\Gamma_e} G(x-y)p_e(x)ds_e(x) &= \int_{\Gamma_i} G(x-y)p_i(x)ds(x) \\ - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G}{\partial\nu}(x-y)u_e(x)ds(x) \quad , \quad y \in \Gamma_i & \\ \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial\nu}(x-y)u_i(x)ds(x) - \int_{\Gamma_e} G(x-y)p_e(x)ds_e(x) &= \int_{\Gamma_i} G(x-y)p_i(x)ds(x) - \frac{u_e(y)}{2} \\ - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G}{\partial\nu}(x-y)u_e(x)ds_e(x) \quad , \quad y \in \Gamma_e & \end{aligned} \quad (4.7.64)$$

Nous cherchons  $(u_i, p_e)$  élément de  $L^2(\Gamma_i) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$ .

Nous multiplions la première équation par  $v_i \in L^2(\Gamma_i)$  et l'intégrons sur  $\Gamma_i$ , ensuite nous multiplions la deuxième équation par  $q_e \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  et l'intégrons sur  $\Gamma_e$ .

Posons

$$\begin{aligned} V_2 &= L^2(\Gamma_i) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \\ \Phi &= (u_i, p_e) \\ \Psi &= (b_i, b_e) \\ v &= (v_i, q_e) \end{aligned} \quad (4.7.65)$$

où  $(b_i, b_e) = \mathcal{A}_1(p_i, u_e)$ .

Le problème variationnel du système correspondant au système (4.7.52) est le suivant

$$\text{Trouver } \Phi \in V_2 : \langle \mathcal{A}_2 \Phi, \Psi \rangle = \langle \Psi, v \rangle, \quad \forall v \in V_2 \quad (4.7.66)$$

Nous passons maintenant à la discrétisation de ce système variationnel. Les surfaces  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_e$  sont discrétisées par des facettes planes triangulaires, nous notons  $\Gamma_i^h$  et  $\Gamma_e^h$  les surfaces approchées et désignons respectivement par  $n_i$  et  $n_e$  leur nombre de noeuds.

Nous utilisons une base  $\mathbb{P}^1$  que nous notons  $(\phi_j^{(i)})_{j=1, \dots, n_i}$  pour discrétiser les fonctions définies sur la surface  $\Gamma_i^h$  et  $(\phi_j^{(e)})_{j=1, \dots, n_e}$  pour la surface  $\Gamma_e^h$ . Nous posons alors :

$$\begin{aligned} u_i^h(y) &= \sum_{l=1}^{n_i} U_l^{(i)} \cdot \phi_l^{(i)}(y), \quad p_i^h(y) = \sum_{l=1}^{n_i} P_l^{(i)} \cdot \phi_l^{(i)}(y) \\ u_e^h(y) &= \sum_{l=1}^{n_e} U_l^{(e)} \cdot \phi_l^{(e)}(y), \quad p_e^h(y) = \sum_{l=1}^{n_e} P_l^{(e)} \cdot \phi_l^{(e)}(y) \end{aligned}$$

Nous écrivons maintenant le système approché, en faisant parcourir les fonctions tests sur  $\Gamma_i^h$  parmi les fonctions de base  $\phi_k^{(i)}$ ,  $k = 1, \dots, n_i$  et les fonctions tests sur  $\Gamma_e^h$  parmi  $\phi_k^{(e)}$ ,  $k = 1, \dots, n_e$ . Nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n_i} U_l^{(i)} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i^h} \phi_l^{(i)} \phi_k^{(i)} ds_i^h + \int_{\Gamma_i^h} \int_{\Gamma_i^h} \frac{\partial G}{\partial \nu} \phi_l^{(i)} \phi_k^{(i)} ds_i^h ds_i^h \right] - \sum_{l=1}^{n_e} P_l^{(e)} \int_{\Gamma_i^h} \int_{\Gamma_e^h} G \phi_l^{(e)} \phi_k^{(i)} ds_e^h ds_i^h \\ = \sum_{l=1}^{n_i} P_l^{(i)} \int_{\Gamma_i^h} \int_{\Gamma_i^h} G \phi_l^{(i)} \phi_k^{(i)} ds_i^h ds_i^h - \sum_{l=1}^{n_e} U_l^{(e)} \int_{\Gamma_i^h} \int_{\Gamma_e^h} \frac{\partial G}{\partial \nu} \phi_l^{(e)} \phi_k^{(i)} ds_e^h ds_i^h \end{aligned}$$

pour  $k = 1 \dots n_i$  (4.7.67)

et

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n_i} U_l^{(i)} \int_{\Gamma_e^h} \int_{\Gamma_i^h} \frac{\partial G}{\partial \nu} \phi_l^{(i)} \phi_k^{(e)} ds_i^h ds_e^h - \sum_{l=1}^{n_e} P_l^{(e)} \int_{\Gamma_e^h} \int_{\Gamma_e^h} G \phi_l^{(e)} \phi_k^{(e)} ds_e^h ds_e^h \\ = \sum_{l=1}^{n_i} P_l^{(i)} \int_{\Gamma_e^h} \int_{\Gamma_i^h} G \phi_l^{(i)} \phi_k^{(e)} ds_i^h ds_e^h - \sum_{l=1}^{n_e} U_l^{(e)} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_e^h} \phi_l^{(e)} \phi_k^{(e)} ds_e^h + \int_{\Gamma_e^h} \int_{\Gamma_e^h} \frac{\partial G}{\partial \nu} \phi_l^{(e)} \phi_k^{(e)} ds_e^h ds_e^h \right] \end{aligned}$$

pour  $k = 1 \dots n_e$  (4.7.68)

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{I_i^h}{2} + D_{i,i}^h & -S_{i,e}^h \\ D_{e,i}^h & -S_{e,e}^h \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_2^h} \begin{pmatrix} U^{(i)} \\ P^{(e)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{i,i}^h & -D_{i,e}^h \\ S_{e,i}^h & -\frac{I_e^h}{2} - D_{e,e}^h \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_1^h} \begin{pmatrix} P^{(i)} \\ U^{(e)} \end{pmatrix} \quad (4.7.69)$$

avec  $U^{(a)} = (U_1^{(a)}, \dots, U_{n_a}^{(a)})$  et  $P^{(a)} = (P_1^{(a)}, \dots, P_{n_a}^{(a)})$ , pour  $a = i, e$ .

**Cas où  $S$  est une sous partie stricte de  $\Gamma_e$**

Le problème à résoudre est le suivant :

$$(P2_{suc}) \begin{cases} -\Delta u &= 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \psi & \text{sur } \Gamma_i \\ u &= f & \text{sur } S \subset \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_L & \text{sur } L = \Gamma_e \setminus S \end{cases} \quad (4.7.70)$$

Nous commençons par prolonger les données  $f \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  et  $g_L \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(L))'$  sur toute la surface  $\Gamma_e$ . Soient  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  des prolongements continus de  $f$  et de  $g_L$  respectivement dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$ . Nous notons  $p \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu}$  et posons  $\bar{\alpha} = u|_{\Gamma_e} - \bar{f}$  et  $\bar{\beta} = p|_{\Gamma_e} - \bar{g}$ .

Nous reprenons la même représentation intégrale en simple et double couche déjà utilisée,

$$\frac{u(y)}{2} = \int_{\partial \mathcal{C}} G(x-y)p(x)ds(x) - \int_{\partial \mathcal{C}} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u(x)ds(x) \quad , \quad \forall y \in \partial \mathcal{C}$$

Nous écrivons cette équation respectivement sur  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_e$  :

$$\begin{aligned} \frac{u_i(y)}{2} &= \int_{\Gamma_i} G(x-y)\psi(x)ds(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)(\bar{\beta} + \bar{g})(x)ds(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u_i(x)ds(x) - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)(\bar{\alpha} + \bar{f})(x)ds(x) \end{aligned} \quad \forall y \in \Gamma_i \quad (4.7.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{\alpha} + \bar{f})(y)}{2} &= \int_{\Gamma_i} G(x-y)\psi(x)ds(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)(\bar{\beta} + \bar{g})(x)ds(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)u_i(x)ds(x) - \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)(\bar{\alpha} + \bar{f})(x)ds(x) \end{aligned} \quad \forall y \in \Gamma_e \quad (4.7.72)$$

En utilisant les notations des opérateurs intégraux déjà introduits au chapitre 2, le système ci-dessus s'écrit de la façon suivante

$$\begin{aligned} \text{sur } \Gamma_i : \quad \frac{u_i}{2} + D_{i,i}u_i + D_{i,e}\bar{\alpha} - S_{i,e}\bar{\beta} &= S_{i,i}\psi + S_{i,e}\bar{g} - D_{i,e}\bar{f} \\ \text{sur } \Gamma_e : \quad D_{e,i}u_i + \frac{\bar{\alpha}}{2} + D_{e,e}\bar{\alpha} - S_{e,e}\bar{\beta} &= S_{e,i}\psi + S_{e,e}\bar{g} - \frac{\bar{f}}{2} - D_{e,e}\bar{f} \end{aligned} \quad (4.7.73)$$

Nous cherchons à calculer  $u_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ ,  $u_L \equiv u|_L \in H^{\frac{1}{2}}(L)$  et  $p_S \equiv p|_S \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(S))'$ . Et, pour déterminer  $u_L$  et  $p_S$ , il suffit de déterminer  $\bar{\alpha}|_L$  et  $\bar{\beta}|_S$  qui appartiennent respectivement à  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(L)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(S)$  puisque  $\bar{\alpha} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  avec  $\bar{\alpha}|_S = 0$  et  $\bar{\beta} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  avec  $\bar{\beta}|_L = 0$  (cf §4.2).

Nous définissons les opérateurs  $S_{e,L}$  et  $D_{e,L}$  de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(L) : \quad S_{e,L}\varphi &= S_{e,e}\tilde{\varphi}, \quad \text{où } \tilde{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \text{ est le prolongement par 0 de } \varphi \text{ sur } \Gamma_e \\ \forall \theta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(L) : \quad D_{e,L}\theta &= D_{e,e}\tilde{\theta}, \quad \text{où } \tilde{\theta} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \text{ est le prolongement par 0 de } \theta \text{ sur } \Gamma_e \end{aligned}$$

De la même façon, nous définissons les opérateurs  $S_{e,S}$  et  $D_{e,S}$ . Puisque  $\bar{\alpha}|_L \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(L)$  et  $\bar{\beta}|_S \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$ , nous pouvons donc écrire le système (4.7.73) comme suit

$$\begin{aligned} \text{sur } \Gamma_i : \quad \frac{u_i}{2} + D_{i,i}u_i + D_{i,L}\bar{\alpha}|_L - S_{i,S}\bar{\beta}|_S &= S_{i,i}\psi + S_{i,e}\bar{g} - D_{i,e}\bar{f} \\ \text{sur } \Gamma_e : \quad D_{e,i}u_i + \frac{\bar{\alpha}}{2} + D_{e,L}\bar{\alpha}|_L - S_{i,S}\bar{\beta}|_S &= S_{e,i}\psi + S_{e,e}\bar{g} - \frac{\bar{f}}{2} - D_{e,e}\bar{f} \end{aligned}$$

Dans l'équation écrite sur  $\Gamma_e$  toutes les fonctions sont dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$  donc nous pouvons prendre la restriction sur  $L$  et sur  $S$  pour obtenir le système suivant

$$\begin{aligned} \text{sur } \Gamma_i : & \quad \frac{u_i}{2} + D_{i,i}u_i + D_{i,e}\bar{\alpha} - S_{i,e}\bar{\beta} = S_{i,i}\psi + S_{i,e}\bar{g} - D_{i,e}\bar{f} \\ \text{sur } L : & \quad D_{L,i}u_i + \frac{\bar{\alpha}}{2}|_L + D_{L,L}\bar{\alpha}|_L - S_{L,S}\bar{\beta}|_S = S_{L,i}\psi + S_{L,e}\bar{g} - \frac{\bar{f}}{2}|_L - D_{L,e}\bar{f} \\ \text{sur } S : & \quad D_{S,i}u_i + D_{S,L}\bar{\alpha}|_L - S_{S,S}\bar{\beta}|_S = S_{S,i}\psi + S_{S,e}\bar{g} - \frac{\bar{f}}{2}|_S - D_{S,e}\bar{f} \end{aligned}$$

Afin de simplifier la présentation, nous supposons dans la suite que

$$f \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(S) \quad , \quad g_L \in H^{-\frac{1}{2}}(L) \quad (4.7.74)$$

et considérons ainsi  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  les prolongements par 0 de  $f$  et de  $g_L$ . Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} + \bar{f})|_S = f & \quad (\bar{\alpha} + \bar{f})|_L = u_L \\ (\bar{\beta} + \bar{g})|_S = p_S & \quad (\bar{\beta} + \bar{g})|_L = g_L \end{aligned}$$

et obtenons donc le système matriciel suivant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{I_i}{2} + D_{i,i} & D_{i,L} & -S_{i,S} \\ D_{L,i} & \frac{I_L}{2} + D_{L,L} & -S_{L,S} \\ D_{S,i} & D_{S,L} & -S_{S,S} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_S} \begin{pmatrix} u_i \\ u_L \\ p_S \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{i,i} & S_{i,L} & -D_{i,S} \\ S_{L,i} & S_{L,L} & -D_{L,S} \\ S_{S,i} & S_{S,L} & -\frac{I_S}{2} - D_{S,S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ g_L \\ f \end{pmatrix} \quad (4.7.75)$$

### Equivalence entre le système (4.7.75) et le problème (4.7.70)

En se servant de l'alternative de Fredholm nous étudions dans ce paragraphe l'équivalence entre le système d'équations intégrales obtenu et le problème ( $P2_{suc}$ ) décrit dans (4.7.70).

D'après les propriétés des opérateurs intégraux déjà évoquées au chapitre 2, nous avons

$$\begin{aligned} D_{i,i} : L^2(\Gamma_i) &\rightarrow L^2(\Gamma_i) & D_{i,L} : L^2(L) &\rightarrow L^2(\Gamma_i) & D_{L,i} : L^2(\Gamma_i) &\rightarrow L^2(L) \\ D_{L,L} : L^2(L) &\rightarrow L^2(L) & S_{i,S} : H^{-\frac{1}{2}}(S) &\rightarrow L^2(\Gamma_i) & D_{S,i} : L^2(\Gamma_i) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S) \end{aligned}$$

sont compacts et l'opérateur

$$S_{S,S} : H^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S)$$

est un isomorphisme.

Et d'après [109],

$$S_{L,S} : H^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow L^2(L) \quad D_{S,L} : L^2(L) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(S)$$

Donc  $\mathcal{A}_S : L^2(\Gamma_i) \times L^2(L) \times H^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow L^2(\Gamma_i) \times L^2(L) \times H^{\frac{1}{2}}(S)$  est un opérateur de type Fredholm. Etudions alors le noyau de son adjoint

$$\mathcal{A}_S^* = \begin{bmatrix} \frac{I_i}{2} + D_{i,i}^* & D_{i,L}^* & D_{i,S}^* \\ D_{L,i}^* & \frac{I_L}{2} + D_{L,L}^* & D_{L,S}^* \\ -S_{S,i} & -S_{S,L} & -S_{S,S} \end{bmatrix}$$

Soit  $X = (\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Ker}(\mathcal{A}_S^*)$ . Nous posons  $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$  les prolongements par 0 sur  $\Gamma_e$  de  $\beta$  et  $\gamma$  respectivement ( $\tilde{\beta} \in L^2(\Gamma_e), \tilde{\gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$ ).

Nous définissons dans  $\mathbb{R}^3$  la fonction suivante

$$\begin{aligned} \theta(y) &= \int_{\Gamma_i} G(x-y)\alpha(x)ds_i(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)\tilde{\beta}(x)ds_e(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)\tilde{\gamma}(x)ds_e(x) \\ &:= S_i\alpha(y) + S_e\tilde{\beta}(y) + S_e\tilde{\gamma}(y) \quad , \quad \text{pour } y \notin \Gamma_i \cup \Gamma_e \end{aligned}$$

dont nous vérifions qu'elle est harmonique dans  $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_e$ , où  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_e$  sont les domaines représentés dans la figure (Fig. 4.5).

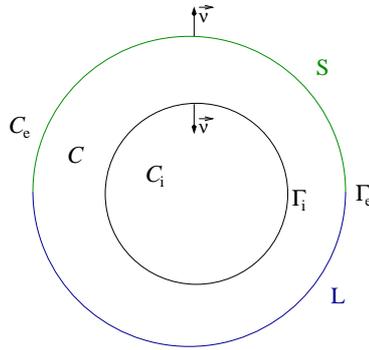


FIG. 4.5 – Domaines intérieure et extérieure à la couronne  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S^* \cdot X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + D_{i,i}^*\alpha + D_{i,L}^*\beta + D_{i,S}^*\gamma = 0 \\ D_{L,i}^*\alpha + \frac{\beta}{2} + D_{L,L}^*\beta + D_{L,S}^*\gamma = 0 \\ -S_{S,i}\alpha - S_{S,L}\beta - S_{S,S}\gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_{\Gamma_i}} = 0 \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_L} = 0 \\ \theta|_S = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.7.76}$$

Par suite, la fonction  $\theta$  vérifie dans le domaine  $\mathcal{C}$ , le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta \theta = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_{\Gamma_i}} = 0 \\ \theta|_S = 0 \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_L} = 0 \end{cases} \tag{4.7.77}$$

d'où  $\theta = 0$  dans  $\mathcal{C}$  et par conséquent

$$\begin{cases} \theta|_{\Gamma_i} = 0 \\ \frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_S} = 0 \\ \theta|_L = 0 \end{cases} \quad (4.7.78)$$

Dans  $\mathcal{C}_i$ ,  $\theta$  vérifie le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta \theta = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_i \\ \theta|_{\Gamma_i} = 0 \end{cases} \quad (4.7.79)$$

Ce qui implique  $\theta = 0$  dans  $\mathcal{C}_i$  et donc

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial \nu|_{\Gamma_i}} = 0. \quad (4.7.80)$$

Cette équation avec  $\frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_{\Gamma_i}} = 0$  (4.7.76) impliquent  $\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_i} = 0$ . Or d'après les relations de saut du potentiel de simple couche évoquées au chapitre 2 nous avons  $\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_i} = \alpha$ , donc

$$\alpha = 0. \quad (4.7.81)$$

Nous avons alors  $\theta(y) = \int_{\Gamma_e} G(x-y)\tilde{\beta}(x)ds_e(x) + \int_{\Gamma_e} G(x-y)\tilde{\gamma}(x)ds_e(x)$ .

Les équations  $\theta|_L = 0$  (4.7.78) et  $\theta|_S = 0$  (4.7.76) impliquent  $\theta|_{\Gamma_e} = 0$ . Ainsi,  $\theta$  vérifie dans  $\mathcal{C}_e$  le problème de Dirichlet extérieur

$$\begin{cases} -\Delta \theta = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_e \\ \theta|_{\Gamma_e} = 0 \\ \theta(y) \rightarrow 0 & \text{pour } |y| \rightarrow \infty \end{cases}$$

D'où  $\theta = 0$  et par suite

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial \nu|_{\Gamma_e}} = 0 \quad (4.7.82)$$

L'équation  $\frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_S} = 0$  (4.7.78) avec (4.7.82) impliquent  $\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{|S} = 0$ . Comme  $\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{|S} = \gamma$ , nous obtenons

$$\gamma = 0. \quad (4.7.83)$$

De façon similaire, l'équation  $\frac{\partial \theta^-}{\partial \nu|_L} = 0$  (4.7.76) avec (4.7.82) donnent  $\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{|L} = 0$  et comme

$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right]_{|L} = \beta$  alors nous obtenons

$$\beta = 0. \quad (4.7.84)$$

Ce qui implique  $X = 0$ . □

### 4.7.2 Résolution des problèmes aux conditions aux limites mêlées de l'approche *simultanée*

Il s'agit des problèmes  $(P1_{sim})$  et  $(P2_{sim})$  que nous réécrivons ci-dessous

$$(P1_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma\nabla u) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u & = \phi & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (P2_{sim}) \begin{cases} -\nabla(\sigma\nabla u) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = \psi & \text{sur } \Gamma_1 \\ u & = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu} & = g_L & \text{sur } L \end{cases} \quad (4.7.85)$$

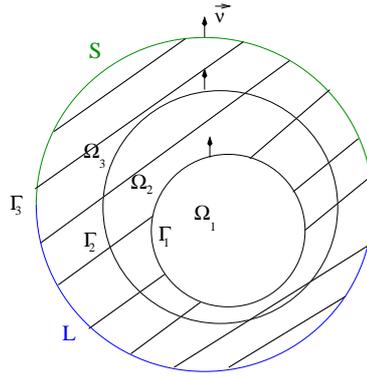


FIG. 4.6 – Le domaine  $\Omega$

Ces deux problèmes sont bien posés dans  $H^1(\Omega)$ . Leur étude est similaire à celle des problèmes directs de *l'approche successive*.

#### Résolution par équations intégrales

Pour résoudre les problèmes directs  $(P1_{sim})$  et  $(P2_{sim})$  nous utilisons la même représentation intégrale en simple et double couche utilisée auparavant. Nous l'écrivons dans  $\Omega_2$  et dans  $\Omega_3$ , prenons la restriction sur leurs frontières respectives

dans  $\Omega_3$ ,

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_3 : & -D_{3,2}u_2 + S_{3,2}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2^+ & = -\left(\frac{I_3}{2} + D_{3,3}\right)u_3 + S_{3,3}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_3^- \\ \text{sur } \Gamma_2 : & \left(\frac{I_2}{2} - D_{2,2}\right)u_2 + S_{2,2}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2^+ & = -D_{2,3}u_3 + S_{2,3}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_3^- \end{cases}$$

dans  $\Omega_2$ ,

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_2 : & \left(\frac{I_2}{2} + D_{2,2}\right)u_2 - S_{2,2}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2^- & = D_{2,1}u_1 - S_{2,1}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_1^+ \\ \text{sur } \Gamma_1 : & D_{1,2}u_2 - S_{1,2}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2^- & = \left(-\frac{I_1}{2} + D_{1,1}\right)u_1 - S_{1,1}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_1^+ \end{cases}$$

où  $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_j^-$  est la limite intérieure du flux à travers la surface  $\Gamma_j$  et  $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_j^+$  est la limite extérieure,  $j = 1, 2, 3$ .

Nous multiplions les équations provenant de la représentation intégrale dans le domaine  $\Omega_3$  par  $\sigma_3$  et celles de  $\Omega_2$  par  $\sigma_2$ , nous obtenons alors

$$-\sigma_3 D_{3,2} u_2 + S_{3,2} (\sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu})_2^+ = -\sigma_3 (\frac{I_3}{2} + D_{3,3}) u_3 + S_{3,3} (\sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu})_3^- \quad (4.7.86)$$

$$\sigma_3 (\frac{I_2}{2} - D_{2,2}) u_2 + S_{2,2} (\sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu})_2^+ = -\sigma_3 D_{2,3} u_3 + S_{2,3} (\sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \nu})_3^- \quad (4.7.87)$$

$$\sigma_2 (\frac{I_2}{2} + D_{2,2}) u_2 - S_{2,2} (\sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu})_2^- = \sigma_2 D_{2,1} u_1 - S_{2,1} (\sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu})_1^+ \quad (4.7.88)$$

$$\sigma_2 D_{1,2} u_2 - S_{1,2} (\sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu})_2^- = \sigma_2 (-\frac{I_1}{2} + D_{1,1}) u_1 - S_{1,1} (\sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu})_1^+ \quad (4.7.89)$$

Ensuite nous considérons les deux équations (4.7.87) et (4.7.88) écrites sur  $\Gamma_2$  et nous exprimons  $u_2$  et  $\sigma_2 (\frac{\partial u}{\partial \nu})_2^-$  en fonction des valeurs du potentiel et du flux sur  $\Gamma_1$  et sur  $\Gamma_3$ . Puis, nous les substituons dans les équations écrites sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

Notons  $H_{2,2} = (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}) \frac{I_2}{2} + D_{2,2}$ . Puisque  $|\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3}| > 1$ , d'après [3] :

$$H_{2,2} : L^2(\Gamma_2) \rightarrow L^2(\Gamma_2) \text{ est un isomorphisme}$$

Le système matriciel obtenu est le suivant :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_3} (\frac{\partial u}{\partial \nu})_1^- \\ \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_3} u_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_3} u_1 \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} (\frac{\partial u}{\partial \nu})_3^- \end{pmatrix} \quad (4.7.90)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont définies comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = (\sigma_2 - \sigma_3) & \begin{bmatrix} S_{1,1} & 0 \\ 0 & \sigma_3 (\frac{I_3}{2} + D_{3,3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma_2 D_{1,2} \\ \sigma_3 D_{3,2} \end{bmatrix} H_{2,2}^{-1} \begin{bmatrix} S_{2,1} & \sigma_3 D_{2,3} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -S_{1,2} \\ S_{3,2} \end{bmatrix} S_{2,2}^{-1} H_{2,2}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_3 (\frac{I_2}{2} - D_{2,2}) S_{2,1} & -\sigma_2 \sigma_3 (\frac{I_2}{2} + D_{2,2}) D_{2,3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7.91)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = (\sigma_2 - \sigma_3) & \begin{bmatrix} -\sigma_2 (\frac{I_1}{2} - D_{1,1}) & 0 \\ 0 & S_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sigma_2 D_{1,2} \\ \sigma_3 D_{3,2} \end{bmatrix} H_{2,2}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_2 D_{2,1} & S_{2,3} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -S_{1,2} \\ S_{3,2} \end{bmatrix} S_{2,2}^{-1} H_{2,2}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_2 \sigma_3 (\frac{I_2}{2} - D_{2,2}) D_{2,1} & -\sigma_2 (\frac{I_2}{2} + D_{2,2}) S_{2,3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7.92)$$

### 4.7.3 Tests numériques

Nous présentons dans ce paragraphe des tests numériques pour le problème aux conditions aux limites mêlées décrit dans (4.7.45). Dans ce cas, nous connaissons  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}$  et  $u|_{\Gamma_e}$  et nous cherchons à calculer  $u|_{\Gamma_i}$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_e}$ . Nous considérons les maillages de la géométrie sphérique définis en (Tab. 2.2), précisément nous travaillons sur la couronne  $\mathcal{C}$  formée par les sphères de rayons respectives 1 et 0.92.

Nous considérons la fonction analytique suivante <sup>§</sup> :

$$u(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.7.93)$$

qui est harmonique dans la couronne  $\mathcal{C}$  considérée ci-dessus. Nous désignerons cette fonction par  $u^{ex}$ , les données de Cauchy considérées sont  $u_e \equiv u_{|\Gamma_e}^{ex}$  et  $p_i \equiv \frac{\partial u^{ex}}{\partial \nu} |_{\Gamma_i}$ , et nous cherchons à déterminer  $u_i^{ex} \equiv u_{|\Gamma_i}^{ex}$  et  $p_e^{ex} \equiv \frac{\partial u^{ex}}{\partial \nu} |_{\Gamma_e}$  en résolvant le système discret (4.7.69). Ce système est inversé en utilisant une décomposition  $LU$  à l'aide des sous-routines de la bibliothèque numérique d'algèbre linéaire *Lapack* en Fortran.

Afin d'étudier la robustesse de la méthode de résolution, nous ajoutons aux données  $(u_e, p_i)$  un bruit gaussien d'amplitude : 0%, 1%, 3%, 5% et 10%. Nous donnons dans les tableaux (Tab. 4.1) et (Tab. 4.2) les erreurs obtenues sur  $u_i$  et sur  $p_e$ , définies de la façon suivante

$$err(u_i) = \frac{\|u_i^{ex} - u_i^c\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|u_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}} \quad , \quad err(p_e) = \frac{\|p_e^{ex} - p_e^c\|_{L^2(\Gamma_e)}}{\|p_e^{ex}\|_{L^2(\Gamma_e)}}$$

où l'exposant  $(c)$  désigne la valeur calculée.

	0%	1%	3%	5%	10%
<i>Mesh1</i>	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$5.4 \cdot 10^{-2}$
<i>Mesh2</i>	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$
<i>Mesh3</i>	$9.2 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$

TAB. 4.1 – L'erreur relative  $err(u_i)$  en fonction des données perturbées de 0%, 1%, 3%, 5%, 10%.

	0%	1%	3%	5%	10%
<i>Mesh1</i>	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$
<i>Mesh2</i>	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-2}$
<i>Mesh3</i>	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-2}$	$24 \cdot 10^{-2}$	$49 \cdot 10^{-2}$

TAB. 4.2 – L'erreur relative  $err(p_e)$  en fonction des données perturbées de 0%, 1%, 3%, 5%, 10%.

Nous remarquons que l'erreur se dégrade avec l'augmentation du bruit ajouté aux données. Et, que le calcul du potentiel  $u_i$  devient plus précis avec le raffinement du maillage, ce qui n'est pas le cas pour le flux  $p_e$ . Ceci peut être expliqué par le fait que nous utilisons des équations intégrales de première espèce [19] en l'inconnu  $p_e$ .

## 4.8 Expériences numériques pour le problème de Cauchy

Dans cette section, nous présentons des expériences numériques pour le problème de Cauchy résolu par l'algorithme alternatif présenté dans ce chapitre. Dans un premier lieu, nous faisons des tests dans une couronne sphérique avec une fonction analytique afin d'étudier la convergence de l'algorithme, le nombre d'itérations nécessaire, la sensibilité par rapport au choix initial et par rapport à l'épaisseur de la couronne, la stabilité par rapport aux perturbations des données

<sup>§</sup>Cette fonction correspond à  $(4\pi) *$  le potentiel créé par un dipôle placé à l'origine et de moment  $q = (1, 0, 0)$ .

et le comportement en fonction du manque de données. Nous discutons également du critère d'arrêt de l'algorithme.

Ensuite, nous présentons des résultats obtenus lors de la résolution du problème de Cauchy dans le domaine non-homogène  $\Omega$  qui représente le scalp et le crâne, en considérant des données simulées provenant d'un terme source et construites par la résolution d'un problème direct en EEG. Des tests seront appliqués sur une géométrie sphérique et sur une géométrie réaliste, pour les deux approches *successive* et *simultanée*.

Nous considérons la géométrie sphérique décrite auparavant (Tab. 2.2), et une géométrie réaliste dont nous notons le maillage par *Mesh4*. Ce maillage qui nous a été fourni par le CHU d'Amiens est obtenu par le logiciel ASA à partir des images IRM d'un patient. Il comporte trois couches dont nous indiquons le nombre d'éléments de discrétisation dans le tableau (Tab. 4.3) et que nous représentons dans les figures (Fig. 4.7) et (Fig. 4.8).

	noeuds	triangles
<i>scalp</i>	616	1228
<i>crâne</i>	510	1016
<i>cerveau</i>	510	1016

TAB. 4.3 – Le maillage de la géométrie réaliste.

#### 4.8.1 Résultats obtenus dans une couronne pour une fonction analytique

Nous considérons dans ce paragraphe la géométrie sphérique, particulièrement nous prenons le maillage *Mesh2* (cf Tab. 2.2) et travaillons sur la couronne  $\mathcal{C}$  (Fig. 4.2) formée par les deux sphères de rayons 1 et 0.92<sup>h</sup>. Nous résolvons le problème de Cauchy (4.6.13) pour la fonction  $u(x, y, z) = \frac{x}{r^3}$  qui est harmonique dans  $\mathcal{C}$ . Nous supposons connues les données du potentiel et du flux  $f_e$  et  $g_e$  sur  $(S, \Gamma_e)$ , et nous voulons calculer  $u_i \equiv u|_{\Gamma_i}$  et  $(\frac{\partial u}{\partial \nu})_i \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}$  en appliquant l'algorithme décrit dans le paragraphe §4.6.2.

##### • Cas de données complètes sur la surface extérieure ( $S = \Gamma_e$ )

Nous supposons connaître  $f_e$  sur toute la surface extérieure  $\Gamma_e$  et étudions le comportement de l'algorithme en fonction du choix de l'estimation initiale, de l'épaisseur de la couronne et de la perturbation des données.

##### Résultats obtenus en fonction du choix initial

L'algorithme décrit au §4.6.2 dépend d'une estimation initiale  $f^0$  du potentiel  $u_i$  sur la surface intérieure  $\Gamma_i$  et le théorème 4 dans le paragraphe §4.6.4 appliqué au cas homogène assure la convergence de l'algorithme pour des données compatibles et ceci pour n'importe quel choix de  $f^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ . Afin de vérifier cela, nous avons pris deux choix initiaux sur la surface intérieure  $\Gamma_i$  :  $f_1^0 = 0$  et  $f_2^0$  quelconque dont les valeurs aux noeuds de  $\Gamma_i^h$  ont été choisies aléatoirement selon une loi gaussienne. Nous avons  $\frac{\|f_1^0 - u_i^{ex}\|_\infty}{\|u_i^{ex}\|_\infty} = 1$  et  $\frac{\|f_2^0 - u_i^{ex}\|_\infty}{\|u_i^{ex}\|_\infty} = 2.33$ .

<sup>h</sup>Ce choix est arbitraire, nous étudierons ultérieurement la sensibilité de l'algorithme par rapport à l'épaisseur de la couronne.

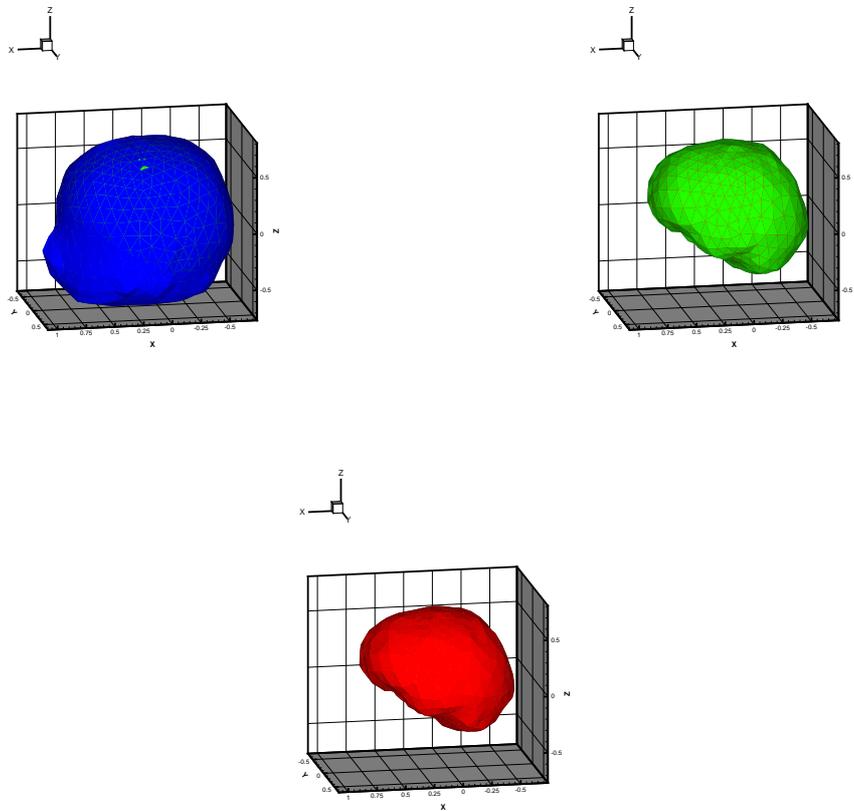


FIG. 4.7 – Géométrie réaliste. La première figure (haut-gauche) représente le scalp, la deuxième le crâne et la dernière (en bas) le cerveau.

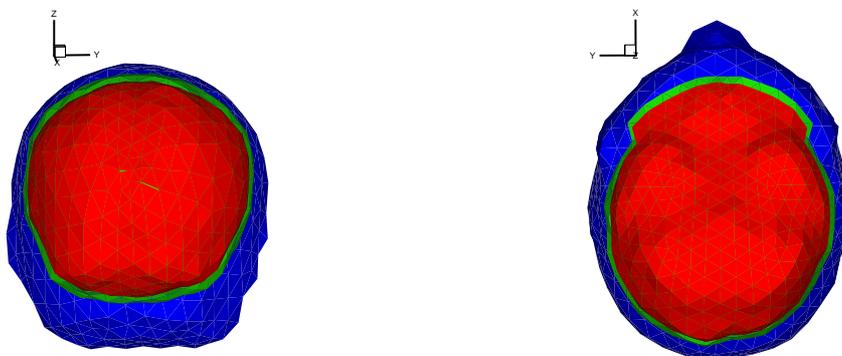


FIG. 4.8 – Une coupe longitudinale et une coupe transversale de la géométrie réaliste.

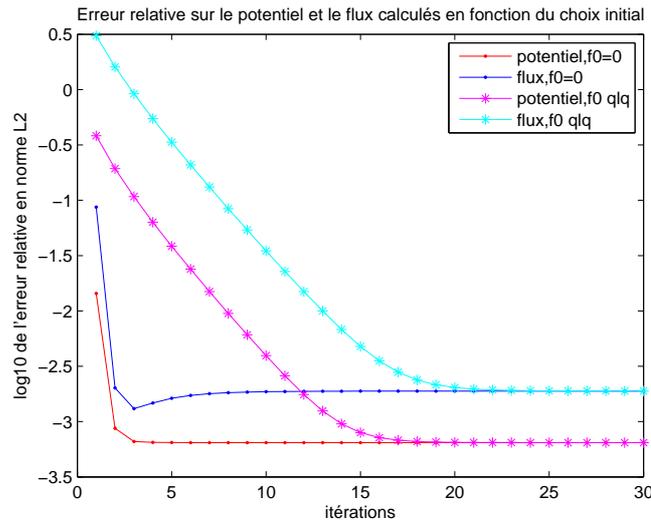


FIG. 4.9 – L'erreur relative sur les valeurs calculées  $u_i$  et  $(\frac{\partial u}{\partial \nu})_i$  de la fonction  $\frac{x}{r^3}$ , pour deux choix de l'estimation initiale  $f_1^0 = 0$  et  $f_2^0$  quelconque.

Nous traçons dans la figure (Fig. 4.9) le logarithme en base 10 de l'erreur relative en norme  $L^2$  sur  $\Gamma_i$  entre les valeurs calculées à la  $k$ ème itération  $f^k$  et  $g^k$  et les valeurs exactes. Ces erreurs sont définies de la façon suivante

$$\frac{\|f^k - u_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|u_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}}, \quad \frac{\|g^k - (\frac{\partial u^{ex}}{\partial \nu})_i\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|(\frac{\partial u^{ex}}{\partial \nu})_i\|_{L^2(\Gamma_i)}}$$

Ces résultats permettent de faire les remarques suivantes :

1. Pour le choix initial  $f_2^0$ , les suites calculées  $(f^k)_k$  et  $(g^k)_k$  tendent vers la même solution numérique que pour  $f_1^0$  mais d'une façon plus lente. Donc, le choix initial n'influe pas sur la précision des valeurs calculées mais seulement sur le nombre d'itération :
  - la suite calculée  $(f^k)_k$  du potentiel sur  $\Gamma_i$  tend vers une solution proche de la solution exacte avec une précision relative d'ordre  $6 \cdot 10^{-4}$  à partir de la 6ème itération pour un choix initial nul et à partir de la 20ème itération pour un choix initial quelconque.
  - la suite du flux  $(g^k)_k$  évolue vers une solution proche de la solution exacte avec une précision relative d'ordre  $1.8 \cdot 10^{-3}$  à partir de la 13ème itération pour un choix initial nul et à partir de la 27ème itération pour un choix initial quelconque.
2. La précision relative sur le flux est moins bonne que celle sur le potentiel. Ce résultat a été également obtenu par *D. Lesnic & al.* [79] et *Cimetière & al.* [24] dans leurs applications en 2D (cf §4.6.6).

3. Les suites calculées tendent vers les valeurs exactes avec une bonne précision et avec relativement peu d'itérations ce qui est contradictoire à plusieurs résultats obtenus dans la littérature ([64], ...). Ceci pourrait être expliqué d'une part par la régularité de la géométrie que nous utilisons et d'autre part, par la faible épaisseur de la couronne, ce dernier point est étudié au paragraphe suivant.

Dans ce qui suit, nous prenons  $f^0 = 0$ .

### Résultats obtenus en fonction de l'épaisseur

Nous reprenons la même couronne, fixons le rayon de  $\Gamma_e$  à 1, et variions celui de  $\Gamma_i$  en prenant les valeurs suivantes : 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98. Nous traçons dans la figure (Fig. 4.10) l'erreur relative en norme  $L^2$  pour le potentiel et le flux calculés sur  $\Gamma_i$  pour les différents rayons considérés.

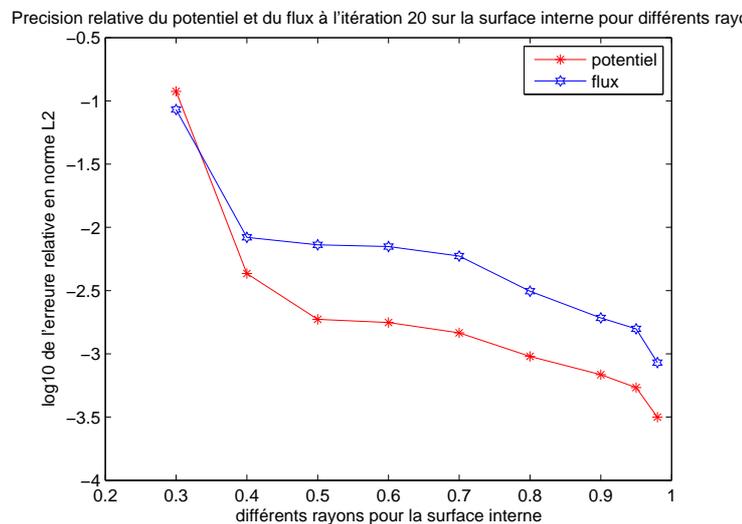


FIG. 4.10 – L'erreur relative sur le potentiel et le flux calculés sur la surface interne  $\Gamma_i$  pour la fonction  $\frac{x}{r^3}$  pour différents rayons de la sphère intérieure, celui de la sphère extérieure étant fixé à 1 (valeurs prises à la 20ème itération).

Nous remarquons alors, de façon "relativement intuitive", que la précision sur le calcul du potentiel et du flux augmente avec la diminution de l'épaisseur de la couronne. C'est particulièrement pour cette raison que nous avons adopté cette méthode pour la résolution du problème de Cauchy en EEG. Notons que pour la géométrie sphérique, la couronne du scalp a pour épaisseur 0.08 et celle du crâne a pour épaisseur 0.05. Et pour la géométrie réaliste, l'épaisseur entre les couches est également faible sauf pour la partie du scalp qui se situe au niveau du visage et du cou (Fig. 4.7).

### Etude du comportement de l'algorithme en fonction de la perturbation des données

Dans ce paragraphe nous étudions le comportement de l'algorithme en fonction des perturbations des données  $f_e$  et  $g_e$  sur la surface extérieure de la couronne. Nous ajoutons à ces données un bruit gaussien d'amplitudes respectives  $p = 0\%$ ,  $1\%$ ,  $3\%$ ,  $5\%$ ,  $7\%$ , et  $10\%$  de la façon suivante

$$\tilde{f}_e(x) = f_e(x)(1 + pN(x))$$

$$\tilde{g}_e(x) = g_e(x)(1 + pN(x))$$

où  $N(x)$  est une variable aléatoire qui suit une loi gaussienne centrée en 0 de moyenne 0 et d'écart-type 1.<sup>i</sup>

Dans l'approche *successive*, nous avons à résoudre deux problèmes de Cauchy, le premier étant dans la couronne du scalp et le deuxième dans la couronne du crâne. Pour la première couronne, la donnée  $f_e$  constitue la mesure EEG donc elle est bruitée, et le flux  $g_e$  est considéré nul sur toute la surface du scalp, mais en réalité le flux est très petit et pas forcément nul, et en plus nous ne connaissons pas sa valeur sur le cou. Et pour la deuxième couronne,  $f_e$  et  $g_e$  sont les valeurs obtenues par le calcul fait dans la première couronne. D'où l'intérêt d'étudier la sensibilité de l'algorithme par rapport à la perturbation de  $f_e$  et la perturbation de  $g_e$ . Ceci constitue le but des paragraphes suivants.

### perturbation de la donnée $f_e$

Nous traçons dans la figure (Fig. 4.11) la variation de l'erreur relative sur le potentiel et le flux calculés sur  $\Gamma_i$  en fonction du nombre d'itérations pour différents taux de perturbation de la donnée  $f_e$ .

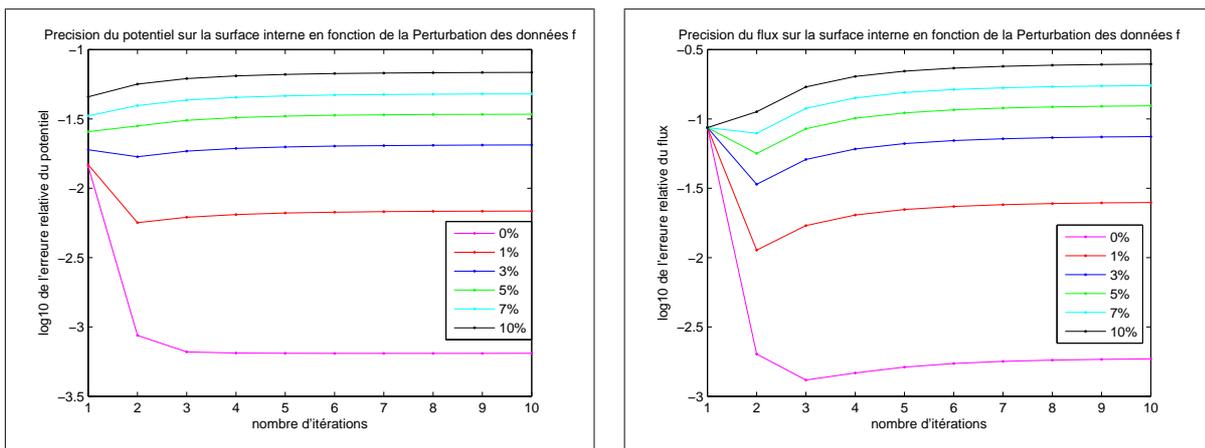


FIG. 4.11 – Erreurs relatives obtenues sur le potentiel et le flux pour la fonction  $\frac{f}{3}$  dans la couronne du scalp sur le maillage *Mesh2*, ceci pour le cas où la donnée du potentiel  $f_e$  est perturbée de 0, 1, 3, 5, 7 et 10%. La première figure représente les erreurs sur la suite du potentiel calculé et la deuxième est pour le flux.

Nous remarquons sur ces deux figures que l'algorithme est sensible aux perturbations de  $f_e$ , et surtout le calcul du flux qui devient de plus en plus imprécis avec l'augmentation du bruit. Ces résultats montrent également l'aspect régularisant de l'algorithme ; pour de faibles perturbations, il existe une itération optimale à laquelle nous avons les valeurs calculées les plus proches des valeurs exactes et pour de fortes perturbations la première itération donne les meilleurs résultats.

### perturbation de la donnée $g_e$

Dans ce paragraphe nous étudions la sensibilité de l'algorithme par rapport à la perturbation de la donnée  $g_e$ . Nous traçons dans la figure (Fig. 4.12) la variation de l'erreur relative sur le potentiel et le flux calculés sur  $\Gamma_i$  en fonction du nombre d'itérations pour différents taux de perturbation de  $g_e$ .

<sup>i</sup>Les perturbations sur les données ont été effectuées avec un nombre de tirages satisfaisant.

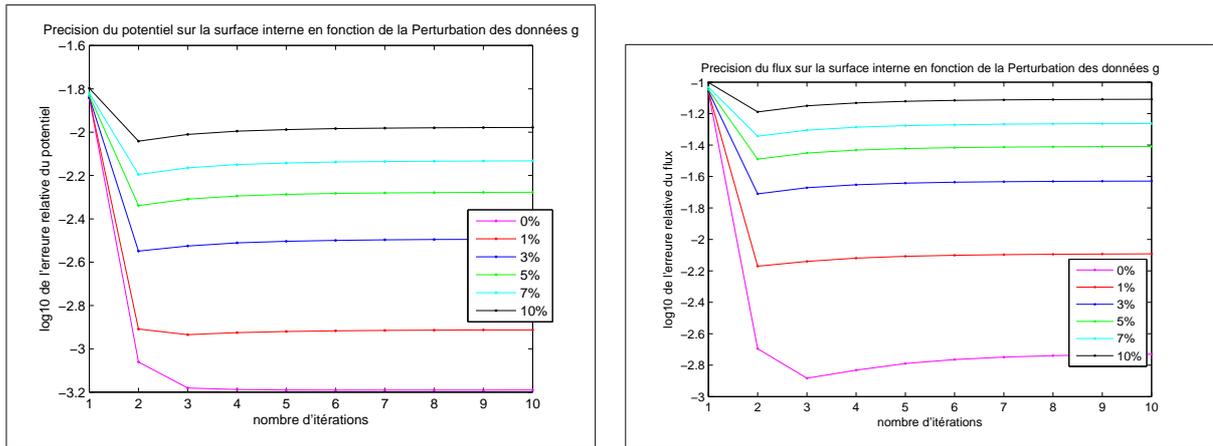


FIG. 4.12 – Erreurs relatives obtenues sur le potentiel et le flux pour la fonction  $\frac{x}{r^3}$  sur la couronne du scalp sur le maillage *Mesh2*, ceci pour le cas où la donnée du flux  $g_e$  est perturbée de 0, 1, 3, 5, 7 et 10%. La première figure représente les erreurs sur la suite du potentiel calculé et la deuxième est pour le flux.

Comme pour le cas de la perturbation de  $f_e$ , nous trouvons que le calcul du potentiel  $u_i$  et du flux  $(\frac{\partial u}{\partial \nu})_i$  est sensible à la perturbation de  $g_e$  mais dans une moindre mesure. Ceci va être étudié au paragraphe suivant.

#### Comparaison entre la sensibilité par rapport à la perturbation de $f_e$ et la perturbation de $g_e$

Dans la figure (Fig. 4.13), nous traçons l'erreur relative commise sur le calcul du potentiel et du flux une fois en perturbant  $f_e$  de 3% et en prenant  $g_e$  exacte, et une fois en perturbant  $g_e$  de 3% et en prenant  $f_e$  exacte. D'après cette figure nous concluons que l'algorithme est plus sensible à la perturbation de la donnée du potentiel  $f_e$  qu'à la perturbation de la donnée du flux  $g_e$ .

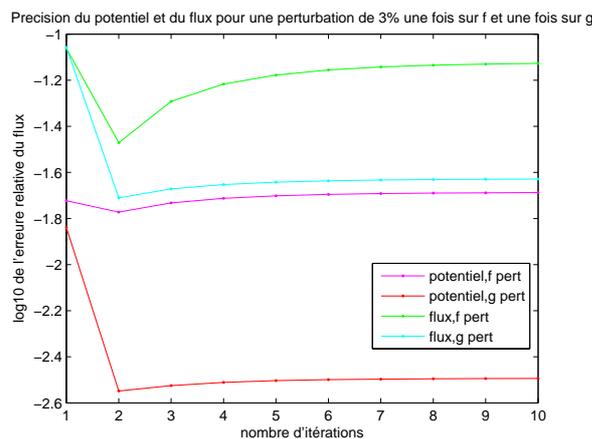


FIG. 4.13 – Comparaison entre les erreurs relatives sur le potentiel et le flux obtenues une fois pour  $f_e$  perturbée de 3% et  $g_e$  exacte, et une fois pour  $f_e$  exacte et  $g_e$  perturbée de 3%.

#### • Cas de données connues partiellement sur la surface extérieure

Nous rappelons que le cas du problème de Cauchy posé dans le domaine du scalp, nous connaissons le potentiel partiellement sur la frontière extérieure :  $u = f_e$  sur  $S \subset \Gamma_e$ . Pour construire numériquement la partie  $S$ , nous définissons la variable  $\beta \in [-1; 1]$  telle que  $S$  soit formée par

les noeuds  $X_i$  du maillage qui satisfont  $X_i(3) \geq \beta$  (Fig. 4.14).

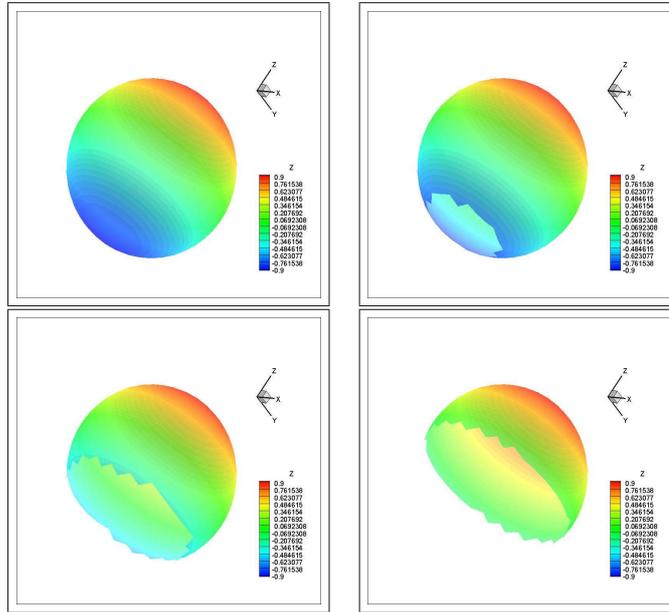


FIG. 4.14 – La surface  $S$  des mesures pour quatre valeurs différentes de  $\beta$  qui sont (de gauche à droite et de haut en bas) :  $-1$ ,  $-0.8$ ,  $-0.4$  et  $0$ . Ce qui signifie que  $S$  représente respectivement 100%, 90%, 70% et 50% de  $\Gamma_e$ .

La figure (Fig. 4.15) montre la variation de l'erreur relative sur le potentiel et le flux calculés  $u_i$ ,  $(\frac{\partial u}{\partial \nu})_i$  en fonction de différentes valeurs de  $\beta$  allant de  $-1$  ( $S = \Gamma_e$ ) jusqu'à  $0.8$  ( $S$  représente 10% de  $\Gamma_e$ ). Nous observons alors que l'erreur sur les valeurs calculées sur la surface intérieure augmente lorsque la surface des mesures diminue. Par ailleurs, plus la taille de la surface  $S$  des mesures diminue, plus la reconstruction du potentiel sera moins précise que celle du flux. Ce résultat a été également constaté dans [15].

#### 4.8.2 Résultats obtenus dans une couronne avec des mesures simulées

Dans ce paragraphe, nous générons les données en résolvant le problème direct en EEG pour un dipôle placé dans la région profonde du cerveau, de position  $(0.125, 0.125, 0.125)$  et de moment  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ .

**Remarque 7** *Le calcul des traces du potentiel a été présenté au chapitre 2. Les traces du flux sont obtenues à l'aide du calcul des traces normales  $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma_j}$  de la solution  $w$  du problème (2.1.11). Ce calcul est détaillé dans l'annexe C.*

Pour les résultats présentés dans ce paragraphe, nous considérons la couronne du scalp avec les maillages sphériques  $Mesh2$ ,  $Mesh3$  et le maillage réaliste  $Mesh4$ . Nous prenons d'abord  $f_e$  connue sur toute la surface extérieure et étudions le comportement de l'algorithme sur les trois maillages en fonction de la perturbation de  $f_e$ . La figure (Fig. 4.16) montre les erreurs relatives en norme  $L^2$  obtenues sur le maillage  $Mesh2$  pour le calcul du potentiel et du flux sur la surface intérieure pour  $f_e$  perturbée de 0, 1, 3, 5 et 10% et la figure (Fig. 4.17) montre les erreurs pour le maillage sphérique  $Mesh3$  et pour le maillage réaliste  $Mesh4$ . Dans la figure (Fig. 4.18) nous

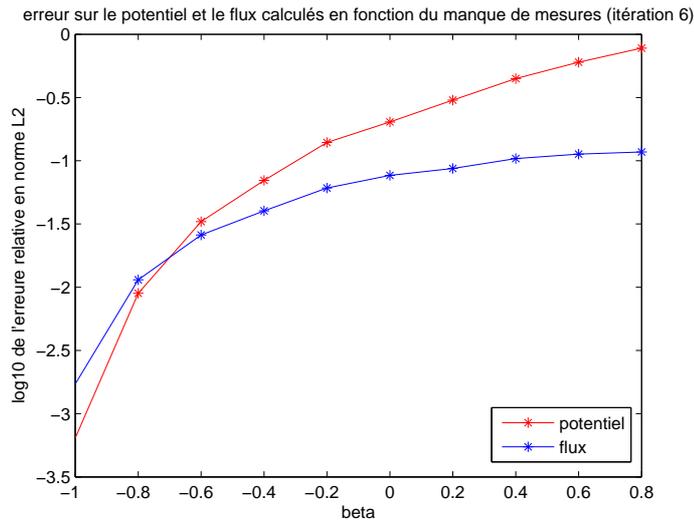


FIG. 4.15 – L'erreur relative sur le potentiel et le flux calculés sur  $\Gamma_i$  pour la fonction  $\frac{x}{r^{3/2}}$  en fonction de la quantité de mesures dont nous disposons représentée par  $\beta$  qui va de  $-1$  jusqu'à  $0.8$  et qui signifie que  $S$  représente respectivement 100%, 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20% et 10% de la surface extérieure.

présentons sur la même figure les erreurs pour les trois maillages afin de comparer entre elles.

Enfin, dans le tableau (Tab. 4.4), nous donnons pour les trois maillages les erreurs relatives à la 2<sup>ème</sup> itération dans le cas où  $f_e$  est connue sur 60% de la surface du scalp et est perturbée de 5%, et  $g_e$  est connue sur 80% du scalp et perturbée de 1%.

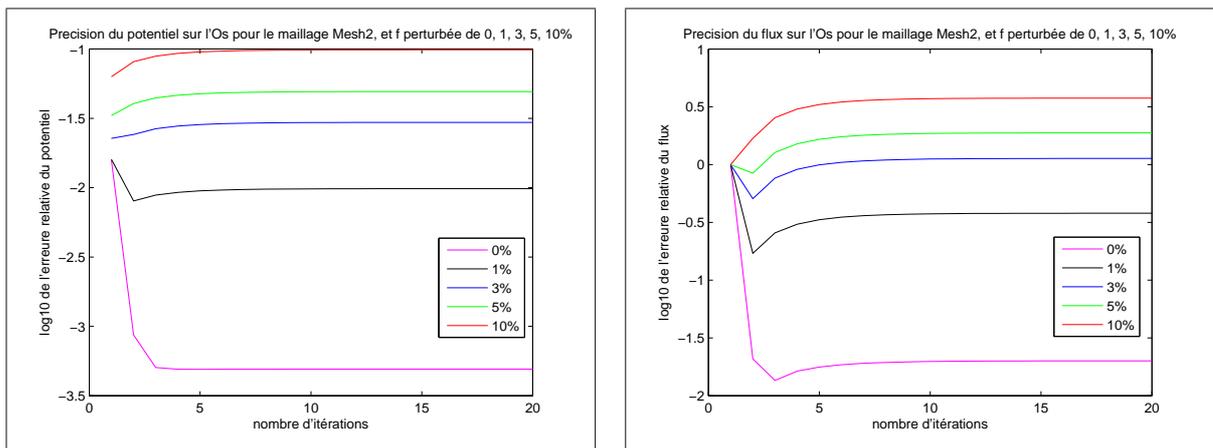


FIG. 4.16 – **Cas de mesures simulées.** Erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur la surface de l'os avec  $f$  connue sur toute la surface du scalp et perturbée de 0, 1, 3, 5 et 10%. La première figure est pour les erreurs sur le potentiel et la deuxième est pour le flux.

Ces résultats reflètent la sensibilité de l'algorithme à la perturbation et au manque de données. Par ailleurs, ils mettent en évidence l'importance du choix du critère d'arrêt qu'il faudrait imposer afin d'obtenir les "meilleures" valeurs calculées et montrent que l'itération optimale à laquelle nous obtenons ces valeurs dépend du taux de perturbation des données. Ceci va être discuté dans le paragraphe suivant.

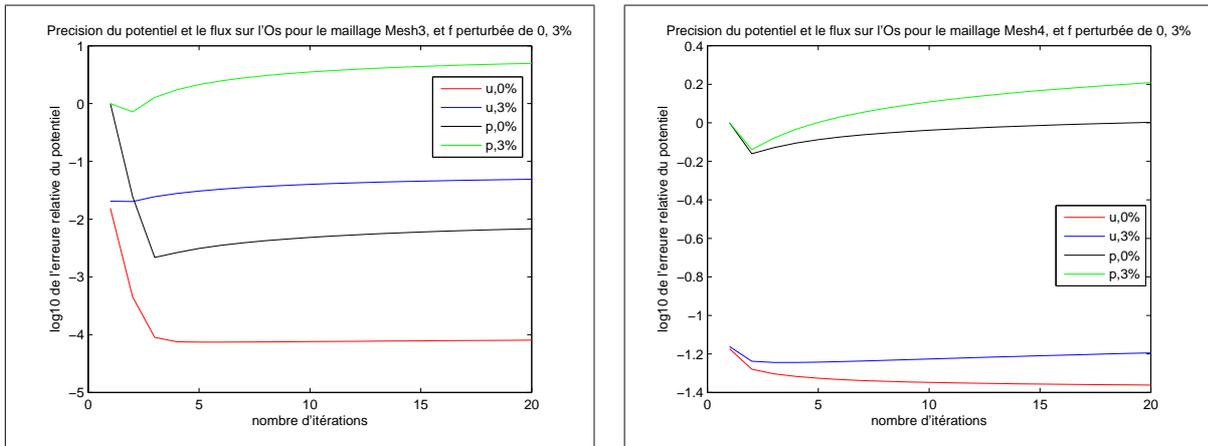


FIG. 4.17 – Cas de mesures simulées. Erreurs relatives sur le potentiel  $u$  et le flux  $p$  calculés sur la surface de l'os avec  $f$  connue sur toute la surface du scalp et perturbée de 0 et 3%. La première figure est pour le maillage sphérique Mesh3 et la deuxième est pour le maillage réaliste Mesh4.

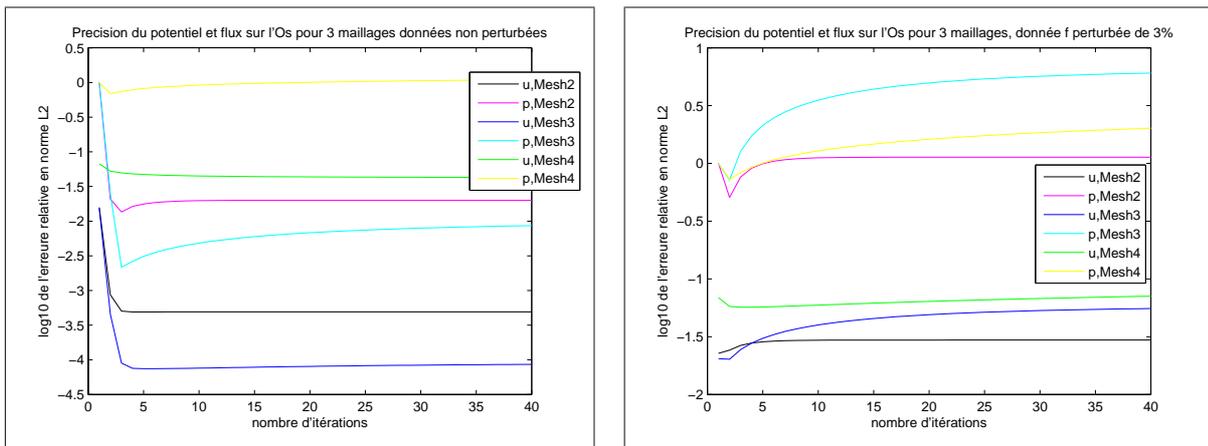


FIG. 4.18 – Cas de mesures simulées. Dans cette figure nous comparons les erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur la surface de l'os, pour les trois maillages  $Mesh2$ ,  $Mesh3$  et  $Mesh4$ , avec données connues sur toute la surface du scalp. La première figure est pour  $f$  non perturbée, la deuxième pour  $f$  perturbée de 3%.

	potentiel	flux
$Mesh2$	0.4305	0.9534
$Mesh3$	0.4056	1.1726
$Mesh4$	0.1037	0.8500

TAB. 4.4 – Cas de mesures simulées. Les erreurs relatives sur la surface de l'os du potentiel et du flux calculés avec  $f_e$  connue sur 60% du scalp et perturbée de 5% et  $g_e$  connue sur 80% du scalp et perturbée de 1% (valeurs prises à la 2ème itération).

### 4.8.3 Critère d'arrêt

Puisque nous ne connaissons pas la solution exacte, il faudrait alors imposer un critère d'arrêt portant sur les valeurs calculées. Nous avons ainsi considéré les critères suivants

- **Critère 1** : "stationnarité" des suites du potentiel et du flux calculés sur  $\Gamma_i$  :  $(f^k)_k$  et  $(g^k)_k$
- **Critère 2** : "stationnarité" de la suite  $(f^k)_k$
- **Critère 3** : "convergence" vers 0 de la suite  $(E_k \equiv \|\mathcal{A}X^k - b\|)_k$  où  $\mathcal{A}$ ,  $X^k$  et  $b$  sont définis comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{I_i}{2} + D_{i,i} & -S_{i,i} \\ D_{e,i} & -S_{e,i} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_i^k \\ \left(\frac{\partial u^k}{\partial \nu}\right)_i \end{pmatrix}}_{X^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} -D_{i,e} & S_{i,e} \\ -\frac{I_e}{2} - D_{e,e} & S_{e,e} \end{bmatrix}}_b \underbrace{\begin{pmatrix} u_e \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_e \end{pmatrix}}_{b} \quad (4.8.94)$$

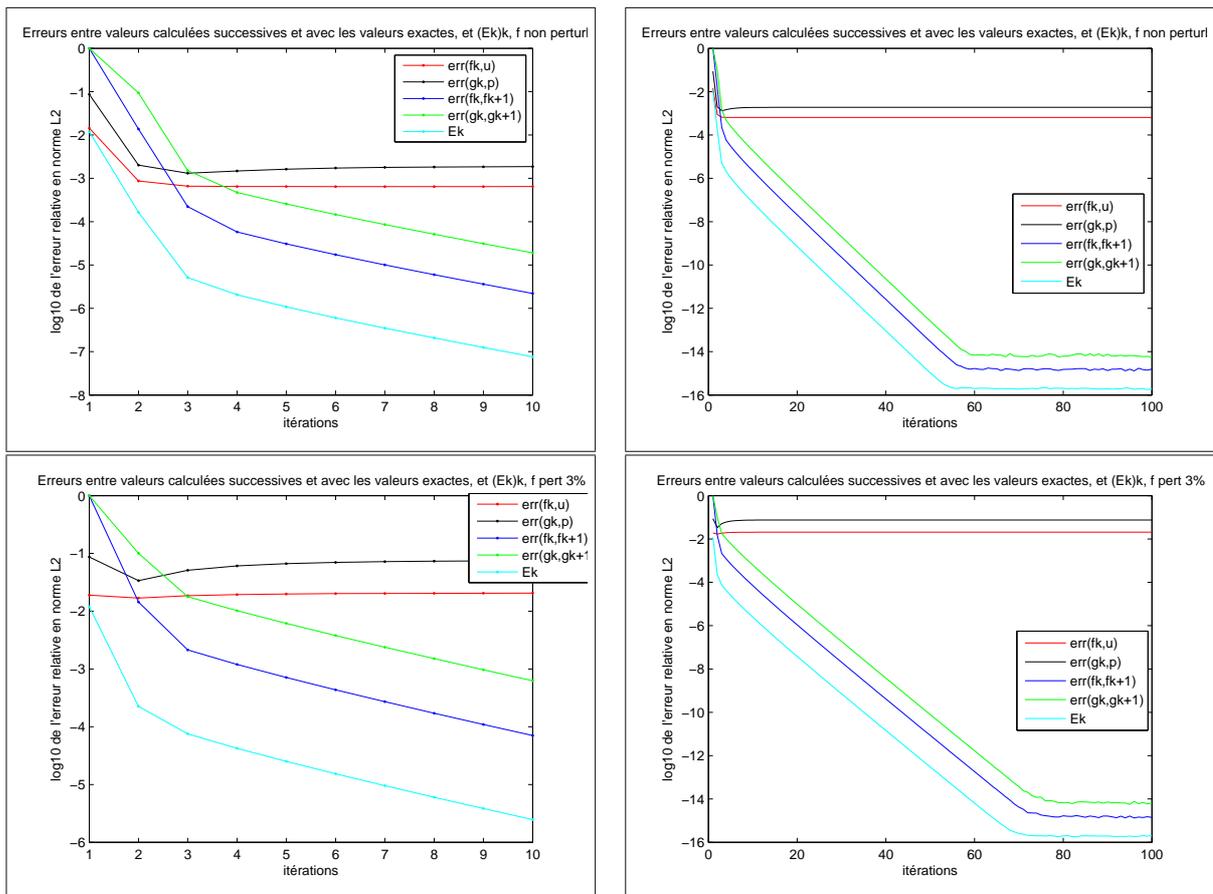


FIG. 4.19 – Nous considérons la fonction analytique  $\frac{x}{x^3}$  et présentons les erreurs relatives  $err(f_k, u)$  et  $err(g_k, p)$  sur le potentiel et le flux calculés, les erreurs  $err(f^k, f^{k+1})$ ,  $err(g^k, g^{k+1})$  et  $E_k$ . Les deux figures en haut correspondent à  $f$  non perturbée pour 10 et 100 itérations respectivement. Et, celles en bas correspondent à  $f$  perturbée de 3%.

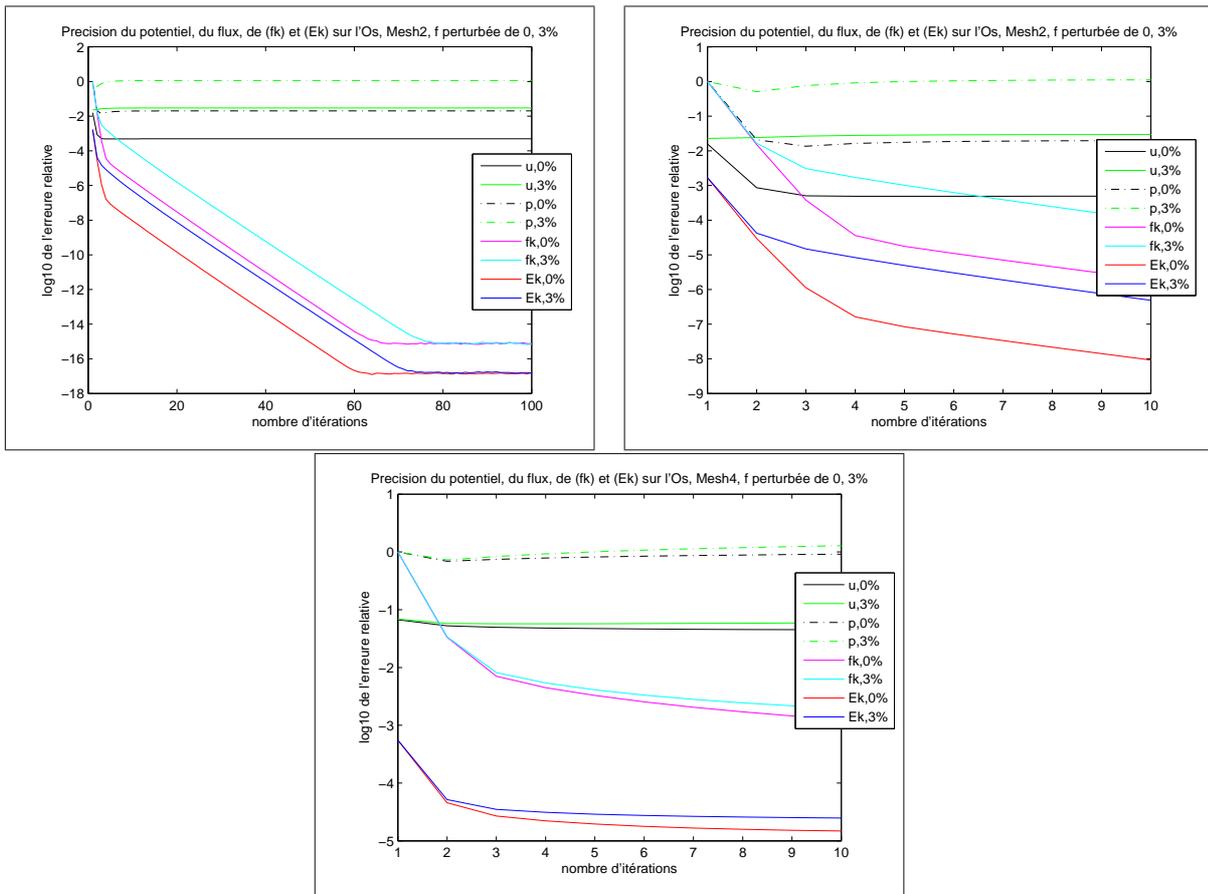


FIG. 4.20 – Nous considérons le cas des mesures simulées et présentons pour  $f$  perturbée de 0 et 3%, les erreurs relatives  $err(f_k, u)$  et  $err(g_k, p)$  sur le potentiel et le flux calculés, ainsi que les erreurs  $err(f^k, f^{k+1})$  et  $E_k$ . La première figure en haut correspond au maillage sphérique *Mesh2* pour 100 itérations et la deuxième correspond aux 10 premières itérations. Et celle en bas correspond au maillage réaliste *Mesh4* pour 10 itérations.

Dans les figures (Fig. 4.19) et (Fig. 4.20) nous considérons respectivement la fonction analytique  $\frac{x}{r^3}$  et le cas des mesures simulées. Pour le premier cas, nous considérons le maillage sphérique *Mesh2* et pour le deuxième cas, nous considérons *Mesh2* et le maillage réaliste *Mesh4*. Nous considérons  $f$  connue sur toute la surface  $\Gamma_3$  et perturbée de 0%, 3%, et traçons à chaque itération les erreurs relatives entre les suites calculées  $f^k$  et  $g^k$  et les valeurs exactes  $u_i^{ex}$  et  $p_i^{ex}$  ( $p_i = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}$ ), ainsi que les erreurs relatives sur les suites  $(f^k)_k$  entre deux suites successives et les erreurs absolues  $E_k$ , et pour le premier cas (fonction analytique) nous traçons en plus les erreurs entre deux valeurs successives de la suite du flux calculés  $(g^k)_k$ . Ces erreurs sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} err(f^k, u_i) &= \frac{\|f^k - u_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|u_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}} \quad , \quad err(g^k, p_i) = \frac{\|g^k - p_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|p_i^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}} \\ err(f^k, f^{k+1}) &= \frac{\|f^k - f^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|f^k\|_{L^2(\Gamma_i)}} \quad , \quad err(g^k, g^{k+1}) = \frac{\|g^k - g^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|g^k\|_{L^2(\Gamma_i)}} \\ E_k &= \left\| \mathcal{A} X^k - b \right\|_{L^2(\Gamma_i)} \end{aligned}$$

Nous espérons que les erreurs  $err(f^k, f^{k+1})$ ,  $err(g^k, g^{k+1})$  et  $E_k$  auraient la même allure des courbes de convergence  $err(f^k, u_i)$  et  $err(g^k, p_i)$  mais ce n'est pas le cas. Par ailleurs elles ont elles-mêmes les mêmes allures ; reste alors à choisir l'un de ces trois critères. D'après la figure (Fig. 4.19) nous remarquons que le calcul de la suite  $(g_k)_k$  est moins précis que celui de la suite  $(f_k)_k$  donc entre les deux premiers critères décrits en début de ce paragraphe nous choisissons le deuxième qui porte sur la stationnarité de la suite  $(f_k)_k$ . D'autre part, entre la convergence de la suite  $(E_k)_k$  et la stationnarité de la suite  $(f_k)_k$  (Fig. 4.20), nous avons opté pour la deuxième afin d'éviter de faire un produit matrice\*vecteur à chaque itération. Donc notre critère d'arrêt est :

$$\frac{\|f^k - f^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|f^k\|_{L^2(\Gamma_i)}} \leq EPS$$

où  $EPS$  est la tolérance sur laquelle il faut jouer en fonction du taux de perturbation. Ainsi nous l'augmentons avec le taux de perturbation pour arrêter l'algorithme aux premières itérations. Donc, en fait nous n'attendons pas que la suite des erreurs  $\|f^k - f^{k+1}\|$  converge vers 0, mais nous arrêtons l'algorithme bien avant cela, donc disons que nous cherchons une "stationnarité" de la suite calculée  $(f_k)_k$  à un certain ordre de précision  $EPS$ .

#### 4.8.4 Expériences numériques dans deux couronnes

Dans ce paragraphe, nous considérons le domaine non-homogène formé des deux couches scalp et crâne et présentons d'abord les résultats obtenus en appliquant l'algorithme de l'approche *simultanée* (voir §4.6.3) sur les deux maillages sphériques *Mesh2* et *Mesh3* et sur le maillage réaliste *Mesh4*. Ensuite nous comparons entre les deux approches *simultanée* et *successive*.

Nous prenons le même dipôle considéré précédemment dans §4.8.2 et résolvons le problème direct correspondant pour générer sur la surface du scalp  $\Gamma_3$  la mesure du potentiel  $f$  ; le flux  $g$  étant supposé nul (problème EEG). Notre but est de calculer le potentiel et le flux sur la surface du cerveau  $u|_{\Gamma_1}$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$  en appliquant soit l'algorithme de l'approche *simultanée* (cas non-homogène) soit deux fois l'algorithme correspondant au cas homogène, la première fois dans la couronne du scalp afin d'obtenir des valeurs approchées de  $u|_{\Gamma_2}$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_2}$ , et la deuxième fois

dans la couronne du crâne avec les valeurs obtenues de la première couronne.

### Approche simultanée

Nous présentons dans la figure (Fig. 4.21) les erreurs relatives en norme  $L^2$  obtenues pour le calcul du potentiel et du flux sur  $\Gamma_1$  à l'aide de l'approche *simultanée*, et ceci pour la géométrie sphérique, *Mesh2*, *Mesh3* et pour la géométrie réaliste *Mesh4* en considérant  $f$  connue sur toute la surface du scalp. La première figure représente les erreurs obtenues avec des données non perturbées et la deuxième avec la donnée  $f$  perturbée de 3%.

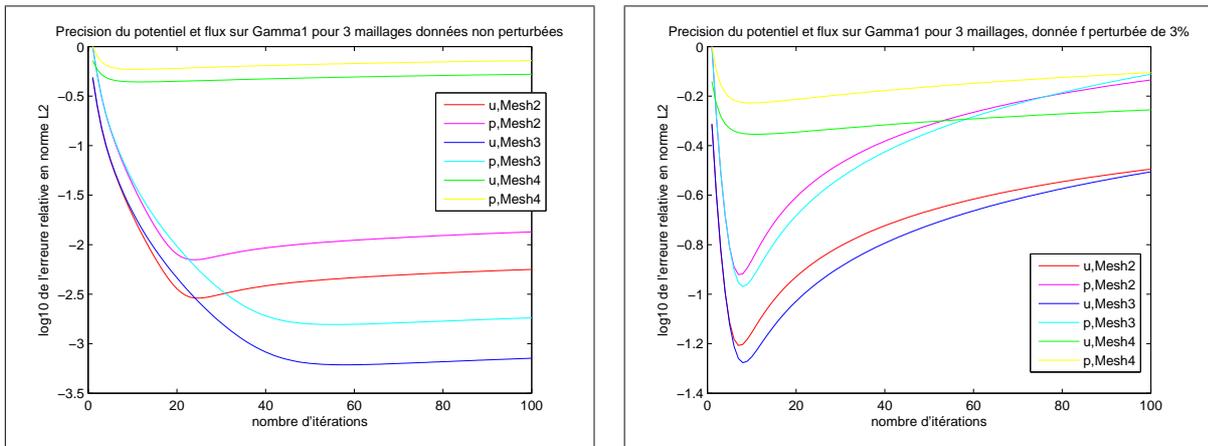


FIG. 4.21 – Erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur la surface du cerveau en appliquant l'approche *simultanée* avec des données connues sur toute la surface du scalp. La première figure est pour  $f$  non perturbée et la deuxième est pour  $f$  perturbée de 3%.

Afin de confirmer la discussion faite sur le critère d'arrêt dans le paragraphe §4.8.3, nous traçons dans la figure (Fig. 4.22) pour le maillage sphérique *Mesh2*, les erreurs relatives sur le potentiel et sur le flux calculés sur  $\Gamma_1$  en considérant  $f$  perturbée de 0, 1, et 3%. Nous présentons également les erreurs relatives entre deux itérations successives sur la suite calculée  $(f_k)_k$  :  $\frac{\|f_{k+1} - f_k\|_{L^2(\Gamma_1)}}{\|f_{k+1}\|_{L^2(\Gamma_1)}}$ .

D'après ces figures, nous tirons les remarques suivantes :

1. Le calcul du potentiel est plus précis que celui du flux.
2. Les valeurs obtenues pour le maillage sphérique *Mesh3* sont meilleures que celles obtenues pour le maillage sphérique *Mesh2*. Cette différence diminue quand les données sont perturbées.
3. Les valeurs obtenues pour le maillage réaliste *Mesh4* ne sont pas précises. Ceci pourrait être expliqué par "l'imprécision" de ce maillage, en fait ce maillage constitue une discrétisation pas assez raffinée de la géométrie réaliste considérée.

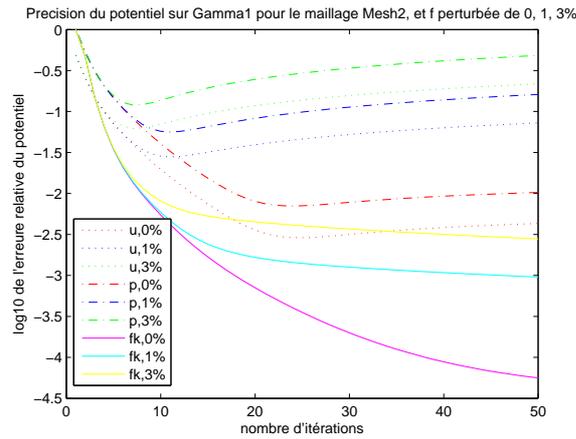


FIG. 4.22 – Erreurs relatives sur le potentiel  $u$  et le flux  $p$  calculés sur la surface du cortex en appliquant l'approche *simultanée* avec des données connues sur toute la surface du scalp. Ces résultats sont pour le maillage sphérique *Mesh2*. Nous présentons également les erreurs relatives sur la suite  $(f_k)_k$  entre deux itérations successives :  $\frac{\|f_{k+1} - f_k\|_{L^2(\Gamma_1)}}{\|f_{k+1}\|_{L^2(\Gamma_1)}}$ . La donnée  $f$  est perturbée de 0, 1 et 3%.

4. Nous retrouvons dans ces résultats, le caractère régularisant de la méthode. Pour de faibles perturbations, il faut arrêter l'algorithme à l'itération optimale  $k_0$  pour laquelle la solution calculée est la plus proche de la solution exacte de notre problème. Cette itération  $k_0$  est d'autant plus petite que le taux de perturbation est grand.

Pour compléter les résultats déjà présentés et pour avoir une idée plus claire sur le comportement de l'algorithme, nous traçons dans la figure (Fig. 4.23) les erreurs relatives sur le potentiel et le flux obtenus sur  $\Gamma_1$  pour  $f$  perturbée de 0, 1, 3 et 5% avec le maillage sphérique *Mesh3* sur 100 itérations, et dans la figure (Fig. 4.24) avec le maillage réaliste *Mesh4*. Nous traçons également dans la figure (Fig. 4.25) les mêmes erreurs pour le maillage *Mesh2* d'abord pour 40 itérations et ensuite pour 500 itérations.

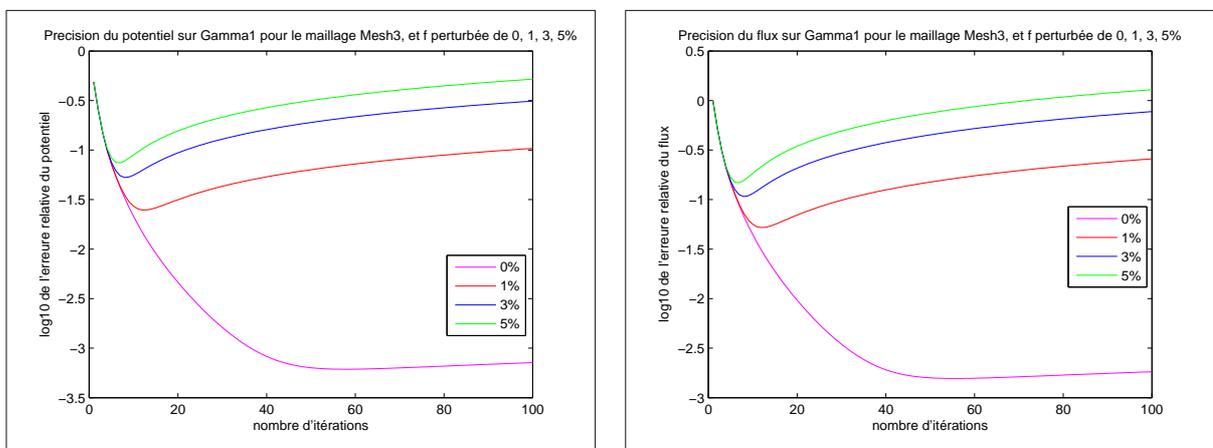


FIG. 4.23 – Erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur la surface du cerveau en appliquant l'approche *simultanée* sur le maillage sphérique *Mesh3*, avec  $f$  connue sur toute la surface du scalp et perturbée de 0, 1, 3 et 5%. La première figure donne les erreurs sur le potentiel et la deuxième sur le flux.

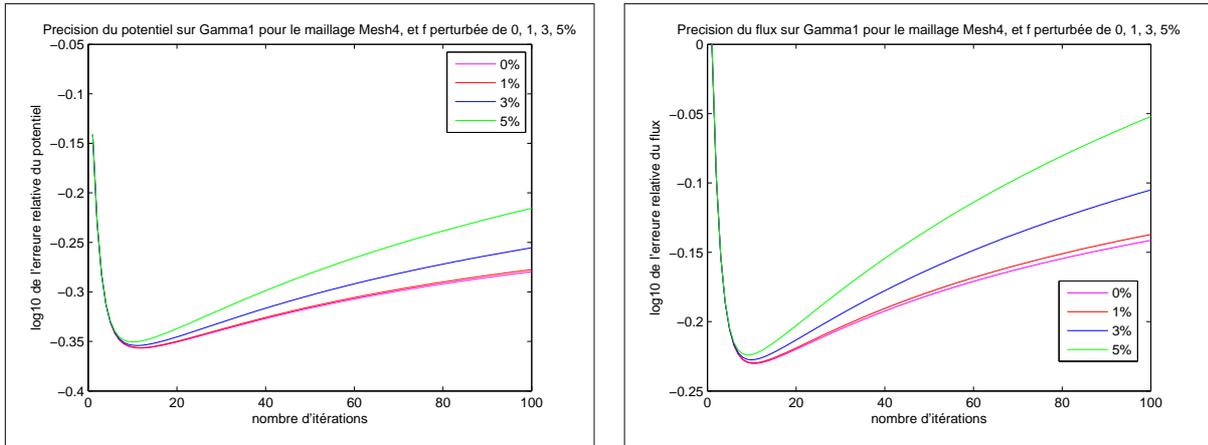


FIG. 4.24 – Erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur la surface du cerveau en appliquant l'approche *simultanée* sur le maillage réaliste *Mesh4*, avec  $f$  connue sur tout le scalp et perturbée de 0, 1, 3 et 5%. La première figure donne les erreurs sur le potentiel et la deuxième sur le flux.

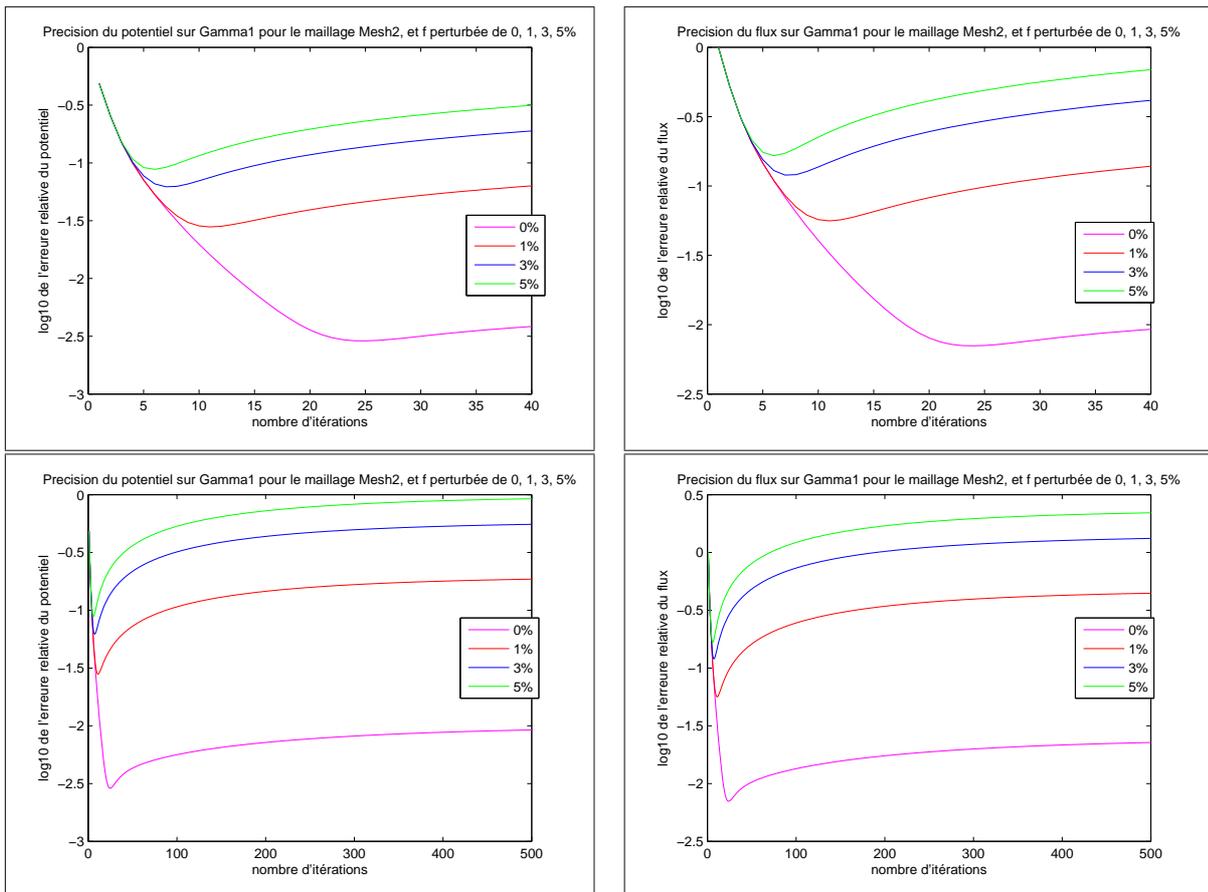


FIG. 4.25 – Erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur la surface du cerveau obtenus par l'approche *simultanée* avec  $f$  connue sur tout le scalp et perturbée de 0, 1, 3 et 5%, pour le maillage sphérique *Mesh2*. La première figure en haut donne les erreurs sur le potentiel sur 40 itérations et la deuxième sur le flux. Les deux figures en bas représentent les erreurs obtenues sur 500 itérations.

### Comparaison entre l'approche *successive* et l'approche *simultanée*

Nous passons maintenant à la comparaison entre l'approche *simultanée* et l'approche *successive*. Nous considérons le même dipôle et donc les mêmes mesures simulées. Nous supposons connaître  $f$  sur  $S$  qui représente 70% et 80% de  $\Gamma_3$ , et y ajoutons un bruit gaussien de 3% et de 5%. Nous appliquons d'abord l'algorithme successivement sur les deux couronnes du scalp et du crâne et puis simultanément sur le domaine formé par l'union de ces deux couronnes.

Nous donnons dans le tableau (Tab. 4.5) l'erreur relative en norme  $L^2$  sur les valeurs calculées sur la surface du cerveau  $\Gamma_1$  par les deux approches, et ceci pour les deux maillages sphériques *Mesh2* et *Mesh3* et pour le maillage réaliste *Mesh4*. Notons que ces valeurs ont été prises quand le critère d'arrêt est satisfait (cf §4.8.3) après 9 ou 10 itérations pour l'approche *simultanée* avec  $EPS = 10^{-2}$  et après 2 ou 3 itérations pour l'approche *successive* avec  $EPS = 10^{-1}$ .

		<i>Successivement</i>				<i>Simultanément</i>			
		$S = 70\%$		$S = 80\%$		$S = 70\%$		$S = 80\%$	
<b>Mesh 2</b>	<i>Surface S</i>								
	<i>Perturbation de f</i>	3%	5%	3%	5%	3%	5%	3%	5%
	<i>potentiel</i>	0.391	0.475	0.320	0.429	0.120	0.168	0.093	0.138
	<i>flux</i>	0.725	0.947	0.633	0.898	0.200	0.272	0.161	0.241
<b>Mesh 3</b>	<i>Surface S</i>								
	<i>Perturbation de f</i>	3%	5%	3%	5%	3%	5%	3%	5%
	<i>potentiel</i>	0.416	0.568	0.342	0.529	0.110	0.123	0.072	0.099
	<i>flux</i>	0.846	1.341	0.768	1.329	0.180	0.218	0.135	0.192
<b>Mesh 4</b>	<i>Surface S</i>								
	<i>Perturbation de f</i>	3%	5%	3%	5%	3%	5%	3%	5%
	<i>potentiel</i>	0.554	0.602	0.544	0.596	0.446	0.453	0.441	0.451
	<i>flux</i>	0.751	0.845	0.740	0.838	0.600	0.612	0.595	0.611

TAB. 4.5 – Les erreurs relatives sur le potentiel et le flux calculés sur  $\Gamma_1$  pour les deux approches *successive* et *simultanée*.

D'après ce tableau, il est clair que l'approche *simultanée* donne de meilleurs résultats que l'approche *successive*. Une des raisons est que, pour l'approche *successive* quand nous résolvons le problème de Cauchy ( $PC_{scalp}$ ) dans la première couronne formée par le scalp, les valeurs que nous récupérons sur  $\Gamma_2$  ne sont pas forcément compatibles pour le problème ( $PC_{crâne}$ ), donc "théoriquement" nous n'avons pas forcément une solution pour ce dernier problème. D'autant plus qu'à cela s'ajoute l'erreur de calcul qui est aussi amplifiée par le rapport de conductivité entre les deux couronnes. En effet, dans l'approche *successive*, pour passer de la première couronne à la deuxième nous multiplions la donnée du flux par  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  :  $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\partial u_2}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$  (voir le problème (4.3.5)). Comme ce facteur des conductivités vaut 80 et la valeur  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$  est obtenue comme suit :  $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2^{ex}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} + \epsilon$  où  $\epsilon$  est l'erreur commise par rapport à la valeur exacte  $\frac{\partial u_2^{ex}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$  alors nous avons :  $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = -80\epsilon - 80 \frac{\partial u_2^{ex}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$ , ce qui amplifie clairement l'erreur commise.

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de Cauchy dans le cadre EEG. Cette étude est motivée par la méthode "algébrique" présentée dans l'annexe B pour résoudre le problème inverse en EEG.

Pour la résolution du problème de Cauchy, notre choix a porté sur la méthode itérative alternative proposée par *Kozlov & al* pour ses multiples avantages. Nous avons présenté deux approches pour appliquer cette méthode à notre problème, l'approche *successive* et l'approche *simultanée*. Cette méthode évoque la résolution des problèmes bien posés aux conditions aux limites mêlées qui ont été résolus par la méthode des équations intégrales.

Des tests numériques sur des géométries sphérique et réaliste ont été réalisés, avec une fonction analytique et avec des données simulées provenant d'un terme source. Les résultats obtenus nous ont permis d'étudier le comportement numérique en  $3D$  de l'algorithme dans un domaine homogène et dans un domaine homogène par morceaux, et d'en tirer plusieurs conclusions intéressantes.

D'une part, les applications numériques faites sur une couronne de faible épaisseur ont montré un bon comportement numérique assuré par un faible nombre d'itérations avec une bonne précision relative. Cette précision diminue avec le manque d'informations sur la surface extérieure de la couronne et avec l'augmentation de la perturbation des données. Dans ce cas, il faut arrêter l'algorithme aux premières itérations, ce qui nous a amené à étudier différents critères d'arrêt, pour en choisir finalement la "stationnarité" à une certaine tolérance de la suite du potentiel calculé. Cette tolérance dépend du taux de perturbation de données. Notons que pour la géométrie réaliste, les résultats ne sont pas aussi précis que pour la géométrie sphérique, et ceci est dû à "l'imprécision" du maillage que nous possédons pour cette géométrie.

D'autre part, les résultats présentés pour les deux approches *simultanée* et *successive* sur le domaine formé par le scalp et le crâne nous ont permis de conclure que résoudre le problème de Cauchy simultanément est beaucoup mieux que de le résoudre successivement.

## Chapitre 5

# Résolution du problème inverse par la méthode de Kohn-Vogelius

Ce chapitre traite la résolution du problème inverse en EEG. Nous présentons une méthode d'identification qui consiste à transformer le problème inverse en un problème d'optimisation d'une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* [69].

Ce chapitre est composé de la façon suivante. Nous commençons par introduire quelques notations et rappeler le problème inverse, ensuite nous présentons la fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* adaptée à notre problème, montrons que le problème d'optimisation correspondant est équivalent au problème inverse pour des données compatibles et calculons le gradient. Nous démontrons ensuite la robustesse de la méthode et à la fin nous présentons des expériences numériques.

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre,  $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \Omega_3$  désigne le domaine de la tête de frontière  $\partial\Omega = \Gamma \equiv \Gamma_3$  (Fig. 5.1).  $S$  et  $L$  sont deux ouverts disjoints non vides de  $\Gamma_3$  tels que  $\bar{S} \cup \bar{L} = \Gamma_3$  et  $\bar{S} \cap \bar{L} = \gamma$ , une courbe dans  $\mathbb{R}^3$  que nous supposons régulière.

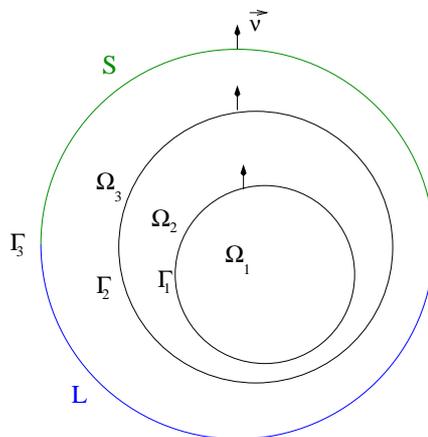


FIG. 5.1 – Le domaine de la tête

Nous considérons le terme source suivant

$$F = \sum_{j=1}^m \vec{q}_j \cdot \vec{\nabla} \delta_{S_j} \quad (5.1.1)$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S_j \in \Omega_1$  et  $q_j \in \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1, \dots, m$  représentent respectivement le nombre, les positions et les moments des dipôles.

Nous supposons  $m$  connu et définissons le vecteur  $\phi \in \mathbb{R}^{6m}$  des moments et des positions des  $m$  dipôles de la façon suivante :  $\phi = ((q_j)_{1 \leq j \leq m}, (S_j)_{1 \leq j \leq m})$ . Ce vecteur sera noté  $\phi = (q_j, S_j)$  pour plus de commodité.

Nous posons

$$F = \mathcal{S}(\phi).$$

Par ailleurs, comme dans le chapitre 3, nous posons  $\alpha = \min_{1 \leq j \leq m} d(\Gamma_1, S_j)$ , définissons l'ensemble suivant

$$\Omega_\alpha = \{x \in \Omega_1 / d(\Gamma_1, x) \geq \alpha\}$$

et considérons

$$\Phi_{ad} = \mathbb{R}^{3m} \times \Omega_\alpha^m \quad (5.1.2)$$

l'ensemble des valeurs  $\phi$  admissibles.

Nous reprenons le problème direct en EEG étudié au chapitre 2, dont nous désignons la solution par  $u_N(\phi)$ ,

$$(Pu_N) \begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_N) = \mathcal{S}(\phi) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_3 \frac{\partial u_N}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

et posons

$$\tilde{B}[\phi] := u_N(\phi)|_S \quad (5.1.4)$$

Le problème inverse auquel nous nous intéressons est le suivant

$$(PI) \text{ Etant donnée } f \in H^{1/2}(S), \text{ déterminer } \phi \in \Phi_{ad} : \tilde{B}[\phi] = f. \quad (5.1.5)$$

Dans la définition suivante nous précisons la compatibilité d'une donnée  $f$  pour le problème inverse (PI).

**Définition 5**  $f \in H^{1/2}(S)$  est dite donnée compatible s'il existe  $\phi \in \Phi_{ad}$  t.q.  $\tilde{B}[\phi] = f$ .

Nous avons présenté au chapitre 3 les principales méthodes de résolution du problème inverse (PI). Nous y avons aussi étudié les questions de l'identifiabilité et de la stabilité et rappeler une méthode algébrique d'identification dont l'atout principal réside dans la détermination du nombre de dipôles.

Dans la section suivante nous présentons une méthode basée sur une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius*, qui pourrait être complémentaire de la méthode algébrique et pour laquelle nous établissons que l'unique minimum est la solution du problème inverse (PI) pour des données compatibles selon la définition 5.

## 5.2 Méthode de *Kohn-Vogelius*

Cette méthode est basée sur l'écart énergétique sur tout le domaine  $\Omega$  pour une réalisation donnée de la source inconnue entre la solution d'un problème de Neumann défini en utilisant le flux  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_3} = 0$  imposé comme condition aux limites et celle d'un problème aux limites de Dirichlet défini en utilisant la donnée mesurée  $f$  sur  $S$ . Cette idée a été initialement proposée par *Kohn & Vogelius* [69] et appliquée au départ par *Kohn & McKenney* [68] pour implémenter un algorithme d'identification de conductivité. Par suite, elle a été utilisée par plusieurs auteurs afin de résoudre d'autres problèmes d'identification, notamment *Chaabane & Jaoua* [21, 20] et les références qui y sont citées.

Les deux problèmes dont il s'agit dans la définition de la fonctionnelle coût de *Kohn-Vogelius* sont le problème  $(Pu_N)$  défini par (5.1.3) et le problème  $(Pu_D)$  défini comme suit

$$(Pu_D) \begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_D) & = \mathcal{S}(\phi) & \text{dans } \Omega \\ u_D & = f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial u_D}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.2.6)$$

où  $u_D$  est fonction de  $\phi$  et  $f$ ,  $u_D = u_{D(\phi, f)}$ .

Comme nous l'avons vu au deuxième chapitre, les fonctions  $u_N$  et  $u_D$  ne sont pas éléments de l'espace  $H^1(\Omega)$ , et donc nous ne pouvons pas définir la fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* directement sur ces fonctions. Nous procédons donc de la manière suivante.

Nous considérons  $\tilde{u}_\phi(x) = \frac{1}{\sigma_1} (G * F)(x) = \frac{1}{\sigma_1} (G * \mathcal{S}(\phi))(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \frac{q_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3}$ , et introduisons les fonctions  $w_{N(\phi)}$  et  $w_{D(\phi, f)}$  définies par  $w_{N(\phi)} = u_{N(\phi)} - \tilde{u}_\phi$  et  $w_{D(\phi, f)} = u_{D(\phi, f)} - \tilde{u}_\phi$  dont nous vérifions qu'elles satisfont aux problèmes suivants

$$(Pw_N) \begin{cases} -\Delta w_{N(\phi)} & = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_{N(\phi)}] & = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_{N(\phi)}}{\partial \nu} \right] & = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w_{N(\phi)}}{\partial \nu} & = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.2.7)$$

et

$$(Pw_D) \begin{cases} -\Delta w_{D(\phi, f)} & = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_{D(\phi, f)}] & = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_{D(\phi, f)}}{\partial \nu} \right] & = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ w_{D(\phi, f)} & = f - \tilde{u}_\phi & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial w_{D(\phi, f)}}{\partial \nu} & = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Le problème  $(Pw_N)$  a été étudié au chapitre 2 où nous avons montré qu'il est bien posé dans l'espace quotient  $H^1(\Omega)/R$ . L'étude du problème  $(Pw_D)$  sera faite ultérieurement dans ce chapitre, où nous démontrons qu'il est bien posé dans  $H^1(\Omega)$ .

### 5.2.1 Définition de la fonctionnelle coût

Soit  $f \in H^{1/2}(S)$  et  $w_{N(\phi)}$  et  $w_{D(\phi,f)}$  les solutions des problèmes  $(Pw_N)$  et  $(Pw_D)$ . Nous posons  $\omega_{(\phi,f)} = w_{N(\phi)} - w_{D(\phi,f)}$  dont nous vérifions qu'elle satisfait le problème suivant

$$(P_\omega) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla \omega) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega & = \tilde{B}[\phi] - f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.2.9)$$

et définissons la fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* comme suit

$$J_f(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \int_{\Omega_i} |\nabla \omega_{(\phi,f)}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S |\omega_{(\phi,f)}|^2 ds. \quad (5.2.10)$$

**Remarque 8** Afin que cette définition soit physiquement homogène, il faut multiplier le second terme de la fonctionnelle définie ci-dessus par un facteur dimensionnel homogène à une conductivité divisée par une longueur caractéristique. Ce facteur ne modifie pas fondamentalement les résultats obtenus dans le reste du chapitre et sera donc pris égal à 1.

### 5.2.2 Problème d'optimisation

Nous considérons le problème d'optimisation suivant

$$(PO) \begin{cases} \text{Trouver } \phi \in \Phi_{ad} & : \\ J_f(\phi) \leq J_f(\xi) & \forall \xi \in \Phi_{ad} \end{cases} \quad (5.2.11)$$

Nous montrons dans la proposition suivante que pour une donnée  $f$  compatible, ce problème d'optimisation admet un unique minimum qui est la solution du problème inverse  $(PI)$ .

**Proposition 3** Pour  $f$  compatible, la seule solution du problème d'optimisation  $(PO)$  est la solution du problème inverse  $(PI)$ .

**Preuve.**

Soit  $f \in H^{1/2}(S)$  compatible, et soit  $\phi$  la solution du problème inverse  $(PI)$  correspondant (5.1.5). Montrons d'abord que  $\phi$  est solution du problème d'optimisation  $(PO)$  (5.2.11). En effet, nous avons  $\tilde{B}[\phi] - f = 0$  sur  $S$ , et par suite  $\omega_{(\phi,f)} = 0$  dans  $\Omega$ . Donc  $\phi$  est un minimum de la fonctionnelle coût  $J$  avec  $J_f(\phi) = 0$ .

Soit maintenant  $\phi_1$  un autre minimum de  $J$ . Donc  $J_f(\phi_1) = 0$ , ce qui se traduit par

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sigma_i |\nabla \omega_{(\phi_1,f)}(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S |\omega_{(\phi_1,f)}(x)|^2 ds = 0 \quad (5.2.12)$$

D'où  $\omega_{(\phi_1,f)} = cte$  dans  $\Omega$  et  $\omega_{(\phi_1,f)} = 0$  sur  $S$ , donc  $\omega_{(\phi_1,f)} = 0$  dans  $\Omega$ . Ce qui implique  $\tilde{B}[\phi_1] = f$ , et donc  $\phi_1$  est solution du problème inverse pour  $f$ . L'identifiabilité prouvée dans le chapitre 3 implique  $\phi = \phi_1$ .  $\square$

Donc pour une donnée compatible  $f$ , résoudre le problème inverse  $(PI)$  revient à résoudre le problème d'optimisation  $(PO)$ . Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre numériquement ce problème. Dans le but d'utiliser une méthode de gradient, nous avons besoin d'évaluer la fonctionnelle coût  $J$  ainsi que son gradient  $\nabla J$ . Pour cela, nous exprimons dans le paragraphe suivant la fonctionnelle  $J$  en termes d'intégrales sur la frontière. Et ensuite nous calculons son gradient.

### Reformulation de la fonction coût $J$ en termes d'intégrales définies sur la partie $S$

La fonctionnelle coût  $J$  (5.2.10) peut être exprimée en fonction des intégrales sur  $S$  de la manière suivante

$$J_f(\phi) = \frac{1}{2}\sigma_3 \int_S \frac{\partial \omega_{(\phi,f)}}{\partial \nu} \omega_{(\phi,f)} ds + \frac{1}{2} \int_S |\omega_{(\phi,f)}|^2 ds \quad (5.2.13)$$

En effet, il suffit d'appliquer la formule de Green dans le domaine non-homogène  $\Omega$  à la fonction  $\omega_{(\phi,f)}$ .

### 5.2.3 Calcul du gradient

Afin de calculer le gradient de la fonctionnelle coût  $J$ , nous calculons d'abord sa dérivée directionnelle.

#### La dérivée directionnelle

La dérivée directionnelle de la fonctionnelle coût  $J$  (5.2.10) au point  $\phi \in \Phi_{ad}$  dans la direction de  $\psi$  est définie comme suit

$$J'_f(\phi) \cdot \psi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_f(\phi + h\psi) - J_f(\phi)}{h} \quad (5.2.14)$$

où  $\psi = (p_j, T_j)$  est un point quelconque de  $\Phi_{ad}$  et  $h > 0$  suffisamment petit tel que  $\phi^h = \phi + h\psi \in \Phi_{ad}$ .

Nous considérons le terme source  $F^h$  correspondant à  $\phi^h$ ,

$$F^h = \sum_{j=1}^m (q_j + hp_j) \cdot \nabla \delta_{(S_j + hT_j)} \quad (5.2.15)$$

et définissons la fonction  $\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h$  par

$$\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h = \frac{1}{\sigma_1} G * F^h \quad (5.2.16)$$

qui est analytique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \cup \{S_j + hT_j\}$ .

Dans le chapitre 3, nous avons démontré le développement suivant,

$$F^h = F + hF^1 + h^2F^2(h) \quad (5.2.17)$$

où

$$F^1 = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \nabla \delta_{S_j} - q_j \cdot H_j T_j \quad (5.2.18)$$

avec  $H_j$  est la matrice hessienne :  $H_j = (\partial_{x_k x_l}^2 \delta_{S_j})_{1 \leq l, k \leq 3}$ , et donc le terme  $q_j \cdot H_j T_j$  est la distribution définie par

$$q_j \cdot H_j T_j = \sum_{k,l}^3 q_j^k T_j^l \partial_{x_k x_l}^2 (\delta_{S_j}) \quad (5.2.19)$$

et

$$F^2(h) = - \sum_{j=1}^m p_j \cdot H_j T_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 (q_j^i + hp_j^i) \sum_{k,l}^3 T_j^k T_j^l \partial_{x_k x_l}^2 \partial_{x_i} (\delta_{S_j} + \theta^i h T_j) \quad (5.2.20)$$

avec  $0 < \theta^i < 1$ .

Nous notons  $w_{N(\phi,\psi)}^h$ ,  $w_{D(\phi,\psi,f)}^h$  respectivement les solutions des problèmes suivants

$$(P_{w_N^h}) \begin{cases} -\Delta w_N^h = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_N^h] = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_N^h}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w_N^h}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.2.21)$$

$$(P_{w_D^h}) \begin{cases} -\Delta w_D^h = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_D^h] = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_D^h}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ w_D^h = f - \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial w_D^h}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.2.22)$$

D'après les équations (5.2.16) et (5.2.17) nous obtenons le développement asymptotique suivant

$$\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^h = \tilde{u}_\phi + h\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^1 + h^2\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^2 \quad (5.2.23)$$

où  $\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^k = \frac{1}{\sigma_1} G * F^k$ ,  $k = 1, 2$ .

Par conséquent, nous obtenons un développement asymptotique pour  $w_{N(\phi,\psi)}^h$  et  $w_{D(\phi,\psi,f)}^h$  par rapport au paramètre  $h$  :

$$\begin{cases} w_{N(\phi,\psi)}^h = w_{N(\phi)} + hw_{N(\phi,\psi)}^1 + h^2w_{N(\phi,\psi)}^2 \\ w_{D(\phi,\psi,f)}^h = w_{D(\phi,f)} + hw_{D(\phi,\psi)}^1 + h^2w_{D(\phi,\psi)}^2 \end{cases} \quad (5.2.24)$$

où  $w_{N(\phi,\psi)}^k$  et  $w_{D(\phi,\psi)}^k$  ( $k = 1, 2$ ) sont respectivement les solutions des problèmes suivants

$$\begin{cases} -\Delta w_N^k = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_N^k] = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_N^k}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^k}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w_N^k}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^k}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.2.25)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta w_D^k = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_D^k] = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_D^k}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^k}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ w_D^k = -\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^k & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial w_D^k}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_{(\phi,\psi)}^k}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.2.26)$$

Nous revenons au calcul de la dérivée  $J'_f(\phi) \cdot \psi$ .

Nous avons

$$J_f(\phi^h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla \omega_{(\phi, \psi, f)}^h \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \left| \omega_{(\phi, \psi, f)}^h \right|^2 ds$$

avec

$$\omega_{(\phi, \psi, f)}^h \equiv w_{N(\phi, \psi)}^h - w_{D(\phi, \psi, f)}^h = \omega_{(\phi, f)} + h \omega_{(\phi, \psi)}^1 + h^2 \omega_{(\phi, \psi)}^2 \quad \text{d'après (5.2.24)}$$

où nous avons posé  $\omega_{(\phi, \psi)}^1 \equiv w_{N(\phi, \psi)}^1 - w_{D(\phi, \psi)}^1$  et  $\omega_{(\phi, \psi)}^2 \equiv w_{N(\phi, \psi)}^2 - w_{D(\phi, \psi)}^2$ .

Après calcul nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{J_f(\phi^h) - J_f(\phi)}{h} &= \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_{(\phi, f)} \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^1 dx + \int_S \omega_{(\phi, f)} \omega_{(\phi, \psi)}^1 ds \\ &+ h \left[ \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_{(\phi, f)} \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^1 \right|^2 dx + \int_S \omega_{(\phi, f)} \omega_{(\phi, \psi)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_S \left| \omega_{(\phi, \psi)}^1 \right|^2 ds \right] \\ &+ h^2 \left[ \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^1 \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^2 dx + \int_S \omega_{(\phi, \psi)}^1 \omega_{(\phi, \psi)}^2 ds \right] + h^3 \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^2 \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \left| \omega_{(\phi, \psi)}^2 \right|^2 ds \right] \end{aligned}$$

Donc,

$$J'_f(\phi) \cdot \psi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_f(\phi^h) - J_f(\phi)}{h} = \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_{(\phi, f)} \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^1 dx + \int_S \omega_{(\phi, f)} \omega_{(\phi, \psi)}^1 ds$$

et par la formule de Green, nous avons

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_{(\phi, f)} \nabla \omega_{(\phi, \psi)}^1 dx = \int_S \sigma_3 \frac{\partial \omega_{(\phi, f)}}{\partial \nu} \omega_{(\phi, \psi)}^1 ds + \int_L \sigma_3 \frac{\partial \omega_{(\phi, f)}}{\partial \nu} \omega_{(\phi, \psi)}^1 ds$$

Le dernier terme est nul puisque  $\frac{\partial \omega_{(\phi, f)}}{\partial \nu} \Big|_L = 0$  d'après (5.2.9). D'où la proposition suivante,

**Proposition 4**

$$J'_f(\phi) \cdot \psi = \int_S \sigma_3 \frac{\partial \omega_{(\phi, f)}}{\partial \nu} \omega_{(\phi, \psi)}^1 ds + \int_S \omega_{(\phi, f)} \omega_{(\phi, \psi)}^1 ds. \quad (5.2.27)$$

**Le gradient de  $J$**

Nous calculons dans ce paragraphe le gradient  $\nabla J$ . Pour cela nous calculons d'abord  $\tilde{u}_{(\phi, \psi)}^1 = \frac{1}{\sigma_1} G * F^1$  où  $F^1$  est la distribution définie dans (5.2.18) et  $G$  est la fonction de Green. Nous avons

$$\tilde{u}_{(\phi, \psi)}^1(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left( -\frac{p_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3} + \frac{q_j \cdot T_j}{|x - S_j|^3} - 3 \frac{(x - S_j) \cdot A_j (x - S_j)}{|x - S_j|^5} \right) \quad (5.2.28)$$

où  $A_j$  est la matrice suivante :

$$A_j = \begin{pmatrix} T_j^1 q_j^1 & T_j^2 q_j^1 & T_j^3 q_j^1 \\ T_j^1 q_j^2 & T_j^2 q_j^2 & T_j^3 q_j^2 \\ T_j^1 q_j^3 & T_j^2 q_j^3 & T_j^3 q_j^3 \end{pmatrix} \quad (5.2.29)$$

nous écrivons alors

$$\tilde{u}_{(\phi,\psi)}^1(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 (p_j^i \tilde{v}_{i,j}^1(x) + T_j^i \tilde{v}_{i,j}^2(x)) \quad (5.2.30)$$

avec

$$\tilde{v}_{i,j}^1(x) = -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{(x^i - S_j^i)}{|x - S_j^i|^3}, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, m \quad (5.2.31)$$

et

$$\tilde{v}_{i,j}^2(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{q_j^i}{|x - S_j^i|^3} - \frac{3}{4\pi\sigma_1} \frac{(q_j \cdot (x - S_j^i)) \cdot (x^i - S_j^i)}{|x - S_j^i|^5}, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, m \quad (5.2.32)$$

ensuite nous définissons  $y_{i,j}^1$  et  $z_{i,j}^1$  solutions des problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y_{i,j}^1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left[ y_{i,j}^1 \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial y_{i,j}^1}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^1}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial y_{i,j}^1}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^1}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta z_{i,j}^1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left[ z_{i,j}^1 \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial z_{i,j}^1}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^1}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ z_{i,j}^1 = -\tilde{v}_{i,j}^1 & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial z_{i,j}^1}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^1}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{array} \right. \quad (5.2.33)$$

et  $y_{i,j}^2$  et  $z_{i,j}^2$  solutions des problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y_{i,j}^2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left[ y_{i,j}^2 \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial y_{i,j}^2}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^2}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial y_{i,j}^2}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^2}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta z_{i,j}^2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left[ z_{i,j}^2 \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial z_{i,j}^2}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^2}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ z_{i,j}^2 = -\tilde{v}_{i,j}^2 & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial z_{i,j}^2}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{v}_{i,j}^2}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{array} \right. \quad (5.2.34)$$

Après calcul, le gradient de la fonctionnelle coût  $J$  s'écrit comme suit

$$\vec{\nabla} J = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_m \\ \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_m \end{pmatrix} \quad (5.2.35)$$

où  $\gamma_j = (\gamma_j^i)$  et  $\delta_j = (\delta_j^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, \dots, m$  définis de la manière suivante

$$\gamma_j^i = \int_S \left( \sigma_3 \frac{\partial \omega(\phi, f)}{\partial \nu} + \omega(\phi, f) \right) (y_{i,j}^1 - z_{i,j}^1) ds, \quad (5.2.36)$$

$$\delta_j^i = \int_S \left( \sigma_3 \frac{\partial \omega(\phi, f)}{\partial \nu} + \omega(\phi, f) \right) (y_{i,j}^2 - z_{i,j}^2) ds. \quad (5.2.37)$$

### 5.3 Résolution des problèmes directs

Pour calculer la fonctionnelle coût  $J$  et son gradient en un point  $\phi$  donné, nous avons à calculer sur  $S$  les traces suivantes  $w_{D(\phi,f)|_S}$ ,  $\frac{\partial w_{D(\phi,f)}}{\partial \nu}|_S$ ,  $w_{N(\phi)|_S}$ ,  $\frac{\partial w_{N(\phi)}}{\partial \nu}|_S$ ,  $y_{i,j|S}^1$ ,  $y_{i,j|S}^2$ ,  $z_{i,j|S}^1$ ,  $z_{i,j|S}^2$ .

Certaines de ces valeurs sont connues et d'autres telles que  $\frac{\partial w_{D(\phi,f)}}{\partial \nu}|_S$ ,  $w_{N(\phi)|_S}$ ,  $y_{i,j|S}^1$ ,  $y_{i,j|S}^2$  nécessitent la résolution des problèmes correspondants. Pour les trois dernières il s'agit d'un problème à condition de Neumann qui a été étudié au chapitre 2 et dont la formulation variationnelle dans  $H^1(\Omega)/R$  a été présentée ainsi que la résolution par les équations intégrales pour calculer les traces de la solution sur les différentes surfaces.

En ce qui concerne  $\frac{\partial w_{D(\phi,f)}}{\partial \nu}|_S$ , nous avons à résoudre dans  $\Omega$  le problème suivant aux conditions aux limites mêlées sur la frontière  $\Gamma_3$ ,

$$(P_{w_D}) \begin{cases} -\Delta w_D & = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_D] & = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_D}{\partial \nu} \right] & = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ w_D & = f - \tilde{u}_\phi & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial w_D}{\partial \nu} & = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.3.38)$$

L'étude de ce problème se fait de la même manière que le problème  $(P_{2_{suc}})$  (4.7.38) du chapitre 4 avec de légères modifications.

Nous posons  $l = f - \tilde{u}$  et nous en considérons un prolongement continu  $\bar{l}$  dans  $H^{1/2}(\Gamma_3)$ . Nous posons  $\bar{r}$  la solution du problème à condition de Dirichlet suivant dans  $\Omega$

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla \bar{r}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{r} & = \bar{l} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.3.39)$$

Nous considérons la différence  $z = w_D - \bar{r}$ . Donc  $z$  résout le problème suivant

$$(P_z) \begin{cases} -\Delta z & = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [z] & = 0 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} \right] & = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ z & = 0 & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial z}{\partial \nu} & = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} - \sigma_3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial \nu} & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.3.40)$$

Nous considérons l'espace  $H_{0,S}^1(\Omega)$  défini comme suit

$$H_{0,S}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_S = 0\}. \quad (5.3.41)$$

La formulation variationnelle du problème  $(P_z)$  s'écrit alors

$$a(z, v) = \ell(v) \quad , \quad \forall v \in H_{0,S}^1(\Omega) \quad (5.3.42)$$

avec

$$a(z, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \sigma_i \nabla z(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$\ell(v) = \sum_{i=1}^2 (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu}(x) v(x) ds(x) - \int_L \sigma_3 \left( \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \nu} \right)(x) v(x) ds(x)$$

Nous vérifions de la même manière que pour le problème  $(P2_{suc})$  au chapitre 4, que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et coercive dans  $H_{0,S}^1(\Omega)$  et que la forme linéaire  $\ell$  y est continue. Le théorème de Lax-Milgram donne ainsi l'existence et l'unicité d'une solution du problème  $(P_z)$ . Il en découle ainsi l'existence d'une solution  $w_D$  dans  $H^1(\Omega)$  du problème (5.3.38), qui est également unique.

Comme pour tous les problèmes directs déjà étudiés, nous résolvons le problème  $(Pw_D)$  (5.3.38) par la méthode des équations intégrales. En utilisant la même formule de représentation déjà utilisée, nous obtenons pour le problème  $(Pw_D)$  le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \frac{I_1}{2} + D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,L} & -S_{1,S} \\ D_{2,1} & \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) \frac{I_2}{2} + D_{2,2} & D_{2,L} & -S_{2,S} \\ D_{L,1} & D_{L,2} & \frac{I_L}{2} + D_{L,L} & -S_{L,S} \\ D_{S,1} & D_{S,2} & D_{S,L} & -S_{S,S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_1 - \sigma_2) w_D|_{\Gamma_1} \\ (\sigma_2 - \sigma_3) w_D|_{\Gamma_2} \\ \sigma_3 w_D|_L \\ \sigma_3 \frac{\partial w_D}{\partial \nu}|_S \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -S_{1,1} & -S_{1,2} & S_{1,L} & -D_{1,S} \\ -S_{2,1} & -S_{2,2} & S_{2,L} & -D_{2,S} \\ -S_{L,1} & -S_{L,2} & S_{L,L} & -D_{L,S} \\ -S_{S,1} & -S_{S,2} & S_{S,L} & -\left( \frac{I_S}{2} + D_{S,S} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} \\ (\sigma_2 - \sigma_3) \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu}|_{\Gamma_2} \\ -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \nu}|_L \\ \sigma_3 (f - (\tilde{u}_\phi)|_S) \end{pmatrix}$$

où  $S$  et  $D$  sont les opérateurs de simple et double couche définis auparavant.

## 5.4 Stabilité de la méthode

Soit  $\bar{f} \in H^{\frac{1}{2}}(S)$  une donnée compatible et  $\bar{\phi}$  l'unique solution du problème inverse  $(PI)$  correspondante. Dans cette section, nous étudions le problème  $(PO)$  pour le cas de donnée non compatible en démontrant les deux points suivants :

1. Pour tout  $f \in H^{1/2}(S)$ , il existe au moins une solution du problème d'optimisation  $(PO)$ .
2. Si une suite de mesures  $f_n \rightarrow \bar{f}$  dans  $H^{1/2}(S)$ , nous avons  $\phi_n \rightarrow \bar{\phi}$  dans  $\Phi_{ad}$ , où  $\phi_n$  est une solution du problème d'optimisation correspondant à  $f_n$ .

Soit  $f \in H^{1/2}(S)$ , nous posons

$$J_f : \Phi_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\phi \longrightarrow J_f(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\nabla \omega_{(\phi,f)}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S |\omega_{(\phi,f)}|^2 ds$$

où  $\omega_{(\phi,f)}$  est solution du problème (5.2.9) que nous rappelons ci-dessous

$$(P_{\omega}) \begin{cases} -\nabla(\sigma \nabla \omega) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega & = \tilde{B}[\phi] - f & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.4.43)$$

Sous la condition que "toute suite de moments est bornée", nous allons montrer la robustesse de la méthode d'identification proposée. Ce résultat sera établi au théorème 5. Avant d'énoncer ce théorème, nous commençons par établir quelques résultats préliminaires.

**Lemme 5** *Pour tout  $f \in H^{1/2}(S)$ , il existe  $\phi^f \in \Phi_{ad}$  telle que  $J_f(\phi^f) = \inf_{\xi \in \Phi_{ad}} J_f(\xi)$ .*

**Preuve.**  $J_f(\xi) \geq 0 \forall \xi \in \Phi_{ad}$ , soit alors  $\lambda^f \in \mathbb{R}^+$  sa borne inférieure

$$\lambda^f = \inf_{\xi \in \Phi_{ad}} J_f(\xi)$$

et soit  $(\phi_n^f)_n \in \Phi_{ad}$  une suite minimisante telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_f(\phi_n^f) = \lambda^f.$$

Nous posons  $\phi_n^f = (q_j^n, S_j^n)$  et supposons que

$$(\mathcal{H}) : \text{les suites } (q_j^n)_n \text{ sont bornées, } j = 1, \dots, m \quad (5.4.44)$$

Comme  $(S_j^n)_n \subset \Omega_{\alpha}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , alors les suites  $(S_j^n)_n$  sont bornées et par conséquent la suite  $(\phi_n^f)_n$  l'est aussi dans  $\Phi_{ad}$ . Elle admet donc une sous-suite convergente que nous notons également  $(\phi_n^f)_n$  et notons  $\phi^f$  sa limite dans  $\Phi_{ad}$ . Pour achever la preuve du lemme, il suffit de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_f(\phi_n^f) = J_f(\phi^f)$ .

Rappelons que

$$J_f(\phi_n^f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla \omega_{(\phi_n^f, f)} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \left| \omega_{(\phi_n^f, f)} \right|^2 ds$$

$$J_f(\phi^f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla \omega_{(\phi^f, f)} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \left| \omega_{(\phi^f, f)} \right|^2 ds$$

afin de simplifier l'écriture, nous posons  $\omega = \omega_{(\phi^f, f)}$  et  $\omega^n = \omega_{(\phi_n^f, f)}$ .

Considérons la différence  $v^n \equiv \omega^n - \omega$  et montrons que  $\|v^n\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[n]{} 0$ .

Nous vérifions d'abord que  $v^n$  est solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla v^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ v^n = \tilde{B}[\phi_n^f] - \tilde{B}[\phi^f] & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial v^n}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.4.45)$$

où  $\tilde{B}[\phi_n^f] = (w_{N(\phi_n^f)})|_S + (\tilde{u}_{\phi_n^f})|_S$ ,  $\tilde{B}[\phi^f] = (w_{N(\phi^f)})|_S + (\tilde{u}_{\phi^f})|_S$ . Donc, il suffit de montrer que  $\tilde{B}[\phi_n^f] \xrightarrow[n]{} \tilde{B}[\phi^f]$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(S)$  (continuité de l'opérateur  $\tilde{B}$ ).

Pour simplifier la présentation, nous notons  $w_N^n \equiv w_{N(\phi_n^f)}$ ,  $\tilde{u}^n \equiv \tilde{u}_{\phi_n^f}$ ,  $w_N \equiv w_{N(\phi^f)}$  et  $\tilde{u} \equiv \tilde{u}_{\phi^f}$  et rappelons que  $w_N^n$  résout le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta w_N^n = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_N^n] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_N^n}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w_N^n}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.4.46)$$

et  $w_N$  résout le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta w_N = 0 & \text{dans } \Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \\ [w_N] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w_N}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w_N}{\partial \nu} = -\sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (5.4.47)$$

Soit maintenant  $\phi^f = (q_j, S_j)$ . Nous explicitons ci-dessous les fonctions  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{u}^n$ ,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}$  et  $\frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial \nu}$ ,

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \frac{q_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3}, \quad \tilde{u}^n(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \frac{q_j^n \cdot (x - S_j^n)}{|x - S_j^n|^3}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(x) &= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{q_j \cdot \nu}{|x - S_j|^3} - 3 \frac{q_j \cdot (x - S_j)(x - S_j) \cdot \nu}{|x - S_j|^5} \right] \\ \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial \nu}(x) &= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{q_j^n \cdot \nu}{|x - S_j^n|^3} - 3 \frac{q_j^n \cdot (x - S_j^n)(x - S_j^n) \cdot \nu}{|x - S_j^n|^5} \right] \end{aligned}$$

que nous savons analytiques en dehors des points  $S_j$  et  $S_j^n$ .

Par suite, la continuité de l'opérateur  $\tilde{B}$  repose sur la proposition suivante

**Proposition 5**  $\|\tilde{u}^n - \tilde{u}\|_{H^1(S)} \xrightarrow[n]{} 0$  et  $\left\| \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_j)} \xrightarrow[n]{} 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Preuve.**

Nous démontrons dans la suite que  $\|\tilde{u}^n - \tilde{u}\|_{H^1(S)} \xrightarrow[n]{} 0$ . Nous commençons donc par développer le terme  $\tilde{u}^n(x) - \tilde{u}(x)$  pour  $x \in S \subset \Gamma_3$ .

$$\tilde{u}^n(x) - \tilde{u}(x) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{q_j^n \cdot (x - S_j^n)}{|x - S_j^n|^3} - \frac{q_j \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3} \right] \quad (5.4.48)$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{q_j^n \cdot (x - S_j^n)}{|x - S_j^n|^3} - \frac{(q_j + \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^n) \cdot (x - S_j)}{|x - S_j|^3} \right] \quad (5.4.49)$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left[ q_j^n \cdot \left( \frac{x - S_j^n}{|x - S_j^n|^3} - \frac{x - S_j}{|x - S_j|^3} \right) + (q_j^n - q_j) \cdot \frac{x - S_j}{|x - S_j|^3} \right] \quad (5.4.50)$$

Donc,

$$|\tilde{u}^n(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{j=1}^m \left[ |q_j^n| \left| \frac{x - S_j^n}{|x - S_j^n|^3} - \frac{x - S_j}{|x - S_j|^3} \right| + |q_j^n - q_j| \frac{|x - S_j|}{|x - S_j|^3} \right]$$

Pour  $x \in S \subset \Gamma_3$ , nous avons :  $\alpha \leq |x - S_j| \leq \beta$  où  $\beta$  désigne le diamètre de  $\Omega$  (même chose pour  $|x - S_j^n|$ ). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - S_j^n}{|x - S_j^n|^3} - \frac{x - S_j}{|x - S_j|^3} \right| &= \left| \frac{x - S_j^n}{|x - S_j^n|^3} - \frac{x - S_j^n + S_j^n - S_j}{|x - S_j|^3} \right| \\ &= \left| (x - S_j^n) \left[ \frac{1}{|x - S_j^n|^3} - \frac{1}{|x - S_j|^3} \right] + \frac{S_j - S_j^n}{|x - S_j|^3} \right| \\ &\leq |x - S_j^n| \left| \frac{1}{|x - S_j^n|^3} - \frac{1}{|x - S_j|^3} \right| + \frac{|S_j^n - S_j|}{|x - S_j|^3} \\ &\leq \beta \left| \frac{1}{|x - S_j^n|^3} - \frac{1}{|x - S_j|^3} \right| + \frac{1}{\alpha^3} |S_j^n - S_j| \\ &\leq cte \left( \left| |x - S_j|^3 - |x - S_j^n|^3 \right| + |S_j^n - S_j| \right) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \left| |x - S_j|^3 - |x - S_j^n|^3 \right| &= \left| |x - S_j| - |x - S_j^n| \right| \left( |x - S_j|^2 + |x - S_j| |x - S_j^n| + |x - S_j^n|^2 \right) \\ &\leq \left| (x - S_j) - (x - S_j^n) \right| \left[ |x - S_j|^2 + |x - S_j| |x - S_j^n| + |x - S_j^n|^2 \right] \\ &\leq cte |S_j^n - S_j| \end{aligned}$$

Donc finalement nous avons  $\left| \frac{x - S_j^n}{|x - S_j^n|^3} - \frac{x - S_j}{|x - S_j|^3} \right| \leq cte |S_j^n - S_j|$

D'où

$$|\tilde{u}^n(x) - \tilde{u}(x)| \leq cte \sum_{j=1}^m |S_j^n - S_j| + |q_j^n - q_j|$$

De la même manière, nous obtenons l'estimation suivante

$$\left| \frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x) \right| \leq cte \sum_{j=1}^m |S_j^n - S_j| + |q_j^n - q_j|$$

Ainsi, nous démontrons  $\|\tilde{u}^n - \tilde{u}\|_{H^1(S)} \xrightarrow{n} 0$ .

La preuve pour  $(\frac{\partial \tilde{u}^n}{\partial \nu})_n$  se fait de la même manière et ne sera pas présentée ici.  $\square$

**Lemme 6** Soit  $(f_n)_n$  une suite de  $H^{1/2}(S)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \bar{f}\|_{1/2,S} = 0$ . Soit  $(\phi_n)_n$  une suite bornée de  $\Phi_{ad}$  telle que  $\inf_{\xi \in \Phi_{ad}} J_{f_n}(\xi) = J_{f_n}(\phi_n)$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{f_n}(\phi_n) = 0.$$

**Preuve.**

Comme  $\bar{\phi} \in \Phi_{ad}$ , nous avons par définition  $0 \leq J_{f_n}(\phi_n) \leq J_{f_n}(\bar{\phi})$ , donc il suffit de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{f_n}(\bar{\phi}) = 0$ .

Or

$$J_{f_n}(\bar{\phi}) = \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla \omega_{(\bar{\phi}, f_n)} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \left| \omega_{(\bar{\phi}, f_n)} \right|^2 ds$$

avec  $\omega_{(\bar{\phi}, f_n)}$  vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \omega) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega & = \tilde{B}[\bar{\phi}] - f_n & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.4.51)$$

Comme  $\bar{\phi}$  est la solution du problème inverse pour la donnée compatible  $\bar{f}$ , nous avons  $\tilde{B}[\bar{\phi}] = \bar{f}$ , et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \bar{f}\|_{1/2,S} = 0$ , nous avons  $\omega_{(\bar{\phi}, f_n)} \xrightarrow{n} 0$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{f_n}(\bar{\phi}) = 0$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre théorème de robustesse du problème d'optimisation (PO).

**Théorème 5** Soit  $(f_n)_n$  une suite de  $H^{1/2}(S)$  et  $(\phi_n)_n$  une suite bornée de  $\Phi_{ad}$  telle que  $J_{f_n}(\phi_n) = \inf_{\xi \in \Phi_{ad}} J_{f_n}(\xi)$ . Soit  $\bar{f} \in H^{1/2}(S)$  une donnée compatible et  $\bar{\phi} \in \Phi_{ad}$  la solution correspondante de (PI). Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \bar{f}\|_{1/2,S} = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n - \bar{\phi}| = 0$ .

**Preuve.**

Soit  $\ell$  un point d'accumulation de la suite réelle bornée  $(|\phi_n - \bar{\phi}|)_n$ . Par ailleurs, comme la suite  $(\phi_n)_n$  est bornée, il existe une sous suite  $(\phi_k)_k$  et  $\phi \in \Phi_{ad}$  telle que  $\phi_k \xrightarrow[k]{} \phi$  et  $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_k - \bar{\phi}|$ .

Notre but est de montrer que  $\ell = 0$ . Pour cela, nous montrons que  $\phi = \bar{\phi}$ , c'est-à-dire  $\phi$  résout le problème inverse pour la donnée compatible  $\bar{f}$ . Grâce à l'identifiabilité du problème inverse

(*PI*), il suffit de montrer que  $\tilde{B}[\underline{\phi}] = \bar{f}$ .

Comme  $\phi_k \xrightarrow[k]{\underline{\phi}}$  dans  $\Phi_{ad}$ , nous avons  $\tilde{B}[\phi_k] \xrightarrow[k]{\underline{\phi}}$   $\tilde{B}[\underline{\phi}]$  (continuité de  $\tilde{B}$ ), et puisque nous avons  $f_k \xrightarrow[k]{\bar{f}}$ , donc  $\omega_{(\phi_k, f_k)} \xrightarrow[k]{\bar{f}}$   $\omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})}$  dans  $H^1(\Omega)$ , où  $\omega_{(\phi_k, f_k)}$  et  $\omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})}$  sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \omega_{(\phi_k, f_k)}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega_{(\phi_k, f_k)} & = \tilde{B}[\phi_k] - f_k & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial \omega_{(\phi_k, f_k)}}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.4.52)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})}) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})} & = \tilde{B}[\underline{\phi}] - \bar{f} & \text{sur } S \\ \sigma_3 \frac{\partial \omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})}}{\partial \nu} & = 0 & \text{sur } L \end{cases} \quad (5.4.53)$$

Ainsi nous avons  $\lim_k J_{f_k}(\phi_k) = J_{\bar{f}}(\underline{\phi})$ , ce qui donne d'après le lemme 6,  $J_{\bar{f}}(\underline{\phi}) = 0$ .

Or  $J_{\bar{f}}(\underline{\phi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\nabla \omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \sigma |\omega_{(\underline{\phi}, \bar{f})}|^2 ds$ , donc  $J_{\bar{f}}(\underline{\phi}) = 0$  implique  $\tilde{B}[\underline{\phi}] = \bar{f}$  sur  $S$ .

Ainsi  $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_k - \bar{\phi}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\phi_k - \underline{\phi}| = 0$ . La suite  $(|\phi_n - \bar{\phi}|)_n$  admet alors 0 comme unique point d'accumulation et par conséquent elle converge vers 0.  $\square$

## 5.5 La méthode d'optimisation utilisée

Pour résoudre le problème d'optimisation (*PO*), nous avons utilisé la méthode L-BFGS ou Limited memory BFGS dont le code a été développé par *Liu & Nocedal* [81]. Cette méthode est identique en son implémentation à la méthode BFGS, la seule différence étant dans la mise à jour de l'inverse de la matrice hessienne. Nous fixons un entier  $M$ , pour les premières  $M$  itérations l'algorithme est identique à BFGS, et pour  $k > M$  l'approximation  $H_k$  de l'inverse de la matrice hessienne est obtenue à partir des  $M$  précédentes itérations, et non pas uniquement à partir de l'itération  $k - 1$ . A chaque itération, la recherche linéaire du pas optimal se fait selon la règle de Wolfe [81]. Et, un nombre maximum d'évaluation de la fonctionnelle coût  $J$  pour accomplir cette recherche est permis :  $Maxfev = 20$ .

Pour plus de détails sur cette méthode, nous renvoyons le lecteur à [96] pour sa description et à [81] où les auteurs ont testé sa performance et l'ont comparé à d'autres méthodes.

L'algorithme s'arrête à l'itération  $k$  telle que

$$|\nabla J_f(\phi_k)| \leq EPS \cdot \max\{1, |\phi_k|\}$$

où  $EPS$  est la tolérance que nous fixons à  $EPS = 10^{-5}$ . Pour quelques tests, l'algorithme s'arrête avant d'atteindre cette tolérance. Le problème est au niveau de la recherche linéaire du pas optimal. En particulier quand nous utilisons la géométrie réaliste, nous avons le message

d'erreur suivant : "Rounding errors prevent further progress. There may not be a step which satisfies the sufficient decrease and curvature conditions. Tolerances may be too small". Et quand nous utilisons la géométrie sphérique avec un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau, nous obtenons le message d'erreur suivant : "More than 20 functions evaluations were required at the present iteration". Dans le cas où nous avons l'un de ces deux messages d'erreur, nous indiquons le nombre d'itérations *iter* par (\*) dans les résultats présentés ultérieurement.

A l'itération  $k$  de l'algorithme, nous calculons  $J(\phi_k)$  et  $\nabla J(\phi_k)$  définis dans (5.2.13) et (5.2.35) après avoir résolu les problèmes directs correspondants au point  $\phi_k$ .

**Remarque 9** *Le choix initial de l'algorithme  $\phi_0 = (q_{1_0}, \dots, q_{m_0}, S_{1_0}, \dots, S_{m_0})$  doit être choisi de sorte que les points  $S_{j_0}$ ,  $j = 1 \dots, m$  soient dans le domaine  $\Omega_1$ .*

## 5.6 Expériences numériques

Dans cette section, nous présentons des tests numériques pour la méthode de *Kohn-Vogelius* afin d'étudier sa performance en fonction de plusieurs critères tels que le nombre de dipôles à localiser et leurs emplacements à l'intérieur du cerveau. Nous étudions également sa robustesse par rapport à la perturbation des données, sa sensibilité par rapport à la "quantité d'informations" dont nous disposons et par rapport à la perturbation de la conductivité et de la surface du crâne. En outre, une comparaison avec la méthode des moindres carrés sera présentée à la fin.

Les tests numériques sont considérés de la façon suivante. Nous supposons connu le nombre de dipôles  $m$  et imposons les positions et les moments. Nous résolvons ensuite le problème direct en EEG dans le but de générer la mesure  $f$  sur la partie  $S$  du scalp. Enfin, nous choisissons un choix initial  $\phi_0$  et appliquons l'algorithme d'optimisation décrit ci-dessus.

Tout d'abord, nous considérons la géométrie sphérique (Tab. 2.2) et traitons respectivement, le cas d'un seul dipôle placé dans la région profonde du cerveau, le cas d'un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau, le cas de deux dipôles éloignés et le cas de deux dipôles proches, le cas de trois et quatre dipôles dispersés dans le cerveau. Ces cas seront testés essentiellement sur le maillage *Mesh2* et quelques cas seront également testés sur le maillage *Mesh3*. Nous présentons ensuite quelques tests sur la géométrie réaliste (Tab. 4.3).

### 5.6.1 Tests sur une géométrie sphérique

#### Efficacité et robustesse de la méthode

Nous supposons que la mesure  $f$  est connue sur toute la surface du scalp i.e.  $S = \Gamma_3$ , le cas où  $S$  est une partie stricte de  $\Gamma_3$  sera étudié au paragraphe §5.6.1.

#### 1. Test1 Cas d'un seul dipôle

Nous prenons d'abord le cas d'un dipôle de moment unitaire placé dans la région profonde du cerveau et testons l'algorithme, pour  $f$  non perturbée et connue sur toute la surface  $\Gamma_3$  en prenant deux choix initiaux plus ou moins proches de la solution exacte. Nous étudions également la sensibilité de la méthode par rapport au rapprochement du dipôle à la surface du cerveau. Ensuite, nous présentons des résultats pour des données perturbées et étudions le comportement de l'algorithme dans le cas d'un dipôle ayant un moment "d'intensité plus forte".

Nous considérons le dipôle de moment et de position suivants :

$$q = [0.707; 0; 0.707] \quad , \quad S = [0.125; 0.125; 0.125] \quad (5.6.54)$$

Donc  $m = 1$  et  $\phi_{ex} = (0.707, 0, 0.707, 0.125, 0.125, 0.125)$ .

• Concernant le choix initial  $\phi_0$  de l'algorithme d'optimisation nous avons testé deux valeurs, la première étant plus proche de la solution exacte que la deuxième :

$$\begin{aligned} \text{(1a)} : \phi_0^{(1)} &= (0.65, -0.06, 0.77, 0.1, 0.1, 0.13) , \quad \frac{|\phi_{ex} - \phi_0^{(1)}|}{|\phi_{ex}|} = 0.10 \\ \text{(1b)} : \phi_0^{(2)} &= (0.5, 0.3, 0.9, 0.4, 0.3, -0.2) , \quad \frac{|\phi_{ex} - \phi_0^{(2)}|}{|\phi_{ex}|} = 0.60 \end{aligned} \quad (5.6.55)$$

Nous notons  $\phi_c^{(1)} = (q_c^{(1)}, S_c^{(1)})$  le vecteur calculé correspondant au choix initial  $\phi_0^{(1)}$ , et  $\phi_c^{(2)} = (q_c^{(2)}, S_c^{(2)})$  celui correspondant à  $\phi_0^{(2)}$ . Nous obtenons après 5 itérations pour **(1a)** et 6 itérations pour **(1b)** les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(1a)} : q_c^{(1)} &= [0.7070; 2.310^{-6}; 0.7070] \quad , \quad S_c^{(1)} = [0.1250; 0.1249; 0.1250] \\ \text{(1b)} : q_c^{(2)} &= [0.7070; 8.110^{-6}; 0.7070] \quad , \quad S_c^{(2)} = [0.1250; 0.1249; 0.1249] \end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{|\phi_{ex} - \phi_c^{(1)}|}{|\phi_{ex}|} = 1.110^{-5} \quad , \quad \frac{|\phi_{ex} - \phi_c^{(2)}|}{|\phi_{ex}|} = 6.410^{-5} \quad (5.6.56)$$

D'après ces résultats, nous tirons les remarques suivantes,

- Pour des données non perturbées, l'algorithme d'optimisation proposé est efficace dans la localisation d'un dipôle placé dans la région profonde du cerveau, et ceci avec un faible nombre d'itérations.
- La précision obtenue sur le vecteur calculé ne dépend pas du choix initial considéré. Par contre, le nombre d'itérations augmente légèrement quand le choix initial est relativement loin de la solution exacte.

Nous prenons  $\phi_0^{(1)}$  comme choix initial pour tous les résultats présentés dans ce qui suit pour le cas du dipôle de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0.125; 0.125; 0.125]$ .

### Sensibilité de l'algorithme par rapport à la distance entre le dipôle et la surface du cerveau

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement de l'algorithme dans le cas d'un seul dipôle en variant sa distance par rapport à la surface du cerveau. Nous prenons un dipôle de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  pour lequel nous considérons différentes positions, ces valeurs sont affichées dans le tableau (Tab. 5.1). Concernant le choix initial  $\phi_0 = (q_0, S_0)$  de l'algorithme, nous prenons  $q_0 = [0.63; 0.03; 0.72]$  ( $\frac{|q - q_0|}{|q|} = 0.08$ ) et les choix initiaux des différentes positions sont affichées dans le tableau (Tab. 5.1).

$Position S$	$\alpha$	valeur initiale $S_0$	$ S - S_0  /  S $
$S^{(1)} = [0.1; 0.1; 0.2]$	0.63	$S_0^{(1)} = [0.11; 0.08; 0.21]$	0.100
$S^{(2)} = [0.1; 0.1; 0.3]$	0.54	$S_0^{(2)} = [0.08; 0.08; 0.28]$	0.104
$S^{(3)} = [0.1; 0.1; 0.4]$	0.45	$S_0^{(3)} = [0.08; 0.08; 0.37]$	0.097
$S^{(4)} = [0.1; 0.1; 0.5]$	0.36	$S_0^{(4)} = [0.07; 0.08; 0.47]$	0.090
$S^{(5)} = [0.1; 0.1; 0.6]$	0.26	$S_0^{(5)} = [0.07; 0.07; 0.56]$	0.094
$S^{(6)} = [0.1; 0.1; 0.7]$	0.16	$S_0^{(6)} = [0.07; 0.07; 0.65]$	0.091

TAB. 5.1 – Le tableau à gauche montre les différentes positions testées et donne leurs distances par rapport à la surface du cerveau :  $\alpha = d(S, \Gamma_1)$ . Le tableau à droite donne les valeurs initiales prises pour ces différentes positions.

Nous donnons dans le tableau (Tab. 5.2) les erreurs relatives euclidiennes obtenues sur les positions et les moments, calculés sur le maillage *Mesh2*, ainsi que le nombre d'itérations de l'algorithme, et dans la figure (Fig. 5.2) nous traçons le logarithme à base 10 de ces erreurs.

Ces résultats montrent que la précision de la localisation d'un dipôle diminue quand il s'approche de la surface du cerveau. En particulier, l'erreur sur le moment augmente d'une "façon linéaire". Et pour  $\alpha = d(S, \Gamma_1) \geq 0.26$ , l'erreur sur la position est de même ordre.

	$iter$	$\frac{ S - S_c }{ S }$	$\frac{ q - q_c }{ q }$
$S^{(1)}$	5	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$
$S^{(2)}$	5	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$
$S^{(3)}$	5	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
$S^{(4)}$	6	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$
$S^{(5)}$	8	$6.6 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
$S^{(6)}$	8*	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$

TAB. 5.2 – Les erreurs relatives euclidiennes sur les positions et les moments calculés sur le maillage *Mesh2* pour les différentes positions affichées dans le tableau (Tab. 5.1),  $iter$  représente le nombre d'itérations.

Nous considérons à présent le dipôle de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0; 0; 0.765]$  que nous avons considéré dans le chapitre 2. Ce dipôle est plus proche de la surface du cerveau que les dipôles testés ci-dessus, il est à distance égale à 0.10 de la surface du cerveau. Nous avons testé la méthode pour ce dipôle sur les deux maillages *Mesh2* et *Mesh3* en prenant les valeurs initiales suivantes :  $q_0 = [0.63; 0.03; 0.72]$ ,  $S_0 = [0.04; -0.03; 0.7]$ . Pour le maillage *Mesh2*, l'algorithme s'est arrêté à la première itération avec le message d'erreur suivant : "Incorrect function or incorrect gradient or incorrect tolerance", en effet le calcul de la fonctionnelle  $J$  et du gradient au point  $\phi$  n'est pas assez précis, ce qui n'est pas le cas pour le maillage *Mesh3* pour lequel nous donnons dans le tableau (Tab. 5.3) les erreurs relatives euclidiennes sur les moments et les positions calculés dans le cas où la donnée  $f$  définie sur tout le scalp est perturbée de 0%, 3%, 5%.

Donc la localisation d'un dipôle par l'algorithme proposé est de moins en moins précise quand ce dipôle s'approche de la surface du cerveau. Cela vient d'une part de la sensibilité de la résolution du problème direct par rapport à la proximité du dipôle à la surface du cerveau que nous avons étudié au chapitre 2 et qui affecte donc l'évaluation de la fonctionnelle coût et de son gradient. D'autre part, quand le dipôle est très proche de la surface

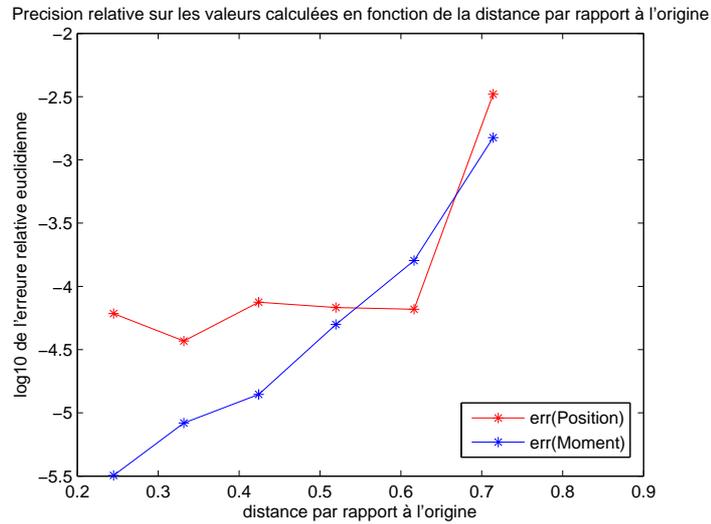


FIG. 5.2 – Erreur relative euclidienne sur la position ( $\frac{|S-S_c|}{|S|}$ ) et le moment ( $\frac{|q-q_c|}{|q|}$ ) calculés en fonction de la distance par rapport au centre de la sphère qui représente le cerveau.

$p$	$iter$	$err(S_c)$	$err(q_c)$
0%	8	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
3%	8	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$
5%	8*	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.3 – Les erreurs relatives euclidiennes sur la position et le moment calculés sur le maillage *Mesh3* pour la source de position  $S = [0; 0; 0.765]$  et de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$ . Nous considérons la donnée  $f$  connue sur tout le scalp et perturbée de  $p = 0, 3, 5\%$ .

du cerveau, nous pouvons obtenir au cours des itérations de l'algorithme d'optimisation, un point  $\phi_c = (q_c, S_c)$  tel que la position  $S_c$  calculée est à l'extérieur du domaine  $\Omega_1$ .

### Perturbation de la donnée $f$

Nous étudions dans ce paragraphe le comportement de l'algorithme en fonction de la perturbation de la donnée  $f$  que nous supposons connue sur toute la surface  $\Gamma_3$ . Nous considérons d'abord le dipôle, placé dans la région profonde, de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0.125; 0.125; 0.125]$ . Nous ajoutons à  $f$  un bruit gaussien d'amplitudes respectives  $p = 0\%$ ,  $1\%$ ,  $3\%$ ,  $5\%$ ,  $7\%$ ,  $10\%$ , et testons l'algorithme sur les deux maillages *Mesh2* et *Mesh3*. Nous traçons dans la figure (Fig. 5.3) la variation de l'erreur relative euclidienne pour la position et le moment calculés avec les deux maillages en fonction du taux de perturbation. Ensuite, pour le maillage *Mesh3* nous comparons dans la figure (Fig. 5.4) entre les erreurs obtenues pour ce dipôle et celles obtenues pour le dipôle placé à proximité de la surface de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0; 0; 0.765]$ .

D'après ces deux figures, nous tirons les remarques suivantes,

- L'algorithme est sensible à la perturbation de la donnée  $f$ .
- L'erreur sur l'identification de la position du dipôle est supérieure que celle du moment.
- La localisation du dipôle est plus précise sur le maillage raffiné *Mesh3* que sur le maillage *Mesh2*.
- La sensibilité au bruit est plus "grande" pour un dipôle placé dans la région profonde du cerveau que pour un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau. En effet, quand le dipôle est placé à proximité de la surface du cerveau, le potentiel qu'il crée sur le scalp  $u|_{\Gamma_3} = f$  est "focalisé" en une petite région, dans le sens que dans cette région le potentiel est relativement grand par rapport au reste du scalp où il prend des valeurs très "petites". Ainsi, la perturbation de la donnée  $f$  n'affecte que la petite région où  $f$  a des valeurs considérables.

### Cas de moment de "forte intensité"

Nous considérons deux dipôles ayant la même position  $S = [0.125; 0.125; 0.125]$  et de moments respectifs  $q^{(1)} = [0.707; 0; 0.707]$  et  $q^{(2)} = 4q^{(1)}$ . Dans le tableau (Tab. 5.4) nous comparons pour le maillage *Mesh2* entre les erreurs obtenues sur la position et le moment calculés pour ces deux dipôles. Et dans le tableau (Tab. 5.5), nous comparons pour le maillage *Mesh3* entre les erreurs obtenues pour les deux dipôles de position chacun  $S = [0; 0; 0.765]$  (proche de la surface) et de moments respectifs  $q^{(1)}$  et  $q^{(2)}$ .

Ces résultats montrent que l'intensité du moment augmente le nombre d'itérations de l'algorithme mais n'influence pas la précision des valeurs calculées. En effet, ceci est dû au fait que les fonctions qui constituent les conditions aux limites des problèmes directs que nous résolvons dépendent linéairement du moment.

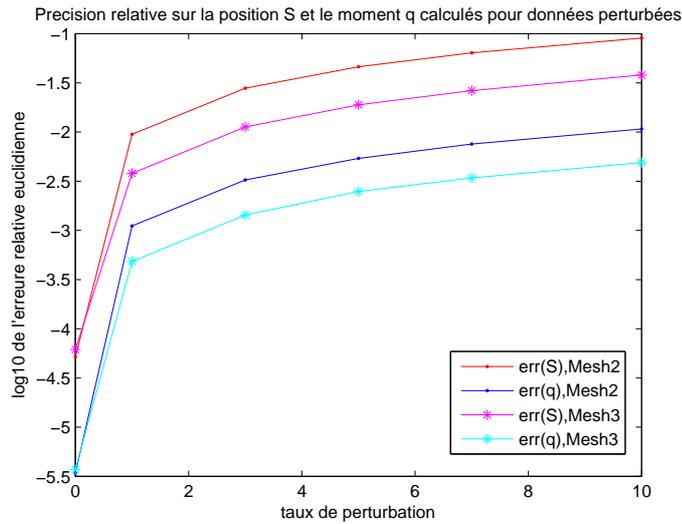


FIG. 5.3 – Les erreurs relatives euclidiennes  $\frac{|S-S_c|}{|S|}$ ,  $\frac{|q-q_c|}{|q|}$  obtenues sur les maillages *Mesh2* et *Mesh3* dans le cas où la donnée  $f$  est connue sur toute la surface  $\Gamma_3$  et perturbée respectivement de  $p = 0\%, 1\%, 3\%, 5\%, 7\%, 10\%$ . Nous considérons un dipôle placé dans la région profonde du cerveau de position  $S = [0.125; 0.125; 0.125]$  et de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$ .

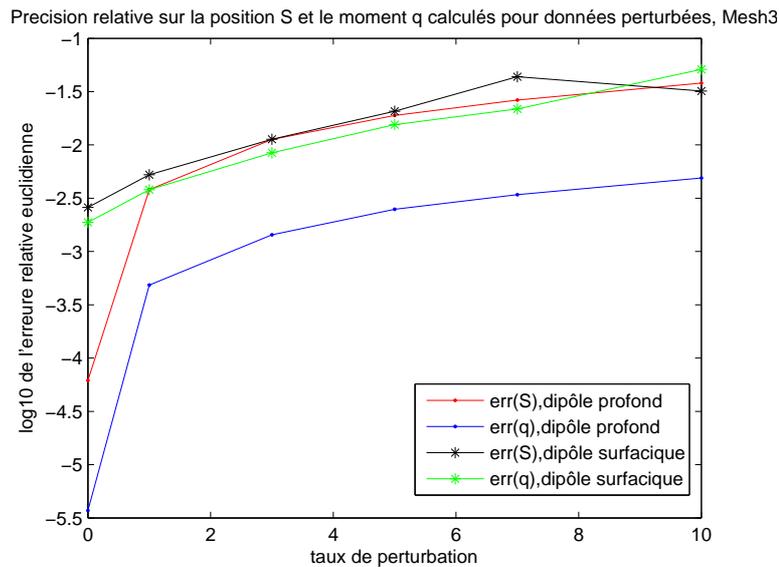


FIG. 5.4 – Les erreurs relatives euclidiennes  $\frac{|S-S_c|}{|S|}$ ,  $\frac{|q-q_c|}{|q|}$  obtenues sur le maillage *Mesh3* pour  $f$  connue sur toute la surface  $\Gamma_3$  et perturbées respectivement de  $p = 0\%, 1\%, 3\%, 5\%, 7\%, 10\%$ . Nous considérons deux dipôles, un dipôle placé dans la région profonde du cerveau de position  $S = [0.125; 0.125; 0.125]$  et de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  que nous notons "dipôle profond", et un autre dipôle placé à proximité de la surface  $\Gamma_1$  de position  $S = [0; 0; 0.765]$  et de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  que nous notons "dipôle surfacique".

$p$	$iter_1$	$err(S_c^{(1)})$	$err(q_c^{(1)})$	$iter_2$	$err(S_c^{(2)})$	$err(q_c^{(2)})$
0%	5	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	9	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$8.2 \cdot 10^{-6}$
3%	5	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	10	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$
5%	5	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	12	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$

TAB. 5.4 – Les erreurs relatives euclidiennes sur la position et le moment calculés respectivement pour le *dipôle 1* de position et moment :  $S^{(1)} = [0.125; 0.125; 0.125]$ ,  $q^{(1)} = [0.707; 0; 0.707]$  et pour le *dipôle 2* de position et moment :  $S^{(2)} = S^{(1)}$ ,  $q^{(2)} = 4q^{(1)}$ . Ces erreurs sont obtenues sur le maillage *Mesh2*.

$p$	$iter_1$	$err(S_c^{(1)})$	$err(q_c^{(1)})$	$iter_2$	$err(S_c^{(2)})$	$err(q_c^{(2)})$
0%	8	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	16	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$
3%	8	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	15	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$
5%	9	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	16	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.5 – Les erreurs relatives euclidiennes sur la position et le moment calculés respectivement pour le *Dipôle 1* de position et moment :  $S^{(1)} = [0; 0; 0.765]$ ,  $q^{(1)} = [0.707; 0; 0.707]$  et pour le *dipôle 2* de position et moment :  $S^{(2)} = S^{(1)}$ ,  $q^{(2)} = 4q^{(1)}$ . Ces erreurs sont obtenues sur le maillage *Mesh3*.

## 2. Test2 Cas de deux dipôles ( $m = 2$ )

Nous traitons dans ce paragraphe le cas d'un terme source constitué de deux dipôles, en particulier nous étudions le comportement de l'algorithme par rapport à la distance entre les deux dipôles. Nous considérons d'abord deux dipôles éloignés dont les moments et les positions sont :

$$\begin{cases} q1 = [0.707; 0.707; 0] & , S1 = [0; 0; 0.5] \\ q2 = [0; -1.414; 1.414] & , S2 = [0.3; 0.2; -0.3] \end{cases} \quad (5.6.57)$$

Nous avons  $d(S1, S2) = 0.87$ . Le choix initial considéré pour l'algorithme d'optimisation est le suivant

$$\phi_0 = (0.65, 0.65, 0.06, 0.11, -1.3, 1.52, 0.04, 0.03, 0.47, 0.27, 0.18, -0.34).$$

Après 21 itérations, nous obtenons les valeurs calculées suivantes,

$$\begin{cases} q1_c = [0.7069; 0.7070; -5.110 \cdot 10^{-5}] & , S1_c = [1.610 \cdot 10^{-6}; -1.910 \cdot 10^{-5}; 0.5000] \\ q2_c = [2.810 \cdot 10^{-5}; -1.4140; 1.4140] & , S2_c = [0.2999; 0.1999; -0.2999] \end{cases}$$

Dans le tableau (Tab. 5.6) nous présentons l'erreur relative euclidienne entre le vecteur  $\phi_{ex} = (q1, q2, S1, S2)$  et le vecteur calculé  $\phi_c = (q1_c, q2_c, S1_c, S2_c)$  obtenu sur le maillage *Mesh2* pour le cas où la donnée  $f$  est connue sur tout le scalp et perturbée de 0%, 3% et 5%.

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	21	$4.5 \cdot 10^{-5}$
3%	22	$3.1 \cdot 10^{-2}$
5%	25	$5.3 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.6 – L'erreur relative euclidienne sur le vecteur calculé  $\phi_c$  pour deux dipôles éloignés.  $p$  représente le taux de perturbation de la donnée  $f$  connue sur tout le scalp. Ces résultats sont obtenus sur le maillage *Mesh2*.

Ces résultats montrent que l'algorithme proposé donne une bonne précision pour deux dipôles éloignés. Cette précision diminue avec la perturbation de la donnée  $f$ .

Nous étudions à présent la sensibilité de la méthode par rapport à la distance entre deux dipôles. Nous considérons donc deux dipôles de moments respectifs  $q1 = [1.414; 1.414; 0]$  et  $q2 = [0; 0.707; -0.707]$ , nous fixons le premier dipôle à la position  $S1 = [0; 0; 0]$  et nous varions la position du deuxième dipôle parmi les valeurs présentées dans le tableau (Tab. 5.7). Nous donnons également dans ce tableau la distance entre les deux dipôles.

<i>Position S2</i>	$d(S1, S2)$
[0; 0; 0.03]	0.03
[0; 0.025; 0.043]	0.05
[-0.07; 0; 0.07]	0.10
[0; -0.129; 0.075]	0.15
[0.2; 0; 0]	0.20
[0.187; 0.108; -0.125]	0.25
[0.15; 0.15; -0.212]	0.30
[0.087; 0.151; -0.303]	0.35
[0; 0; -0.4]	0.40
[0.159; -0.159; -0.389]	0.45
[0.353; 0; -0.353]	0.50
[0.336; 0.336; -0.275]	0.55
[0; 0.6; 0]	0.60
[-0.281; 0.487; 0.325]	0.65

TAB. 5.7 – Les différentes positions considérées pour le deuxième dipôle, le premier dipôle étant placé à l'origine.

Nous traçons dans la figure (Fig. 5.5) les erreurs relatives euclidiennes obtenues sur le vecteur calculé des moments  $q_c = (q1_c, q2_c)$  et celui des positions  $S_c = (S1_c, S2_c)$ , et ceci pour les différents cas présentés dans le tableau (Tab. 5.7).

D'après ces résultats, nous remarquons que l'erreur augmente quand la distance entre les dipôles diminue. Particulièrement, pour deux dipôles très proches, l'identification précise de la position est plus difficile à obtenir que celle du moment.

Nous considérons à présent deux dipôles proches et nous comparons dans le tableau (Tab. 5.8) entre les résultats obtenus sur les deux maillages *Mesh2* et *Mesh3* pour  $f$  perturbée de 0%, 3% et 5%. Les deux dipôles que nous avons considérés ont les moments et les positions suivants :  $q1 = [1.414; 1.414; 0]$ ,  $S1 = [0; 0; 0]$ ,  $q2 = [0; 0.707; -0.707]$ ,  $S2 = [0; 0.025; 0.043]$ . Nous avons  $d(S1, S2) = 0.05$ .

Le choix initial de l'algorithme que nous avons considéré est le suivant

$$\phi_0 = (1.28, 1.5, 0.1, 0.07, 0.65, -0.65, 0.07, -0.05, 0.08, 0.03, 0.03, 0.05).$$

Nous remarquons alors que les résultats, pour le cas de deux dipôles proches, sur le maillage *Mesh3* sont plus précis que ceux obtenus sur le maillage *Mesh2*.

### 3. Test3 Cas de trois et quatre dipôles

Nous prenons le cas de trois dipôles dont les moments et les positions sont :

$$\begin{cases} q1 = [1.414; 0; 1.414] & , S1 = [0; 0; 0] \\ q2 = [0; -1.414; -1.414] & , S2 = [0; 0.3; 0.4] \\ q3 = [0.707; 0.707; 0] & , S3 = [0.5; 0; 0] \end{cases}$$

Le choix initial considéré est le suivant,

$$\phi_0 = (1.3, 0.06, 1.51, -0.04, -1.2, -1.5, 0.65, 0.65, 0.06, 0.05, 0.04, -0.04, 0.05, 0.26, 0.46,$$

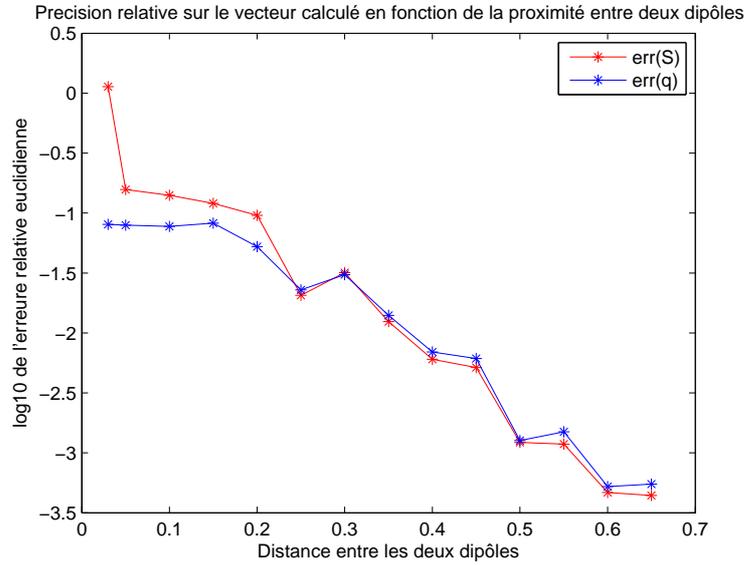


FIG. 5.5 – L'erreur relative euclidienne sur les vecteurs  $S_c = (S1_c, S2_c)$  et  $q_c = (q1_c, q2_c)$ , en fonction de la distance entre les deux dipôles. Ces résultats sont obtenus sur le maillage *Mesh2* pour des mesures non perturbées et connues sur tout le scalp.

	$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
<i>Mesh2</i>	0%	17	$7.9 \cdot 10^{-2}$
	3%	17	$8.6 \cdot 10^{-2}$
	5%	37	$18 \cdot 10^{-2}$
<i>Mesh3</i>	0%	17	$7.9 \cdot 10^{-2}$
	3%	17	$7.8 \cdot 10^{-2}$
	5%	15	$7.9 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.8 – L'erreur relative euclidienne sur le vecteur calculé  $\phi_c = (q1_c, q2_c, S1_c, S2_c)$  pour le cas de deux dipôles proches ( $d(S1, S2) = 0.05$ ). Nous donnons les erreurs obtenues sur les deux maillages *Mesh2* et *Mesh3*.  $p$  représente le taux de perturbation de la donnée  $f$  connue sur tout le scalp,  $iter$  représente le nombre d'itérations de l'algorithme.

0.47, 0.04, 0.03).

Après 72 itérations nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} q1_c = [1.4203; 1.510^{-3}; 1.4314] & , & S1_c = [3.010^{-4}; 1.110^{-3}; 2.510^{-3}] \\ q2_c = [-5.510^{-3}; -1.4120; -1.4252] & , & S2_c = [-5.210^{-4}; 0.3003; 0.3990] \\ q3_c = [0.7062; 0.7034; -6.110^{-3}] & , & S3_c = [0.5005; 4.310^{-4}; 6.610^{-4}] \end{cases}$$

Nous affichons dans le tableau (Tab. 5.9) l'erreur relative euclidienne entre le vecteur calculé  $\phi_c = (q1_c, q2_c, q3_c, S1_c, S2_c, S3_c)$  et le vecteur exact  $\phi_{ex} = (q1, q2, q3, S1, S2, S3)$ .

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex}-\phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	72	$7.7 \cdot 10^{-3}$
3%	129	$9.6 \cdot 10^{-2}$
5%	140	$15 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.9 – L'erreur relative euclidienne obtenue dans le cas où le terme source est formé de trois dipôles, et la donnée  $f$  est perturbée de 0%, 3%, 5%. Ces résultats sont obtenus sur le maillage *Mesh2*.

Nous considérons à présent quatre dipôles dont les moments et les positions sont définis par

$$\begin{cases} q1 = [0; 0.707; 0.707] & , & S1 = [0.2; 0.2; 0.4] \\ q2 = [0.707; 0; 0.707] & , & S2 = [-0.2; -0.2; 0.4] \\ q3 = [0; 0.707; -0.707] & , & S3 = [0; 0.1; -0.3] \\ q4 = [0.707; 0; -0.707] & , & S4 = [-0.1; -0.1; -0.5] \end{cases}$$

Le choix initial considéré est

$$\phi_0 = (0.05, 0.65, 0.62, 0.62, -0.05, 0.62, 0.07, 0.62, -0.65, 0.75, 0.08, -0.75, 0.15, 0.25, 0.33, -0.18, -0.15, 0.51, 0.07, 0.05, -0.25, -0.2, -0.08, -0.55).$$

Les valeurs calculées sont

$$\begin{cases} q1_c = [0.0048; 0.7035; 0.7006] & , & S1_c = [0.1997; 0.2007; 0.4014] \\ q2_c = [0.7075; 8.310^{-4}; 0.7086] & , & S2_c = [-0.2002; -0.1991; 0.4005] \\ q3_c = [-0.0194; 0.7058; -0.6878] & , & S3_c = [0.0034; 0.1003; -0.3005] \\ q4_c = [0.7211; 0.0036; -0.7214] & , & S4_c = [-0.0994; -0.0991; -0.4972] \end{cases}$$

Les erreurs relatives euclidiennes sur le vecteur calculé  $\phi_c$  pour des données perturbées de 0%, 3% et 5% sont présentées dans le tableau (Tab. 5.10).

Nous concluons donc que la localisation du terme source par la méthode de *Kohn-Vogelius* est moins précise quand le nombre de dipôles et le taux de perturbation de la donnée  $f$  augmentent.

Cependant, pour un terme source formé de trois dipôles et si la donnée  $f$  est faiblement perturbée, nous obtenons des résultats avec une précision acceptable. Mais cette précision se dégrade quand nous augmentons le taux de perturbation de  $f$  et/ou le nombre de dipôles.

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	89	$1.6 \cdot 10^{-2}$
3%	118	$20 \cdot 10^{-2}$
5%	106	$28 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.10 – L’erreur relative euclidienne obtenue dans le cas où le terme source est formé de quatre dipôles et la donnée  $f$  est perturbée de 0%, 3%, 5%. Ces résultats sont obtenues pour le maillage *Mesh2*.

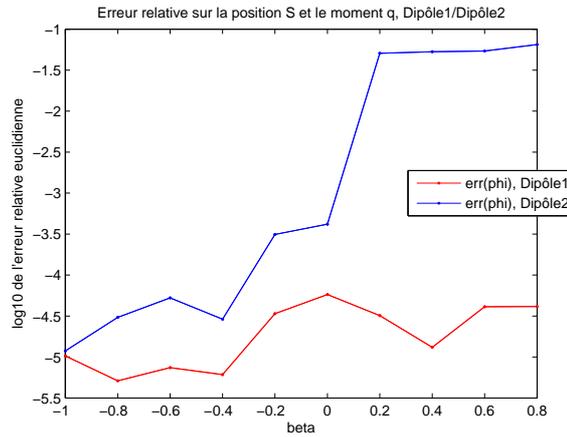


FIG. 5.6 – L’erreur relative euclidienne sur le vecteur  $\phi_c = (q_c, S_c)$  calculé sur le maillage *Mesh3*, pour le *dipôle1* de position  $[0.1; 0.1; 0.7]$  et *dipôle2* de position  $[-0.1; -0.1; -0.7]$ . La donnée non perturbée  $f$  est connue sur la partie  $S$  qui représente respectivement 100%, 90%,  $\dots$ , 10% de la surface du scalp, ce qui est représenté par  $\beta = -1, -0.8, \dots, 0.8$ .

### Comportement de la méthode dans le cas où la donnée $f$ est connue partiellement sur la surface du scalp

Nous étudions dans ce paragraphe le comportement de la méthode quand les mesures sont connues partiellement sur le scalp, c’est à dire quand  $S$  est une partie stricte de  $\Gamma_3$ .

Nous considérons un seul dipôle placé à une distance égale à 0.16 de la surface de la sphère qui représente le cerveau et dont le rayon est 0.87. La partie  $S$  du scalp sur laquelle nous supposons connue la donnée  $f$  est formée par les noeuds du maillage qui vérifient  $z \geq \beta$  (cf chapitre 4). Ainsi, si par exemple nous considérons que la partie  $S$  représente 50% de la surface  $\Gamma_3$  alors  $S^h$  représente la moitié supérieure de la sphère discrétisée  $\Gamma_3^h$ .

Puisque la répartition du champ de potentiel sur la surface  $S$  dépend de la position du dipôle et de son moment, nous considérons alors deux cas. Nous prenons le cas où le dipôle est placé dans la moitié inférieure de la sphère, à la position  $S^{(1)} = [-0.1; -0.1; -0.7]$ , et le cas où le dipôle est placé dans la moitié supérieure à la position  $S^{(2)} = [0.1; 0.1; 0.7]$ . Nous prenons le même moment pour les deux dipôles  $q = [0.707; 0.707; 0]$ .

Nous traçons dans la figure (Fig. 5.6) la variation de l’erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  obtenue sur le maillage *Mesh3* pour les deux dipôles considérés ci-dessus, en considérant que la partie  $S$  représente respectivement 100%, 90%,  $\dots$ , 10% de la surface du scalp.

D’après cette figure, nous remarquons que la localisation d’un dipôle dans le cas où la donnée  $f$  est connue partiellement sur la surface du scalp dépend de l’emplacement et de l’orientation de ce dipôle à l’intérieur du cerveau. En fait, si le dipôle est placé et orienté d’une manière à ce que le potentiel qu’il crée sur la surface du scalp est ”concentré” du côté de la région

où nous ne disposons pas de mesures, tel est le cas pour le deuxième dipôle décrit ci-dessus, alors nous perdons une bonne quantité d'informations en diminuant la surface de la région  $S$  des mesures. Par contre, si le potentiel créé par le dipôle est "concentré" du côté de la partie  $S$ , donc en diminuant la surface de  $S$  nous ne perdons pas trop d'informations et par suite, la localisation du dipôle n'y est pas très sensible, tel est le cas du premier dipôle décrit ci-dessus.

Dans le paragraphe §5.6.3, nous étudions en fonction de la superficie de  $S$ , la variation de l'erreur obtenue sur les valeurs calculées pour le cas de trois dipôles dispersés dans le cerveau et comparons le résultat obtenu avec la méthode des moindres carrés.

### Sensibilité de la méthode par rapport à la perturbation de la conductivité du crâne

Dans ce paragraphe, nous étudions la sensibilité de la localisation des dipôles par la méthode de *Kohn-Vogelius* par rapport à la conductivité du crâne, les conductivités du scalp et du cerveau étant fixées à 1. D'abord, nous testons différentes valeurs pour la conductivité du crâne :  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{80}$ ,  $\frac{1}{40}$ ,  $\frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{10}$ . Ensuite nous étudions le comportement de l'algorithme en fonction de la perturbation de la conductivité.

Nous considérons les deux dipôles suivants, le premier étant placé dans la région profonde du cerveau et le deuxième étant placé à proximité de la surface du cerveau :

$$\begin{cases} \text{dipôle 1} & : q = [0.707; 0; 0.707] \quad , \quad S = [0.1; 0.1; 0.2] \\ \text{dipôle 2} & : q = [0.707; 0; 0.707] \quad , \quad S = [0.1; 0.1; 0.7] \end{cases}$$

Nous traçons dans la figure (Fig. 5.7) pour ces deux dipôles l'erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  obtenue sur le maillage *Mesh2* pour les différentes valeurs de la conductivité de l'os décrites ci-dessus.

A présent, nous fixons la conductivité du crâne à  $\frac{1}{80}$  et nous la perturbons respectivement de 0%, 3%, 5%, 7% et 10%. Nous traçons dans la figure (Fig. 5.8) les erreurs relatives euclidiennes sur la position et le moment calculés pour les deux dipôles cités ci-dessus.

Nous remarquons d'après la figure (Fig. 5.7) l'influence de la conductivité de l'os sur la localisation des dipôles. Et d'après la figure (Fig. 5.8), nous remarquons que le calcul du moment est plus sensible à la perturbation de la conductivité de l'os, notée  $\sigma_{Os}$ , que celui de la position. Nous remarquons également, que la localisation du dipôle placé dans la région profonde du cerveau est plus affectée par la perturbation de  $\sigma_{Os}$  que celle du dipôle placé à proximité de la surface du cerveau ("dipôle surfacique"). En particulier, le calcul de la position du "dipôle surfacique" n'est pas affectée par la perturbation de la conductivité de l'os. Nous pourrions expliquer ceci par le fait qu'un "dipôle surfacique" produit un potentiel plus "intense" que celui créé par un dipôle placé dans la région profonde du cerveau. Et, par la suite il va être moins affecté par la conductivité de l'os.

Notons par ailleurs, que l'augmentation du taux  $p$  de perturbation ajoutée à  $\sigma_{Os}$  n'affecte pas d'une façon considérable les résultats obtenus; nous ne trouvons pas une grande différence entre l'erreur obtenue pour  $p = 3\%$  et l'erreur obtenue pour  $p = 10\%$ .

### Sensibilité de la méthode à la perturbation de la surface du crâne

Dans ce paragraphe, nous étudions la sensibilité de la méthode par rapport à la perturbation de la surface du crâne. Particulièrement, nous considérons deux cas :

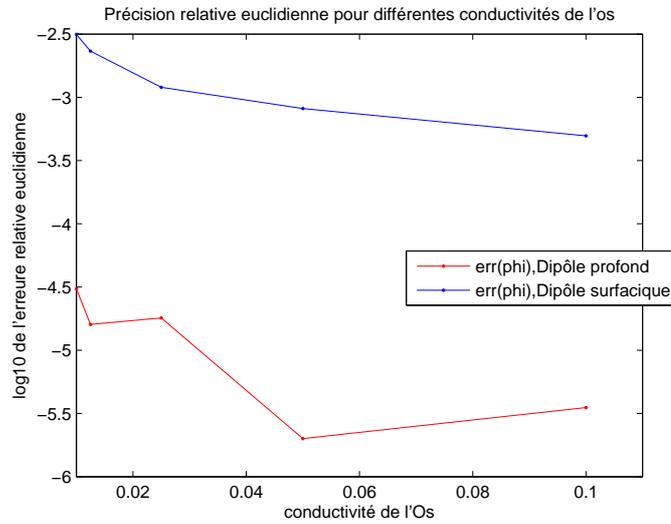


FIG. 5.7 – L'erreur relative euclidienne sur le vecteur calculé  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  obtenue sur le maillage *Mesh2* pour le dipôle de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0.1; 0.1; 0.2]$ , que nous notons "dipôle profond" et pour le dipôle ayant le même moment et la position suivante  $S = [0.1; 0.1; 0.7]$  et que nous notons "dipôle surfacique", et ceci pour différentes valeurs de la conductivité de l'os qui sont respectivement  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{80}$ ,  $\frac{1}{40}$ ,  $\frac{1}{20}$ ,  $\frac{1}{10}$ .

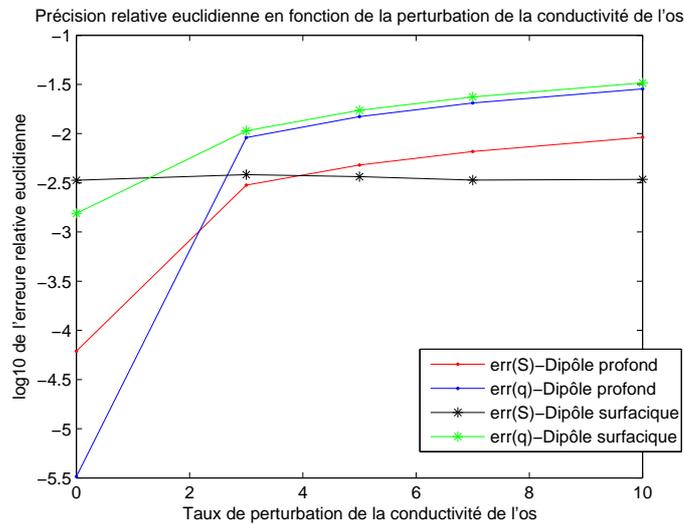


FIG. 5.8 – Les erreurs relatives euclidiennes sur la position  $err(S)$  et le moment  $err(q)$  obtenues sur le maillage *Mesh2* pour le dipôle de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0.1; 0.1; 0.2]$ , que nous notons "dipôle profond" et pour le dipôle ayant le même moment et la position suivante  $S = [0.1; 0.1; 0.7]$  et que nous notons "dipôle surfacique". Nous fixons la conductivité de l'os à  $\frac{1}{80}$  et y ajoutons un bruit d'amplitudes respectives 0%, 3%, 5%, 7% et 10%.

(1) le cas où nous faisons glisser la surface discrétisée ( $\Gamma_2^h$ ) de l'os dans la direction d'un vecteur que nous choisissons par exemple égal à  $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1]$ , et prenons l'amplitude du glissement parmi les valeurs suivantes 0, 0.01, 0.02, 0.03. Dans ce cas la structure sphérique est gardée.

(2) le cas où nous ajoutons un bruit gaussien aux noeuds de la surface discrétisée  $\Gamma_2^h$  de l'os d'amplitudes respectives 0, 0.01, 0.02, 0.03.

Nous considérons le dipôle placé à proximité de la surface du cerveau de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0.1; 0.1; 0.7]$ . Dans la figure (Fig. 5.9), nous traçons les erreurs relatives euclidiennes sur les valeurs calculées pour les deux cas (1) et (2) décrits ci-dessus.

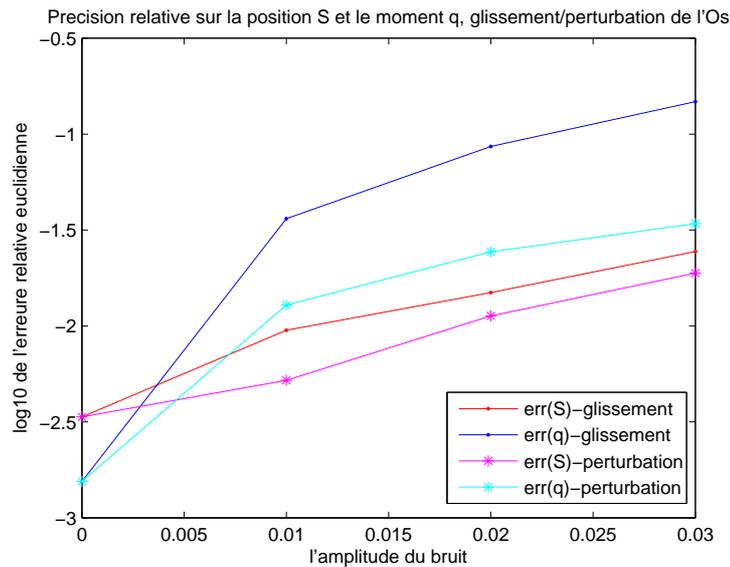


FIG. 5.9 – L'erreur relative euclidienne sur la position et le moment calculés sur le maillage *Mesh2*, pour le dipôle placé à  $S = [0.1; 0.1; 0.7]$  et de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$ . Nous traçons ces erreurs pour deux cas : le cas du glissement de la surface de l'os et le cas d'une perturbation gaussienne ajoutée à la surface de l'os.

Nous remarquons d'après ces résultats l'influence de l'imprécision ajoutée à la surface discrétisée de l'os sur la localisation du dipôle. Particulièrement, la localisation est plus affectée lorsqu'un glissement de la surface de l'os est effectué que lorsqu'une perturbation gaussienne y est ajoutée. Ceci peut être expliqué par le fait que la perturbation est répartie sur tous les noeuds de la surface discrétisée de l'os alors que le glissement de la surface crée une disproportion dans la distance entre les sphères qui représentent les différentes couches de la tête. D'autre part, nous remarquons que le calcul du moment est plus affecté, dans les deux cas, que celui de la position.

### 5.6.2 Tests sur une géométrie réaliste

Nous considérons le maillage *Mesh4* de la géométrie réaliste décrit dans (Tab. 4.3). Nous avons testé sur ce maillage le cas d'un dipôle et le cas de trois dipôles. Les mesures sont supposées connues sur toute la surface du scalp. Nous prenons ici la tolérance pour l'algorithme d'optimisation égale à  $EPS = 10^{-3}$ .

Pour ce maillage, nous avons un dipôle obtenu par le logiciel *ASA*, il est de moment  $[0.9; 0.21; 0.36]$  et de position  $[0.00679; -0.3904; 0.4551]$ . Cependant, ce dipôle est très proche de la surface du cerveau, à une distance de 0.004. Pour ce dipôle, l'algorithme d'optimisation ne fonctionne pas bien, il calcule, au cours des itérations, un point qui est à l'extérieur du domaine du cerveau. Pour cela, nous avons "légèrement" modifié la position de sorte à obtenir un dipôle à proximité

de la surface mais moins proche que le dipôle initial. Nous avons ainsi considéré les valeurs suivantes

$$S = [0.00679; -0.3; 0.3] \quad , \quad q = [0.9; 0.21; 0.36]$$

Nous prenons le choix initial suivant  $\phi_0 = (0.85, 0.2, 0.31, 0.008, -0.35, 0.28)$ .

Dans le tableau (Tab. 5.11), nous donnons les erreurs relatives euclidiennes obtenues sur la position et le moment calculés pour ce dipôle.

Nous prenons à présent les trois dipôles suivants

$$\begin{cases} q1 = [0.9; 0.21; 0.36] & , S1 = [0.2; 0.1; 0.1] \\ q2 = [0; 0.707; 0.707] & , S2 = [0.3; 0; 0] \\ q3 = [-0.21; 0.9; 0.36] & , S3 = [0; 0; 0.2] \end{cases}$$

Le choix initial considéré est :

$$\phi_0 = (0.85, 0.2, 0.31, 0.08, 0.66, 0.72, -0.22, 0.92, 0.32, 0.21, 0.06, 0.11, 0.28, 0.04, -0.05, 0.03, -0.04, 0.19)$$

Le tableau (Tab. 5.12) montre les erreurs relatives euclidiennes obtenues pour les positions et les moments calculés.

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	8	$3.4 \cdot 10^{-3}$
3%	10	$8.5 \cdot 10^{-3}$
5%	11	$1.2 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.11 – L'erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  obtenue sur le maillage *Mesh4* de la géométrie réaliste, pour le dipôle de position  $S = [0.00679; -0.3; 0.3]$  et de moment  $q = [0.9; 0.21; 0.36]$ . La donnée  $f$  est supposée connue sur toute la surface  $\Gamma_3$  et perturbée de  $p = 0, 3, 5\%$ .

$p$	$iter$	$err(S_c)$	$err(q_c)$
0%	13*	$13 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-2}$
3%	14*	$20 \cdot 10^{-2}$	$5.4 \cdot 10^{-2}$
5%	14*	$25 \cdot 10^{-2}$	$5.6 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.12 – Les erreurs relatives euclidiennes obtenues sur le vecteur contenant les positions  $S_c = (S1_c, S2_c, S3_c)$  et le vecteur contenant les moments  $q_c = (q1_c, q2_c, q3_c)$  sur le maillage *Mesh4* de la géométrie réaliste pour le cas de trois dipôles. La donnée  $f$  est supposée connue sur toute la surface  $\Gamma_3$  et perturbée de  $p = 0, 3, 5\%$ .

Nous remarquons alors que la localisation du dipôle considéré à proximité de la surface du cerveau est bonne même pour des données perturbées de 3% et 5%. Mais pour le cas des trois dipôles elle devient moins bonne, en particulier ce sont les positions qui sont difficilement identifiables.

### 5.6.3 Comparaison entre la méthode de *Kohn-Vogelius* et la méthode des moindres carrés

Afin d'évaluer l'apport de la méthode de *Kohn-Vogelius*, nous résolvons le problème d'identification en utilisant la méthode des moindres carrés. Pour un terme source  $\phi$  donné, cette méthode consiste à minimiser l'erreur quadratique sur la région des mesures  $S$  entre la mesure  $f$  générée

par  $\phi$  et la valeur du potentiel calculée. Il s'agit donc de trouver le minimum de la fonctionnelle coût suivante :  $J_f^{mc}(\phi) = \frac{1}{2} \|u_{N(\phi)|_S} - f\|_{L^2(S)}^2$ , où  $u_{N(\phi)}$  est la solution du problème (5.1.3). Cette fonctionnelle s'écrit également de la façon suivante

$$J_f^{mc}(\phi) = \frac{1}{2} \|\omega_{(\phi,f)}\|_{L^2(S)}^2 \quad (5.6.58)$$

où  $\omega_{(\phi,f)}$  est la solution du problème (5.2.9).

Le gradient de cette fonction est :

$$\vec{\nabla} J^{mc} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \quad (5.6.59)$$

avec  $a_j = (a_j^i)$  et  $b_j = (b_j^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, \dots, m$  sont définis de la façon suivante

$$a_j^i = \int_S \omega_{(\phi,f)} (y_{i,j}^1 - z_{i,j}^1) ds \quad (5.6.60)$$

$$b_j^i = \int_S \omega_{(\phi,f)} (y_{i,j}^2 - z_{i,j}^2) ds \quad (5.6.61)$$

où  $y_{i,j}^k$  et  $z_{i,j}^k$ ,  $k = 1, 2$  sont les solutions des problèmes décrits dans (5.2.33) et (5.2.34).

Nous avons comparé entre ces deux méthodes sur le maillage sphérique *Mesh2* pour le cas d'un dipôle placé dans la région profonde du cerveau en considérant deux choix initiaux différents, le cas de deux dipôles proches et le cas de trois dipôles. Nous avons considéré également le cas d'un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau pour le maillage sphérique *Mesh3* et pour le maillage *Mesh4* de la géométrie réaliste.

### Géométrie sphérique

#### 1. Cas d'un dipôle placé dans la région profonde du cerveau

Nous prenons le dipôle de moment :  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position :  $S = [0.125; 0.125; 0.125]$ . Nous considérons les deux choix initiaux  $\phi_0^{(1)}$  et  $\phi_0^{(2)}$  définis dans (5.6.55), le premier choix étant plus proche de la solution exacte que le deuxième. Dans le tableau (Tab. 5.13), nous présentons les erreurs relatives euclidiennes sur les valeurs calculées sur le maillage *Mesh2* avec  $f|_{\Gamma_3}$  perturbée de 0%, 5% et 7%. Nous donnons également le nombre d'itérations.

#### 2. Cas d'un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau

Nous prenons le dipôle de moment  $q = [0.707; 0; 0.707]$  et de position  $S = [0; 0; 0.765]$  et considérons le maillage *Mesh3*. Nous donnons dans le tableau (tab. 5.14) pour les deux méthodes les erreurs relatives euclidiennes sur la position et le moment calculés avec  $f$  perturbée de 0%, 5% et 7%.

*méthode de Kohn-Vogelius*

$p$	$iter_1$	$err(S^{(1)})$	$err(q^{(1)})$	$iter_2$	$err(S^{(2)})$	$err(q^{(2)})$
0%	5	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	7	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$
5%	4	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	7	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$
7%	4	$6.3 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	7	$6.3 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$

*méthode des moindres carrées*

$p$	$iter_1$	$err(S^{(1)})$	$err(q^{(1)})$	$iter_2$	$err(S^{(2)})$	$err(q^{(2)})$
0%	10	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$9.0 \cdot 10^{-7}$	11	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$
5%	9	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	11	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$
7%	9	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	11	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.13 – Les erreurs relatives euclidiennes sur les positions et les moments calculés obtenus sur le maillage *Mesh2* par les deux méthodes en considérant un dipôle placé dans la région profonde du cerveau. La mesure  $f$  est connue sur tout le scalp et perturbée de  $p = 0, 5, 7\%$ . L'exposant (1) correspond au choix initial  $\phi_0^{(1)}$  et l'exposant (2) correspond au choix initial  $\phi_0^{(2)}$ .

*méthode de Kohn-Vogelius*

$p$	$iter$	$err(S)$	$err(q)$
0%	8	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
5%	8*	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
7%	6*	$4.3 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$

*méthode des moindres carrées*

$p$	$iter$	$err(S)$	$err(q)$
0%	10	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$
5%	9	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$7.4 \cdot 10^{-3}$
7%	9	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.14 – L'erreur relative euclidienne sur les positions et les moments calculés obtenus sur le maillage *Mesh3* par les deux méthodes en considérant un dipôle situé à proximité de la surface du cerveau. La mesure  $f$  est connue sur tout le scalp et perturbée de  $p = 0, 5, 7\%$ .

### 3. Cas de deux dipôles proches

Nous considérons les deux dipôles de moments et positions :  $q1 = [1.414; 1.414; 0]$ ,  $S1 = [0; 0; 0]$  et  $q2 = [0; 0.707; -0.707]$ ,  $S2 = [0; 0.025; 0.043]$ . Nous avons,  $d(S1, S2) = 0.05$ .

Nous prenons le choix initial suivant

$$\phi_0 = (1.28, 1.5, 0.1, 0.07, 0.65, -0.65, 0.07, -0.05, 0.08, 0.03, 0.03, 0.05).$$

Le tableau (Tab. 5.15) montre pour les deux méthodes l'erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  où  $\phi_{ex} = (q1, q2, S1, S2)$  et  $\phi_c = (q1_c, q2_c, S1_c, S2_c)$  obtenue sur le maillage *Mesh2* et ceci pour  $f$  perturbée de 0%, 5% et 7%.

*méthode de Kohn-Vogelius*

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	17	$7.9 \cdot 10^{-2}$
5%	37	$18 \cdot 10^{-2}$
7%	36	$19 \cdot 10^{-2}$

*méthode des moindres carrées*

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	25	$7.8 \cdot 10^{-2}$
5%	244	1.4010
7%	179	1.9678

TAB. 5.15 – L'erreur relative euclidienne sur les valeurs calculées obtenues sur le maillage *Mesh2* par les deux méthodes en considérant *deux dipôles proches*. La mesure  $f$  est connue sur tout le scalp et perturbée de  $p = 0, 5, 7\%$ .

### 4. Cas de trois dipôles

Nous considérons les trois dipôles suivants

$$\begin{aligned} q1 &= [0.707; 0.707; 0] & , & \quad S1 = [0; 0; 0] \\ q2 &= [0; 0.707; 0.707] & , & \quad S2 = [0; 0.4; 0.4] \\ q3 &= [0; -0.707; 0.707] & , & \quad S3 = [0; -0.4; 0.4] \end{aligned}$$

et comme choix initial pour l'algorithme d'optimisation nous prenons

$$\phi_0 = (0.65, 0.65, 0.06, -0.05, 0.75, 0.75, 0.07, -0.65, 0.75, 0.05, 0.04, -0.04, 0.05, 0.36, 0.46, -0.06, -0.35, 0.34).$$

Nous présentons dans le tableau (Tab. 5.16) pour la donnée  $f$  perturbée de 0%, 5% et 7%, l'erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  où  $\phi_{ex} = (q1, q2, q3, S1, S2, S3)$  et  $\phi_c = (q1_c, q2_c, q3_c, S1_c, S2_c, S3_c)$ .

### 5. Cas où la donnée $f$ est connue partiellement sur le scalp

Nous considérons la donnée  $f$  non perturbée et définie sur la partie  $S$  qui occupe respectivement 100%, 90%,  $\dots$ , 10% de la surface du scalp. Nous prenons les trois dipôles décrits ci-dessus et traçons dans la figure (Fig. 5.10) l'erreur relative euclidienne sur le vecteur  $\phi_c = (q1_c, q2_c, q3_c, S1_c, S2_c, S3_c)$  calculé sur le maillage *Mesh2* par les deux méthodes.

*méthode de Kohn-Vogelius*

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	65	$1.9 \cdot 10^{-3}$
5%	61	$14 \cdot 10^{-2}$
7%	62	$18 \cdot 10^{-2}$

*méthode des moindres carrées*

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex} - \phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	134	$2.6 \cdot 10^{-2}$
5%	180	$24 \cdot 10^{-2}$
7%	357	$32 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.16 – L'erreur relative euclidienne sur les valeurs calculées sur le maillage *Mesh2* par les deux méthodes en considérant *trois dipôles*. La mesure  $f$  est connue sur tout le scalp et perturbée de  $p = 0, 5, 7\%$ .

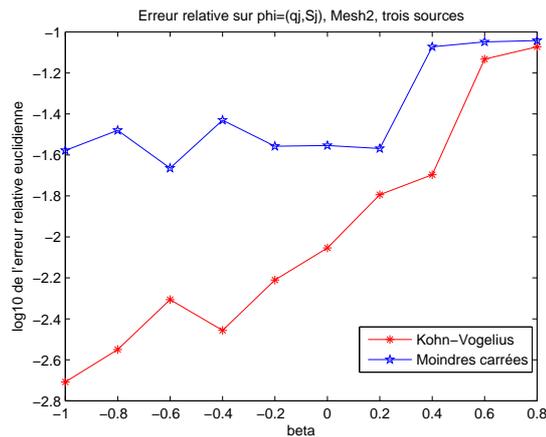


FIG. 5.10 – L'erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex} - \phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  obtenue sur le maillage *Mesh2* par les deux méthodes en considérant trois dipôles. La mesure  $f$  est non perturbée et connue sur  $S$  qui représente respectivement 100%, 90%,  $\dots$ , 10% de la surface du scalp.

### Géométrie réaliste

Nous considérons à présent le maillage *Mesh4* de la géométrie réaliste et prenons le dipôle de moment  $q = [0.9; 0.21; 0.36]$  et de position  $S = [0.00679; -0.3; 0.3]$ . Nous prenons le même choix initial considéré auparavant pour ce dipôle et fixons la tolérance pour l'algorithme à  $EPS = 10^{-3}$ .

Nous donnons dans le tableau (Tab. 5.17) les erreurs relatives euclidiennes sur les valeurs calculées par les deux méthodes.

#### méthode de Kohn-Vogelius

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex}-\phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	8	$3.4 \cdot 10^{-3}$
5%	11	$1.2 \cdot 10^{-2}$
7%	11	$1.6 \cdot 10^{-2}$

#### méthode des moindres carrées

$p$	$iter$	$\frac{ \phi_{ex}-\phi_c }{ \phi_{ex} }$
0%	4	$2.9 \cdot 10^{-3}$
5%	6	$2.0 \cdot 10^{-2}$
7%	6	$2.9 \cdot 10^{-2}$

TAB. 5.17 – L'erreur relative euclidienne  $\frac{|\phi_{ex}-\phi_c|}{|\phi_{ex}|}$  obtenue sur le maillage *Mesh4* de la géométrie réaliste par les deux méthodes en considérant un dipôle situé à proximité de la surface du cerveau. La mesure  $f$  est connue sur tout le scalp et perturbée de  $p = 0, 5, 7\%$ .

### Conclusion

D'après les résultats présentés ci-dessus pour les deux méthodes, nous tirons les conclusions suivantes :

- Pour la géométrie sphérique, la méthode de *Kohn-Vogelius* nécessite moins d'itérations que la méthode des moindres-carrées pour atteindre la tolérance fixée à  $EPS = 10^{-5}$ . Cette différence est considérable, en particulier quand le nombre de dipôles augmente. La méthode de *Kohn-Vogelius* est également plus efficace que la méthode des moindres carrées quand la donnée  $f$  est connue partiellement sur la surface du scalp et quand il s'agit de localiser deux dipôles proches ou trois dipôles.

Cependant, quand il s'agit de localiser un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau, la méthode des moindres carrées donne des résultats légèrement meilleurs que ceux obtenus par la méthode de *Kohn-Vogelius*. En fait, l'algorithme d'optimisation de *Kohn-Vogelius* appliqué à un dipôle proche de la surface avec des données perturbées, s'arrête avant d'atteindre la tolérance fixée. Ceci est dû à l'imprécision du calcul du flux dans le problème direct pour un dipôle proche de la surface du cerveau, comme nous l'avons constaté dans le chapitre 2.

- Pour la géométrie réaliste, la méthode des moindres carrées nécessite moins d'itérations que la méthode de *Kohn-Vogelius* pour atteindre la tolérance fixée à  $EPS = 10^{-3}$  en donnant environ les mêmes ordres d'erreurs.

## 5.7 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons résolu le problème inverse en EEG en minimisant une fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* [69]. Cette fonctionnelle est basée sur l'écart énergétique sur tout le domaine entre les solutions des deux problèmes directs. Le premier est à condition de Neumann sur le bord et le deuxième est aux conditions mêlées qui tient compte de la mesure définie sur une partie  $S$  du scalp. Cette fonctionnelle a un terme de plus que la fonctionnelle des moindres carrées, ce terme est défini à partir des dérivées normales de ces deux solutions sur la partie  $S$ .

Nous avons démontré que pour des données compatibles cette méthode identifie la solution exacte du problème inverse, nous avons également établi sa stabilité pour des données quelconques. Afin de déterminer son gradient, nous avons calculé la dérivée au sens de Gâteaux.

Nous avons implémenté cette méthode en utilisant un logiciel de BFGS développé par *Liu & Nocedal* [81] et nous l'avons testée sur la géométrie sphérique et sur la géométrie réaliste. Plusieurs configurations du terme source ont été testées, comme le cas du terme source formé d'un seul dipôle, de deux dipôles, de trois et de quatre dipôles. Nous avons étudié la sensibilité de la méthode par rapport à la proximité du dipôle à la surface du cerveau, par rapport à la distance entre deux dipôles, par rapport à la perturbation de la donnée  $f$  ainsi que par rapport à la superficie de la partie  $S$  du scalp sur laquelle la mesure  $f$  est définie. Le comportement de la méthode par rapport à la perturbation de la conductivité et à la perturbation de la surface de l'os a été également étudié. Nous avons en outre comparé la méthode de *Kohn-Vogelius* et la méthode des moindres carrées pour plusieurs cas.

Les résultats obtenus nous permettent de conclure ce qui suit. La méthode de *Kohn-Vogelius* fournit de bons résultats sur la géométrie sphérique quand nous disposons de données faiblement perturbées et d'un faible nombre de dipôles bien séparés et loins de la surface du cerveau. Cette précision diminue quand il s'agit d'un dipôle placé à proximité de la surface du cerveau ou quand il s'agit de dipôles proches ou quand le nombre de dipôles  $m$  est plus grand que 4. Cependant, la précision sur les résultats augmente quand nous travaillons avec un maillage plus raffiné.

La méthode est sensible à la superficie de la région des mesures, mais cette sensibilité dépend de l'emplacement et de l'orientation du dipôle à l'intérieur du cerveau. La méthode est également sensible à la perturbation de la conductivité de l'os et à la perturbation de sa surface. En particulier, c'est le calcul du moment qui est plus affecté.

En ce qui concerne la géométrie réaliste, les résultats obtenus sur le maillage dont nous disposons sont acceptables pour le cas d'un dipôle mais ne sont pas précis pour le cas de trois dipôles. Ceci est dû au fait que ce maillage est relativement grossier pour la géométrie de la tête correspondante.

La comparaison entre cette méthode et la méthode des moindres carrées a montré sa supériorité sur plusieurs niveaux, en particulier quand le nombre de dipôles augmente et quand les dipôles sont proches. En outre, la méthode de *Kohn-Vogelius* nécessite dans la majorité des cas que nous avons testés moins d'itérations que la méthode des moindres carrées.

Enfin, nous pouvons encore améliorer les résultats obtenus par la méthode de *Kohn-Vogelius*, en améliorant notamment la résolution des problèmes directs qui interviennent dans le calcul de la fonctionnelle coût et de son gradient, et en utilisant des maillages plus raffinés.

## Chapitre 6

# Synthèse générale

Ce travail de thèse, proposé dans le cadre d'un projet HTSC avec la région de Picardie, a pour objectif de développer des méthodes numériques pour l'identification des sources de l'épilepsie à partir des mesures du potentiel prises par l'Electro-Encéphalo-Graphie (EEG) à la surface de la tête. C'est ce qu'on appelle le problème inverse en EEG.

Comme modèle de source, nous avons considéré une somme finie de dipôles, ainsi le problème inverse en EEG consiste à identifier les paramètres des dipôles qui sont leur nombre, leurs positions et leurs moments. Ce problème non linéaire, a été étudié au chapitre 3, où des résultats d'identifiabilité et de stabilité ont été présentés, ainsi qu'une revue des méthodes de résolution existantes dans la littérature.

Afin de résoudre ce problème, nous avons considéré deux méthodes. Une méthode directe, nommée *méthode "algébrique"* qui est décrite à l'annexe B et une méthode d'optimisation, nommée *méthode de "Kohn-Vogelius"* qui est présentée au chapitre 5.

La méthode "algébrique" [31, 35] consiste à identifier les paramètres du terme source à partir des fonctionnelles dites "de réciprocité" définies à l'aide des fonctions harmoniques convenablement choisies et des données de Cauchy, potentiel et flux, définies sur la surface du cerveau. Cette méthode a été développée numériquement par *V. Pavan* lors de son stage post-doctoral au sein du laboratoire LMAC [37]. Mon travail a ainsi consisté à lui fournir les données du potentiel et du flux sur la surface du cerveau. Cette étape a été faite en résolvant un problème de Cauchy (en EEG) dans le domaine du scalp et du crâne, qui a été présenté au chapitre 4. Pour résoudre ce problème, nous avons appliqué une méthode itérative alternative, initialement proposée par *Kozlov, Maz'ya & Fomin* [70], tout en tenant compte du cadre lié à l'EEG dans lequel est posé ce problème. Nous avons proposé deux approches pour cette méthode, l'approche "successive" qui consiste à résoudre successivement deux problèmes de Cauchy homogènes et l'approche "simultanée" qui consiste à résoudre un problème de Cauchy dans un domaine non homogène. Ces deux approches ont été étudiées théoriquement et un théorème de convergence a été établi. Nous avons développé numériquement ces approches en 3D, ce qui n'a pas encore été fait selon nos connaissances. Des résultats traitant différents cas sur des géométries sphériques et réaliste ont été présentés et ont permis de tirer plusieurs conclusions intéressantes.

Bien que la résolution du problème de Cauchy a été motivée par l'application de la méthode algébrique au problème inverse en EEG, cette résolution est également avantageuse dans d'autres problèmes en EEG. En effet, le calcul du potentiel et du flux sur les différentes couches de la tête s'avère très utile à plusieurs applications médicales.

La méthode d'optimisation, que nous avons proposée pour résoudre le problème inverse en EEG, est basée sur la fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* [69]. Selon nos connaissances, cette méthode n'a pas encore été appliquée à ce problème. Mon travail a consisté à étudier cette méthode et à la développer numériquement. Ceci a fait l'objet du chapitre 5, où nous avons étudié la stabilité de cette méthode, calculé le gradient de la fonctionnelle coût et exposé des résultats numériques, recouvrant plusieurs cas sur des géométries sphériques et réaliste. Une comparaison avec la méthode de moindres carrés, généralement utilisée comme méthode de référence, a montré la supériorité de la méthode de *Kohn-Vogelius*.

Par ailleurs, la résolution du problème de Cauchy en EEG ainsi que l'application de la méthode de *Kohn-Vogelius* ont nécessité la résolution des divers problèmes directs. Pour cette résolution, nous avons choisi la méthode des équations intégrales. En particulier, nous avons utilisé une formulation en potentiel de simple et double couche qui convient à tous les problèmes directs à résoudre. Cette méthode, présentée au chapitre 2, a été validée sur une géométrie sphérique en comparant avec des solutions analytiques.

Plusieurs perspectives à ce travail sont envisagées, parmi elles nous citons les suivantes

- Concernant la résolution du problème de Cauchy en EEG, nous envisagerons l'application d'autres méthodes, notamment la nouvelle formulation variationnelle de Cauchy qui fait intervenir l'opérateur de Steklov Poincaré et qui a été développée par *F. Ben Belgacem* [14, 15]. Cette formulation permet, après discrétisation, d'écrire un problème algébrique symétrique semi-défini positif, qui s'interprète comme la condition d'optimalité du problème de minimisation par la fonctionnelle coût de type *Kohn-Vogelius* écrite pour ce problème de Cauchy. L'avantage de cette approche est de pouvoir utiliser toute l'algèbre linéaire développée pour les problèmes mal-posés et dont la littérature est abondante.
- Pour la résolution du problème inverse par la méthode de *Kohn-Vogelius*, nous tenons à coupler cette méthode avec la méthode "algébrique" en considérant les solutions obtenues par cette dernière comme estimations initiales pour le problème d'optimisation.

En outre, l'introduction d'un paramètre de régularisation sur la fonctionnelle coût de *Kohn-Vogelius* sera étudiée.

- Nous envisagerons également l'utilisation d'une géométrie réaliste plus raffinée et des données cliniques.

Enfin, notons que ce travail, bien qu'il soit appliqué ici aux sources épileptiques, reste généralisable sur d'autres applications en EEG tels que le "potentiel évoqué" ainsi que d'autres modèles physiques régis par les mêmes équations et considérant des sources dipolaires ou monopolaires.

## Annexe A

# Calcul des intégrales élémentaires discrètes

Cet annexe traite le calcul des intégrales régulières et singulières qui apparaissent dans la résolution par les équations intégrales des différents problèmes rencontrés dans ce mémoire et qui sont définis dans (2.3.50).

Pour fixer les idées, nous considérons ici le cas où les deux intégrales des opérateurs  $D_{p,q}^h$  et  $S_{p,q}^h$  (2.3.50) sont définis sur la même surface régulière  $\Gamma$ .

Nous considérons une discrétisation

$$\Gamma^h = \cup_{e=1}^t T_e$$

de cette surface en  $t$  facettes planes triangulaires. Nous posons  $n$  le nombre de noeuds et notons  $(\phi_j)_{j=1,\dots,n}$  les fonctions de base  $\mathbb{P}^1$  (cf chapitre 2).

Nous sommes ainsi amenés à calculer les intégrales suivantes (à constante multiplicative près),

$$\int_{T_k} \int_{T_m} \phi_j(y) \left( \frac{1}{|x-y|} \right) \phi_i(x) dT_m(x) dT_k(y) \quad (\text{A.0.1})$$

$$\int_{T_k} \int_{T_m} \phi_j(y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) \phi_i(x) dT_m(x) dT_k(y) \quad (\text{A.0.2})$$

$$\int_{T_k} \phi_j(y) \phi_i(y) dT_k(y) \quad (\text{A.0.3})$$

Dans la définition suivante nous caractérisons deux triangles "proches" et deux triangles "éloignés".

**Définition 6** *Deux triangles de  $\Gamma^h$  sont déclarés proches s'ils ont au moins un sommet commun. Dans le cas contraire, ils sont suffisamment éloignés.*

**Remarque 10** *Dans le cas où les triangles  $T_k$  et  $T_m$  appartiennent à deux surfaces disjointes, ils sont déclarés proches si la distance entre leurs barycentres est suffisamment petite.*

Pour  $T_k$  et  $T_m$  proches, les intégrales intérieures des équations (A.0.1) et (A.0.2) sont faiblement singulières, dans les autres cas elles sont régulières. Par contre, l'intégrale extérieure dans ces deux équations ainsi que l'intégrale de l'équation (A.0.3) sont régulières. Dans ce cas, nous appliquons la méthode de quadrature de Gauss, avec 16 points par triangle, pour une description détaillée de cette méthode voir [17]. La suite de cet annexe est consacrée au calcul des intégrales singulières.

Puisque  $\phi_i$  est linéaire alors nous avons quatre formes d'intégrales singulières à calculer,

$$\mathcal{I}_1(y) = \int_T \frac{1}{|x-y|} dT(x)$$

$$\mathcal{I}_2(y) = \int_T \frac{x_\alpha}{|x-y|} dT(x)$$

$$\mathcal{I}_3(y) = \int_T \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dT(x)$$

$$\mathcal{I}_4(y) = \int_T \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{x_\alpha}{|x-y|} \right) dT(x)$$

avec  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes pour lever la singularité, pour une revue générale sur ces méthodes nous renvoyons à [29]. Nous avons choisi une méthode analytique décrite dans [46], elle consiste à projeter le point d'observation  $y$  sur le plan du triangle  $T$  et décomposer ensuite l'intégrale en une somme d'intégrales portant sur les triangles formés par le projeté de  $y$  et les sommets de  $T$ , le calcul de ces intégrales se fait après transformation en coordonnées polaires. Nous présentons ici les idées principales de cette méthode, pour une explication détaillée nous renvoyons le lecteur à [46].

### Calcul de l'intégrale $\mathcal{I}_1(y)$

Nous commençons par projeter  $y$  orthogonalement dans le plan de  $T$  dont nous notons les sommets  $S_1, S_2$  et  $S_3$ . Soit  $P$  la projection ainsi obtenue, nous avons

$$yP = \lambda \nu$$

$$\lambda = yS_1 \cdot \nu$$

avec  $\nu$  la normale extérieure au triangle  $T$ .

Nous posons  $h = |yP|$ , donc

$$\mathcal{I}_1(y) = \int_T \frac{1}{\sqrt{h^2 + |x - P|^2}} dT(x) \quad (\text{A.0.4})$$

Plusieurs cas se présentent

1. le point  $P$  est à l'extérieur du triangle (Fig. A.1),
2. le point  $P$  est à l'intérieur du triangle (Fig. A.2),
3. le point  $P$  appartient à l'une des droites engendrées par les arêtes (Fig. A.3),
4. le point  $P$  est un des sommets.

Nous décomposons l'intégrale  $\mathcal{I}_1(y)$  (A.0.4) en une somme d'intégrales du même intégrande sur des triangles de sommet  $P$ . Les signes de ces intégrales dépendent des cas présentés ci-dessus. En notant  $\alpha_i(P), i = 1, 2, 3$  les coordonnées barycentriques du point  $P$  dans le triangle  $S_1S_2S_3$ , nous avons

$$\mathcal{I}_1(y) = \text{sgn}(\alpha_1(P)) \mathcal{I}(PS_2S_3) + \text{sgn}(\alpha_2(P)) \mathcal{I}(PS_3S_1) + \text{sgn}(\alpha_3(P)) \mathcal{I}(PS_1S_2)$$

où la fonction  $sgn$  est définie par :

$$sgn(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

et l'intégrale  $\mathcal{I}(PS_iS_{i+1})$  désigne l'intégrale sur le triangle de sommets  $P, S_i, S_{i+1}$ .

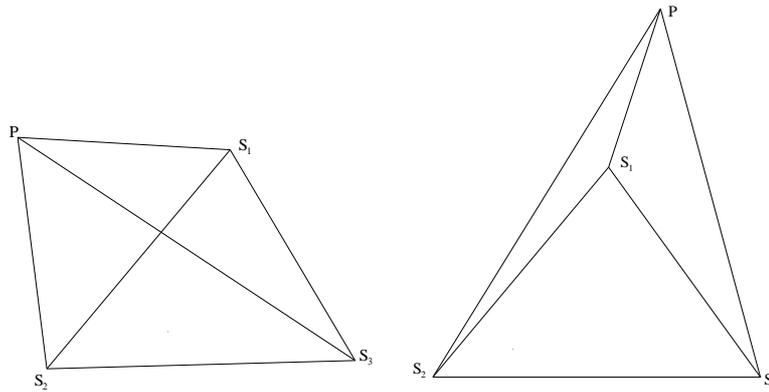


FIG. A.1 – Les Cas où  $P$  est extérieur au triangle

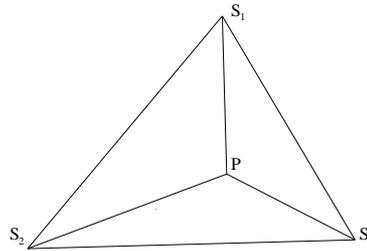


FIG. A.2 – Cas où  $P$  est intérieur au triangle

Nous passons maintenant au calcul de l'intégrale sur le triangle de sommet  $P$ . Pour fixer les idées nous considérons  $S_1$  et  $S_2$  les autres sommets de ce triangle, nous projettons  $P$  sur la droite  $(S_1S_2)$ . Soit  $H$  cette projection, nous avons

$$S_1H = \mu S_1S_2$$

$$\mu = \frac{S_1S_2 \cdot S_1P}{|S_1S_2|^2}$$

Le point  $H$  peut se situer entre les points  $S_1$  et  $S_2$ , ou à l'extérieur du segment  $[S_1S_2]$ , ou encore coïncider avec l'un des sommets  $S_1$  ou  $S_2$ . Sa position va déterminer les signes des contributions des deux intégrales, l'une portant sur le triangle  $(PS_1H)$  et l'autre sur le triangle  $(PS_2H)$ . Pour obtenir les signes des contributions des intégrales, nous utilisons le signe des coordonnées barycentriques de  $H$  par rapport à  $S_1$  et  $S_2$ .

Nous exprimons alors en coordonnées polaires de centre  $P$  l'intégrale à calculer sur le triangle ayant  $P$  et  $H$  comme sommets

$$J_i = \int_0^{\theta_i} \int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

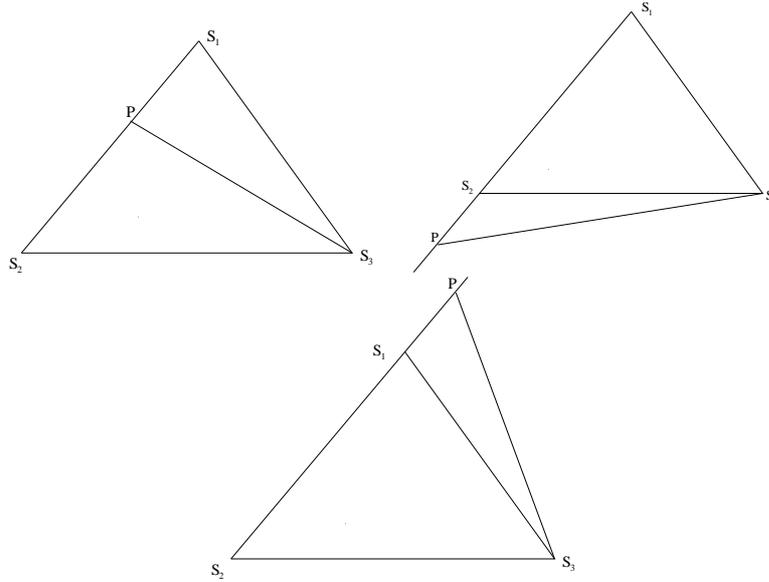


FIG. A.3 – Cas où P appartient à la droite engendrée par une arête du triangle

où  $\rho = |PH|$ .

Après calcul (voir [46]) nous obtenons

$$\begin{aligned} J_i &= K_i - h\theta_i \\ \text{avec} \\ K_i &= [\rho \ln(\sqrt{h^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta} + \rho \tan \theta) + h \text{Arc sin}(\frac{h \sin \theta}{\sqrt{h^2 + \rho^2}})]_0^{\theta_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

**Calcul de l'intégrale  $\mathcal{I}_2(y)$**

$$\mathcal{I}_2(y) = \int_T \frac{x_\alpha}{|x - y|} dT(x) \quad (\text{A.0.6})$$

Nous décomposons cette intégrale en somme de deux intégrales :

$$\mathcal{I}_2(y) = \int_T \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x - y|} dT(x) + y_\alpha \int_T \frac{1}{|x - y|} dT(x) \quad (\text{A.0.7})$$

La deuxième intégrale a déjà été calculée, reste alors à calculer la première intégrale.

Pour cela, nous écrivons

$$\frac{x - y}{|x - y|} = \nabla_x(|x - y|) = \nabla_t(|x - y|) + \frac{\partial}{\partial \nu_x}(|x - y|)\nu_x$$

or

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x}(|x - y|) = \frac{(x - y, \nu_x)}{|x - y|}$$

et  $(x - y, \nu_x) = (x - P, \nu_x) + (P - y, \nu_x) = (P - y, \nu_x) = d$  avec  $d$  constante.

Donc

$$\int_T \frac{\partial}{\partial \nu_x}(|x - y|)\nu_x dT(x) = d \int_T \frac{1}{|x - y|} dT(x) = d\mathcal{I}_1(y) \quad (\text{A.0.8})$$

Pour le calcul du gradient tangentiel, nous reprenons le calcul fait dans [46] :

$$\int_T \partial_i(|x - y|) dT(x) = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i}^{S_{i+1}} |x - y| \nu_i^{i+1} d(S_i S_{i+1})$$

**Calcul de l'intégrale  $\mathcal{I}_3(y)$**

$$\mathcal{I}_3(y) = \int_T \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x - y|} \right) dT(x) \quad (\text{A.0.9})$$

Nous avons,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x - y|} \right) = -\frac{(x - y, \nu_x)}{|x - y|^3}$$

donc nous sommes ramenés au terme suivant,

$$\mathcal{I}_3(y) = \int_T \frac{-(x - y, \nu_x)}{|x - y|^3} dT(x) \quad (\text{A.0.10})$$

Nous appliquons la même méthode avec les mêmes projections, et donc avec les mêmes cas particuliers.

Soit  $P$  la projection orthogonale de  $y$  dans le plan de  $T$ , nous avons alors

$$(x - y, \nu_x) = (x - P, \nu_x) + (P - y, \nu_x) = (P - y, \nu_x).$$

Ici un cas particulier s'ajoute : si  $y = P$  i.e.  $h = |y\vec{P}| = 0$ , alors l'intégrande est nulle car  $(x - y, \nu_x) = 0$ . Nous supposons donc dans la suite que  $h \neq 0$ .

En ce qui concerne le calcul dans chacun des triangles ayant  $P$  comme sommet, il s'agit de l'intégrale suivante

$$J_i = - \int_0^{\theta_i} \int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{h r dr d\theta}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

Le calcul de  $J_i$  est détaillé dans [46] et donne

$$J_i = -hK_i - \theta_i$$

avec

$$K_i = -\frac{1}{h} \left[ \text{Arcsin} \left( \frac{h \sin \theta}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \right) \right]_0^{\theta_i}.$$

**Calcul de l'intégrale  $\mathcal{I}_4(y)$**

$$\mathcal{I}_4(y) = \int_T \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{x_\alpha}{|x - y|} \right) dT(x) \quad (\text{A.0.11})$$

Cette intégrale s'écrit aussi de la manière suivante

$$\mathcal{I}_4(y) = \int_T x_\alpha \frac{-(x - y, \nu_x)}{|x - y|^3} dT(x) \quad (\text{A.0.12})$$

Pour tout  $x$  parcourant le triangle  $T$  nous avons,

$$(x - y, \nu_x) = (P - y, \nu_x) = cte = d$$

donc

$$\mathcal{I}_4(y) = -d \int_T \frac{x_\alpha}{|x - y|^3} dT(x) = -d \int_T \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x - y|^3} dT(x) + y_\alpha \int_T \frac{-(x - y, \nu_x)}{|x - y|^3} dT(x)$$

la deuxième intégrale a déjà été calculée, reste donc à calculer l'intégrale suivante

$$\int_T \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x - y|^3} dT(x)$$

Pour cela, nous écrivons

$$\frac{x - y}{|x - y|^3} = \nabla_x \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) = \nabla_t \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) \nu_x$$

or

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) \nu_x = \frac{(x - y, \nu_x)}{|x - y|^3} \nu_x$$

donc

$$\nu_x \int_T \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) dT(x) = -\nu_x \mathcal{I}_3(y)$$

Ce qui a déjà été calculé.

Calcul du gradient tangentiel [46] :

$$\int_T \partial_t \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) dT(x) = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{-1}{|x - y|} \nu_t^{i+1} d(S_i S_{i+1})$$

Pour  $y$  n'appartenant pas à  $(S_i S_{i+1})$ , nous avons

$$\int_T \partial_t \left( -\frac{1}{|x - y|} \right) dT(x) = \sum_{i=1}^3 -\log \left( \frac{R_{i+1} + R_{i+1} \cdot \tau}{R_i + R_i \cdot \tau} \right) \nu_t^{i+1}$$

et pour  $y$  appartenant à  $(S_i S_{i+1})$ , le log devient :

$$\log \left( \frac{M}{m} \right), \quad \text{où } M = \max(R_{i+1}, R_i), \quad \text{et } m = \min(R_{i+1}, R_i).$$

Pour plus de détails voir [46].

## Annexe B

# Méthode algébrique pour la résolution du problème inverse en EEG

Cet annexe a pour but de présenter la méthode "algébrique" qui a été exposée brièvement au chapitre 3. Nous présentons ici les principales idées de cette méthode, pour les détails et les preuves des différents résultats nous renvoyons à [35, 31].

Nous considérons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u &= F \equiv \sum_{j=1}^m \vec{q}_j \cdot \vec{\nabla} \delta_{S_j} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ u &= f_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{B.0.1})$$

où  $f_1$  et  $g_1$  sont les données de Cauchy obtenues sur la surface  $\Gamma_1$  du cerveau en résolvant un problème de Cauchy (cf chapitre 4).

Nous définissons l'espace des fonctions harmoniques dans  $\Omega_1$

$$\mathcal{H} = \{v \in H^1(\Omega_1), t.q. \Delta v = 0\} \quad (\text{B.0.2})$$

ainsi que l'opérateur de *Reciprocity gap*

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v) = - \int_{\Gamma_1} (f_1 \frac{\partial v}{\partial \nu} - g_1 v) ds \quad (\text{B.0.3})$$

où

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v) = \sum_{j=1}^m q_j \cdot \nabla v(S_j), \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (\text{B.0.4})$$

Pour déterminer  $m$ ,  $q_j$  et  $S_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), nous procédons en deux étapes. D'abord nous projettons ces vecteurs inconnus dans le plan  $(xOy)$  assimilé au plan complexe et nous calculons leurs première et deuxième coordonnées ainsi que le nombre  $m$ . Ensuite nous obtenons la troisième coordonnée en utilisant des fonctions tests appropriées.

Soit

$$q_j = (q_j^1, q_j^2, q_j^3), \quad S_j = (S_j^1, S_j^2, S_j^3)$$

Nous posons

$$Q_j = q_j^1 + iq_j^2, \quad P_j = S_j^1 + iS_j^2 \quad (\text{B.0.5})$$

où  $P_j$  sont supposés distincts deux à deux et les  $Q_j$  non nuls.

Par ailleurs, nous supposons connu un majorant du nombre de sources que nous notons  $M$ .

Nous considérons les fonctions harmoniques suivantes

$$v_k(x, y) = (x + iy)^k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{B.0.6})$$

auxquelles nous appliquons le principe de réciprocité (B.0.4).

En outre, comme  $\nabla v_k = k(x + iy)^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ , nous obtenons

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v_k) = \sum_{j=1}^m k Q_j (P_j)^{(k-1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (\text{B.0.7})$$

Nous définissons ensuite les nombres, les vecteurs et les matrices complexes suivants

$$\alpha_k = \frac{\mathcal{R}(f_1, g_1, v_k)}{k}, \quad \mu_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_{k+M-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M \quad (\text{B.0.8})$$

Nous définissons également les matrices complexes suivantes (de taille  $M \times m$ ), pour tout  $r \in \mathbb{N}$  :

$$A_r = \begin{pmatrix} (P_1)^r & (P_2)^r & \cdots & (P_m)^r \\ (P_1)^{r+1} & (P_2)^{r+1} & \cdots & (P_m)^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (P_1)^{M+r-1} & (P_2)^{M+r-1} & \cdots & (P_m)^{M+r-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.9})$$

D'après ces définitions, nous remarquons :

$$\mu_{r+1} = A_{r+1} \Lambda, \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad (\text{B.0.10})$$

En définissant la matrice complexe diagonale suivante

$$D = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_m \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.11})$$

nous obtenons  $A_{r+1} = A_r D = A_0 D^{r+1}$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}$ , ce qui implique alors

$$\mu_{r+1} = A_0 D^{r+1} \Lambda, \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad (\text{B.0.12})$$

Soit maintenant les matrices suivantes

$$H_M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_M \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_M & \alpha_{M+1} & \cdots & \alpha_{2M-1} \end{pmatrix}, \quad E_m = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_m \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.13})$$

Le nombre de dipôles  $m$  est ainsi donné par la proposition suivante,

**Proposition 6**

$$m = \text{rang}(H_M) \quad (\text{B.0.14})$$

Pour la preuve voir [35, 31].

Donc, maintenant  $m$  est connu et nous remplaçons  $M$  par  $m$  dans toutes les quantités définies ci-dessus.

Puisque  $A_0$  est inversible, alors d'après (B.0.12) nous pouvons écrire  $\mu_{r+1} = A_0 D^r \Lambda = A_0 D(D^{r-1} \Lambda) = A_0 D(A_0^{-1} \mu_r) = A_0 D A_0^{-1} \mu_r$ .

Nous posons  $T = A_0 D A_0^{-1}$ . Cette matrice s'écrit sous la forme suivante,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.15})$$

**Proposition 7**

- $(P_j)_{j=1, \dots, m}$  sont les valeurs propres de la matrice  $T$ .
- Une fois les  $P_j$  sont calculées, les  $Q_j$  s'obtiennent en résolvant le système linéaire  $A_0 \Lambda = \mu_1$ .

Les troisièmes coordonnées des positions  $S_j$  et des moments  $q_j$  sont ensuite construites en utilisant les fonctions suivantes,  $k = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} \rho_k(x, y, z) = z(x + iy - P_k) \prod_{l \neq k}^m (x + iy - P_l)^2 \\ \theta_k(x, y, z) = z \prod_{l \neq k}^m (x + iy - P_l)^2 \end{cases} \quad (\text{B.0.16})$$

nous avons

$$S_{k,3} = \frac{\mathcal{R}(f_1, g_1, \rho_k)}{Q_k \prod_{l \neq k} (P_k - P_l)^2} \quad (\text{B.0.17})$$

et

$$q_{k,3} = \frac{\mathcal{R}(f_1, g_1, \theta_k) - 2S_{k,3} Q_k \sum_{r \neq k} (P_k - P_r) \prod_{l \neq k, l \neq r}^m (P_k - P_l)^2}{\prod_{l \neq k}^m (P_k - P_l)^2}. \quad (\text{B.0.18})$$

Cette méthode a été développée numériquement par *V. Pavan* lors de son stage post-doctoral au sein du laboratoire des mathématiques appliquées à l'université de technologie de Compiègne. Nous présentons ici quelques résultats numériques obtenus sur le maillage *Mesh2* de la géométrie sphérique (cf Tab. 2.1 et Tab. 2.2). Pour une revue complète de ces résultats nous renvoyons le lecteur à [37].

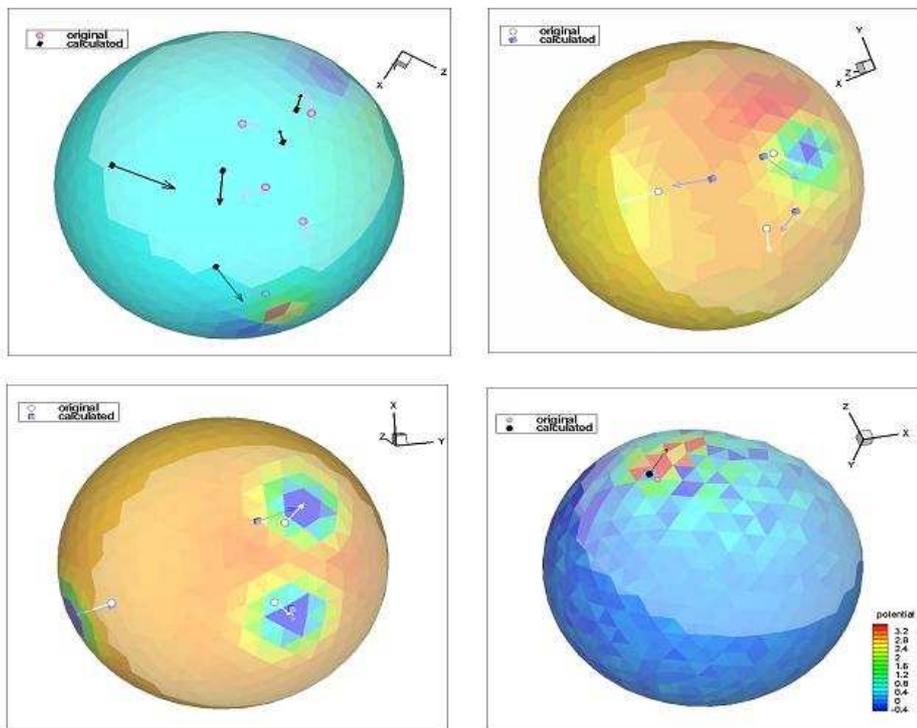


FIG. B.1 – Calcul des positions et des moments des dipôles placés à l'intérieur du cerveau avec des données de Cauchy (3.3.28)  $f_1, g_1$  bruitées. En haut à gauche, c'est le cas d'un terme source formé par 5 dipôles ( $m = 5$ ) et les données  $f_1$  et  $g_1$  sont perturbées de  $p = 0.1\%$ . En haut à droite, c'est le cas de  $m = 3$  et  $p = 1\%$ . En bas à gauche,  $m = 3$  et  $p = 5\%$ . En bas à droite,  $m = 1$  et  $p = 10\%$ .

## Annexe C

# Problème direct de Neumann : calcul des traces normales sur les interfaces

Nous considérons le problème direct de Neumann (2.1.11) défini dans le chapitre 2 que nous réécrivons ci-dessus

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\sigma_i \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega_i, i = 1, 2, 3 \\ [w] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \left[ \sigma \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \sigma_3 \frac{\partial w}{\partial \nu} = g - \sigma_3 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{C.0.1})$$

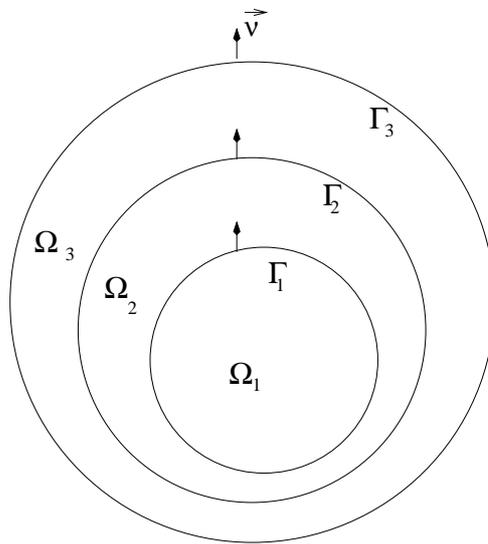


FIG. C.1 – Le domaine  $\Omega$  de la tête

Dans le chapitre 2, la formulation de ce problème en équations intégrales a été présentée, ainsi que le calcul des traces de  $w$  sur les interfaces  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , voir le paragraphe §2.3.1. En utilisant la même formulation, nous présentons dans cet annexe le calcul des traces normales  $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$

et  $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma_2}$ .

Nous notons  $w_i$  la restriction de  $w$  sur  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En appliquant la formule de représentation intégrale (cf théorème 1) à  $w_i$  nous obtenons les équations suivantes

$$C_1(y)w_1(y) = \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_1(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{C.0.2})$$

$$\text{avec } C_1(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega_1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_2(y)w_2(y) &= \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial w_2^-}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_2(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x) \\ &- \int_{\Gamma_1} \left( \frac{\partial w_2^+}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_2(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

$$\text{avec } C_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega_2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_3(y)w_3(y) &= \int_{\Gamma_3} \left( \frac{\partial w_3^-}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_3(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x) \\ &- \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial w_3^+}{\partial \nu_x}(x) G(x-y) - w_3(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x-y) \right) ds(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

$$\text{avec } C_3(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \Omega_3 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous sommes ces trois équations,

$$\forall y \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned} C_1(y)w_1(y) + C_2(y)w_2(y) + C_3(y)w_3(y) &= \int_{\Gamma_1} G(x-y) \left( \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial w_1^+}{\partial \nu}(x) \right) ds \\ + \int_{\Gamma_2} G(x-y) \left( \frac{\partial w_2^-}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial w_2^+}{\partial \nu}(x) \right) ds &- \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) w_3(x) ds + \int_{\Gamma_3} G(x-y) \frac{\partial w_3^-}{\partial \nu}(x) ds \end{aligned}$$

Tenant compte des conditions de transmission (C.0.1), l'équation ci-dessus s'écrit comme suit

$$\forall y \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned} C_1(y)w_1(y) + C_2(y)w_2(y) + C_3(y)w_3(y) &= \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2} \right) \int_{\Gamma_1} G(x-y) \frac{\partial w_1^-}{\partial \nu}(x) ds \\ - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2} \right) \int_{\Gamma_1} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \nu}(x) ds &+ \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3} \right) \int_{\Gamma_2} G(x-y) \frac{\partial w_2^-}{\partial \nu}(x) ds - \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3} \right) \int_{\Gamma_2} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \nu}(x) ds \\ - \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) w_3(x) ds &- \int_{\Gamma_3} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \nu}(x) ds \end{aligned}$$

En écrivant cette équation sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement, nous obtenons

sur  $\Gamma_1$ ,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2}\right) \int_{\Gamma_1} G(x-y) \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(x) ds + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{\Gamma_2} G(x-y) \frac{\partial w_2}{\partial \nu}(x) ds \\ &= w_1(y) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2}\right) \int_{\Gamma_1} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \nu}(x) ds + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{\Gamma_2} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \nu}(x) ds \\ &+ \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) w_3(x) ds + \int_{\Gamma_3} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \nu}(x) ds \end{aligned}$$

sur  $\Gamma_2$ ,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2}\right) \int_{\Gamma_1} G(x-y) \frac{\partial w_1}{\partial \nu}(x) ds + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{\Gamma_2} G(x-y) \frac{\partial w_2}{\partial \nu}(x) ds \\ &= w_2(y) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2}\right) \int_{\Gamma_1} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \nu}(x) ds + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{\Gamma_2} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \nu}(x) ds \\ &+ \int_{\Gamma_3} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) w_3(x) ds + \int_{\Gamma_3} G(x-y) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \nu}(x) ds \end{aligned}$$

Matriciellement ce système d'équations s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} \\ \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3}\right) \frac{\partial w_2}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_{1,3} & -S_{1,3} \\ D_{2,3} & -S_{2,3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ -\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \nu} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2}\right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \nu} \\ \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3}\right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \nu} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C.0.5}$$

Pour la discrétisation de ce système nous appliquons les mêmes techniques présentées dans le chapitre 2.

# Bibliographie

- [1] G. Adde, *Méthodes de traitement d'images appliquées au problème inverse en Magnéto-Electro-Encéphalographie*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [2] G. Adde, M. Clerc, O. Faugeras, R. Keriven, J. Kybic, T. Papadopoulo, *Symmetric BEM formulation for the M/EEG forward problem*, Information Processing in Medical Imaging, C. Taylor and J. A. Noble, Eds., vol. 2732 of LNCS, Springer, 524-535, 2003.
- [3] H. Ammari, H. Kang, *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, Springer, 2004.
- [4] S. Andrieux, T.N. Baranger, A. Ben Abda, *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems **22**, 115-133, 2006.
- [5] A. Aarabi, N. Roche-Labarbe, C. Gondry-Jouet, P. Berquin, V. Moullart, A. Montigny, M. Van Burik, M.E. Meyer, R. Grebe, F. Wallois, *Localisation des sources des graphoéléments épileptiques dans les épilepsie réfractaires de l'enfant : Apport de l'EEG haute résolution*, XVe Congrès de la Société Française de Neurologie Pédiatrique, Amiens, France, 2005.
- [6] M. Azaiez, A. Ben Abda, J. Ben Abdallah, *Revisiting the Dirichlet-to-Neumann solver for data completion and application to some inverse problems*, Int. J. Appl. Math. Mech. **1**, 106-121, 2005.
- [7] S. Baillet, *Vers une imagerie fonctionnelle de l'électrophysiologie corticale modélisation markovienne pour l'estimation des sources de la magnéto/electroencéphalographie et évaluations expérimentales*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI, 1998.
- [8] S. Baillet, L. Garnero, *A bayesian approach to introducing anatomofunctional priors in the EEG/MEG inverse problem*. IEEE Trans. Biomed. Eng. **44** (5), 374-385, 1997.
- [9] S. Baillet, L. Garnero, G. Marin, J.P. Hugonin, *Combined MEG and EEG source imaging by minimization of Mutual Information*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **46**, 522-534, 1999.
- [10] L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J. Leblond, *Recovery of pointwise sources or small inclusions in 2D domains and rational approximation*, Inverse Problems **21**, 51-74, 2005.
- [11] L. Baratchart, J. Leblond, *Hardy approximation to  $L^p$  functions subsets of the circle with  $1 \leq p \leq \infty$* , Constructive Approx. **40**, 41-56, 1998.
- [12] L. Baratchart, J. Leblond, F. Mandrea, E. Saff, *How can the meromorphic approximation help to solve some 2d inverse problems for the laplacian ?*, Inverse Problems **15**, 79-90, 1999.
- [13] J. Baumeister, A. Leitão, *On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations*, I. Inv. Ill-Posed Problems **9** (1), 13 - 29, 2001.
- [14] F. Ben Belgacem, H. El Fekih, *On Cauchy's problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory*, Inverse Problems **21**, 1915-1936, 2005.
- [15] F. Ben Belgacem, H. El Fekih, *On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation*, Inverse Problems **22**, 1307-1336, 2006.

- [16] F. Berntsson, L. Eldén, *Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation*, Inverse Problems **17**, 839-853, 2001.
- [17] M. Bonnet, *Equations intégrales et éléments de frontière*, CNRS Editions/Editions EYROLLES, 1995.
- [18] L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **21**, 1087-1104, 2005.
- [19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson, 1993.
- [20] S. Chaabane, C. Elhechmi, M. Jaoua, *A stable recovery method for the Robin inverse problem*, Math. Comput. Simul **66**, 367-383, 2004.
- [21] S. Chaabane, M. Jaoua, *Identification of Robin coefficients by the means of boundary measurements*, Inverse Problems **15**, 1425-1438, 1999.
- [22] M. Chafik, A. El-Badia, T. Ha-Duong, *On some inverse EEG problems*, Inverse Problems Eng. Mech. **II**, 537-544, 2000.
- [23] J.R. Chang, W.C. Yeih, M.H. Shieh, *On the modified Tikhonov's regularization method for the Cauchy problem of the Laplace equation*, J. Marine Sc. Tech. **9**, 113-121, 2001.
- [24] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons, *Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization*, Inverse Problems **17**, 553-570, 2001.
- [25] M. Clerc, G. Adde, J. Kybic, T. Papadopoulo, J.M. Badier, *In vivo conductivity estimation with symmetric boundary elements*, Int. J. Bioelectromagnetism **7** (1), 2005.
- [26] M. Costabel, V.J. Ervin, E.P. Stephan, *Symmetric coupling of finite elements and boundary elements for a parabolic-elliptic interface problem*, Quarterly of App. Math., **48** (2), 265-279, 1990.
- [27] A. Crouzeix, *Méthodes de localisation des générateurs de l'activité électrique cérébrale à partir de signaux électro et magnéto-encéphalographiques*, Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2001.
- [28] B. N. Cuffin, *Effects of head shape on EEG's and MEG's*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **37**, 44-52, 1990.
- [29] E. Darve, *Méthode multipôles rapides : résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1999.
- [30] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique, Méthodes variationnelles*, Volume 4, Masson, 1988.
- [31] A. El-Badia, *Inverse source problem in an anisotropic medium by boundary measurements*, Inverse Problems **21**, 1787-1806, 2005.
- [32] A. El-Badia, M. Farah, *Identification of dipole sources in an elliptic equation from boundary measurements*, J. Inv. Ill-Posed Problems **14** (4), 331-353, 2006.
- [33] A. El-Badia, M. Farah, T. Ha-Duong, V. Pavan, *Résolution d'un Problème de Cauchy en EEG*, ARIMA **5**, numéro spécial TAMTAM'05, 110-128, 2006.
- [34] A. El-Badia, J. Giroire, T. Ha-Duong, C. Hollandts, V. Pavan, *Problèmes inverses : Application à l'électroencéphalographie*, 38ème CANUM, Morbihan, France 2006.
- [35] A. El-Badia, T. Ha-Duong, *An inverse source problem in potential analysis*, Inverse Problems **16**, 651-663, 2000.
- [36] A. El-Badia, T. Ha-Duong, A. Hamdi, *Identification of point source in a linear advection-dispersion-reaction equation : application to a pollution source problem*, Inverse Problems **21**, 1121-1136, 2005.

- [37] A. El-Badia, F. Wallois, *Une nouvelle approche de localisation de sources en EEG chez l'enfant*, Rapport interne, Université de Technologie de Compiègne, 2005.
- [38] H. W. Engl, A. Leitao, *A Mann iterative regularization method for elliptic Cauchy problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. **22**, 861-884, 2001.
- [39] R.S. Falk, P.B. Monk, *Logarithmic convexity of discrete harmonic functions and the approximation of the Cauchy problem for Poisson's equation*, Math. Comput. **47**, 135-149, 1986.
- [40] [www.fondation-epilepsie.fr](http://www.fondation-epilepsie.fr)
- [41] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermsillo, P. Kornprobst, D. Lingrand, *The inverse EEG and MEG problems : The adjoint state approach I : The continuous case*, Rapport de Recherche No 3673, 1999.
- [42] L. Garnero, S. Baillet, B. Renault, *Magnétoencéphalographie/Electroencéphalographie et imagerie cérébrale fonctionnelle*, Annales de l'Institut Pasteur **9**, 215-226, 1998.
- [43] L. Geddes, L. Baker, *The specific resistance of biological materials - a compendium of data for the biomedical engineer and physiologist*, Med. Biol. Eng. **5**, 271-293, 1967.
- [44] D. B. Geselowitz, *On bioelectric potentials in an homogeneous volume conductor*, Biophysics Journal **7**, 1-11, 1967.
- [45] J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, *Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms*, Math. Prog. **45**, 407-435, 1989.
- [46] J. Giroire, *Mise on oeuvre de méthodes d'éléments finis de frontière*, Cours de DEA, Université de Pierre et Marie-Curie, 1987.
- [47] S.I. Gonçalves, J.C. de Munck, J.P. Verbunt, F. Bijma, R. M. Heethaar, F.L. da Silva, *In vivo measurement of the brain and skull resistivities using an EIT-based method and realistic models for the head*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **50** (6), 754-767, 2003.
- [48] I.G. Graham, W. Hackbusch, S.A. Sauter, *Hybrid Galerkin boundary elements : theory and implementation*, Num. Math. **86** (1), 139-172, 2000.
- [49] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equation*, Dover, 1953.
- [50] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Bull. Univ. of Princeton, 1902.
- [51] M. Hämäläinen, R. Hari, R. J. Ilmoniemi, J. Knuutila, O. V. Lounasmaa, *Magnetoencephalography-theory, instrumentation, and application to noninvasive studies of working human brain*, Rev. Mod. Phys. **65**, 413-497, 1993.
- [52] M. S. Hämäläinen, J. Sarvas, *Realistic conductivity geometry model of the human head for interpretation of neuromagnetic data*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **36**, 165-171, 1989.
- [53] J. Haueisen, C. Ramon, M. Eiselt, *Influence of tissues resistivities on neuromagnetic fields and electric potentials studied with a finite element model of the head*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **44**, 727-735, 1997.
- [54] V. Hédou, *Méthodes numériques pour la modélisation électro-anatomique du cerveau*, Thèse de doctorat, Université de Rennes, 1997.
- [55] V. Hédou-Rouillier, *A finite difference method to solve the forward problem in electroencephalography (EEG)*, J. Comput. App. Math. **167** (1), 35-58, 2004.
- [56] L. Heller, *Return current in encephalography, variational principles*, Biophys. J. **57** (3), 601-606, 1990.

- [57] Y.C. Hon, T. Wei, *Backus-Gilbert algorithm for the Cauchy problem of the Laplace equation*, Inverse Problems **17**, 261-271, 2001.
- [58] [www.infovisual.info](http://www.infovisual.info)
- [59] R. Irimajiri, E. Golob, A. Starr, *Auditory brain-stem, middle- and longlatency evoked potentials in mild cognitive impairment*, Clinical Neurophysiology **116**, 1918-1929, 2005.
- [60] L. Jeannin, V. Moumas, *Evaluation of well performance using the coupling of boundary element with finite element methods*, Comm. Num. Meth. Eng. **11**, 827-833, 2004.
- [61] C. Johnson, J. Nedelec, *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, Math. Comput. **35**, 1063-1079, 1980.
- [62] M. Jourhmane, *thèse : Méthodes numériques de résolution d'un problème d'électro-encéphalographie*, Rennes, 1993.
- [63] M. Jourhmane, D. Lesnic, N.S. Mera, *Relaxation procedures for an iterative algorithm for solving the Cauchy problem for the Laplace equation*, Eng. Anal. Bound. Elements **28** (6), 655-665, 2004.
- [64] M. Jourhmane, A. Nachaoui, *An alternating method for an inverse Cauchy problem*, Num. Algorithms **21**, 247-260, 1999.
- [65] M. Jourhmane, A. Nachaoui, *Convergence of an alternating method to solve the Cauchy problem for Poisson's equation*, Appl. Anal. **81**, 1065-1083, 2002.
- [66] H. Kang, H. Lee, *Identification of simple poles via boundary measurements and an application of EIT*, Inverse Problems **20**, 1853-1863, 2004.
- [67] M.V. Klibanov, F. Santosa, *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation*, SIAM J. Appl. Math. **51**, 1653-1675, 1991.
- [68] R. V. Kohn, A. McKenney, *Numerical determination of a variational method for electrical impedance tomography*, Inverse Problems **6**, 389-414, 1990.
- [69] R. V. Kohn, M. Vogelius, *Relaxation of a variational method for impedance computed tomography*, Comm. Pure Appl. Math **40**, 745-777, 1987.
- [70] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin, *An iterative method for solving the cauchy problem for elliptic equation*, Comput. Math. Phys. **31**, 45-52, 1991.
- [71] R. Kress, *Linear Integral Equations*, second edition, Applied Mathematical Sciences **82**, Springer - Verlag, 1999.
- [72] J. Kybic, M. Clerc, T. Abboud, O. Faugeras, R. Keriven, T. Papadopoulo, *A common formalism for the integral formulations of the forward eeg problem*, IEEE Trans. Med. Imaging **24** (1), 12-28, 2005.
- [73] [www.labos.upmc.fr](http://www.labos.upmc.fr)
- [74] R. Lattès, J.L. Lions, *Méthode de Quasi-réversibilité et Applications*, Dunod, 1967.
- [75] M.M. Lavrent'yev, *Some ill-posed problems of mathematical physics*, Izd. Sibirsk. Otd. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1962.
- [76] [www.lecerveau.mcgill.ca](http://www.lecerveau.mcgill.ca)
- [77] A. Leitão, *An iterative method for solving elliptic Cauchy problems*, Num. Funct. Anal. Optim. **21**, 715-742, 2000.
- [78] L. Lemieux, A. McBride, J. Hand, *Calculation of electric potentials on the surface of a realistic head model by finite differences*, Phys. Med. Biol. **41**, 1079-1091, 1996.
- [79] D. Lesnic, L. Elliott, D.B. Ingham, *An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation*, Eng. Anal. Bound. Elements **20**, 123-133, 1997.

- [80] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volume1, Dunod, 1968.
- [81] D. C. Liu, J. Nocedal, *On the limited memory method for large scale optimization*, Math. Programming **45** (3), 503-528, 1989.
- [82] [www.mni.mcgill.ca](http://www.mni.mcgill.ca)
- [83] P. Maquet, H. Lejeune, V. Pouthas & al., *Brain Activation induced by Estimation of Duration : A PET Study*, Neuroimage **3**, 119-126, 1996.
- [84] G. Marin, C. Guérin, S. Baillet, L. Garnero, G. Meunier, *Influence of skull anisotropy for the forward and inverse problem in EEG : Simulations studies using FEM on realistic head models*, Hum. Brain Map. **6**, 250-269, 1998.
- [85] J. Mattout, *Approches statistiques multivariées pour la localisation de l'activation cérébrale en magnétoencéphalographie et en imagerie par résonance magnétique fonctionnelle*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2002.
- [86] J. W. H. Meijs, O. W. Weier, M. J. Peters, A. V. Oosterom, *On the numerical accuracy of the boundary element method*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **36**, 1038-1049, 1989.
- [87] N.S. Mera, L. Elliott, D.B. Ingham, D. Lesnic, *The boundary element solution of the Cauchy steady state heat conduction problem in an anisotropic medium* Int. J. Num. Meth. Eng. **49**, 481-499, 2000.
- [88] J. C. Mosher, R. M. Leahy, *Source localization using recursively applied and projected (RAP) MUSIC*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **47**, 332-340, 1999.
- [89] J. C. Mosher, R. C. Leahy, P. S. Lewis, *EEG and MEG : forward solutions for inverse methods*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **46**, 245-259, 1999.
- [90] J. C. Mosher, P. S. Lewis, R. M. Leahy, *Multipole dipole modeling and localization from spatial-temporal MEG data*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **39**, 541-557, 1992.
- [91] J. C. Mosher, R. M. Leahy, D. W. Shattuck, S. Baillet, *MEG source imaging using multipolar expansions*, Proceedings of the 16th Conference on Information Processing in Medical Imaging, Springer-Verlag, 15-28, 1999.
- [92] V. Moumas, *Application des méthodes intégrales pour l'évaluation de la performance des puits horizontaux dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- [93] J.C. de Munck, Maria J. Peters, *A Fast Method to Compute the Potential in the Multisphere Model*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **40** (11), 1166-1174, 1993.
- [94] T. Nara , S. Ando, *A projective method for an inverse source problem of the Poisson equation*, Inverse Problems **19**, 55-369, 2003.
- [95] J.C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2000.
- [96] J. Nocedal, *Updating quasi-Newton matrices with limited storage*, Math. Comput. **35**, 773-782, 1980.
- [97] G. Nolte, G. Curio, *Current multipole expansion to estimate lateral extent of neuronal activity : a theoretical analysis*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **47**, 1347-1355, 2000.
- [98] T.F. Oostendorp, J. Delbeke, D.F. Stegeman, *The conductivity of the human skull : results of in vivo and in vitro measurements*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **47** (11), 1487-1492, 2000.
- [99] R. Oostenveld, T.F. Oostendorp, *Validating the boundary element method for forward and inverse eeg computations in the presence of a hole in the skull*, Hum. Brain. Mapp. **17** (3), 179-192, 2002.

- [100] M. Popov, *Data continuation for the explicit solution of an inverse biomagnetic problem*, IEEE Trans. Magnetics **38** (6), 3620-3632, 2002.
- [101] J. Qi-Nian, *A convergence analysis for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems*, Inverse Problems **15**, 1087-1098, 1999.
- [102] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Springer, 1991.
- [103] S. Rush, D. A. Driscoll, *Current distribution in the brain from surface electrodes*, Anesth. Analg. **47**, 717-723, 1968.
- [104] H. A. Schlitt, L. Heller, R. Aaron, E. Best, D. M. Ranken, *Evaluation of boundary element methods for the EEG forward problem : effect of linear interpolation*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **42**, 52-58, 1995.
- [105] D. Schwartz, *Localisation des générateurs intra-cérébraux de l'activité MEG et EEG : évaluation de la précision spatiale et temporelle*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2001.
- [106] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
- [107] N.G. Sepulveda, C.F. Walker, R.G. Heath, *Finite element analysis of current pathways with implanted electrodes*, J. Biomed. Eng. **5**, 41-48, 1983.
- [108] M. Spencer, R. Leahy, J. Mosher, P. Lewis, *Adaptive filters for monitoring localized brain activity from surface potential time series*, Proceedings of 26th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 151-161, 1992.
- [109] E.P. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in  $R^3$* , Math. Nachr. **134**, 21-53, 1987.
- [110] M. Thevenet, O. Bertrand, F. Perrin, T. Dumont, J. Pernier, *The finite element method for realistic head model of electrical brain activities : preliminary results*, Clin. Phys. Physiol. Meas. **12**, 89-94, 1991.
- [111] A.N. Tikhonov , V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston and Sons, 1977.
- [112] [www.u-picardie.fr/labo/UGBM](http://www.u-picardie.fr/labo/UGBM)
- [113] B.D. van Veen, K.M. Buckley, *Beamforming : A versatile approach to spatial filtering*, IEEE ASSP magazine **5** (2), 4-24, 1988.
- [114] [www.wikipedia.fr](http://www.wikipedia.fr)
- [115] C.C. Wood, D. Cohen, B.N. Cuffin, M. Yarita, T. Allison, *Electrical sources in human somatosensory cortex : identification by combined magnetic and potential recordings*, Science **227**, 1051-1105, 1985.
- [116] K. Yamatani , K. Ohnaka, *A reliable estimation method of a dipole for three dimensional Poisson equation*, J. Comp. Appl. Math. **95**, 139-151, 1998.
- [117] Y. Yan, P.L. Nunez, R.T. Hart, *Finite element model of the human head : scalp potentials due to dipole sources*, Med. Biol. Eng. Comp. **29** (5), 475-481, 1991.
- [118] H. Zhou, A. Van Oosterom, *Application of the boundary element method to the solution of anisotropic electromagnetic problems*, Med. Biol. Eng. Comput. **32**, 399-405, 1994.