



**HAL**  
open science

**IMMUNISATION EN BOUCLE FERMEE -  
APPLICATION AU SOUS-MARIN DOUBLE  
COQUE** Identification de l'aimantation à partir de  
mesures du champ magnétique proche

Yannick Vuillermet

► **To cite this version:**

Yannick Vuillermet. IMMUNISATION EN BOUCLE FERMEE - APPLICATION AU SOUS-MARIN DOUBLE COQUE Identification de l'aimantation à partir de mesures du champ magnétique proche. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT: . tel-00374022

**HAL Id: tel-00374022**

**<https://theses.hal.science/tel-00374022>**

Submitted on 7 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





# Remerciements

Je profite de ce mémoire pour remercier toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce projet mais également toutes celles qui m'ont soutenu pendant ces trois enrichissantes années.

Je commence par les membres du jury qui ont accepté, courageusement, de relire mon mémoire portant sur un sujet assez singulier mais que j'espère avoir rendu assez digeste. Je leur suis également reconnaissant d'avoir supporté les contraintes de confidentialité.

Monsieur André Nicolet, Professeur à l'Institut Fresnel de Marseille,

Monsieur Lionel Pichon, Directeur de Recherche au CNRS au Laboratoire de Génie Electrique de Paris,

Monsieur Pascal Brochet, Professeur à l'école Centrale de Lille,

Monsieur Laurent Demilier, Ingénieur d'étude, Responsable de la discrétion magnétique des navires à DCNS Brest,

Monsieur Olivier Chadebec, Chargé de Recherche au CNRS au Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble,

Monsieur Gilles Cauffet, Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier.

Mes remerciements vont également à tous les membres de l'Equipe de Recherche en Champ Magnétique Faible du G2Elab, en commençant par mon directeur de thèse Jean-Louis Coulomb dont les connaissances dans tous les domaines de la modélisation en Génie Electrique me surprendront toujours et dont l'expérience et l'esprit de synthèse m'ont été précieux.

Vient ensuite le grand spécialiste de la méthode des moments et des problèmes inverses, sans qui rien n'aurait été possible : Olivier Chadebec, qui m'a fait confiance après mon projet de fin d'études et m'a proposé ce sujet de thèse passionnant. Ses qualités de numéricien et son background sur l'identification de l'aimantation des navires ont été d'un impressionnant secours.

Je tiens, évidemment, à remercier Gilles Cauffet, le spécialiste capteur et mesure, à qui l'avancement de la maquette doit beaucoup, grâce à son sens pratique et à sa débordante énergie.

Je pense également à la touche féminine de l'équipe, grande théoricienne du magnétisme du navire, Laure-Line Rouve, ainsi qu'à ses surpuissants diagrammes d'aimantation et à sa bonne humeur communicative.

Enfin, je remercie mon fidèle compagnon de bureau, Arnaud, le spécialiste en corrosion, avec qui l'entente a été parfaite, pour nos discussions footballistiques, jeux-video,... et, parfois, sur la meilleure façon de résoudre un problème inverse. Je remercie également Florian, pour ses grandes compétences en mécanique qui ont permis, en grande partie, le succès de la validation expérimentale, Antoine, qui s'est attaqué à l'épineux problème de la magnétostriction en champ faible et qui m'a initié aux sciences fondamentales, et Philippe qui m'a aidé sur la partie primordiale des capteurs.

Je n'oublie évidemment pas le regretté Jean-Paul Bongiraud, l'âme du magnétisme du navire et père spirituel de l'équipe par ses connaissances infinies sur le magnétisme. Ses qualités humaines et sa grande disponibilité en faisaient un ami précieux. Sa disparition nous a tous beaucoup touchés.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à l'équipe de Discrétion Electromagnétique Sous-Marine de DCNS qui a financé ce projet : à Laurent Demilier, excellent coordinateur, infatigable relais entre Grenoble et Brest et toujours de bonne humeur, à Dominique Saliou, pour la conception de la maquette, et Christophe Durand, pour les parties capteur et matériau.

Merci également à Stefan Mayer qui a fait preuve d'une réactivité exemplaire vis à vis de nos besoins en capteurs magnétiques miniatures et qui a apporté un support inestimable.

Il me reste bien sûr à remercier tous mes collègues thésards pour tous les bons moments que j'ai passé au G2Elab : Edouard, Matthieu, Benjamin, Maxime, Stéphane, Louis, Gilles,... Mes amis proches que je connais depuis longtemps et évidemment ma famille pour son éternel soutien et sa large présence lors de ma soutenance.

Enfin un grand merci à Anne, qui a fait preuve d'une grande patience et qui m'a toujours soutenu. Je lui dois beaucoup.

*A Jean-Paul,  
A mon cousin Benoît,*

# **Table des matières**



# Table des matières

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>3</b>
<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>7</b>
<b>CHAPITRE I : LE MAGNETISME DU NAVIRE ET L'IMMUNISATION EN BOUCLE FERMEE .....</b>	<b>13</b>
I INTRODUCTION AU MAGNETISME DU NAVIRE.....	13
II LE RISQUE MAGNETIQUE .....	13
III LES AIMANTATIONS DU NAVIRE.....	14
<i>III.1 L'origine du magnétisme.....</i>	<i>14</i>
<i>III.2 Les hypothèses du magnétisme du navire.....</i>	<i>17</i>
III.2.1 Approximation de la loi de comportement en champ faible : loi de Rayleigh .....	17
III.2.2 Les champs inducteurs et les matériaux du magnétisme du navire .....	17
<i>III.3 Les aimantations du navire et leurs variations.....</i>	<i>18</i>
III.3.1 Aimantation permanente.....	18
III.3.2 L'aimantation rémanente .....	20
III.3.3 Aimantation d'équilibre.....	20
III.3.4 Aimantation induite.....	20
III.3.5 Aimantation totale.....	21
III.3.6 Conclusion.....	21
IV LES TECHNIQUES DE MINIMISATION DE L'ANOMALIE MAGNETIQUE .....	21
<i>IV.1 Le traitement magnétique.....</i>	<i>22</i>
<i>IV.2 L'immunisation.....</i>	<i>22</i>
IV.2.1 Principe.....	22
IV.2.2 Réglage des courants dans les boucles.....	23
<i>IV.3 L'immunisation en boucle fermée.....</i>	<i>25</i>
IV.3.1 Principe.....	25
IV.3.2 Etat de l'art en France.....	27
IV.3.3 Etat de l'art de l'immunisation en boucle fermée à l'étranger .....	29
IV.3.4 L'immunisation en boucle fermée appliquée aux sous-marins double coque .....	30



**CHAPITRE II : METHODES DIRECTES : CALCUL DES AIMANTATIONS INDUITES ..... 33**

I	INTRODUCTION .....	33
II	LES EQUATIONS DE LA MAGNETOSTATIQUE.....	34
II.1	<i>Les équations à résoudre</i> .....	34
II.2	<i>La formule de Biot et Savart</i> .....	35
II.3	<i>Lien entre l'induction et le champ magnétique</i> .....	35
II.4	<i>Introduction du champ réduit ou champ démagnétisant</i> .....	35
II.4.1	Le champ réduit .....	35
II.4.2	Le potentiel scalaire.....	36
II.4.3	Discussion.....	36
II.5	<i>Les conditions aux limites</i> .....	37
II.5.1	Interface air/matériau.....	37
II.5.2	A l'infini.....	38
II.6	<i>Les équations d'une tôle ferromagnétique</i> .....	38
II.6.1	Les hypothèses .....	39
II.6.2	Mise en équation .....	39
II.6.3	Les conditions aux limites.....	39
II.7	<i>Conclusion</i> .....	40
III	LES METHODES DE RESOLUTION .....	40
III.1	<i>Les méthodes locales</i> .....	40
III.1.1	La méthode des éléments finis .....	40
III.1.2	Les méthodes intégrales de frontières .....	41
III.2	<i>Les méthodes globales</i> .....	41
III.2.1	Distribution surfacique de charges.....	42
III.2.2	Distribution d'aimantation .....	46
III.2.3	Validations numériques .....	49
III.2.4	Distribution de potentiel scalaire magnétique.....	55
III.2.5	Validations numériques .....	60
III.2.6	Discussion sur ces trois formulations.....	65
IV	LA GENERATION DE MESURES.....	67
IV.1	<i>Génération d'aimantation globale</i> .....	68
IV.2	<i>Génération par l'aimantation</i> .....	68
IV.3	<i>Génération par les potentiels magnétiques scalaires</i> .....	69
IV.4	<i>Validité théorique de la méthode de génération de mesures</i> .....	69
IV.5	<i>Validations expérimentales</i> .....	70
IV.6	<i>Génération d'aimantation locale</i> .....	71
V	CONCLUSION .....	72

**CHAPITRE III : METHODES INVERSEES : IDENTIFICATION DE L'AIMANTATION DE TOLES MINCES FERROMAGNETIQUES A PARTIR DE MESURES PROCHES..... 75**

I	INTRODUCTION .....	75
II	DEFINITION D'UN PROBLEME INVERSE .....	76
II.1	<i>Problème inverse : vision informelle</i> .....	76

II.2	<i>Problème inverse et problème inverse magnétostatique : formalisation mathématique.....</i>	76
II.2.1	La paramétrisation du système.....	76
II.2.2	Les problèmes bien et mal posés.....	77
II.2.3	Définition.....	77
II.2.4	Le problème inverse magnétostatique.....	78
II.2.5	Point de vue algébrique.....	78
II.3	<i>Conclusion.....</i>	80
III	LES METHODES D'INVERSION SANS INFORMATION A PRIORI .....	80
III.1	<i>La méthode des moindres carrés.....</i>	81
III.1.1	Résultats préliminaires.....	81
III.1.2	Principe de la méthode.....	81
III.1.3	Expression de la solution pour le problème inverse sous-déterminé.....	82
III.1.4	Conclusion.....	83
III.2	<i>La décomposition en valeurs singulières.....</i>	84
III.2.1	Définition.....	84
III.2.2	Application à la résolution d'un problème inverse .....	84
III.2.3	Conditionnement et stabilité.....	86
III.2.4	Conclusion.....	87
IV	LES METHODES D'INVERSION AVEC INFORMATION A PRIORI.....	87
IV.1	<i>Problème conditionnellement bien-posé.....</i>	88
IV.2	<i>L'ajout d'informations physiques certaines.....</i>	89
IV.3	<i>La troncature du spectre.....</i>	89
IV.4	<i>La régularisation de Tikhonov.....</i>	90
IV.5	<i>L'inversion bayésienne.....</i>	91
IV.5.1	Introduction.....	91
IV.5.2	Rappel sur la loi normale.....	92
IV.5.3	La fonction de vraisemblance.....	92
IV.5.4	Théorème de Bayes : définition et intérêt.....	93
IV.5.5	Maximum a posteriori.....	94
IV.5.6	Lien avec la régularisation de Tikhonov .....	95
IV.6	<i>Conclusion.....</i>	96
V	FORMULATIONS INVERSES DES METHODES GLOBALES .....	96
VI	CONCLUSION .....	97
<b>CHAPITRE IV : VALIDATIONS NUMERIQUES ET EXPERIMENTALES SUR UNE MAQUETTE DE SOUS-MARIN DOUBLE COQUE.....</b>		<b>101</b>
I	INTRODUCTION .....	101
II	LE LABORATOIRE DE METROLOGIE MAGNETIQUE EN CHAMP FAIBLE .....	101
III	LA MAQUETTE DE SOUS-MARIN DOUBLE COQUE .....	102
III.1	<i>Géométrie.....</i>	102
III.2	<i>Capteurs magnétiques.....</i>	105
III.2.1	Mesures internes.....	105
III.2.2	Signature.....	106
III.3	<i>Physique.....</i>	108

IV	LES ETATS D'AIMANTATION DE LA MAQUETTE .....	109
V	VALIDATIONS NUMERIQUES PREALABLES SUR MAQUETTE .....	110
V.1	<i>Description des états d'aimantation simulés de la maquette</i> .....	110
V.1.1	Etat simulé 1 : coque interne seule : aimantation quelconque.....	110
V.1.2	Etat simulé 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe.....	110
V.2	<i>Identification de l'état d'aimantation</i> .....	111
V.2.1	Etat simulé 1 : coque interne seule : aimantation quelconque.....	112
V.2.2	Etat simulé 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe.....	114
V.3	<i>Conclusion</i> .....	117
VI	VALIDATIONS EXPERIMENTALES SUR MAQUETTE .....	118
VI.1	<i>Mesures d'induit</i> .....	118
VI.1.1	Signature.....	118
VI.1.2	Capteurs internes.....	119
VI.2	<i>Description des états d'aimantation réels de la maquette</i> .....	120
VI.2.1	Etat réel 1 : coque interne seule : aimantation quelconque.....	120
VI.2.2	Etat réel 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe	120
VI.2.3	Mise à l'équilibre de la coque interne.....	120
VI.3	<i>Identification de l'état d'aimantation</i> .....	121
VI.3.1	Etat réel 1 : coque interne seule : aimantation quelconque.....	121
VI.3.2	Etat réel 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe	121
VII	CONCLUSION.....	124
<b>CHAPITRE V : CONCLUSION GENERALE.....</b>		<b>127</b>
<b>ANNEXES.....</b>		<b>131</b>
I	PRECISIONS SUR LES AIMANTATIONS TOTALE, INDUITE, PERMANENTE ET REMANENTE .....	131
II	POTENTIEL SCALAIRE MAGNETIQUE CREE PAR LES DIFFERENTES DISTRIBUTIONS .....	132
III	EQUIVALENCE VOLUME AIMANTE/CHARGES.....	133
IV	L'ORIGINE DU POTENTIEL DANS LA METHODE $\varphi$ .....	134
V	CONTINUTE DE LA COMPOSANTE TANGENTIELLE DE L'AIMANTATION DANS LA METHODE $\varphi$ .....	136
VI	PROCEDURE DE CALCUL DES INTEGRALES DE LA METHODE DIRECTE EN POTENTIEL .....	137
VI.1	<i>Intégration des nœuds n'appartenant pas à l'élément d'intégration</i> .....	137
VI.1.1	Cas des triangles.....	137
VI.1.2	Cas des quadrangles .....	137
VI.2	<i>Intégration des nœuds appartenant à l'élément d'intégration</i> .....	138
VI.2.1	Cas des triangles.....	138
VI.2.2	Cas des quadrangles .....	140
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>		<b>145</b>

**Chapitre I :**  
**Le magnétisme du navire et**  
**l'immunisation en boucle fermée**



# Chapitre I : Le magnétisme du navire et l'immunisation en boucle fermée

## I Introduction au magnétisme du navire

Si le développement des mines à déclenchement magnétique date de l'entre-deux-guerres, l'histoire du magnétisme du navire ne commence véritablement qu'à l'aube de la seconde guerre mondiale avec le mouillage de mines magnétiques dans les eaux anglaises par la Luftwaffe pendant la drôle de guerre, à la fin de l'année 1939. Elles causeront des dégâts considérables qui pousseront les marines à imaginer de nouvelles méthodes de dragage et de contre-mesure.

La marine française se sensibilisa à cette nouvelle forme de risque naval sous l'égide du père du magnétisme du navire : Louis Néel. Face à l'urgence et à la gravité de la situation, il imagina de compenser l'aimantation des bâtiments, induite par le champ magnétique terrestre, par une aimantation permanente, de sens opposé, afin d'annuler l'anomalie magnétique et de paraître invisible aux capteurs magnétiques des mines. Cette méthode, appelée plus tard traitement magnétique, fut utilisée avec un grand succès lors de la fuite "héroïque" des alliés, acculés à Dunkerque, en 1940.

Dès lors, le magnétisme du navire et la discrétion magnétique n'ont cessé d'être des préoccupations importantes de toutes les marines du monde. C'est l'une des raisons d'être du service Environnement Militaire de DCNS (ex-Direction des Constructions Navales), qui finance ces travaux, et de l'Equipe de Recherche Technologique en Champ Magnétique Faible (ERT CMF) du Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble (G2Elab), équipe qui fait suite au Laboratoire du Magnétisme du Navire créé en 1948 par Louis Néel.

## II Le risque magnétique

Dans le domaine de la construction navale, l'acier n'a pas d'équivalent en terme de coûts et de performances (robustesse et facilité d'usinage en particulier). Il est utilisé massivement pour la coque mais également pour les ponts, les cloisons, les moteurs et une

multitude de structures que nous appellerons de manière générique : masses internes<sup>1</sup>. Cependant, cela ne va pas sans poser des problèmes, l'acier étant un matériau ferromagnétique, il s'aimante fortement en présence de champs magnétiques et en particulier dans le champ magnétique terrestre. Le navire se comporte alors comme un aimant qui crée une anomalie importante du champ terrestre (Fig. I.1). Elle constitue la principale source d'indiscrétion électromagnétique.

Cette anomalie présente deux risques majeurs pour la sécurité des bâtiments et de leurs équipages. Le premier, déjà cité, est le risque mine : en effet, les mines modernes sont dites multi-influences et leurs mises à feu reposent sur de complexes algorithmes de décision (pour ne pas se faire leurrer par les dragueurs et chasseurs de mines) prenant en compte des mesures acoustiques, dépressionnaires et magnétiques entre autres. La décision ultime de mise à feu repose néanmoins, généralement, sur une information magnétique. Le deuxième risque majeur est spécifique aux sous-marins et consiste en une détection aéroportée (MAD pour Magnetic Anomaly Detection). Il s'agit notamment de la seule méthode de détection d'un sous-marin posé sur le fond de l'océan et dont tous les systèmes sont coupés (aucun son émis, pas de rayonnement électromagnétique dynamique). L'évolution des techniques de localisation et les progrès réalisés sur les mines font que la discrétion magnétique est toujours un sujet d'actualité.

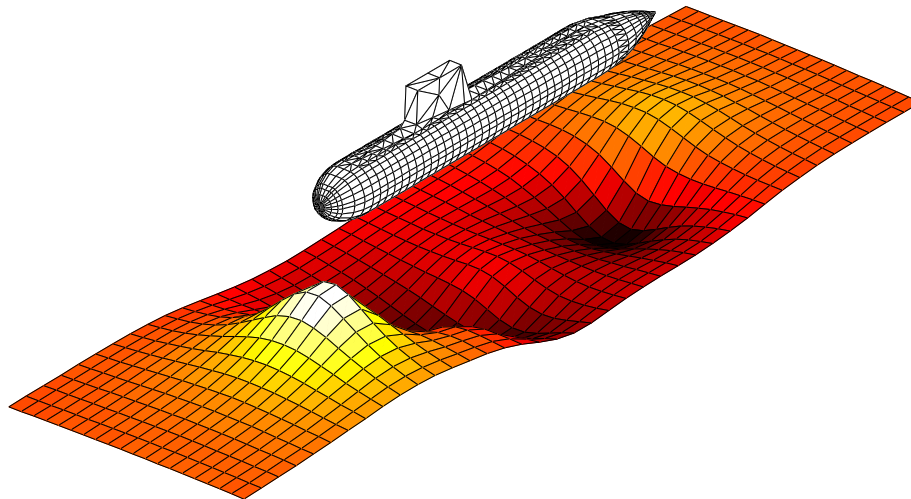


Figure I.1. Module de l'anomalie magnétique d'un sous-marin sur un plan de référence

### III Les aimantations du navire

#### III.1 L'origine du magnétisme

Dans ce chapitre, nous avons uniquement l'ambition de décrire très brièvement l'origine du magnétisme aux différentes échelles. On pourra se reporter à la référence [BRISSENEAU 97] pour de plus amples précisions.

---

<sup>1</sup> L'acier n'est cependant pas le seul matériau utilisé pour la réalisation des coques. Citons notamment l'utilisation du titane par les chantiers navals russe ; ce matériau présente l'avantage d'être très résistant, ce qui autorise une profondeur de plongée supérieure, et également une très faible susceptibilité magnétique. Cependant, son coût prohibitif, de l'ordre de 1000 fois celui de l'acier, le cantonne en général à quelques pièces particulières.

L'origine microscopique du magnétisme repose sur les mouvements des électrons : mouvement dans le nuage électronique de l'atome, responsable du magnétisme orbital, et mouvement de rotation de l'électron sur lui-même, responsable du magnétisme de spin. De ces mouvements d'électrons résultent la création de moments magnétiques atomiques. Dans les matériaux ferromagnétiques (fer, acier, cobalt,...), les moments magnétiques atomiques tendent à s'orienter parallèlement les uns aux autres sous l'effet d'une interaction d'échange (d'origine principalement électrostatique).

A l'échelle mésoscopique, la compétition entre les forces d'échanges et les forces de Coulomb engendre une structure en domaines élémentaires : les domaines de Weiss. Cette structure tend à minimiser l'énergie interne du système. A l'intérieur d'un domaine, les moments magnétiques atomiques sont maintenus parallèles par les forces d'échanges, de telle sorte que chaque domaine se présente comme un petit volume aimanté à saturation. Les domaines diffèrent par l'orientation de l'aimantation de chacun d'eux et sont séparés par des parois appelées paroi de Bloch.

Macroscopiquement, un élément de volume comporte suffisamment de domaines élémentaires pour que l'aimantation soit considérée comme une grandeur statistique continûment variable. Les matériaux ferromagnétiques sont ainsi caractérisés par leur grande facilité à s'aimanter fortement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur et éventuellement par leur capacité à garder une aimantation importante même après suppression de ce champ.

Illustrons le phénomène d'aimantation d'un matériau ferromagnétique. Supposons que nous disposions d'un matériau parfaitement désaimanté, ce qui revient à dire que ses domaines de Weiss ne présentent aucune direction privilégiée. Macroscopiquement, leurs effets se compensent et s'annulent (Fig. I.2). L'application d'un champ magnétique extérieur de faible amplitude (nous verrons un peu plus loin ce que faible signifie) a pour conséquence de déplacer de manière réversible les parois de Bloch. Autrement dit, si l'on supprime le champ extérieur, les parois de Bloch retournent dans leurs positions initiales. Le déplacement des parois de Bloch se fait de manière à aligner les domaines de Weiss sur le champ magnétique interne  $\mathbf{H}$  du matériau. Une augmentation plus importante du champ extérieur a pour conséquence de déplacer de manière irréversible les parois. L'énergie communiquée au système est cette fois suffisante pour le faire sortir du puit de potentiel dans lequel il se trouvait et pour le faire aller dans un autre. Si le champ est annulé, l'aimantation  $\mathbf{M}$  va se stabiliser dans un minimum local d'énergie différent du minimum initial. Enfin, sous l'application d'un champ très intense, la plupart des parois de Bloch disparaissent et tous les domaines sont alignés dans la même direction. L'aimantation atteint son maximum que l'on appelle la saturation. Une augmentation supplémentaire du champ n'aura plus d'incidence sur l'aimantation.

On pourrait croire que la connaissance du couple  $(\mathbf{H}, \mathbf{M})$  en tout point du matériau suffise à le caractériser entièrement. Ce n'est pourtant pas le cas, il est nécessaire de connaître la manière dont le matériau a atteint cet état : l'évolution de l'état magnétique est dépendante de son passé. Les matériaux magnétiques gardent la mémoire de tous leurs états d'aimantation antérieurs par l'intermédiaire des domaines élémentaires. Ce phénomène est appelé hystérésis. D'après le paragraphe précédent, on comprend qu'il est possible d'effacer le passé magnétique du matériau en le plaçant à saturation.

Le cycle d'hystérésis limite (Fig. I.3) comprend l'ensemble des états magnétiques possibles du matériau. Il est obtenu par application quasi-statique d'un champ variant entre  $\mathbf{H}_{\max}$  et  $-\mathbf{H}_{\max}$  permettant d'obtenir l'aimantation à saturation. Précisons deux points remarquables de ce cycle :



- Le champ coercitif  $H_c$  : il désigne l'intensité du champ magnétique qu'il est nécessaire d'appliquer, à un matériau ayant initialement atteint son aimantation à saturation, pour annuler l'aimantation du matériau.
- L'aimantation rémanente maximale  $M_r \max$  : il s'agit de l'aimantation maximale en l'absence de champ magnétique  $H$ .

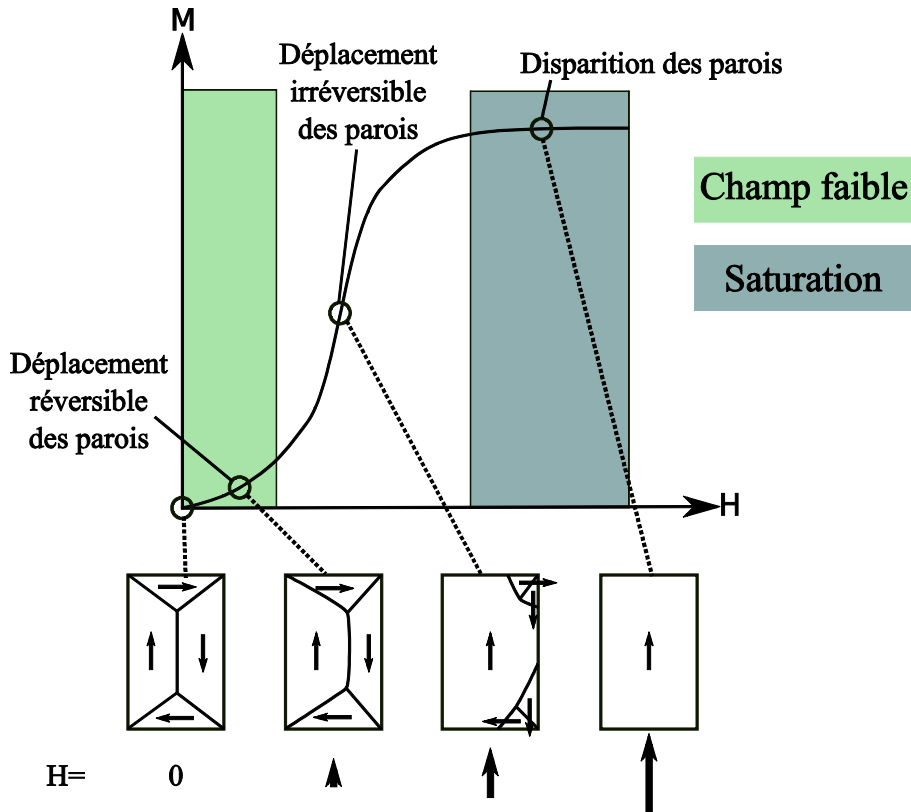


Figure I.2. Les phases du processus d'aimantation

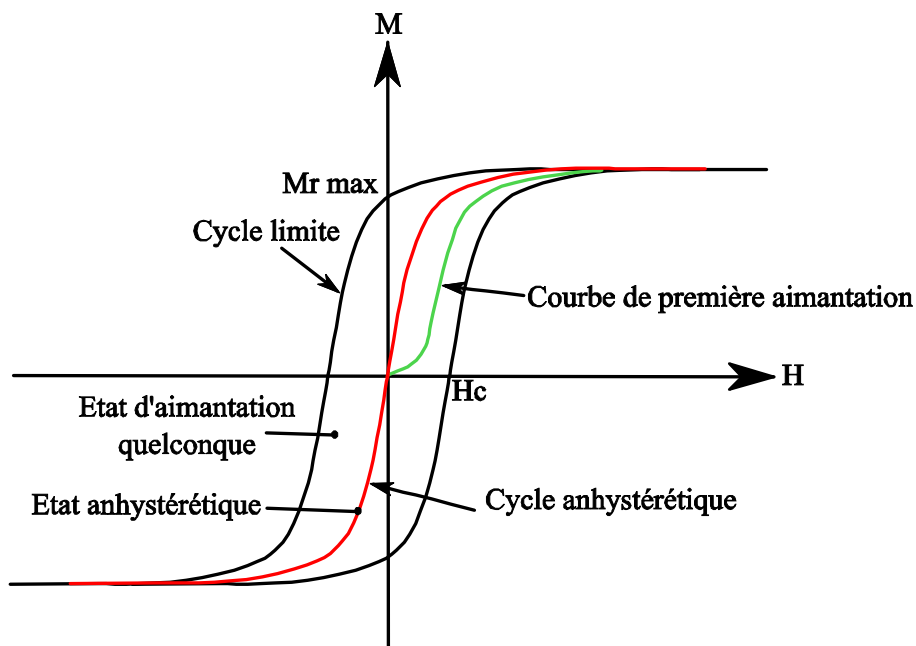


Figure I.3. Cycle d'hystérésis typique

## III.2 Les hypothèses du magnétisme du navire

### III.2.1 Approximation de la loi de comportement en champ faible : loi de Rayleigh

En 1887, Lord Rayleigh montre expérimentalement le lien entre l'aimantation et le champ magnétique dans le domaine des champs magnétiques faibles. Supposons que le matériau soit dans un état connu ( $\mathbf{H}, \mathbf{M}$ ), si le champ  $\mathbf{H}$  augmente légèrement pour atteindre la valeur  $\mathbf{H}_1$ , l'aimantation  $\mathbf{M}_1$  qui en résulte peut-être calculée par l'expression suivante :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \chi(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}) + \frac{\nu}{2}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H})^2 \quad \text{I.1}$$

Inversement, si le champ diminue légèrement pour atteindre la valeur  $\mathbf{H}_2$ , l'aimantation se calcule par :

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M} + \chi(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}) - \frac{\nu}{2}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H})^2 \quad \text{I.2}$$

Les termes  $\chi$  et  $\nu$  sont des constantes dépendantes du matériau et indépendantes du champ si celui-ci reste faible. Le terme linéaire représente la partie réversible de l'aimantation tandis que le terme au carré représente la partie irréversible. En pratique, dans le domaine du magnétisme du navire, les valeurs du champ magnétique et du coefficient  $\nu$  sont telles que l'on néglige le terme quadratique. Pour faire un lien avec le paragraphe précédent, cette équation traduit le déplacement réversible des parois de Bloch. Notons enfin que la relation linéaire (ou affine) de l'aimantation et du champ magnétique n'est valable que pour les champs faibles c'est-à-dire ne dépassant pas 1/20 du champ coercitif du matériau.

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \chi(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}) \quad \text{I.3}$$

Dans la suite, le paramètre  $\chi$  est appelé susceptibilité magnétique du matériau.

### III.2.2 Les champs inducteurs et les matériaux du magnétisme du navire

Les matériaux typiques des navires sont des aciers durs écrouis (par exemple le 80HLES) qui présentent des susceptibilités magnétiques de l'ordre de la centaine, un champ coercitif compris entre 300 et 800 A.m<sup>-1</sup> et une aimantation à saturation de l'ordre de 1,5 Tesla. Cette dernière valeur n'a cependant pas beaucoup d'intérêt dans le domaine du magnétisme du navire puisque que nous restons toujours très loin de la saturation.

Les champs inducteurs sont, évidemment, les différents champs terrestres accessibles sur le globe. Le module de ce champ varie globalement entre 20 A.m<sup>-1</sup> à l'équateur et jusqu'à 50 A.m<sup>-1</sup> aux pôles. Par exemple, les valeurs typiques dans la direction Nord/Sud en France sont : une composante longitudinale de 18 A.m<sup>-1</sup> et une composante verticale de 32 A.m<sup>-1</sup>. Comparativement au 20<sup>ème</sup> du champ coercitif, ces différentes valeurs de champs peuvent sembler à la limite de l'acceptable, cependant nous verrons dans le chapitre suivant que le champ interne à la tôle est toujours plus faible que le champ extérieur en raison des champs démagnétisants. C'est pourquoi nous considérerons que la loi de Rayleigh linéaire est applicable dans le domaine du magnétisme du navire.

### III.3 Les aimantations du navire et leurs variations

Comme nous l'avons déjà dit, chaque point d'un matériau ferromagnétique se trouve dans un état magnétique ( $\mathbf{H}, \mathbf{M}$ ) à l'intérieur du cycle limite. L'aimantation  $\mathbf{M}$  dépend de l'histoire magnétique du matériau et est donc à priori quelconque. Nous pouvons quand même distinguer dans l'aimantation des composantes particulières : l'aimantation permanente et l'aimantation induite ainsi qu'un état stable particulier : l'aimantation d'équilibre ou anhystérétique.

#### III.3.1 Aimantation permanente

L'aimantation permanente est l'aimantation du matériau quand il est plongé dans un champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  nul. Cette aimantation représente un minimum local d'énergie. Par conséquent, il s'agit d'un état plus ou moins stable qui peut évoluer vers un autre état stable moyennant un apport énergétique suffisant. Comme son nom ne l'indique pas, l'aimantation permanente varie !

Nous avons vu que le champ magnétique permet de modifier la répartition des domaines de Weiss du matériau : le champ peut donc être considéré comme une contrainte de type magnétique s'exerçant sur les parois. Ces modifications des parois créent une réaction à cette contrainte par une variation d'aimantation. Ainsi, il est assez naturel de penser que d'autres types de contraintes vont pouvoir modifier l'état magnétique d'un matériau.

##### a - Les variations par contraintes mécaniques

L'état magnétique d'un matériau dépend intimement des contraintes mécaniques qu'il subit (et qu'il a subi en raison de la mémoire magnétique). Les interactions entre magnétisme et mécanique sont regroupées sous le terme de magnétostriction. On distingue habituellement deux effets principaux :

- l'effet Joule qui consiste en une modification mécanique (par exemple un allongement) d'un matériau sous l'effet d'un champ magnétique
- l'effet Villari, qui est le dual du premier, et qui se manifeste par une modification de l'aimantation sous l'effet d'une contrainte mécanique.

Bien sûr, c'est l'effet Villari qui nous intéresse dans le cadre du magnétisme du navire : l'aimantation permanente du navire va varier sous l'effet de contraintes mécaniques. En revanche, une variation significative de longueur d'un navire sous l'effet d'un champ magnétique de très faible amplitude semble assez improbable.

Ces contraintes mécaniques peuvent se manifester sous différentes formes : effet de la houle [MONPETIT 1962], collision (au port par exemple), choc ou tir de canon. Remarquons que ces effets sont imprévisibles, pour les trois premiers, et également très difficilement mesurables. Une autre forme de contrainte mécanique est l'effet de pression qui s'applique tout particulièrement aux sous-marins. Dans ce cas, et à condition que l'on dispose de modèles magnétostrictifs suffisants, la variation d'aimantation est prévisible. Malheureusement, l'étude de la magnétostriction dans le domaine des faibles champs et des fortes contraintes est encore balbutiante [JILES 1995]. Les connaissances existantes sur les relations entre magnétisme et mécanique concernent quasi exclusivement le monde des actionneurs, intéressés par l'effet Joule [TREMOLET 1993]. Les modèles sont donc restreints au domaine des forts champs et des faibles contraintes... c'est-à-dire le strict opposé de notre situation.

Dans le domaine du magnétisme du navire, la majeure partie des données consiste en des mesures de variation de champ réalisées sur bâtiments réels ou sur maquettes dans

l'Equipe de Recherche Technologique en Champ Magnétique Faible [PERRIOU 1984]. Illustrons notre propos [SIMONET 2007] : un cylindre creux et ouvert (magnétiquement) aux extrémités, en acier de type marine, préalablement désaimanté est placé dans un champ longitudinal. Une contrainte en pression, jusqu'à 100 bars, est obtenue par compression d'un fluide à l'intérieur de la structure. La pression est ensuite relâchée. Pendant tout le processus, un capteur de champ magnétique tri-axes mesure une image de la variation d'aimantation à l'extérieur du cylindre (Fig. I.4).

La variation de champ obtenue (Fig. I.5) est non négligeable puisqu'elle est de l'ordre de  $3A.m^{-1}$  (soit environ un dixième du champ terrestre). L'effet très important des contraintes mécaniques sur l'aimantation permanente apparaît ici de manière claire. Cette expérience est censée représenter la plongée d'un sous-marin dans le champ magnétique terrestre.

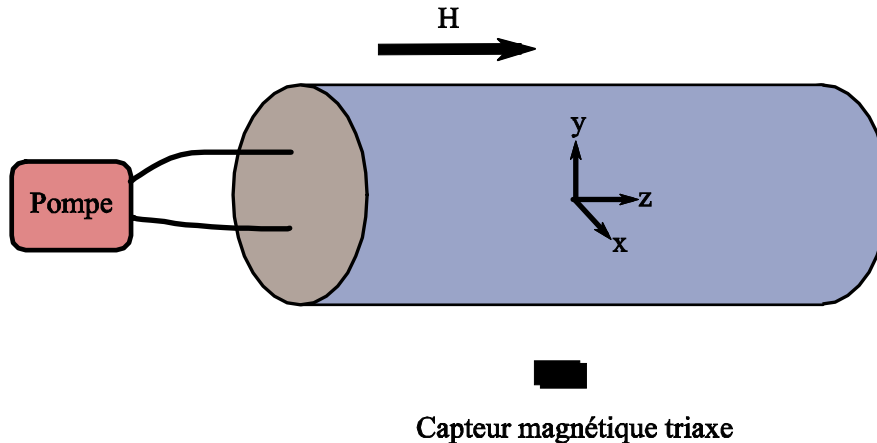


Figure I.4. Schéma du dispositif de mise en pression

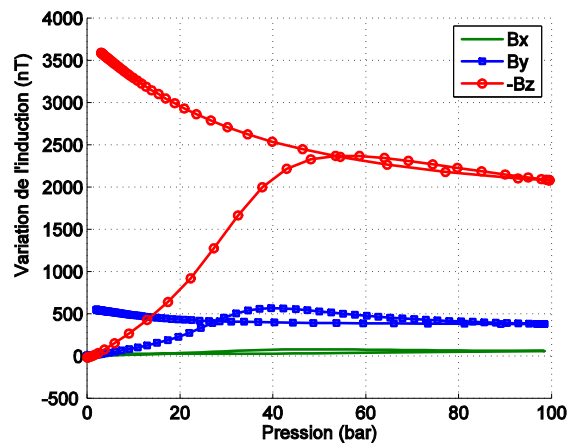


Figure I.5. Variation du champ magnétique en fonction de la pression

### b - Les variations par contraintes thermiques

Les variations d'aimantation en fonction de la température sont depuis longtemps avérées [TREMOLET 1999] et il semble plausible que la température ait un rôle sensible dans le domaine du magnétisme du navire. Pourtant, nous ne disposons que de très peu d'informations concernant ce phénomène et d'aucune mesure sur maquette ou bâtiment réel.

### c - Les variations à la construction du navire

Lors de la construction du navire, les tôles ferromagnétiques subissent un certain nombre de manipulations qui peuvent aimanter fortement les matériaux. Citons, par exemple,

le transport de tôles par électro-aimants, les découpes (contraintes mécaniques) et soudures (contraintes thermiques et mécaniques).

### III.3.2 L'aimantation rémanente

L'aimantation rémanente est l'aimantation du matériau pour un champ interne  $\mathbf{H}$  nul. Il ne faut pas la confondre avec l'aimantation permanente pour laquelle c'est le champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  qui est nul. Même si le champ inducteur est nul, le champ à l'intérieur de la coque n'a aucune raison de l'être : la tôle aimantée créant évidemment un champ sur elle-même. Dans la pratique, il est beaucoup plus aisé d'avoir accès aux effets de l'aimantation permanente puisqu'il suffit de se placer en champ nul. Annuler le champ interne d'un matériau est en pratique impossible sauf dans le cas très particulier de l'ellipsoïde [BRISSENEAU 1997].

### III.3.3 Aimantation d'équilibre

Comme nous l'avons constaté, la seule certitude que nous ayons concernant l'état magnétique ( $\mathbf{H}, \mathbf{M}$ ) du matériau est qu'il est à l'intérieur du cycle limite. Nous convenons aisément qu'il s'agit d'une information très limitée. Heureusement, les matériaux ont des états magnétiques préférentiels qui minimisent leurs énergies. L'aimantation permanente est l'un d'eux puisqu'elle correspond à un minimum local de l'énergie. Il existe également un minimum global de l'énergie sous un champ inducteur donné. L'aimantation correspondante est appelée aimantation permanente d'équilibre. Cette aimantation est obtenue, à plus ou moins long terme, par les effets conjugués de contraintes mécaniques et d'un champ inducteur constant. Elle demeure théorique pour l'aimantation longitudinale des bâtiments de surface : les variations de cap modifiant le champ inducteur, le bateau ne navigue jamais assez longtemps dans le même champ pour atteindre l'équilibre. En revanche, le permanent vertical tend véritablement vers l'état d'équilibre puisque la composante verticale du champ varie très lentement. Concernant les sous-marins, une obtention rapide de l'aimantation d'équilibre dans le champ inducteur de la plongée semble plausible en raison des effets de pression. Nous ne disposons malheureusement pas de mesures expérimentales pour valider ces suppositions. Dans tous les cas, le permanent d'équilibre est un majorant de l'aimantation et permet d'estimer le risque maximal d'un bâtiment.

L'ensemble de ces états magnétiques préférentiels correspond à la courbe dite anhystérétique (Fig. I.3). Par sa définition même, elle est univoque et peut être linéarisée dans les valeurs de champs qui nous intéressent. La pente à l'origine de cette courbe nous donne la susceptibilité anhystérétique  $\chi_a$  du matériau considéré, liée à la perméabilité magnétique  $\mu_a$  par la relation (I.4). On utilise usuellement ce dernier terme plutôt que la susceptibilité.

$$\chi_a = \mu_a - 1 \quad \text{I.4}$$

### III.3.4 Aimantation induite

L'aimantation induite est la réaction du matériau ferromagnétique à un champ magnétique extérieur. Par conséquent, ses variations sont directement données par la loi de Rayleigh (I.3) : dans la limite des champs faibles, l'aimantation varie de manière réversible autour d'une position d'équilibre en présence d'une modification du champ inducteur (ou, d'une manière équivalente, pour un navire, d'une modification du cap). Elle dépend de la géométrie du matériau, du champ magnétique et de la perméabilité magnétique réversible. La connaissance de l'ensemble de ces données et l'absence d'hystérésis autorisent un calcul déterministe de l'aimantation induite.

On considère que la susceptibilité magnétique réversible  $\chi_r$  est donnée par la pente à l'origine de la courbe de première aimantation (Fig. I.3) et est liée à la perméabilité  $\mu_r$  par une relation identique à (I.4).

### III.3.5 Aimantation totale

L'aimantation totale est la somme de l'aimantation rémanente et de l'aimantation induite. Pourtant, comme expérimentalement l'aimantation rémanente est inaccessible, on considère souvent l'aimantation totale comme la somme de l'aimantation permanente et de l'aimantation induite. C'est inexact en toute rigueur. Cela a cependant pour avantage de rendre l'aimantation induite indépendante de l'état d'aimantation initiale (cf. Annexe I). Pour conclure, dans la suite de ce mémoire et pour l'ensemble des relations mathématiques que nous présenterons, nous n'utiliserons que la relation rigoureuse de l'aimantation totale :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{rem} + \mathbf{M}^{ind} \quad \text{I.5}$$

### III.3.6 Conclusion

Il apparaît clairement que le magnétisme du navire repose sur un ensemble de phénomènes complexes et intimement liés. Il n'y a, par exemple, pas de différence de nature entre les phénomènes d'aimantation induite et d'aimantation rémanente. Si le caractère déterministe de l'aimantation induite et les progrès considérables des méthodes numériques et de l'informatique ont permis de trouver de multiples moyens de calcul de cette aimantation [BRUNOTTE 1991], la détermination de l'aimantation rémanente reste ardue. Malgré quelques avancées dans le domaine de la modélisation des matériaux magnétostrictifs [BODY 1996], la route est encore longue avant d'avoir des modèles exploitables sur des géométries aussi complexes que des navires. Le calcul déterministe de l'aimantation rémanente des navires relève encore de l'utopie.

## IV Les techniques de minimisation de l'anomalie magnétique

Pour commencer, définissons le terme signature qui sera utilisé abondamment dans la suite. La signature magnétique d'un bateau de surface correspond au champ total sur une ligne ou un plan de référence situé sous la quille à une distance équivalente à la largeur du bâtiment. Pour un sous-marin, la distance du plan de référence au navire est identique mais, la menace pouvant venir de toutes les directions, il est défini tout autour. L'anomalie magnétique est définie comme étant le champ formé par la soustraction du champ inducteur au champ total.

En France, la mesure des signatures de navires se fait à Lanvéoc ou à Toulon sur des stations de mesure en mer disposant de capteurs sous l'eau. La procédure classique consiste à évaluer les influences des différentes composantes par soustraction. Prenons le cas d'un bâtiment naviguant cap Nord, il possède une aimantation permanente et une aimantation induite correspondantes à ce cap. Si le navire navigue ensuite cap Sud et que les deux mesures sont réalisées successivement, il possède la même aimantation permanente et la même aimantation induite verticale mais une aimantation induite longitudinale opposée. La demi-différence des anomalies mesurées donne directement l'influence de l'aimantation induite longitudinale et donc de l'aimantation permanente longitudinale. Cette approche permet également de différencier les aimantations transverses. En revanche, elle ne s'applique bien évidemment pas aux aimantations verticales...

Décrivons maintenant les principales méthodes mises en place pour réduire le risque magnétique des navires.

## IV.1 Le traitement magnétique

Le traitement magnétique est une technique visant à placer le navire dans un état magnétique contrôlé et tel que l'anomalie magnétique soit réduite au maximum. L'opération consiste à soumettre l'objet à un champ magnétique lentement variable (pour éviter les courants de Foucault) auquel on superpose un champ extérieur statique [NEEL 1946]. Ce dernier peut-être nul, on parle alors de désaimantation, ou imposé et l'on parle de polarisation.

Comme il s'agit d'un processus complexe, nous ne donnons qu'un exemple de ce qui peut être fait : l'objectif est de conférer aux navires une aimantation permanente verticale opposée à l'aimantation induite verticale de la zone d'opération (en supposant que le champ magnétique varie peu dans cette zone). L'aimantation permanente longitudinale est annulée. Enfin, l'aimantation permanente transversale n'est pas traitée en raison des effets de forme qui font que les navires s'aimantent plus facilement dans les directions prépondérantes. L'intérêt de ce type de traitement est ainsi assez limité puisqu'il reste une composante importante de l'anomalie qui est l'aimantation induite longitudinale.

En pratique, conférer une aimantation contrôlée et stable, à un navire est particulièrement complexe. Créer un champ statique imposé autour d'un navire suppose de disposer d'un système de boucles de courant suffisamment volumineux pour y faire entrer un bâtiment d'une centaine de mètres de longueur et d'une quinzaine en hauteur...A cela, il faut de plus rajouter les boucles pour cycler le navire. On imagine sans mal les difficultés techniques de réalisation d'un tel système et la durée d'immobilisation du bâtiment. La stabilité du traitement est une autre inconnue : l'aimantation permanente varie dans le temps et la seule certitude que nous ayons concernant la stabilité est qu'elle dépend de l'énergie communiquée au navire lors du cyclage. Différentes méthodes de traitement ont été mises au point afin de maximiser la stabilité et l'efficacité [BAYNES 2002] mais aucune étude sur bateau réel n'est, à notre connaissance, venue conclure définitivement.

## IV.2 L'immunisation

### IV.2.1 Principe

Le principe de l'immunisation est simple : il s'agit de créer sur un plan de référence et à l'aide de boucles de courant, un champ opposé à l'anomalie magnétique du navire. Ces boucles sont prévues dès la conception et intégrées dans la structure du bâtiment. Trois types de boucles existent : les boucles L pour compenser l'aimantation longitudinale, les boucles V pour le vertical et A (pour athwartship) pour le transversal (Fig. I.6). L'ensemble permet de compenser la signature magnétique dans sa globalité selon toutes les composantes. Bien sûr, le nombre et la position des boucles conditionnent la qualité de l'immunisation. Les critères de dimensionnement du système d'immunisation sont l'espace et la puissance électrique disponible (critique dans un sous-marin conventionnel) ainsi que le coût des équipements.

Afin que l'immunisation soit efficace, il est indispensable que le navire connaisse précisément son anomalie. Comme l'aimantation induite est déterministe, la seule inconnue est l'anomalie issue de l'aimantation rémanente. Pour un système d'immunisation que l'on appellera en boucle ouverte, le seul moyen de l'évaluer consiste à la mesurer en station. Ceci fait, il est possible d'asservir les courants dans les boucles en fonction de la position du navire sur le globe et de son cap : cela permet de compenser les variations d'induit. Pour illustrer cet asservissement, nous reprenons le schéma bloc établi par Olivier Chadebec [CHADEBEC 2001] (Fig. I.7). La connaissance du champ magnétique local par le navire apparaît indispensable dans cet asservissement. Pour les bâtiments de surface, le champ peut-être mesuré par un magnétomètre situé dans la mâture (le plus loin possible de la perturbation créée par la coque)

ou calculé à l'aide d'un modèle géomagnétique. Concernant les sous-marins, c'est évidemment cette deuxième solution qui est employée.

L'utilisation de boucles d'immunisation offre donc une meilleure protection et un plus grand rayon d'action que le simple traitement magnétique. Cependant, ce système n'est efficace que si l'on maîtrise l'aimantation permanente du navire. Celui-ci est donc obligé de la vérifier régulièrement sur des stations de mesures en mer ce qui est contraignant en terme d'immobilisation et de coûts. De plus, la variation inconnue de l'aimantation permanente entre deux passages en station peut, par exemple, conduire le système d'immunisation à une aggravation de l'anomalie magnétique.

Remarque : les navires équipés de circuit d'immunisation doivent tout de même être traités dans le cas où l'anomalie est supérieure aux capacités des boucles.

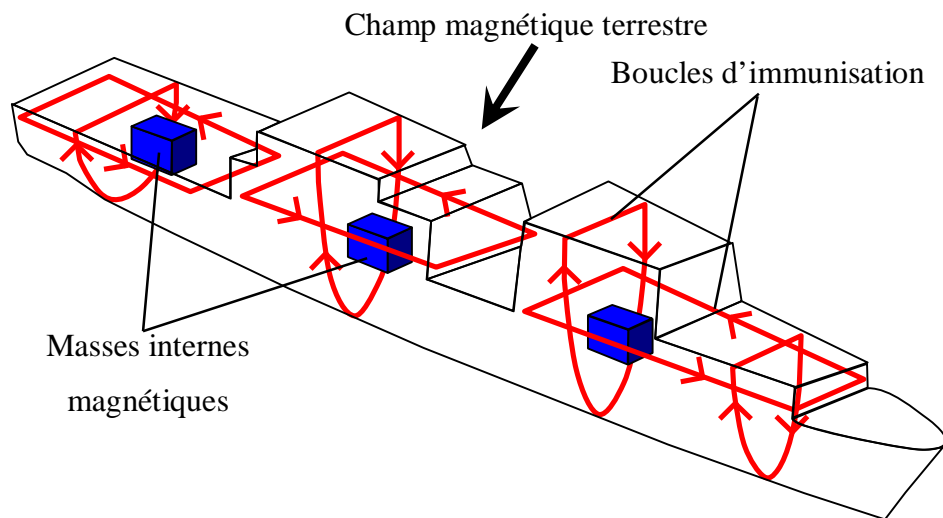


Figure I.6. Représentation schématique des boucles d'immunisation

#### IV.2.2 Réglage des courants dans les boucles

Une fois l'anomalie magnétique connue dans le plan de référence, il est nécessaire de la minimiser et pour cela il faut évaluer précisément l'effet de chaque boucle dans ce plan.

Lors du dimensionnement du système d'immunisation, le calcul des effets de boucle se fait boucle par boucle à l'aide d'un logiciel éléments finis. Il a fallu réaliser de nombreux progrès dans le domaine des méthodes numériques et de l'informatique afin de mener à bien un tel calcul : la complexité de la géométrie des navires, la distance tôle/boucle (petite par rapport aux autres dimensions du bâtiment) et l'espace mémoire nécessaire ont longtemps été rédhibitoires avant les travaux de thèse de Fabrice Ledorze [LEDORZE 1997]. Par la suite, une mesure sur station est indispensable pour connaître l'effet réel des boucles. L'évaluation est réalisée par demi différence avec des courants de +/- I dans chaque boucle. La linéarité de l'effet vis-à-vis du courant permet de connaître l'influence d'un courant quelconque.

Une bonne combinaison des courants permet de réduire l'anomalie. Nous disposons d'autant de paramètres de réglage que de boucles. L'approche classique pour déterminer la combinaison la plus efficace est de discrétiser le plan de référence et de minimiser l'anomalie en ces points par les moindres carrés. Cette approche est un exemple classique de problème inverse de conception.



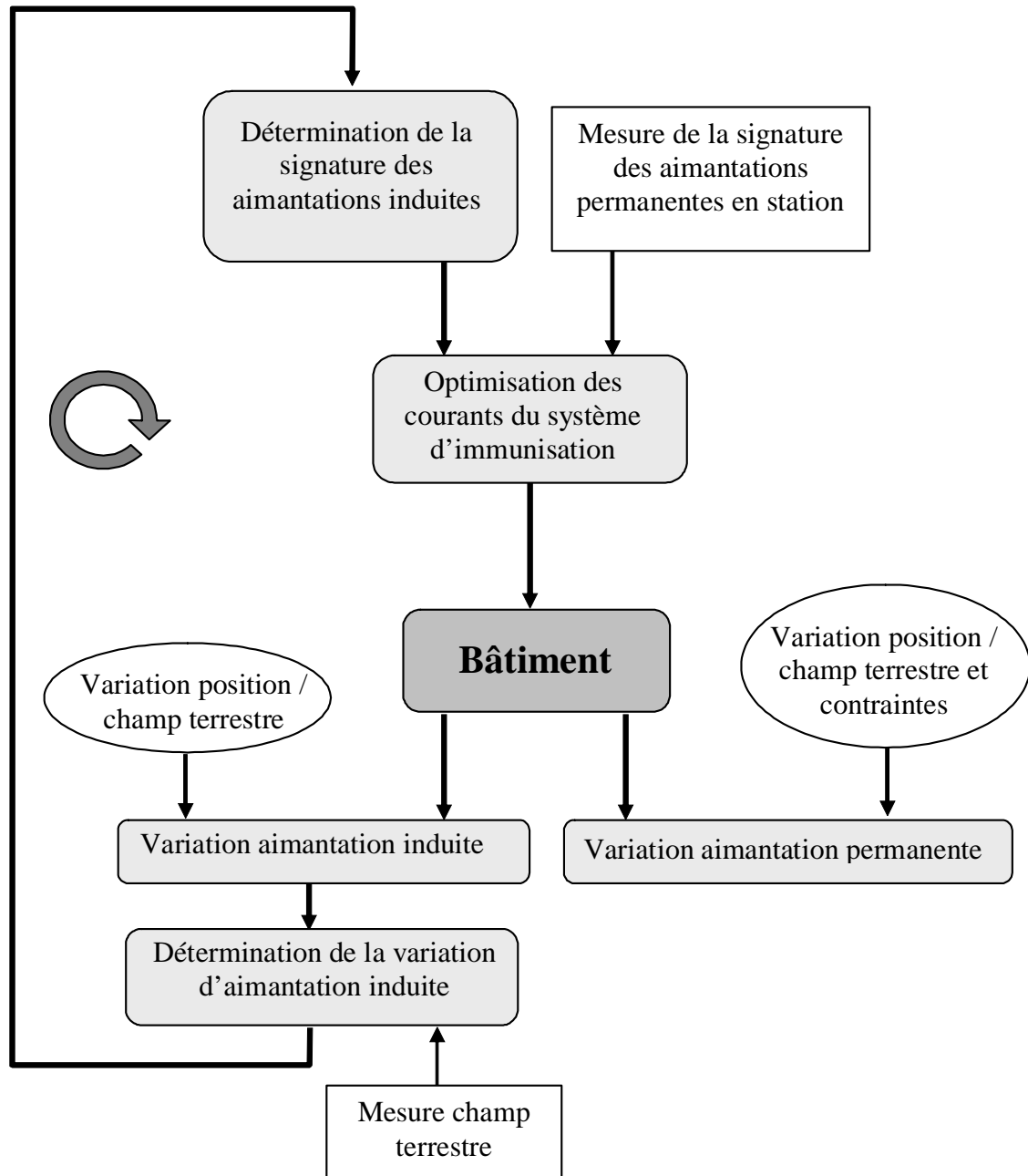


Figure I.7. Schéma bloc du système d'immunisation actuel

## IV.3 L'immunisation en boucle fermée

### IV.3.1 Principe

Le principe de l'immunisation en boucle fermée, abrégé en IBF (ou CLDG pour Closed Loop DeGaussing en anglais), des navires à coque ferromagnétique n'est pas nouveau. Pour toutes les marines mondiales, il représente une activité de recherche conséquente depuis de longues années. Elle consiste en un système capable d'asservir les courants de compensation, en temps réel, aux variations d'aimantation. Contrairement au système en boucle ouverte précédemment décrit, l'aimantation permanente doit ainsi être prédite par le navire lui-même et à tout instant. Puisque nous sommes déjà en mesure de connaître les variations d'aimantation induite en opération, pour fermer la boucle il ne reste qu'à déterminer le permanent : deux approches sont possibles :

- la première a déjà été évoquée et il s'agit de l'approche déterministe de modélisation dont nous avons vu les très importantes limites
- la seconde approche repose sur l'idée que puisqu'il n'est pas possible de calculer l'aimantation rémanente, nous allons la mesurer ! Cela consiste à faire intervenir la mesure du champ magnétique du navire. Le placement des capteurs répond à des contraintes : il semble difficile de les placer à l'extérieur du bâtiment pour beaucoup de raisons (trous dans la coque pour la connectique, risque de détérioration, hydrodynamique pour un sous-marin,...) et nous y reviendrons plus précisément au paragraphe suivant.

Toute la difficulté de l'immunisation en boucle fermée repose dans la question suivante : comment, à partir de mesures du champ magnétique réalisées dans l'air ou dans l'eau à l'intérieur d'un navire d'aimantation quelconque, prédire le champ magnétique créé à l'extérieur ?

Cette application est un exemple typique de problème inverse d'identification. Plus généralement, ces problèmes peuvent être posés dans les termes suivants : comment reconstruire les sources à partir de leurs effets ?

Nous nous proposons de résoudre notre problème inverse en trois étapes (Fig. I.8) :

1. Mesures du champ magnétique à l'intérieur du navire
2. Identification d'un modèle d'aimantation correspondant aux mesures
3. Calcul de l'anomalie dans le plan de référence

Le schéma bloc finalement obtenu, toujours emprunté à Olivier Chadebec, est donné sur la figure I.9. La faiblesse des champs à mesurer (de l'ordre de la dizaine d'Ampère par mètre ou quelques dizaines de milliers de nanoTesla) complique grandement le problème et confère à cette thèse une forte composante expérimentale.

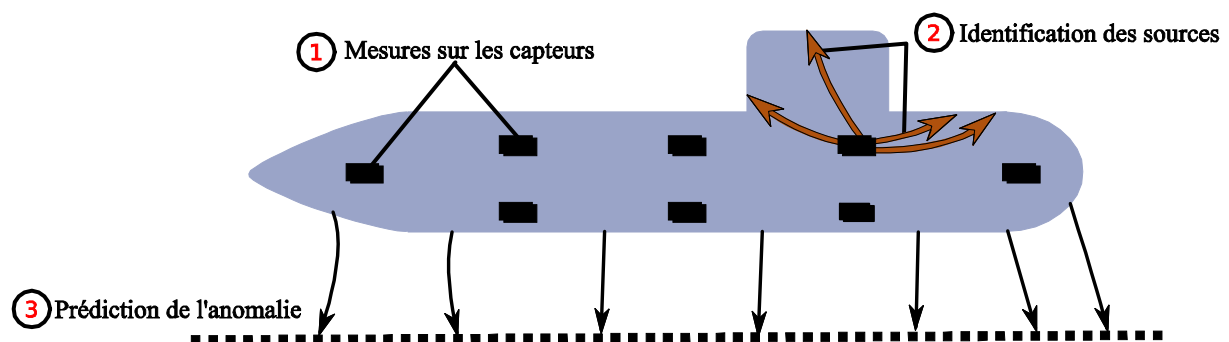


Figure I.8. Etapes de l'immunisation en boucle fermée

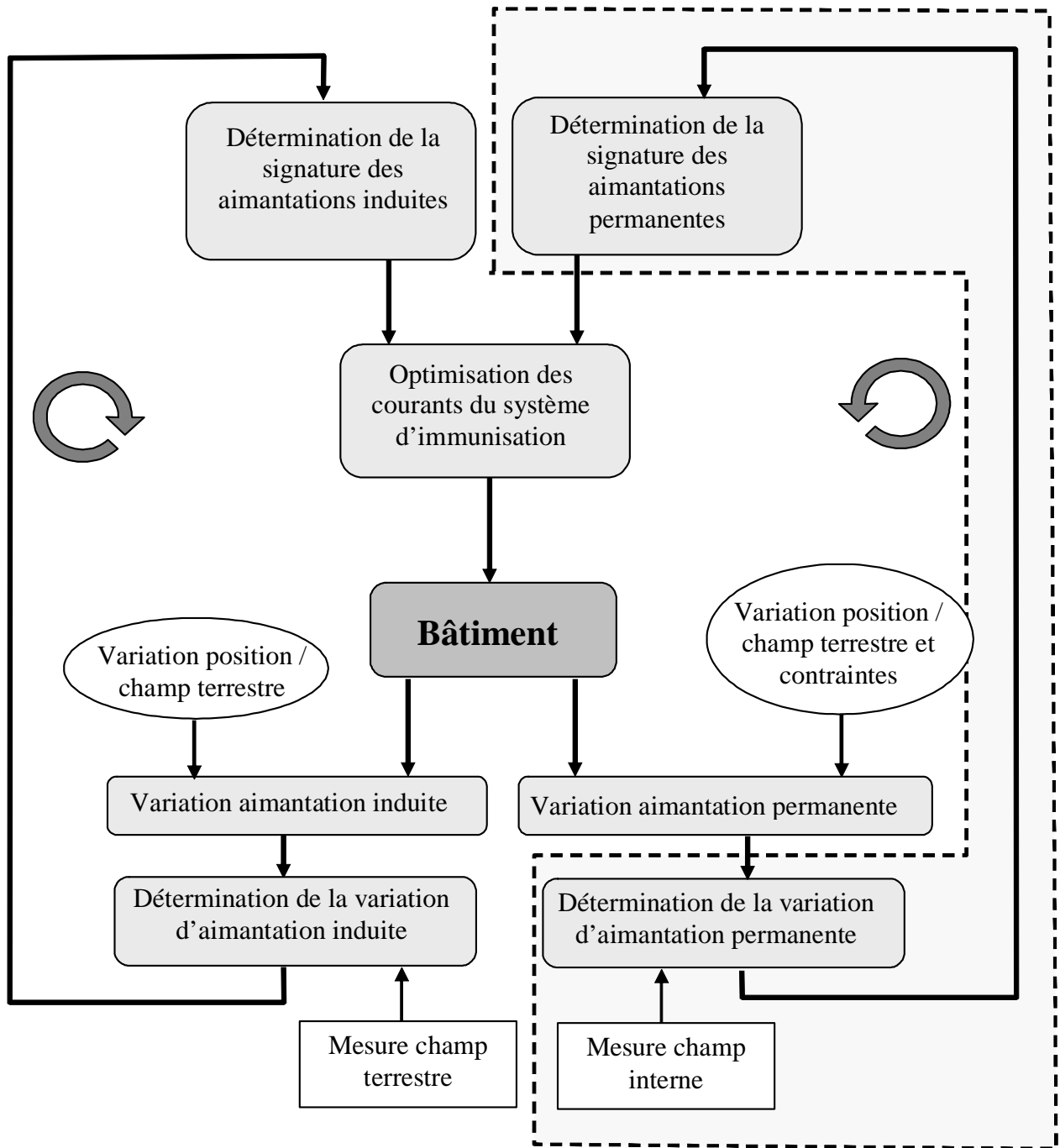


Figure I.9. Schéma bloc du système d'immunisation en boucle fermée

### IV.3.2 Etat de l'art en France

La modélisation numérique des navires a connu des avancées considérables dans la quinzaine d'années qui vient de s'écouler. Rappelons les brièvement. Les travaux de thèse de Xavier Brunotte [BRUNOTTE 1991] ont montré la faisabilité de modéliser un navire, par la méthode des éléments finis. Cela a permis le calcul de l'aimantation induite, de l'aimantation d'équilibre et des signatures associées. Le calcul des effets de boucle a lui été permis par l'introduction de la méthode dite du saut de potentiel [LEDORZE 1997].

L'immunisation en boucle fermée a été mise en place pour la première fois sur des navires dans le cadre d'une étude sur les chasseurs de mines [LEGRIS 1996]. Ces bateaux sont destinés à évoluer dans les zones à risques pour des opérations de déminage. Sa conception doit donc au maximum favoriser sa discrétion. C'est pourquoi, le principal élément ferromagnétique d'un bateau traditionnel, la coque, a été remplacé par une coque amagnétique (fibre de verre par exemple). Il n'est cependant pas possible de réaliser entièrement un navire avec de tels matériaux. Les éléments de propulsion notamment (comme les moteurs) n'ont pas d'équivalent. Toutes les pièces ferromagnétiques d'un chasseur de mines sont donc localisées à l'intérieur de la coque chacune dans une zone réduite. L'effet de ces sources magnétiques peut donc être mesuré de l'extérieur. Un modèle permettant de rendre compte du champ créé dans tout l'espace à l'extérieur de l'objet à partir d'un nombre discret de mesures a été mis en place. Des systèmes de boucles indépendants sont alors installés autour de chaque source. L'immunisation en boucle fermée est en fait la réunion de plusieurs systèmes d'IBF localisés compensant la signature globale du navire.

Dans ce cas, la méthode proposée pour résoudre le problème de l'immunisation en boucle fermée est basée sur la décomposition en harmoniques sphériques des sources magnétiques. Si cette méthode est très adaptée pour identifier des sources dynamiques localisées, elle est inefficace dans le cas qui nous intéresse. En effet, pour simplifier, la décomposition n'est valable qu'à l'extérieur d'une sphère qui contient l'ensemble des sources et des capteurs. Nous constatons ainsi que cette méthode est inapplicable à notre problématique puisque les capteurs sont, pour nous, nécessairement entourés par les sources.

Basée également sur la décomposition en harmoniques sphériques, les travaux de Louis Schmerber [SCHMERBER 2006] visaient à identifier et à caractériser des sources électromagnétiques, en particulier les moteurs de propulsion navale, dans le but de proposer des solutions pour réduire leurs indiscretions, soit par des méthodes de construction particulières, soit par des blindages, actifs ou passifs.

Concernant notre problématique, une avancée majeure a été proposée par Olivier Chadebec [CHADEBEC 2001]. Ses travaux, basés sur des formulations intégrales de la magnétostatique, ont montré la faisabilité de l'IBF. A partir de mesures réalisées à l'intérieur d'une maquette simplifiée de coque de navire, il lui a été possible d'identifier l'aimantation totale et de prédire la signature sous quille avec une bonne précision (Fig. I.10, Fig. I.11 et Fig. I.12). Par la suite, la thèse de Sébastien Guérin [GUERIN 2005] a proposé une méthode d'optimisation de placement des capteurs ainsi qu'une étude de robustesse des algorithmes d'identification.

Cependant, en l'état, la formulation proposée n'est pas applicable dans un navire réel. En effet, la prédiction de la signature n'est valable que si la distance tôle/capteur est suffisamment grande (on verra dans quelle mesure dans la suite). Les figures I.13 et I.14 montrent l'échec des formulations actuelles pour prédire le champ à partir de mesures proches des tôles du navire. Or on imagine aisément la quantité de sources magnétiques statiques existantes dans un navire (ponts, cloisons, ...) et l'impossibilité qui en résulte pour placer les capteurs loin des sources.



Figure I.10. Maquette de coque de bâtiment de surface

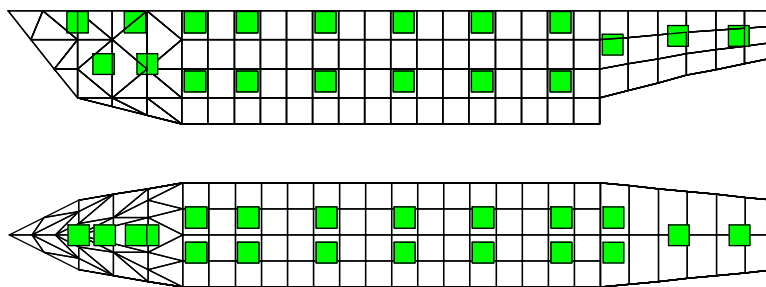


Figure I.11. Position des capteurs : vue de côté et vue de dessus

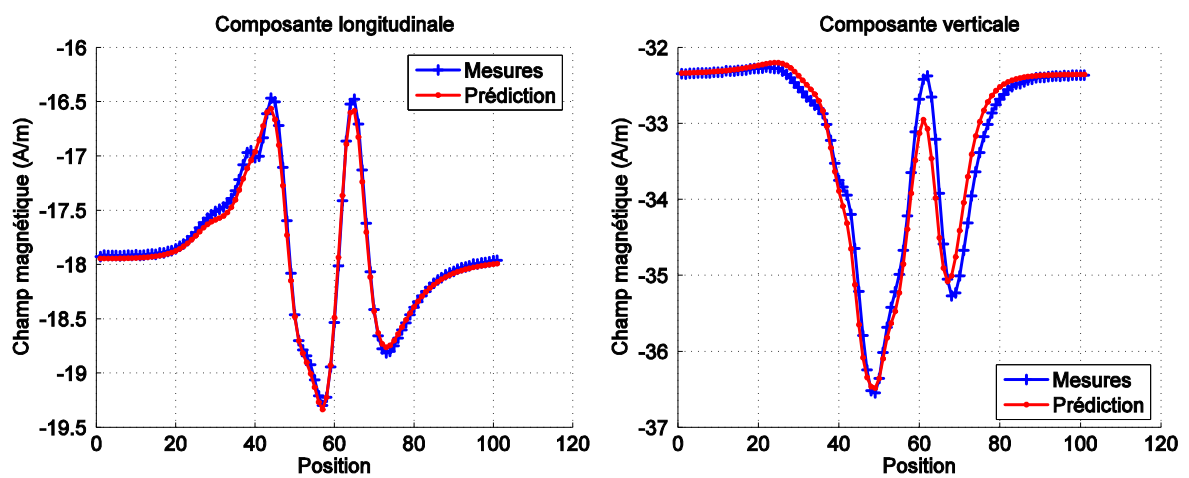


Figure I.12. Comparaison des signatures sous quille réelles et prédites

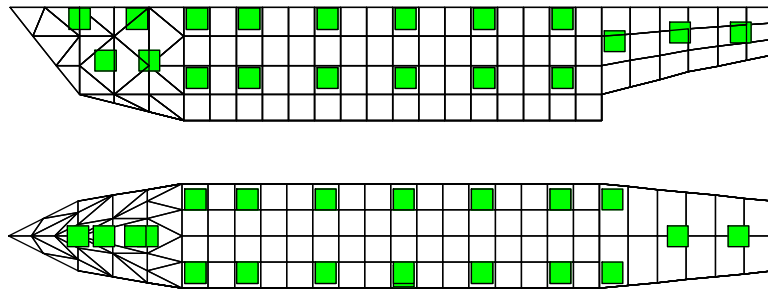


Figure I.13. Position des capteurs proches des tôles : vue de côté et vue de dessus

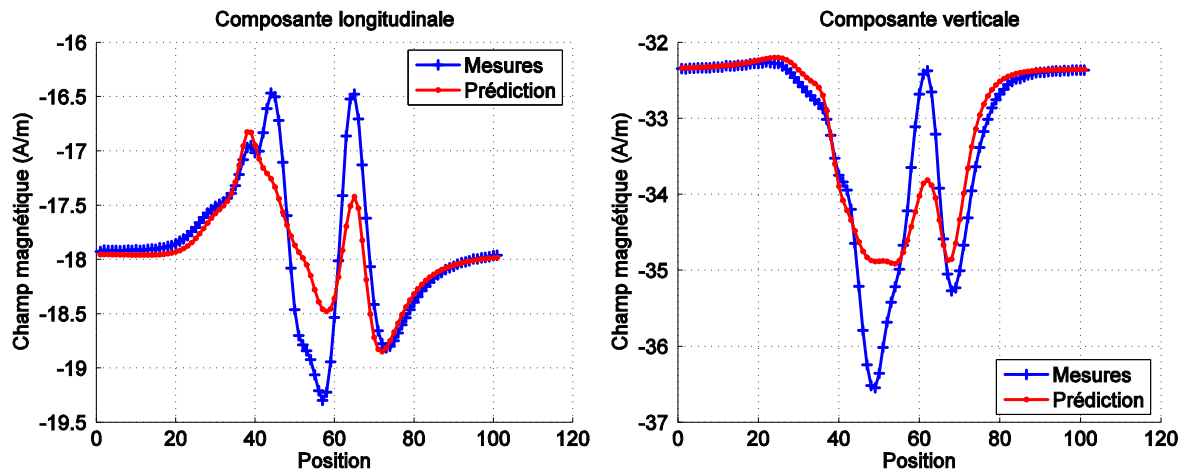


Figure I.14. Comparaison des signatures sous quille réelles et prédites : capteurs proches

### IV.3.3 Etat de l'art de l'immunisation en boucle fermée à l'étranger

On se doute, avec raison, que les informations relatives à un sujet aussi sensible que la vulnérabilité des sous-marins militaires sont rares. C'est pourquoi il est très difficile de se faire une idée de l'avancement des autres pays dans ce domaine. Certains travaux sont toutefois dans le domaine public.

Citons notamment un brevet [MACK 2005] qui présente une méthode d'immunisation intéressante mais sans préciser le type de navire concerné. Elle repose sur la connaissance d'états magnétiques particuliers d'un navire dont on mesure et sauvegarde les effets sur des capteurs internes. Ensuite quand le bâtiment est en opération en mer, un algorithme type moindres carrés détermine l'état magnétique du navire à partir d'une combinaison des états en base de données et des mesures réalisées sur les capteurs. Cette stratégie semble applicable aux navires à coque amagnétique : les chasseurs et dragueurs de mines. Nous supposons que chaque masse interne est bobinée afin de conférer les états magnétiques particulier. Cette méthode présuppose également que chaque source soit suffisamment éloignée des autres pour ne pas interférer sur la mesure de son champ. Bien que simple en théorie, ce procédé apparaît, en revanche, complexe à mettre en œuvre sur un navire à coque ferromagnétique. En effet, sans parler des difficultés pratiques et financières pour placer un navire dans un état magnétique voulu, il semble ardu de discriminer les effets des masses internes et de la coque sur les capteurs. Cela s'avère pourtant indispensable pour avoir bonne connaissance de l'état magnétique. Néanmoins, d'autres tentatives sur ce principe, mais plus évoluées, et appliquées aux navires à coque ferromagnétique semblent également exister [PEI 2003]. Dans les deux cas, nous ne disposons d'aucun retour sur cette méthode et sur sa validité.

On peut également parler de travaux coréens [YANG 2008] qui identifie l'aimantation de navire à partir de mesures externes sous quille. Il traite le problème inverse à la manière d'un problème d'optimisation en minimisant une fonction objectif (écart entre mesures réelles et prédites) issue du gradient d'une formulation magnétostatique du navire. En revanche, nous ne disposons d'aucune information sur la validité de cette méthode dans le cadre d'une immunisation en boucle fermée c'est-à-dire pour l'identification à partir de mesures proches des tôles.

#### IV.3.4 L'immunisation en boucle fermée appliquée aux sous-marins double coque

En raison de la complexité des navires et du nombre de sources statiques, il semble particulièrement ambitieux d'espérer pouvoir les identifier toutes. Pourtant, il existe une catégorie de navire qui semble bien adaptée à la mise en place de l'IBF : les sous-marins et, en particulier, les sous-marins double coque. Ces derniers sous-marins possèdent une coque interne (appelée aussi coque épaisse), d'épaisseur importante, destinée à résister à la pression des grandes profondeurs et une coque externe (ou coque mince), plus fine, qui donne aux sous-marins leurs performances hydrodynamiques (Fig. I.15). L'espace entre les deux coques peut-être rempli d'eau, de gazole,... L'épaisseur de la coque interne nous permet de croire que les champs dus aux masses internes (souvent isolées magnétiquement de la coque, initialement pour des raisons d'amortissement acoustiques) sont suffisamment blindés pour être négligés à l'extérieur. Cela permet de n'avoir à identifier que la coque interne, la coque externe et les supports de cette dernière. Le sous-entendu est que la position des capteurs est imposée : ils doivent être nécessairement entre les deux coques.

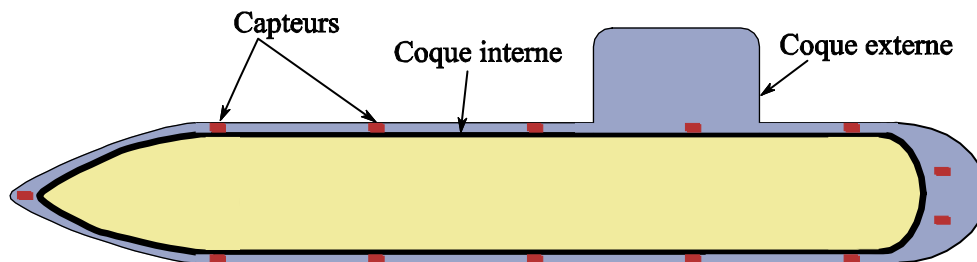


Figure I.15. Structure simplifiée d'un sous-marin double coque

Le travail de cette thèse consiste donc à mettre au point des algorithmes d'identification efficaces à partir de mesures réalisées à très faibles distances des sources du champ magnétique. De plus, dans une optique de développements futurs, il serait très souhaitable que les modèles proposés soient compatibles avec les équations de la magnétostriction afin de pouvoir éventuellement tenir compte des effets de pression.

Ce mémoire prend la forme suivante : le chapitre II présente les généralités du calcul magnétostatique ainsi que les formulations du problème direct c'est-à-dire le calcul de l'aimantation induite. En effet, avant de vouloir résoudre un problème inverse, il est absolument nécessaire d'avoir une parfaite connaissance du problème direct [TARANTOLA 1987]. Le chapitre III traite des méthodes mises en place pour l'identification des sources à partir de mesures en champ proche. Enfin, le chapitre IV est consacré aux validations expérimentales sur une maquette, magnétiquement réaliste, d'un sous-marin double coque.

**Chapitre II :**  
**Méthodes directes : calcul des**  
**aimantations induites**





# Chapitre II : Méthodes directes : calcul des aimantations induites

## I Introduction

Ce chapitre présente les formulations mises en place pour la détermination des aimantations induites de tôles ferromagnétiques. On considérera, en particulier, que l'aimantation rémanente est nulle. Il s'agit d'un exemple typique de problème direct. Dans ce type de problème, tout à fait général, il est question de calculer les effets à partir des sources connaissant l'ensemble des données géométriques et physiques.

La première partie de ce chapitre expose les généralités du problème magnétostatique ainsi que les spécificités et propriétés des tôles minces ferromagnétiques. Les hypothèses simplificatrices sont également présentées et permettent d'établir une première équation de comportement des tôles.

Il est ensuite question des méthodes numériques de résolution. Les formulations locales, basées sur les assemblages de régions reliées par des conditions aux limites et dont fait partie la populaire méthode des éléments finis, sont rapidement écartées au profit de formulations globales. En effet, ces dernières sont beaucoup mieux adaptées à la résolution du problème inverse qui est, ne l'oublions pas, la finalité de ce mémoire. Cependant, les méthodes globales ne sont pas toutes égales et il sera nécessaire de discuter leurs avantages et inconvénients relatifs à notre problème d'identification par des capteurs à proximité des sources du champ magnétique.

Enfin, un processus de génération de mesures numériques réalistes est décrit. Par une combinaison judicieuse d'effets induits, il est possible de créer des jeux de mesures non triviales et particulièrement utiles pour la pré-validation des algorithmes de résolution du problème inverse des chapitres suivants.

## II Les équations de la magnétostatique

### II.1 Les équations à résoudre

Dans le cadre le plus général, le comportement des champs électromagnétiques répond aux équations de Maxwell et à leurs interactions avec les matériaux, caractérisées par des relations particulières. Les équations de Maxwell s'énoncent :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II.1}$$

$$\mathit{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{II.2}$$

$$\mathit{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{II.3}$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{II.4}$$

L'objet de ce chapitre est la détermination des aimantations induites d'un ou plusieurs matériaux ferromagnétiques placés dans un champ magnétique statique ou, plus généralement, lentement variable<sup>2</sup>. Ce champ  $\mathbf{H}_0$  peut-être le champ magnétique terrestre, le champ créé par les boucles d'immunisation ou une combinaison des deux. Par conséquent, notre approche ne tient pas compte des phénomènes dynamiques : le couplage entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  disparaît et ainsi les équations de Maxwell réduites au problème magnétostatique sont les suivantes :

$$\mathit{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{II.5}$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \text{II.6}$$

En lien avec la suite de ce mémoire, quelques commentaires sur ces équations paraissent indispensables. L'équation (II.5) montre que le flux du champ magnétique est conservatif à travers une surface fermée quelconque. En effet, en utilisant le théorème d'Ostrogradky, on montre que, quelle que soit la surface fermée  $S$  :

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \Leftrightarrow \mathit{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{II.7}$$

De plus, remarquons que l'équation (II.3) lie le champ électrique à sa source : les charges électriques. Par analogie, (II.5) montre qu'il n'existe pas de charges magnétiques. Les sources du champ magnétique sont les courants (macroscopiques ou non) comme le prouve (II.6).

Il est nécessaire d'ajouter au couple d'équations (II.5) et (II.6) la relation constitutive du matériau ferromagnétique. D'après le chapitre I, dans le domaine du magnétisme du navire, cette relation est directement issue de la loi de Rayleigh en l'absence d'aimantation rémanente:

$$\mathbf{M} = \chi_r \mathbf{H} \quad \text{II.8}$$

<sup>2</sup> Les variations de cap sont donc considérées comme suffisamment lentes et les courants induits dus au tangage et au roulis, bien que non négligeables, ne font pas l'objet de cette étude.

Nous disposons ainsi du système d'équations locales à résoudre pour déterminer l'aimantation induite de matériaux ferromagnétiques. Il est formé par (II.5), (II.6) et (II.8).

## II.2 La formule de Biot et Savart

Cette relation fondamentale donne l'expression du champ d'induction créé par une distribution de courant  $\mathbf{j}$  dans le vide au point  $\mathbf{r}$  (Fig.II.1). Elle est l'expression intégrale de (II.6).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{j} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad \text{II.9}$$

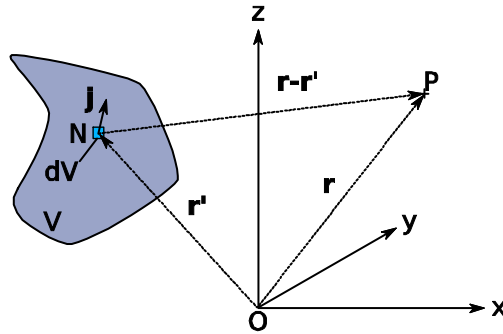


Figure II.1. Notations générales

## II.3 Lien entre l'induction et le champ magnétique

A partir des définitions mathématiques de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ , il est possible d'écrire [BRISSONNEAU 1997] :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad \text{II.10}$$

Par l'intermédiaire de (II.8), (II.10) devient :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\chi_r + 1)\mathbf{H} \quad \text{II.11}$$

Le coefficient  $\mu_0(\chi_r+1)$  est constant et porte le nom de perméabilité du matériau. Il est noté  $\mu$ .

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} \quad \text{II.12}$$

## II.4 Introduction du champ réduit ou champ démagnétisant

### II.4.1 Le champ réduit

Il est parfois commode de distinguer dans le champ total  $\mathbf{H}$ , le champ créé par les inducteurs  $\mathbf{H}_0$  du champ créé par la matière  $\mathbf{H}_{red}$ . Ce dernier est parfois également appelé champ démagnétisant.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{red} \quad \text{II.13}$$

En raison de la linéarité de l'opérateur rotationnel :

$$\text{rot}\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{H}_0 + \text{rot}\mathbf{H}_{red} \quad \text{II.14}$$

Et comme par définition du champ inducteur :

$$\text{rot}\mathbf{H}_0 = \mathbf{j} \quad \text{II.15}$$

Il vient ainsi :

$$\mathbf{rotH}_{red} = \mathbf{0} \quad \text{II.16}$$

### II.4.2 Le potentiel scalaire

Quand c'est possible, il est intéressant d'introduire le potentiel scalaire magnétique pour résoudre le problème magnétostatique ; il permet de n'avoir à résoudre que des équations scalaires beaucoup plus simples que des équations vectorielles.

#### a - Potentiel scalaire total

En l'absence de courant, (II.6) devient :

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{0} \quad \text{II.17}$$

On peut alors montrer qu'il existe un scalaire  $\varphi$  tel que :

$$\mathbf{H} = -\mathbf{grad}\varphi \quad \text{II.18}$$

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  dérive d'un potentiel en l'absence de courant : le potentiel scalaire magnétique total. Cette équation est une équation locale qui est valable dans toutes les zones sans courant. Les boucles d'immunisation d'un navire sont toujours dans l'air, par conséquent, cette formulation est applicable aux matériaux ferromagnétiques mais ne permet pas de traiter le problème dans sa globalité.

#### b - Potentiel scalaire réduit

En utilisant l'approche champ réduit, il vient de (II.16) :

$$\mathbf{H}_{red} = -\mathbf{grad}\varphi_{red} \quad \text{II.19}$$

Le potentiel  $\varphi_{red}$  est appelé potentiel scalaire magnétique réduit. Le champ réduit dérive également d'un potentiel scalaire mais sans aucune contrainte sur la présence de courant. Cette équation locale est valable dans tout le domaine.

### II.4.3 Discussion

Les formulations qui seront développées dans la suite seront soit en champ total soit en champ réduit. Les formulations en champ réduit présentent l'avantage de séparer naturellement le champ inducteur de l'anomalie magnétique et de traiter indifféremment les régions avec et sans courant. Cependant, les équations en champ réduit posent des problèmes dans le cas de perméabilités importantes ; en effet, le champ  $\mathbf{H}$  dans la tôle est alors très faible (on pourra retracer la figure A.1. de l'annexe I de l'ellipsoïde avec une grande susceptibilité pour s'en convaincre) et comme il est la somme de deux vecteurs de normes importantes, le problème numérique de soustraction de grands nombres apparaît. Le champ calculé à l'intérieur de matériaux de perméabilités importantes est donc soumis à des imprécisions qui peuvent avoir des répercussions catastrophiques sur le résultat final [PEAIYOUNG 1989]. Tempérons cependant cette affirmation, en précisant que c'est surtout le fait des problèmes non linéaires. Or nous avons déjà vu que les faibles champs du magnétisme du navire nous placent dans la zone linéaire de la courbe d'aimantation.

Les perméabilités réversibles des aciers marins sont de l'ordre de la centaine et, dans ce cas, l'utilisation de formulation en champ réduit est possible. En revanche, les perméabilités anhystérétiques sont plus importantes, de l'ordre de quelques milliers, et les formulations en champ total peuvent s'imposer. Il sera donc nécessaire d'examiner attentivement les performances des formulations en champ réduit dans cette configuration.

## II.5 Les conditions aux limites

Si, comme nous le verrons, les conditions aux limites ont une importance fondamentale dans les résolutions par des méthodes éléments finis, elles s'avèrent également d'une importance capitale pour le choix des sources du champ dans les formulations intégrales globales. C'est pourquoi elles sont rappelées ci-dessous.

### II.5.1 Interface air/matériau

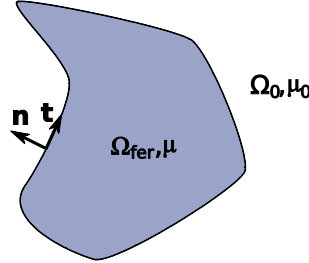


Figure II.2. Notations générales

Soient  $\Omega_{\text{fer}}$  un matériau ferromagnétique de perméabilité  $\mu$  et  $\Omega_0$  l'air dont la perméabilité est celle du vide  $\mu_0$ . Pour le champ et l'induction, les principaux résultats concernant les conditions aux limites à une interface air/matériau sont, dans le cas où il n'y a pas de courant dans les matériaux : conservation de la composante tangentielle du champ magnétique total et conservation de l'induction normale [DURAND 1964] (Fig. II.2):

$$H_{t\text{fer}} = H_{t0} \quad \text{II.20}$$

$$B_{n\text{fer}} = B_{n0} \quad \text{II.21}$$

t notifie la composante tangentielle et n la composante normale.

Concernant le potentiel, en appelant  $\varphi_{\text{redfer}}$  et  $\varphi_{\text{red0}}$  les potentiels réduits aux limites du domaine  $\Omega_{\text{fer}}$  et  $\Omega_0$  respectivement, on a :

$$\varphi_{\text{redfer}} = \varphi_{\text{red0}} \quad \text{II.22}$$

Le potentiel réduit est ainsi continu à la traversée d'une interface.

Enfin, en notant :

$$\mathbf{grad}_n f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{II.23}$$

la projection du gradient d'une fonction sur la normale à la surface, nous obtenons :

$$\mu \frac{\partial \varphi_{\text{redfer}}}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial \varphi_{\text{red0}}}{\partial n} = (\mu - \mu_0) H_{0n} \quad \text{II.24}$$

Ainsi, il y a discontinuité de la dérivée normale du potentiel réduit à la traversée d'une interface air/matériau. Elle dépend de la perméabilité du matériau et de la composante normale du champ inducteur.

Résumons ces équations sur un schéma (Fig. II.3) :

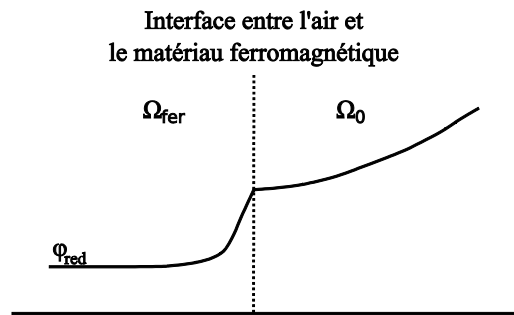


Figure II.3. Comportement du potentiel réduit à la traversée d'une interface air/matériau ferromagnétique

Remarque : les équations précédentes sont valables pour le potentiel total puisque les boucles d'immunisation sont dans l'air et non dans le matériau.

### II.5.2 A l'infini

A l'infini, le matériau ferromagnétique ne perturbe plus le champ inducteur. Autrement dit, le champ réduit est nul, tout comme le gradient du potentiel. Celui-ci est donc constant à l'infini. En général, le potentiel est pris nul à l'infini mais un des paragraphes suivants discutera plus en détail ce problème.

## II.6 Les équations d'une tôle ferromagnétique

Les navires qui nous intéressent ici sont formés d'un assemblage de tôles ferromagnétiques. Par conséquent, l'une des dimensions du matériau, son épaisseur, est beaucoup plus petite que les autres. Vis-à-vis de la modélisation, cette information n'est pas anodine. En effet, une modélisation analytique d'une géométrie aussi complexe étant bien entendu exclue, le système devra nécessairement être discrétisé. Quelle que soit la méthode de résolution, il est en général conseillé de mailler la géométrie le plus régulièrement possible et par des éléments de tailles comparables [SHEWCHUK 2002]. Il apparaît ainsi évident que mailler la tôle dans le volume va faire exploser le nombre de mailles ce qui est très pénalisant en termes d'occupation mémoire et de temps de calcul.

C'est pourquoi le domaine de la modélisation des tôles a été largement exploré voici une quinzaine d'années. La solution retenue ici consiste à moyenner les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  qui forment les frontières de la tôle par une unique surface  $S$ . Il est alors nécessaire de déterminer une équation du problème magnétostatique adaptée à cette simplification ainsi que les modifications possibles des conditions aux limites. Les notations sont précisées sur la figure suivante (Fig. II.4):

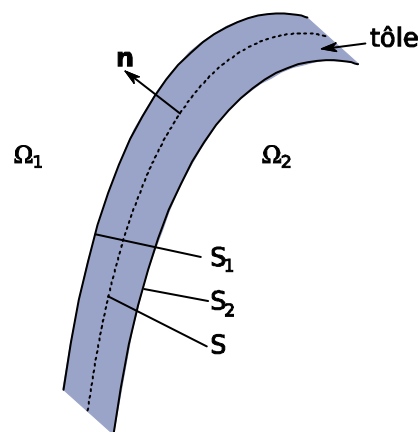


Figure II.4. Notations de la tôle

### II.6.1 Les hypothèses

La caractéristique principale des matériaux ferromagnétiques qui les rend si intéressants est leur capacité à canaliser le flux magnétique. Cette propriété est amplifiée si l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions et si la perméabilité des matériaux est importante. Dans ces conditions, le champ total dans le matériau peut-être considéré comme parallèle à la tôle et sa composante tangentielle comme constante dans l'épaisseur (Fig. II.5). Cette approximation s'applique aux coques des navires [BRUNOTTE 1991].

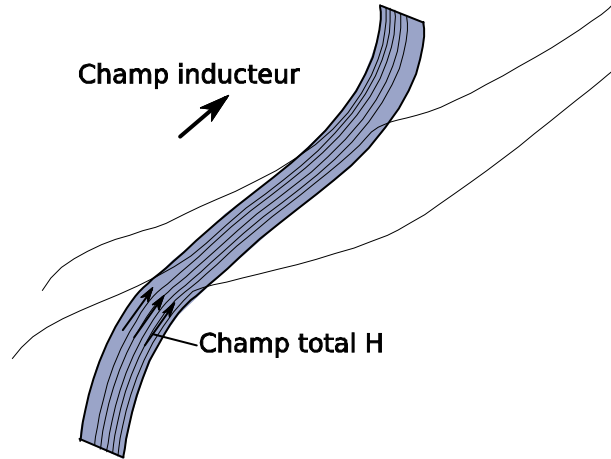


Figure II.5. Lignes d'induction dans l'air et dans une tôle

### II.6.2 Mise en équation

L'équation de comportement magnétostatique d'une tôle de faible épaisseur  $l$  (devant les autres dimensions géométriques) est donnée par [KRÄHENBÜHL 1993] :

$$l(\mu_r - 1)\text{div}_s(\mathbf{H}_0 - \mathbf{grad}\varphi_{red}) = -\frac{\partial\varphi_{red1}}{\partial n} + \frac{\partial\varphi_{red2}}{\partial n} \quad \text{II.25}$$

Où  $\text{div}_s$  est l'opérateur divergence limité aux composantes locales tangentielles à la surface  $S$  et où  $\varphi_{red1}$  et  $\varphi_{red2}$  sont les potentiels scalaires réduits aux interfaces de la tôle. Cette équation s'applique à la surface moyenne  $S$ .

Elle a été obtenue en réalisant un bilan de flux sur un élément infinitésimal de tôle. L'équation (II.5) est ainsi vérifiée. L'utilisation du potentiel scalaire réduit (ou total en l'absence de courant) indique que (II.6) est également vérifiée. Enfin, le comportement de la tôle a été introduit par la perméabilité relative  $\mu_r$ . L'équation (II.25) répond donc bien à toutes les équations du problème magnétostatique.

### II.6.3 Les conditions aux limites

La tôle ayant été remplacée par une unique surface, il convient d'examiner ce que cette hypothèse implique sur le comportement du potentiel. Une étude des champs totaux et réduits dans la tôle mène à :

$$\varphi_{red1} = \varphi_{red2} \quad \text{II.26}$$

Où  $\varphi_{red1}$  et  $\varphi_{red2}$  sont les potentiels scalaires réduits de chaque côté d'un même point de la surface moyenne  $S$ .



Cette équation est différente de l'équation (II.22) : elle traduit que le potentiel ne varie pas dans l'épaisseur du matériau alors que (II.22) indique que le potentiel est continu à l'interface air/matériau.

Quant aux dérivées normales, elles sont liées par (II.25).

Une représentation graphique semble plus appropriée pour visualiser correctement les variations du potentiel dans la tôle par rapport à un matériau ferromagnétique quelconque (Fig. II.6).

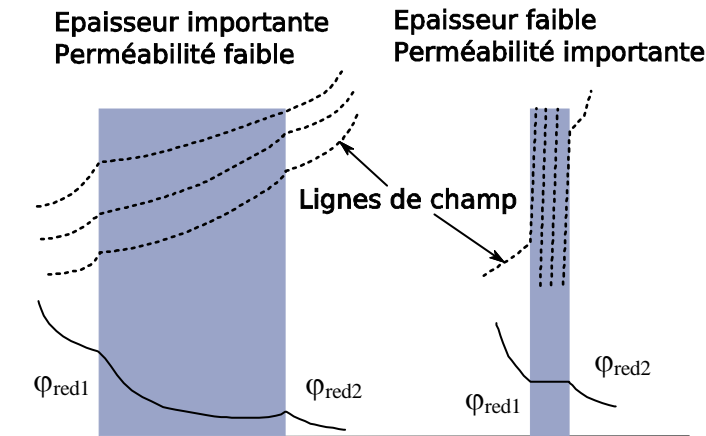


Figure II.6. Variations du potentiel réduit à la traversée d'un matériau ferromagnétique quelconque et d'une tôle

## II.7 Conclusion

Ce paragraphe a permis de rappeler l'ensemble des équations de la magnétostatique utiles à notre problème ainsi que quelques éléments d'interprétation qui auront, dans le problème inverse, une importance capitale. De plus, une équation particulière pour la modélisation de la tôle a été mise en avant et sera à la base de l'une des formulations présentées plus loin.

Désormais, il est temps de mettre en place les méthodes qui vont permettre de déterminer l'aimantation induite des tôles ainsi que leurs champs associés. Les formulations dites locales de type éléments finis seront rapidement traitées puisque assez mal adaptées aux problèmes inverses. En revanche, les méthodes globales seront abondamment étudiées. Cela passera par le choix d'inconnues ou de sources particulières avec leurs avantages et leurs défauts

## III Les méthodes de résolution

### III.1 Les méthodes locales

#### III.1.1 La méthode des éléments finis

La littérature concernant la méthode des éléments finis est très abondante [DHATT 2005], c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas sur sa formulation. En revanche, les caractéristiques de cette méthode sont à étudier avec soin. En effet, si elle a montré d'excellents résultats pour le calcul de l'aimantation induite d'un navire [BRUNOTTE 1991], c'est ses capacités à traiter, ou non, un problème inverse qui sont intéressantes pour la suite de ce mémoire.

Cette méthode nécessite un maillage du domaine entier et donc théoriquement de l'air à l'infini. Comme c'est évidemment impossible des solutions ont été proposées comme la technique de la boîte infinie. Malgré cela, le maillage de l'air introduit des erreurs dans le calcul des signatures en raison des bruits de maillage. Le rapport signal sur bruit est d'autant plus mauvais que les signaux sont faibles dans le domaine du magnétisme du navire (faibles champs et distance relativement importante des sources).

Enfin, et c'est la remarque déterminante, le champ en un point de l'air dépend des valeurs du potentiel aux nœuds de l'élément volumique contenant ce point et non directement des sources. Cela rend la détermination d'une relation explicite entre les effets et les sources extrêmement complexe. Elle est pourtant indispensable à la bonne résolution d'un problème inverse.

Pour ces raisons, la méthode des éléments finis n'est que rarement utilisée pour résoudre des problèmes inverses d'identification.

### III.1.2 Les méthodes intégrales de frontières

Les formulations intégrales de frontières sont également très classiques. Contrairement à la méthode des éléments finis, elles présentent des caractéristiques particulièrement adaptées à la résolution des problèmes inverses d'identification [LAGIER 1999]. Plusieurs raisons expliquent cette popularité : elles ne nécessitent pas de maillage de l'air, ce qui est particulièrement intéressant dans notre cas, et, surtout, elles présentent un lien explicite entre les sources et leurs effets. Par exemple, la valeur du potentiel magnétique dans l'air dépend directement de ses valeurs et de ses dérivées sur le matériau ferromagnétique. Il s'agit là d'une condition essentielle de résolution d'un problème inverse.

Pourtant, les méthodes intégrales de frontières restent, comme la méthode des éléments finis, des formulations locales. Cela signifie que le domaine est divisé en régions et qu'il faut les mettre en équation indépendamment, le lien entre les régions se faisant par les conditions aux limites. Dans notre problématique, bien que nous disposons des équations de passage (II.25) et (II.26), l'existence d'au moins trois régions différentes (intérieur de la coque épaisse, espace entre les coques et air extérieur) ainsi que la présence possible de capteurs dans chacune de ces régions<sup>3</sup> nous incitent fortement à nous orienter vers une formulation plus globale comprenant l'ensemble du problème : c'est ce que nous allons voir ci-dessous.

## III.2 Les méthodes globales

Une approche différente du problème inverse a alors été envisagée : puisque la résolution par assemblage de régions n'est pas efficace, pourquoi ne pas envisager de résoudre le problème dans sa globalité ? C'est le principe des méthodes dites globales que l'on retrouve sous plusieurs dénominations : méthode integro-différentielle, méthode intégrale volumique, etc. Elles considèrent l'air tout entier dans lequel sont introduites les sources du champ magnétique. Ces sources sont de plusieurs types :

- champ inducteur : soit il s'agit du champ terrestre uniforme soit il s'agit du champ créé par les boucles d'immunisation et que l'on calcule par la formule de Biot et Savart

---

<sup>3</sup> Cela ne sera pas le cas dans ces travaux, les capteurs seront effectivement placés entre les deux coques du sous-marin, mais il est envisagé d'utiliser les solutions que nous allons développer avec un panachage de capteurs dans les différentes régions en raison des contraintes de construction d'un sous-marin.

- champ réduit ou réaction des matériaux ferromagnétiques : les sources de ce champ sont naturellement localisées sur les matériaux c'est-à-dire sur la surface moyenne  $S$  des tôles. Il reste à déterminer ces sources, en adéquation avec les contraintes du problème proposé : continuité du potentiel (II.26) et de sa dérivée normale (II.25).

Usuellement, trois types de sources sont considérés dans les méthodes intégrales : les charges magnétiques [VISHNEVSKY 1993], l'aimantation [HARRINGTON 1993] et le potentiel scalaire magnétique [HAN 1994] [KALIMOV 1998]. Les deux premières ont d'ores et déjà montré un grand intérêt dans la résolution du problème inverse magnétostatique tôles minces.

Les formulations globales présentent toutefois le désavantage d'être numériquement très lourdes. Contrairement à la méthode des éléments finis, elles nécessitent l'inversion de matrices pleines ce qui limite très fortement le nombre d'inconnues disponibles, ou de manière équivalente, la précision du maillage. Typiquement, le nombre maximal d'inconnues est de l'ordre de quelques milliers pour les méthodes globales contre quelques centaines de milliers pour les éléments finis.

Pour une bonne compréhension et une bonne interprétation du problème inverse du chapitre suivant, il est absolument nécessaire de revenir sur ces formulations. Le cas du potentiel scalaire sera abondamment traité en raison des difficultés particulières qu'il met en jeu.

### III.2.1 Distribution surfacique de charges

#### a - Vérification des hypothèses des tôles ferromagnétiques

La distribution surfacique de charges magnétiques  $\rho$  est la distribution la plus élémentaire qui réponde à notre problème. Elle n'est pourtant pas la plus naturelle car il ne s'agit que d'une représentation mathématique de phénomènes physiques, issue de l'analogie avec l'électrostatique.

Cette distribution vérifie effectivement les contraintes des tôles minces : le potentiel scalaire de cette densité de charges possède les caractéristiques suivantes [DURAND 1964] :

$$\varphi_{red1} = \varphi_{red2} \quad \text{II.27}$$

$$\frac{\partial \varphi_{red2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{red1}}{\partial n} = -\rho \quad \text{II.28}$$

Où  $\varphi_{red1}$  et  $\varphi_{red2}$  sont toujours les potentiels scalaires réduits de chaque côté d'un même point de la surface moyenne  $S$ .

On en déduit le comportement du champ réduit à la traversée de la tôle avec (II.19) et (II.23) :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_{red2} - \mathbf{H}_{red1}) = -\rho \quad \text{II.29}$$

Le champ réduit normal est donc bien discontinu à la traversée de la tôle. La distribution surfacique de charges répond correctement aux contraintes de modélisation établies dans les paragraphes précédents et est ainsi susceptible de représenter le comportement de la tôle ferromagnétique.

#### b - Signification physique de la distribution de charges

Les monopôles magnétiques (ou charges magnétiques) n'ont pas d'existence réelle, il s'agit uniquement d'artifices mathématiques efficaces pour la résolution de certains problèmes. Il est pourtant possible d'établir un lien solide entre ces objets et la physique. En

effet, si l'on considère que le champ inducteur varie peu entre deux points en vis-à-vis des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , alors on peut écrire, d'après (II.29) :

$$\mu_0((H_{0n2} + H_{redn2}) - (H_{0n1} + H_{redn1})) = -\mu_0\rho \quad \text{II.30}$$

$$\rho = \frac{1}{\mu_0}(B_{n1} - B_{n2}) \quad \text{II.31}$$

La charge est donc directement proportionnelle au flux d'induction s'échappant dans l'air.

Cela nous permet également d'identifier qualitativement où sont localisées les charges dans un matériau ferromagnétique. Comme les effets de pointe font que le flux s'échappe dans l'air majoritairement par les arêtes de la géométrie, l'équation (II.31) indique que les charges y sont globalement situées. Les charges positives correspondent à du flux sortant du matériau ferromagnétique. Considérons par exemple une plaque triangulaire dans un champ inducteur uniforme  $\mathbf{H}_0$ , les répartitions schématisées du flux et des charges sont données sur la figure suivante (Fig. II.7).

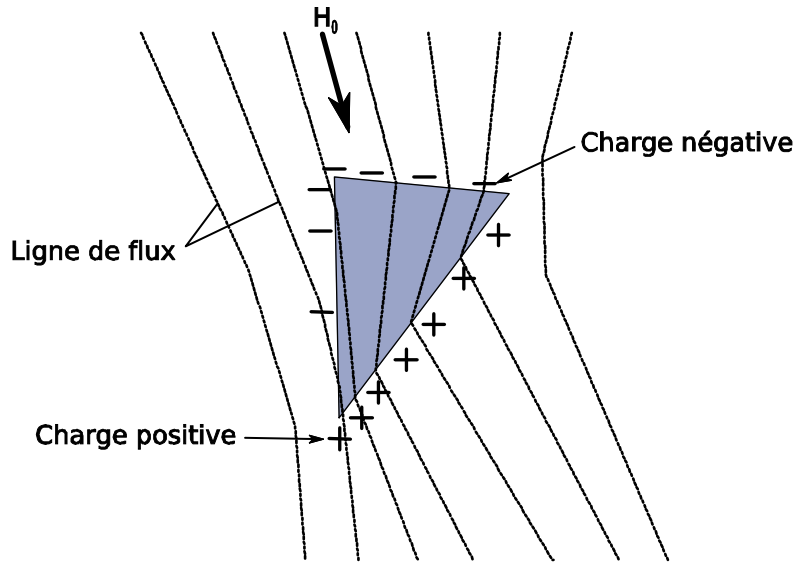


Figure II.7. Répartitions simplifiées du flux et des charges

### c - Mise en équation

Pour commencer, rappelons l'expression du potentiel scalaire magnétique créé par une distribution de charges surfaciques  $\rho$  en un point P quelconque du domaine. Nous appelons N le point courant de l'intégrale (Fig. II.1). La démonstration de ce résultat est disponible en annexe II.

$$\varphi_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\rho(N)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS \quad \text{II.32}$$

On en déduit aisément le champ réduit avec (II.19) :

$$\mathbf{H}_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \rho(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS \quad \text{II.33}$$

L'équation (II.32) est analytiquement convergente quel que soit le point P : le potentiel réduit créé par une densité surfacique de charges est fini sur la tôle [DURAND 1964]. Le cas du champ réduit est un peu plus complexe : il est fini en tout point de la tôle sauf sur les arêtes.

Cette divergence est artificielle et a été introduite par la simplification du volume de la tôle par sa surface moyenne.

En couplant (II.28) avec l'équation de la tôle établie précédemment (II.25), il vient :

$$l(\mu_r - 1) \operatorname{div}_s (\mathbf{H}_0 - \mathbf{grad} \varphi_{red}) = -\rho \quad \text{II.34}$$

Puis avec (II.33) :

$$\rho(P) + \frac{l\chi_r}{4\pi} \operatorname{div}_s \left( \iint_S \rho(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS \right) = -l\chi_r \operatorname{div}_s \mathbf{H}_0(P) \quad \text{II.35}$$

Cette équation relie la charge au point P du matériau ferromagnétique avec l'ensemble des charges du matériau, avec la géométrie et avec la physique (champ inducteur, perméabilité,...).

Pour déterminer l'aimantation induite, ou plutôt ici, les charges induites, de la tôle, il est nécessaire de résoudre l'équation (II.35). Il n'existe évidemment pas de solution analytique de cette équation dans le cas général d'où la nécessité de discrétiser cette équation à l'aide d'un maillage de la géométrie.

Remarque : comme le champ n'est pas fini par sur les arêtes de la surface moyenne, cette dernière équation n'est pas exacte en toute rigueur. La formulation discrétisée ci-dessous, elle, le sera.

#### d - Discrétisation de l'équation en charges

On considère que la tôle, représentée par la surface S, est maillée en e éléments surfaciques et n nœuds. L'approche développée par Vishnevsky [VISHNEVSKY 1993] consiste à procéder par condensation de la densité de charge surfacique en quelques points bien choisis. Le modèle devient alors particulièrement singulier puisque la répartition volumique initiale de charges devient une répartition ponctuelle. Il apparaît ainsi qu'il faudra se méfier du comportement de cette formulation à proximité des tôles.

Il reste à déterminer où vont être condensées les charges. C'est ici qu'intervient la remarque du paragraphe III.2.1.b : les charges sont proportionnelles au flux s'échappant dans l'air et il tend à le faire par les arêtes de la géométrie. Les nœuds du maillage semblent donc tout indiqués pour porter les charges ponctuelles.

L'approche proposée consiste à réaliser un bilan de flux sur chacune des arêtes du maillage entourant une charge ponctuelle. Un maillage particulier s'avère parfaitement adapté à ce type de bilan : le maillage dual. Les nœuds de ce maillage sont les mêmes que les nœuds du maillage initial. En revanche, les éléments duaux sont construits à partir des barycentres des éléments contenant le nœud considéré et des milieux des arêtes partant de ce nœud (Fig. II.8).

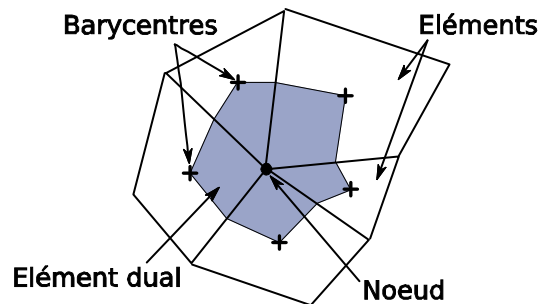


Figure II.8. Exemple d'élément dual

Si on considère un nœud  $i$  du maillage et son élément dual  $S_i$  alors la charge portée par le nœud  $i$  vaut :

$$Q_i = \iint_{S_i} \rho(N) dS_i \quad \text{II.36}$$

La densité superficielle de charge  $\rho$  est ainsi condensée en une charge ponctuelle  $Q_i$ .

En appliquant cette condensation de charges à l'équation (II.35), il vient l'équation qui lie la charge ponctuelle au nœud  $i$  avec l'ensemble des autres charges ponctuelles :

$$Q_i + \frac{l\chi_r}{4\pi} \iint_{S_i} \text{div}_s \left( \iint_S \rho(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS \right) dS_i = -l\chi_r \iint_{S_i} \text{div}_s \mathbf{H}_0 dS_i \quad \text{II.37}$$

Le terme dans la divergence doit également être discrétisé pour obtenir :

$$Q_i + \frac{l\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^n Q_j \iint_{S_i} \text{div}_s \left( \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \right) dS_i = -l\chi_r \iint_{S_i} \text{div}_s \mathbf{H}_0 dS_i \quad \text{II.38}$$

Une simplification judicieuse par le théorème d'Ostrogradsky, limité à un élément surfacique, nous permet de passer outre la divergence de l'intégrale sur les arêtes et d'écrire finalement :

$$Q_i + \frac{l\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^n Q_j \int_{L_i} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \cdot \mathbf{n}_i dL_i = -l\chi_r \int_{L_i} \mathbf{H}_{0S} \cdot \mathbf{n}_i dL_i \quad \text{II.39}$$

Où  $L_i$  est le contour de l'élément dual  $i$ ,  $\mathbf{n}_i$  sa normale sortante et  $\mathbf{H}_{0S}$  le vecteur champ inducteur projeté sur l'élément  $i$ .

Attardons nous un instant sur les termes de cette intégrale : le premier, comme cela a été dit, représente le flux d'induction s'échappant dans l'air par l'élément dual  $i$ , le second réalise le bilan du flux créé par toutes les charges à travers les arêtes de l'élément dual  $i$  et enfin le dernier terme correspond au flux du champ inducteur à travers les arêtes de l'élément dual  $i$ . C'est la raison pour laquelle cette formulation est qualifiée de bilan de flux sur les frontières de chaque élément.

Ces remarques indiquent comment réaliser le bilan de flux sur les éléments qui ont une arête directement en contact avec l'air : il suffit d'intégrer sur les arêtes en contact avec la tôle puisque le flux s'échappant dans l'air est pris en compte par la charge ponctuelle  $Q_i$ .

Concernant l'implémentation de cette formulation, l'écriture de l'équation (II.39) aux  $m$  nœuds du maillage conduit à obtenir  $m$  équations à  $m$  inconnues. Une matrice  $\mathbf{D}_Q$ , appelée matrice directe des charges, contenant à la ligne  $i$  et au nœud  $j$  le terme  $\omega_{ij}$  suivant peut être écrite :

$$\omega_{ij} = \frac{l\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{L_i} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \cdot \mathbf{n}_i dL_i \quad \text{II.40}$$

Le calcul intégral de ce terme est relativement aisé puisqu'il ne présente aucune singularité. En effet, grâce à la transformation de l'intégrale surfacique en intégrale linéique, l'évaluation en  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$  a été évitée. Une simple intégration numérique par une méthode de Gauss est suffisante [GUERIN 2005].

En appelant  $\mathbf{Id}$  la matrice identité et  $\mathbf{S}_Q$  la matrice contenant le terme source, les charges induites sont obtenues par la résolution de :

$$(\mathbf{D}_Q + \mathbf{Id}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{S}_Q \quad \text{II.41}$$

Disposant désormais des charges induites, il est possible de déterminer le champ réduit au point P de coordonnées  $\mathbf{r}$ , dans l'air, de notre système de tôles :

$$\mathbf{H}_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad \text{II.42}$$

Sans trop empiéter sur la suite de ce mémoire, il faut remarquer qu'il s'agit là de l'équation de base du problème inverse. Elle lie effectivement les sources  $Q_j$  avec les effets  $\mathbf{H}_{red}$  de manière explicite. C'est ce type d'équation qui manque à la formulation éléments finis pour être facilement inversible. C'est pour cette raison, qu'à partir de maintenant, la matrice reliant les charges au champ dans l'air sera appelée matrice inverse en charge et sera notée  $\mathbf{A}_Q$ . Elle dépend évidemment des positions du calcul du champ qu'il sera donc nécessaire de préciser à chaque utilisation de cette matrice.

Dans la suite de ce rapport, nous appellerons la formulation en charges : méthode Q.

### III.2.2 Distribution d'aimantation

#### a - Vérification des hypothèses des tôles ferromagnétiques

Examinons les caractéristiques d'une distribution superficielle de dipôles magnétiques [DURAND 1964]. La variation de potentiel à la traversée de S est donnée par :

$$\varphi_{red1} - \varphi_{red2} = P_n \quad \text{II.43}$$

Où  $p_n$  est la composante normale de la distribution.

Le potentiel créé dans l'air par cette distribution est le suivant :

$$\varphi_{red}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left( \iint_S p_n dS + \int_C \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_t}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dL - \iint_S \frac{div(\mathbf{p}_t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS \right) \quad \text{II.44}$$

Où  $p_t$  est la composante tangentielle de la distribution et  $\mathbf{N}$  la normale sortante au contour de S (Fig. II.9).

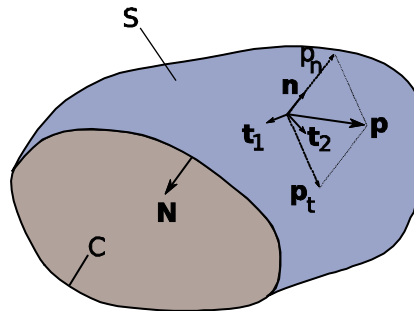


Figure II.9. Notations utilisées pour la répartition de dipôles

Par conséquent, on observe que si la distribution de dipôles est purement tangentielle, elle est équivalente à la somme d'une distribution de charges linéiques  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_t$  sur le contour de S et d'une distribution de charges surfaciques  $-\text{div}(\mathbf{p}_t)$ . Comme le potentiel, créé par une distribution linéique de charges, ainsi que ses dérivées sont clairement continus dans tout le domaine, contour de S exclu, le comportement des dérivées normales du potentiel à la

traversée de la tôle est fixé par la distribution surfacique. Or le paragraphe précédent, justement consacré aux distributions surfaciques de charges, a montré qu'elles étaient discontinues.

Finalement, une distribution superficielle de dipôles tangentiels  $\mathbf{p}$  vérifie les hypothèses des tôles :

$$\varphi_{red1} = \varphi_{red2} \quad \text{II.45}$$

$$\frac{\partial \varphi_{red2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{red1}}{\partial n} \neq 0 \quad \text{II.46}$$

Remarque : Dans le cas d'une surface fermée, la distribution définie ci-dessus est parfaitement équivalente à la distribution surfacique de charges définie dans le §III.2.1. Le lien entre les deux distributions est alors :

$$\text{div}_s \mathbf{p} = -\rho \quad \text{II.47}$$

### b - Signification physique de la distribution superficielle de dipôles tangentiels

D'après [BRISSONNEAU 1997], en supposant que le champ total est tangent et constant au passage de la tôle, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{p} = \mathcal{M} \quad \text{II.48}$$

Où  $\mathbf{M}$  est l'aimantation du matériau.

L'aimantation est ainsi proportionnelle à la distribution superficielle de dipôles tangentiels. Elle présente donc les mêmes caractéristiques et, en particulier, est utilisable pour la modélisation de tôles minces ferromagnétiques. Les paragraphes suivants s'attachent à décrire la formulation en aimantation.

### c - Mise en équation

Dans le cas général, le potentiel créé par une distribution quelconque d'aimantation est donnée par (cf. Annexe II) :

$$\varphi_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad \text{II.49}$$

Et grâce à (II.19) :

$$\mathbf{H}_{red}(P) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \iiint_V \mathbf{M}(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad \text{II.50}$$

Comme pour la formulation en charges, on constate que le potentiel est fini en tout point de l'espace puisque l'intégrale volumique de (II.49) est en tout point convergente. Il en est cette fois de même pour l'intégrale du champ réduit puisque aucune simplification relative à la surface moyenne n'a été introduite jusqu'ici.

A l'aide de l'équivalence classique entre volume aimanté et charges magnétiques (cf. Annexe III), il est possible de réécrire (II.50) :

$$\mathbf{H}_{red}(P) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \left( \iint_S \frac{\mathbf{M}(N) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \iiint_V \frac{\text{div}(\mathbf{M}(N))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right) \quad \text{II.51}$$



Où l'on constate qu'une distribution volumique d'aimantation est strictement équivalente à la somme d'une distribution superficielle de charges  $\rho$  sur le contour du volume et d'une distribution volumique  $\mathcal{G}$ . (II.51), limitée à une surface, est en fait équivalente à (II.44). Les charges portées par ces distributions sont les suivantes :

$$\rho = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \quad \text{II.52}$$

$$\mathcal{G} = -\text{div} \mathbf{M} \quad \text{II.53}$$

Une expression, adaptée à notre problème, du champ réduit a été développée, il est maintenant temps d'établir l'équation du matériau. A l'aide de (II.8) et (II.13), il vient, en un point P de la tôle :

$$\mathbf{M}(P) + \frac{\chi_r}{4\pi} \mathbf{grad} \left( \iint_S \frac{\mathbf{M}(N) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \iiint_V \frac{\text{div}(\mathbf{M}(N))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right) = \chi_r \mathbf{H}_{0S}(P) \quad \text{II.54}$$

Où  $\mathbf{H}_{0S}$  est le champ inducteur projeté sur la tôle au point P. N est toujours le point courant de l'intégrale,  $\mathbf{r}$  le vecteur  $\mathbf{OP}$  et  $\mathbf{r}'$  le vecteur  $\mathbf{ON}$  (Fig. II.1).

L'équation établie ci-dessus vérifie (II.8) et (II.6) car elle est issue du potentiel scalaire. Cependant, il est encore nécessaire de vérifier la conservation du flux. La base de (II.54) est l'équation (II.49) elle-même issue de Biot et Savart (cf. Annexe II). Il suffit alors de montrer que l'induction exprimée par Biot et Savart est bien à flux conservatif ce qui est aisé à montrer.

#### d - Discrétisation de l'équation en aimantation

La résolution de l'équation (II.54) analytiquement étant impossible, une solution numérique s'impose. Pour cela, on considère que chaque élément  $i$  du maillage porte une aimantation uniforme  $\mathbf{M}_i$ . L'équation est alors réécrite au barycentre de chacun des éléments. Par exemple, au barycentre de l'élément  $i$  :

$$\mathbf{M}_i + \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^e \mathbf{grad} \left( \iint_{S_j} \frac{\mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} dS_j - \iiint_{V_j} \frac{\text{div}(\mathbf{M}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} dV_j \right) = \chi_r \mathbf{H}_{0Si} \quad \text{II.55}$$

Comme l'aimantation est uniforme sur l'élément  $i$  :

$$\text{div}(\mathbf{M}_i) = 0, \forall i \quad \text{II.56}$$

Et comme :

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{r}_i} \left( \frac{\mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) = -\mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad \text{II.57}$$

Alors finalement, l'équation discrétisée est :

$$\mathbf{M}_i - \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^e \iint_{S_j} \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} dS_j = \chi_r \mathbf{H}_{0Si} \quad \text{II.58}$$

Enfin, comme dans le cas de tôles minces, le potentiel est constant dans l'épaisseur, l'aimantation est purement tangentielle et uniforme dans l'épaisseur  $l$  du matériau. Ajoutée aux faits que l'épaisseur est très petite devant les autres dimensions, il est possible de transformer l'intégrale surfacique en intégrale linéique en multipliant par l'épaisseur  $l$  :

$$\mathbf{M}_i - \frac{l\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^e \int_{L_j} \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} dL_j = \chi_r \mathbf{H}_{0Si} \quad \text{II.59}$$

Dans son principe, cette équation est différente de celle établie pour les charges. Il ne s'agit plus de faire le bilan du flux à travers les arêtes de l'élément qui contient la source mais de calculer l'effet de chaque élément du maillage sur l'élément considéré.

Remarquons que l'équation est vectorielle, chacun des éléments porte deux inconnues qui sont les deux composantes tangentielles de l'aimantation. La mise en œuvre numérique est relativement aisée car le calcul des intégrales a été rendu non singulier par le passage de l'intégrale surfacique à linéique. Une intégration numérique de Gauss est suffisante dans la très grande majorité des cas [GUERIN 2005].

Enfin, notons que cette formulation est équivalente à une distribution de charges linéiques sur les arêtes des éléments. La répartition des sources du champ reste très singulière mais notablement moins que la distribution de charges surfaciques condensées aux nœuds.

Nous appelons  $\mathbf{D}_M$  la matrice du terme somme du premier membre de l'équation (II.59),  $\mathbf{S}_M$  le vecteur du second membre et  $\mathbf{M}$  le vecteur qui contient les composantes de l'aimantation induite.  $\mathbf{D}_M$  est aussi appelée matrice directe en aimantation. L'aimantation est obtenue par résolution du système suivant :

$$(\mathbf{D}_M + \mathbf{Id})\mathbf{M} = \mathbf{S}_M \quad \text{II.60}$$

Avec l'aimantation induite, il est alors possible de calculer le champ réduit grâce à :

$$\mathbf{H}_{red}(P) = \frac{l}{4\pi} \sum_{j=1}^e \int_{L_j} \mathbf{M}_j \cdot \mathbf{n}_j \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} dL_j \quad \text{II.61}$$

De même que pour la formulation en charges, cette équation établie clairement le lien entre les sources  $\mathbf{M}$  et les effets  $\mathbf{H}_{red}$ . Elle sera donc l'équation fondamentale du problème inverse. La matrice liant le champ réduit et l'aimantation sur les éléments sera notée  $\mathbf{A}_M$  et appelée matrice inverse en aimantation.

Dans la suite de ce rapport, nous appellerons la formulation en aimantation : méthode M.

### III.2.3 Validations numériques

Deux formulations ont été précisément décrites dans les paragraphes précédents. Rappelons que nous sommes particulièrement intéressés par leurs performances pour le calcul du champ proche des tôles (les capteurs seront presque collés sur celles-ci dans l'application réelle) et que plusieurs réserves peuvent être émises quant à leurs précisions dans ce cas en raison de la discrétisation de la géométrie, de la condensation des sources et des hypothèses faites sur leurs répartitions. Il faut, de plus, ajouter les effets de pointes responsables d'erreur à proximité des contours de la surface moyenne, mais n'oublions cependant pas que toutes les formulations subissent ses néfastes conséquences, éléments finis compris. Brièvement, ces effets rendent le champ magnétique très intense dans les coins, sur les arêtes vives, etc. de la géométrie et impliquent une variation rapide d'aimantation. Une modélisation correcte nécessiterait un maillage extrêmement dense ce qui est évidemment impossible et en particulier dans nos formulations globales où les matrices sont pleines.

Evaluons alors le champ créé par les tôles.

**a - Cas d'une sphère creuse**

Une sphère creuse de rayon 1m et d'épaisseur 0.0014m est utilisée (Fig II.10). La perméabilité réversible du matériau vaut 96. Le champ est évalué sur deux plans carrés de  $2\text{m}\times 2\text{m}$  et  $1\text{m}\times 1\text{m}$  tangents à la sphère et distants de celle-ci, au plus près, de 2cm (il s'agit de la distance à laquelle les capteurs seront réellement placés). Les deux plans comportent 10000 points de calcul. Cela permet d'évaluer à la fois le champ proche et le champ lointain. La sphère est placée dans un champ normal au plan et de valeur  $30\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ .

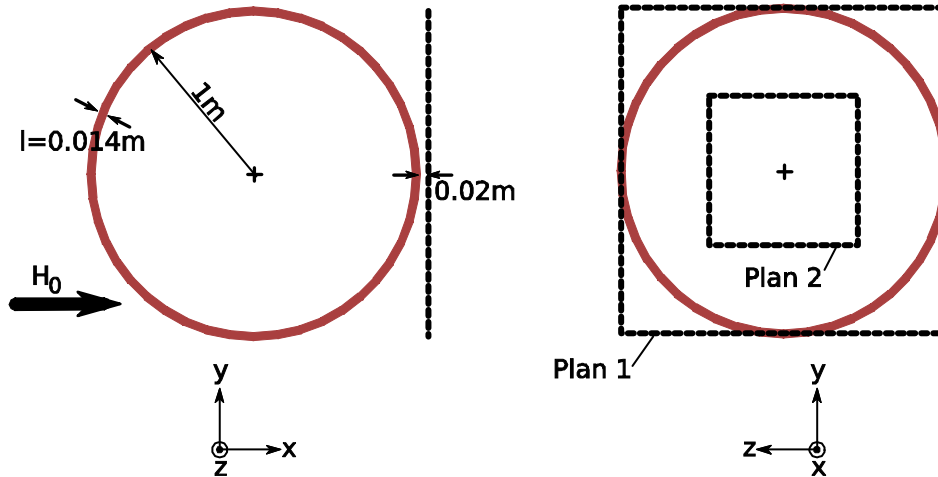


Figure II.10. Schéma de principe de l'évaluation sur une sphère

Le cas de la sphère est particulièrement intéressant pour deux raisons : un calcul analytique du champ dans l'air existe et les effets de pointe sont très limités. Cela permet de supprimer une cause d'erreur et de ne visualiser alors que les autres. Chacune des formulations utilise un maillage différent afin de garder un nombre d'inconnues comparables dans les deux cas : le maillage de la méthode M comprend 576 éléments ce qui implique  $576\times 2=1152$  inconnues et le maillage de la méthode Q possède 1156 éléments et 1124 nœuds. Remarquons dès à présent que la finesse du maillage de la méthode Q permet de réduire l'erreur géométrique, due à la discrétisation de la sphère en facettes, par rapport au maillage de la méthode M.

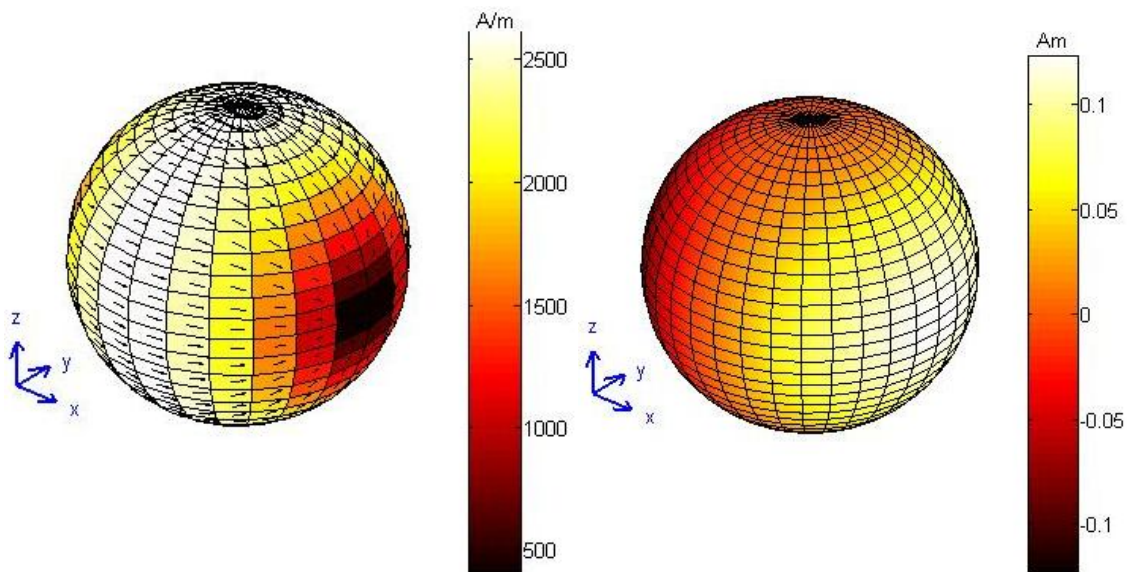


Figure II.11. Aimantation de la sphère issue de la méthode M (à gauche) et répartition des charges issue de la méthode Q (à droite)

### Méthode Q

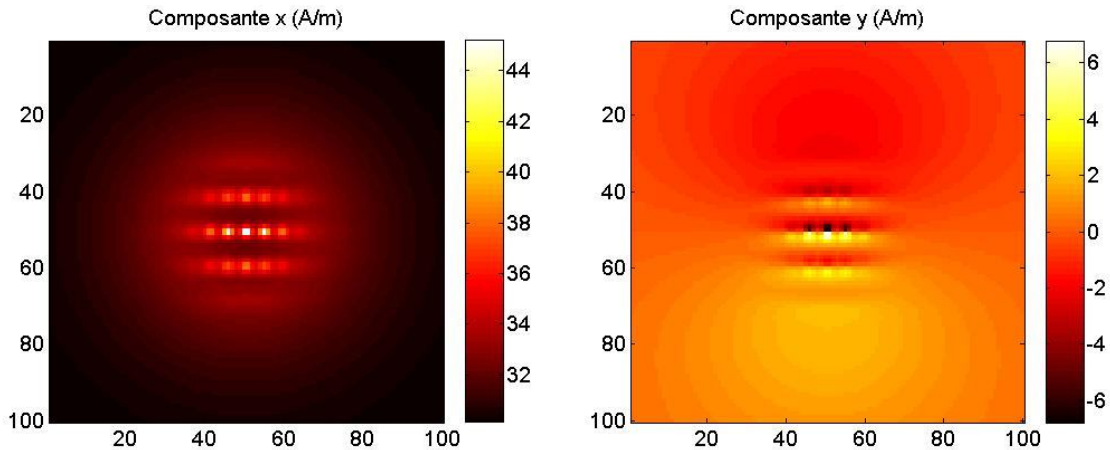


Figure II.12. Champ total de la sphère issu de la méthode Q sur le plan 1

Ces représentations du champ magnétique dans l'air sont extrêmement intéressantes : la condensation des charges apparaît de manière évidente : il est possible sur ces images de repérer chacun des nœuds du maillage proche du plan de calcul. La composante z du champ n'est pas représentée puisqu'elle n'apporte rien : le système étant invariant par rotation autour de l'axe Ox.

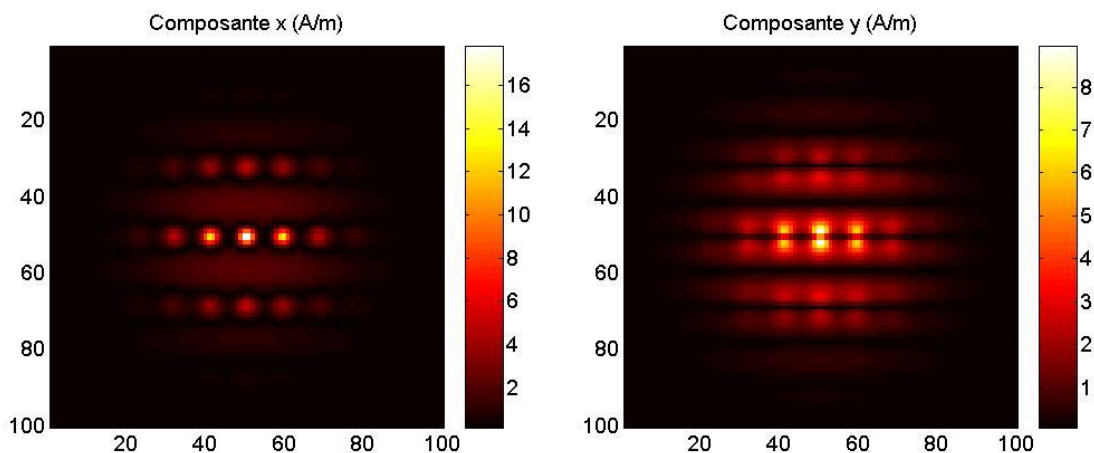


Figure II.13. Erreur sur le champ total de la sphère issu de la méthode Q sur le plan 2

Nous avons préféré présenter l'erreur en valeur absolue plutôt qu'en pourcentage. En effet, les passages par zéro du champ créent, artificiellement, des pourcentages d'erreur très importants qui ne permettent pas de comparer correctement les deux composantes. Premièrement, on constate que le champ loin des sources est correctement évalué. Mais comme le laissaient percevoir les variations importantes du champ de la figure II.12, la précision du calcul du champ proche des nœuds est très mauvaise puisque les erreurs sont de plusieurs Ampère par mètre pour des champs réduits du même ordre de grandeur. La condensation des charges aux nœuds du maillage dégrade effectivement fortement la précision du calcul du champ dans l'air à proximité des tôles. La figure II.13 nous indique que c'est évidemment aux centres des éléments, c'est à dire aux endroits les plus éloignés des singularités, que l'évaluation du champ est la meilleure.

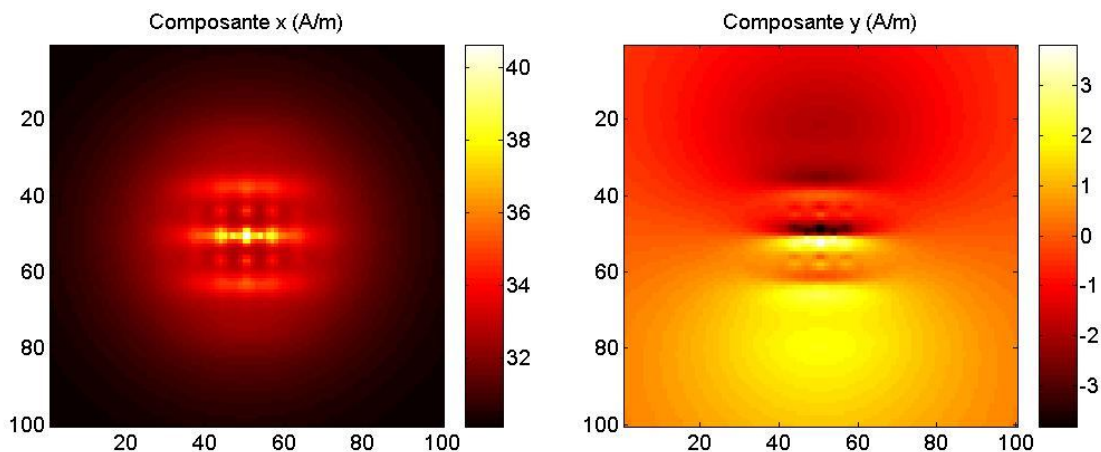
**Méthode M**


Figure II.14. Champ total de la sphère issu de la méthode M sur le plan 1

Comme pour la formulation en charges, il est possible de repérer la condensation des charges mais sur les arêtes du maillage cette fois. Le phénomène est toutefois moins flagrant et cela était attendu en raison de la plus faible singularité d'une arête par rapport à un noeud.

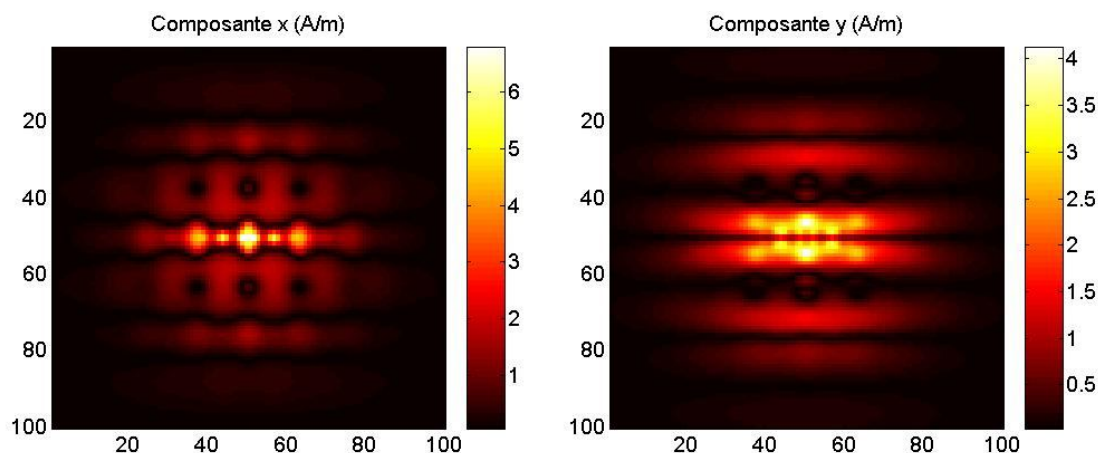


Figure II.15. Erreur sur le champ total de la sphère issu de la méthode M sur le plan 2

L'erreur introduite par la condensation des charges sur les arêtes est beaucoup plus faible que celle de la méthode Q. Résumons dans un tableau les erreurs maximales commises afin de fixer correctement la supériorité de la méthode en aimantation dans cet exemple.

Erreur maximale ( $A.m^{-1}$ )	Composante X	Composante Y
Q	$\approx 17$	$\approx 9$
M	$\approx 7$	$\approx 4$

**b - Cas d'une plaque**

Afin de compléter l'étude de la précision de calcul du champ proche des formulations développées, nous proposons une tôle qui n'est pas fermée et qui présente donc des effets de pointes et d'arêtes marqués : une plaque carrée de  $1m^2$ . Celle-ci est formée de la même tôle de perméabilité relative réversible 96 et d'épaisseur 0.0014m. Elle est placée dans un champ inducteur tangent dont les deux composantes valent  $15A.m^{-1}$ . Cette plaque est maillée en 225

éléments pour la méthode M, soit 450 inconnues, et 400 éléments pour la méthode Q, soit 441 inconnues. Le plan d'évaluation est parallèle à la plaque, situé 0.02m au dessus de celle-ci, comporte 6400 points (80×80) et est centré (Fig. II.16). Comme la référence ne peut provenir que d'un calcul éléments finis approximatif sur les arêtes de la géométrie (en raison des effets de pointe), le plan d'évaluation est tel que le champ est calculé assez loin des arêtes.

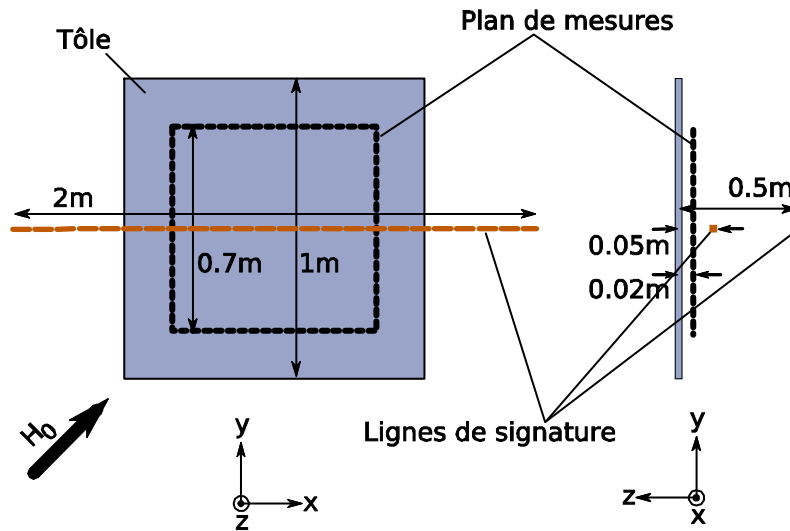


Figure II.16. Schéma de principe de l'évaluation sur une plaque

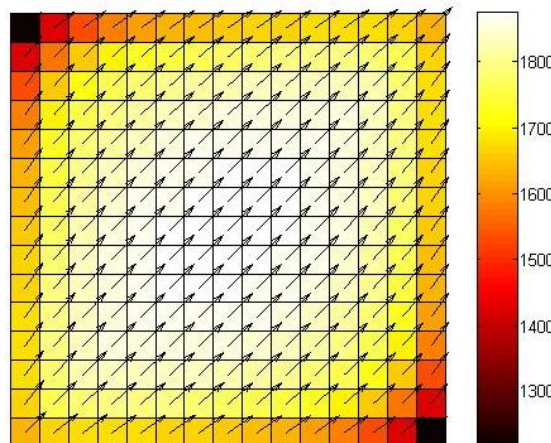


Figure II.17. Aimantation de la plaque issue de la méthode M ( $A \cdot m^{-1}$ )

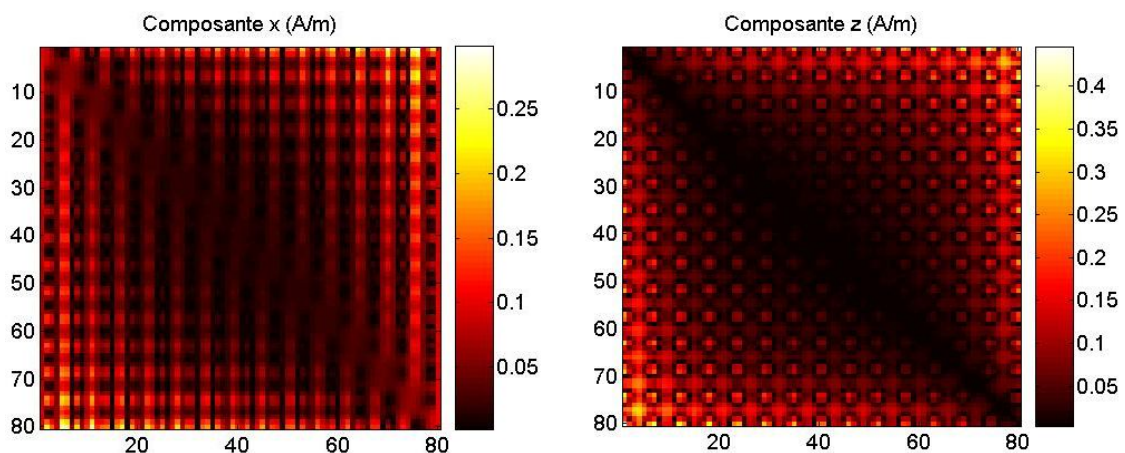


Figure II.18. Erreur sur le champ total de la plaque issue de la méthode Q

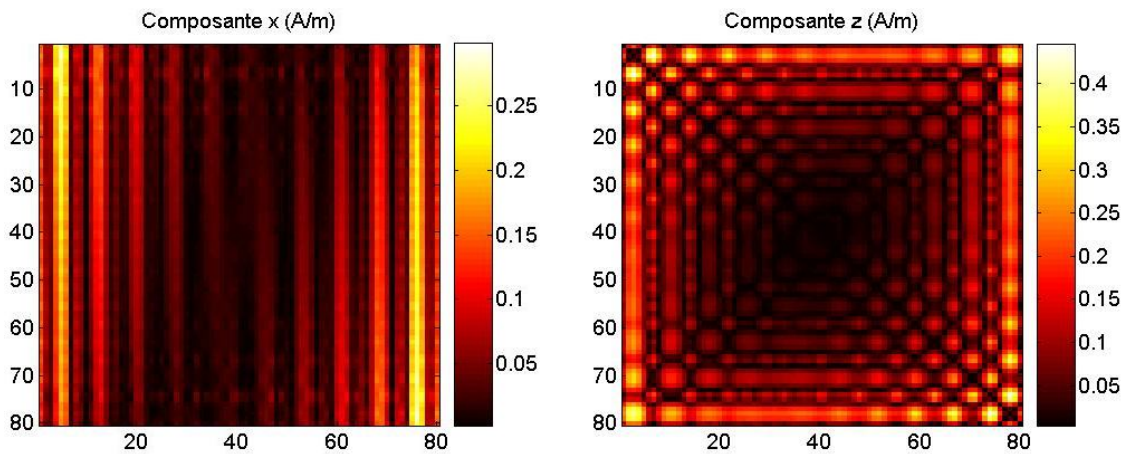


Figure II.19. Erreur sur le champ total de la plaque issu de la méthode M

De même que pour le cas de la sphère, on voit apparaître la condensation des sources mais cette fois il n'y a que très peu de différences entre les deux formulations. Les erreurs moyennes sont, par exemple, proches : elles valent pour la composante  $x$  :  $0.04\text{A.m}^{-1}$  et  $0.05\text{A.m}^{-1}$  pour les méthodes Q et M respectivement et  $0.05\text{A.m}^{-1}$  et  $0.08\text{A.m}^{-1}$  pour la composante  $z$ . Résumons de même les erreurs maximales commises :

Erreur maximale ( $\text{A.m}^{-1}$ )	Composante X	Composante Y
Q	$\approx 0.30$	$\approx 0.46$
M	$\approx 0.29$	$\approx 0.46$

Cet essai apporte une remarque instructive par rapport à la sphère : dans les zones où l'aimantation varie peu, c'est-à-dire au centre de la tôle dans cet exemple (Fig. II.17), le calcul du champ est bon. Cela s'explique simplement, pour la méthode M, par le fait que la représentation en aimantation constante par élément n'est pas trop mise en défaut par des variations trop importantes qu'ils seraient impossibles de suivre avec une telle approximation. Les résultats de la méthode en charges ponctuelles étant similaires, on peut penser que le même phénomène est en jeu : beaucoup de nœuds seraient nécessaires là où l'aimantation varie rapidement. Cela explique également pourquoi les erreurs maximales sont aussi faibles par rapport à la sphère pour laquelle l'aimantation varie très rapidement à proximité du plan de calcul.

### c - Conclusion

En conclusion, il apparaît que ces deux méthodes présentent des performances très moyennes pour le calcul du champ proche des tôles, en particulier pour la méthode en charges. Sa légèreté lui autorise l'emploi de maillage plus fin que la méthode en aimantation mais cela ne suffit pas à compenser ses extrêmes singularités ponctuelles.

Nous avons, de plus, noté que la qualité de l'évaluation du champ à proximité des tôles dépendait des variations d'aimantation des éléments les plus proches du point de mesure : cela tend à montrer, même si les phénomènes sont intimement liés, que ce n'est pas tant la condensation des charges qui est à l'origine des imprécisions mais plutôt une incapacité des modèles à estimer correctement des variations importantes de l'aimantation. Celles-ci peuvent provenir des effets de pointe mais également, dans un cadre plus général, d'aimantations locales marquées.

En outre, les formulations de M et Q étant en champ réduit (cf. (II.13) et (II.34) par exemple) une source supplémentaire d'erreur apparaît pour des perméabilités élevées. Nous discuterons de ce cas un peu plus loin.

Enfin, en tenant compte dès à présent des contraintes du problème inverse et en supposant que ces modèles soient utilisables pour l'identification, il sera judicieux de placer les capteurs face aux barycentres des éléments du maillage puisque cela maximise leurs distances aux singularités.

### III.2.4 Distribution de potentiel scalaire magnétique

#### a - Pourquoi une nouvelle formulation ?

Au début de ces travaux, nous disposions des deux formulations précédentes : distribution de charges et distribution d'aimantation. Les développements ci-dessus ne présentent quasiment rien de nouveau excepté quelques justifications et interprétations.

L'étude du champ de ces méthodes numériques à faible distance des sources a laissé apparaître leurs limites ; c'est pourquoi il nous a semblé nécessaire de développer une nouvelle approche des formulations globales mieux adaptée au calcul en champ proche. En effet, il semble à priori illusoire de vouloir identifier des sources de champ magnétique à partir de capteurs placés dans des zones où les modèles sont faux (ou en tout cas très imprécis). Ce serait un peu comme vouloir reproduire fidèlement une peinture à partir de photos floues !

Des validations numériques qui précèdent, il semble que la principale source d'erreur des modèles existants soit la condensation des sources (ponctuelle pour la méthode Q et linéique pour la méthode M) liée à leurs incapacités à modéliser des variations rapides d'aimantation. Nous proposons alors de réduire ces singularités à l'aide d'un modèle équivalent à une distribution d'aimantation linéaire par élément du maillage. Pour ce faire, l'utilisation du potentiel scalaire s'impose (nous verrons pourquoi ultérieurement) [KALIMOV 1998].

#### b - Vérification des hypothèses des tôles ferromagnétiques

Puisqu'une distribution tangentielle d'aimantation vérifie toutes les hypothèses des tôles ferromagnétiques, il suffit de déterminer une répartition de potentiel équivalente à une aimantation tangentielle. D'après (II.8) et (II.18) :

$$\mathbf{M} = -\chi_r \mathbf{grad}\varphi \quad \text{II.62}$$

Un potentiel scalaire constant dans l'épaisseur de la tôle assure l'absence de composante normale de l'aimantation et est ainsi un candidat possible de sources magnétiques pour notre problème.

#### c - Mise en équation

Rappelons que  $\varphi$  est le potentiel scalaire total,  $\varphi_{red}$  le potentiel scalaire réduit et introduisons  $\varphi_s$  le potentiel scalaire issu du champ inducteur tel que :

$$\varphi_s = -\mathbf{gradH}_0 \quad \text{II.63}$$

Il est possible d'écrire :

$$\varphi = \varphi_{red} + \varphi_s \quad \text{II.64}$$

En couplant cette équation avec (II.49), il vient, en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace :



$$\varphi(P) - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV = \varphi_s(P) \quad \text{II.65}$$

Soit avec (II.62) :

$$\varphi(P) + \frac{\chi_r}{4\pi} \iiint_V \mathbf{grad} \varphi(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV = \varphi_s(P) \quad \text{II.66}$$

Comme pour les formulations précédentes, il est possible de réduire la singularité des intégrales grâce à l'équivalence volume aimanté/charges. L'équation (II.65) devient alors :

$$\varphi(P) - \frac{1}{4\pi} \left( \iint_S \frac{\mathbf{M}(N) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \iiint_V \frac{\text{div} \mathbf{M}(N)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right) = \varphi_s(P) \quad \text{II.67}$$

Finalement, grâce à (II.62), l'équation analytique finale est la suivante :

$$\varphi(P) + \frac{\chi_r}{4\pi} \left( \iint_S \frac{\mathbf{grad} \varphi(N) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \iiint_V \frac{\text{div}(\mathbf{grad} \varphi(N))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right) = \varphi_s(P) \quad \text{II.68}$$

Remarquons d'ores et déjà qu'il s'agit d'une formulation en potentiel total non soumise aux erreurs numériques de soustraction de grands nombres. Elle est donc, à priori, parfaitement adaptée pour traiter des tôles de grande perméabilité.

#### d - Discrétisation de l'équation en potentiel

Comme le potentiel scalaire total est constant dans l'épaisseur de la tôle, il est représenté dans cette formulation par sa valeur sur la surface moyenne S de la tôle. Celle-ci est maillée comme précédemment en e éléments surfaciques et n nœuds. Sur l'élément k, nous supposons que le potentiel est approximé par des fonctions de forme  $\psi$  :

$$\varphi^k(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^6 \varphi_i \psi_i^k(\tau_1, \tau_2) \quad \text{II.69}$$

où  $\varphi_i$  est le potentiel scalaire du nœud i de l'élément k et  $(\tau_1, \tau_2, \mathbf{N})$  une base propre à l'élément k et définissant un repère local (Fig. II.20).

Les variations d'aimantation sur un élément dépendent du type de fonctions de forme choisies : des fonctions de forme linéaires conduisent à une aimantation constante par élément alors que des fonctions de forme quadratiques donnent une aimantation linéaire. L'aimantation constante par élément a déjà été traitée dans la méthode M, c'est pourquoi nous ne nous attardons pas sur les fonctions de forme linéaires. L'utilisation de fonctions de forme quadratiques impose d'ajouter des nœuds, appelés nœuds d'ordre 2, au milieu des arêtes des éléments (Fig. II.20). Cela explique pourquoi la somme de l'équation (II.69) varie de 1 à 6 en supposant que l'élément k soit un triangle.

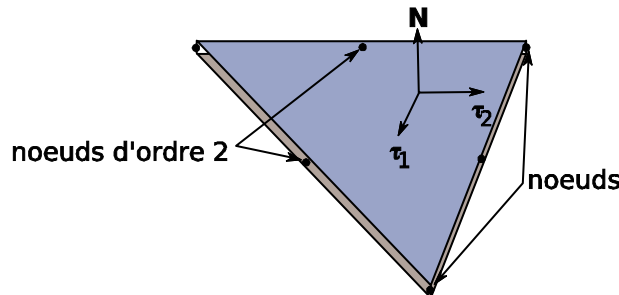


Figure II. 20. Repère local et nœuds d'ordre 2 d'un élément triangle

A l'aide de (II.62), il vient alors l'aimantation de l'élément k, en fonction du potentiel aux nœuds de cet élément :

$$\mathbf{M}^k(\tau_1, \tau_2) = -\chi_r \sum_{i=1}^6 \varphi_i \left( \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \tau_1} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \tau_2} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \quad \text{II.70}$$

Ainsi, l'aimantation induite d'un élément peut être représentée par la somme des potentiels aux nœuds pondérée par des coefficients qui dépendent de la forme de l'élément et de la perméabilité relative.

Soit  $nq$  le nombre de nœuds d'ordre 2 de la géométrie maillée. La discrétisation des équations (II.66) et (II.68) donne, au nœud i de coordonnées  $\mathbf{r}_i$  :

$$\varphi_i + \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^{n+nq} \varphi_j \sum_{k=1}^e \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_1} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_2} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} dV_k = \varphi_{si} \quad \text{II.71}$$

$$\frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^{n+nq} \varphi_j \sum_{k=1}^e \left( \iint_{S_k} \left( \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_1} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_2} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} dS_k - \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_1^{k,2}} + \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_2^{k,2}} \right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} dV_k \right) + \quad \text{II.72}$$

$$\varphi_i = \varphi_{si}$$

Les deux formes de l'équation discrétisée sont écrites car chacune sert effectivement dans l'annexe consacrée aux calculs des intégrales. L'ensemble des intégrales de (II.71) et (II.72) sont convergentes en tout point car à aucun moment le volume de tôle n'est remplacé par sa surface moyenne. De plus, il est nécessaire de remarquer que ces intégrales ne sont pas simplifiables en multipliant par l'épaisseur, comme cela a été fait pour la formulation en aimantation, puisque elles ne seraient alors plus intégrables sur les surfaces délimitant la tôle.

En écrivant (II.71) ou (II.72) en tous les nœuds d'ordre 2 du maillage, nous obtenons un système linéaire dont la résolution donne les potentiels scalaires totaux du système.

$$\omega_{ij} = \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{k=1}^e \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_1} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_2} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} dV_k \quad \text{II.73}$$

Soit  $\mathbf{D}_\varphi$  la matrice qui contient en  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne le coefficient  $\omega_{ij}$  et  $\mathbf{S}_\varphi$  le vecteur qui contient les potentiels sources  $\varphi_s$ .  $\mathbf{D}_\varphi$  est appelée matrice directe en potentiel. Le système à résoudre est le suivant, où  $\varphi$  est le vecteur contenant le potentiel de chaque nœud :

$$(\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id}) \cdot \varphi = \mathbf{S}_\varphi \quad \text{II.74}$$

Remarque : bien que l'on se serve de la surface moyenne dans cette formulation et contrairement aux deux autres méthodes décrites, elle reste une formulation volumique, dans laquelle on fait l'hypothèse que le potentiel est constant dans l'épaisseur de la tôle. Par conséquent, toutes les intégrales de la formulation en potentiel sont convergentes en tous points de l'espace et même sur les contours de la surface moyenne.

Remarque : la remarque précédente introduit une propriété intéressante par rapport aux précédentes formulations et laisse envisager une évaluation correcte du champ proche des arêtes de la tôle. Cependant, il faut nuancer ces propos. En effet, certains nœuds du maillage sont évidemment localisés sur les contours et, en raison des effets de pointe, devraient présenter, dans certaines situations courantes, une aimantation infinie. Il y a ici une difficulté de modélisation absente des méthodes Q et M et qui pourra introduire des effets néfastes sur le calcul du champ proche des contours.

Remarque : Pour aller plus loin sur les effets de pointes dans cette formulation, et en anticipant un peu les résultats, nous sommes, à vrai dire, nous-mêmes étonnés du bon fonctionnement de cette méthode malgré les nœuds sur les arêtes. Des exemples d'application de cette formulation en électrostatique se passent beaucoup plus mal et nécessitent l'utilisation d'une méthode de Galerkin.

### e - Les fonctions de forme quadratiques

Il est temps, désormais, de définir précisément les fonctions de forme qui vont être employées. Comme cela a déjà été évoqué, il s'agit de fonctions de forme quadratiques.

Pour un triangle :

$$\psi(\tau_1, \tau_2) = a + b\tau_1 + c\tau_2 + d\tau_1^2 + e\tau_2^2 + f\tau_1\tau_2 \quad \text{II.75}$$

Et pour un quadrangle :

$$\psi(\tau_1, \tau_2) = a + b\tau_1 + c\tau_2 + d\tau_1^2 + e\tau_2^2 + f\tau_1\tau_2 + g\tau_1^2\tau_2 + h\tau_1\tau_2^2 \quad \text{II.76}$$

La détermination de la fonction de forme au nœud  $i$  se fait en résolvant le système suivant, par exemple pour un triangle avec 6 nœuds d'ordre 2 :

$$j = 1 \dots 6, \psi_i^k(\mathbf{r}_j) = \delta_{ij} \quad \text{II.77}$$

où  $\psi_i^k$  est la fonction de forme, de l'élément  $k$ , liée au nœud  $i$ ,  $\mathbf{r}_j$  les coordonnées du nœud  $j$  de l'élément considéré dans le repère local de l'élément  $k$  et  $\delta_{ij}$  est la fonction de Kronecker ( $\delta_{ij}=1$  si  $i=j$  et 0 sinon).

### f - L'origine du potentiel

D'après l'équation (II.19), le potentiel scalaire magnétique est défini à une constante près. Or aucune origine n'a été fixée jusqu'à maintenant. Nous montrons en annexe IV, que pour se faire, il n'est pas nécessaire de rajouter une équation au système (II.74) obtenu ci-dessus et que l'origine du potentiel source peut être prise n'importe où.

### g - Continuité de la composante tangentielle de l'aimantation

Une caractéristique intéressante de cette formulation, issue de l'utilisation de fonctions de forme, est qu'elle assure la continuité de la composante tangentielle de l'aimantation entre deux éléments contigus. Cette contrainte supplémentaire se révèle indispensable dans la modélisation de certains systèmes magnétostatiques comprenant des circuits magnétiques fermés puisque la méthode M montre alors ses limites [BUI 2007].

La démonstration de ce résultat est assez aisée et disponible en annexe V.

### h - Complexité des intégrales

La formulation discrétisée du potentiel scalaire et ses propriétés remarquables ont été entièrement décrites, il n'est pourtant toujours pas évident de la mettre en œuvre, en raison de la complexité des intégrales à évaluer. Cela est particulièrement vrai quand le nœud de calcul est un point du volume d'intégration (i.e.  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'$ ). Ce cas se présente six fois pour l'intégration d'un triangle (aux trois nœuds du maillage et aux trois nœuds d'ordre 2) et huit fois pour un quadrangle. Un soin tout particulier est alors nécessaire puisqu'il s'agit des intégrales les plus influentes de la matrice finale (en effet  $\mathbf{r}/r^3$  est grand en comparaison d'un nœud plus éloigné).

Ces calculs d'intégrales singulières représentent les difficultés majeures de cette méthode, d'autant plus que les références sont assez rares. Quelques résultats sont disponibles

concernant l'intégration de  $1/r$  [CANOVA 2005] mais nous n'avons rien trouvé de précis concernant  $\mathbf{r}/r^3$ . La procédure de calcul est ainsi nouvelle mais étant peu digeste, elle est présentée en annexe VI. Elle décrit précisément le calcul de chaque intégrale intervenant dans la formulation.

### i - Vecteur des sources

La détermination du potentiel créé par une source magnétique quelconque n'est pas aisée dans le cas général mais ce n'est toutefois pas le propos de cette thèse. Il est possible dans notre problème de se limiter à un champ uniforme et homogène tel le champ terrestre.

Comme cela a été dit, l'origine du potentiel source est prise à l'origine du repère. Le potentiel  $S_{\phi i}$  créé par un champ inducteur uniforme et homogène  $\mathbf{H}$  est donné par (II.18), au nœud  $i$  de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  :

$$S_{\phi i} = -(H_x \cdot x_i + H_y \cdot y_i + H_z \cdot z_i) \quad \text{II.78}$$

L'écriture du potentiel en chaque nœud (nœuds d'ordre 2 compris) mène au vecteur source  $\mathbf{S}_\phi$ .

### j - Calcul du champ dans l'air

Le champ en un point  $P$  quelconque de l'espace, de coordonnées  $\mathbf{r}_P$ , est la somme du champ inducteur et du champ réduit des matériaux ferromagnétiques (II.13). A l'aide de (II.49) et (II.18), il vient alors :

$$\mathbf{H}(P) = \frac{\chi_r}{4\pi} \mathbf{grad} \iiint_V \mathbf{grad} \phi(N) \cdot \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|^3} dV + \mathbf{H}_0(P) \quad \text{II.79}$$

Sous forme discrétisée, on a :

$$\mathbf{H}(P) = \frac{\chi_r}{4\pi} \sum_{j=1}^{n+nq} \sum_{k=1}^e \mathbf{grad} \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_1^k} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_2^k} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \cdot \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|^3} dV_k + \mathbf{H}_0(P) \quad \text{II.80}$$

La matrice inverse en potentiel sera notée  $\mathbf{A}_\phi$ . Elle relie les potentiels aux nœuds du maillage avec le champ réduit et correspond ainsi au premier terme du second membre de l'équation précédente.

L'évaluation de l'expression précédente peut se faire de deux manières différentes : soit on calcule l'expression analytique du gradient soit on procède par différences finies. La première solution va permettre de n'avoir que trois intégrales à déterminer (les trois directions de l'espace) contre au minimum quatre pour les différences finies (Fig. II.21). Cependant, ces trois intégrales sont largement plus complexes et surtout elles présentent une singularité en  $1/r^3$  (gradient de  $1/r^2$ ) qui pose des difficultés importantes d'intégration numérique à faible distance des sources du champ.

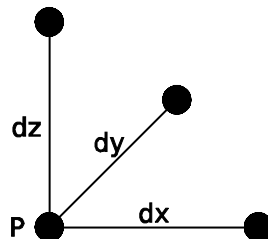


Figure II. 21. Points d'évaluation pour les différences finies

C'est pourquoi il nous a semblé plus judicieux de procéder par différences finies : le potentiel est évalué au point P puis en trois points  $\mathbf{r}_P + \mathbf{dx}$ ,  $\mathbf{r}_P + \mathbf{dy}$  et  $\mathbf{r}_P + \mathbf{dz}$ .  $\mathbf{dx}$ ,  $\mathbf{dy}$  et  $\mathbf{dz}$  sont de normes égales et valant  $10^{-5}$  m [GUERIN 2005]. Le champ résultant vaut :

$$\mathbf{H}(P) = - \begin{pmatrix} \frac{\varphi(\mathbf{r}_P + \mathbf{dx}) - \varphi(\mathbf{r}_P)}{dx} \\ \frac{\varphi(\mathbf{r}_P + \mathbf{dy}) - \varphi(\mathbf{r}_P)}{dy} \\ \frac{\varphi(\mathbf{r}_P + \mathbf{dz}) - \varphi(\mathbf{r}_P)}{dz} \end{pmatrix} + \mathbf{H}_0(P) \quad \text{II.81}$$

Enfin, comme nous avons appelé méthode Q la formulation en charges, méthode M la formulation en aimantation, nous appellerons méthode  $\varphi$  la formulation en potentiel scalaire.

### k - Pourquoi pas une formulation linéaire de l'aimantation ?

Il peut sembler légitime de se demander pourquoi il a été nécessaire d'introduire le potentiel scalaire magnétique pour obtenir une représentation linéaire d'aimantation alors que nous disposions déjà d'une formulation en aimantation. Autrement dit, n'aurait-il pas été préférable de chercher à augmenter l'ordre de cette formulation plutôt que d'en écrire une nouvelle ?

La mise en place d'une formulation en aimantation linéaire par élément aurait été très proche de la démarche utilisée pour la méthode  $\varphi$  : introduction de fonctions de forme, inconnues aux nœuds et surtout calcul d'intégrales volumiques. En effet, les simplifications introduites dans la méthode M (suppression des singularités des intégrales et calcul d'intégrales linéiques) ne pourraient plus s'appliquer. Par conséquent, l'équation gouvernant le problème serait très comparable à (II.71) mais avec un gradient supplémentaire devant l'intégrale comme le montre (II.54).

En conclusion, on se retrouverait à faire exactement le même calcul d'intégrale que dans la formulation en potentiel mais auquel on devrait, en plus, ajouter l'évaluation du gradient. Cela ne présente donc pas beaucoup d'intérêt.

## III.2.5 Validations numériques

Une nouvelle formulation du problème direct magnétostatique a été mise en place dans les paragraphes précédents avec vraisemblablement de meilleures performances pour le calcul du champ à proximité des tôles. En effet, la répartition de sources est moins singulière, avec des charges surfaciques sur les arêtes et des charges volumiques, ce qui permet de bénéficier d'une répartition linéaire d'aimantation et, on l'espère, de modéliser correctement des variations rapides d'aimantation.

Afin de tester ses capacités de calcul du champ, les cas tests du paragraphe III.2.3 sont repris.

### a - Cas d'une sphère creuse

On considère toujours une sphère creuse placée dans un champ inducteur connu et l'évaluation du champ se fait sur les mêmes plans. Le maillage utilisé comporte 400 éléments ce qui donne 1162 inconnues (nœuds et nœuds d'ordre 2). Gardons à l'esprit que l'erreur géométrique introduite par ce maillage est encore plus importante que pour les méthodes précédentes.

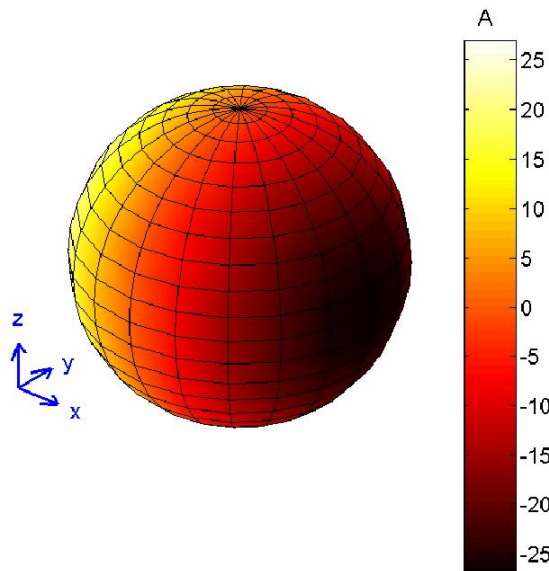


Figure II.22. Potentiel magnétique sur la sphère

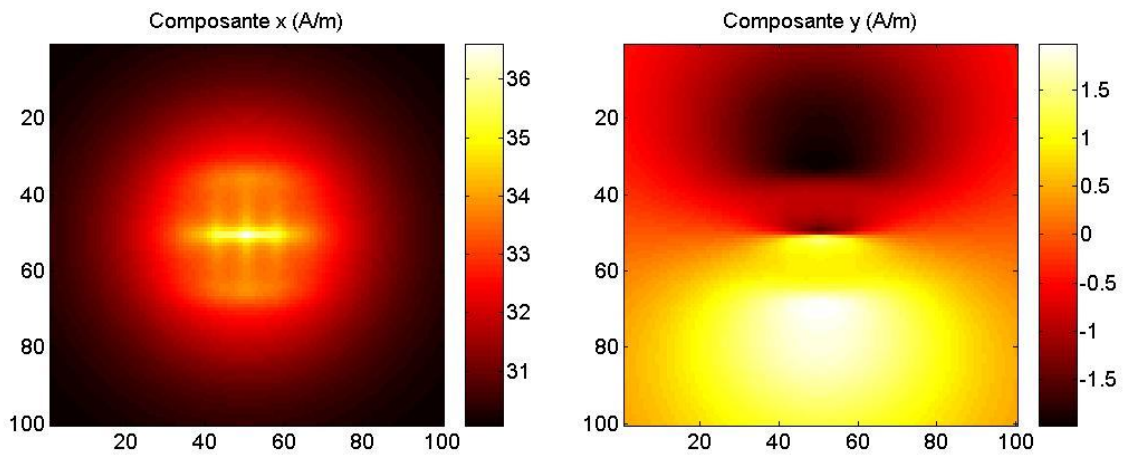


Figure II.23. Champ total de la sphère issu de la méthode  $\phi$  sur le plan 1

Sur ces représentations graphiques du champ dans l'air, on constate, comme pour les formulations Q et M, la condensation des charges mais de manière beaucoup moins sensible. Il subsiste, en effet, quelques artefacts de la condensation des charges sur les arêtes, en particulier sur la composante x. À priori, cela semble positif en ce qui concerne le calcul du champ proche des tôles ferromagnétiques.

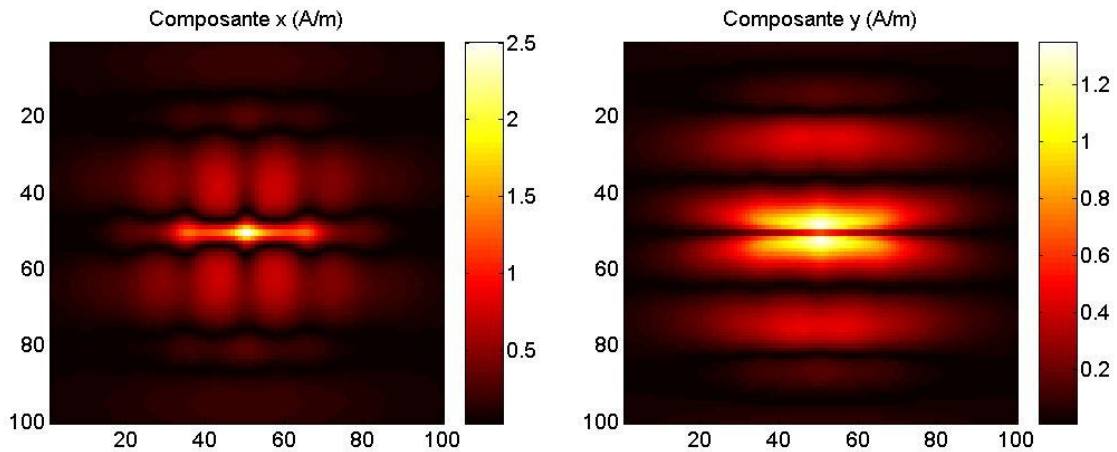


Figure II.24. Erreur sur le champ total de la sphère issu de la méthode  $\phi$  sur le plan 2

Les résultats ci-dessus confirment les qualités de la formulation en potentiel scalaire puisque l'erreur vis-à-vis du champ analytique a été largement réduite par rapport aux autres formulations intégrales (cf. tableau ci-dessous).

Erreur maximale ( $A.m^{-1}$ )	Composante X	Composante Y
Q	$\approx 17$	$\approx 9$
M	$\approx 7$	$\approx 4$
$\varphi$	$\approx 2.5$	$\approx 1.3$

Cette formulation est, dans cet exemple, intrinsèquement plus performante que les deux autres méthodes globales puisqu'elle est plus précise à nombre équivalent d'inconnues. Il peut alors sembler tentant de dire qu'elle est en fait encore plus précise que ce qui est présenté ici en raison de l'erreur géométrique que l'on pourrait rendre comparable pour les trois formulations en augmentant fortement le nombre d'éléments du maillage. Cependant, en pratique (en supposant que cette méthode soit efficace pour la résolution du problème inverse) une telle augmentation ne sera pas possible : la géométrie de sous-marin qui sera utilisée dans la suite de ce mémoire n'est pas triviale. Cela implique que pour des raisons de limitation en mémoire machine, la précision géométrique du maillage de la méthode  $\varphi$  sera effectivement plus faible que celui des méthodes Q et M. Les résultats ci-dessus, présentés avec une erreur géométrique, sont donc représentatifs de ce qui sera réellement calculé dans les paragraphes suivants.

Remarque : ces résultats valident l'approche par différences finies du calcul du champ dans l'air.

### b - Cas d'une plaque

On reprend également le cas test de la plaque avec un maillage qui comporte cette fois 121 éléments et 408 inconnues, ce qui est significativement moins important (environ 10%) que les nombres d'inconnues des deux autres formulations.

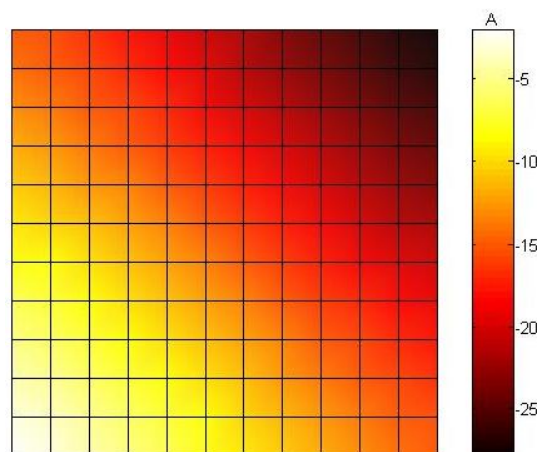
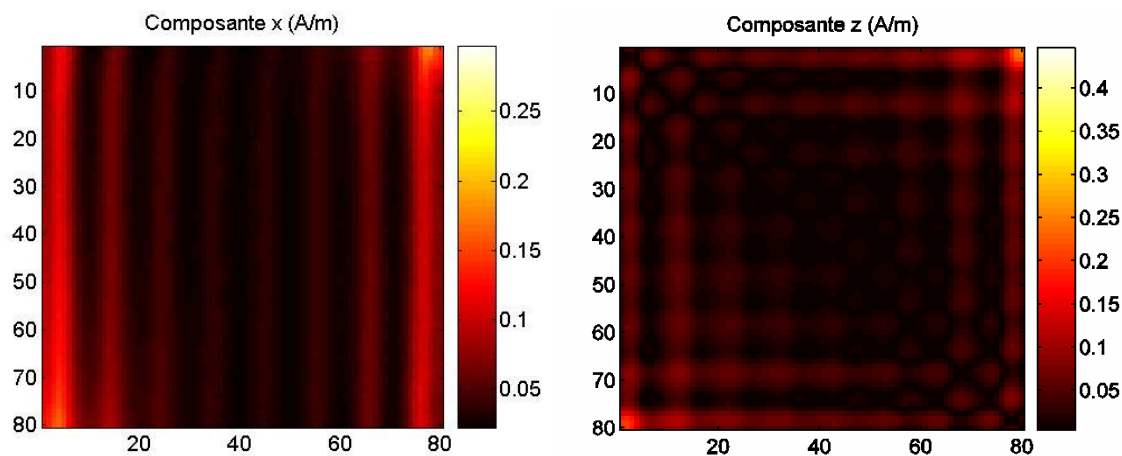


Figure II.25. Potentiel magnétique sur la plaque


 Figure II.26. Erreur sur le champ total de la plaque issu de la méthode  $\varphi$ 

Sur ce cas test, la formulation en potentiel scalaire confirme ses qualités pour le calcul du champ à proximité des sources comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous.

Erreur maximale ( $A.m^{-1}$ )	Composante X	Composante Y
Q	$\approx 0.30$	$\approx 0.46$
M	$\approx 0.29$	$\approx 0.46$
$\varphi$	$\approx 0.18$	$\approx 0.26$

### c - Perméabilité réversible élevée

Il va être question ici de vérifier rapidement la validité des formulations en champ réduit et en champ total avec des valeurs de perméabilité typiques des perméabilités anhystériques des aciers marins mais également avec des perméabilités très importantes utilisées, par exemple, dans des applications de blindage magnétique. L'étude de ces dernières perméabilités ne concerne pas directement les travaux de cette thèse ; cependant, comme il s'agit de résultats remarquables, en particulier pour la méthode en potentiel scalaire, il semble important de les signaler.

Afin d'illustrer les difficultés des méthodes en champ réduit, nous reprenons brièvement le cas test de la plaque mais avec une perméabilité de 40000. On observe les aimantations induites correspondantes dans le champ inducteur tangent dont les deux composantes valent  $15 A.m^{-1}$ .

Sur la représentation de l'aimantation issue de la méthode M apparaissent des artefacts (Fig. II.27), localisés principalement au milieu des côtés, qui ne sont en aucun cas réalistes : il n'y a aucune raison physique pour que l'aimantation se concentre en ces points. Comme cela a déjà été expliqué, ils proviennent d'erreurs numériques dues à la soustraction de grands nombres de normes comparables mais de signes opposés. Afin de constater que c'est bien l'effet de la perméabilité qui est en jeu dans cette expérience numérique, nous comparons les aimantations induites par une plaque de perméabilité 96 (Fig. II.28). Cependant, il est à noter que le champ dans l'air, sur les lignes de signature discrétisées en 100 points d'évaluation (Fig. II.16), n'est quasiment pas dégradé. Proche du matériau, à 5cm, les écarts entre la méthode M et la référence, les éléments fins, sont uniquement visibles aux bords de la tôle (Fig. II.29), conformément aux erreurs sur la répartition d'aimantation, mais ils restent très faibles et très localisés. Un peu plus loin, à 50cm (Fig. II.30), l'erreur apparaît plus



significativement mais demeure, au maximum, inférieure à 5%. En revanche, les différences entre la méthode  $\varphi$  et les éléments finis sont complètement négligeables.

Par conséquent, on considérera que nos formulations globales en champ réduit sont acceptables avec des matériaux ferromagnétiques linéaires dont les perméabilités sont élevées et en particulier avec les perméabilités anhystérétiques des aciers marins qui sont de l'ordre de 3000.

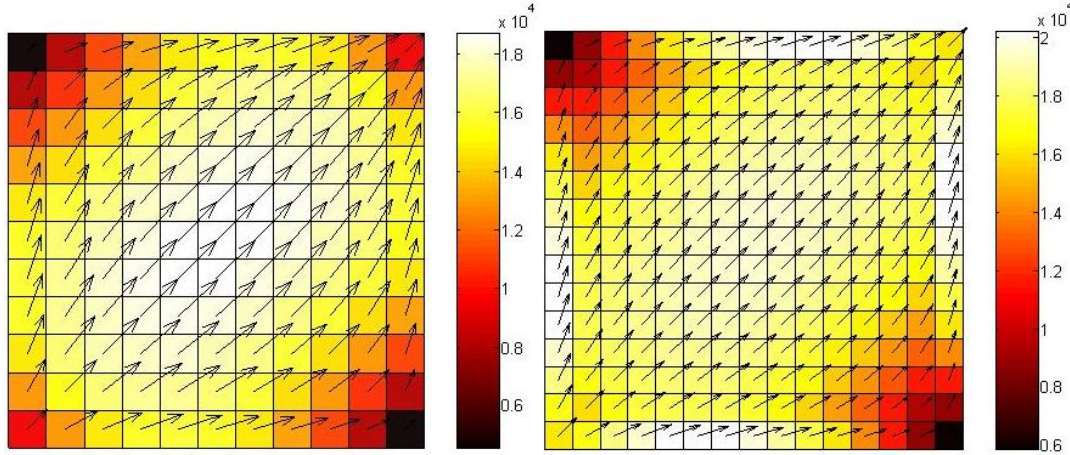


Figure II.27. Comparaison des aimantations issues de la méthode  $\varphi$  (à gauche) et M (à droite) avec une perméabilité de 40000 ( $A.m^{-1}$ )

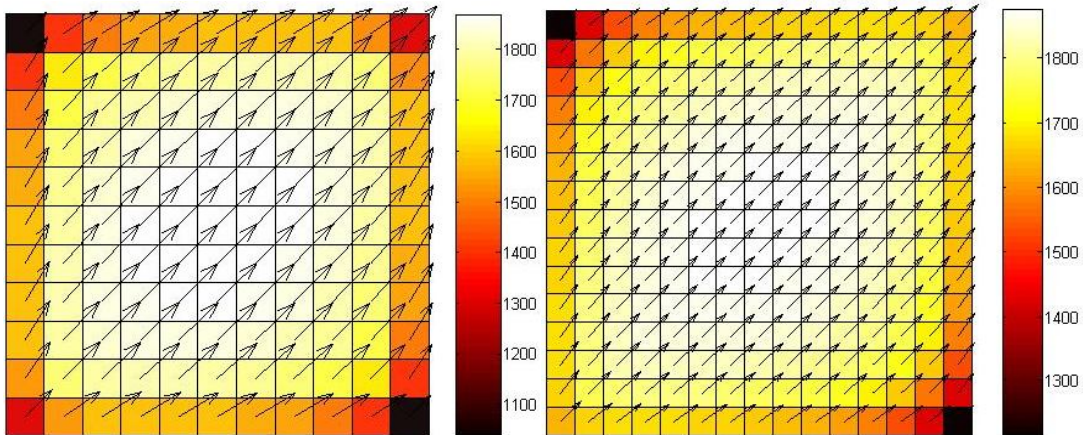


Figure II.28. Comparaison des aimantations issues de la méthode  $\varphi$  (à gauche) et M (à droite) avec une perméabilité réversible de 96 ( $A.m^{-1}$ )

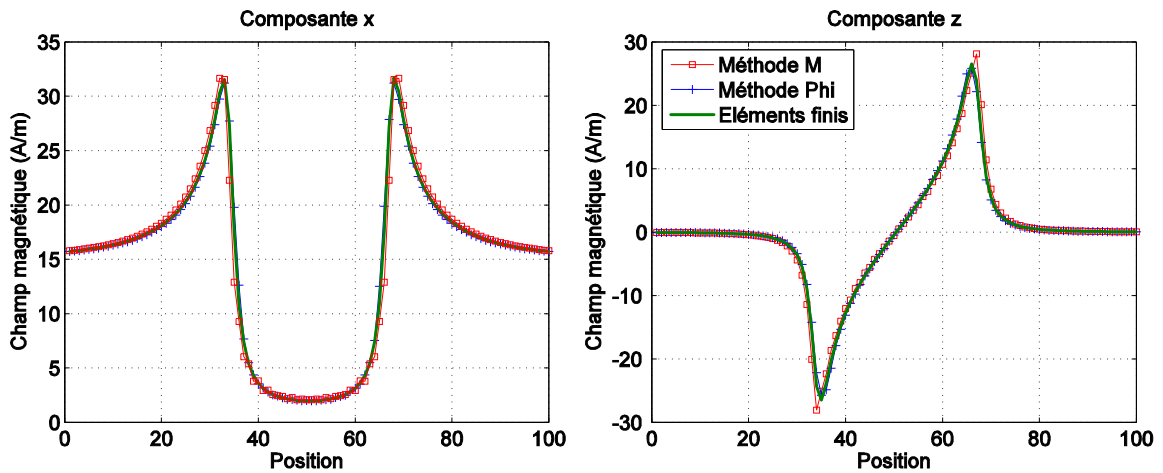


Figure II.29. Champ d'une plaque de perméabilité 40000 sur la ligne à 0.05m des tôles. Comparaison entre les formulations éléments finis, en potentiel scalaire et en aimantation.

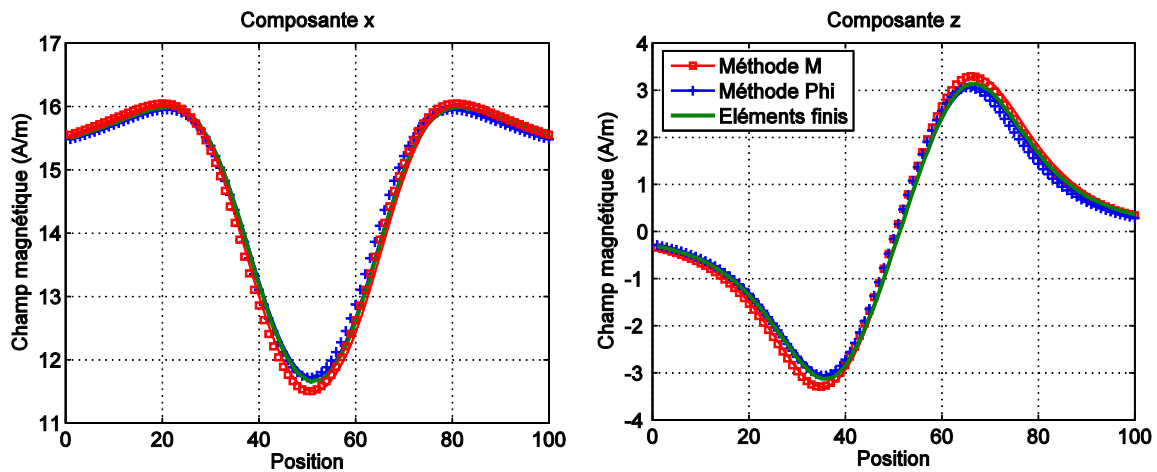


Figure II.30. Champ d'une plaque de perméabilité 40000 sur la ligne à 0.5m des tôles. Comparaison entre les formulations éléments finis, en potentiel scalaire et en aimantation.

### III.2.6 Discussion sur ces trois formulations

Lors de cette partie, trois formulations globales du problème direct magnétostatique ont été établies avec précision. Elles présentent quelques différences notables que nous allons maintenant résumer et commenter.

#### a - Validité du calcul en champ proche

Il a été établi que les causes de l'erreur du calcul du champ proche des tôles par les formulations globales décrites étaient : la discrétisation de la géométrie, la mauvaise prise en compte des effets de pointe, la condensation des sources et le choix de la répartition d'aimantation du modèle.

Le problème de la discrétisation de la géométrie se pose tout particulièrement pour la méthode  $\varphi$  qui nécessite un très grand nombre d'inconnues en raison des nœuds ajoutés au milieu de chacune des arêtes du maillage. L'exemple précédent de la sphère illustre effectivement la dégradation de la géométrie due à la discrétisation. De plus, sur des géométries complexes, la limite de mémoire informatique peut être facilement atteinte et rendre impossible un raffinement du maillage. L'utilisation de certaines méthodes numériques du type Fast Multipole Method [ROKHLIN 1985] permettrait peut-être d'évacuer ce problème mais il n'a pas été possible de les implémenter dans nos codes, dans le temps imparti pour ces travaux de thèse.

Comme le choix de la répartition de l'aimantation fixe la singularité de la condensation des sources, les deux dernières causes sont équivalentes. En effet, par exemple, une aimantation linéaire impose l'existence d'une densité de charge surfacique sur les arêtes additionnée à une densité volumique dans l'élément. Les singularités des formulations sont schématisées sur la figure II.31.

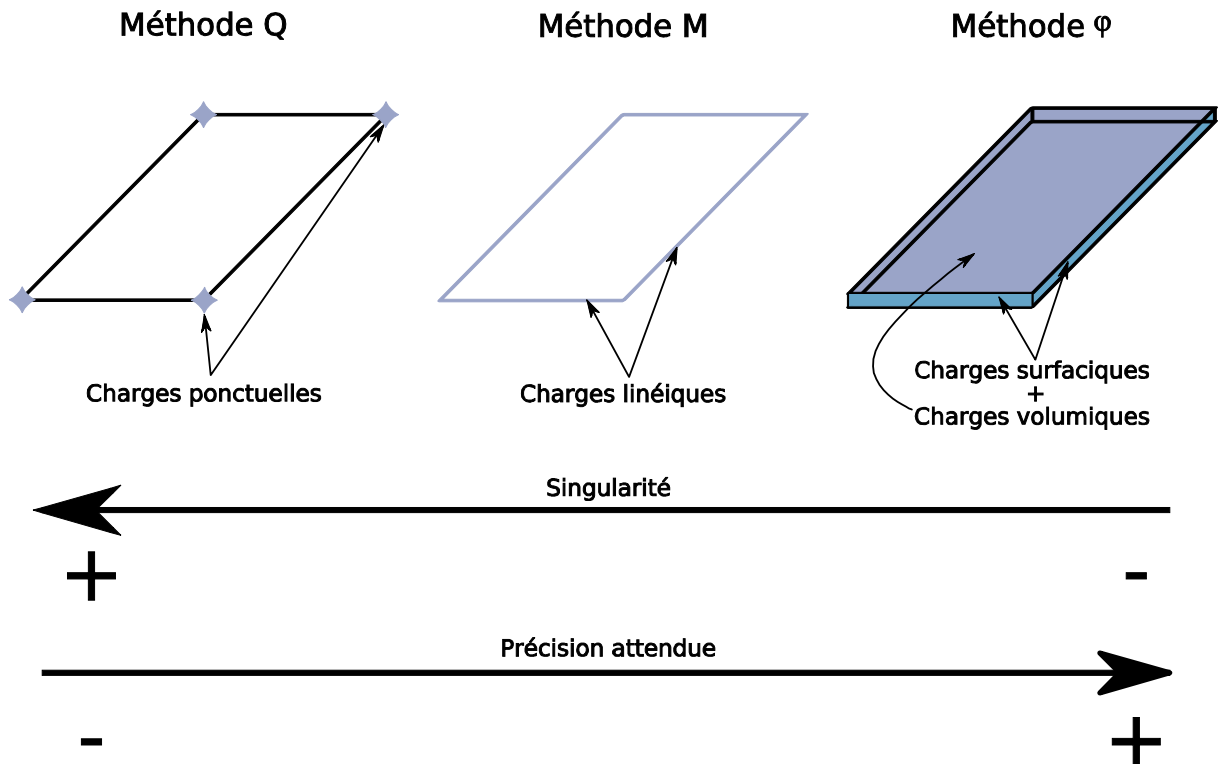


Figure II.31. Répartition de charges des différentes formulations

Ce schéma de représentation des sources du champ magnétique et les résultats numériques de calcul du champ indiquent clairement qu'il sera judicieux, quand ce sera possible, de placer les capteurs de champ magnétique nécessaire à l'identification en face des barycentres des éléments, c'est-à-dire le plus loin possible des singularités.

Concernant les effets de pointes, comme leurs modélisations sont très difficiles, il est prudent d'éloigner les capteurs des arêtes vives de la géométrie. Comme le système à modéliser est un sous marin, qui a une géométrie relativement régulière, nous serons sûrement peu ennuyé par ce type de problème.

### b - Discussion préliminaire en vue du problème inverse

Des formulations qui ont été décrites et en négligeant toutes les difficultés de résolution propres aux problèmes inverses, toutes ne sont pas aussi intéressantes dans l'optique de développements futurs. En effet, il est fortement envisagé d'introduire, dans la problématique de l'immunisation en boucle fermée et à plus ou moins long terme, les effets magnétostrictifs dus à la pression. Or le caractère fictif des charges magnétiques ponctuelles condamne quasiment la formulation Q. Les rares modèles magnétostrictif sont tous étroitement liés à l'aimantation [JILES 1995] et il y a peu de chance de voir un jour des modèles en charges. Pour résumer, la formulation en charges ponctuelles atteint ses limites alors que les deux autres méthodes consentent l'introduction d'informations magnétostrictives. Par conséquent, nous allons déployer beaucoup d'efforts pour disposer d'une formulation qui soit à la fois capable de traiter le problème inverse en champ proche et qui soit en aimantation (ou en potentiel magnétique scalaire, le lien avec l'aimantation étant bien connu).

**c - En résumé**

Résumons dans un tableau les hypothèses émises et les caractéristiques remarquables de chacune des formulations. Dans ce tableau, les informations en orange sont plutôt négatives, en vert plutôt positives et en blanc plutôt neutres.

	<b>Q</b>	<b>M</b>	<b><math>\varphi</math></b>
<b>Existence physique des sources</b>	Fictive	Réelle	Réelle
<b>Couplage magnétostrictif</b>	Non	Oui	Oui
<b>Formulation</b>	Champ réduit	Champ réduit	Champ total
<b>Répartition d'aimantation</b>	Sans objet	Constante par élément	Linéaire par élément
<b>Modèle de charge</b>	Ponctuel	Linéique	Surfacique + Volumique
<b>Modèle</b>	Surfacique	Surfacique	Volumique
<b>Divergence analytique du champ</b>	Sur les contours	Sur les contours	Aucune
<b>Contrainte sur l'aimantation</b>	Aucune	Aucune	Continuité tangentielle

La remarque principale vis-à-vis de ce tableau est que la formulation en charges fait un nombre important d'hypothèses par rapport aux autres sources.

A propos des contraintes sur l'aimantation, il semble préférable d'imposer la continuité tangentielle entre deux éléments. Pourtant, l'ensemble des géométries traitées durant cette thèse n'a pas pu mettre en valeur un avantage quelconque à le faire. Cet éventuel avantage théorique de la formulation en potentiel scalaire n'est, pour nous, pas significatif (nous avons déjà fait remarquer qu'il était, en revanche, utile dans le cas de circuit magnétique fermé).

## IV La génération de mesures

La mise en œuvre d'une expérimentation en champ faible est très délicate et très coûteuse en terme financier mais également en temps d'occupation du personnel et des matériels (simulateur de champ, moyens de mesures, ...) : cela est d'autant plus vrai pour des mesures sur une maquette de sous-marin que l'on imagine, d'ores et déjà, complexe. C'est pourquoi une méthode simple et rapide de génération de mesures numériques réalistes a été mise au point afin de tester les algorithmes d'inversion des chapitres suivants et en attendant de disposer de mesures sur une maquette réelle.

Ce processus relève d'une conjugaison d'effets induits sur des tôles ferromagnétiques d'où la présence de ce paragraphe dans ce chapitre.

Il s'agit de générer des mesures non triviales (c'est-à-dire qui ne soient pas issues d'un induit seul... ce qui serait bien naïf pour le problème inverse) et représentatives d'un état magnétique possible du matériau ferromagnétique. Comme cela a été dit dans le premier

chapitre, l'aimantation est la somme de l'aimantation rémanente et de l'aimantation induite. Il va donc s'agir de conférer aux tôles une aimantation formée de ces deux composantes.

### IV.1 Génération d'aimantation globale

Pour générer une aimantation globale, on considère que le matériau a atteint son aimantation rémanente d'équilibre dans un champ inducteur  $\mathbf{H}_a$ . En pratique, il peut s'agir d'un navire qui navigue au même cap pendant un temps suffisant sans que le champ inducteur ne varie (ce qui, soyons clair, n'arrive jamais). Puis ayant acquis cette aimantation rémanente, le matériau est placé dans un autre champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  (autrement dit le navire change de cap). L'aimantation des tôles est alors composée de l'aimantation rémanente d'équilibre sommée à l'aimantation induite due, à la fois, au champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  et aux effets de l'aimantation rémanente.

Cette méthode de génération de mesures présente donc le désavantage de ne générer que des aimantations globales ce qui n'est, en pratique, pas très réaliste. Les navires possèdent tous des aimantations locales plus ou moins importantes mais, en tout cas, souvent non négligeables. Nous proposons un peu plus loin un moyen de créer des rémanents locaux.

Ce processus a été mis en place numériquement pour les formulations M et  $\varphi$ . La méthode en aimantation étant la plus proche de la physique, il semble naturel de l'utiliser ici. De plus, l'objectif est de générer des mesures là où les capteurs seront effectivement dans la réalité, c'est pourquoi la formulation en potentiel peut s'avérer très performante puisqu'elle est manifestement la plus précise à proximité des sources du champ magnétique. Enfin, l'étude précédente sur l'effet des perméabilités élevées (quelques milliers pour les perméabilités anhystérétiques des tôles marines) dans le cas des formulations en champ réduit montre que l'erreur commise sur le champ dans l'air est faible : il n'y a ainsi pas de problème à utiliser la méthode M.

### IV.2 Génération par l'aimantation

Soient  $\mathbf{H}_a$  le champ d'équilibre,  $\mathbf{H}_0$  le champ induit,  $\chi_a$  et  $\chi_r$  les susceptibilités magnétiques anhystérétique et réversible.

D'après (II.60) :

$$(\mathbf{D}_{M_a} + \mathbf{Id}) \cdot \mathbf{M}_a = \mathbf{S}_{M_a} \quad \text{II.82}$$

Où  $\mathbf{M}_a$  est le vecteur d'aimantation d'équilibre,  $\mathbf{D}_{M_a}$  la matrice directe en aimantation avec la susceptibilité  $\chi_a$  et  $\mathbf{S}_{M_a}$  le vecteur du champ d'équilibre.

L'aimantation induite est issue à la fois du champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  et du champ créé par l'aimantation rémanente de la tôle elle-même. Ainsi, en utilisant  $\mathbf{A}_M$  la matrice qui relie l'aimantation au champ en tous les barycentres des éléments du maillage (II.61), l'aimantation induite vaut :

$$(\mathbf{D}_{M_i} + \mathbf{Id}) \cdot \mathbf{M}_i = (\mathbf{S}_{M_0} + \mathbf{A}_M \cdot \mathbf{M}_a) \quad \text{II.83}$$

Où  $\mathbf{M}_i$  est l'aimantation induite,  $\mathbf{D}_{M_i}$  la matrice directe en aimantation avec la susceptibilité réversible et  $\mathbf{S}_{M_0}$  le vecteur du champ inducteur.

L'aimantation est la somme de l'aimantation rémanente et de l'aimantation induite :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_i \quad \text{II.84}$$

Finalement, il est possible de déterminer le champ dans l'air de cette aimantation en tout point, et en particulier aux emplacements possibles des capteurs, grâce à (II.61).

### IV.3 Génération par les potentiels magnétiques scalaires

De la même manière que pour l'aimantation, il est nécessaire de déterminer les potentiels d'équilibre de la géométrie dans le champ d'équilibre (II.74) :

$$(\mathbf{D}_{\varphi_a} + \mathbf{Id}) \cdot \varphi_a = \mathbf{S}_{\varphi_a} \quad \text{II.85}$$

Où  $\varphi_a$  est le vecteur de potentiel d'équilibre aux nœuds du maillage,  $\mathbf{D}_{\varphi_a}$  la matrice directe en potentiel avec la susceptibilité anhystérique et  $\mathbf{S}_{\varphi_a}$  le vecteur des potentiels sources.

Les potentiels induits  $\varphi_i$  sont dus à l'aimantation rémanente et au champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  :

$$(\mathbf{D}_{\varphi_i} + \mathbf{Id}) \cdot \varphi_i = (\mathbf{S}_{\varphi_i} + \varphi_a - \mathbf{S}_{\varphi_a}) \quad \text{II.86}$$

$\mathbf{S}_{\varphi_i}$  représente le vecteur des potentiels sources du champ inducteur et  $\varphi_a - \mathbf{S}_{\varphi_a}$  l'effet du rémanent d'équilibre.

La détermination du champ est un peu plus délicate que pour la méthode M. En effet, son expression dépend de la perméabilité (II.79). Il est donc nécessaire de calculer les effets de l'aimantation d'équilibre et de l'aimantation induite avec les perméabilités correspondantes puis de sommer ces deux contributions.

### IV.4 Validité théorique de la méthode de génération de mesures

En toute rigueur la méthode mise en place numériquement n'est pas correcte comme on va le constater sur le diagramme d'aimantation suivant (Fig. II.32) où l'on a simplifié la géométrie du problème par un ellipsoïde de coefficient de forme N (cf. Annexe I).

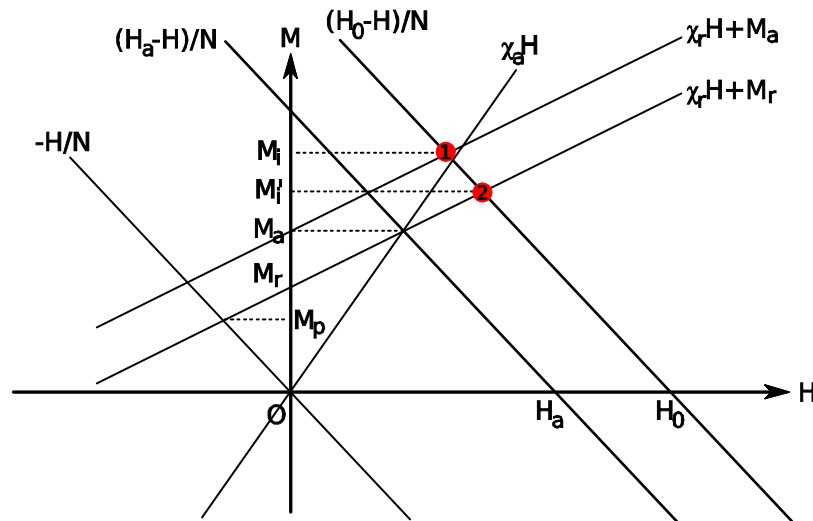


Figure II.32. Diagramme d'aimantation de la méthode de génération de mesures

Dans la procédure numérique mise en place, l'aimantation rémanente  $M_a$  est communiquée au matériau ferromagnétique alors qu'en réalité celui-ci a acquis l'aimantation rémanente  $M_r$ . En effet, la mise en champ nul des tôles se fait selon la droite de recul  $\chi_r H$  qui nous indique l'aimantation permanente  $M_p$  et l'aimantation rémanente  $M_r$ . Mais comme il est numériquement très difficile, sur des géométries non triviales, de simuler la droite de recul, on considère, à tort donc, que l'aimantation rémanente vaut  $M_a$ . Remarquons cependant que l'erreur n'est pas physiquement irréaliste : cela correspond uniquement à un champ  $H_a$  plus important que la valeur prise initialement.

Finalement, l'ajout de l'induit place le matériau dans l'état magnétique 1 alors qu'il est en réalité dans l'état 2 et on constate que  $M_i$  est évidemment différente de  $M_i'$ .

Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution, avec les perméabilités réversibles et anhystériques typiques des tôles marines et avec un coefficient de forme comparable à celui de la forme d'un sous-marin, un rapide calcul montre que l'erreur introduite est négligeable. Cependant, les navires sont infiniment plus complexes qu'un ellipsoïde plein...

### IV.5 Validations expérimentales

La première étape de ce protocole correspond à une phase classique de stabilisation ou de polarisation du matériau ferromagnétique (cf. chapitre I §IV.1). C'est pourquoi il nous est possible de réutiliser des mesures réalisées en 2005 lors de la thèse de Sébastien Guérin [GUERIN 2005] dans un contexte légèrement différent. Elles vont permettre de valider le principe de génération de mesures décrit ci-dessus.

Ces mesures ont été faites sur la maquette de coque de navire précédemment citée (cf. chapitre I §IV.3.2). La tôle de cette maquette correspond à celle utilisée dans les cas tests précédents : perméabilité réversible de 96 et anhystérique de 2700. Le repère est défini par l'axe transversal, l'axe longitudinal et l'axe vertical dans cet ordre. La polarisation a été réalisée dans le champ  $\mathbf{H}_a$  et l'inducteur vaut  $\mathbf{H}_0$  :

$$\mathbf{H}_a = \begin{pmatrix} -0.20 \\ -1.59 \\ 31.85 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} -0.46 \\ -17.65 \\ 31.51 \end{pmatrix} \text{ en } \text{A.m}^{-1} \quad \text{II.87}$$

Les signatures, sous la maquette, obtenues par les deux méthodes M et  $\varphi$  de génération de mesures sont comparées avec les mesures réelles (Fig. II.34).

Les courbes théoriques et réelles sont proches mais loin d'être confondues. Cela permet tout de même de valider le processus de génération de mesures. Les différences entre mesures et simulation peuvent sans doute s'expliquer par une énergie insuffisante lors du traitement qui a donc été incapable de supprimer des aimantations rémanentes dures.

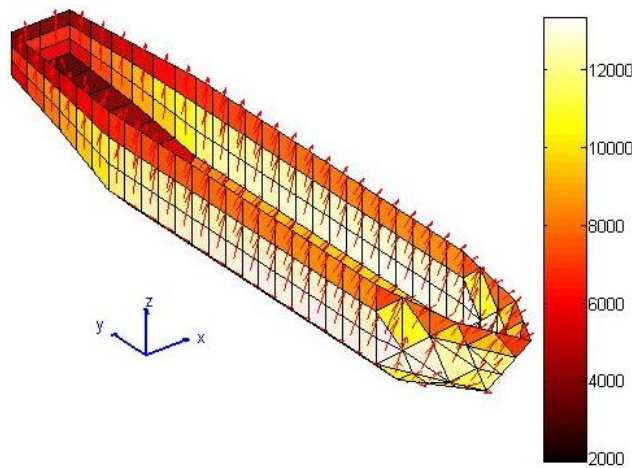


Figure II.33. Aimantation globale obtenue par la méthode en potentiel scalaire ( $\text{A.m}^{-1}$ )

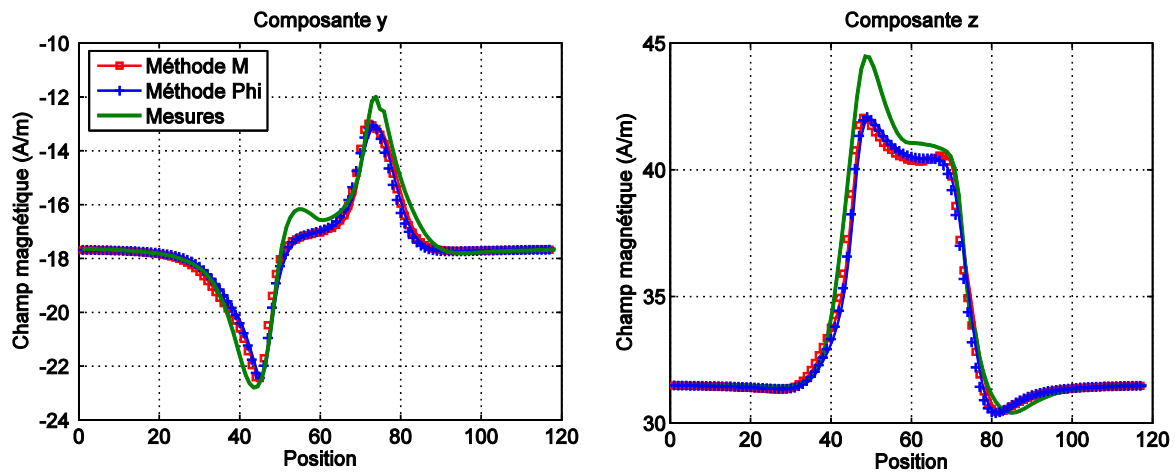


Figure II.34. Comparaison du champ réel de la maquette et des formulations M et  $\varphi$  dans le cadre de la génération de mesures

### IV.6 Génération d'aimantation locale

Conférer des aimantations locales aux navires est possible en théorie, il suffit, pour cela, de remplacer le champ inducteur uniforme  $\mathbf{H}_a$  par un champ plus local, typiquement le champ créé par un ou plusieurs dipôles. Ce processus est parfaitement réalisable sur une tôle en laboratoire mais est, en revanche, encore moins réaliste que le processus d'aimantation globale pour un navire réel : les aimantations locales d'un navire sont en partie aléatoire (manipulation des tôles par électroaimant lors de la construction par exemple) mais sont surtout très liées à la géométrie du navire (coin de tôle, ...). C'est pourquoi placer aléatoirement des dipôles autour du bâtiment est peu représentatif d'un état magnétique potentiel réel.

Cependant, ce processus de génération de mesures va être utilisé afin de vérifier l'efficacité de nos algorithmes d'inversion dans des cas plus complexes qu'une aimantation globale et régulière.

Enfin et cela va sans dire, il est possible de combiner aimantation locale et globale.

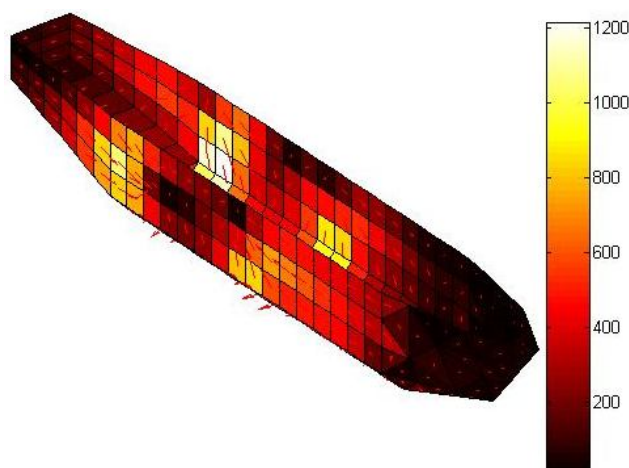


Figure II.35. Exemple d'aimantations locales obtenues par la méthode en aimantation ( $A \cdot m^{-1}$ )



## V Conclusion

Ce chapitre a permis d'acquérir une excellente connaissance du problème direct magnétostatique appliqué aux tôles minces ferromagnétiques mais également de discriminer les formulations potentiellement intéressantes pour la résolution du problème inverse.

En particulier, les formulations locales classiques ont été rapidement écartées au profit de méthodes globales pour lesquelles il existe un lien explicite entre les sources et leurs effets ce qui est primordial en vue du problème inverse.

Les deux premières méthodes exposées, en aimantation et en charges, sont classiques et leurs applications à la résolution d'un problème inverse, éprouvées. Néanmoins, leurs difficultés intrinsèques à évaluer le champ à proximité des tôles ont poussé à développer une formulation en potentiel scalaire magnétique. Bien que de formulation tout aussi classique, sa mise en œuvre ne l'est cependant pas. Sa proximité avec les deux autres méthodes globales permet d'espérer qu'elle soit pareillement inversible... ce que nous verrons dans le chapitre suivant dédié à la résolution du problème inverse.

**Chapitre III :**  
**Méthodes inverses : identification de**  
**l'aimantation de tôles minces**  
**ferromagnétiques à partir de**  
**mesures proches**



# Chapitre III : Méthodes inverses : identification de l'aimantation de tôles minces ferromagnétiques à partir de mesures proches

## I Introduction

L'objet du chapitre précédent consistait à mettre en œuvre des méthodes de calcul de l'aimantation induite d'un matériau ferromagnétique. Nous rappelons qu'il s'agit d'un problème direct ou, autrement dit, d'un problème déterministe dont la seule connaissance des paramètres physiques et géométriques permet la résolution. En réalité, l'aimantation d'un navire est formée d'une deuxième composante, l'aimantation rémanente, non déterministe. Même en disposant de modèles adéquats pour décrire les effets magnétostrictifs, il est illusoire d'espérer disposer de l'histoire de chacune des tôles d'un bâtiment. Actuellement, ce que nous savons de l'aimantation rémanente est qu'elle tend lentement vers l'équilibre sur un navire de surface et probablement beaucoup plus rapidement sur un sous-marin en raison des effets de pression. Des incertitudes subsistent donc à ce sujet. Nous n'en avons, en revanche, pas sur le fait avéré que le rémanent est modifié lors des opérations des navires ce qui accroît inévitablement leur risque de détection par rapport à leur dernière vérification sur station de mesure. Il est alors absolument nécessaire d'évaluer correctement l'aimantation totale d'un bâtiment et seule la mesure le permet.

Nous nous trouvons ainsi typiquement confrontés à un problème inverse d'identification. La première partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation, à la formalisation et aux méthodes de résolution de ces problèmes inverses. Nous introduirons ensuite les formulations inverses des méthodes en aimantation, en charges et en potentiel et évaluerons leurs performances pour la prédiction de l'aimantation. Des conclusions que nous en tirerons, des avancées majeures seront proposées pour résoudre l'identification magnétique avec des capteurs proches. Enfin, ce chapitre présentera les outils permettant l'insertion d'information à priori dans le problème inverse à l'aide d'une approche bayésienne.

## II Définition d'un problème inverse

### II.1 Problème inverse : vision informelle

Historiquement et en conséquence du principe fondamental de causalité posé par Newton (« les causes précèdent les effets »), la formation scientifique que nous avons tous reçue est fortement ancrée dans le problème direct et le déterminisme : il s'agit de déduire les effets d'un système connaissant les causes. Typiquement, il peut s'agir de déterminer la vitesse, et/ou la trajectoire, d'une bille lancée sur un plan incliné connaissant la position initiale, le vecteur vitesse initial, le profil du plan et les frottements.

Pourtant, initialement, ce n'est sans doute pas ce type de raisonnement qui a permis à l'Homme de s'interroger sur le monde qui l'entoure : le point de départ de toute science se trouve être l'observation ou sa version évoluée : la mesure. Un expérimentateur (qui peut-être un scientifique ou non) est parfois confronté à des phénomènes qui lui échappent et qu'il cherche à expliquer : un homme préhistorique découvrant le feu a dû se poser la question de la cause de son surprenant résultat afin de pouvoir le réitérer. Plus récemment, c'est la mesure d'irrégularités dans la trajectoire de la planète Uranus qui permirent à Le Verrier de prédire l'existence de Neptune mais également sa masse, son orbite et sa position ! D'une manière générale, il s'agit de déduire les causes des effets. La théorie des problèmes inverses est la formalisation mathématique de ce concept.

Il est aisé d'imaginer que les problèmes inverses vont poser des difficultés particulières. La première est que des mêmes effets peuvent provenir de causes différentes. La connaissance du vecteur vitesse de la bille en un point de sa trajectoire ne permet pas de connaître avec certitude sa position et son vecteur vitesse initiale. Comment alors discriminer la cause réelle parmi les différentes possibilités ? Pour résoudre ce problème, il peut sembler naturel de multiplier les mesures. Nous verrons que cela n'est pas forcément judicieux et que d'autres solutions s'offrent également à nous. Cela nous mène naturellement à la deuxième principale difficulté : la mesure joue un rôle fondamental. De sa précision va dépendre la qualité de l'identification des paramètres physiques.

Malgré les distinctions qui ont été faites entre problème direct et problème inverse, il faut bien garder à l'esprit qu'ils restent intimement liés : c'est l'observation qui a permis d'établir les modèles mathématiques déterministes du problème direct tout comme il est impensable de résoudre un problème inverse sans une connaissance parfaite du problème direct [TARANTOLA 1987].

### II.2 Problème inverse et problème inverse magnétostatique : formalisation mathématique

#### II.2.1 La paramétrisation du système

Il s'agit de la première étape essentielle à la résolution de tout problème inverse. Elle a été réalisée dans le chapitre précédent et elle consiste à obtenir une représentation mathématique du phénomène à observer de la manière la plus pertinente possible : cibler les causes des phénomènes, représentation de la géométrie, choix d'inconnues adéquates, choix d'une formulation adaptée,... Le maillage de la géométrie est un exemple simple de paramétrisation : le nombre d'inconnues est considérablement réduit par l'utilisation de nœuds et d'éléments surfaciques élémentaires : il est vain (et surtout impossible) de représenter toutes les causes du ferromagnétisme puisqu'il faudrait alors tenir compte de chacun des domaines de Weiss.

Nous introduisons l'espace des paramètres  $P$  et l'espace des mesures  $M$  dont les dimensions dépendent du problème choisi. On appelle  $\mathbf{p}$  un vecteur de paramètres de  $P$  et  $\mathbf{m}$  un vecteur de mesures de  $M$ .

Ces vecteurs sont reliés par la représentation mathématique  $\mathbf{A}$  du système contenant la physique ainsi que la géométrie et dont on peut déduire explicitement  $\mathbf{m}$  connaissant  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}(\mathbf{p}) \quad \text{III.1}$$

Désormais, nous appellerons  $\mathbf{m}$  un jeu de mesures parfaites,  $\mathbf{m}_r$  un jeu de mesures réelles (donc affecté d'erreurs dues aux bruits, aux mésalignements et aux défauts de positionnement principalement) et  $\mathbf{p}$  le jeu de paramètres donnant la mesure  $\mathbf{m}$ .

## II.2.2 Les problèmes bien et mal posés

Du déterminisme du problème direct découle la célèbre maxime : « les mêmes causes produisent les mêmes effets ». Hadamard a donné un contenu mathématique à cette phrase en introduisant la notion de problème bien-posé [HADAMARD 1932] [KERN 2002]. Il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe.
- Elle est unique.
- Elle dépend continûment des données.

Un problème direct correctement établi est en général bien-posé.

Un problème qui n'est pas bien-posé au sens de la définition ci-dessus, c'est-à-dire qui ne remplit pas une des trois conditions, est dit mal-posé. C'est le cas de la très grande majorité des problèmes inverses :

- Le bruit ou la mauvaise qualité des mesures peut conduire à des observations qui peuvent ne pas être en accord avec le modèle : l'existence de la solution n'est alors pas garantie. Autrement dit, il n'existe pas de vecteur paramètres qui correspondent au vecteur mesures  $\mathbf{m}_r$ .
- La non-unicité a déjà été évoquée ci-dessus. La résolution d'un problème inverse va donc impliquer l'existence d'un choix parmi différentes solutions. Il va être nécessaire de préciser les moyens pour réaliser ce choix.
- La dernière condition peut également être exprimée en terme de stabilité de la solution vis-à-vis d'erreurs à la fois sur la modélisation et sur les mesures. Pour le moment, nous dirons simplement que la solution du problème ne doit pas être trop sensible à une petite erreur sur les données. Ultérieurement, nous introduirons un critère objectif pour quantifier cette instabilité.

## II.2.3 Définition

Le problème inverse consiste à déterminer les paramètres inconnus du système à l'aide d'informations qui peuvent être de deux natures : des mesures issues de l'expérience ou des connaissances à priori sur le système. Connaissant un modèle mathématique  $\mathbf{A}$ , issu du problème direct et liant explicitement mesures et sources, ainsi qu'un jeu de mesures  $\mathbf{m}_r$ , on peut résumer la problématique en :

Trouver  $\mathbf{p}_r$  tel que  $\mathbf{m}_r = \mathbf{A}(\mathbf{p}_r)$  et tel que  $\mathbf{p}_r$  soit la solution la plus physique possible III.2

La précision  $\mathbf{p}_r$  solution la plus physique possible est essentielle. Nous verrons qu'il n'est pas si complexe de déterminer un vecteur  $\mathbf{p}_r$  vérifiant la première condition mais qu'il l'est autrement plus de cibler la solution physique.

### II.2.4 Le problème inverse magnétostatique

Pour l'identification de l'aimantation des tôles des coques de sous-marin, nous disposerons de mesures du champ magnétique entre les coques du navire, d'informations partielles sur les états antérieurs du navire (lors d'une plongée, l'aimantation de la coque interne tend vers son état anhystérétique par exemple) et des modèles physiques décrits dans le chapitre II reliant les sources à leurs effets : les matrices, appelées inverses,  $\mathbf{A}_Q$ ,  $\mathbf{A}_M$  et  $\mathbf{A}_\varphi$ .

L'objectif est de déterminer une répartition de sources (charge, aimantation ou potentiel) compatible avec les mesures et le modèle.

### II.2.5 Point de vue algébrique

Dans le cadre de notre identification magnétostatique, les problèmes à résoudre sont discrets : le nombre de mesures est fini et limité par le nombre de capteurs et les paramètres inconnus sont liés au maillage de la géométrie des matériaux ferromagnétiques. Il est alors possible de définir notre problème inverse en tant qu'application linéaire (due à la linéarité du problème magnétostatique) entre les deux espaces P et M de dimensions finies  $d_P$  et  $d_M$  respectivement. Le problème inverse (III.2) est ainsi simplifié :

Trouver  $\mathbf{p}_r$  tel que  $\mathbf{m}_r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r$  et tel que  $\mathbf{p}_r$  soit la solution la plus physique possible III.3

Du point de vue de Hadamard, en se limitant à des espaces finis et aux applications linéaires, le problème inverse est bien-posé si et seulement si  $\mathbf{A}$  est bijective (ou la matrice associée inversible). Remarquons immédiatement qu'une condition nécessaire pour que cela soit effectivement le cas est que les espaces soient de dimensions égales ; or il faudrait multiplier les mesures pour que cela le soit dans le cadre de notre identification. En effet, on imagine que le maillage d'un sous-marin nécessitera quelques milliers d'éléments donc d'inconnues et étant donné la difficulté de mise en œuvre de mesures magnétiques en champ faible, on comprend aisément que le nombre d'inconnues sera largement supérieur au nombre de mesures. Cette raison est suffisante pour rendre notre problème inverse toujours mal-posé.

Reprenons les conditions de Hadamard avec une vision algébrique.

#### a - Existence d'une solution

L'existence d'une solution n'est pas une difficulté sérieuse pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle implique l'appartenance de  $\mathbf{m}_r$  à  $\text{Im}(\mathbf{A})$  (équivalent à  $\mathbf{A}$  surjective) ce qui est raisonnablement possible en supposant les mesures et le modèle direct de qualité. Même si ce n'est pas le cas, il suffit alors de se restreindre à  $\text{Im}(\mathbf{A})$ , par exemple en projetant la mesure sur cet ensemble.

#### b - Unicité de la solution

L'unicité de la solution nécessite l'injectivité de  $\mathbf{A}$  or, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, nous savons que cela ne sera jamais le cas. Disposant de moins de mesures que de paramètres à identifier, notre problème inverse est dit sous-déterminé. Inversement, les problèmes comportant plus de mesures que de paramètres sont appelés sur-déterminés. Sauf mention contraire, les résultats donnés dans la suite de ce mémoire concerneront les problèmes sous-déterminés.

**c - Stabilité de la solution**

La stabilité de la solution est liée au découplage des équations de **A**. Il faut que les équations de **A** soient les plus indépendantes possibles ou, abusivement, que **A** soit la plus injective possible, pour assurer une bonne stabilité de la solution vis-à-vis de perturbations sur les mesures ou d'erreurs sur le modèle direct. En théorie, dans le cas des problèmes sous-déterminés qui nous concernent, une condition suffisante de stabilité est :

$$rang(\mathbf{A}) = d_M \tag{III.4}$$

La matrice **A** est alors dite de rang plein ligne.

En pratique, cela n'est cependant pas suffisant en raison des erreurs de mesures. Considérons l'exemple suivant : deux capteurs sont placés à proximité l'un de l'autre dans l'environnement du matériau ferromagnétique à identifier : les deux équations de **A**, liant les paramètres et les mesures sur ces deux capteurs, seront donc également très proches (Fig. III.1). Il suffit alors que les mesures soient bruitées pour que ces deux équations quasi identiques aient des seconds membres très différents. On dit alors, encore une fois abusivement, que le bruit de mesure réduit le rang de **A**. Ces deux équations, bien que proches, sont effectivement mathématiquement indépendantes, cependant, les erreurs de mesures ne laissent pas d'autres choix que d'ignorer une de ces équations ce qui réduit bien le rang de **A**.

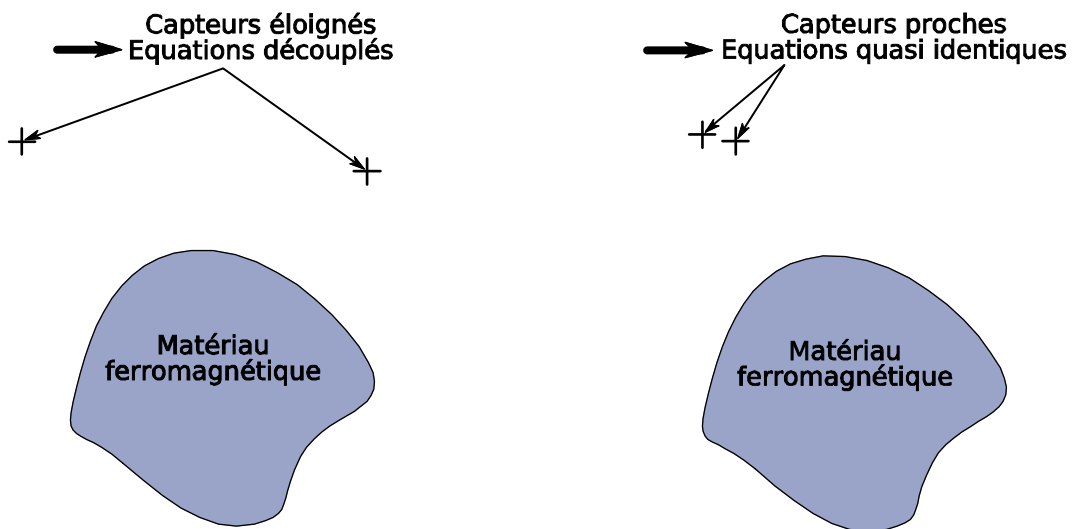


Figure III.1. Illustration d'instabilité du problème inverse due à des capteurs proches les uns des autres

Pour analyser la stabilité d'un problème inverse (ou d'une matrice dans le cas général), il est préférable d'introduire une grandeur particulière : le conditionnement, noté  $\xi$ . Il exprime la sensibilité de la solution aux perturbations des données [BONTEMPI 2008] et est donné par :

$$\xi(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \tag{III.5}$$

L'interprétation du conditionnement n'est pas aisée à partir de cette définition, le paragraphe sur la décomposition en valeurs singulières permettra de voir clairement son influence sur la stabilité. A cet instant, nous dirons simplement que plus il existe des équations proches dans la matrice **A**, plus le conditionnement est grand et donc plus l'inversion a des chances d'être sensible à de petites erreurs de mesures. Dans nos situations, des conditionnements de l'ordre de quelques dizaines sont considérés comme acceptables.

Nous commençons à comprendre pourquoi nous avons dit qu'il n'était pas forcément judicieux de multiplier les mesures pour faciliter l'identification des paramètres. Il existe alors



un risque important d'obtenir un système très mal conditionné dont l'instabilité ne permettra pas de discriminer parmi les différentes distributions de paramètres, souvent très différentes, donnant le vecteur de mesures aux incertitudes près.

De plus, aucune mesure n'étant parfaite, ajouter un capteur à un système, c'est également ajouter une inconnue : son erreur associée (bruit, mésalignement,...). C'est la raison pour laquelle aucun problème inverse d'identification ne sera jamais bien-posé au sens de Hadamard : il existe toujours au moins autant d'inconnues que l'on ne peut identifier que de mesures.

Une précaution nécessaire à prendre lors de la mise en place de notre problème inverse va être de disposer les capteurs à des distances respectables les uns des autres. L'analyse des conditionnements des matrices inverses des formulations Q et M dans la thèse de Chadebec mène à des valeurs de l'ordre de la dizaine ; il est vrai sur une géométrie très simple relativement à un sous-marin double coque, mais nous pouvons être raisonnablement optimiste quant à la stabilité de notre problème inverse.

### **II.3 Conclusion**

De cette analyse préalable, nous pouvons déjà avoir une bonne idée du comportement de notre problème inverse magnétostatique. L'équation fondamentale du problème inverse a été écrite et est directement issue du problème direct (cf. chapitre II). Les difficultés de résolutions ont été décrites mais aucune méthode n'a encore été donnée pour déterminer les solutions.

En raison du nombre limité de mesures du champ magnétique, le problème inverse est dit sous-déterminé et il existe ainsi une infinité de jeux de paramètres correspondant aux mesures : des critères de choix vont être nécessaire pour déterminer la solution la plus physique. Dans le vocabulaire des problèmes inverses, c'est ce que l'on appelle la régularisation.

Enfin, la stabilité de la solution de notre problème inverse vis-à-vis du bruit dépend principalement de quelques précautions concernant le placement des capteurs qui ne devront pas être situés à proximité les uns des autres.

La problématique de nos travaux se situe à la frontière de deux communautés très importantes et entre lesquelles les liens sont difficiles à établir : nous avons d'un côté les physiciens, particulièrement habiles à mettre en équation les phénomènes qui nous entourent, et de l'autre les mathématiciens, auteurs de théories très élaborées sur le domaine qui nous intéresse, le problème inverse, mais dont les rapports à la physique sont assez ténus. Il s'agit là de l'une des grandes difficultés de ce travail qui consiste, avec humilité, à essayer de concilier ces deux mondes.

## **III Les méthodes d'inversion sans information à priori**

Dans cette partie, nous allons introduire les différentes méthodes de résolutions d'un problème inverse mal posé. Nous supposons que nous n'avons pas d'autres informations sur le système que les mesures et que celles-ci sont parfaites.

Tout comme dans la section suivante, les méthodes d'inversion sont présentées d'une manière très générale et, sauf mention contraire, sans lien avec le problème inverse magnétostatique.

### III.1 La méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés est historiquement très populaire pour la résolution de problèmes inverses ; il s'agit en effet du calcul le plus simple conduisant à une solution unique de (III.3). Elle est par exemple à la base de la théorie de l'interpolation. Pourtant, malgré sa popularité et sa large diffusion, nous allons nous attarder un peu sur cette méthode, en partie car les références concernent quasi exclusivement le problème inverse sur-déterminé ([KERN 2002] [THEBAULT 2003] par exemple).

D'ailleurs, de par sa définition même, la méthode des moindres carrés ne s'applique en toute rigueur qu'à ces derniers problèmes. Cependant, comme nous le verrons un peu plus loin, la proximité de la forme et des caractéristiques de la solution des problèmes sous-déterminés avec la solution des moindres carrés nous incite à classer ces deux résolutions conjointement.

#### III.1.1 Résultats préliminaires

Soit une matrice  $\mathbf{A}$  rectangulaire de dimensions quelconques :

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$  inversible  $\leftrightarrow \mathbf{A}$  est de rang plein ligne : rang égal au nombre de ligne de  $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  inversible  $\leftrightarrow \mathbf{A}$  est de rang plein colonne : rang égal au nombre de colonne de  $\mathbf{A}$

On dit également, indifféremment pour rang plein ligne et rang plein colonne, que  $\mathbf{A}$  est de rang maximal.

#### III.1.2 Principe de la méthode

$\mathbf{A}$  n'étant pas inversible, la méthode des moindres carrés se base sur la considération naturelle que la solution doit minimiser la distance (la norme) entre le modèle et la mesure. Il s'agit donc de déterminer le jeu de paramètres  $\mathbf{p}_r$  défini tel que :

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r - \mathbf{m}\|_2^2 \text{ soit minimum} \quad \text{III.6}$$

Cette proposition n'est applicable qu'au problème sur-déterminé. En effet, comme le problème sous-déterminé est non injectif (nous le supposons également surjectif pour les raisons citées précédemment : modèle cohérent et mesures de qualité), il existe des solutions vérifiant l'égalité (III.3).

L'expression du vecteur  $\mathbf{p}_r$  vérifiant (III.6) est classiquement obtenue de manière analytique à l'aide d'une dérivation de la forme linéaire associée [SCHMERBER 2006]. Pourtant, nous préférons établir ce résultat à l'aide d'une vision algébrique ce qui, nous l'espérons, permettra une meilleure visualisation du calcul.

L'application linéaire associée à  $\mathbf{A}$  n'est pas surjective, par conséquent,  $\mathbf{m}$  n'est pas dans l'image de  $\mathbf{A}$ . L'idée est de chercher  $\mathbf{p}_r$  telle que la projection orthogonale de  $\mathbf{m}$  sur  $\text{Im}(\mathbf{A})$  soit égale à  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r$  (Fig. III.2).

On appelle  $\text{proj}(\mathbf{m})$  la projection orthogonale de  $\mathbf{m}$  sur  $\text{Im}(\mathbf{A})$ . Ainsi :

$$\mathbf{m} - \text{proj}(\mathbf{m}) \perp \text{Im}(\mathbf{A}) \quad \text{III.7}$$

Rappelons que deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{III.8}$$

Or l'image de  $\mathbf{A}$  est donnée par  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ , d'où :

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})^T \cdot (\mathbf{m} - \text{proj}(\mathbf{m})) = 0 \quad \text{III.9}$$

Equivalent, en supposant  $\mathbf{p}$  non nul, à :

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{m} = \mathbf{A}^T \cdot \text{proj}(\mathbf{m}) \quad \text{III.10}$$

N'oublions pas que nous cherchons,  $\mathbf{p}_r$  tel que :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r = \text{proj}(\mathbf{m}) \quad \text{III.11}$$

D'où :

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{m} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r \quad \text{III.12}$$

Cette équation est communément appelée équation normale du système linéaire associé. A la condition que  $\mathbf{A}$  soit de rang maximal, il est alors possible de déterminer la solution du problème au sens des moindres carrés puisque alors elle vaut :

$$\mathbf{p}_r = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{m} \quad \text{III.13}$$

On peut montrer que cette solution est unique [KERN 2002]. La minimisation de la distance provient évidemment de la projection orthogonale qui minimise (Fig. III.2) :

$$\mathbf{m}_r - \text{proj}(\mathbf{m}) = \mathbf{m} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r \quad \text{III.14}$$

La solution qui a été développée ici est finalement assez restrictive : elle ne s'applique qu'aux problèmes sur-déterminés, ce qui ne nous convient pas, mais en plus elle nécessite que la matrice  $\mathbf{A}$  soit de rang plein colonne.

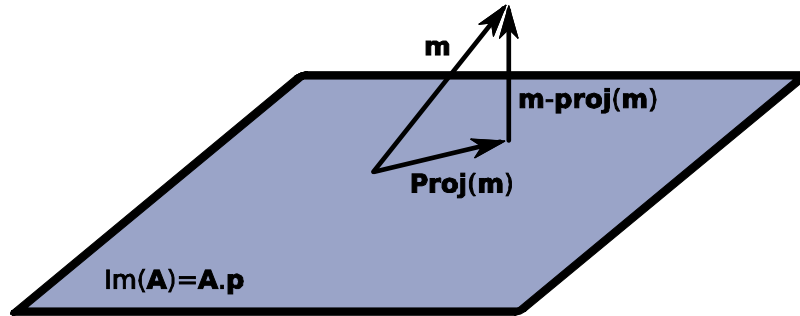


Figure III.2. Représentation algébrique des moindres carrés

### III.1.3 Expression de la solution pour le problème inverse sous-déterminé

Dans ce cas, il existe des vecteurs paramètres  $\mathbf{p}_r$  tels que :

$$\mathbf{m} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r \quad \text{III.15}$$

Commençons par préciser l'information intuitive, utilisée plusieurs fois précédemment, de la non injectivité de l'application linéaire. Pour simplifier l'expression suivante, nous supposons que  $\mathbf{A}$  est de rang maximal. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(\mathbf{A})) = d_p - d_m \neq 0 \quad \text{III.16}$$

Cela prouve que le noyau de  $\mathbf{A}$  n'est pas le singleton nul. Toute solution particulière de (III.15) additionnée d'un élément du noyau est également solution.

La matrice  $\mathbf{A}$  n'étant pas inversible, il s'agit de déterminer une solution particulière du problème et d'en étudier les caractéristiques.

Dans le cas où  $\mathbf{A}$  est de rang plein ligne, le vecteur  $\mathbf{p}$  formé par (III.17) est solution de (III.15) de manière évidente.

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{A}^T . (\mathbf{A} . \mathbf{A}^T)^{-1} . \mathbf{m} \quad \text{III.17}$$

Nous allons montrer que cette solution est la solution de norme minimale. Soit  $\mathbf{p}_s$  une autre solution particulière de (III.15).

$$\mathbf{A} . \mathbf{p}_r = \mathbf{A} . \mathbf{p}_s \Leftrightarrow \mathbf{A} . (\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_s) = 0 \quad \text{III.18}$$

Etablissons que  $(\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_s)$  et  $\mathbf{p}_r$  sont des vecteurs orthogonaux :

$$(\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_s)^T . \mathbf{p}_r = (\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_s)^T . \mathbf{A}^T . (\mathbf{A} . \mathbf{A}^T)^{-1} . \mathbf{m} = (\mathbf{A} . (\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_s))^T . (\mathbf{A} . \mathbf{A}^T)^{-1} . \mathbf{m} = 0 \quad \text{III.19}$$

A la lumière de ce résultat, évaluons la norme du vecteur  $\mathbf{p}_s$  :

$$\|\mathbf{p}_s\|^2 = \|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_r\|^2 = \|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_r\|^2 + \|\mathbf{p}_r\|^2 + 2(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_r)^T . \mathbf{p}_r = \|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_r\|^2 + \|\mathbf{p}_r\|^2 \geq \|\mathbf{p}_r\|^2 \quad \text{III.20}$$

La solution mise en évidence est donc bien la solution de norme minimale. Cette caractéristique va être d'une importance cruciale dans la résolution du problème inverse magnétostatique.

Une interprétation algébrique est également possible. Il suffit pour cela de remarquer que :

$$\mathbf{p}_r \perp \ker(\mathbf{A}) \quad \text{III.21}$$

Ce qui est évident d'après (III.18) et (III.19).

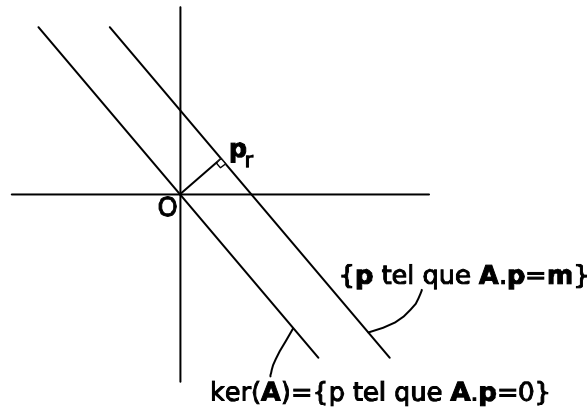


Figure III.3. Représentation algébrique de la solution du problème sous-déterminé

On peut alors interpréter ce résultat comme la projection orthogonale de l'origine sur l'espace des solutions de (III.15) (Fig. III.3), car  $\mathbf{p}_r$  est de norme minimale.

### III.1.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons établi une première solution du problème inverse qui nous intéresse. Cependant, quelques remarques sont indispensables : la première est que la méthode nécessite que la matrice inverse soit de rang maximal. Nous savons que pour y parvenir il faut prendre un certain nombre de précautions quant aux positions des capteurs, mais jusqu'à maintenant, rien ne nous indique que cela sera effectivement le cas pour notre maquette de sous-marin. La seconde remarque concerne la stabilité du vecteur solution vis-à-vis des perturbations : la matrice à inverser est formée par  $\mathbf{A} . \mathbf{A}^T$  et son conditionnement est le carré de celui de  $\mathbf{A}$ . Si, comme nous l'espérons, le conditionnement de  $\mathbf{A}$  est de l'ordre de la dizaine, alors la résolution par les moindres carrés devrait être acceptable, sinon l'instabilité risque d'être critique.

## III.2 La décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières (svd ou singular value decomposition en anglais) s'impose de plus en plus comme l'outil fondamental de résolution des problèmes inverses. Elle constitue à la fois une méthode de résolution efficace mais également l'outil le plus clair de compréhension du problème des perturbations.

### III.2.1 Définition

Soit une matrice  $\mathbf{A}$  de rang  $r$  et comportant  $d_p$  lignes et  $d_M$  colonnes, il existe deux matrices  $\mathbf{U}$ , matrice carrée de dimension  $d_p$ , et  $\mathbf{V}$ , matrice carrée de dimension  $d_M$ , orthogonales ( $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{Id}$  et  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{Id}$ ) et telles que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad \text{III.22}$$

Où

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & \omega_r & & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{III.23}$$

Remarque : la définition est donnée dans le cas d'un problème sous-déterminé :  $d_p < d_M$ .

Les  $\omega_i$  sont appelés valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{A}$ . Elles sont positives, non nulles, au nombre de  $r$  et rangées dans l'ordre décroissant.

Nous ne nous attardons pas sur la démonstration de ce résultat qui est classique et disponible par ailleurs [KERN 2002] ni sur les méthodes numériques nécessaires à cette décomposition. La svd est généralement disponible dans les bibliothèques mathématiques. Le cas échéant, ces informations peuvent être trouvées dans [PRESS 1992].

### III.2.2 Application à la résolution d'un problème inverse

Rappelons que nous cherchons des solutions à :

$$\mathbf{m} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_r \quad \text{III.24}$$

A l'aide de la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{A}$  et après multiplication à gauche de (III.24) par  $\mathbf{U}^T$ , il vient :

$$\mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \mathbf{p}_r = \mathbf{U}^T \mathbf{m} \text{ soit } \mathbf{\Sigma} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \text{ avec } \mathbf{X} = \mathbf{V}^T \mathbf{p}_r \text{ et } \mathbf{Y} = \mathbf{U}^T \mathbf{m} \quad \text{III.25}$$

Le nouveau système linéaire met en relation, de manière particulièrement simple, l'expression des mesures dans une base orthogonale de  $M$  (colonnes de  $\mathbf{U}$ ) avec le vecteur des paramètres dans une base orthogonale de  $P$  (colonnes de  $\mathbf{V}$ ).

De par la forme de  $\mathbf{\Sigma}$ , la résolution est évidente et les solutions sont de la forme :

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\omega_1} \\ \vdots \\ \frac{y_r}{\omega_r} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d_p-r} \end{pmatrix} \quad \text{III.26}$$

où les  $\alpha_i$  sont quelconques et les  $y_i$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{Y}$ .

Cette dernière équation explicite clairement le fait que le problème inverse aura une solution unique si nous sommes en mesure de déterminer les valeurs des coefficients  $\alpha_i$ . Cela nécessite de disposer d'autant d'informations supplémentaires que de coefficients inconnus. Attention cependant, recourir, par exemple, à  $d_p-r$  mesures additionnelles n'est pas forcément suffisant... En effet, ces mesures seront invariablement entachées d'erreurs qui seront autant d'inconnues supplémentaires.

Comme la matrice  $\mathbf{V}$  est orthogonale, la norme de la solution est donnée par :

$$\|\mathbf{p}_r\|^2 = \sum_{i=1}^r \left( \frac{y_i}{\omega_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{d_p-r} \alpha_i^2 \quad \text{III.27}$$

Parmi l'infinité de solutions, on appelle pseudo-solution de (III.24) la solution pour laquelle tous les  $\alpha_i$  sont nuls, c'est-à-dire la solution de norme minimale. En choisissant la solution de norme minimale, nous faisons une hypothèse importante vis-à-vis de notre problème inverse. En effet, cette hypothèse devra être compatible avec le modèle physique du système et en particulier, dans notre situation, avec le choix des sources du champ magnétique.

On appelle pseudo-inverse, et on note  $\mathbf{A}^*$ , la matrice telle que :

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{m} \quad \text{III.28}$$

et telle que  $\mathbf{p}_r$  soit de norme minimale. La construction de cette matrice est aisée à partir de la décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T \quad \text{III.29}$$

Où  $\mathbf{\Sigma}^+$  est formée par la transposée de  $\mathbf{\Sigma}$  en remplaçant les valeurs singulières par leurs inverses :

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{\omega_r} & \\ & & & 0 \\ & \mathbf{0} & & \end{pmatrix} \quad \text{III.30}$$

Nous constatons, en particulier avec l'aide de (III.26), que la décomposition en valeurs singulières permet de résoudre des problèmes inverses dont les matrices inverses ne sont pas de rang maximal. Les équations linéairement dépendantes sont naturellement écartées par l'action des  $r$  valeurs singulières. Autrement dit, nous avons réduit l'espace des paramètres  $\mathbf{P}$ ,

de base  $\text{vect}(v_1, \dots, v_{\dim P})$ , à un sous-espace  $P^*$  de dimension plus faible et formé par  $\text{vect}(v_1, \dots, v_r)$  dans lequel la solution est unique et de norme minimale.

Ainsi, nous venons de mettre en évidence une solution au problème inverse sous déterminé quel que soit le rang de la matrice inverse, ce qui est déjà une avancée significative par rapport à la méthode des moindres carrés. Avant d'étudier la stabilité et le conditionnement de la matrice inverse à l'aide de la décomposition en valeurs singulières, résumons son action à l'aide d'une représentation simplifiée des espaces vectoriels (Fig. III.4).  $\mathbf{p}$  est le vecteur de paramètres initiaux,  $\mathbf{m}$  la mesure supposée parfaite et  $\mathbf{p}_r$  la pseudo-solution. Malgré la restriction à  $P^*$ , l'absence de bruit et un modèle supposé parfait, la pseudo-solution ne peut être le jeu de paramètres initial  $\mathbf{p}$  que si, parmi les vecteurs solutions de (III.24), le choix du vecteur de norme minimale a un sens.

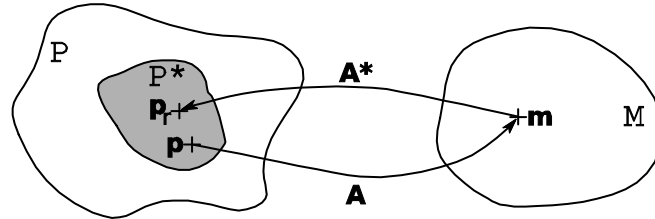


Figure III.4. Espaces vectoriels associés à la résolution par pseudo-inverse

### III.2.3 Conditionnement et stabilité

Lors d'un précédent paragraphe, nous avons introduit  $\xi$ , le conditionnement de la matrice inverse  $\mathbf{A}$  et nous avons alors dit qu'il quantifiait la sensibilité du problème aux perturbations sur les mesures. Dans les deux méthodes de résolutions présentées ci-dessus, les mesures étaient parfaites. Il est désormais temps de revenir à la réalité et de supposer qu'une erreur de valeur maximale  $\delta$  les affecte. La mesure réelle se trouve dans un voisinage  $M_\delta$  de la mesure parfaite (Fig. III.5). On appelle  $\mathbf{b}_\delta$  le vecteur des erreurs de mesures et  $\mathbf{m}_r$  le vecteur des mesures réelles.

$$\mathbf{m}_r = \mathbf{m} + \mathbf{b}_\delta \quad \text{III.31}$$

Le nouveau système associé à la décomposition en valeurs singulières est ainsi :

$$\Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{p}_r = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{m}_r \text{ soit } \Sigma \mathbf{X} = (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_\delta) \text{ avec } \mathbf{X} = \mathbf{V}^T \mathbf{p}_r, \mathbf{Y} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{m} \text{ et } \mathbf{Y}_\delta = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{b}_\delta \quad \text{III.32}$$

Dont la solution de norme minimale est :

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\omega_1} + \frac{y_{\delta 1}}{\omega_1} \\ \vdots \\ \frac{y_r}{\omega_r} + \frac{y_{\delta r}}{\omega_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{III.33}$$

$\mathbf{Y}_\delta$  représente l'expression des erreurs de mesures dans la base orthonormée des colonnes de  $\mathbf{U}$ . L'erreur maximale de mesure  $\Delta$  (à priori différente de  $\delta$ ) peut porter sur n'importe quelle composante de  $\mathbf{Y}_\delta$ , par exemple sur la composante  $k$  ( $1 \leq k \leq r$ ). D'après (III.33), une telle erreur introduit une variation de valeur  $\Delta/\omega_k$  sur l'expression de la  $k^{\text{ème}}$  composante des paramètres  $\mathbf{X}$  exprimés dans la base formée par les colonnes de  $\mathbf{V}$ .

$$\Delta x_k = \frac{\Delta}{\omega_k} \quad \text{III.34}$$

Si maintenant, l'erreur maximale  $\Delta$  porte sur une autre mesure  $q$  ( $q < k$ ) alors la variation sur les paramètres  $\mathbf{X}$  est  $\Delta/\omega_q$ .

$$\Delta x_q = \frac{\Delta}{\omega_q} \quad \text{III.35}$$

Or, les valeurs singulières sont rangées par ordre décroissant, cela signifie qu'une erreur de mesure sur  $k$  (en toute rigueur il ne s'agit pas de la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur de mesure mais de la  $k^{\text{ème}}$  composante de son expression dans la base formée par les  $\mathbf{u}_i$ ) crée une perturbation  $\omega_q/\omega_k$  fois plus grande qu'une erreur sur la mesure  $q$ . Par extension, le conditionnement apparaît naturellement comme le rapport des valeurs singulières extrêmes et caractérise la sensibilité du système aux erreurs sur les données. On dit que les « petites » valeurs singulières amplifient les incertitudes de mesures.

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_r} \quad \text{III.36}$$

Remarque : la définition ci-dessus du conditionnement est strictement équivalente à celle donnée précédemment (III.5).

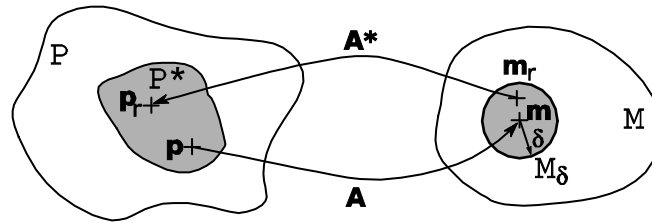


Figure III.5. Espaces vectoriels associés à la résolution par pseudo-inverse et à une mesure bruitée

### III.2.4 Conclusion

La décomposition en valeurs singulières constitue l'outil le plus efficace de résolution d'un problème inverse dans le sens où il permet de traiter chaque cas possible : problème sous-déterminé et sur-déterminé (même si cela n'a pas été explicité ici) et quel que soit le rang de la matrice inverse. De plus, la relative simplicité de la forme décomposée de la matrice inverse  $\mathbf{A}$  permet une interprétation aisée de la stabilité. Enfin, il n'est pas nécessaire de former et d'inverser  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ , contrairement à la méthode des moindres carrés, qui est inévitablement plus sensible aux perturbations que la matrice  $\mathbf{A}$ . Cependant, pour des matrices de rang maximal et bien conditionnées, la puissance de calcul nécessaire à une décomposition en valeurs singulières rend préférable une simple résolution par les moindres carrés (à travers une décomposition LU par exemple).

## IV Les méthodes d'inversion avec information à priori

Deux méthodes de résolutions ont été présentées ci-dessus ainsi que leurs caractéristiques les plus importantes en vue de la résolution de notre problème inverse magnétostatique. Elles ont introduit un premier choix, parmi l'ensemble des paramètres concordant avec les mesures réalisées sur le système, en optant pour la solution de norme minimale. Néanmoins, nous avons déjà précisé que ce n'était pas forcément le choix le plus judicieux vis-à-vis des sources du champ magnétique. L'idée développée dans cette section



est de restreindre l'espace des solutions à l'aide d'informations à priori sur le système à identifier et ainsi supprimer les jeux de paramètres incohérents avec ces informations.

Différents moyens d'ajouter de l'information vont être présentés ; malgré tout, les moindres carrés et la décomposition en valeurs singulières constitueront toujours les outils mathématiques de base de résolution.

### IV.1 Problème conditionnellement bien-posé

La solution, ou plutôt la proposition de solution, du problème inverse qui a été mise en évidence souffre de nombreux défauts en raison du caractère mal-posé du problème. L'existence de jeux de paramètres très différents et rarement physiques correspondant aux mesures [CHADEBEC 2001] incite grandement à la prudence quant à la solution retournée.

Intuitivement, on comprend aisément que disposer d'informations complémentaires aux mesures sur la source va permettre d'orienter le choix de la solution parmi l'ensemble infini de vecteurs conformes aux mesures. La régularisation est l'écriture formelle de cette vision intuitive. Mathématiquement, cela consiste à chercher une solution dans un voisinage  $P_i$  de la solution réelle (Fig. III.6). Ce voisinage sera d'autant plus restreint que la quantité et la qualité de l'information sera bonne.

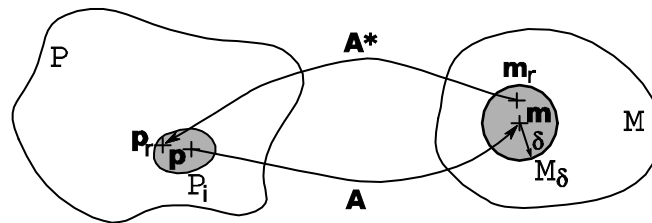


Figure III.6. Illustration d'un voisinage de la solution grâce à des informations à priori

En conséquence, Tikhonov [TIKHONOV 1976] a introduit la notion de problème conditionnellement bien-posé : il s'agit d'un problème inverse mal-posé dont la solution est contrainte à l'intérieur d'un voisinage de la source à l'aide d'information à priori. La question n'est plus de résoudre le problème inverse uniquement à partir des mesures mais, à partir d'un ensemble de données de différentes natures, de déterminer un vecteur de paramètres qui correspond au mieux à toutes ces informations. La résolution d'un problème inverse tient finalement plus à une expertise du système, à une quête d'information et à un compromis entre elles qu'à une résolution analytique.

Reprenons l'exemple simple de la bille sur un plan incliné : connaissant un modèle exact du système (inclinaison du plan, coefficients de frottement,...) et une mesure du vecteur vitesse en une position connue sur le plan, comment déterminer la position initiale ainsi que le vecteur vitesse initial ? Le problème comporte quatre inconnues (les positions  $x$  et  $y$  initiales dans le plan et les vecteurs vitesses  $v_{xi}$  et  $v_{yi}$  initiaux) pour deux données (une mesure du vecteur vitesse). Le problème est sous-déterminé et non injectif. Pourtant, il suffirait de compléter les données de quelques autres informations pour avoir une excellente connaissance des paramètres initiaux. Idéalement, deux informations exactes permettraient de déterminer parfaitement toutes les inconnues (si la mesure est parfaite). Cette situation n'existe évidemment pas sinon le problème inverse n'aurait plus de raison d'être mais on peut, par exemple, savoir que la bille a été lancée avec une vitesse inférieure à une limite connue. L'espace de solution est alors réduit et la prédiction s'en trouvera probablement meilleure.

Les informations peuvent être de tout type : elles peuvent directement concerner le système étudié (connaissance partielle des inconnues ou estimation à priori de l'état possible du système) comme les conditions de mesures (bruit,...) ou la précision du modèle.

## IV.2 L'ajout d'informations physiques certaines

Après avoir écrit les relations liant les sources aux mesures, c'est-à-dire les différentes matrices inverses ( $\mathbf{A}_Q$ ,  $\mathbf{A}_M$  et  $\mathbf{A}_\phi$ ), il est particulièrement judicieux de les compléter par toutes les informations physiques certaines dont on dispose. En effet, la relation (III.24) donne une expression des mesures en fonction des paramètres et la résolution du problème inverse associé retourne la répartition de ces derniers mais les matrices inverses n'imposent aucune contrainte sur leurs comportements : le vecteur des paramètres est acceptable tant qu'il est de norme minimale et qu'il correspond aux mesures. Autrement dit, la distribution de sources peut-être en totale inadéquation avec le sens physique... C'est pourquoi, en ajoutant les équations du comportement du système, il est certain que l'on rendra la solution plus physique et plus stable.

Supposons que le comportement du système soit linéaire et dicté par la relation suivante :

$$\mathbf{D}\mathbf{p}_r = \mathbf{E} \quad \text{III.37}$$

Où  $\mathbf{D}$  est la matrice d'interaction entre les paramètres et  $\mathbf{E}$  une excitation quelconque. Alors, il ne faut plus résoudre (III.24) seule mais tenir compte de (III.37) qui est une équation interne au système et qui donne une cohérence physique à la répartition des sources.

Globalement, il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{p}_r = \mathbf{m}_r \\ \mathbf{D}\mathbf{p}_r = \mathbf{E} \end{cases} \quad \text{III.38}$$

La résolution de ce système peut se faire par les deux méthodes présentées précédemment.

Remarque : il ne s'agit pas, à proprement parlé, d'une méthode de régularisation puisqu'il n'est pas question ici de faire un choix parmi les solutions mais uniquement de compléter le système afin de limiter l'espace des solutions.

Cette approche a été mise en œuvre pour la première fois avec succès par Olivier Chadebec [CHADEBEC 2001] et a depuis également été réutilisée pour l'identification de zones de corrosion à l'aide d'un modèle d'électrolyse en intégrales de frontières [GUIBERT 2009]. En particulier, son impact sur la résolution du problème inverse magnétostatique a été très importante.

En termes de représentation par espaces vectoriels, cette méthode limite grandement l'espace des paramètres  $P$  à l'espace  $P_r$  et couplée, par exemple, à une décomposition en valeurs singulières peut permettre une bonne identification (Fig. III.7).

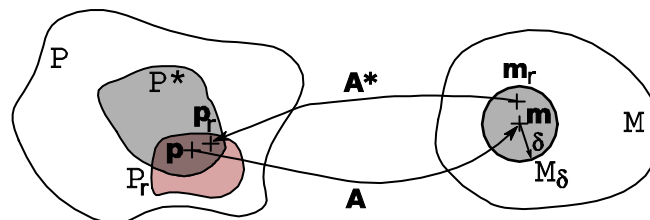


Figure III.7. Résolution par ajout d'informations physiques

## IV.3 La troncature du spectre

La troncature du spectre constitue le moyen le plus simple de régulariser un problème inverse et nécessite, en toute rigueur, une bonne connaissance des incertitudes de mesures. Nous n'allons pas nous attarder sur cette méthode mais seulement préciser ses caractéristiques

principales et les raisons qui font que nous ne l'utiliserons pas. On trouvera dans [HANSEN 1997] tout ce qu'il faut savoir à son propos. On notera seulement qu'elle nécessite effectivement de l'information à priori, les erreurs de mesures, mais qu'elle n'entre pas dans le schéma des problèmes conditionnellement bien-posés : l'idée n'est pas de restreindre l'espace des solutions mais de stabiliser le système.

Considérant que toutes les mesures sont soumises à des incertitudes pouvant conduire le système à se contredire, donc à être particulièrement instable, la troncature du spectre consiste à supprimer les équations incriminées c'est à dire quasi-parallèles. Se faisant, la sous-détermination du problème augmente mais la stabilité également. La sensibilité aux erreurs de mesures est réduite mais le modèle est fatalement dégradé.

Toute la difficulté de la troncature consiste à trouver le bon compromis entre la stabilité et la précision du modèle. En pratique, cette méthode annule les valeurs singulières les plus petites (i.e. les plus sensibles) de la décomposition en valeurs singulières de la matrice inverse. Le compromis ci-dessus est équivalent à déterminer un seuil de tolérance en dessous duquel les valeurs singulières sont annulées. Cependant, la détermination de ce seuil n'est pas aisé : seul une étude statistique rigoureuse des incertitudes de mesures peut en donner une idée [LAGIER 1999]. Dans les faits, une approche empirique s'impose très souvent.

L'utilisation de la troncature du spectre pour notre problème inverse apparaît peu judicieuse pour plusieurs raisons. Premièrement, si l'existence d'un seuil de tolérance à fixer empiriquement peut être acceptable pour une identification ponctuelle, elle ne l'est pas du tout pour un système installé dans un sous-marin et surtout indépendant d'un opérateur extérieur. En outre, la troncature s'applique particulièrement aux problèmes très mal conditionnés ce qui, selon toute vraisemblance, ne sera pas le cas de notre système. Enfin, elle ne permet pas d'intégrer des informations à priori sur l'état des sources.

#### IV.4 La régularisation de Tikhonov

On peut reprocher à la troncature du spectre de dégrader volontairement le modèle de représentation des sources, cependant sa grande simplicité en fait le premier outil de régularisation et permet souvent d'acquérir une meilleure connaissance du problème préalablement à une étude plus aboutie. La régularisation de Tikhonov compose le deuxième moyen classique de régularisation. Encore une fois, cette méthode sera rapidement décrite.

Il n'est cette fois plus question de réduire la précision du modèle mais de lui ajouter une certaine quantité d'information à priori. Pour ce faire, on définit un opérateur régularisant  $\mathbf{R}$  qui impose aux solutions d'appartenir à un sous-domaine  $P_{th}$  relatif à l'information à priori. Il reste alors à déterminer un compromis entre les solutions de (III.24), c'est-à-dire la mesure, et l'information à priori.

L'opérateur régularisant  $\mathbf{R}$  traduit l'information à priori sur la solution et la régularisation de Tikhonov consiste à minimiser la distance entre la mesure et le modèle sous la contrainte de cet opérateur. Cela se traduit par la minimisation de :

$$\|\mathbf{A}\mathbf{p}_r - \mathbf{m}_r\|_2^2 + \alpha\|\mathbf{R}\mathbf{p}_r\|_2^2 \quad \text{III.39}$$

Où  $\alpha$  est un scalaire représentant le compromis entre l'information à priori et la mesure : plus  $\alpha$  est grand plus l'importance donnée à l'information est prépondérante par rapport à la mesure. Une solution de (III.39) peut-être obtenue par l'équation normale :

$$\mathbf{p}_r = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{m}_r \quad \text{III.40}$$

Cette résolution présente les mêmes limites que la résolution classique des moindres carrés. Il existe des techniques particulières pour résoudre ce système plus judicieusement, par exemple à l'aide de la décomposition en valeurs singulières [HANSEN 1997].

Il reste encore à préciser ce qu'est l'opérateur de régularisation et comment choisir le paramètre  $\alpha$ .  $\mathbf{R}$  dépend de la connaissance que l'on a du système étudié (en conséquence si on ne connaît rien,  $\mathbf{R}=\mathbf{0}$  et on retrouve évidemment la solution des moindres carrés) et une grande variété de matrices peuvent être employées. Pour donner quelques exemples, cela peut être une matrice de lissage favorisant la régularité de la répartition des sources ou alors, une matrice de pondération fonction des erreurs de mesures ou de la connaissance partielle de certains paramètres.

La méthode la plus classique de détermination du coefficient  $\alpha$  optimal est basée sur le principe itératif de la courbe en L [HANSEN 1997] (Fig. III.8). L'idée est de tracer la courbe de la distance entre modèle et mesure en fonction de la norme de l'opérateur régularisant pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Les bons compromis pour le paramètre  $\alpha$  se trouvent être dans le coude de la courbe obtenue, en forme de L. Malgré tout, le choix optimum de  $\alpha$  dans ce coude n'est pas évident et, de plus, la méthode de la courbe en L ne permet pas de tenir compte d'autres informations que l'on pourrait avoir sur le système [SCHMERBER 2006]. Enfin, il faut ajouter que ce coefficient de régularisation dépend des mesures et doit donc être recalculé en permanence dans un système temps réel.

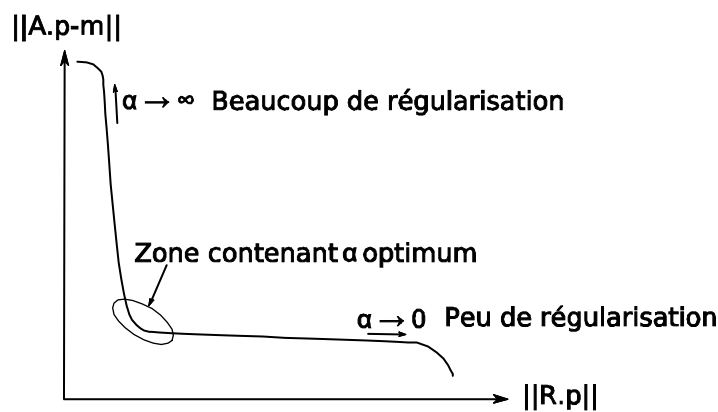


Figure III.8. Exemple de courbe en L

Finalement, la technique de régularisation de Tikhonov ne sera pas utilisée dans ce mémoire. En effet, il est très difficile de déterminer des matrices de régularisation mais, de plus, quand on y parvient, le choix du paramètre  $\alpha$  devient totalement empirique ce qui est parfaitement inacceptable vis-à-vis de la robustesse de l'algorithme d'inversion.

## IV.5 L'inversion bayésienne

### IV.5.1 Introduction

L'identification bayésienne propose une vision, dans l'esprit, complètement différente de celle de Tikhonov pour la résolution d'un problème inverse en ne le considérant plus comme un pur problème analytique mais plutôt comme une juste combinaison d'informations statistiques de différentes natures. Contrairement à la régularisation de Tikhonov, dans laquelle l'apport d'information et surtout l'évaluation de la qualité de cette information sont très difficiles, l'inversion bayésienne offre un cadre mathématique particulièrement favorable et vaste pour l'à priori.

L'intervention de données statistiques dans un problème inverse paraît tout à fait naturelle : en effet, nous ne pouvons jamais être parfaitement sûr d'une information dont on

dispose, ce que nous pouvons uniquement dire est que nous avons une certaine connaissance de celle-ci avec un degré plus ou moins élevé de confiance. Une mesure sur un capteur est par exemple connue au bruit près et l'incertitude peut-être évaluée par une étude statistique rigoureuse. Le principe de l'inversion bayésienne n'est fondamentalement pas de donner une solution unique au problème inverse, mais de retourner le comportement de la source vis-à-vis de toutes les incertitudes qui l'entourent : c'est par la suite qu'une analyse de ce comportement peut dégager des solutions les plus probables.

L'identification bayésienne autorise donc une étude plus aisée de la pertinence de l'ensemble des informations dont on dispose sur la source. Une application intéressante de cette caractéristique est l'étude de la robustesse de l'inversion : il est par exemple possible d'évaluer a posteriori la pertinence d'une mesure et de constater si elle est ou non conforme au modèle. Si elle ne l'est pas, cela peut signifier que le capteur est défectueux.

Cependant, par manque de temps, il n'a été possible que d'effleurer les immenses possibilités de l'identification bayésienne. Seul l'estimateur du maximum a posteriori va être décrit ci-dessous. On pourra se familiariser avec les statistiques dans des références telles que [SPIEGEL 1987] et [ROSS 1996] et avoir une excellente introduction didactique à l'inversion bayésienne dans le chapitre sur les compléments statistiques de [SCHMERBER 2006].

#### IV.5.2 Rappel sur la loi normale

Pour pouvoir traiter les informations dont nous disposons sur une source, il nous faut disposer d'un modèle de représentation mathématique de leurs comportements. Il est classique de traduire ces informations sous la forme de distributions de probabilités. Celles-ci peuvent être de tout types : uniforme sur un intervalle, un Dirac ou toutes autres fonctions. Cependant, dans le cadre de problèmes linéaires et pour simplifier notre propos, nous n'utiliserons que la loi normale. Cette hypothèse est justifiée par le théorème de la limite centrale qui stipule, sous des conditions larges, que toute somme de variables aléatoires indépendantes tend vers une certaine variable aléatoire dont la loi de probabilité converge vers une loi normale.

La loi normale se caractérise par sa moyenne  $\mu$  et son écart type  $\sigma$  et est définie par la densité de probabilité  $d$  suivante :

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{III.41}$$

L'utilisation de la loi normale permet une formulation matricielle simple du problème inverse comme on le verra plus loin.

#### IV.5.3 La fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance permet de définir la probabilité d'obtenir une mesure en connaissant à la fois les incertitudes du modèle et de la mesure. Autrement dit, elle augmente la description du système qui était, jusque là, particulièrement limitée. En effet, nous disposons uniquement de la relation (III.42) entre paramètres  $\mathbf{p}$  et mesures  $\mathbf{m}$  et dans laquelle aucune latitude n'était donnée à l'erreur.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{m} \quad \text{III.42}$$

Il est préférable de redéfinir le problème direct à l'aide d'une description statistique en évaluant la probabilité  $p(\mathbf{m}|\mathbf{p})$  d'avoir une mesure connaissant les incertitudes et un jeu de paramètres. Dans le cadre d'une densité de probabilité normale, cette probabilité peut s'écrire [TARANTOLA 1987] :

$$p(\mathbf{m} | \mathbf{p}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{m})^T \cdot \mathbf{S}_m^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{m})\right) \quad \text{III.43}$$

La matrice  $\mathbf{S}_m$  est dite matrice de covariance et elle contient les incertitudes de mesures et de modélisation. En première approximation, on considérera qu'elle ne contient que des termes diagonaux et que ceux-ci sont relatifs à la variance des incertitudes.

La relation ci-dessus n'est qu'une réécriture du problème direct mais elle contient une information beaucoup plus riche. Expérimentalement, même si les paramètres et le modèle étaient parfaitement connus, il serait absolument impossible d'obtenir la mesure prédite par (III.42) ne serait-ce qu'à cause du bruit des capteurs. En revanche, la description statistique permet d'évaluer la probabilité de la mesure et de constater ou non si elle est cohérente avec le modèle (par exemple par un test d'intervalle de confiance).

#### IV.5.4 Théorème de Bayes : définition et intérêt

##### a - Définition

Le théorème de Bayes est un théorème classique de probabilité qui met en relation la densité de probabilité a posteriori des paramètres que nous cherchons avec les densités de probabilités des informations à priori sur la mesure ou le modèle :

$$p(\mathbf{p} | \mathbf{m}) = \frac{p(\mathbf{m} | \mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{m})} \quad \text{III.44}$$

Où  $p(\mathbf{p} | \mathbf{m})$  est la densité de probabilité des paramètres connaissant les mesures, c'est-à-dire la solution, au sens large, du problème inverse.  $p(\mathbf{m} | \mathbf{p})$  correspond à la fonction de vraisemblance et traduit le problème direct.  $p(\mathbf{p})$  est la densité de probabilité à priori sur les paramètres à estimer : c'est par cet intermédiaire que l'inversion bayésienne permet d'introduire des informations à priori sur la source. Enfin, nous supposons que toutes les mesures sont équiprobables : le dénominateur est ainsi constant. Il n'est pas nécessaire de s'attarder sur ce terme : comme constante, il n'aura aucun rôle dans la recherche des paramètres qui maximisent la probabilité (III.44).

Cette relation exprime donc effectivement la solution à un problème inverse à partir de mesures et d'informations à priori à la fois sur le système mais également sur l'ensemble des incertitudes. Comme pour la fonction de vraisemblance, la solution du problème inverse n'est pas un vecteur unique mais la probabilité d'existence d'un vecteur paramètres. La solution est d'une grande richesse statistique mais il nous faudra cependant bien, par la suite, dégager une solution particulière. Voyons d'abord l'intérêt de ce théorème.

##### b - Intérêt

Le théorème de Bayes permet d'illustrer de façon très claire l'apport de l'information à priori. Reprenons l'exemple très simple de Schmerber [SCHMERBER 2006] : nous considérons une variable aléatoire  $x$  dont nous cherchons la densité a posteriori à l'aide de la fonction de vraisemblance, de mesures  $mes$  et d'un à priori sur le comportement de  $x$ .

Nous admettons que le problème direct est issu d'une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  :

$$p(mes/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{III.45}$$

De même, nous supposons que notre connaissance de l'à priori peut également s'écrire sous la forme d'une densité de probabilité d'une loi normale de moyenne  $x_0$  et d'écart type  $\tau$  :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\tau^2}\right) \quad \text{III.46}$$

Le théorème de Bayes nous permet facilement de définir la densité a posteriori de la variable aléatoire  $x$  :

$$p(x/mes) \propto p(mes/x).p(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-\chi)^2}{2\theta^2}\right) \quad \text{III.47}$$

Avec :

$$\chi = \frac{\tau^2\mu + \sigma^2x_0}{\tau^2 + \sigma^2} \quad \text{et} \quad \theta^2 = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \quad \text{III.48}$$

La densité de probabilité de la variable  $x$  est évidemment une loi normale dont les paramètres  $\chi$  (moyenne) et  $\theta$  (écart-type) dépendent de la fonction de vraisemblance et de l'à priori. L'apport de l'information à priori est évident sur l'écart type a posteriori qui est plus faible que l'écart type initial quelle que soit la variance de l'à priori. L'information que nous avons de la source a ainsi permis de préciser les paramètres de l'identification. En outre, nous observons l'importance de la traduction de l'information à priori : en effet, la moyenne de la densité a posteriori dépend de la moyenne et de l'écart type de l'à priori. Un mauvais choix de  $x_0$  aura une importance d'autant plus grave sur l'estimation que la variance de l'à priori est faible.

#### IV.5.5 Maximum a posteriori

Nous disposons à l'aide de (III.44) et de la description de toutes les densités de probabilités par des lois normales d'une expression de la densité de probabilité à posteriori des paramètres des sources. Nous avons déjà dit que cette description était d'une grande richesse puisqu'elle met en relation les mesures, l'à priori et le comportement du système mais également toutes les incertitudes qui les caractérisent. Désormais, nous allons extraire de cet ensemble d'information le jeu de paramètres le plus probable et nous allons considérer qu'il s'agira de la solution de notre problème inverse. Le maximum a posteriori (MAP) permet de déterminer cette solution à l'aide d'un calcul matriciel relativement simple mais n'est utilisable que dans le cas de lois normales.

Supposons que nous connaissons un vecteur de paramètres à priori du système  $\mathbf{p}_0$ . La densité de probabilité correspondante des sources est donnée par :

$$p(\mathbf{p}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbf{S}_0^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\right) \quad \text{III.49}$$

Où  $\mathbf{S}_0$  contient, sur sa diagonale, la variance des informations à priori.

D'après le théorème de Bayes, nous avons :

$$p(\mathbf{p} | \mathbf{m}) \propto p(\mathbf{m} | \mathbf{p}).p(\mathbf{p}) \quad \text{III.50}$$

Le problème direct étant linéaire et toute les densités de probabilité issues de gaussiennes, la densité a posteriori suit également une loi normale. L'estimateur de maximum a posteriori est donné par le maximum de cette densité de probabilité correspondant évidemment à la moyenne de la loi normale. Elle se détermine relativement aisément [TARANTOLA 1987] et vaut, dans le cas d'un problème inverse sous-déterminé :

$$\mathbf{p}_{MAP} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{S}_0 \mathbf{A}^T + \mathbf{S}_m)^{-1} \cdot (\mathbf{m}_r - \mathbf{A} \mathbf{p}_0) \quad \text{III.51}$$

Où  $\mathbf{m}_r$  est toujours un jeu de mesures réelles. On constate que la solution est la somme de l'à priori et d'un terme correctif qui tient compte des mesures et de l'ensemble des incertitudes.

Le MAP présente trois défauts majeurs : tout d'abord, il ne permet de traiter que des informations gaussiennes, ce qui n'est pas toujours judicieux : par exemple, il ne serait pas surprenant de savoir qu'un paramètre est équiprobable sur un intervalle et impossible ailleurs. De plus, il s'agit d'un estimateur peu robuste, comme on a déjà pu l'entrevoir sur (III.48) : une erreur relativement faible sur l'à priori peut avoir des conséquences importantes, ce qui n'est pas tellement étonnant au vu de l'expression (III.51). Enfin, l'estimation des écarts types n'est pas évidente puisqu'il faut disposer des incertitudes de mesures (possible à l'aide d'une étude statistique du comportement des capteurs utilisés), des erreurs de modélisation (possible également en comparant des mesures d'états de références connus du système avec la modélisation) et enfin du niveau de confiance accordé à l'état à priori. Une étude expérimentale semble absolument nécessaire pour confirmer ou non la validité réelle de l'inversion bayésienne dans notre situation.

Remarque : l'inversion bayésienne peut, sans difficulté, être couplée à l'ajout d'informations physiques.

#### IV.5.6 Lien avec la régularisation de Tikhonov

Dans le cas particulier du maximum a posteriori et sous quelques conditions, un lien peut être établi entre la régularisation de Tikhonov et l'inversion bayésienne. Pour simplifier, nous allons considérer que l'à priori sur les sources est de moyenne nulle et que les matrices de covariance sont des matrices diagonales.

(III.51) peut également s'écrire :

$$\mathbf{p}_{MAP} = (\mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{S}_0^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{m}_r \quad \text{III.52}$$

Les matrices de covariance peuvent être décomposées à l'aide de la factorisation de Choleski (évidente puisque tous les termes diagonaux sont positifs) :

$$\mathbf{S}_m = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \quad \text{III.53}$$

$$\mathbf{S}_0 = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Delta}^T \quad \text{III.54}$$

D'où une nouvelle vision de (III.52) et de l'inversion bayésienne :

$$\mathbf{p}_{MAP} = ((\boldsymbol{\delta}^{-1} \mathbf{A})^T (\boldsymbol{\delta}^{-1} \mathbf{A}) + (\boldsymbol{\Delta}^{-1})^T \boldsymbol{\Delta}^{-1})^{-1} (\boldsymbol{\delta}^{-1} \mathbf{A})^T (\boldsymbol{\delta}^{-1} \mathbf{m}_r) \quad \text{III.55}$$

En effet, si l'on compare cette relation avec la régularisation de Tikhonov, que nous rappelons ci-dessous, nous constatons de nombreuses similitudes.

$$\mathbf{p}_r = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{m}_r \quad \text{III.56}$$

Tout d'abord, dans le bayésien, la matrice inverse  $\mathbf{A}$  ainsi que les mesures sont pondérées par l'inverse de l'écart-type des incertitudes ce qui rappelle une approche de stabilisation de l'inversion [ZHDANOV 2002]. Concernant l'opérateur régularisant, on reconnaît une régularisation par une matrice identité (équivalente à une minimisation de la norme de la solution) avec un coefficient qui vaut l'inverse de la variance de l'à priori.

Dans le cas simplifié ci-dessus, l'inversion bayésienne par le maximum a posteriori est finalement équivalente à une régularisation de Tikhonov par l'opérateur identité, dans laquelle le choix du coefficient de régularisation est effectué naturellement par la variance de l'à priori et qui est, de surcroît, stabilisée par la variance des incertitudes.



Nous n'allons pas pousser plus avant les relations entre la régularisation de Tikhonov et l'inversion bayésienne puisque ce n'est pas notre propos mais il est probable qu'il existe des liens étroits notamment dans des cas plus généraux que celui traité ci-dessus.

## IV.6 Conclusion

A ce point du mémoire, nous espérons avoir correctement défini les contours des problèmes inverses sous-déterminés ainsi que l'ensemble des méthodes de résolutions que nous allons employer dans la suite. Néanmoins, un bilan s'impose.

Les problèmes inverses sous-déterminés sont caractérisés par deux difficultés majeures. La première concerne l'existence d'un nombre très important de vecteurs paramètres concordant avec les mesures et la grande complexité à en dégager le plus proche de la physique. L'attitude classique consisterait alors à accroître le nombre de mesures pour améliorer notre connaissance des sources et réduire l'espace des paramètres. Pourtant, cela serait faire preuve d'un optimiste pernicieux ou alors d'une ignorance des conditions expérimentales : la mesure n'est jamais parfaite et la formulation mathématique du système reste un modèle. Cette fausse solution risquerait de dégrader fortement le système inverse en introduisant des équations quasi-semblables. En clair, et il s'agit de la seconde difficulté, la multiplication des mesures dégrade le conditionnement et un léger bruit sur un capteur suffirait pour faire totalement diverger la résolution. Toutefois, le nombre de capteurs doit être suffisant pour assurer une surveillance correcte du comportement des coques. Il existe donc un compromis à trouver, en termes mathématiques, entre la stabilité du système et sa sous-détermination ou, en termes physiques, entre l'absence de redondance sur les mesures aux capteurs et une vision globale des tôles.

En supposant un bon placement des capteurs, il reste encore à réaliser un choix parmi les vecteurs solutions. Différentes techniques ont été présentées dans cette section. Nous avons d'abord dégagé la solution des moindres carrés et la pseudo-solution, plus générale et issue de la décomposition en valeurs singulières. Elles sont toutes deux caractérisées par le fait qu'il s'agit du vecteur de paramètres de norme minimale. La troncature du spectre et la régularisation de Tikhonov ont ensuite été délibérément écartées, pour deux raisons, la première étant l'existence d'un choix empirique et non évident d'un paramètre de régularisation à recalculer à chaque nouvelle mesure : nous désirons effectivement disposer d'un algorithme d'inversion robuste et ce choix d'un paramètre n'y est pas propice. La seconde, spécifique à la régularisation de Tikhonov, est liée aux difficultés importantes de détermination d'une matrice de régularisation. L'inversion bayésienne présente, en revanche, le modèle le plus favorable à l'insertion d'information a priori sur l'état des sources mais de grandes incertitudes planent quant à son utilisation réelle : la détermination des écarts types nécessaires est complexe et fastidieuse. Enfin, l'ajout des équations du comportement interne du système a déjà été éprouvée dans le cadre de l'identification magnétostatique avec des capteurs éloignés et montre une grande souplesse : en effet, elle peut être employée dans chacune des méthodes de résolution. Elle sera ainsi primordiale par la suite.

Jusqu'ici, nous sommes restés le plus général possible dans notre description du problème inverse, il est désormais temps de préciser les formulations inverses magnétostatiques associées aux méthodes en charges, en aimantation et en potentiel.

## V Formulations inverses des méthodes globales

La description des formulations inverse magnétostatiques est disponible dans l'annexe confidentielle de ce mémoire : « ANNEXE CONFIDENTIELLE : Formulation inverse des

méthodes globales magnétostatiques - Identification de l'aimantation de tôles ferromagnétiques à partir de mesures proches (n°YV18122008) ».

Comme nous l'avons constaté dans l'introduction de ce mémoire, les méthodes inverses dont nous disposons avant ces travaux sont inadaptées à notre problématique. C'est pourquoi nous introduisons, dans cette annexe, une nouvelle formulation inverse magnétostatique, appelée méthode T, qui répond à l'ensemble du cahier des charges. En effet, elle est capable d'identifier l'aimantation totale de tôles ferromagnétiques à partir de mesures du champ proche et elle consent l'ajout des équations de la magnétostriction. Nous avons appelé méthode B l'expression inverse bayésienne associée à T.

## **VI Conclusion**

Après une introduction informelle sur les problèmes inverses, la première partie de ce chapitre a tenté de dresser un contour le plus complet du problème d'identification auquel nous sommes confrontés en pointant ses difficultés : la principale étant sans doute la sous-détermination du système. Cela implique l'existence d'un choix parmi une infinité de solutions correspondantes aux mesures. Deux méthodes de résolutions de problèmes mal-posés ont alors été analysées ainsi que des techniques visant à préciser le choix de la solution.

Par la suite, une nouvelle approche, la méthode T, du problème inverse magnétostatique a été proposée afin de remplir toutes les conditions auxquelles est soumise l'identification des tôles d'un sous-marin double coque. Cette formulation peut être couplée avec de l'information à priori sur l'état magnétique des coques et avec la connaissance des incertitudes de mesures dans une approche bayésienne. Il s'agit de la méthode que nous avons appelée B. Elle s'avère sans doute ce vers quoi il faudra tendre dans le cas réel.



**Chapitre IV :**  
**Validations numériques et  
expérimentales sur une maquette de  
sous-marin double coque**



# Chapitre IV : Validations numériques et expérimentales sur une maquette de sous-marin double coque

## I Introduction

L'objet de ce chapitre est de valider nos algorithmes d'inversion sur une maquette magnétiquement représentative d'un sous-marin double coque. La validation expérimentale apparaît comme absolument essentielle et c'est pourquoi, dès le début de ces travaux, nous avons réfléchi à sa mise en œuvre. Un modèle réduit a alors été spécifiquement réalisé et a conduit à une campagne de mesures très enrichissante dont nous relatons quelques résultats dans la fin de ce chapitre.

Pour commencer, nous allons présenter la maquette, sa géométrie, sa physique et les moyens de mesures. Nous validerons préalablement nos méthodes sur ce modèle avec des mesures numériques issues de la génération d'aimantation que nous avons développée dans le chapitre II. Finalement, nous confirmerons la faisabilité de l'immunisation en boucle fermée appliquée au sous-marin double coque à partir de mesures réelles réalisées sur le modèle réduit.

## II Le laboratoire de métrologie magnétique en champ faible

En raison des innombrables perturbations magnétiques qui nous entourent en permanence, la mise en œuvre d'une expérimentation en champ magnétique faible n'est pas aisée. C'est pourquoi l'Equipe de Recherche Technologique en Champ Magnétique Faible du G2Elab dispose d'un laboratoire de mesures dédié à cette tâche, le laboratoire de métrologie magnétique en champ faible (LMMCF), situé à Herbeys, dans la périphérie de Grenoble mais loin de ses perturbations électromagnétiques.

Ce dispositif se compose d'un simulateur de champ magnétique de grande dimension (26m×8m×8m) permettant de générer, avec une excellente précision, des champs magnétiques homogènes selon toutes les directions et en particulier d'annuler le champ terrestre. Un chemin de roulement au centre permet de déplacer les structures étudiées. L'ensemble a

évidemment été entièrement réalisé en matériau amagnétique. Ce laboratoire dispose également d'un matériel performant de mesures du champ magnétique faible : capteurs magnétiques (principalement de type fluxgate) et chaîne d'acquisition associée.

### III La maquette de sous-marin double coque

#### III.1 Géométrie

L'objectif était de concevoir une maquette magnétiquement réaliste des coques d'un sous-marin : les masses internes ont, pour le moment, été négligées permettant de disposer d'une géométrie simplifiée par rapport à un navire réel. Pourtant, de nombreuses difficultés se sont posées, à commencer par l'échelle de réduction. Les capacités du simulateur et la masse des tôles limitaient la longueur de la maquette à quelques mètres. La longueur typique d'un sous-marin étant d'environ 100 mètres, une échelle 1/30<sup>ème</sup> semblait convenir. Cependant, à taille réelle, les épaisseurs des coques épaisse (destinée à résister à la pression) et mince (hydrodynamique) sont, respectivement, de l'ordre de 5cm et 1cm ce qui, à l'échelle du modèle, donnent 1.7mm et 0.33mm. Une tôle de cette dernière épaisseur étant bien évidemment inutilisable, nous en avons employée une de 1mm pour la coque mince externe. De plus, pour assurer une bonne rigidité de l'ensemble de la maquette, une épaisseur de 3mm a été choisie pour la coque interne.

La maquette, réalisée par DCNS, mesure ainsi au total 3.42m (figures IV.1 à IV.8). La coque interne est composée de cinq tronçons : trois pour la partie centrale cylindrique et un pour chaque extrémité. Ils ne sont pas soudés, afin de pouvoir ultérieurement, et éventuellement, ajouter des masses internes, mais reliés par un système permettant de limiter au mieux les entrefers. La partie supérieure de la coque externe est ouverte : elle est généralement formée par des matériaux composites sur un bâtiment réel. Cela nous permet de disposer d'une sortie pour évacuer l'ensemble des câbles des capteurs. La coque externe est ainsi formée par quatre quasi demi-cylindres et deux embouts qui viennent se visser sur les supports solidaires à la coque interne. Enfin, ces supports, réalisés dans la même tôle que la coque interne, sont répartis de la même manière que sur un sous-marin réel. Les diamètres extrêmes interne et externe valent respectivement 30cm et 38cm. Nous constatons que l'espace disponible entre les coques est de 4cm dans le meilleur des cas et de l'ordre de 1cm dans la zone la plus mince (au niveau de l'arrière de la maquette (Fig. IV.3)).

La réalisation s'est montrée particulièrement complexe : par exemple, le roulage de tôle de 3mm, avec précision, n'est pas une chose aisée et la coque interne présente, localement, des défauts de cylindricité allant jusqu'à 1cm (à comparer au 30cm du diamètre). La maquette possède également une flèche supérieure à 1cm. Par conséquent, ces erreurs n'étant pas modélisable, les maillages présenteront une imprécision géométrique non négligeable qui se traduira inéluctablement sur la précision de mesures.

Enfin, dans le but de contrôler l'état d'aimantation de la coque interne et éventuellement de simuler des effets de pression, 39 bobines en série, comportant 9 boucles chacune, sont enroulées autour de celle-ci (figures IV.9).

Les trois figures suivantes représentent la géométrie de la maquette, c'est-à-dire l'ensemble des sources magnétiques à identifier, ainsi que le repère qui sera utilisé dans toute la suite de chapitre. L'axe X correspond à l'axe longitudinal du sous-marin, l'axe Y au transversal et l'axe Z au vertical.

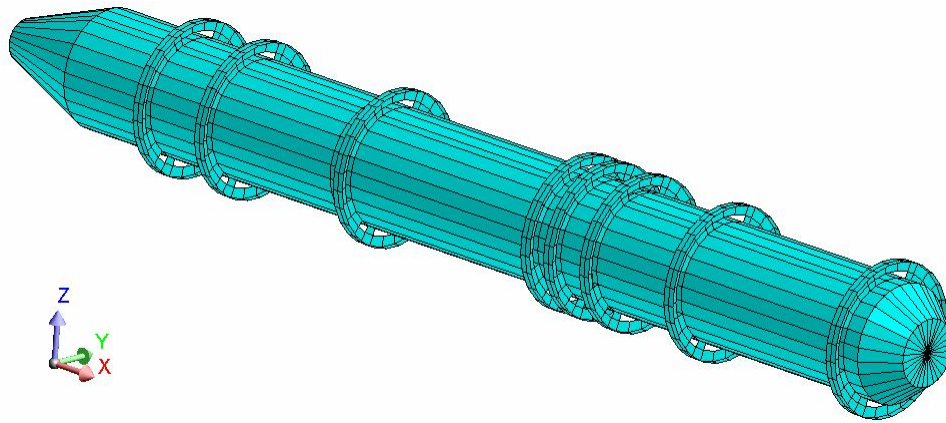


Figure IV.1. Visualisation de la coque interne, des supports de la coque externe et du repère : avant à droite

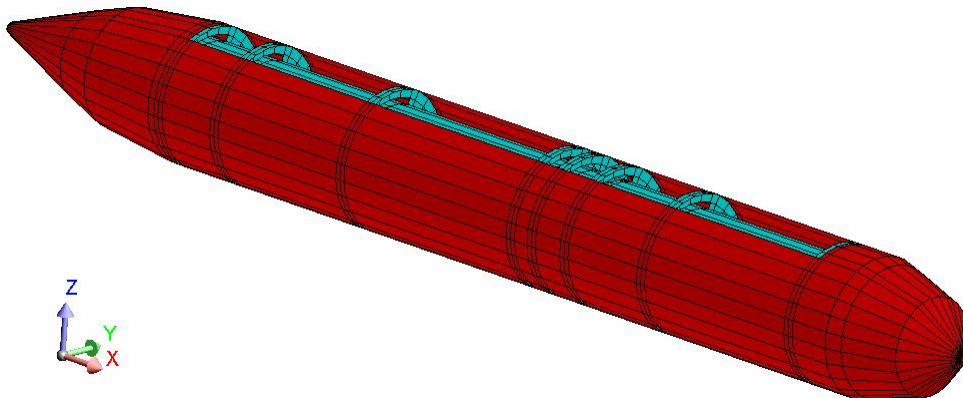


Figure IV.2. Visualisation de la maquette complète et du repère

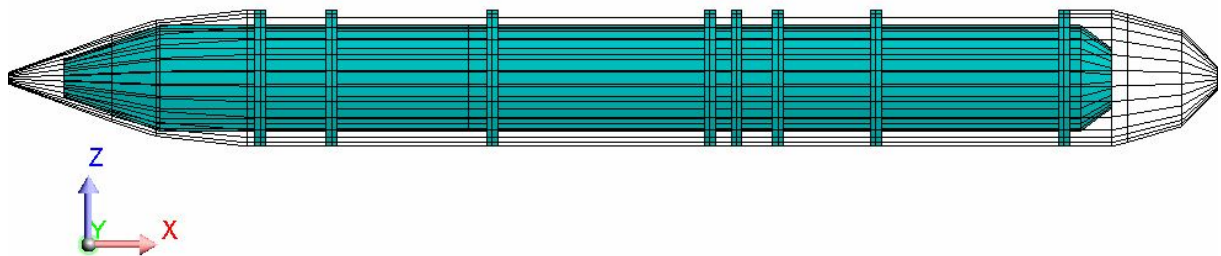


Figure IV.3. Vue en fil de fer de la coque externe



Figure IV.4. Photo de la coque interne instrumentée : arrière à droite



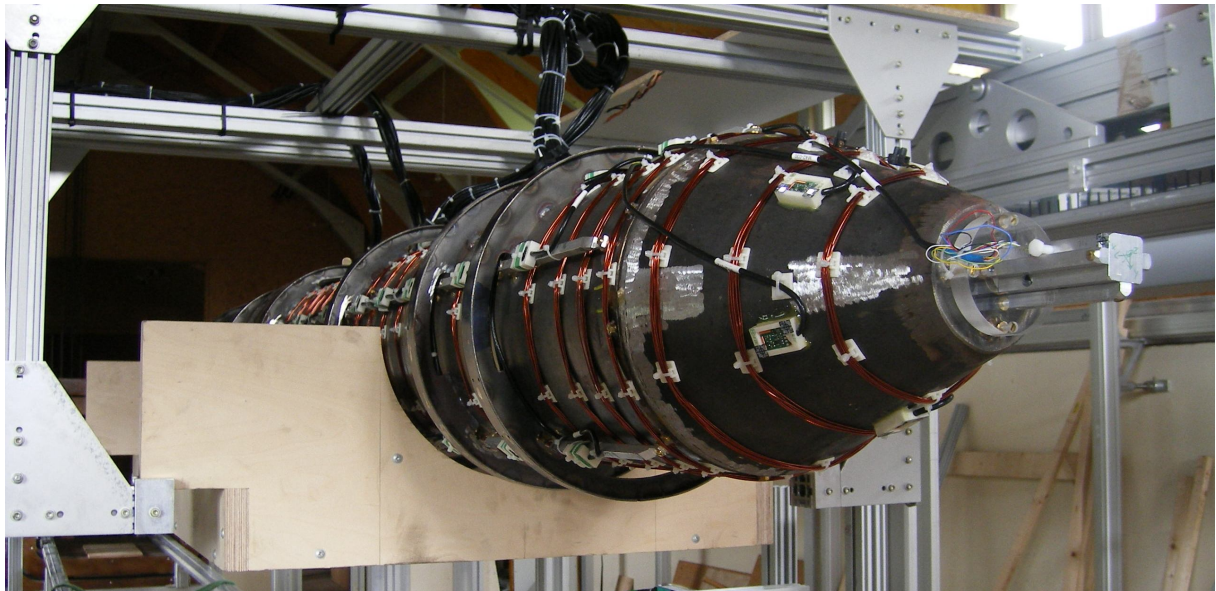


Figure IV.5. Détail de la partie arrière de la coque interne

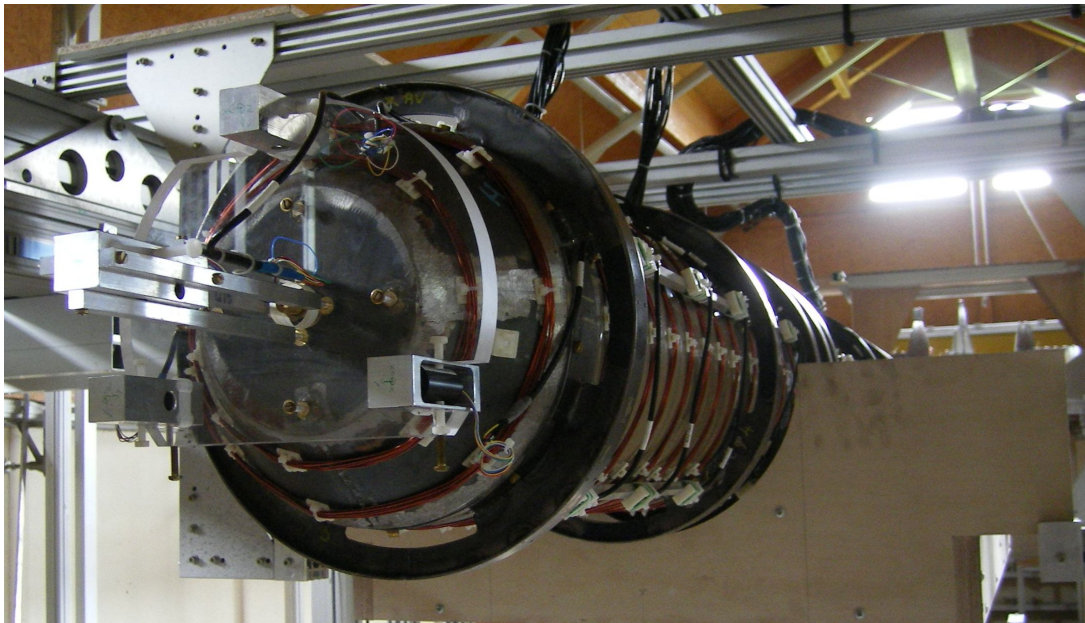


Figure IV.6. Détail de la partie avant de la coque interne

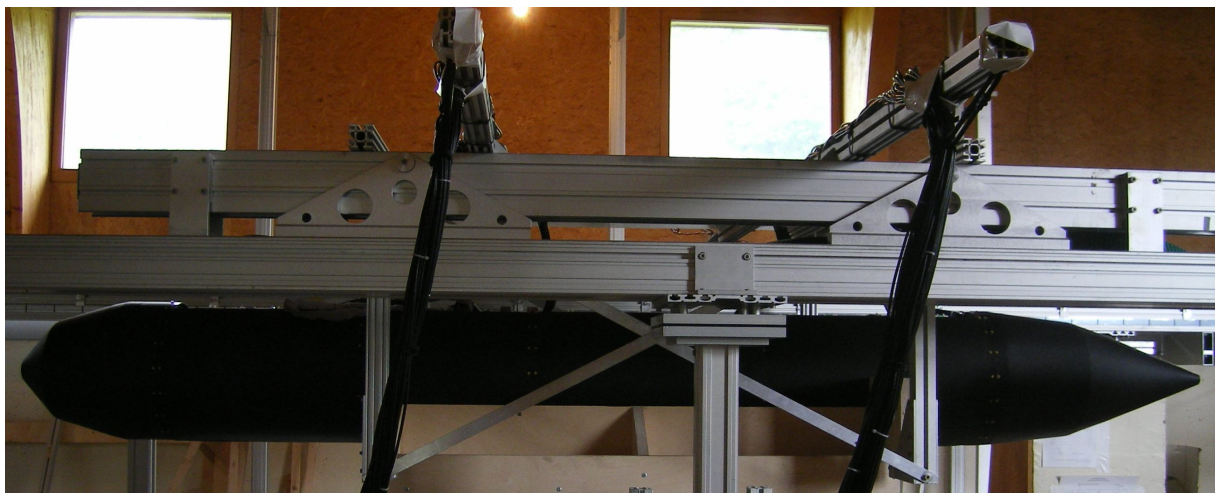


Figure IV.7. Photo de la maquette complète

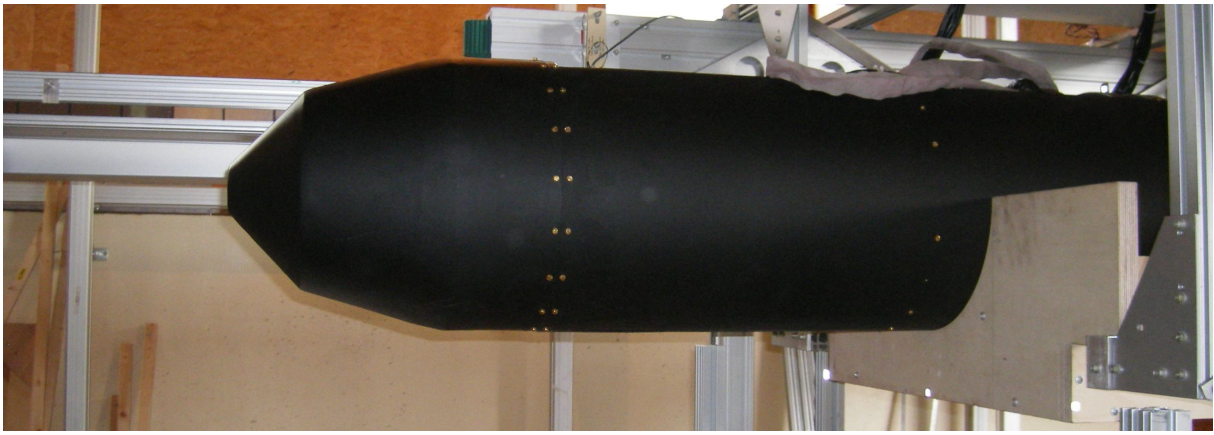


Figure IV.8. Détail de la partie avant de la maquette complète

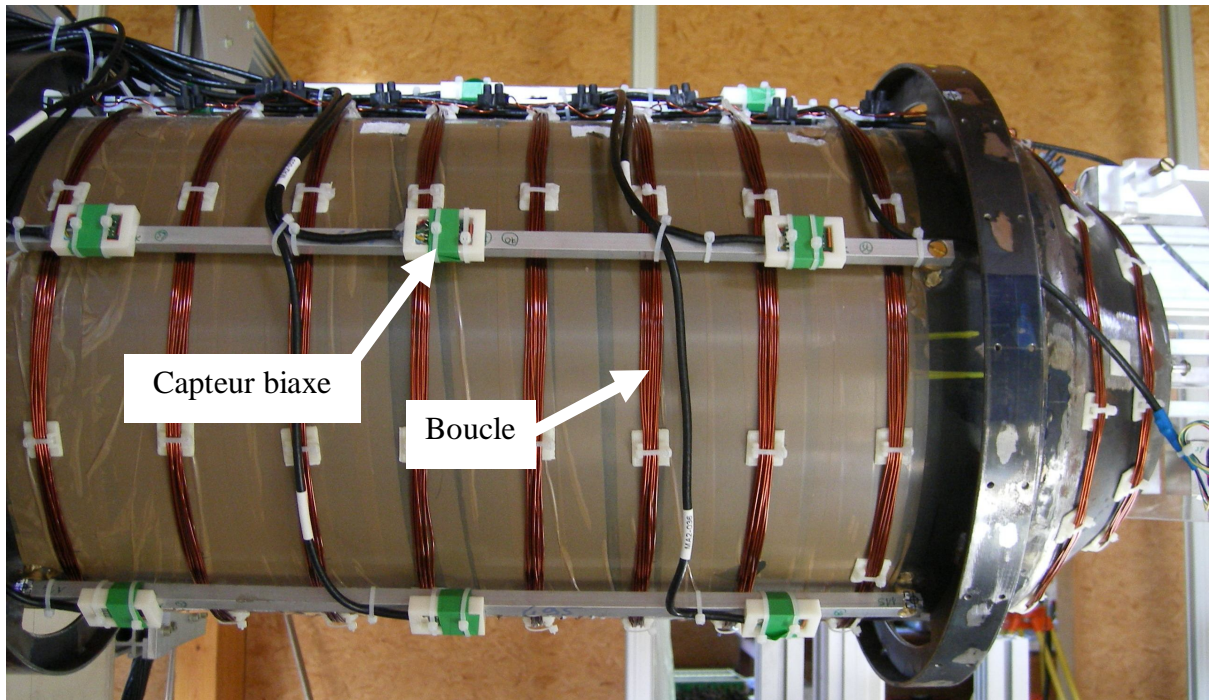


Figure IV.9. Détail des boucles de traitement et des capteurs biaxes

## III.2 Capteurs magnétiques

### III.2.1 Mesures internes

Le choix des capteurs est soumis à des contraintes importantes en termes d'encombrement, de précision et, bien sûr, de coûts. L'étude du problème inverse et le bon sens ont permis de largement défricher les critères de positionnement des capteurs : ils résultent d'un compromis entre une surveillance globale du comportement des coques, qui tend à multiplier le nombre de capteurs, et une absence de redondance d'informations mesurées, qui tend à éloigner les capteurs les uns des autres. Il faut également faire en sorte de placer les capteurs au mieux en face des barycentres des éléments du maillage. Une étude paramétrique du nombre et du placement des capteurs a permis de mettre des chiffres sur les termes « surveillance globale » et « absence de redondance » : elle a abouti à une distance de l'ordre de 20cm entre chaque capteur. Concernant la robustesse des algorithmes d'identification, une étude non reportée ici a montré que des erreurs de mesures de l'ordre de 10 à 15% étaient acceptables vis-à-vis de la justesse de la prédiction de l'anomalie. Enfin, le volume disponible entre les deux coques étant restreint, nous nous sommes orientés vers des

capteurs biaxes de marque Mayer de faible encombrement (Fig. IV.9). Les mesures des deux composantes du champ tangentiel à la tôle se sont avérées, en simulation, largement préférables à une mesure tangentielle longitudinale et une mesure normale : le rapport signal sur bruit de la composante normale étant insuffisant. Les volumes plus importants devant et derrière la coque interne ont permis de placer des capteurs triaxes Mayer.

Au final, la maquette a été instrumentée à l'aide de 75 capteurs biaxes, placés à égale distance des deux coques et 5 triaxes selon les positions visibles sur la figure IV.10. Les noyaux des capteurs biaxes sont situés à 2cm des tôles des coques sauf dans la partie arrière dont l'espace est plus réduit et où les noyaux sont à 8mm des tôles. Remarquons également que pour la même raison d'espace disponible il n'a pas été possible, dans cette zone, de placer autant de capteurs que nécessaire et ainsi d'assurer une bonne surveillance des matériaux. Par conséquent, il faudra s'attendre à une identification particulièrement délicate de l'arrière de la maquette puisque nous cumulons les deux difficultés possibles : une mauvaise connaissance du champ magnétique et une extrême proximité des capteurs et des tôles ce qui est très préjudiciable pour le calcul du champ proche et pour l'identification.

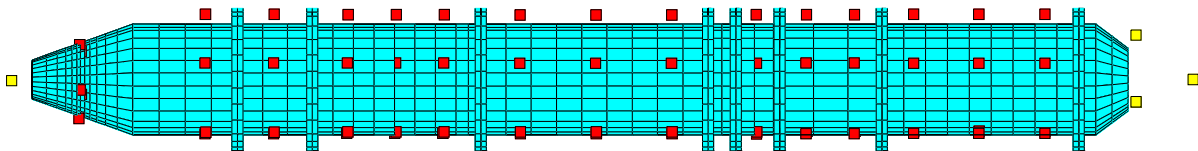


Figure IV. 10. Visualisation de la position des capteurs : biaxes en rouge et triaxes en jaune

Tous ces capteurs ont été caractérisés pour déterminer les offsets, les mésalignements des noyaux et les erreurs de linéarité à l'aide d'une bobine étalon (double bobines de Helmholtz créant un champ homogène dans une sphère de 10cm de diamètre) et d'un capteur de référence de marque Ultra précis au nT. Après correction, il est possible de connaître le champ avec une précision inférieure à 1% sur les triaxes. Pour les biaxes, la précision est dépendante de la valeur de la composante normale en raison des erreurs d'alignements des noyaux : cela induit une erreur qui peut être très importante. Typiquement, les mésalignements atteignent souvent  $1^\circ$  ce qui introduit une erreur de près de 2% de la valeur du champ normal. Par conséquent, un champ normal de  $40\text{A.m}^{-1}$ , tout à fait plausible, introduirait, dans ce cas, presque  $0.8\text{A.m}^{-1}$  d'erreur sur la mesure d'un noyau : s'il était censé mesurer une composante de  $0.8\text{A.m}^{-1}$  alors nous commettrions une erreur de 100% ! Nous retiendrons ainsi, qu'à priori, l'erreur commise sur les biaxes est comprise entre  $\pm 0.8\text{A.m}^{-1}$ . Cette imprécision est assez problématique mais les contraintes d'un modèle réduit ne nous laissent pas d'autres choix que d'utiliser ces capteurs biaxes. Nous suggérons vivement qu'un bâtiment réel soit équipé uniquement de capteurs triaxes : cela ne devrait pas poser de difficulté, autre que financière, puisque les capteurs garderaient leur taille alors que l'espace disponible serait multiplié par  $30^3$ .

Les valeurs de précision données pour les triaxes ne sont pas celles que nous aurons en réalité sur la maquette puisqu'il faudra ajouter toutes les erreurs de positionnement. Elles représentent ainsi les valeurs de précision maximales que l'on est en droit d'attendre.

### III.2.2 Signature

La signature extérieure de la maquette est mesurée, à l'aide capteurs fixes, sur une ligne de longueur 8.9m. C'est la maquette qui est mobile : il est en effet plus précis de garder les capteurs immobiles lors de la mesure. Nous avons disposé trois capteurs triaxes de marque Mayer et un capteur triaxe de marque Ultra dont les positions sont données sur la figure

IV. 11. Seules les mesures de l'Ultra seront présentées dans ce mémoire. Leurs précisions sont de l'ordre de quelques nT.

Sur les courbes de signature qui viendront dans les paragraphes suivants, la maquette est située entre -0.16m et 3.26m.

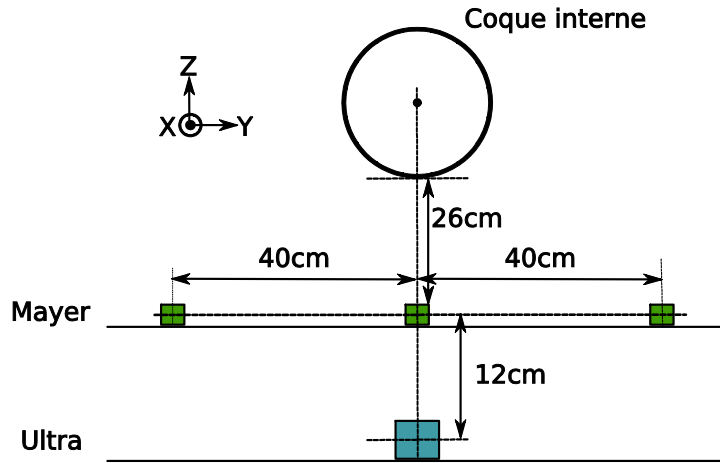


Figure IV. 11. Position des capteurs de signature par rapport à la coque interne

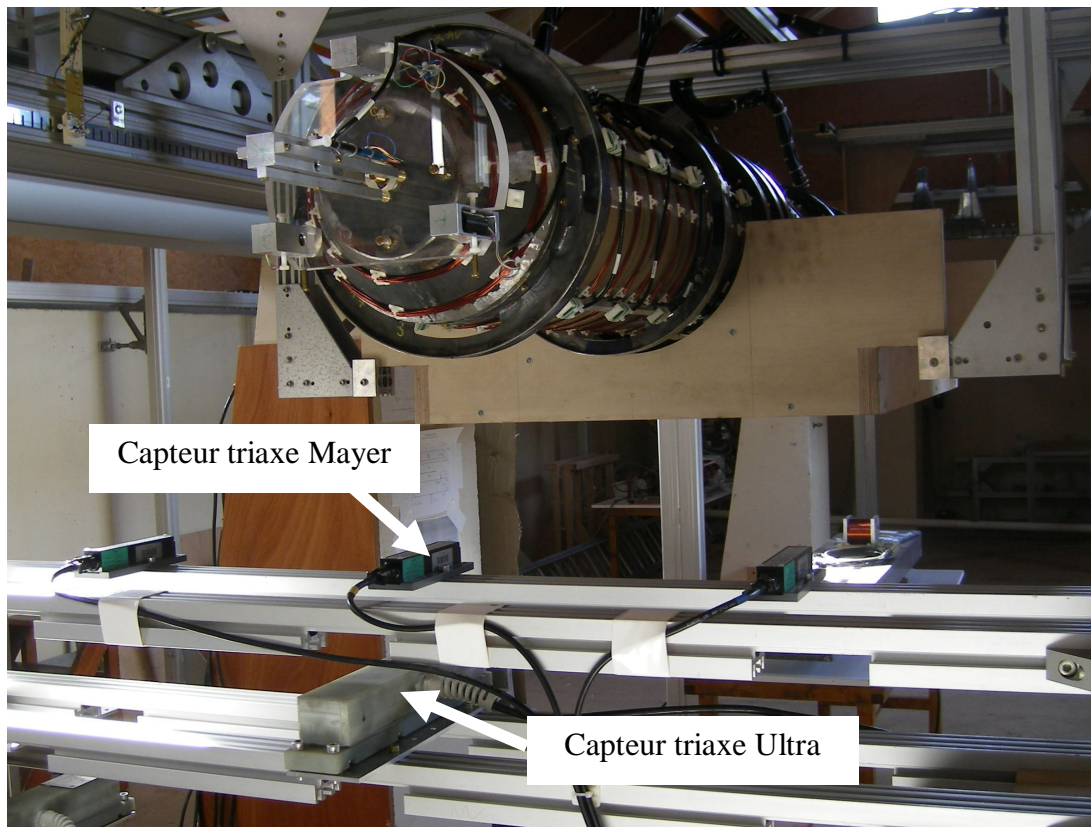


Figure IV. 12. Visualisation des capteurs de signature externe

### III.3 Physique

Les paramètres physiques sont peu nombreux et ne concernent que les perméabilités et les champs coercitifs des tôles. Ils sont résumés dans le tableau suivant :

	Perméabilité réversible	Perméabilité anhystérique	Champ coercitif ( $A.m^{-1}$ )
Coque interne	107	$\approx 2100$	$\approx 800$
Tronçon central coque interne	147	?	?
Coque externe	180	$\approx 1800$	$\approx 800$

Les valeurs de perméabilité anhystérique et de champ coercitif sont issues d'une caractérisation de tores bobinés à l'aide d'un banc adapté à des mesures en champ fort.

Concernant les perméabilités réversibles, elles proviennent d'une adaptation entre la simulation numérique directe et les mesures de signatures induites de la maquette. Pourtant, lors de ces mesures de signature, nous avons eu la mauvaise surprise de constater que le tronçon central de la coque interne n'avait pas la même perméabilité que le reste des tôles (Fig. IV.13). Une anisotropie du matériau due au laminage ne semblant pas pouvoir expliquer une telle différence, seule une erreur de choix de tôle lors de la fabrication paraît crédible. Par conséquent, il nous est impossible de connaître la perméabilité anhystérique et le champ coercitif de la tôle de ce tronçon, même si on les suppose évidemment du même ordre de grandeur que les autres matériaux. Les perméabilités réversibles de ces tôles sont légèrement supérieures à celles, plus dures, réellement employées sur un sous-marin, pour lesquelles la perméabilité vaut plutôt 80.

Finalement, en raison des épaisseurs et des perméabilités des tôles trop importantes, une étude, non reportée ici, a été menée afin de comparer les différences entre la maquette réelle et la maquette idéale formée par les bons matériaux à la bonne échelle. On peut alors constater une surestimation des champs induits proche de 100%. En conséquence, les champs induits mesurés par les capteurs internes auront sans doute un meilleur rapport signal sur bruit ce qui confère un certain avantage à la maquette par rapport à un bâtiment réel. Pourtant cela n'a rien de préjudiciable pour la représentativité magnétique de la maquette ; en effet, l'information induite issue des mesures n'est pas essentielle puisqu'elle est déjà largement contenue dans les équations du comportement du matériau. En réalité, les données les plus significatives sont celles provenant de l'aimantation rémanente. Or nous pouvons a priori estimer, mais cela reste à confirmer, que le rémanent de la maquette sera comparable à celui d'un sous-marin réel. Les tôles de ce dernier présentent sans doute une perméabilité anhystérique supérieure à celles que nous avons utilisées ce qui devrait permettre de compenser une épaisseur relative plus faible (par exemple, l'acier employé dans le cadre de la maquette de coque de bâtiment de surface est de perméabilité réversible inférieur (96) mais de perméabilité anhystérique supérieures (2700) aux tôles employées ici).

Les valeurs du champ coercitif de ces matériaux nous indiquent que les lois d'aimantation en champs faibles sont applicables.

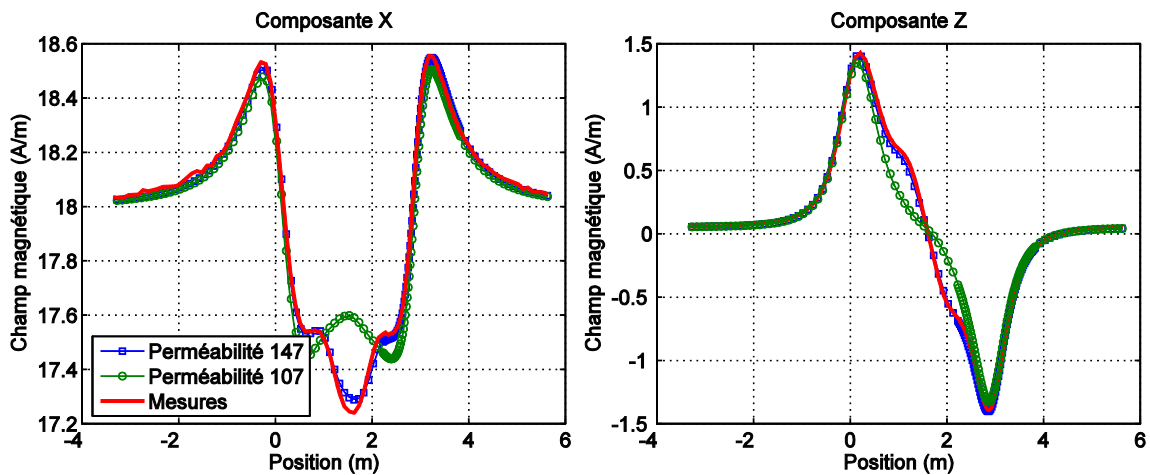


Figure IV. 13. Induit mesuré et simulé de la coque interne. La courbe perméabilité 107 correspond à une perméabilité de 107 pour toute la coque interne et la courbe perméabilité 147 correspond à une perméabilité de 107 pour toute la coque sauf le tronçon central qui a 147.

## IV Les états d'aimantation de la maquette

Le protocole de mesures que nous imaginons doit permettre de valider (ou non) les algorithmes d'identification dans un cas extrême, pour tester la robustesse, et dans une situation réaliste d'aimantation d'un sous-marin double coque.

Le cas extrême consiste en une aimantation sans aucune tendance générale, autrement dit, composée d'un rémanent avec de nombreuses aimantations locales. Ce type d'aimantation est particulièrement ardu à identifier puisqu'il nécessite une excellente connaissance des champs tout autour des tôles à identifier : en effet, les aimantations locales ne sont mesurées que par les capteurs les plus proches et elles peuvent même passer inaperçues si aucun capteur n'est assez près. Une deuxième difficulté s'oppose à une bonne identification des aimantations locales et est liée cette fois à l'aspect expérimental du problème : ces aimantations créent de fort gradient du champ à proximité de la tôle, par conséquent, une erreur, même faible, sur la position d'un capteur peut conduire à une mesure de très mauvaise qualité. Enfin, il faut se rappeler que nos formulations globales ont de sérieuses difficultés pour modéliser des variations rapides de l'aimantation. On comprend ainsi que les aimantations globales sont beaucoup plus aisées à identifier que les aimantations locales.

Ce cas extrême d'aimantation a sans doute peu de chance d'être visible sur un sous-marin : les traitements et les contraintes qu'ils subissent tendent en effet à homogénéiser l'aimantation. Celle de la coque interne épaisse converge vraisemblablement vers l'aimantation anhystérétique lors d'une plongée même si nous manquons de mesures pour situer dans quelle mesure c'est le cas. La coque externe, n'étant pas soumise à la pression, tend vraisemblablement vers l'aimantation d'équilibre d'une manière beaucoup plus lente : cela ne permet pas d'avoir un à priori sur son état mais autorise à penser que les aimantations locales sont atténuées et lissées. Nous considérerons donc une première répartition aléatoire d'aimantation uniquement dans le but de tester nos algorithmes dans un cas limite.

Le paragraphe précédent donne la majeure partie des informations sur ce que nous entendons par aimantation réaliste d'un sous-marin. Pour résumer, nous considérons qu'il plonge dans un champ inducteur  $\mathbf{H}_a$  puis qu'il navigue dans le champ  $\mathbf{H}_0$ . Nous allons alors établir un protocole de génération d'un deuxième état magnétique conforme à ce processus.

Nous allons distinguer les cas d'aimantations que nous allons utiliser pour la validation des méthodes numériques, des cas réellement obtenus sur la maquette.

## V Validations numériques préalables sur maquette

### V.1 Description des états d'aimantation simulés de la maquette

#### V.1.1 Etat simulé 1 : coque interne seule : aimantation quelconque

Cet état sert à vérifier le comportement de nos algorithmes d'identification dans un cas extrême d'aimantation. Pour le générer, nous utilisons la procédure décrite dans le chapitre II §IV.6. Le champ d'équilibre est issu de la présence de 100 dipôles répartis aléatoirement autour et dans la maquette. Nous supposons également l'absence de champ inducteur.

Remarque : nous donnons au tronçon central de la maquette, la perméabilité anhystérétique des autres tronçons, c'est-à-dire 2100.

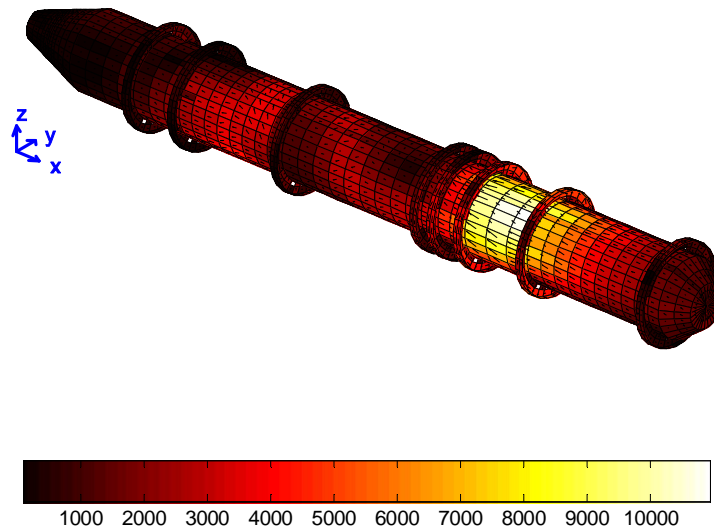


Figure IV. 14. Visualisation de l'aimantation générée sur la coque interne ( $A.m^{-1}$ )

#### V.1.2 Etat simulé 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe

Cet état est censé représenter une aimantation typique d'un sous-marin double coque. Cependant, nous le répétons, nous ne savons pas si l'aimantation d'équilibre est effectivement atteinte sur un bâtiment réel. Dans la simulation, nous n'avons guère le choix puisque nous ne pouvons que donner leurs perméabilités anhystérétiques aux tôles de la coque interne. L'état d'aimantation rémanent est donc le suivant : la coque interne est aimantée à l'équilibre perturbée par quelques aimantations locales tenaces et le rémanent de la coque externe est uniquement formé de quelques aimantations locales.

Pour générer cette aimantation, nous plaçons la maquette dans les champs  $\mathbf{H}_a$  et  $\mathbf{H}_0$  suivants :

$$\mathbf{H}_a = \begin{pmatrix} 0.06 \\ -18.18 \\ -32.45 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} 18.14 \\ -0.74 \\ -32.46 \end{pmatrix} \text{ en } \text{A.m}^{-1} \quad \text{IV.1}$$

Nous ajoutons au champ d'équilibre  $\mathbf{H}_a$  la présence d'une dizaine de dipôles répartis aléatoirement autour et dans la maquette. Nous vérifions leurs influences sur la signature en la comparant à la signature issue de la même génération d'aimantation mais sans dipôles (Fig. IV.16).

La méthode B, expression bayésienne de la méthode T, va pouvoir être testée ici. En effet, nous disposons d'une information à priori intéressante sur la coque interne qui est dans un état proche de l'équilibre dans le champ  $\mathbf{H}_a$ .

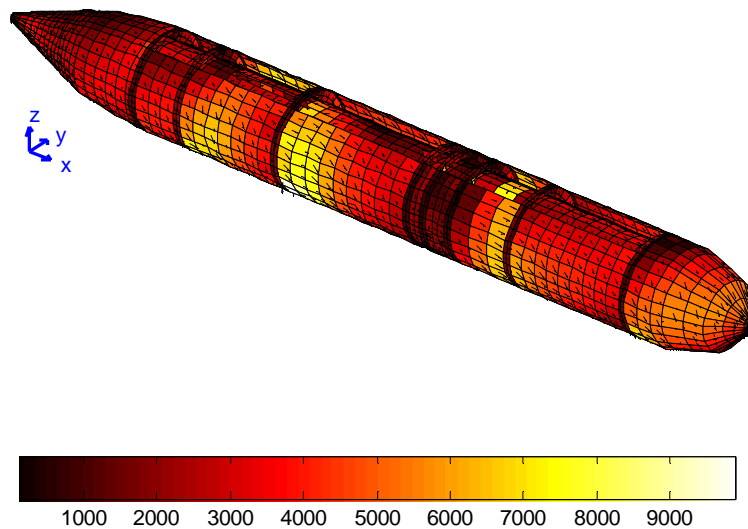


Figure IV. 15. Visualisation de l'aimantation générée sur la maquette complète ( $\text{A.m}^{-1}$ )

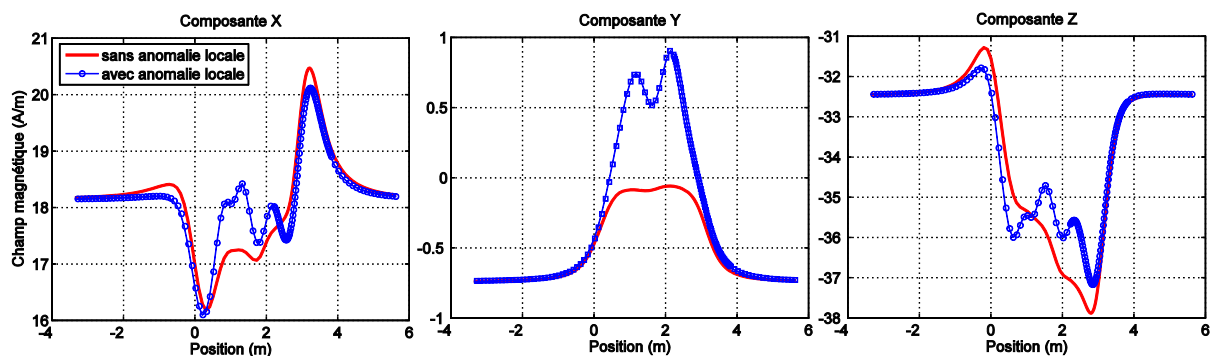


Figure IV. 16. Signature de la maquette avec et sans anomalies locales

## V.2 Identification de l'état d'aimantation

Pour ces validations numériques, nous considérerons d'abord que les mesures sont parfaites. Par parfaite, nous entendons que nous n'ajoutons aucune erreur par rapport aux champs calculés par la génération d'aimantation, à l'aide la méthode M, aux emplacements des capteurs. Il ne s'agit bien évidemment pas des mesures que l'on obtiendrait en réalité si la maquette correspondait exactement à ce qui est simulé pour la simple raison que nos formulations sont imprécises à proximité des tôles.



Ensuite, afin de se mettre dans une situation plus réaliste et conformément à ce que nous avons dit sur la précision des mesures, nous ajoutons une erreur aléatoire comprise entre  $\pm 0.8A.m^{-1}$  sur chacune des mesures, quelle que soit sa valeur.

Concernant les maillages, celui de la coque épaisse seule contient 2441 éléments et celui de la maquette complète 4081.

### **V.2.1 Etat simulé 1 : coque interne seule : aimantation quelconque**

L'état de la maquette étant complètement quelconque, seule la méthode T peut être employée ici. Nous la comparerons à l'inversion issue de la méthode M c'est-à-dire à la méthode dont nous disposions au début de ces travaux.

Précisons les conditionnements des matrices inversées :

Méthode	Conditionnement
M	780
T	51

Nous sommes relativement étonnés par le conditionnement de la matrice de la méthode M qui est assez élevé. En revanche, celui de la méthode T est excellent et garantit vraisemblablement une bonne tolérance de la pseudo-inverse aux perturbations sur les mesures.

#### **a - Sans erreur sur les mesures**

La comparaison des aimantations identifiées avec l'aimantation de référence est largement en faveur de la méthode T (Fig. IV.17). Un bémol subsiste sur l'anomalie principale (dans le 1<sup>er</sup> tiers avant) qui est bien repérée mais pas avec la bonne amplitude :  $5500A.m^{-1}$  au lieu de  $11000A.m^{-1}$ .

Cette bonne impression de la méthode T est confirmée par l'analyse des signatures prédites (Fig. IV.18). Malgré l'état d'aimantation particulièrement complexe, elle parvient à prédire de manière acceptable l'anomalie magnétique de la coque épaisse. La seule différence notable se situe au niveau de la forte anomalie locale qui est assez mal identifiée. En revanche, la méthode M échoue complètement. Nous nous y attendions évidemment pour toutes les raisons que nous avons évoquées dans le chapitre précédent.

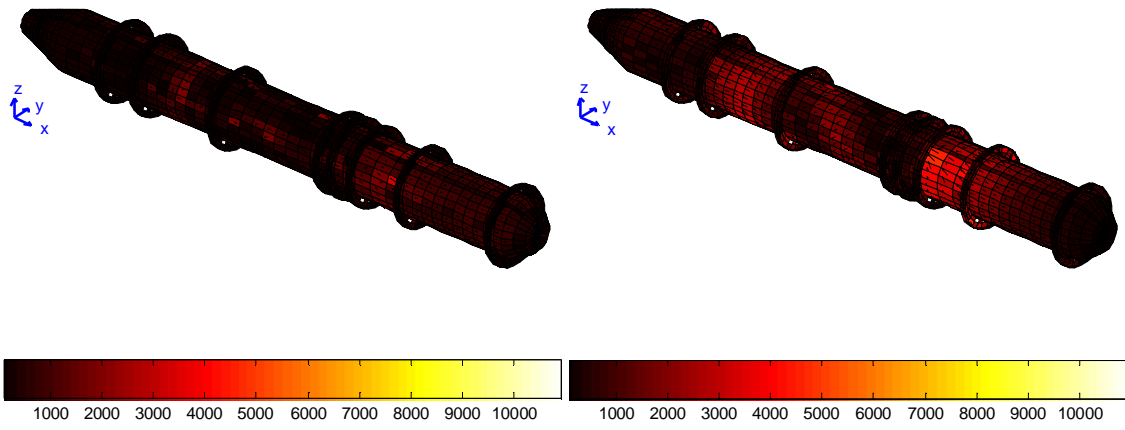


Figure IV. 17. Aimantation identifiée par la méthode M (à gauche) et T (à droite) (en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ )

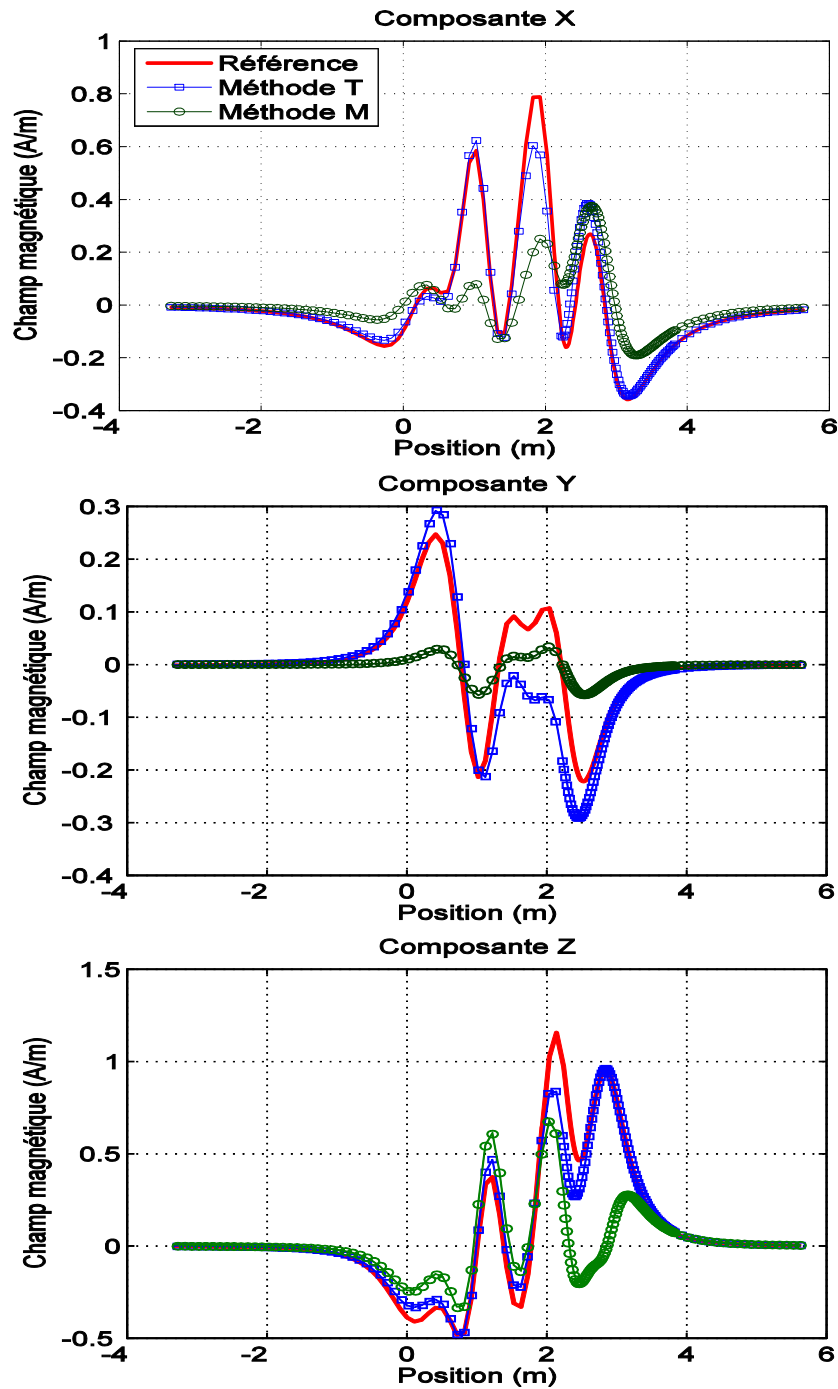


Figure IV. 18. Signatures de la coque interne : référence et prédiction

**b - Avec une erreur aléatoire de  $0.8A.m^{-1}$**

Comme nous l'avons dit ci-dessus, nous ajoutons désormais un biais compris entre  $\pm 0.8A.m^{-1}$  sur chacune des mesures. Le résultat de l'identification est bien sûr uniquement indicatif puisqu'il dépend assez fortement des erreurs introduites : nous donnons deux exemples de mesures perturbées (Fig. IV.19 et Fig. IV.20). Les erreurs de mesures sont catastrophiques dans le premier exemple puisque la prédiction devient parfaitement inacceptable et sont très pénalisantes dans le second cas.

Cependant, nous pensons que l'état magnétique formé seulement par des aimantations locales est particulièrement sensible aux erreurs de mesures : en effet, une aimantation locale ne sera mesurée que par un, voire deux capteurs, mais les autres n'auront aucune information sur elle. Par conséquent et contrairement aux aimantations globales où les erreurs de mesures peuvent être compensées par les autres capteurs, chaque information est absolument essentielle. De plus, le rapport signal sur bruit n'est pas bon dans cette situation puisque certaines zones de la coque sont extrêmement peu aimantées. Nous restons donc relativement optimiste quant à l'identification d'états globaux réelle.

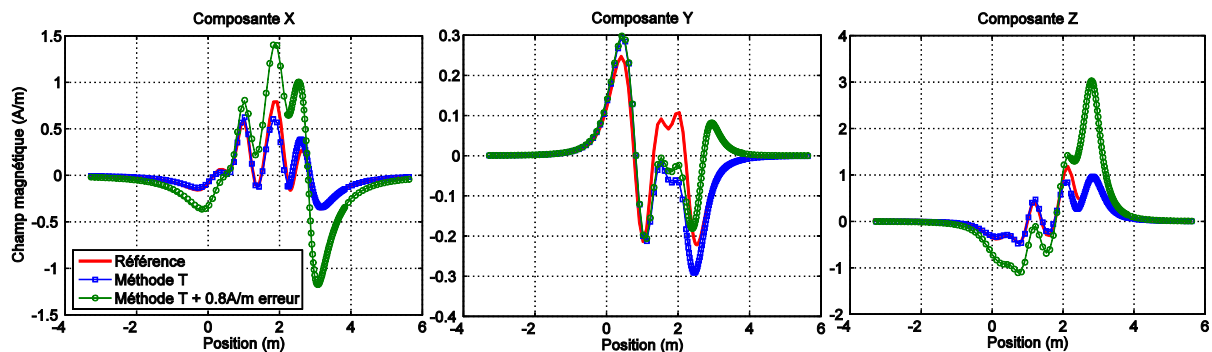


Figure IV. 19. Signatures de la coque interne : référence et prédiction avec  $0.8A.m^{-1}$  d'erreur sur les mesures – jeu 1

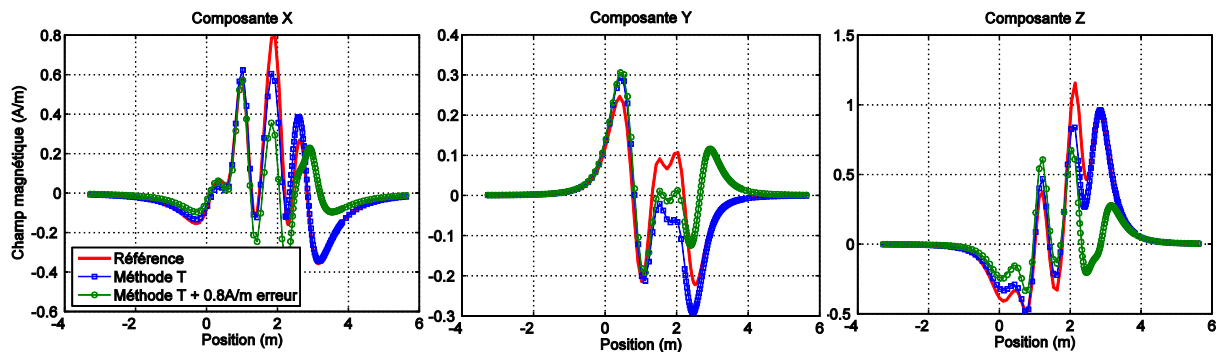


Figure IV. 20. Signatures de la coque interne : référence et prédiction avec  $0.8A.m^{-1}$  d'erreur sur les mesures – jeu 2

**V.2.2 Etat simulé 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe**

Dans cet état d'aimantation, nous avons un bon a priori que nous allons exploiter grâce à la méthode B : le rémanent de la coque interne est proche de l'état d'équilibre dans le champ  $H_a$ . Concernant l'écart-type des mesures, nous le considérerons comme nul dans le cas des mesures parfaites et de  $0.8A.m^{-1}$  dans le cas contraire. Ce n'est alors pas exact en toute

rigueur puisque l'erreur introduite ne suit pas une densité de probabilité de type loi normale mais est uniforme sur  $\pm 0.8A.m^{-1}$ . Cependant, les différentes expériences numériques menées n'ont pas montré une importance capitale de ce paramètre. L'écart-type de l'à priori est issu de l'expérience et il vaut  $0.5Am$ .

Nous sommes conscients du caractère très empirique de notre approche du bayésien mais le temps nous a manqué pour réaliser une étude plus complète. Nous estimons, cependant, qu'elle est suffisante pour défricher cette voie et en évaluer les possibilités.

Désormais, comme l'analyse de la qualité de l'identification à partir des aimantations est trop approximative (et c'est encore plus vrai dans le cas de la maquette complète où la coque interne n'est pas visible, il faudrait alors multiplier les images), nous ne baserons l'évaluation de l'inversion que sur les prédictions de l'anomalie. Nous ne visualiserons que l'aimantation issue de l'identification par la méthode T.

Les conditionnements des matrices inversées sont très faibles et valent désormais :

Méthode	Conditionnement
M	73
T	9
B	47

#### a - Sans erreur sur les mesures

Pour commencer, réglons le cas de la méthode M : ses prédictions ne sont pas complètement aberrantes (Fig. IV.22), en tout cas pour les composantes longitudinale et verticale, mais cela est simplement dû à la présence du problème direct dans les équations. Autrement dit, la méthode M retourne quasiment l'induit de la maquette dans le champ inducteur  $H_0$  mais reste incapable d'identifier correctement le rémanent.

L'inversion par la méthode T est particulièrement bonne : la signature prédite est très proche de la signature de référence. Nous montrons ainsi pour la première fois la faisabilité théorique de l'identification de l'état magnétique d'un sous-marin double coque, aimanté de manière réaliste, par des mesures du champ entre les coques. Ce résultat est d'autant plus notable que l'inversion se fait sans aucune information à priori. Dès lors, l'identification bayésienne perd une partie de son intérêt. La méthode B reste, cependant, légèrement plus performante comme on peut le constater sur la zone comprise entre 2 et 4m des signatures.

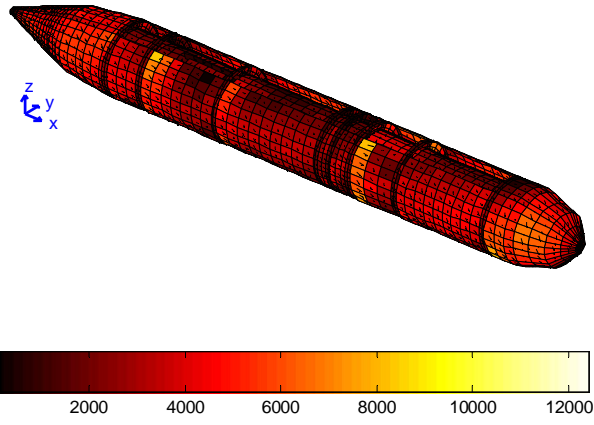


Figure IV. 21. Aimantation identifiée par T (en A.m<sup>-1</sup>)

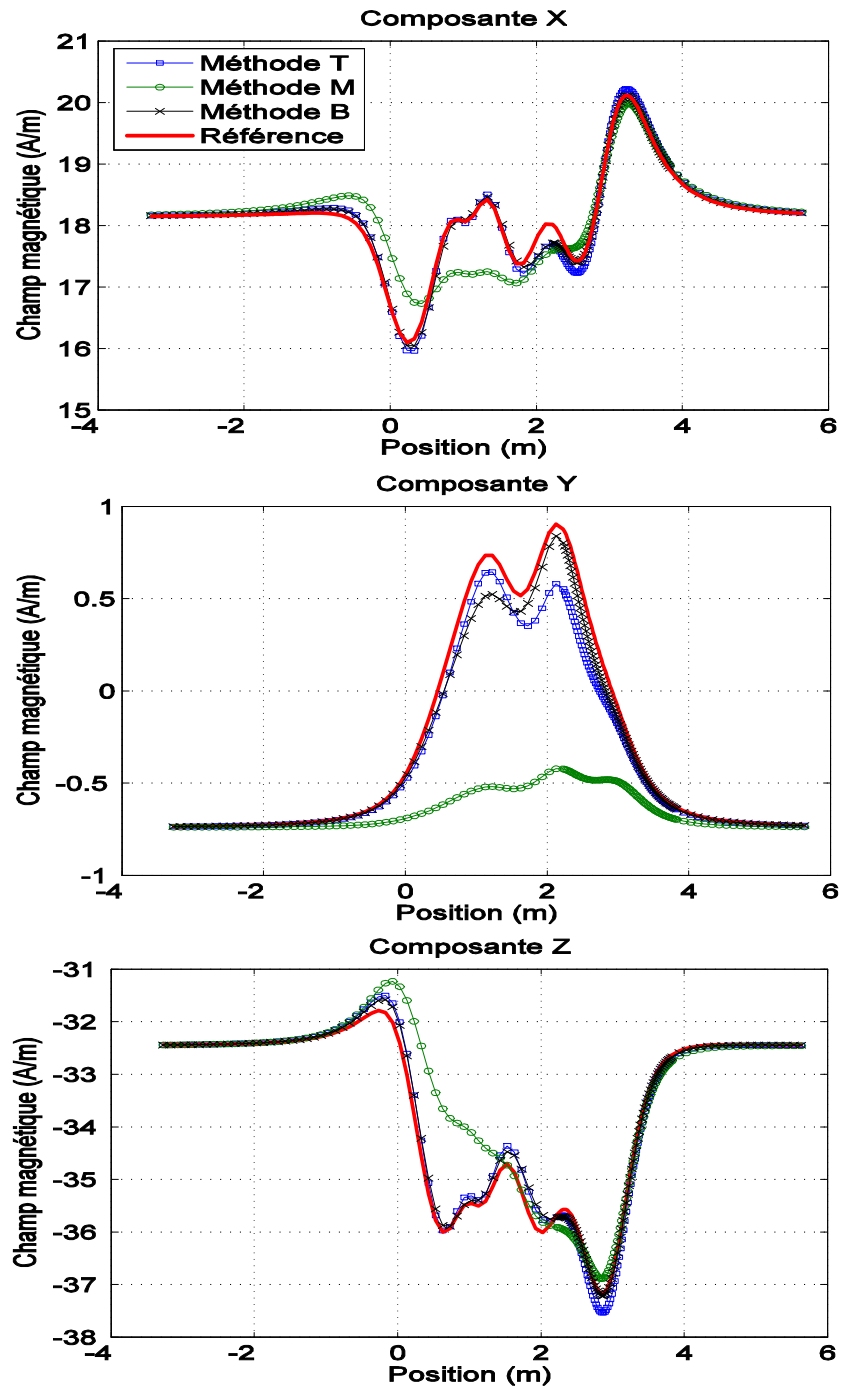


Figure IV. 22. Signatures de la maquette complète : référence et prédiction

### b - Avec une erreur aléatoire de $0.8A.m^{-1}$

Cette fois, l'influence des erreurs de mesures est extrêmement limitée puisque totalement transparente sur la méthode T (Fig. IV.23), comme sur la méthode B, non reportée sur le graphe. Nous nous attendions effectivement à une moindre dépendance aux erreurs dans ce cas d'aimantation mais nous restons surpris par la robustesse de notre algorithme. Le meilleur rapport signal sur bruit, dû à des aimantations plus fortes et à l'absence de zone désaimantée, et un état magnétique plus global rendent les erreurs de mesures complètement négligeables vis-à-vis de l'identification.

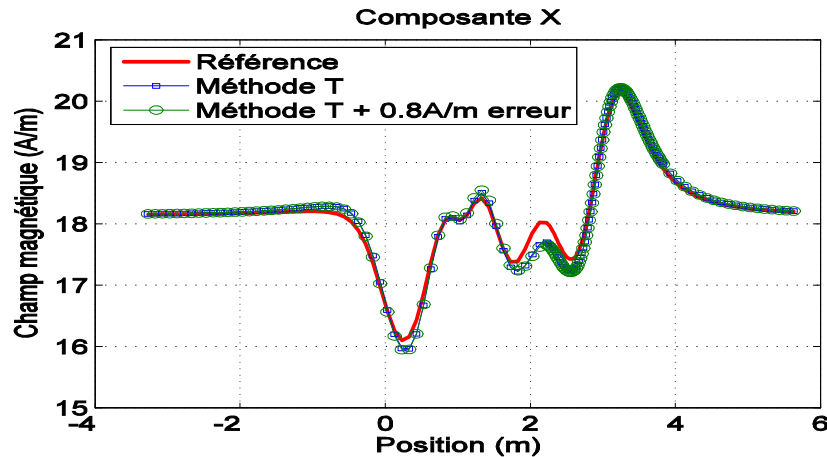


Figure IV. 23. Composante longitudinale de la maquette complète : référence et prédiction avec  $0.8A.m^{-1}$  d'erreur sur les mesures

## V.3 Conclusion

Cette étude numérique a permis de valider la méthode T pour l'identification de sources magnétiques complexes, en l'occurrence un sous-marin double coque, à partir de mesures du champ dans l'air à proximité des matériaux ferromagnétiques. Moyennant un rapport signal sur bruit correct, la signature peut-être prédite avec précision et avec une bonne tolérance aux erreurs de mesures. C'est une avancée remarquable relativement à la formulation en aimantation dont nous disposions précédemment.

Les bonnes performances de l'identification bayésienne ont été légèrement occultées par la qualité de la méthode T qui la rend presque inutile. Nous demeurons pourtant toujours persuadés qu'il s'agit de l'avenir de l'IBF principalement pour des raisons de robustesse : nous pensons à un diagnostic des capteurs par exemple mais également à l'utilisation des mesures externes lors des mesures sur station qu'il serait regrettable de ne pas utiliser et qui permettraient de réaliser un suivi d'aimantation.

Cette étape de validation numérique était absolument essentielle : il n'aurait pas été très judicieux d'espérer identifier un cas réel si nous étions incapable de le faire sur des exemples que nous maîtrisions parfaitement. Cet examen de passage validé, intéressons nous maintenant à la validation expérimentale qui représente l'aboutissement de tous ces travaux.

## VI Validations expérimentales sur maquette

### VI.1 Mesures d'induit

#### VI.1.1 Signature

Avant d'espérer résoudre le problème inverse, il est inévitable de vérifier la cohérence de la résolution du problème direct avec les mesures réelles sur la signature.

La signature induite de la maquette complète est obtenue par différence de la signature en champ nul et celle dans le champ  $\mathbf{H}_1$  ci-dessous (Fig. IV.25).

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 18.1 \\ -0.09 \\ -32.50 \end{pmatrix} \text{ en A.m}^{-1} \quad \text{IV.2}$$

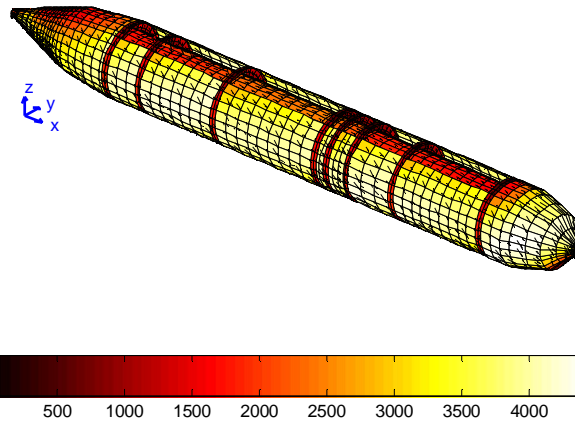


Figure IV. 24. Aimantation induite simulée de la maquette complète

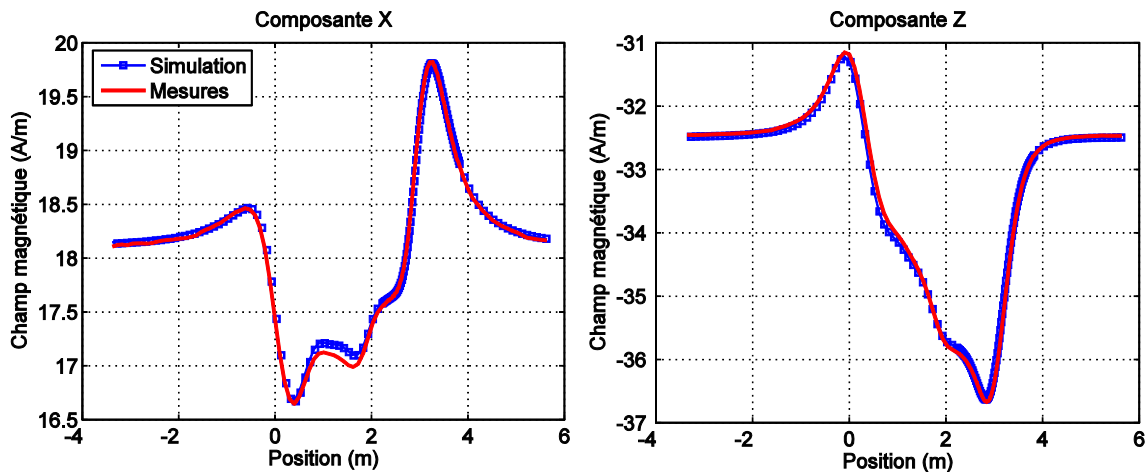


Figure IV. 25. Signature induite de la maquette complète : comparaison de la simulation et des mesures

Nous constatons une excellente correspondance entre la simulation et la mesure. Cela n'est toutefois pas tellement étonnant puisque nous nous sommes servis de ces mesures pour caler les perméabilités des tôles.

Remarque : l'induit transversal n'est pas représenté car quasiment nul.

### VI.1.2 Capteurs internes

Il est possible d'évaluer la qualité de nos mesures internes en comparant les mesures induites avec les simulations directes induites de la méthode M aux emplacements des capteurs. Nous ne ferons qu'une étude succincte sur la maquette complète : l'objectif étant uniquement d'obtenir un ordre de grandeur des erreurs commises. Dans deux champs inducteurs différents  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_2$ , nous allons mesurer l'erreur moyenne commise, l'erreur maximale et le pourcentage d'erreur moyen.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 12.9 \\ -5.91 \\ 28.05 \end{pmatrix} \text{ en } \text{A.m}^{-1} \quad \text{IV.3}$$

#### a - Dans le champ inducteur $\mathbf{H}_0$

Champ mesuré moyen ( $\text{A.m}^{-1}$ )	11.57
Champ mesuré maximal ( $\text{A.m}^{-1}$ )	22.90
Erreur moyenne ( $\text{A.m}^{-1}$ )	1.21
Erreur maximale ( $\text{A.m}^{-1}$ )	4.83
Pourcentage d'erreur moyen	10.4%

#### b - Dans le champ inducteur $\mathbf{H}_2$

Champ mesuré moyen ( $\text{A.m}^{-1}$ )	9.40
Champ mesuré maximal ( $\text{A.m}^{-1}$ )	21.27
Erreur moyenne ( $\text{A.m}^{-1}$ )	0.86
Erreur maximale ( $\text{A.m}^{-1}$ )	2.39
Pourcentage d'erreur moyen	7.6%

#### c - Conclusion

Nous ne poussons pas ici plus loin notre étude de la précision des mesures internes mais nous pouvons d'ores et déjà constater que l'erreur moyenne se situe dans l'ordre de grandeur que nous avons prévu, environ 10%, et qu'elle est acceptable pour l'identification, en tout cas dans les tests numériques de la maquette.



## VI.2 Description des états d'aimantation réels de la maquette

### VI.2.1 Etat réel 1 : coque interne seule : aimantation quelconque

Cet état magnétique est celui dans lequel nous avons réceptionné la maquette : il ne présente à priori aucune aimantation préférentielle.

### VI.2.2 Etat réel 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe

L'état d'aimantation que nous avons réellement conféré à la maquette de sous-marin est sans doute un peu plus irréaliste que l'état numérique correspondant et ceci pour deux raisons : la première est qu'il est impossible d'atteindre l'aimantation anhystérique de la coque interne avec le bobinage disponible : la puissance admissible par les fils est insuffisante. Corollairement, il nous a été impossible de désaimanter complètement la maquette et donc l'état polarisé présente des anomalies locales. Le second argument est que la coque interne a été polarisée indépendamment de la coque externe pour la bonne raison que le traitement de la maquette complète, avec son solénoïde entre les coques, conférerait à la coque mince une aimantation globale importante. Ainsi la coque interne n'a pas été traitée dans le champ qu'elle verrait en réalité lors d'une plongée puisque le champ d'équilibre serait largement perturbé par la coque externe.

Pour conclure, le protocole a donc été le suivant : la coque épaisse a été traitée dans le champ d'équilibre  $\mathbf{H}_a$ . Les éléments de la coque externe ont été aimantés indépendamment dans un champ quelconque puis remontés sur la coque interne. Enfin, l'ensemble a été placé dans le champ inducteur terrestre  $\mathbf{H}_0$ .

### VI.2.3 Mise à l'équilibre de la coque interne

Nous avons fait remarquer que l'énergie communiquée lors du traitement de la coque interne, par les boucles, était sans doute insuffisante pour placer les matériaux ferromagnétiques sur la courbe anhystérique. C'est ce que nous allons vérifier ici. Nous simulons la coque épaisse seule à l'aide du modèle en aimantation avec les perméabilités anhystériques des tôles et nous comparons la signature obtenue avec celle mesurée sur la coque interne préalablement traitée avec l'énergie maximale autorisée par les bobines.

Nous observons effectivement, sur les signatures, que l'aimantation des tôles est largement plus faible que l'aimantation d'équilibre. En conséquence, il ne sera pas possible de vérifier le comportement de notre formulation bayésienne du problème inverse puisque l'à priori sera nécessairement de très mauvaise qualité. Nous devons donc malheureusement nous contenter de l'expérimentation numérique précédente concernant cette méthode.

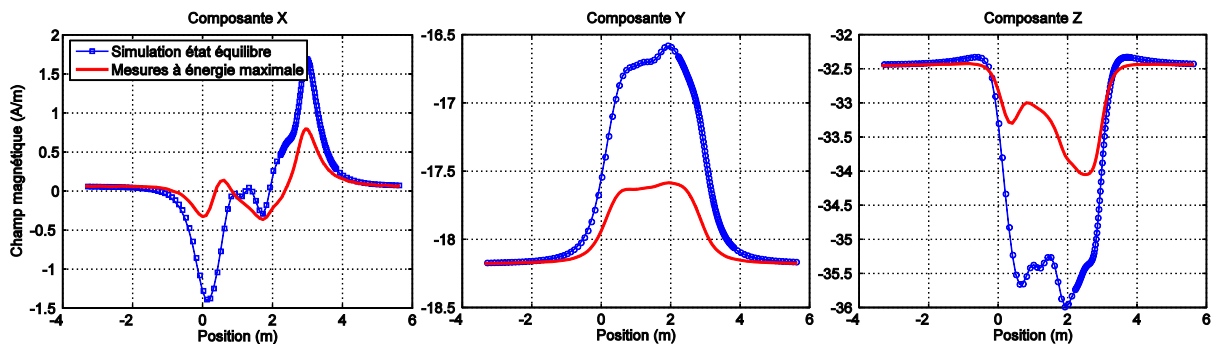


Figure IV. 26. Comparaison des signatures de la coque interne à l'équilibre

## **VI.3 Identification de l'état d'aimantation**

### **VI.3.1 Etat réel 1 : coque interne seule : aimantation quelconque**

Cet état correspond à l'aimantation initiale de la coque interne avant tout traitement ou désaimantation. Il est à priori parfaitement quelconque. L'identification se fait ainsi avec la méthode T en champ nul.

La signature prédite par la méthode T est globalement d'une bonne qualité (Fig. IV.28). Il reste cependant des écarts relativement importants qui, selon nous, sont imputables aux difficultés d'identification des aimantations locales et aux erreurs de mesures. La prédiction de la composante transversale paraît parfaitement inacceptable mais il faut remarquer que l'écart maximal est quasiment négligeable par rapport aux autres composantes.

Finalement, en regard des tests numériques dans la même situation §V.2.1.b, les résultats sont plutôt bons. Cela s'explique sans doute par le meilleur rapport signal sur bruit des mesures : la maquette étant initialement très aimantée ( $15\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$  au maximum dans le cas réel contre  $1\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$  dans le cas numérique).

### **VI.3.2 Etat réel 2 : maquette complète : polarisation de la coque interne et aimantation quelconque de la coque externe**

Comme nous l'avons déjà expliqué, la coque interne a été stabilisée dans un champ formé d'une composante transversale et d'une composante verticale. La coque externe, aimantée indépendamment, a ensuite été remontée. La maquette complète est ensuite placée dans le champ inducteur  $\mathbf{H}_0$ . Encore une fois, seule la méthode T a des chances de pouvoir identifier correctement l'aimantation de la maquette à partir des mesures internes.

La précision de la prédiction de la signature est assez exceptionnelle (Fig. IV.30) compte tenu des erreurs de mesures. Une aimantation peu perturbée, mais réaliste, peut ainsi être identifiée de manière très précise à partir de mesures du champ magnétiques entre les deux coques d'un sous-marin.

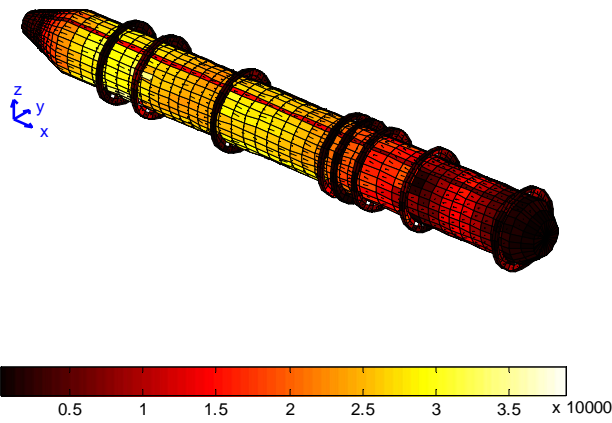


Figure IV. 27. Aimantation identifiée par la méthode T à partir des mesures réelles (en A.m<sup>-1</sup>)

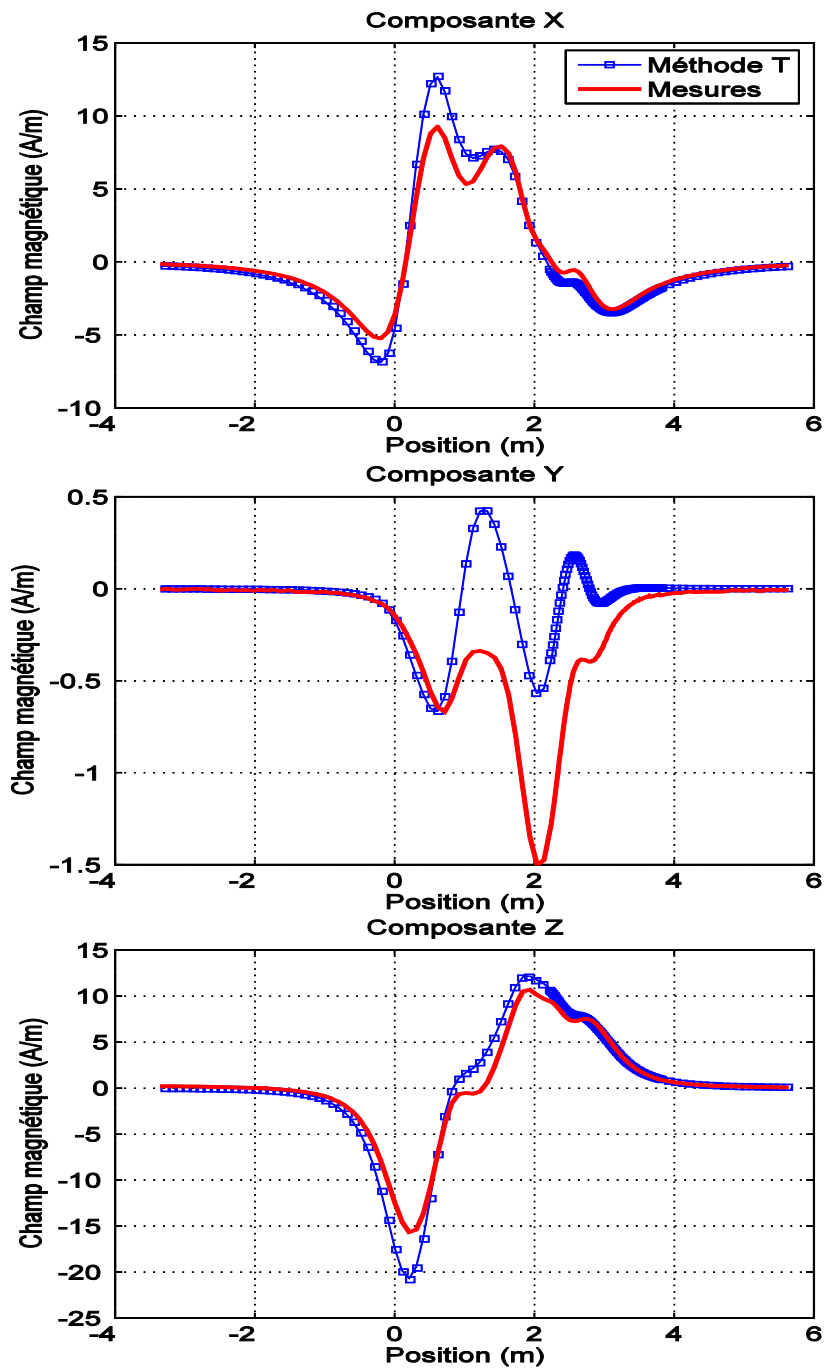


Figure IV. 28. Signatures de la coque interne : référence et prédiction

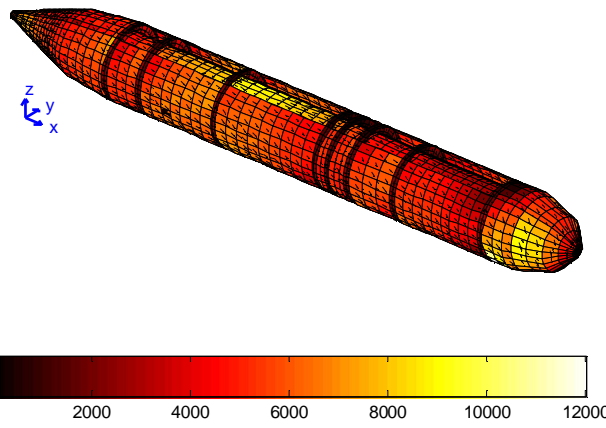


Figure IV. 29. Aimantation identifiée par la méthode T à partir des mesures réelles (en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ )

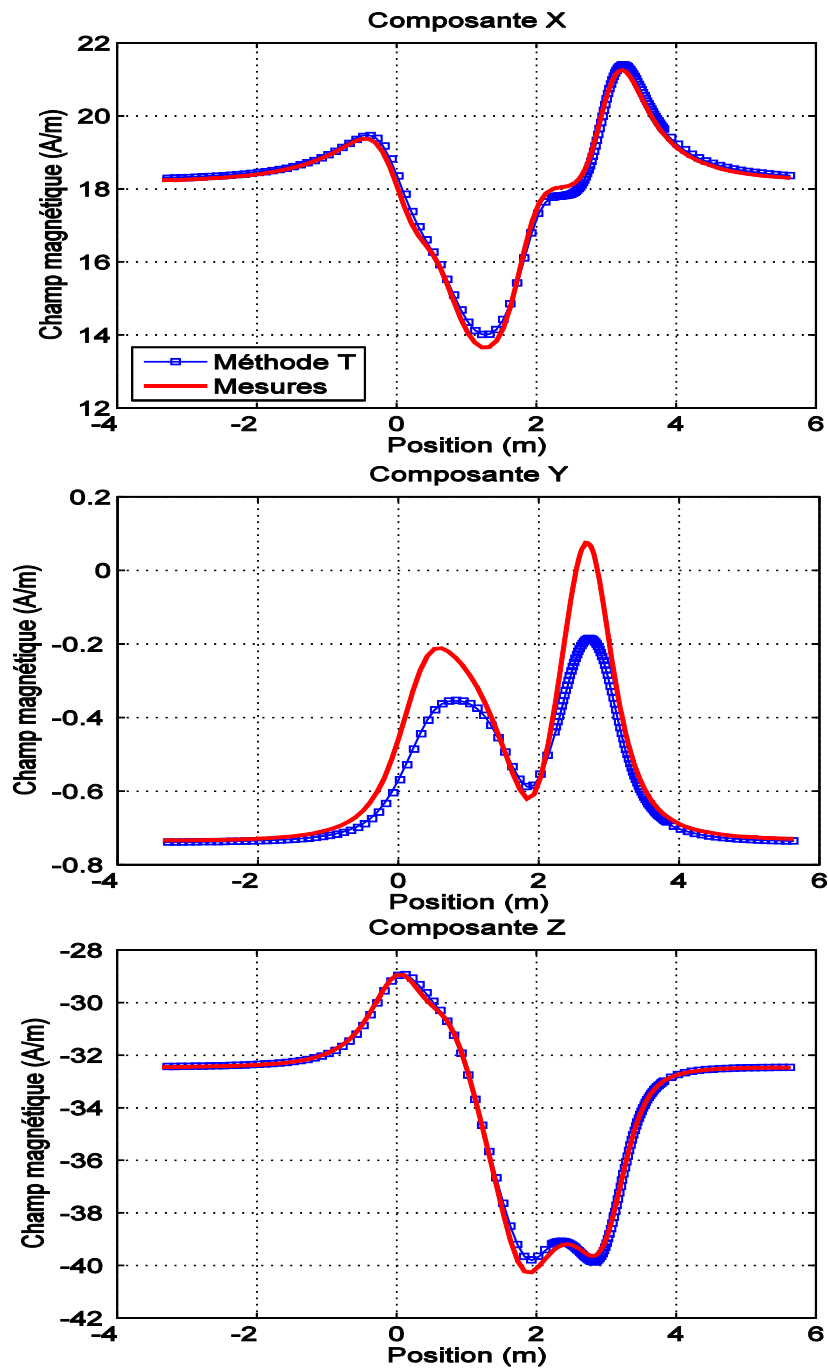


Figure IV. 30. Signatures de la maquette complète : référence et prédiction

## VII Conclusion

Ce chapitre a d'abord permis de dresser, avant toute résolution, un bilan des difficultés que peuvent poser différents types d'aimantations à nos formulations inverses. L'aimantation induite ne sera jamais un problème car elle est contenue dans les équations, en revanche, l'aimantation rémanente est plus difficile à identifier car elle est uniquement issue des mesures en l'absence d'information à priori. Nous avons constaté que l'identification d'une aimantation globale (issue d'un équilibre en particulier) était favorable et que, au contraire, les aimantations locales étaient ardues à repérer.

Nous avons ensuite prouvé, d'abord numériquement puis expérimentalement, le bien-fondé de la méthode T pour identifier l'aimantation d'un sous-marin double coque à partir de mesures entre les coques. Elle s'avère relativement efficace dans les cas complexes d'aimantations locales, moyennant un bon rapport signal sur bruit, et particulièrement précise pour des états d'aimantations plus globaux. Comme nous supposons que l'état magnétique des coques d'un sous-marin après traitement et quelques plongées est sans doute très homogène, la mise en œuvre réelle de l'identification semble désormais possible. La méthode T représente ainsi un gain majeur par rapport à la précédente formulation en aimantation dont nous disposions jusque là.

Concernant le bayésien, il ne nous a pas été possible de tester cette formulation sur des mesures réelles et, dans le cas des mesures générées numériquement, l'excellente qualité de la méthode T n'a pas permis de constater un gain flagrant à l'introduction d'information à priori sur l'état de la coque interne. Pourtant, nous demeurons convaincus qu'il s'agit du type de méthode qu'il faudra utiliser dans l'application réelle en raison des nombreuses qualités de robustesse qu'elle offre : étude de la pertinence des mesures, introduction d'information à priori sur l'aimantation de la coque épaisse, suivi d'états magnétiques à partir des mesures sur station, etc.

# **Conclusion générale**



## Chapitre V : Conclusion générale

Nous voici parvenus au terme de ce mémoire et un bilan de ce qui a été réalisé, en regard des objectifs initiaux, s'impose. Cette thèse s'inscrit dans la longue tradition des travaux de recherche sur la modélisation des navires et apporte, nous l'espérons, une nouvelle pierre à l'édifice. Elle est construite autour de deux grands thèmes : la modélisation des aimantations induites et l'identification de l'aimantation totale.

Rappelons quelles étaient les contraintes qui nous ont été fixées : nous avions pour but d'identifier l'aimantation des coques d'un sous-marin à partir de mesures du champ magnétique entre ses deux coques. De plus, la formulation mise en place devait être adaptée à l'introduction ultérieure d'équations de la magnétostriction afin de tenir compte des effets de pression.

Le premier thème est particulièrement classique et est issu de la résolution d'un problème direct. Pour ce faire, nous disposions, dès le début de ces travaux, des formulations globales en charges et en aimantation. Pourtant, leurs difficultés à modéliser le champ à proximité des tôles semblaient incompatibles avec leurs applications à un sous-marin. C'est pourquoi nous avons jugé bon d'introduire une troisième méthode globale magnétostatique, en potentiel, avec de bien meilleures performances dans ce cas précis. Sa mise en œuvre, notamment les calculs d'intégrales, est nouvelle.

Le chapitre sur l'identification représente la partie la plus originale de ces travaux. Après une étude des méthodes de résolution des problèmes inverses, nous avons introduit une nouvelle formulation, dite T, qui répond à l'ensemble du cahier des charges. De plus, elle a pu être couplée avec une approche bayésienne autorisant une prise en compte relativement aisée d'information à priori sur le comportement des coques. Remarquons que les formulations développées ne se limitent évidemment pas aux tôles ferromagnétiques : une extension aux géométries volumiques et à toute application nécessitant une identification de l'aimantation est envisageable.

Finalement, une campagne de mesures expérimentales sur une maquette de sous-marin double coque, aimantée de manière représentative d'un cas réel, est venue conclure, avec succès, sur la pertinence des solutions proposées. La faisabilité de l'immunisation en boucle fermée est ainsi démontrée sur un sous-marin double coque. L'excellente qualité des prédictions de signatures obtenues nous incite à nous demander si les algorithmes développés ne sont pas également applicables aux cas plus complexes des sous-marins simple coque et des bâtiments de surface (dans ces deux configurations, les capteurs sont à l'intérieur des coques et les masses internes deviennent parfaitement non négligeables).



Pourtant il reste un travail expérimental et théorique conséquent avant sa mise en œuvre sur un navire réel. Tout d'abord, la présence des boucles n'a pas été prise en compte : cela implique deux choses : disposer du calcul des effets de circuit directs dans nos formulations globales et ensuite de vérifier comment cela agit sur la résolution du problème inverse. Il n'est, en effet, pas réaliste de couper les courants sur un sous-marin pour réaliser l'acquisition sur les capteurs de champ magnétique.

De plus, nous avons initialement fait l'hypothèse que les masses internes étaient négligeables. Même si nous sommes raisonnablement confiants, cela reste à vérifier expérimentalement et, au cas où elles ne le seraient pas, une modélisation des masses internes les plus influentes peut être envisagée dans nos formulations.

Un autre grand domaine de recherche, dont nous avons déjà beaucoup parlé et sur lequel de nombreuses interrogations subsistent, est celui de la robustesse de l'identification. Deux volets distincts sont à explorer : l'étude des informations à priori à introduire et l'analyse de la pertinence des mesures. La solution proposée dans ce mémoire est relativement basique et répondait principalement au premier volet.

Enfin, l'optimisation du nombre et de la position des capteurs sera également nécessaire mais cela exigera sans doute de connaître précisément la géométrie réelle du sous-marin concerné et des contraintes sur le placement des capteurs.

# **Annexes**



# Annexes

## I Précisions sur les aimantations totale, induite, permanente et rémanente

Afin de préciser les termes utilisés dans ce mémoire, il semble judicieux de les exprimer sur un schéma communément appelé diagramme d'aimantation. Ce diagramme est établi dans le cas d'un ellipsoïde aimanté : en effet, cette géométrie présente la particularité d'avoir un champ démagnétisant uniforme [BRISSONNEAU 1997] ce qui facilite infiniment les courbes du diagramme. Il n'a pas vocation de représenter ce qu'il se passe dans une géométrie plus complexe mais permet uniquement de fixer les idées.

Rappelons les équations nécessaires :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{ind} + \mathbf{M}^{rem} \quad \text{A.1}$$

Equivalente à :

$$\mathbf{M} = \chi_r \mathbf{H} + \mathbf{M}^{rem} \quad \text{A.2}$$

Le champ total est la somme du champ inducteur et du champ réduit :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{red} \quad \text{A.3}$$

Le champ démagnétisant d'un ellipsoïde est donné par :

$$\mathbf{H}_{red} = -N\mathbf{M} \quad \text{A.4}$$

Où N est appelé coefficient de forme. On peut le déterminer dans certains cas particulier par des relations analytiques approchées, sinon des abaques permettent de le trouver.

Cela permet d'écrire l'aimantation en fonction du champ inducteur et du rémanent :

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{H}_0}{\frac{1}{\chi_r} + N} + \frac{\mathbf{M}^{rem}}{1 + \chi_r N} \quad \text{A.5}$$

Enfin, une expression de l'aimantation permanente est alors disponible puisqu'il s'agit de l'équation précédente dans laquelle le champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  est nul :

$$\mathbf{M}^{perm} = \frac{\mathbf{M}^{rem}}{1 + \chi_r N} \quad \text{A.6}$$

Où l'on constate que l'aimantation rémanente est bien différente de l'aimantation permanente.

Il est désormais possible de tracer le diagramme d'aimantation d'un ellipsoïde de perméabilité  $\chi_r$  et de coefficient de forme N.

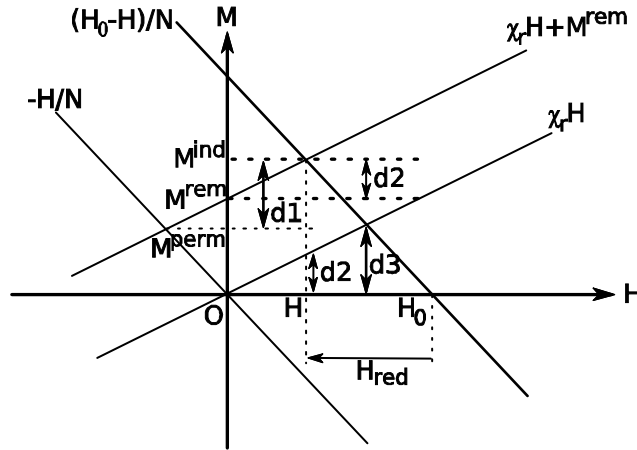


Figure A.1. Diagramme d'aimantation d'un ellipsoïde

Ce diagramme permet d'illustrer les deux définitions de l'aimantation induite : l'expression mathématique rigoureuse valant  $\chi_r H$ , de valeur d2 sur le schéma, et l'expression expérimentale, valant d1 et formée par la différence entre l'aimantation totale et l'aimantation permanente. Cependant, cette différence n'est pas vraiment gênante. En effet, la mesure d'induit permet de déterminer l'expression expérimentale d1. Et comme les simulations se font toujours avec une aimantation rémanente nulle, elles permettent d'évaluer d3 qui est, après un rapide calcul, égal à d1. Nous admettrons ce point dans le cas général.

## II Potentiel scalaire magnétique créé par les différentes distributions

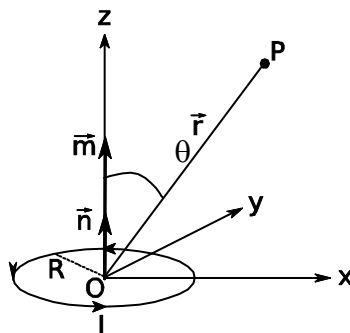


Figure A. 2. Spire circulaire parcourue par un courant I

A partir du principe de base de l'électromagnétisme qui est l'équation de Biot et Savart (II.9), appliqué à un fil élémentaire C parcouru par un courant I, et en supposant l'absence de courant au point P de coordonnées  $\mathbf{r}$  (donc que le champ réduit dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$ ), il est possible d'écrire [BRISSONNEAU 1997] :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{I}{4\pi} \Omega(\mathbf{r}) \quad \text{A.7}$$

Où  $\Omega(\mathbf{r})$  désigne l'angle solide sous lequel le point P voit le fil C. Cette équation est obtenue par déplacement infinitésimal du fil élémentaire C.

D'après la définition du moment magnétique dipolaire  $\mathbf{m}$ , avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la spire selon (Oz) :

$$\mathbf{m} = I \mathbf{n} \quad \text{A.8}$$

Et comme le point P est éloigné de la spire, en première approximation (Fig. A.2) :

$$\Omega(\mathbf{r}) = -\frac{\pi R^2 \cos \theta}{r^2} \quad \text{A.9}$$

Il vient alors :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{A.10}$$

On traite désormais un volume élémentaire de matière  $dV$ . L'aimantation  $\mathbf{M}$  est reliée au moment dipolaire  $\mathbf{m}$  par :

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV} \quad \text{A.11}$$

Et le potentiel créé par ce volume élémentaire vaut :

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{A.12}$$

En intégrant (A.12) sur tout le volume V (Fig. A.3), il vient finalement :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad \text{A.13}$$

C'est bien l'équation cherchée, qui lie l'aimantation en tout point N du volume avec le potentiel scalaire magnétique créé en tout point P de l'espace.

Il est alors aisé de justifier (II.32) à l'aide de l'annexe III et en n'oubliant pas que la répartition de charges est surfacique ce qui annule le terme des charges volumiques.

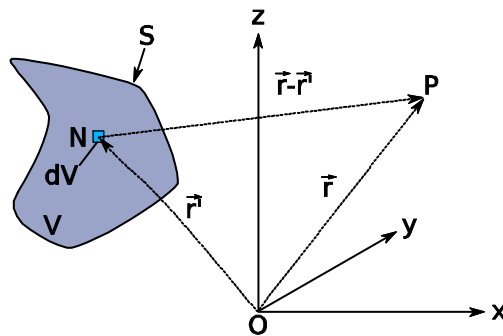


Figure A. 3. Notations

### III Equivalence volume aimanté/charges

Soit un volume aimanté V délimité par une surface S. Soient N un point de ce volume et de coordonnées  $\mathbf{r}'$  et P, de coordonnées  $\mathbf{r}$ , un point quelconque du domaine (Fig A. 3).

Le potentiel réduit créé par ce volume au point P vaut :

$$\varphi_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(N) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad \text{A.14}$$

De manière équivalente :

$$\varphi_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(N) \mathbf{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV \quad \text{A.15}$$

En utilisant la relation vectorielle classique suivante :

$$\mathbf{div} \left( \frac{\mathbf{M}(N)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{div}(\mathbf{M}(N)) + \mathbf{M}(N) \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad \text{A.16}$$

On obtient :

$$\varphi_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \mathbf{div} \left( \frac{\mathbf{M}(N)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{div}(\mathbf{M}(N)) dV \quad \text{A.17}$$

Puis enfin, à l'aide du théorème d'Ostrogradky :

$$\varphi_{red}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{M}(N) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{div}(\mathbf{M}(N)) dV \quad \text{A.18}$$

Où  $\mathbf{n}$  est une normale sortante à la surface  $S$ .

Finalement, le volume aimanté crée le même potentiel, en tout point de l'espace, qu'une répartition surfacique de charges sur  $S$  de valeur  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$  sommée à une répartition volumique de charges dans  $V$  et de valeur  $-\mathbf{div}(\mathbf{M})$  (Fig. A.4).

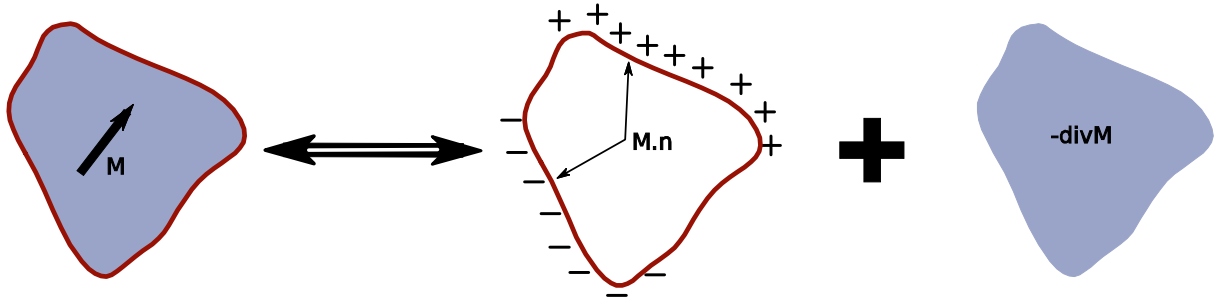


Figure A. 4. Equivalence volume aimanté/charges

## IV L'origine du potentiel dans la méthode $\varphi$

Commençons par montrer que la somme des interactions de tous les nœuds sur un nœud est nulle. (II.71) réécrite avec (II.73) donne :

$$\varphi_i + \sum_{j=1}^{n+ng} \omega_{ij} \varphi_j = \varphi_{si} \quad \text{A.19}$$

Le potentiel étant défini à une constante près quelconque  $\Delta\varphi$ , nous avons également :

$$(\varphi_i + \Delta\varphi) + \sum_{j=1}^{n+ng} \omega_{ij} (\varphi_j + \Delta\varphi) = \varphi_{si} + \Delta\varphi \quad \text{A.20}$$

En soustrayant ces deux dernières équations, il vient :

$$\sum_{j=1}^{n+nq} \omega_{ij} \Delta\varphi = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi \cdot \sum_{j=1}^{n+nq} \omega_{ij} = 0 \quad \text{A.21}$$

Comme (A.21) est valable quelque soit  $\Delta\varphi$  :

$$\sum_{j=1}^{n+nq} \omega_{ij} = 0 \quad \text{A.22}$$

Ce résultat n'est pas vraiment étonnant puisqu'il est équivalent à dire qu'un potentiel uniforme, nul ou non, dans le matériau ne crée pas d'aimantation... ce qui est évident. L'équivalence se montre simplement : supposons que (A.22) soit vraie et que le potentiel du matériau soit uniforme non nul (pour être général), alors (A.19) nous donne :

$$\forall i, \varphi_i = \varphi_{si} \quad \text{A.23}$$

Le potentiel source est constant, il n'y a donc ni champ inducteur ni aimantation induite. Réciproquement, si le potentiel total est uniforme non nul et ne crée pas d'aimantation, c'est que le potentiel source est égal au potentiel total. Ainsi,

$$\varphi_i + \sum_{j=1}^{n+nq} \omega_{ij} \varphi_i = \varphi_i \quad \text{A.24}$$

$$\sum_{j=1}^{n+nq} \omega_{ij} \varphi_i = 0 \quad \text{A.25}$$

Comme, en tout point, le potentiel est non nul, alors (A.22) est vérifiée.

Désormais, supposons que l'origine du potentiel source ne soit pas prise en zéro mais en un point quelconque de l'espace, cela ajoute au vecteur potentiel source  $\mathbf{S}_\varphi$  un vecteur constant  $\mathbf{X}$ . Démontrons que le potentiel total est décalé de la même valeur en tous les nœuds du maillage.

Soit

$$\mathbf{S}_\Phi = \mathbf{S}_\varphi + \mathbf{X} \quad \text{A.26}$$

Réécrivons alors (II.74) :

$$\varphi = (\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id})^{-1} \cdot (\mathbf{S}_\Phi - \mathbf{X}) \quad \text{A.27}$$

$$\varphi = (\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id})^{-1} \cdot \mathbf{S}_\Phi - (\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id})^{-1} \cdot \mathbf{X} \quad \text{A.28}$$

Or d'après (A.22):

$$\mathbf{D}_\varphi \cdot \mathbf{X} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \Leftrightarrow (\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id})^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X} \quad \text{A.29}$$

Finalement :

$$(\mathbf{D}_\varphi + \mathbf{Id}) \cdot (\varphi + \mathbf{X}) = \mathbf{S}_\Phi \quad \text{A.30}$$

Par conséquent, le choix d'une origine pour le potentiel source fixe la constante et la position de cette origine n'a pas d'importance. Par commodité, nous la prenons au zéro du repère.



## V Continuité de la composante tangentielle de l'aimantation dans la méthode $\varphi$

Afin de simplifier les écritures des équations, elle est réalisée dans le cas d'un triangle avec des fonctions de forme du premier ordre mais le cheminement est identique dans le cas de fonctions quadratiques ou de quadrangles.

Considérons un élément triangulaire formé des nœuds 1, 2 et 3 (Fig. A.5) et choisissons le premier vecteur de la base locale selon l'arête (1,2).

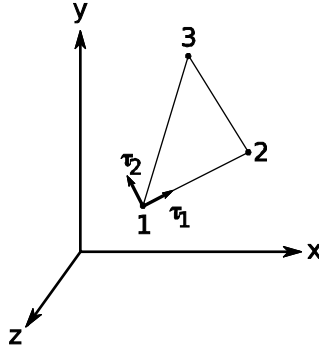


Figure A.5. Repère local et nœuds d'un élément triangle

Si on montre que l'aimantation tangentielle à l'arête (1,2) ne dépend que des nœuds 1 et 2 alors on aura montré la continuité de l'aimantation tangentielle.

Avec notre choix de base et en utilisant (II.70), la composante tangentielle de l'aimantation vaut :

$$M_{\tau_1}(\tau_1, \tau_2) = -\chi_r \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau_1} \varphi_i \quad \text{A.31}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau_1} = 0 \quad \text{A.32}$$

Ce qui est équivalent à montrer que  $\psi_3$  ne dépend pas de  $\tau_1$ . Déterminons  $\psi_3$  dans le cas général avec la fonction de forme linéaire suivante :

$$\psi_3(\tau_1, \tau_2) = a + b\tau_1 + c\tau_2 \quad \text{A.33}$$

On appelle  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3$  et  $Y_3$  les composantes des nœuds 1, 2 et 3 dans la base locale de l'élément 1 et on remarque que  $Y_2 = Y_1$ .

D'après (II.77), la détermination de  $\psi_3$  se fait en résolvant le système suivant :

$$\begin{aligned} \psi_3(X_1, Y_1) &= 0 = a + bX_1 + cY_1 \\ \psi_3(X_2, Y_2) &= 0 = a + bX_2 + cY_1 \\ \psi_3(X_3, Y_3) &= 1 = a + bX_3 + cY_3 \end{aligned} \quad \text{A.34}$$

En soustrayant la première équation à la deuxième nous obtenons  $b=0$  puisque  $X_2 \neq X_1$ .

## VI Procédure de calcul des intégrales de la méthode directe en potentiel

Pour comprendre les notations de cette annexe, voir au chapitre II le paragraphe III.2.4.

Nous distinguons le calcul intégral des nœuds appartenant à l'élément sur lequel est réalisé l'intégration de ceux où ils en sont éloignés.

### VI.1 Intégration des nœuds n'appartenant pas à l'élément d'intégration

Si le nœud  $i$  de coordonnées  $\mathbf{r}_i$  n'appartient pas à l'élément d'intégration  $k$ , le calcul n'est pas singulier et l'évaluation de l'intégrale de (II.71) est suffisante. Il s'agit donc de déterminer pour l'élément  $k$ , au nœud  $i$  et pour chaque  $j$  :

$$I = \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_1^k} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_2^k} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|^3} dV_k \quad \text{A.35}$$

#### VI.1.1 Cas des triangles

En utilisant les notations suivantes (Fig. II.20) :

$$\mathbf{r}_i = x_i \boldsymbol{\tau}_1 + y_i \boldsymbol{\tau}_2 + z_i \mathbf{N} \quad \text{A.36}$$

$$\mathbf{r}' = x \boldsymbol{\tau}_1 + y \boldsymbol{\tau}_2 + z \mathbf{N} \quad \text{A.37}$$

L'intégrale (A.35) vaut :

$$I = \iiint_{V_k} \frac{(b + 2dx + fy)(x_i - x) + (c + 2ey + fx)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2)^{3/2}} dx dy dz \quad \text{A.38}$$

Il n'existe pas de primitive, selon les trois variables, de cette intégrale. La solution retenue pour la calculer consiste à déterminer une expression analytique selon la variable épaisseur ( $z$  ici) (A.39) puis à intégrer numériquement sur la surface de l'élément avec quelques points de Gauss [VON WINCKEL 2005].

$$I = \iint_{S_k} \frac{((b + 2dx + fy)(x_i - x) + (c + 2ey + fx)(y_i - y))(-z_i + l/2)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2) \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - l/2)^2}} + \frac{((b + 2dx + fy)(x_i - x) + (c + 2ey + fx)(y_i - y))(z_i + l/2)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2) \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i + l/2)^2}} dx dy \quad \text{A.39}$$

#### VI.1.2 Cas des quadrangles

La procédure est la même pour les quadrangles que pour les triangles. Cependant, l'expression de l'intégrale est beaucoup plus longue et ne présente pas un intérêt extraordinaire... c'est pourquoi nous ne la donnons pas.

## VI.2 Intégration des nœuds appartenant à l'élément d'intégration

L'intégration numérique de (A.35) comme explicitée dans le paragraphe précédent ne suffit pas pour calculer l'effet d'un élément sur lui-même : la variation très importante de  $\mathbf{r}/r^3$  à proximité du nœud impose d'utiliser un nombre faramineux et rédhibitoire de points de gauss (plusieurs dizaines de milliers) pour obtenir une intégration numérique correcte. La solution repose dans l'utilisation des intégrales de (II.72) dont la divergence proche du nœud de calcul, en  $1/r$ , est beaucoup moins abrupte et dont il existe, dans certains cas, des expressions analytiques.

L'intégrale I s'écrit alors :

$$I = \iint_{S_k} \left( \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_1^k} \boldsymbol{\tau}_1^k + \frac{\partial \psi_j^k}{\partial \tau_2^k} \boldsymbol{\tau}_2^k \right) \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} dS_k - \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_1^{k,2}} + \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_2^{k,2}} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} dV_k \quad \text{A.40}$$

### VI.2.1 Cas des triangles

Comme l'aimantation dans chaque élément est tangentielle, l'intégrale I se trouve être la somme de trois intégrales surfaciques, correspondant aux arêtes du triangle, et d'une intégrale volumique (Fig. A.6).

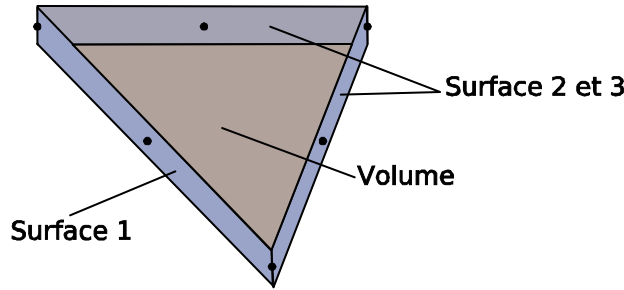


Figure A. 6. Représentation des surfaces d'intégration

#### a - Intégrales surfaciques

Concernant les intégrales surfaciques, il est nécessaire de distinguer si le nœud est un nœud du maillage ou un nœud d'ordre 2. Si c'est le premier cas qui se présente, le nœud appartient à deux surfaces et il y a ainsi deux intégrales singulières à calculer et une intégrale non singulière (celle de la face qui ne contient pas le nœud). Sinon, il n'y a qu'une seule intégrale singulière à calculer : celle à laquelle appartient le nœud d'ordre 2. Pour les intégrales non singulières, une intégration numérique est adaptée, en revanche, pour les autres, la procédure ci-dessous est utilisée.

Pour chaque face, nous introduisons une nouvelle base  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  dont le premier vecteur est colinéaire à l'arête de la surface considérée.  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à cette face (Fig. A.7). Nous faisons également alors en sorte que le nœud  $\mathbf{r}_i$  de calcul de l'intégrale soit l'origine du repère si il est un nœud du maillage. Si c'est un nœud d'ordre 2, l'origine est fixée sur un des deux nœuds de la face considérée. Remarquons qu'il faut alors réexprimer les fonctions de forme dans cette nouvelle base : nous les appelons  $\Psi$  désormais.

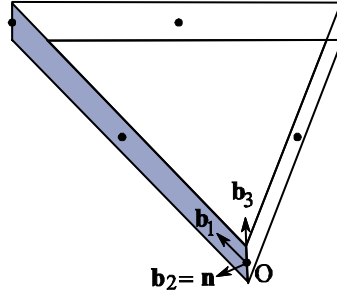


Figure A. 7. Exemple de base d'une face : base de la surface 1

L'intégrale de la face 1 s'écrit dans cette base :

$$I_{f1} = \iint_{S_{f1}} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial b_1} \mathbf{b}_1 + \frac{\partial \Psi_j}{\partial b_2} \mathbf{b}_2 \right) \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'|} dS_{f1} \quad \text{A.41}$$

$\mathbf{R}'$  est toujours le point courant de l'intégrale et est l'expression de  $\mathbf{r}'$  dans  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  d'origine O. Ses coordonnées sont les suivantes :

$$\mathbf{R}' = X\mathbf{b}_1 + Y\mathbf{b}_2 + Z\mathbf{b}_3 \quad \text{A.42}$$

$\mathbf{R}_i$  est l'expression du nœud de calcul dans  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ . Si le nœud est un nœud du maillage, alors  $\mathbf{R}_i$  est le vecteur nul sinon il vaut :

$$\mathbf{R}' = \frac{L}{2} \mathbf{b}_1 \quad \text{A.43}$$

Où L est la longueur de l'arête.

L'utilisation de cette base particulière introduit les simplifications suivantes :

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{A.44}$$

$$\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{n} = \pm 1 \quad \text{A.45}$$

$$y = 0 \quad \text{A.46}$$

Cela permet de limiter le numérateur à seulement (II.75) :

$$\pm \frac{\partial \Psi_j}{\partial b_2} = c + fX \quad \text{A.47}$$

Finalement, le calcul revient à déterminer, à un coefficient de proportionnalité près, le potentiel créé par une plaque rectangulaire, chargée linéairement, au centre d'une des arêtes pour un nœud du maillage (A.48) ou au centre de celle-ci pour un nœud d'ordre 2 (A.49).

$$\begin{aligned} \pm I_{f1} &= \int_{X=0}^{X=L} \int_{Z=-\frac{l}{2}}^{Z=\frac{l}{2}} \frac{(c + fX)}{\sqrt{X^2 + Z^2}} dXdZ = \frac{fl}{2} \sqrt{L^2 + \frac{l^2}{4}} + cl \cdot \ln \left( L + \sqrt{L^2 + \frac{l^2}{4}} \right) - \frac{fl^2}{4} \\ &\quad - \frac{cl}{2} \ln \left( \frac{l^2}{4} \right) + \left( \ln \left( \frac{l}{2} + \sqrt{L^2 + \frac{l^2}{4}} \right) - \ln \left( -\frac{l}{2} + \sqrt{L^2 + \frac{l^2}{4}} \right) \right) \left( \frac{fL^2}{2} + cL \right) \end{aligned} \quad \text{A.48}$$

$$\pm I_{f1} = \int_{X=0}^{X=L} \int_{Z=-\frac{l}{2}}^{Z=\frac{l}{2}} \frac{(c + fX)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - X\right)^2 + Z^2}} dXdZ = \left( \ln(l + \sqrt{L^2 + l^2}) - \ln(-l + \sqrt{L^2 + l^2}) \right) \left( \frac{fL^2}{2} + cL \right) \quad A.49$$

$$\left( \ln\left(2L + 2\sqrt{L^2 + l^2}\right) - \ln\left(-2L + 2\sqrt{L^2 + l^2}\right) \right) \left( \frac{fLl}{2} + cl \right)$$

Le cas des intégrales surfaciques est ainsi réglé pour les triangles.

### b - Intégrale volumique

Il reste encore le calcul de l'intégrale volumique :

$$I_{V_k} = \iiint_{V_k} \left( \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_1^{k,2}} + \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_2^{k,2}} \right) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|} dV_k \quad A.50$$

Pour cela, on revient dans la base locale de l'élément définie sur la figure II.20. Le calcul de la divergence de l'aimantation est aisée à partir des fonctions de forme  $\psi$ .

$$\frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_1^{k,2}} + \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_2^{k,2}} = 2(d + e) \quad A.51$$

De manière plus explicite, l'intégrale à évaluer est :

$$I_{V_k} = \iiint_{V_k} \frac{2(d + e)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2}} dx dy dz \quad A.52$$

puisque la composante  $z_i$  de  $\mathbf{r}_i$  est nulle : le nœud appartient bien sûr au plan de l'élément. Pour des raisons de précision et de rapidité d'exécution : on intègre sur l'épaisseur analytiquement puis sur  $x$  et  $y$  numériquement. Il peut paraître surprenant d'intégrer numériquement alors que le nœud appartient au domaine d'intégration mais la réduction de la singularité à  $1/r$  et l'utilisation d'un nombre suffisant de points de gauss (de l'ordre de quelques centaines) permettent d'avoir une précision acceptable.

$$I_{V_k} = 2(d + e).$$

$$\iint_{S_k} \left( \ln \left( \frac{l}{2} + \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + \frac{l^2}{4}} \right) - \ln \left( -\frac{l}{2} + \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + \frac{l^2}{4}} \right) \right) dx dy \quad A.53$$

## VI.2.2 Cas des quadrangles

### a - Intégrales surfaciques

Le cheminement est très similaire aux triangles pour les quadrangles : l'intégrale surfacique est la somme des quatre faces de l'élément et un nœud du maillage appartient toujours à deux faces alors qu'un nœud d'ordre 2 appartient à une seule face. De la même manière, nous introduisons une nouvelle base liée à chacune des faces et qui permet de grandement simplifier l'expression de l'intégrale : les équations (A.44) à (A.46) sont toujours valides. Le numérateur de l'intégrale devient simplement (II.76) :

$$\pm \frac{\partial \Psi_j}{\partial b_2} = c + fX + gX^2 \quad A.54$$

L'intégrale de la première face, par exemple, est alors donnée par :

$$\pm I_{f1} = \int_{X=0}^{X=L} \int_{Z=-\frac{l}{2}}^{Z=\frac{l}{2}} \frac{(c + fX + gX^2)}{\sqrt{X^2 + Z^2}} dXdZ \quad A.55$$

Nous n'avons malheureusement pas trouvé de solution analytique à cette intégrale. La solution retenue consiste à l'intégrer analytiquement sur la longueur (A.56) puis numériquement dans l'épaisseur. Physiquement, le résultat de cette intégrale correspond au potentiel, créé par une plaque chargée quadratiquement, au centre d'une de ses arêtes.

$$\pm I_{f1} = \int_{Z=-\frac{l}{2}}^{Z=\frac{l}{2}} \left( \left( c - \frac{gZ^2}{2} \right) \ln(L + \sqrt{L^2 + Z^2}) + \left( -c + \frac{gZ^2}{2} \right) \ln Z - fZ + f\sqrt{L^2 + Z^2} + \frac{gL}{2} \sqrt{L^2 + Z^2} \right) dZ \quad A.56$$

Pour les nœuds d'ordre 2, le problème est similaire : une intégration numérique complète l'intégration analytique sur la longueur de l'arête :

$$\pm I_{f1} = \int_{X=0}^{X=L} \int_{Z=-\frac{l}{2}}^{Z=\frac{l}{2}} \frac{(c + fX + gX^2)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - X\right)^2 + Z^2}} dXdZ \quad A.57$$

$$= \int_{Z=-\frac{l}{2}}^{Z=\frac{l}{2}} \left( \left( c + \frac{fL}{2} + fL^2 - \frac{gZ^2}{2} \right) \left( \ln(L + \sqrt{L^2 + 4Z^2}) - \ln(-L + \sqrt{L^2 + 4Z^2}) \right) + \frac{gL}{4} \sqrt{L^2 + 4Z^2} \right) dZ$$

Physiquement, il s'agit du potentiel, créé par une plaque chargée quadratiquement, au centre de celle-ci.

### b - Intégrale volumique

Pour évaluer l'intégrale volumique, on revient dans la base locale liée à l'élément considéré et on déduit des fonctions de forme l'expression de la divergence de l'aimantation :

$$\frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_1^{k,2}} + \frac{\partial^2 \psi_j^k}{\partial \tau_2^{k,2}} = 2.(d + e + gy + hx) \quad A.58$$

L'intégrale volumique vaut alors :

$$I_{V_k} = \iiint_{V_k} \frac{2.(d + e + gy + hx)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2}} dxdydz \quad A.59$$

Dont l'évaluation est réalisée de la même manière que pour un triangle : analytiquement sur l'épaisseur puis numériquement sur la surface de l'élément :

$$I_{V_k} = 2(d + e + gy + hx).$$

$$\iint_{S_k} \left( \ln \left( \frac{l}{2} + \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + \frac{l^2}{4}} \right) - \ln \left( -\frac{l}{2} + \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + \frac{l^2}{4}} \right) \right) dx dy \quad \text{A.60}$$

# **Bibliographie**





# Bibliographie

- [BAYNES 2002] T. Baynes, « Analysis of the Demagnetisation Process and Possible Alternative Magnetic Treatments for Naval Vessels », Thèse de doctorat Faculty of Science at The University of New South Wales, 2002
- [BODY 1996] C. Body, « Modélisation des couches minces magnétostrictives, application aux microsystemes », Thèse de doctorat INPG, 1996
- [BONTEMPI 2008] G. Bontempi, M. De Wulf, M. Van der Haegen, « Calcul formel et numérique », Support de cours, Université de Bruxelles, [http://www.ulb.ac.be/di/map/gbonte/calcul/math31\\_3\\_4.pdf](http://www.ulb.ac.be/di/map/gbonte/calcul/math31_3_4.pdf), 2008.
- [BRISSENEAU 1997] P. Brissonneau, « Magnétisme et matériaux magnétiques », édition Hermès, 1997
- [BRUNOTTE 1991] X. Brunotte, « Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces – Application à la modélisation des aimantations des navires », Thèse de doctorat INPG, 1991
- [BUI 2007] V.P. Bui, « Diagnostic des machines électriques par l'analyse du champ magnétique de fuite. Application à l'identification de défauts rotoriques d'un alternateur à vide », Thèse de doctorat INPG, 2007
- [CANOVA 2005] A.Canova, M. Repetto, B. Vusini, « Analysis of accuracy and computational cost of  $1/r$  integrals », RS-RIGE-8/2005. Numélec'03, pp59-76, 2005
- [CHADEBEC 2001] O. Chadebec, « Modélisation du champ magnétique induit par des tôles – Identification de l'aimantation », Thèse de doctorat INPG, 2001.
- [DHATT 2005] G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois, « Méthode des éléments finis », Hermès, Lavoisier, Paris, 2005

- [DURAND 1964] E. Durand, « Electrostatique tome I – Les distributions », Masson, 1964.
- [GUÉRIN 2005] S. Guérin, « Identification de sources magnétiques : robustesse et optimisation des mesures – Application à la reconstruction de l'aimantation des navires », Thèse de doctorat INPG, 2005.
- [GUIBERT 2009] A. Guibert, « Ships hull corrosion diagnosis from close measurements of electric potential in the water », A paraître dans IEEE Transactions on Magnetics, présenté à CEFC 2008, Athènes, 2009.
- [HADAMARD 1932] J. Hadamard, « Le problème de Cauchy », Hermann, 1932
- [HAN 1994] L. Han, L. Tong, J. Yang, « Integral equation method using total scalar potential for the simulation of linear or non-linear 3D magnetostatic field with open boundary », IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, n°5, p. 2897-2900, 1994.
- [HANSEN 1997] C. Hansen, « Rank-deficient and ill-posed problems – Numerical aspect of linear inversion », Edition Siam, 1998.
- [HARRINGTON 1993] R.F. Harrington, « Field computation by moment methods », Wiley-IEEE Press, 1993
- [JILES 1995] D.C. Jiles, « Theory of the magnetomechanical effect », J. Phys. D. Appl. Phys. 28, 1537-1546, 1995.
- [KALIMOV 1998] A. Kalimov, M. Svedentsov, « Application of a hybrid integrodifferential method for analysis of thin magnetic shields », IEEE Transactions on Magnetics, vol. 34, no. 5, pp2453-2456, 1998.
- [KERN 2002] M. Kern, « Problèmes inverses », Support de cours, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, <http://www-rocq.inria.fr/~kern/Teaching/ESILV/inverse.pdf>, 2002
- [KRÄHENBÜHL 1993] Krahenbuhl L., Muller D., « Thin layer in electrical engineering. Example of shell models in analyzing eddy-current by boundary and finite element methods », IEEE Transactions on Magnetics, vol. 29, n°2, p. 1450-1455, 1993.
- [LAGIER 1999] G.L. Lagier, « Application de la méthode des éléments de frontières à la résolution du problème inverse de conduction de la chaleur multidimensionnel : Régularisation par troncature du spectre », Thèse de doctorat INPG, 1996
- [LEDORZE 1997] L. Ledorze, « Modélisation des effets de boucles d'immunisation dans les navires », Thèse de doctorat INPG, 1997.
- [LEGRIS 1996] M. Legris, « Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche », Thèse de doctorat INPG, 1996.

- [MACK 2005] R.M. Mack, R.A. Wingo, « Ship degaussing system and algorithm », US patent No. US 6,965,505, B1, Nov. 15, 2005.
- [MONPETIT 1962] E. Monpetit, E. Carcénac de Torné, « Considération générales sur le magnétisme du navire », Rapport interne Gesma, 1962.
- [NÉEL 1946] L. Néel, « Recueil de mémoire sur la démagnétisation », 1946
- [PEAIYOUNG 1989] S. Peaiyoung, S. Salon, I. Mayergoyz, « Some technical aspects of implementing boundary elements equations », IEEE Transactions on Magnetics, vol. 25, n°4, p. 2998-2300, 1989.
- [PEI 2003] Y. Pei, H. Yeo, « Sequential inversion of ship magnetization from measurements », UDT Asia 2003, Singapour, 2003.
- [PERRIOU 1984] J.J. Perriou, « Variation d'aimantation sous contraintes – Etude et réalisation d'un système de compensation automatique de ces variations », Thèse de doctorat INPG, 1984.
- [PRESS 1992] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling, « Numerical recipes », Cambridge university press, 1992
- [ROKHLIN 1985] V. Rokhlin, « Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory », J. Computational and Physics, vol. 60, pp. 187-207, 1985.
- [ROSS 1996] S. Ross, « Initiation aux probabilités », Presse polytechniques et universitaires romandes, 1996
- [SCHMERBER 2006] L. Schmerber, « Identification et caractérisation de sources électromagnétiques. Application à la discrétion des moteurs de propulsion navale », Thèse de doctorat INPG, 2006.
- [SHEWCHUK 2002] J. R. Shewchuk, « What Is a Good Linear Finite Element? Interpolation, Conditioning, Anisotropy, and Quality Measures », 11th International Meshing Roundtable, 2002.
- [SIMONET 2007] S. Simonet, « Etude des variations d'aimantation d'origines magnétostrictives d'une structure ferromagnétique », Memoire de Master 2 Recherche INPG/UJF, 2007.
- [SPIEGEL 1987] M. Spiegel, « Probabilités et statistique », Mc Graw-Hill Book, série Schaum, 1987
- [TARANTOLA 1987] A. Tarantola, « Inverse problem theory – Methods for data fitting and model parameters estimation », Elsevier, 1987.
- [THEBAULT 2003] E. Thébault, « Modélisation régionale du champ magnétique terrestre », Thèse de Doctorat de l'université Louis Pasteur, Strasbourg, 2003

- [TIKHONOV 1976] A. N. Tikhonov, V.Y. Arsenine, « Solution of ill-posed problem », Washington, Wiston/Wiley, 1977
- [TREMOLET 1993] E. du Tremolet de Lacheisserie, « Magnetostriction – Theory and applications of magnetoelasticity », CRC Press, 1993.
- [TREMOLET 1999] E. du Tremolet de Lacheisserie, « Magnétisme – Fondements », Collection Grenoble Sciences, 1999
- [VISHNEVSKY 1993] A. Vishnevsky, I. Krasnov, A. Lapovok, « Calculation of Static Magnetization for Thin-Walled Constructions by Boundary Element Method », IEEE Transactions on Magnetics, vol. 29, p. 2152-2155, 1993.
- [VON WINCKEL 2005] G. Von Winckel, « Gaussian Quadrature for Triangles », <http://www.mathworks.fr/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=9230&objectType=file> (consulté le 14/10/2008), 2005.
- [YANG 2008] C.S. Yang, K.J. Lee, G. Jung, H.J. Jung, D.H. Kim, « Efficient methodology for solving an inverse magnetostatic problem by utilizing material sensitivity », Journal of applied physics, vol. 103, n°7, 2008.
- [ZHDANOV 2002] M. Zhdanov, « Geophysical inverse theory and regularization problem », Elsevier, 2002.



---

Immunsation en boucle fermée – Application au sous-marin double coque.  
Identification de l'aimantation à partir de mesures du champ magnétique proche

---

Un sous-marin, à coques ferromagnétiques, crée une anomalie du champ magnétique terrestre. Comme elle varie en fonction du champ inducteur et des contraintes mécaniques, il doit être capable de l'évaluer en temps réel afin de pouvoir la compenser à l'aide de boucles de courants : c'est l'immunsation en boucle fermée. Sa mise en oeuvre nécessite de connaître l'aimantation du navire à chaque instant. Or, si l'induit est déterministe, il n'en est rien du permanent qui dépend de l'histoire magnétique des tôles. Son évaluation repose sur la mesure du champ magnétique dans l'air et sur la résolution d'un problème inverse. Le manque d'espace dans un sous-marin contraint les capteurs à être très proches des coques. Après une étude du problème direct, nous proposons dans ce travail une formulation magnétostatique du problème inverse adaptée à cette contrainte et validée par des mesures sur un modèle réduit de sous-marin double coque.

Mots clés : identification d'aimantation, problème inverse, magnétostatique, mesures de champs magnétiques faibles, furtivité magnétique

---

Closed loop degaussing applied to double hull submarine  
Magnetization identification from near magnetic field measurements

---

The magnetic anomaly created by ferromagnetic submarines may compromise their invisibility. This anomaly varies during operation because of earth field change and mechanical constraints. Thus, submarines have to evaluate and reduce it in real-time thanks to coils flowing adjusted currents. This system is called closed loop degaussing system. To achieve it, a tool able to predict magnetization is required. The induced magnetization is determinist, whereas the remanent part can only be evaluate thanks to magnetic field measurements and resolution of an inverse problem. Due to the lack of space in submarines, sensors are close to the hull: identification becomes then a real challenge. The direct problem is studied in the first part of this thesis and has led us to a new formulation of the inverse problem suited to this particular constraint. This method has been validated thanks to measurements realized on a double hull submarine mock-up.

Keywords: magnetization identification, inverse problem, magnetostatic, low magnetic field measurements, closed loop degaussing