

Elaboration d'une méthode différentielle pour l'étude de fibres optiques microstructurées

Philippe Boyer

▶ **To cite this version:**

Philippe Boyer. Elaboration d'une méthode différentielle pour l'étude de fibres optiques microstructurées. Physique [physics]. Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2006. Français. NNT : . tel-00374468

HAL Id: tel-00374468

https://theses.hal.science/tel-00374468

Submitted on 8 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée à l'Université Paul Cézanne (Aix-Marseille III)
pour obtenir le grade de docteur en sciences

Elaboration d'une méthode différentielle pour l'étude des fibres optiques microstructurées

Philippe BOYER

6 Octobre 2006

Laboratoire d'accueil : Institut Fresnel
Ecole doctorale : Physique et sciences de la matière

Membres du jury

David CASSAGNE : Rapporteur
Pierre CHAVEL : Rapporteur
Evguéni POPOV : Directeur de thèse
Ross McPHEDRAN : Rapporteur
Gilles RENVERSEZ : Directeur de thèse
Gérard TAYEB : Examinateur
Marc THEVENOT : Examinateur

REMERCIEMENTS

Je remercie en tout premier lieu les membres du jury de cette thèse, David CASSAGNE (Professeur au Groupe d'Etude des Semiconducteurs à l'université de Montpellier II), Pierre CHAVEL (Directeur de recherche CNRS et directeur du laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique) et Ross McPHEDRAN (Professeur au CUDOS à l'université de Sydney et dont j'apprécie spécialement l'effort de lecture en français du manuscrit de thèse) qui ont accepté de rapporter cette thèse, ainsi que Gérard TAYEB (Professeur à l'Institut Fresnel à l'université d'Aix-Marseille III), Marc THEVENOT (Chargé de recherche CNRS au XLIM à Limoges), Gilles RENVERSEZ (Maître de conférence à l'Institut Fresnel à l'université d'Aix-Marseille III) et Evguéni POPOV (Professeur à l'Institut Fresnel à l'université d'Aix-Marseille I).

Je remercie Gérard TAYEB et Géraud BOUWMANS (Maître de conférence au PHLAM-IRCICA à l'université de Lille I) pour leurs cordiales contributions à mes travaux de thèses.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à l'ensemble de mes directeurs de thèse, en particulier pour l'autonomie, la confiance par le respect de mon travail et la qualité d'encadrement dont ils ont fait preuve. Je remercie Gilles RENVERSEZ pour son soutien permanent et pour la qualité de travail à laquelle il m'a sans cesse encouragé. Je remercie également Evguéni POPOV pour m'avoir guidé et éclairé, avec les qualités scientifiques qui lui sont reconnues, sur des aspects théoriques souvent complexes. Enfin, je remercie Michel NEVIERE (Professeur à l'Institut Fresnel à l'université d'Aix-Marseille I) de m'avoir pleinement fait profiter de son impressionnante rigueur scientifique et de ses illustres connaissances qui ne sont plus à démontrer depuis longtemps. Je dois à mes directeurs de thèse de m'avoir brillamment initié aux principaux aspects du métier de chercheur scientifique, en particulier à l'importance de valoriser le travail de recherche par l'écriture d'articles scientifiques et la participation à des manifestations comme des conférences, séminaires, etc… J'espère pouvoir atteindre leur très haut niveau de compétences durant mon futur projet professionnel.

Je souhaite enfin remercier ma famille pour ses encouragements, sa présence, ainsi que son précieux et chaleureux soutien. En particulier, ma reconnaissance s'adresse affectueusement à mon épouse. Son aide m'a permis d'accomplir mon travail de recherche avec sérénité et confiance. Je lui adresse mes plus tendres sentiments.

Table des matières

1 Introduction générale **7**
1.1 Objectifs et motivations du travail de thèse 7
1.2 Survol de certaines méthodes numériques appliquées à différents domaines de l'électromagnétisme 8
1.2.1 Méthodes numériques appliquées à la diffraction 8
1.2.2 Méthodes numériques appliquées à la recherche de modes dans les fibres optiques 9
1.2.3 Développement de la méthode différentielle 12
1.3 Déroulement de la thèse 16
1.3.1 Chronologie 16
1.3.2 Contributions scientifiques 17
1.4 Organisation du document 18

I Etude de la diffraction par des objets cylindriques **21**

2 Méthode différentielle en coordonnées cylindriques : formulation générale **23**
2.1 Illustration de la méthode différentielle sur un premier exemple simple 24
2.1.1 Description du système et équations de Maxwell 24
2.1.2 La méthode différentielle en polarisation TM : règle de Laurent 25
2.1.3 La méthode différentielle en polarisation TM : méthode FFF 27
2.2 Présentation du problème dans un cadre général 28
2.2.1 Description géométrique de l'objet diffractant 28
2.2.2 Description des milieux 29
2.2.3 Partage de l'espace 30
2.2.4 Source lumineuse 31
2.2.5 Développements en série de Fourier 34
2.3 Relations constitutives des milieux dans l'espace de Fourier tronqué 36
2.3.1 Principe de la méthode FFF 36
2.3.2 Application des règles de factorisation dans les relations constitutives des milieux 37
2.3.3 Prolongements des vecteurs unitaires normaux et tangents en dehors de la surface de diffraction 39
2.4 Système différentiel dans l'espace de Fourier tronqué 40
2.4.1 Insertion des nouvelles règles de factorisation dans les équations de Maxwell . . . 40
2.4.2 Ecriture matricielle du système différentiel à résoudre dans la zone modulée . . . 41

3 Diffraction conique par des systèmes invariants selon l'axe z et à milieux homogènes et isotropes **45**
3.1 Présentation du problème 46
3.1.1 Hypothèses et conséquences 46
3.1.2 La matrice d'intégration dans la zone modulée 48
3.1.3 Expression des champs dans les régions homogènes et isotropes 50
3.2 Algorithme de propagation de la matrice T 56

3.2.1 Les matrices de transmission de la zone modulée . . . 57
3.2.2 Résolution du problème de diffraction . . . 59
3.2.3 Matrice de transmission d'une couche homogène et isotrope . . . 60
3.3 Algorithme de propagation de la matrice S . . . 62
3.3.1 Problèmes de contamination numérique . . . 62
3.3.2 Description de l'algorithme . . . 64
3.3.3 Généralisation à des systèmes multicouches . . . 66
3.4 Implémentation de la méthode différentielle . . . 67
3.4.1 Structure et algorithme du programme . . . 67
3.4.2 Section efficace différentielle et théorème optique . . . 69
3.4.3 Cartes de champs diffractés . . . 70
3.5 Application numérique au cas du cylindre circulaire . . . 74
3.5.1 Notes sur la présentation des résultats . . . 74
3.5.2 Cylindre circulaire centré sur l'origine . . . 75
3.5.3 Cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine . . . 76
3.5.4 Nécessité de l'algorithme S . . . 84
3.5.5 Comparaison entre la méthode FFF et la méthode classique . . . 87
3.5.6 Influence du prolongement de $\vec{N}$ dans la méthode FFF . . . 90

4 Cas particulier de la diffraction classique 97
4.1 Présentation du problème . . . 97
4.1.1 Découplage des équations de Maxwell . . . 97
4.1.2 Polarisation Transverse Electrique . . . 99
4.1.3 Polarisation Transverse Magnétique . . . 100
4.2 Applications numériques . . . 101
4.2.1 Implémentation . . . 101
4.2.2 Etude du cylindre circulaire : validation . . . 102
4.2.3 Du cylindre circulaire au cylindre elliptique . . . 104

5 Etude de l'anisotropie dans les systèmes à géométrie cylindrique 109
5.1 Une nouvelle formulation de la diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire anisotrope . . . 109
5.1.1 Présentation du problème . . . 109
5.1.2 Onde plane se propageant dans un milieu diélectrique homogène et anisotrope . . . 111
5.1.3 Décomposition du champ électrique total en ondes planes . . . 115
5.1.4 Expression du champ magnétique total . . . 117
5.1.5 Notation matricielle . . . 118
5.2 Résolution du problème de diffraction . . . 119
5.2.1 Matrice de transmission d'un cylindre circulaire anisotrope . . . 119
5.2.2 Cas particulier d'un milieu anisotrope uniaxe . . . 120
5.3 Application numérique . . . 124
5.4 Généralisation de la méthode différentielle à des objets cylindriques anisotropes et de sections arbitraires . . . 126

II Etude des modes dans les fibres optiques 131

6 La méthode différentielle appliquée à l'étude modale des fibres optiques 133
6.1 Résolution du problème modal par la méthode différentielle . . . 134
6.1.1 Approches intuitives . . . 134
6.1.2 Approche améliorée à partir de la matrice $Z^{(L)}$ . . . 135
6.2 Symétries opto-géométriques des fibres optiques . . . 136
6.2.1 Introduction . . . 136
6.2.2 Symétries des fibres optiques dans l'espace de Fourier . . . 137

6.2.3 Conséquences dans la méthode différentielle . . . 138
6.3 Symétries des modes recherchés dans les fibres optiques . . . 142
6.3.1 Description des symétries des modes dans la méthode différentielle . . . 142
6.3.2 Calcul des champs associés à un mode d'une fibre optique de symétrie C_{N_T} ou $C_{N_T v}$ 145
6.4 Implémentation de la méthode différentielle . . . 147
6.4.1 Structure et algorithme du programme . . . 147
6.4.2 Calcul des cartes du champ modal . . . 152
6.4.3 Calcul de la dispersion modale . . . 152
6.5 Tests de validation sur une fibre optique conventionnelle . . . 153
6.5.1 Cylindre circulaire centré sur l'origine . . . 153
6.5.2 Cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine . . . 157
6.6 Application numérique à d'autres structures géométriques simples . . . 165
6.6.1 Cylindre de section elliptique . . . 165
6.6.2 Cylindre de section rectangulaire . . . 166

7 Application à l'étude des fibres optiques microstructurées 173
7.1 Etude de FOMs à inclusions circulaires . . . 174
7.1.1 Introduction . . . 174
7.1.2 FOMs de symétrie C_{6v} à une couche d'inclusions . . . 176
7.1.3 FOMs de symétrie C_{6v} à plusieurs couches d'inclusions . . . 184
7.1.4 FOMs à 6 inclusions et de symétrie C_{2v} . . . 187
7.2 Etude de FOMs à inclusions sectorielles . . . 188
7.2.1 Structure équivalente à la FOM à 6 inclusions circulaires et de symétrie C_{6v} . . . 188
7.2.2 Evolution des indices effectifs en fonction des paramètres géométriques des secteurs 191
7.3 Etude de FOMs de type "grapefruit" . . . 194
7.4 Etude de FOMs de type ARROW . . . 197
7.4.1 Définition et conséquences . . . 197
7.4.2 Observation numérique de la transition de délocalisation du mode fondamental d'une FOM de type ARROW par anti-croisement . . . 198
7.4.3 Etude d'une FOM à gradient d'indice . . . 203

8 Conclusion générale 217
8.1 Résumé des principaux résultats obtenus . . . 217
8.2 Travaux en cours et perspectives . . . 218

A Relations entre les blocs des matrices S et T 221
A.1 Position du problème et notations . . . 221
A.2 Calculs intermédiaires . . . 222
A.2.1 Calcul de $B^{(s)}$ en fonction de $A^{(s)}$ et $B^{(int)}$ . . . 222
A.2.2 Calcul de $A^{(int)}$ en fonction de $A^{(s)}$ et $B^{(int)}$ . . . 222
A.3 Calcul des blocs de la matrice $S^{(s+1)}$ . . . 223
A.3.1 Le bloc $S_{22}^{(s+1)}$ . . . 223
A.3.2 Le bloc $S_{12}^{(s+1)}$ . . . 223
A.3.3 Le bloc $S_{21}^{(s+1)}$ . . . 223
A.3.4 Le bloc $S_{11}^{(s+1)}$ . . . 223

B Détermination analytique des vecteurs d'onde et amplitudes d'une onde plane dans un milieu anisotrope 225
B.1 Racines d'un polynôme d'ordre 4 . . . 225
B.1.1 Cas général . . . 225
B.1.2 Cas d'un polynôme bicarré . . . 226
B.2 Vecteurs propres solutions de l'équation de propagation dans un milieu anisotrope . . . 227
B.2.1 Cas général . . . 227
B.2.2 Cas où $\vec{A}_i.\vec{e}_\rho = 0$ $(i \in \{1,2\})$ . . . 227

C Rappel sur le coefficient de dispersion chromatique **229**

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1 Objectifs et motivations du travail de thèse 7
1.2 Survol de certaines méthodes numériques appliquées à différents domaines de l'électromagnétisme 8
1.2.1 Méthodes numériques appliquées à la diffraction 8
1.2.2 Méthodes numériques appliquées à la recherche de modes dans les fibres optiques 9
1.2.3 Développement de la méthode différentielle 12
1.3 Déroulement de la thèse 16
1.3.1 Chronologie 16
1.3.2 Contributions scientifiques 17
1.4 Organisation du document 18

1.1 Objectifs et motivations du travail de thèse

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire correspond notamment au développement d'une méthode numérique appliquée à l'étude de la propagation de la lumière dans les fibres optiques microstructurées. Cette nouvelle génération de fibres optiques suscite un intérêt croissant de la part des scientifiques depuis quelques années. Leurs caractéristiques font que ces fibres permettent un contrôle précis et étendu de leurs propriétés de guidage (caractère monomode, dispersion chromatique, aire effective). Cependant, leur étude requiert une modélisation numérique spécifique du fait de leur complexité opto-géométrique. Comme pour la plupart des théories des guides d'ondes, nous modéliserons une fibre optique par un objet cylindrique de génératrices supposées infinies et invariantes selon un axe (choisi généralement comme l'axe z). Notre choix s'est porté sur une théorie différentielle dont la formulation a acquis durant cette dernière décennie deux améliorations fondamentales pour son application numérique (algorithme de propagation de la matrice S et méthode de la "factorisation rapide de Fourier"). Initialement établie en coordonnées cartésiennes pour l'étude de la diffraction par des réseaux périodiques, la méthode différentielle a été reformulée en coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour la diffraction d'objets de géométrie cylindrique (constituant la première partie du travail de thèse). Nous avons alors vite compris les nombreux intérêts de l'exploitation de cette méthode numérique pour l'étude des fibres optiques microstructurées. Dans le formalisme présenté dans ce mémoire, la méthode différentielle consiste à utiliser la périodicité selon la variable angulaire θ et l'invariance selon z de l'objet cylindrique pour réécrire les équations de Maxwell sous la forme d'un système différentiel du premier ordre selon la variable radiale r. Ce dernier peut alors être intégré numériquement. La périodicité selon θ permet de développer en série de Fourier les grandeurs opto-géométriques (permittivité, champs électromagnétiques,...). Ainsi, les seules approximations sont induites par l'implémentation numérique de la théorie : la troncature des développements de Fourier et la discrétisation de la région de l'espace d'intégration du système

différentiel. Cette méthode appartient à la famille des méthodes numériques (Méthode Multipolaire, Méthode des Eléments Finis,...) capables de déterminer explicitement la partie imaginaire de l'indice effectif d'un mode à pertes. En effet, l'absence de gaine extérieure dans la modélisation des fibres optiques microstructurées leur attribue ce caractère "à pertes" (modes localisés dans le coeur de la fibre et dont l'énergie fuit dans la matrice supposée infinie). Les autres avantages de cette méthode restent, sans nul doute, la variété des matériaux considérés (diélectriques/conducteurs, homogènes/inhomogènes, isotropes/anisotropes, linéaires voire non linéaires) ainsi que la forme arbitraire de la section droite de la fibre optique modélisée. Ces deux avantages de la méthode différentielle nous ont encouragé dans son application à l'étude des fibres optiques microstructurées. Bien que la précision des calculs soit conditionnée par la durée d'intégration du système différentiel, il existe aujourd'hui peu de méthodes numériques bénéficiant d'un tel degré de liberté dans le choix des paramètres opto-géométriques des objets modélisés.

1.2 Survol de certaines méthodes numériques appliquées à différents domaines de l'électromagnétisme

Dans cette section, quelques méthodes numériques utilisées dans différents domaines de l'électromagnétisme sont brièvement abordées. Nous nous intéressons à la diffraction par des objets cylindriques et à la recherche de modes dans les fibres optiques. Ensuite, nous nous attarderons plus précisément sur le développement historique de la méthode différentielle, et en particulier sur les étapes majeures de sa dernière formulation utilisée dans le code numérique.

1.2.1 Méthodes numériques appliquées à la diffraction

Nous présentons certaines méthodes numériques existantes (autres que la méthode différentielle), capables aujourd'hui d'analyser la diffraction de la lumière par des objets de géométrie cylindrique. Les développements numériques des théories de l'électromagnétisme ont connu deux principales étapes historiques. Jusque dans les années 60, les scientifiques étaient contraints de résoudre les équations de l'électromagnétisme par des techniques presque uniquement analytiques. On imagina alors l'étude électromagnétique d'objets plus complexes par des transformations de coordonnées. Cette idée donna le jour à deux méthodes de formulations très voisines : la *méthode des transformations conformes* ("conformal mapping method", 1973) [1] et la *méthode des transformations non conformes* ("non conformal mapping method" ou "méthode C", 1980) [2]. Cependant, on se rendit très vite compte qu'un traitement numérique s'imposait dès lors que les géométries devenaient trop complexes. Bien que les deux articles mentionnés exposent la théorie pour le cas des réseaux, ces méthodes semblent tout à fait appropriées pour l'étude de la diffraction par des objets cylindriques (aucune référence trouvée). Cependant, il fallut attendre 1998 [3] pour voir apparaître une méthode hybride appliquée aux structures cylindriques et basée sur le même principe. Le but est de ramener par une transformation de coordonnées (non orthogonale) la surface de diffraction de profil arbitraire à un cylindre circulaire sur lequel peuvent s'appliquer aisément les conditions de passage des champs. Le milieu intérieur au cylindre circulaire devient alors inhomogène. Ces méthodes ne peuvent considérer que des surfaces cylindriques contenant l'origine du repère et telles que les surfaces ne présentent aucune pointe (dérivée continue de l'équation du bord). Mais l'avènement de l'informatique a permis l'application de méthodes basées sur des théories complètement numériques. Les deux méthodes les plus emblématiques demeurent certainement la *méthode différentielle* [4] et la *méthode intégrale* [5], destinées initialement à l'étude des réseaux périodiques unidimensionnel (1D), bidimensionnel (2D), voire tridimensionnel (3D). Le nombre de nouvelles méthodes numériques en électromagnétisme s'est développé considérablement depuis le milieu les années 90 grâce à l'augmentation très rapide des capacités de calcul des ordinateurs. Chacune d'entre elles possède son propre domaine d'application qui se confond rarement avec celui d'une autre méthode. Cependant, les structures communes entre deux méthodes, se situant généralement aux limites de cet intervalle d'application, permettent souvent de valider ces nouvelles théories par comparaison directe.

La *méthode de la matrice de diffusion* (scattering-matrix method), appelée par la suite *méthode multipolaire*, a été développée à partir de 1994 [6]. Elle traite du problème de la diffraction par plu-

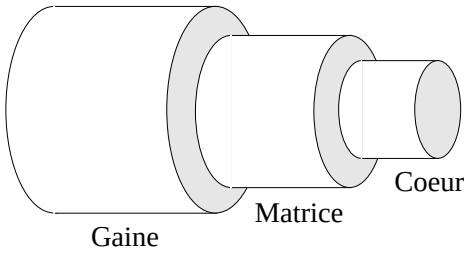


FIG. 1.1 – Représentation schématique d'une fibre optique

sieurs cylindres (de sections arbitraires) parallèles entre eux. Son principe est de relier les matrices S de diffraction de chaque cylindre par des changements de repère. Sa principale vocation est d'étudier des structures complexes, c'est-à-dire possédant plusieurs inclusions cylindriques. Cependant, la connaissance de l'ensemble de ces matrices S est indispensable et les cylindres ne doivent pas se superposer. La méthode des sources fictives [7, 8, 9] calcule le champ diffracté total en un point quelconque de l'espace à partir de la reconstruction des champs diffractés par une multitude de sources (filaments) placées de part et d'autre de la surface de diffraction. Cette méthode permet d'envisager des formes d'objet très variées, voire exotiques (avec des pointes). Le temps de calcul et sa précision dépendent du nombre et de la localisation empirique des sources. La méthode intégrale appliquée à la diffraction classique d'une onde plane par des structures cylindriques diélectriques homogènes est apparue en 1972 [10], puis a été généralisée à la diffraction conique en 1995 [11]. La diffraction par des cylindres inhomogènes a été étudiée pour la première fois grâce à la *méthode des éléments finis* [12, 13] et à la *méthode des moments* [14]. La méthode des éléments finis [15] est issue directement de l'ingénierie dans le domaine de la Mécanique. Son application à l'électromagnétisme demeure assez récente (début des années 90) du fait de sa nature purement numérique. Sa formulation est basée sur la discrétisation de l'espace. Les géométries arbitraires envisagées constituent son point fort, mais cette méthode reste limitée par des temps de calcul relativement élevés.

De nombreux travaux basés sur ces méthodes de référence ont été publiés. Nous ne pouvons donc pas tous les citer, mais nous retiendrons les articles cités précédemment à l'origine de ces développements. Il s'agit souvent de généralisation de méthodes à des géométries ou des milieux plus variés. Par exemple, la méthode des transformations conformes, établie à l'origine pour des réseaux infiniment conducteurs, a été généralisée pour des milieux de conductivité finie (comprenant les milieux diélectriques) [16]. L'article [17] étend la méthode intégrale à la diffraction d'ondes électromagnétiques dipolaires par des objets cylindriques (homogènes). Certaines méthodes peuvent même être couplées afin d'exploiter les avantages de chacune d'entre elles. Par exemple, le couplage de la méthode des sources fictives et de la méthode multipolaire est présenté dans l'article [18]. Des théories isolées apparaissent régulièrement permettant la description de la diffraction par des objets cylindriques de géométries ou de milieux très particuliers. Nous ne citerons que les travaux J.C. Monzon et al. [19, 20] sur la diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire anisotrope. Il existe également de nombreuses publications traitant de l'application concrète de ces méthodes dans le but de vérifier des observations expérimentales ou encore de mettre en évidence des effets physiques pertinents.

1.2.2 Méthodes numériques appliquées à la recherche de modes dans les fibres optiques

On limite la présentation aux fibres optiques en occultant le vaste domaine d'étude des guides d'ondes plans. En Optique, on prend l'habitude de schématiser une fibre optique par une tige cylindrique dont la section droite est divisée en trois régions de l'espace distinctes (voir figure 1.1). Le coeur (core) est la région centrale dans laquelle on cherche à faire propager la lumière. La matrice (cladding) est une couche qui entoure le coeur. Son indice doit être inférieur à celui du coeur afin d'assurer le confinement de l'énergie électromagnétique dans ce dernier. Enfin, la gaine (jacket) constitue la dernière couche protectrice (contraintes mécaniques et attaques chimiques extérieures) des deux précédentes. Du point de vue de la modélisation, la gaine est souvent absente et la matrice est considérée comme s'étendant

à l'infini. Du point de vue de la fabrication, l'épaisseur de la matrice est très grande devant la taille du coeur et la gaine entourant la matrice est constituée d'un matériau absorbant afin d'éviter des réflexions parasites de la lumière s'échappant du coeur de la fibre. De même, les fibres optiques sont généralement décrites par des cylindres infiniment longs selon l'axe des génératrices (choisi traditionnellement comme l'axe z). La théorie à l'origine de la "culture" fibres optiques, traite du guide d'onde de section circulaire (coeur), rempli d'un milieu homogène et isotrope et plongé dans une matrice infinie : la fibre optique à saut d'indice (ou fibre optique conventionnelle). L'indice du coeur est choisi plus élevé que celui de la matrice afin d'assurer le guidage de la lumière dans la fibre. Dans cette théorie semi-analytique [21], on recherche les champs sous la forme d'ondes propagatives monochromatiques (à la pulsation ω), se propageant selon l'axe z et décrites dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{\mathbf{A}}(r,\theta,z,t) = \Re e\left[\vec{A}(r,\theta)e^{i(\beta z-\omega t)}\right]$$

où $\vec{A}(r,\theta)$ représente le profil transverse (dans le plan de section droite) du champ et β la constante de propagation. Ces deux grandeurs sont les inconnues du problème. Les constantes de propagation β sont solution de l'équation bien connue appelée "équation de dispersion". Elle est obtenue analytiquement mais ne peut être résolue qu'à l'aide d'un code numérique. On montre alors que β prend des valeurs discrètes. Les champs, solutions de l'équation de Helmholtz et associés à ces valeurs de β, sont appelés des "modes". De nombreuses théories [21] s'appuient sur celle des fibres optiques à saut d'indice, traitant de la fibre optique conventionnelle perturbée. On peut alors décrire le comportement asymptotique des modes d'une fibre optique de section déformée elliptiquement, avec un coeur faiblement inhomogène, anisotrope, etc... L'une de ces théories les plus répandues reste la *méthode de Wentzel-Kramers-Brillouin* (WKB) [22, 21]. Elle permet l'étude de la propagation des modes dans une fibre optique à gradient d'indice en considérant une faible perturbation radiale de l'indice (approximation du faible guidage) d'une fibre optique conventionnelle.
En adoptant un formalisme matriciel, la théorie des fibres optiques à saut d'indice se généralise à des sections constituées d'un empilement de cylindres circulaires concentriques, séparés par des milieux d'indices différents. Lorsqu'il y a alternance des hauts et bas indices, ces fibres optiques sont appelées "fibre optique de Bragg" [23] par analogie aux réseaux de Bragg. L'apparition des premiers calculateurs (années 60) a permis de concevoir de nouvelles méthodes purement numériques, pouvant étudier des structures un peu plus complexes. A titre d'exemple, on peut citer les premiers développements des méthodes de type éléments finis [15] ou encore les *méthodes des fonctions de Green* ("Green Function Methods", de type méthode intégrale) [21].

Les problématiques qui se posent dans l'étude des fibres optiques sont nombreuses et complexes. Nous en dénombrons deux principales. Une des préoccupations des scientifiques concerne les problèmes liés à l'optique intégrée. Comment transmettre un mode d'un guide d'onde vers un autre ? Ces sujets touchent directement les notions de couplage entre des modes se propageant dans des fibres optiques situées à proximité l'une de l'autre. Les fabricants de connectiques optiques s'intéressent directement à ces effets qui régissent le principe des coupleurs (Taper, coupleur à prisme, interféromètre optique de Mach-Zehnder,...) et des multiplexeurs de longueurs d'onde. On réalise que les structures à modéliser deviennent très vite complexes. La théorie des recouvrements de modes (ou "Staircase Concatenation Method") [24] se limite à de faibles modulations du profil de la fibre selon l'axe z. Ce genre de méthode consiste en la discrétisation du profil de la fibre selon z en plusieurs cylindres invariants et de longueurs finies selon cet axe. Chaque tronçon est supposé identique à une fibre optique conventionnelle pour laquelle on peut aisément déterminer les modes. Ensuite, ces modes sont reliés d'un tronçon à l'autre par des intégrales de recouvrement. Ces méthodes sont surtout utilisées pour l'étude des coupleurs de type Taper (passage d'un mode d'une fibre à une autre à travers leur jonction par réduction des sections selon l'axe de propagation) [25]. Une théorie analogue permet l'étude des fibres optiques à réseaux de Bragg (à ne pas confondre avec les fibres optiques de Bragg), dont le coeur possède un indice de réfraction périodique selon l'axe de la fibre. La propagation de la lumière est alors contrôlée par des effets de résonance de type Fabry-Pérot. L'avénement de l'informatique a permis d'aborder la modélisation de systèmes optiques encore plus sophistiqués. La *Beam Propagation Method* (BPM) reste certainement la technique la plus répandue actuellement pour étudier la propagation d'une impulsion lumineuse dans un guide d'onde dont la section principale varie le long de son axe (Taper). Son principe est basé sur la

résolution de l'équation de Helmholtz sur laquelle on applique la condition de faible guidage [26, 27]. Elle est généralement associée à d'autres méthodes numériques ("fast Fourier Transform", "finite difference method") qui permettent de décrire le champ électromagnétique [28, 29]. La *Finite Difference Time Domain Method* (FDTD), introduite par Yee en 1966 [30, 31], est basée sur le comportement temporel du champ électromagnétique (discrétisation des dépendances temporelles dans les équations de Maxwell). Une de ces principales difficultés a été d'établir les conditions vérifiées par le champ électromagnétique au bord de la région spatiale d'étude (on cherche principalement à éviter toute réflexion du champ sur ses parois). Les premières solutions concrètes ont été apportées par Mur en 1981 [32]. On retiendra néanmoins l'importante contribution des travaux de Bérenger (1996) [33] qui introduisent les "Perfectly Matched Layer" (PML) dans l'implémentation de la méthode. Cette idée, étendue depuis à d'autres méthodes, consiste à entourer la région de l'espace considérée par des régions de taille finie et remplies de matériaux absorbants évitant les réflexions vers la zone d'intérêt.

La seconde problématique étudiée par les scientifiques est directement liée à la propagation de la lumière dans les fibres optiques. On cherche alors à limiter les fuites (pertes) du champ électromagnétique dans le milieu extérieur lors de sa propagation. Mais le phénomène le plus difficile à contrôler reste certainement la dispersion. On rappelle que la dispersion a pour effet d'élargir l'extension temporelle d'une impulsion lumineuse lors de sa propagation. L'origine de ce phénomène réside dans le fait que les harmoniques de l'impulsion (transformation de Fourier) se propagent dans la fibre à des vitesses différentes. On peut considérer qu'il existe plusieurs origines à la dispersion : la dispersion matérielle et la dispersion modale. La première est intrinsèquement liée à la dépendance de l'indice de réfraction des matériaux constituant la fibre selon la fréquence des ondes qui peuvent s'y propager. La dispersion modale est associée directement aux modes de la fibre car, même en l'abscence de dispersion matérielle, les valeurs de β peuvent évoluer en fonction de la pulsation ω. Pendant très longtemps, les seules fibres étudiées théoriquement et expérimentalement ont été les fibres de section circulaire à saut d'indice ou à gradient d'indice en raison de la relative faisabilité en terme de modélisation et de fabrication. Les seuls paramètres opto-géométriques contrôlables pour maîtriser la dispersion restaient alors l'indice des matériaux utilisées (et le profil d'indice pour les fibres optiques à gradient d'indice) et l'unique paramètre géométrique : le rayon de la fibre. Cependant, on ne trouve pas toujours les bons matériaux satisfaisant aux exigences croissantes des besoins industriels (télécommunication, optique intégrée). Le besoin d'élaborer de nouvelles fibres possédant plus de variables de contrôle s'est rapidement imposé. A ce sujet, le centre d'intérêt des chercheurs s'est naturellement orienté vers la géométrie des fibres optiques et aboutit à l'étude des *fibres optiques microstructurées* (FOM) [34]. Elles sont généralement constituées d'inclusions cylindriques (généralement de sections circulaires) disposées selon certaines symétries (voir figure 1.2). On distingue les FOMs classiques (les plus étudiées) dont les inclusions de bas indice sont disposées dans une matrice de haut indice, et les FOMs de type "AntiResonant Reflecting Optical Waveguide" (ARROW) pour lesquelles le constraste d'indice est inversé. Pour ce dernier cas, il apparaît des phénomènes de résonance, toujours en cours d'investigation [35, 36]. Par ailleurs, les symétries opto-géométriques jouent un très grand rôle dans l'étude et la modélisation des FOMs, puisqu'elles induisent les symétries des modes qui s'y propagent. Dans le milieu des années 70, McIsaac a été un des premiers scientifiques à s'intéresser à ces problèmes de symétrie dans les guides d'ondes. A partir de la théorie des groupes, il a établi un formalisme qui décrit en détail les expressions et les conditions vérifiées par les champs modaux [37, 38]. Ces symétries ont été illustrées numériquement pour la première fois sur des FOMs à inclusions circulaires en 2001 [39] puis plus en détail en 2002 [40]. Fini [41] a récemment énoncé une approche généralisée de l'utilisation des symétries des FOMs dans certaines méthodes numériques. Le coeur d'une FOM classique (à coeur plein) devient la région centrale de même indice que la matrice, comprise entre les inclusions. Dans les méthodes numériques, l'étendue de la matrice est souvent considérée comme infinie dans le plan transverse de la fibre. Dans ces conditions, les modes confinés dans le coeur deviennent des modes à pertes, c'est-à-dire que leurs indices effectifs sont des nombres complexes. La principale difficulté des méthodes numériques consiste à décrire au mieux la complexité géométrique des FOMs, tout en calculant le plus précisément possible la partie imaginaire des indices effectifs des modes. On peut se poser la question du lien entre la structure modélisée et les fibres optiques microstructurées réellement fabriquées. En effet, ces dernières sont bien évidemment de taille finie et la matrice infinie est recouverte d'une gaine. Pour bien comprendre, la pertinence du choix de la structure modélisée, il faut se rappeler que la gaine, utilisée en revêtement extérieur, est constituée d'un matériau

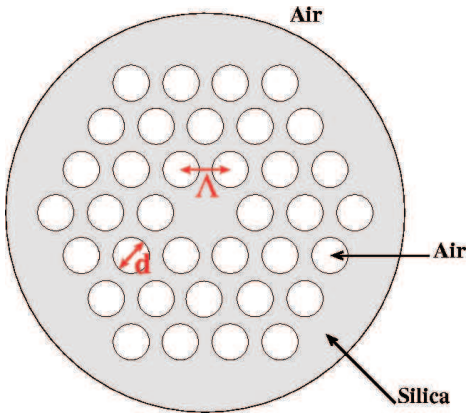


FIG. 1.2 – Représentation d'une FOM à coeur plein

absorbant choisi de manière à minimiser les réflexions de la lumière qui s'échappe du coeur de la fibre.

La plupart des outils numériques formule la propagation d'un mode dans un guide d'ondes comme un champ électromagnétique propagatif selon l'axe z en l'absence de champs sources. Dans ce cas, les équations prennent en général la forme d'un problème homogène. Nous parlerons alors du "problème modal" par opposition au problème de diffraction (classique ou conique). La *méthode multipolaire* [31, 42, 40] est certainement le premier outil numérique efficace en ce sens (son principe est décrit dans la section précédente). Ses points forts sont la haute précision des résultats numériques et sa rapidité, dues essentiellement à la nature semi-analytique des calculs (les matrices S des inclusions circulaires sont déterminées analytiquement). La première formulation de cette méthode a été établie en tenant compte des symétries géométriques et des modes décrits par McIsaac [37, 38]. Elle s'est très vite imposée comme une méthode de référence dans ce domaine. Elle a fait l'objet de nombreuses publications et a permis notamment de mettre en évidence la notion de coupure de mode dans les FOMs [43, 44, 31]. Cette méthode a également servi à l'étude de la dispersion chromatique des modes et des relations entre la géométrie des FOMs et la dispersion [45]. De nouvelles structures de FOM à coeur plein ont alors été proposées [46]. Cependant, ce puissant outil numérique reste limité, dans le cas de sa version disponible au laboratoire, par la section circulaire des inclusions et les matériaux supposés homogènes et isotropes. Mais sa formulation actuelle permet d'envisager d'autres types de matériaux, ainsi que d'autres géométries d'inclusions en respectant les conditions suivantes : Les inclusions doivent être incluses dans des cylindres circulaires disjoints et la matrice de la FOM modélisée doit être homogène et isotrope. Ainsi, il existe aujourd'hui une version de la méthode multipolaire où les inclusions sont de section elliptique, grâce à un couplage avec la méthode différentielle (qui modélise précisément la géométrie elliptique des inclusions) [47]. La *méthode des éléments finis* ("Finite Element Method") a connu un regain d'intérêt pour l'étude des FOMs [48, 49, 31]. Elle présente a priori quelques difficultés à déterminer les parties imaginaires des constantes de propagation des modes à pertes. Les PML, introduites par Bérenger [33], offrent une solution relativement satisfaisante à ce problème.

1.2.3 Développement de la méthode différentielle

Les premières observations simples (mais qui n'en restent pas moins spectaculaires) de la diffraction par des objets périodiques (à travers un rideau, par exemple) ont depuis longtemps suscité un vif intérêt de la part des scientifiques [50, 51, 52]. Depuis longtemps, les scientifiques se sont intéressés aux théories de diffraction de la lumière par des réseaux. Initialement décrits en coordonnées cartésiennes (x, y, z), ces derniers sont constitués par une surface qui partage l'espace en deux et présente au moins une périodicité supposée infinie selon l'un des axes du repère cartésien. Dans ce contexte, l'idée de la méthode différentielle [4] a émergé dans les années 60 dans le but d'étudier précisément les propriétés de ces réseaux. Nous rappelons brièvement le principe de la méthode différentielle afin de mieux comprendre les différentes étapes historiques de son développement. Tout d'abord, il s'agit d'une méthode électromagnétique rigoureuse. Son but est de réduire le nombre de variables d'intégration des équations de Maxwell en se

plaçant en régime harmonique et en utilisant les modulations opto-géométriques de l'objet considéré. Dans le cas des réseaux, on utilise la dépendance harmonique temporelle, les périodicités selon l'axe x et/ou z (développement en séries de Fourier) et l'éventuelle invariance selon l'axe z (cas d'une seule périodicité selon x) pour réécrire l'ensemble du problème électromagnétique dans l'espace de Fourier. Le traitement des équations aboutit à un système différentiel du premier ordre, par rapport à la variable radiale y, à résoudre dans une région de l'espace bornée selon cet axe. Les premières applications de la méthode différentielle faisant appel à une intégration numérique du système différentiel (par l'algorithme de Numerov) remontent au début des années 70. Elles ont permis de traiter les réseaux de conductivités finies [53] et infinies [54], en diffraction classique (polarisations TE et TM). On observait néanmoins des instabilités numériques dès que la hauteur (ou l'épaisseur) des réseaux devenait trop importante, en particulier pour le cas de la polarisation TM. Ces problèmes numériques ont attiré l'attention des scientifiques pendant une vingtaine d'années environ, sans réels succès. Etant donné qu'ils ont été très vite associés au processus d'intégration, la *méthode Rigourous Coupled Wave* (RCW) [55, 56] a proposé au début des années 80 une alternative à l'algorithme de Numerov. Malheureusement, cette théorie se limite aux réseaux lamellaires (profils rectangulaires). Dans ce cas, la matrice d'intégration du système différentiel du premier ordre est constituée de coefficients constants (indépendants de y). L'intégration se simplifie alors par une diagonalisation de cette matrice et les solutions s'écrivent directement à partir de ses valeurs et vecteurs propres. Une tentative de généralisation de la méthode RCW à des profils arbitraires par la "staircase approximation" (discrétisation en marches d'escalier) [57] a révélé encore des problèmes numériques [58]. Ces instabilités n'ont été expliquées que très récemment par l'article [59] qui remet en cause la validité même de cette théorie.

Quant à la méthode différentielle dans son formalisme initial, la situation s'est débloquée rapidement en 1996, à la suite d'une série d'articles fondamentaux pour son développement. On sait aujourd'hui que les problèmes numériques observés se dénombrent en deux catégories : ceux liés au processus d'intégration et ceux liés à la troncature des développements en série de Fourier. Décrivons plus en détail chacun de ces points.

Problèmes numériques liés à l'intégration du système différentiel :

Lors de l'intégration numérique du système différentiel, certains coefficients de Fourier du champ peuvent croître exponentiellement. Par conséquent, le codage des nombres sur les calculateurs étant de taille finie (8 bits ou 16 bits), de nombreux digits peuvent être perdus si les valeurs dépassent le seuil critique. Des erreurs numériques apparaissent, se propagent au cours de l'intégration, et pouvent s'avérer néfastes dans le résultat final. On parle alors de contamination numérique. Les scientifiques pensaient avoir trouvé l'unique obstacle au bon développement de la méthode, et s'efforçaient alors d'établir des algorithmes d'intégration plus efficaces. Un des premiers a utilisé le procédé d'orthogonalisation de Schmidt afin de maintenir l'indépendance linéaire de tous les champs à chaque pas d'intégration [60]. D'autres algorithmes [61, 62, 63, 64] se basent plutôt sur une intégration par morceaux. Le système différentiel est intégré tant que n'apparaîent pas d'instabilités numériques. Le processus s'arrête alors par étapes pour effectuer une sorte de normalisation des champs assurant le bon conditionnement des résultats. Finalement, l'algorithme de propagation de la matrice S [64] demeure à ce jour le plus efficace pour enrayer les problèmes de contaminations numériques dans la méthode différentielle. On peut désormais étudier des réseaux plus épais qu'auparavant.

Problèmes numériques liés à la troncature des développements :

Malgré l'implémentation de l'algorithme de propagation de la matrice S, les calculs restaient instables en polarisation TM. En fait, il existait une seconde source d'erreur dans la méthode différentielle qui provenait de la troncature des développements en série de Fourier imposée directement par l'implémentation numérique de la méthode. Le problème se situe au niveau de l'écriture des relations constitutives des milieux dans l'espace de Fourier discret et dans la région de l'espace contenant la surface de diffraction. En 1996, P. Lalanne et G. M. Morris [65] ont constaté justement que la plupart de ces problèmes numériques s'éliminait en réécrivant différemment les relations constituves dans l'espace de Fourier. Ce nouveau formalisme utilisé uniquement pour les réseaux lamellaires avec la méthode RCW restait sans véritable explication.

Intéressons-nous seulement à la relation constitutive des milieux associée à la permittivité (la

discussion qui suit restant valable pour la relation constitutive associée à la perméabilité). Dans la région de l'espace contenant la surface du réseau, cette grandeur devient une fonction $\epsilon(x,y,z)$ modulée par la surface de diffraction, périodique selon x et/ou y. En régime harmonique à la pulsation ω, la relation constitutive s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{D}(x,y,z,\omega) = \epsilon(x,y,z)\vec{E}(x,y,z,\omega)$$

La fonction $\epsilon(x,y,z)$ peut alors être développée en série de Fourier selon ces variables (x et/ou y). D'autre part, on montre que la périodicité du réseau implique la pseudo-périodicité des champs qui peuvent également être développés en série de Fourier (ou plutôt en "pseudo-série de Fourier"). Dans la relation constitutive, on est ramené à exprimer les coefficients de Fourier de $\vec{D}(x,y,z,\omega)$ en fonction de ceux de $\vec{E}(x,y,z,\omega)$ et $\epsilon(x,y,z)$. D'un point de vue mathématique, cela revient à chercher le développement d'un produit de deux développements de Fourier de fonctions périodiques. Depuis sa première formulation jusqu'en 1996, la méthode différentielle a utilisé le théorème mathématique appelé "règle de Laurent" (produits de Cauchy dans la théorie des séries). Cependant, cette théorie n'est établie que pour les séries. Il est donc indispensable de s'interroger sur sa validité lorsque les développements en série de Fourier sont tronqués pour les besoins d'une implémentation numérique. Dans ce cas, L. Li a montré en 1996 [66] (peu après les observations de P. Lalanne et G. M. Morris [65]) que ce théorème reste valable seulement dans certaines conditions. Pour les autres cas, il faut utiliser une autre règle appelée "règle Inverse". Il a établi les trois règles dites "règles de factorisation". Nous les énonçons pour le cas général du produit de deux fonctions f et g de la variable u, développées en série de Fourier jusqu'à l'ordre de troncature N.

Règle 1 : *Un produit de deux fonctions périodiques (de même période T selon la variable u), bornées, continues par morceaux, qui n'ont pas de sauts de discontinuité simultanés (à la même abscisse), peut être factorisé par la règle de Laurent* (voir figure 1.3(a)).
On note f_n les coefficients de Fourier de la fonction f selon le développement tronqué $f(u) = \sum_{n=-N}^{+N} f_n e^{i\frac{2\pi}{T}nu}$. On introduit également les coefficients de Fourier g_n et $(fg)_n$ des fonctions respectives g et fg. La règle de Laurent s'énonce alors $(fg)_n = \sum_{m=-N}^{+N} f_{n-m}g_m = \sum_{m=-N}^{+N} g_{n-m}f_m$. En définissant les matrices carrées de dimension $(2N+1)\times(2N+1)$, appelées *matrices de Toeplitz* par :

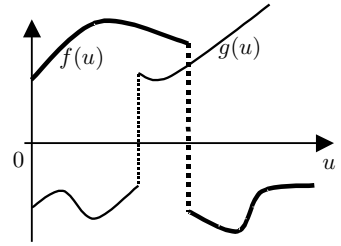
$$[\![f]\!] = \begin{pmatrix} \vdots & \\ f_{n-m} & \dots \end{pmatrix} \text{ avec } (n,m) \in [-N,+N]^2 \tag{1.1}$$

et en notant par une grandeur entre crochet la matrice colonne contenant ses coefficients de Fourier, la règle de Laurent s'écrit dans le formalisme matriciel :

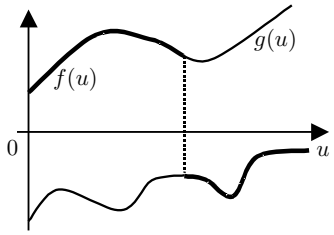
$$[fg] = [\![f]\!][g] = [\![g]\!][f] \tag{1.2}$$

On remarque alors que les matrices de Toeplitz contiennent les coefficients de Fourier de f ou g de l'ordre $-2N$ à $+2N$, ce qui représente $4N+1$ coefficients soit presque deux fois plus que le développement dans le vecteur colonne $[f]$ ou $[g]$ de dimension $2N+1$.

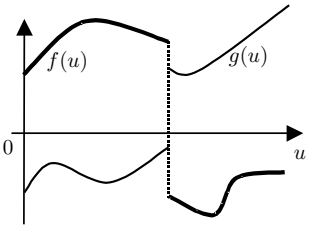
Règle 2 : *Un produit de deux fonctions périodiques (de même période T selon la variable u), bornées, continues par morceaux, qui ont des sauts de discontinuité complémentaires (produit continu) ne peut pas être factorisé par la règle de Laurent, mais peut dans la plupart des cas être factorisé par la règle Inverse* (voir figure 1.3(b)).
En fait, cette deuxième règle de factorisation se déduit de la première. Si on note h le produit fg alors la fonction $f = h\frac{1}{g}$ devient le produit d'une fonction continue h et d'une fonction discontinue $\frac{1}{g}$, ce qui respecte bien les conditions de la première règle de factorisation. Selon



(a) Règle 1 : f et g ne sont pas discontinues à la même abscisse



(b) Règle 2 : f et g sont discontinues à la même abscisse et leur produit est continu



(c) Règle 3 : f et g dont discontinues à la même abscisse et leur produit n'est pas continu

FIG. 1.3 – Illustration sur deux fonctions f et g pour lesquelles s'appliquent les règles de factorisation

la relation (1.2), on obtient donc $[f] = [\![\frac{1}{g}]\!][h]$ d'où $[h] = [fg] = [\![\frac{1}{g}]\!]^{-1}[f]$. Cette nouvelle règle, appelée *règle Inverse*, s'énonce alors de la manière suivante :

$$[fg] = \left[\!\!\left[\frac{1}{f}\right]\!\!\right]^{-1}[g] = \left[\!\!\left[\frac{1}{g}\right]\!\!\right]^{-1}[f] \tag{1.3}$$

Règle 3 : *Un produit de deux fonctions périodiques (de même période T selon la variable u), bornées, continues par morceaux, qui ont des sauts de discontinuité non complémentaires ne peut être factorisé ni par la règle de Laurent, ni par la règle inverse* (voir figure 1.3(c)).

D'après les relations de passage des champs à travers la surface du réseau (continuités ou non des champs), ces trois nouvelles règles de factorisation s'appliquent par décomposition des champs électriques ($\vec{D}(x,y,z,\omega)$ et $\vec{E}(x,y,z,\omega)$) selon leurs composantes tangentielles et normales à cette surface. Elles ont été rapidement mises en oeuvre dans la méthode modale de Fourier, pour l'étude des réseaux bi-périodiques [67].

Il a fallu attendre les travaux de M. Nevière et E. Popov en 2000 [68] pour voir apparaître la nouvelle formulation de la méthode différentielle dénommée méthode de la *factorisation de Fourier rapide* (ou "Fast Fourier Factorisation Method" - FFF) qui tient compte de ces règles de factorisation. Depuis cette date, la méthode connaît une vaste période de développements. La méthode FFF a d'abord été validée pour la diffraction par des réseaux gravés sur des milieux homogènes et isotropes en polarisation TM [68], puis rapidement généralisée à des milieux anisotropes, en diffraction conique [69]. L'ensemble des éléments de la théorie a été regroupé dans l'ouvrage de référence [56]. Ces dernières avancées ont été directement exploitées dans les travaux de thèse de N. Bonod [70] au sein de notre laboratoire. Ainsi, toujours en coordonnées cartésiennes, la méthode différentielle a été étendue à l'optique non-linéaire [71], à des milieux magnéto-optiques [72] ou encore fortement conducteurs [73]. La méthode différentielle a servi également à étudier la diffraction de la lumière par un unique trou cylindrique inscrit dans une plaque métallique [74]. Pour cela, une nouvelle écriture des équations de la théorie différentielle a été nécessaire et porte le nom de la *Fast Numerical Factorization* [75]. Enfin, on n'oubliera pas la contribution non négligeable apportée par la méthode différentielle à l'étude des cristaux photoniques [76, 77].

Pour résumer, l'application numérique de la méthode différentielle a soulevé deux types de problèmes ayant chacun reçu sa solution. L'algorithme de propagation de la matrice S permet d'éliminer les contaminations numériques lors de l'intégration du système différentiel. La méthode FFF permet de décrire correctement les développements tronqués des champs et des grandeurs opto-géométriques. Il faut cependant noter que ces deux types de problèmes sont intimement liés. L'effet de la troncature des développements (besoin de la méthode FFF) se manifeste d'autant plus que l'ordre maximal des développements est important. Mais, dans ce cas, il risque d'apparaître des exponentielles d'ordre élevé, fortement divergentes, aggravant ainsi les problèmes liés aux contaminations numériques (besoin de l'algorithme de propagation de la matrice S). On comprend certainement les raisons du développement difficile et tardif de la méthode différentielle (20 ans pour aboutir à une formulation efficace dans la plupart des cas : réseaux épais, polarisation TM,...). On peut considérer aujourd'hui qu'il existe deux versions historiques de la méthode différentielle : avant et après amélioration par la méthode FFF. Dans

la suite de ce document, nous distinguerons donc la *méthode différentielle classique* (MDC - ancienne version) qui n'utilise pas les nouvelles règles de Factorisation (avec ou sans utilisation de l'algorithme de propagation de la matrice S) et simplement la *méthode différentielle* (MD - version actuelle) qui dispose à la fois de la méthode FFF et de l'algorithme de propagation de la matrice S.

L'ensemble des travaux cités précédemment concerne essentiellement l'étude de réseaux ou d'objets périodiques par la méthode différentielle, écrite en coordonnées cartésiennes. Les bons résultats, obtenus récemment par la dernière version de la méthode différentielle (MD), ont encouragé son adaptation à d'autres types de géométries (non périodiques) décrites dans d'autres systèmes de coordonnées. Le cas des objets cylindriques fait l'objet de mes travaux de thèse (voir section suivante). En coordonnées cylindriques (r, θ, z), on utilise la dépendance harmonique temporelle, l'invariance selon z et la périodicité selon θ (développement en série de Fourier) pour réécrire le problème électromagnétique dans l'espace de Fourier, d'une façon similaire aux réseaux en coordonnées cartésiennes. Le traitement des équations aboutit également à un système différentiel du premier ordre, par rapport à la variable radiale r, à résoudre dans une région de l'espace bornée. La méthode différentielle a récemment été couplée à la méthode multipolaire [47] dans le but d'étudier des FOMs à inclusions elliptiques. Il faut noter que la méthode différentielle classique (MDC) a déjà été implémentée pour le cas des systèmes à géométrie cylindrique, en polarisation TM [78]. Très récemment, la méthode différentielle a été étendue au système de coordonnées sphériques afin de traiter des objets 3D [79, 80, 81]. Je me permets d'insister sur l'effort fourni pour l'écriture de la méthode différentielle dans ce cas de structure car les équations deviennent considérablement plus complexes.

1.3 Déroulement de la thèse

1.3.1 Chronologie

Mon travail de thèse s'est déroulé en deux principales étapes. Durant la première année de thèse, je me suis d'abord intéressé à la formulation et à l'implémentation numérique de la méthode différentielle en coordonnées cylindriques, pour la diffraction d'une onde plane par des objets à symétrie cylindrique. Les deux années de thèse suivantes ont entièrement été consacrées à l'adaptation de la méthode et du code numérique à la recherche de modes dans les fibres optiques, et en particulier dans les fibres optiques microstructurées.

Première année de thèse :

A travers l'étude de la diffraction par la méthode différentielle, nous avons surtout cherché à savoir si le formalisme de l'algorithme S se conservait dans l'application numérique, du passage des coordonnées cartésiennes (réseaux) aux coordonnées cylindriques. Les contaminations numériques sont-elles de même nature ? Est-ce le même bloc de la matrice de transmission qui demeure concerné ? En conséquence, les relations de définition des blocs de la matrice S restent-elles identiques ? Par contre, nous savions déjà que la méthode FFF serait indispensable, étant donnée sa nature purement mathématique (troncature des séries). Nous avons alors procédé selon les mêmes étapes historiquement suivies pour l'étude de la diffraction par des réseaux avec la méthode différentielle : Diffraction en polarisation TM, puis généralisation à la diffraction conique. Les travaux de thèse ont débuté par l'écriture complète des équations de la méthode différentielle dans le système de coordonnées cylindriques et pour les cas de la diffraction classique et conique. Un premier programme traitant de la polarisation TM a fourni des premiers résultats encourageants, avec cependant encore quelques erreurs de programmation. Ayant rapidement corrigé ces lacunes, j'ai enchaîné par l'implémentation du cas général de la diffraction conique.

Deuxième année de thèse :

La forme recherchée des champs en régime modal dans les fibres optiques reste totalement identique à celle des champs en régime de diffraction conique dans la théorie différentielle. Ainsi, l'objectif de la seconde année de thèse a été de poser le problème modal pour la méthode différentielle en s'appuyant directement sur les équations obtenues pour la diffraction conique. Une nouvelle fonctionnalité, traitant de la recherche de mode, a donc été ajoutée au code numérique déjà existant. Les équations de propagation écrites spécifiquement par la méthode différentielle

restent globalement inchangées. En première approche, seul le traitement de la matrice S diffère du problème de diffraction au problème de recherche de modes. Nous avons toutefois établi une approche plus complexe qui permet d'optimiser la précision des calculs en réduisant leur durée. Dans le même temps, une réflexion approfondie sur les équations nous a permis de prendre en compte les périodicités angulaires ainsi que les symétries des modes qui apparaissent généralement dans les fibres optiques microstructurées. Pendant la majeure partie de l'année, nous avons été particulièrement attentifs à la validation du code numérique par comparaison avec la Méthode Multipolaire [42, 40] disponible au sein du laboratoire. De nombreux tests (qui ne pourront pas tous être analysés dans ce mémoire) ont permis non seulement de calibrer le programme, mais également d'évaluer la précision des résultats numériques obtenus.

Troisième année de thèse :

La dernière année de thèse a été essentiellement vouée à l'exploitation du programme numérique et à l'amélioration de la recherche de modes. Quelques structures inédites ont été étudiées : FOMs à inclusions sectorielles, à inclusions circulaires inhomogènes et FOMs de type "‘grapefruit"'. Mais la plus grosse part du travail a été la mise en évidence et l'analyse numérique d'un phénomène d'anti-croisement (par dispersion) de modes entre les modes de coeur d'une FOM de type ARROW et ceux associés à une inclusion isolée.

1.3.2 Contributions scientifiques

L'apport de la théorie différentielle en coordonnées cylindriques se répartit en deux catégories.

- La possibilité de considérer des sections droites arbitraires favorise l'étude de structures à géométrie complexe. Pour les fibres optiques, on peut envisager la caractérisation du couplage de plusieurs fibres optiques (conventionnelles) placées à proximité les unes des autres (deux cylindres circulaires proches, par exemple). Mais notre objectif a surtout été d'étudier les fibres optiques microstructurées qui sont plus difficiles à modéliser et qui présentent les avantages évoqués auparavant.
- La diversité des milieux que la méthode différentielle peut considérer constitue certainement l'un de ses principaux intérêts. Grâce à cette méthode, nous allons pouvoir étudier des fibres microstructurées à inclusions inhomogènes, conductrices, voire anisotropes, ce que peu de méthodes peuvent facilement envisager à ce jour.

Le premier travail de la thèse a essentiellement permis d'établir un code numérique capable de déterminer la diffraction d'ondes planes par un objet cylindrique de section arbitraire, et à milieux diélectrique ou conducteur, homogène ou inhomogène, à l'aide de la dernière version de la méthode différentielle (MD). Dans un second temps, ce programme a été étendu à la recherche de modes dans les mêmes structures cylindriques implémentées. Ainsi, la contribution scientifique de mes travaux de thèse se répartit en deux catégories.

Travaux traitant de la diffraction par des objets cylindriques :

Dans un premier temps, nous avons cherché à vérifier la validité de la méthode FFF en coordonnées cylindriques. Ainsi, le premier programme numérique était exclusivement consacré à la diffraction en polarisation TM. Il a été écrit en utilisant directement le formalisme matriciel de la théorie. En diffraction classique, les nombres des équations et les tailles des matrices sont réduits, ce qui a permis une première implémentation abordable, avec des temps de calcul raisonnables sur un simple PC de bureau. Le premier article [82] a pour vocation de donner les équations de la méthode FFF dans la théorie différentielle en polartisation TM, puis de l'illustrer sur la diffraction d'une onde plane par des cylindres à section circulaire et elliptique. Notre attention s'est concentrée sur l'amélioration apportée par la dernière version de la méthode différentielle (utilisation de la méthode FFF) par comparaison avec la méthode différentielle classique. On précise que l'algorithme de propagation de la matrice S était déjà utilisé dans le programme. Ce dernier a été ensuite généralisé à la diffraction conique (cas général pour lequel le vecteur d'onde incident est orienté hors du plan de section principale). Cependant, il peut toujours traiter indépendemment le cas particulier de la polarisation TM. Un module associé exclusivement à la polarisation TE a été ajouté. L'article [83] présente la théorie dans son formalisme général, de la même manière qu'elle est exposée dans l'ouvrage de M. Nevière et E. Popov, mais en coordonnées cylindriques. Dans

cet article figurent également des résultats concernant des cylindres à section circulaire. Les tests de convergence selon l'ordre de troncature permettent de valider l'implémentation de la méthode FFF et l'algorithme de propagation de la matrice S en diffraction conique. Afin d'introduire les prochains travaux sur les fibres optiques, la fin de l'article illustre l'excitation par diffraction du mode fondamental d'une FOM classique.

Indépendamment de ces travaux sur la méthode différentielle en coordonnées cylindriques, j'ai implémenté et validé, dans un nouveau programme, la nouvelle théorie traitant de la diffraction par un cylindre circulaire anisotrope de permittivité arbitraire [84].

Travaux traitant de la recherche de modes dans les fibres optiques :

Les travaux concernant l'adaptation du programme à la recherche de modes dans les fibres optiques (en particulier pour les FOMs) ont fait l'objet de plusieurs articles. A l'occasion d'une conférence au mois de juin 2005 (Microtechnologies for the New Millenium 2005 à Séville en Espagne) [85], j'ai présenté les premiers résultats encourageants sur la recherche de modes dans une FOM classique par la méthode différentielle. Depuis, le programme a encore été amélioré [86] en complétant la description des symétries géométriques des FOMs et des modes recherchés. La théorie différentielle complète, utilisée en régime modal pour étudier les FOMs, est en cours de soumission pour publication [87]. L'exploitation du programme a permis de confirmer la mise en évidence du phénomène d'anti-croisement de modes à pertes dans les FOMs de type ARROW [88].

Parallèlement à ces travaux, le code numérique a servi à déterminer les modes d'une fibre optique conventionnelle (de section circulaire) à forte conductivité pour l'étude de la lumière transmise par une plaque métallique trouée caractérisée par une autre méthode différentielle [89].

1.4 Organisation du document

Le contenu scientifique de ce document ne suit pas la progression chronologique du travail de thèse. J'ai choisi une approche thématique et orientée pédagogiquement depuis l'aspect le plus général de la théorie vers le cas particulier. Ce mémoire s'articule selon deux axes. La première partie traite de l'étude de la diffraction par des objets à géométrie cylindrique à l'aide de la méthode différentielle. Dans cette partie, nous nous attarderons sur les éléments théoriques nécessaires à une entière compréhension du principe général de cette méthode. Un soin particulier a été porté à la description et l'interprétation des effets numériques (contaminations numériques, nécessité de l'algorithme S, de la méthode FFF). La seconde partie est consacrée au second objectif du travail de thèse, à savoir l'étude de la propagation de la lumière dans les fibres optiques avec la méthode différentielle. L'aspect théorique deviendra moins prononcé, à l'avantage de l'exposé des résultats numériques concernant des objets à géométries et milieux variés, voire inédits.

La première partie est divisée en quatre chapitres d'inégale longueur et importance. Le premier a pour vocation de poser une formulation très générale de la théorie différentielle en coordonnées cylindriques. Afin de ne pas laisser le lecteur submergé par l'aspect exclusivement théorique de ce chapitre, les équations et les principes fondamentaux seront illustrés en polarisation TM sur un cas simple de géométrie. Le deuxième chapitre demeure assurément le plus important de tous. En supposant l'objet d'étude invariant selon l'axe z et rempli de matériaux isotropes et homogènes, les résolutions complètes du problème de diffraction par l'algorithme T, puis par l'algorithme S, font l'objet de la première moitié du chapitre. La suite est consacrée à la description de l'algorithme du programme et à l'analyse des résultats provenant de tests approfondis. Ces derniers permettront de valider les aspects théoriques fondamentaux de la méthode (l'article [83] présente des comparaisons détaillée des résultats de la méthode différentielle avec ceux de la méthode multipolaire). Le troisième chapitre décrit le cas particulier de la diffraction classique : les équations sont déduites du chapitre précédent et quelques résultats numériques sont exposés. Enfin, le quatrième chapitre traite de l'anisotropie dans les structures cylindriques. Tout d'abord, on présente une nouvelle théorie analytique de type "méthode différentielle" mise en oeuvre au sein du laboratoire. Elle permet d'étudier la diffraction conique par un cylindre circulaire anisotrope de permittivité arbitraire. Ensuite, nous verrons comment inclure ces nouvelles équations dans la méthode différentielle, décrite dans les trois premiers chapitres, afin de la généraliser aux objets cylindriques anisotropes de section arbitraire.

La seconde partie comprend deux chapitres. Le premier concerne la mise en place d'un formalisme théorique du problème modal traité par la méthode différentielle. Outre sa résolution en tant que problème homogène, les points importants résident dans la prise en compte des symétries opto-géométriques de la fibre optique et de leurs implications sur les symétries des modes. Les premiers tests numériques, concernant des fibres optiques à géométries "simples", viendront valider la méthode différentielle adaptée au problème modal. Le second chapitre traite exclusivement des fibres optiques microstructurées (FOMs). Une importante analyse des résultats numériques concernant des FOMs classiques à inclusions circulaires permet d'évaluer la précision par comparaison avec ceux obtenus par la Méthode Multipolaire disponible au sein du laboratoire. Nous étudierons ensuite des FOMs classiques que la Méthode Multipolaire ne peut pas modéliser, à savoir des FOMs à inclusions sectorielles, de type "grapefruit" et d'inclusions à gradient d'indice. Enfin, ce mémoire se termine par l'exposé de récents travaux sur des FOMs de type "ARROW". On tentera de fournir des éléments de compréhension du phénomène (toujours en cours d'investigation) que nous avons mis en évidence dans ce genre de fibres optiques : les anti-croisements entre des modes de coeur et des modes associés à une seule inclusion de haut indice. En collaboration avec le "Phlam" (IRCICA) de l'Université de Lille I qui fabrique et caractérise ces fibres [90], nous avons cherché à observer ce phénomène dans une fibre "ARROW" à inclusions inhomogènes que seule la méthode différentielle est capable de modéliser dans notre laboratoire. Les premières comparaisons encourageantes, confrontant les résultats numériques et expérimentaux, concluent l'exposé des travaux de recherche effectués durant ma thèse.

Première partie

Etude de la diffraction par des objets cylindriques

Chapitre 2

Méthode différentielle en coordonnées cylindriques : formulation générale

Sommaire

2.1 Illustration de la méthode différentielle sur un premier exemple simple 24
2.1.1 Description du système et équations de Maxwell 24
2.1.2 La méthode différentielle en polarisation TM : règle de Laurent 25
2.1.3 La méthode différentielle en polarisation TM : méthode FFF 27
2.2 Présentation du problème dans un cadre général 28
2.2.1 Description géométrique de l'objet diffractant 28
2.2.2 Description des milieux 29
2.2.3 Partage de l'espace 30
2.2.4 Source lumineuse 31
2.2.5 Développements en série de Fourier 34
2.3 Relations constitutives des milieux dans l'espace de Fourier tronqué . . 36
2.3.1 Principe de la méthode FFF 36
2.3.2 Application des règles de factorisation dans les relations constitutives des milieux 37
2.3.3 Prolongements des vecteurs unitaires normaux et tangents en dehors de la surface de diffraction 39
2.4 Système différentiel dans l'espace de Fourier tronqué 40
2.4.1 Insertion des nouvelles règles de factorisation dans les équations de Maxwell . 40
2.4.2 Ecriture matricielle du système différentiel à résoudre dans la zone modulée . 41

Ce chapitre présente une base théorique générale de la méthode différentielle. Les équations de Maxwell vont être écrites dans le système de coordonnées cylindriques, dans l'espace de Fourier tronqué, pour un objet cylindrique possédant à la fois une périodicité dans le plan de section droite (selon θ) et une périodicité selon son axe (l'axe z), et tel que les milieux soient linéaires, parfaits (réponse instantanée d'un matériau à une sollicitation électromagnétique), sans charges libres, inhomogènes, anisotropes, diélectriques ou conducteurs. De plus, on considère à la fois le caractère électrique et magnétique des milieux. Il s'agit en fait d'adapter les équations générales de la dernière méthode différentielle [56], déjà écrite dans le repère cartésien pour les réseaux, au cas du repère cylindrique pour des objets cylindriques.

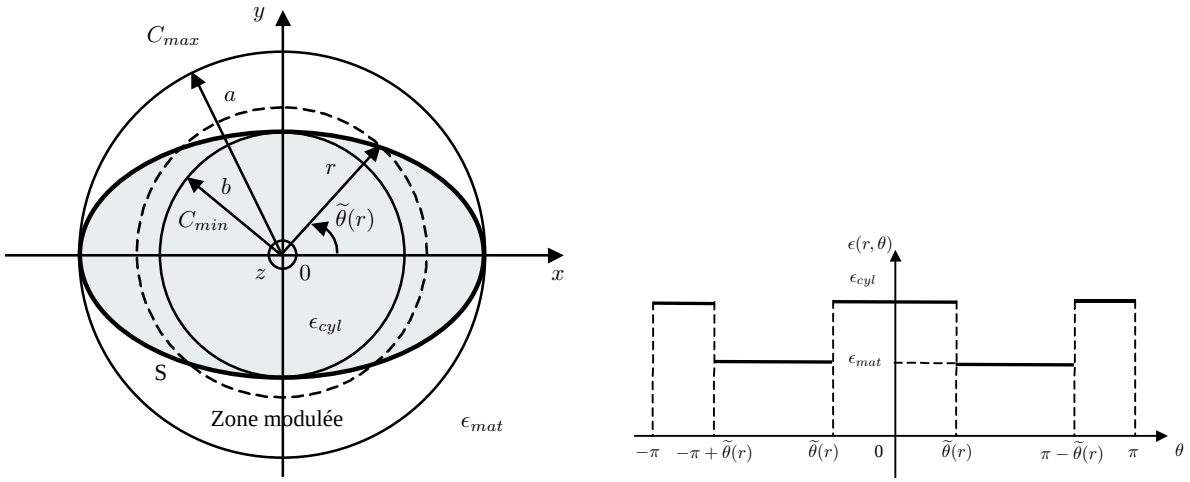
Tout d'abord, les équations de la méthode différentielle avec application de la méthode de la *factorisation de Fourier rapide*, vont être succintement écrites pour un premier exemple simple de structure cylindrique. Ceci permettra de poser les bases nécessaire à la compréhension de la théorie qui sera ensuite abordée sous un aspect beaucoup plus général. En effet, on décrira précisément les caractéristiques géométriques du système le plus général que nous envisageons d'étudier, les propriétés électromagnétiques de ses milieux ainsi que la lumière incidente à cet objet diffractant. Les propriétés de périodicité

du système opto-géométrique considéré permettront d'exprimer les champs électromagnétiques en terme de développements en série de Fourier. Nous énoncerons le formalisme de la méthode de la *factorisation de Fourier rapide* ou *Fast Fourier Factorization* (FFF) qui s'applique sur les relations constitutives des milieux. Enfin, nous injecterons les nouvelles équations obtenues dans les équations de Maxwell afin d'aboutir au système différentiel à résoudre. Nous précisons que, dans ce chapitre, notre attention se portera sur l'obtention de ce système différentiel et non sur sa résolution. Cette dernière apparaîtra dans le prochain chapitre pour le cas de géométries et de milieux particuliers.

2.1 Illustration de la méthode différentielle sur un premier exemple simple

Avant d'aborder le formalisme général de la méthode différentielle, nous allons dans un premier temps l'illustrer sur l'un des exemples les plus simples que l'on puisse considérer, afin de bien comprendre dans quelle région de l'espace, dans quelles équations et de quelle manière intervient la méthode FFF dans la méthode différentielle. Nous considérons la polarisation TM (diffraction classique). Dans un deuxième temps, la méthode différentielle sera écrite dans son premier formalisme issu des années 70 [53], pour une structure cylindrique de section elliptique, centrée sur l'origine, invariante selon z et remplie d'un milieu homogène et isotrope. Enfin, nous introduirons les bases de la méthode FFF directement appliquée aux équations de l'électromagnétisme.

2.1.1 Description du système et équations de Maxwell



(a) Représentation de la section droite elliptique de l'objet cylindrique et notations

(b) Profil de la permittivité sur le cylindre circulaire de rayon r de la figure 2.1(a)

FIG. 2.1 – Description du cylindre elliptique considéré

On considère une structure cylindrique placée dans un milieu non magnétique, diélectrique, homogène et isotrope de permittivité $\epsilon_{mat} \in \mathbb{R}$, et remplie d'un milieu non magnétique, diélectrique ou conducteur, homogène et isotrope, de permittivité $\epsilon_{cyl} \in \mathbb{C}$ (voir Fig. 2.1).
La surface S (interface entre les deux milieux) de cet objet cylindrique est invariante selon l'axe z. Sa section droite, illustrée par la figure 2.1(a), est décrite par une ellipse de demi-grand axe a, de demi-petit axe $b < a$ et donc d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.
En diffraction classique, on suppose que le vecteur d'onde incident $\vec{k}^{(inc)}$ est contenu dans le plan de section droite du système cylindrique. L'invariance du système opto-géométrique et de l'onde incidente selon l'axe z permet d'en déduire celle des champs électromagnétiques.
On postule une dépendance temporelle harmonique du champ électromagnétique total imposée par celle

de l'onde incidente. Ce champ s'exprime alors selon :

$$\vec{\mathbf{A}}(r,\theta,z,t) = \Re e\left[\vec{A}(r,\theta,\omega)e^{-i\omega t}\right] \text{ avec } \vec{A} \in \left\{\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}\right\} \tag{2.1}$$

où ω est la pulsation de l'onde plane incidente. Pour simplifier, le vecteur $\vec{A}(r,\theta,\omega)$ est noté $\vec{A}(r,\theta)$

Une des bases du principe de la méthode différentielle consiste à partager l'espace en trois régions grâce à deux cylindres circulaires centrés sur l'origine, les cylindres C_{min} de rayon b et C_{max} de rayon a, respectivement inscrit et circonscrit à la surface S (voir figure 2.1(a)). La région qui contient l'origine du repère ($r < b$), ainsi que la région extérieure à S constituée de la matrice ($r > a$), sont par définition remplies de milieux homogènes et isotropes pour lesquels le champ électromagnétique total s'exprime explicitement en terme de solutions de l'équation de Helmholtz. Toutefois, on s'intéresse pour le moment à la région intermédiaire contenant la surface S, appelée "zone modulée", et telle que $b \leq r \leq a$. Sur un cylindre de rayon r de la zone modulée, la permittivité en fonction de θ est décrite par une fonction créneau notée $\epsilon(r,\theta)$ (voir figure 2.1(b)) dont les angles de discontinuité sont ceux des quatre points d'intersection entre le cylindre circulaire de rayon r et la section elliptique de la surface S. Le premier angle, noté $\widetilde{\theta}(r)$, est défini par :

$$\widetilde{\theta}(r) = acos\left(\frac{a}{r}\sqrt{\frac{b^2-r^2}{b^2-a^2}}\right) \tag{2.2}$$

En tenant compte des dépendances explicites du champ électromagnétique selon la variable temporelle t et la variable d'espace z d'après la relation (2.1), l'équation de Maxwell-Faraday $\left(r\vec{o}t\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}\right)$ associée aux relations constitutives de la zone modulée $\left(\vec{D} = \epsilon(r,\theta)\vec{E} \text{ et } \vec{B} = \mu_0\vec{H}\right)$ se réduit dans le système de coordonnées cylindriques à :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z(r,\theta)}{\partial\theta} - i\omega\mu_0 H_r(r,\theta) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial E_z(r,\theta)}{\partial r} - i\omega\mu_0 H_\theta(r,\theta) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{r}\left[E_\theta(r,\theta) + r\frac{\partial E_\theta(r,\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r(r,\theta)}{\partial\theta}\right] - i\omega\mu_0 H_z(r,\theta) = 0 \tag{2.5}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère devient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z(r,\theta)}{\partial\theta} + i\omega\epsilon(r,\theta)E_r(r,\theta) = 0 \tag{2.6}$$

$$-\frac{\partial H_z(r,\theta)}{\partial r} + i\omega\epsilon(r,\theta)E_\theta(r,\theta) = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{r}\left[H_\theta(r,\theta) + r\frac{\partial H_\theta(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial H_r(r,\theta)}{\partial\theta}\right] + i\omega\epsilon(r,\theta)E_z(r,\theta) = 0 \tag{2.8}$$

Nous avons choisi d'exprimer ces équations avec le couple de champs électromagnétiques $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Les équations (2.3) à (2.8) se découplent en deux ensembles d'équations indépendantes. Les équations (2.3), (2.4) et (2.8) constituent le cas de polarisation Transverse Electrique (TE) et relient les composantes E_z, H_r et H_θ. Les équations (2.5), (2.6) et (2.7) constituent le cas de polarisation Transverse Magnétique (TM) et relient les composantes H_z, E_r et E_θ. Nous limiterons cette première étude au cas de polarisation TM.

2.1.2 La méthode différentielle en polarisation TM : règle de Laurent

L'invariance du système opto-géométrique selon l'axe z ainsi que le régime harmonique ont permis de réduire la dépendance du champ électromagnétique aux variables d'espace r et θ. La périodicité du système selon θ va permettre de ramener les équations de Maxwell écrites pour la polarisation TM en un système différentiel du premier ordre selon la seule variable r. En effet, le système de coordonnées

cylindriques induit nécessairement une périodicité, de période 2π, selon la variable angulaire θ de toutes les grandeurs opto-géométriques, en particulier des vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$ et de la fonction $\epsilon(r,\theta)$. Ces dernières grandeurs peuvent alors être développées en série de Fourier selon :

$$U(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(r) e^{in\theta} \text{ avec } U \in \{H_z, E_r, E_\theta, \epsilon\} \tag{2.9}$$

En fait, ces développements sont tronqués à l'ordre N puisque la théorie différentielle a pour vocation d'être implémentée numériquement. Lorsqu'on injecte ces développements en explicitant leurs dérivées partielles selon r et θ dans les équations (2.5), (2.6) et (2.7), on obtient le système suivant de $3(2N+1)$ équations :

$$\frac{1}{r}\left[E_{\theta,n}(r) + r\frac{dE_{\theta,n}(r)}{dr} - inE_{r,n}(r)\right] - i\omega\mu_0 H_{z,n}(r) = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{in}{r} H_{z,n}(r) + i\omega\left(\epsilon E_r\right)_n(r) = 0 \tag{2.11}$$

$$-\frac{dH_{z,n}(r)}{dr} + i\omega\left(\epsilon E_\theta\right)_n(r) = 0 \tag{2.12}$$

On adopte une notation matricielle en introduisant la matrice colonne $[A]$ telle que $([A])_n = A_n(r)$ et la matrice α telle que $(\alpha)_{n,m} = n\delta_{n,m}$ (où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Krönecker). Ainsi, les équations (2.10) à (2.12) se réécrivent :

$$\frac{1}{r}\left\{[E_\theta] + r\frac{d[E_\theta]}{dr} - i\alpha[E_r]\right\} - i\omega\mu_0[H_z] = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{i\alpha}{r}[H_z] + i\omega[\epsilon E_r] = 0 \tag{2.14}$$

$$-\frac{d[H_z]}{dr} + i\omega[\epsilon E_\theta] = 0 \tag{2.15}$$

A ce stade, on atteint le point théorique le plus important de la méthode différentielle qui consiste à exprimer les coefficients de Fourier des produits ϵE_c avec $c \in \{r,\theta\}$ (composantes du vecteur $\vec{D}$) en fonction de ceux de ϵ et de E_c, intervenant dans les équations (2.14) et (2.15). Cette factorisation des produits ϵE_c s'effectue grâce à un théorème mathématique appelé "règle de Laurent" qui s'énonce de la manière suivante : $(\epsilon E_c)_n(r) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \epsilon_{n-m}(r) E_{c,m}(r)$. En introduisant la matrice de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$ définie par $([\![\epsilon]\!])_{n,m} = \epsilon_{n-m}(r)$, ce théorème prend la forme matricielle suivante : $[\epsilon E_c] = [\![\epsilon]\!][E_c]$. Lorsqu'on utilise la règle de Laurent, l'équation (2.14) permet d'exprimer $[E_r]$ en fonction de $[H_z]$:

$$[E_r] = -[\![\epsilon]\!]^{-1}\frac{\alpha}{r\omega}[H_z] \tag{2.16}$$

Après avoir inséré cette dernière équation dans la relation (2.13), on obtient un système de $2(2N+1)$ équations différentielles linéaires qui relient $[E_\theta]$ et $[H_z]$:

$$\frac{d[E_\theta]}{dr} = -\frac{1}{r}[E_\theta] - i\left\{\omega\mu_0 I_d - \frac{\alpha}{r}[\![\epsilon]\!]^{-1}\frac{\alpha}{r\omega}\right\}[H_z] \tag{2.17}$$

$$\frac{d[H_z]}{dr} = i\omega[\![\epsilon]\!][E_\theta] \tag{2.18}$$

où I_d est la matrice identité de dimension $(2N+1)\times(2N+1)$. Ces dernières équations, obtenues par application de la règle de Laurent, doivent être intégrées à travers la zone modulée de $r=b$ à $r=a$.

2.1.3 La méthode différentielle en polarisation TM : méthode FFF

Malheureusement, comme on le décrit plus en détail dans la section 2.3.1, la règle de Laurent qui a été utilisée est un thèorème mathématique qui assure la convergence de la factorisation des produits $\epsilon(r,\theta)E_a(r,\theta)$ avec $a \in \{r,\theta\}$ dans l'espace de Fourier uniquement en terme de série. Son application directe ne tient alors pas compte de la troncature des développements (à l'ordre N), remettant ainsi en cause sa validité pour des applications numériques. En effet, dès les premières applications de la méthode différentielle aux cas de polarisation TM pour les réseaux (en coordonnées cartésiennes)[53, 54], certains problèmes de convergence sont apparus. Afin de les éviter, L. Li [66] a démontré que la règle de Laurent est uniquement justifiée selon certains critères de continuité du champ électromagnétique à travers la surface S. Pour les autres cas, il faut ajouter une nouvelle règle de factorisation, appelée "règle Inverse". Les conditions d'application de ces deux règles de factorisation énoncées dans la section 1.2.3 seront expliquées plus en détail dans la section 2.3.1. A partir des conditions de passage des champs à travers S, la règle de Laurent s'applique à la composante tangentielle à S du vecteur $\vec{D}$, alors que la règle Inverse s'applique à sa composante normale (continue à la traversée de S). On décompose alors le vecteur $\vec{D}$ de la manière suivante : $\vec{D} = \epsilon\left[E_T\vec{T} + E_N\vec{N}\right]$. Dans le cas de la section à profil elliptique, les composantes du vecteur unitaire tangent $\vec{T}$ ($T_z = 0$) à la surface S et situé dans le plan de section principale sont représentées par les fonctions de θ suivantes :

$$T_r(\theta) = \frac{e^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\left[1 - e\cos^2(\theta)\right]^2 + e^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}} \tag{2.19}$$

$$T_\theta(\theta) = \frac{e\cos^2(\theta) - 1}{\sqrt{\left[1 - e\cos^2(\theta)\right]^2 + e^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}} \tag{2.20}$$

Il s'agit donc de fonctions périodiques, de période 2π et par conséquent, développables en série de Fourier. Les composantes tangentielle et normale à $\vec{E}$ s'écrivent :

$$E_T = E_rT_r + E_\theta T_\theta \tag{2.21}$$

$$E_N = -E_rT_\theta + E_\theta T_r \tag{2.22}$$

L'inversion de ces deux dernières équations conduit à :

$$E_r = E_TT_r - E_NT_\theta \tag{2.23}$$

$$E_\theta = E_TT_\theta + E_NT_r \tag{2.24}$$

Pour la composante radiale de $\vec{D}$, on trouve directement grâce à (2.23) :

$$\epsilon E_r = \epsilon T_rE_T - \epsilon T_\theta E_N \tag{2.25}$$

Le passage dans l'espace de Fourier s'effectue par application de la règle de Laurent au produit entre ϵ et T_rE_T : $[\epsilon T_rE_T] = [\![\epsilon]\!]\,[T_rE_T]$ et par application de la règle Inverse au produit entre ϵ et $T_\theta E_N$: $[\epsilon T_\theta E_N] = [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\,[T_\theta E_N]$. L'équation (2.25) devient alors :

$$[\epsilon E_r] = [\![\epsilon]\!]\,[T_rE_T] - \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}[T_\theta E_N]$$

En utilisant (2.21) et (2.22), on trouve $[E_r] = [\![\epsilon]\!]\left[T_r^2E_r + T_rT_\theta E_\theta\right] + [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\left[T_\theta^2E_r - T_\theta T_rE_\theta\right]$. Par la suite, une nouvelle application de la règle de Laurent sur les produits $T_r^2E_r$, $T_rT_\theta E_\theta$, $T_\theta^2E_r$ et $T_\theta T_rE_\theta$ conduit à :

$$[\epsilon E_r] = \left([\![\epsilon]\!][\![T_r^2]\!] + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}[\![T_\theta^2]\!]\right)[E_r] + \left([\![\epsilon]\!] - \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)[\![T_rT_\theta]\!]\,[E_\theta]$$

On introduit les matrices Δ, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définies respectivement par :

$$\Delta = [\![\epsilon]\!] - \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}, \mathcal{A} = \Delta[\![T_r^2]\!] \text{ et } \mathcal{B} = \Delta[\![T_r T_\theta]\!]$$

En utilisant la relation $[\![T_r^2]\!] + [\![T_\theta^2]\!] = I_d$ déduite de $T_r^2 + T_\theta^2 = 1$ dans l'espace de Fourier, on obtient finalement :

$$[\epsilon E_r] = \left(\mathcal{A} + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)[E_r] + B\,[E_\theta] \tag{2.26}$$

Cette relation est la nouvelle expression du produit $[\epsilon E_r]$ qui tient compte des troncatures des développements par application de la règle de Laurent, mais également de la nouvelle règle de factorisation : la règle Inverse. La version antérieure de la méthode différentielle énoncée précédemment [78] supposait que $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1} = [\![\epsilon]\!]$, ce qui s'avère faux lorsque les séries sont tronquées. On remarque alors que, dans ces conditions, on aurait $\Delta = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$ et l'équation (2.26) permettrait de retrouver $[\epsilon E_r] = [\![\epsilon]\!]\,[E_r]$ (application uniquement de la règle de Laurent). Un raisonnement équivalent à celui qui nous a amené de l'équation (2.25) à l'équation (2.26) conduit également à :

$$[\epsilon E_\theta] = \mathcal{B}\,[E_r] + ([\![\epsilon]\!] - \mathcal{A})\,[E_\theta] \tag{2.27}$$

L'équation (2.26) permet d'exprimer $[E_r]$ selon la relation $[E_r] = \left(\mathcal{A} + [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\right)^{-1}\{[\epsilon E_r] - \mathcal{B}\,[E_\theta]\}$, dans laquelle on injecte l'équation (2.14). On trouve alors l'expression de $[E_r]$ en fonction de $[H_z]$ et $[E_\theta]$:

$$[E_r] = -\left(\mathcal{A} + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)^{-1}\left\{\frac{\alpha}{r\omega}\,[H_z] + \mathcal{B}\,[E_\theta]\right\} \tag{2.28}$$

Après avoir inséré la relation (2.26) dans les équations (2.13) et (2.15), on obtient un nouveau système de $2(2N+1)$ équations différentielles linéaires selon la variable r qui relie $[E_\theta]$ et $[H_z]$:

$$\frac{d\,[E_\theta]}{dr} = -\left\{\frac{i\alpha}{r}\left(\mathcal{A} + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)^{-1}\mathcal{B} + \frac{1}{r}I_d\right\}[E_\theta] + i\left\{\omega\mu_0 I_d - \frac{\alpha}{r}\left(\mathcal{A} + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)^{-1}\frac{\alpha}{r\omega}\right\}[H_z] \tag{2.29}$$

$$\frac{d\,[H_z]}{dr} = -i\mathcal{B}\left(\mathcal{A} + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)^{-1}\frac{\alpha}{r}\,[H_z] + i\omega\left\{[\![\epsilon]\!] - \mathcal{A} - \mathcal{B}\left(\mathcal{A} + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1}\right)^{-1}\mathcal{B}\right\}[E_\theta] \tag{2.30}$$

Ces deux relations constituent, pour le cas TM, le nouveau système différentiel à intégrer à travers la zone modulée.

2.2 Présentation du problème dans un cadre général

Nous allons maintenant établir les équations générales de la méthode différentielle pour une structure cylindrique plus complexe. Le principe de cette méthode consiste à formuler les équations de Maxwell et les relations constitutives des milieux sous la forme d'un système différentiel du premier ordre selon une seule variable d'espace en exploitant les modulations opto-géométriques de l'objet diffractant. Dans le cas présent, cela revient à écrire ces équations dans l'espace de Fourier en utilisant les périodicités du système opto-géométrique considéré. La géométrie du système ainsi que les propriétés électromagnétiques des milieux (tenseur permittivité, perméabilité magnétique,...) doivent posséder les mêmes périodicités.

2.2.1 Description géométrique de l'objet diffractant

La version de la méthode différentielle écrite en coordonnées cartésiennes peut prendre en compte jusqu'à deux périodicités selon deux axes de l'espace (réseaux 2D : cristaux photoniques, empilement de type tas de bois,...) [56]. Cette bi-périodicité géométrique est ici adaptée à un objet de géométrie

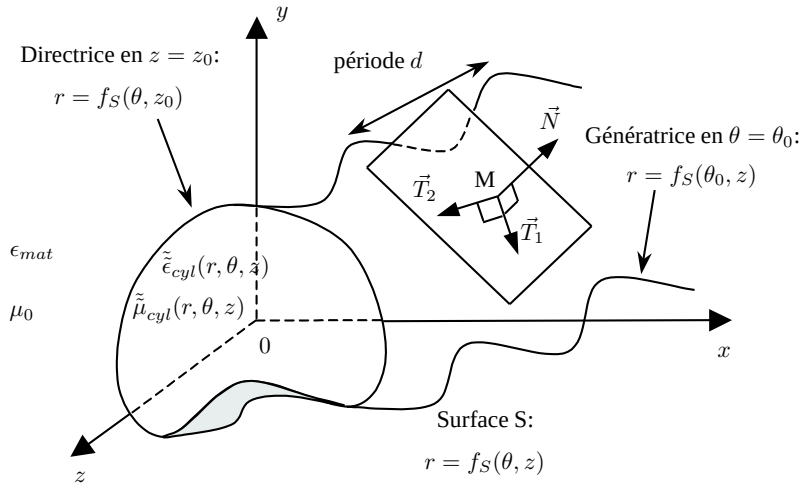


FIG. 2.2 – Représentation d'un système cylindrique de section droite arbitraire, périodique selon l'axe z et rempli d'un matériau conducteur, anisotrope et inhomogène

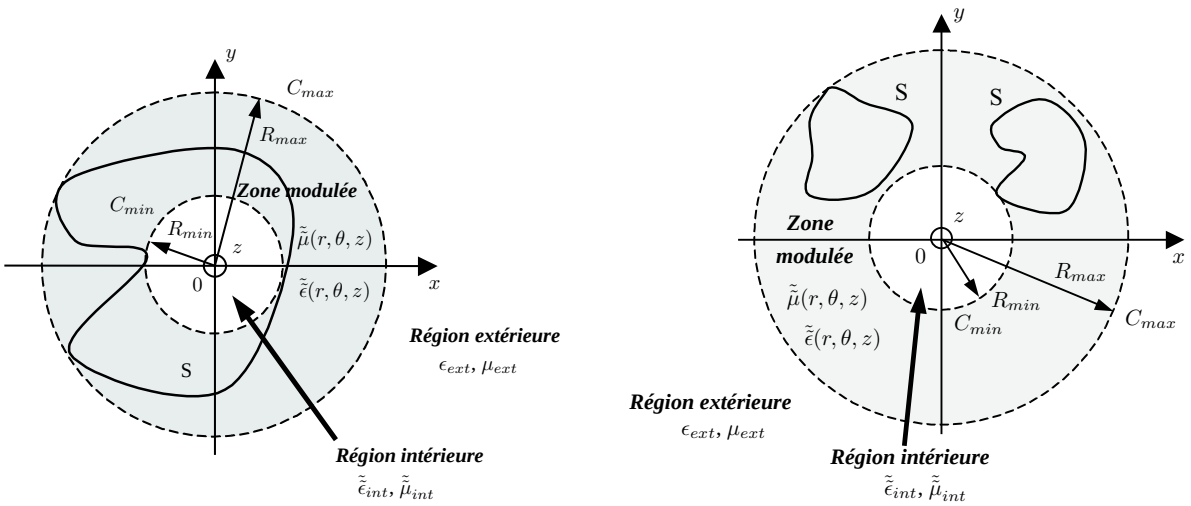
cylindrique. On se place à la fois dans le repère cylindrique de base vectorielle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et dans le repère cartésien de base vectorielle $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On note les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace : (r, θ, z). Cet objet, illustré par la figure 2.2, est constitué d'une surface cylindrique fermée (ou d'une réunion de surfaces cylindriques fermées) séparant deux régions de l'espace : la région intérieure à la surface cylindrique S et la région extérieure à S infinie souvent appelée "matrice". Cette surface est notée S et a pour équation $r = f_S(\theta, z)$. Une directrice a pour équation $r = f_S(\theta, z_0)$ en $z = z_0$ décrites dans le plan de section droite de base vectorielle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$; puis une génératrice a pour équation $r = f_S(\theta_0, z)$ en $\theta = \theta_0$ dont la direction principale est généralement choisie comme celle de l'axe z (voir figure 2.2). La première périodicité est inhérente au système de coordonnées choisi puisqu'un objet cylindrique est nécessairement 2π-périodique selon la coordonnée angulaire θ. Elle s'applique donc à la directrice de l'objet. On impose une seconde périodicité de période notée d sur les génératrices.
En outre, on introduit en un point M de la surface, le vecteur normal $\vec{N}$ et les vecteurs $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ formant une base du plan tangent à cette surface S, tels que :

$$\vec{N} = \vec{T}_2 \wedge \vec{T}_1 \tag{2.31}$$

La géométrie cylindrique de l'objet diffractant implique déjà une différence non négligeable par rapport au système considéré en coordonnées cartésiennes : la surface S sépare un milieu infini (milieu extérieur) et un milieu borné (milieu intérieur) alors qu'une surface plane bi-périodique (cas des réseaux) sépare deux milieux infinis. Toutefois, nous établirons plus loin une équivalence dans les équations des champs électromagnétiques entre le caractère infini du milieu de transmission d'un réseau (le milieu ne contenant pas la source lumineuse) et le rôle de l'origine du repère en tant que singularité pour les objets cylindriques.

2.2.2 Description des milieux

Tous les milieux considérés sont supposés linéaires, parfaits (réponse instantanée d'un matériau à un sollicitation électromagnétique) et sans charges libres. La matrice (région infinie extérieure) est constituée d'un milieu diélectrique supposé homogène, isotrope de permittivité $\epsilon_{mat} \in \mathbb{R}$ et non magnétique de perméabilité égale à celle du vide ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m). En ce qui concerne le milieu localisé à l'intérieur de la surface S, on peut envisager un milieu possédant des propriétés électromagnétiques très variées, ce qui constitue l'un des principaux avantages de la méthode différentielle. En effet, le milieu peut être un matériau électrique et/ou magnétique, isolant et/ou conducteur, homogène et/ou inhomogène, isotrope et/ou anisotrope. Nous considérons dans cette étude le cas général de milieux électriques et magnétiques, conducteurs, inhomogènes et anisotropes. Nous précisons que les caractéristiques électromagnétiques de



(a) Représentation d'un système centré sur l'origine dans le plan de section droite

(b) Représentation d'un système excentré dans le plan de section droite

FIG. 2.3 – Partage de l'espace en trois régions : deux régions homogènes et isotropes encadrant la zone modulée (en grisé)

ce milieu présentent la même périodicité selon z que celle des génératrices. On note $\bar{\bar{\epsilon}}_{cyl}(x,y,z)$ le tenseur permittivité du cylindre décrit dans le système de coordoonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques, il s'écrit :

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r,\theta,z) = \Re\bar{\bar{\epsilon}}_{cyl}(x,y,z)\Re^T \tag{2.32}$$

avec

$$\Re = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

On rappelle que la relation constitutive de ce milieu associée à la permittivité en un point M de l'espace de coordonnées (r,θ,z) et en régime harmonique (à la pulsation ω) est :

$$\vec{D}(r,\theta,z,\omega) = \tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r,\theta,z)\vec{E}(r,\theta,z,\omega) \tag{2.33}$$

Le matériau étant parfait, le tenseur permittivité $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r,\theta,z)$ est invariant selon ω. En ce qui concerne les propriétés magnétiques du milieu, on note de la même manière $\bar{\bar{\mu}}_{cyl}(x,y,z)$ le tenseur perméabilité en coordoonnées cartésiennes, d'où on déduit en coordonnées cylindriques :

$$\tilde{\tilde{\mu}}_{cyl}(r,\theta,z) = \Re\bar{\bar{\epsilon}}_{cyl}(x,y,z)\Re^T \tag{2.34}$$

et la relation constitutive associée à la perméabilité s'écrit :

$$\vec{B}(r,\theta,z,\omega) = \tilde{\tilde{\mu}}_{cyl}(r,\theta,z)\vec{H}(r,\theta,z,\omega) \tag{2.35}$$

Il importe de préciser que les tenseurs $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r,\theta,z)$ et $\tilde{\tilde{\mu}}_{cyl}(r,\theta,z)$ contiennent des éléments complexes.

2.2.3 Partage de l'espace

Sachant que la surface S peut être une réunion de surfaces fermées, on distingue deux types de systèmes de base : ceux ayant une directrice composée d'une seule courbe fermée centrée sur l'origine du repère (voir figure 2.3(a)) et ceux ayant une directrice composée d'une ou plusieurs courbes fermées excentrées par rapport à l'origine (voir figure 2.3(b)).

L'application de la méthode FFF nécessite le partage de l'espace en trois régions grâce à deux cylindres de section circulaire centrée sur l'origine et de génératrices invariantes selon z (cylindres conventionnels). Il s'agit des deux cylindres tangents à la surface S. Le cylindre intérieur est noté C_{min} et possède le rayon R_{min} tel que :

$$R_{min} = \min_{\theta,z} \left[f_S \left(\theta, z \right) \right] \tag{2.36}$$

alors que le cylindre extérieur est noté C_{max} et possède le rayon R_{max} tel que :

$$R_{max} = \max_{\theta,z} \left[f_S \left(\theta, z \right) \right] \tag{2.37}$$

Il apparaît alors les trois régions de l'espace suivantes :

- La zone intérieure au cylindre C_{min}, notée (int) est une région définie soit comme le milieu qui remplit l'objet cylindrique dans le cas d'un système centré sur l'origine (voir figure 2.3(a)) soit comme le milieu de la matrice dans le cas d'un système excentré (voir figure 2.3(b)). On lui associe alors un tenseur permittivité $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{int}(r, \theta, z)$ défini par :

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}_{int}(r, \theta, z) = \begin{cases} \tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r, \theta, z) \text{ dans le cas de la figure 2.3(a)} \\ \epsilon_{mat} I_d \text{ dans le cas de la figure 2.3(b)} \end{cases} \tag{2.38}$$

  et une perméabilité magnétique $\tilde{\tilde{\mu}}_{int}(r, \theta, z)$ définie par :

$$\tilde{\tilde{\mu}}_{int}(r, \theta, z) = \begin{cases} \tilde{\tilde{\mu}}_{cyl}(r, \theta, z) \text{ dans le cas de la figure 2.3(a)} \\ \mu_0 I_d \text{ dans le cas de la figure 2.3(b)} \end{cases} \tag{2.39}$$

- La zone extérieure au cylindre C_{max}, notée (ext) est une région définie comme le milieu de la matrice. On lui associe alors la permittivité ϵ_{ext} suivante :

$$\epsilon_{ext} = \epsilon_{mat} \tag{2.40}$$

  et sa perméabilité reste celle du vide μ_0.
- La zone qui contient la surface de diffraction est telle que $R_{min} < r < R_{max}$ est appelée "*zone modulée*". La zone modulée est la région de l'espace qui requiert la plus grande attention puisqu'elle sera le siège de la méthode FFF. En effet, dans cette région de l'espace, les tenseurs permittivité (2.33) et perméabilité (2.35) initialement définis dans le milieu intérieur à S peuvent être étendus à tout l'espace de la zone modulée sous la forme de tenseurs notés :

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}(r, \theta, z) = \begin{cases} \tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r, \theta, z) \text{ si } M(r, \theta, z) \text{ est à l'intérieur de } S \\ \epsilon_{mat} \text{ si } M(r, \theta, z) \text{ est à l'extérieur de } S \end{cases} \text{ et } \begin{cases} r \in [R_{min}, R_{max}] \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.41}$$

$$\tilde{\tilde{\mu}}(r, \theta, z) = \begin{cases} \tilde{\tilde{\mu}}_{cyl}(r, \theta, z) \text{ si } M(r, \theta, z) \text{ est à l'intérieur de } S \\ \mu_0 \text{ si } M(r, \theta, z) \text{ est à l'extérieur de } S \end{cases} \text{ et } \begin{cases} r \in [R_{min}, R_{max}] \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.42}$$

  On précise que ces deux fonctions des coordonnées de l'espace peuvent présenter des discontinuités à travers la surface S (y compris dans le cas où les milieux sont homogènes). Elles sont également 2π-périodiques selon la variable θ et périodiques de période d selon la variable z.

2.2.4 Source lumineuse

Comme dans tout problème de diffraction, il faut une lumière incidente sur l'objet. On sait que les ondes électromagnétiques de type ondes planes constituent une base de fonctions pour les développements en série de Fourier des champs électromagnétiques dans le repère cartésien, ce qui justifie leur emploi dans ce domaine. Dans le repère cylindrique, des ondes cylindriques décrites par des fonctions de Bessel ou de Hankel sont équivalentes aux ondes planes des réseaux en ce qui concerne la nature de la propagation (entrantes ou sortantes). Néanmoins, pour des raisons d'interprétation physique, on conserve des ondes incidentes à l'objet diffractant de type ondes planes, progressives et monochromatiques se propageant dans la région extérieure (ext).

Expression des champs électromagnétiques de l'onde plane incidente :

L'équation de Helmholtz associée au milieu extérieur nous conduit à l'expression des champs électromagnétiques d'une onde plane incidente écrite dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{\mathbf{A}}^{(inc)}(r,\theta,z,t) = \Re e\left\{\vec{A}_0^{(inc)} e^{i\left[k_{ext,x}^{(inc)} r\cos(\theta)+k_{ext,y}^{(inc)} r\sin(\theta)+k_{ext,z}^{(inc)} z\right]} e^{-i\omega t}\right\} \text{ avec } A \in \{E,H\} \quad (2.43)$$

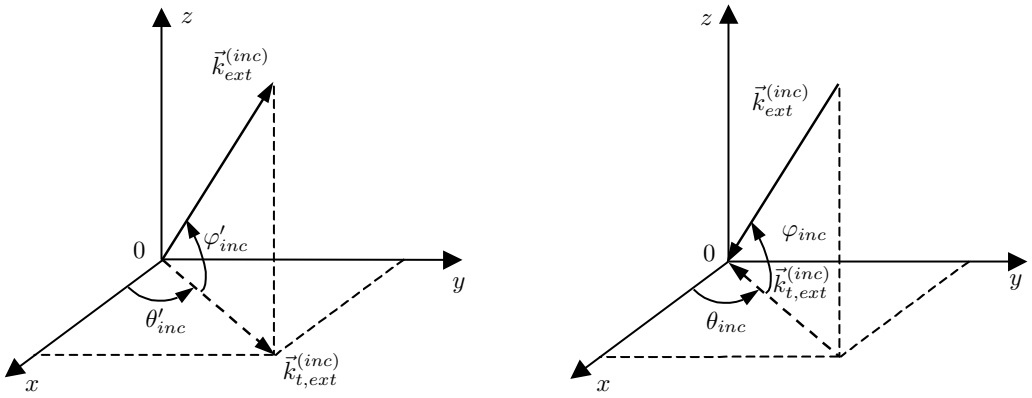
Cette onde incidente est caractérisée par son vecteur d'onde $\vec{k}_{ext}^{(inc)} = k_{ext,x}^{(inc)}\vec{e}_x + k_{ext,y}^{(inc)}\vec{e}_y + k_{ext,z}^{(inc)}\vec{e}_z$, sa pulsation ω et son vecteur amplitude $\vec{A}_0^{(inc)}$. On rappelle que le vecteur d'onde incident vérifie $\left\|\vec{k}_{ext}^{(inc)}\right\| = \sqrt{\omega^2\mu_0\epsilon_{ext}}$. On note :

$$\left\|\vec{k}_{ext}^{(inc)}\right\| = k_{ext} \quad (2.44)$$

$$\gamma_0 = k_{ext,z}^{(inc)} \quad (2.45)$$

et $\vec{k}_{t,ext}^{(inc)}$ la projection de $\vec{k}_{ext}^{(inc)}$ dans le plan de section droite $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$. Le paramètre γ_0 joue un rôle important puisqu'il intervient dans les équations de Maxwell dans la zone modulée par conservation de la composante en z du vecteur d'onde (voir section suivante 2.4.2). On introduit le terme $k_0 = \sqrt{\omega^2\mu_0\epsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$ où ϵ_0 est la permittivité du vide ($\epsilon_0 \approx 8.85418781710^{-12}$ F/m) et λ la longueur d'onde dans le vide de l'onde plane incidente.

Représentation du vecteur d'onde incident :



(a) Première représentation du vecteur d'onde incident

(b) Seconde représentation du vecteur d'onde incident

FIG. 2.4 – Représentations du vecteur d'onde dans l'espace et notations

Le choix de la représentation du vecteur d'onde incident dans l'espace conditionne la polarisation du champ électromagnétique diffracté. En effet, lorsque ce vecteur se trouve dans le plan de section principale (section droite), nous montrerons que les équations de Maxwell se découplent en deux polarisations indépendantes ; on parle alors de *diffraction classique*. Dans le cas contraire (cas général), il s'agit de la *diffraction conique*. Il existe habituellement une représentation différente du vecteur d'onde incident pour chacun de ces cas. La première représentation est illustrée par la figure 2.4(a), généralement associée à la diffraction classique. Le point d'application du vecteur d'onde incident est choisi à l'origine du repère. L'angle φ'_{inc} est l'angle d'inclinaison de $\vec{k}_{ext}^{(inc)}$ par rapport au plan de section droite ; il est alors nul dans le cas de la diffraction classique. L'angle θ_{inc} définit la direction du vecteur d'onde incident transverse $\vec{k}_{t,ext}^{(inc)}$. La seconde représentation (voir figure 2.4(b)), généralement associée à la diffraction conique, diffère de la première seulement par la pointe de $\vec{k}_{ext}^{(inc)}$ choisie sur l'origine du repère. Le passage de la seconde représentation à la première s'effectue par les relations $\varphi'_{inc} = -\varphi_{inc}$ et $\theta'_{inc} = \theta_{inc} + \pi$. Dans les deux cas, on a :

$$k_{t,ext} = \sqrt{k_{ext}^2 - \gamma_0^2} \quad (2.46)$$

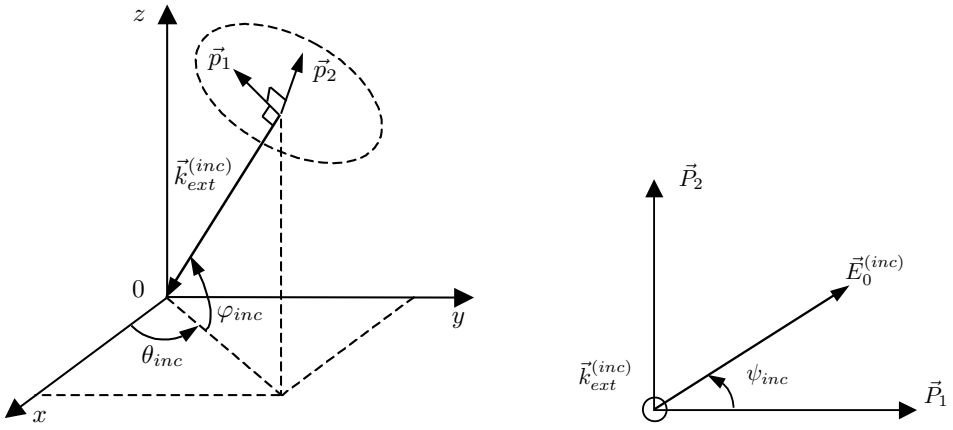
En prenant désormais par défaut la seconde représentation, le vecteur d'onde incident s'écrit dans le repère cartésien :

$$\vec{k}_{ext}^{(inc)} = \begin{pmatrix} -k_{ext}\cos(\varphi_{inc})\cos(\theta_{inc}) \\ -k_{ext}\cos(\varphi_{inc})\sin(\theta_{inc}) \\ -k_{ext}\sin(\varphi_{inc}) \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

En particulier, l'expression de sa composante selon l'axe z conduit à :

$$\gamma_0 = -k_{ext}\sin(\varphi_{inc}) \tag{2.48}$$

Représentation des vecteurs amplitudes des champs électromagnétiques incidents :



(a) Vecteurs de base dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde incident

(b) Seconde représentation du vecteur d'onde incident

FIG. 2.5 – Définition de l'angle azimutal ψ_{inc}

En imposant une représentation du vecteur d'onde incident, on déduit de ses paramètres l'expression des vecteurs amplitudes $\vec{A}_0^{(inc)}$ des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ incidents selon l'équation (2.43). Toutefois, il est nécessaire d'ajouter un nouveau paramètre qui détermine l'orientation des champs électromagnétiques incidents dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}_{ext}^{(inc)}$, autrement dit leur polarisation. Pour cela, on introduit une base dans ce plan, notée $(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ telle que le trièdre $\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{k}_{ext}^{(inc)}\right)$ soit direct et que $\vec{p}_1$ appartienne au plan $\left(\vec{k}_{ext}^{(inc)}, \vec{e}_z\right)$, comme illustré sur la figure 2.5(a). On définit l'angle noté ψ_{inc}, appelé *angle azimutal*, comme l'angle entre le vecteur amplitude du champ électrique incident $\vec{E}_0^{(inc)}$ et le vecteur de base $\vec{p}_1$ (voir figure 2.5(b)). Les vecteurs amplitudes des champs électrique et magnétique incidents s'écrivent respectivement dans le repère cartésien :

$$\vec{E}_0^{(inc)} = \begin{pmatrix} -\left[\cos(\psi_{inc})\sin(\varphi_{inc})\cos(\theta_{inc}) + \sin(\psi_{inc})\sin(\theta_{inc})\right]\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| \\ \left[\sin(\psi_{inc})\cos(\theta_{inc}) - \cos(\psi_{inc})\sin(\varphi_{inc})\sin(\theta_{inc})\right]\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| \\ \cos(\psi_{inc})\cos(\varphi_{inc})\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

$$\vec{H}_0^{(inc)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Z_{ext}}\left[\cos(\psi_{inc})\sin(\theta_{inc}) - \sin(\psi_{inc})\sin(\varphi_{inc})\cos(\theta_{inc})\right]\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| \\ -\frac{1}{Z_{ext}}\left[\cos(\psi_{inc})\cos(\theta_{inc}) - \sin(\psi_{inc})\sin(\varphi_{inc})\sin(\theta_{inc})\right]\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| \\ -\frac{1}{Z_{ext}}\sin(\psi_{inc})\cos(\varphi_{inc})\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

où Z_{ext} est l'impédance du milieu extérieur :

$$Z_{ext} = \frac{1}{n_{ext}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \tag{2.51}$$

2.2.5 Développements en série de Fourier

Le système opto-géométrique est bi-périodique. On effectue alors successivement un développement en série de Fourier des champs électromagnétiques totaux selon la variable z puis selon la variable θ. Après avoir introduit une notation matricielle de ces développements, on écrit les équations de Maxwell dans l'espace de Fourier en régime harmonique.

Les champs électromagnétiques dans l'espace de Fourier :

On fait tout d'abord l'hypothèse du régime harmonique. Les champs électromagnétiques totaux ont une dépendance temporelle dont la pulsation ω est celle imposée par l'onde incidente et s'écrivent :

$$\vec{\mathbf{A}}(r,\theta,z,t) = \Re e\left[\vec{A}(r,\theta,z,\omega)e^{-i\omega t}\right] \text{ avec } A \in \{E,H\} \tag{2.52}$$

où $\vec{\mathbf{A}}(r,\theta,z,t)$ est le champ électromagnétique réel et $\vec{A}(r,\theta,z,\omega)$ le champ électromagnétique complexe à la pulsation ω. Nous omettrons par la suite la dépendance en ω dans l'écriture des champs complexes.

Les équations de l'électromagnétisme utilisées (équations de Maxwell, relations constitutives des milieux,...) étant linéaires, les champs électromagnétiques totaux peuvent être reliés aux champs incidents par un opérateur linéaire noté "g" et qui dépend uniquement de la surface de diffraction S : $\vec{A}(r,\theta,z) = g\left[\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z)\right]$. Or cette surface est périodique de période d selon l'axe z ; on ne peut donc pas distinguer l'opérateur g en z et en $z+d$. Selon l'expression des champs de l'onde plane incidente (2.43), on déduit alors que : $\vec{A}(r,\theta,z+d) = g\left[\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z+d)\right] = g\left[e^{i\gamma_0 d}\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z)\right] = e^{i\gamma_0 d}g\left[\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z)\right]$. On conclut que :

$$\vec{A}(r,\theta,z+d) = e^{i\gamma_0 d}\vec{A}(r,\theta,z) \text{ avec } A \in \{E,H\} \tag{2.53}$$

Le déphasage $\gamma_0 d$ qui apparaît dans cette expression ne permet pas d'attribuer la propriété de périodicité en z aux champs électromagnétiques totaux mais une propriété de *pseudo-périodicité* en z. En fait, c'est la grandeur $\vec{V}(r,\theta,z) = e^{-i\gamma_0 z}\vec{A}(r,\theta,z)$ qui est périodique selon l'axe z. Finalement, après avoir développé en série de Fourier selon la variable z la grandeur $\vec{V}(r,\theta,z)$, on obtient pour les développements des champs électromagnétiques totaux :

$$\vec{A}(r,\theta,z) = \sum_{m=-M}^{+M} \vec{A}_m(r,\theta)\, e^{i\gamma_m z} \text{ avec } \vec{A} \in \left\{\vec{E},\vec{H}\right\} \tag{2.54}$$

où $\vec{A}_m(r,\theta) = \frac{1}{d}\int_0^d \vec{A}(r,\theta,z)\, e^{-i\gamma_m z}dz$ et

$$\gamma_m = \gamma_0 + m\frac{2\pi}{d} \tag{2.55}$$

Ces développements sont tronqués à l'ordre $M \in \mathbb{N}$ en vue d'une implémentation numérique.

En ce qui concerne la dépendance angulaire θ, la périodicité des champs est intrinsèque au système de repère choisi ; lorsqu'un point M de l'espace effectue une rotation d'angle 2π, il revient exactement au même point de l'espace. Ainsi, on développe en série de Fourier selon la variable θ tous les coefficients $\vec{A}_n(r,\theta)$ de l'expression (2.54). Finalement, les champs électromagnétiques totaux s'expriment par :

$$\vec{A}(r,\theta,z) = \sum_{m=-M}^{+M}\sum_{n=-N}^{+N} \vec{A}_{n,m}(r)\, e^{i(n\theta+\gamma_m z)} \text{ avec } A \in \{E,H\} \tag{2.56}$$

où $\vec{A}_{n,m}(r) = \frac{1}{2\pi d}\int_0^{2\pi}\int_0^d \vec{A}(r,\theta,z)\, e^{-i(n\theta+\gamma_m z)}dzd\theta$ et $N \in \mathbb{N}$ est l'ordre de troncature des développements selon θ.

Nous avons établi la pseudo-périodicité du champ selon z. Désormais, nous nous permettrons un léger abus de language. Le développement des champs donné par (2.56) sera simplement qualifié de développement de Fourier et non de "pseudo-développement en série de Fourier". De même, les coefficients $\vec{A}_{n,m}(r)$ seront désignés de coefficients de Fourier, et non de "pseudo-coefficients de Fourier".

Notation matricielle :

L'ensemble de la théorie va être écrite dans un formalisme matriciel. On introduit alors la matrice colonne suivante, constituée des $(2N+1)(2M+1)$ coefficients de Fourier (2.56) pour chaque composante A du champ électromagnétique :

$$[A] = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{n,m}(r) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Par souci de simplification d'écriture, nous ne précisons pas la dépendance en r de $[A]$.
Il est utile d'exprimer les dérivées partielles de la composante A selon z et θ d'après l'équation (2.56) :

$$\frac{\partial A(r,\theta,z)}{\partial z} = i \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-M}^{+M} \gamma_m A_{n,m}(r)\, e^{i(n\theta+\gamma_m z)} \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial A(r,\theta,z)}{\partial \theta} = i \sum_{m=-M}^{+M} \sum_{n=-N}^{+N} n A_{n,m}(r)\, e^{i(n\theta+\gamma_m z)} \tag{2.59}$$

car elles interviendront dans les équations de Maxwell. On introduit les matrices diagonales α et γ par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \mathbf{0} \\ & \alpha' & & & \\ & & \alpha' & & \\ & & & \alpha' & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha')_{n,m} = n\delta_{nm} \tag{2.60}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \mathbf{0} \\ & \gamma' & & & \\ & & \gamma' & & \\ & & & \gamma' & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ où } (\gamma')_{n,m} = \gamma_n \delta_{nm} \tag{2.61}$$

où δ_{nm} est le symbole Krönecker. Ainsi, les dérivées partielles (2.58) et (2.59) s'écrivent d'après la notation (2.57) :

$$\left[\frac{\partial A}{\partial z}\right] = i\gamma [A] \tag{2.62}$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial \theta}\right] = i\alpha [A] \tag{2.63}$$

Les équations de Maxwell dans l'espace de Fourier :

En prenant en compte l'expression des champs en régime harmonique (2.52) et leurs développements de Fourier selon z et θ (2.56), on réécrit l'équation de Maxwell-Faraday $\left(\vec{rot}\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{0}\right)$:

$$\frac{1}{r}\alpha [E_z] - \gamma [E_\theta] - \omega [B_r] = 0 \tag{2.64}$$

$$i\gamma [E_r] - \frac{d[E_z]}{dr} - i\omega [B_\theta] = 0 \tag{2.65}$$

$$\frac{1}{r}\left([E_\theta]+r\frac{d[E_\theta]}{dr}-i\alpha[E_r]\right)-i\omega[B_z]=0 \tag{2.66}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère $\left(r\vec{o}t\vec{\mathbf{H}}(\vec{r},t)-\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}(\vec{r},t)}{\partial t}=\vec{0}\right)$:

$$\frac{1}{r}\alpha[H_z]-\gamma[H_\theta]+\omega[D_r]=0 \tag{2.67}$$

$$i\gamma[H_r]-\frac{d[H_z]}{dr}+i\omega[D_\theta]=0 \tag{2.68}$$

$$\frac{1}{r}\left([H_\theta]+r\frac{d[H_\theta]}{dr}-i\alpha[H_r]\right)+i\omega[D_z]=0 \tag{2.69}$$

En utilisant le vecteur $\vec{N}$ normal à la surface S au point M, défini précédemment (équation (2.31) et figure 2.2), les conditions de passage des champs à travers la surface S deviennent :

$$\vec{N}\wedge\sigma_{\vec{E}}=\vec{0} \tag{2.70}$$

$$\vec{N}\wedge\sigma_{\vec{H}}=\vec{0} \tag{2.71}$$

$$\vec{N}.\sigma_{\vec{D}}=0 \tag{2.72}$$

$$\vec{N}.\sigma_{\vec{B}}=0 \tag{2.73}$$

où $\sigma_{\vec{A}}$ est le saut du champ $\vec{A}\in\left\{\vec{E},\vec{H},\vec{D},\vec{B}\right\}$ à travers la surface S.

2.3 Relations constitutives des milieux dans l'espace de Fourier tronqué

2.3.1 Principe de la méthode FFF

Le but de la méthode FFF est d'appliquer, dans la zone modulée, les trois règles de factorisation de Li (voir section 1.2.3) énoncées auparavant aux relations constitutives des milieux, écrites dans l'espace de Fourier tronqué. De cette manière, la troncature des développements en série de Fourier est prise en compte dans les équations. Afin d'éviter l'application de la troisième règle (cas défavorable), on utilise les deux premières par décomposition du champ électromagnétique sur le vecteur normal et les vecteurs tangents à la surface de l'objet diffractant. Au préalable, un prolongement de ces derniers vecteurs s'avèrera nécessaire afin de les définir en tout point de la zone modulée (et non plus seulement sur la surface de l'objet). Pour la zone modulée, nous avons vu que les relations constitutives peuvent être écrites sous la forme :

$$\vec{D}(r,\theta,z)=\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta,z)\,\vec{E}(r,\theta,z) \tag{2.74}$$

$$\vec{B}(r,\theta,z)=\tilde{\tilde{\mu}}(r,\theta,z)\,\vec{H}(r,\theta,z) \tag{2.75}$$

selon les tenseurs exprimés dans (2.41) et (2.42). Ces tenseurs peuvent être développés en série de Fourier puisqu'ils sont bi-périodiques selon les variables z (période d) et θ (période 2π). On précise qu'ils ne sont pas pseudo-périodiques mais simplement périodiques selon z, contrairement aux champs électromagnétiques. Nous limitons pour l'instant la discussion à la relation constitutive reliant les champs $\vec{D}$ et $\vec{E}$ (2.74), sachant que les résultats obtenus restent valables pour les propriétés magnétiques des milieux. On cherche à exprimer les coefficients de Fourier de $\vec{D}(r,\theta,z)$ en fonction de ceux de $\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta,z)$ et $\vec{E}(r,\theta,z)$. Les premières versions de la méthode différentielle [53, 54] utilisaient seulement la *règle de Laurent* établie pour des séries, c'est-à-dire des sommes infinies. Cependant, l'implémentation numérique de la méthode nécessite la troncature des séries aux ordres $N\in\mathbb{N}$ et $M\in\mathbb{N}$, ce qui ne rend plus l'utilisation de la règle de Laurent justifiée dans tous les cas, selon les travaux de L. Li [66]. Il a en effet montré que, lorsque les développements de Fourier sont tronqués, il faut tenir compte des discontinuités éventuelles des composantes du champ électromagnétique à travers S (équations (2.70) et (2.72)), mais

également de celles des tenseurs $\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta,z)$. On se rend bien compte de l'utilité de la seconde règle de factorisation puisque la composante normale du champ $\vec{D}(r,\theta,z)$ est continue à travers S (d'après la relation 2.72) alors que $\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta,z)$ et la composante normale du champ $\vec{E}(r,\theta,z)$ (d'après la relation (2.70)) sont discontinues.

2.3.2 Application des règles de factorisation dans les relations constitutives des milieux

L'application des règles de factorisation dans la relation constitutive (2.74) dans la zone modulée et dans l'espace de Fourier, s'effectue en deux étapes principales. Dans un premier temps, nous allons réécrire dans l'espace direct, le champ $\vec{E}(r,\theta,z)$ en fonction de toutes les composantes continues des champs électromagnétiques (ses propres composantes et celles de $\vec{D}(r,\theta,z)$), à l'aide de la relation constitutive (2.74). Ensuite, l'application des nouvelles règles de factorisation au produit $\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta,z)\,\vec{E}(r,\theta,z)$ permettra le passage dans l'espace de Fourier tronqué. Par souci de clarté d'écriture, nous ne préciserons pas dans cette section la dépendance des différentes grandeurs selon les variables d'espace.

Première étape : On étend la définition des vecteurs unitaires $\vec{T_1}$, $\vec{T_1}$ et $\vec{N}$ (équation (2.31) et figure 2.2) à toute la zone modulée. Pour cela, on introduit en tout point (même en dehors de la surface) le triplet vectoriel noté $\left(\vec{\mathbf{T}}_1,\vec{\mathbf{T}}_2,\vec{\mathbf{N}}\right)$ tel que $\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{T}}_2\wedge\vec{\mathbf{T}}_1$. En outre, ces vecteurs doivent vérifier $\vec{\mathbf{T}}_1=\vec{T_1}$, $\vec{\mathbf{T}}_2=\vec{T_2}$ et $\vec{\mathbf{N}}=\vec{N}$ en tout point de la surface S. Ensuite, on décompose en un point quelconque de la zone modulée le champ électrique selon $\vec{\mathbf{T}}_1$ et $\vec{\mathbf{T}}_2$:

$$E_{\mathbf{T}_1}=\vec{\mathbf{T}}_1.\vec{E} \tag{2.76}$$

$$E_{\mathbf{T}_2}=\vec{\mathbf{T}}_2.\vec{E} \tag{2.77}$$

et le champ $\vec{D}$ selon $\vec{\mathbf{N}}$:

$$D_{\mathbf{T}}=\vec{\mathbf{N}}.\vec{D} \tag{2.78}$$

soit $D_{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{N}}.\tilde{\tilde{\epsilon}}\vec{E}$. En notant,

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}=\begin{pmatrix}\epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rz}\\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta z}\\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{z\theta} & \epsilon_{zz}\end{pmatrix} \tag{2.79}$$

et en définissant une généralisation du produit scalaire, notée $\bullet$, entre un vecteur $\vec{A}$ et une matrice M :

$$\vec{A}\bullet M=\begin{pmatrix}A_r\\ A_\theta\\ A_z\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}M_{rr} & M_{r\theta} & M_{rz}\\ M_{\theta r} & M_{\theta\theta} & M_{\theta z}\\ M_{zr} & M_{z\theta} & M_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_rM_{rr}+A_\theta M_{\theta r}+A_zM_{zr}\\ A_rM_{r\theta}+A_\theta M_{\theta\theta}+A_zM_{z\theta}\\ A_rM_{rz}+A_\theta M_{\theta z}+A_zM_{zz}\end{pmatrix} \tag{2.80}$$

la composante normale de $\vec{D}$ s'écrit :

$$D_{\mathbf{N}}=\left(\vec{\mathbf{N}}\bullet\tilde{\tilde{\epsilon}}\right).\vec{E} \tag{2.81}$$

On introduit la colonne $\vec{F_\epsilon}$ constituée des composantes continues à travers S des champs $\vec{D}$ et $\vec{E}$:

$$\vec{F_\epsilon}=\begin{pmatrix}E_{\mathbf{T}_1}\\ D_{\mathbf{N}}\\ E_{\mathbf{T}_2}\end{pmatrix} \tag{2.82}$$

D'après les équations (2.76), (2.77) et (2.81), on montre alors que le vecteur $\vec{F_\epsilon}$ est relié à $\vec{E}$ par la relation

$$\vec{F_\epsilon}=A_\epsilon\vec{E} \tag{2.83}$$

avec

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{1r} & \mathbf{T}_{1\theta} & \mathbf{T}_{1z} \\ \left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right)_r & \left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right)_\theta & \left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right)_z \\ \mathbf{T}_{2r} & \mathbf{T}_{2\theta} & \mathbf{T}_{2z} \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

d'où on déduit l'expression du champ électrique $\vec{E}$ par inversion de la matrice A_ϵ :

$$\vec{E} = C_\epsilon \vec{F}_\epsilon \text{ avec } C_\epsilon = \frac{1}{\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right).\vec{\mathbf{N}}} \begin{pmatrix} \left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2\right]_r & \mathbf{N}_r & -\left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1\right]_r \\ \left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2\right]_\theta & \mathbf{N}_\theta & -\left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1\right]_\theta \\ \left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2\right]_z & \mathbf{N}_z & -\left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1\right]_z \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

Seconde étape : Grâce à cette dernière équation, on peut exprimer le champ $\vec{D}$ en fonction des composantes continues à travers S du champ électromagnétique : $\vec{D} = \tilde{\tilde{\epsilon}}\vec{E} = \tilde{\tilde{\epsilon}} C_\epsilon \vec{F}_\epsilon$. Par définition, $\vec{F}_\epsilon$ est continu à travers S mais $\tilde{\tilde{\epsilon}} C_\epsilon$ est discontinu. Par application de la première règle de factorisation, on trouve alors : $\left[\vec{D}\right] = \left[\!\left[\tilde{\tilde{\epsilon}} C_\epsilon\right]\!\right] \left[\vec{F}_\epsilon\right]$ à l'aide d'une notation généralisée des équations (1.1) et (2.57) :

$$\left[\vec{A}\right] = \begin{pmatrix} [A_r] \\ [A_\theta] \\ [A_z] \end{pmatrix} \text{ et } \left[\!\left[M\right]\!\right] = \begin{pmatrix} \left[\!\left[M_{11}\right]\!\right] & \left[\!\left[M_{12}\right]\!\right] & \left[\!\left[M_{13}\right]\!\right] \\ \left[\!\left[M_{21}\right]\!\right] & \left[\!\left[M_{22}\right]\!\right] & \left[\!\left[M_{23}\right]\!\right] \\ \left[\!\left[M_{31}\right]\!\right] & \left[\!\left[M_{32}\right]\!\right] & \left[\!\left[M_{33}\right]\!\right] \end{pmatrix}$$

On sait que $\vec{F}_\epsilon = A_\epsilon \vec{E}$ et que le vecteur $\vec{F}_\epsilon$ est continu à travers S ; la matrice A_ϵ est discontinue puisqu'elle contient le tenseur $\tilde{\tilde{\epsilon}}$. On applique donc la deuxième règle de factorisation à la relation (2.83) pour obtenir $[F_\epsilon] = \left[\!\left[A_\epsilon^{-1}\right]\!\right]^{-1} \left[\vec{E}\right] = \left[\!\left[C_\epsilon\right]\!\right]^{-1} \left[\vec{E}\right]$. On conclut alors que :

$$\left[\vec{D}\right] = Q_\epsilon \left[\vec{E}\right] \tag{2.86}$$

avec

$$Q_\epsilon = \left[\!\left[\tilde{\tilde{\epsilon}} C_\epsilon\right]\!\right] \left[\!\left[C_\epsilon\right]\!\right]^{-1} \tag{2.87}$$

Cette expression devient la relation constitutive reliant $\vec{E}$ à $\vec{D}$ dans l'espace de Fourier tronqué et dans la zone modulée. Elle est écrite en tenant compte à la fois de la troncature des développements de Fourier mais également des discontinuités des paramètres opto-géométriques à travers la surface de diffraction.

En appliquant très rigoureusement les mêmes étapes à la relation constitutive reliant $\vec{B}$ à $\vec{H}$, on obtient alors :

$$\left[\vec{B}\right] = Q_\mu \left[\vec{H}\right] \tag{2.88}$$

avec

$$Q_\mu = \left[\!\left[\tilde{\tilde{\mu}} C_\mu\right]\!\right] \left[\!\left[C_\mu\right]\!\right]^{-1} \tag{2.89}$$

et

$$C_\mu = \frac{1}{\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right).\vec{\mathbf{N}}} \begin{pmatrix} \left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2\right]_r & \mathbf{N}_r & -\left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1\right]_r \\ \left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2\right]_\theta & \mathbf{N}_\theta & -\left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1\right]_\theta \\ \left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2\right]_z & \mathbf{N}_z & -\left[\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\mu}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1\right]_z \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

Les matrices Q_ϵ et Q_μ ont pour dimension $3(2N+1)(2M+1) \times 3(2N+1)(2M+1)$.

Avant d'insérer ces nouvelles relations dans les équations de Maxwell, nous allons voir comment effectuer les prolongements des vecteurs $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{N}$ en tout point de la zone modulée.

2.3.3 Prolongements des vecteurs unitaires normaux et tangents en dehors de la surface de diffraction

On se propose dans cette section de décrire les prolongements à la zone modulée des vecteurs $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{N}$, autrement dit, de définir les vecteurs $\vec{\mathbf{T}}_1$, $\vec{\mathbf{T}}_2$ et $\vec{\mathbf{N}}$ en tout point de cette région de l'espace. Connaissant l'équation $f_S(r,\theta,z)=0$ de la surface, le vecteur normal est donné par :

$$\vec{N}(\theta,z)=\frac{\left(\frac{\partial f_S}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f_S}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_S}{\partial z}\vec{e}_z\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_S}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial f_S}{\partial z}\right)^2}} \tag{2.91}$$

où les dérivées sont calculées en $f_S(r,\theta,z)=0$. On impose $\vec{T}_1$ dans le plan défini par $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$. Il dépend des composantes de $\vec{N}$:

$$\vec{T}_1=\frac{N_\theta\vec{e}_r-N_r\vec{e}_\theta}{\sqrt{N_r^2+N_\theta^2}} \tag{2.92}$$

et selon l'équation (2.31), on déduit que :

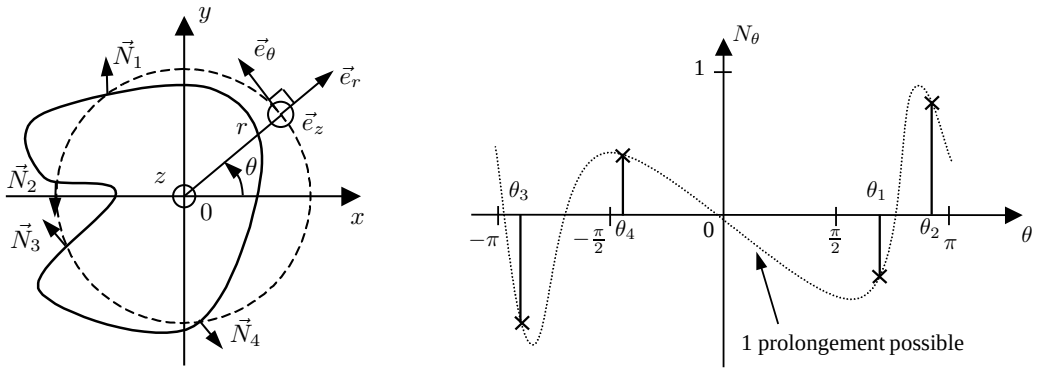
$$\vec{T}_2=\frac{N_rN_z\vec{e}_r-N_\theta N_z\vec{e}_\theta+\left(N_\theta^2+N_r^2\right)\vec{e}_z}{\sqrt{N_r^2+N_\theta^2}} \tag{2.93}$$

Si on se place sur un cylindre circulaire (centré sur l'origine) de rayon r, leurs prolongements peuvent être représentés par des fonctions de θ et z. Mais, elles sont définies uniquement aux points d'intersection entre ce cylindre et la surface S (voir figures 2.6(a) et 2.6(b)). Or, on sait que ce type de fonctions (à supports nuls) ne peuvent pas être développées en série de Fourier. En fait, on montre qu'il est possible d'étendre leurs définitions dans tout l'espace (et en particulier dans la zone modulée) afin de les rendre développables en série de Fourier, avec pour seule condition qu'elles décrivent bien les vecteurs aux points où ces derniers sont définis sur la surface S. En considérant, pour simplifier, le cas d'une surface S invariante selon z (vecteur $\vec{N}$ contenu dans le plan de section droite), les figures 2.6(a) et 2.6(b) illustrent la composante N_θ en tant que fonction de θ définie par quatre points sur la surface S en r. Un prolongement purement arbitraire y est proposé, sur lequel pourra s'effectuer un développement en série de Fourier. Le choix arbitraire du prolongement permet de pouvoir prendre des fonctions aisément développables en série de Fourier (comme des fonctions créneaux, par exemple), mais qui présentent souvent des discontinuités, ce qui engendre une imprécision due au phénomène de Gibbs : les spectres de Fourier de ces fonctions sont généralement assez "étalés". On tente alors de placer ces discontinuités les plus loin possible des points de définition du vecteur considéré sur S. De ce fait, on cherche plutôt des prolongements avec des fonctions n fois dérivables sur $[-\pi,\pi]$ (l'idéal étant des fonctions infiniment dérivables). Mais ces fonctions deviennent pour la plupart plus difficiles à développer analytiquement en série de Fourier ; il est même parfois nécessaire d'utiliser un algorithme de FFT ("Fast Fourier Transform").

Ce procédé de prolongement n'est pas unique ; il existe d'autres techniques de prolongement. En particulier, on peut exploiter les relations de définition du vecteur normal (2.91) et des vecteurs tangentiels (équations (2.92) et (2.93)). En effet, l'expression de $\vec{N}$ d'après la relation (2.91) dépend des coordonnées (r,θ,z) d'un point M se trouvant sur la surface S, c'est-à-dire tel que ses coordonnées (r,θ,z) soient reliées par l'équation de la surface S $f_S(r,\theta,z)=0$. Il suffit alors de prendre comme prolongement cette définition mais avec des variables (r,θ,z) indépendantes : le point M peut se déplacer dans tout l'espace. Par conséquent, on utilise l'équation suivante dont les définitions des variables (r,θ,z) sont restreintes à la zone modulée :

$$\vec{\mathbf{N}}(r,\theta,z)=\frac{\left(\frac{\partial f_S}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f_S}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_S}{\partial z}\vec{e}_z\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_S}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial f_S}{\partial z}\right)^2}} \text{ avec } \begin{cases} r\in[R_{min},R_{max}] \\ \theta\in[0,2\pi] \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.94}$$

Les vecteurs tangentiels se déduisent selon les équations (2.92) et (2.93) appliquées aux vecteurs $\vec{\mathbf{T}}_1$ et $\vec{\mathbf{T}}_2$. En fait, l'équation de la surface $f_S(r,\theta,z)=0$ prend souvent la forme $r=g_S(\theta,z)$ soit $f_S(r,\theta,z)=$



(a) Intersection entre la surface de diffraction S et un cylindre circulaire de rayon fixé

(b) Fonction décrite par N_θ en fonction de θ sur le cylindre de rayon r (définie initialement en 4 points) et prolongement possible pour cette fonction

FIG. 2.6 – Exemple de prolongement de N_θ dans le cas d'une surface S invariante selon z

$r - g_S(\theta, z)$. Si on l'introduit dans l'équation précédente (2.94), le vecteur normal $\vec{\mathbf{N}}$ ne dépend alors plus de r, ce qui pourra présenter certains avantages comme nous le verrons plus loin.

Quelle que soit la méthode choisie pour le prolongement des vecteurs normaux et tangents à la surface S, on s'efforce qu'ils restent continus en leurs points de définition sur S.

2.4 Système différentiel dans l'espace de Fourier tronqué

Il nous reste désormais à introduire les nouvelles relations (2.86) et (2.88) dans les équations de Maxwell écrites dans l'espace de Fourier (équations (2.64) à (2.69)). Grâce à toutes ces équations reliant les quatre champs électromagnétiques $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{H}$, il suffit d'en connaître deux pour en déduire les deux autres. On choisit de conserver le couple de vecteur $\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$. En outre, la détermination des coefficients de Fourier des six composantes (dans le repère cylindrique) de ce couple de champs électromagnétiques se réduit en un système linéaire d'équations différentielles vérifiées par les coefficients de quatre de ces composantes. Les équations obtenues seront ensuite réécrites d'après un formalisme matriciel.

2.4.1 Insertion des nouvelles règles de factorisation dans les équations de Maxwell

Nous allons établir un système différentiel reliant les coefficients de Fourier de quatre composantes des champs électromagnétiques $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Cependant, une fois ce système différentiel intégré (numériquement) à travers la zone modulée, on sait qu'il va falloir raccorder les champs intégrés avec ceux des régions homogènes. En fait, on applique les conditions de passage des champs à travers les cylindres circulaires fictifs C_{min} et C_{max} (de rayons respectifs R_{min} et R_{max}), ce qui explique le choix des quatre composantes continues E_z, E_θ, H_z et H_θ. Plus précisément, les conditions de passage (équations (2.70) et (2.71)), qui doivent réellement s'appliquer pour les points de la surface S tangents aux cylindres C_{min} et C_{max}, contraignent à ce choix.

Expression des coefficients de Fourier des composantes radiales de $\vec{E}$ et $\vec{H}$:

On introduit la notation suivante :

$$Q_\epsilon = \begin{pmatrix} Q_{\epsilon,rr} & Q_{\epsilon,r\theta} & Q_{\epsilon,rz} \\ Q_{\epsilon,\theta r} & Q_{\epsilon,\theta\theta} & Q_{\epsilon,\theta z} \\ Q_{\epsilon,zr} & Q_{\epsilon,z\theta} & Q_{\epsilon,zz} \end{pmatrix} \text{ et } Q_\mu = \begin{pmatrix} Q_{\mu,rr} & Q_{\mu,r\theta} & Q_{\mu,rz} \\ Q_{\mu,\theta r} & Q_{\mu,\theta\theta} & Q_{\mu,\theta z} \\ Q_{\mu,zr} & Q_{\mu,z\theta} & Q_{\mu,zz} \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

D'après la relation (2.86), on peut écrire que :

$$[D_r] = Q_{\epsilon,rr}\,[E_r] + Q_{\epsilon,r\theta}\,[E_\theta] + Q_{\epsilon,rz}\,[E_z] \tag{2.96}$$

$$[D_\theta] = Q_{\epsilon,\theta r}\,[E_r] + Q_{\epsilon,\theta\theta}\,[E_\theta] + Q_{\epsilon,\theta z}\,[E_z] \tag{2.97}$$

$$[D_z] = Q_{\epsilon,zr}\,[E_r] + Q_{\epsilon,z\theta}\,[E_\theta] + Q_{\epsilon,zz}\,[E_z] \tag{2.98}$$

De même, selon la relation (2.88), on a :

$$[B_r] = Q_{\mu,rr}\,[H_r] + Q_{\mu,r\theta}\,[H_\theta] + Q_{\mu,rz}\,[H_z] \tag{2.99}$$

$$[B_\theta] = Q_{\mu,\theta r}\,[H_r] + Q_{\mu,\theta\theta}\,[H_\theta] + Q_{\mu,\theta z}\,[H_z] \tag{2.100}$$

$$[B_z] = Q_{\mu,zr}\,[H_r] + Q_{\mu,z\theta}\,[H_\theta] + Q_{\mu,zz}\,[H_z] \tag{2.101}$$

En insérant l'équation (2.67) dans la relation (2.96), on en déduit les coefficients de Fourier de la composante radiale de $\vec{E}$:

$$[E_r] = Q^{-1}_{\epsilon,rr}\left(\frac{\gamma}{\omega}\,[H_\theta] - \frac{\alpha}{r\omega}\,[H_z] - Q_{\epsilon,r\theta}\,[E_\theta] - Q_{\epsilon,rz}\,[E_z]\right) \tag{2.102}$$

De même, en insérant l'équation (2.64) dans la relation (2.99), on en déduit les coefficients de Fourier de la composante radiale de $\vec{H}$:

$$[H_r] = Q^{-1}_{\mu,rr}\left(\frac{\alpha}{r\omega}\,[E_z] - \frac{\gamma}{\omega}\,[E_\theta] - Q_{\mu,r\theta}\,[H_\theta] - Q_{\mu,rz}\,[H_z]\right) \tag{2.103}$$

Expression des dérivées selon r des développements des composantes de $\vec{E}$ et $\vec{H}$:
En injectant les relations (2.102), (2.103) et (2.100) dans l'équation (2.65), on obtient :

$$\begin{array}{c}\frac{d[E_z]}{dr} = i\left(Q_{\mu,\theta r}Q^{-1}_{\mu,rr}\gamma - \gamma Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,r\theta}\right)[E_\theta] - i\left(\gamma Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,rz} + Q_{\mu,\theta r}Q^{-1}_{\mu,rr}\frac{\alpha}{r}\right)[E_z] \\ +i\left(\frac{\gamma}{\omega}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\gamma + \omega Q_{\mu,\theta r}Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,r\theta} - \omega Q_{\mu,\theta\theta}\right)[H_\theta] + i\left(\omega Q_{\mu,\theta r}Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,rz} - \gamma Q^{-1}_{\epsilon,rr}\frac{\alpha}{r\omega} - \omega Q_{\mu,\theta z}\right)[H_z]\end{array} \tag{2.104}$$

De même, en injectant les relations (2.102), (2.103) et (2.101) dans l'équation (2.66), on obtient :

$$\begin{array}{c}\frac{d[E_\theta]}{dr} = i\left(\frac{i}{r}I_d - \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,r\theta} - Q_{\mu,zr}Q^{-1}_{\mu,rr}\gamma\right)[E_\theta] + i\left(Q_{\mu,zr}Q^{-1}_{\mu,rr}\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,rz}\right)[E_z] \\ +i\left(\omega Q_{\mu,z\theta} - \omega Q_{\mu,zr}Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,r\theta} + \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\frac{\gamma}{\omega}\right)[H_\theta] + i\left(\omega Q_{\mu,zz} - \omega Q_{\mu,zr}Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,rz} - \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\frac{\alpha}{r\omega}\right)[H_z]\end{array} \tag{2.105}$$

Les relations (2.102), (2.103) et (2.97) dans l'équation (2.68) donnent :

$$\begin{array}{c}\frac{d[H_z]}{dr} = i\left(Q_{\epsilon,\theta r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\gamma - \gamma Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,r\theta}\right)[H_\theta] - i\left(\gamma Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,rz} + Q_{\epsilon,\theta r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\frac{\alpha}{r}\right)[H_z] \\ +i\left(\omega Q_{\epsilon,\theta\theta} - \gamma Q^{-1}_{\mu,rr}\frac{\gamma}{\omega} - \omega Q_{\epsilon,\theta r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,r\theta}\right)[E_\theta] + i\left(\gamma Q^{-1}_{\mu,rr}\frac{\alpha}{r\omega} - \omega Q_{\epsilon,\theta r}Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,rz} + \omega Q_{\epsilon,\theta z}\right)[E_z]\end{array} \tag{2.106}$$

Les relations (2.102), (2.103) et (2.98) dans l'équation (2.69) donnent :

$$\begin{array}{c}\frac{d[H_\theta]}{dr} = i\left(\frac{i}{r}I_d - Q_{\epsilon,zr}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\gamma - \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,r\theta}\right)[H_\theta] + i\left(Q_{\epsilon,zr}Q^{-1}_{\epsilon,rr}\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\mu,rr}Q_{\mu,rz}\right)[H_z] \\ +i\left(\omega Q_{\epsilon,zr}Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,r\theta} - \omega Q_{\epsilon,z\theta} - \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\mu,rr}\frac{\gamma}{\omega}\right)[E_\theta] + i\left(\omega Q_{\epsilon,zr}Q^{-1}_{\epsilon,rr}Q_{\epsilon,rz} - \omega Q_{\epsilon,zz} + \frac{\alpha}{r}Q^{-1}_{\mu,rr}\frac{\alpha}{r\omega}\right)[E_z]\end{array} \tag{2.107}$$

2.4.2 Ecriture matricielle du système différentiel à résoudre dans la zone modulée

Les quatre relations (2.104) à (2.107) constituent un ensemble de 4(2N+1)(2M+1) équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients non constants (facteurs en $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ et dépendance arbitraire des matrices Q_ϵ et Q_μ selon r) dans l'espace de Fourier tronqué. La matrice colonne $[F(r)]$ (on précise dans cette notation la dépendance selon r) contenant les coefficients de Fourier des composantes tangentielles E_θ, E_z, H_θ et E_z est définie par :

$$[F(r)] = \begin{pmatrix} [E_\theta] \\ [E_z] \\ [H_\theta] \\ [H_z] \end{pmatrix} \tag{2.108}$$

On peut alors écrire les équations (2.104) à (2.107) sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\left[F(r)\right]}{dr} = i\mathcal{M}(r)\left[F(r)\right] \tag{2.109}$$

où la matrice $\mathcal{M}(r)$, dite *matrice du système différentiel* ou encore *matrice d'intégration*, dépend seulement de la variable r :

$$\mathcal{M}(r) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & \mathcal{M}_{14} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & \mathcal{M}_{24} \\ \mathcal{M}_{31} & \mathcal{M}_{32} & \mathcal{M}_{33} & \mathcal{M}_{34} \\ \mathcal{M}_{41} & \mathcal{M}_{42} & \mathcal{M}_{43} & \mathcal{M}_{44} \end{pmatrix} \tag{2.110}$$

avec :

$$\begin{array}{l|l}
\mathcal{M}_{11} = \frac{i}{r} I_d - \frac{\alpha}{r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} - Q_{\mu,zr} Q_{\mu,rr}^{-1} \gamma & \mathcal{M}_{12} = Q_{\mu,zr} Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,rz} \\
\mathcal{M}_{13} = \omega Q_{\mu,z\theta} - \omega Q_{\mu,zr} Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,r\theta} + \frac{\alpha}{r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\gamma}{\omega} & \mathcal{M}_{14} = \omega Q_{\mu,zz} - \omega Q_{\mu,zr} Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,rz} - \frac{\alpha}{r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r\omega} \\
\mathcal{M}_{21} = Q_{\mu,\theta r} Q_{\mu,rr}^{-1} \gamma - \gamma Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} & \mathcal{M}_{22} = -\gamma Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,rz} + Q_{\mu,\theta r} Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r} \\
\mathcal{M}_{23} = \frac{\gamma}{\omega} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \gamma + \omega Q_{\mu,\theta r} Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,r\theta} - \omega Q_{\mu,\theta\theta} & \mathcal{M}_{24} = \omega Q_{\mu,\theta r} Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,rz} - \gamma Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r\omega} - \omega Q_{\mu,\theta z} \\
\mathcal{M}_{31} = \omega Q_{\epsilon,zr} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} - \omega Q_{\epsilon,z\theta} - \frac{\alpha}{r} Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\gamma}{\omega} & \mathcal{M}_{32} = \omega Q_{\epsilon,zr} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,rz} - \omega Q_{\epsilon,zz} + \frac{\alpha}{r} Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r\omega} \\
\mathcal{M}_{33} = \frac{i}{r} I_d - Q_{\epsilon,zr} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \gamma - \frac{\alpha}{r} Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,r\theta} & \mathcal{M}_{34} = Q_{\epsilon,zr} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,rz} \\
\mathcal{M}_{41} = \omega Q_{\epsilon,\theta\theta} - \gamma Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\gamma}{\omega} - \omega Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} & \mathcal{M}_{42} = \gamma Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r\omega} - \omega Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,rz} + \omega Q_{\epsilon,\theta z} \\
\mathcal{M}_{43} = Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \gamma - \gamma Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,r\theta} & \mathcal{M}_{44} = -\gamma Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,rz} - Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r}
\end{array}$$

La matrice identité est notée I_d et la matrice $\mathcal{M}(r)$ a pour dimension $4(2N+1)(2M+1) \times 4(2N+1)(2M+1)$.

De même, en définissant la matrice colonne $[F_r(r)]$ contenant les coefficients de Fourier des composantes radiales E_r et H_r :

$$[F_r(r)] = \begin{pmatrix} [E_r] \\ [H_r] \end{pmatrix} \tag{2.111}$$

les relations (2.102) et (2.103) s'écrivent :

$$[F_r(r)] = \mathcal{M}_r(r)\left[F(r)\right] \tag{2.112}$$

avec

$$\mathcal{M}_r(r) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{r,11} & \mathcal{M}_{r,12} & \mathcal{M}_{r,13} & \mathcal{M}_{r,14} \\ \mathcal{M}_{r,21} & \mathcal{M}_{r,22} & \mathcal{M}_{r,23} & \mathcal{M}_{r,24} \end{pmatrix} \tag{2.113}$$

où :

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\mathcal{M}_{r,11} = -Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} & \mathcal{M}_{r,12} = -Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,rz} & \mathcal{M}_{r,13} = Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\gamma}{\omega} & \mathcal{M}_{r,14} = -Q_{\epsilon,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r\omega} \\
\mathcal{M}_{r,21} = -Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\gamma}{\omega} & \mathcal{M}_{r,22} = Q_{\mu,rr}^{-1} \frac{\alpha}{r\omega} & \mathcal{M}_{r,23} = -Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,r\theta} & \mathcal{M}_{r,24} = -Q_{\mu,rr}^{-1} Q_{\mu,rz}
\end{array}$$

La matrice $\mathcal{M}_r(r)$ a pour dimension $2(2N+1)(2M+1) \times 4(2N+1)(2M+1)$.

Pour résumer, nous avons obtenu le système différentiel linéaire du premier ordre (2.109) qui régit, par construction, le comportement électromagnétique de la structure diffractante uniquement dans la zone modulée. La principale différence que l'on peut observer entre ces équations écrites en coordonnées cylindriques et celles déterminées initalement en coordonnées cartésiennes (voir page 106 de la référence [56]), est la présence de termes en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$. En coordonnées cartésiennes, la dépendance en y (selon l'axe d'intégration, équivalent à r en coordonnées cylindriques) de la matrice $\mathcal{M}(y)$ n'intervient qu'à travers les matrices Q_ϵ et Q_μ. Le système différentiel (2.109) doit être intégré selon la variable radiale r, depuis le cylindre circulaire C_{min} de rayon $r = R_{min}$ jusqu'au cylindre circulaire C_{max} de rayon $r = R_{max}$. On se rend alors bien compte que la singularité au point d'origine des termes en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ (dans les matrices $\mathcal{M}(r)$ et $\mathcal{M}_r(r)$), nous contraint à ne pas prendre des valeurs de R_{min} trop petites. Dans le cas contraire, on risque d'engendrer des termes divergents qui pourront devenir une source de contamination numérique lors de l'intégration du système différentiel.

CONCLUSION DU CHAPITRE Dans ce chapitre, nous avons établi, dans le système de coordonnées cylindriques, les équations de base de la méthode différentielle dans un formalisme général, à savoir pour une structure diffractante cylindrique remplie de milieux inhomogènes et anisotropes. Les dépendances explicites du champ électromagnétique total (régime harmonique et développements

de Fourier d'après les périodicités en θ et z) ont été exploitées pour obtenir un système différentiel du premier ordre vérifié par les coefficients de Fourier de ce champ. Tenant compte des améliorations apportées par la méthode FFF, ce système différentiel est écrit pour une région bornée de l'espace contenant la surface diffractante (zone modulée). La résolution complète du problème de diffraction nécessite la connaissance explicite des champs électromagnétiques dans les deux régions homogènes (int) et (ext). Il s'agit ici, comme dans la plupart des problèmes de l'électromagnétisme, d'un problème aux conditions aux limites : les valeurs des constantes d'intégration (les inconnues du problème) dans plusieurs régions de l'espace sont déterminées par application de conditions (souvent des conditions de continuité) aux frontières entre ces régions. Les champs se propageant dans la région extérieure (ext) peuvent s'exprimer explicitement dès lors que sont imposés les caractères homogène et isotrope des milieux. Par contre, dans le cas d'une surface diffractante contenant l'origine du repère (voir figure 2.3(a)), le milieu de la région intérieure (int) est celui du matériau du cylindre. Ainsi, si ce milieu est inhomogène et anisotrope comme nous en avons fait l'hypothèse dans cette partie, on ne peut alors pas connaître, a priori, l'expression des champs qui s'y propagent. Nous décrivons dans le chapitre 5 une nouvelle théorie qui permet de les connaître pour des milieux homogènes et anisotropes. Nous nous sommes d'abord intéressés au cas le plus fréquent de surfaces cylindriques remplies de milieux homogènes et isotropes. Ensuite, nous limiterons l'étude à des milieux diélectriques ou conducteurs : on les considère alors non magnétiques. La résolution complète et numérique du problème de diffraction est traitée dans le prochain chapitre. Nous ne considérerons pas, dans le reste du manuscrit, d'objets cylindriques présentant une périodicité selon l'axe z, en raison de la complexité géométrique et peu fréquemment rencontrée de ce genre de structure. Les milieux et la surface de diffraction seront supposés invariants selon z (les génératrices deviennent des droites). Cependant, selon de récents travaux [91], l'ajout de PML (Perfectly Matched Layer) [33] sur les parois perpendiculaires à l'axe du cylindre de la cellule périodique qui contient l'objet cylindrique permettrait de modéliser un unique objet tridimensionnel (par absorption des ondes réfléchies sur ces parois). On établirait alors un autre formalisme de la méthode différentielle, pour la modélisation d'un unique objet tridimensionnel, que celui traité dans les articles [79, 80, 81] (en coordonnées sphériques). On pourrait également concevoir l'étude de cylindres de longueur finie.

Chapitre 3

Diffraction conique par des systèmes invariants selon l'axe z et à milieux homogènes et isotropes

Sommaire

3.1 Présentation du problème 46
3.1.1 Hypothèses et conséquences 46
3.1.2 La matrice d'intégration dans la zone modulée 48
3.1.3 Expression des champs dans les régions homogènes et isotropes 50
3.2 Algorithme de propagation de la matrice T 56
3.2.1 Les matrices de transmission de la zone modulée 57
3.2.2 Résolution du problème de diffraction 59
3.2.3 Matrice de transmission d'une couche homogène et isotrope 60
3.3 Algorithme de propagation de la matrice S 62
3.3.1 Problèmes de contamination numérique 62
3.3.2 Description de l'algorithme 64
3.3.3 Généralisation à des systèmes multicouches 66
3.4 Implémentation de la méthode différentielle 67
3.4.1 Structure et algorithme du programme 67
3.4.2 Section efficace différentielle et théorème optique 69
3.4.3 Cartes de champs diffractés 70
3.5 Application numérique au cas du cylindre circulaire 74
3.5.1 Notes sur la présentation des résultats 74
3.5.2 Cylindre circulaire centré sur l'origine 75
3.5.3 Cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine 76
3.5.4 Nécessité de l'algorithme S 84
3.5.5 Comparaison entre la méthode FFF et la méthode classique 87
3.5.6 Influence du prolongement de $\vec{N}$ dans la méthode FFF 90

L'hypothèse d'un objet cylindrique invariant selon son axe (l'axe z) et composé de milieux homogènes et isotropes permet de simplifier considérablement l'expression du système différentiel, obtenu à la fin du chapitre précédent, que satisfait le champ électromagnétique dans la zone modulée. Dans ce chapitre, la théorie différentielle est développée pour le cas de la diffraction conique (direction de l'onde plane incidente hors du plan de section principale). A l'issue de ce chapitre, nous saurons résoudre complètement le problème de diffraction à l'aide de la méthode différentielle, pour un objet cylindrique de génératrices rectilignes de section arbitraire, rempli de milieux homogènes et isotropes, et éclairé par

une onde plane monochromatique. Tout d'abord, nous verrons brièvement quelles sont les conséquences de ces hypothèses sur les équations obtenues précédemment. Nous détaillerons la nécessité de prendre en compte l'algorithme de propagation de la matrice S dans la résolution numérique du problème de diffraction. Enfin, la théorie sera illustrée par quelques résultats numériques qui la valideront, et qui mettront en évidence l'amélioration apportée par la méthode FFF par rapport à la version antérieure de la méthode différentielle.

3.1 Présentation du problème

3.1.1 Hypothèses et conséquences

Le type de système diffractant qui nous intéresse ici représente un cas particulier du système plus général considéré dans le chapitre précédent. Les hypothèses vont alors être formulées explicitement et nous verrons leurs conséquences sur les équations obtenues auparavant, en particulier sur le système différentiel à résoudre dans la zone modulée.

Enoncé des hypothèses :

Les hypothèses que nous ajoutons ici aux précédentes (voir section 2.2) sont :

1. *La surface diffractante (f_S, g_S, $\vec{N}$, $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$) ainsi que les grandeurs caractéristiques des milieux de l'objet diffractant ($\tilde{\tilde{\epsilon}}_{int}$ et $\tilde{\tilde{\mu}}_{int}$) sont supposées invariantes selon z.*
   Autrement dit, la période en z de l'objet tend vers l'infini ($d \to +\infty$) et les génératrices deviennent des droites parallèles à l'axe z. On déduit alors que toutes les grandeurs opto-géométriques (et non les champs électromagnétiques) sont indépendantes de z. La définition du vecteur normal en un point de la surface S par le gradient (2.91) s'écrit :

$$\vec{N}(\theta) = \frac{\left(\frac{\partial f_S}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f_S}{\partial \theta}\vec{e}_\theta\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_S}{\partial \theta}\right)^2}} \tag{3.1}$$

   où les dérivées sont prises en $f_S(r,\theta) = 0$ et les vecteurs tangents $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ (relations (2.92) et (2.93)) se réduisent à :

$$\vec{T}_1 = N_\theta \vec{e}_r - N_r \vec{e}_\theta \tag{3.2}$$

$$\vec{T}_2 = \vec{e}_z \tag{3.3}$$

2. *Les milieux intérieurs à la surface de diffraction sont homogènes et isotropes (ils peuvent toujours être conducteurs) et non magnétiques.*
   Cette hypothèse simplifie grandement les équations puisque tous les tenseurs s'identifient à des nombres ou à des fonctions complexes. Ainsi, on a :

$$\tilde{\tilde{\mu}}_{int} = \tilde{\tilde{\mu}}(r,\theta) = \mu_0 I_d \tag{3.4}$$

   et les tenseurs de permittivité se réduisent à :

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\epsilon}}_{int} &= \epsilon_{int} I_d \\ \tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta) &= \epsilon(r,\theta) I_d \end{aligned} \tag{3.5}$$

   où les fonctions $\tilde{\tilde{\mu}}(r,\theta)$ et $\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta)$ sont les tenseurs dans la zone modulée (relations (2.41) et (2.42)).

Source lumineuse :

L'onde incidente introduite dans la section 2.2.4 reste la même. Nous allons seulement expliciter l'expression du champ électromagnétique donnée par la relation (2.43). En considérant la seconde représentation du vecteur d'onde incident (voir figure 2.4(b)) et d'après la définition de γ_0 (2.45), de $k_{t,ext}$ (2.46) et en omettant, pour simplifier, le terme temporel harmonique $e^{-i\omega t}$, l'équation (2.43) devient :

$\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z) = \vec{A}_0^{(inc)} e^{i\gamma_0 z} e^{-ik_{t,ext} r[\cos(\theta)\cos(\theta_{inc})+\sin(\theta)\sin(\theta_{inc})]}$
soit $\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z) = \vec{A}_0^{(inc)} e^{i\gamma_0 z} e^{-ik_{t,ext} r\cos(\theta-\theta_{inc})}$
Finalement, on obtient :

$$\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z) = \vec{A}_0^{(inc)} e^{i\gamma_0 z} e^{ik_{t,ext} r\cos(\theta-\theta_{inc}-\pi)} \tag{3.6}$$

Ce dernier terme peut être réécrit en utilisant la formule suivante, déduite des développements de Neumann d'une fonction en série de Bessel (page 363 de la référence [92] et page 514 de la référence [93]) :

$$e^{i\rho\cos(\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{in\zeta} J_n(\rho) \tag{3.7}$$

On obtient finalement, en tenant compte de la troncature, les développements en série de Fourier-Bessel du champ électrique et de l'excitation magnétique de l'onde plane incidente :

$$\vec{E}^{(inc)}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{n=-N}^{+N} \vec{E}_0^{(inc)} e^{-in(\theta_{inc}+\pi)} i^n J_n(k_{t,ext} r) e^{in\theta} \tag{3.8}$$

$$\vec{H}^{(inc)}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{n=-N}^{+N} \vec{H}_0^{(inc)} e^{-in(\theta_{inc}+\pi)} i^n J_n(k_{t,ext} r) e^{in\theta} \tag{3.9}$$

On remarque que le champ incident se développe en série de Fourier selon θ. Ses coefficients de Fourier s'identifient à $\vec{E}_0^{(inc)} e^{-in(\theta_{inc}+\pi)} i^n J_n(k_{t,ext} r)$ et $\vec{H}_0^{(inc)} e^{-in(\theta_{inc}+\pi)} i^n J_n(k_{t,ext} r)$ respectivement pour les champs électrique et excitation magnétique. Les spectres de Fourier des champs d'une onde plane ne sont donc pas à supports bornés, ce qui ajoute une difficulté en terme de convergence de ces développements. Cependant, on est assuré de la décroissance de ces coefficients de Fourier en fonction de n puisque leur comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini est : $J_n(\zeta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e\zeta}{2n}\right)^n$ (page 365 de la référence [92]). La décroissance apparaît ainsi dès que $n > \frac{e\zeta}{2}$, ce qui est toujours le cas à partir d'un certain rang. Dans notre problème de diffraction, ceci se produit pour des valeurs élevées de n par rapport à l'argument borné des fonctions de Bessel et évalué proche de l'objet diffractant : $k_{t,ext} r = r\sqrt{k_0^2 n_{ext}^2 - \gamma_0^2} = 2\pi \frac{r}{\lambda} \sqrt{n_{ext}^2 - \gamma_0^2}$, d'après l'équation (2.46). Or, pour des problèmes de diffraction, λ reste du même ordre de grandeur que les dimensions de l'objet (c'est-à-dire pour des valeurs de r dans la zone modulée) et $|\gamma_0|$ (γ_0 étant la composante en z du vecteur d'onde incident) est bornée par n_{ext}.

Développement de Fourier du champ électromagnétique :
L'invariance du système selon z permet de remplacer le double développement de Fourier du champ électromagnétique total (2.56) en un seul selon θ, ce qui réduit le nombre de coefficients de Fourier à 2N+1. Le terme γ_m (2.55) s'identifie à γ_0 et le développement du champ (2.56) s'écrit alors :

$$\vec{A}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{n=-N}^{+N} \vec{A}_n(r)\, e^{in\theta} \text{ avec } \vec{A} \in \left\{\vec{E}, \vec{H}\right\} \tag{3.10}$$

Le vecteur colonne $[A]$ où A est une composante du champ (2.57) a désormais pour dimension $2N+1$:

$$[A] = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_n(r) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

et par suite la matrice γ (2.61) devient :

$$\gamma = \gamma_0 I_d \tag{3.12}$$

Autrement dit, la grandeur γ_0 se conserve dans l'expression des champs totaux (incidents et diffractés) en tout point de l'espace. De même, la matrice diagonale par bloc α (2.60) devient une matrice simplement diagonale de dimension $(2N+1)\times(2N+1)$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \mathbf{0} \\ & n-1 & & & \\ & & n & & \\ & & & n+1 & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

3.1.2 La matrice d'intégration dans la zone modulée

La matrice d'intégration des champs dans la zone modulée (2.109) se simplifie grâce aux nouvelles hypothèses. Nous reformulons auparavant les relations constitutives déduites de la méthode FFF écrites sous forme matricielle (Q_ϵ et Q_μ).

La matrice Q_μ :

Le cas de la matrice Q_μ est le plus simple à considérer puisque le milieu est non magnétique (3.4). On déduit alors des équations (2.89) et (3.4) que $Q_\mu = [\![\mu_0 C_\mu]\!][\![C_\mu]\!]^{-1} = \mu_0 [\![C_\mu]\!][\![C_\mu]\!]^{-1}$, d'où :

$$Q_\mu = \mu_0 I_d \tag{3.14}$$

La matrice Q_ϵ :

Deux méthodes permettent d'aboutir à l'expression de Q_ϵ en tenant compte de (3.5). La première consiste à déduire cette matrice directement de l'équation (2.87). En effet, on montre que :
$\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right).\vec{\mathbf{N}} = \epsilon\,(r,\theta)\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet I_d\right).\vec{\mathbf{N}} = \epsilon\,(r,\theta)$,
$\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_2 = \epsilon\,(r,\theta)\,\vec{\mathbf{N}} \wedge \vec{\mathbf{T}}_2 = \epsilon\,(r,\theta)\,\vec{\mathbf{T}}_1$ et
$\left(\vec{\mathbf{N}} \bullet \tilde{\tilde{\epsilon}}\right) \wedge \vec{\mathbf{T}}_1 = \epsilon\,(r,\theta)\,\vec{\mathbf{N}} \wedge \vec{\mathbf{T}}_1 = \epsilon\,(r,\theta)\,\vec{\mathbf{T}}_2$,

Pour simplifier, nous nous accordons l'abus d'écriture suivant : $N_r = \vec{\mathbf{N}}.\vec{e}_r$ et $N_\theta = \vec{\mathbf{N}}.\vec{e}_\theta$ (que nous confondons avec les composantes radiale et angulaire de $\vec{N}$ définies uniquement sur la surface S). On trouve alors :

$$C_\epsilon = \begin{pmatrix} N_\theta & \frac{N_r}{\epsilon} & 0 \\ -N_r & \frac{N_\theta}{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon C_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon N_\theta & N_r & 0 \\ -\epsilon N_r & N_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

Le passage dans l'espace de Fourier (matrices de Toeplitz) s'effectue notamment en utilisant la première règle de factorisation sur les produits $\frac{1}{\epsilon}N_r$, $\frac{1}{\epsilon}N_\theta$, ϵN_r et ϵN_θ, puisque les prolongements des composantes de la normale à S sont choisis continus en leurs points de définition sur S. On obtient alors :

$$[\![C_\epsilon]\!]^{-1} = \begin{pmatrix} [\![N_\theta]\!] & -[\![N_r]\!] & 0 \\ [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}[\![N_r]\!] & [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}[\![N_\theta]\!] & 0 \\ 0 & 0 & I_d \end{pmatrix} \text{ et } [\![\epsilon C_\epsilon]\!] = \begin{pmatrix} [\![\epsilon]\!][\![N_\theta]\!] & [\![N_r]\!] & 0 \\ -[\![\epsilon]\!][\![N_r]\!] & [\![N_\theta]\!] & 0 \\ 0 & 0 & [\![\epsilon]\!] \end{pmatrix}$$

On conclut que :

$$Q_\epsilon = \begin{pmatrix} [\![\epsilon]\!][\![N_\theta^2]\!] + [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}[\![N_r^2]\!] & -\left([\![\epsilon]\!] - [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\right)[\![N_r N_\theta]\!] & 0 \\ -\left([\![\epsilon]\!] - [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\right)[\![N_\theta N_r]\!] & [\![\epsilon]\!][\![N_r^2]\!] + [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}[\![N_\theta^2]\!] & 0 \\ 0 & 0 & [\![\epsilon]\!] \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

La seconde méthode est plus pragmatique puisqu'elle consiste à reprendre le calcul initial de décomposition des champs selon leurs composantes tangentielles et normales (voir section 2.1.3) mais directement en tenant compte des hypothèses sur les propriétés opto-géométriques du système, pour ensuite y appliquer les règles de factorisation. La relation constitutive du milieu diélectrique dans la zone modulée est :
$\vec{D}(r,\theta,z) = \epsilon(r,\theta)\vec{E}(r,\theta,z) = \epsilon(r,\theta)\left[\vec{E}_N(r,\theta,z) + \vec{E}_T(r,\theta,z)\right]$

en définissant par $\vec{E}_N(r,\theta,z)$ la composante vectorielle normale à la surface S du champ électrique prolongée au point de coordonnées (r,θ,z) et par $\vec{E}_T(r,\theta,z)$ la composante vectorielle tangentielle. On peut désormais passer dans l'espace de Fourier en prenant bien soin de respecter les conditions des règles de factorisation. En effet, selon la condition de passage du champ électrique à travers S (2.70), on sait que la composante tangentielle de $\vec{E}(r,\theta,z)$ est continue à travers S et sachant que $\epsilon(r,\theta)$ y est discontinue, on peut alors appliquer la première règle de factorisation (règle de Laurent) pour la partie tangentielle de $\vec{D}(r,\theta,z)$. Par contre, la composante normale de $\vec{E}(r,\theta,z)$ est, a priori, discontinue et sachant que la composante normale de $\vec{D}(r,\theta,z)$ est continue (condition de passage (2.72)), on doit donc appliquer la seconde règle de factorisation (règle Inverse). On obtient en conséquence : $\left[\vec{D}\right] = [\![\epsilon]\!]\left[\vec{E}_T\right] + [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\left[\vec{E}_N\right]$. Par définition, on sait que $\vec{E}_N = \left(\vec{N}.\vec{E}\right)\vec{N}$ et $\vec{E}_T = \vec{E} - \vec{E}_N$, d'où : $\left[\vec{D}\right] = [\![\epsilon]\!]\left[\vec{E}\right] - \left([\![\epsilon]\!] - [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\right)\left[\left(\vec{N}.\vec{E}\right)\vec{N}\right]$. Le terme $\left(\vec{N}.\vec{E}\right)\vec{N}$ peut s'exprimer en fonction du champ $\vec{E}$ selon :

$$\left(\vec{N}.\vec{E}\right)\vec{N} = \begin{pmatrix} N_r^2 & N_\theta N_r & 0 \\ N_r N_\theta & N_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}$$

Finalement, après application de la première règle de factorisation sur les produits de la matrice précédente, on aboutit à la même expression de Q_ϵ donnée par l'expression (3.15).

A la vue de l'expression de Q_ϵ, on constate qu'elle est exactement de la même forme qu'en coordonnées cartésiennes [56]. Elle possède des blocs extra-diagonaux : la méthode FFF, autrement dit la prise en compte de la troncature des développements, fait apparaître une sorte d'anisotropie des relations constitutives des milieux, dans l'espace de Fourier (uniquement).

Comparaison avec la méthode différentielle classique :

A ce stade de la théorie, il est intéressant d'effectuer une comparaison entre la méthode différentielle antérieure, dite *méthode différentielle classique*, qui n'utilise pas les règles de factorisation employées par la méthode FFF. En fait, la méthode classique applique en toute circonstance la règle de Laurent valable seulement pour les séries. Dans ce cas, la relation caractéristique du milieu dans l'espace de Fourier s'écrit pour chaque composante du champ : $\forall i \in \{r,\theta,z\}, [D_i] = [\![\epsilon]\!]\,[E_i]$ soit

$$\left[\vec{D}\right] = \begin{pmatrix} [\![\epsilon]\!] & 0 & 0 \\ 0 & [\![\epsilon]\!] & 0 \\ 0 & 0 & [\![\epsilon]\!] \end{pmatrix}\left[\vec{E}\right] \tag{3.16}$$

D'autre part, on a $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D}$, d'où, toujours par application de la règle de Laurent, on trouve : $\forall i \in \{r,\theta,z\}, [D_i] = [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}\,[E_i]$. Par identification avec la première relation ($[D_i] = [\![\epsilon]\!]\,[E_i]$), la méthode différentielle classique suggère donc que $[\![\epsilon]\!] = [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}$; ce qui est justifié pour des séries (matrices de Toeplitz de dimensions infinies !) mais ne l'est plus lorsque les développements sont tronqués. D'ailleurs, ce fait donne un sens aux blocs extra-diagonaux de la matrice Q_ϵ donnée par l'expression (3.15) puisque généralement ils ne sont pas nuls $\left([\![\epsilon]\!] - [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1} \neq 0\right)$. On voit alors la différence fondamentale qui apparaît entre ces deux aspects de la méthode différentielle.

Toutefois, on peut obtenir la formulation de la méthode différentielle classique à partir de la méthode différentielle actuelle (méthode FFF). Il suffit de prendre dans la matrice Q_ϵ :

$$[\![N_r^2]\!] = I_d \text{ et } \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]^{-1} = [\![\epsilon]\!] \tag{3.17}$$

pour retrouver la relation (3.16). Ceci s'avèrera utile pour mettre en oeuvre rapidement les comparaisons numériques entre ces deux versions de la méthode différentielle et en particulier pour montrer l'amélioration apportée par la méthode FFF.

La matrice $\mathcal{M}(r)$:

Lorsqu'on tient compte des dernières expressions des matrices Q_μ et Q_ϵ (respectivement (3.14) et (3.15)), c'est-à-dire lorsque leurs blocs vérifient : $Q_{\mu,r\theta} = Q_{\mu,rz} = Q_{\mu,\theta z} = Q_{\mu,\theta r} = Q_{\mu,zr} =$

$Q_{\mu,\theta z} = 0$ et $Q_{\epsilon,rz} = Q_{\epsilon,\theta z} = Q_{\epsilon,zr} = Q_{\epsilon,z\theta} = 0$, la matrice d'intégration $\mathcal{M}(r)$ (2.109) devient :

$$\mathcal{M}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} + \frac{i}{r} I_d & 0 & \frac{\gamma_0}{\omega r}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1} & \omega\mu_0 I_d - \frac{1}{\omega r^2}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ -\gamma_0 Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} & 0 & \frac{\gamma_0^2}{\omega} Q_{\epsilon,rr}^{-1} - \omega\mu_0 I_d & -\frac{\gamma_0}{r\omega} Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ -\frac{\gamma_0}{\mu_0\omega r}\alpha & \frac{1}{\omega\mu_0 r^2}\alpha^2 - \omega Q_{\epsilon,zz} & \frac{i}{r} I_d & 0 \\ \omega\left(Q_{\epsilon,\theta\theta} - Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta}\right) - \frac{\gamma_0^2}{\mu_0\omega} I_d & \frac{\gamma_0}{\mu_0\omega r}\alpha & Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1}\gamma_0 & -Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{1}{r}\alpha \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

En ce qui concerne l'expression de la matrice $\mathcal{M}_r(r)$ (2.113), on trouve :

$$\mathcal{M}_r(r) = \begin{pmatrix} -Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} & 0 & Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{\gamma_0}{\omega} & -Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{\alpha}{r\omega} \\ -\frac{\gamma_0}{\mu_0\omega} I_d & \frac{\alpha}{r\mu_0\omega} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

3.1.3 Expression des champs dans les régions homogènes et isotropes

On peut exprimer explicitement le champ électromagnétique se propageant dans les deux régions homogènes et isotropes (int) et (ext) encadrant la zone modulée. Leurs expressions se déduisent de l'équation de Helmholtz écrite pour chacun de ces milieux, dans le système de coordonnées cylindriques. Tout d'abord, en utilisant un formalisme matriciel, on établit dans l'espace de Fourier les solutions générales du système d'équations différentielles découplées déduites de l'équation de Helmoltz. Ensuite, on aboutit à l'expression des champs incidents et diffractés par application des conditions d'ondes sortantes et en évitant les éventuelles singularités qui pourraient apparaître dans les expressions générales des champs trouvées.

Ecriture générale des champs :

On sait que les régions homogènes (int) et (ext) peuvent être remplies soit du même milieu, dans le cas où le repère est placé en dehors de S (voir figure 2.3(b)), soit de milieux différents dans le cas contraire (voir figure 2.3(a)). Par souci de simplification d'écriture, on indice les grandeurs caractéristiques de ces milieux (permittivité, perméabilité,...) par $j = ext$ ou int. On sait que le champ électromagnétique total se propageant dans le milieu j vérifie l'équation de Helmholtz suivante :

$$\Delta\vec{A}(r,\theta,z) + k_j^2\vec{A}(r,\theta,z) = \vec{0} \tag{3.20}$$

où $A \in \{E, H\}$, $j \in \{int, ext\}$ et

$$k_j^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_j \tag{3.21}$$

En coordonnées cylindriques, cette équation s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\vec{A}(r,\theta,z)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vec{A}(r,\theta,z)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\vec{A}(r,\theta,z)}{\partial z^2} + k_j^2\vec{A}(r,\theta,z) = \vec{0}$$

En fait, cette équation regroupe six équations différentielles (six équations de Helmholtz) relatives à chacune des composantes des champs électromagnétiques. On montre qu'il suffit de résoudre deux de ces équations pour en déduire toutes les composantes du champ électromagnétique. La résolution complète du problème de diffraction nous contraint à projeter l'équation de Helmholtz (3.20) sur une des composantes du champ tangentielle aux cylindres circulaires C_{min} et C_{max} qui délimitent la zone modulée. En effet, on effectue ensuite le raccordement des champs continus des trois régions de l'espace (les deux régions homogènes et isotropes, et la zone modulée) sur ces cylindres. Notre choix s'est alors porté sur une projection selon l'axe z. On cherche donc à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k_j^2 A_z = 0 \tag{3.22}$$

avec $A_z = E_z$ et H_z. Ensuite, on effectue une seconde projection de cette équation sur la base de fonctions $(e^{in\theta})$ utilisée dans les développements de Fourier tronqués qui décrivent les champs électromagnétiques totaux (3.10) :

$$A_z(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z}\sum_{n=-N}^{+N} A_{z,n}(r)e^{in\theta} \tag{3.23}$$

d'où on déduit les dérivées partielles par rapport à θ et z qui interviennent dans l'équation différentielle (3.22). On aboutit finalement à $2N+1$ équations différentielles indépendantes vérifiées par les coefficients de Fourier $A_{z,n}(r)$ de A_z :

$$\frac{d^2A_{z,n}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_{z,n}}{dr} - \frac{n^2}{r^2}A_{z,n} + k_j^2 A_{z,n} - \gamma_0^2 A_{z,n} = 0 \tag{3.24}$$

avec $n \in [-N, +N]$. Après un petit calcul qui consiste à multiplier ses deux membres par r^2, à poser

$$k_{t,j}^2 = k_j^2 - \gamma_0^2 \tag{3.25}$$

puis à effectuer le changement de variable $A_{z,n}(r) \rightarrow A_{z,n}(k_{t,j}r)$, les $2N+1$ équations différentielles précédentes s'écrivent :

$$(k_{t,j}r)^2 \frac{d^2A_{z,n}}{d(k_{t,j}r)^2} + (k_{t,j}r)\frac{dA_{z,n}}{d(k_{t,j}r)} + \left[(k_{t,j}r)^2 - n^2\right] A_{z,n} = 0 \tag{3.26}$$

On rappelle que la notation utilisée dans cette équation est : $A_{z,n} \in \{E_{z,n}, H_{z,n}\}$, $j \in \{int, ext\}$ et $n \in [-N, +N]$. Il s'agit d'un ensemble de $2N+1$ équations de Bessel dont les solutions sont décrites par une combinaison linéaire de deux fonctions de Bessel ou de Hankel du premier ordre (linéairement indépendantes les unes des autres) : J_n, Y_n, H_n^+ et H_n^-. On rappelle également la définition des fonctions de Hankel qui se déduisent des fonctions de Bessel : $H_n^{\pm}(\zeta) = J_n(\zeta) \pm iY_n(\zeta)$. On choisit d'exprimer les solutions selon le couple de fonctions J_n et H_n^+. Ainsi, pour les composantes en z du champ électrique et de l'excitation magnétique, on obtient

$$E_{z,n}(r) = A_{e,n}^{(j)} J_n(k_{t,j}r) + B_{e,n}^{(j)} H_n^+(k_{t,j}r) \tag{3.27}$$

$$H_{z,n}(r) = A_{h,n}^{(j)} J_n(k_{t,j}r) + B_{h,n}^{(j)} H_n^+(k_{t,j}r) \tag{3.28}$$

Les constantes $A_{e,n}^{(j)}$ et $B_{e,n}^{(j)}$ pour le champ électrique, et $A_{h,n}^{(j)}$ et $B_{h,n}^{(j)}$ pour le champ excitation magnétique, sont donc des constantes d'intégration que l'on appelle généralement *amplitudes du champ électromagnétique*. Il est important de préciser que ces amplitudes demeurent indépendantes des coordonnées d'espace, autrement dit elles restent invariantes en tout point de la région homogène j.

Les relations (3.27) et (3.28) déterminent explicitement la forme des expressions des composantes en z du champ électromagnétique total. Les autres composantes s'en déduisent par les équations de Maxwell dans lesquelles on injecte les expressions des champs électromagnétiques de la forme $\vec{A}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z}\vec{a}(r,\theta)$ avec $A \in \{E, D, B, H\}$ et $a \in \{e, d, b, h\}$ d'après les développements (3.10) :

$$E_r(r,\theta,z) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[i\gamma_0\frac{\partial E_z(r,\theta,z)}{\partial r} + \frac{i\omega\mu_0}{r}\frac{\partial H_z(r,\theta,z)}{\partial\theta}\right] \tag{3.29}$$

$$H_r(r,\theta,z) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[i\gamma_0\frac{\partial H_z(r,\theta,z)}{\partial r} - \frac{i\omega\epsilon_j}{r}\frac{\partial E_z(r,\theta,z)}{\partial\theta}\right] \tag{3.30}$$

$$E_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[\frac{i\gamma_0}{r}\frac{\partial E_z(r,\theta,z)}{\partial\theta} - i\omega\mu_0\frac{\partial H_z(r,\theta,z)}{\partial r}\right] \tag{3.31}$$

$$H_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[\frac{i\gamma_0}{r}\frac{\partial H_z(r,\theta,z)}{\partial\theta} + i\omega\epsilon_j\frac{\partial E_z(r,\theta,z)}{\partial r}\right] \tag{3.32}$$

Ensuite, on introduit dans ces quatre dernières équations les développements des composantes en z des champs électromagnétiques (3.23) dont les coefficients de Fourier s'expriment par les équations (3.27) et (3.28). On obtient finalement les coefficients de Fourier des composantes radiales et angulaires des champs électromagnétiques totaux dans la région homogène et isotrope j :

$$E_{r,n}(r) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[i\gamma_0\left(A_{e,n}^{(j)}\frac{dJ_n(k_{t,j}r)}{dr} + B_{e,n}^{(j)}\frac{dH_n^+(k_{t,j}r)}{dr}\right) - \frac{\omega\mu_0 n}{r}\left(A_{h,n}^{(j)}J_n(k_{t,j}r) + B_{h,n}^{(j)}H_n^+(k_{t,j}r)\right)\right] \tag{3.33}$$

$$H_{r,n}(r) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[i\gamma_0\left(A_{h,n}^{(j)}\frac{dJ_n\left(k_{t,j}r\right)}{dr} + B_{h,n}^{(j)}\frac{dH_n^+\left(k_{t,j}r\right)}{dr}\right) + \frac{\omega\epsilon_j n}{r}\left(A_{e,n}^{(j)}J_n\left(k_{t,j}r\right) + B_{e,n}^{(j)}H_n^+\left(k_{t,j}r\right)\right)\right] \tag{3.34}$$

$$E_{\theta,n}(r) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[-\frac{n\gamma_0}{r}\left(A_{e,n}^{(j)}J_n\left(k_{t,j}r\right) + B_{e,n}^{(j)}H_n^+\left(k_{t,j}r\right)\right) - i\omega\mu_0\left(A_{h,n}^{(j)}\frac{dJ_n\left(k_{t,j}r\right)}{dr} + B_{h,n}^{(j)}\frac{dH_n^+\left(k_{t,j}r\right)}{dr}\right)\right] \tag{3.35}$$

$$H_{\theta,n}(r) = \frac{1}{k_{t,j}^2}\left[-\frac{n\gamma_0}{r}\left(A_{h,n}^{(j)}J_n\left(k_{t,j}r\right) + B_{h,n}^{(j)}H_n^+\left(k_{t,j}r\right)\right) + i\omega\epsilon_j\left(A_{e,n}^{(j)}\frac{dJ_n\left(k_{t,j}r\right)}{dr} + B_{e,n}^{(j)}\frac{dH_n^+\left(k_{t,j}r\right)}{dr}\right)\right] \tag{3.36}$$

Les équations (3.27), (3.28) et (3.33) à (3.36) montrent que les coefficients de Fourier des composantes du champ électromagnétique qui se propagent dans la région homogène et isotrope j dépendent linéairement des amplitudes $A_{e,n}^{(j)}$, $B_{e,n}^{(j)}$, $A_{h,n}^{(j)}$ et $B_{h,n}^{(j)}$. On peut adopter à nouveau un formalisme matriciel pour l'écriture de ces relations. Pour cela, on utilise les mêmes matrices colonnes $[F(r)]$ et $[F_r(r)]$ (équations (2.108) et (2.111)) définies pour les coefficients de Fourier des champs dans la zone modulée. On définit trois nouvelles matrices colonnes qui dépendent de la variable radiale r ; les deux matrices $\left[A^{(j)}(r)\right]$ et $\left[B^{(j)}(r)\right]$ (de dimension $2(2N+1)$) données par

$$\left[A^{(j)}(r)\right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{e,n}^{(j)}J_n\left(k_{t,j}r\right) \\ \vdots \\ A_{h,n}^{(j)}J_n\left(k_{t,j}r\right) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$$\left[B^{(j)}(r)\right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ B_{e,n}^{(j)}H_n^+\left(k_{t,j}r\right) \\ \vdots \\ B_{h,n}^{(j)}H_n^+\left(k_{t,j}r\right) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

et la matrice colonne notée $\left[V^{(j)}(r)\right]$ qui regroupe les matrices colonnes $\left[A^{(j)}(r)\right]$ et $\left[B^{(j)}(r)\right]$:

$$\left[V^{(j)}(r)\right] = \begin{pmatrix} \left[A^{(j)}(r)\right] \\ \left[B^{(j)}(r)\right] \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

Cette dernière matrice colonne est de même dimension que $[F(r)]$ ($4(2N+1)$ lignes). D'après les relations (3.27), (3.28), (3.35) et (3.36) et en remplaçant les dérivées selon r des fonctions de Bessel et de Hankel d'après $\frac{dG_n(\zeta)}{d\zeta} = \frac{nG_n(\zeta)}{\zeta} - G_{n+1}(\zeta)$ où $G_n \in \{J_n, Y_n, H_n^+, H_n^-\}$ (formule 1.9.27, page 361 de la référence [92]) dans les équations (3.35) à (3.36), on relie $[F(r)]$ à $\left[V^{(j)}(r)\right]$ selon la relation matricielle suivante :

$$[F(r)] = \Psi^{(j)}(r)\left[V^{(j)}(r)\right] \tag{3.40}$$

avec

$$\Psi^{(j)}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_0}{rk_{t,j}^2}\alpha & \frac{i\omega\mu_0}{k_{t,j}^2}\left[k_{t,j}q_e - \frac{\alpha}{r}\right] & -\frac{\gamma_0}{rk_{t,j}^2}\alpha & \frac{i\omega\mu_0}{k_{t,j}^2}\left[k_{t,j}q_h - \frac{\alpha}{r}\right] \\ I_d & 0 & I_d & 0 \\ -\frac{i\omega\epsilon_j}{k_{t,j}^2}\left[k_{t,j}q_e - \frac{\alpha}{r}\right] & -\frac{\gamma_0}{rk_{t,j}^2}\alpha & -\frac{i\omega\epsilon_j}{k_{t,j}^2}\left[k_{t,j}q_h - \frac{\alpha}{r}\right] & -\frac{\gamma_0}{rk_{t,j}^2}\alpha \\ 0 & I_d & 0 & I_d \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

où

$$(q_e)_{nm} = \frac{J_{n+1}\left(k_{t,j}r\right)}{J_n\left(k_{t,j}r\right)}\delta_{nm} \tag{3.42}$$

$$(q_h)_{nm} = \frac{H_{n+1}^{+}(k_{t,j}r)}{H_n^{+}(k_{t,j}r)}\delta_{nm} \tag{3.43}$$

En ce qui concerne les composantes radiales des champs électrique et magnétique dans la région homogène et isotrope j, les équations (3.33) et (3.34) permettent d'écrire $[F_r(r)]$ en fonction de $\left[V^{(j)}(r)\right]$ selon la relation matricelle suivante :

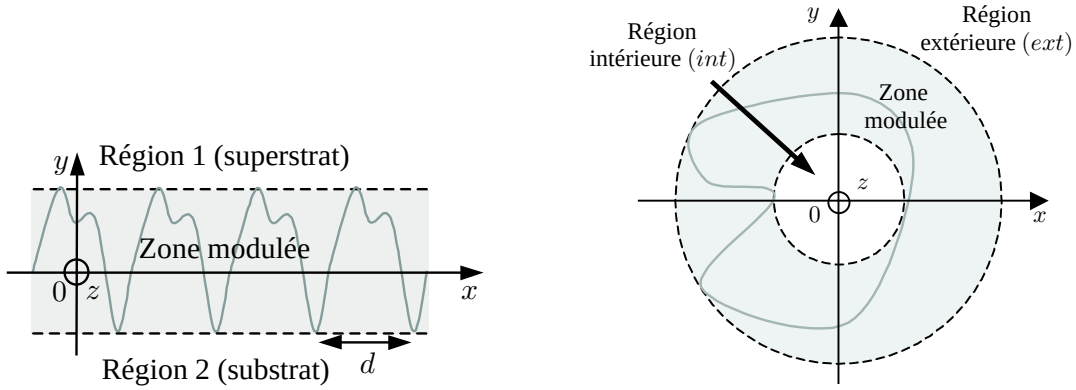
$$[F_r(r)] = \Psi_r^{(j)}(r)\left[V^{(j)}(r)\right] \tag{3.44}$$

avec

$$\Psi_r^{(j)}(r) = \begin{pmatrix} \frac{i\gamma_0}{k_{t,j}^2}\left[\frac{\alpha}{r} - k_{t,j}q_e\right] & -\frac{\omega\mu_0}{rk_{t,j}^2}\alpha & \frac{i\gamma_0}{k_{t,j}^2}\left[\frac{\alpha}{r} - k_{t,j}q_h\right] & -\frac{\omega\mu_0}{rk_{t,j}^2}\alpha \\ \frac{\omega\epsilon_j}{rk_{t,j}^2}\alpha & \frac{i\gamma_0}{k_{t,j}^2}\left[\frac{\alpha}{r} - k_{t,j}q_e\right] & \frac{\omega\epsilon_j}{rk_{t,j}^2}\alpha & \frac{i\gamma_0}{k_{t,j}^2}\left[\frac{\alpha}{r} - k_{t,j}q_h\right] \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

Ces équations relient les amplitudes et les coefficients de Fourier du champ électromagnétique, dans la région homogène et isotrope j. De même, il faut prendre garde à ce que les matrices $\Psi^{(j)}(r)$ et $\Psi_r^{(j)}(r)$ ne soient pas évaluées aux zéros de $J_n(k_{t,j}r)$ et $H_n^{+}(k_{t,j}r)$. Un test au préalable est donc nécessaire dans le code numérique.

Discussion sur la forme des champs dans les régions homogènes et isotropes :
Comment peut-on interpréter physiquement les fonctions de base que sont les fonctions de Bessel ou de Hankel ?



(a) Réseau 1D en coordonnées cartésiennes (b) Objet cylindrique en coordonnées cylindriques

FIG. 3.1 – Représentation de deux systèmes traités par la méthode différentielle dans des systèmes de coordonnées différents

Tout d'abord, intéressons-nous aux fonctions de Hankel. Elles sont analogues (en ce qui concerne leur comportement entrant ou sortant) aux fonctions exponentielles utilisées en coordonnées cartésiennes. Pour comprendre leur sens physique, nous allons comparer l'expression des champs en coordonnées cylindriques écrites, cette fois-ci, avec les fonctions de Hankel H_n^{+} et H_n^{-} (et non plus J_n et H_n^{+}) à celle des champs en coordonnées cartésiennes. Pour le cas des coordonnées cartésiennes (x, y, z), on considère alors un réseau 1D constitué d'une surface diffractante invariante selon z, périodique selon x de période d et arbitrairement modulée selon y (voir figure 3.1(a)). Cette surface sépare deux milieux homogènes et isotropes (et non magnétiques) de permittivités complexes différentes. L'espace est donc divisé en trois régions : la zone modulée et les deux régions homogènes et isotropes (1) et (2). Pour les deux types de géométrie (réseau 1D et objet cylindrique), le tableau 3.1 illustre l'expression du champ dans les régions homogènes et isotropes, et décrit les principales interprétations physiques des fonctions de base qui y sont utilisées. Pour simplifier, nous supposons dans cette section, que les milieux sont sans pertes (d'origine ohmique ou diélectrique), d'où $k_j \in \mathbb{R}$ et $k_{t,j} \in \mathbb{R}$. En coordonnées cartésiennes, les champs électromagnétiques sont exprimés selon la base des deux types de fonctions exponentielles $e^{+i\beta_{n,j}y}$ et $e^{-i\beta_{n,j}y}$ qui

	Réseau 1D	Objet cylindrique
Périodicité de la surface diffractante	Périodique selon x (période d)	Périodique selon θ (période 2π)
(Pseudo)-périodicité des champs électromagnétiques	Pseudo-périodique selon x	Périodique selon θ
Composantes de $\vec{k}^{(inc)}$ qui se conservent dans l'espace	$\alpha_0 = k_0 \sin(\theta_{inc})$ $\gamma_0 = -k_0 \sin(\varphi)$	$\gamma_0 = -k_0 \sin(\varphi)$
Valeurs de j	1 ou 2	int ou ext
(Pseudo)-développements de E_z et H_z	$e^{i\gamma_0 z} \sum_{n=-N}^{+N} \left(A_n^+ e^{i\beta_{n,j} y} + A_n^- e^{-i\beta_{n,j} y} \right) e^{i\alpha_n x}$ $\beta_{n,j} = \sqrt{k_j^2 - \alpha_n^2}$ et $\alpha_n = \alpha_0 + n\frac{2\pi}{d}$	$e^{i\gamma_0 z} \sum_{n=-N}^{+N} \left(A_n^+ H_n^+(k_{t,j} r) + A_n^- H_n^-(k_{t,j} r) \right) e^{in\theta}$ $k_{t,j} = \sqrt{k_j^2 - \gamma_0^2}$
Base de fonction	Exponentielle : $e^{\pm i\beta_{n,j} y}$	Hankel : $H_n^{\pm}(k_{t,j} r)$
Sens de propagation dans le milieu (1) ou (int) (dépendance $e^{-i\omega t}$)	$e^{i\beta_{n,j} y}$: Ondes entrantes $e^{-i\beta_{n,j} y}$: Ondes sortantes	$H_n^+(k_{t,j} r)$: Ondes entrantes $H_n^-(k_{t,j} r)$: Ondes sortantes
Sens de propagation dans le milieu (2) ou (ext) (dépendance $e^{-i\omega t}$)	$e^{i\beta_{n,j} y}$: Ondes sortantes $e^{-i\beta_{n,j} y}$: Ondes entrantes	$H_n^+(k_{t,j} r)$: Ondes sortantes $H_n^-(k_{t,j} r)$: Ondes entrantes
Type de propagation	Deux types d'ondes : 1. Propagatives $\left(\alpha_n^2 \leq k_j^2\right)$ 2. Evanescentes ou divergentes $\left(\alpha_n^2 > k_j^2\right)$	Un seul type d'ondes : -Propagatives à l'infini -Singulières à l'origine

TAB. 3.1 – Etude Comparative des principales caractéristiques et des expressions des champs entre un réseau et un objet cylindrique

se distinguent uniquement par le signe de l'argument et qui, comme les fonctions de Hankel, sont complexes conjuguées. Ces dernières représentent alors une base de fonctions d'ondes planes (les fronts d'onde sont des plans) qui se répartissent en deux groupes : les ondes qui s'éloignent de la structure, dites *ondes sortantes* et les ondes qui s'en approchent, dites *ondes entrantes*. En géométrie cylindrique, les ondes décrites par la base des fonctions de Hankel sont des ondes cylindriques, c'est-à-dire que les fronts d'onde sont des cylindres circulaires. Elles se répartissent également selon les deux groupes d'ondes sortantes et entrantes (même si, pour le milieu (int), le terme "sortantes" est un abus de langage puisqu'elles se propagent en se concentrant vers l'origine). Outre les bases de fonctions, le point fondamental qui distingue les expressions des champs dans les deux systèmes de coordonnées, concerne les dépendances des fonctions de base selon l'ordre n et la variable d'espace d'intégration (y ou r). En effet, cette double dépendance intervient dans l'argument des fonctions ($\pm i\beta_{n,j} y$) dans le cas cartésien. Ainsi, on définit un intervalle d'ordre pour lequel les ondes planes $e^{\pm i\beta_{n,j} y}$ restent des ondes propagatives (lorsque $\beta_{n,j} \in \mathbb{R}$) alors, qu'en dehors de cet intervalle (lorsque $\beta_{n,j} \in i\mathbb{R}$), elles deviennent soit évanescentes soit divergentes selon le signe de l'argument. Or, dans le cas cylindrique, l'argument des fonctions de Hankel $H_n^{\pm}(k_{t,j} r)$ dépend de r et non de l'ordre n. Les conséquences sont de taille puisque, pour un argument $k_{t,j} r$ fixé, les propriétés des fonctions de Hankel ne changent pas en terme de propagation (les fonctions restent des fonctions à valeurs complexes). Quel que soit l'ordre n, les ondes associées à ces fonctions ont toujours un comportement asymptotiquement propagatif à l'infini (page 364 de la référence [92]) :

$$\lim_{|\zeta| \gg |n|} H_n^{\pm}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{\pm j\left[\zeta - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right]} \tag{3.46}$$

où dans notre cas, $\zeta = k_{t,j} r \in \mathbb{R}$; et possèdent toujours une singularité à l'origine : $\lim_{|\zeta| \to 0} H_n^{\pm}(\zeta) = \pm\infty$. On se rend alors bien compte que le comportement des fonctions de base utilisées pour décrire le champ électromagnétique dans les régions homogènes et isotropes est différent suivant le système de repère choisi.

En ce qui concerne les fonctions de Bessel (J_n et Y_n), elles peuvent être exprimées selon les fonctions de Hankel : $J_n(\zeta) = \frac{1}{2}\left[H_n^+(\zeta) + H_n^-(\zeta)\right]$ et $Y_n(\zeta) = \frac{i}{2}\left[H_n^-(\zeta) - H_n^+(\zeta)\right]$. Il suffit alors de constater que les fonctions J_n et Y_n sont des combinaisons linéaires d'ondes cylindriques entrantes

et sortantes. On sait en particulier que le champ électromagnétique de l'onde plane incidente sur l'objet cylindrique se décompose en série de Fourier-Bessel d'après (3.8) et (3.9). A la vue de la figure 3.2, on comprend alors que le vecteur d'onde incident $\vec{k}^{(inc)}$ qui décrit la direction et le sens de propagation de l'onde plane, se décompose en une partie incidente sur l'objet (au point M_1, $\vec{k}^{(inc)}.\vec{e_r} < 0$) et une partie sortante (au point M_2, $\vec{k}^{(inc)}.\vec{e_r} > 0$). Ceci explique le choix du couple de fonctions J_n et H_n^+ pour décrire le champ électromagnétique total qui se décompose en un développement selon J_n pour l'onde plane incidente et en un développement selon H_n^+ pour le champ diffracté s'éloignant de la structure.

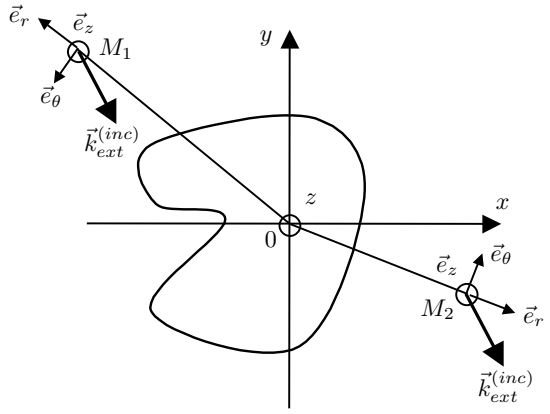


FIG. 3.2 – Caractère entrant et sortant d'une onde plane incidente en coordonnées cylindriques

Les champs réels :

On sait que les équations (3.40) et (3.44) sont écrites pour les solutions générales des équations de Helmholtz dans les régions (int) et (ext). Or le champ électromagnétique total est composé du champ incident sur la structure cylindrique et du champ diffracté par celle-ci. Ce dernier doit vérifier en outre les *conditions d'ondes sortantes* (COS). Ainsi, le champ diffracté, noté $\vec{A}^d(r,\theta,z)$ $(\vec{A} \in \left\{\vec{E},\vec{H}\right\})$ dans une région de l'espace, représente le champ total auquel on soustrait le champ incident :

$$\vec{A}^d(r,\theta,z) = \vec{A}(r,\theta,z) - \vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z) \text{ avec } \vec{A} \in \left\{\vec{E},\vec{H}\right\} \tag{3.47}$$

Pour la région (ext) dans laquelle se propage l'onde plane incidente, le vecteur $\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z)$ $(r > R_{max})$ s'exprime selon (3.8) et (3.9) ; alors que dans la région (int), il n'y pas de champ électromagnétique incident : $\vec{A}^{(inc)}(r,\theta,z) = \vec{0}$ $(r < R_{min})$. On introduit les développements du champ électromagnétique total (3.10) et incident (équations (3.8) et (3.9)) dans la définition du champ diffracté (3.47). Ce dernier se développe alors en série de Fourier tronquée :

$$\vec{A}^d(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{n=-N}^{+N} \vec{A}_n^d(r)\, e^{in\theta} \text{ avec } \vec{A} \in \left\{\vec{E},\vec{H}\right\} \tag{3.48}$$

On montre ensuite qu'il vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta\vec{A}^d + \omega^2\mu_0\epsilon_j\vec{A}^d = \vec{0}$ $(j \in \{int, ext\})$, toujours en utilisant sa définition (3.47). Il se développe donc en série de Fourier-Bessel de la même manière que le champ total (équations (3.27) et (3.28)). Il faut maintenant introduire les COS et les *conditions aux limites* afin de compléter la formulation du problème d'électromagnétisme (qui, avec l'équation de Helmholtz, se nomme *le problème de Dirichlet*). On appliquera les conditions aux limites (sur les cylindres circulaires C_{min} et C_{max}) lors de la résolution définitive du problème de diffraction dans la section suivante. Par contre, on peut déja appliquer la COS dans la région (ext) qui prend, dans notre problème de diffraction à deux dimensions (sur $\mathbb{R}^2$), la forme suivante

(problème de Dirichlet donné à la page 84 de la référence [94]) :

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\sqrt{r}\left(\frac{\partial\vec{A}^d}{\partial r}-ik_{ext}\vec{A}^d\right)\right]=\vec{0}$$

Cette relation assure que toutes les composantes du champ diffracté ne divergent pas à l'infini (loin de l'objet diffractant). Parmi l'ensemble des fonctions (J_n, Y_n ou encore $H_n^{\pm}$) solutions des équations de Helmholtz (3.26), on montre que seules les fonctions de Hankel H_n^+ (ondes sortantes) vérifient cette condition. Ainsi les coefficients de Fourier des composantes en z du champ diffracté dans le milieu (ext) prennent la forme

$$\forall r>R_{max},\ \begin{cases} E_{z,n}^d(r)=B_{e,n}^{(ext)}H_n^+\left(k_{t,ext}r\right)\\ H_{z,n}^d(r)=B_{h,n}^{(ext)}H_n^+\left(k_{t,ext}r\right)\end{cases}$$

Par conséquent, la matrice colonne $\left[B^{(ext)}(r)\right]$ donnée par (3.38) contient les coefficients de Fourier du champ diffracté (composantes en z) dans le milieu extérieur. De même, on déduit des expressions (3.8) et (3.9) que la matrice colonne $\left[A^{(ext)}(r)\right]$ contient les coefficients de Fourier des composantes en z du champ incident. On note désormais cette matrice colonne $\left[A^{(inc)}(r)\right]$. En explicitant ses éléments d'après les relations (3.8) et (3.9), on trouve :

$$\left[A^{(inc)}(r)\right]=\begin{pmatrix}\vdots\\ E_{0,z}^{(inc)}e^{-in(\theta_{inc}+\pi)}i^nJ_n\left(k_{t,ext}r\right)\\ \vdots\\ H_{0,z}^{(inc)}e^{-in(\theta_{inc}+\pi)}i^nJ_n\left(k_{t,ext}r\right)\\ \vdots\end{pmatrix}\tag{3.49}$$

Dans le milieu (int), la singularité des fonctions de Hankel à l'origine induit nécéssairement l'annulation des amplitudes associées à ces fonctions : $B_{e,n}^{(int)}=B_{h,n}^{(int)}=0$ soit

$$\left[B^{(int)}(r)\right]=[0]\tag{3.50}$$

afin que le champ électromagnétique total (qui ne doit pas diverger) garde un sens physique. Les coefficients de Fourier des composantes en z du champ diffracté dans la région (int) prennent alors la forme

$$\forall r<R_{min},\ \begin{cases} E_{z,n}^d(r)=A_{e,n}^{(int)}J_n\left(k_{t,int}r\right)\\ H_{z,n}^d(r)=A_{h,n}^{(int)}J_n\left(k_{t,int}r\right)\end{cases}$$

La matrice colonne $\left[A^{(int)}(r)\right]$ donnée par (3.37) contient les coefficients de Fourier du champ diffracté (composantes en z) dans le milieu intérieur.

3.2 Algorithme de propagation de la matrice T

Jusqu'à présent, on a déterminé l'expression matricielle (3.40) des champs dans les régions homogènes et un système d'équations différentielles (2.109) de matrice d'intégration (3.18) à résoudre dans la zone modulée. Ce problème de diffraction laisse apparaître plusieurs types d'inconnues : les amplitudes des champs diffractés dans les régions homogènes et isotropes ($\left[B^{(ext)}(r)\right]$ et $\left[A^{(int)}(r)\right]$), ainsi que les champs électromagnétiques dans la zone modulée. Ne connaissant pas les valeurs précises des champs en un lieu de l'espace, on intègre le système différentiel (2.109) à l'aide d'une méthode de tir [56]. Ce calcul aboutit à l'obtention d'une matrice de transmission de la zone modulée, qui relie les champs en C_{min} et en C_{max}. Elle est notée matrice T, ce qui confère à l'algorithme le nom d'*algorithme de propagation de la matrice T*. Pour simplifier l'écriture, cet algorithme sera dénommé simplement *algorithme T*.

Puis, on établit la continuité des composantes des champs électromagnétiques, qui interviennent dans la matrice colonne $[F(r)]$, aux interfaces (cylindres circulaires C_{min} et C_{max}) entre les régions homogènes et isotropes et la zone modulée (matrice T). On obtient finalement la forme des champs diffractés dans les régions (int) et (ext).

3.2.1 Les matrices de transmission de la zone modulée

Dans un premier temps, nous énoncerons le principe de la méthode de tir utilisée pour intégrer le système différentiel (2.109). Ensuite, on verra que cette méthode peut être appliquée de deux manières différentes, ce qui permet de définir deux types de matrices de transmission après intégration. Enfin, l'une de ces matrices servira à résoudre le problème de diffraction comprenant les $4(2N+1)$ inconnues que sont les amplitudes des champs diffractés présents dans les matrices colonnes $\left[B^{(ext)}(r)\right]$ et $\left[A^{(int)}(r)\right]$.

La méthode de Tir .

En Physique, on est généralement confronté à deux types de problème : des problèmes aux conditions aux limites ou des problèmes aux conditions initiales. En effet, la plupart des théories en Physique (électromagnétisme, mécanique, thermodynamique,...) aboutissent à des équations différentielles qui laissent apparaître des constantes d'intégration inconnues. Afin de les déterminer, on utilise soit des conditions aux limites, soit des conditions initiales. Les problèmes aux conditions aux limites concernent le cas des systèmes présentant une frontière entre au moins deux régions (de l'espace ou du temps). Dans chacune de ces régions, on a déterminé l'expression des grandeurs avec, pour inconnues, des constantes d'intégration. En général, on connaît la relation entre les grandeurs à la frontière (continuité,...), ce qui permet d'en déduire les inconnues. Au contraire, les problèmes aux conditions initiales traitent du cas où on a une région dont on connaît l'expression des grandeurs avec, pour inconnues, toujours des constantes d'intégration. Mais ici, on connaît précisément la valeur des grandeurs en plusieurs points précis (de l'espace ou du temps), ce qui permet d'en déduire les inconnues.

La méthode différentielle telle qu'elle est présentée ici (espace divisé en trois régions), conduit à un problème aux conditions aux limites : continuité des champs tangentiels à travers les cylindres circulaires C_{min} et C_{max}. Or nos inconnues sont les amplitudes du champ diffracté dans la région (ext) ($\left[B^{(ext)}(r)\right]$) et la région (int) ($\left[A^{(int)}(r)\right]$) ; mais également le champ électromagnétique dans la zone modulée dont on ne connaît pas d'expression explicite. Il faut intégrer numériquement le système différentiel (2.109). On ne peut donc pas, a priori, appliquer directement les conditions aux limites en $r = R_{min}$ et $r = R_{max}$. En fait, toute l'originalité du calcul qui suit consiste à convertir le problème aux conditions aux limites en un problème aux conditions initiales à l'aide d'une méthode appelée *méthode de tir*. Le principe est d'intuiter des valeurs aux coefficients de Fourier des composantes de la matrice colonne $[F(r)]$ en $r = R_{min}$ (par exemple), qui constituent un *vecteur de tir*. On va fabriquer plusieurs $(4(2N+1))$ vecteurs de tir correspondants à différentes conditions aux bords indépendantes. Ils vont être injectés successivement comme valeurs initiales en $r = R_{min}$ dans l'intégration du système différentiel (2.109). Après intégration numérique de ces systèmes différentiels à travers toute la zone modulée, on obtient alors les coefficients de Fourier des différents champs correspondants en $r = R_{max}$. Les équations (équations de Maxwell, relations constitutives des milieux) étant linéaires, on peut relier par une matrice dite de transmission, ces champs en $r = R_{min}$ et $r = R_{max}$. A ce niveau, il est important de comprendre que la matrice de transmission dépend uniquement du système physique (objet diffractant) et non des champs électromagnétiques. Donc cette matrice est valable pour tout champ en $r = R_{min}$ (et $r = R_{max}$), en particulier pour les champs diffractés $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ et $\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$ du champ incident $\left[A^{(inc)}(R_{max})\right]$. Un simple calcul matriciel permettra d'en déduire les amplitudes des champs diffractés dans les régions (int) et (ext). Il existe deux types d'intégration selon les vecteurs de tir choisis.

Intégration du système différentiel .

La première méthode d'intégration consiste à prendre $4(2N+1)$ matrices colonnes indépendantes particulières $\left[V^{(j)}(R_{min})\right]$ définies par l'équation (3.39) et notées $\left[\hat{V}_p\right]$ $(p \in [1, 4(2N+1)])$, de la

manière suivante :

$$\forall i \in [4(2N+1)]\,,\ \left(\left[\hat{V}_p\right]\right)_i = \delta_{ip} \tag{3.51}$$

On les dispose dans une matrice notée $\left[V_{init}^{(int)}(R_{min})\right]$, selon

$$\left[V_{init}^{(int)}(R_{min})\right] = \left(\ldots\left[\hat{V}_p\right]\ldots\right) = I_d.$$

Ces matrices colonnes représentent les amplitudes (coefficients $A_{e,n}^{(j)}$, $B_{e,n}^{(j)}$, $A_{h,n}^{(j)}$ et $B_{h,n}^{(j)}$ dans les expressions (3.27) et (3.28)) des champs initiaux en $r = R_{min}$ pour l'intégration du système différentiel. Les coefficients de Fourier ($E_{z,n}(r)$ et $H_{z,n}(r)$ dans (3.27) et (3.28)) de ces champs initiaux, prennent alors la forme d'une matrice notée $[F_{init}(R_{min})]$ d'après (3.40) :

$$[F_{init}(R_{min})] = \Psi^{(int)}(R_{min})\left[V_{init}^{(int)}(R_{min})\right] = \Psi^{(int)}(R_{min})I_d = \Psi^{(int)}(R_{min}) \tag{3.52}$$

et dont les colonnes sont considérées commme des vecteurs de tir linéairement indépendants. L'utilisation de la relation (3.40) est justifiée par la continuité des composantes du champ dans $[F(r)]$ à l'interface C_{min} entre la région (int) et la zone modulée. Après intégration numérique à travers la zone modulée, on obtient la matrice, notée $[F_{integ}(R_{max})]$, dont les colonnes contiennent les coefficients de Fourier des champs en $r = R_{max}$ générés par ceux des champs initiaux $[F_{init}(R_{min})]$ en $r = R_{min}$. Comme pour l'interface C_{min}, on utilise la continuité des composantes du champ de $[F(r)]$ à l'interface C_{max} entre la zone modulée et la région (ext), afin d'en déduire la matrice colonne $\left[V^{(j)}(R_{max})\right]$ contenant les amplitudes notée $\left[V_{integ}^{(ext)}(R_{max})\right]$:

$$\left[V_{integ}^{(ext)}(R_{max})\right] = \left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1}\left[F_{integ}(R_{max})\right]. \tag{3.53}$$

En introduisant la matrice notée T_A et définie par :

$$\left[V_{integ}^{(ext)}(R_{max})\right] = T_A\left[V_{init}^{(int)}(R_{min})\right] \tag{3.54}$$

on déduit directement de (3.53) que

$$T_A = \left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1}\left[F_{integ}(R_{max})\right] \tag{3.55}$$

puisque $\left[V_{init}^{(int)}(R_{min})\right] = I_d$. L'équation (3.54) établit alors une relation matricielle entre les amplitudes des champs posées selon l'expression (3.51) en $r = R_{min}$: $\left[V_{init}^{(int)}(R_{min})\right]$, à celles des champs déduits en $r = R_{max}$: $\left[V_{integ}^{(ext)}(R_{max})\right]$ après intégration. La matrice T_A est alors appelée la *matrice de transmission en amplitude* de la zone modulée. Du fait que cette matrice ne dépende que du système physique et non des champs (linéarité des équations), on peut affirmer que cette relation reste vraie pour tout champ, en particulier pour l'onde plane incidente et les champs diffractés dans chaque région (int) et (ext). On peut désormais relier n'importe quel type de champ électromagnétique en $r = R_{min}$: $\left[V^{(int)}(R_{min})\right]$ et en $r = R_{max}$: $\left[V^{(ext)}(R_{max})\right]$, d'après la forme générale de la relation (3.54) :

$$\left[V^{(ext)}(R_{max})\right] = T_A\left[V^{(int)}(R_{min})\right] \tag{3.56}$$

La seconde méthode d'intégration consiste cette fois-ci à imposer arbitrairement, non pas des amplitudes des champs ($\left[V^{(int)}(R_{min})\right]$) comme conditions initiales, mais directement leurs coefficients de Fourier $[F(R_{min})]$. Ainsi, on définit les $4(2N+1)$ matrices colonnes suivantes notées $\left[\hat{F}_p\right]$ ($p \in [1, 4(2N+1)]$) de $4(2N+1)$ lignes :

$$\forall i \in [4(2N+1)]\,,\ \left(\left[\hat{F}_p\right]\right)_i = \delta_{ip} \tag{3.57}$$

et disposées dans une matrice notée $[F_{init}(R_{min})]$, selon

$$[F_{init}(R_{min})] = \left(\dots \left[\hat{F}_p \right] \dots \right) = I_d.$$

Cette matrice constitue un ensemble de vecteurs de tir linéairement indépendants qui vont être directement utilisés en tant que coefficients de Fourier de champs initiaux pour l'intégration du système différentiel (2.109). Après intégration à travers la zone modulée, on trouve en $r = R_{max}$, la matrice des coefficients de Fourier des champs associés à la matrice $[F_{init}(R_{min})]$ et notée $[F_{integ}(R_{max})]$. De manière triviale, on peut écrire que $[F_{integ}(R_{max})] = [F_{integ}(R_{max})]\, I_d = [F_{integ}(R_{max})]\, [F_{init}(R_{min})]$. En introduisant la matrice notée T_C définie par :

$$T_c = [F_{integ}(R_{max})] \tag{3.58}$$

on obtient la relation matricielle

$$[F_{integ}(R_{max})] = T_c\, [F_{init}(R_{min})] \tag{3.59}$$

qui relie les coefficients de Fourier du champ, posés selon (3.57) en $r = R_{min}$: $[F_{init}(R_{min})]$, à ceux obtenus après intégration en $r = R_{max}$: $[F_{integ}(R_{max})]$. La matrice T_C est alors appelée la *matrice de transmission des champs* de la zone modulée. Comme pour la matrice de transmission en amplitude, l'indépendance de la matrice T_C vis-à-vis des champs permet de généraliser la relation (3.59) à tout autre champ électromagnétique :

$$[F(R_{max})] = T_c\, [F(R_{min})] \tag{3.60}$$

La première méthode d'intégration présente de nombreux inconvénients. Tout d'abord, les vecteurs de tir sont définis par les colonnes de la matrice $[F_{init}(R_{min})] = \Psi^{(int)}(R_{min})$ qui doivent être linéairement indépendantes. D'après l'expression (3.41) de la matrice $\Psi^{(int)}(R_{min})$, il faut donc s'assurer que cette condition soit toujours respectée. Ensuite, beaucoup de termes de cette matrice s'expriment selon les fonctions de Hankel (3.43) qui sont singulières à l'origine et donc peuvent diverger si l'argument $k_{t,j} R_{min}$ est faible par rapport à l'ordre n. Si au moins un de ces deux problèmes apparaît, l'intégration est alors initialement mal conditionnée. Ceci n'est pas le cas pour la seconde méthode d'intégration puisqu'elle prend tout simplement la matrice identité comme ensemble de vecteurs de tir (champs initiaux). Par défaut, on utilise alors dans le code numérique la seconde méthode d'intégration, c'est-à-dire le calcul de la matrice de transmission des champs T_C.

3.2.2 Résolution du problème de diffraction

Le problème de diffraction est considéré comme résolu dès lors que sont connues les expressions des champs diffractés dans les régions (int) et (ext) en fonction de celles des champs incidents. Or, la description des champs réels, à savoir l'onde plane incidente et le champ diffracté, s'effectue par leurs amplitudes : $\left[A^{(inc)}(r)\right]$ (3.49) pour l'onde plane incidente, puis $\left[A^{(int)}(r)\right]$ (3.37) et $\left[B^{(ext)}(r)\right]$ (3.38) pour le champ diffracté. Il est donc nécessaire de toujours se ramener à l'utilisation de la matrice de transmission en amplitude T_A. Par conséquent, on doit utiliser la relation suivante qui permet de déduire la matrice de T_A connaissant la matrice de transmission des champs T_C :

$$T_A = \left\{ \Psi^{(ext)}(R_{max}) \right\}^{-1} T_C \Psi^{(int)}(R_{min}) \tag{3.61}$$

Par souci de simplification d'écriture, nous ne distinguons plus dans la notation la matrice de transmission en amplitude et celle des champs en notant désormais $T_A = T$. En remplaçant dans l'équation (3.56) les matrices colonnes par les amplitudes des champs diffractés et incidents, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \\ \left[B^{(ext)}(R_{max})\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left[A^{(int)}(R_{max})\right] \\ [0] \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

ce qui permet d'aboutir à l'expression des amplitudes recherchées des champs diffractés en fonction de celles connues de l'onde plane incidente :

$$\left[A^{(int)}(R_{min})\right] = \{T_{11}\}^{-1}\left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{3.63}$$

$$\left[B^{(ext)}(R_{max})\right] = T_{21}\{T_{11}\}^{-1}\left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{3.64}$$

La connaissance des amplitudes des champs diffractés grâce à ces dernières équations (3.63) et (3.64), permet de calculer la valeur du champ électromagnétique en tout point des régions (int) et (ext) à l'aide de l'équation (3.40).

On remarque que la résolution du problème de diffraction s'effectue à travers l'inversion du bloc T_{11} de la matrice de transmission en amplitude. Ce bloc ayant pour dimension $2(2N+1)\times 2(2N+1)$ risque de devenir difficilement inversible numériquement si l'ordre de troncature N devient trop grand. En fait, ce problème, ainsi qu'une série d'autres ennuis numériques intervenant lors de l'intégration du système différentiel (2.109), peuvent alors rendre les résultats numériques mal conditionnés, voire complètement faux, justifiant l'emploi de l'algorithme de propagation de la matrice S décrit plus loin.

3.2.3 Matrice de transmission d'une couche homogène et isotrope

Nous avons introduit, dans la résolution du problème de diffraction, la matrice de transmission de la zone modulée pour une surface cylindrique de profil arbitraire. On peut envisager de déterminer la matrice de transmission d'une région de l'espace comprise entre deux cylindres circulaires centrés sur l'origine et ne contenant pas de surface de diffraction (voir figure 3.3). Cette couche est remplie d'un milieu non magnétique, diélectrique homogène et isotrope de permittivité complexe ϵ_H. Les interfaces, notées C_{min} et C_{max}, sont des cylindres circulaires de rayons respectifs R_{min} et R_{max}. Dans un cadre général, ne connaissant pas a priori la constitution des milieux encadrant cette couche homogène et isotrope, on introduit aux interfaces C_{min} et C_{max}, deux couches homogènes et isotropes, infiniment fines (donc d'épaisseur nulle), remplies du même milieu que celui qui constitue la région (ext) du système précédent de permittivité ϵ_{ext} (voir figures (2.3(a)) et (2.3(b))). On cherche une expression de la matrice de transmission en amplitude de cette couche, en utilisant la relation entre les coefficients de Fourier des champs et leurs amplitudes (3.40) et en utilisant la continuité des champs à chacune des interfaces. Par définition, cette matrice notée $T^{(H)}$ est définie par

$$\left[V^{(ext)}(R_{max})\right] = T^{(H)}\left[V^{(ext)}(R_{min})\right] \tag{3.65}$$

On se place tout d'abord à l'interface $r = R_{max}$ pour laquelle on applique la relation (3.40) à la fois pour le milieu (ext) de la couche infiniment fine et le milieu (H) de la couche homogène. Ensuite la continuité de la matrice colonne $[F(R_{max})]$ à travers cette interface implique que :

$$\left[V^{(ext)}(R_{max})\right] = \left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1}\Psi^{(H)}(R_{max})\left[V^{(H)}(R_{max})\right] \tag{3.66}$$

On cherche désormais à relier $\left[V^{(H)}(R_{max})\right]$ et $\left[V^{(H)}(R_{min})\right]$. Or ces matrices colonnes dépendent, par définition, de la coordonnée r puisque leurs termes sont calculés avec les fonctions de Bessel et de Hankel (équations (3.37), (3.38) et (3.39)). On définit alors la matrice colonne $\left[W^{(H)}\right]$ constituée seulement des amplitudes $A^{(H)}_{e,n}$, $A^{(H)}_{h,n}$, $B^{(H)}_{e,n}$ et $B^{(H)}_{h,n}$ qui sont constantes à l'intérieur de la couche homogène (H). La matrice colonne $\left[V^{(H)}(r)\right]$ avec $R_{min} \le r \le R_{max}$ s'exprime en fonction de $\left[W^{(H)}\right]$ selon la relation :

$$\left[V^{(H)}(r)\right] = C^{(H)}(r)\left[W^{(H)}\right] \tag{3.67}$$

avec la matrice diagonale $C^{(H)}(r)$ définie par :

$$C^{(H)}(r) = \begin{pmatrix} s' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t' \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} (s')_{nm} = J_n\left(k_{t,H}r\right)\delta_{nm} \\ (t')_{nm} = H^+_n\left(k_{t,H}r\right)\delta_{nm} \end{cases} \tag{3.68}$$

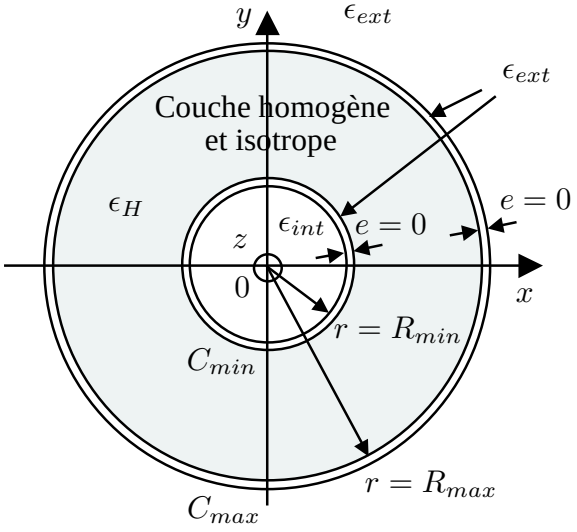


FIG. 3.3 – Représentation d'une couche homogène et isotrope encadrée par deux autres couches infiniment fines

En appliquant la relation (3.67) aux deux interfaces $r = R_{min}$ et $r = R_{max}$, on obtient la relation entre $\left[V^{(H)}(R_{max})\right]$ et $\left[V^{(H)}(R_{min})\right]$:

$$\left[V^{(H)}(R_{max})\right] = C^{(H)}(R_{max}) \left\{C^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \left[V^{(H)}(R_{min})\right]$$

que l'on injecte dans l'équation (3.66) pour obtenir :

$$\left[V^{(ext)}(R_{max})\right] = \left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1} \Psi^{(H)}(R_{max}) C^{(H)}(R_{max}) \left\{C^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \left[V^{(H)}(R_{min})\right] \quad (3.69)$$

Le même raisonnement que celui effectué à l'interface $r = R_{max}$ pour écrire la relation (3.66), appliqué cette fois-ci à l'interface $r = R_{min}$, conduit à l'expression de $\left[V^{(H)}(R_{min})\right]$:

$$\left[V^{(H)}(R_{min})\right] = \left\{\Psi^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \Psi^{(ext)}(R_{min}) \left[V^{(ext)}(R_{min})\right] \quad (3.70)$$

que l'on remplace dans la relation (3.69) pour finalement trouver la relation recherchée entre $\left[V^{(ext)}(R_{max})\right]$ et $\left[V^{(ext)}(R_{min})\right]$:

$$\begin{aligned}\left[V^{(ext)}(R_{max})\right] = &\left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1} \Psi^{(H)}(R_{max}) C^{(H)}(R_{max}) \left\{C^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \\ &\left\{\Psi^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \Psi^{(ext)}(R_{min}) \left[V^{(ext)}(R_{min})\right]\end{aligned} \quad (3.71)$$

Par identification avec la relation (3.65), on en déduit l'expression de la matrice de transmission en amplitude $T^{(H)}$ de la couche homogène :

$$T^{(H)} = \left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1} \Psi^{(H)}(R_{max}) C^{(H)}(R_{max}) \left\{C^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \left\{\Psi^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1} \Psi^{(ext)}(R_{min}) \quad (3.72)$$

Il est important de préciser qu'aucune intégration n'a été nécessaire pour trouver cette relation, ce qui présente un avantage certain en terme de temps de calcul et de précision. La matrice $T^{(H)}$ s'exprime donc en terme de produits de matrices ayant des expressions analytiques. Toutefois, il ne faut pas croire que, dans la pratique, les termes de la matrice $T^{(H)}$ ont une détermination purement analytique. En effet, la troncature de développement à l'ordre N nécessaire pour l'application numérique de la méthode, rend les matrices $\Psi^{(j)}(r)$ et $C^{(H)}(r)$ de dimensions finies ; elles ne contiennent donc pas tous les coefficients nécessaires à l'exacte description des champs dans l'espace de Fourier. Par conséquent, chacun des termes

de la matrice $T^{(H)}$ issus des produits de ces matrices, dépend de l'ordre de troncature N. Le calcul de $T^{(H)}$ est qualifié du terme "semi-analytique" du fait que, dans la relation 3.72, les matrices $\Psi^{(j)}(r)$ et leurs inverses soient calculés analytiquement, mais que les produits matriciels soient nécessairement effectués numériquement.

3.3 Algorithme de propagation de la matrice S

3.3.1 Problèmes de contamination numérique

Le but de l'algorithme T [56] est d'intégrer le système différentiel en une seule fois à travers toute la zone modulée, c'est-à-dire de $r = R_{min}$ à $r = R_{max}$. Or deux principales causes peuvent engendrer des problèmes numériques pouvant se propager et s'accroître durant cette intégration. La première concerne le bon conditionnement des matrices $\Psi^{(j)}(r)$ intervenant au début et/ou à la fin de l'intégration, alors que la seconde apparaît pendant l'intégration lorsque la zone modulée est trop épaisse. De plus, on sait que la détermination des coefficients de Fourier des champs diffractés s'effectue par l'inversion du bloc T_{11} (équations (3.63) et (3.64)). Ainsi, si ce bloc est mal conditionné, c'est-à-dire s'il contient des valeurs trop élevées, des pertes de digits risquent d'intervenir lors de son inversion pouvant rendre les résultats complètement faux.

Problèmes numériques liés au conditionnement des matrices $\Psi^{(j)}(r)$.

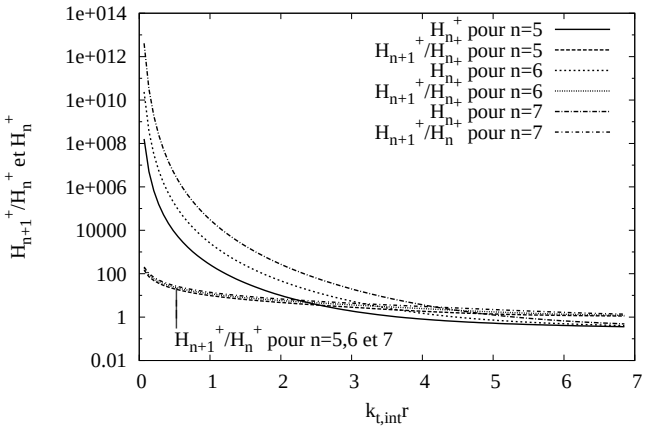


FIG. 3.4 – Comparaison des divergences de $H_n^+(k_{t,int}r)$ et $\frac{H_{n+1}^+(k_{t,int}r)}{H_n^+(k_{t,int}r)}$ lorsque l'argument tend vers 0

Ce genre de problème est directement associé au comportement des fonctions de Hankel qui apparaissent dans les matrices $\Psi^{(j)}(r)$ (3.41). Ils deviennent alors intrinsèquement liés au système de coordonnées cylindriques et ne peuvent pas être observés en coordonnées cartésiennes (réseaux). En effet, le calcul des matrices de transmission de la zone modulée nécessite celui des matrices $\Psi^{(int)}(R_{min})$ et $\Psi^{(ext)}(R_{max})$. Or ces deux types de matrices peuvent contenir des termes très élevés pouvant dépasser la capacité de l'ordinateur et rendant finalement l'inversion du bloc T_{11} difficile. Quel que soit le calculateur choisi (PC de bureau 32 bits ou ordinateurs 64 bits), les nombres complexes sont codés par le compilateur sur 32 bits (déclaration "complex*16" en FORTRAN), soit 16 bits pour chacune des parties réelle et imaginaire. Par conséquent, un nombre réel (partie réelle ou imaginaire d'un nombre complexe) ne peut dépasser la valeur seuil 10^{15} sans perte de digits. Dans le cas du second type d'intégration (la matrice des vecteurs de tir initiaux est l'identité), les matrices $\Psi^{(int)}(R_{min})$ et $\Psi^{(ext)}(R_{max})$ sont utilisées à la fin de l'intégration pour obtenir la matrice T_A selon l'équation (3.61). Par contre, la matrice $\Psi^{(int)}(R_{min})$ sert de matrice de vecteurs de tir initiaux, dans le cas du premier type d'intégration. Si cette matrice est mal conditionnée, on ne sera donc pas étonné que l'intégration le soit également, aboutissant à

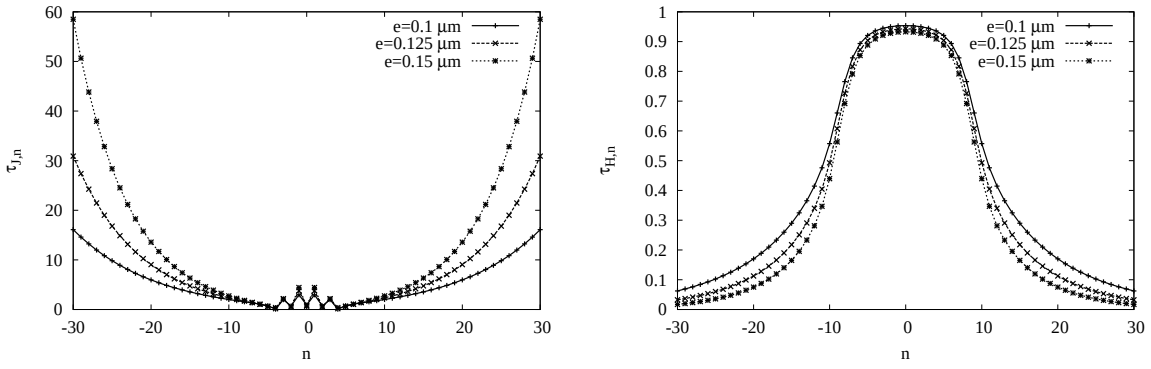
des résultats erronés. Mais, revenons plus en détail dans l'explication de la divergence des termes des matrices $\Psi^{(int)}(R_{min})$ et $\Psi^{(ext)}(R_{max})$. Elle est justifiée par les singularités des fonctions de Hankel à l'origine. On comprend alors mieux pourquoi nous avons choisi de faire intervenir les fonctions de Bessel et de Hankel ($J_n(k_{t,j}r)$ et $H_n^+(k_{t,j}r)$) dans les éléments des matrices colonnes $\left[A^{(j)}(r)\right]$ et $\left[B^{(j)}(r)\right]$ afin d'effectuer une sorte de "normalisation" des matrices $\Psi^{(j)}(r)$ et $\Psi_r^{(j)}(r)$ par ces fonctions. Grâce à cela, ces matrices contiennent les éléments de q_h (rapport $\frac{H_{n+1}^+(k_{t,j}r)}{H_n^+(k_{t,j}r)}$, voir équation (3.43)) et non directement les fonctions $H_n^+(k_{t,j}r)$ ou $H_{n+1}^+(k_{t,j}r)$. Or, proche de la singularité (l'origine), les éléments de q_h ont des divergences nettement moins importantes que celles des fonctions $H_n^+(k_{t,j}r)$ ou $H_{n+1}^+(k_{t,j}r)$. Par exemple, la figure 3.4 montre la comparaison entre $\frac{H_{n+1}^+(k_{t,int}r)}{H_n^+(k_{t,int}r)}$ et $H_n^+(k_{t,int}r)$ évalués au voisinage de l'origine ($r = 0$ à 1) pour différentes valeurs de n : $n = 5$, 6 et 7. Les paramètres intervenant dans $k_{t,int}$ sont choisis tels que $n_{int} = 1.2$, $\lambda = 1\ \mu m$ et $\varphi = 30^o$. On observe toutefois que les divergences des courbes lorsque l'argument $k_{t,int}$ des fonctions tend vers 0 s'accentuent lorsque n augmente.

Ainsi, on constate que la singularité des fonctions de Hankel à l'origine ne peut pas être évitée mais limitée par la normalisation des matrices $\Psi^{(j)}(r)$ par les termes $J_n(k_{t,j}r)$ et $H_n^+(k_{t,j}r)$. Dans la pratique, on s'efforce de prendre des valeurs de R_{min} les plus éloignées possible de l'origine. En revanche, on pourrait s'attendre à ce que les termes de q_e divergent également lorsque $k_{t,j}r \to 0$. En fait, ce n'est pas le cas puisqu'en utilisant la relation asymptotique $J_n(\zeta) \sim \frac{\zeta^n}{2^n n!}$ quand ζ tend vers 0 pour n fixé (page 513 de la référence [93]), on montre que $\frac{J_{n+1}(\zeta)}{J_n(\zeta)} \sim \frac{\zeta}{2(n+1)}$ tend vers 0 lorsque n augmente.

Problèmes numériques liés à l'épaisseur de la zone modulée .

Lors des premières applications de la méthode différentielle aux réseaux de diffraction, ces problèmes sont restés longtemps sans véritable solution. Les scientifiques trouvaient des résultats cohérents et d'assez bonnes précisions [95, 96] tant que les réseaux n'étaient pas trop profonds et ne présentaient pas de forte conductivité. Pourtant, ils ont très vite établi le lien entre ce genre de problèmes et le processus d'intégration et les ont identifiés à la divergence de certains termes de la matrice de transmission. Il fallut attendre 1996 pour que Lifeng Li propose un algorithme, l'algorithme de propagation de la matrice S, qui puisse résoudre les problèmes liés aux contaminations numériques [64]. Lorsque nous avons implémenté la version présentée ici de la méthode différentielle pour le système de coordonnées cylindriques, nous nous sommes interrogés sur l'existence de ces problèmes numériques. Comme nous pouvions le soupçonner, ils apparaissent bien dans le processus d'intégration dès que l'épaisseur de la zone modulée devient trop importante. Leur explication dans le cas cylindrique est semblable à celle dans le cas cartésien. D'un point de vue numérique, des pertes de digits peuvent se produire durant l'intégration, dès lors que les éléments des vecteurs de tir (constitués des coefficients de Fourier des champs intégrés) croîssent jusqu'à dépasser la valeur numérique seuil (10^{15}). Ces vecteurs de tir initialement linéairement indépendants peuvent donc perdre leur orthogonalité qui risque de s'empirer tout au long du processus d'intégration : il s'agit des contaminations numériques en question. Il reste à expliquer la croissance, voire la divergence, des termes de la matrice de transmission pendant l'intégration.

L'exemple de la couche homogène et isotrope permet de bien illustrer le problème. On suppose pour simplifier que les milieux sont des diélectriques non conducteurs. Nous allons alors établir la divergence des termes de la matrice de transmission d'une couche homogène et isotrope donnée par son expression semi-analytique (3.72), en fonction de son épaisseur $e = R_{max} - R_{min}$. Les cinq produits matriciels qui constituent le terme de droite de (3.72) peuvent se scinder en trois parties. Il y a d'abord les deux produits : $\left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1}\Psi^{(H)}(R_{max})$ et $\left\{\Psi^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1}\Psi^{(ext)}(R_{min})$, aux deux extrémités de cette série de produits, qui proviennent de la continuité des champs aux interfaces $r = R_{max}$ et $r = R_{min}$ respectivement. Pour chacun de ces produits, les matrices $\Psi^{(j)}(r)$ (3.41) qui y interviennent ne diffèrent que par l'indice des milieux pour lesquels elles sont calculées. En supposant pour l'instant que l'écart de ces indices ne soit pas trop important, on en déduit que ces produits matriciels ont des termes proches de l'unité. Ensuite, le produit central $C^{(H)}(R_{max})\left\{C^{(H)}(R_{min})\right\}^{-1}$ va attirer toute notre attention puisqu'il correspond à la traversée



(a) Fonction $\tau_{J,n}$ (b) Fonction $\tau_{H,n}$

FIG. 3.5 – $\tau_{J,n}$ et $\tau_{H,n}$ en fonction de n pour différentes valeurs de e

de la couche entre ses deux interfaces et conditionne alors la matrice $T^{(H)}$. D'après les définitions des matrices $C^{(H)}(r)$ (3.68), on se rend bien compte que ce produit matriciel est une matrice diagonale contenant les deux types de rapport :

$$\tau_{J,n} = \frac{J_n\left(k_{t,H}R_{max}\right)}{J_n\left(k_{t,H}R_{min}\right)} \text{ et } \tau_{H,n} = \frac{H_n^+\left(k_{t,H}R_{max}\right)}{H_n^+\left(k_{t,H}R_{min}\right)}$$

avec $n \in [-N, +N]$. Les figures 3.5(a) et 3.5(b) montrent l'évolution de ces rapports en fonction de n avec $N = 30$ et pour différentes valeurs d'épaisseur de la couche homogène et isotrope d'indice $n_H = 1.2$ à $\lambda = 1\ \mu m$: $R_{min} = 1\ \mu m$ est fixé et $R_{max} = e + R_{min}$ avec $e = 0.1$, 0.125 et 0.15 μm. Les autres paramètres sont $\varphi = 30^o$ et $n_{ext} = 1$. On constate deux faits : la croissance exponentielle des rapports $\tau_{J,n}$ en fonction n, puis leur croissance lorsque e augmente. En effet, on montre que le développement asymptotique des fonctions de Bessel selon n donné par (page 365 de la référence [92]) conduit à $\tau_{J,n} \sim \left(\frac{R_{max}}{R_{min}}\right)^n$ lorsque n devient grand. Or le fait que $R_{max} > R_{min}$ justifie les divergences observées de $\tau_{J,n}$ selon n, qui s'accentuent lorsque l'épaisseur de la couche augmente (lorsque R_{max} augmente avec R_{min} fixé). Par contre, les rapports $\tau_{H,n}$ semblent converger vers 0 lorsque n et e augmentent. Ce résultat n'est pas trivial puisque les fonctions de Hankel sont singulières à l'origine et l'intervalle (encadrant le point d'origine des arguments) sur lequel s'étend ces singularités s'élargit avec l'ordre n. Autrement dit, pour un argument $k_{t,H}r$ fixé, la valeur de $H_n^+\left(k_{t,H}r\right)$ tend vers l'infini lorsque n augmente. La convergence vers 0 de $\tau_{H,n}$ quand n croît n'est donc pas évidente. Si l'épaisseur devient trop grande, la valeur $\tau_{J,n}$ risque alors de dépasser la valeur numérique seuil 10^{15} : dans notre exemple, lorsque $e = 4\ \mu m$ on a $\tau_{J,30} \approx 10^{15}$. D'après la définition de la matrice $T^{(H)}$ (3.72), on vérifie rapidement que les termes $\tau_{J,n}$ interviennent directement dans le bloc $T_{11}^{(H)}$; ce dernier devenant alors difficilement inversible numériquement. On remarque alors que, malgré le comportement différent (voir section 3.1.3) des fonctions de base en coordonnées cylindriques (J_n et H_n^+) par rapport à celui des fonctions de base en coordonnées cartésiennes (les fonctions exponentielles), les éléments de la matrice $T^{(H)}$ divergent de la même manière pour les deux systèmes de coordonnées. Ils peuvent croître (exponentiellement) quand n et e augmentent. On admettra que ce résultat obtenu pour une couche homogène et isotrope reste valable pour la plupart des zones modulées que nous allons considérer.

3.3.2 Description de l'algorithme

Définition de la matrice S .

Pour simplifier l'écriture, l'algorithme de propagation de la matrice S sera désormais dénommé *algorithme S*. Son principe est d'éviter la divergence des éléments de la matrice T lors du processus d'intégration, c'est-à-dire lorsque r augmente. Pour cela, on subdivise arbitrairement la

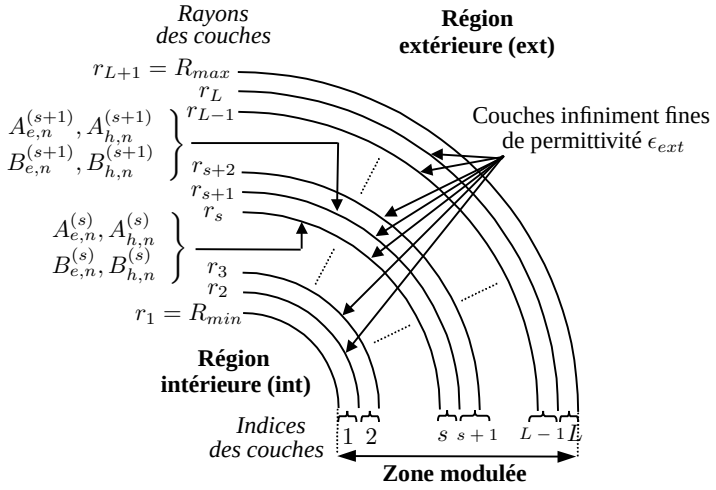


FIG. 3.6 – Subdivision de la zone modulée pour l'algorithme S

zone modulée en $L \in \mathbb{N}$ sous-zones modulées notées (s) avec $s \in [1, L]$, qui sont appelées par la suite *couches S*. Chaque couche S est alors comprise entre deux cylindres circulaires (centrés sur l'origine) de rayons r_s et r_{s+1} (avec $r_1 = R_{min}$ et $r_{L+1} = R_{max}$, voir figure 3.6). On introduit à chaque interface r_s une couche, homogène et isotrope infiniment fine, d'indice ϵ_{ext} sauf pour la première interface r_1 pour laquelle on prend ϵ_{int}, ce qui permet de définir en plein coeur de la zone modulée les amplitudes du champ électromagnétique écrites dans les matrices colonnes $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$ et $\left[B^{(j_s)}(r_s)\right]$ avec $j_s = int$ pour $s = 1$ et $j_s = ext$ si $s > 1$ (généralisation des notations (3.37) et (3.38)). Pour chacune des couches S, le système différentiel est intégré suivant l'algorithme T décrit précédemment (voir section 3.2), ce qui fournit la matrice de transmission $T^{(s)}$ qui relie les amplitudes des champs en r_{s+1} à ceux en r_s :

$$\begin{pmatrix} \left[A^{(j_{s+1})}(r_{s+1})\right] \\ \left[B^{(j_{s+1})}(r_{s+1})\right] \end{pmatrix} = T^{(s)} \begin{pmatrix} \left[A^{(j_s)}(r_s)\right] \\ \left[B^{(j_s)}(r_s)\right] \end{pmatrix} \text{ avec } s \in [1, L] \tag{3.73}$$

La subdivision de la zone modulée est choisie de telle manière que les éléments de la matrice $T^{(s)}$ ne dépassent pas la valeur seuil $\pm 10^{15}$, afin que les problèmes de contamination numérique n'apparaissent pas. On introduit pour chaque interface $r_{s'}$ $(s' \in [1, L+1])$ une matrice notée $S^{(s')}$ dont on s'assure du bon conditionnement numérique de ses éléments (on admettra cette assertion, voir la preuve pour une couche homogène et isotrope dans le système de coordonnées cartésiennes aux pages 64 et 65 de la référence [56]) et définie par :

$$\begin{pmatrix} \left[B^{(j_{s'})}(r_{s'})\right] \\ \left[A^{(int)}(R_{min})\right] \end{pmatrix} = S^{(s')} \begin{pmatrix} \left[B^{(int)}(R_{min})\right] \\ \left[A^{(j_{s'})}(r_{s'})\right] \end{pmatrix} \text{ avec } s' \in [1, L+1] \tag{3.74}$$

On constate aisément que $S^{(1)} = I_d$. Comme précédemment, on note les blocs des matrices $T^{(s)}$ et $S^{(s')}$ de la manière suivante :

$$T^{(s)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(s)} & T_{12}^{(s)} \\ T_{21}^{(s)} & T_{22}^{(s)} \end{pmatrix} \text{ et } S^{(s')} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(s')} & S_{12}^{(s')} \\ S_{21}^{(s')} & S_{22}^{(s')} \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Après chaque intégration d'une couche (s), la matrice $S^{(s+1)}$ de l'interface r_{s+1} est déduite de la matrice $S^{(s)}$ de l'interface r_s et de la matrice $T^{(s)}$ de la couche (s), selon :

$$Z^{(s)} = \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)}\right]^{-1} \tag{3.76}$$

$$S_{22}^{(s+1)} = S_{22}^{(s)} Z^{(s)} \tag{3.77}$$

$$S_{12}^{(s+1)} = \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)}\right] Z^{(s)} \tag{3.78}$$

$$S_{21}^{(s+1)} = S_{21}^{(s)} - S_{22}^{(s+1)} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} \tag{3.79}$$

$$S_{11}^{(s+1)} = T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} - S_{12}^{(s+1)} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} \tag{3.80}$$

Ces relations sont démontrées dans l'annexe A. On peut être convaincu du bon conditionnement de la matrice $S^{(s+1)}$ qui est assuré par la matrice $Z^{(s)}$. En effet, les éléments de $Z^{(s)}$ tendent vers de faibles valeurs lorsque ceux du bloc $T_{11}^{(s)}$ croîssent, grâce à l'inversion. Cette inversion n'engendre aucune erreur numérique puisque la subdivision de la zone modulée est telle que les éléments des blocs de $T^{(s)}$ ont des valeurs inférieures à la valeur numérique critique. D'une intégration d'une couche à une autre, le long de toute la zone modulée, la matrice $S^{(s')}$ ($s' \in [1, L+1]$) reste donc bien conditionnée. Finalement, on peut résumer l'algorithme S par le tableau 3.2.

N^o Couche	Matrice de tir initale	Matrice T	Matrice S
Initialisation			$S^{(1)} = I_d$
1	$\Psi^{(int)}(r_1)$	$T_A^{(1)} = \left\{\Psi^{(ext)}(r_2)\right\}^{-1}\left[F_{integ}^{(s)}(r_2)\right]$	$S^{(2)}\left(S^{(1)}, T_A^{(1)}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s-1$	$\Psi^{(ext)}(r_{s-1})$	$T_A^{(s-1)} = \left\{\Psi^{(ext)}(r_s)\right\}^{-1}\left[F_{integ}^{(s-1)}(r_s)\right]$	$S^{(s)}\left(S^{(s-1)}, T_A^{(s-1)}\right)$
s	$\Psi^{(ext)}(r_s)$	$T_A^{(s)} = \left\{\Psi^{(ext)}(r_{s+1})\right\}^{-1}\left[F_{integ}^{(s)}(r_{s+1})\right]$	$S^{(s+1)}\left(S^{(s)}, T_A^{(s)}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L	$\Psi^{(ext)}(r_L)$	$T_A^{(L)} = \left\{\Psi^{(ext)}(r_{L+1})\right\}^{-1}\left[F_{integ}^{(L)}(r_{L+1})\right]$	$S^{(L+1)}\left(S^{(L)}, T_A^{(L)}\right)$

TAB. 3.2 – Principe de l'algorithme S

Résolution du problème de diffraction .

A la fin de l'intégration de toutes les couches (s), le calcul aboutit à la matrice $S^{(L+1)}$, notée simplement S, puisqu'elle devient la matrice S de toute la zone modulée qui relie les champs diffractés en $r = R_{max}$ et $r = R_{min}$ aux champs incidents :

$$\begin{pmatrix} \left[B^{(ext)}(R_{max})\right] \\ \left[A^{(int)}(R_{min})\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [0] \\ \left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

d'où on déduit directement l'expression des champs diffractés :

$$\left[A^{(int)}(R_{min})\right] = S_{22}\left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{3.82}$$

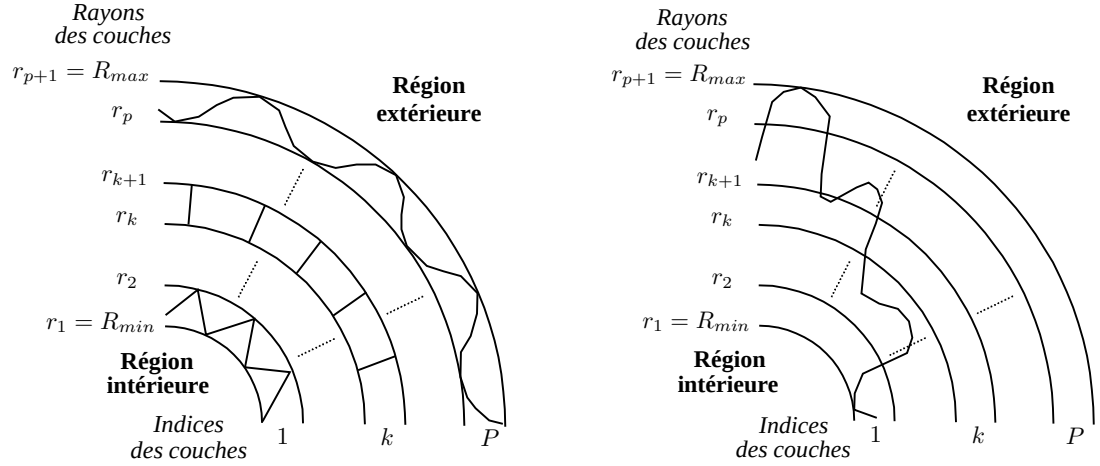
$$\left[B^{(ext)}(R_{max})\right] = S_{12}\left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{3.83}$$

3.3.3 Généralisation à des systèmes multicouches

L'algorithme S présente l'avantage de subdiviser l'unique zone modulée initialement définie, en plusieurs couches S chacune d'entre elles étant traitée comme une zone modulée. En fait, leur contenu (milieux, surfaces) n'altère en rien le principe de cet algorithme. On peut alors le généraliser à des systèmes distingués en deux catégories :

- un "empilement" de systèmes cylindriques non superposables comme illustré par la figure 3.7(a).
- un seul système (une surface) dont la zone modulée est subdivisée en plusieurs sous-zones modulées (voir figure 3.7(b)), pour diverses raisons (améliorer la précision de calcul préférentiellement dans une région de la zone modulée, par exemple).

Bien sûr, on peut ensuite considérer toute combinaison de ces deux types de systèmes. Dans les deux précédents cas, il existe $P \in \mathbb{N}$ zones modulées successives séparées par $P+1$ interfaces (cylindres



(a) Empilement de systèmes cylindriques non superposables

(b) Subdivision arbitraire de la zone modulée d'un système cylindrique en plusieurs zones modulées

FIG. 3.7 – Généralisation de l'algorithme S à un système multicouche

circulaires centrés sur l'origine) pour lesquelles on applique rigoureusement le même algorithme S que celui utilisé pour les L zones modulées introduites précédemment (voir figure 3.6).

Il est intéressant de préciser que l'algorithme S peut parfaitement être appliqué à une couche homogène et isotrope dont le calcul de la matrice T a été explicité en 3.2.3. En effet, le problème de contamination numérique a été illustré sur cet exemple. Ceci s'avère utile pour des systèmes multicouches dont certaines d'entre elles ne contiennent pas de surface de diffraction et sont donc homogènes et isotropes.

3.4 Implémentation de la méthode différentielle

Dans un premier temps, l'algorithme du programme va être rapidement décrit. Ensuite, nous expliciterons en détail les deux types de données renvoyées par le programme pour les calculs de diffraction : les sections efficaces différentielles et les cartes de champs. Nous rappelerons la définition de la section efficace différentielle qui demeure la grandeur la plus couramment calculée dans les problèmes de diffraction par des structures cylindriques. Nous en profiterons pour énoncer le théorème optique vérifié par le champ diffracté en diffraction conique et adapté à la méthode différentielle. En ce qui concerne les cartes de champs, nous verrons comment les établir à partir de l'algorithme S.

3.4.1 Structure et algorithme du programme

Le programme numérique associé à la méthode différentielle est écrit en langage FORTRAN. Pour l'étude de la diffraction, il a suffi de l'exécuter sur un simple PC 32 bits de bureau (2.6 GHz avec 1 Go de RAM). Ensuite, pour des raisons de flexibilité et de temps de calcul, il a été lancé sur certains calculateurs 64 bits dont est doté le laboratoire : bio64, quio67 sur compilateur opteron. Sauf indication contraire, les calculs présentés ont été exécutés sur les calculateurs du laboratoire. Il n'existe qu'un seul programme numérique de la méthode différentielle (méthode FFF) pour lequel sont implémentées toutes les structures étudiées à la fois en régime diffraction et en recherche de mode (fibres optiques). Le programme réalisé fait appel à des sous-programmes de calcul numérique issus de librairies, notamment pour ce qui concerne le calcul matriciel et le programme d'intégration par la méthode de tir. Ce dernier couple deux méthodes d'intégration numérique : Runge-Kutta pour les premiers points d'intégration et Adams-Mouton pour les autres. Etant donné que cette intégration s'effectue selon r par discrétisation, on voit apparaître un nouveau paramètre : le nombre de pas d'intégration. Ensuite, un sous-programme spécial (utilisant la factorisation LU) permet de calculer l'inverse d'une matrice de taille importante, comme cela peut être le cas dans la méthode différentielle lorsque l'ordre de troncature N devient assez

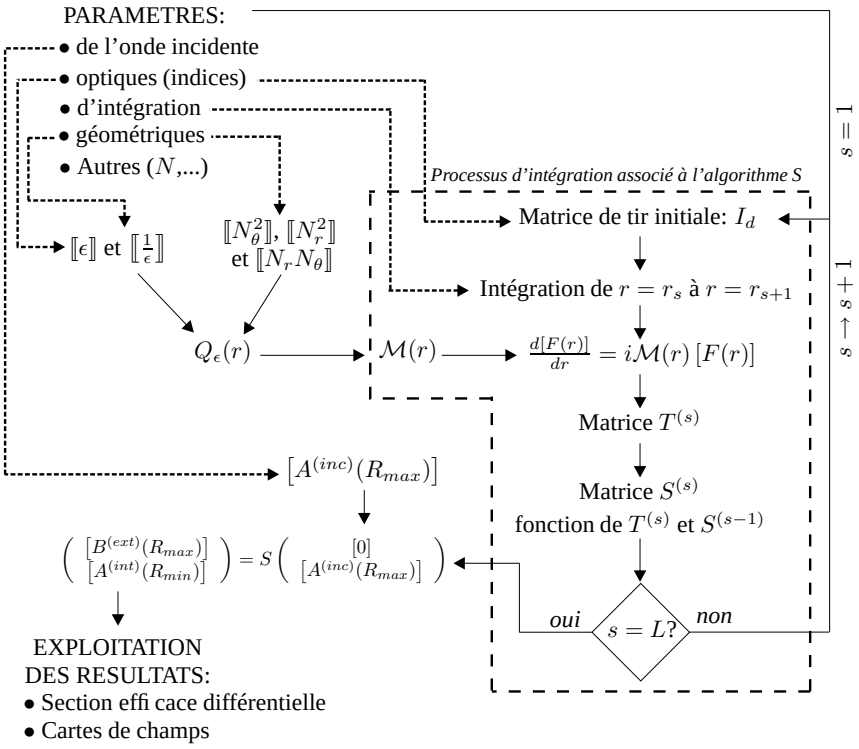


FIG. 3.8 – Algorithme général du programme FORTRAN

grand. Ce programme s'avère utile pour l'inversion de T_{11} dans (3.63) et (3.64), et de la matrice $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$ dans Q_ϵ donnée par l'équation (3.15). Cependant, on a vu qu'il est nécessaire de déterminer l'inverse de certaines matrices $\Psi^{(j)}(r)$ (équations (3.61), (3.72) et le tableau 3.2). Or ces matrices peuvent facilement être inversées analytiquement puisqu'elles sont des matrices diagonales par blocs qui sont eux-mêmes diagonaux (voir la relation (3.41)) :

$$\left\{\Psi^{(j)}(r)\right\}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (q_h-q_e)^{-1}\left(q_h - \frac{\alpha}{k_{t,j}r}\right) & \frac{k_{t,j}}{i\omega\epsilon_j}(q_h-q_e)^{-1} & \frac{\gamma_0}{i\omega\epsilon_j k_{t,j}r}\alpha(q_h-q_e)^{-1} \\ \frac{k_{t,j}}{i\omega\mu_0}(q_e-q_h)^{-1} & \frac{\gamma_0}{i\omega\mu_0 k_{t,j}r}\alpha(q_e-q_h)^{-1} & 0 & (q_h-q_e)^{-1}\left(q_h - \frac{\alpha}{k_{t,j}r}\right) \\ 0 & -(q_h-q_e)^{-1}\left(q_e - \frac{\alpha}{k_{t,j}r}\right) & \frac{k_{t,j}}{i\omega\epsilon_j}(q_e-q_h)^{-1} & \frac{\gamma_0}{i\omega\epsilon_j k_{t,j}r}\alpha(q_e-q_h)^{-1} \\ \frac{k_{t,j}}{i\omega\mu_0}(q_h-q_e)^{-1} & \frac{\gamma_0}{i\omega\mu_0 k_{t,j}r}\alpha(q_h-q_e)^{-1} & 0 & -(q_h-q_e)^{-1}\left(q_e - \frac{\alpha}{k_{t,j}r}\right) \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

Les fonctions de Bessel et de Hankel sont également évaluées grâce à des procédures spéciales. Enfin, suivant le système considéré et le prolongement choisi des fonctions N_r^2, N_θ^2 et $N_r N_\theta$ dans la zone modulée (voir section 2.3.3), il est parfois nécessaire d'utiliser un algorithme de FFT pour calculer certains spectres de Fourier.

L'algorithme général du programme est résumé dans le schéma 3.8. Le programme peut être divisé en trois parties. La première concerne la lecture des paramètres et le calcul de la matrice $Q_\epsilon(r)$ via les matrices de Toeplitz des fonctions ϵ, $\frac{1}{\epsilon}$, N_r^2, N_θ^2 et $N_r N_\theta$, fonctions de la variable r. La seconde partie traite de l'intégration du système différentiel selon l'algorithme S avec, comme données d'entrée, les matrices initiales (l'identité) et la matrice d'intégration $\mathcal{M}(r)$ déduite en partie de $Q_\epsilon(r)$ (3.18). Enfin, la troisième partie concerne le calcul des champs diffractés (équations (3.82) et (3.83)) en fonction du champ incident, puis l'exploitation de ces résultats, soit par le calcul de sections efficaces différentielles, soit par la détermination de cartes de champs.

3.4.2 Section efficace différentielle et théorème optique

La *Section Efficace Différentielle* (SED) est une fonction de la variable angulaire θ déduite de l'expression asymptotique des champs à l'infini ($r \to +\infty$).

Ecriture des champs à l'infini .

Le calcul part du développement en série de Fourier-Hankel (voir le tableau 3.1) des composantes en z du champ électromagnétique total dans la région (ext) dans lequel on remplace les fonctions de Hankel $H_n^+(k_{t,ext}r)$ et $H_n^-(k_{t,ext}r)$ par leurs expressions asymptotiques données par (3.46) lorsque r devient grand devant l'argument :

$$A(r,\theta) \sim u^+(\theta)\frac{e^{ik_{t,ext}r}}{\sqrt{r}} + u^-(\theta)\frac{e^{-ik_{t,ext}r}}{\sqrt{r}} \text{ avec } A \in \{E_z, H_z\} \tag{3.85}$$

D'après les expressions des coefficients de Fourier du champ diffracté ($B_{e,n}^{(ext)}$ et $B_{h,n}^{(ext)}$) et incident (équations (3.8) et (3.9)), on identifie la fonction $u^-(\theta)$ à :

$$u^-(\theta) = A_0^{(inc)}\sqrt{\frac{2\pi}{k_{t,ext}}}e^{i\frac{\pi}{4}}\text{Ш}_{2\pi}\left(\theta - \theta_{inc}\right) \text{ avec } A_0^{(inc)} \in \left\{E_{0,z}^{(inc)}, H_{0,z}^{(inc)}\right\} \tag{3.86}$$

où le peigne de Dirac est défini par $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\zeta} = 2\pi\text{Ш}_{2\pi}(\zeta)$. De même, la fonction $u^+(\theta)$ s'identifie à :

$$u^+(\theta) = g(\theta) + A_0^{(inc)}\sqrt{\frac{2\pi}{k_{t,ext}}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\text{Ш}_{2\pi}\left(\theta - \theta_{inc} - \pi\right) \text{ avec } A_0^{(inc)} \in \left\{E_{0,z}^{(inc)}, H_{0,z}^{(inc)}\right\} \tag{3.87}$$

où

$$g(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_{t,ext}}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=-N}^{+N} B_n^{(ext)}e^{in\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \text{ avec } B_n^{(ext)} \in \left\{B_{e,n}^{(ext)}, B_{h,n}^{(ext)}\right\} \tag{3.88}$$

Dans cette expression, g est notée g_E lorsque $B_n^{(ext)} = B_{e,n}^{(ext)}$ et g_H lorsque $B_n^{(ext)} = B_{h,n}^{(ext)}$.

Expression de la SED .

La SED est la fonction de θ définie par :

$$\sigma(\theta) = \lim_{r\to+\infty}\left(2\pi r\frac{\left\|\vec{E}^d\right\|^2}{\left\|\vec{E}^{inc}\right\|^2}\right) \tag{3.89}$$

En diffraction conique, avec $\left\|\vec{E}^{inc}\right\| = 1$ et d'après les relations (3.85) à (3.88), on montre (page 138 de la référence [9]) que la SED s'exprime par :

$$\sigma(\theta) = 2\pi\frac{k_{ext}^2}{k_{t,ext}^2}\left(\left|g_E(\theta)\right|^2 + Z_{ext}^2\left|g_H(\theta)\right|^2\right) \tag{3.90}$$

On constate que le calcul de la SED nécessite la connaissance des amplitudes du champ incident (équations (2.49) et (2.50)) et celles du champ diffracté dans la région (ext). Or, après intégration par l'algorithme S, on ne détermine pas directement les amplitudes mais les éléments de $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ qui contiennent les amplitudes multipliées par les fonctions de Bessel et de Hankel évaluées en $r = R_{max}$ (3.83). Pour en déduire les amplitudes disposées dans la matrice colonne $\left[W^{(ext)}\right]$, il suffit alors d'appliquer la relation (3.67) généralisée au milieu (ext) : $\left[W^{(ext)}\right] = \left\{C^{(ext)}(r)\right\}^{-1}\left[V^{(ext)}(r)\right]$.

Le théorème optique .

Le théorème optique a pour origine le théorème de Poynting. Ce dernier énonce que le flux du vecteur de Poynting du champ électromagnétique total (champ incident et champ diffracté) à travers une surface fermée est égal au débit d'énergie électromagnétique qui s'échappe du domaine contenu dans cette surface. Dans le cas des milieux sans pertes (permittivité réelle), le théorème de Poynting montre que le flux du vecteur de Poynting se conserve à travers la surface fermée. On considère un cylindre circulaire C (surface fermée) de vecteur unitaire normal extérieur $\vec{n}$ et contenant une des structures cylindriques que nous pouvons envisager dans notre étude (voir figure 2.2). On se place dans le cas de milieux sans pertes et non conducteurs. Le théorème de Poynting s'écrit alors :

$$\int_C \left(\vec{E} \wedge \vec{H}^* + \vec{E}^* \wedge \vec{H}\right) .\vec{n} ds = 0 \tag{3.91}$$

où l'astérisque désigne le complexe conjugué. En faisant tendre le cylindre circulaire C vers l'infini et en injectant les développements asymptotiques des champs (équations (3.85) à (3.88)), on aboutit au *théorème optique* (page 139 à 143 de la référence [9]) :

$$\Re e\left[\cos(\psi) G_E\left(\theta_{inc}+\pi\right) - \sin(\psi) G_H\left(\theta_{inc}+\pi\right)\right] + \frac{k_{ext}}{2\pi k_{t,ext}} \int_0^{2\pi} \left[|G_E(\theta)|^2 + |G_H(\theta)|^2\right] d\theta = 0 \tag{3.92}$$

avec

$$G_E(\theta) = \sqrt{\frac{\pi k_{t,ext}}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} g_E(\theta) \tag{3.93}$$

$$G_H(\theta) = Z_{ext}\sqrt{\frac{\pi k_{t,ext}}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} g_H(\theta) \tag{3.94}$$

En insérant les expressions de g_E et g_H données par l'équation (3.88) dans (3.93) et (3.94), les fonctions G_E et G_H s'expriment selon les amplitudes du champ diffracté dans la région (ext) :

$$G_E(\theta) = \sum_{n=-N}^{+N} B_{e,n}^{ext)} e^{in\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.95}$$

$$G_H(\theta) = Z_{ext} \sum_{n=-N}^{+N} B_{h,n}^{ext)} e^{in\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.96}$$

et l'intégrale dans le théorème optique (3.92), devient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[|G_E(\theta)|^2 + |G_H(\theta)|^2\right] d\theta = \sum_{n=-N}^{+N} \left|B_{e,n}^{ext)}\right|^2 + Z_{ext}^2 \sum_{n=-N}^{+N} \left|B_{h,n}^{ext)}\right|^2 \tag{3.97}$$

Il importe de rappeler que le théorème optique (3.92) ne s'applique qu'aux structures remplies de milieux sans pertes et non conducteurs.

3.4.3 Cartes de champs diffractés

Le but ici est de pouvoir déterminer les valeurs des composantes du champ électromagnétique diffracté en n'importe quel point de l'espace afin d'établir des cartes du champ diffracté. Cette tâche n'est pas triviale puisque, pour l'instant, le problème de diffraction est résolu par la détermination des champs diffractés aux interfaces $r = R_{min}$ et $r = R_{max}$ (équations (3.82) et (3.83)). On se limite à la section droite en $z = 0$ sachant les champs dans une autre section droite en z s'en déduisent par un simple facteur $e^{i\gamma_0 z}$ (3.10). Nous verrons d'abord comment calculer les champs dans les régions homogènes et isotropes (int) et (ext), puis les champs dans la zone modulée en tirant parti des avantages de l'algorithme S.

Calcul des champs dans les régions (int) **et** (ext) **.**

Pour commencer, nous nous intéressons à la détermination des champs diffractés en un point $M(r_m, \theta_m)$ avec $r_m > R_{max}$ de la région extérieure (ext). Le calcul est analogue à celui effectué pour la matrice de transmission d'une couche homogène et isotrope (voir section 3.2.3). Il suffit de constater que la région de l'espace comprise entre le cylindre circulaire C_{max} et le cylindre circulaire de rayon r_m peut être représentée par une couche homogène et isotrope de permittivité ϵ_{ext} (d'indice n_{ext}). On montre alors que les coefficients des composantes H_z, E_z, H_θ et E_θ en $r = r_m$ se déduisent de ceux (connus) en $r = R_{max}$ selon :

$$[F(r_m)] = \Psi^{(ext)}(r_m) \left[V^{(ext)}(r_m)\right], \forall r_m > R_{max} \tag{3.98}$$

et les coefficients de Fourier des composantes radiales (E_r et H_r) selon :

$$[F_r(r_m)] = \Psi_r^{(ext)}(r_m) \left[V^{(ext)}(r_m)\right], \forall r_m > R_{max} \tag{3.99}$$

avec

$$\left[V^{(ext)}(r_m)\right] = C^{(ext)}(r_m) \left\{C^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1} \left\{\Psi^{(ext)}(R_{max})\right\}^{-1} [F(R_{max})] \tag{3.100}$$

De la même manière, on détermine les coefficients du champ diffracté en un point $M(r_m, \theta_m)$ avec $r_m < R_{min}$ dans la région intérieure (int) selon :

$$[F(r_m)] = \Psi^{(int)}(r_m) \left[V^{(int)}(r_m)\right], \forall r_m < R_{min} \tag{3.101}$$

$$[F_r(r_m)] = \Psi_r^{(int)}(r_m) \left[V^{(int)}(r_m)\right], \forall r_m < R_{min} \tag{3.102}$$

avec

$$\left[V^{(int)}(r_m)\right] = C^{(int)}(r_m) \left\{C^{(int)}(R_{min})\right\}^{-1} \left\{\Psi^{(int)}(R_{min})\right\}^{-1} [F(R_{min})] \tag{3.103}$$

Pour les deux régions (int) et (ext), on utilise ensuite le développement (3.48) pour obtenir la valeur d'une composante $A(r_m, \theta_m)$ du champ diffracté à partir de ses coefficients de Fourier :

$$A(r_m, \theta_m) = \sum_{n=-N}^{+N} A_n(r_m) e^{in\theta_m} \tag{3.104}$$

Les coefficients de Fourier $A_n(r_m)$ sont extraits de la matrice colonne $[F(r_m)]$ ou $[F_r(r_m)]$ suivant la composante A du champ diffracté choisie.

Calcul des champs dans la zone modulée .

Dans la zone modulée, le calcul des champs diffractés est beaucoup plus complexe. Afin de les extraire, il semble nécessaire de relancer une intégration de $r = R_{min}$ à $r = R_{max}$ avec un seul vecteur de tir inital (et non plus une matrice de vecteurs de tir initiaux) contenant les coefficients de Fourier des champs diffractés trouvés en $r = R_{min}$ à partir de la première intégration (3.82). Cependant, on ne peut pas lancer une intégration directe de $r = R_{min}$ à $r = R_{max}$ pour les raisons de contaminations numériques observées dans l'algorithme T. Cette intégration doit donc se faire avec l'algorithme S. En fait, il faut pouvoir déterminer de manière fiable (c'est-à-dire bien conditionnée) les coefficients de Fourier des champs à chaque première interface (r_s avec $s \in [1, L]$) d'une couche S. Ceux-ci serviront alors de vecteurs initiaux pour de nouvelles intégrations dans chacune des couches S.

La détermination de ces vecteurs initiaux s'effectue de la manière suivante. A partir de l'équation (3.77), on établit, entre le bloc $S_{22}^{(s)}$ à l'interface $r = r_s$ et le bloc $S_{22}^{(s+1)}$ à l'interface $r = r_{s+1}$ ($s \in [1, L]$), la relation de récurrence suivante :

$$\left\{S_{22}^{(s)}\right\}^{-1} = Z^{(s)} \left\{S_{22}^{(s+1)}\right\}^{-1} \tag{3.105}$$

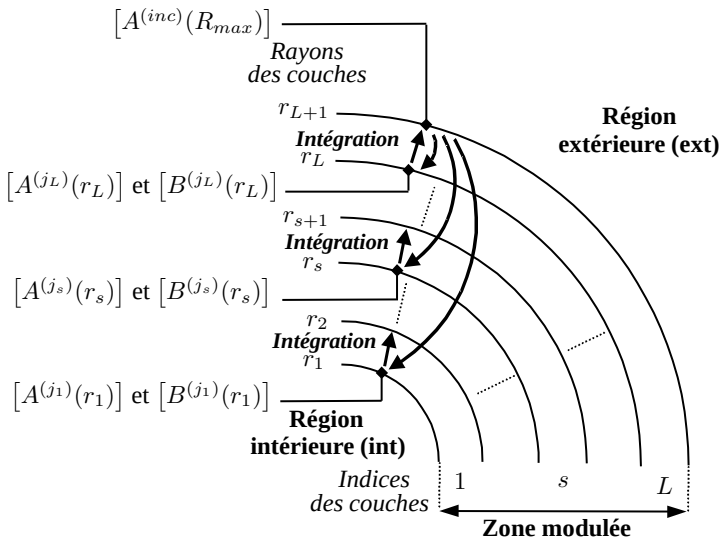


FIG. 3.9 – Principe de l'extraction des coefficients de Fourier des champs diffractés dans la zone modulée

On multiplie chaque terme par la même matrice colonne $\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$ (champ diffracté en $r = R_{min}$) :

$$\left\{S_{22}^{(s)}\right\}^{-1}\left[A^{(int)}(R_{min})\right] = Z^{(s)}\left\{S_{22}^{(s+1)}\right\}^{-1}\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$$

Ensuite, par identification avec la relation (3.74) (où $\left[B^{(int)}(R_{min})\right] = [0]$) et d'après la notation introduite par la relation (3.75), on obtient une nouvelle relation de récurrence entre $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$ à l'interface $r = r_s$ et $\left[A^{(j_{s+1})}(r_{s+1})\right]$ à l'interface $r = r_{s+1}$ (on rappelle que $j_{s'} = int$ si $s' = 1$ sinon $j_{s'} = ext$, $s' \in [1, L+1]$) :

$$\left[A^{(j_s)}(r_s)\right] = Z^{(s)}\left[A^{(j_{s+1})}(r_{s+1})\right] \tag{3.106}$$

Cette relation de récurrence est appliquée jusqu'à l'interface $r = r_{L+1} = R_{max}$:

$$\left[A^{(j_s)}(r_s)\right] = Z^{(s)}Z^{(s+1)}\left[A^{(j_{s+2})}(r_{s+2})\right] = \cdots = Z^{(s)}Z^{(s+1)}\cdots Z^{(L)}\left[A^{(j_{L+1})}(r_{L+1})\right]$$

Or on sait que $\left[A^{(j_{L+1})}(r_{L+1})\right]$ s'identifie au champ incident $\left[A^{(inc)}(R_{max})\right]$, d'où on conclut par :

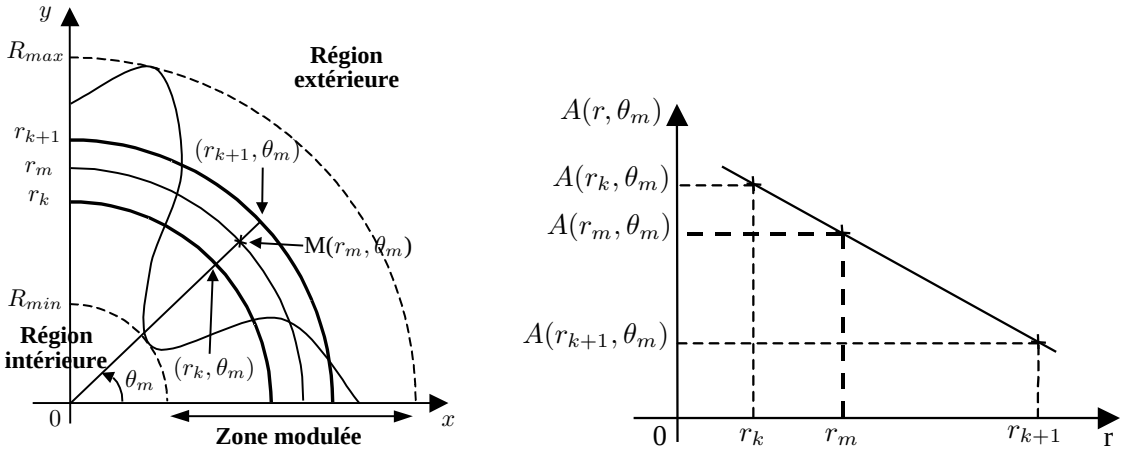
$$\left[A^{(j_s)}(r_s)\right] = Z^{(s)}Z^{(s+1)}\cdots Z^{(L)}\left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{3.107}$$

Pour résumer, l'expression (3.107) établit une relation entre les coefficients $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$ du champ diffracté à l'interface $r = r_s$ et les coefficients connus $\left[A^{(inc)}(R_{max})\right]$ du champ incident à l'interface $r = R_{max}$. Ces coefficients ne contiennent pas d'erreurs issues d'un éventuel problème de contamination numérique puisqu'ils sont calculés à partir des blocs $Z^{(s)}$, bien conditionnés par définition. Enfin, les autres coefficients $\left[B^{(j_s)}(r_s)\right]$ du champ diffracté à l'interface $r = r_s$ se déduisent directement par la relation (3.74) connaissant $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$:

$$\left[B^{(j_s)}(r_s)\right] = S_{12}^{(s)}\left[A^{(j_s)}(r_s)\right] \tag{3.108}$$

Dans le programme, on procède de la manière suivante. Lors de la première intégration par l'algorithme S, on stocke dans des fichiers tous les blocs $Z^{(s)}$ et $S_{12}^{(s)}$ de chaque interface $r = r_s$. Ensuite, on relance une succession d'intégrations, non pas à partir de la première couche S (comprise entre les interfaces en $r = R_{min}$ et $r = r_2$), mais à partir de la dernière couche (comprise entre les interfaces en $r = r_L$ et $r = R_{max}$, voir figure 3.9). Pour cette couche (L), on détermine grâce aux relations (3.106) et (3.108), les coefficients $\left[A^{(j_L)}(r_L)\right]$ et $\left[B^{(j_L)}(r_L)\right]$ du champ

à l'interface $r = r_L$ par la lecture des blocs $Z^{(L)}$ et $S_{12}^{(L)}$ stockés précédemment. Ces coefficients regroupés dans la matrice colonne $\left[V^{(j_L)}(r_L)\right]$ vont alors permettre de déduire le vecteur initial $[F_{init}(r_L)] = \Psi^{(j_L)}(r_L)\left[V^{(j_L)}(r_L)\right]$ d'une nouvelle intégration lancée à partir de $r = r_L$ jusqu'à $r = r_{L+1} = R_{max}$. A chaque pas d'intégration $r = r_p$ avec $p \in [1, P]$ où P est le nombre de pas d'intégration, on stocke la valeur des coefficients $[F(r_p)]$ des composantes E_z, H_z, E_θ et H_θ ainsi que les coefficients $[F_r(r_p)]$ des composantes radiales E_r et H_r calculées grâce aux relations (2.112) et (3.19). Pour les autres couches (s) telle que $s = L-1, L-2, \cdots, 1$, on opère exactement de la même façon que pour la couche (L). On dispose, à la fin de cette seconde succession d'intégrations, d'un ensemble de coefficients de toutes les composantes du champ diffracté sur une suite de cylindres circulaires $r = r_k$ avec $k \in [1, LP]$ dans la zone modulée.



(a) Détermination du champ en un point quelconque de la zone modulée.

(b) Calcul du champ par régression linéaire.

FIG. 3.10 – Calcul du champ en un point quelconque de la zone modulée

Pour calculer la valeur d'une composante du champ diffracté en un point quelconque $M(r_m, \theta_m)$ avec $R_{min} < r_m < R_{min}$ de la zone modulée, il suffit de détecter les deux cylindres circulaires en $r = r_k$ et $r = r_{k+1}$ encadrant ce point, donc tels que $r_k < r_m < r_{k+1}$ (voir figure 3.10(a)). Ensuite, on calcule la composante du champ diffracté au point (r_k, θ_m) selon

$$A(r_k, \theta_m) = \sum_{n=-N}^{+N} A_n(r_k) e^{in\theta_m}$$

grâce aux coefficients stockés précédemment en $r = r_k$. De même, on calcule la composante du champ diffracté au point (r_{k+1}, θ_m) selon

$$A(r_{k+1}, \theta_m) = \sum_{n=-N}^{+N} A_n(r_{k+1}) e^{in\theta_m}$$

La valeur du champ au point $M(r_m, \theta_m)$ est déduite par régression linéaire entre celles des champs calculés aux deux points précédents (voir figure 3.10(b)) :

$$A(r_m, \theta_m) = \frac{A(r_{k+1}, \theta_m) - A(r_k, \theta_m)}{r_{k+1} - r_k}(r_m - r_k) + A(r_k, \theta_m) \tag{3.109}$$

Le programme numérique fournit neuf cartes de champs correspondant aux modules des trois composantes du champ électrique diffracté $\vec{E}^d$, du champ excitation magnétique diffracté $\vec{H}^d$ et du vecteur de Poynting complexe associé. On rappelle que le vecteur de Poynting complexe noté $\vec{\mathcal{P}}$ s'exprime selon les champs électrique et magnétique d'après la relation :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\vec{E} \wedge \vec{H}^*$$

et est associé au débit moyen d'énergie électromagnétique transporté par le champ électromagnétique.

3.5 Application numérique au cas du cylindre circulaire

Nous présentons ici les premiers résultats numériques. Dans cette section, nous ne chercherons pas à donner une multitude de résultats numériques en faisant varier tous les paramètres qui peuvent intervenir. Ceci pour deux principales raisons : il y a beaucoup trop de paramètres (géométrie, indices des milieux, onde incidente, intégration,...) et le domaine d'application de la méthode différentielle sera largement mis en évidence sur l'ensemble des résultats numériques présentés dans ce document. Ainsi, pour commencer, nous nous concentrons sur les points clés de la méthode différentielle. Elle sera validée à travers l'étude de la diffraction d'une onde plane incidente sur un objet cylindrique de section droite circulaire. Sa précision va être évaluée en fonction des paramètres qui lui sont intrinsèques (ordre de troncature des développements, nombre de couches S, prolongements arbitraires de la normale à la surface) par comparaison entre deux descriptions géométriques d'un même cylindre conduisant à des procédés de calcul différents. On mettra en évidence l'utilité des deux améliorations apportées à la méthode différentielle : l'algorithme S par l'illustration des problèmes de contamination numérique lors de l'intégration et la méthode FFF par comparaison avec la méthode classique. Pour conclure, on observera l'influence du prolongement du vecteur $\vec{N}$ dans la précision des résultats numériques.

3.5.1 Notes sur la présentation des résultats

En régime de diffraction, le programme peut calculer des SED et des cartes de champs. L'ordre de troncature maximal des développements de Fourier N constitue le paramètre central et décisif de l'étude des résultats. En particulier, il permettra l'analyse de leur précision. Les résultats numériques se présenterons sous quatre formes :

Les sections efficaces différentielles .
Pour une valeur de N fixée, les SED seront représentées de deux manières différentes. La première est la représentation graphique simple de la fonction $\sigma(\theta)$: θ en abscisse et $\sigma(\theta)$ en ordonnée. Elle restera la plus utilisée, notamment lorsqu'il sera nécessaire de comparer plusieurs courbes. Pour la théorie des antennes, on se sert préférentiellement d'une représentation polaire qui permet de mieux évaluer la répartition dans l'espace du champ diffracté à l'infini.

Les cartes du champs diffractés .
Comme les SED, les cartes de champs seront déterminées pour une valeur de N donnée et auront pour seul intérêt d'évaluer la répartition du champ diffracté autour de l'objet cylindrique. On ne représentera pas toutes les composantes du champ électromagnétique, mais on se limitera à leurs composantes en z : E_z^d, H_z^d et $\mathcal{P}_z^d$. Ce choix est justifié par le fait que toutes les composantes du champ ont été exprimées selon E_z et H_z dans les régions homogènes et isotropes (équations (3.27) à (3.32)).

L'évolution d'une grandeur selon l'ordre de troncature des développements N .
Nous évaluerons la précision des résultats numériques obtenus en illustrant préférentiellement l'évolution selon N de la valeur d'un point de la SED. La précision du calcul peut également être estimée par le théorème optique. Ainsi, on représentera le membre de droite de la relation (3.92), noté $\mathcal{T}(N)$, dans lequel on injecte les relations (3.95), (3.96) et (3.97) :

$$\mathcal{T}(N) = \Re e\left\{\sum_{n=-N}^{+N}\left[\cos(\psi)B_{e,n}^{(ext)} - Z_{ext}\sin(\psi)B_{h,n}^{(ext)}\right]e^{in\left(\theta_{inc}+\frac{\pi}{2}\right)}\right\} + \frac{k_{ext}}{k_{t,ext}}\sum_{n=-N}^{+N}\left[\left|B_{e,n}^{(ext)}\right|^2 + Z_{ext}^2\left|B_{h,n}^{(ext)}\right|^2\right] \tag{3.110}$$

Cette grandeur doit tendre vers 0. Sa nullité entraîne la vérification du théorème optique (en principe, lorsque N augmente).

Les spectres de Fourier .
Très régulièrement, les spectres de Fourier (coefficients de Fourier en fonction de l'ordre n) de différentes grandeurs viendront confirmer la convergence ou la divergence des résultats. Ces grandeurs pourront être les coefficients en amplitudes des champs diffractés ($B_{e,n}^{(j)}$ et $B_{h,n}^{(j)}$ avec $j \in \{int, ext\}$)

ou encore les coefficients de Fourier de différentes grandeurs opto-géométriques comme $\epsilon(r,\theta)$, $N_\theta^2(r,\theta)$, $N_r^2(r,\theta)$ et $N_rN_\theta(r,\theta)$. On rappelle que les coefficients de Fourier de ces dernières fonctions interviennent dans les matrices de Toeplitz de la matrice Q_ϵ d'après son expression (3.15). Les spectres de Fourier seront tracés sous forme d'histogramme. De manière générale, la convergence des développements de Fourier est assurée par la décroissance des coefficients de Fourier en fonction de l'ordre n. Il est alors intéressant de pouvoir évaluer la largeur de ces spectres, c'est-à-dire l'amplitude de l'intervalle des ordres sur lequel les coefficients de Fourier sont non négligeables. On introduit une nouvelle grandeur notée Δ_τ où τ est un pourcentage. Elle représente l'écart des ordres à partir desquelles la valeur des coefficients de Fourier a décrû d'au moins τ (%) par rapport à la valeur maximale du spectre. On prendra généralement $\tau = 99\%$.

Nous commençons l'illustration de quelques résultats de validation du programme numérique par l'étude de la diffraction conique d'une structure cylindrique simple : un cylindre de section circulaire noté $\mathcal{C}$ de rayon $R = 1\ \mu m$ et rempli d'un milieu d'indice $n_{cyl} = 1.2$. On choisit une onde plane incidente (voir figure 2.4(b)) telle que $\theta_{inc} = 0^o$, $\varphi_{inc} = 30^o$, $\psi_{inc} = 0^o$, $\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\| = 1$ et $\lambda = 1\ \mu m$. Le milieu extérieur est le vide : $n_{mat} = 1$. Dans un souci de clarté, nous prendrons soin de bien rappeler sous forme de tableaux l'ensemble des paramètres opto-géométriques (rayon, indices,...) et numériques (ordre de troncature, nombre de couche S,...), pour chaque configuration que nous allons étudier par la suite. Dans les applications numériques de la méthode différentielle que nous allons présenter, nous envisageons deux types de configurations géométriques. La première ne nécessite pas d'intégration (méthode FFF non utilisée). Les résultats numériques qui lui sont associés sont alors d'une grande précision et serviront de référence. La seconde configuration traite du même cylindre géométrique mais requiert l'utilisation de la méthode FFF. La validation s'effectue alors par comparaison entre les résultats numériques de ces deux configurations.

3.5.2 Cylindre circulaire centré sur l'origine

Description du système .

La première configuration géométrique traite du cylindre circulaire $\mathcal{C}$ centré sur l'origine (voir figure 3.11). Les valeurs des paramètres de cette configuration sont regroupées dans le tableau suivant :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	$1\ \mu m$
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1
Paramètres numériques	
N	1 à 20

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	$1\ \mu m$
θ_{inc}	0^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	0^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1

Bien évidemment, certains de ces paramètres peuvent évoluer pour les besoins de l'étude. Pour modéliser la diffraction par une telle structure géométrique, il suffit de prendre une couche homogène, comme décrite dans la section 3.2.3, pour laquelle les deux interfaces ont le même rayon $R_{min} = R_{max} = R$ (couche infiniment fine). Dans ce cas, on a $n_{int} = n_{cyl} = \sqrt{\frac{\epsilon_{cyl}}{\epsilon_0}}$ et $n_{ext} = n_{mat} = \sqrt{\frac{\epsilon_{mat}}{\epsilon_0}}$. L'indice de la première couche infiniment fine (en $r = R_{min}$, voir figure 3.3) est celui du milieu intérieur (et non plus du milieu extérieur). L'indice intermédiaire $n_H = \sqrt{\frac{\epsilon_H}{\epsilon_0}}$ importe peu. Par défaut, on le prendra égal à celui du milieu extérieur. D'après la relation (3.72), la matrice de transmission notée $T^{(c)}$ d'une telle structure se simplifie au produit matriciel suivant :

$$T^{(c)} = \left\{\Psi^{(ext)}(R)\right\}^{-1} \Psi^{(int)}(R) \tag{3.111}$$

Résultats numériques .

Les résultats obtenus pour cette configuration serviront de référence puisque le calcul est semi-analytique (aucune intégration numérique n'est nécessaire, la méthode FFF n'est pas utilisée) et

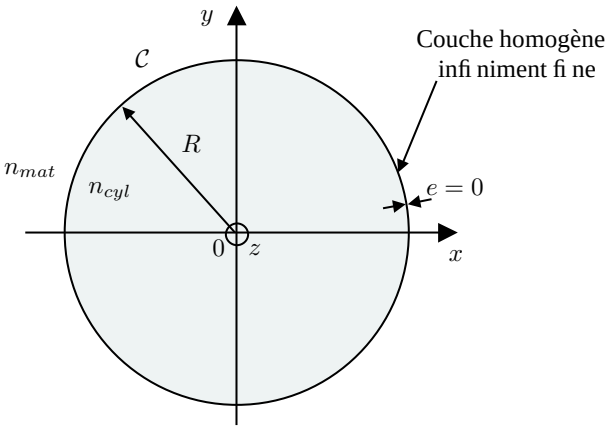


FIG. 3.11 – Représentation du cylindre circulaire centré sur l'origine

permet alors d'obtenir de très grandes précisions. Les SED calculées pour le cylindre circulaire centré sont désormais notées $\sigma^{(c)}(\theta)$. La figure 3.12(a) représente, avec une échelle logarithmique en ordonnée, la fonction $\sigma^{(c)}(\theta)$ du cylindre étudié pour un ordre de troncature des développements tel que $N = 20$. La figure 3.12(b) montre la même SED sous sa forme polaire. Les figures 3.13(a) à 3.13(c) illustrent les cartes du module du champ diffracté obtenues respectivement pour les composantes E_z^d, H_z^d et $\mathcal{P}_z^d$, toujours avec $N = 20$. La bonne précision des résultats est confirmée par la figure 3.14(a) qui montre la convergence de $\sigma^{(c)}(180^o)$ en fonction de N. Il suffit d'une vingtaine de coefficients de Fourier ($N = 10$ soit $n \in [-10, 10]$) pour obtenir un plateau de convergence atteignant une précision de 3.10^{-7} (écart relatif) entre deux valeurs succesives de la SED. Ce résultat est cohérent à la vue du spectre en amplitude des champs électrique et magnétique diffractés : $\left|B_{e,n}^{(ext)}\right|$ et $\left|B_{h,n}^{(ext)}\right|$ en fonction de n (voir figure 3.14(b)). La largeur du spectre $\Delta_{99\%}$ s'étend de $n = -8$ à 8 et vaut donc $\Delta_{99\%} = 16$. En effet, les coefficients tendent très rapidement vers 0 pour un ordre de troncature autour de 10. La durée du calcul des cartes de champs et de la SED, exécuté sur le calculateur 64 bits, est de moins d'une seconde ! Les calculs numériques de ce programme sont donc très rapides (détermination du simple produit matriciel (3.111)). On vérifie sur l'ensemble de ces figures que le champ diffracté respecte bien la symétrie selon l'axe x qui lui est imposée par celle du cylindre circulaire et l'orientation du vecteur d'onde incident (dont la composante $\vec{k}_{t,ext}^{(inc)}$ est colinéaire à l'axe x). En ce qui concerne le théorème optique, on trouve une valeur d'environ : $\mathcal{T}(20) = -3.5527\ 10^{-15}$ pour $N = 20$. Cette valeur reste très satisfaisante puisqu'elle se situe au niveau de la précision maximale du calculateur.

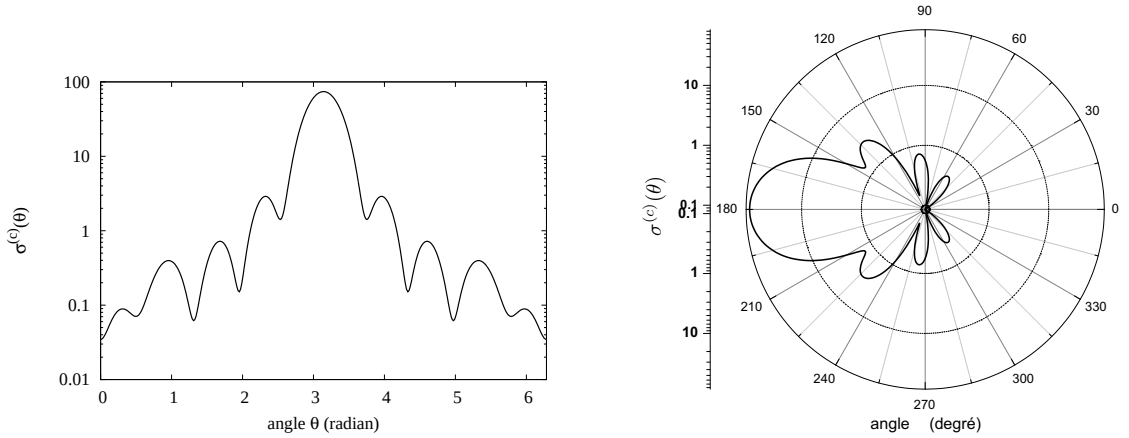
3.5.3 Cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine

Description du système .

Nous allons désormais étudier une configuration qui nécessite l'emploi de la méthode FFF. Pour cela, nous considérons le cylindre circulaire $\mathcal{C}$ excentré par rapport à l'origine du repère. Plus précisément, l'origine sera placée en dehors du cylindre circulaire (voir figure 3.15(a)). Le centre du cercle a pour coordonnées polaires R_0 et θ_0. On introduit deux autres paramètres : l'angle maximal de définition du cercle (angle d'ouverture) noté θ_m et le rayon correspondant noté r_m. Ils sont tels que :

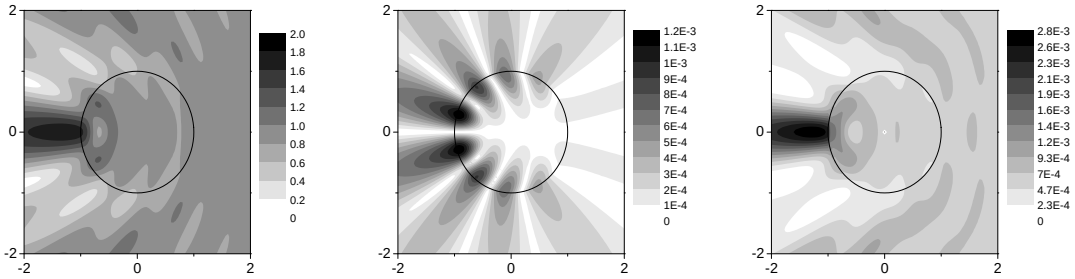
$$\theta_m = 2\ asin\left(\frac{R}{R_0}\right) \text{ et } r_m = \sqrt{R_0^2 - R^2}$$

La figure 3.15(b) illustre le cylindre circulaire "vu" par la méthode différentielle en faisant apparaître la zone modulée et ses principaux paramètres. On note C_r le cylindre circulaire centré sur l'origine de rayon r tel que $R_{min} \leq r \leq R_{max}$ (voir figure 3.15(b)). Pour ce profil cylindrique choisi, on a $n_{int} = n_{ext} = n_{mat}$ (relations (2.41) et (2.42)). La zone modulée, comprise entre les cylindres C_{min} de rayon $R_{min} = R_0 - R$ et C_{max} de rayon $R_{max} = R_0 + R$, est partagée en trois



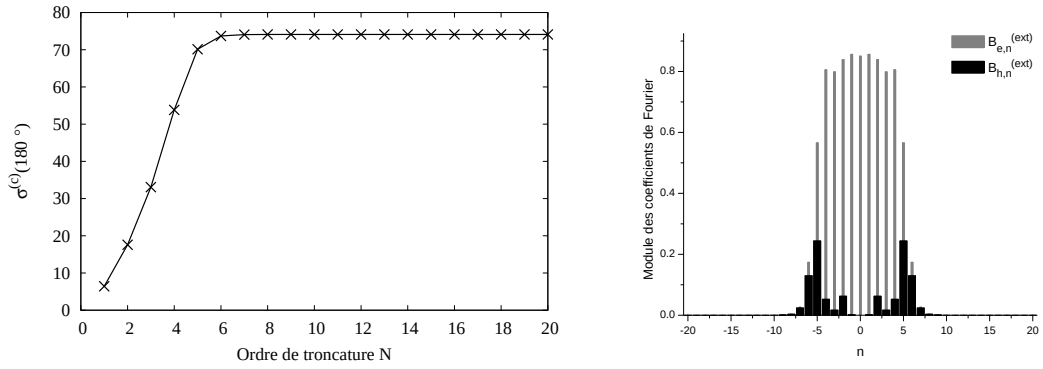
(a) Représentation simple (b) Représentation polaire

FIG. 3.12 – SED du cylindre circulaire centré sur l'origine pour $N = 20$



(a) Carte de $|E_z^d|$ (b) Carte de $|H_z^d|$ (c) Carte de $|\mathcal{P}_z^d|$

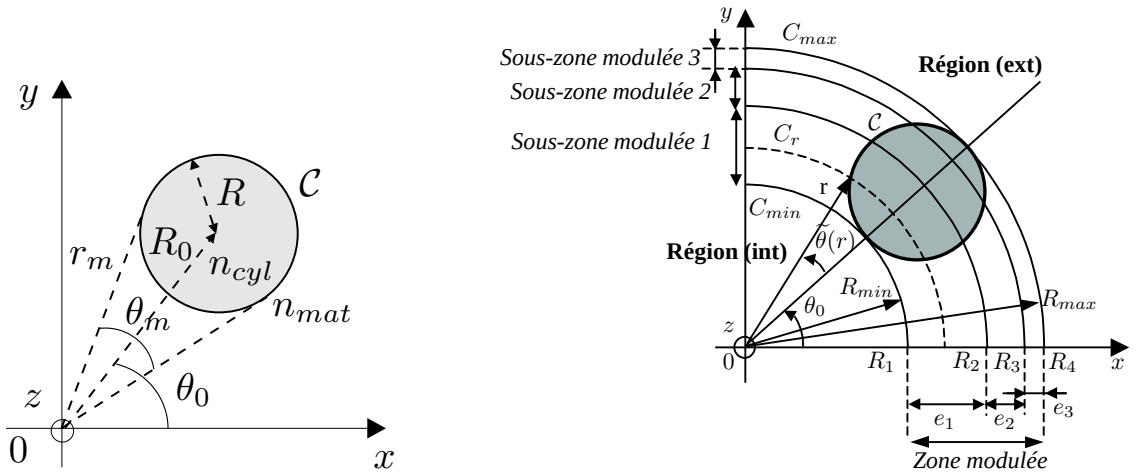
FIG. 3.13 – Cartes de champs du cylindre circulaire centré sur l'origine pour $N = 20$



(a) Convergence de $\sigma^{(c)}(180^o)$ en fonction de N

(b) Spectre en amplitude de E_z^d et H_z^d pour $N = 20$

FIG. 3.14 – Comportement des résultats selon les ordres de développement



(a) Notations

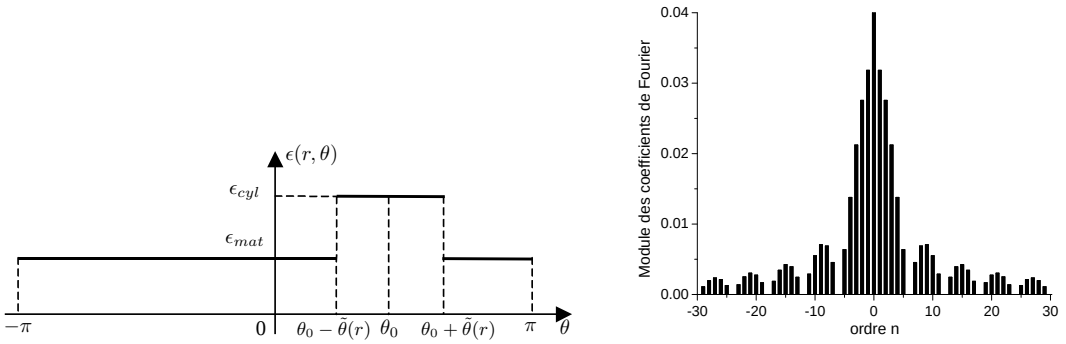
(b) Cylindre circulaire "vu" par la méthode différentielle

FIG. 3.15 – Représentation du cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine

sous-zones modulées pour des raisons pratiques. On adopte alors le principe du second type de système multicouche (voir section 3.3.3). On note R_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) les rayons des interfaces (cylindres circulaires centrés) qui séparent ces trois sous-zones modulées, sachant que $R_1 = R_{min}$ et $R_4 = R_{max}$. Ainsi, la i^{eme} sous-zone modulée est comprise entre C_{R_i} et $C_{R_{i+1}}$. On choisit $R_2 = r_m$. Un paramètre de pourcentage noté τ_c est défini. Il représente la proportion entre l'épaisseur de la troisième sous-zone modulée et celle de la zone complémentaire à la première sous-zone modulée (entre les cylindres C_{R_2} et C_{R_4}). Par conséquent, on a $R_3 = R_{max} - \tau_c\,(R_{max} - r_m)$. La première sous-zone modulée est distinguée des deux autres car la fonction $N_r N_\theta$ qui apparaît dans le calcul de la matrice Q_ϵ donnée par (3.15), change de signe à la traversée du cylindre C_{r_m}. On justifie notre choix d'introduire la troisième sous-zone modulée dans un but d'améliorer la précision du calcul à la fin de l'intégration suivant l'algorithme S. Pour simplifier, on choisit le même nombre de couches S pour la première et la deuxième sous-zone modulée, celui de la troisième étant défini par un autre paramètre. On désigne par L_i le nombre de couches S pour la sous-zone modulée $i \in \{1,2,3\}$ et le nombre L représente le nombre total des couches S de la zone modulée : $L = L_1 + L_2 + L_3$. De même, on désigne par P_i le nombre de pas d'intégration pour chaque couche S de la sous-zone modulée $i \in \{1,2,3\}$. Les valeurs des paramètres de cette configuration sont regroupées dans le tableau suivant :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	0^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	0^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 30
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10



(a) Représentation de la fonction $\epsilon(r,\theta)$ sur le cylindre C_r de la figure 3.15(b)

(b) Spectre de Fourier de $\epsilon(r_m,\theta)$ du cylindre circulaire considéré où $\Delta_{99\%} = 10$

FIG. 3.16 – Fonction $\epsilon(r,\theta)$ dans la zone modulée

On en déduit les valeurs des autres grandeurs définies auparavant :

PARAMETRES	***Valeurs***
r_m	1.73205 μm
θ_m	60^o
R_1	1 μm
R_2	1.73205 μm
R_3	2.87321 μm
R_4	3 μm

Les principales données nécessaires à l'intégration du système différentiel par l'algorithme S sont les matrices de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$, $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$, $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$ évaluées pour les valeurs de r de chaque pas d'intégration. Pour les déterminer, on introduit l'angle $\widetilde{\theta}(r)$ (par rapport à θ_0) défini par l'intersection entre les cylindres C_r et $\mathcal{C}$ (voir figure 3.15(b)) :

$$\widetilde{\theta}(r) = acos\left(\frac{r^2 + R_0^2 - R^2}{2R_0 r}\right) \tag{3.112}$$

où $acos$ est la fonction réciproque du cosinus.

Matrices de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$ et $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$.

La matrice de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$ contient les coefficients de Fourier de la fonction $\epsilon(r,\theta)$. Sur le cylindre C_r, cette fonction est définie par (voir figure 3.16(a)) :

$$\forall\theta \in [0,2\pi]\,,\ \epsilon(r,\theta) = \begin{cases} \epsilon_{cyl} \text{ si } \theta \in \left]\theta_0 - \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)\right[\\ \epsilon_{mat} \text{ si } \theta \in \left[-\pi, \theta_0 - \widetilde{\theta}(r)\right] \cup \left[\theta_0 + \widetilde{\theta}(r), \pi\right] \end{cases} \tag{3.113}$$

Il s'agit d'une fonction créneau dont la discontinuité en $\theta = \theta_0 - \widetilde{\theta}(r)$ et $\theta = \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)$ est fixée par l'écart d'indice entre les deux milieux intérieur et extérieur au cylindre $\mathcal{C}$. Le calcul des coefficients de Fourier d'une telle fonction conduit à

$$\epsilon_0(r) = \epsilon_{mat} + \frac{\widetilde{\theta}(r)}{\pi}\left(\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}\right) \tag{3.114}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \epsilon_n(r) = \frac{e^{-in\theta_0}}{\pi n} \sin\left[n\widetilde{\theta}(r)\right]\left(\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}\right) \tag{3.115}$$

La figure 3.16(b) illustre le spectre de Fourier de cette fonction avec les paramètres géométriques choisis pour $n \in [-30, 30]$ et $r = r_m$ (correspondant à l'amplitude maximale de l'intervalle

$\left[\theta_0 - \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)\right]$). Dans cette figure, la barre associée au coefficient d'ordre 0 est tronquée puisque $\epsilon_0(r_m) = 1.033$ environ. La largeur du spectre est de $\Delta_{99\%} = 10$. Lorsque r tend vers R_{min} (par valeur supérieure) ou R_{max} (par valeur inférieure), l'angle $\widetilde{\theta}(r)$ et par suite l'amplitude de l'intervalle $\left[\theta_0 - \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)\right]$ tendent vers 0. On s'attend alors à ce que le spectre s'élargisse en affectant la précision des résultats. En fait, il n'en est rien puisque le prolongement tend vers la fonction constante de valeur n_{mat}. Par exemple, lorsque r tend vers R_{min}, on trouve :

$$\lim_{r \to R_{min}} [\epsilon_0(r)] = \epsilon_{mat} + \frac{\widetilde{\theta}(R_{min})}{\pi} (\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}) = \epsilon_{mat}$$
$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{r \to R_{min}} [\epsilon_n(r)] = \frac{e^{-in\theta_0}}{\pi} (\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}) \widetilde{\theta}(R_{min}) \lim_{r \to R_{min}} \left\{ \frac{\sin[n\widetilde{\theta}(r)]}{n\widetilde{\theta}(r)} \right\} = 0$$

car $\widetilde{\theta}(R_{min}) = 0$ et $\lim_{\zeta \to 0} \left[\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}\right] = 1$. En ce qui concerne la matrice de Toeplitz $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$, la fonction $\frac{1}{\epsilon(r,\theta)}$ décrit une fonction créneau semblable à $\epsilon(r,\theta)$ (3.113) pour laquelle ϵ_{cyl} est remplacée par $\frac{1}{\epsilon_{cyl}}$ et ϵ_{mat} par $\frac{1}{\epsilon_{mat}}$. Il en est de même pour ses coefficients de Fourier (équations (3.114) et (3.115)).

Matrices de Toeplitz $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$.

On s'intéresse désormais au calcul des matrices de Toeplitz $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$, autrement dit aux fonctions $N_r^2(r,\theta)$, $N_\theta^2(r,\theta)$ et $N_r N_\theta(r,\theta)$. La figure 3.17 représente le vecteur normal $\vec{N}$ à $\mathcal{C}$ aux deux points (M_1 et M_2) d'intersection entre le cylindre $\mathcal{C}$ et C_r, puis aux deux autres points (M_3 et M_4) correspondant aux mêmes angles que les deux points précédents. Un calcul trigonométrique aboutit à l'expression, notée $\widetilde{N_\theta}(r)$, de N_θ au point M_1 du cylindre $\mathcal{C}$ en $\theta = \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)$:

$$\widetilde{N_\theta}(r) = \frac{R_0}{R} \sin\left[\widetilde{\theta}(r)\right] \tag{3.116}$$

D'après les symétries de la structure, on constate que les valeurs de $|N_\theta|$ aux points M_2 (en $\theta = \theta_0 - \widetilde{\theta}(r)$), M_3 et M_4 sont identiques ; seul le signe de N_θ change. Nous avons vu que les composantes du vecteur normal à la surface $\vec{N}$ peuvent être prolongées arbitrairement dans toute la zone modulée (voir section 2.3.3) puisque, dans le cas présent, elles ne sont définies qu'aux deux points en $\theta = \theta_0 - \widetilde{\theta}(r)$ et $\theta = \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)$ sur le cylindre C_r. On impose le prolongement de N_θ^2 représenté par la figure 3.18(a) :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \, N_\theta^2(r,\theta) = \left[\widetilde{N_\theta}(r)\right]^2 \tag{3.117}$$

Il s'agit d'une fonction constante dont la détermination des coefficients de Fourier est évidente :

$$\left(N_\theta^2\right)_0(r) = \left[\widetilde{N_\theta}(r)\right]^2 \tag{3.118}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \left(N_\theta^2\right)_n(r) = 0 \tag{3.119}$$

Quel que soit le prolongement de N_θ^2, celui de N_r^2 s'en déduit selon :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \, N_r^2(r,\theta) = 1 - N_\theta^2(r,\theta) \tag{3.120}$$

et ses coefficients de Fourier sont calculés à partir de ceux de $N_\theta^2(r,\theta)$:

$$\left(N_r^2\right)_0(r) = 1 - \left(N_\theta^2\right)_0(r) \tag{3.121}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \left(N_r^2\right)_n(r) = -\left(N_\theta^2\right)_n(r) \tag{3.122}$$

D'après le prolongement de N_θ^2 choisi (3.117), $N_r^2(r,\theta)$ est également une fonction constante (voir figure 3.18(b)). Par conséquent, les matrices de Toeplitz $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r^2]\!]$ sont des matrices diagonales.

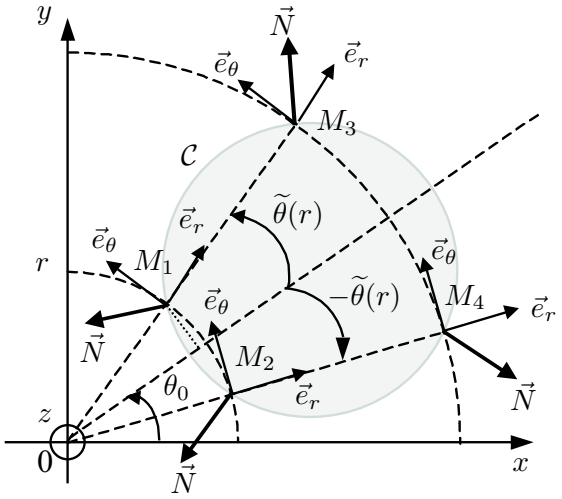
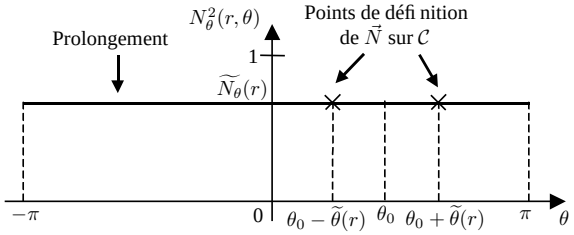
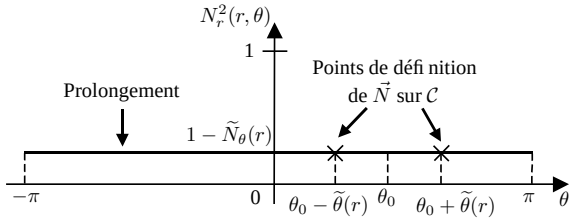


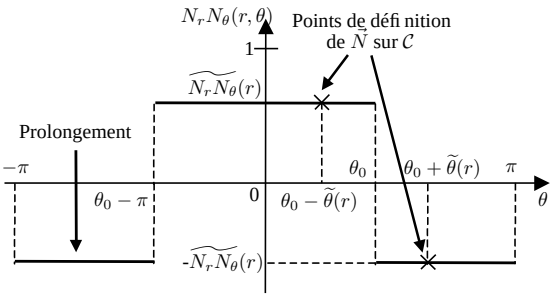
FIG. 3.17 – Vecteur normal au cercle $\mathcal{C}$ sur le cylindre circulaire de rayon r centré sur l'origine



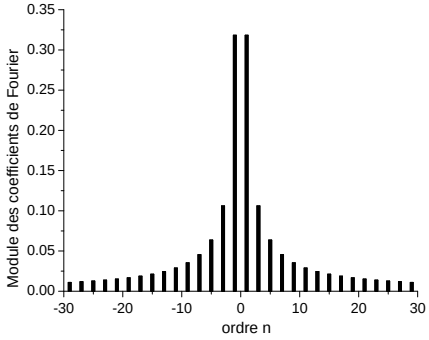
(a) Représentation de la fonction $N_\theta^2(r,\theta)$ sur le cylindre C_r de la figure 3.15(b)



(b) Représentation de la fonction $N_r^2(r,\theta)$ sur le cylindre C_r de la figure 3.15(b)



(c) Représentation de la fonction $N_r N_\theta(r,\theta)$ sur le cylindre C_r de la figure 3.15(b)



(d) Spectre de Fourier de $N_r N_\theta(r_-,\theta)$ en $r = r_-$ tel que $\widetilde{N_r N_\theta}(r)$ soit maximal

FIG. 3.18 – Fonctions $N_\theta^2(r,\theta)$, $N_r^2(r,\theta)$ et $N_r N_\theta(r,\theta)$ dans la zone modulée

La détermination du prolongement du produit $N_r N_\theta$ qui se déduit encore de celui de N_θ^2, reste toujours la plus délicate puisqu'il faut prendre garde aux signes de N_r et de N_θ (voir figure 3.17) :

$$N_r N_\theta(r,\theta) = \tilde{s}\sqrt{N_\theta^2(r,\theta)\left[1 - N_\theta^2(r,\theta)\right]} \text{ avec } \tilde{s} = \begin{cases} 1 \text{ si } \theta \in [\theta_0 - \pi, \theta_0] \text{ et } r \leq r_m \\ -1 \text{ si } \theta \in [\theta_0 - \pi, \theta_0] \text{ et } r > r_m \\ -1 \text{ si } \theta \in]-\pi, \theta_0 - \pi[\cup]\theta_0, \pi[\text{ et } r \leq r_m \\ 1 \text{ si } \theta \in]-\pi, \theta_0 - \pi[\cup]\theta_0, \pi[\text{ et } r > r_m \end{cases} \tag{3.123}$$

De manière générale, on ne peut déduire les coefficients de Fourier de $N_r N_\theta(r,\theta)$ en fonction de ceux de $N_\theta^2(r,\theta)$ étant donnée la complexité de la relation (3.123). Dans le cas présent, le prolongement $N_r N_\theta(r,\theta)$ est une fonction créneau dont le signe change à la traversée du cylindre C_{r_m}. Les coefficients de Fourier de cette fonction restent donc facilement calculables analytiquement. La figure 3.18(c) représente la forme générale de cette fonction pour une valeur arbitraire de r telle que $r < r_m$. Les positions de deux discontinuités en abscisse sont a priori purement arbitraires. Afin d'éviter le phénomène de Gibbs engendré autour de ces discontinuités, on les dispose le plus loin possible des points de définition de $\vec{N}$ sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire en θ_0 et $\theta_0 - \pi$. Les coefficients de Fourier de ce prolongement s'expriment par :

$$\left(N_r N_\theta\right)_0(r) = 0 \tag{3.124}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(N_r N_\theta\right)_n(r) = \frac{ie^{-in\theta_0}}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right]\widetilde{N_r N_\theta}(r) \tag{3.125}$$

avec

$$\widetilde{N_r N_\theta}(r) = \tilde{s}'\sqrt{\left[\widetilde{N_\theta}(r)\right]^2\left\{1 - \left[\widetilde{N_\theta}(r)\right]^2\right\}} \text{ avec } \tilde{s}' = \begin{cases} 1 \text{ si } r \leq r_m \\ -1 \text{ si } r > r_m \end{cases} \tag{3.126}$$

Dans ce prolongement (voir figure 3.18(c)), il est intéressant de constater que les angles des discontinuités (en θ_0 et $\theta_0 - \pi$) sont choisis indépendants de la variable r. La largeur du spectre de Fourier de $N_r N_\theta(r,\theta)$ est seulement conditionnée par le saut de discontinuité de la fonction, soit par la valeur de $\widetilde{N_r N_\theta}(r)$. Il existe deux valeurs de r de part et d'autre du cylindre C_{r_m}, notées $r_\pm$, pour lesquelles $\widetilde{N_r N_\theta}(r)$ est maximal. On montre qu'elles s'expriment selon :

$$r_\pm = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2R_0^2 - R^2} \pm R\right)$$

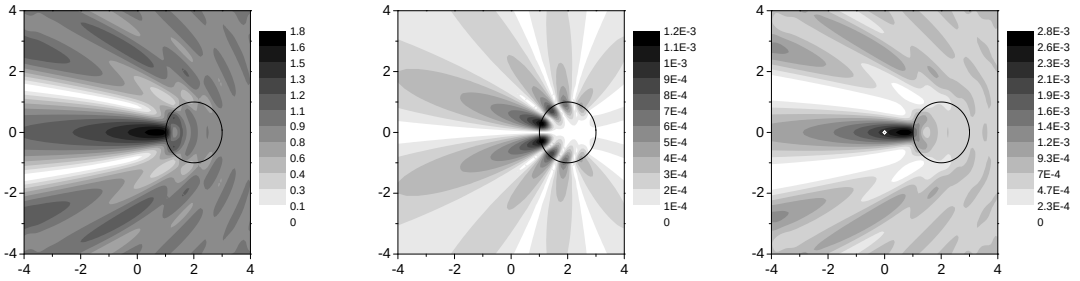
Pour le cylindre circulaire considéré, on a $r_- = 1.16372\ \mu m$ et $r_+ = 2.57794\ \mu m$. Pour ces valeurs $r_\pm$, le spectre de Fourier de $N_r N_\theta(r,\theta)$ s'élargit au maximum. La figure 3.18(d) illustre ce spectre de Fourier pour $r = r_-$.

Résultats numériques .

Les SED calculées pour le cylindre circulaire excentré sont désormais notées $\sigma^{(exc)}(\theta)$. Etant donnée la précision obtenue, aucune d'entre elles ne sera graphiquement illustrée, puisqu'elles se confondent avec celles obtenues pour le cercle centré sur l'origine $\sigma^{(c)}(\theta)$ (voir les figures 3.12(a) et 3.12(b)). Par exemple, l'écart relatif moyen des deux courbes pour $N = 20$ dans le cas du cercle centré et pour $N = 30$ dans le cas du cercle excentré vaut $1.18\ 10^{-3}$ environ. On observe également une très grande similitude entre les cartes de champs calculées pour le cercle centré (voir figures 3.19(a) à 3.19(c)) et celles pour le cercle excentré (voir figures 3.13(a) à 3.13(c)) avec $N = 30$.

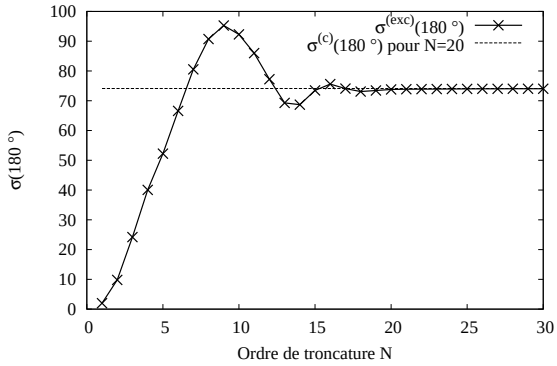
Afin d'évaluer la précision de la méthode FFF, on étudie la convergence des résultats en fonction de l'ordre de troncature N. La figure 3.20(a) montre la comparaison entre la convergence en fonction de N de $\sigma^{(exc)}(180^o)$ et la valeur prise comme référence correspondant à $\sigma^{(c)}(180^o)$ pour $N = 20$ (voir figure 3.14(a)). A $N = 30$, l'écart relatif entre les valeurs obtenues pour les deux configurations se réduit à $7.83\ 10^{-4}$. Le palier de la convergence s'explique simplement à la vue du spectre en amplitude du champ diffracté à l'extérieur (voir figure 3.20(b)).

On peut également constater que le théorème optique est d'autant mieux vérifié que N augmente puisque la figure 3.20(c) montre que $\mathcal{T}(N)$ tend vers 0 lorsque N croît ($\mathcal{T}(30) \approx -4.9\ 10^{-5}$). La durée de calcul est conditionnée par l'algorithme d'intégration et évolue comme $(2N+1)^3$ (voir la figure 3.20(d)). A $N = 30$, le calcul dure un peu moins d'une minute.

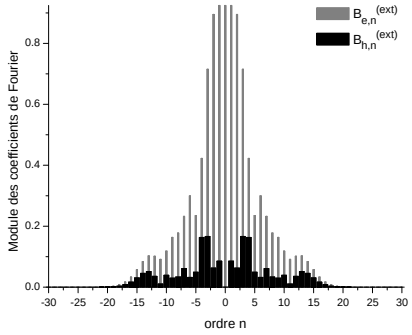


(a) Carte de $\left|E_z^d\right|$ (b) Carte de $\left|H_z^d\right|$ (c) Carte de $\left|\mathcal{P}_z^d\right|$

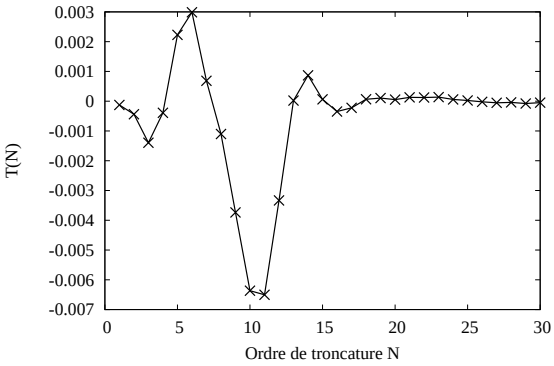
FIG. 3.19 – Cartes de champs du cylindre circulaire excentré sur l'origine



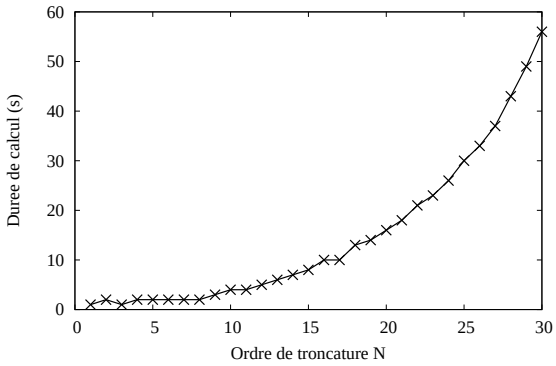
(a) Convergence selon N de $\sigma^{(exc)}(180^o)$



(b) Spectre en amplitude de E_z^d et H_z^d



(c) Convergence selon N de $\mathcal{T}(N)$



(d) Durée de calcul en fonction de N

FIG. 3.20 – Evolution de quelques grandeurs selon l'ordre de troncature maximal N pour le cylindre circulaire excentré sur l'origine

3.5.4 Nécessité de l'algorithme S

Nous avons obtenu les résultats précédents en utilisant par défaut l'algorithme S. Dans un premier temps, nous allons montrer la nécessité de cet algorithme sur cette même configuration en mettant en évidence les problèmes liés aux contaminations numériques. Nous testerons dans un second temps sa stabilité numérique en fonction du nombre de couches S sur une structure à milieu conducteur ; la conductivité renforçant les instabilités numériques.

Mise en évidence du problème de contamination numérique .

On considère le même cylindre circulaire excentré que celui étudié auparavant. On compare les résultats obtenus par intégration avec l'algorithme S à ceux obtenus avec l'algorithme T. En ce qui concerne l'algorithme S, les paramètres (nombre de couches S et nombre de pas d'intégration) sont identiques aux précédents. Pour l'algorithme T, on prend un nombre de pas d'intégration égal à 100 pour les deux premières sous-zones modulées et égal à 50 pour la troisième. Ainsi, le nombre total de pas d'intégration de l'algorithme T ($100 \times 2 + 50 = 250$) reste égal à celui de l'algorithme S ($(10 \times 10) \times 2 + 10 \times 5 = 250$). Les structures ne diffèrent alors que par la nature de l'algorithme utilisé. La figure 3.21 représente, pour chacun des algorithmes, l'évolution en fonction de N de l'écart relatif entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ et $\sigma^{(c)}(180^o)$ calculée avec à $N = 20$. Pour l'algorithme T, elle laisse clairement apparaître une divergence de la courbe à partir de $N = 30$ environ, alors que la convergence est assurée pour le calcul utilisant l'algorithme S. Cette divergence montre l'apparition des instabilités numériques. Comme expliqué dans la section 3.3.1, elles dépendent des ordres auxquels les fonctions de Bessel sont évaluées. Par conséquent, l'ordre de troncature N conditionne l'apparition des instabilités numériques. La série des cinq figures 3.22(a) à 3.22(e) représente les matrices T sous forme de cartes colorées, pour les valeurs de N suivantes : 25, 30, 35, 40 et 45. On précise que l'échelle de couleur est la même pour toutes les figures afin de pouvoir les comparer. On voit bien apparaître la structure 4×4 par bloc de la matrice T. Chaque bloc T_{ij} ($(i,j) \in \{1,2\}^2$) de dimension $2(2N+1) \times 2(2N+1)$ défini par (3.62) est constitué de 4 sous-blocs de dimension $(2N+1) \times (2N+1)$. On observe trois faits :

1. Pour une valeur de N donnée (une des figures), les valeurs des éléments d'un bloc augmentent avec n (lignes et colonnes). Autrement dit, pour un des blocs, la région centrale contient des valeurs moins élevées (de couleur plus claire) que la région périphérique (plus foncée).
2. Lorsque N augmente (d'une figure à l'autre), l'ensemble des valeurs de la matrice croît également. Les couleurs des blocs deviennent de plus en plus foncées sur l'ensemble de leurs éléments.
3. Les éléments dont la valeur dépasse la précision du calculateur (10^{15}, en noir sur les figures) apparaissent à partir de $N = 35$ (voir figures 3.22(c) à 3.22(e)). Leur bloc T_{11} devient alors difficilement inversible et permet de comprendre le début des instabilités numériques. Ceci confirme la divergence observée sur la figure 3.21.

La série des cinq figures 3.22(f) à 3.22(j) représente les matrices S également sous forme de cartes colorées et pour les mêmes valeurs de N. On vérifie que la structure 4×4 par bloc de la matrice S est bien évidemment conservée. On peut formuler trois constatations opposées à celles précédemment citées. Les éléments d'un des blocs de ces matrices tendent vers 0 lorsque n augmente, c'est-à-dire lorsque les indices des lignes et des colonnes croîssent. On vérifie que les éléments de la matrice S ne divergent pas quelle que soit la valeur de N. La valeur moyenne de l'ensemble des éléments d'un bloc reste a peu près constante lorsque N augmente (les valeurs de la matrice n'excèdent pas 10^2). La détermination de ces matrices S par l'algorithme S est alors bien conditionnée, ce qui assure la convergence des résultats observés à la figure 3.21.

Stabilité numérique de l'algorithme S .

Dans l'étude précédente, les nombres de couches S pour les trois sous-zones modulées (respectivement $L_1 = 10$, $L_2 = 10$ et $L_3 = 5$) ont été fixés arbitrairement. Cependant, nous savons que les instabilités numériques qui apparaissent dans l'algorithme T sont liées à l'ordre de troncature N. Dans ce cas, comment évaluer la stabilité numérique de l'algorithme S, à savoir le nombre de couches S en fonction de N pour assurer le bon conditionnement des calculs ? Pour en avoir une idée, on considère un cylindre circulaire avec les mêmes paramètres géométriques que le précédent.

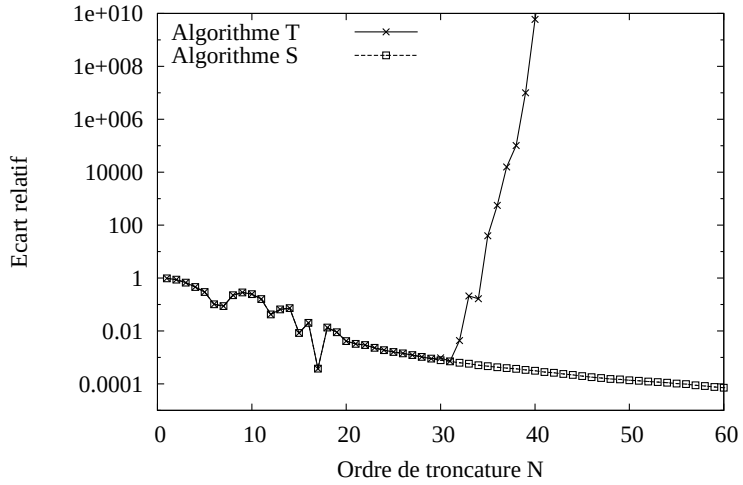


FIG. 3.21 – Convergence selon N de l'écart relatif entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ et $\sigma^{(c)}(180^o)$ prise à $N = 20$ pour les algorithmes T et S

Cependant, le milieu du cylindre devient fortement conducteur afin d'accentuer les instabilités numériques. Les paramètres sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2+5i
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	0^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	0^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 120
τ_c	50%
L_1 et L_2	1 à 5
L_3	1 à 5
P_1, P_2 et P_3	10

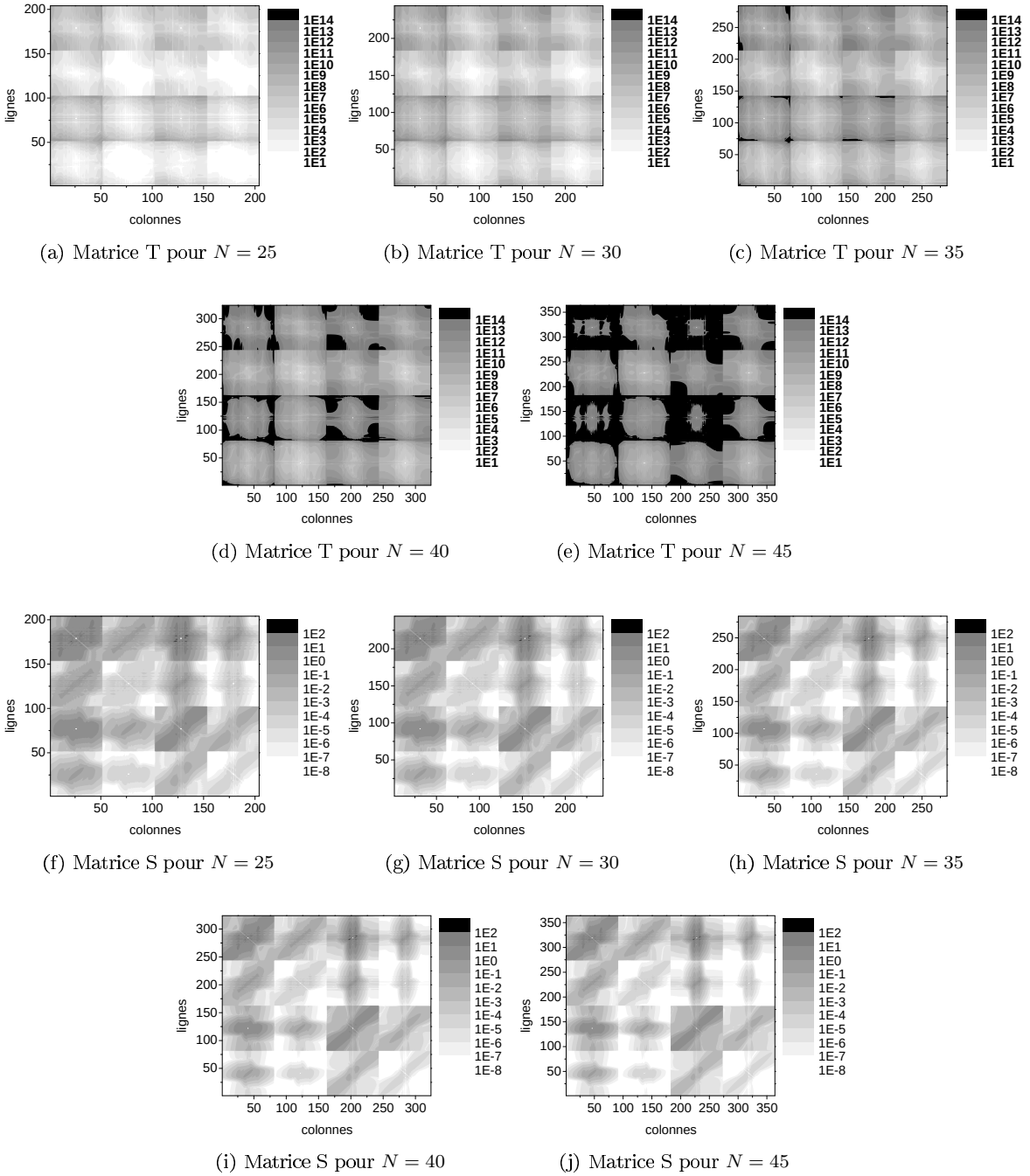
La nouvelle valeur de τ_c choisie permet d'avoir trois sous-zones modulées d'épaisseur sensiblement voisine :

Sous-zone modulée i	R_i	R_{i+1}	Epaisseur
1	1 μm	1.73205 μm	0.73205 μm
2	1.73205 μm	2.36603 μm	0.63397 μm
3	2.36603 μm	3 μm	0.63397 μm

La figure 3.23 illustre à nouveau l'écart relatif entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ et $\sigma^{(c)}(180^o)$ prise à $N = 20$, pour les valeurs de L suivantes :

L_1 et L_2	L_3	L
1	1	3
2	2	6
3	3	9
4	4	12
5	5	15

On vérifie bien que les instabilités numériques apparaissent pour des valeurs de N d'autant plus grandes que la valeur de L est élevée. On remarquera que, relativement à chaque courbe, il existe



(a) Matrice T pour $N = 25$ (b) Matrice T pour $N = 30$ (c) Matrice T pour $N = 35$

(d) Matrice T pour $N = 40$ (e) Matrice T pour $N = 45$

(f) Matrice S pour $N = 25$ (g) Matrice S pour $N = 30$ (h) Matrice S pour $N = 35$

(i) Matrice S pour $N = 40$ (j) Matrice S pour $N = 45$

FIG. 3.22 – Représentation des matrices T et S sous forme de cartes pour quelques valeurs de N de la figure 3.21. L'échelle des couleurs correspond au module des éléments de la matrice. De $N = 25$ à 45, la même échelle est conservée.

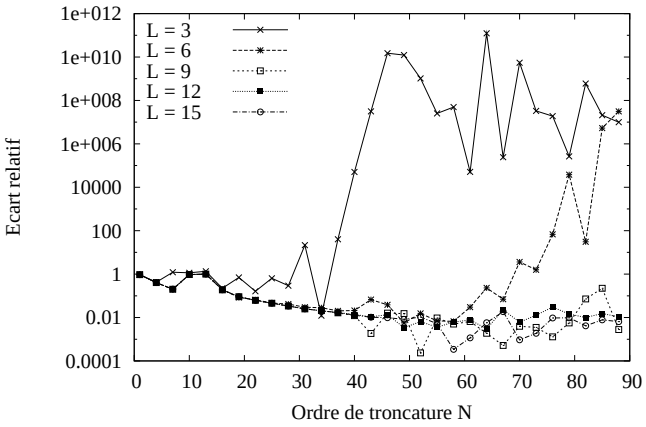


FIG. 3.23 – Convergence selon N de l'écart relatif entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ et $\sigma^{(c)}(180^o)$ prise à $N = 20$, en fonction du nombre de couches S

un intervalle de transition pour N situé avant la divergence et pour lequel même si les valeurs de $\sigma^{(exc)}(180^o)$ ne divergent pas encore, elles demeurent néanmoins instables, présentant de fortes variations. Par exemple, on notera qu'il ne faut pas que N excède la valeur 25 pour $L = 3$ et 55 pour $L = 6$. Pour les autres courbes, on peut difficilement se prononcer. Cependant, plus L augmente, plus l'intervalle des premières instabilités se déplace vers les grandes valeurs de N. En pratique, les valeurs de L ont toujours été choisies arbitrairement en fonction de la précision souhaitée, en vérifiant néanmoins, pour la structure étudiée, le bon conditionnement des résultats. A ce jour, aucune relation qui permette de fixer L en fonction de N n'a été établie.

3.5.5 Comparaison entre la méthode FFF et la méthode classique

Afin d'évaluer l'amélioration apportée par la méthode FFF dans la méthode différentielle, nous allons comparer les résultats obtenus par la version actuelle de méthode différentielle, notée MD, tenant compte que l'algorithme S et de la méthode FFF, à ceux obtenus par la méthode différentielle classique, notée MDC (pour laquelle la méthode FFF n'est pas utilisée mais l'algorithme S l'est par défaut). On rappelle que la MDC peut être aisément implémentée à partir de la MD puisqu'il suffit de porter la relation (3.17) dans la matrice Q_ϵ. Dans le but d'accroître la différence entre les résultats correspondant à ces deux versions de la méthode différentielle, nous allons changer deux types de paramètres dans le système de référence précédent. On sait que l'intérêt de la méthode FFF réside dans la prise en compte, dans l'espace de Fourier, des discontinuités de $\epsilon(r,\theta)$ et du champ électrique à la traversée de la surface S, dans le produit : $\vec{D}(r,\theta,z) = \epsilon(r,\theta)\vec{E}(r,\theta,z)$. Cet effet sera d'autant plus marqué que le saut de la fonction $\epsilon(r,\theta)$ sera important, c'est-à-dire que l'écart des indices entre le milieu intérieur et extérieur sera important. On sait également que l'application de la règle Inverse représente la base de la méthode FFF. Cependant, cette règle concerne les composantes normales des champs électriques. Son utilisation sera alors d'autant plus nécessaire que ces composantes seront "éclairées" par celles de l'onde plane incidente.

Augmentation de l'écart d'indice entre les milieux intérieur et extérieur .

On conserve la géométrie du cylindre précédent à section circulaire éclairée par la même onde plane incidente. En fait, nous allons considérer trois configurations qui ne diffèrent que par la valeur de l'indice n_{cyl} du cylindre. La première est la configuration de référence étudiée précédemment : $n_{cyl} = 1.2$. Pour la deuxième configuration, on augmente l'indice du cylindre à la valeur $n_{cyl} = 3$. Enfin, l'indice du cylindre pour la troisième configuration correspond à une forte conductivité électrique : $n_{cyl} = 1.2 + i5$ (celle prise dans la section précédente). Les paramètres ont pour

valeurs :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2, 3 et 1.2+i5
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	0^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	0^o
$\left\|\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 120
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10

Pour chacune de ces trois configurations, les figures 3.24(a), 3.24(b) et 3.24(c) comparent l'évolution en fonction de N de l'écart relatif entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ et $\sigma^{(c)}(180^o)$ obtenues avec la MD et la MDC. On note le début d'instabilités numériques pour la MD dans la figure 3.24(a) (à partir de $N = 110$) et pour les deux méthodes dans la figure 3.24(b) (à partir de $N = 70$). Elles sont dues aux contaminations numériques dans l'algorithme S : le nombre fixé de couches S (L) devient insuffisant pour ces valeurs de N. Cet effet ne nous intéresse pas ici car il a été amplement étudié à la section précédente. Dans les régions de convergence stable et pour chacune de ces trois figures, on constate que la MD converge plus vite que la MDC. La figure 3.25 montre l'écart τ_{MD-MDC} entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ calculé par la MD et la MDC, normalisé par à $\sigma^{(c)}(180^o)$:

$$\tau_{MD-MDC} = \left| \frac{\sigma^{(exc)}_{MD}(180^o) - \sigma^{(exc)}_{MDC}(180^o)}{\sigma^{(c)}(180^o)} \right| \tag{3.127}$$

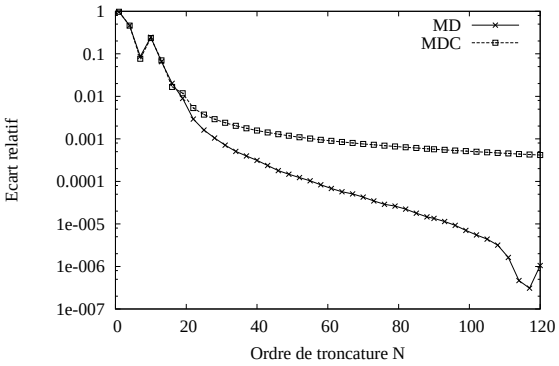
Ceci permet d'évaluer l'écart entre les résultats des deux méthodes pour chacune des trois valeurs de l'indice du cylindre n_{cyl}. Les instabilités numériques observées sur les figures précédentes réapparaissent, en particulier pour le cas $n_{cyl} = 1.2 + i5$ à partir de $N = 80$. On se rend compte que l'écart entre les deux méthodes tend à diminuer et à se stabiliser lorsque N augmente et quel que soit l'indice n_{cyl}. Ceci s'explique par le fait que les résultats convergent non pas vers "LA" valeur théorique mais bien vers une valeur numérique qui dépend de la précision imposée par les paramètres choisis. Par comparaison entre les trois courbes, cette figure met également bien en évidence le décalage croissant entre les deux méthodes lorsque n_{cyl} et la conductivité électrique augmentent.

Influence des paramètres de l'onde plane incidente .

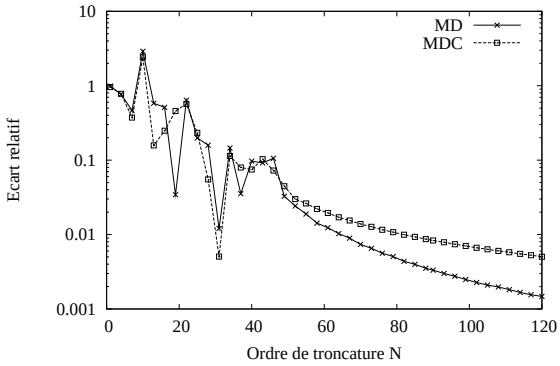
Nous nous intéressons ici à l'influence des paramètres de l'onde incidente sur la différence des résultats obtenus par les deux versions de la méthode différentielle (MD et MDC). Pour les systèmes opto-géométriques étudiés précédemment, ces paramètres induisent (à partir de (2.49) et (2.50)) les vecteurs amplitudes incidents suivants :

$$\vec{E}_0^{(inc)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{H}_0^{(inc)} = \frac{1}{Z_{ext}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

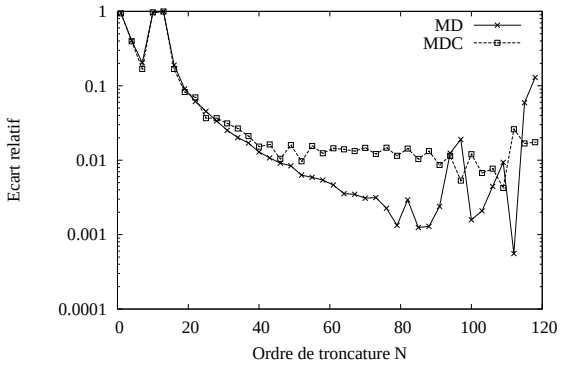
exprimés dans le système de coordonnées cylindriques. Cependant, on sait que l'application de la règle inverse assure la convergence des développements des composantes normales à S du champ électrique. D'après la géométrie de la structure, ces composantes normales à S s'expriment selon celles en r et θ qui sont, dans le cas présent, faiblement "éclairée" par le champ incident : $E^{(inc)}_{0,r} = -\frac{1}{2}$ et $E^{(inc)}_{0,\theta} = 0$. Malgré tout, l'écart entre la MD et la MDC a bien été observé (voir les figures 3.24(a) à 3.24(c)). On cherche alors de nouveaux paramètres de l'onde plane incidente qui puissent mieux éclairer les composantes $E^{(inc)}_{0,r}$ et $E^{(inc)}_{0,\theta}$ en atténuant les autres si possible. Notre choix



(a) Cas où $n_{cyl} = 1.2$



(b) Cas où $n_{cyl} = 3$



(c) Cas où $n_{cyl} = 1.2 + i5$

FIG. 3.24 – Convergences selon N de $\sigma^{(exc)}(180^o)$ calculé par la MD et la MDC, pour différentes valeurs de n_{cyl}

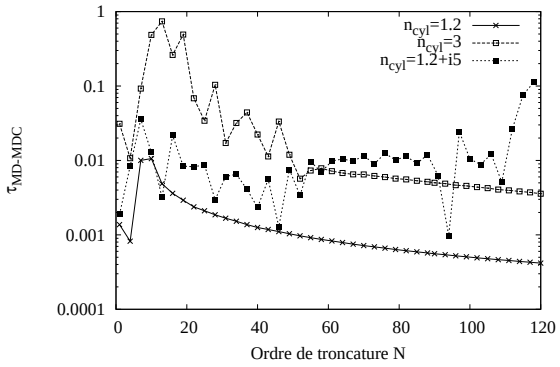


FIG. 3.25 – Convergence selon N de τ_{MD-MDC}

s'est orienté sur les paramètres suivants : $\theta_{inc} = 45^o$ et $\psi_{inc} = 90^o$. Dans ce cas, les composantes des vecteurs amplitudes incidents ont pour valeurs :

$$\vec{E}_0^{(inc)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{H}_0^{(inc)} = \frac{1}{Z_{ext}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

On rappelle l'ensemble des paramètres :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2, 3 et 1.2+i5
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	45^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	90^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 120
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10

Les figures 3.26(a), 3.26(b), 3.26(c) et 3.27 représentent les mêmes grandeurs que les précédentes (voir figures 3.24(a) à 3.25), mais cette fois-ci pour les nouvelles valeurs des paramètres θ_{inc} et ψ_{inc}. On peut émettre les mêmes observations en ne tenant toujours pas compte des instabilités numériques qui apparaissent à la figure 3.27 à partir de $N = 80$. En comparant les figures 3.25 et 3.27, on vérifie que l'écart entre les résultats de la MD et ceux de la MDC est plus important qu'auparavant. Il faut surtout constater que la MDC devient insuffisante lorsque n_{cyl} augmente (voir figures 3.26(b) et 3.26(c)) alors que les résultats de la MD semblent toujours converger vers la bonne valeur (cylindre centré). Dans le cas où $n_{cyl} = 3$, la MDC ne semble même plus y converger puisqu'elle tend à se stabiliser vers un écart relatif de 0.33 environ (voir figure 3.26(b)). Pour $n_{cyl} = 1.2 + i5$, la précision des résultats de la MDC devient totalement insuffisante puisque la valeur de l'écart relatif ne diminue pas en-dessous de 2 environ (voir figure 3.26(c)).

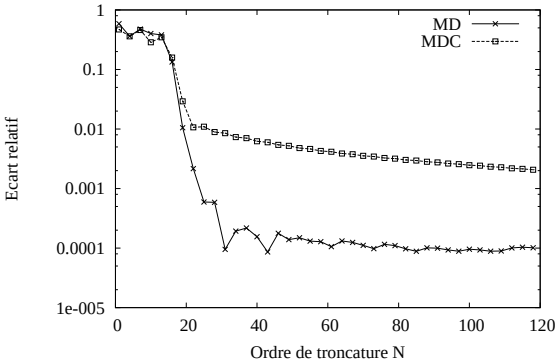
3.5.6 Influence du prolongement de $\vec{N}$ dans la méthode FFF

Le choix du prolongement du vecteur normal à la surface S dans la zone modulée constitue la plus intéressante des originalités de la méthode FFF. On rappelle que les matrices de Toeplitz de N_θ^2, N_r^2 et $N_r N_\theta$ interviennent dans l'expression de la matrice Q_ϵ (3.15). Le prolongement décrit en 3.5.3 présente l'avantage de permettre le calcul analytique de leurs coefficients de Fourier. Cependant, les inconvénients résident dans les discontinuités de la fonction $N_r N_\theta$ (voir figure 3.18(c)) qui en élargissent le spectre de Fourier de façon non négligeable (voir figure 3.18(d)). En outre, les coefficients de Fourier des prolongements de $N_\theta^2(r,\theta)$, $N_r^2(r,\theta)$ et $N_r N_\theta(r,\theta)$ dépendent tous de la variable radiale r, ce qui oblige à évaluer leurs matrices de Toeplitz à chaque pas d'intégration.

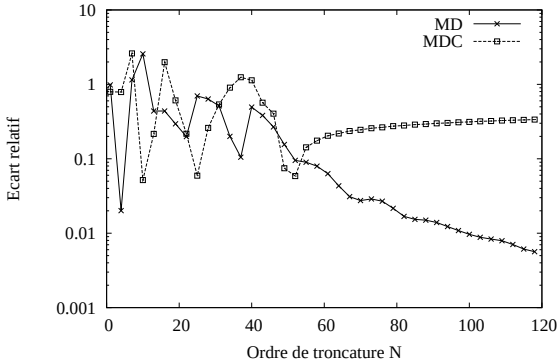
Description du second prolongement .

Nous allons considérer un nouveau prolongement de la fonction $N_\theta^2(r,\theta)$ à partir duquel nous déduirons, comme pour le premier prolongement, ceux des fonctions $N_r^2(r,\theta)$ et $N_r N_\theta(r,\theta)$. On utilise le second principe de prolongement évoqué à la section 2.3.3 qui est d'étendre la définition du vecteur $\vec{N}$ par le gradient à tous les points de la zone modulée, et non plus seulement aux points de la surface S. On applique alors la relation (2.94) à l'équation de la surface $f_S(r,\theta)$ du cercle excentré. Après avoir substitué r par son expression selon θ : $r = g_S(\theta)$, on trouve une expression de N_θ^2 dépendant seulement de la variable θ :

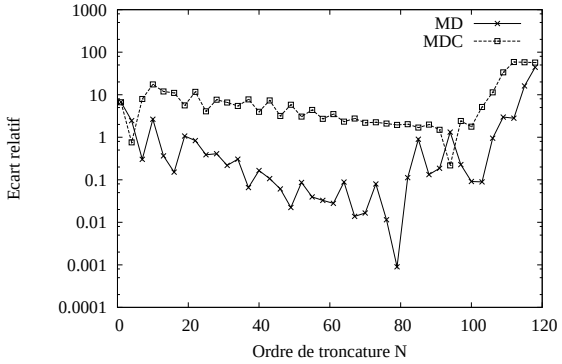
$$N_\theta^2(r,\theta) = \frac{R_0^2}{R^2} \sin^2(\theta - \theta_0) \text{ avec } \theta \in \left[\theta_0 - \frac{\theta_m}{2}, \theta_0 + \frac{\theta_m}{2}\right]$$



(a) Cas où $n_{cyl} = 1.2$



(b) Cas où $n_{cyl} = 3$



(c) Cas où $n_{cyl} = 1.2 + i5$

FIG. 3.26 – Convergences de $\sigma^{(exc)}(180^o)$ pour la MD et la MDC

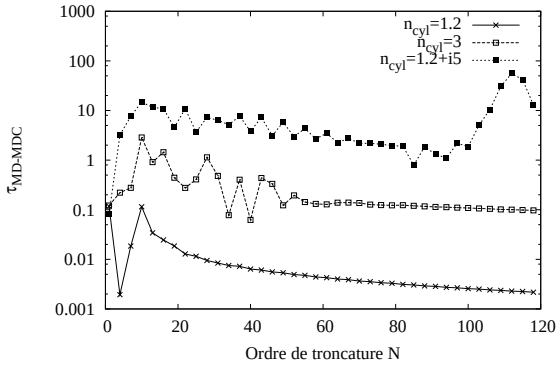


FIG. 3.27 – Convergence selon N de τ_{MD-MDC}

Pour l'instant, ce prolongement est valable quelle que soit la valeur de r ($r \in [R_{min}, R_{max}]$) mais reste limité à l'intervalle $\left[\theta_0 - \frac{\theta_m}{2}, \theta_0 + \frac{\theta_m}{2}\right]$ de l'angle θ. En effet, le cercle $\mathcal{C}$ n'est contenu que dans le secteur d'angle θ_m centré sur l'angle θ_0. Afin d'obtenir une fonction développable en série de Fourier, il est nécessaire d'étendre la définition de $\vec{N}$ sur l'intervalle entier $[-\pi, \pi]$. On évite toute discontinuité de la fonction $N_\theta^2(r,\theta)$ en la prolongeant à la valeur constante 1 sur les intervalles de θ complémentaires à $\left[\theta_0 - \frac{\theta_m}{2}, \theta_0 + \frac{\theta_m}{2}\right]$ sur 2π (voir figure 3.28(a)). Finalement, le prolongement choisi s'écrit :

$$N_\theta^2(r,\theta) = \begin{cases} \frac{R_0^2}{R^2}\sin^2(\theta - \theta_0) \text{ si } \theta \in \left[\theta_0 - \frac{\theta_m}{2}, \theta_0 + \frac{\theta_m}{2}\right] \\ 1 \text{ si } \theta \in \left[-\pi, \theta_0 - \frac{\theta_m}{2}\right] \cup \left[\theta_0 + \frac{\theta_m}{2}, \pi\right] \end{cases} \tag{3.128}$$

Ce prolongement de N_θ^2 est valable dans toutes les sous-zones modulées. Les coefficients de Fourier d'une telle fonction périodique restent calculables analytiquement. Leurs expressions deviennent seulement un peu plus complexes que le premier prolongement qui était représenté par des fonctions constantes ou créneaux. Le coefficient de Fourier d'ordre 0 du prolongement (3.128) s'écrit :

$$\left(N_\theta^2\right)_0 = 1 + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{R_0^2}{4R^2}\left[\theta_m - \sin(\theta_m)\right] - \frac{\theta_m}{2}\right\} \tag{3.129}$$

Les coefficients d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ se répartissent en deux cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{-2,0,2\},\ \left(N_\theta^2\right)_n = \frac{e^{-in\theta_0}}{\pi}\left\{\frac{R_0^2}{2R^2}\left[\frac{\sin\left(n\frac{\theta_m}{2}\right)}{n} - \frac{\sin\left[(n-2)\frac{\theta_m}{2}\right]}{(n-2)\theta_m} - \frac{\sin\left[(n+2)\frac{\theta_m}{2}\right]}{(n+2)\frac{\theta_m}{2}}\right] - \frac{\sin\left(n\frac{\theta_m}{2}\right)}{n}\right\} \tag{3.130}$$

et si $n = -2$ ou 2, on trouve :

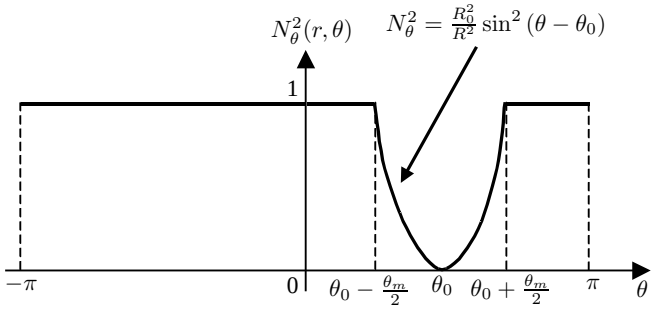
$$\left(N_\theta^2\right)_{\pm 2} = \frac{e^{\mp 2i\theta_0}}{2\pi}\left\{\frac{R_0^2}{2R^2}\left[\sin(\theta_m) - \frac{1}{4}\sin(2\theta_m) - \frac{\theta_m}{2}\right] - \sin(\theta_m)\right\} \tag{3.131}$$

La figure 3.29 représente ce spectre de Fourier, qui a pour largeur $\Delta_{99\%} = 8$. Ce spectre reste donc assez étroit. Le prolongement de la fonction $N_r^2(r,\theta)$ se déduit de celui de $N_\theta^2(r,\theta)$ (3.129), d'après la relation (3.120). Ses coefficients en découlent également selon les relations (3.121) et (3.122). Cette fonction est illustrée par la figure 3.28(b). Son spectre possède la même largeur que celui de $N_\theta^2(r,\theta)$.

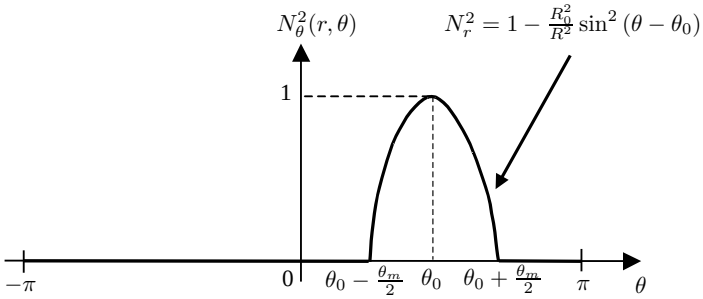
La principale difficulté provient toujours du prolongement de $N_r N_\theta(r,\theta)$. D'après (3.123), il se déduit aussi de (3.129). Il faut prendre garde au changement de signe de cette fonction à la traversée du cylindre C_{r_m}. Dans le cas du cylindre circulaire étudié ($R_0 = 2\ \mu m$ et $R = 1\ \mu m$), la figure 3.30(a) représente $N_r N_\theta(r,\theta)$ pour la première sous-zone modulée, sachant qu'il faudra prendre la fonction opposée pour les deux autres sous-zones modulées. L'expression de cette fonction demeure trop complexe pour pouvoir en déduire analytiquement ses coefficients de Fourier. Dans le programme, on utilise alors un algorithme de transformation rapide de Fourier ("Fast Fourier Transform" dit FFT). La figure 3.30(b) montre à la fois le spectre de Fourier de ce second prolongement et celui du premier prolongement évalué en $r = r_-$ (le même que la figure 3.18(d)). La largeur à mi-hauteur du spectre associé au second prolongement est $\Delta_{50\%} = 18$. Il est donc beaucoup plus étalé que celui associé au premier prolongement. On notera que ces nouveaux prolongements des trois composantes N_θ^2, N_r^2 et $N_r N_\theta$ ne présentent aucune discontinuité. Il n'apparaît donc pas de phénomène de Gibbs important. En fait, cet avantage reste modéré puisque la largeur de leurs spectres de Fourier est modulée par leurs fortes croissances sur l'intervalle $\left[\theta_0 - \frac{\theta_m}{2}, \theta_0 + \frac{\theta_m}{2}\right]$. Le principal intérêt de ces prolongements réside dans leur indépendance selon la variable r. Autrement dit, il n'est pas nécessaire d'évaluer les matrices de Toeplitz à chaque pas d'intégration. Les matrices de Toeplitz $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r^2]\!]$ sont calculées une seule fois avant l'intégration utilisant l'algorithme S. Par contre, la matrice $[\![N_r N_\theta]\!]$ est calculée deux fois : pour la première sous-zone modulée, puis pour les deuxième et troisième sous-zones modulées.

Résultats numériques .

Nous allons comparer les résultats obtenus avec les deux types de prolongement. On considère le



(a) Second prolongement de N_θ^2 basé sur la relation du gradient (2.94)



(b) Second prolongement de N_r^2 déduit de celui de N_θ^2

FIG. 3.28 – Second prolongement de N_r^2 et N_θ^2 utilisé pour le cylindre circulaire excentré de la figure 3.15(b), sur le cylindre C_r

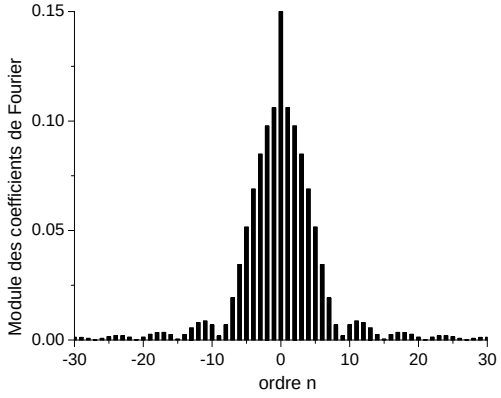
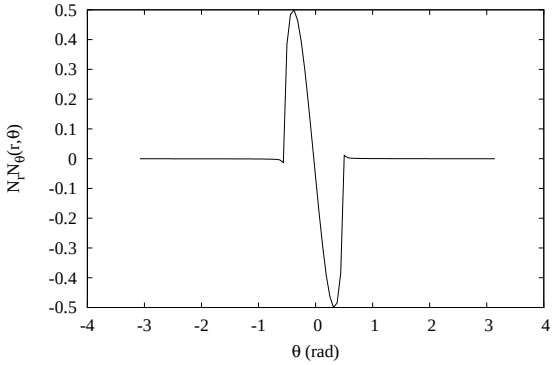
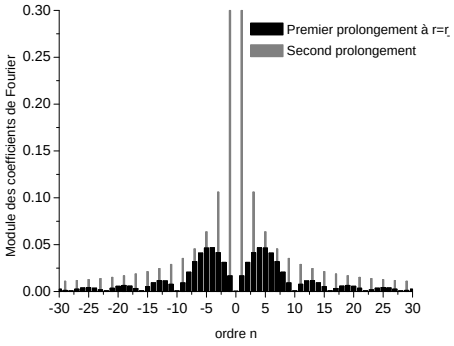


FIG. 3.29 – Spectre de Fourier du premier et du second prolongement de N_θ^2



(a) Second prolongement de N_rN_θ



(b) Spectre de Fourier du second prolongement de N_rN_θ donné par la figure 3.30(a)

FIG. 3.30 – Second prolongement de N_rN_θ utilisé pour le cylindre circulaire excentré de la figure 3.15(b), sur le cylindre C_r

cylindre circulaire excentré ayant pour paramètres :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	3
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	45^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	90^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 120
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10

Il correspond à l'une des configurations précédentes qui accentue le décalage entre la MD et la MDC, c'est-à-dire lorsque l'application de la règle Inverse devient nécessaire (fort contraste d'indice). Il s'agit du cas du cylindre de haut indice éclairé par une onde plane incidente ayant un champ électrique fortement polarisé dans le plan (Oxy). La figure 3.31 montre que la convergence selon N de $\sigma^{(exc)}(180^o)$, associée au premier prolongement par rapport à $\sigma^{(c)}(180^o)$, est plus rapide que celle du second prolongement. Ce résultat s'explique simplement par l'élargissement de tous les spectres de Fourier de N_θ^2, N_r^2 et N_rN_θ du second prolongement par rapport au premier. En d'autres termes, les fortes croissances du second prolongement (voir les figures 3.28(a) à 3.30(a)) sont plus néfastes pour la précision des résultats que la discontinuité de $N_rN_\theta(r,\theta)$ associée au premier type de prolongement (voir les figures 3.18(a) à 3.18(c)). On pourrait envisager d'autres types de prolongements de N_θ^2, N_r^2 et N_rN_θ assurant une meilleure convergence selon N que les deux étudiés dans cette section. Néanmoins, il semble que les prolongements par fonction créneau (les premiers considérés, voir figures 3.18(a) à 3.18(c)) restent les plus simples pour le calcul analytique de leurs coefficients de Fourier. On prendra par défaut ce type de prolongement.

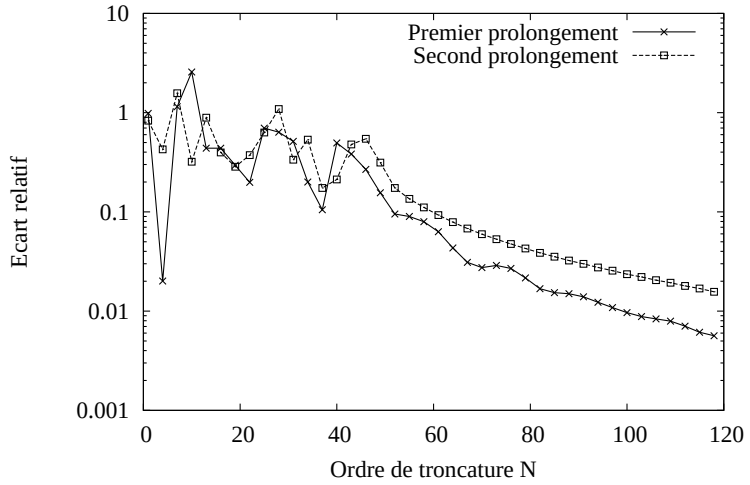


FIG. 3.31 – Convergence selon N de $\sigma^{(exc)}(180^o)$ pour les deux types de prolongements

CONCLUSION DU CHAPITRE Nous avons vu que le problème de la diffraction conique peut être complètement résolu pour un objet cylindrique invariant selon z et rempli de milieux homogènes et isotropes. Les problèmes de contamination numérique intervenant dans le processus d'intégration peuvent être évités grâce à l'algorithme de propagation de la matrice S. L'étude numérique du cylindre circulaire a permis de valider cette nouvelle méthode différentielle, et surtout de mettre en évidence l'amélioration apportée par la méthode FFF par rapport à la méthode classique. Dans ce chapitre, nous nous sommes limités à l'étude d'un seul profil cylindrique (cylindre circulaire) qui ne présente d'intérêt que pour la validation de la méthode. En effet, on sait bien qu'il existe d'autres moyens beaucoup plus précis et nettement plus rapides (cercle centré, méthode multipolaire,...) pour étudier un tel système. Dans l'article [83] consacré à la diffraction conique, nous avons présenté d'autres tests de validation par comparaison entre la méthode différentielle et la méthode multipolaire disponible au laboratoire. La nécessité d'effectuer une intégration numérique d'un système différentiel rend les temps de calcul de la méthode différentielle non négligeables (de quelques secondes à plusieurs minutes). On retiendra que son principal avantage reste le profil opto-géométrique arbitraire des structures cylindriques qu'elle peut analyser avec des précisions tout à fait satisfaisantes.

Chapitre 4

Cas particulier de la diffraction classique

Sommaire

4.1 Présentation du problème 97
4.1.1 Découplage des équations de Maxwell 97
4.1.2 Polarisation Transverse Electrique 99
4.1.3 Polarisation Transverse Magnétique 100
4.2 Applications numériques 101
4.2.1 Implémentation 101
4.2.2 Etude du cylindre circulaire : validation 102
4.2.3 Du cylindre circulaire au cylindre elliptique 104

La diffraction classique est le cas particulier de la diffraction conique pour lequel le vecteur d'onde incident est contenu dans le plan de section droite. Dans ce cas, le système électromagnétique entier (structure géométrique et champs électromagnétiques) devient complètement indépendant de la variable z et le problème de diffraction se découple en deux cas de polarisation indépendants. Dans un premier temps, les équations générales seront brièvement réécrites et adaptées à la diffraction classique. Puis, quelques résultats numériques viendront confirmer la validation de la théorie.

4.1 Présentation du problème

4.1.1 Découplage des équations de Maxwell

Dans tout ce chapitre, on utilise exceptionnellement la première représentation du vecteur d'onde incident (voir figure 2.4(a)) puisqu'elle demeure la plus couramment utilisée en diffraction classique. Ainsi, θ_{inc} est remplacé par $\theta'_{inc} - \pi$ et φ_{inc} par $-\varphi'_{inc}$ dans les équations suivantes.

Hypothèse et premières conséquences .

On considère strictement le même système géométrique que celui considéré en diffraction conique. L'unique hypothèse formulée dans ce chapitre s'énonce par :

> *Le vecteur d'onde incident est contenu dans le plan de section droite ;*
> *soit* $\vec{k}_{ext}^{(inc)} \in (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Autrement dit, l'angle d'inclinaison entre le vecteur d'onde incident et le plan de section droite est nul : $\varphi'_{inc} = 0$. D'après la relation (2.48), on déduit directement que :

$$\gamma_0 = 0 \tag{4.1}$$

et, selon la relation (3.25), on obtient également :

$$k_{t,j} = k_j \text{ avec } j \in \{int, ext\} \tag{4.2}$$

Dans ces conditions, le problème électromagnétique devient entièrement indépendant de la variable z. Tous les champs électromagnétiques sont alors indépendants de z et par suite, périodiques selon la variable angulaire θ (on perd la pseudo-périodicité due au terme $e^{i\gamma_0 z}$ dans les expressions des champs). Les relations (3.8), (3.9) et (3.10) s'écrivent donc :

$$\vec{E}^{(inc)}(r,\theta) = \sum_{n=-N}^{+N} \vec{E}_0^{(inc)} e^{-in\theta'_{inc}} i^n J_n(k_{ext} r) e^{in\theta} \tag{4.3}$$

$$\vec{H}^{(inc)}(r,\theta) = \sum_{n=-N}^{+N} \vec{H}_0^{(inc)} e^{-in\theta'_{inc}} i^n J_n(k_{ext} r) e^{in\theta} \tag{4.4}$$

$$\vec{A}(r,\theta) = \sum_{n=-N}^{+N} \vec{A}_n(r)\, e^{in\theta} \text{ avec } \vec{A} \in \left\{\vec{E}, \vec{H}\right\} \tag{4.5}$$

La propriété (4.1) induit beaucoup de conséquences puisque le terme γ_0 apparaît dans les équations de Maxwell dans la zone modulée ainsi que dans les régions homogènes et isotropes en vertu de la conservation de la composante en z du vecteur d'onde incident dans tout l'espace (3.10).

Champs dans les régions homogènes et isotropes .

On a vu que les équations de Maxwell, dans les régions (int) et (ext) et dans l'espace de Fourier tronqué, se traduisent par les relations matricelles (3.41) et (3.45). Elles s'écrivent en y injectant la propriété (4.1) :

$$\Psi^{(j)}(r) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\omega\epsilon_j}\left[k_j q_e - \frac{\alpha}{r}\right] & 0 & \frac{i}{\omega\epsilon_j}\left[k_j q_h - \frac{\alpha}{r}\right] \\ I_d & 0 & I_d & 0 \\ -\frac{i}{\omega\mu_0}\left[k_j q_e - \frac{\alpha}{r}\right] & 0 & -\frac{i}{\omega\mu_0}\left[k_j q_h - \frac{\alpha}{r}\right] & 0 \\ 0 & I_d & 0 & I_d \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\Psi_r^{(j)}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{r\omega\epsilon_j} & 0 & -\frac{\alpha}{r\omega\epsilon_j} \\ \frac{\alpha}{r\omega\mu_0} & 0 & \frac{\alpha}{r\omega\mu_0} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

où $j \in \{int, ext\}$ et q_e et q_h sont donnés respectivement par (3.42) et (3.43).

Champs dans la zone modulée .

Dans la zone modulée, et toujours dans l'espace de Fourier tronqué, les équations de Maxwell prennent la forme du système différentiel (2.109) dont la matrice $\mathcal{M}(r)$ (3.18) en diffraction classique se réduit à :

$$\mathcal{M}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta} + \frac{i}{r}I_d & 0 & 0 & \omega\mu_0 I_d - \frac{1}{\omega r^2}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ 0 & 0 & -\omega\mu_0 I_d & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega\mu_0 r^2}\alpha^2 - \omega Q_{\epsilon,zz} & \frac{i}{r}I_d & 0 \\ \omega\left(Q_{\epsilon,\theta\theta} - Q_{\epsilon,\theta r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta}\right) & 0 & 0 & -Q_{\epsilon,\theta r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{1}{r}\alpha \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

La matrice $\mathcal{M}_r(r)$ (3.19) de la relation (2.112) donnant les composantes radiales du champ électromagnétique devient :

$$\mathcal{M}_r(r) = \begin{pmatrix} -Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta} & 0 & 0 & -Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{\alpha}{r\omega} \\ 0 & \frac{\alpha}{r\mu_0\omega} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Il est intéressant de préciser que la matrice Q_ϵ, ne dépendant pas de γ_0 mais uniquement des paramètres optogéométriques de l'objet cylindrique (ϵ,$\vec{N}$,...), reste inchangée et s'exprime toujours d'après (3.15).

A la vue de l'ensemble de ces matrices où de nombreux blocs s'annulent quand on introduit l'équation (4.1), on voit que les coefficients de Fourier des composantes du champ électromagnétique total contenus dans les matrices colonnes $[F(r)]$ et $[F_r(r)]$ se découplent dans tout l'espace en deux polarisations indépendantes. La première, appelée polarisation *Transverse Electrique* (TE), relie les composantes E_z, H_r et H_θ ; alors que la seconde, appelée polarisation *Transverse Magnétique* (TM), relie les composantes H_z, E_r et E_θ.

Il est utile de discuter des grandeurs associées à l'onde plane incidente, en particulier sur les vecteurs amplitudes incidents $\vec{E}_0^{(inc)}$ et $\vec{H}_0^{(inc)}$. Toujours d'après la relation (4.1), leurs composantes données par (2.49) et (2.50) en fonction des paramètres arbitraires choisis deviennent :

$$\vec{E}_0^{(inc)} = \begin{pmatrix} \sin(\psi_{inc}) \sin(\theta'_{inc}) \left\| \vec{E}^{(inc)} \right\| \\ -\sin(\psi_{inc}) \cos(\theta'_{inc}) \left\| \vec{E}^{(inc)} \right\| \\ \cos(\psi_{inc}) \left\| \vec{E}^{(inc)} \right\| \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

$$\vec{H}_0^{(inc)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_{ext}} \cos(\psi_{inc}) \sin(\theta'_{inc}) \left\| \vec{E}^{(inc)} \right\| \\ \frac{1}{Z_{ext}} \cos(\psi_{inc}) \cos(\theta'_{inc}) \left\| \vec{E}^{(inc)} \right\| \\ -\frac{1}{Z_{ext}} \sin(\psi_{inc}) \left\| \vec{E}^{(inc)} \right\| \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

A priori, rien ne s'oppose à prendre ces expressions pour décrire les amplitudes du champ incident. Cependant, l'angle azimutal ψ_{inc} (l'angle de polarisation du champ électrique incident) entretient le couplage entre les composantes du champ incident. Dans le but de découpler entièrement le problème de diffraction, on constate qu'il suffit de poser $\psi_{inc} = 0\ rad$ pour retrouver la polarisation TE et $\psi_{inc} = \frac{\pi}{2}\ rad$ pour obtenir la polarisation TM. Or les composantes en z de $\vec{E}_0^{(inc)}$ et $\vec{H}_0^{(inc)}$ sont les seules qui interviennent dans la résolution du problème de diffraction (dans la matrice colonne $\left[A^{(inc)}\right]$ définie par (3.49)). On ne choisit alors plus les grandeurs ψ_{inc} et $\left\|E^{(inc)}\right\|$ comme paramètres des amplitudes, mais directement $E_{0,z}^{(inc)}$ pour le cas TE et $H_{0,z}^{(inc)}$ pour le cas TM. Maintenant que le problème de diffraction est complètement découplé, on va pouvoir dissocier les deux cas de polarisation et extraire leurs équations respectives. Ainsi, les dimensions de toutes les grandeurs matricielles vont être réduites de moitié.

4.1.2 Polarisation Transverse Electrique

Le cas de polarisation TE couple les composantes E_z, H_r et H_θ entre elles. La matrice colonne $[F(r)]$ définie par la relation (2.108) ne contient plus que les coefficients de Fourier de E_z et H_θ. Elle se réduit à :

$$[F_{TE}(r)] = \begin{pmatrix} [H_\theta] \\ [E_z] \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Dans les régions homogènes et isotropes (int) et (ext), l'équation (4.6) conduit à la relation $[F_{TE}(r)] = \Psi_{TE}^{(j)}(r) \left[V_{TE}^{(j)}(r)\right]$ avec

$$\Psi_{TE}^{(j)}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\omega\mu_0}\left[k_j q_e - \frac{\alpha}{r}\right] & -\frac{i}{\omega\mu_0}\left[k_j q_h - \frac{\alpha}{r}\right] \\ I_d & I_d \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

et la matrice colonne $\left[V_{TE}^{(j)}\right]$ constituée seulement des coefficients de E_z :

$$\left[V_{TE}^{(j)}(r)\right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{e,n}^{(j)} J_n(k_j r) \\ \vdots \\ B_{e,n}^{(j)} H_n^+(k_j r) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

La composante radiale du champ magnétique donnée par (4.7) se réduit à :

$$[H_r(r)] = \frac{\alpha}{r\omega\mu_0}\,[E_z(r)] \tag{4.15}$$

Enfin, la matrice $\mathcal{M}_{TE}(r)$ associée à la polarisation TE dans la zone modulée, se déduit de l'expression (4.8) selon :

$$\mathcal{M}_{TE}(r) = \begin{pmatrix} \frac{i}{r} I_d & \frac{1}{\omega\mu_0 r^2}\alpha^2 - \omega Q_{\epsilon,zz} \\ -\omega\mu_0 I_d & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

et les coefficients de Fourier de H_r dans la zone modulée (4.9) ont exactement la même expression que pour les régions (int) et (ext) (4.15). Par contre, il est intéressant d'expliciter les termes du système différentiel de matrice $\mathcal{M}_{TE}(r)$:

$$\frac{d\,[H_\theta(r)]}{dr} = i\left(\frac{\alpha^2}{\omega\mu_0 r^2} - \omega[\![\epsilon]\!]\right)[E_z(r)] - \frac{1}{r}\,[H_\theta(r)] \tag{4.17}$$

dans laquelle le bloc $Q_{\epsilon,zz}$ est remplacé par $[\![\epsilon]\!]$, d'après la relation (3.15) et

$$[H_\theta(r)] = \frac{i}{\omega\mu_0}\frac{d\,[E_z(r)]}{dr} \tag{4.18}$$

Lorsque cette expression de $[H_\theta(r)]$ est injectée dans la dérivée du membre de gauche de la relation (4.17), on obtient un ensemble de $2N+1$ équations différentielles couplées du deuxième ordre à coefficients non constants :

$$\frac{d^2\,[E_z(r)]}{dr^2} + \frac{1}{r}\,[E_z(r)] - \left(\frac{\alpha^2}{r^2} - \omega^2\mu_0[\![\epsilon]\!]\right)[E_z(r)] = 0 \tag{4.19}$$

Deux aspects de cette équation sont à signaler. Si la matrice $[\![\epsilon]\!]$ est indépendante de r (on verra plus loin à quelle géométrie cela correspond), on trouve un ensemble de $2N+1$ équations différentielles couplées de type équations de Bessel. Le système (4.19) peut alors être résolu de façon analytique. Ensuite, le système différentiel ne contient pas les blocs de Q_ϵ caractéristiques de la méthode FFF : $Q_{\epsilon,uv}$ avec $(u,v) \in \{r,\theta\}^2$ (3.15). En fait, on sait que la méthode FFF permet de décrire au mieux les discontinuités qui apparaissent dans la relation constitutive $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ dans l'espace de Fourier et dans la zone modulée. Elle réside dans l'application de la deuxième règle de factorisation énoncée par L. Li (voir section 1.2.3) pour les composantes normales à la surface S, qui sont discontinues à sa traversée. Or le champ électrique est défini en polarisation TE uniquement par sa composante en z qui est continue à travers S (composante toujours tangentielle à S par invariance selon z). Par conséquent, le système différentiel (4.19) provient seulement de l'application de la première règle de factorisation identique à celle utilisée dans la méthode différentielle classique (règle de Laurent). On comprend pourquoi le cas de la polarisation TE ne présente pas de problème de convergence dans l'espace de Fourier ce qui rejoint l'observation faite pour les réseaux depuis longtemps [53].

4.1.3 Polarisation Transverse Magnétique

Pour la polarisation TM, on procède rigoureusement de la même manière que pour le cas de la polarisation TE. On rappelle que la polarisation TM couple les composantes H_z, E_r et E_θ entre elles. La matrice colonne $[F(r)]$ (2.108) ne contient plus que les coefficients de Fourier de H_z et E_θ :

$$[F_{TM}(r)] = \begin{pmatrix} [E_\theta] \\ [H_z] \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Dans les régions homogènes et isotropes, l'équation (4.6) conduit à la relation $[F_{TM}(r)] = \Psi^{(j)}_{TM}(r)\left[V^{(j)}_{TM}(r)\right]$ avec

$$\Psi^{(j)}_{TM}(r) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\omega\epsilon_j}\left[k_j q_e - \frac{\alpha}{r}\right] & \frac{i}{\omega\epsilon_j}\left[k_j q_h - \frac{\alpha}{r}\right] \\ I_d & I_d \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

et la matrice colonne $\left[V^{(j)}\right]$ constituée seulement des coefficients de H_z :

$$\left[V_{TM}^{(j)}(r)\right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{h,n}^{(j)} J_n\left(k_j r\right) \\ \vdots \\ B_{h,n}^{(j)} H_n^+\left(k_j r\right) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

La composante radiale du champ électrique donnée par (4.7) se réduit à :

$$\left[E_r(r)\right] = -\frac{\alpha}{r\omega\epsilon_j}\left[H_z(r)\right] \tag{4.23}$$

D'après la relation (4.8), on introduit la matrice d'intégration $\mathcal{M}_{TM}(r)$ de la zone modulée pour le cas de polarisation TM :

$$\mathcal{M}_{TM}(r) = \begin{pmatrix} \frac{i}{r} I_d - \frac{\alpha}{r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta} & \omega\mu_0 I_d - \frac{\alpha}{\omega r^2} Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ \omega\left(Q_{\epsilon,\theta\theta} - Q_{\epsilon,\theta r} Q_{\epsilon,rr}^{-1} Q_{\epsilon,r\theta}\right) & -Q_{\epsilon,r\theta} Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{\alpha}{r} \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Contrairement au cas TE, les coefficients de Fourier de E_r dans la zone modulée se distinguent de ceux des régions (int) et (ext) par la relation suivante :

$$\left[E_r(r)\right] = -Q_{\epsilon,rr}^{-1}\left(\; Q_{\epsilon,r\theta}\left[E_\theta(r)\right] + \frac{\alpha}{r\omega}\left[H_z(r)\right] \;\right) \tag{4.25}$$

Via quelques adaptations d'écriture, on retrouve d'après la matrice d'intégration $\mathcal{M}_{TM}(r)$ donnée par (4.24) les systèmes différentiels (2.29) et (2.30) obtenus pour la méthode différentielle en polarisation TM appliquée à un cylindre de section elliptique dans l'introduction de la théorie (voir section 2.1). Cette fois-ci, il apparaît dans les équations (4.24) et (4.25) les blocs de Q_ϵ caractéristiques de la méthode FFF (3.15). En effet, le raisonnement est opposé à celui effectué pour la polarisation TE : le champ électrique est décrit par ses composantes E_r et E_θ qui sont, a priori, discontinues à travers la surface S, et nécessitent alors l'emploi de la deuxième règle de factorisation dans la relation constitutive $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ (dans l'espace de Fourier). L'utilisation de la méthode FFF est donc requise pour décrire au mieux les coefficients de Fourier du vecteur $\vec{D}$.

4.2 Applications numériques

Le cas de polarisation TE présente peu d'intérêt en ce qui concerne la méthode FFF, nous présenterons essentiellement les résultats du code numérique appliqué au cas de la polarisation TM. Nous décrirons tout d'abord les quelques différences dans l'implémentation entre le cas de polarisation classique et celui de la polarisation conique. Ensuite, la méthode différentielle appliquée au cas de polarisation classique sera validée par l'étude de la diffraction sur le même cylindre circulaire que celui étudié en polarisation conique. Enfin, nous présenterons les résultats obtenus pour un profil de section droite elliptique. Nous verrons en particulier l'effet de l'excentricité de l'ellipse sur la SED.

4.2.1 Implémentation

Nous avons implémenté les deux cas de polarisation TE et TM. La résolution du problème de diffraction s'effectue strictement de la même manière que pour le cas de la diffraction conique : le principe de l'algorithme de propagation de la matrice S reste inchangé. La matrice d'intégration utilisée est (4.16) ou (4.24) suivant le cas de polarisation choisi. Le problème de diffraction se résoud finalement selon les relations (3.82) et (3.83) adaptées à chacune des polarisations TE et TM. Comme précédemment, le programme calcule soit la SED soit les cartes de champs. Le principe de calcul des cartes de champs diffractés reste identique à celui explicité dans la section 3.4.3. Par contre, il est utile de

préciser l'expression de la SED et du théorème optique en diffraction classique. En polarisation TE, on a $\forall n \in [-N, N], B_{h,n}^{(ext)} = 0$ d'où $g_H(\theta) = 0$ selon la relation (3.88). Inversement, on obtient en polarisation TM, $\forall n \in [-N, N], B_{e,n}^{(ext)} = 0$ d'où $g_E(\theta) = 0$. Lorsqu'on injecte l'expression de $g(\theta)$ donnée par la relation (3.88) dans celle de la SED (3.90) pour chacune des polarisations TE ou TM, on trouve respectivement :

$$\sigma_{TE,TM}(\theta) = \frac{4}{k_{ext}} \left| \sum_{n=-N}^{+N} B_n^{(ext)} e^{in\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \right|^2 \tag{4.26}$$

et le théorème optique (3.92) devient :

$$\Re e \left\{ \sum_{n=-N}^{+N} B_n^{(ext)} e^{in\left(\theta_{inc} + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} + \sum_{n=-N}^{+N} \left| B_n^{(ext)} \right|^2 = 0 \tag{4.27}$$

Dans ces deux dernières relations, $B_n^{(ext)}$ est égal à $B_{e,n}^{(ext)}$ en polarisation TE et $B_n^{(ext)}$ est égal à $B_{h,n}^{(ext)}$ en polarisation TM.

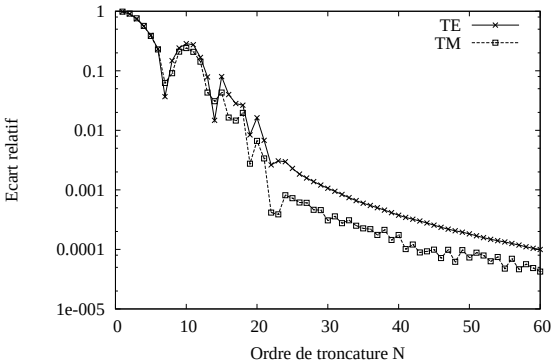
4.2.2 Etude du cylindre circulaire : validation

Nous reprenons la même structure géométrique que celle étudiée en diffraction conique : le cylindre circulaire excentré. La polarisation de l'onde plane incidente est désormais caractérisée par $E_{0,z}^{(inc)}$ pour le cas TE et $H_{0,z}^{(inc)}$ pour le cas TM. Les paramètres utilisés sont regroupés dans le tableau suivant :

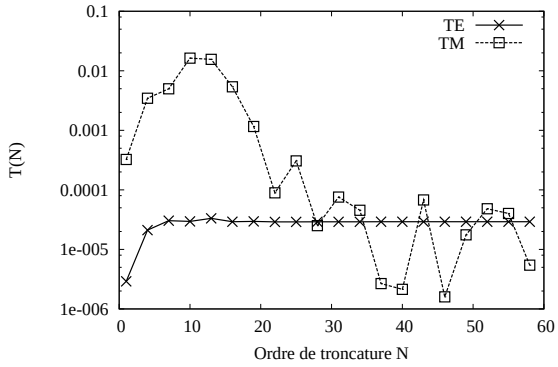
Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2, 3 et 1.2+i5
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	0^o
$E_{0,z}^{(inc)}$	1
$H_{0,z}^{(inc)}$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 60
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10

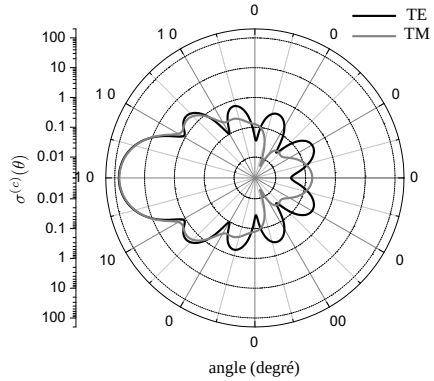
Le graphique 4.1(a) montre l'évolution en fonction de N de l'écart relatif entre $\sigma_{TE,TM}^{(exc)}(180^o)$ et $\sigma_{TE,TM}^{(c)}(180^o)$ calculés avec $N = 30$. De même, la figure 4.1(b) représente l'évolution en fonction de N de $\mathcal{T}(N)$ pour les deux cas de polarisation. A partir de ces deux figures, on observe une meilleure stabilité des résultats obtenus (courbe plus lisse, plateau de convergence) pour le cas TE que pour le cas TM. En polarisation TE, le théorème optique est très vite vérifié à une précision de $2\ 10^{-5}$ à partir de $N = 5$ environ ; alors qu'il faut attendre $N = 30$ pour une précision en-dessous de 10^{-4} en polarisation TM. A $N = 60$, les SED pour chacune des polarisations sont représentées dans la figure 4.1(c) et les cartes de champs associées par les figures 4.1(d) et 4.1(e). Bien que les champs diffractés semblent voisins d'une polarisation à l'autre, on constate qu'il y a globalement moins de champ rétrodiffusé (pour des angles compris dans les intervalles $[0, 90]$ et $[270, 360]$, exprimés en degré) en polarisation TM qu'en polarisation TE. Grâce à la figure 4.1(f), on se rend compte que le calcul est beaucoup plus rapide en diffraction classique qu'en diffraction conique puisque les dimensions des matrices (matrices $\Psi^{(j)}(r)$, matrice T et S,...) sont deux fois plus petites. Comme en diffraction conique, la figure 4.1(g) montre l'évolution en fonction de N de la grandeur τ_{MD-MDC}. On rappelle qu'elle représente l'écart relatif entre $\sigma^{(exc)}(180^o)$ pour la MD et la MDC par rapport à $\sigma^{(c)}(180^o)$. Pour le cas de la polarisation TM, on prend $N = 30$. On peut formuler la même conclusion qu'en diffraction conique quant à l'augmentation de l'écart entre la MD et la MDC lorsque l'indice et la conductivité du cylindre augmentent. Il faut souligner que la méthode MD reste la plus précise (la plus proche de la valeur trouvée pour le cylindre circulaire centré) en comparaison avec la méthode classique, ce qui n'apparaît pas explicitement dans la figure 4.1(g).



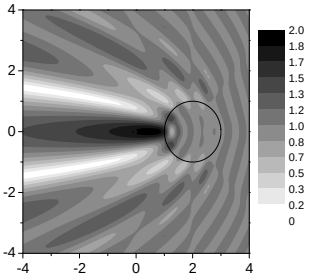
(a) Ecart relatif entre $\sigma^{(exc)}_{TE,TM}(180^o)$ et $\sigma^{(c)}_{TE,TM}(180^o)$ pris à $N = 30$



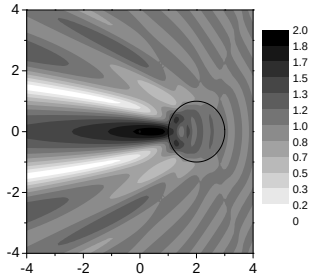
(b) Vérification du théorème optique



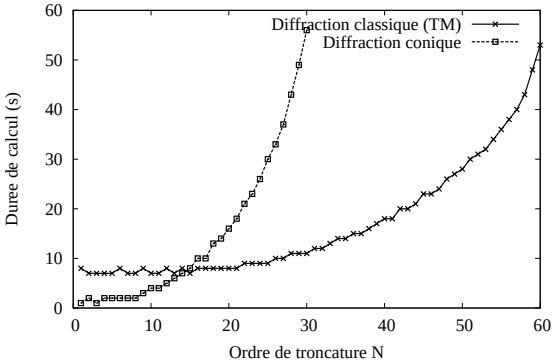
(c) SED à $N = 60$



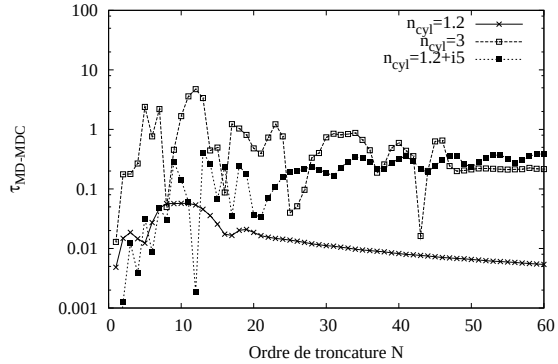
(d) Carte de $\left|E^d_z\right|$ en polarisation TE à $N = 60$



(e) Carte de $\left|H^d_z\right|$ en polarisation TM à $N = 60$



(f) Comparaison de la durée de calcul entre les diffractions conique et classique



(g) Evolution selon N de τ_{MD-MDC} en polarisation TM

FIG. 4.1 – Résultats numériques de la méthode différentielle en diffraction classique (polarisations TE et TM)

4.2.3 Du cylindre circulaire au cylindre elliptique

Description du système .

Nous nous plaçons désormais uniquement en polarisation TM. Nous allons considérer le même profil cylindrique que celui étudié dans la partie introductive de la formulation générale de la méthode différentielle 2.1.1. Il s'agit donc d'un cylindre à section droite elliptique centrée sur l'origine du repère (voir figure 2.1(a)). On rappelle que l'ellipse est caractérisée par son demi-grand axe a le long de l'axe x et son demi-petit axe b ($b < a$) le long de l'axe y. La fonction g_S donnant l'équation polaire $r = g_S(\theta)$ de cette ellipse dans le plan de section droite s'écrit :

$$g_S(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (b^2 - a^2)\cos^2(\theta)}} \tag{4.28}$$

Il ne faut pas confondre cette équation polaire dont l'origine du repère est placée au milieu du petit axe et du grand-axe (ellipse centrée) avec l'équation polaire bien connue $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$ avec $p = \frac{b^2}{a}$ dont l'origine est placée sur un des foyers de l'ellipse. Il est également intéressant de préciser que ce système rentre dans la catégorie des cylindres contenant l'origine du repère (voir figure 2.3(a)) ; alors que le cylindre circulaire excentré étudié auparavant appartient à l'autre catégorie de système (voir figure 2.3(b)). Dans le premier cas, le milieu (int) est le milieu du cylindre d'indice n_{cyl} alors que, dans le second cas, le milieu (int) reste le même que le milieu (ext) d'indice n_{mat}. Pour la méthode différentielle, la principale distinction réside dans l'étendue angulaire du secteur sur lequel est définie la surface de l'objet cylindrique. Pour un cylindre contenant l'origine, cette surface entoure l'origine. L'intervalle est donc $[-\pi, \pi]$. Pour le cylindre ne contenant pas l'origine, elle est seulement définie sur un sous-intervalle de $[-\pi, \pi]$: $\left[\theta_0 - \frac{\theta_m}{2}, \theta_0 + \frac{\theta_m}{2}\right]$ pour le cylindre circulaire excentré précédent, par exemple. Pour le cylindre elliptique (centré sur l'origine), la zone modulée est donc comprise entre les cylindres circulaires centrés C_{min} tel que $R_{min} = b$ et C_{max} tel que $R_{max} = a$. On ne la subdivise pas en sous-zones modulées comme précédemment (les trois sous-zones modulées du cylindre circulaire excentré). On désignera par L le nombre de couches S et par P le nombre de pas d'intégration de chaque couche S.

La fonction $\epsilon(r, \theta)$ dans la zone modulée devient la fonction créneau suivante (voir figure 2.1(b)) :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi]\,,\ \epsilon(r,\theta) = \begin{cases} \epsilon_{cyl} \text{ si } \theta \in \left]-\pi, -\pi + \widetilde{\theta}(r)\right[\cup \left]-\widetilde{\theta}(r), \widetilde{\theta}(r)\right[\cup \left]\pi, \pi - \widetilde{\theta}(r)\right[\\ \epsilon_{mat} \text{ si } \theta \in \left[-\pi + \widetilde{\theta}(r), -\widetilde{\theta}(r)\right] \cup \left[\widetilde{\theta}(r), \pi - \widetilde{\theta}(r)\right] \end{cases} \tag{4.29}$$

où l'angle $\widetilde{\theta}(r)$ est donné par la relation (2.2). On déduit les éléments de la matrice de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$ d'après les coefficients de Fourier de cette fonction :

$$\epsilon_0(r) = \epsilon_{mat} + \frac{2\widetilde{\theta}(r)}{\pi}\left(\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}\right) \tag{4.30}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \epsilon_n(r) = \frac{1 + (-1)^n}{\pi n} \sin\left[n\widetilde{\theta}(r)\right]\left(\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}\right) \tag{4.31}$$

On constate que sur l'intervalle $[-N, N]$, la moitié environ de ces coefficients de Fourier sont nuls (facteur $1 + (-1)^n$). Ceux qui interviennent dans la matrice $\left[\!\left[\frac{1}{\epsilon}\right]\!\right]$ ont les mêmes expressions que (4.30) et (4.31) mais en remplaçant ϵ_{cyl} par $\frac{1}{\epsilon_{cyl}}$ et ϵ_{mat} par $\frac{1}{\epsilon_{mat}}$.

En utilisant la relation $f_S(r, \theta) = r - g_S(\theta)$ et en remplaçant $g_S(\theta)$ par son expression (4.28) dans la définition par le gradient (2.91) du vecteur normal en un point $M(r, \theta)$ de la surface, la composante N_θ de $\vec{N}$ au point M s'écrit :

$$N_\theta(r,\theta) = \frac{(a^2 - b^2)\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\left[a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2(\theta)\right]^2 + (a^2 - b^2)^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}} \tag{4.32}$$

Cette fonction est bien évidemment continue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ puisque la surface S entoure l'origine du repère. Elle admet quatre minima de valeur nulle aux angles associés aux points

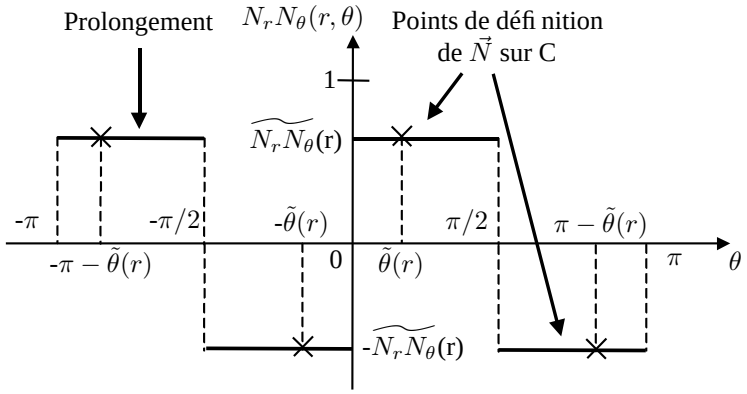


FIG. 4.2 – Représentation de la fonction $N_rN_\theta(r,\theta)$

d'intersection entre l'ellipse et les axes x et y : 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$. Elle possède également quatre maxima de valeurs $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ aux angles : $\theta' = acos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $-\theta'$, $-\pi+\theta'$ et $\pi-\theta'$. L'angle θ' correspond à l'angle entre la longueur du rectangle de côté a et b ($a > b$) et sa diagonale. Cette fonction pourrait servir de prolongement (invariant selon r) de N_θ^2 sur un cylindre circulaire C_r ($R_{min} < r < R_{max}$). Cependant, nous avons renoncé à cette idée puisque la complexité de la fonction (4.32) nécessiterait l'emploi d'un algorithme de type FFT pour le calcul des coefficients de Fourier d'un tel prolongement. Finalement, on prend sur le cylindre C_r le même type de prolongement de N_θ^2 que celui pris pour le cercle excentré (3.117). Il s'agit donc d'une fonction constante. La valeur de cette constante $\left\{\widetilde{N_\theta}(r)\right\}^2$ est déduite de l'équation (4.32) dans laquelle on a remplacé θ par $\widetilde{\theta}(r)$. Les coefficients de Fourier de ce prolongement ont pour expressions (3.118) à l'ordre 0 et (3.119) à l'ordre n ($n \neq 0$). Le prolongement de N_r^2 et ses coefficients de Fourier s'en déduisent toujours d'après (3.120), (3.121) et (3.122) respectivement. Le prolongement de N_rN_θ devient la fonction créneau illustrée sur la figure 4.2 dont on peut toujours aisément déterminer les coefficients de Fourier. La valeur de $\widetilde{N_rN_\theta}(r)$ dépend de $\widetilde{N_\theta}(r)$ selon :

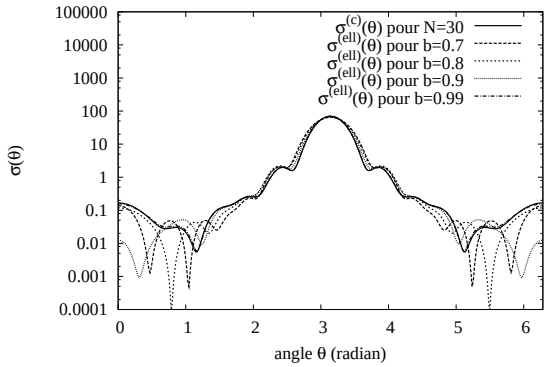
$$\widetilde{N_rN_\theta}(r) = \sqrt{\left[\widetilde{N_\theta}(r)\right]^2\left\{1-\left[\widetilde{N_\theta}(r)\right]^2\right\}}$$

Résultats numériques . Nous partons de la structure cylindrique circulaire précédente (de rayon R) qui va être déformée en cylindre elliptique par augmentation de l'excentricité. Pour le cylindre circulaire, on prend la configuration qui donne les résultats les plus précis (la méthode FFF n'est pas utilisée), à savoir le cylindre circulaire centré. On garde la même notation de la SED qu'auparavant : $\sigma^{(c)}(\theta)$. Elle ne sert que d'élément de comparaison avec les autres SED calculées pour les cylindres elliptiques. Pour chaque cylindre elliptique considéré, les paramètres a et b de l'ellipse sont tels que l'aire de l'ellipse reste la même que celle du cercle :

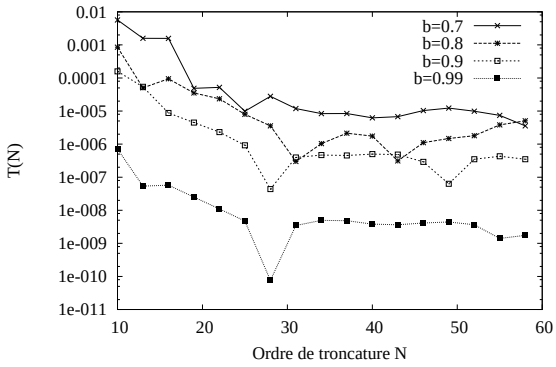
$$ab = R^2$$

Nous prendrons quatre cylindres elliptiques avec un paramètre b décroissant :

a (μm)	b (μm)	e
1.010101	0.99	0.198504
1.111111	0.9	0.586430
1.25	0.8	0.768375
1.428571	0.7	0.871722



(a) SED pour les cylindres circulaire et elliptique pour différentes valeurs de b en polarisation TM et pour $N = 60$



(b) Convergence selon N de $\mathcal{T}(N)$ pour les cylindres elliptiques pour différentes valeurs de b en polarisation TM

FIG. 4.3 – Résultats numériques concernant la diffraction en polarisation TM par un cylindre de section elliptique

Les paramètres utilisés pour les cylindres elliptiques sont regroupés dans le tableau suivant :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
b	0.7, 0.8, 0.9 et 0.99 μm
$a\ (= R^2/b)$	$1/b$ μm
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	0^o
$H_{0,z}^{(inc)}$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 60
L	10
P	10

On désigne par $\sigma^{(ell)}(\theta)$ la SED relative au cylindre elliptique. Il existe à notre disposition une autre méthode numérique capable d'effectuer ce genre de calcul : la méthode des sources fictives (MSF) [7, 8, 9] mise au point au sein de l'Institut Fresnel. Pour le cylindre elliptique avec $b = 0.7$, cette méthode vérifie la conservation de l'énergie (théorème optique) à $1.35\ 10^{-4}$ près, à un niveau de précision assez élevé pour cette méthode. La figure 4.3(b) montre l'évolution de $\mathcal{T}(N)$ (théorème optique). On voit que la précision s'améliore avec l'excentricité puisque l'épaisseur de la zone modulée augmente également. La figure 4.3(a) représente les SED du cylindre elliptique ainsi que celle du cylindre circulaire (de rayon 1 μm) calculées pour $N = 60$. On observe bien la cohérence des différentes courbes tracées car les fonctions $\sigma^{(ell)}(\theta)$ semblent converger continuement vers $\sigma^{(c)}(\theta)$ lorsque b augmente. Les résultats obtenus par les deux méthodes (MD et MSF) sont en accord puisque l'écart relatif moyen entre leurs SED vaut $5.9\ 10^{-3}$ environ pour $b = 0.7$.

CONCLUSION DU CHAPITRE Dans ce chapitre, nous avons établi les équations de la méthode différentielle relatives au cas particulier de la diffraction classique (vecteur d'onde incident contenu dans le plan de section droite soit $\varphi_{inc} = 0$). Elles révèlent que la méthode FFF n'apparaît pas en polarisation TE alors qu'elle devient nécessaire en polarisation TM. Par conséquent, ce résultat théorique, initalement démontré en coordonnées cartésiennes, reste valable pour le système de coordonnées cylindriques [56]. En effet, cette observation découle directement du principe même de la méthode FFF. Les deux cas de polarisation TE et TM ont été traités numériquement sur la structure cylindrique circulaire (excentré) déjà étudiée en polarisation conique. On vérifie la bonne convergence des résultats, ce qui valide à nouveau la méthode différentielle pour ce cas particulier de diffraction. Enfin, nous avons introduit un nouveau profil cylindrique : le cylindre elliptique centré sur l'origine. En nous intéressant exclusivement au cas de polarisation TM, les résultats numériques laissent apparaître une assez bonne précision des

résultats obtenus avec la méthode différentielle. Il faut noter que l'implémentation de la diffraction en polarisation TM par ces structures cylindriques a constitué le travail initial de la première année de thèse. La théorie et les résultats encourageants ont fait l'objet d'un premier article concernant l'application de la méthode FFF dans la méthode différentielle en coordonnées cylindriques [82].

Chapitre 5

Etude de l'anisotropie dans les systèmes à géométrie cylindrique

Sommaire

5.1 Une nouvelle formulation de la diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire anisotrope 109
5.1.1 Présentation du problème 109
5.1.2 Onde plane se propageant dans un milieu diélectrique homogène et anisotrope 111
5.1.3 Décomposition du champ électrique total en ondes planes 115
5.1.4 Expression du champ magnétique total 117
5.1.5 Notation matricielle 118
5.2 Résolution du problème de diffraction 119
5.2.1 Matrice de transmission d'un cylindre circulaire anisotrope 119
5.2.2 Cas particulier d'un milieu anisotrope uniaxe 120
5.3 Application numérique 124
5.4 Généralisation de la méthode différentielle à des objets cylindriques anisotropes et de sections arbitraires 126

La théorie énoncée dans ce chapitre et récemment établie sort du contexte général de la formulation de la méthode différentielle présentée jusqu'ici. Sa principale contribution est de déterminer de manière totalement analytique l'expression des champs électromagnétiques dans une région homogène et anisotrope. Appliqué à un cylindre circulaire anisotrope, le principe de résolution du problème de diffraction par une onde plane incidente reste simple et ne nécessite pas l'utilisation de la méthode FFF.

5.1 Une nouvelle formulation de la diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire anisotrope

5.1.1 Présentation du problème

Principe de la méthode :

La théorie s'articule en trois parties :

1. La première partie permet de décrire les ondes planes susceptibles de se propager dans un milieu homogène et anisotrope en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire les solutions de l'équation de propagation écrite en milieu anisotrope et en coordonnées cylindriques.
2. La deuxième partie a pour but d'écrire la forme générale du champ électromagnétique total dans le même milieu par décomposition en ondes planes (première partie) dans un formalisme matriciel.

3. La troisième partie traite de la résolution du problème de diffraction conique d'une onde plane incidente par un cylindre circulaire rempli d'un milieu homogène et anisotrope et entouré d'un milieu homogène et isotrope. Toujours dans un formalisme matriciel, ce calcul s'effectue par la détermination de la matrice de transmission du système étudié, puis par application des conditions aux limites à la surface du cylindre circulaire.

Description du système étudié :

Il s'agit d'un cylindre circulaire droit, c'est-à-dire décrit par une surface cylindrique S dont la section droite (directrice) est un cercle de rayon R et les génératrices sont des droites perpendiculaires au plan de la directrice (voir figure 5.1). On ne distingue habituellement pas le repère de

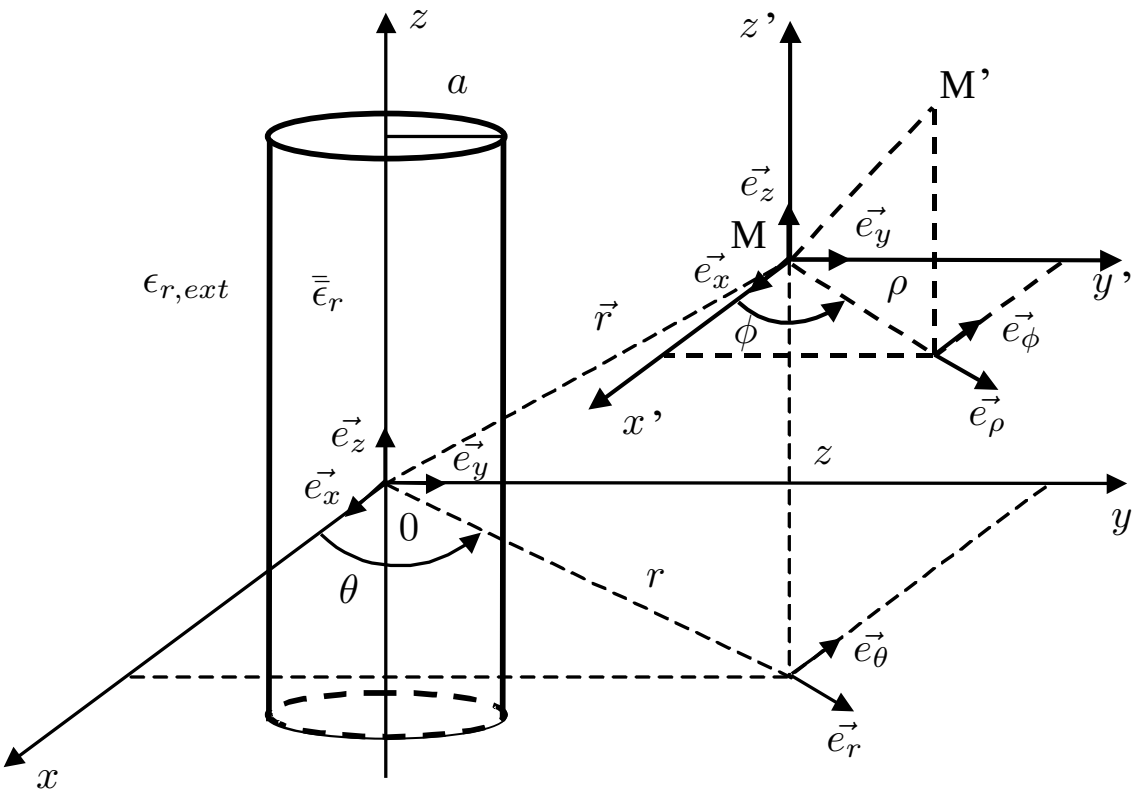


FIG. 5.1 – Représentation du cylindre circulaire anisotrope

l'espace réel (dans lequel se trouve la structure diffractante) de celui qui décrit l'espace des champs électromagnétiques. Ici ce sera le cas (voir figure 5.1). On associe à l'espace réel la base vectorielle du repère cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et celle du repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. A un point M de l'espace réel correspond un vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$ (O étant l'origine du repère cartésien). On associe à l'espace des champs la base vectorielle du repère cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ de point d'application $M(\vec{r})$ dans l'espace réel. Il ne faut donc pas confondre la dépendance des champs selon les variables de l'espace réel (x, y, z) et leurs composantes dans la base vectorielle $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$. Le milieu intérieur noté (int) est non magnétique : $\bar{\bar{\mu}}(r, \theta, z) = \mu_0 I_d$. Il est également diélectrique linéaire, homogène et anisotrope de tenseur permittivité relative notée $\bar{\bar{\epsilon}}_r$ en coordonnées cartésiennes. On rappelle que ce tenseur n'a de sens physique seulement si $\forall i \in \{x, y, z\}, \{\bar{\bar{\epsilon}}_r\}_{ii} \neq 0$. Dans le système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), le tenseur permittivité s'écrit par changement de base :

$$\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi) = \Re \bar{\bar{\epsilon}}_r \Re^T \text{ avec } \Re = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

où $\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)$ est le tenseur permittivité écrit en coordonnées cylindriques. On rappelle qu'un milieu

anisotrope est dit "uniaxe" lorsqu'il existe une base pour laquelle le tenseur permittivité est représenté par une matrice diagonale dont deux des éléments sont égaux, c'est-à-dire :

$$\exists\,(\epsilon_x,\epsilon_z)\in\mathbb{C}^2,\ \bar{\bar{\epsilon}}_r=\begin{pmatrix}\epsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_x & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_z\end{pmatrix}$$

Dans le cas contraire, on parle d'un milieu anisotrope "biaxe". Sauf indication contraire, on considère dans toute l'étude que le milieu anisotrope du cylindre circulaire est biaxe.
Le milieu extérieur noté (ext) est non magnétique, diélectrique, linéaire, homogène et isotrope de permittivité relative $\epsilon_{r,ext}$.
On choisit très exactement la même onde plane incidente que précédemment (voir section 2.2.4), de pulsation ω. Le vecteur d'onde incident est orienté arbitrairement (voir section 2.2.4) et sa représentation est celle généralement associée à la diffraction conique (première représentation, voir la figure 2.4(a)). Les expressions des champs électromagnétiques de cette onde plane incidente sont données par la relation (2.43).

5.1.2 Onde plane se propageant dans un milieu diélectrique homogène et anisotrope

On cherche à expliciter les champs électromagnétiques sous la forme d'une onde plane, susceptible de se propager dans un milieu homogène et anisotrope.

Equation de propagation dans un milieu homogène et anisotrope .

On se place dans le cadre du régime harmonique, c'est-à-dire qu'on cherche des solutions des équations de Maxwell de type harmonique à la même pulsation que celle de l'onde plane incidente (2.52). Dans le cas où les termes du tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}_r$ sont des nombres complexes, sans que le milieu soit absorbant, on montre (par des considérations énergétiques) que ce tenseur est hermitien (page 41 de la référence [97]), c'est-à-dire :

$$\forall(i,j)\in\{x,y,z\}^2,\{\bar{\bar{\epsilon}}_r\}_{ij}=\{\bar{\bar{\epsilon}}_r\}^*_{ji} \tag{5.2}$$

On rappelle (voir page 60 de la référence [94]) qu'en régime harmonique, un milieu est dit transparent ou non absorbant sur la bande de pulsation $[\omega_1,\omega_2]$ si et seulement si :

$$\forall\omega\in[\omega_1,\omega_2],\Im m\left\{\bar{\bar{\epsilon}}_r(\omega)\right\}=0 \tag{5.3}$$

En particulier, lorsque le tenseur de permittivité relative est réel, l'équation (5.2) se réduit à $\forall(i,j)\in\{x,y,z\}^2,\{\bar{\bar{\epsilon}}_r\}_{ij}=\{\bar{\bar{\epsilon}}_r\}_{ji}$ c'est-à-dire que $\bar{\bar{\epsilon}}_r$ est symétrique. D'après un théorème mathématique stipulant qu'une matrice ou une application reste hermitienne par changement de base, on en déduit que le tenseur en coordonnées cylindriques $\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)$ déduit de $\bar{\bar{\epsilon}}_r$ par la relation (5.1), est également hermitien.
Dans ces conditions, l'équation de propagation du milieu anisotrope est obtenue de façon identique à celle des milieux homogènes et isotropes (3.20) et (3.21) et ne se distingue finalement que par le tenseur $\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)$:

$$\vec{rot}\left[\vec{rot}\vec{A}(r,\theta,z)\right]+k_0^2\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)\vec{A}(r,\theta,z)=\vec{0} \tag{5.4}$$

où $A\in\{E,H\}$ et $k_0^2=\omega^2\mu_0\epsilon_0$.

Recherche de solutions sous la forme d'onde plane .

On cherche des solutions de l'équation de propagation (5.4) du type onde plane de vecteur d'onde associé $\vec{k}$, c'est-à-dire telles que leurs champs aient pour expression au point $M(\vec{r})$:

$$\vec{U}_{\vec{k}}(r,\theta,z)=\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}\text{ avec }\vec{r}=r\vec{e}_r+z\vec{e}_z \tag{5.5}$$

où $\vec{A}$ est l'amplitude de l'onde plane et $\vec{U}_{\vec{k}}\in\left(\vec{E}_{\vec{k}},\vec{H}_{\vec{k}}\right)$. On choisit de décrire le vecteur $\vec{k}$ dans la base vectorielle $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z)$ (voir figure 5.2). Le rotationnel de $\vec{U}_{\vec{k}}(r,\theta,z)$ dans l'équation de

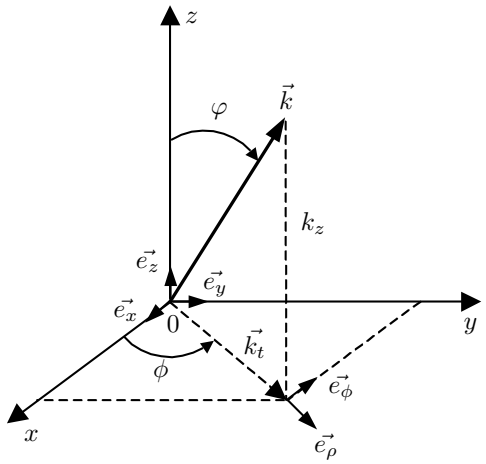


FIG. 5.2 – Représentation du vecteur d'onde

propagation (5.4) s'écrit alors

$$r\vec{o}t\left[\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}\right] = i\vec{k}\wedge\vec{A}e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

que l'on reporte dans l'équation de propagation (5.4) pour obtenir une nouvelle équation de propagation vérifiée par $\vec{A}$ et $\vec{k}$:

$$\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge\vec{A}\right) + k_0^2\tilde{\tilde{\epsilon}}_r(\phi)\vec{A} = \vec{0} \tag{5.6}$$

Cette dernière relation vectorielle peut être écrite sous une forme matricelle en introduisant la matrice notée $\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$ et définie par :

$$\left(\vec{k}.\vec{k}\right) = \begin{pmatrix} k_\rho^2 & k_\rho k_\phi & k_\rho k_z \\ k_\phi k_\rho & k_\phi^2 & k_\phi k_z \\ k_z k_\rho & k_z k_\phi & k_z^2 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

qui permet de reformuler le double produit vectoriel. On déduit de l'équation (5.6), le système linéaire homogène suivant :

$$\left\{\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)\right\}\vec{A} = \vec{0} \tag{5.8}$$

où la matrice $\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)$ est définie par :

$$\mathcal{H}\left(\vec{k}\right) = k^2 I_d - \left(\vec{k}.\vec{k}\right) - k_0\tilde{\tilde{\epsilon}}_r(\phi) \tag{5.9}$$

et la norme du vecteur d'onde (nombre d'onde) est notée :

$$k = \left\|\vec{k}\right\| \tag{5.10}$$

Par conséquent, le vecteur $\vec{A}$ est le vecteur propre de la matrice $\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)$ associé à la valeur propre nulle. L'existence de solutions non triviales de l'équation (5.8) nécessite que le vecteur $\vec{k}$ vérifie la condition :

$$det\left[\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)\right] = 0 \tag{5.11}$$

On est ramené pour l'instant à la détermination du vecteur d'onde $\vec{k}$. Il s'agit d'un vecteur libre. Autrement dit, dans le système de coordonnées cylindriques, il est défini uniquement selon ses composantes selon $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_z$. En diffraction conique, nous avons vu (voir section 3.1.1) que la

composante en z du vecteur d'onde se conserve dans tout l'espace d'après l'invariance du système géométrique selon $\vec{e}_z$, ce qui se traduit ici par :

$$k_z = \gamma_0 \tag{5.12}$$

On rappelle que γ_0 est la composante en z du vecteur d'onde incident (2.45). On fixe l'angle ϕ entre $\vec{e}_x$ et la projection vectorielle de $\vec{k}$ dans le plan (Oxy), notée $\vec{k}_t$. On introduit l'angle φ entre les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{e}_z$. Il est directement lié à k_z, donc à γ_0 :

$$\varphi = \left(\widehat{\vec{k}, \vec{e}_z}\right) \tag{5.13}$$

On distingue les deux cas de la diffraction conique et de la diffraction classique, c'est-à-dire suivant la valeur de φ.

1. Si $\gamma_0 \neq 0$ (diffraction conique) soit $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, on note alors :

$$\tau = \tan(\varphi) \tag{5.14}$$

qui est l'inconnue recherchée. On en déduit que $k = \gamma_0\sqrt{1-\tau^2}$, $k_\rho = \gamma_0\tau$ et $k_\phi = 0$. Par suite, la matrice $\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$ s'écrit :

$$\left(\vec{k}.\vec{k}\right) = \begin{pmatrix} \gamma_0^2\tau^2 & 0 & \gamma_0^2\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_0^2\tau & 0 & \gamma_0^2 \end{pmatrix}$$

Afin d'alléger l'écriture, on note provisoirement : $\forall (i,j) \in \{\rho, \phi, z\}^2, \left\{\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)\right\}_{ij} \equiv (\epsilon_r)_{ij}$. Le déterminant de $\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)$ prend la forme d'un polynôme de degré 4 en fonction de la variable τ :

$$det\left[\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)\right] = h_4\tau^4 + h_3\tau^3 + h_2\tau^2 + h_1\tau + h_0 \tag{5.15}$$

avec

$$\begin{aligned}
h_4 &= -(\epsilon_r)_{\rho\rho}\chi^4 \\
h_3 &= -\chi^4\left[(\epsilon_r)_{\rho z} + (\epsilon_r)_{z\rho}\right] \\
h_2 &= \chi^2\left\{(\epsilon_r)_{\rho\rho}(\epsilon_r)_{zz} + (\epsilon_r)_{\rho\rho}(\epsilon_r)_{\phi\phi} - (\epsilon_r)_{\phi\rho}(\epsilon_r)_{\rho\phi} - (\epsilon_r)_{z\rho}(\epsilon_r)_{\rho z} - \chi^2\left[(\epsilon_r)_{\rho\rho} + (\epsilon_r)_{zz}\right]\right\} \\
h_1 &= \chi^2\left\{\left[(\epsilon_r)_{\rho z} + (\epsilon_r)_{z\rho}\right]\left[(\epsilon_r)_{\phi\phi} - \chi^2\right] - (\epsilon_r)_{\phi\rho}(\epsilon_r)_{z\phi} - (\epsilon_r)_{\rho\phi}(\epsilon_r)_{\phi z}\right\} \\
h_0 &= -\chi^4(\epsilon_r)_{zz} + \chi^2\left[(\epsilon_r)_{\rho\rho}(\epsilon_r)_{zz} + (\epsilon_r)_{\phi\phi}(\epsilon_r)_{zz} - (\epsilon_r)_{z\phi}(\epsilon_r)_{\phi z} - (\epsilon_r)_{z\rho}(\epsilon_r)_{\rho z}\right] \\
&\quad (\epsilon_r)_{\rho\rho}\left[(\epsilon_r)_{z\phi}(\epsilon_r)_{\phi z} - (\epsilon_r)_{\phi\phi}(\epsilon_r)_{zz}\right] + (\epsilon_r)_{\phi\rho}\left[(\epsilon_r)_{\rho\phi}(\epsilon_r)_{zz} - (\epsilon_r)_{z\phi}(\epsilon_r)_{\rho z}\right] \\
&\quad +(\epsilon_r)_{z\rho}\left[(\epsilon_r)_{\rho z}(\epsilon_r)_{\phi\phi} - (\epsilon_r)_{\phi z}(\epsilon_r)_{\rho\phi}\right]
\end{aligned}$$

où $\chi = \frac{\gamma_0}{k_0}$

La résolution de l'équation (5.11) revient à chercher les zéros du polynôme défini par l'équation (5.15). D'après les propriétés du tenseur $\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)$, le polynôme est nécessairement de degré 4 (le coefficient h_4 est non nul). Il existe donc quatre racines : τ_i $(i \in [1,4])$ qui peuvent être déterminées analytiquement (voir section B.1.1 de l'annexe B). Parmi ces quatre racines, on montre que seules deux d'entre elles sont solutions du problème électromagnétique. Elles doivent vérifier $k_\rho = \gamma_0\tau_i > 0$. On les note τ_1 et τ_2. Si le tenseur de permittivité $\bar{\bar{\epsilon}}_r$ (soit $\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi)$) est complexe, alors les quatres vecteurs d'onde solutions de (5.11) le sont également et la condition précédente devient : $\forall i \in [1,2], k_z\Re e(\tau_i) > 0$ puisque seules les parties réelles de τ_1 et τ_2 permettent de définir les composantes des vecteurs d'onde associés. Les parties imaginaires définissent l'amortissement de l'onde plane dans l'expression (5.5). Par contre, si le tenseur permittivité est réel alors les quatres racines le sont également et la condition précédente devient : $\forall i \in [1,2], k_z\tau_i > 0$. Dans les deux cas, τ_1 et τ_2 permettent de définir les vecteurs d'onde associés $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ respectivement.

2. Si $\gamma_0 = 0$ (diffraction classique) soit $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on déduit que $k_\rho = k$ et $k_\phi = 0$. On prend pour inconnue le nombre d'onde k. Par suite, la matrice $\left(\vec{k}.\vec{k}\right)$ s'écrit :

$$\left(\vec{k}.\vec{k}\right) = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En définissant le terme κ par :

$$\kappa = \frac{k}{\gamma_0} \tag{5.16}$$

le déterminant de $\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)$ prend encore la forme d'un polynôme d'ordre 4 selon cette inconnue κ :

$$det\left\{\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)\right\} = h_4\kappa^4 + h_2\kappa^2 + h_0 \tag{5.17}$$

avec

$$\begin{aligned} h_4 &= -(\epsilon_r)_{\rho\rho} \\ h_2 &= \{(\epsilon_r)_{\rho\rho}\left[(\epsilon_r)_{\phi\phi} + (\epsilon_r)_{zz}\right] - (\epsilon_r)_{\phi\rho}(\epsilon_r)_{\rho\phi} - (\epsilon_r)_{z\rho}(\epsilon_r)_{\rho z}\} \\ h_0 &= -(\epsilon_r)_{\rho\rho}(\epsilon_r)_{\phi\phi}(\epsilon_r)_{zz} + (\epsilon_r)_{\rho\rho}(\epsilon_r)_{z\phi}(\epsilon_r)_{\phi z} + (\epsilon_r)_{\phi\rho}(\epsilon_r)_{\rho\phi}(\epsilon_r)_{zz} \\ &\quad -(\epsilon_r)_{\phi\rho}(\epsilon_r)_{z\phi}(\epsilon_r)_{\rho z} - (\epsilon_r)_{z\rho}(\epsilon_r)_{\rho\phi}(\epsilon_r)_{\phi z} + (\epsilon_r)_{z\rho}(\epsilon_r)_{\rho z}(\epsilon_r)_{\phi\phi} \end{aligned}$$

L'équation (5.11) devient une équation bicarrée dont on cherche les racines. On procède alors de la même manière que précédemment (cas où $\gamma_0 \neq 0$). Le coefficient h_4 est non nul, ce qui implique qu'il existe quatre racines : κ_i $(i \in [1,4])$ qui peuvent toujours être déterminées analytiquement (voir B.1.2). On garde les deux solutions κ_1 et κ_2 telles que $k_\rho = k > 0$. Si le tenseur permittivité est complexe, cette condition s'écrit : $\forall i \in [1,2], k_0 \Re e(\kappa_i) > 0$. Si le tenseur permittivité est réel alors la condition précédente devient : $\forall i \in [1,2], k_0\kappa_i > 0$. Dans les deux cas, κ_1 et κ_2 permettent de définir les vecteurs d'onde associés $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ respectivement.

Quelle que soit la valeur de γ_0, on trouve donc deux vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$, solutions de l'équation (5.11). Les deux amplitudes associées, notées $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ et satisfaisant l'équation homogène (5.8), sont les vecteurs propres correspondant à la valeur propre nulle des matrices respectives $\mathcal{H}\left(\vec{k}_1\right)$ et $\mathcal{H}\left(\vec{k}_2\right)$. Le calcul peut être effectué de manière complètement analytique (vecteurs propres d'une matrice de dimension 3×3, voir section B.2 de l'annexe B).

Ecriture du champ électromagnétique solution de l'équation de propagation :

Revenons tout d'abord sur l'angle de polarisation ϕ qui a été fixé dans les calculs précédents. L'équation (5.8), dont la matrice $\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)$ est donnée par (5.9), met clairement en évidence la dépendance de $\vec{k}$ et $\vec{A}$ selon ϕ via le tenseur $\tilde{\tilde{\epsilon}}_r(\phi)$. On précise désormais cette dépendance en écrivant : $\vec{k}_1(\phi)$ et $\vec{k}_2(\phi)$. Il en est de même pour les vecteurs amplitudes $\vec{A}_1(\phi)$ et $\vec{A}_2(\phi)$ que l'on normalise :

$$\forall i \in \{1,2\}, \vec{\Gamma}_i(\phi) = \frac{\vec{A}_i(\phi)}{\left\|\vec{A}_i(\phi)\right\|} \tag{5.18}$$

Le champ électrique, solution de l'équation de propagation (5.4) pour un angle ϕ donné, peut alors s'écrire comme une combinaison linéaire des deux ondes planes trouvées précédemment :

$$\vec{E}_\phi(r,\theta,z) = \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_j(\phi)\vec{\Gamma}_j(\phi)e^{i\vec{k}_j(\phi).\vec{r}} \tag{5.19}$$

où les termes $\widetilde{A}_j(\phi)$ en sont les coefficients.

5.1.3 Décomposition du champ électrique total en ondes planes

Expression générale du champ électrique total :

Le principe de base de la méthode est de décomposer le champ électrique total sur la base continue des ondes planes pour tous les angles ϕ possibles ($\phi \in [0, 2\pi]$). En d'autres termes, le champ électrique total est considéré comme une superposition continue d'ondes planes (transformée de Fourier). D'après la relation (5.19) donnant l'expression du champ électrique pour un angle ϕ, le champ électrique total peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_j(\phi)\vec{\Gamma}_j(\phi) e^{i\vec{k}_j(\phi).\vec{r}} d\phi \tag{5.20}$$

Dans cette expression, les amplitudes $\widetilde{A}_j(\phi)$ ($j \in \{1,2\}$ et $\phi \in [0, 2\pi]$) deviennent les seules inconnues du problème. On note la composante selon ρ du vecteur $\vec{k}_j(\phi)$:

$$k_{j,\rho}(\phi) = \vec{k}_j(\phi).\vec{e}_\rho \tag{5.21}$$

La projection des vecteurs $\vec{k}_j(\phi) = k_{j,\rho}(\phi)\vec{e}_\rho + \gamma_0\vec{e}_z$ et $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ sur la base du repère cartésien conduit à l'expression du produit scalaire $\vec{k}_j(\phi).\vec{r} = k_{j,\rho}(\phi) r\cos(\theta-\phi) + k_z^{(inc)} z$ (θ est la coordonnée angulaire du point M dans la figure 5.1). On obtient alors :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_j(\phi)\vec{\Gamma}_j(\phi) e^{ik_{j,\rho}(\phi) r\cos(\theta-\phi)} d\phi \tag{5.22}$$

Pour des raisons d'application numérique, on est contraint de discrétiser l'intégrale. Cette discrétisation s'effectue à l'aide de la définition de l'intégrale en terme de série de Riemann :
$\int_\alpha^\beta f(\zeta)d\zeta \equiv \lim_{P\to+\infty} \left[\sum_{i=1}^{P} f(\zeta_i)\Delta\zeta\right]$ où $\Delta\zeta = \frac{\beta-\alpha}{P}$ et $\zeta_i = \alpha + (i-1)\Delta\zeta$ avec $i \in [1, P]$.
Dans l'équation (5.22), la variable muette ϕ prend alors des valeurs discrètes notées :

$$\forall \nu \in [1, N_\phi], \phi_\nu = (\nu-1)\frac{2\pi}{N_\phi} \tag{5.23}$$

où $N_\phi \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de pas de la discrétisation utilisé pour calculer l'intégrale. Afin d'alléger l'écriture, on ajoute également les notations suivantes :

$$\forall \nu \in [1, N_\phi], \widetilde{A}_{j,\nu} = \widetilde{A}_j(\phi_\nu)\frac{2\pi}{N_\phi} \tag{5.24}$$

$$\forall \nu \in [1, N_\phi], \vec{\Gamma}_j(\phi_\nu) = \vec{\Gamma}_{j,\nu} \tag{5.25}$$

$$\forall \nu \in [1, N_\phi], \vec{k}_{j,\rho}(\phi_\nu) = \vec{k}_{j,\nu,\rho} \tag{5.26}$$

En introduisant ces notations, le champ électrique total donné par (5.22) s'écrit :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{\nu=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_{j,\nu}\vec{\Gamma}_{j,\nu} e^{ik_{j,\nu,\rho} r\cos(\theta-\phi_\nu)} \tag{5.27}$$

On précise également que la famille continue de bases $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ devient la famille discrète de bases $(\vec{e}_{\rho_\nu}, \vec{e}_{\phi_\nu}, \vec{e}_z)$. Enfin, on peut réécrire à nouveau ce champ en tant que développement de Fourier selon θ en utilisant le formule mathématique (3.7) :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{\nu=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_{j,\nu}\vec{\Gamma}_{j,\nu} \sum_{n=-N}^{+N} i^n J_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right) e^{in(\theta-\phi_\nu)} \tag{5.28}$$

Afin de déterminer les composantes du champ électrique total dans l'espace réel, le vecteur $\vec{\Gamma}_{j,\nu}$, initialement décrit dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ de l'espace des champs, va être projeté sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Expressions des composantes du champ électrique total :

On s'intéresse en premier lieu à la composante radiale du champ électrique total $E_r(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta,z).\vec{e}_r$. La notation suivante

$$\Gamma_{j,\nu,\rho} = \vec{\Gamma}_{j,\nu}.\vec{e}_{\rho_\nu} \tag{5.29}$$

$$\Gamma_{j,\nu,\phi} = \vec{\Gamma}_{j,\nu}.\vec{e}_{\phi_\nu} \tag{5.30}$$

conduit à

$$\vec{\Gamma}_{j,\nu}.\vec{e}_r = \Gamma_{j,\nu,\rho}\cos(\theta-\phi_\nu) + \Gamma_{j,\nu,\phi}\sin(\theta-\phi_\nu)$$

en explicitant chaque vecteur de ce dernier produit scalaire sur la base vectorielle cartésienne $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. En y remplaçant le cosinus et le sinus par les formules d'Euler, cette dernière relation reportée dans (5.28) permet d'écrire la composante radiale du champ électrique total :

$$\begin{aligned} E_r(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z}\sum_{\nu=1}^{N_\phi}\sum_{j=1}^{2}\frac{\tilde{A}_{j,\nu}}{2}\Bigg\{ &\sum_{n=-N}^{+N}\left(\Gamma_{j,\nu,\rho} - i\Gamma_{j,\nu,\phi}\right)\frac{i^{n+1}}{i}J_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)e^{i(n+1)(\theta-\phi_\nu)} \\ &+ \sum_{n=-N}^{+N}\left(\Gamma_{j,\nu,\rho} + i\Gamma_{j,\nu,\phi}\right)i^{n-1}iJ_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)e^{i(n-1)(\theta-\phi_\nu)}\Bigg\} \end{aligned} \tag{5.31}$$

On effectue ensuite un changement d'indice dans les deux sommes sur n. Le premier change n en $n' = n+1$ et le second change n en $n'' = n-1$. Ensuite, les indices étant muets on les renomme n. Enfin, après un déplacement des bornes des sommes de $-N$ à $+N$, la composante $E_r(r,\theta,z)$ devient :

$$\begin{aligned} E_r(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z}\sum_{\nu=1}^{N_\phi}\sum_{j=1}^{2}\frac{\tilde{A}_{j,\nu}}{2}\Bigg\{ &\sum_{n=-N}^{+N} -i\left(\Gamma_{j,\nu,\rho}i^n e^{-in\phi_\nu} - i\Gamma_{j,\nu,\phi}i^n e^{-in\phi_\nu}\right)J_{n-1}\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)e^{in\theta} \\ &+ \sum_{n=-N}^{+N} i\left(\Gamma_{j,\nu,\rho}i^n e^{-in\phi_\nu} + i\Gamma_{j,\nu,\phi}i^n e^{-in\phi_\nu}\right)J_{n+1}\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)e^{in\theta}\Bigg\} \end{aligned} \tag{5.32}$$

La nouvelle notation

$$\alpha_{n,j,\nu} = \Gamma_{j,\nu,\rho}i^n e^{-in\phi_\nu} \tag{5.33}$$

$$\beta_{n,j,\nu} = ik_{j,\nu,\rho}\Gamma_{j,\nu,\phi}i^n e^{-in\phi_\nu} \tag{5.34}$$

permet d'alléger l'écriture. L'expression de la composante $E_r(r,\theta,z)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E_r(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z}\sum_{\nu=1}^{N_\phi}\sum_{j=1}^{2}\frac{\tilde{A}_{j,\nu}}{2}i\sum_{n=-N}^{+N}\Big\{&\alpha_{n,j,\nu}\left[J_{n+1}\left(k_{j,\nu,\rho}r\right) - J_{n-1}\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)\right] \\ &+\frac{\beta_{n,j,\nu}}{k_{j,\nu,\rho}}\left[J_{n+1}\left(k_{j,\nu,\rho}r\right) + J_{n-1}\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)\right]\Big\}e^{in\theta} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Afin de terminer ce calcul, on applique dans cette dernière équation les relations de récurrence suivantes vérifiées par les fonctions de Bessel (formule f9.1.27 de la référence [92]) :

$$J_{n+1}(\zeta) + J_{n-1}(\zeta) = 2n\frac{J_n(\zeta)}{\zeta} \tag{5.36}$$

$$J_{n+1}(\zeta) - J_{n-1}(\zeta) = -2\frac{dJ_n(\zeta)}{d\zeta} \tag{5.37}$$

On reformule une dernière fois l'expression de $E_r(r,\theta,z)$ (5.35) de telle sorte à mettre en valeur un pseudo-développement de Fourier de la même forme que celui en (3.10) avec :

$$E_{r,n}(r) = i\sum_{\nu=1}^{N_\phi}\sum_{j=1}^{2}\widetilde{A}_{j,\nu}\left[\beta_{n,j,\nu}\frac{nJ_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)}{k_{j,\nu,\rho}^2 r} - \frac{\alpha_{n,j,\nu}}{k_{j,\nu,\rho}}\frac{dJ_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)}{dr}\right] \tag{5.38}$$

On procède exactement de la même manière pour déterminer la composante angulaire du champ électrique total : $E_\theta(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta,z).\vec{e}_\theta$. Ainsi, les notations (5.29) et (5.30) conduisent à :

$$\vec{\Gamma}_{j,\nu}.\vec{e}_\theta = -\Gamma_{j,\nu,\rho}\sin(\theta-\phi_\nu) + \Gamma_{j,\nu,\phi}\cos(\theta-\phi_\nu)$$

On utilise cette dernière relation dans l'expression du champ électrique total (5.28), projetée sur l'axe associé à $\vec{e}_\theta$. Le même changement de variable que précédemment est ensuite effectué. Finalement, après avoir inséré les notations (5.33) et (5.34) et appliqué les formules (5.36) et (5.37), le calcul aboutit au pseudo-développement de Fourier du type (3.10) de la composante $E_\theta(r,\theta,z)$ avec :

$$E_{\theta,n}(r) = \sum_{\nu=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_{j,\nu} \left[\alpha_{n,j,\nu} \frac{n J_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right)}{k_{j,\nu,\rho} r} - \frac{\beta_{n,j,\nu}}{k_{j,\nu,\rho}^2} \frac{dJ_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right)}{dr} \right] \tag{5.39}$$

En ce qui concerne la composante en z du champ électrique total $E_z(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta,z).\vec{e}_z$, le calcul est plus simple puisqu'il ne requiert ni changement de variable ni l'application des formules (5.36) et (5.37). Il suffit de poser

$$\Gamma_{j,\nu,z} = \vec{\Gamma}_{j,\nu}.\vec{e}_z \tag{5.40}$$

et

$$\gamma_{n,j,\nu} = \Gamma_{j,\nu,z} i^n e^{-in\varphi_\nu} \tag{5.41}$$

pour obtenir directement l'expression du pseudo-développement de Fourier du type (3.10) de $E_z(r,\theta,z)$ avec :

$$E_{z,n}(r) = \sum_{\nu=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{2} \widetilde{A}_{j,\nu} \gamma_{n,j,\nu} J_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right) \tag{5.42}$$

5.1.4 Expression du champ magnétique total

Les expressions des composantes du champ magnétique total se déduisent de celles du champ électrique établies précédemment, à partir de l'équation de Maxwell-Faraday harmonique $\vec{H}(r,\theta,z) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \vec{rot} \vec{E}(r,\theta,z)$, dans laquelle le rotationnel est écrit dans le repère cylindrique de l'espace réel.

Ainsi, la composante radiale du champ magnétique total s'en déduit d'après :

$$H_r(r,\theta,z) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r,\theta,z)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta(r,\theta,z)}{\partial z} \right] \tag{5.43}$$

Les dérivées partielles sont écrites d'après les expressions des développements de $E_z(r,\theta,z)$ (5.42) et de $E_\theta(r,\theta,z)$ (5.39). On trouve alors le pseudo-développement de Fourier du type (3.10) de $H_r(r,\theta,z)$ avec :

$$H_{r,n}(r) = \sum_{\nu=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{2} \frac{\widetilde{A}_{j,\nu}}{\omega\mu_0} \left[\frac{n}{r} \left(\gamma_{n,j,\nu} - \alpha_{n,j,\nu} \frac{\gamma_0}{k_{j,\nu,\rho}} \right) J_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right) + \beta_{n,j,\nu} \frac{\gamma_0}{k_{j,\nu,\rho}^2} \frac{dJ_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right)}{dr} \right] \tag{5.44}$$

De la même manière, on établit l'expression des coefficients de Fourier de la composante $H_\theta(r,\theta,z)$ grâce à la projection de l'équation de Maxwell-Faraday sur $\vec{e}_\theta$

$$H_\theta(r,\theta,z) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_r(r,\theta,z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(r,\theta,z)}{\partial r} \right] \tag{5.45}$$

dans laquelle on insère les développements de $E_r(r,\theta,z)$ (5.38) et de $E_z(r,\theta,z)$ (5.42). En explicitant les dérivées partielles, on obtient :

$$H_{\theta,n}(r) = -\sum_{\nu=1}^{N_\phi} \sum_{j=1}^{2} \frac{\widetilde{A}_{j,\nu}}{i\omega\mu_0} \left[\left(\gamma_{n,j,\nu} - \alpha_{n,j,\nu} \frac{\gamma_0}{k_{j,\nu,\rho}} \right) \frac{dJ_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right)}{dr} + \beta_{n,j,\nu} \frac{\gamma_0 n}{k_{j,\nu,\rho}^2 r} J_n\left(k_{j,\nu,\rho} r\right) \right] \tag{5.46}$$

Le calcul de la composante en z du champ magnétique total est un peu plus complexe. La projection de l'équation de Maxwell-Faraday sur l'axe z donne :

$$H_z(r,\theta,z) = \frac{1}{i\omega\mu_0 r} \left[E_\theta(r,\theta,z) + r \frac{\partial E_\theta(r,\theta,z)}{\partial r} - \frac{\partial E_r(r,\theta,z)}{\partial \theta} \right] \tag{5.47}$$

On déduit des développements de Fourier de $E_\theta(r,\theta,z)$ (5.39) et de $E_r(r,\theta,z)$ (5.38) l'expression des dérivées partielles qu'on remplace dans (5.47) pour obtenir l'expression des coefficients de Fourier de $E_z(r,\theta,z)$:

$$H_{z,n}(r) = \sum_{\nu=1}^{N_\varphi}\sum_{j=1}^{2} \frac{\widetilde{A}_{j,\nu}\beta_{n,j,\nu}}{i\omega\mu_0}\left[\frac{n^2}{k_{j,\nu,\rho}^2 r^2}J_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right) - \frac{1}{k_{j,\nu,\rho}r}\frac{dJ_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)}{dr} - \frac{d^2J_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)}{dr^2}\right]$$

D'après l'équation de Bessel $J_n(\zeta) = \frac{n^2}{\zeta^2}J_n(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\frac{dJ_n(\zeta)}{\zeta} - \frac{d^2J_n(\zeta)}{d\zeta^2}$ [92], le terme entre crochets se réduit simplement à $J_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right)$. Par suite, l'expression de $H_{z,n}(r)$ devient :

$$H_{z,n}(r) = \sum_{\nu=1}^{N_\phi}\sum_{j=1}^{2} \frac{\widetilde{A}_{j,\nu}\beta_{n,j,\nu}}{i\omega\mu_0}J_n\left(k_{j,\nu,\rho}r\right) \tag{5.48}$$

5.1.5 Notation matricielle

Nous allons adopter à nouveau un formalisme matriciel pour l'écriture des coefficients de Fourier donnés par (5.38), (5.39), (5.42) pour le champ électrique et (5.44), (5.46), (5.48) pour le champ magnétique. En effet, ces équations sont linéaires par rapport aux amplitudes $\widetilde{A}_{j,\nu}$ ($j \in \{1,2\}$ et $\nu \in [1, N_\phi]$). Comme précédemment, on distingue les composantes en z et les composantes angulaires d'une part, et les composantes radiales d'autre part. On définit la matrice colonne $\left[\widetilde{A}\right]$ de dimension $2N_\phi$:

$$\left[\widetilde{A}\right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ \widetilde{A}_{1,\nu} \\ \vdots \\ \widetilde{A}_{2,\nu} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

Composantes en z et composantes angulaires .

A partir des équations (5.39), (5.42), (5.46) et (5.48), on exprime la matrice colonne $[F(r)]$ donnée par (2.108) en fonction de la matrice colonne $\left[\widetilde{A}\right]$, via la matrice notée $\Theta(r)$ de dimension $4(2N+1)\times 2N_\phi$:

$$[F(r)] = \Theta(r)\left[\widetilde{A}\right] \tag{5.50}$$

avec la matrice $\Theta(r)$ telle que :

$$\Theta(r) = \begin{pmatrix} \Theta_{11}(r) & \Theta_{12}(r) \\ \Theta_{21}(r) & \Theta_{22}(r) \\ \Theta_{31}(r) & \Theta_{32}(r) \\ \Theta_{41}(r) & \Theta_{42}(r) \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

où

$$[\Theta_{11}(r)]_{n,\nu} = \alpha_{n,1,\nu}\frac{nJ_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)}{k_{1,\nu,\rho}r} - \frac{\beta_{n,1,\nu}}{k_{1,\nu,\rho}^2}\frac{dJ_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)}{dr} \tag{5.52}$$

$$[\Theta_{12}(r)]_{n,\nu} = \alpha_{n,2,\nu}\frac{nJ_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)}{k_{2,\nu,\rho}r} - \frac{\beta_{n,2,\nu}}{k_{2,\nu,\rho}^2}\frac{dJ_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)}{dr} \tag{5.53}$$

$$[\Theta_{21}(r)]_{n,\nu} = \gamma_{n,1,\nu}J_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right) \tag{5.54}$$

$$[\Theta_{22}(r)]_{n,\nu} = \gamma_{n,2,\nu}J_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right) \tag{5.55}$$

$$[\Theta_{31}(r)]_{n,\nu} = \frac{i}{\omega\mu_0}\left[\left(\gamma_{n,1,\nu} - \alpha_{n,1,\nu}\frac{\gamma_0}{k_{1,\nu,\rho}}\right)\frac{dJ_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)}{dr} + \beta_{n,1,\nu}\frac{\gamma_0 n}{k_{1,\nu,\rho}^2 r}J_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)\right] \tag{5.56}$$

$$[\Theta_{32}(r)]_{n,\nu} = \frac{i}{\omega\mu_0}\left[\left(\gamma_{n,2,\nu} - \alpha_{n,2,\nu}\frac{\gamma_0}{k_{2,\nu,\rho}}\right)\frac{dJ_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)}{dr} + \beta_{n,2,\nu}\frac{\gamma_0 n}{k_{2,\nu,\rho}^2 r}J_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)\right] \tag{5.57}$$

$$[\Theta_{41}(r)]_{n,\nu} = \frac{\beta_{n,1,\nu}}{i\omega\mu_0}J_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right) \tag{5.58}$$

$$[\Theta_{42}(r)]_{n,\nu} = \frac{\beta_{n,2,\nu}}{i\omega\mu_0}J_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right) \tag{5.59}$$

On rappelle l'expression de la dérivée $\frac{dJ_n(k_{j,\nu,\rho}r)}{dr} = \frac{n}{r}J_n(k_{j,\nu,\rho}r) - k_{j,\nu,\rho}J_{n+1}(k_{j,\nu,\rho}r)$ obtenue en utilisant la formule $\frac{dJ_n(\zeta)}{d\zeta} = \frac{n}{\zeta}J_n(\zeta) - J_{n+1}(\zeta)$ (formule f1.9.27 de la référence [92]).

Composantes radiales .

A partir des équations (5.38) et (5.44), les coefficients de Fourier des composantes radiales du champ électromagnétique regroupés dans la matrice colonne $[F_r(r)]$ (2.111) s'écrivent sous la forme matricelle suivante :

$$[F_r(r)] = \Theta_r(r)\left[\widetilde{A}\right] \tag{5.60}$$

avec la matrice $\Theta_r(r)$ de dimension $2(2N+1)\times 2N_\phi$ telle que :

$$\Theta_r(r) = \begin{pmatrix} \Theta_{r,11}(r) & \Theta_{r,12}(r) \\ \Theta_{r,21}(r) & \Theta_{r,22}(r) \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

où

$$[\Theta_{r,11}(r)]_{n,\nu} = i\left[\beta_{n,1,\nu}\frac{nJ_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)}{k_{1,\nu,\rho}^2 r} - \frac{\alpha_{n,1,\nu}}{k_{1,\nu,\rho}}\frac{dJ_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)}{dr}\right] \tag{5.62}$$

$$[\Theta_{r,12}(r)]_{n,\nu} = i\left[\beta_{n,2,\nu}\frac{nJ_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)}{k_{2,\nu,\rho}^2 r} - \frac{\alpha_{n,2,\nu}}{k_{1,\nu,\rho}}\frac{dJ_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)}{dr}\right] \tag{5.63}$$

$$[\Theta_{r,21}(r)]_{n,\nu} = \frac{1}{\omega\mu_0}\left[\frac{n}{r}\left(\gamma_{n,1,\nu} - \alpha_{n,1,\nu}\frac{\gamma_0}{k_{1,\nu,\rho}}\right)J_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right) + \beta_{n,1,\nu}\frac{\gamma_0}{k_{1,\nu,\rho}^2}\frac{dJ_n\left(k_{1,\nu,\rho}r\right)}{dr}\right] \tag{5.64}$$

$$[\Theta_{r,22}(r)]_{n,\nu} = \frac{1}{\omega\mu_0}\left[\frac{n}{r}\left(\gamma_{n,2,\nu} - \alpha_{n,2,\nu}\frac{\gamma_0}{k_{2,\nu,\rho}}\right)J_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right) + \beta_{n,2,\nu}\frac{\gamma_0}{k_{2,\nu,\rho}^2}\frac{dJ_n\left(k_{2,\nu,\rho}r\right)}{dr}\right] \tag{5.65}$$

Il apparaît une similitude entre ces dernières relations (5.50) et (5.60), valables pour un milieu anisotrope et homogène, et les relations (3.40) et (3.44) établies pour un milieu isotrope et homogène. Nonobstant les éléments caractéristiques de l'isotropie ou de l'anisotropie, ces relations diffèrent essentiellement par la nature des amplitudes des matrices colonnes $\left[\widetilde{A}\right]$ pour le milieu anisotrope (5.49) et $\left[V^{(j)}(r)\right]$ pour le milieu isotrope (3.39). Pour le premier cas, l'indice $\nu \in [1, N_\phi]$ des éléments de $\left[\widetilde{A}\right]$ tient son origine de la discrétisation de l'intégrale dans l'équation (5.20), c'est-à-dire de la décomposition du champ électrique en ondes planes. Dans le second cas, l'indice $n \in [-N, +N]$ des éléments de $\left[V^{(j)}(r)\right]$ est celui de l'ordre des développements de Fourier. On comprend alors pourquoi les fonctions de Bessel ne peuvent intervenir dans la matrice colonne $\left[\widetilde{A}\right]$ (devenant de ce fait indépendante de r) puisque la nature de l'indice ν est différente de celle de l'indice n. On ne peut donc pas normaliser les matrices $\Theta(r)$ et $\Theta_r(r)$ par ces fonctions, contrairement aux matrices $\Psi^{(j)}(r)$ et $\Psi_r^{(j)}(r)$ d'un milieu isotrope.

5.2 Résolution du problème de diffraction

5.2.1 Matrice de transmission d'un cylindre circulaire anisotrope

La matrice de transmission (en amplitude) du cylindre circulaire anisotrope introduit dans la section 5.1.1 relie, par définition, les amplitudes $\left[V^{(ext)}(R)\right]$ du milieu isotrope extérieur aux amplitudes $\left[\widetilde{A}\right]$ du

milieu anisotrope sur la surface S du cylindre. Pour cela, il suffit d'appliquer la continuité de la matrice $[F(R)]$ (coefficients de Fourier des composantes du champ électromagnétique tangentes à S). Autrement dit, on pose l'égalité entre la matrice colonne $[F(R)]$ du milieu isotrope donnée par la relation (3.40) et celle exprimée dans la relation (5.50) pour le milieu anisotrope :

$$\Psi^{(ext)}(R)\left[V^{(ext)}(R)\right] = \Theta(R)\left[\widetilde{A}\right]$$

d'où on déduit directement que

$$\left[V^{(ext)}(R)\right] = T^{(Ani)}\left[\widetilde{A}\right] \tag{5.66}$$

avec

$$T^{(Ani)} = \left\{\Psi^{(ext)}(R)\right\}^{-1}\Theta(R) \tag{5.67}$$

Sans surprise, on trouve une expression comparable à celle de la matrice de transmission $T^{(H)}$ d'un cylindre centré isotrope (et homogène) donnée par (3.111) dans laquelle la matrice $\Psi^{(int)}(R)$ est remplacée par la matrice $\Theta(R)$. On rappelle que l'inversion de la matrice $\Psi^{(ext)}(R)$ se fait analytiquement selon (3.84).

La matrice $T^{(Ani)}$ a pour dimension $4(2N+1)\times 2N_\phi$. La résolution du problème de diffraction s'effectue en remplaçant, dans $\left[V^{(ext)}(R)\right]$ de la relation (5.66), ses éléments par les amplitudes des champs diffractés et incidents, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \left[A^{(inc)}(R)\right] \\ \left[B^{(ext)}(R)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(Ani)} \\ T_{21}^{(Ani)} \end{pmatrix}\left[\widetilde{A}\right] \tag{5.68}$$

Les inconnues du problème sont les amplitudes diffractées dans le milieu isotrope extérieur $\left[B^{(ext)}(R)\right]$ et celles dans le milieu anisotrope intérieur $\left[\widetilde{A}\right]$, alors que les amplitudes du champ incident $\left[A^{(inc)}(R)\right]$ restent la donnée du problème. On se retrouve alors avec un système de $4(2N+1)$ équations linéaires à $2(2N+1)+2N_\phi$ inconnues. La résolution de ce système d'équations linéaires contraint la valeur de N_ϕ à $2N+1$ (système de Kramer). On conclue par les expressions des amplitudes recherchées des champs diffractés en fonction de celles de l'onde plane incidente :

$$\left[\widetilde{A}\right] = \left\{T_{11}^{(Ani)}\right\}^{-1}\left[A^{(inc)}(R)\right] \tag{5.69}$$

$$\left[B^{(ext)}(R)\right] = T_{21}^{(Ani)}\left\{T_{11}^{(Ani)}\right\}^{-1}\left[A^{(inc)}(R)\right] \tag{5.70}$$

5.2.2 Cas particulier d'un milieu anisotrope uniaxe

Il est intéressant de se pencher sur le cas particulier du cylindre circulaire rempli d'un milieu anisotrope uniaxe. On suppose que le milieu uniaxe considéré est orienté de telle sorte que son tenseur permittivité relative s'écrive sous la forme :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

avec $(\epsilon_x, \epsilon_z) \in \mathbb{C}^2$. D'après la relation de changement de base (5.1), on en déduit aisément que $\tilde{\bar{\epsilon}}_r(\phi) = \bar{\bar{\epsilon}}_r$.

Onde plane se propageant dans un milieu uniaxe .

De l'indépendance de $\tilde{\bar{\epsilon}}_r$ selon l'angle ϕ, on déduit l'indépendance de l'équation de propagation (5.4) et de ses solutions. Dans le cas général ($\gamma_0 \neq 0$), l'expression (5.15) du déterminant de $\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)$ prend la forme d'un polynôme bicarré :

$$det\left[\mathcal{H}\left(\vec{k}\right)\right] = h_4\tau^4 + h_2\tau^2 + h_0 \tag{5.72}$$

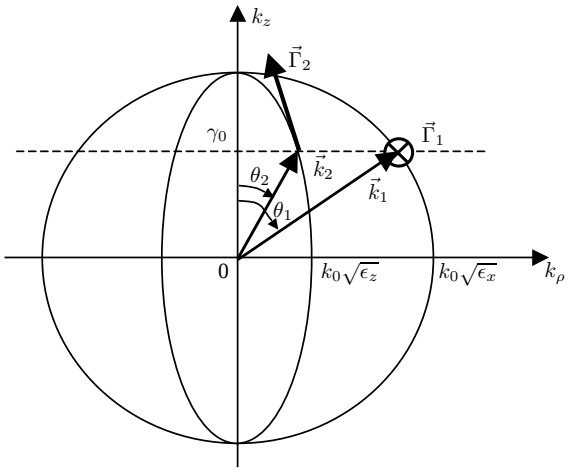


FIG. 5.3 – Surfaces des indices dans l'espace des vecteurs d'onde pour un milieu uniaxe

avec

$$\begin{aligned} h_4 &= -\epsilon_x \chi^4 \\ h_2 &= \chi^2 \left\{ \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_x^2 - \chi^2 \left[\epsilon_x + \epsilon_z \right] \right\} \\ h_0 &= -\chi^4 \epsilon_z + 2\chi^2 \epsilon_x \epsilon_z - \epsilon_x^2 \epsilon_z \end{aligned}$$

Les deux racines de ce polynôme (voir section B.1.2 de l'annexe B) solutions du problème physique (telles que $k_\rho > 0$) sont :

$$\tau_1 = \frac{1}{\gamma_0} \sqrt{k_0^2 \epsilon_x - \gamma_0^2} \tag{5.73}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \left(k_0^2 \epsilon_x - \gamma_0^2 \right)} \tag{5.74}$$

En reportant l'expression de τ_1 (5.73) dans la relation $k_1 = \gamma_0 \sqrt{1 + \tau_1}$, on obtient :

$$k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_x} \tag{5.75}$$

En insérant la relation $k_2 = \frac{\gamma_0}{\cos \theta_2}$ dans l'expression de τ_2 (5.74), on trouve :

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{\cos^2 \theta_2}{\epsilon_x} + \frac{\sin^2 \theta_2}{\epsilon_z} \right] \tag{5.76}$$

Ces deux dernières relations peuvent être retrouvées en utilisant les surfaces des indices dans l'espace des vecteurs d'onde lorsque la valeur de k_z est fixée à γ_0 (voir figure 5.3). L'expression de k_1 (5.75) découle de l'intersection entre la sphère de rayon $k_0\sqrt{\epsilon_x}$ et le plan d'équation $k_z = \gamma_0$. L'expression de k_2 (5.76) provient de l'intersection entre l'ellipsoïde de demi-grand axe $k_0\sqrt{\epsilon_x}$ et de demi-petit axe $k_0\sqrt{\epsilon_z}$ (si $\epsilon_x > \epsilon_z$ et vice-versa) et le plan d'équation $k_z = \gamma_0$.

En utilisant le procédé de calcul des vecteurs propres solution de (5.8) énoncé dans la section B.2 de l'annexe B, on montre que les vecteurs de polarisation associés respectivement à k_1 et k_2 s'écrivent :

$$\vec{\Gamma}_1 = \vec{e}_\phi \tag{5.77}$$

$$\vec{\Gamma}_2 = \frac{-\epsilon_z \vec{e}_\rho + \epsilon_x \tau_2 \vec{e}_z}{\sqrt{\left(\epsilon_x \tau_2 \right)^2 + \epsilon_z^2}} \tag{5.78}$$

On vérifie que chacun de ces deux vecteurs est tangent à la surface à laquelle il est associé (voir figure 5.3).

Décomposition du champ électromagnétique total en onde plane .

Dans la décomposition du champ électromagnétique total en onde plane, $k_{j,\nu,\rho}$ et $\vec{\Gamma}_{j,\nu}$ deviennent indépendants de ν (de ϕ_ν) et sont notés respectivement $k_{j,\rho}$ et $\vec{\Gamma}_j$. D'après les relations (5.75) à (5.78), les équations (5.33), (5.34) et (5.41) deviennent :

$$\alpha_{n,1,\nu} = \beta_{n,2,\nu} = \gamma_{n,1,\nu} = 0 \tag{5.79}$$

L'indépendance de $k_{j,\nu,\rho}$ selon ν dans toutes les expressions des composantes du champ électromagnétique total, permet de sortir la fonction de Bessel $J_n\left(k_{j,\rho}r\right)$ de la somme selon ν. On introduit alors les grandeurs suivantes :

$$A_{e,n}^{(int)} = \sum_{\nu=1}^{N_\phi} \widetilde{A}_{2,\nu}\gamma_{n,2,\nu} \tag{5.80}$$

$$A_{h,n}^{(int)} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\sum_{\nu=1}^{N_\phi} \widetilde{A}_{1,\nu}\beta_{n,1,\nu} \tag{5.81}$$

En utilisant l'équation (5.78), on trouve également la relation suivante :

$$\sum_{\nu=1}^{N_\phi} \widetilde{A}_{2,\nu}\alpha_{n,2,\nu} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}\frac{\gamma_0}{k_{2,\rho}}A_{e,n}^{(int)} \tag{5.82}$$

Les coefficients de Fourier des composantes du champ électrique données par les équations (5.38), (5.39) et (5.42) deviennent :

$$E_{r,n}(r) = \frac{i\gamma_0}{k_{2,\rho}^2}\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}A_{e,n}^{(int)}\frac{dJ_n\left(k_{2,\rho}r\right)}{dr} - \frac{\omega\mu_0 n}{rk_{1,\rho}^2}A_{e,n}^{(int)}J_n\left(k_{1,\rho}r\right) \tag{5.83}$$

$$E_{\theta,n}(r) = -\frac{\gamma_0 n}{rk_{2,\rho}^2}\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}J_n\left(k_{2,\rho}r\right) - \frac{i\omega\mu_0}{k_{1,\rho}^2}A_{h,n}^{(int)}\frac{dJ_n\left(k_{1,\rho}r\right)}{dr} \tag{5.84}$$

$$E_{z,n}(r) = A_{e,n}^{(int)}J_n\left(k_{2,\rho}r\right) \tag{5.85}$$

Les coefficients de Fourier des composantes du champ magnétique données par les équations (5.44), (5.46) et (5.48) deviennent :

$$H_{r,n}(r) = \frac{n}{\omega\mu_0 r}\left(1 + \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}\frac{\gamma_0^2}{k_{2,\rho}^2}\right)A_{e,n}^{(int)}J_n\left(k_{2,\rho}r\right) + \frac{i\gamma_0}{k_{1,\rho}^2}A_{h,n}^{(int)}\frac{dJ_n\left(k_{1,\rho}r\right)}{dr} \tag{5.86}$$

$$H_{\theta,n}(r) = \frac{i}{\omega\mu_0}\left(1 + \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}\frac{\gamma_0^2}{k_{2,\rho}^2}\right)A_{e,n}^{(int)}\frac{dJ_n\left(k_{2,\rho}r\right)}{dr} - \frac{\gamma_0 n}{rk_{1,\rho}^2}A_{h,n}^{(int)}J_n\left(k_{1,\rho}r\right) \tag{5.87}$$

$$H_{z,n}(r) = A_{h,n}^{(int)}J_n\left(k_{1,\rho}r\right) \tag{5.88}$$

En remplaçant la dérivée par son expression selon les fonctions de Bessel, les équations (5.84), (5.85), (5.87) et (5.88) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$[F(r)] = \widetilde{\Psi}^{(int)}(r)\left[\widetilde{A}^{(int)}(r)\right] \tag{5.89}$$

avec

$$\widetilde{\Psi}^{(int)}(r) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_0}{rk_{2,\rho}^2}\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}\alpha & \frac{i\omega\mu_0}{k_{1,\rho}^2}\left[k_{1,\rho}\widetilde{q}_h - \frac{\alpha}{r}\right] \\ I_d & 0 \\ -\frac{i}{\omega\mu_0}\left[k_{2,\rho}\widetilde{q}_e - \frac{\alpha}{r}\right]\left(1 + \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}\frac{\gamma_0^2}{k_{2,\rho}^2}\right) & -\frac{\gamma_0}{rk_{1,\rho}^2}\alpha \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \tag{5.90}$$

où

$$\left[\widetilde{A}^{(int)}(r)\right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{e,n}^{(int)} J_n\left(k_{2,\rho} r\right) \\ \vdots \\ A_{h,n}^{(int)} J_n\left(k_{1,\rho} r\right) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5.91}$$

$$(\widetilde{q}_e)_{nm} = \frac{J_{n+1}\left(k_{2,\rho} r\right)}{J_n\left(k_{2,\rho} r\right)} \delta_{nm} \tag{5.92}$$

$$(\widetilde{q}_h)_{nm} = \frac{H_{n+1}^{+}\left(k_{1,\rho} r\right)}{H_n^{+}\left(k_{1,\rho} r\right)} \delta_{nm} \tag{5.93}$$

La matrice $\widetilde{\Psi}^{(int)}(r)$ a pour dimension $4(2N+1)\times 2(2N+1)$. Les équations (5.83), (5.86) s'écrivent :

$$[F_r(r)] = \widetilde{\Psi}_r^{(int)}(r) \left[\widetilde{A}^{(int)}(r)\right] \tag{5.94}$$

avec

$$\widetilde{\Psi}_r^{(int)}(r) = \begin{pmatrix} \frac{i\gamma_0}{k_{2,\rho}^2}\left[\frac{\alpha}{r} - k_{2,\rho}\widetilde{q}_e\right]\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} & \frac{\omega\mu_0}{r k_{1,\rho}^2}\alpha \\ \frac{\alpha}{\omega\mu_0 r}\left(1 + \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}\frac{\gamma_0}{k_{2,\rho}^2}\right) & \frac{i\gamma_0}{k_{1,\rho}^2}\left[\frac{\alpha}{r} - k_{1,\rho}\widetilde{q}_h\right] \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

qui est de dimension $2(2N+1)\times 2(2N+1)$. Il apparaît déjà des similitudes entre ces matrices $\widetilde{\Psi}^{(int)}(r)$ et $\widetilde{\Psi}_r^{(int)}(r)$ d'un milieu anisotrope uniaxe, et les matrices $\Psi^{(int)}(r)$ et $\Psi_r^{(int)}(r)$ (équations (3.41) et (3.44)) d'un milieu isotrope. Elles diffèrent essentiellement par les arguments $k_{1,\rho}r$ et $k_{2,\rho}r$ des fonctions de Bessel et de Hankel et par la taille des matrices. La matrice colonne $\left[\widetilde{A}^{(int)}(r)\right]$ (5.91) équivaut à $\left[A^{(j)}(r)\right]$ (3.37) et ne correspond donc plus qu'à la moitié de la matrice colonne $\left[V^{(j)}(r)\right]$ (3.39). En fait, les conditions d'ondes sortantes (COS) ont été implicitement appliquées lors de la décomposition en ondes planes du champ total (5.20) se propageant dans un milieu anisotrope (qui contient l'origine) car on a induit que des solutions élémentaires bornées. Dès lors que $\epsilon_z = \epsilon_x$, le milieu initialement anisotrope uniaxe devient isotrope. On vérifie alors que les blocs des matrices $\widetilde{\Psi}^{(int)}(r)$ et $\widetilde{\Psi}_r^{(int)}(r)$ deviennent égaux aux blocs équivalents des matrices $\Psi^{(int)}(r)$ et $\Psi_r^{(int)}(r)$.

Matrice de transmission d'un cylindre circulaire anisotrope uniaxe .

Le raisonnement reste inchangé par rapport à celui effectué dans la section 5.2.1 pour le cas général d'anisotropie du cylindre circulaire décrit dans la section 5.1.1. Par continuité du champ en R (matrice colonne $[F(R)]$), on obtient alors la même relation de définition de la matrice de transmission (5.66) mais en remplaçant $\left[\widetilde{A}\right]$ défini selon (5.49) par $\left[\widetilde{A}^{(int)}(r)\right]$ (5.91). De même, cette matrice notée $T^{(uni)}$ a la même expression (5.67) mais en remplaçant $\Theta(R)$ par $\widetilde{\Psi}^{(int)}(R)$:

$$T^{(uni)} = \left\{\Psi^{(ext)}(R)\right\}^{-1} \widetilde{\Psi}^{(int)}(R) \tag{5.96}$$

et est de dimension $4(2N+1)\times 2(2N+1)$. Comme dans la relation (5.69), le champ diffracté en $r = R$ (sur la surface S) sur le flanc intérieur au cylindre circulaire devient :

$$\left[\widetilde{A}^{(int)}(r)\right] = \left\{T_{11}^{(uni)}\right\}^{-1} \left[A^{(inc)}(R)\right] \tag{5.97}$$

en utilisant la même notation introduite dans la relation (5.68) pour les blocs de la matrice de transmission. Le champ diffracté du côté extérieur à la surface S (matrice colonne $\left[B^{(ext)}(R)\right]$) s'écrit de la même manière que précédemment (5.70) en prenant les blocs de la matrice $T^{(uni)}$ correspondants.

5.3 Application numérique

Implémentation .

Cette théorie a fait l'objet d'un nouveau programme indépendant de celui concernant la méthode différentielle. Son implémentation, traitant de la diffraction conique par un cylindre circulaire anisotrope centré sur l'origine, est directement inspirée de celle associée au cylindre circulaire isotrope centré (voir section 3.5.2), en raison des similitudes constatées précédemment entre les matrices de transmission de ces deux structures diffractantes. A l'exception de l'évaluation des fonctions de Bessel et des calculs mathématiques de base (produit matriciel, inversion de matrice), aucun sous-programme spécial ou prédéfini n'est nécessaire, ni pour le calcul des racines des polynômes d'ordre 4, ni pour celui des valeurs et vecteurs propres (voir l'annexe B). On précise également que l'inversion de la matrice $\Psi^{(ext)}(R)$ dans les expressions de $T^{(Ani)}$ (5.67) et $T^{(uni)}$ (5.96) s'effectue de manière analytique selon (3.84). Cependant, un algorithme spécifique reste indispensable pour l'inversion du bloc $T_{11}^{(Ani)}$ (respectivement $T_{11}^{(uni)}$).

Etude d'un cylindre circulaire uniaxe : validation .

Afin de valider la théorie dans notre code numérique, nous nous sommes basés sur les résultats obtenus par Monzon [19, 20] concernant précisément la diffraction conique d'une onde plane par un cylindre circulaire anisotrope. On prend alors les structures cylindriques à milieu anisotrope uniaxe considérées par Monzon telles que :

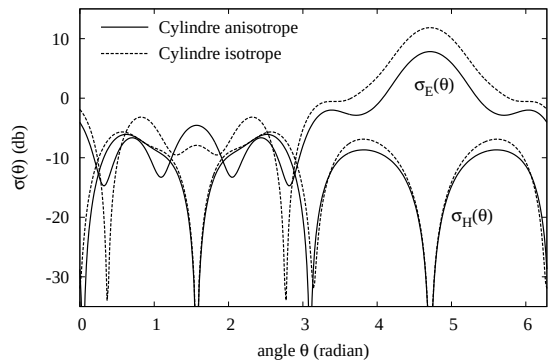
Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
Paramètres des milieux	
ϵ_{xx}	4.87526 et 20.74526
$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$	5.29 et 21.16
ϵ_{ij}, $(i,j) \in \{x,y,z\}^2$, $i \neq j$	0
ϵ_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	2 μm
θ_{inc}	90^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	90^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 30

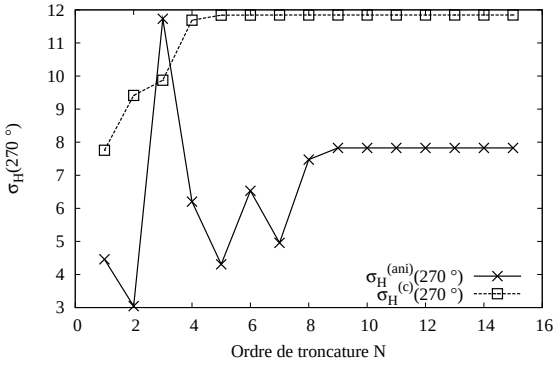
Dans l'illustration des résultats numériques, Monzon a distingué les champs électrique et magnétique diffractés en calculant, en diffraction conique, les SED associées à chacun de ces champs. Il s'agit des mêmes SED que nous avions définies pour chacune des polarisations TE et TM en diffraction classique (4.26). On les note ici $\sigma_E^{(ani)}(\theta)$ (TE) et $\sigma_H^{(ani)}(\theta)$ (TM) respectivement pour les champs électrique et magnétique. La figure 5.4(a) montre ces SED calculées pour $\epsilon_{xx} = 4.87526$, $\epsilon_{zz} = 5.29$ et $N = 20$ en comparaison avec celles du cylindre circulaire isotrope centré ($\sigma_{E,H}^{(c)}(\theta)$) tel que $\epsilon_{cyl} = 5.29$. Les résultats sont en parfait accord avec ceux présentés dans la figure 6(b) de l'article [20]. Les courbes de $\sigma_{E,H}(270^o)$ en fonction de N pour les deux cas anisotrope et isotrope illustrées par la figure 5.4(b), laissent apparaître une convergence plus lente pour le cas d'anisotropie par comparaison au cas d'isotropie. Il faut atteindre $N = 8$ environ pour voir le début du plateau de convergence dans le cas anisotrope alors qu'il suffit d'avoir $N = 4$ dans le cas isotrope. En effet, la convergence tient compte à la fois de l'écart de permittivité (d'indice) entre le milieu intérieur (anisotrope) et extérieur à la surface du cylindre, mais également de l'écart des permittivités ϵ_x et ϵ_z du milieu anisotrope. Cette observation est confirmée par le test de convergence de la figure 5.4(c) pour lequel le contraste entre les deux permittivités du matériau anisotrope est renforcé : $\epsilon_{xx} = 4.87526$ et $\epsilon_{zz} = 21.16$. Dans ce cas, il faut presque deux fois plus de coefficients de Fourier ($N = 16$) pour obtenir une bonne convergence. La troisième configuration traite du cylindre anisotrope en gardant $\epsilon_{zz} = 21.16$ mais en ramenant ϵ_{xx} à la valeur 20.74526 de telle sorte que l'ecart avec ϵ_{zz} soit identique à celui de la première configuration anisotrope ($\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx} = 0.41474$). La comparaison de leurs convergences selon N par la figure 5.4(d) montre des taux de convergence semblables pour les deux cas.

Etude d'un cylindre circulaire biaxe .

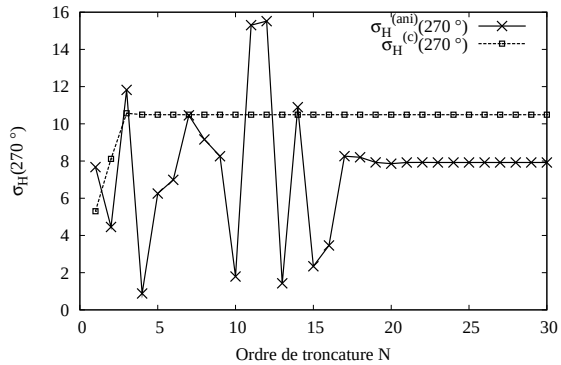
Le programme ne se limite pas à l'anisotropie uniaxe du cylindre circulaire. Nous illustrons ici les résultats obtenus pour le cas général d'un matériau biaxe. On considère toujours que le matériau anisotrope est orienté de telle sorte que ses axes principaux soient confondus avec ceux du



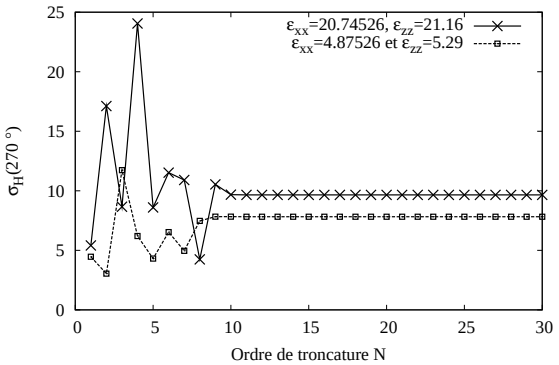
(a) SED pour le cylindre circulaire anisotrope uniaxe avec $\epsilon_{xx} = 4.87526$, $\epsilon_{zz} = 5.29$ et $N = 20$ et pour le cylindre circulaire isotrope (centré) avec $\epsilon_{cyl} = 5.29$



(b) Test de convergence selon N de $\sigma_H(270^o)$ de la figure 5.4(a)

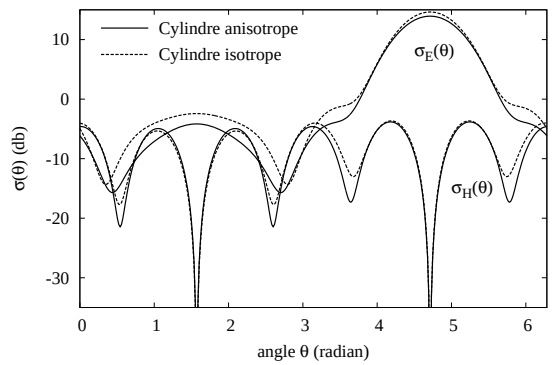


(c) Test de convergence selon N de $\sigma_H(270^o)$ avec $\epsilon_{xx} = 4.87526$ et $\epsilon_{zz} = 21.16$

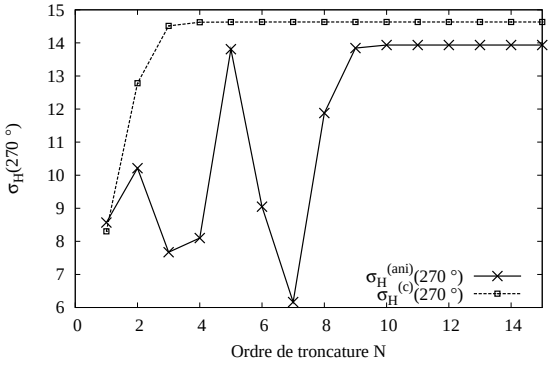


(d) Test de convergence selon N de $\sigma_H(270^o)$ avec $\epsilon_{xx} = 20.74526$ et $\epsilon_{zz} = 21.16$

FIG. 5.4 – Tests numériques pour un cylindre circulaire de milieu anisotrope uniaxe



(a) SED pour le cylindre circulaire anisotrope uniaxe avec $\epsilon_{xx} = 2$, $\epsilon_{yy} = 2.25$, $\epsilon_{zz} = 2.5$ et $N = 20$ et pour le cylindre circulaire isotrope (centré) avec $\epsilon_{cyl} = 2.25$



(b) Test de convergence selon N de $\sigma_H(270^o)$ de la figure 5.5(a)

FIG. 5.5 – Tests numériques pour un cylindre circulaire de milieu anisotrope biaxe

repère. Autrement dit, le tenseur permittivité reste une matrice diagonale dans la base vectorielle $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les paramètres choisis sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	$1\ \mu m$
Paramètres des milieux	
ϵ_{xx}	2
ϵ_{yy}	2.25
ϵ_{zz}	2.5
ϵ_{ij}, $(i,j) \in \{x,y,z\}^2$, $i \neq j$	0
ϵ_{mat}	1

Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	$2\ \mu m$
θ_{inc}	90^o
φ_{inc}	30^o
ψ_{inc}	90^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
Paramètres numériques	
N	1 à 30

La figure 5.5(a) comme la figure 5.4(a), montre les SED calculées du cylindre anisotrope en comparaison de celles du cylindre circulaire isotrope centré tel que $\epsilon_{cyl} = 2.25$. Les convergences selon N de $\sigma_H^{(ani)}(270^o)$ et $\sigma_H^{(c)}(270^o)$ sont représentées dans la figure 5.5(b). On notera que la qualité de la convergence reste sensiblement la même que celle de la figure 5.4(b) pour le cas d'une anisotropie uniaxe.

5.4 Généralisation de la méthode différentielle à des objets cylindriques anisotropes et de sections arbitraires

Dans ce chapitre, nous avons exploité les nouvelles expressions des champs obtenues pour des milieux anisotropes (et homogènes) afin de résoudre le problème de diffraction pour le cas très particulier d'une structure cylindrique circulaire et anisotrope, centrée sur l'origine du repère. Nous cherchons maintenant à généraliser la théorie au cas d'objet cylindrique anisotrope mais de section arbitraire. La frappante analogie observée entre les descriptions du champ électromagnétique pour des régions de l'espace isotropes et anisotropes nous conduit naturellement à nous intéresser à la généralisation de la méthode différentielle pour des milieux anisotropes. Le chapitre 2 aboutit à l'écriture du système différentiel à résoudre à travers une région de l'espace limitée que nous avons appelée "zone modulée". Ce formalisme différentiel a été établi pour des structures cylindriques (périodiques selon l'axe z) à matériaux très variés : inhomogènes, conducteurs et anisotropes. Cependant, on sait que la résolution complète du problème de diffraction s'effectue uniquement par le raccordement des champs sur les cylindres circulaires limitant la zone modulée (C_{min} et C_{max}) entre les deux régions de l'espace (int) et (ext). Dans ces deux

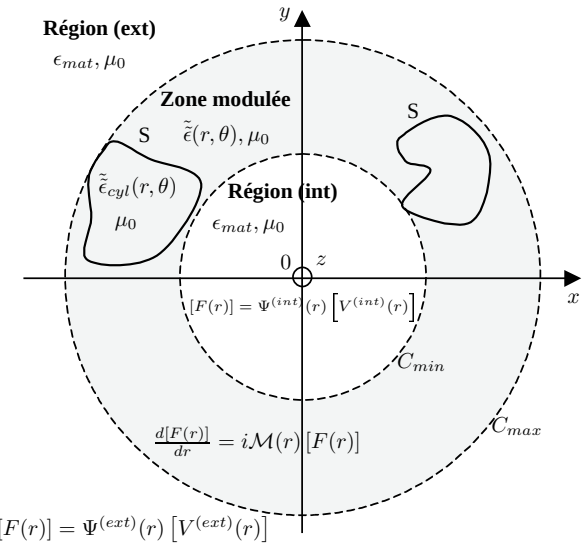


FIG. 5.6 – Généralisation de la méthode différentielle à des milieux anisotropie : cas des cylindres excentrés par rapport à l'origine

dernières régions, il est donc nécessaire de connaître explicitement les expressions des champs. Cette condition est réalisée dans le cas particulier de milieux isotropes (et homogènes) comme nous l'avons traité dans le chapitre 3 : écriture explicite des champs des régions homogènes (int) et (ext) dans la section 3.1.3, puis résolution du problème de diffraction soit par l'algorithme T (voir section 3.2) soit par l'algorithme S (voir section 3.3) pour un objet diffractant invariant selon z.

Grâce à la nouvelle théorie énoncée dans ce chapitre, on connaît désormais explicitement l'expression des champs dans une région de l'espace contenant l'origine du repère et remplie d'un milieu anisotrope homogène. Nous pouvons alors procéder de la même manière que dans le chapitre 3 pour des structures cylindriques de section arbitraire, invariantes selon z et remplies de milieux anisotropes. En d'autres termes, nous allons voir comment coupler les deux théories présentées dans ce document : la méthode différentielle et l'écriture analytique des champs dans une région anisotrope et homogène. Nous allons cependant distinguer les deux géométries d'objets cylindriques anisotropes introduites dans la section 2.2.3 (voir figures 2.3(a) et 2.3(b)). On rappelle que ces deux configurations diffèrent par la position de l'origine du repère. Par contre, elles présentent les points communs suivants. Dans les deux cas, la région extérieure (ext) doit rester isotrope (et homogène) car on ne peut pas considérer pour l'instant une matrice anisotrope (région de l'espace ne contenant pas l'origine du repère) : $\bar{\bar{\epsilon}}_{mat} = \epsilon_{mat} I_d$. Le tenseur permittivité du cylindre $\bar{\bar{\epsilon}}_{cyl}$ s'écrit dans le système de coordonnées cartésiennes sous la forme générale suivante :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{cyl} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.98}$$

Ce tenseur devient indépendant des variables d'espace x, y et z puisque le milieu est homogène. Les deux tenseurs $\tilde{\bar{\epsilon}}_{int}(r,\theta)$ pour la région (int) et $\tilde{\bar{\epsilon}}(r,\theta)$ pour la zone modulée restent identiquement définis par (2.38) et (2.41) respectivement.

Cylindres anisotropes à section arbitraire ne contenant pas l'origine du repère .

La figure 5.6 représente l'objet d'étude en question. On sait que la région intérieure (int) est constituée du même matériau isotrope de permittivité ϵ_{mat} que la région extérieure (ext). Par conséquent, les champs $[F(r)]$ et $[F_r(r)]$ dans ces deux régions de l'espace sont reliés aux amplitudes par les mêmes matrices $\Psi^{(j)}(r)$ (3.41) et $\Psi_r^{(j)}(r)$ (3.45) respectives. Quant à la zone modulée, elle contient l'objet cylindrique de matériau anisotrope. Le tenseur $\tilde{\bar{\epsilon}}(r,\theta)$ ne se réduit alors plus à la fonction $\epsilon(r,\theta)$ comme dans le chapitre 3. Ses éléments deviennent chacun une fonction des

variables r et θ. On les note :

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr}(r,\theta) & \epsilon_{r\theta}(r,\theta) & \epsilon_{rz}(r,\theta) \\ \epsilon_{\theta r}(r,\theta) & \epsilon_{\theta\theta}(r,\theta) & \epsilon_{\theta z}(r,\theta) \\ \epsilon_{zr}(r,\theta) & \epsilon_{z\theta}(r,\theta) & \epsilon_{zz}(r,\theta) \end{pmatrix} \tag{5.99}$$

à ne pas confondre avec ceux du tenseur $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}$ (5.98). En général, il ne s'agit pas de fonctions créneaux puisque ces fonctions $\epsilon_{ij}(r,\theta)$, $(i,j) \in \{r,\theta,z\}^2$ contiennent les éléments du tenseur $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{cyl}(r,\theta)$ dont certains s'expriment avec les fonctions $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par le changement de base (2.32). Par application de la méthode FFF, la matrice Q_ϵ s'écrit cette fois-ci en prenant la forme générale (2.87) énoncée dans le chapitre 2 avec :

$$C_\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{N_r(r,\theta)\epsilon_{r\theta}(r,\theta)+N_\theta(r,\theta)\epsilon_{\theta\theta}(r,\theta)}{\delta(r,\theta)} & \frac{N_r(r,\theta)}{\delta(r,\theta)} & 0 \\ -\frac{N_r(r,\theta)\epsilon_{rr}(r,\theta)+N_\theta(r,\theta)\epsilon_{\theta r}(r,\theta)}{\delta(r,\theta)} & \frac{N_\theta(r,\theta)}{\delta(r,\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.100}$$

où

$$\delta(r,\theta) = N_r^2(r,\theta)\epsilon_{rr}(r,\theta) + N_\theta^2(r,\theta)\epsilon_{\theta\theta}(r,\theta) + N_r(r,\theta)N_\theta(r,\theta)\left[\epsilon_{\theta r}(r,\theta) + \epsilon_{r\theta}(r,\theta)\right] \tag{5.101}$$

Cette expression de C_ϵ est déduite de la relation (2.85) avec $\vec{T}_1$ donné par (3.2) et $\vec{T}_2$ par (3.3) (compte tenu de l'invariance du cylindre selon z). Les fonctions $N_r(r,\theta)$ et $N_\theta(r,\theta)$ sont les prolongements dans toute la zone modulée des composantes radiale et angulaire du vecteur normal à la surface du cylindre (voir section 2.3.3). Malgré la forme de C_ϵ, la matrice Q_ϵ ne contient pas, a priori, de termes nuls et se note toujours selon (2.95). On insère cette matrice Q_ϵ dans la matrice $\mathcal{M}(r)$ (2.110) du système différentiel (2.109). Compte tenu de l'invariance du cylindre selon z pour γ (3.12) et en considérant un matériau non magnétique pour Q_μ (3.14), on obtient :

$$\mathcal{M}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta} + \frac{i}{r}I_d & \frac{1}{r}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,rz} \\ -\gamma_0 Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta} & -\gamma_0 Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,rz} \\ \omega\left(Q_{\epsilon,zr}Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta} - Q_{\epsilon,z\theta}\right) - \frac{\gamma_0}{\mu_0\omega r}\alpha & \frac{1}{\omega\mu_0 r^2}\alpha^2 + \omega\left(Q_{\epsilon,zr}Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,rz} - Q_{\epsilon,zz}\right) \\ \omega\left(Q_{\epsilon,\theta\theta} - Q_{\epsilon,\theta r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta}\right) - \frac{\gamma_0^2}{\mu_0\omega}I_d & \frac{\gamma_0}{\mu_0\omega r}\alpha + \omega\left(Q_{\epsilon,\theta z} - Q_{\epsilon,\theta r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,rz}\right) \\ \frac{\gamma_0}{\omega r}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1} & \omega\mu_0 I_d - \frac{1}{\omega r^2}\alpha Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ \frac{\gamma_0^2}{\omega}Q_{\epsilon,rr}^{-1} - \omega\mu_0 I_d & -\frac{\gamma_0}{r\omega}Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ \frac{i}{r}I_d - \gamma_0 Q_{\epsilon,zr}Q_{\epsilon,rr}^{-1} & \frac{1}{r}Q_{\epsilon,zr}Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ Q_{\epsilon,\theta r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}\gamma_0 & -Q_{\epsilon,\theta r}Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{1}{r}\alpha \end{pmatrix} \tag{5.102}$$

En ce qui concerne l'expression de la matrice $\mathcal{M}_r(r)$ (2.113), on trouve :

$$\mathcal{M}_r(r) = \begin{pmatrix} -Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,r\theta} & -Q_{\epsilon,rr}^{-1}Q_{\epsilon,rz} & Q_{\epsilon,rr}^{-1}\frac{\gamma_0}{\omega} & -\frac{1}{r\omega}Q_{\epsilon,rr}^{-1}\alpha \\ -\frac{\gamma_0}{\mu_0\omega}I_d & \frac{\alpha}{r\mu_0\omega} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.103}$$

Le procédé d'intégration du système différentiel utilisant l'algorithme S reste identique à celui décrit dans la section 3.3. Etant donné que les régions (int) et (ext) sont isotropes, les champs diffractés sur les interfaces cylindriques C_{min} et C_{max} se déduisent toujours de l'onde plane incidente et de la matrice S d'après les relations (3.82) et (3.83).

Pour résumer, le calcul avec la méthode différentielle de la diffraction par un cylindre anisotrope à section arbitraire et ne contenant pas l'origine du repère, s'effectue de la même manière que dans le chapitre 3, avec toutefois des matrices Q_ϵ et $\mathcal{M}(r)$ un peu plus complexes.

Cylindres anisotropes de section arbitraire contenant l'origine du repère .

On considère cette fois-ci le type de cylindre qui contient l'origine du repère (voir figure 5.7). La principale différence qui apparaît pour cette structure cylindrique par rapport à la précédente vient du milieu de la région (int). Il s'agit désormais du milieu anisotrope de tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}_{cyl}$. Par conséquent, les champs $[F(r)]$ et $[F_r(r)]$ dans cette région de l'espace sont reliés aux amplitudes $\left[\widetilde{A}\right]$ via les matrices $\Theta(r)$ et $\Theta_r(r)$ respectives, introduites dans ce chapitre (voir les relations (5.50) à (5.65)).

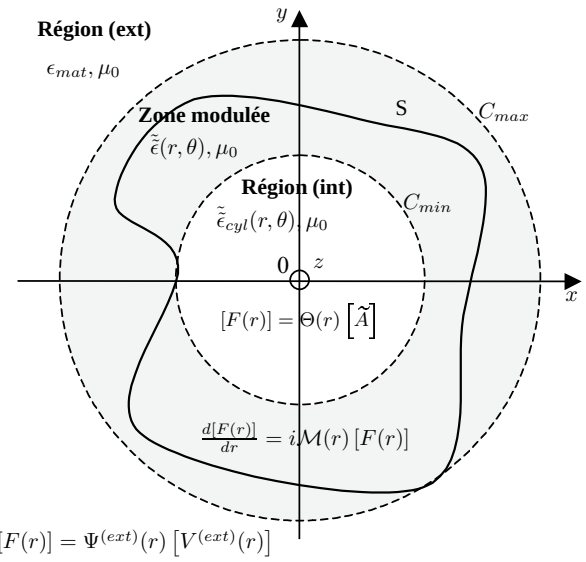


FIG. 5.7 – Généralisation de la méthode différentielle à des milieux anisotropie : cas du cylindre centré sur l'origine

Pour la zone modulée, les éléments du tenseur $\tilde{\tilde{\epsilon}}(r,\theta)$ restent des fonctions de r et θ, identiquement définies comme dans le cas précédent (5.99). La matrice C_ϵ s'exprime encore selon la relation (5.100) et, par suite, la matrice d'intégration $\mathcal{M}(r)$ demeure la même (5.102) (idem pour l'expression de $\mathcal{M}_r(r)$ donnée par (5.103)). En fait, la différence apparaît dans l'application de l'algorithme S. La première distinction concerne l'intégration de la première couche S ($s = 1$). D'après le principe de l'algorithme S (voir section 3.3.2), on sait que le système différentiel est intégré avec l'algorithme T, pour chaque couche s, de $r = r_s$ à $r = r_{s+1}$. Pour le cas particulier de la première couche, on obtient, après intégration, la matrice de transmission (des champs) que l'on note $T_C^{(1)}$. On doit ensuite en déduire la matrice de transmission en amplitude notée $T_A^{(1)}$ d'après la relation (3.61). On rappelle que ce passage des coefficients de Fourier aux amplitudes permet d'effectuer le raccordement des champs au niveau des interfaces de l'algorithme S, séparées par des couches homogènes et infiniment fines (de permittivité ϵ_{ext}), afin de "propager" la matrice S par application des relations (3.76) à (3.80). Pour un milieu (int) isotrope (cas considéré jusqu'ici), on utilisait la relation (3.61) qui permet de déduire $T_A^{(1)}$ en fonction de $T_C^{(1)}$, $\Psi^{(ext)}(r_2)$ et $\Psi^{(int)}(r_1)$ ($r_1 = R_{min}$). Dans le cas de l'objet étudié (figure 5.7), le raccordement des champs en $r = r_1$ s'effectue entre la zone modulée et la région (int) anisotrope, ce qui implique le remplacement de $\Psi^{(int)}(r_1)$ par $\Theta(r_1)$ dans la relation (3.61) :

$$T_A^{(1)} = \left\{\Psi^{(ext)}(r_2)\right\}^{-1} T_C^{(1)} \Theta(r_1)$$

La matrice $T_A^{(1)}$ relie donc des amplitudes de natures différentes :

$$\left[V^{(ext)}(r_2)\right] = T_A^{(1)}\left[\widetilde{A}\right]$$

On se rend compte que $T_A^{(1)}$ n'est plus une matrice carrée puisqu'elle a pour dimension $4(2N+1) \times 2(2N+1)$. Il faut pourtant préciser que la matrice $T_C^{(1)}$ reste une matrice carrée de dimension $4(2N+1) \times 4(2N+1)$ dont le calcul nécessite $4(2N+1)$ vecteurs de tir (3.57). La matrice $T_A^{(1)}$ est alors seulement constituée de deux blocs de dimension $2(2N+1) \times 2(2N+1)$, ce qui revient à considérer les blocs $T_{12}^{(1)}$ et $T_{22}^{(1)}$ nuls d'après la notation (3.75). Par conséquent, tous les blocs $S_{11}^{(s')}$ et $S_{21}^{(s')}$ ($s' \in [1, L+1]$) s'annulent également (voir les équations (3.79) et (3.80)). Quant à

la matrice $Z^{(s')}$, l'équation (3.76) montre qu'elle se simplifie pour devenir $\left\{T_{11}^{(s')}\right\}^{-1}$. Finalement, l'algorithme S se réduit à la propagation des blocs $S_{22}^{(s')}$ et $S_{12}^{(s')}$ par application des relations suivantes, déduites de (3.77) et (3.78) :

$$S_{22}^{(s+1)} = S_{22}^{(s)} \left\{T_{11}^{(s)}\right\}^{-1} \tag{5.104}$$

$$S_{12}^{(s+1)} = T_{21}^{(s)} \left\{T_{11}^{(s)}\right\}^{-1} \tag{5.105}$$

avec $s \in [1, L]$ et $S_{22}^{(1)} = I_d$. Après intégration à travers la zone modulée, le calcul aboutit à la matrice S qui relie les amplitudes du champ $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ et $\left[A^{(inc)}(R_{max})\right]$ sur l'interface C_{max} de la région isotrope (ext), ainsi que les amplitudes $\left[\widetilde{A}\right]$ de la région anisotrope (int) :

$$\begin{pmatrix} \left[B^{(ext)}(R_{max})\right] \\ \left[\widetilde{A}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{5.106}$$

d'où on déduit directement les expressions des amplitudes des champs diffractés :

$$\left[\widetilde{A}\right] = S_2 \left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{5.107}$$

$$\left[B^{(ext)}(R_{max})\right] = S_1 \left[A^{(inc)}(R_{max})\right] \tag{5.108}$$

Cette généralisation de la diffraction conique par des cylindres anisotropes de section arbitraire reste, à ce jour, au stade théorique. Son implémentation est prévue dans nos futurs travaux. Etant donné que cette formulation s'incrit dans la continuité de la méthode différentielle, cette tâche ne devrait pas poser d'insurmontables problèmes de programmation. Moyennant quelques simplifications de l'algorithme S (cas du cylindre contenant l'origine du repère), il suffit de coupler les deux programmes déjà écrits : Celui de la diffraction conique avec la méthode différentielle appliquée au matériau isotrope et celui de la diffraction conique par un cylindre anisotrope (description des champs dans le matériau anisotrope par la matrice $\Theta(r)$).

CONCLUSION DU CHAPITRE Le contenu de ce chapitre se base sur l'écriture analytique des champs dans l'espace de Fourier pour un matériau anisotrope. Ces équations ont tout d'abord été appliquées au cas simple de la diffraction conique par un cylindre anisotrope centré sur l'origine. La validation de cette théorie par son implémentation numérique révèle une convergence rapide des résultats (de même ordre de grandeur que pour le cylindre isotrope centré). Il est important de retenir que cette théorie a essentiellement permis d'envisager un nouveau moyen de résoudre complètement les équations de la méthode différentielle (conditions aux interfaces C_{min} et C_{max}), déjà écrites pour le cas général de cylindres anisotropes et inhomogènes dans le chapitre 2. On sait a priori désormais résoudre le problème de la diffraction conique pour des cylindres anisotropes de section arbitraire par la méthode différentielle.

Deuxième partie

Etude des modes dans les fibres optiques

Chapitre 6

La méthode différentielle appliquée à l'étude modale des fibres optiques

Sommaire

6.1 Résolution du problème modal par la méthode différentielle 134
6.1.1 Approches intuitives 134
6.1.2 Approche améliorée à partir de la matrice $Z^{(L)}$ 135
6.2 Symétries opto-géométriques des fibres optiques 136
6.2.1 Introduction 136
6.2.2 Symétries des fibres optiques dans l'espace de Fourier 137
6.2.3 Conséquences dans la méthode différentielle 138
6.3 Symétries des modes recherchés dans les fibres optiques 142
6.3.1 Description des symétries des modes dans la méthode différentielle 142
6.3.2 Calcul des champs associés à un mode d'une fibre optique de symétrie C_{N_T} ou $C_{N_T v}$ 145
6.4 Implémentation de la méthode différentielle 147
6.4.1 Structure et algorithme du programme 147
6.4.2 Calcul des cartes du champ modal 152
6.4.3 Calcul de la dispersion modale 152
6.5 Tests de validation sur une fibre optique conventionnelle 153
6.5.1 Cylindre circulaire centré sur l'origine 153
6.5.2 Cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine 157
6.6 Application numérique à d'autres structures géométriques simples . . . 165
6.6.1 Cylindre de section elliptique 165
6.6.2 Cylindre de section rectangulaire 166

Avec ce chapitre, nous laissons les problèmes de diffraction pour aborder la recherche de mode dans les fibres optiques. Afin d'éviter toute confusion sur l'emploi du mot "modal" (théorie ou méthode modale,...), on précise qu'on entendra par l'expression "problème modal", le problème qui consiste à chercher les modes succeptibles de se propager dans les fibres optiques. L'objectif est d'établir un formalisme théorique du problème modal à l'aide de la méthode différentielle pour les mêmes structures cylindriques que celles considérées dans le chapitre 3. Nous verrons trois manières différentes d'y parvenir. Les deux premières sont les plus intuitives et les plus pragmatiques. Elles déterminent directement les modes d'une fibre optique grâce à la matrice S de la zone modulée ou à certains de ses blocs. La troisième manière exploite plus en détail les spécificités de l'algorithme de propagation de la matrice S, ce qui permettra un gain en temps de calcul et la détermination fiable des cartes de champs associées au mode recherché. Ensuite, nous découvrirons comment les symétries présentes dans certains types de fibres

optiques (en particulier les fibres optiques microstructurées) interviennent dans la méthode différentielle. Pour ce faire, nous expliciterons les propriétés induites par ces symétries dans l'espace de Fourier. Bien que notre centre d'intérêt reste la recherche de modes dans les fibres optiques microstructurées (traitée numériquement dans le chapitre suivant), nous présenterons à la fin de ce chapitre quelques résultats numériques concernant les modes dans des fibres de géométrie relativement simple : cylindre de section circulaire, elliptique et rectangulaire. Ces résultats permettront notamment de valider la formulation théorique énoncée auparavant ainsi que le procédé algorithmique choisi pour la recherche de modes.

6.1 Résolution du problème modal par la méthode différentielle

6.1.1 Approches intuitives

Avant tout, rappelons brièvement quelques généralités. Les modes sont définis comme les solutions homogènes des équations de Maxwell. Autrement dit, on cherche des champs pouvant se propager selon l'axe de la fibre optique (choisi généralement comme l'axe z) en l'absence de sources lumineuses. Ce champ ne peut plus être dit "diffracté" puisque l'énergie de la source lumineuse qui le crée, dans le cas de la diffraction, n'existe plus. On parle alors de *mode*. En régime harmonique, on cherche des modes dont le champ électromagnétique s'exprime, en coordonnées cylindriques, selon

$$\vec{\mathbf{A}}(r,\theta,z,t) = \Re e\left\{\vec{A}(r,\theta)e^{i(\beta z-\omega t)}\right\} \text{ avec } \vec{A}\in\left\{\vec{E},\vec{H}\right\} \tag{6.1}$$

où β est appelée la *constante de propagation* selon z du mode, ω est sa fréquence angulaire et $\vec{A}(r,\theta)$ décrit son profil transverse (dans le plan de section droite). La constante de propagation β et le champ $\vec{A}(r,\theta)$ deviennent les inconnues du problème modal. On utilise très souvent la grandeur appelée *indice effectif*, notée n_{eff} et définie à partir de β selon :

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} \tag{6.2}$$

où $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ et λ la longueur d'onde de propagation choisie pour les modes recherchés. Il importe de souligner que le champ électromagnétique d'un mode (6.1), solution d'un problème homogène, est déterminé à une constante multiplicative près.

Il existe plusieurs moyens d'aborder le problème modal dans la méthode différentielle. La première approche résulte directement d'une formulation à partir de la matrice S tout entière, alors que la deuxième traitera des matrices S_{12} et S_{22} (3.81), les deux seuls blocs de S réellement nécessaires pour la description des modes recherchés. Dans les deux cas, nous allons définir la notion de mode à partir du problème de la diffraction énoncée dans le chapitre 3. Les fibres optiques que nous allons considérer sont les mêmes cylindres que ceux introduits dans ce chapitre : invariants selon l'axe z, de section arbitraire et remplis de matériaux homogènes et isotropes.

Approche directe à partir de la matrice S .

Dans la méthode différentielle, l'expression générale des champs électromagnétiques déduite de la géométrie de l'objet cylindrique étudié, s'écrit toujours selon l'équation (3.10) dans laquelle la série tronquée s'identifie au profil transverse du champ $\vec{A}(r,\theta)$ de l'expression (6.1). Mais nous devons surtout nous pencher sur la signification du terme γ_0 qui apparaît dans cette expression. Dans le problème de diffraction, nous savons qu'il s'agit de la composante en z de l'onde plane incidente. Pour le problème modal, γ_0 s'identifie simplement à la constante de propagation β recherchée. Par conséquent, les équations de Maxwell écrites dans le cadre de la méthode différentielle (système différentiel à résoudre dans la zone modulée) ne changent pas du problème de la diffraction à celui de la recherche de mode dans les fibres optiques. Dans les deux cas, l'algorithme S (voir section 3.3) reste inchangé ; seul le traitement final de la matrice S, c'est-à-dire les conditions aux interfaces C_{min} et C_{max}, les distingue. Pour la diffraction conique, nous avons vu que les champs diffractés dans les régions homogènes et isotropes (int) et (ext) de l'espace se déduisent par un simple produit matriciel entre la matrice S de la zone modulée et une matrice colonne relative à

l'onde plane incidente (3.81). En revanche, le problème modal dans la méthode différentielle se traduit par le système homogène suivant :

$$S^{-1}\begin{pmatrix} \left[B^{(ext)}(R_{max})\right] \\ \left[A^{(int)}(R_{min})\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

déduit directement de la relation (3.81) pour laquelle la matrice colonne $\left[A^{(inc)}(R_{max})\right]$ est nulle. La matrice colonne $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ contient les coefficients de Fourier du mode en $r = R_{max}$ (région (ext)), et la matrice colonne $\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$ ceux en $r = R_{min}$ (région (int)). Il résulte de l'équation (6.3) deux observations :

– Afin que ce système homogène (6.3) possède des solutions non triviales (champs non nuls), il faut que le déterminant de la matrice S^{-1} soit nul. Parmi l'ensemble des inconnues du problème modal, seule la grandeur β intervient dans le calcul de la matrice S. Ainsi, le problème modal est ramené à la recherche des valeurs de β qui annulent ce déterminant :

$$det\left\{S^{-1}\right\}(\beta) = 0 \tag{6.4}$$

Chaque valeur de β qui vérifie cette condition est associée à un mode.

– Pour un mode caractérisé par sa valeur de β solution de (6.4), les champs correspondants $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ et $\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$ deviennent le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de la matrice S^{-1} évaluée en β.

Approche à partir des blocs S_{12} et S_{22} seulement .

Il existe une seconde manière de formuler le problème modal à partir des équations (3.82) et (3.83). D'après ces deux équations, les champs en $r = R_{min}$ et $r = R_{max}$ associés au mode vérifient également :

$$\{S_{12}\}^{-1}\left[B^{(ext)}(R_{max})\right] = [0] \tag{6.5}$$

et

$$\{S_{22}\}^{-1}\left[A^{(int)}(R_{min})\right] = [0] \tag{6.6}$$

On se rend compte que nous devons cette fois-ci résoudre deux systèmes homogènes. On constate, comme pour la première approche utilisant la matrice S, que :

– Les valeurs de β associées aux modes sont solution à la fois de :

$$det\left(\{S_{12}\}^{-1}\right)(\beta) = 0 \tag{6.7}$$

et de

$$det\left(\{S_{22}\}^{-1}\right)(\beta) = 0 \tag{6.8}$$

– Le champ $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ en $r = R_{max}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de la matrice $\{S_{12}\}^{-1}$ évaluée en β, d'après l'équation (6.5). Il en est de même pour le champ $\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$ en $r = R_{min}$ avec le bloc $\{S_{22}\}^{-1}$ d'après l'équation (6.6).

Cette formulation présente l'avantage de considérer seulement les deux blocs S_{12} et S_{22} de dimensions deux fois plus petites que celles de la matrice S. Cependant, les champs $\left[B^{(ext)}(R_{max})\right]$ et $\left[A^{(int)}(R_{min})\right]$ sont solution de deux équations indépendantes (6.5) et (6.6) et sont définis à des constantes multiplicatives a priori différentes pour chacun d'entre eux. Il se pose alors le problème de leur raccordement aux interfaces C_{min} et C_{max}.

6.1.2 Approche améliorée à partir de la matrice $Z^{(L)}$

Dans notre code numérique, nous avons implémenté aucune des deux approches du problème modal énoncées précédemment. Notre choix s'est porté sur une autre approche qui permet d'exploiter tous les avantages de l'algorithme S en terme de précision de résultats et de temps de calcul. Dans la section 3.4.3 concernant le calcul des cartes de champs, nous avons compris que la matrice $Z^{(s)}$ de la couche (s) demeure l'élément central de l'algorithme S. Elle assure le bon conditionnement numérique des résultats.

Le principe consiste à utiliser cette matrice qui relie les champs en $r = r_s$ et à ceux en $r = r_{s+1}$ d'après la relation (3.106). Cette équation appliquée à la dernière couche S, soit $s = L$, conduit à une nouvelle formulation du problème modal :

$$\left\{Z^{(L)}\right\}^{-1}\left[A^{(j_L)}(r_L)\right] = [0] \tag{6.9}$$

puisque $\left[A^{(j_{L+1})}(r_{L+1})\right] = \left[A^{(inc)}(R_{max})\right] = [0]$. La matrice colonne $\left[A^{(j_L)}(r_L)\right]$ contient les amplitudes du champ associées aux fonctions de Bessel J_n sur l'avant-dernière interface L de l'algorithme S (voir figure 3.6). On déduit du système homogène (6.9) que :

– Les valeurs de β associées aux modes vérifient :

$$det\left(\left\{Z^{(L)}\right\}^{-1}\right)(\beta) = 0 \tag{6.10}$$

– Le champ $\left[A^{(j_L)}(r_L)\right]$ en $r = r_L$ devient le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de la matrice $\left\{Z^{(L)}\right\}^{-1}$ évaluée en β (solution de (6.10)).

D'après l'équation (3.76), on se rend compte que la matrice inverse de $Z^{(L)}$ est donnée directement par $\left\{Z^{(L)}\right\}^{-1} = T_{11}^{(L)} + T_{12}^{(L)} S_{12}^{(L)}$. Cette matrice demeure alors, par définition, bien conditionnée si le nombre de couche S est suffisant.

Le point important qui distingue les deux approches intuitives de celle utilisant exclusivement la matrice $Z^{(L)}$ est le lieu de l'espace où les systèmes homogènes sont résolus. Pour les deux premières approches, on utilise la matrice S tout entière, ou seulement deux de ses blocs (S_{12} et S_{22}) relative à toute la zone modulée puisqu'elle relie les champs en $r = R_{min}$ à ceux en $r = R_{max}$ (voir les équations (3.81), et (3.82) et (3.83)) pour la diffraction. Pour la dernière approche, on utilise la matrice $Z^{(L)}$ associée seulement à la dernière couche S de la zone modulée étant donné qu'elle relie les champs en $r = r_s$ à ceux en $r = r_{s+1}$ (équation (3.106) pour $s = L$). Cependant, il importe de préciser que le calcul de la matrice $Z^{(L)}$ reste lié à celui des matrices $S_{12}^{(s)}$ des autres couches S d'après (3.76). Il en résulte que, si le mode recherché est très localisé dans le coeur de la fibre optique (forts champs dans la région du coeur avec une décroissance rapide selon l'éloignement du centre de la fibre), les champs en $r = r_s$ et en $r = r_{s+1}$ (interfaces les plus éloignées de l'origine dans la zone modulée) risquent d'être tous les deux de faible intensité. La singularité pour le mode recherché de la fonction $det\left(\left\{Z^{(L)}\right\}^{-1}\right)(\beta)$ peut alors devenir difficilement observable numériquement, du fait de l'écart réduit entre les valeurs de ces champs. Mais la singularité relative à la fonction $det\left(\{S_{12}\}^{-1}\right)(\beta)$ ou $det\left(\{S_{22}\}^{-1}\right)(\beta)$ devrait être plus facilement détectable. La situation s'inverse si le champ du mode recherché est assez délocalisé du coeur.

6.2 Symétries opto-géométriques des fibres optiques

6.2.1 Introduction

Cette partie est commune à la diffraction et à la recherche de modes dans les fibres optiques. Le choix de traiter ce sujet à ce niveau du document se justifie par le fait qu'il semble particulièrement approprié aux géométries rencontrées dans les FOMs dont l'étude numérique est exposée dans le chapitre suivant. Le profil d'une fibre optique dans le plan de section droite peut présenter certaines symétries géométriques qui structurent, à travers les équations de Maxwell, la forme des champs associés aux différents modes. Nous entendons par "profil" la représentation géométrique de l'objet en question, mais également la répartition dans l'espace des grandeurs optiques comme la permittivité, la perméabilité,... Nous parlerons alors de symétries opto-géométriques. Nous cherchons à établir les conséquences de ces symétries dans la méthode différentielle, à savoir dans les équations de Maxwell décrites dans l'espace de Fourier. En particulier dans les FOMs classiques, les inclusions de même indice sont généralement disposées selon des symétries de type C_n ou C_{nv}, $n \in \mathbb{N}^*$. Cette nomenclature est empruntée à la cristallographie en Chimie Minérale. Ces symétries signifient qu'il existe des périodicités angulaires de période $T = \frac{2\pi}{n}$ (voir figure 6.1). Les fibres optiques de symétrie C_{nv} présentent, en plus, n plans de

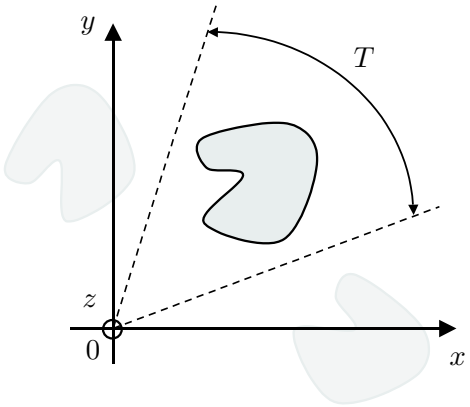


FIG. 6.1 – Périodicité angulaire de la section droite d'une fibre optique

symétrie. Nous montrons dans les figures 6.2(a) à 6.3(c) quelques exemples fréquents de symétries dans les fibres optiques que nous pouvons déjà envisagés avec la méthode différentielle. Bien évidemment, cette liste est loin d'être exhaustive. Les figures 6.2(a) à 6.2(c) représentent le profil de fibres optiques classiques couramment étudiées à sections circulaire, elliptique voire rectangulaire (la dernière reste difficilement réalisable expérimentalement), centrées sur l'origine. Les figures 6.3(a) à 6.3(c) montrent quelques exemples de FOMs classiques dont les deux premières seront étudiées dans le chapitre suivant.

Nous allons voir comment ces périodicités opto-géométriques interviennent dans l'espace de Fourier. Cette propriété générale sera ensuite appliquée dans la méthode différentielle, impliquant un découplage des coefficients de Fourier des champs dans les équations de Maxwell, en particulier dans le système différentiel de la zone modulée. Nous mettrons en évidence le gain important de temps de calcul par la prise en compte de ce découplage dans le programme numérique.

6.2.2 Symétries des fibres optiques dans l'espace de Fourier

Nous allons établir la propriété vérifiée par les coefficients de Fourier d'une fonction périodique présentant une sous-période. On considère le cas général d'une fonction notée f de la variable angulaire θ, périodique de période 2π. On suppose que cette fonction possède une sous-période T telle que

$$N_T T = 2\pi$$

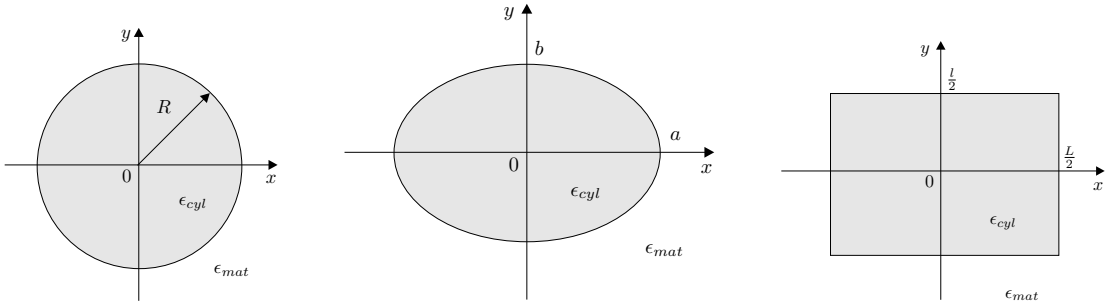
où $N_T \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de sous-périodes. On peut alors développer en série de Fourier cette fonction sur ces deux périodes :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\theta} \text{ avec } f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'_n e^{in\frac{2\pi}{T}\theta} \text{ avec } f'_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(\theta) e^{-in\frac{2\pi}{T}\theta} d\theta.$$

On cherche à exprimer les coefficients de Fourier associés à la période 2π, notés f_n, en fonction de ceux liés à la période T, notés f'_n . Sur l'intervalle 2π, chaque sous-période est définie sur l'intervalle $[(k-1)T, kT]$ avec $k \in [1, N_T]$. On peut alors écrire que

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N_T} \mathcal{I}_k \text{ avec } \mathcal{I}_k = \int_{(k-1)T}^{kT} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \tag{6.11}$$

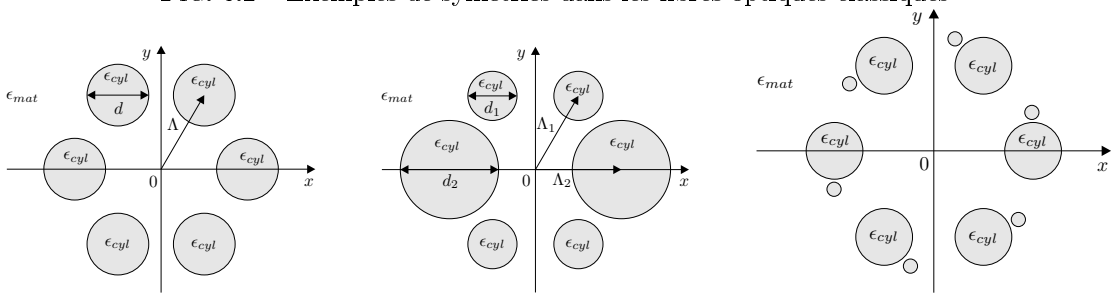


(a) Symétrie C_1 ou C_{1v} pour une fibre conventionnnelle à section circulaire

(b) Symétrie C_{2v} pour une fibre à section elliptique

(c) Symétrie C_{2v} ou C_{4v} (si $L = l$) pour une fibre à section rectangulaire

FIG. 6.2 – Exemples de symétries dans les fibres optiques classiques



(a) Symétrie C_{6v}

(b) Symétrie C_{2v}

(c) Symétrie C_6

FIG. 6.3 – Exemples de symétries dans les FOMs

Après avoir effectué le changement de variable $\theta \to \theta - (k-1)T$, on trouve rapidement :

$$f_n = \frac{e^{inT}}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_T} \left(e^{-inT}\right)^k \int_0^T f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \tag{6.12}$$

Cette dernière relation laisse apparaître une somme dont les éléments sont ceux d'une somme géométrique de raison e^{-inT}. On distingue alors deux cas :

1. Si $n = mN_T$, $m \in \mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=1}^{N_T} \left(e^{-inT}\right)^k = \sum_{k=1}^{N_T} \left(e^{-im2\pi}\right)^k = \sum_{k=1}^{N_T} 1^k = N_T$, ce qui conduit à $f_{mN_T} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta) e^{-imN_T\theta} d\theta = f'_m$.
2. Si $n \neq mN_T$, $m \in \mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=1}^{N_T} \left(e^{-inT}\right)^k = e^{-inT} \frac{1-e^{-in2\pi}}{1-e^{-inT}} = 0$. On obtient $f_n = 0$.

Pour résumer, on a établi la relation suivante entre les coefficients f_n et f'_n :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \text{Si } n \neq mN_T, m \in \mathbb{Z}, \text{ alors } f_n = 0 \\ \text{Si } n = mN_T, m \in \mathbb{Z}, \text{ alors } f_{mN_T} = f'_m \end{cases} \tag{6.13}$$

Cette propriété permet d'interpréter le spectre de f sur la période T comme un dilatement de celui sur la période 2π d'un facteur N_T. La figure 6.4 montre l'exemple d'une fonction créneau telle que $N_T = 3$ soit $T = \frac{2\pi}{3}$. Les spectres de Fourier de cette fonction calculés sur les périodes T et 2π, illustrés respectivement par les figures 6.5(a) et 6.5(b), vérifient bien la propriété (6.13).

6.2.3 Conséquences dans la méthode différentielle

On suppose que l'objet cylindrique de notre étude présente une périodicité angulaire d'ordre $N_T \in \mathbb{N}^*$ (symétrie de type $C_{N_T v}$ ou C_{N_T}) comme évoquée dans la figure 6.1. Dans la méthode différentielle, la

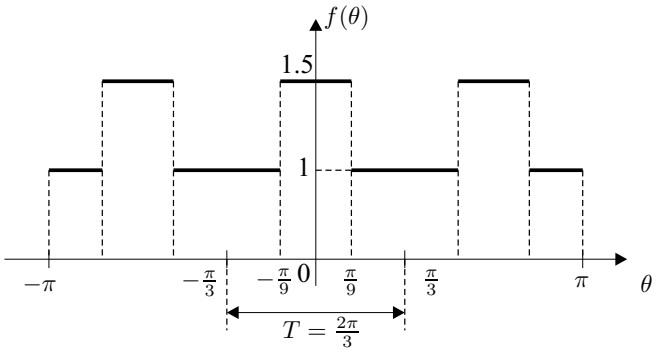
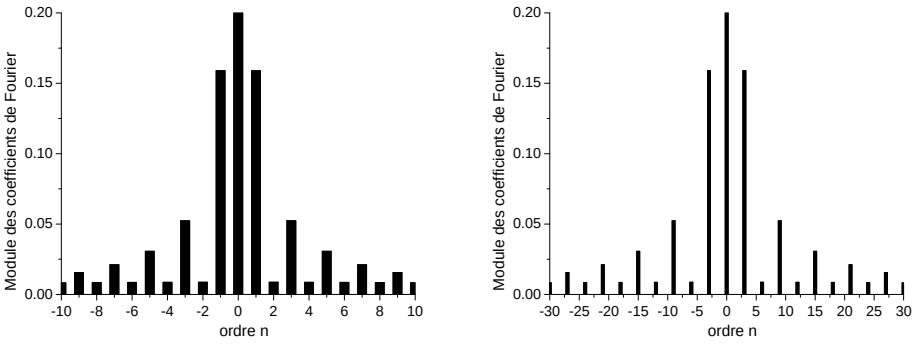


FIG. 6.4 – Exemple de fonction sous-périodique avec $N_T = 3$



(a) Spectre calculé sur la période $T = \frac{2\pi}{3}$ (b) Spectre calculé sur la période 2π

FIG. 6.5 – Spectres de Fourier de la fonction de la figure 6.4

fonction $f(\theta)$ de la section précédente peut s'identifier à toutes les fonctions qui interviennent dans la matrice Q_ϵ (3.15), à savoir les fonctions relatives à la permittivité $\epsilon(r,\theta)$ et $\frac{1}{\epsilon(r,\theta)}$, mais également aux prolongements des composantes de la normale à la surface : $N_\theta^2(r,\theta)$, $N_r^2(r,\theta)$ et $N_r N_\theta(r,\theta)$. Dans un souci de simplicité, nous allons d'abord appliquer, pour un ordre précis de périocicité angulaire, la propriété (6.13) dans le système différentiel (2.109) de matrice $\mathcal{M}(r)$ donnée par (3.18). On constatera alors un découplage des coefficients de Fourier des champs dans la zone modulée. Ensuite, on généralisera ce découplage dans tout l'espace (et pas seulement dans la zone modulée) pour un ordre quelconque de périodicité angulaire.

Exemple de découplage du système différentiel de la zone modulée :

Nous limitons notre étude au cas $N_T = 3$, soit une période qui s'étend sur un secteur d'angle $T = \frac{2\pi}{3}$, et un ordre de troncature maximal tel que $N = 4$. On note $[\![f]\!]$ la matrice de Toeplitz sur la période 2π de la fonction f de variable l'angle θ ($\epsilon(r,\theta)$, $N_\theta^2(r,\theta)$,...) et $[\![f]\!]'$ sa matrice de Toeplitz sur la période T. L'ensemble des coefficients de Fourier f'_n calculés sur la période T est $\left\{f'_{-2}, f'_{-1}, f'_0, f'_1, f'_2\right\}$. D'après la propriété (6.13), on déduit que l'ensemble des coefficients de Fourier f_n associés à la période 2π devient $\left\{0,0,f'_{-2},0,0,f'_{-1},0,0,f'_0,0,0,f'_1,0,0,f'_2,0,0\right\}$. Par conséquent, la matrice $[\![f]\!]$ est constituée de 5 diagonales non nulles séparées successivement par 2 diagonales nulles :

$$[\![f]\!]' = \begin{pmatrix} f'_0 & f'_1 & f'_2 \\ f'_{-1} & f'_0 & f'_1 \\ f'_{-2} & f'_{-1} & f'_0 \end{pmatrix} \text{ et } [\![f]\!] = \begin{pmatrix} f'_0 & 0 & 0 & f'_1 & 0 & 0 & f'_2 & 0 & 0 \\ 0 & f'_0 & 0 & 0 & f'_1 & 0 & 0 & f'_2 & 0 \\ 0 & 0 & f'_0 & 0 & 0 & f'_1 & 0 & 0 & f'_2 \\ f'_{-1} & 0 & 0 & f'_0 & 0 & 0 & f'_1 & 0 & 0 \\ 0 & f'_{-1} & 0 & 0 & f'_0 & 0 & 0 & f'_1 & 0 \\ 0 & 0 & f'_{-1} & 0 & 0 & f'_0 & 0 & 0 & f'_1 \\ f'_{-2} & 0 & 0 & f'_{-1} & 0 & 0 & f'_0 & 0 & 0 \\ 0 & f'_{-2} & 0 & 0 & f'_{-1} & 0 & 0 & f'_0 & 0 \\ 0 & 0 & f'_{-2} & 0 & 0 & f'_{-1} & 0 & 0 & f'_0 \end{pmatrix}$$

On constate que cette matrice $[\![f]\!]$ est diagonalisable par bloc. Après le changement de base adequat, elle s'exprime comme une matrice constituée de 3 blocs identiques : $[\![f]\!]'$.

On montre que cette structure est conservée lorsque la matrice de Toeplitz est inversée ou multipliée par une autre matrice de ce type, ou lorsque deux matrices de ce type sont additionnées. Ainsi, les blocs de la matrice $Q_\epsilon(r)$ dans l'équation (3.15) et, par suite, ceux de la matrice d'intégration $\mathcal{M}(r)$ (3.18) conservent cette structure. En effet, la matrice $\mathcal{M}(r)$ ne fait intervenir que des multiplications et des additions des blocs de la matrice $Q_\epsilon(r)$ et de matrices diagonales. Cependant, il importe de noter que les blocs de $\mathcal{M}(r)$ ne sont plus des matrices de type Toeplitz (associées aux développements de Fourier de fonctions) puisqu'ils font intervenir la matrice α (3.13) constituée des ordres des développements de Fourier des champs sur la période 2π. Intéressons-nous à un bloc noté B de la matrice $\mathcal{M}(r)$ qui relie deux des quatre matrices colonnes de $[F(r)]$: $[E_z]$, $[E_\theta]$, $[H_z]$ ou $[H_\theta]$. On note g_n les coefficients de Fourier d'une de ces composantes du champ (calculés sur la période 2π) et h_n les coefficients de Fourier de l'autre composante du champ. Le système différentiel correspondant au bloc B s'écrit alors :

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} g_{-4} \\ g_{-3} \\ g_{-2} \\ g_{-1} \\ g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{-4,-4} & 0 & 0 & B_{-4,-1} & 0 & 0 & B_{-4,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{-3,-3} & 0 & 0 & B_{-3,0} & 0 & 0 & B_{-3,3} & 0 \\ 0 & 0 & B_{-2,-2} & 0 & 0 & B_{-2,1} & 0 & 0 & B_{-2,4} \\ B_{-1,-4} & 0 & 0 & B_{-1,-1} & 0 & 0 & B_{-1,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{0,-3} & 0 & 0 & B_{0,0} & 0 & 0 & B_{0,3} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1,-2} & 0 & 0 & B_{1,1} & 0 & 0 & B_{1,4} \\ B_{2,-4} & 0 & 0 & B_{2,-1} & 0 & 0 & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,-3} & 0 & 0 & B_{3,0} & 0 & 0 & B_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & B_{4,-2} & 0 & 0 & B_{4,1} & 0 & 0 & B_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-4} \\ h_{-3} \\ h_{-2} \\ h_{-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

On constate à nouveau que cette matrice d'intégration est diagonalisable par bloc, comme les matrices de Toeplitz contenues dans Q_ϵ. Cependant, les blocs de la diagonalisation ne sont pas identiques, contrairement à ceux de la matrice Q_ϵ. Ce système différentiel se découple alors en 3

sous-systèmes différentiels indépendants :

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} g_{-4} \\ g_{-1} \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{-4,-4} & B_{-4,-1} & B_{-4,2} \\ B_{-1,-4} & B_{-1,-1} & B_{-1,2} \\ B_{2,-4} & B_{2,-1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-4} \\ h_{-1} \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} g_{-3} \\ g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{-3,-3} & B_{-3,0} & B_{-3,3} \\ B_{0,-3} & B_{0,0} & B_{0,3} \\ B_{3,-3} & B_{3,0} & B_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-3} \\ h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} g_{-2} \\ g_1 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{-2,-2} & B_{-2,1} & B_{-2,4} \\ B_{1,-2} & B_{1,1} & B_{1,4} \\ B_{4,-2} & B_{4,1} & B_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{-2} \\ h_1 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

Les familles indépendantes des ordres des coefficients de Fourier couplés des champs sont : $\{-4;-1;2\}$, $\{-3;0;3\}$ et $\{-2;1;4\}$. La matrice d'intégration $\mathcal{M}(r)$ tout entière se découple finalement en trois sous-systèmes différentiels indépendants : $\mathcal{M}_i(r)$, $i \in [1,3]$. En résumé, la sous-périodicité opto-géométrique angulaire d'ordre $N_T = 3$ d'un objet cylindrique implique, à travers la propriété (6.13), un découplage des coefficients de Fourier des champs dans la zone modulée.

Généralisation :

Nous pouvons sans difficulté généraliser l'observation faite sur l'exemple précédent. On considère cette fois-ci un objet cylindrique présentant une sous-périodicité angulaire d'ordre $N_T \in \mathbb{N}^*$ quelconque. En procédant précisément de la même manière qu'auparavant, on montre que le système différentiel de la zone modulée $\mathcal{M}(r)$ se découple en N_T sous-systèmes différentiels notés :

$$\mathcal{M}_i(r) \text{ avec } i \in [1, N_T] \tag{6.14}$$

Les familles indépendantes des ordres des coefficients de Fourier couplés des champs sont notés :

$$I_i = \{nN_T + i - 1, n \in \mathbb{Z}\} \text{ avec } i \in [1, N_T] \tag{6.15}$$

Les conséquences de ce découplage dans le programme numérique sont très importantes. On n'intègre plus le système différentiel global de matrice $\mathcal{M}(r)$ mais les N_T sous-systèmes différentiels de matrices $\mathcal{M}_i(r)$ ($i \in [1, N_T]$) de dimensions N_T fois plus petites environ. Chacune des matrices d'intégration $\mathcal{M}_i(r)$ est calculée avec les mêmes matrices de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]'$, $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]'$, $[\![N_\theta^2]\!]'$, $[\![N_r^2]\!]'$ et $[\![N_r N_\theta]\!]'$, toutes calculées sur la période T. On sait que le temps de calcul est proportionnel au cube de la taille de la matrice d'intégration. La taille de la matrice globale étant de $4(2N+1)$, celles des matrices d'intégration des sous-systèmes sont inférieures ou égales à $4(2N+1)/N_T$. Ainsi, le temps sera de $(4(2N+1))^3$ pour la matrice globale $\mathcal{M}(r)$ et de $N_T(4(2N+1)/N_T)^3 = 4(2N+1)/N_T^2$ pour l'ensemble des N_T matrices $\mathcal{M}_i(r)$. On gagne donc un facteur N_T^2 sur le temps de calcul. Dans l'exemple précédent où $N_T = 3$, si on intègre successivement les trois sous-systèmes différentiels de matrices $\mathcal{M}_1(r)$, $\mathcal{M}_2(r)$ et $\mathcal{M}_3(r)$, au lieu du système différentiel entier de matrice $\mathcal{M}(r)$, le temps de calcul est réduit d'un facteur 9. Bien évidemment, les coefficients de Fourier des composantes radiales du champ dans la zone modulée sont également découplés d'après l'expression de la matrice $\mathcal{M}_r(r)$ (3.19).

Découplage des coefficients de Fourier des champs dans tout l'espace :

Nous venons seulement d'établir le découplage des coefficients de Fourier du champ dans la zone modulée. En ce qui concerne les régions (int) et (ext), la question de leur découplage ne se pose pas puisqu'ils sont déja tous découplés entre eux, d'après les équations (3.27), (3.28) et (3.29) à (3.36). Autrement dit, les blocs des matrices $\Psi^{(j)}(r)$ (3.41) et $\Psi_r^{(j)}(r)$ (3.45) sont diagonaux. On en conclut que les coefficients de Fourier des champs dans tout l'espace se découplent en N_T sous-ensembles indépendants pour une section droite d'un cylindre présentant une périodicité angulaire de période $T = \frac{2\pi}{N_T}$. Pour une composante $A \in \{E_r, E_\theta, E_z, H_r, H_\theta, H_z\}$ du champ électromagnétique $\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$, on note ces sous-ensembles de coefficients de Fourier :

$$\mathcal{I}_i = \{A_{n_i}, n_i \in I_i\} \text{ avec } i \in [1, N_T] \tag{6.16}$$

Finalement, le développement de Fourier de cette composante devient une somme sur chacun des sous-ensembles $\mathcal{I}_i$. L'expression (3.10) se réécrit alors sous la forme :

$$A(r,\theta,z) = e^{i\gamma_0 z} \sum_{i=1}^{N_T} \sum_{n_i \in I_i} A_{n_i}(r)\, e^{i n_i \theta} \tag{6.17}$$

L'ensemble des coefficients A_{n_i} de tous les sous-ensembles $\mathcal{I}_i$ sont regroupés dans les matrices colonnes $[F(r)]$ (2.108) pour les composantes en z et angulaires du champ, et $[F_r(r)]$ (2.111) pour les composantes radiales. Pour chaque valeur de i, on les dissocie en sous-matrices colonnes notées respectivement $[F(r)]_i$ et $[F_r(r)]_i$ avec $i \in [1, N_T]$. Chacune de ces sous-matrices colonnes contient les coefficients de Fourier des champs correspondant aux ordres $n_i \in I_i$. On procède de la même façon pour les matrices colonnes $\left[A^{(j)}(r)\right]$ (3.37), $\left[B^{(j)}(r)\right]$ (3.38) et $\left[V^{(j)}(r)\right]$ (3.39) où $j \in \{int, ext\}$, en introduisant la notation : $\left[A^{(j)}(r)\right]_i$, $\left[B^{(j)}(r)\right]_i$ et $\left[V^{(j)}(r)\right]_i$. On intègre alors indépendemment chaque sous-système différentiel $\mathcal{M}_i(r)$ afin d'aboutir aux différentes matrices S, notées S_i, associées à chacun des sous-systèmes $i \in [1, N_T]$. La résolution du problème de diffraction (3.81) prend la forme suivante :

$$\forall i \in [1, N_T],\ \begin{pmatrix} \left[B^{(ext)}(R_{max})\right]_i \\ \left[A^{(int)}(R_{min})\right]_i \end{pmatrix} = S_i \begin{pmatrix} [0] \\ \left[A^{(inc)}(R_{max})\right]_i \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

Quant au problème modal (6.9), il devient :

$$\forall i \in [1, N_T],\ \left\{Z_i^{(L)}\right\}^{-1} \left[A^{(j_L)}(r_L)\right]_i = [0] \tag{6.19}$$

Bien que les résolutions des N_T équations matricelles de l'un de ces deux problèmes (équations (6.18) ou (6.19)) soient chacune menée de manière indépendante, il ne faut pas oublier que les N_T sous-ensembles $\mathcal{I}_i$ sont, a priori, tous nécessaires à la reconstruction du champ par le développement (6.17).

6.3 Symétries des modes recherchés dans les fibres optiques

Dans la précédente section, nous avons vu comment la symétrie angulaire (d'ordre N_T) de la section droite d'un objet cylindrique intervient dans la méthode différentielle. Ici, nous allons voir comment exploiter ces propriétés pour décrire explicitement les symétries des modes induites par celles de la fibre optique. On considèrera un objet cylindrique de symétrie C_{N_T} ou $C_{N_T v}$. En diffraction, l'orientation arbitraire du vecteur d'onde de l'onde plane incidente n'induit, a priori, aucune symétrie particulière pour les champs diffractés. Leurs spectres se répartissent alors sur tous les sous-ensembles des coefficients de Fourier $\mathcal{I}_i$, et les N_T sous-matrices colonnes $[F(r)]_i$, $i \in [1, N_T]$ sont non nulles. Elles deviennent alors toutes nécessaires à la reconstruction du champ par le développement (6.17). Pour le problème modal, il en est autrement. En effet, nous savons, d'après les travaux de McIsaac [37, 38], que les champs des modes d'une telle structure cylindrique se répartissent en différentes classes de symétries. A ce titre, nous verrons que les coefficients de Fourier non nuls des champs se répartissent en un seul, voire en deux sous-ensembles $\mathcal{I}_i$, suivant la classe de symétrie du mode recherché. Il ne sera alors plus obligatoire d'intégrer les N_T sous-systèmes différentiels mais seulement ceux nécessaires à la description des champs.

6.3.1 Description des symétries des modes dans la méthode différentielle

La description des symétries des modes dans les guides d'onde C_{N_T} ou $C_{N_T v}$ ($N_T \in \mathbb{N}^*$) se base sur les travaux de McIsaac [37, 38] qui ont été ensuite repris et améliorés par Fini [41]. McIsaac a montré que les modes respectent des symétries bien précises, imposées par celles de la fibre optique (C_{N_T} ou $C_{N_T v}$) et en a explicité la forme des expressions des champs. Ces modes s'organisent en différentes classes de symétries disjointes qui seront notées Ck avec $k \in \mathbb{N}^*$ défini comme l'ordre de la classe de symétrie. On rappelle que deux modes de symétries différentes sont dits "dégénérés" lorsqu'ils ont le même indice

effectif n_{eff} (ou constante de propagation β). Dans la nomenclature introduite par McIsaac, deux modes appartenant à des classes de symétries différentes pourront parfois être dégénérés.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la symétrie opto-géométrique de type C_{N_T}. McIsaac a établi l'existence de N_T classes de symétrie pour les modes d'un tel guide d'onde. Lorsque N_T est impair, seule la première classe de symétrie ($C1$) est non dégénérée, c'est-à-dire qu'un indice effectif correspond à un seul mode de cette classe. Le reste des classes de symétrie se regroupe en couples de classes d'ordres successifs de modes dégénérés deux fois. Ces couples sont notés $Ck/(k+1)$ et leur nombre s'élève alors à $\frac{N_T-1}{2}$. Lorsque N_T est pair, il y a deux classes de symétrie non dégénérées : la première $C1$ et la dernière CN_T. Comme précédemment, les autres s'associent en $\frac{N_T-1}{2}$ couples de classes dégénérés deux fois. Le tableau 6.1 regroupe les trois premières colonnes du tableau 3 de l'article de McIsaac [37] complétées par les sous-ensembles I_i, $i \in [1, N_T]$ de la méthode différentielle (6.15) nécessaires à la description des champs pour chaque classe de symétrie. Le tableau 6.2 donne les sous-systèmes I_i associés aux classes

Parité de N_T	Ordre p de la classe de symétrie	Expression de E_{zpq}	Ensemble des ordres des coefficients de Fourier de E_{zpq}	Sous-ensemble I_i de la méthode différentielle
pair, impair	1	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{1qn}(r)e^{jN_T n\theta}$	$\{nN_T, n \in \mathbb{Z}\}$	I_1
pair, impair	k	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{kqn}(r)e^{j(N_T n+\frac{k}{2})\theta}$	$\left\{nN_T + \frac{k}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$I_{1+\frac{k}{2}}$
pair, impair	k+1	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{(k+1)qn}(r)e^{j(N_T n-\frac{k}{2})\theta}$	$\left\{nN_T - \frac{k}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$I_{N_T+1-\frac{k}{2}}$
pair	N_T	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{N_T qn}(r)e^{jN_T\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}$	$\left\{N_T\left(n-\frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{Z}\right\}$	$I_{1+\frac{N_T}{2}}$

TAB. 6.1 – Représentation des développements en série du champ électrique longitudinal $E_z(r,\theta)$ pour les fibres optiques de symétrie C_{N_T}. L'indice q indique le $q^{\text{ème}}$ mode de la classe de symétrie considérée.

$N_T \rightarrow$ Ordre p de la classe de symétrie $\downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1
2	-	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2	I_2
3	-	-	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
4	-	-	-	I_3	I_3	I_3	I_3	I_3
5	-	-	-	-	I_4	I_5	I_6	I_7
6	-	-	-	-	-	I_4	I_4	I_4
7	-	-	-	-	-	-	I_5	I_6
8	-	-	-	-	-	-	-	I_5

TAB. 6.2 – Sous-ensembles des coefficients de Fourier dans la MD associés aux différentes classes de modes comme défini par McIsaac pour un guide d'onde C_{N_T}, pour plusieurs valeurs de N_T

de symétrie pour $N_T = 1$ à 8. On remarque qu'il suffit d'un seul sous-ensemble de coefficients de Fourier ($\mathcal{I}_i$) pour décrire un mode appartenant à une classe de symétrie. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'intégrer les N_T sous-systèmes différentiels de matrice $\mathcal{M}_i(r)$ par l'algorithme S pour calculer toutes les matrices $Z_i^{(L)}$, mais seulement celui correspondant au sous-ensemble I_i du mode concerné. La durée d'intégration devient alors proportionnelle à $(4(2N+1))^3/N_T^3$, élevant le gain en temps de calcul d'un facteur N_T^3 par rapport à une intégration sans prise en compte des sous-périodicités angulaires de la fibre optique.

Nous allons maintenant traiter le cas des symétries de type $C_{N_T v}$. Lorsque N_T est impair, il y a $N_T + 1$ classes de symétrie. Seules les deux premières ($C1$ et $C2$) contiennent des modes non dégénérés.

Les autres s'associent en $\frac{N_T-1}{2}$ couples de classes de symétrie dégénérées deux fois. Lorsque N_T est pair, il y a N_T+2 classes de symétrie. Les deux dernières ($C(N_T+1)$ et $C(N_T+2)$) s'ajoutent aux deux premières en tant que classes de symétrie non dégénérées, et les couples de classes de symétrie dégénérées deux fois restent les mêmes. Dans le tableau 6.3, nous avons joint aux trois premières colonnes du tableau 4 de l'article de McIsaac [37], deux colonnes donnant les sous-systèmes I_i nécessaires à la description des modes par classe de symétrie. Le tableau 6.4 donne les sous-systèmes I_i associés aux classes de

Parité de N_T	Ordre p de la classe de symétrie	Expression de E_{zpq}	Ensemble des ordres des coefficients de Fourier de E_{zpq}	Sous-ensemble I_i de la méthode différentielle
pair impair	1	$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{1qn}(r)\cos(N_T n\theta)$	$\{nN_T, n\in\mathbb{Z}\}$	I_1
pair impair	2	$\sum_{n=0}^{+\infty} G_{1qn}(r)\sin(N_T n\theta)$	$\{nN_T, n\in\mathbb{Z}\}$	I_1
pair impair	k	$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{F_{kqn}(r)\cos\left[(N_T n-\frac{k-1}{2})\theta\right]\right.$ $\left.+P_{kqn}(r)\cos\left[(N_T n+\frac{k-1}{2})\theta\right]\right\}$	$\left\{nN_T-\frac{k-1}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$, $\left\{nN_T+\frac{k-1}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$I_{\frac{1+k}{2}}$, $I_{N_T+\frac{3-k}{2}}$
pair impair	k+1	$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{G_{(k+1)qn}(r)\sin\left[(N_T n-\frac{k-1}{2})\theta\right]\right.$ $\left.+R_{(k+1)qn}(r)\sin\left[(N_T n+\frac{k-1}{2})\theta\right]\right\}$	$\left\{nN_T-\frac{k-1}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$, $\left\{nN_T+\frac{k-1}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$I_{\frac{1+k}{2}}$, $I_{N_T+\frac{3-k}{2}}$
pair	N_T+1	$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{(N_T+1)qn}(r)\cos\left[N_T\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]$	$\left\{N_T\left(n+\frac{1}{2}\right), n\in\mathbb{Z}\right\}$	$I_{1+\frac{N_T}{2}}$
pair	N_T+2	$\sum_{n=0}^{+\infty} G_{(N_T+2)qn}(r)\sin\left[N_T\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]$	$\left\{N_T\left(n+\frac{1}{2}\right), n\in\mathbb{Z}\right\}$	$I_{1+\frac{N_T}{2}}$

TAB. 6.3 – Représentation des développements en série du champ électrique longitudinal $E_z(r,\theta)$ pour les fibres optiques de symétrie $C_{N_T v}$. L'indice q indique le $q^{\text{ème}}$ mode de la classe de symétrie considérée.

$N_T\rightarrow$ / Ordre p de la classe de symétrie $\downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1
2	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1	I_1
3	-	I_2	I_2,I_3	I_2,I_4	I_2,I_5	I_2,I_6	I_2,I_7	I_2,I_8
4	-	I_2	I_2,I_3	I_2,I_4	I_2,I_5	I_2,I_6	I_2,I_7	I_2,I_8
5	-	-	-	I_3	I_3,I_4	I_3,I_5	I_3,I_6	I_3,I_7
6	-	-	-	I_3	I_3,I_4	I_3,I_5	I_3,I_6	I_3,I_7
7	-	-	-	-	-	I_4	I_4,I_5	I_4,I_6
8	-	-	-	-	-	I_4	I_4,I_5	I_4,I_6
9	-	-	-	-	-	-	-	I_5
10	-	-	-	-	-	-	-	I_5

TAB. 6.4 – Sous-ensembles des coefficients de Fourier dans la MD associés aux différentes classes de modes comme défini par McIsaac pour un guide d'onde $C_{N_T v}$, pour plusieurs valeurs de N_T

symétrie pour $N_T=1$ à 8. On observe cette fois-ci que les modes d'une classe de symétrie deux fois dégénérés sont chacun décrits par deux sous-ensembles $\mathcal{I}_i$. Dans ce cas, il n'est pas utile de déterminer les deux matrices $Z_i^{(L)}$ par intégration des sous-systèmes $\mathcal{M}_i(r)$ correspondants. En effet, comme nous le montrons dans la section suivante, l'un de ces deux sous-ensembles de coefficients de Fourier s'exprime en fonction de l'autre.

6.3.2 Calcul des champs associés à un mode d'une fibre optique de symétrie C_{N_T} ou C_{N_Tv}

Nous allons dans ce qui suit nous intéresser à la description des champs pour une fibre optique C_{N_Tv}. Le tableau 6.3 révèle qu'un couple de classes de symétries successives ($C1$ et $C2$, Ck et $C(k+1)$, $C(N_T+1)$ et $C(N_T+2)$) est associé aux mêmes sous-ensembles I_i. Par exemple, dans le cas où $N_T = 6$ (voir tableau 6.4), I_1 correspond aux classes $C1$ et $C2$, ou encore I_2 et I_6 sont associés aux classes $C3$ et $C4$ ($C3/4$). Nous limitons l'étude au cas des valeurs paires de N_T. Le cas impair s'en déduit simplement en omettant les classes de symétrie $C(N_T+1)$ et $C(N_T+2)$. On compare les expressions des développements de Fourier donnés dans la troisième colonne du tableau 6.3 avec celles utilisées dans la méthode différentielle (6.17).

Classe de symétrie $C1$ et $C2$:

Pour la classe de symétrie $C1$, le développement du tableau 6.3 se projette sur la base des fonctions cosinus :

$$E_{z1q} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{1qn}(r)\cos\left(N_T n\theta\right) \tag{6.20}$$

et les coefficients de Fourier F_{1qn} sont des nombres réels. Quant au développement donné par (6.17) décrit sur le sous-ensemble $I_1 = \{nN_T, n \in \mathbb{Z}\}$, d'après la dernière colonne du tableau 6.3, il devient :

$$E_{z1q} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E'_{z1,n}(r)e^{inN_T\theta} \tag{6.21}$$

avec la notation simplifiée $E'_{z1,n}(r) = \left(E_{z1q}\right)_{nN_T}(r)$. Par application de la formule d'Euler $\cos(\zeta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}\right)$ dans le développement (6.20), on passe de la base des fonctions cosinus $(\cos\left(N_T n\theta\right))$ à la base des fonctions exponentielles $(e^{iN_T n\theta})$ et les coefficients de Fourier correspondants deviennent des nombres complexes. Par identification avec les coefficients de Fourier de (6.21), on montre que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E'_{z1,m}(r) = E'_{z1,-m}(r) = \frac{F_{1qm}(r)}{2} \tag{6.22}$$

En ce qui concerne la classe de symétrie $C2$, on procède très précisément de la même manière, à la différence près que le développement donné dans le tableau 6.3 se projette sur la base des fonctions sinus :

$$E_{z2q} = \sum_{n=0}^{+\infty} G_{1qn}(r)\sin\left(N_T n\theta\right) \tag{6.23}$$

Par ailleurs, le développement (6.17) décrit sur le même sous-ensemble I_1, d'après la dernière colonne du tableau 6.3, s'écrit :

$$E_{z2q} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E'_{z2,n}(r)e^{inN_T\theta} \tag{6.24}$$

avec la notation $E'_{z2,n}(r) = \left(E_{z2q}\right)_{nN_T}(r)$. Par application de la formule d'Euler $\sin(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}\right)$ dans le développement (6.23), on relie les coefficients de Fourier de ces deux dernières expressions :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E'_{z2,m}(r) = -E'_{z2,-m}(r) = \frac{G_{2qm}(r)}{2i} \tag{6.25}$$

Le déterminant de $Z_1^{(L)}$ (matrice $Z^{(L)}$ associée au sous-système I_1) s'annule aux indices effectifs des modes appartenant à ces deux classes de symétrie. Du fait de leur non dégénérescence entre elles, la valeur de l'indice effectif du $q^{\text{ème}}$ mode appartenant à la classe $C1$ est distincte de celle du $q^{\text{ème}}$ mode de la classe $C2$. Chacun des champs correspondant à ces deux modes est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de $Z_1^{(L)}$ évaluée à son indice effectif respectif. On peut les distinguer entre eux tout simplement par les relations des coefficients de Fourier (6.22) et (6.25). Pour la classe $C1$, les coefficients de Fourier des champs d'ordres opposés sont égaux entre eux (développement en cosinus), alors qu'ils sont opposés pour la classe $C2$ (développement en sinus).

Classe de symétrie Ck et $C(k+1)$:

Le principe reste le même que précédemment pour la description des champs associés aux modes de classes de symétrie Ck et $C(k+1)$. Pour le $q^{\text{ème}}$ mode de la classe Ck, on effectue, grâce aux relations d'Euler, le changement de base des fonctions cosinus aux fonctions exponentielles du développement donné dans le tableau 6.3. Cela conduit à l'expression suivante :

$$E_{zkq} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ E'_{zk,n}(r) e^{i\left(nN_T - \frac{k-1}{2}\right)\theta} + E''_{zk,n}(r) e^{i\left(nN_T + \frac{k-1}{2}\right)\theta} \right\} \tag{6.26}$$

avec

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E'_{zk,m}(r) = E''_{zk,-m}(r) = \frac{F_{kqm}(r)}{2} \text{ et } E''_{zk,m}(r) = E'_{zk,-m}(r) = \frac{P_{kqm}(r)}{2} \tag{6.27}$$

On rappelle la notation utilisée : $E'_{zk,n}(r) = (E_{zkq})_{nN_T - \frac{k-1}{2}}(r)$ et $E''_{zk,n}(r) = (E_{zkq})_{nN_T + \frac{k-1}{2}}(r)$.

En ce qui concerne la classe de symétrie $C(k+1)$, le développement des champs exprimé avec les fonctions sinus dans le tableau 6.3 devient le développement suivant sur la base des fonctions exponentielles :

$$E_{z(k+1)q} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ E'_{z(k+1),n}(r) e^{i\left(nN_T - \frac{k-1}{2}\right)\theta} + E''_{z(k+1),n}(r) e^{i\left(nN_T + \frac{k-1}{2}\right)\theta} \right\} \tag{6.28}$$

avec

$$\begin{array}{c} \forall m \in \mathbb{N}^*,\ E'_{z(k+1),m}(r) = -E''_{z(k+1),-m}(r) = \frac{G_{(k+1)qm}(r)}{2i} \\ \text{et } E''_{z(k+1),m}(r) = -E'_{z(k+1),-m}(r) = \frac{R_{(k+1)qm}(r)}{2i} \end{array} \tag{6.29}$$

avec la notation $E'_{z(k+1),n}(r) = \left(E_{z(k+1)q}\right)_{nN_T - \frac{k-1}{2}}(r)$ et $E''_{z(k+1),n}(r) = \left(E_{z(k+1)q}\right)_{nN_T + \frac{k-1}{2}}(r)$.

Le $q^{\text{ème}}$ mode de la classe Ck et le $q^{\text{ème}}$ mode de la classe $C(k+1)$ ont tous les deux le même indice effectif, étant donnée leur dégénérescence. Ainsi, les déterminants des matrices $Z^{(L)}_{\frac{1+k}{2}}$ et $Z^{(L)}_{N_T + \frac{3-k}{2}}$ s'annulent pour cette valeur d'indice effectif. Les coefficients de Fourier du champ modal sont des combinaisons linéaires des vecteurs propres (associés à la valeur propre nulle) de ces deux matrices $Z^{(L)}_i$ (correspondant aux sous-ensembles de coefficients $\mathcal{I}_{\frac{1+k}{2}}$ et $\mathcal{I}_{N_T + \frac{3-k}{2}}$). On sait, d'après les relations (6.27) et (6.29) que cette combinaison sera, soit une somme, soit une différence. Afin que les vecteurs propres de ces deux matrices, calculés indépendamment, puissent être comparables, on les normalise au préalable par les coefficents de Fourier (de même valeur absolue) de plus petit ordre. Pour résumer, la combinaison linéaire devient une somme pour les développements exprimés avec des fonctions cosinus (classe de symétrie Ck) et une différence pour les développements exprimés avec des fonctions sinus (classe de symétrie $C(k+1)$).

Classe de symétrie $C(N_T+1)$ et $C(N_T+2)$:

En fait, on retrouve les mêmes types de champs que ceux des classes de symétrie $C1$ et $C2$. Pour la classe $C(N_T+1)$, le champ s'exprime selon :

$$E_{z(N_T+1)q} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E'_{z(N_T+1),n}(r) e^{iN_T\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} \tag{6.30}$$

avec

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E'_{z(N_T+1),m}(r) = E'_{z(N_T+1),-m}(r) = \frac{F_{(N_T+1)qm}(r)}{2} \tag{6.31}$$

en utilisant la notation $E'_{z1,n}(r) = (E_{z1q})_{nN_T}(r)$.

Pour la classe $C(N_T+2)$, on obtient :

$$E_{z(N_T+2)q} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E'_{z(N_T+2),n}(r) e^{iN_T\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} \tag{6.32}$$

avec

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ E'_{z(N_T+2),m}(r) = -E'_{z(N_T+2),-m}(r) = \frac{G_{(N_T+2)qm}(r)}{2i} \tag{6.33}$$

en utilisant la notation $E'_{z(N_T+2),n}(r) = \left(E_{z(N_T+2)q}\right)_{nN_T}(r)$.

Le déterminant de $Z^{(L)}_{1+\frac{N_T}{2}}$ s'annule aux valeurs distinctes des indices effectifs relatifs à chaque mode des deux classes $C(N_T+1)$ et $C(N_T+2)$. Les champs correspondants sont les vecteurs propres associés à la valeur propre nulle de $Z^{(L)}_{1+\frac{N_T}{2}}$ évaluée à leurs indices effectifs respectifs. On les distingue toujours entre eux par les relations des coefficients de Fourier (équations (6.31) et (6.33)).

Dans le cas de la symétrie C_{N_T}, la description des champs est beaucoup plus simple. Il faut d'abord constater que les développements des modes donnés dans le tableau 6.3 se projettent sur la même base de fonction exponentielle ($e^{iN_T n\theta}$) que l'expression des champs dans la méthode différentielle (6.17). En conséquence, chaque mode d'une classe de symétrie est associé à un seul sous-système I_i (voir tableau 6.3). Il suffit alors d'intégrer la matrice $\mathcal{M}_i(r)$ correspondante et de déterminer, après intégration, les champs par résolution du problème modal avec la matrice $Z_i^{(L)}$ définie par l'équation (6.9).

Dans cette section, nous avons adapté la description des symétries des modes par McIsaac [37, 38] à la méthode différentielle. Ce travail a déjà été effectué pour la Méthode Multipolaire, conduisant à une représentation des modes sur des secteurs irréductibles introduits par McIsaac dans ses travaux [37, 38]. Cependant, McIsaac montre que le secteur irréductible pour une classe de symétrie donnée ne correspond pas toujours à la sous-périodicité de la fibre, soit au secteur d'angle $T = \frac{2\pi}{N_T}$. Prenons l'exemple d'une fibre C_{6v} dont l'angle de la sous-périodicté est $\frac{\pi}{3}$. McIsaac stipule que le secteur irréductible des modes dégénérés de classe $C3/4$ s'étend sur un angle de $\frac{\pi}{2}$ et non $\frac{\pi}{3}$. Les modes de classes $C1$ ou encore $C2$ sont décrits sur un secteur irréductible de $\frac{\pi}{6}$ et non $\frac{\pi}{3}$. Dans la méthode différentielle, nous avons établi que toutes les classes de symétrie sont décrites sur le secteur d'angle $T = \frac{2\pi}{N_T}$ de la fibre optique (sous-ensembles $\mathcal{I}_i$). En fait, les travaux menés par Fini [41] montrent que le secteur irréductible sur lequel on peut définir les champs ne dépend que de la symétrie opto-géométrique de la fibre (et ne dépend plus des classes de symétrie). En outre ce secteur serait plus petit que ceux considérés actuellement par la Méthode Multipolaire et la Méthode Différentielle. Reprenons l'exemple de la symétrie C_{6v}. Pour la Méthode Multipolaire, les classes de symétries $C1$, $C2$, $C7$ et $C8$ sont effectivement décrites sur un secteur irréductible d'angle $\frac{\pi}{6}$, mais les classes $C3/4$ et $C5/6$ pourrait l'être sur le secteur d'angle $\frac{\pi}{3}$, au lieu de $\frac{\pi}{2}$ dans sa formulation initiale. En ce qui concerne la Méthode Différentielle, on sait que toutes les classes de symétries sont définies sur le même angle $\frac{\pi}{3}$. Un effort de formulation supplémentaire permettrait de décrire les champs sur un secteur irréductible d'angle $\frac{\pi}{6}$, étant donné la parité des fonctions $\epsilon(r,\theta)$, $N_r^2(r,\theta)$, $N_\theta^2(r,\theta)$ et $N_r N_\theta(r,\theta)$.

6.4 Implémentation de la méthode différentielle

6.4.1 Structure et algorithme du programme

Organisation du programme :

On se place dans le cas général où la fibre optique possède une symétrie de type C_{N_T} ou $C_{N_T v}$. La principale tâche du programme en régime modal consiste à rechercher les valeurs de l'indice effectif n_{eff} (ou β) associées à chacun des modes de cette fibre optique. Le programme ne peut considérer qu'un seul mode à la fois. On s'intéresse alors à un mode de la classe de symétrie Ck dont les coefficients de Fourier non nuls des champs se regroupent dans le sous-ensemble $\mathcal{I}_i$ (voire un second sous-ensemble, pour les modes appartenant aux classes de symétrie dégénérées d'une fibre $C_{N_T v}$). Sachant que notre objectif est d'étudier les fibres optiques microstructurées, on suppose que le mode recherché est à fuites (à pertes), c'est-à-dire que son indice effectif devient un nombre complexe. On sait que n_{eff} est une racine du déterminant de la matrice $\left\{Z_i^{(L)}\right\}^{-1}$ d'après l'équation (6.10). Ainsi, la grande difficulté réside en la recherche d'un zéro d'une fonction complexe à variable

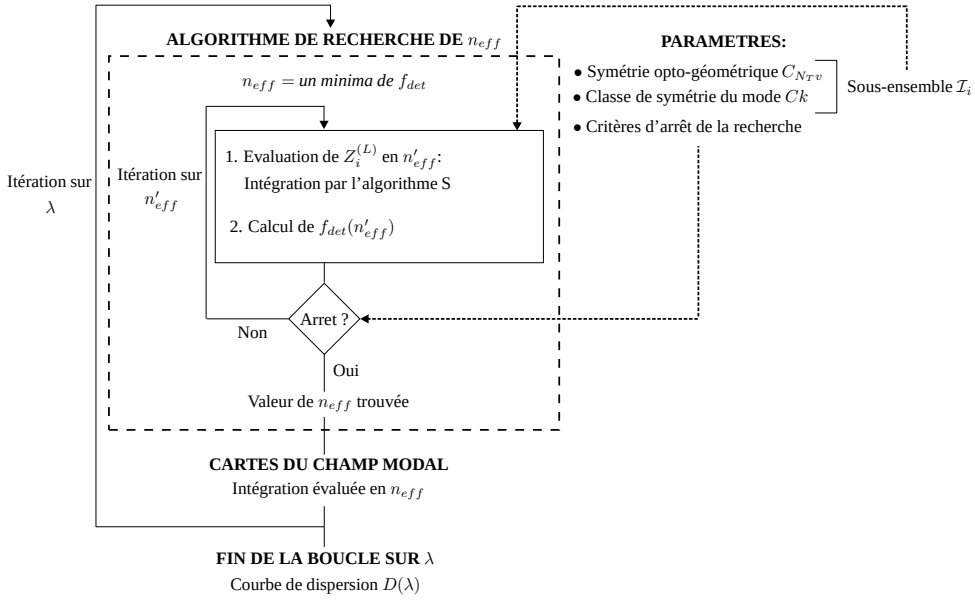


FIG. 6.6 – Schéma de l'algorithme en régime recherche de mode

complexe. En calculant la valeur absolue du déterminant, on réduit le problème à la recherche d'un zéro d'une fonction réelle à variable complexe. La zone de recherche de l'indice effectif devient l'ensemble du plan complexe $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Il est alors nécessaire de disposer d'un algorithme approprié. Comme la plupart des procédés numériques de recherche (de minima, de zéro), l'algorithme que nous avons choisi prend l'indice effectif comme une variable (les valeurs de l'indice effectif sont testées jusqu'à trouver celle recherchée). Afin d'éviter toute confusion, on adopte désormais la notation n'_{eff} pour l'indice effectif en tant que variable de la fonction à analyser et n_{eff} pour l'indice effectif recherché, solution de (6.10). L'algorithme de recherche de n_{eff} nécessite plusieurs itérations. Chacune de ces itérations représente un calcul de la matrice $\left\{Z_i^{(L)}\right\}^{-1}$ pour une valeur de la variable n'_{eff} ; autrement dit, une intégration du système différentiel (2.109) à travers la zone modulée, par l'algorithme S. On comprend que le problème modal devient nettement plus coûteux en temps de calcul que le problème de diffraction. Dans le premier cas, une intégration est nécessaire à chaque itération de la recherche alors qu'une seule suffit pour le second cas. Le processus d'intégration est sensiblement différent de celui de la diffraction (voir section 3.4.1). Seule la détermination de $(S_i)_{12}^{(s)}$ $(s \in [1, L+1])$ est conservée puisqu'il devient l'unique bloc nécessaire au calcul de $\left\{Z_i^{(s)}\right\}^{-1}$ (équations (3.76) et (3.78)), en particulier de $\left\{Z_i^{(L)}\right\}^{-1}$ pour la dernière couche S pour laquelle le problème modal est écrit.

Finalement, l'algorithme du programme en régime modal se scinde en deux étapes. La première concerne la recherche de n_{eff} par un algorithme approprié. Le procédé de recherche aboutit à une valeur approchée de n_{eff} du mode considéré, à la précision imposée. Ensuite, la seconde étape consiste en une dernière intégration, évaluée en cette valeur de n_{eff}, afin de calculer les cartes du champ modal d'après le principe décrit dans la section 3.4.3. Ces deux étapes du code numérique sont imbriquées dans une boucle sur la longueur d'onde λ, afin de pouvoir étudier les phénomènes de dispersion modale (évolution de n_{eff} en fonction de λ). L'algorithme du programme est schématisé dans la figure 6.6.

Programme de recherche de l'indice effectif d'un mode :

Le but est de trouver l'algorithme le plus adapté à la méthode différentielle. Dans un souci de gain de temps de calcul, il faut minimiser le nombre d'itération (intégration par l'algorithme S) tout en atteignant la meilleure précision possible. En fait, le principe de notre algorithme de recherche de n_{eff} se base essentiellement sur le calcul du logarithme du déterminant dans l'équation (6.10),

de telle sorte à convertir la recherche du zéro en une recherche de minima plus simple dans notre cas (sur $\mathbb{R}^2$). La fonction à analyser est alors :

$$f_{det}(n'_{eff}) = log\left(\left|det\left(\left\{Z_i^{(L)}\right\}^{-1}\right)\right|\right)(n'_{eff}) \tag{6.34}$$

et n_{eff} vérifie alors

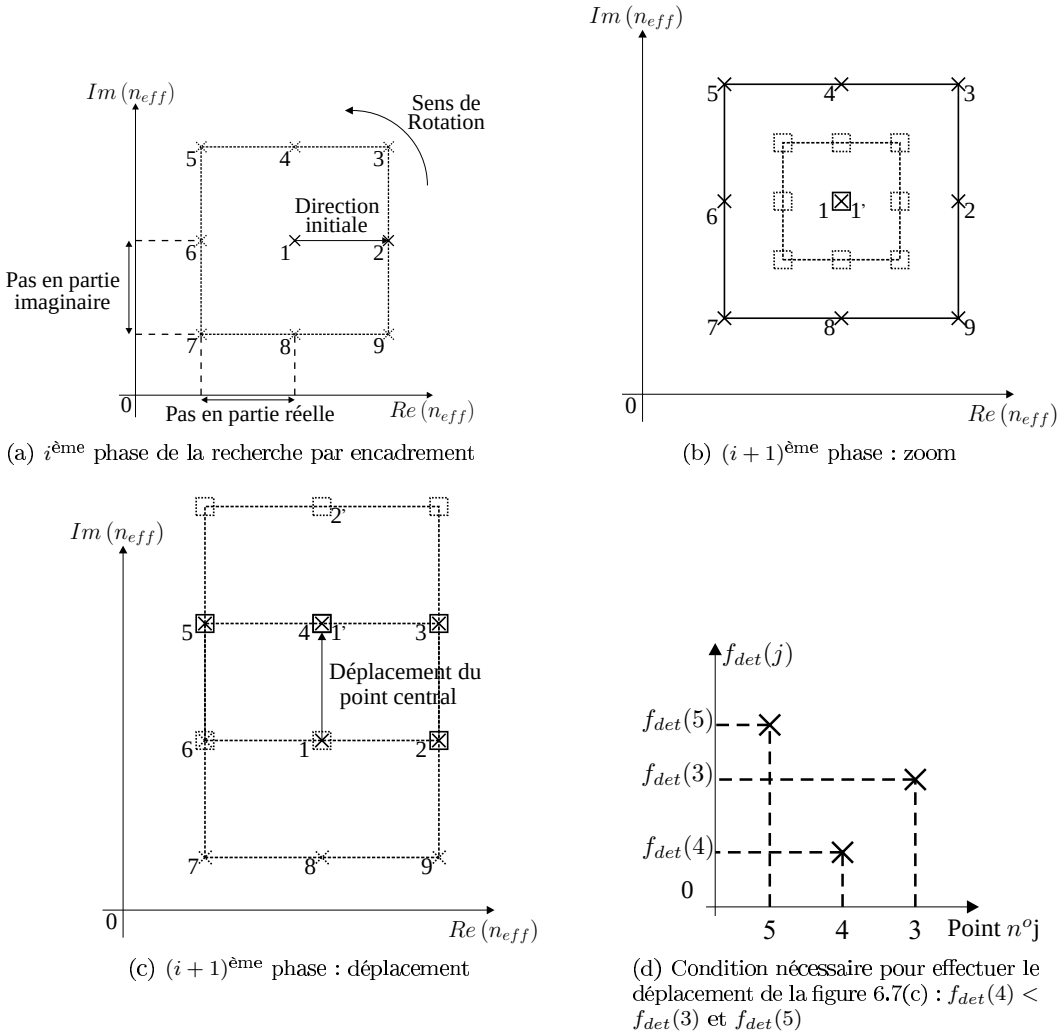
$$f_{det}\left(n_{eff}\right) = -\infty \tag{6.35}$$

Le logarithme présente l'avantage d'accentuer la singularité en n_{eff} qui devient plus facile à détecter. Il existe de nombreux algorithmes de recherche de minima d'une fonction réelle à variable vectorielle (chapitre 10 de la référence [98]), qui demeurent pour la plupart malheureusement trop coûteux en nombre d'itération. L'algorithme que nous avons choisi est divisé en deux étapes successives :

- La première est l'initialisation de la recherche (choix de la zone de recherche, points initiaux,...). Dans notre code numérique, elle s'effectue par une "carte de déterminant" dans la région du plan complexe dans laquelle nous soupçonnons la localisation de l'indice effectif recherché. On effectue un quadrillage (orthogonal) de cette région de l'espace en $N_{Re} \in \mathbb{N}^*$ points en partie réelle et $N_{Im} \in \mathbb{N}^*$ points en partie imaginaire. Pour chacun des points n'_{eff} de ce maillage, on calcule $f_{det}(n'_{eff})$. Ainsi, un point de la carte de déterminant représente une itération de la recherche. Une fois ces $N_{Re} \times N_{Im}$ itérations de la carte de déterminant calculées, le programme en extrait le point de plus petite valeur de f_{det} (s'il se situe bien dans la région du plan complexe considérée). Il constitue alors une première approximation de l'indice effectif recherché. On stocke également les huits points qui l'encadrent car ils servent directement à l'initialisation de la seconde étape de la recherche du minima.
- La seconde étape concerne un procédé fin et efficace de recherche de n_{eff} à partir de la première estimation issue de l'initialisation par la carte de déterminant. Après plusieurs tentatives, notre choix s'est finalement porté sur un couplage de deux méthodes simples. La première, que nous appellerons "méthode par encadrement", est une méthode de recherche de minima. Elle est fiable mais assez coûteuse en calcul de déterminant. La seconde, dénommée "méthode par régression linéaire complexe", est une méthode de recherche de zéros (6.10). Il s'agit de la méthode numérique déjà utilisée dans le programme de la Méthode Multipolaire [31, 42, 40] écrite au sein du laboratoire. Elle est très rapide mais nécessite d'être correctement initialisée.

Nous allons d'abord décrire indépendemment chacune de ces deux méthodes de recherche de minima ou de zéros. Nous verrons ensuite comment elles ont été couplées afin d'exploiter les avantages de chacune d'entre elles.

1. *La méthode par encadrement :* Elle peut être assimilée à une méthode de type simplex [98]. Elle est simplement basée sur un principe d'encadrement, dans le plan complexe (n'_{eff}), d'un point central (estimation de l'indice effectif recherché) par les huits points placés sur un rectangle qui l'entourent (voir figure 6.7(a)). Les pas d'encadrement en partie réelle et imaginaire sont arbitraires. La détermination du point central et des points d'encadrement constitue une phase de la recherche du minima. Les neuf points extraits de l'initialisation par la carte de déterminant représentent la première phase. On se place désormais à la $i^{\text{ème}}$ phase où on a calculé l'indice effectif et la valeur de la fonction f_{det} pour le point central. Il reste alors à évaluer la fonction f_{det} aux autres points d'encadrement. La direction du premier point d'encadrement à calculer est déterminée par la phase précédente. On calcule successivement la fonction aux points placés sur le rectangle d'encadrement en tournant dans la direction de la plus petite valeur de f_{det} (figure 6.7(a)). Lors de cette rotation autour du point central, si une des valeurs de la fonction f_{det} est plus petite que celle du point central, la rotation s'arrête et un déplacement est effectué (voir l'exemple dans les figures 6.7(c) et 6.7(d)). Le nouveau minimum (point 4) devient le point central (point $1'$) de la $(i+1)^{\text{ème}}$ phase. Si la rotation se réalise entièrement (pour les huits points d'encadrement), cela signifie que le minimum réel est contenu dans le rectangle d'encadrement. On effectue alors un zoom (voir figure 6.7(b)). Pour la phase suivante, le point central reste inchangé (point 1 et $1'$) et les pas d'encadrement en partie réelle et imaginaire sont réduits d'un facteur arbitraire. Ainsi les points centraux



(a) $i^{\text{ème}}$ phase de la recherche par encadrement

(b) $(i+1)^{\text{ème}}$ phase : zoom

(c) $(i+1)^{\text{ème}}$ phase : déplacement

(d) Condition nécessaire pour effectuer le déplacement de la figure 6.7(c) : $f_{det}(4) < f_{det}(3)$ et $f_{det}(5)$

FIG. 6.7 – Principe de la recherche de n_{eff} par encadrement

sont déterminés d'une phase à l'autre. A une phase de la recherche donnée, il faut préciser que la fonction f_{det} aux points d'encadrement n'est pas systématiquement évaluée puisque certains points peuvent être confondus avec ceux de la phase précédente. Dans l'exemple de la figure 6.7(c)), les points 2, 3 et 5 pour lesquels la fonction a déjà été évaluée, font partie de la $(i+1)^{\text{ème}}$ phase. On minimise alors le nombre d'évaluation de la fonction f_{det} c'est-à-dire le nombre d'itération de la recherche. Cette méthode est une succession de déplacements et de zooms dans le plan complexe qui permettent de se rapprocher, de manière robuste, de l'indice effectif du mode. Sa rapidité de convergence conditionnée par le facteur de zoom, mais également par le nombre de déplacements effectués, reste néanmoins limitée.

2. *La méthode par régression linéaire complexe :* Il s'agit de l'adaptation de la méthode de Lagrange (ou de la fausse position) pour des fonctions à variable réelle aux fonctions à variable complexe. La fonction à analyser devient le déterminant de la matrice $Z_i^{(L)}$ évaluée en n'_{eff} et notée :

$$g_{det}(n'_{eff}) = \left| det\left(\left\{ Z_i^{(L)} \right\}^{-1} \right) \right| (n'_{eff})$$

On rappelle brièvement le principe de cette méthode pour une fonction $g(\zeta)$ à variable réelle. Le calcul commence avec deux points initiaux : (ζ_1, g_1) et (ζ_2, g_2). On détermine le point

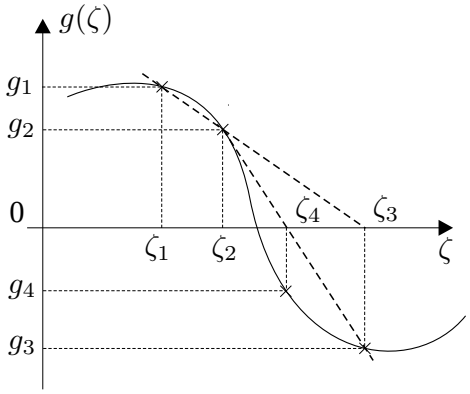


FIG. 6.8 – Recherche de zéro par la méthode de Lagrange (cas 1D)

d'intersection entre l'axe des ζ et la droite passant par ces deux points. On en déduit la valeur extrapolée ζ_3 du troisième point à évaluer (régression linéaire) :

$$\zeta_3 = \zeta_1 - \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{g_2 - g_2} g_1 \tag{6.36}$$

Les points (ζ_2, g_2) et (ζ_3, g_3) constituent un nouveau couple pour lequel on relance une régression linéaire. La recherche du zéro continue ainsi jusqu'à atteindre la précision souhaitée. Sa convergence est directement conditionnée par le comportement de la fonction, mais également par les deux points initiaux. Si la pente de la droite de régression est trop faible (points trop proches), la valeur extrapolée ζ_3 risque de s'éloigner du zéro recherché. A l'inverse, si les points sont trop éloignés, le zéro risque d'être évité. Dans notre cas de la recherche de n_{eff}, la variable réelle $\zeta \in \mathbb{R}$ est remplacée par la variable complexe $n'_{eff} \in \mathbb{C}$ et la fonction $g \in \mathbb{R}$ devient $g_{det} \in \mathbb{R}$. Les régressions sont des droites "complexes" (difficiles à représenter sur un schéma à deux dimensions).

3. *Couplage des deux méthodes :* Dans les premières versions du programme, l'algorithme d'affinage de la recherche, après initialisation par la carte de déterminant, n'était constitué que de l'algorithme associé à la régression linéaire complexe. Malheureusement, son initialisation étant beaucoup trop sensible, nous a contraint à envisager en amont un processus d'affinage de ses deux points initiaux. La recherche par encadrement joue ce rôle. Une recherche par régression est lancée pour chaque couple de points de la recherche par encadrement, constitué d'un point d'encadrement et du point central associé. Si la recherche par régression échoue, la recherche par encadrement suit son cours. Chaque tentative de recherche par régression n'est pas forcément coûteuse en nombre d'itération. En effet, si les deux points initiaux sont mal conditionnés, la valeur de n'_{eff} extrapolée (6.36) nécessitant aucune itération, sort de la zone du plan complexe autorisée. L'algorithme de recherche par régression interprète alors ce résultat comme un échec. Un autre essai sera tenté au prochain point d'encadrement. L'expérience montre que la recherche par régression aboutit presque systématiquement dès lors que les deux points initiaux sont adéquats. Par conséquent, si l'indice effectif extrapolé à partir des deux points initiaux est bien contenu dans la zone autorisée, la recherche par régression converge très vite vers l'indice effectif du mode n_{eff} jusqu'à la précision demandée. Il semble bien que ces deux méthodes de recherche soient complémentaires dans le principe. Du fait que la recherche par encadrement se rapproche inexorablement du minimum, un couple de points initiaux pour la recherche par régression finit toujours par être trouvé.

La recherche s'arrête dès qu'un des deux critères suivants est respecté : la fonction f_{det} a décru d'un facteur arbitraire $\mathcal{A}_f$, ou la précision de $log\,(n_{eff})$ en partie réelle ou imaginaire atteint une valeur arbitraire inférieure à $-\mathcal{A}_p$. Plus précisément, on note $n_{eff,ini}$ le minima trouvé par l'initialisation (carte de déterminant), puis $n_{eff,i-1}$ et $n_{eff,i}$ respectivement les $(i-1)^{\text{ème}}$ et $i^{\text{ème}}$ itérations de

la recherche. L'algorithme de recherche de n_{eff} s'interrompt si $f_{det}(n_{eff,i}) < 10^{\mathcal{A}_f} f_{det}(n_{eff,ini})$, ou bien si $|\Re e\,(n_{eff,i}) - \Re e\,(n_{eff,i-1})| < 10^{-\mathcal{A}_p}$ ou encore $|\Im m\,(n_{eff,i}) - \Im m\,(n_{eff,i-1})| < 10^{-\mathcal{A}_p}$. Dans tous les cas, la valeur approchée de l'indice effectif du mode devient $n_{eff} = n_{eff,i}$

6.4.2 Calcul des cartes du champ modal

Les cartes du champ modal sont réalisées après la détermination de l'indice effectif n_{eff} du mode, trouvé grâce à l'algorithme décrit précédemment (voir section 6.4.1). Le principe de calcul reste globalement identique à celui de la diffraction (voir section 3.4.3). Un quadrillage de la région de l'espace choisie pour les cartes de champs est construit. Lorsqu'un des points de ce maillage se trouve dans une région homogène, les champs sont calculés à partir du développement (3.104) dont les coefficients de Fourier sont extraits des équations (3.101) et (3.102) pour la région (int), ou (3.101) et (3.102) pour la région (ext). Mais la principale difficulté réside toujours en l'extraction des champs sur les cylindres d'intégration C_{r_k} de la zone modulée, où les rayons r_k ($k \in \mathbb{N}^*$) sont issus de la discrétisation en couche S et en différents pas d'intégration. La différence fondamentale se situe au niveau du calcul des champs initiaux $\left[A^{(j_L)}(r_L)\right]$ sur l'interface $r = r_L$ pour l'intégration à travers la dernière couche S. Pour le cas de la diffraction, ils se déduisent du champ incident de la région (ext) par la relation (3.107). En régime modal, ils deviennent les vecteurs propres associés à la valeur propre nulle de la matrice $Z_i^{(L)}$ évaluée en n_{eff} (6.9). Un algorithme approprié permet d'effectuer cette tâche. Les champs initiaux $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$ aux autres interfaces $r = r_s$ ($s \in [1, L-1]$) s'en déduisent par la relation de récurrence (3.106). Contrairement à la diffraction, on n'utilise donc pas la relation (3.107) car elle devient un système homogène pour chacune de ces interfaces. Il ne faut pas oublier les matrices colonnes $\left[B^{(j_s)}(r_s)\right]$ calculées à partir de $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$ grâce à l'équation (3.108), qui permettent avec $\left[A^{(j_s)}(r_s)\right]$ de décrire complètement les champs. Enfin, une fois stockés tous les coefficients de Fourier du champ modal calculés sur les interfaces d'intégration C_{r_k}, on peut déterminer la valeur du champ en n'importe quel point de la zone modulée par interpolation linéaire entre deux cylindres C_{r_k} (3.109). Il est important de noter que le calcul du champ en tout point d'une carte est issu de la détermination des vecteurs propres $\left[A^{(j_L)}(r_L)\right]$ de $Z_i^{(L)}$. Ainsi, il est défini à un facteur multiplicatif près. Par conséquent, chacune des cartes du champ modal est normalisée par sa valeur maximale, de telle sorte que les valeurs des champs évoluent sur l'intervalle $[0, 1]$.

6.4.3 Calcul de la dispersion modale

L'étude du phénomène de dispersion modale exige la détermination de l'indice effectif sur un intervalle de longueur d'onde. Chaque itération à une longueur d'onde donnée correspond à une recherche de n_{eff} comme décrit dans la section 6.4.1 (boucle sur λ, voir figure 6.6). Toutefois, on peut éviter un calcul systématique de l'initialisation de la recherche par une carte de déterminant, coûteuse en temps de calcul. Pour cela, on extrapole la valeur de n_{eff} d'une itération (de la boucle sur λ), à partir des indices effectifs des itérations précédentes. Ainsi, l'initialisation s'effectue par le calcul de cartes de déterminant pour les deux premières itérations. Mais on dispose d'un algorithme d'extrapolation polynômiale pour les autres itérations. Par précaution, si la valeur extrapolée de n_{eff} demeure trop éloignée de l'indice effectif réel (échec de la recherche), le programme recourt à des cartes de déterminant avec la possibilité d'effectuer des zooms (ou l'inverse) de la région du plan complexe considérée.

Après avoir éxécuté la recherche de l'indice effectif d'un mode sur une plage de longueur d'onde, on déduit de la fonction $n_{eff}(\lambda)$, le coefficient de dispersion chromatique $D(\lambda)$, dit simplement "dispersion chromatique", qui s'exprime selon :

$$D(\lambda) = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial^2 \Re e\,(n_{eff})}{\partial \lambda^2} \tag{6.37}$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide. Le dispersion chromatique est souvent exprimée en $ps/nm/km$ (si $[c] = km/ps$ et $[\lambda] = nm$). Cette grandeur caractérise l'élargissement temporel d'une impulsion au cours de sa propagation selon l'axe de la fibre (voir l'annexe C). Suivant la plage de longueur souhaitée pour la communication optique (souvent dans l'infra-rouge, voire le visible), elle peut être modulée par l'ensemble des paramètres opto-géométriques de la fibre. Pour les FOMs (voir

chapitre suivant), l'ensemble de ces paramètres est nettement plus varié que celui d'une fibre optique conventionnelle (à saut d'indice), révélant ainsi un des grands intérêts de l'étude de ce genre de fibres optiques.

6.5 Tests de validation sur une fibre optique conventionnelle

La résolution du problème modal par la méthode différentielle va être validée sur la même structure cylindrique que celle étudiée en diffraction (voir section 3.5) : un cylindre circulaire rempli d'un matériau homogène et isotrope. Il s'identifie ici à une fibre optique conventionnelle à saut d'indice dont les modes sont décrits semi-analytiquement par la théorie bien connue des guides d'ondes. Dans un premier temps, nous donnerons quelques résultats pour le cylindre centré sur l'origine (qui ne nécessite aucune intégration). Cette étude (section 6.5.1) présentera plusieurs intérêts. Tout d'abord, elle permet de rappeler brièvement quelques notions de base (coupures, classes de modes LP,...) sur ce type de fibre. Ensuite, nous nous concentrerons sur les modes à fuites (à pertes). Habituellement, ces modes attirent peu l'attention des scientifiques étant donnée leur nature à pertes, mais ils s'avèreront nécessaires à la compréhension du phénomène que nous avons observé dans les FOMs de type ARROW (section 7.4). Enfin, comme pour la diffraction, ces résultats serviront de référence pour valider ceux obtenus par la méthode différentielle sur le même cylindre mais excentrés par rapport à l'origine. La comparaison des résultats entre ces deux configurations fera l'objet de la section 6.5.2.

6.5.1 Cylindre circulaire centré sur l'origine

Description de la fibre optique étudiée :

Nous prenons strictement le même cylindre circulaire que celui étudié dans la section 3.5.2 avec les mêmes notations pour toutes les grandeurs opto-géométriques (voir figure 3.11). Les paramètres sont alors :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1

Autres paramètres	***Valeurs***
N	5
λ	1 à 1.9 μm
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	5
$\mathcal{A}_p$	9

Le fait de confondre l'origine du repère avec le centre de la section circulaire attribue à la représentation géométrique de la fibre une symétrie du type $C_{\infty v}$ qui implique une sous-période angulaire nulle ($N_T \to +\infty$). Dans la méthode différentielle, il est inconcevable de construire l'ensemble infini des sous-familles I_i des ordres des coefficients de Fourier couplés des champs, d'après la définition (6.15) avec $N_T = +\infty$. Nous avons alors choisi de ne pas prendre en compte cette symétrie de la structure, ce qui revient à considérer une symétrie C_1 (de périodicité angulaire égale à 2π). En outre, il n'y a pas de zone modulée, donc aucune discrétisation en couche S. La matrice $Z_1^{(L)} = Z_1^{(1)} = Z$ s'identifie alors à :

$$Z = \left\{ T_{11}^{(c)} \right\}^{-1}$$

selon la relation (3.76) avec $S_{12}^{(L)} = S_{12}^{(1)} = 0$. Ainsi, tous les modes de cette fibre optique sont décrits par cette matrice Z. La matrice de transmission $T^{(c)}$ est donnée par la relation (3.111).

Pour une fibre conventionnelle à saut d'indice, on rappelle que l'indice effectif d'un mode est solution de l'équation de dispersion (page 253 de la référence [21]) :

$$\left[\frac{J'_\nu(u)}{uJ_\nu(u)} + \frac{K'_\nu(w)}{wK_\nu(w)}\right]\left[\frac{J'_\nu(u)}{uJ_\nu(u)} + \frac{n_{mat}^2}{n_{cyl}^2}\frac{K'_\nu(w)}{wK_\nu(w)}\right] = \left(\frac{\nu n_{eff}}{n_{cyl}}\right)^2 \left(\frac{V}{uw}\right)^4 \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} u^2 = (k_0R)^2\left(n_{cyl}^2 - n_{eff}^2\right) \\ w^2 = (k_0R)^2\left(n_{eff}^2 - n_{mat}^2\right) \\ V^2 = u^2 + w^2 \end{array} \right. \tag{6.38}$$

La grandeur V est appelée la "fréquence normalisée". Chercher n_{eff} qui vérifie $det\left(Z^{-1}\right) = 0$ d'après (6.10) revient implicitement à résoudre cette équation (6.38). Le champ électromagnétique

modal s'ecrit sous la forme (6.1). Le calcul analytique montre que la partie transverse $A(r,\theta)$ des composantes en z s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel de premières espèces J_ν et K_ν ($\nu \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{cases} E_z(r,\theta) = E_{z,0}\frac{J_\nu\left(\frac{u}{R}r\right)}{J_\nu(u)} f_\nu(\theta) \text{ si } 0 \leq r \leq R \\ E_z(r,\theta) = E_{z,0}\frac{K_\nu\left(\frac{w}{R}r\right)}{K_\nu(w)} f_\nu(\theta) \text{ si } r > R \end{cases} \tag{6.39}$$

avec $f_\nu(\theta) = \cos(\nu\theta)$ ou $\sin(\nu\theta)$. Un mode est donc caractérisé par son ordre azimutal ν qui décrit la symétrie angulaire (selon θ) des composantes en z du champ. Par comparaison avec le développement des champs utilisé dans la méthode différentielle (3.10), on se rend compte que le spectre de Fourier d'un mode d'ordre azimutal ν n'est constitué que de deux amplitudes non nulles aux ordres $n = -\nu$ et ν. En appliquant les relations d'Euler aux fonctions cosinus et sinus des expressions (6.39), on montre que ces deux amplitudes sont égales en valeur absolue, réelles pures et de même signe (cosinus) ou imaginaires pures et de signes opposés (sinus). Ainsi, l'ordre de troncature maximal des développements N permet d'effectuer une sélection de modes. On ne peut détecter et analyser que les modes d'ordres azimutaux tels que $\nu \in [1, N]$. Dans notre exemple, on ne pourra étudier que les modes d'ordres azimutaux inférieurs à 5, ce qui s'avèrera largement suffisant. Les modes sont classés en quatre grandes familles. Lorsque $\nu = 0$ on montre que les champs électromagnétiques se découplent en deux polarisations indépendantes : la polarisation Transverse Electrique donnant les modes TE_{0m} et la polarisation Transverse Magnétique donnant les modes TM_{0m}, où $m \in \mathbb{N}^*$ est le numéro du mode. Ces deux types de modes sont non dégénérés et se répartissent dans les classes de symétrie $C1$ et $C2$, elles-mêmes non dégénérées. Il est très important de noter que la dénomination TE et TM est inversée par rapport à celle utilisée en diffraction classique (voir chapitre 4). Par exemple, la polarisation TE en diffraction est telle que $H_z = E_r = E_\theta = 0$ alors que, pour les fibres optiques conventionnelles, elle vérifie $E_z = H_r = H_\theta = 0$. Les autres modes ($\nu \neq 0$) se répartissent en deux catégories de modes hybrides : les modes $HE_{\nu m}$ pour lesquels le champ magnétique $\vec{H}$ est prépondérant par rapport au champ électrique $\vec{E}$, puis inversement pour les modes $EH_{\nu m}$. Ces deux types de modes sont chacun dégénérés deux fois et correspondent aux classes de symétrie Ck et $C(k+1)$ ($k \geq 2$) dégénérées entre elles. On caractérise le constraste d'indice entre le matériau de la fibre n_{cyl} et celui de la matrice n_{mat} par le paramètre Δ_{ind} défini selon (page 227 de la référence [21]) :

$$\Delta_{ind} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_{mat}^2}{n_{cyl}^2}\right) \tag{6.40}$$

Lorsque Δ_{ind} devient faible (typiquement inférieur à 1%), on se situe dans le cadre du faible guidage. Les modes se regroupent alors dans les familles de modes (quasi-)dégénérés $LP_{\nu m}$ telles que : $LP_{0m} = HE_{1m}$ (pour $\nu = 0$), $LP_{1m} = \{TE_{0m}, TM_{0m}, HE_{2m}\}$ (pour $\nu = 1$) et $LP_{\nu m} = \{EH_{\nu-1m}, HE_{\nu+1m}\}$ (pour $\nu \geq 2$).

Régime de propagation guidée des modes :

On s'intéresse d'abord aux modes guidés, c'est-à-dire aux modes qui se propagent indéfiniment (en théorie) le long de la fibre optique sans atténuation du champ. En d'autres termes, il s'agit de modes sans pertes dont les indices effectifs sont des nombres réels et doivent vérifier $n_{mat} < n_{eff} < n_{cyl}$ (condition de guidage). La figure 6.9 illustre la fonction $f_{det}\left(n'_{eff}\right)$ avec $n'_{eff} \in \mathbb{R}$. En théorie, chaque pointe descendante de la courbe localise un indice effectif associé à un mode vérifiant (6.35). On retrouve les sept modes prévus dans le graphique 12-4 de la référence [21] (page 254) où, dans notre cas, $V \approx 4.16$ pour $\lambda = 1\ \mu m$. Pour cette longueur d'onde, le tableau 6.5 donne leurs indices effectifs dans l'ordre décroissant (voir figure 6.9). Dans notre cas, on a $\Delta_{ind} \approx 15.3\%$. La condition de l'approximation du faible guidage n'est donc pas satisfaite. Cependant, on voit clairement apparaître dans la figure 6.9 le groupe des modes TE_{01}, TM_{01} et HE_{21} (d'indices effectifs distincts entre eux) associé au mode LP_{11}.

Les figures 6.10(a) à 6.10(g) montrent les cartes de $|E_z|$ ou $|H_z|$ associées à chacun de ces modes. Par la suite, nous préférerons représenter les cartes des composantes en z du champ électrique ou magnétique, car elles contiennent les informations relatives aux symétries des modes. En effet,

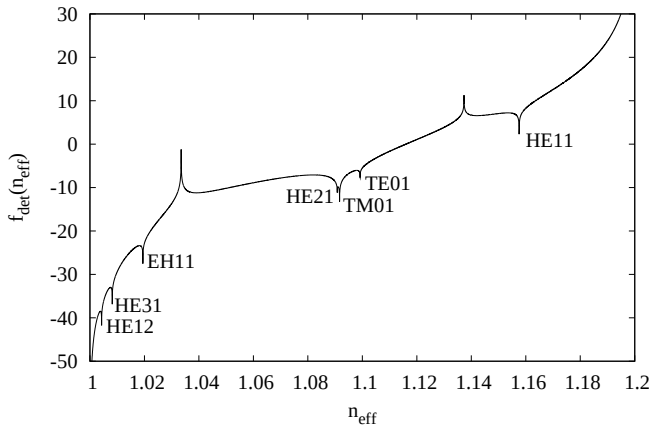
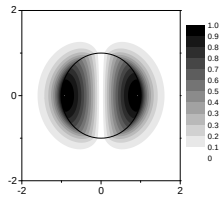
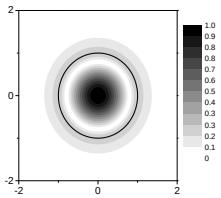


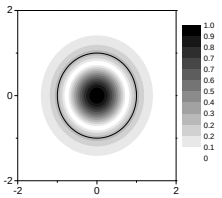
FIG. 6.9 – Fonction $f_{det}(n'_{eff}$ (définie par la relation (6.34)) pour n'_{eff} appartenant à l'intervalle des modes guides $[n_{mat}, n_{cyl}]$, avec $n_{mat} = 1$, $n_{cyl} = 1.2$ et $\lambda = 1\ \mu m$



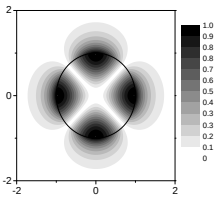
(a) $|E_z|$ pour le mode HE11



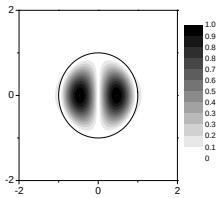
(b) $|H_z|$ pour le mode TE01



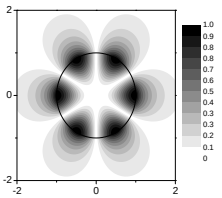
(c) $|E_z|$ pour le mode TM01



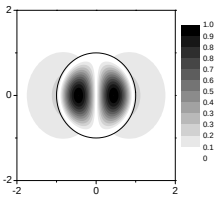
(d) $|E_z|$ pour le mode HE21



(e) $|E_z|$ pour le mode EH11



(f) $|E_z|$ pour le mode HE31

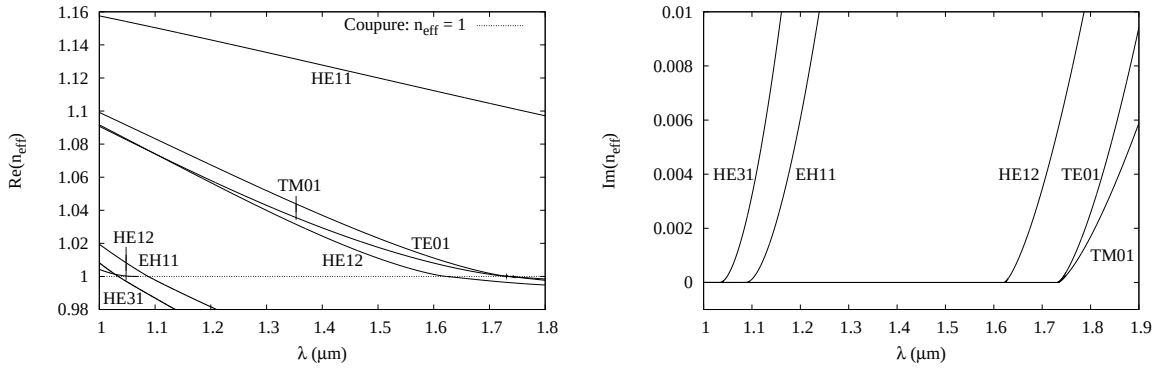


(g) $|E_z|$ pour le mode HE12

FIG. 6.10 – Cartes normalisées de $|E_z|$ ou $|H_z|$ à $\lambda = 1\ \mu m$, associés aux différents modes dont les indices effectifs apparaissent dans la figure 6.9

Modes	n_{eff}
HE_{11} (mode fondamental)	1.157560222
TE_{01}	1.099160766
TM_{01}	1.090782337
HE_{21}	1.091643156
EH_{11}	1.019438831
HE_{31}	1.008198767
HE_{12}	1.004285693

TAB. 6.5 – Valeurs des indices effectifs de la fibre conventionnelle étudiée



(a) $\Re e\,(n_{eff})$ en fonction de λ (b) $\Im m\,(n_{eff})$ en fonction de λ

FIG. 6.11 – $\Re e\,(n_{eff})$ et $\Im m\,(n_{eff})$ en fonction de λ pour les modes guidés de la figure 6.9

lorsqu'on se place sur un cercle centré sur la fibre optique, la répartition angulaire du champ laisse apparaître deux fois plus de maxima que l'ordre azimutal du mode. Par exemple, les six lobes de la figure 6.10(f) justifient l'ordre azimutal $\nu = 3$ du mode HE_{31}. Quant au nombre de maxima (à partir de l'origine) sur un axe radial, il vérifie le numéro du mode ($m \in \mathbb{N}^*$). Dans la figure 6.10(g), on observe 2 maxima sur le segment $x \in [0, 2]$ ($y = 0$), ce qui justifie le numéro $m = 2$ du mode HE_{12}. Parfois, nous illustrerons la composante en z du vecteur de Poynting afin de révéler la répartition de l'énergie électromagnétique du mode.

Régime de propagation à pertes des modes :

On entend par mode à pertes un mode dont l'énergie électromagnétique s'atténue lors de sa propagation dans la fibre selon un processus de fuite dans le milieu extérieur (la matrice). Les indices effectifs (et les constantes de propagation) deviennent alors des nombres complexes. En notant $n_{eff} = n' + in''$ ($n'' \geq 0$), le terme de propagation du champ $e^{ik_0 n_{eff} z}$ dans (6.1) s'écrit $e^{-k_0 n'' z} e^{ik_0 n' z}$. On remarque que la partie imaginaire de l'indice effectif est à l'origine de l'exponentielle décroissante $e^{-k_0 n'' z}$ caractérisant ainsi l'atténuation du champ selon z. En ce qui concerne la dépendance transverse du champ, les fonctions de Bessel intervenant dans son expression deviennent des fonctions complexes à argument complexe $\left(u = k_0 R\sqrt{n_{cyl}^2 - n_{eff}^2} \in \mathbb{C}\right)$. Le choix arbitraire de la coupure de la racine carrée [99] dans u étant conditionné par la conservation de l'énergie, le champ dans le plan tranverse peut croître exponentiellement et donc diverger lorsque r tend vers l'infini. Ce résultat s'interprète assez difficilement (voir section 2.4.3 de la référence [100] et l'introduction de l'ouvrage [31]), mais semble donner un sens aux fuites du champ dans la matrice. L'étude des expressions du champ montre que l'énergie du mode aura tendance à se délocaliser du coeur pour s'échapper dans la matrice. Il ne faut alors pas confondre ces modes à pertes et ceux qui se propageraient dans des milieux à pertes ou conducteurs. Dans ce dernier cas, les pertes s'expliquent par l'absorption du champ par le matériau (à cause de l'effet Joule, par exemple). Tous les modes possèdent les deux régimes de propagation guidée et à pertes. Tant que l'indice effectif reste compris entre n_{mat} et n_{cyl} le mode est guidé. On appelle *coupure* la transition entre le régime guidé ($n_{mat} \leq n_{eff} \leq n_{cyl}$, avec $n_{eff} \in \mathbb{R}$) et le régime à pertes ($\Re e\,(n_{eff}) < n_{mat}$, avec $n_{eff} \in \mathbb{C}$) des modes. A la coupure, la longueur d'onde, notée λ_c, telle que $n_{eff} = n_{mat}$ est appelée *longueur d'onde de coupure*, et on note V_c la *fréquence normalisée de coupure* correspondante. Les figures 6.11(a) et 6.11(b) montrent respectivement l'évolution de la partie réelle et imaginaire de l'indice effectif des sept modes précédents en fonction de la longueur d'onde (calcul de dispersion). Dans la figure 6.11(a), la longueur d'onde de coupure d'un mode correspond à l'intersection entre la courbe relative au mode et la droite d'équation $\Re e\,(n_{eff}) = n_{mat} = 1$ (en pointillé). Dans la figure 6.11(b), elle correspond à l'apparition d'une partie imaginaire de n_{eff} non nulle, c'est-à-dire au début de la croissance de la courbe. Pour les fibres conventionnelles à

Modes	Equation vérifiée par V_c	Numéro de la racine
TE_{0m} et TM_{0m}	$J_0(V_c) = 0$	$m^{\text{ème}}$
HE_{1m}	$J_1(V_c) = 0$	$(m-1)^{\text{ème}}$
$EH_{\nu m}$	$J_\nu(V_c) = 0$	$m^{\text{ème}}$
$HE_{\nu m}$	$\frac{V_c}{\nu-1}\frac{J_{\nu-2}(V_c)}{J_{\nu-1}(V_c)} = \frac{-2\Delta_{ind}}{1-2\Delta_{ind}}$	$m^{\text{ème}}$

TAB. 6.6 – Equations vérifiées par les fréquences normalisées de coupure pour une fibre conventionnelle à saut d'indice

Modes	V_c	λ_c
TE_{01} et TM_{01}	2.40475	1.73315
HE_{21}	2.56911	1.62227
EH_{11} et HE_{12}	3.83185	1.08767
HE_{31}	4.03133	1.03385

TAB. 6.7 – Fréquences normalisées de coupure et longueurs d'onde de coupure des sept modes de la figure 6.9, solutions des équations données dans le tableau 6.6

saut d'indice, les fréquences de coupures V_c des modes sont parfaitement identifiées. Le tableau 6.6 donne les équations (faisant intervenir les fonctions de Bessel) vérifiées par V_c selon le mode considéré (page 253 de la référence [21]). Pour les modes TE_{0m}, TM_{0m}, HE_{1m} et $EH_{\nu m}$, on constate que les fréquences de coupure restent, par définition, indépendantes des paramètres opto-géométriques de la fibre optique, contrairement aux modes $HE_{\nu m}$. La plus connue des fréquences de coupure est celle des modes TE_{01} et TM_{01} qui vaut 2.405 environ. Pour des fréquences normalisées en-dessous de cette valeur, un seul mode guidé (le mode fondamental) peut se propager dans la fibre appelée, dans ce cas, "fibre optique monomode". Le tableau 6.7 donne les fréquences de coupure et les longueurs d'onde de coupures des sept modes trouvés de la fibre optique considérée. Les valeurs de λ_c sont déduites de V_c par la relation $\lambda_c = \frac{2\pi R}{V_c}\sqrt{n_{cyl}^2 - n_{mat^2}}$ (voir la définition de V dans l'équation 6.38). Le mode fondamental n'a pas de coupure puisque $V_c = 0$ soit $\lambda_c = +\infty$. Toutes ces coupures se retrouvent dans les graphiques 6.11(a) et 6.11(b).

Comme pour la diffraction, les calculs numériques associés à cette configuration demeurent très rapides (une itération dure moins d'une seconde) du fait de la détermination semi-analytique de la matrice de transmission $T^{(c)}$ (3.111).

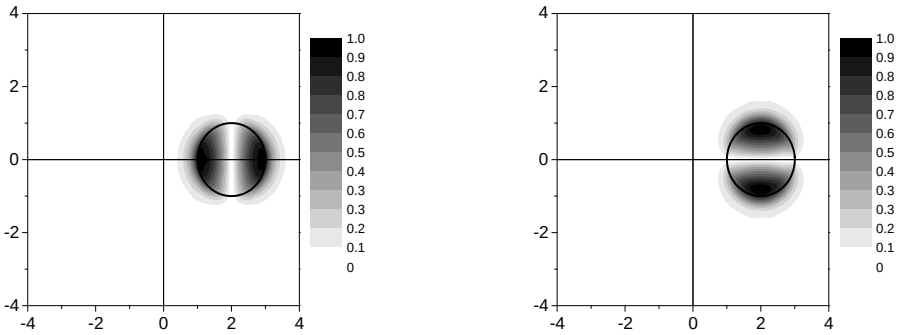
6.5.2 Cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine

Description de la fibre optique étudiée :

La validation de la méthode différentielle s'effectue de la même manière que pour la diffraction. Nous allons comparer certains résultats obtenus précédemment pour la fibre optique à section circulaire centrée sur l'origine du repère (absence d'intégration) avec ceux de la même structure mais excentrée (voir figures 3.15(a) et 3.15(b)). Pour cette dernière configuration, la méthode FFF et l'algorithme S s'avèrent nécessaires au calcul de la matrice $Z_i^{(L)}$. Les notations restent inchangées et les paramètres prennent les valeurs suivantes :

Paramètres géométriques	*Valeurs*
R	1 μm
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1
Autres paramètres	
λ	1 à 1.9 μm

Paramètres numériques	*Valeurs*
N	15 à 40
τ_c	10%
L_1 et L_2	6,10,14 et 18
L_3	3,5,7 et 9
P_1, P_2 et P_3	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	8
$\mathcal{A}_p$	9



(a) Carte de $|E_z|$ du mode fondamental respectant la symétrie $C1$

(b) Carte de $|E_z|$ du mode fondamental respectant la symétrie $C2$

FIG. 6.12 – Illustration de la dégénérescence des classes $C1$ et $C2$ pour le cylindre circulaire excentré

Cette configuration induit une symétrie de type C_{1v}. Le décalage du centre du cylindre circulaire sur l'axe x a donc pour effet de faire perdre un nombre considérable (infini) de symétries dans la représentation de la structure (on passe de $C_{\infty v}$ à C_{1v}). On ne peut alors plus appliquer rigoureusement la nomenclature des classes de symétrie (section 6.3) basée sur les travaux de McIsaac [37, 38]. Ce dernier précise bien que la représentation de la structure en question doit faire intervenir l'ensemble des symétries possibles. Dans notre cas, il s'agit de la configuration centrée de la fibre circulaire (voir section précédente). En fait, il stipule que des dégénérescences, non prévues initialement, de certaines classes de symétrie peuvent apparaître si toutes les symétries ne sont pas prises en compte (voir dixième paragraphe du III à la page 431 de l'article [37]). Sur notre cylindre circulaire C_{1v}, on devrait précisément observer ces "dégénérescences accidentelles" comme McIsaac les a nommées. D'après le tableau 6.4, il existe deux classes de symétries $C1$ et $C2$ non dégénérées. Nous allons démontrer que ces deux classes de symétries sont en fait dégénérées dans le cas du cylindre circulaire excentré. La classe $C1$ correspond à des champs E_z symétriques par rapport à l'axe x et la classe $C2$ à des champs E_z antisymétriques. Or, on sait que les modes de type HE ou EH sont tous dégénérés deux fois. Par exemple, la figure 6.12(a) illustre le champ appartenant à la classse de symétrie $C1$ (E_z symétrique), alors que la figure 6.12(b) montre le champ de la classe de symétrie $C2$ (antisymétrique). D'après leur dégénérescence théorique (nous allons voir plus loin qu'il existe pourtant une dégénérescence due aux calculs numériques), ces deux champs sont tous les deux associés au même mode fondamental, ce qui illustre la dégénérescence accidentelle pouvant se produire au sein des deux classes de symétrie $C1$ et $C2$ dans le cas du cylindre circulaire excentré. Etant donné qu'il n'y a pas de sous-périodicité angulaire ($T = 2\pi$), il n'existe qu'un seul ensemble $\mathcal{I}_1$ de coefficients de Fourier couplés (voir le tableau 6.4), sur lequel se répartissent les modes des classes $C1$ et $C2$. Par conséquent, les matrices $Z_i^{(L)}$ se réduisent à l'unique matrice $Z_1^{(L)}$.

Nous allons essentiellement nous intéresser au mode fondamental. Avant d'aborder en détail l'analyse des résultats numériques, nous pouvons déjà illustrer la recherche de l'indice effectif par l'algorithme décrit dans la section 6.4.1. Pour la recherche du mode fondamental, les paramètres sont tels que $\lambda = 1\ \mu m$, $L_1 = L_2 = 10$, $L_3 = 5$ et $N = 20$. La figure 6.13 représente la carte de déterminant (étape d'initialisation de la recherche) dans une région du plan complexe telle que $1.157 \leq \Re e\,(n_{eff}) \leq 1.158$ et $-1.10^{-3} \leq \Im m\,(n_{eff}) \leq 1.10^{3}$. Le nombre de point en partie réelle est $N_{Re} = 7$ et en partie imaginaire $N_{Im} = 5$. Les valeurs de n_{eff} considérées pour le calcul de f_{det} se localisent aux points d'intersection du quadrillage apparant. L'indice effectif de plus petite valeur de f_{det} vaut : $1.1575 + i0$ (la partie imaginaire de l'indice effectif d'un mode guidé est nulle). La seconde étape de la recherche (par encadrement et par régression linéaire complexe) est lancée a partir de ce point de départ. Il a fallu 23 itérations pour trouver l'indice effectif à la précision

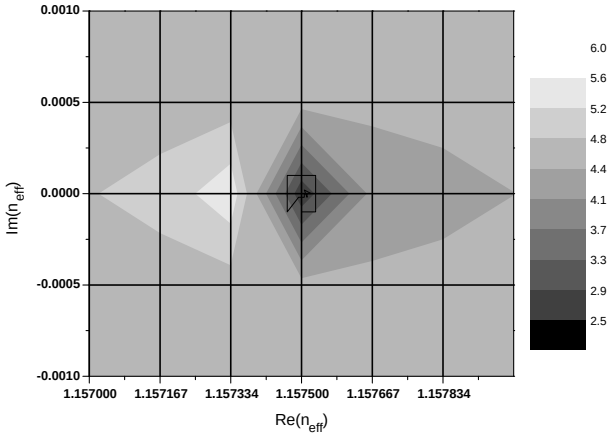
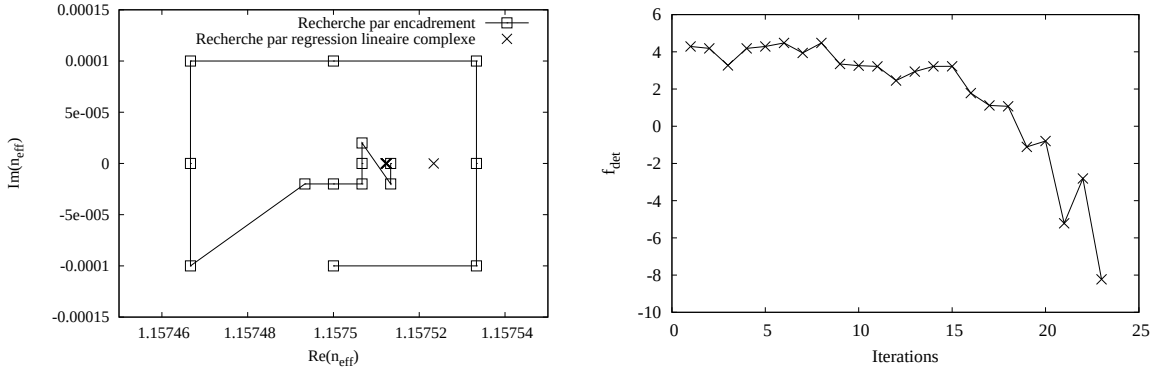


FIG. 6.13 – Initialisation de la recherche de l'indice effectif du mode fondamental du cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine : Carte de déterminant. La barre de l'échelle des couleurs représente les valeurs de $f_{det}(n'_{eff})$



(a) Indices effectifs pour chaque itération de la recherche (b) Valeur de f_{det} pour chaque itération de la recherche

FIG. 6.14 – Recherche de l'indice effectif du mode fondamental du cylindre circulaire excentré par rapport à l'origine. A la fin du processus de recherche, la valeur trouvée est $n_{eff} = 1.157512382 + i0$

souhaitée : facteur de décroissance du déterminant de $Z_1^{(L)}$ égal à 10^8 et/ou précision en partie réelle et imaginaire inférieure à 10^{-9}. Dans le cas présent, la recherche de n_{eff} s'est arrêtée en vérifiant les deux critères à la fois. La figure 6.14(a) montre le suivi de l'indice effectif pour chaque itération de la recherche. Les 15 premiers points (reliés entre eux par des segments) sont relatifs à la recherche par encadrement qui a enchaîné un zoom (après les huits premiers points) et un déplacement (après les 6 points suivants). L'exécution de l'algorithme est conclue par une recherche par régression linéaire complexe, représentée par les 2 derniers points (croix dans la figure 6.14(a), les sept derniers points semblent superposés). Enfin, la figure 6.14(b) montre la décroissance de f_{det} en fonction de l'ensemble des itérations de la recherche. La décroissance reste modérée pendant la recherche par encadrement (diminution du logarithme d'un facteur 3 seulement), mais elle s'accélère nettement dès que la recherche par régression linéaire complexe débute (chute du logarithme d'un facteur 8 environ). La valeur de l'indice effectif trouvée est $n_{eff} = 1.157512382 + i0$ et vérifie les deux critères d'arrêt. L'ensemble du processus de recherche de n_{eff} (carte de déterminant et recherche fine) a nécessité 60 itérations, ce qui représente un temps de calcul de 12 minutes environ.

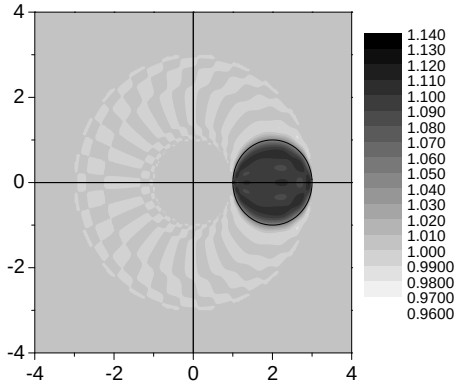


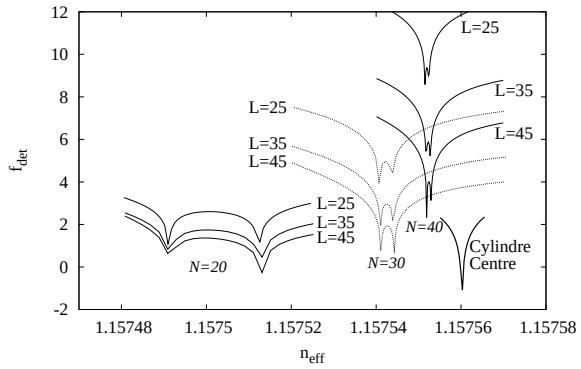
FIG. 6.15 – Reconstruction de la permittivité "vue" par le programme numérique. Les dissymétries sont produites par la troncature du développement et la discrétisation de la zone modulée (en couches S et en pas d'intégration)

Dégénérescence numérique :

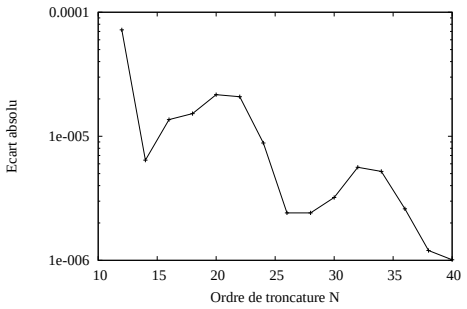
En théorie, on s'attend à ce que la fonction $f_{det}(n'_{eff})$ ne présente qu'un seul minima vers l'indice effectif du mode fondamental, comme nous l'avons déjà observé sur la carte de déterminant de la figure 6.13. Mais, si on réduit la zone de recherche (zoom), on voit apparaître deux minima relativement proches. Cette levée de dégénérescence provient de l'aspect purement numérique des calculs. En effet, le champ E_z symétrique par rapport à l'axe x (de classe $C1$, figure 6.12(a)) ne "voit" pas tout-à-fait le même objet opto-géométrique que le champ E_z antisymétrique (de classe $C2$, figure 6.12(b)). La discrétisation de la zone modulée par les couches S et les pas d'intégration induit une dissymétrie radiale des grandeurs opto-géométriques dans la structure modélisée. De même, une dissymétrie angulaire est engendrée par le phénomène de Gibbs qui apparaît lors de la reconstruction par les développements tronqués des ces mêmes grandeurs. Par exemple, la répartition de la permittivité (fonction $\epsilon(r,\theta)$ donnée par (3.113) avec $\epsilon_{cyl} = \sqrt{1.2} \approx 1.095$) "vue" par le programme numérique est illustrée dans la figure 6.15, avec $N = 20$, $L_1 = L_2 = 10$, $L_3 = 5$ et $P_1 = P_2 = P_3 = 10$. Dans toute la zone modulée, il apparaît de faibles ondulations de la permittivité caractéristiques du phénomène de Gibbs. L'aspect le plus intéressant de cette figure reste la répartition de la permittivité autour du cercle : elle ne décrit pas un cercle parfait mais elle prend plutôt la forme d'une ellipse qui s'étire parallèlement à l'axe y. On constaterait les mêmes effets concernant les grandeurs géométriques, comme les vecteurs N_θ^2, N_r^2 et $N_r N_\theta$ intervenant dans la matrice Q_ϵ (3.15). Cette déformation numérique du cercle explique la levée de dégénérescence observée. On se doute que cette dernière doit être d'autant moins importante que la forme (opto-géométrique) du cercle est bien modélisée, c'est-à-dire lorsque les paramètres d'intégration (L_i et P_i, $i \in [1,3]$) et l'ordre de troncature des développements N augmentent. La figure 6.16(a) représente la fonction $f_{det}(n'_{eff})$ avec $n'_{eff} \in \mathbb{R}$, pour différentes valeurs de N et $L = L_1 + L_2 + L_3$. On constate que la distance (écart absolu) entre les indices effectifs des deux champs non dégénérés du mode fondamental est plus sensible à la variation de l'ordre de troncature N que le nombre total de couche S. Lorsque N augmente (pour une valeur de L fixée), ces deux indices effectifs se rapprochent, ce qui confirme notre hypothèse (voir également la figure 6.16(b) établie pour $L = 25$). En outre, on note la convergence selon N de l'ensemble des indices effectifs vers celui prévu par le calcul sur le cylindre centré.

De la recherche de mode à la diffraction :

Nous avons à disposition un unique code numérique qui permet d'étudier à la fois la diffraction et la recherche de mode dans des structures cylindriques. Nous nous sommes naturellement demandé comment un mode d'une fibre optique, dont l'indice effectif a été préalablement trouvé par le problème modal, pourrait être excité par diffraction d'une onde plane. Nous allons considérer



(a) Représentation de $f_{det}(n'_{eff})$ pour différentes valeurs de N et L et pour le cylindre circulaire centré. Les double pics traduisent la levée de dégénérescence numérique



(b) Convergence de l'écart absolu (distance) entre les indices effectifs des champs non dégénérés

FIG. 6.16 – Etude de la dégénérescence numérique du mode fondamental

successivement deux modes du cylindre circulaire excentré précédent : le mode fondamental (mode guidé) à $\lambda = 1\ \mu m$, puis le mode HE_{31} à $\lambda = 1.08\ \mu m$ (mode à pertes puisque $\lambda < \lambda_c$).
Avant tout, nous avons cherché à évaluer la précision des calculs pour la recherche de mode par des tests de convergence selon l'ordre de troncature N. Les paramètres sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	$1\ \mu m$
R_0	$2\ \mu m$
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1
Autres paramètres	
λ	$1\ \mu m$ (HE_{11}) et $1.08\ \mu m$ (HE_{31})

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	20 à 40
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

Respectivement pour chacun de ces modes, les deux courbes de la figure 6.17 représentent l'écart relatif selon N entre le module de l'indice effectif associé au cylindre excentré par rapport à celui trouvé pour le cylindre centré. Sur l'ensemble des valeurs de N testées, la précision du mode HE_{11} reste meilleure que celle du mode HE_{31}. A $N = 40$, la précision atteint un écart relatif d'environ 6.10^{-6} pour le mode HE_{11} et 4.10^{-5} pour le mode HE_{31}. Ce résultat est tout-à-fait normal à la vue des spectres de Fourier (module des amplitudes) normalisés des champs dans la région extérieure du mode fondamental (voir figure 6.18(a)) et du mode HE_{31} (voir figure 6.18(b)) à leurs longueurs d'onde respectives et à $N = 40$. Ils permettent de rendre compte de l'élargissement des spectres induit par le déplacement du cylindre en plaçant l'origine du repère en dehors de sa surface (pour le cylindre centré, on rappelle que le spectre de Fourier de HE_{11} n'est composé que de coefficients non nuls aux ordres -1 et 1, et pour le mode HE_{31}, aux ordres -3 et 3).
On se place désormais en régime diffraction. On sait que le terme γ_0 s'identifie à la constante de propagation β. Ainsi, la condition d'excitation d'un mode d'indice effectif n_{eff} par la diffraction prend la forme :

$$\gamma_0 = k_0 n_{eff} \tag{6.41}$$

Pour le mode fondamental HE_{11}, le terme γ_0 est réel puisque $n_{eff} \in \mathbb{R}$. Par contre, la composante transverse du vecteur d'onde incident $k_{t,ext} = k_0^2\sqrt{n_{ext}^2 - n_{eff}^2}$ (2.46) devient un nombre complexe ($n_{eff} > n_{ext}$). Autrement dit, l'expression du champ incident donnée par (3.6) révèle que l'onde plane excitatrice du mode fondamental dans la matrice est une onde propagative selon z ($\gamma_0 \in \mathbb{R}$)

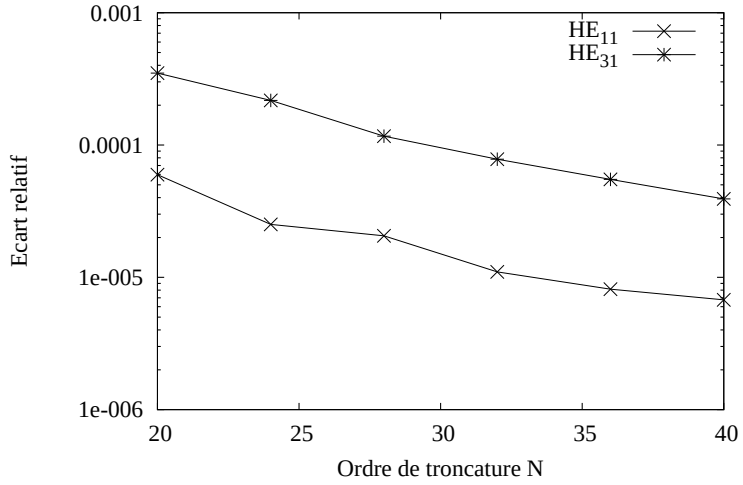
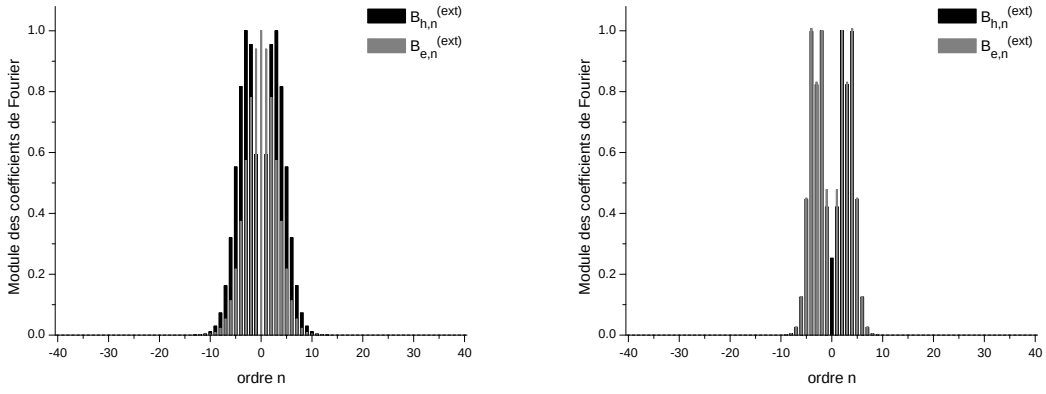


FIG. 6.17 – Convergence selon N de l'indice effectif



(a) Mode HE_{11} (b) Mode HE_{31}

FIG. 6.18 – Spectre de Fourier du module des amplitudes pour le champ électrique et magnétique dans la région extérieure, en régime modal

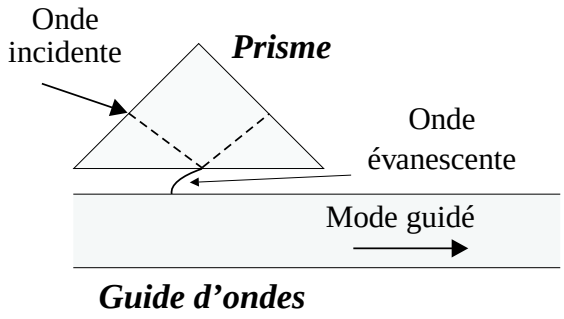
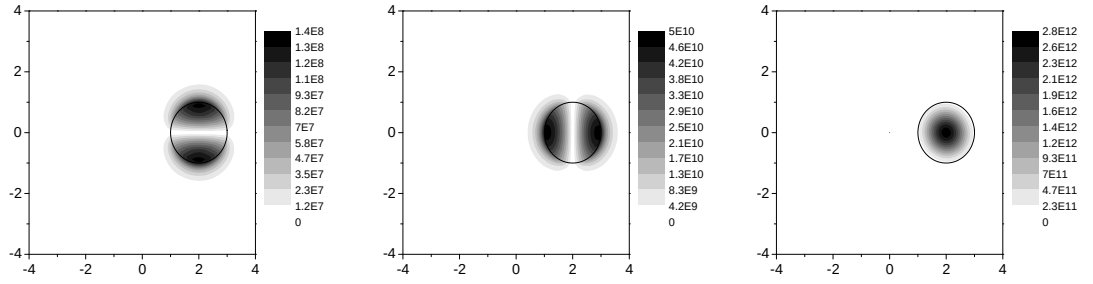


FIG. 6.19 – Principe d'un coupleur à prisme

mais évanescente dans le plan de section droite ($k_{t,ext} \in \mathbb{C}$). La coupure de la racine carrée dans l'expression de $k_{t,ext}$ est choisie de telle sorte que le champ transverse reste effectivement évanescent et non divergent. On retrouve le principe bien connu des coupleurs à prisme (voir figure 6.19). Un faisceau lumineux monochromatique (spectre étroit en longueur d'onde) éclaire le prisme dans lequel les rayons propagatifs sont réfléchis à son interface coplanaire au guide d'ondes. Ainsi, seules les ondes évanescentes sont transmises dans la fine couche d'air comprise entre le prisme et ce guide. Il existe un seul angle d'inclinaison du faisceau lumineux qui permet d'exciter le mode recherché. On peut désormais s'intéresser plus en détail aux paramètres de l'onde plane excitatrice. D'après la relation (2.48), l'angle φ_{inc} est imposé par l'indice effectif du mode :

$$\varphi_{inc} = -arcsin\left(\frac{n_{eff}}{n_{ext}}\right)$$

Etant donné que $n_{eff} > n_{ext}$, l'angle φ_{inc} devient un nombre complexe, difficile à interpréter et à determiner (coupure de la fonction $arcsin$). Les paramètres $E_{0,z}^{(inc)}$ (2.49) et $H_{0,z}^{(inc)}$ (2.50) deviennent des amplitudes complexes via le terme $\cos(\varphi_{inc})$. Sachant que les autres composantes du champ incident restent proportionnelles à $E_{0,z}^{(inc)}$ et $H_{0,z}^{(inc)}$ (voir les relations (3.29) à (3.32)), elles peuvent également s'exprimer proportionnellement à $\cos(\varphi_{inc})$. En pratique, il n'est donc pas nécessaire de tenir compte de ce facteur $\cos(\varphi_{inc})$, choisi égal à l'unité. En outre, on injecte directement dans le programme la valeur de γ_0 (et non φ_{inc}) lorsqu'on souhaite exciter un mode. Tous les autres paramètres de l'onde plane incidente, à savoir θ_{inc}, ψ_{inc} et $\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$, restent définis arbitrairement. Cependant, ils jouent un rôle dans le degré d'excitation du mode. Par exemple, l'angle azimutal ψ_{inc} permet de contrôler la polarisation des champs électrique et magnétique incidents. Supposons qu'on souhaite exciter le mode TE_{01} dont les seules composantes du champ non nulles sont H_z, E_r et E_θ. Si $\theta_{inc} = 0^o$ et $\psi_{inc} = 0^o$, les seules composantes non nulles du champ incident sont E_z et H_r, d'après les expressions 2.49 et 2.50 (avec $\cos(\varphi_{inc}) = 1$ et $\sin(\varphi_{inc}) = 0$). Il n'y a donc aucune chance d'exciter ce mode avec cet ensemble de paramètres. Par contre, si $\theta_{inc} = 0^o$ et $\psi_{inc} = 90^o$, l'excitation est maximale. Pour les autres modes dégénérés (HE_{11} et HE_{31}, en particulier), on généralise ce raisonnement. Lorsque $\psi_{inc} = 0^o$, on obtient $H_{0,z}^{(inc)} = 0$ et $E_{0,z}^{(inc)} \neq 0$ d'après les expressions (2.49) et (2.50). Par conséquent, la symétrie du mode éclairé est imposée par celle de $E_z^{(inc)}(r,\theta,z)$. Si $\theta_{inc} = 0^o$ alors $E_z^{(inc)}(r,\theta,z)$ est symétrique par rapport à l'axe X (3.8) : on excite le champ $|E_z|$ du mode symétrique par rapport à l'axe X. Si $\theta_{inc} = 90^o$ alors $E_z^{(inc)}(r,\theta,z)$ devient antisymétrique : on excite le champ $|E_z|$ du mode antisymétrique. La situation s'inverse lorsque $\psi_{inc} = 90^o$: Si $\theta_{inc} = 0^o$, le champ $|E_z|$ du mode excité est antisymétrique; Si $\theta_{inc} = 90^o$, le champ $|E_z|$ du mode excité est symétrique. Nous limiterons notre étude au mode antisymétrique : $\psi_{inc} = 90^o$ et $\theta_{inc} = 0^o$. Par défaut, on prend $\psi_{inc} = 90^o$ afin d'exciter autant le champ électrique que le champ magnétique. Dans le but



(a) $|E_z^d|$ (b) $|H_z^d|$ (c) $|\mathcal{P}_z^d|$

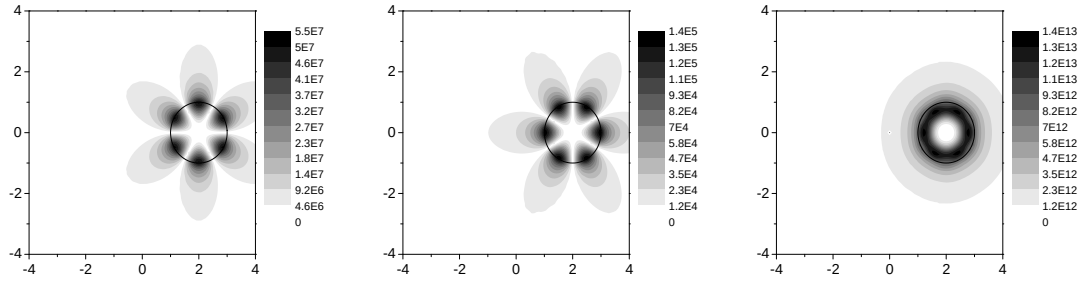
FIG. 6.20 – Cartes de champs du mode HE_{11} excité par diffraction

d'éclairer les modes HE_{11} et HE_{31}, on prend les paramètres suivants :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
R	1 μm (HE_{11}) 1.08 μm (HE_{31})
R_0	2 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1

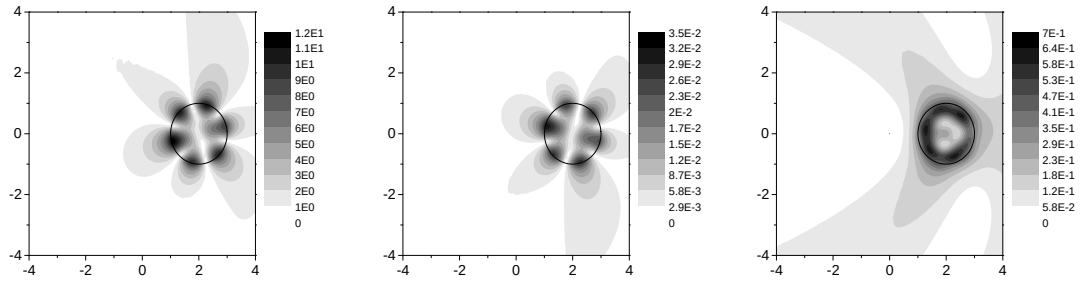
Paramètres de l'onde plane incidente	***Valeurs***
λ	1 μm
θ_{inc}	0^o
ψ_{inc}	90^o
$\left\|\vec{E}^{(inc)}\right\|$	1
n_{eff} ($\gamma_0 = k_0 n_{eff}$)	1.1575524 (HE_{11}) $0.990752712 + i1.72525\ 10^{-3}$ (HE_{31})
Paramètres numériques	
N	40
τ_c	10%
L_1 et L_2	10
L_3	5
P_1, P_2 et P_3	10

Pour le problème modal, la matrice S^{-1} évaluée à la constante de propagation β d'un mode devient singulière. Pour le problème de diffraction, elle correspond à un pôle de S dont certaines valeurs divergent. On s'attend alors à ce que les champs divergent d'autant plus que la valeur de γ_0 est proche de la constante de propagation du mode. Les figures 6.20(a)à 6.20(b) et 6.20(c) illustrent les champs diffractés transverses (en module) respectivement pour les composantes E_z^d, H_z^d et $\mathcal{P}_z^d$. A la vue de l'échelle des couleurs, on vérifie bien que les valeurs soient très élevées. En fait, nous n'avions pas pris la valeur de n_{eff} à la précision (10^{-9}) obtenue par la résolution du problème modal car les valeurs des champs dépassent 10^{15} dans ce cas. Nous cherchons maintenant à exciter le mode à pertes HE_{31}. L'indice effectif trouvé par la résolution du problème modal est un nombre complexe valant $n_{eff} = 0.990752712 + 1.72525\ 10^{-3}i$. Dans la matrice, l'onde plane incidente associée est alors une onde évanescente selon z et dans le plan de section droite, puisque $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ (6.41) et $k_{t,ext} \in \mathbb{C}$. En prenant cet indice effectif complexe, le champ du mode est complètement excité (voir les cartes de champs 6.21(a) à 6.21(c)). Si on tient compte seulement de la partie réelle de n_{eff}, l'onde plane incidente devient totalement propagative dans la matrice puisque $\gamma_0 = k_0 \Re e\,(n_{eff}) \in \mathbb{R}$ et $k_{t,ext} \in \mathbb{R}$. Cependant, le mode devient partiellement excité, ce qui laisse apparaître les effets de la diffraction (pertes des symétries) dans les cartes de champs 6.22(a) à 6.22(c).



(a) $|E_z^d|$ (b) $|H_z^d|$ (c) $|\mathcal{P}_z^d|$

FIG. 6.21 – Cartes de champs du mode HE_{31} excité complètement par diffraction avec $\gamma_0 = k_0 n_{eff}$



(a) $|E_z^d|$ (b) $|H_z^d|$ (c) $|\mathcal{P}_z^d|$

FIG. 6.22 – Cartes de champs du mode HE_{31} excité partiellement par diffraction avec $\gamma_0 = k_0 \Re e\,(n_{eff})$

6.6 Application numérique à d'autres structures géométriques simples

6.6.1 Cylindre de section elliptique

Nous reprenons les mêmes cylindres elliptiques que ceux étudiés en diffraction classique (voir section 4.2.3). Autrement dit, nous cherchons à observer l'effet de l'excentricité d'une ellipse d'aire identique à celle du cercle (de rayon $R = 1\ \mu m$). Le profil (voir figure 2.1(a)) laisse apparaître une symétrie du type C_{2v}. D'après le tableau 6.4, les modes se répartissent en quatre classes de symétrie, toutes non dégénérées. Ainsi, la brisure de la symétrie $C_{\infty v}$ (cylindre circulaire centré) en C_{2v} induit une levée de dégénérescence. Les deux champs initialement dégénérés du mode fondamental deviennent non dégénérés. Ils appartiennent à la classe de symétrie $C3$ pour le champ antisymétrique par rapport à l'axe x, et à la classe $C4$ pour le champ symétrique. Les paramètres de l'étude numérique sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
b	0.7, 0.8, 0.9 et 0.95 μm
$a\ (= R^2/b)$	1/b μm
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1
Autres paramètres	
λ	1 à 1.9 μm

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	10
L	10
P	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	5
$\mathcal{A}_p$	9

La figure 6.23 montre l'évolution de l'indice effectif du mode fondamental à $\lambda = 1\ \mu m$ pour les classes de symétrie $C3$ et $C4$, en fonction du demi-petit axe b. La droite en pointillé correspond à la valeur de l'indice effectif trouvée pour le monde fondamental du cylindre centré (voir section 6.5.1). On vérifie que les indices effectifs des modes dégénérés se rapprochent lorsque a augmente, jusqu'à devenir égaux

(dégénérescence) pour le cas limite de la fibre circulaire. On note également que ces indices effectifs tendent à encadrer celui du cylindre circulaire lorsque le cercle est faiblement déformé ($b = 0.95\ \mu m$). Ce résultat est prévu à la page 383 de la référence [21]. Pour $b = 0.7\ \mu m$, les spectres de Fourier normalisés des champs dans le milieu extérieur pour le mode $C3$ (voir figure 6.24) justifient le choix de la valeur de l'ordre maximal de troncature ($N = 10$). Les figures 6.25(a) à 6.25(c) illustrent les cartes de champs (module de E_z, H_z et $\mathcal{P}_z$) pour le mode $C3$ et les figures 6.26(a) à 6.26(c) pour le mode $C4$. Les figures 6.27(a) et 6.27(b) représentent la dispersion chromatique en fonction de λ respectivement pour les modes $C3$ et $C4$. La courbe en trait plein correspond à la dispersion du mode fondamental du cylindre circulaire centré. La figure révèle que l'excentricité de l'ellipse influence différemment la dispersion de chacun de ces modes.

6.6.2 Cylindre de section rectangulaire

On considère une nouvelle géométrie : un cylindre à section rectangulaire. Avant d'aborder l'analyse de quelques résultats numériques, nous allons décrire cette structure d'un point de vue de la méthode différentielle (zone modulée et matrices de Toeplitz). Dans un second temps, nous illustrerons les résultats numériques en procédant de la même manière que pour le cylindre elliptique : nous étudierons le mode fondamental d'une section carrée qui sera ensuite déformée progressivement en rectangle.

Description du système :

La largeur de la section droite rectangulaire est notée l_1 et la longueur l_2. La zone modulée est comprise entre le cylindre circulaire C_{min} de rayon $R_{min} = \frac{l_1}{2}$ et le cylindre circulaire C_{max} de rayon $R_{max} = \frac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{2}$ (voir figure 6.28). On la divise en deux sous-zones modulées grâce au cylindre ciculaire $C_{\frac{l_2}{2}}$. La première d'entre elles, comprise entre C_{min} et $C_{\frac{l_2}{2}}$, est subdivisée en L_1 couches S, chacune discrétisée en P_1 pas d'intégration. Le cylindre circulaire C_r ($\frac{l}{2} < r < \frac{L}{2}$) et le profil rectangulaire se coupent en quatre points d'angles $\widetilde{\theta}(r)$, $\pi - \widetilde{\theta}(r)$, $-\pi + \widetilde{\theta}(r)$ et $-\widetilde{\theta}(r)$, avec :

$$\widetilde{\theta}(r) = arcsin\left(\frac{l_1}{2r}\right)$$

La seconde sous-zone modulée, comprise entre $C_{\frac{l_2}{2}}$ et C_{max}, est subdivisée en L_2 couches S, chacune discrétisée en P_2 pas d'intégration. L'intersection entre un cylindre C_r ($\frac{l_2}{2} < r < \frac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{2}$) avec le cylindre rectangulaire est définie en quatre couples de points d'angles $\left(\widetilde{\theta}_1(r), \widetilde{\theta}_2(r)\right)$, $\left(\pi - \widetilde{\theta}_1(r), \pi - \widetilde{\theta}_2(r)\right)$, $\left(\pi + \widetilde{\theta}_1(r), \pi + \widetilde{\theta}_2(r)\right)$ et $\left(-\widetilde{\theta}_1(r), -\widetilde{\theta}_2(r)\right)$, avec :

$$\widetilde{\theta}_1(r) = arccos\left(\frac{l_2}{2r}\right) \text{ et } \widetilde{\theta}_2(r) = arcsin\left(\frac{l_1}{2r}\right)$$

Le calcul des coefficients de Fourier qui constituent les matrices de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$, $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$, $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$ se déduisent comme pour le cylindre circulaire excentré (voir section 3.5.3) ou elliptique (voir section 4.2.3), à partir de ces valeurs de $\widetilde{\theta}(r)$ ou $\widetilde{\theta}_1(r)$ et $\widetilde{\theta}_2(r)$. Comme pour le cylindre elliptique, nous considérerons des sections rectangulaires telle que l'aire soit égale à celle du cercle étudié précédemment (de rayon R) :

$$l_2 = \frac{\pi R^2}{l_1}$$

Section droite carrée :

Pour commencer, étudions le cas particulier du carré ($l_1 = l_2$), ce qui implique que $C_{\frac{l_2}{2}} = C_{min}$. La première sous-zone modulée disparaît pour ne laisser place qu'à la seconde avec $L_2 = L$ couches S, chacune discrétisée en $P_2 = P$ pas d'intégration. La symétrie devient du type C_{4v}, ce qui induit l'existence de six classes de symétries : $C1$, $C2$, $C5$ et $C6$ sont non dégénérées alors que $C3/4$ est dégénérée (deux fois). Nous limitons l'étude au mode fondamental qui appartient à ce dernier

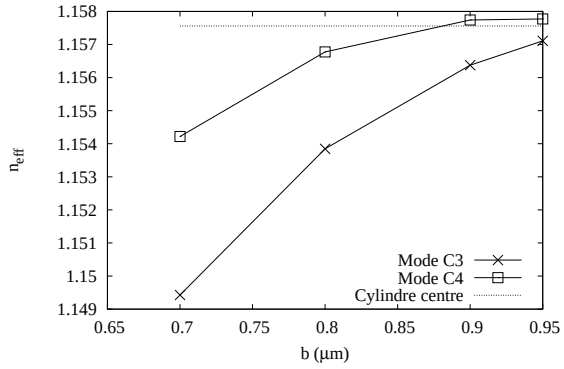


FIG. 6.23 – Indice effectif des modes fondamentaux de classes de symétrie $C3$ et $C4$ en fonction du demi-petit axe à $\lambda = 1\ \mu m$

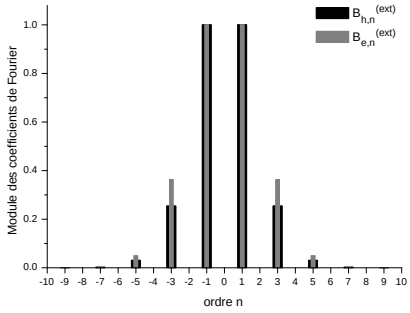
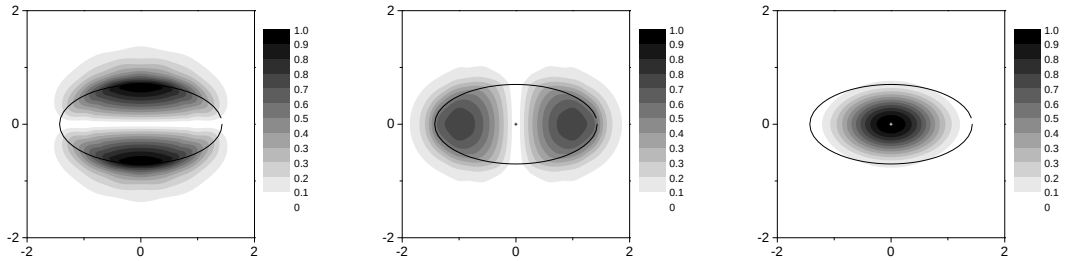
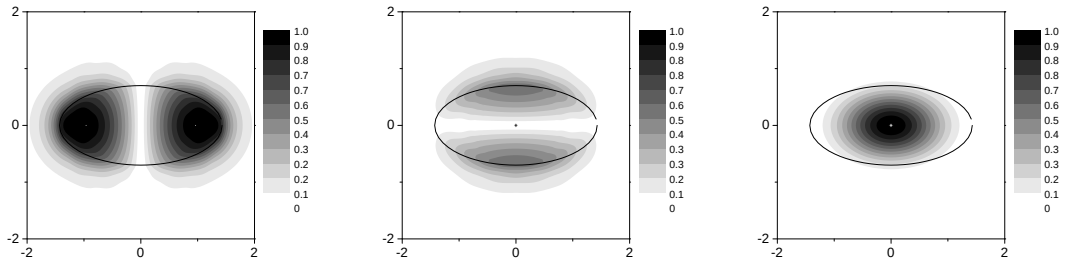


FIG. 6.24 – Spectre de Fourier du mode fondamental de classe de symétrie $C3$ pour $b = 0.7$



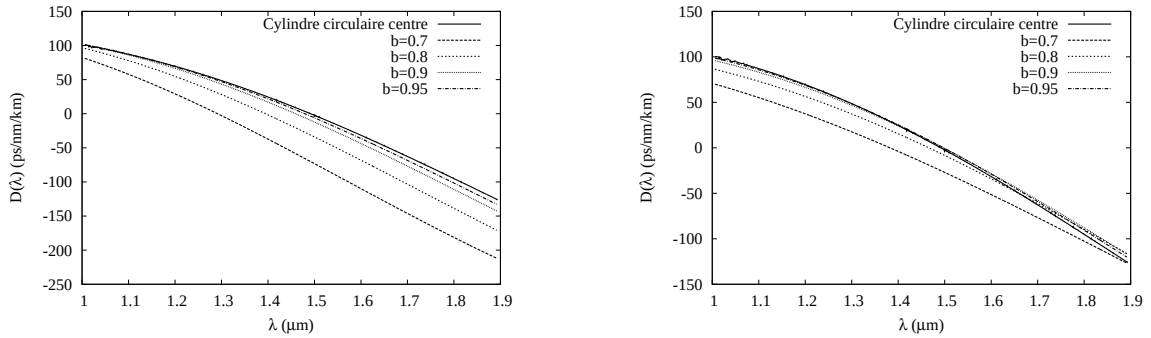
(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 6.25 – Cartes de champs du mode fondamental de classe de symétrie $C3$ pour $b = 0.7$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 6.26 – Cartes de champs du mode fondamental de classe de symétrie $C4$ pour $b = 0.7$



(a) Mode de classe de symétrie $C3$ (b) Mode de classe de symétrie $C3$

FIG. 6.27 – Courbes de dispersion chromatique du mode fondamental pour le cylindre elliptique et le cylindre circulaire centré

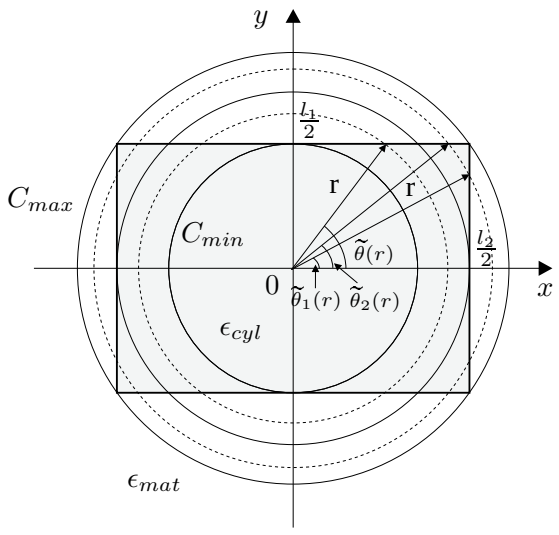
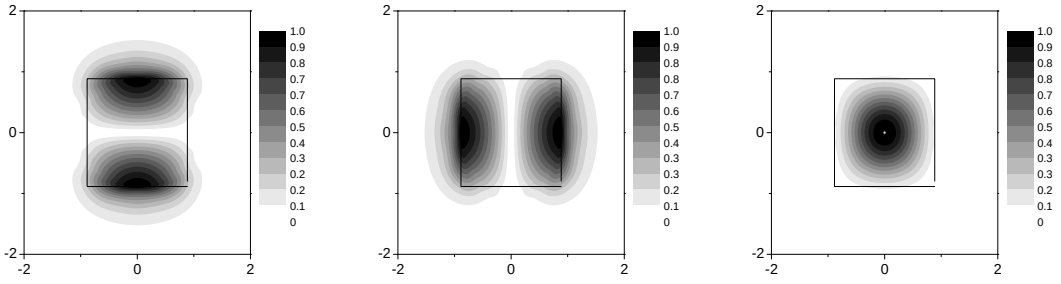


FIG. 6.28 – Fibre optique à section droite rectangulaire



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 6.29 – Cartes de champs du mode fondamental de classe de symétrie $C3$ du cylindre à section carrée

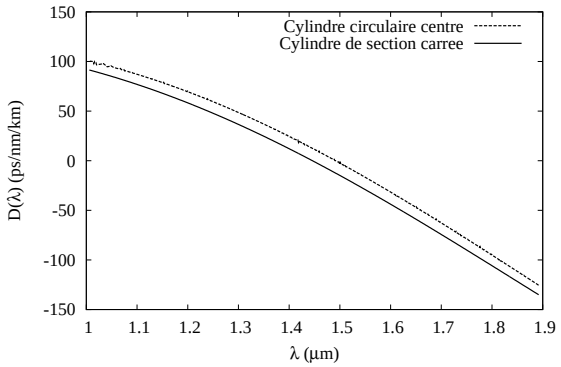


FIG. 6.30 – Courbes de dispersion du mode fondamental pour le cylindre à section carrée en comparaison avec celle du cylindre circulaire centré

couple de classes de symétrie. Nous considérons le cylindre avec les paramètres suivants :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
$l_1\ (= R\sqrt{\pi})$	1.77245385 μm
$l_2\ (= l_1)$	1.77245385 μm
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1
Autres paramètres	
λ	1 à 1.9 μm

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	10
L	10
P	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	5
$\mathcal{A}_p$	9

Pour $\lambda = 1\ \mu m$, l'indice effectif trouvé vaut : $n_{eff} = 1.155823819$. Il se situe à proximité de son homologue du cylindre circulaire centré, puisque l'écart relatif entre les deux indices effectifs vaut $1.5\ 10^{-3}$ environ. Les figures 6.29(a) à 6.29(c) montrent les cartes du champ dégénéré de le classe de symétrie $C3$ du mode fondamental. La figure 6.30 représente la courbe de dispersion chromatique du mode fondamental sur l'intervalle de longueur $[1, 1.9]$ (μm) en comparaison avec celle obtenue par le cylindre circulaire centré. Leurs monotonies semblent très proches.

Section droite rectangulaire :

Le cylindre à section carrée précédent va être déformé en cylindre rectangulaire. La symétrie du profil devient du type C_{2v}, comme pour le cylindre elliptique. Il apparaît alors les mêmes classes de symétrie, toutes non dégénérées. Le mode fondamental appartient toujours à la classe de symétrie $C3$ pour le champ antisymétrique par rapport à l'axe x, et à la classe $C4$ pour le champ symétrique.

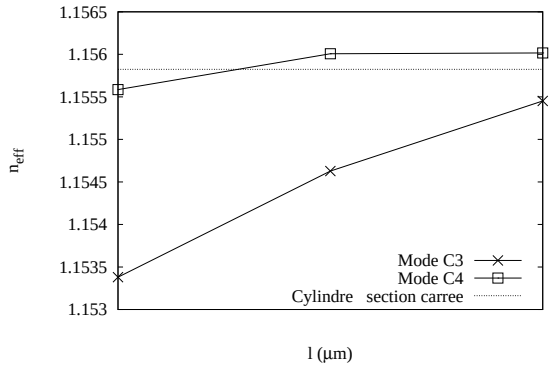


FIG. 6.31 – Indice effectif des modes fondamentaux de classes de symétrie $C3$ et $C4$ en fonction de la largeur l_1 à $\lambda = 1\ \mu m$

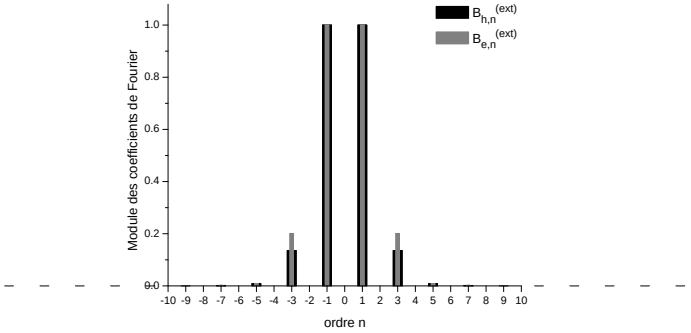


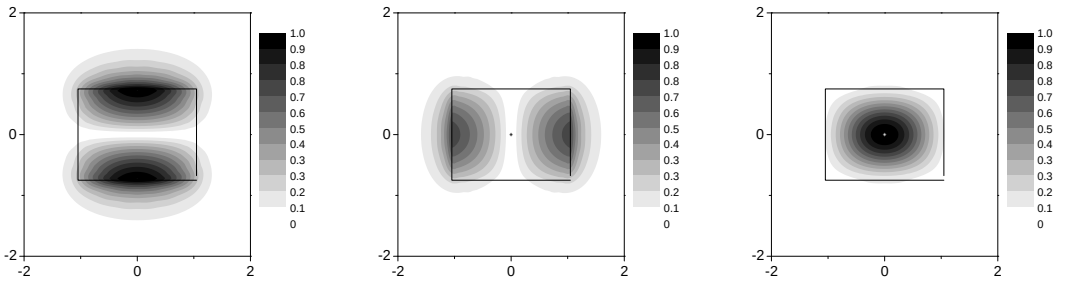
FIG. 6.32 – Spectre de Fourier du mode fondamental de classe de symétrie $C3$ du cylindre à section rectangulaire pour $l_1 = 1.5\ \mu m$

Les paramètres de l'étude numérique sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
l_1	1.5, 1.6, 1.7 μm
$l_2\ (= \pi R^2/l_1)$	$\pi/l\ \mu m$
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.2
n_{mat}	1
Autres paramètres	
λ	1 à 1.9 μm

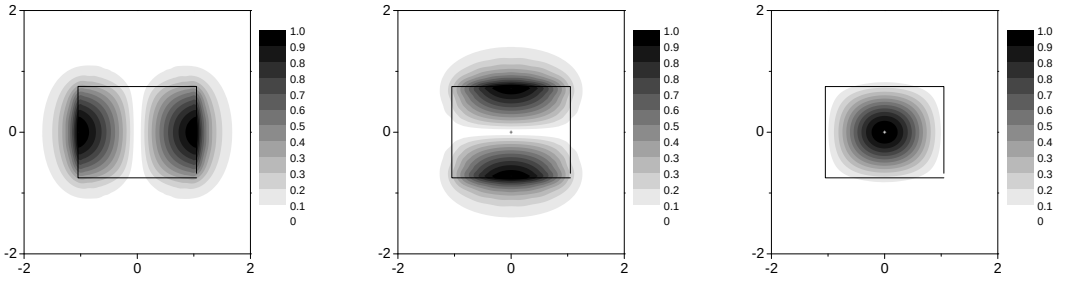
Paramètres numériques	***Valeurs***
N	20
L	10
P	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	5
$\mathcal{A}_p$	9

La figure 6.31 montre l'évolution de l'indice effectif du mode fondamental à $\lambda = 1\ \mu m$ pour les classes de symétrie $C3$ et $C4$, en fonction de la largeur l_1. La droite en pointillé correspond à la valeur de l'indice effectif trouvée pour le mode fondamental du cylindre centré (voir section 6.5.1). On émet les mêmes observations que précédemment : les indices effectifs des modes dégénérés se rapprochent lorsque l_1 augmente, et ils tendent à encadrer celui du cylindre à section carrée lorsque celui-ci est faiblement déformé ($l_1 = 1.7\ \mu m$). Pour $l_1 = 1.5\ \mu m$, les spectres de Fourier normalisés des champs dans le milieu extérieur pour le mode $C3$ (voir figure 6.32) justifient le choix de la valeur de l'ordre maximal de troncature ($N = 20$). Les figures 6.33(a) à 6.33(c) illustrent les cartes de champs pour le mode $C3$ et les figures 6.34(a) à 6.34(c) pour le mode $C4$. Les figures 6.35(a) et 6.35(b) représentent la dispersion chromatique en fonction de λ respectivement pour les modes $C3$ et $C4$. La courbe en trait plein correspond à la dispersion du mode fondamental du cylindre à section carrée.



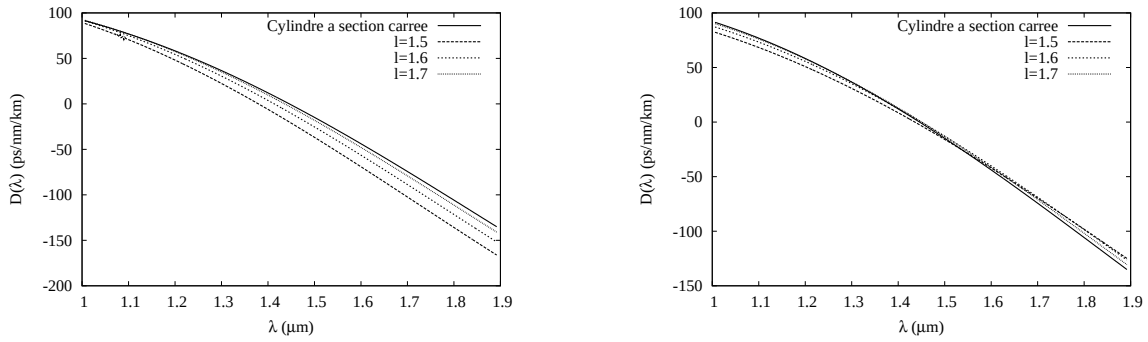
(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 6.33 – Cartes de champs du mode fondamental de classe de symétrie $C3$ du cylindre à section rectangulaire pour $l_1 = 1.5\ \mu m$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 6.34 – Cartes de champs du mode fondamental de classe de symétrie $C4$ du cylindre à section rectangulaire pour $l_1 = 1.5\ \mu m$



(a) Mode de classe de symétrie $C3$ (b) Mode de classe de symétrie $C3$

FIG. 6.35 – Courbes de dispersion chromatique du mode fondamental des cylindres à section rectangulaire et du cylindre à section carrée

CONCLUSION DU CHAPITRE Dans ce chapitre, nous avons posé toutes les bases théoriques nécessaires à la description des modes dans les fibres optiques par la méthode différentielle. Nous avons exploité à la fois les symétries (périodicités angulaires) qui peuvent apparaître dans leurs profils transverses, ainsi que celles des modes recherchés. Ceci permet en outre de bénéficier d'un gain de temps de calcul non négligeable qui s'accroît avec l'ordre de périodicité opto-géométrique angulaire. Des premiers résultats numériques concernant des géométries simples (sections circulaires, elliptiques et rectangulaires) sont exposés, validant l'implémentation de la méthode différentielle pour le problème modal. Le code numérique peut non seulement déterminer la partie imaginaire de l'indice effectif des modes à pertes, mais également établir des courbes de dispersion (suivi en longueur d'onde). A ce niveau, le programme a été exploité pour l'étude de plasmons se propageant dans une plaque métallique trouée (un seul trou), par le calcul de modes dans des cylindres circulaires (infinis) à forte conductivité [89].

Chapitre 7

Application à l'étude des fibres optiques microstructurées

Sommaire

7.1 Etude de FOMs à inclusions circulaires 174
7.1.1 Introduction 174
7.1.2 FOMs de symétrie C_{6v} à une couche d'inclusions 176
7.1.3 FOMs de symétrie C_{6v} à plusieurs couches d'inclusions 184
7.1.4 FOMs à 6 inclusions et de symétrie C_{2v} 187
7.2 Etude de FOMs à inclusions sectorielles 188
7.2.1 Structure équivalente à la FOM à 6 inclusions circulaires et de symétrie C_{6v} . 188
7.2.2 Evolution des indices effectifs en fonction des paramètres géométriques des secteurs 191
7.3 Etude de FOMs de type "grapefruit" 194
7.4 Etude de FOMs de type ARROW 197
7.4.1 Définition et conséquences 197
7.4.2 Observation numérique de la transition de délocalisation du mode fondamental d'une FOM de type ARROW par anti-croisement 198
7.4.3 Etude d'une FOM à gradient d'indice 203

Nous consacrons ce chapitre au principal objectif du travail de thèse : l'étude de fibres optiques microstructurées par la méthode différentielle. Notre première préoccupation a été de confirmer la validité du programme sur des exemples de structures bien connues, comme les FOMs à inclusions circulaires de symétrie C_{6v}. Une étude approfondie du mode fondamental permettra d'évaluer la précision de la méthode différentielle par comparaison avec une méthode numérique de référence, très précise, pouvant modéliser ce genre de fibres : la Méthode Multipolaire (notée par la suite MM). Afin d'illustrer toutes les possibilités de la méthode différentielle, nous présenterons et validerons les résultats concernant d'autres modes (de symétries différentes) pour cette même fibre et les résultats de FOMs à inclusions circulaires possédant une autre symétrie (C_{2v}). La seconde partie traitera de FOMs ayant de nouveaux profils géométriques que la méthode multipolaire ne peut modéliser : fibres à inclusions sectorielles, fibres de type "grapefruit". Ces résultats illustreront en partie l'apport de la méthode différentielle dans l'étude de ce type de fibres optiques. Nous verrons en particulier l'effet produit par ces géométries sur les propriétés de dispersion modale. Enfin, nous évoquerons dans la dernière partie les récents résultats concernant les FOMs de type ARROW qui ont permis la mise en évidence d'un phénomène spécifique à ce genre de fibres : l'anti-croisement entre un mode à pertes localisé dans le coeur (le mode "fondamental" de la fibre ARROW) et un mode à pertes associé aux cylindres de haut indice. Nous en évaluerons les conséquences pouvant être dommageables pour la propagation de la lumière dans les FOMs de type

ARROW. Un travail en collaboration avec l'équipe expérimentale du PhLAM de l'Université de Lille I semble confirmer l'existence de ce phénomène.

7.1 Etude de FOMs à inclusions circulaires

7.1.1 Introduction

Les différents types de FOMs :

La plupart des FOMs envisagées possède des inclusions circulaires identiques, disposées selon une symétrie C_{nv}. Ainsi, elles sont géométriquement caractérisées par quatre paramètres : l'ordre n de la symétrie, le diamètre d des inclusions, la distance Λ entre leurs centres (appelée également "pitch") et le nombre de couches d'inclusions. La figure 1.2 (voir section 1.2.2) représente le cas particulier d'une FOM classique C_{6v} à inclusions circulaires de bas indice (vide) dans une matrice de haut indice (en général de la silice). On recherche des modes confinés dans le coeur, c'est-à-dire dans la région centrale de la section principale de la fibre, encadrée par les inclusions. On peut classer les FOMs en deux catégories.

- *Les FOMs dont l'indice du coeur est supérieur à l'indice moyen de la zone microstructurée.* Elles sont généralement appelées "FOMs classiques" ou encore "FOMs conventionnelles". Dans ce cas, la propagation des modes peut être interprétée, en première approximation, par des effets de réflexions totales internes modifiées (par interférences multiples entre les inclusions).
- *Les FOMs dont l'indice du coeur est inférieur à l'indice moyen de la zone microstructurée.* Cette famille de FOMs comprend les FOMs à coeur creux à Bandes Interdites Photoniques (BIP) et les FOMs de type Anti Resonant Reflecting Optical Waveguide (ARROW). Pour le premier premier cas, la nature de la propagation de la lumière s'explique en terme d'effets de BIP. Ce phénomène observé initialement dans les cristaux photoniques montre que certains harmoniques s'étalant sur une plage déterminée de longueur d'onde ne peuvent pas traverser le cristal [101, 102]. L'idée est d'exploiter cet effet afin d'empêcher la lumière de fuir au travers de la région microstructurée. Celle-ci s'identifie à un cristal photonique si le nombre d'inclusions est suffisamment important. A ce titre, ce type de FOM est également nommé "FOM à cristaux photoniques". Les FOMs de type ARROW sont telles que le contraste d'indice est inversé (inclusions de haut indice dans une matrice de bas indice). Les effets électromagnétiques en jeu deviennent un peu plus complexes puisque chaque inclusion peut être considérée comme une fibre optique conventionnelle à saut d'indice. Dans ces conditions, il est nécessaire de distinguer les modes confinés dans le coeur associés à l'ensemble de la structure et les modes pouvant se propager dans chacune des inclusions. Il peut apparaître alors des effets de résonance ou de couplage entre tous ces modes [35, 36], à l'origine des bandes qui apparaissent dans les spectres de transmission (comme pour les fibres à cristaux photoniques).

Quelques propriétés des FOMs classiques :

L'étude de fibres optiques à géométrie complexe telles que les fibres optiques microstructurées (FOMs) nécessite généralement un traitement numérique. La Méthode Multipolaire [42, 40] reste l'une des premières à avoir étudié précisément les propriétés des FOMs à inclusions circulaires. Cette méthode modélise souvent des FOMs fabriquées en omettant la gaine. Autrement dit, les géométries considérées par cette méthode sont constituées de cylindres circulaires placés dans une matrice infinie. Par conséquent, dans le cas de FOMs à coeur plein, les modes localisés dans le coeur (matrice) deviennent des modes à pertes, c'est-à-dire avec un indice effectif complexe. Il est donc impossible d'établir une relation d'ordre entre ces modes. On définit pourtant le mode fondamental (de symétrie $C3/4$-a) comme celui qui possède l'indice effectif de plus grande partie réelle et de plus petite partie imaginaire (minimum de pertes). Pour une classe de symétrie donnée, la nomenclature choisie utilise une indexation des modes par des lettres alphabétiques ($C3/4$-a, $C3/4$-b, $C3/4$-c,...) dans l'ordre des parties imaginaires croissantes. Les pertes d'un mode sont directement reliés à la localisation de son champ électromagnétique (et donc de son énergie électromagnétique, c'est-à-dire du vecteur de Poynting) dans le coeur et dans la région microstructurée (qui contient les inclusions). Les pertes d'un mode d'une FOM sont fonction de la longueur d'onde, des paramètres géométriques

(diamètre d et pitch Λ) et du nombre de couches d'inclusions. Par conséquent, l'étude des propriétés de guidage des modes est souvent ramenée aux variations des paramètres géométriques de la fibre normalisés par Λ : rapports $\frac{d}{\Lambda}$ et $\frac{\lambda}{\Lambda}$. Les pertes diminuent lorsque le nombre de couches d'inclusions ou le rapport $\frac{d}{\Lambda}$ augmente (voir figure 7.2, page 249 de la reference [31], et référence [103]). Par contre, la partie réelle de l'indice effectif (du mode fondamental) se stabilise rapidement lorsque le nombre de couches d'inclusions croît (voir figure 7.4, page 250 de la reference [31], et référence [103]). De plus, un mode à pertes d'une FOM peut subir une transition de délocalisation du coeur de la fibre vers la région des inclusions. Des études approfondies concernant les transitions de délocalisation du mode fondamental et du second mode sont présentées dans les articles suivants [100, 104, 105, 43, 44, 31]. La figure 7.14 à la page 261 de la référence [31] résume ces propriétés sous la forme d'un diagramme $\frac{\lambda}{\Lambda}$ en fonction de $\frac{d}{\Lambda}$. Pour le second mode, on distingue trois régions lorsque le nombre de couches d'inclusions est assez élevé. La courbe en pointillé représente la transition de délocalisation de ce mode. La première région est telle que $\frac{d}{\Lambda} < 0.4$ environ. Pour un rapport fixé de $\frac{d}{\Lambda}$, le mode $C2$-a est toujours délocalisé du coeur de la fibre, quelque soit la valeur de $\frac{\lambda}{\Lambda}$. Dans la deuxième région telle que $\frac{d}{\Lambda} > 0.4$ et telle que la valeur de $\frac{\lambda}{\Lambda}$ soit en-dessous de la courbe en pointillé, le second mode est localisé dans le coeur. Lorsque la valeur de $\frac{\lambda}{\Lambda}$ passe en-dessus de la courbe en pointillé, il se délocalise vers la région microstructurée. Cette transition de délocalisation s'effectue rapidement, c'est-à-dire sur une intervalle étroit de $\frac{\lambda}{\Lambda}$ pour un rapport fixé de $\frac{d}{\Lambda}$. Cette propriété est confirmé par la figure 7.6 à la page 253 de la référence [31] illustrant la partie imaginaire de l'indice effectif du second mode en fonction du rapport $\frac{\lambda}{\Lambda}$ (avec $\frac{d}{\Lambda} = 0.55$ et un nombre de couche d'inclusions égal à 4, 8 et 10). Par conséquent, on peut étendre la notion de coupure pour le second mode à pertes d'une FOM. En ce qui concerne le mode fondamental, la figure 7.14 à la page 261 de la référence [31] révèle également trois régions. La première région qui apparaît en gris représente la zone de la transition de délocalisation de ce mode. Pour la région situé en-dessous de la précédente, le mode fondamental reste localisé dans le coeur de la fibre, alors que, pour la région situé en-dessus, le mode est délocalisé. Pour une valeur fixée de $\frac{d}{\Lambda}$, on constate que le mode fondamental se délocalise toujours à partir d'une plage assez étendue de $\frac{\lambda}{\Lambda}$. On ne parle pas de coupure du mode fondamental, étant donnée la largeur de cet intervalle sur lequel s'effectue la transition de délocalisation du mode fondamental, et ceci quelque soit le nombre de couches d'inclusions (voir également la figure 7.13 à la page 260 de la référence [31] déterminée pour $\frac{d}{\Lambda} = 0.3$ avec un nombre de couches d'inclusions de 3 à 5).

Les FOMs à inclusions circulaires dans la méthode différentielle :

On considère une FOM de symétrie $C_{N_T v}$ ($N_T \in \mathbb{N}$) à inclusions circulaires. Dans la méthode différentielle (voir section 6.2.3), l'étude une FOM $C_{N_T v}$ à une couche d'inclusions circulaires revient à considérer un seul cylindre sur un secteur d'angle $T = \frac{2\pi}{N_T}$. Par conséquent, l'implémentation d'une telle structure cylindrique reste analogue à celle de l'unique cylindre circulaire (défini sur l'intervalle angulaire $[-\pi, \pi]$) étudiée jusqu'à présent (voir section 3.5.3). Nous nous intéresserons essentiellement à la symétrie C_{6v} qui reste la plus étudiée. En effet, il s'agit de la symétrie induite par un empilement d'inclusions circulaires le plus compacte possible (réseau triangulaire utilisé dans les cristaux photoniques). En ce qui concerne les FOMs, l'empilement des capillaires conduit à cette disposition. D'après les travaux de McIsaac [37, 38] (voir tableau 6.4), on sait qu'il existe 8 classes de symétries. Les classes $C1$, $C2$, $C7$ et $C8$ sont non dégénérées alors que $C3/4$ et $C5/6$ sont dégénérées deux fois. Le mode fondamental est décrit par le premier mode des classes $C3/4$ [31]. Dans la MD, les coefficients de Fourier se découplent en six sous-ensembles $\mathcal{I}_i$ ($i \in [1, 6]$). On rappelle dans le tableau 7.1 les différents sous-systèmes de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_i$ ($i \in [1, 6]$), pour lesquels les champs associés à une classe de symétrie sont décrits (voir tableau 6.4). Dans un premier temps, on considérera une FOM C_{6v} à une couche d'inclusions circulaires. Le secteur d'étude dans la méthode différentielle occupe un angle de $T = \frac{\pi}{3}$ et contient un seul cylindre circulaire (voir figure 7.1(a)). On rappelle que l'on pourrait réduire cette angle à $T = \frac{\pi}{6}$ en tenant compte de la parité des fonctions $\epsilon(r, \theta)$, $N_r^2(r, \theta)$, $N_\theta^2(r, \theta)$ et $N_r N_\theta(r, \theta)$ (voir la conclusion de la section 6.3). Pour ce cas, nous nous attarderons sur les tests de convergence du mode fondamental ($C3/4$-a, décrits par la MD par les sous-ensembles $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_6$) permettant d'évaluer la précision des résultats. Nous montrerons quelques résulats concernant les premiers modes décrits dans les autres

Classe de symétrie	Sous-ensemble $\mathcal{I}_i$
$C1$	$\mathcal{I}_1$
$C2$	$\mathcal{I}_1$
$C3/4$	$\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_6$
$C5/6$	$\mathcal{I}_3$ et $\mathcal{I}_5$
$C7$	$\mathcal{I}_4$
$C8$	$\mathcal{I}_4$

TAB. 7.1 – Sous-systèmes de coefficients de Fourier des champs modaux par classe de symétrie d'une FOM C_{6v}

Classe de symétrie	Sous-ensemble $\mathcal{I}_i$
$C1$	$\mathcal{I}_1$
$C2$	$\mathcal{I}_1$
$C3$	$\mathcal{I}_2$
$C4$	$\mathcal{I}_2$

TAB. 7.2 – Sous-systèmes de coefficients de Fourier des champs modaux par classe de symétrie d'une FOM C_{2v}

classes de symétrie. Afin de montrer les capacités du code numérique, nous étudierons ensuite le mode fondamental pour deux couches (voir figure 7.1(b)), puis trois couches d'inclusions (voir figure 7.1(c)). Enfin, nous conclurons cette section par l'analyse du mode fondamental d'une FOM à symétrie C_{2v}, constituée de six cylindres dont les deux placés sur l'axe x possèdent un diamètre plus élevé que les quatre autres (voir figure 7.1(d)). Il y a alors quatre classes de symétrie non dégénérées. Le mode fondamental se divise en deux modes distincts (indices effectifs différents) de classes de symétrie $C3$ et $C4$ (toutes les deux décrites par le sous-ensemble $\mathcal{I}_2$). Pour cette géométrie, les différents sous-systèmes de coefficients de Fourier considérés par la MD sont donnés dans le tableau 7.2. L'ensemble des résultats obtenus par la méthode différentielle sera validé par comparaison avec ceux de la MM [42, 40, 31], disponible au sein du laboratoire.

7.1.2 FOMs de symétrie C_{6v} à une couche d'inclusions

Avant d'analyser les premiers résultats numériques sur un cas particulier de FOM, il est utile de présenter le calcul des matrices de Toeplitz qui interviennent dans la matrice Q_ϵ (3.15). Sur un cylindre C_r de la zone modulée ($R_{min} < r < R_{max}$), les fonctions $\epsilon(r,\theta)$, $N_\theta^2(r,\theta)$, $N_r^2(r,\theta)$ et $N_rN_\theta(r,\theta)$ ne sont plus définies sur l'intervalle angulaire $[-\pi,\pi]$ (voir figures 3.16(a), 3.18(a), 3.18(b) et 3.18(c)), mais seulement sur l'intervalle $\left[\theta_0 - \frac{\pi}{N_T}, \theta_0 + \frac{\pi}{N_T}\right]$. Par conséquent, la matrice de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$ est alors constituée des coefficients de Fourier suivants :

$$\epsilon_0(r) = \epsilon_{mat} + \frac{N_T}{\pi}\widetilde{\theta}(r)\,(\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}) \tag{7.1}$$

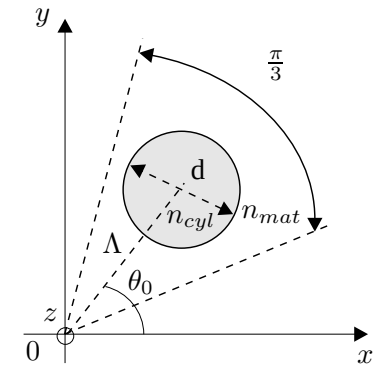
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \epsilon_n(r) = \frac{e^{-inN_T\theta_0}}{\pi n}\sin\left[nN_T\widetilde{\theta}(r)\right](\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}) \tag{7.2}$$

Les coefficients de la matrice de Toeplitz $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$ s'en déduisent toujours de la même manière (voir section 3.5.3). Quant aux grandeurs N_θ^2, N_r^2 et N_rN_θ, on garde le même type de prolongement par des fonctions constantes et créneaux (voir figures 3.18(a) à 3.18(c)). Les coefficients de Fourier de la matrice $[\![N_rN_\theta]\!]$ deviennent :

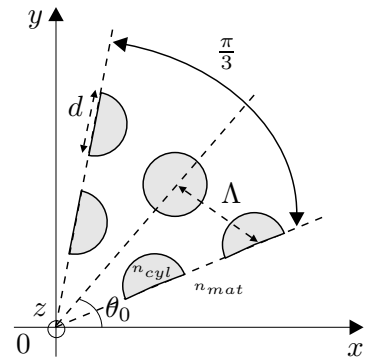
$$(N_rN_\theta)_0(r) = 0 \tag{7.3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (N_rN_\theta)_n(r) = \frac{ie^{-inN_T\theta_0}}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right]\widetilde{N_rN_\theta}(r) \tag{7.4}$$

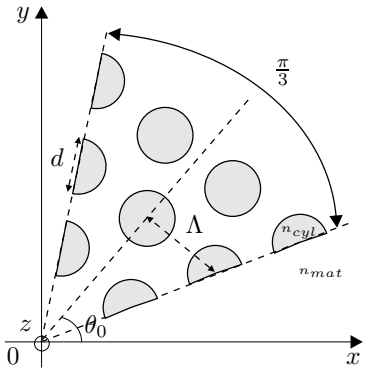
avec $\widetilde{N_rN_\theta}(r)$ toujours défini par la relation (3.126). Les matrices de Toeplitz $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ restent inchangées.



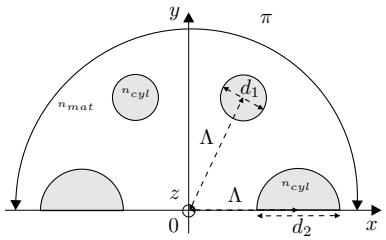
(a) FOM C_{6v} à une couche d'inclusions



(b) FOM C_{6v} à deux couches d'inclusions



(c) FOM C_{6v} à trois couches d'inclusions



(d) FOM C_{2v} à une couche d'inclusions

FIG. 7.1 – Représentation de la section droite de FOMs $C_{N_T v}$ à inclusions circulaires par la méthode différentielle, définie sur le secteur irréductible d'angle $T = \frac{2\pi}{N_T}$

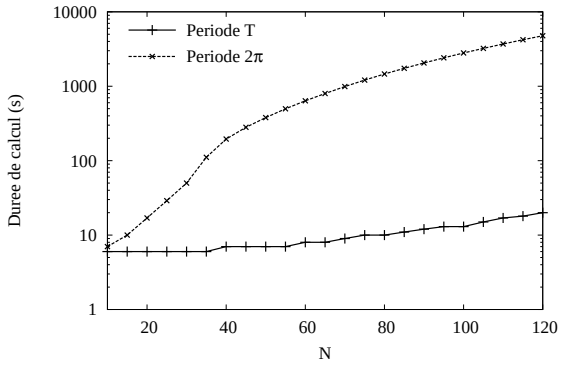


FIG. 7.2 – FOM C_{6v} : Prise en compte de la sous-périodicité. Comparaison des durées de calcul selon N d'une intégration pour la période 2π et la sous-période période $T = \frac{\pi}{3}$

La figure 7.2 compare les durées de calcul (calculateur 64 Bits) selon N d'une intégration pour la période angulaire 2π et pour la sous-période $T = \frac{2\pi}{N_T}$ avec $N_T = 6$ pour la FOM C_{6v} (intégration d'un sous-système différentiel de matrice $\mathcal{M}_i(r)$ associé au sous-ensemble de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_i$). On réalise bien le gain de temps de calcul lorsque la sous-périodicité opto-géométrique de l'objet cylindrique est prise en compte dans le programme.

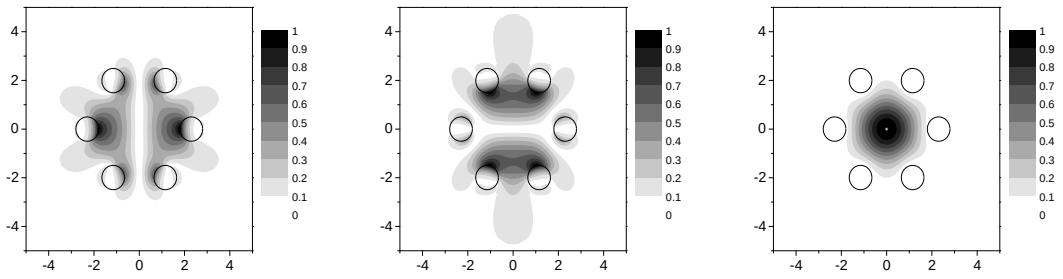
Mode fondamental :

Intéressons-nous d'abord au mode fondamental d'une FOM classique de symétrie C_{6v} à une couche d'inclusions circulaires (voir figure 7.1(a)). Les paramètres choisis pour l'étude numérique sont regroupés dans le tableau suivant :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
N_T	6
d	1 μm
Λ	2.3 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1
n_{mat}	1.4439035654
Autres paramètres	
λ	1 à 2.6 μm

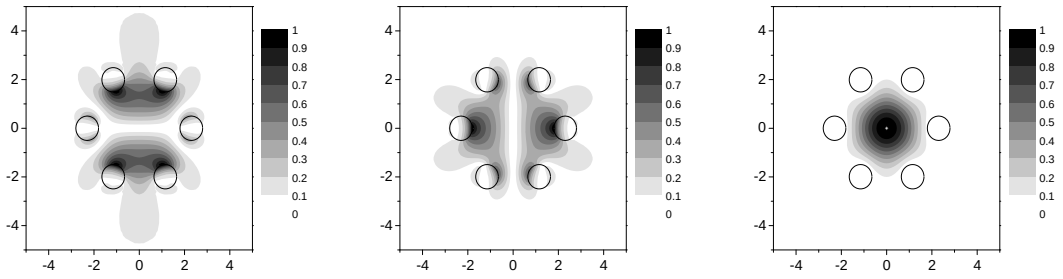
Paramètres numériques	***Valeurs***
N	30 à 162
τ_c	10%
L_1 et L_2	10, 14 et 18
L_3	5, 7 et 9
P_1, P_2 et P_3	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

La levée de dégénérescence numérique observée précédemment pour le cas du cylindre circulaire (voir section 6.5.2) n'apparaît plus, puisque la géométrie modélisée (profil de la FOM vu par le code numérique d'après la discrétisation de la zone modulée en pas d'intégration et les effets de Gibbs dus à la troncature des développements) suit la même symétrie que la géométrie réelle de la fibre optique (C_{6v}). Le mode fondamental appartient alors aux deux classes de symétrie $C3/4$ qui restent bien dégénérées dans l'implémentation de la méthode différentielle. Pour $N = 60$, $\lambda = 1.56$ μm, $L_1 = L_2 = 10$ et $L_3 = 5$, la recherche de l'indice effectif à l'aide de la matrice $Z_2^{(L)}$ (sous-matrice $Z^{(L)}$ associée au sous-système de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_2$, voir section 6.2.3) aboutit à la valeur : $n_{eff} = 1.42078315 + i7.20465\,10^{-4}$. La MM trouve la valeur suivante : $n_{eff} = 1.4207845 + i7.20952\,10^{-4}$. L'écart relatif des modules de ces indices effectifs est voisin de 10^{-6}. Les figures 7.3(a) à 7.3(c) montrent les cartes de champs normalisés du mode fondamental de symétrie $C3$ et les figures 7.4(a) à 7.4(c) pour la symétrie $C4$. Nous tentons d'évaluer la précision des calculs numériques à travers des tests de convergence selon l'ordre maximal de troncature N. La figure 7.5(a) montre l'évolution de l'indice effectif dans le plan complexe en fonction de N pour la méthode différentielle utilisant la FFF (MD) et la méthode différentielle classique (MDC). Le carré correspond à la valeur trouvée par la MM. On se rend bien compte que la convergence de la MDC reste en retard par rapport à celle de la MD. La figure 7.5(b) représente à nouveau la convergence de n_{eff} dans le



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.3 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C3$-a pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$, $L_1 = L_2 = 10$ et $L_3 = 5$. $n_{eff} = 1.42078315 + i7.20465\ 10^{-4}$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.4 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$, $L_1 = L_2 = 10$ et $L_3 = 5$. $n_{eff} = 1.42078315 + i7.20465\ 10^{-4}$

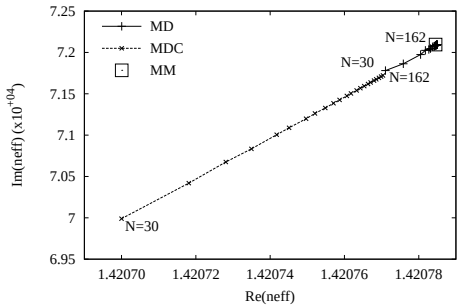
Classe de symétrie	$\Re e(n_{eff})$ MM	$\Im m(n_{eff})$ MM	$\Re e(n_{eff})$ MD	$\Im m(n_{eff})$ MD	Ecart relatif sur $\Re e(n_{eff})$	Ecart relatif sur $\Im m(n_{eff})$
1	1.388917884	$5.7618884\,10^{-3}$	1.388918390	$5.7616371\,10^{-3}$	$3.6\,10^{-7}$	$4.4\,10^{-5}$
2	1.387331199	$4.2278502\,10^{-3}$	1.387332286	$4.2277231\,10^{-3}$	$7.8\,10^{-7}$	$3.0\,10^{-5}$
3, 4	1.420784521	$7.2095221\,10^{-4}$	1.420784943	$7.2094414\,10^{-4}$	$3.0\,10^{-7}$	$1.1\,10^{-5}$
5, 6	1.386872247	$5.0376883\,10^{-3}$	1.386873053	$5.0374468\,10^{-3}$	$5.8\,10^{-7}$	$4.8\,10^{-5}$
7	1.332197539	$1.9429823\,10^{-2}$	1.332198974	$1.9428629\,10^{-2}$	$1.1\,10^{-6}$	$6.1\,10^{-5}$
8	1.351325880	$2.1553168\,10^{-2}$	1.351326338	$2.1552000\,10^{-2}$	$4.0\,10^{-7}$	$5.4\,10^{-5}$

TAB. 7.3 – Comparaison des indices effectifs obtenus par la MD ($N = 162$ et $L = 25$) et la MM pour les premiers modes de chaque classe de symétrie de la FOM C_{6v}, pour $\lambda = 1.56\ \mu m$

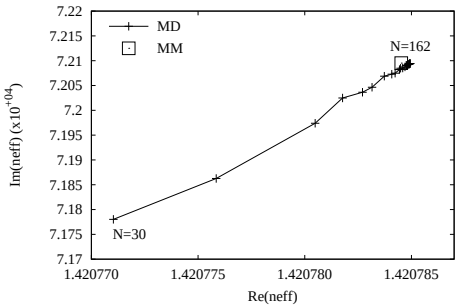
plan complexe seulement pour la MD. Afin de mieux évaluer la précision des résultats, la figure 7.6 montre l'écart relatif des modules des indices effectifs de la MD et la MDC par rapport à la MM, pour différentes valeurs de L ($L = L_1 + L_2 + L_3$). On observe encore que la convergence de la MD est beaucoup plus rapide que celle de la MDC. On constate également que la précision augmente avec L. Elle atteint une valeur de 3.10^{-7} pour $L = 25$ et $N = 162$. Le rebond des trois courbes correspond au passage de l'indice effectif à proximité de celui associé à la MM (voir figure 7.5(b)). On conclut les tests de validation du mode fondamental par l'étude de la dispersion. Les parties réelle et imaginaire de l'indice effectif en fonction de $\lambda \in [1, 2.6]$ calculées par la MD et la MM sont tracées sur la figure 7.7(a). La figure 7.7(b) représente la dispersion chromatique en fonction de la longueur d'onde. A partir de ces deux figures, on vérifie à nouveau l'excellent accord entre les résultats obtenus par les deux méthodes.

Autres modes :

Le programme peut également étudier les autres modes de cette FOM. Pour s'en convaincre, nous allons nous intéresser aux premiers modes de chacune des huit classes de symétrie. Les deux premières ($C1$-a et $C2$-a) sont non dégénérées. A $\lambda = 1.56\ \mu m$ et $L = 25$, l'évolution de l'indice effectif par la MD (calculé à partir de la matrice $Z_1^{(L)}$ du sous-système de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_1$) en fonction de N est comparée à la valeur trouvée par la MM dans les figures 7.8(a) et 7.8(b). Dans les deux cas, on se rend compte que l'indice effectif ne tend pas tout-à-fait vers celui prévu par la MM. En effet, il existe une valeur théorique (et fictive) de n_{eff}, mais chaque méthode tend en réalité vers un indice effectif "numérique" qui lui est intrinsèquement défini selon ses paramètres de discrétisation. Toutefois, la précision obtenue par la MD reste satisfaisante (écarts relatifs autour de 10^{-6} pour $N = 162$). Les figures 7.9(a) à 7.9(c) montrent les cartes de champs associées au mode $C2$-a à $N = 60$. Celles du mode $C1$-a ne sont pas représentées car elles leur ressemblent beaucoup : La carte de $|E_z|$ du mode $C1$-a est semblable à celle de $|H_z|$ du mode $C2$-a, et inversement. Par contre, elles ont quasiment les mêmes cartes de $|P_z|$. On constate l'excellent accord entre les résultats obtenus par la MD et MM sur la figure 7.10 qui représente les parties réelle et imaginaire de l'indice effectif du mode $C2$-a en fonction de $\lambda \in [1.1, 2.5]$ (avec $N = 60$ et $L = 25$ pour la MD). Les classes de symétrie $C5/6$ sont dégénérées. Comme précédemment, la figure 7.11 illustre la convergence en fonction de N dans le plan complexe de l'indice effectif par la MD (calculé à partir de la matrice $Z_3^{(L)}$ du sous-système de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_3$) en comparaison avec la valeur trouvée par la MM. Les figures 7.12(a) à 7.12(c) montrent les cartes de champs associées au mode $C6$-a à $N = 60$. Pour les deux derniers modes de classes de symétrie non dégénérées $C7$ et $C8$, les courbes (voir figures 7.13(a) et 7.13(b)) associées aux convergences en fonction de N de leurs indices effectifs (calculés à partir de la matrice $Z_4^{(L)}$ du sous-système de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_4$) semblent un peu moins stables que les précédentes. Comme pour les modes $C1$-a et $C2$-a, on donne seulement les cartes de champs associées au mode $C6$-a pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$ et $L = 25$ (voir figures 7.14(a) à 7.14(c)). Le tableau 7.3 récapitule les différentes valeurs des indices effectifs obtenues par la MD et la MM, pour l'ensemble des classes de symétries. Ces données sont obtenues pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 162$ et $L = 25$; les autres paramètres restent inchangés. On constate de meilleurs écarts relatifs obtenus sur la partie réelle par rapport à ceux obtenus sur la partie imaginaire des indices effectifs. Mais, dans tous les cas,



(a) Résultats obtenus avec la MD et la MDC en comparaison avec la valeur de la MM



(b) Zoom de la figure 7.5(a) sans la courbe associée à la MDC

FIG. 7.5 – Test de convergence en fonction de N de l'indice effectif du mode fondamental pour $\lambda = 1.56$ μm, $L_1 = L_2 = 10$ et $L_3 = 5$ ($L = 25$)

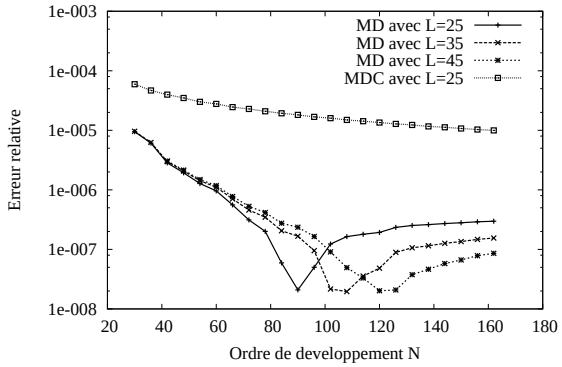
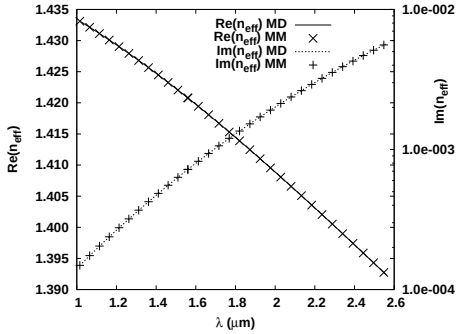
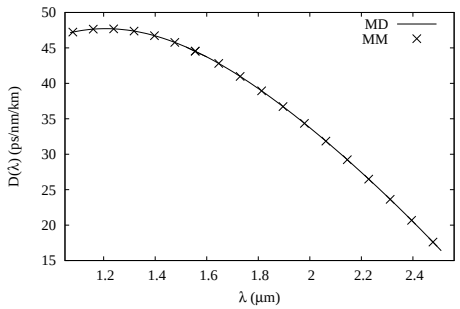


FIG. 7.6 – Test de convergence en fonction de N des indices effectifs du mode fondamental pour différentes valeurs de L et $\lambda = 1.56$ μm

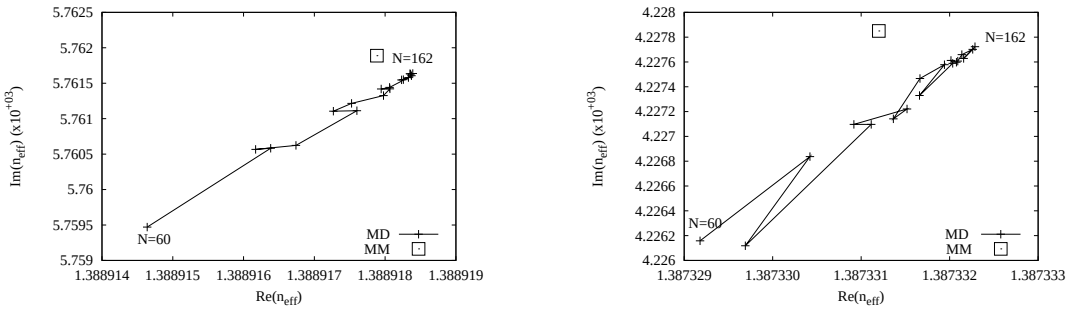


(a) Parties réelle et imaginaire de l'indice effectif en fonction de λ



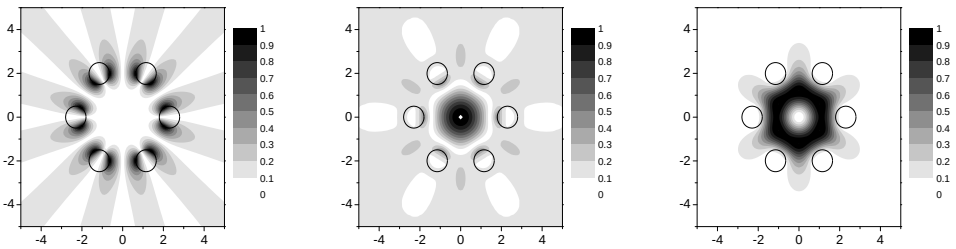
(b) Dispersion chromatique D en fonction de λ

FIG. 7.7 – Etude de l'indice effectif et de la dispersion chromatique du mode fondamental par la MM et la MD pour $N = 60$, $L_1 = L_2 = 10$ et $L_3 = 5$



(a) Mode de classe $C1$ (b) Mode de classe $C2$

FIG. 7.8 – Indice effectif des modes $C1$-a et $C2$-a en fonction de N pour $\lambda = 1.56\ \mu m$ et $L = 25$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|P_z|$

FIG. 7.9 – Cartes de champs normalisés du mode $C2$-a pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$ et $L = 25$. $n_{eff} = 1.38732918 + i4.226163\ 10^{-3}$

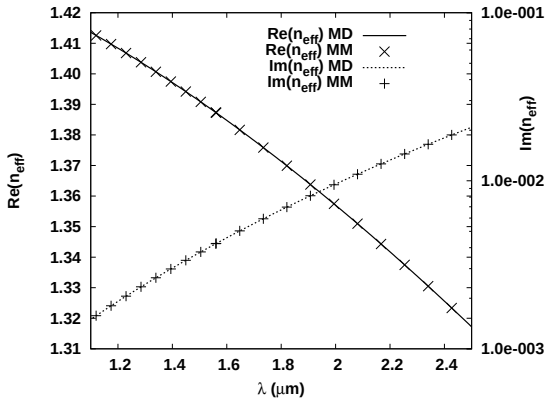


FIG. 7.10 – Parties réelle et imaginaire de l'indice effectif du mode $C2$-a en fonction de λ calculées avec la MD et MM. Pour la MD, on a $N = 60$ et $L = 25$

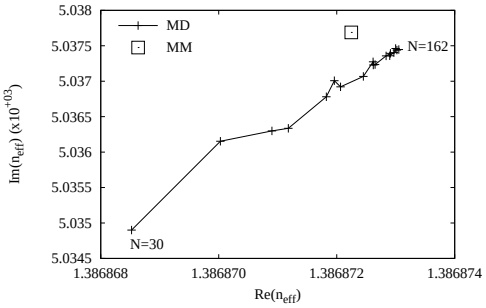
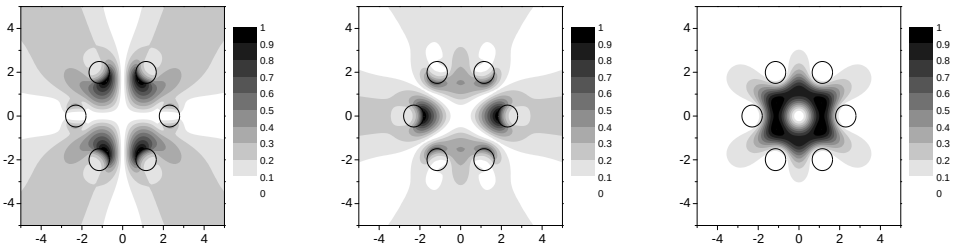
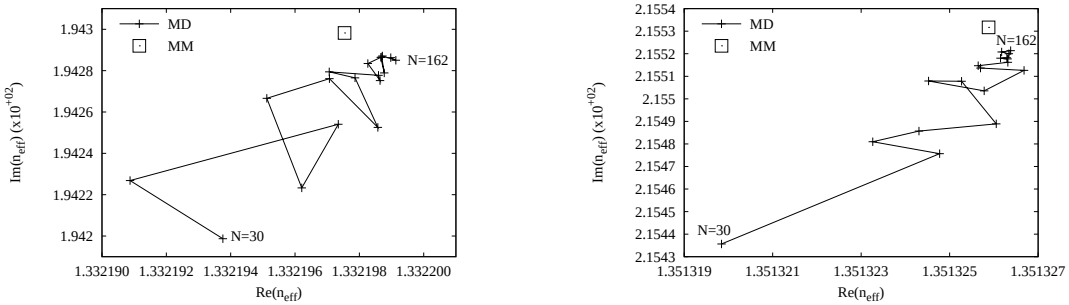


FIG. 7.11 – Indice effectif du mode de classe $C5/6$ en fonction de N pour $\lambda = 1.56\ \mu m$ et $L = 25$



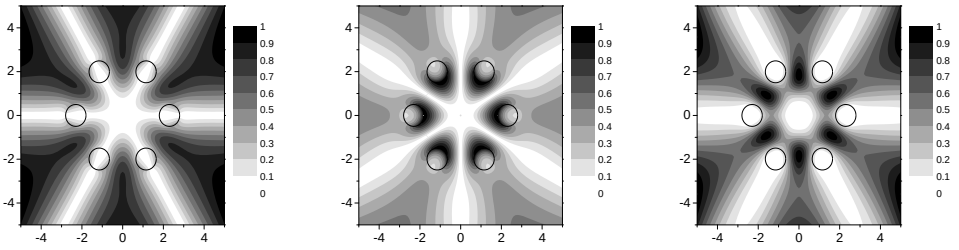
(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|P_z|$

FIG. 7.12 – Cartes de champs normalisés du mode $C6$-a pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$ et $L = 25$. $n_{eff} = 1.38686852 + i5.03490\ 10^{-3}$



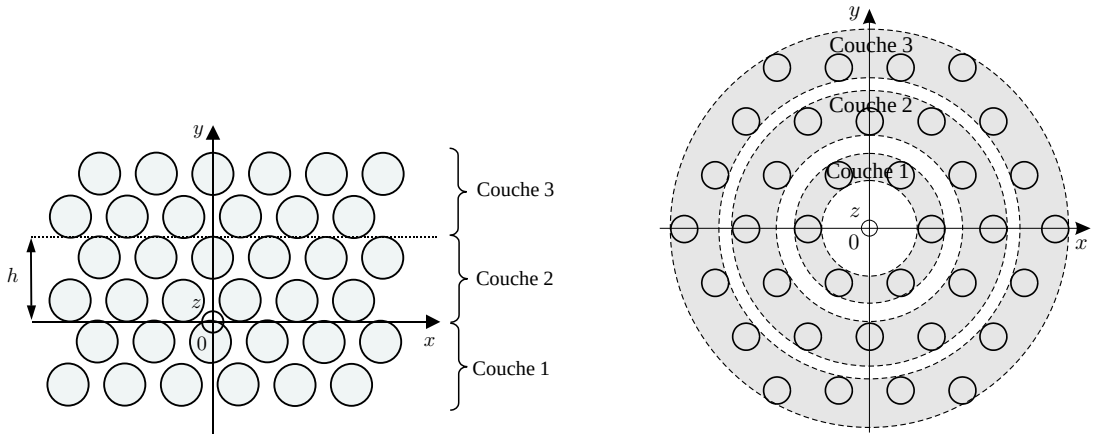
(a) Mode de classe $C7$ (b) Mode de classe $C8$

FIG. 7.13 – Indice effectif des modes $C7$-a et $C8$-a en fonction de N pour $\lambda = 1.56\ \mu m$ et $L = 25$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|P_z|$

FIG. 7.14 – Cartes de champs normalisés du mode $C8$-a pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$ et $L = 25$. $n_{eff} = 1.35131984 + i2.15436\ 10^{-2}$



(a) Schéma d'un cristal photonique

(b) Schéma d'une FOM à plusieurs couches d'inclusions circulaires. Les zones grisées correspondent chacune à une couche d'inclusions

FIG. 7.15 – Comparaison de structures à "cristal photonique" en coordonnées cartésiennes et cylindriques

les valeurs obtenues avec la MD sont très satisfaisantes.

7.1.3 FOMs de symétrie C_{6v} à plusieurs couches d'inclusions

La MD ne se limite pas qu'au calcul des modes d'une FOM à une seule couche d'inclusions. En effet, les FOMs réelles, fabriquées en laboratoire, sont généralement constituées de plusieurs couches de cylindres circulaires, ce qui réduit les pertes des modes [103]. Il est justement intéressant de faire une comparaison avec l'étude des cristaux photoniques par la MD écrite dans le système de coordonnées cartésiennes [76, 56]. On considère un cristal photonique constitué d'inclusions cylindriques circulaires représenté sur la figure 7.15(a). La périodicité selon l'axe x constitue la modulation opto-géométrique utilisée dans la MD, et y devient la variable d'intégration. Le long de l'axe y, le motif de hauteur h se répète exactement trois fois. Pour une telle structure décrite en coordonnées cartésiennes, il n'est donc pas nécessaire de lancer une intégration de l'interface inférieure de la couche 1 à l'interface supérieure de la couche 3. Il suffit d'intégrer le système différentiel à travers une seule de ces couches et d'utiliser l'algorithme S pour propager, d'une couche à l'autre, la même matrice S sur toute la hauteur du cristal photonique. Les temps de calcul en sont donc réduits et les précisions accrues. Ce raisonnement se généralise évidemment à M couches. En coordonnées cylindriques, ce raisonnement n'est en général pas valable. Pour simplifier, les cylindres circulaires de la FOM représentée par la figure 7.15(b) sont choisis tels que les couches d'inclusions considérées ne se superposent pas (inversement, si le rayon des cylindres circulaires devient trop grand, les couches peuvent se chevaucher). Dans le plan de section droite de la fibre, une couche (sous-zone modulée pour la méthode différentielle) est décrite par une couronne centrée sur l'origine. On ne peut donc pas envisager des couches successives identiques (de même aire). On comprend finalement que l'ajout d'une ou plusieurs couches d'inclusions augmente l'épaisseur totale de la zone modulée, induisant des durées d'intégration plus importantes. A ce niveau, on atteint la principale limitation de la MD pour le système de coordonnées cylindriques. Par contre, la MM reste particulièrement bien adaptée à ce genre de FOM.

Dans la méthode différentielle, l'implémentation d'une FOM à plusieurs couches d'inclusions (voir figures 7.1(b) et 7.1(c)) devient un peu plus complexe que dans le cas d'une seule couche (voir figure 7.1(a)). Toutefois, on ne garde pas, pour chaque inclusion, la même subdivision de la zone modulée (en trois sous-zones modulées) que celle effectuée pour une FOM à une couche (un seul cylindre sur la période T, voir figure 3.15(b)). De manière générale, une couche d'inclusion (zones grisées de la figure 7.15(b)) correspond à une sous-zone modulée. Dans le cas où ces sous-zones modulées ne se chevauchent pas (faible rapport $\frac{d}{\Lambda}$, cas de la figure 7.15(b)), la zone modulée totale est constituée d'une alternance de sous-zones modulées (associées à une couche d'inclusions) et de sous-zones homogènes et isotropes (voir

section 3.2.3 pour le calcul de la matrice transmission). Pour l'ensemble de ces sous-zones modulées, et de ces sous-zones homogènes et isotropes, seuls deux paramètres de discrétisation, notées L_1 et L_2, permettent de définir le nombre de couches S. Le paramètre L_1 représente le nombre de couches S pour une longueur d d'une sous-zone modulée (contenant les inclusions). Le paramètre L_2 représente le nombre de couches S pour une longueur d d'une sous-zone homogène et isotrope. Ainsi, le nombre de couches S d'une sous-zone modulée (respectivement d'une sous-zone homogène et isotrope) est proportionnel à L_1 (respectivement L_2) suivant son épaisseur. Lorsque deux sous-zones modulées se superposent (valeur élevée du rapport $\frac{d}{\Lambda}$), elles fusionnent pour ne donner plus qu'une seule sous-zone modulée. Quant au calcul des matrices de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$, $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$, $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$, il reste semblable à celui décrit dans la section 7.1.2 (même type de fonctions créneaux et de prolongements).

Pour nos tests numériques, nous avons d'abord étudié une FOM à deux couches d'inclusions (voir figure 7.1(b)) avec les mêmes paramètres opto-géométriques que la FOM précédente à une couche (voir section précédente). En ce qui concerne les paramètres numériques, la valeur de L_1 reste fixe et égale à 5 ; on prend toujours 10 pas d'intégration pour chaque couche S ($P = 10$). Nous allons étudier la convergence des résultats selon les paramètres L_1 (nombre de couches S pour les sous-zones modulées contenant les inclusions) et l'ordre de troncature des développements N. Le tableau suivant récapitule les valeurs choisies pour l'ensemble de ces paramètres :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
N_T	6
d	1 μm
Λ	2.3 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1
n_{mat}	1.4439035654
Autres paramètres	
λ	1.1 à 2.5 μm

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	60, 90, 120 et 150
L_1	20, 30, 40 et 50
L_2	5
P	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

La symétrie C_{6v} étant conservée, les sous-systèmes de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_i$ qui permettent de décrire les champs modaux dans la MD sont identiques aux précédents (voir tableau 7.1). A $\lambda = 1.56$ μm, la figure 7.16 montre plusieurs courbes de convergences selon N de l'indice effectif du mode fondamental ($C3/4$-a) dans le plan complexe, pour différentes valeurs de L_1. Cette figure contient également l'indice effectif trouvé par la MM et qui vaut $n_{eff} = 1.4210361 + i2.38070\ 10^{-5}$. Pour $N = 60$ et $L_1 = 20$, les écarts relatifs entre les résultats obtenus par les deux méthodes valent $1.3\ 10^{-6}$ en partie réelle et $6.8\ 10^{-3}$ en partie imaginaire, alors qu'ils atteignent $1.3\ 10^{-8}$ en partie réelle et $3.6\ 10^{-4}$ en partie imaginaire pour $N = 150$ et $L_1 = 50$. Pour $N = 60$ et $L_1 = 20$, les parties réelle et imaginaire de l'indice effectif en fonction de $\lambda \in [1.1, 2.5]$ calculées par la MD et la MM sont tracées sur la figure 7.17. On observe sur cette figure l'excellent accord entre les résultats obtenus par ces deux méthodes. Les figures 7.18(a) à 7.18(c) montrent les cartes de champs du mode fondamental de classe $C4$ pour $\lambda = 1.56$ μm, $N = 60$ et $L_1 = 20$.

Pour une FOM à trois couches d'inclusions (voir schéma 7.1(c)) avec toujours les mêmes paramètres opto-géométriques, la MD trouve $n_{eff} = 1.4210445 + i7.928\ 10^{-7}$ avec $N = 60$ et $L_1 = 20$ ($L_2 = 5$ et $P = 10$). La valeur obtenue par la MM est $n_{eff} = 1.4210465 + i8.117\ 10^{-7}$. Les écarts relatifs entre ces résultats obtenus par les deux méthodes valent $1.4\ 10^{-6}$ en partie réelle et $2.3\ 10^{-2}$ en partie imaginaire. Pour $N = 150$ et $L_1 = 50$, l'indice effectif trouvé par la MD est $n_{eff} = 1.42104651 + i8.104\ 10^{-7}$, ce qui permet d'atteindre des écarts relatifs de $1.1\ 10^{-8}$ en partie réelle et $1.7\ 10^{-3}$ en partie imaginaire par rapport à la valeur de n_{eff} trouvée par la MM. On se rend compte que la précision relative (sur la partie imaginaire de n_{eff}) de la MD diminue avec le nombre de couche d'inclusions. Les figures 7.19(a) à 7.19(c) montrent les cartes de champs du mode fondamental de classe $C4$ pour $\lambda = 1.56$ μm, $N = 60$ et $L_1 = 20$. On rappelle qu'à chaque ajout d'une couche d'inclusions, la partie imaginaire de l'indice effectif diminue d'un facteur sensiblement identique (30 environ dans notre cas), alors que la partie réelle reste à peu près inchangée [31]. La précision obtenue sur les indices effectifs décroît avec le nombre de couches d'inclusion, en raison de l'augmentation de l'épaisseur de la zone modulée (intégration plus longue).

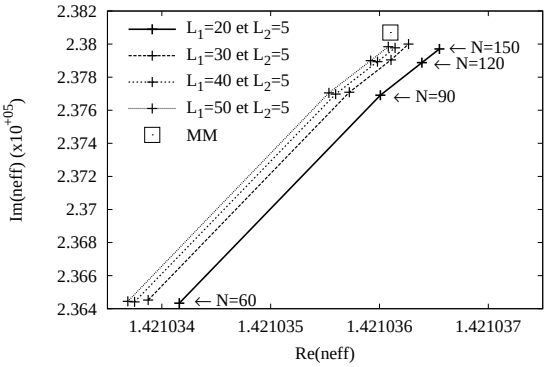


FIG. 7.16 – Convergence selon N de l'indice effectif du mode fondamental d'une FOM à deux couches d'inclusions dans le plan complexe, pour différentes valeurs de L_1 et $\lambda = 1.56\ \mu m$. La valeur trouvée par la MM est également représentée.

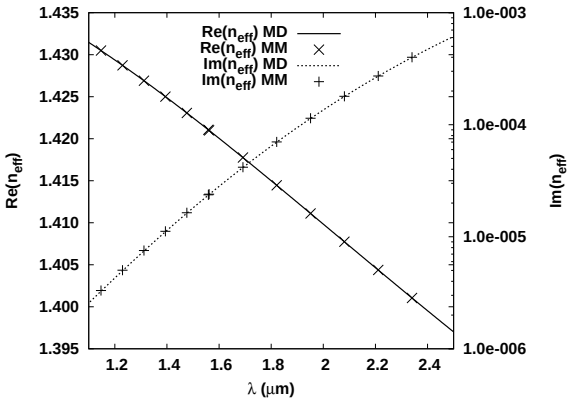
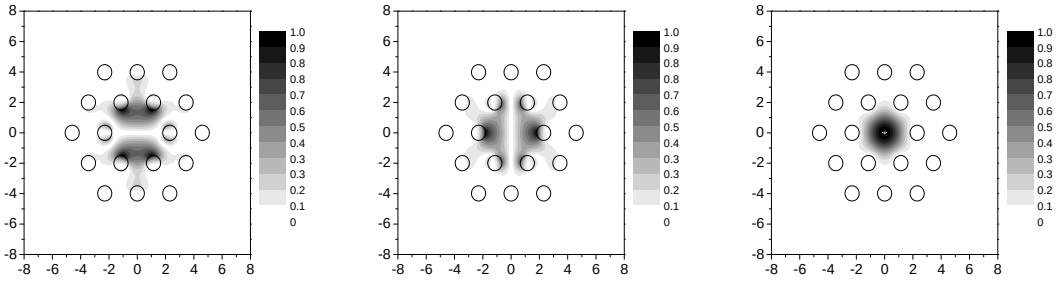
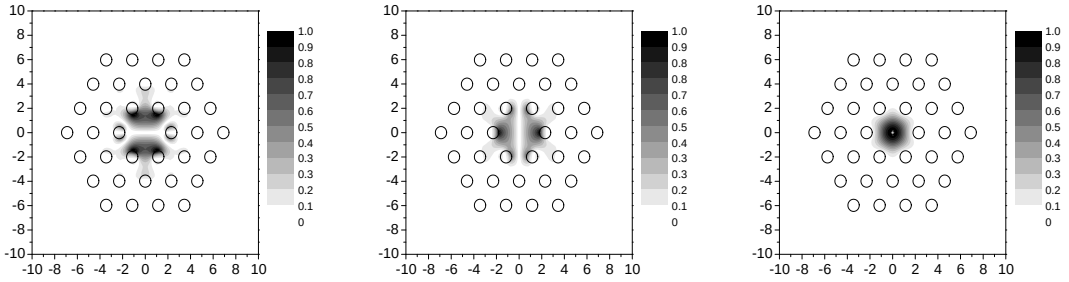


FIG. 7.17 – Parties réelle et imaginaire de l'indice effectif du mode fondamental d'une FOM à deux couches d'inclusions, en fonction de λ, pour $N = 60$ et $L_1 = 20$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.18 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental de classe $C4$ à deux couches d'inclusions pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$ et $L_1 = 20$. $n_{eff} = 1.42103506 + i2.36433\ 10^{-5}$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.19 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental de classe $C4$ à trois couches d'inclusions pour $\lambda = 1.56\ \mu m$, $N = 60$ et $L_1 = 20$. $n_{eff} = 1.4210445 + i7.928\ 10^{-7}$

7.1.4 FOMs à 6 inclusions et de symétrie C_{2v}

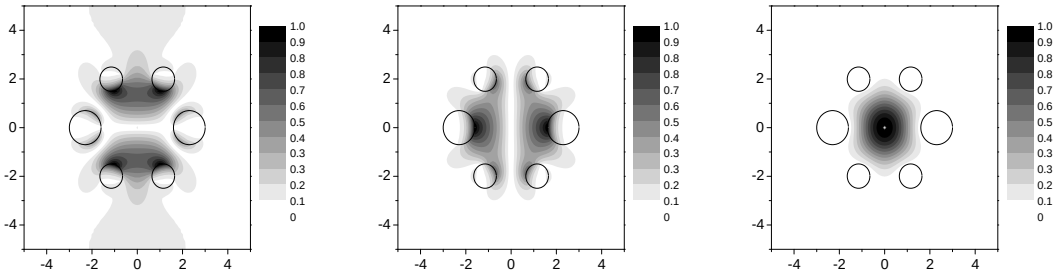
On conclut les tests de validation de la MD sur les FOMs à inclusions circulaires par l'étude d'une FOM à symétrie C_{2v} (identique à celle de la référence [31]). Elle comprend encore 6 cylindres circulaires (voir figure 7.1(d)) de même distance à l'origine du repère, mais de rayons différents. Les deux inclusions placées sur l'axe x possèdent le même diamètre (d_2), plus grand que celui (d_1) des quatre autres inclusions. Les paramètres choisis sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
N_T	2
d_1	1 μm
d_2	1.4 μm
Λ	2.3 μm
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1
n_{mat}	1.4439035654
Autres paramètres	
λ	1.56 μm

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	60
τ_c	10%
L	35
P	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

On retrouve la même symétrie C_{2v} que celle des cylindres de sections elliptique et rectangulaire étudiés dans le chapitre précédent (voir sections 6.6.1 et 6.6.2). Comme pour les FOMs à plusieurs couches d'inclusions (section précédentes), l'implémentation de cette FOM dans la méthode différentielle devient un peu plus complexe que dans le cas d'une seule couche d'inclusions circulaires de diamètres identiques (voir figure 7.1(a)). Par contre, on cherche ici à garder, pour chaque inclusion, la même subdivision de la zone modulée (en trois sous-zones modulées) que celle effectuée pour la FOM étudiée dans la section 7.1.2 (voir la figure 3.15(b)). Pour cela, on distingue les deux demi-inclusions placées sur l'axe x des deux autres inclusions (voir figure 7.1(d)), dans différents ensembles sur lesquels on opère la subdivision en trois sous-zones modulées. Une fois tous ces ensembles déterminés indépendamment, toutes les sous-zones modulées sont combinées entre elles. Les matrices de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$, $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]$, $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$ sont toujours déterminées comme dans la section 7.1.2. Pour la FOM considérée, on trouve 7 sous-zones modulées, chacune partagée en 5 couches S ($L = 35$).

On rappelle qu'il existe dans ce cas quatre classes de symétries toutes non dégénérées [37, 38]. En conséquence, les champs du mode fondamental, dégénérés pour la FOM C_{6v}, deviennent non dégénérés : l'un appartient à la classe $C3$, l'autre à la classe $C4$. Les indices effectifs trouvés par la MD sont $n_{eff} = 1.4179222 + i5.1110\ 10^{-4}$ pour le mode $C3$-a (calculé à partir de la matrice $Z_2^{(L)}$ du sous-système de coefficients de Fourier $\mathcal{I}_2$), et $n_{eff} = 1.4184559 + i5.2756\ 10^{-4}$ pour le mode $C4$-a (calculé à partir de la même matrice du même sous-système de coefficients de Fourier que pour le mode $C3$-a). Les valeurs obtenues par la MM sont : $n_{eff} = 1.4179265 + i5.11457\ 10^{-4}$ (classe $C3$) et $n_{eff} = 1.418460 + i5.27845\ 10^{-4}$ (classe $C4$). On vérifie à nouveau le bon accord entre les résultats des deux méthodes. Les cartes de champs du mode $C4$-a sont représentées sur les figures 7.20(a) à 7.20(c).



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.20 – Cartes de champs normalisés du mode $C4$-a pour une FOM de symétrie C_{2v} pour $\lambda = 1.56$ μm, $N = 60$ et $L = 35$. $n_{eff} = 1.4184559 + i5.2756\ 10^{-4}$

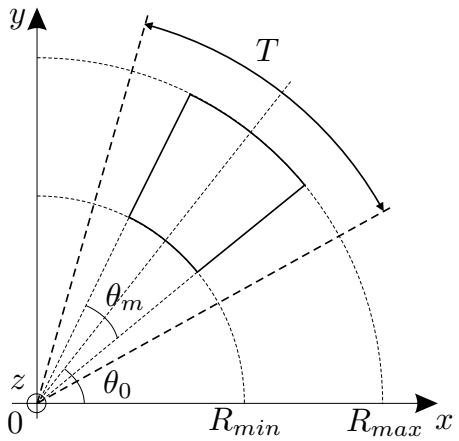


FIG. 7.21 – Section droite sur la période $T = \frac{2\pi}{N_T}$ d'une FOM $C_{N_T v}$ à inclusions sectorielles

7.2 Etude de FOMs à inclusions sectorielles

7.2.1 Structure équivalente à la FOM à 6 inclusions circulaires et de symétrie C_{6v}

Nous nous intéressons désormais à un nouveau profil, spécifique à la MD : une FOM C_{6v} à une couche d'inclusions sectorielles. Les cylindres circulaires précédents sont remplacés par des cylindres dont la section droite a la forme d'une portion de secteur centré sur l'origine (voir figure 7.21, $T = \frac{\pi}{3}$ pour la symétrie C_{6v}) et les classes des modes restent les mêmes. Ni la MM, ni sa version étendue (couplage MM et MD pour l'étude de FOM à inclusions elliptiques) [47] ne peuvent considérer, à ce jour, une telle fibre optique. Par contre, la méthode des éléments finis a déjà été appliquée sur ce genre de géométrie [106]. Ce type de fibre optique est fréquemment rencontrée lorsqu'un procédé de fabrication par extrusion est utilisé au lieu de la technique classique "stack and draw" [107, 108]. Le choix de cette géométrie se justifie aussi par la simplicité de son implémentation dans la méthode différentielle. Il s'agit du système équivalent au réseau lamellaire pour les réseaux en coordonnées cartésiennes. Pour ce dernier cas, on sait que la matrice d'intégration devient indépendante de la variable d'intégration (y pour le réseau 1D de la figure 3.1(a)). A ce titre, on préfère alors utiliser la méthode RCW [55, 56] qui devient moins coûteuse en temps de calcul et donne de meilleures précisions que la MD. On rappelle que le principe est d'exprimer explicitement les solutions du système différentiel en fonction des valeurs et vecteurs propres de la matrice d'intégration. Malheureusement, on ne peut envisager une méthode analogue à la RCW pour des structures cylindriques à inclusions sectorielles. En effet, les blocs de la matrice Q_ϵ ne dépendent effectivement plus de la variable d'intégration r, mais la matrice $\mathcal{M}(r)$ le reste

en raison des facteurs en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ (voir expression 3.18).

Ce type de profil invariant selon r demeure certainement la géométrie la plus simple à implémenter par la méthode différentielle en coordonnées cylindriques. Le secteur est caractérisé par trois paramètres géométriques : le rayon minimal R_{min}, le rayon maximal R_{max} et l'angle d'ouverture θ_m (voir figure 7.21). La zone modulée est comprise entre les cylindres circulaires centrés sur l'origine de rayons R_{min} et R_{max}. Elle est subdivisée en L couches S dont chacune d'entre elles comprend P pas d'intégration. Les vecteurs normaux à la surface sont colinéaires à $\vec{e}_\theta$ quelle que soit la valeur de $r \in [R_{min}, R_{max}]$. Ainsi, les matrices de Toeplitz associées à N_θ^2, N_r^2 et $N_r N_\theta$ deviennent $[\![N_\theta^2]\!] = I_d$ et $[\![N_r^2]\!] = [\![N_\theta N_r]\!] = 0$, et la matrice Q_ϵ (3.15) se simplifie en :

$$Q_\epsilon = \begin{pmatrix} [\![\epsilon]\!] & 0 & 0 \\ 0 & [\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [\![\epsilon]\!] \end{pmatrix}$$

Cette matrice Q_ϵ ne doit pas être confondue avec celle associée à la méthode différentielle classique (3.16). Elle ne diffère que par le second bloc diagonal égal à $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}$ au lieu de $[\![\epsilon]\!]$. Cette matrice $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}$ révèle clairement l'emploi de la seconde règle de factorisation (règle Inverse) pour la composante de $\vec{D}$ normale à la surface (D_θ). La matrice $[\![\epsilon]\!]$ est constituée des coefficients de Fourier d'une fonction créneau (indépendante de r) :

$$\epsilon_0(r) = \epsilon_{mat} + \frac{N_T \theta_m}{\pi} (\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}) \tag{7.5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \epsilon_n(r) = \frac{e^{-inN_T\theta_0}}{\pi n} \sin[nN_T\theta_m] (\epsilon_{cyl} - \epsilon_{mat}) \tag{7.6}$$

où N_T est l'ordre de la sous-périodicité angulaire de la structure cylindrique $C_{N_T v}$ ($N_T = 6$ dans le cas présent). L'expression des éléments de la matrice $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}$ s'en déduit toujours de la même façon (voir section 3.5.3). Du fait de l'indépendance de la matrice Q_ϵ en fonction de r, les matrices de Toeplitz, qui constituent ses blocs, ne sont calculées qu'une seule fois (en $r = R_{min}$) par intégration. Le temps de calcul en est alors réduit.

Pour le premier calcul numérique, la FOM C_{6v} à inclusions sectorielles modélisée possède le même taux d'occupation (ou taux de remplissage) que la FOM à sections circulaires (de paramètres Λ et d). En posant $R_{min} = \Lambda - \frac{d}{2}$ et $R_{max} = \Lambda + \frac{d}{2}$, le paramètre θ_m doit donc vérifier la condition :

$$\theta_m = \frac{\pi d}{4\Lambda}$$

Dans ce cas, nous nous attendons à ce que la valeur de l'indice effectif du mode fondamental de la FOM à inclusions sectorielles soit voisine à celle de l'indice effectif de la FOM à inclusions circulaires étudiée auparavant (voir section 7.1.2). Par conséquent, la localisation de l'indice effectif demeure plus simple que celle d'une FOM à inclusions sectorielles avec d'autres paramètres totalement arbitraires. Le tableau suivant regroupe les caractéristiques de la FOM modélisée :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
N_T	6
R_{min} $(= \Lambda - d/2)$	1.8 μm
R_{max} $(= \Lambda + d/2)$	2.8 μm
θ_m $(= \frac{\pi d}{4\Lambda})$	19.5652174^o
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1
n_{mat}	1.4439035654

Autres paramètres	***Valeurs***
λ	1.1 à 2 μm
Paramètres numériques	
N	30 à 120
L	25
P	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

A $\lambda = 1.56$ μm et $N = 60$, l'algorithme de recherche de l'indice effectif trouve $n_{eff} = 1.42050642 + i7.6390\ 10^{-4}$. Cette valeur est effectivement proche de celle trouvée pour la FOM à inclusions circulaires (avec les mêmes paramètres numériques, voir section 7.1.2). Lorsque N croît, l'indice effectif du mode fondamental semble converger vers une valeur hypothétique (voir figure 7.22). L'écart relatif entre le

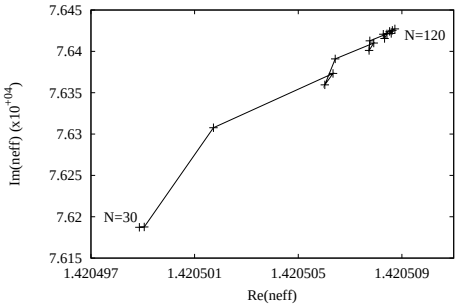
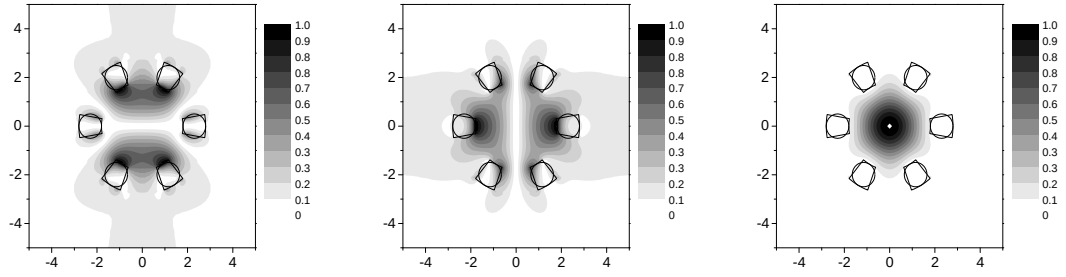
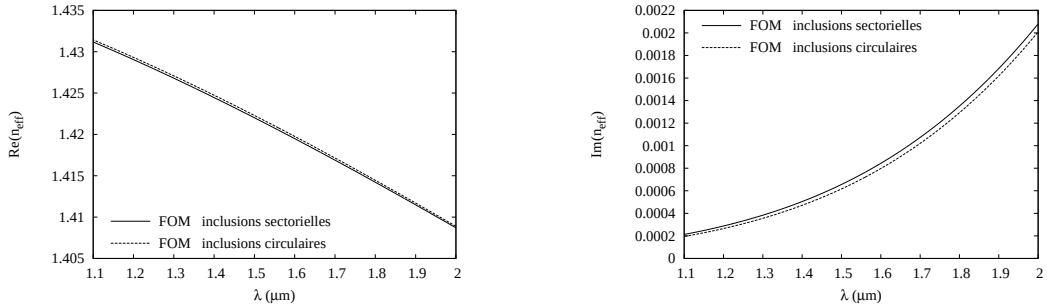


FIG. 7.22 – Test de convergence selon N de l'indice effectif du mode fondamental de la FOM à inclusions sectorielles pour $\lambda = 1.56\ \mu m$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.23 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a pour une FOM C_{6v} à inclusions sectorielles pour $\lambda = 1.56\ \mu m$ et $N = 60$. $n_{eff} = 1.42050791 + i7.64101\ 10^{-4}$



(a) $\Re e\left(n_{eff}\right)$ en fonction de λ (b) $\Im e\left(n_{eff}\right)$ en fonction de λ

FIG. 7.24 – Indice effectif en fonction de λ du mode fondamental des FOMs à inclusions sectorielles et circulaires équivalentes pour $N = 60$

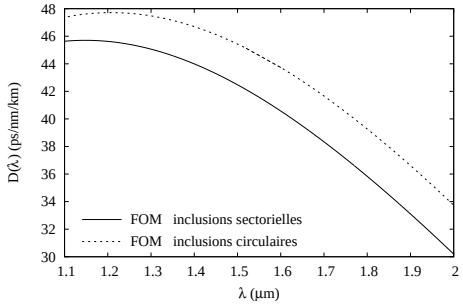


FIG. 7.25 – Dispersion chromatique D en fonction de λ pour les FOMs à inclusions sectorielles et circulaires équivalentes (voir figure 7.7(b)), pour $N = 60$

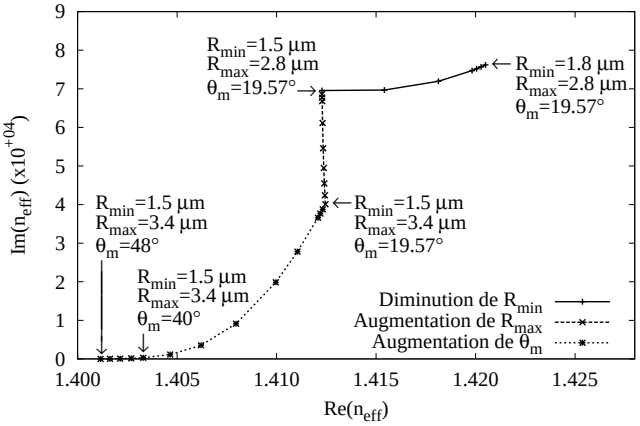
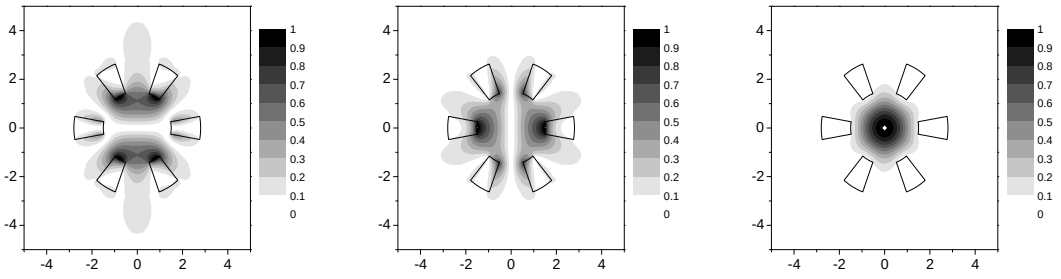


FIG. 7.26 – Evolution de l'indice effectif du mode fondamental lorsque les paramètres géométriques de la FOM à inclusions sectorielles changent ; le point de départ est celui tel que $R_{min} = 1.8\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 19.57^o$

module des indices effectifs des deux derniers points (pour $N = 114$ et $N = 120$) vaut $1.4\ 10^{-7}$ environ, ce qui correspond à une précision satisfaisante. Les cartes de champs du mode de classe $C4$ pour $N = 60$ sont illustrées par les figures 7.23(a) à 7.23(c). En plus du profil géométrique de la FOM à inclusions sectorielles, nous avons tracé celui de la FOM équivalente à inclusions circulaires (voir section 7.1.2). On constate que les cartes de champs sont semblables pour ces deux géométries de FOM (voir figures 7.3(a) à 7.3(c)). Enfin, nous terminons par l'étude de la dispersion. La figure 7.24(a) compare la partie réelle de l'indice effectif en fonction de λ pour les configurations à inclusions circulaires et sectorielles. On remarque que les courbes restent très proches l'une de l'autre sur l'intervalle de longueur d'onde étudié. L'équivalence des deux types de FOMs semble donc se conserver lorsque λ varie. On observe les mêmes effets pour les parties imaginaires de l'indice effectif repésentées dans la figure 7.24(b). Néanmoins, les courbes associées à la dispersion chromatique pour ces deux fibres à géométrie équivalente (voir figure 7.25) révèlent quelques différences de leurs propriétés de dispersion. Les valeurs sont dans l'ensemble plus faibles pour la FOM à inclusions sectorielles.

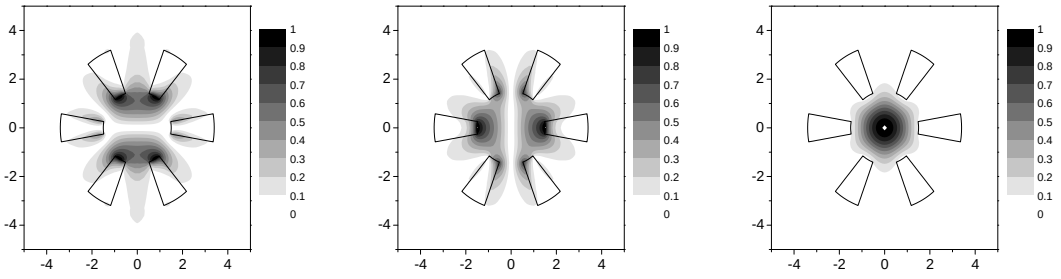
7.2.2 Evolution des indices effectifs en fonction des paramètres géométriques des secteurs

Nous avons voulu étudier l'effet des paramètres géométriques sur l'indice effectif du mode fondamental d'une FOM à inclusions sectorielles. Pour cela, la première valeur correspond à la FOM équivalente à la fibre à inclusions circulaires (voir la section précédente pour les paramètres à $\lambda = 1.56\ \mu m$). La figure 7.26 montre la trajectoire de n_{eff} dans le plan complexe lorsque les paramètres géométriques changent. La diminution du rayon minimal R_{min} de $1.8\ \mu m$ à $1.5\ \mu m$ engendre principalement une décroissance de la partie réelle de l'indice effectif, sans vraiment affecter les pertes. On rappelle que la partie réelle de l'indice effectif d'un mode peut s'interpréter grossièrement comme une sorte de moyenne de l'indice de réfraction de la fibre optique pondérée par le module du champ associé au mode. Ainsi, la proportion plus importante du champ pénétrant dans les inclusions de bas indice lorsque R_{min} diminue explique cette observation (comparer les figures 7.23(a) à 7.23(c) pour $R_{min} = 1.8\ \mu m$ et les figures 7.27(a) à 7.27(c) pour $R_{min} = 1.5\ \mu m$). Inversement, seule la partie imaginaire est affectée lorsque R_{max} augmente de $2.8\ \mu m$ à $3.4\ \mu m$. La diminution des pertes s'explique par le confinement plus important du champ modal dans le coeur puisque l'étendue de la région microstructurée (contenant les inclusions) devient plus grande (voir figures 7.28(a) à 7.28(c) pour $R_{max} = 3.4\ \mu m$). L'augmentation de l'angle θ_m d'ouverture des secteurs de 19.57^o à 40^o entraîne la décroissance à la fois des parties réelle et imaginaire. En effet, le champ (voir les figures 7.29(a) et 7.29(c) pour $\theta_m = 40^o$) se répartit dans les régions intérieures



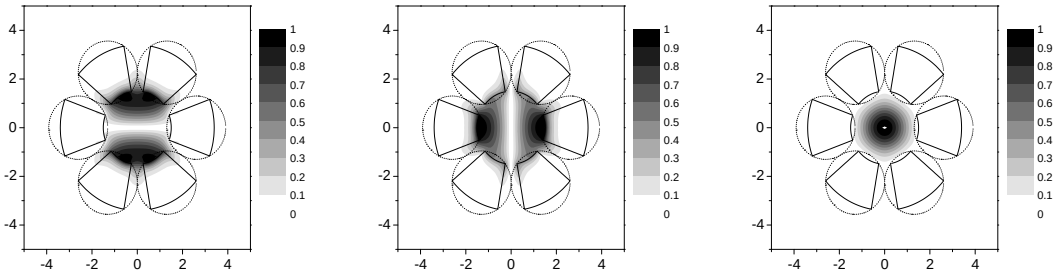
(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.27 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a de la FOM à inclusions sectorielles pour $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$, $\theta_m = 19.57^o$ et $\lambda = 1.56\ \mu m$. $n_{eff} = 1.41228123 + i6.95515\ 10^{-4}$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.28 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a de la FOM à inclusions sectorielles pour $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$, $\theta_m = 19.57^o$ et $\lambda = 1.56\ \mu m$. $n_{eff} = 1.41245774 + i4.0081\ 10^{-4}$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.29 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a de la FOM à inclusions sectorielles pour $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$, $\theta_m = 40^o$ et $\lambda = 1.56\ \mu m$. $n_{eff} = 1.40329773 + i2.93695\ 10^{-6}$

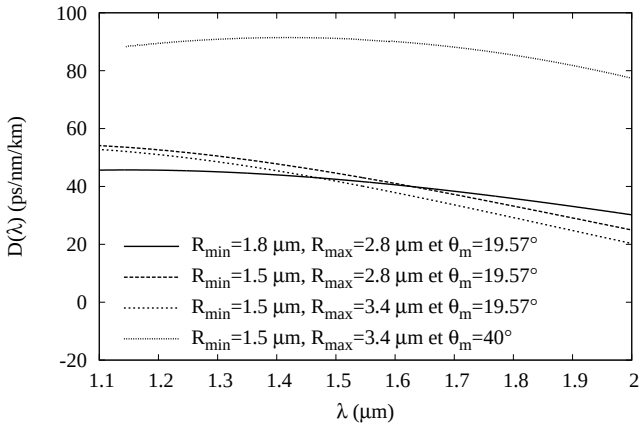
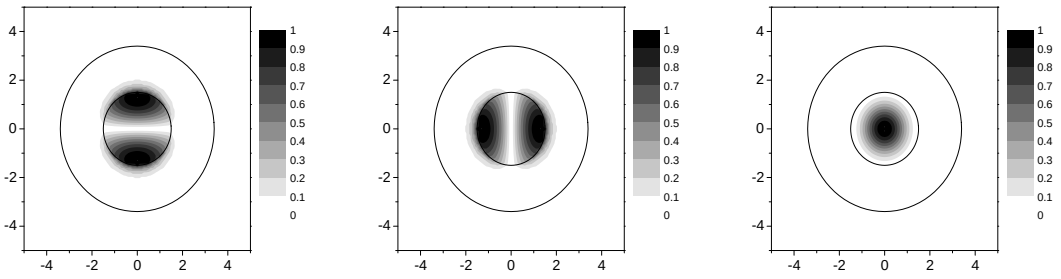


FIG. 7.30 – Dispersion chromatique D en fonction de λ pour 4 points cités à la figure 7.26



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.31 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental de la fibre W pour $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$ et $\lambda = 1.56\ \mu m$. $n_{eff} = 1.39907198$

des secteurs (de bas indice) plus étendues, d'où la diminution de $\Re e\,(n_{eff})$. De plus, le coeur est plus isolé de la région extérieure, ce qui explique la décroissance de $\Im m\,(n_{eff})$.
La figure 7.30 représente la dispersion chromatique $D(\lambda)$ pour λ variant de 1.1 μm à de 2 μm, en chacun des quatre points considérés auparavant :

- Premier point à $R_{min} = 1.8\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 19.57^o$
- Deuxième point à $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 19.57^o$
- Troisième point à $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$ et $\theta_m = 19.57^o$
- Quatrième point à $R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$ et $\theta_m = 40^o$

On en déduit que la variation de R_{min} et R_{max} engendre une pente plus importante de la courbe alors que la variation de θ_m induit un déplacement de la courbe selon l'axe des ordonnées.

Pour le point à $\theta_m = 40^o$, les profils des cylindres circulaires circonscrits aux cylindres sectoriels sont représentés dans les cartes de champs (voir figures 7.29(a) à 7.29(c)). Les paramètres des cercles (Λ et R) se déduisent alors de ceux des secteurs (R_{min}, R_{max} et θ_m) par les relations :

$$\Lambda = \frac{R_{min} + R_{max}}{2\cos\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}$$

et

$$R = \sqrt{\Lambda^2 + R_{min}^2 - 2\Lambda R_{min}\cos\left(\frac{\theta_m}{2}\right)}$$

On constate alors que les cercles circonscrits aux secteurs deviennent tangents pour cette configuration de paramètres ($R_{min} = 1.5\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$ et $\theta_m = 40^o$). On rappelle qu'il s'agit du cas limite envisageable pour la MM qui, même dans sa version étendue [47], ne peut traiter que des inclusions inscrites dans des cercles disjoints. Par conséquent, il devient intéressant d'augmenter de nouveau l'angle θ_m. Les quatre derniers points (dans le sens de variation des paramètres) de la figure 7.26 sont évalués pour $\theta_m = 42^o$, 44^o, 46^o et 48^o. L'indice effectif à $\theta_m = 48^o$ vaut $n_{eff} = 1.40115337 + 1.081\ 10^{-7}$. En fait, la FOM C_{6v} à une couche d'inclusions sectorielles tend vers une "fibre W" (de symétrie $C_{\infty v}$) centrée sur l'origine et telle que les rayons des deux interfaces cylindriques valent $R_{min} = 1.5\ \mu m$ et $R_{max} = 3.4\ \mu m$. Le coeur possède le même indice que le milieu extérieur (1.4439035654 pour $\lambda = 1.56\ \mu m$) et l'indice entre les deux cylindres vaut 1. On observe sur la figure 7.26 que l'indice effectif du mode fondamental de la FOM tend vers celui (mode guidé) de la fibre W lorsque θ_m augmente. Dans le programme, cela revient à considérer une couche homogène et isotrope dont l'implémentation ne requiert pas d'intégration (voir section 3.2.3). L'indice effectif du mode fondamental guidé dans la fibre W est égal à 1.39907198. Il n'est pas représenté sur la figure 7.26 par souci de clarté du graphique. Les figures 7.31(a) à 7.31(c) montrent les cartes de champs correspondantes.

7.3 Etude de FOMs de type "grapefruit"

Selon les procédés de fabrication de FOM à inclusions circulaires, les premières couches d'inclusions (les plus proches du coeur) présentent parfois une déformation due aux contraintes mécaniques qui s'exerçent sur leurs interfaces lors de l'étirage de la fibre. Les cylindres circulaires prennent alors la forme de "quartier de pamplemousse" d'où le nom donné à ce genre de fibre : FOM de type "grapefuit". Des travaux ont notamment été menés sur des FOMs de type "grapefruit" à une seule couche d'inclusions [109, 110]. Nous avons naturellement songé à implémenter ce genre de géométrie dans la méthode différentielle. Nous modélisons la FOM grapefruit $C_{N_T v}$ à une couche d'inclusions, de section droite représentée par la figure 7.32 sur la période $T = \frac{2\pi}{N_T}$. Elle combine trois structures que nous avons déjà étudiées : un secteur de paramètres r_1, r_2 et θ_m, encadré par deux portions de cercles, de distances à l'origine r_{01} pour le premier et r_{02} pour le second, et de rayons respectifs R_1 et R_2. Ces trois éléments constituent chacun une sous-zone modulée et sont séparés par les interfaces (cylindres circulaires centrés sur l'origine) de rayon : $R_{min} = r_{01} - R_1$, r_1, r_2 et $R_{max} = r_{02} + R_2$. Le calcul des matrices de Toeplitz ($[\![\epsilon]\!]$, $[\![\frac{1}{\epsilon}]\!]^{-1}$, $[\![N_\theta^2]\!]$, $[\![N_r^2]\!]$ et $[\![N_\theta N_r]\!]$) dans Q_ϵ reste rigoureusement identique aux calculs effectués pour des inclusions circulaires et sectorielles (voir respectivement les sections 7.1.2 et 7.2.1). Comme pour le secteur, on choisit les paramètres de l'inclusion suivants : R_{min}, R_{max} et θ_m. Les autres grandeurs

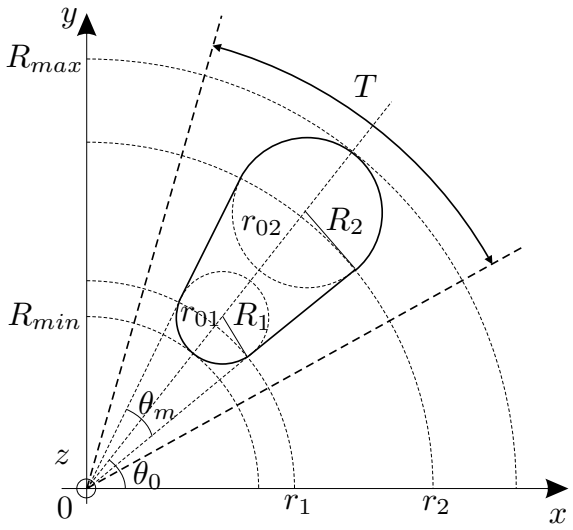


FIG. 7.32 – Section droite sur la période T d'une FOM de type "grapefruit"

géométriques s'en déduisent par les relations :

$$\begin{cases} r_{01} = \frac{R_{min}}{1-\frac{\tan(\theta_m)}{\sqrt{\tan^2(\theta_m)+1}}} \\ R_1 = r_{01} - R_{min} \\ r_1 = \frac{R_1}{\tan(\theta_m)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{02} = \frac{R_{max}}{1+\frac{\tan(\theta_m)}{\sqrt{\tan^2(\theta_m)+1}}} \\ R_2 = R_{max} - r_{02} \\ r_2 = \frac{R_2}{\tan(\theta_m)} \end{cases}$$

Comme dans la section précédente, nous nous intéressons à l'évolution de l'indice effectif du mode fondamental dans le plan complexe lorsque les paramètres géométriques changent (voir figure 7.33). La FOM à inclusions circulaires précédente (voir section 7.1.2 pour les paramètres à $\lambda = 1.56\ \mu m$) constitue la configuration géométrique initiale de l'étude. Dans ce cas, la sous-zone modulée contenant le secteur est d'épaisseur nulle ($r_1 = r_2$). Son indice effectif est décrit par le point de plus grande partie réelle dans la figure 7.33, pour $R_{min} = 1.8\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 25.113^o$. Lorsque le paramètre R_{min} diminue, la partie réelle de n_{eff} décroît en raison d'un champ un peu plus étendu dans les inclusions de bas indice (voir figures 7.34(a) à 7.34(c)). Cependant, les pertes diminuent dans un premier temps pour ensuite augmenter de nouveau. On explique l'existence de ce minimum de pertes (situé vers $n_{eff} = 1.40352609 + i4.892\ 10^{-4}$) de la manière suivante. La décroissance R_{min} permet, tout d'abord, un confinement plus important du champ dans le coeur du fait de l'épaisseur plus grande de la région microstructurée. Lorsque le champ compris dans la partie supérieure des inclusions ($r \approx R_{max}$) devient suffisamment élevé par rapport à celui dans la partie inférieure ($r \approx R_{min}$), il se produit une sorte de "pincement" du champ localisé dans le coeur, les pertes du mode fondamental commencent à augmenter, ce qui explique la seconde partie de la courbe (entre les points à $R_{min} = 1.8\ \mu m$ et $R_{min} = 1\ \mu m$). Lorsque θ_m augmente de 25.113^o à 40^o, on observe une diminution simultanée des parties réelle et imaginaire de l'indice effectif, dont l'interprétation est identique à celle de la courbe équivalente de la figure 7.26 de la section 7.2.2.

La figure 7.36 représente la dispersion chromatique D pour λ variant de $1.1\ \mu m$ à de $2\ \mu m$, en chacun des trois points de la figure 7.33 considérés auparavant :

- Premier point à $R_{min} = 1.8\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 25.113^o$
- Deuxième point à $R_{min} = 1.\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 25.113^o$
- Troisième point à $R_{min} = 1.\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$ et $\theta_m = 40^o$

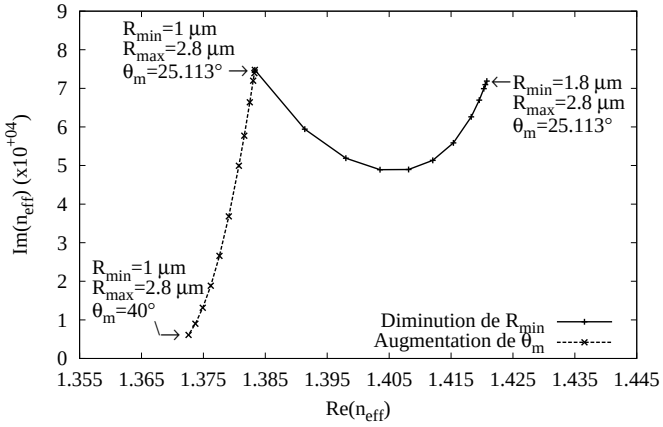
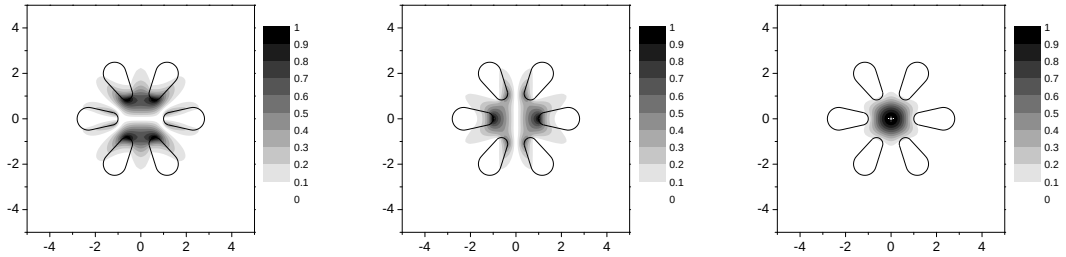
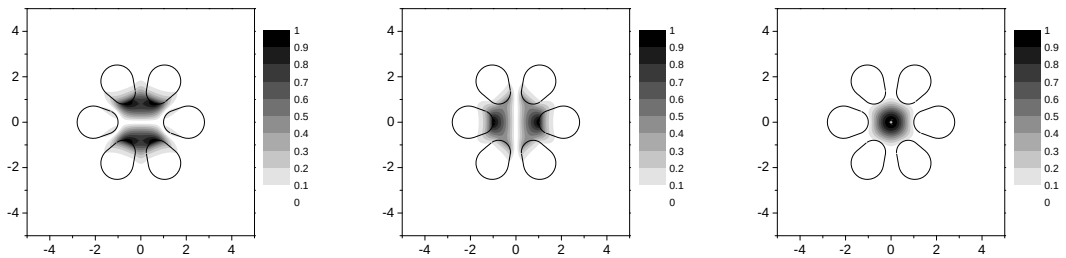


FIG. 7.33 – Evolution de l'indice effectif du mode fondamental lorsque les paramètres géométriques de la FOM de type "grapefruit" changent. Le point initial est tel que $R_{min} = 1.8\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 25.113^o$. L'indice effectif correspondant au minimum des pertes de la courbe associée à la diminution de R_{min} vaut $n_{eff} = 1.40352609 + i4.892\ 10^{-4}$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.34 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a de la FOM de type grapefruit pour $R_{min} = 1\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$, $\theta_m = 25.11^o$ et $\lambda = 1.56\ \mu m$. $n_{eff} = 1.38330698 + i7.47920\ 10^{-4}$



(a) $|E_z|$ (b) $|H_z|$ (c) $|\mathcal{P}_z|$

FIG. 7.35 – Cartes de champs normalisés du mode fondamental $C4$-a de la FOM grapefruit pour $R_{min} = 1\ \mu m$, $R_{max} = 3.4\ \mu m$, $\theta_m = 40^o$ et $\lambda = 1.56\ \mu m$. $n_{eff} = 1.37260330 + i6.0897\ 10^{-5}$

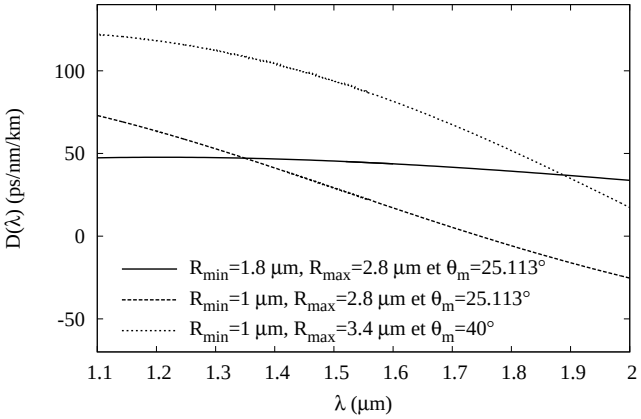


FIG. 7.36 – Dispersion chromatique D en fonction de λ pour les FOMs grapefruit. La courbe en trait plein ($R_{min} = 1.8\ \mu m$, $R_{max} = 2.8\ \mu m$ et $\theta_m = 25.113^o$) correspond à la FOM à inclusions circulaires (voir figure 7.7(b))

On voit que les changements de paramètres induisent une forte variation de la pente des courbes de dispersion. Pour la courbe associée au second point de la figure 7.33, on voit apparaître, dans l'intervalle de longueur d'onde d'étude, une valeur vers $\lambda = 1.75\ \mu m$ pour laquelle la dispersion chromatique est nulle. Concernant la courbe associée au troisième point de la figure 7.33, la pente moyenne est globalement plus élevée.

7.4 Etude de FOMs de type ARROW

7.4.1 Définition et conséquences

Jusqu'à présent, nous avons étudié des FOMs classiques dont les inclusions cylindriques possédaient un indice de réfraction plus faible que celui de la matrice. Le guidage des modes de coeur recherchés peut être interprété, en toute première approximation, comme un guidage par l'indice moyen de la zone microstructurée, ce dernier étant plus faible que l'indice du coeur. Nous nous intéressons désormais à des FOMs pour lesquelles le contraste entre les indices des inclusions et la matrice est inversé (cylindres de haut indice dans une matrice de bas indice). Dans ce cas, l'existence de modes de coeur ne paraît pas évidente puisque l'indice de réfraction moyen de la région microstructurée devient plus grand que celui du coeur. Il existe pourtant bien des modes de coeur dont les pertes peuvent être rendues très faibles. Ces guides d'ondes sont appelés "AntiResonant Reflecting Optical Waveguide" (ARROW). Plusieurs articles traitant aussi bien de travaux numériques qu'expérimentaux sont déjà parus sur ce sujet [35, 36, 111, 112, 113, 90]. On montre que les propriétés de guidage dans les FOMs de type ARROW sont fortement liées à celles des cylindres individuels [35]. Dans la référence [36], les auteurs associent explicitement les phénomènes de résonance aux coupures des modes d'une inclusion de haut indice.

Quelques constatations sur certaines figures de l'article [35] (dont les calculs sont obtenus à l'aide de la MM) constituent le point de départ des travaux présentés dans cette section. Les discontinuités qui apparaissent dans les figures 2 et 3 de ce même article, nous ont poussé à étudier plus en détail la dispersion des modes de coeur des FOMs de type ARROW à proximité des longueurs d'ondes de coupure des modes des inclusions. Ainsi, nous avons mis en évidence un effet de transition de délocalisation, dans les inclusions, du mode fondamental de la FOM (noté "mode A"), confiné dans le coeur, par anti-croisement avec un autre mode de la FOM (noté "mode B") "constitué", dans chaque inclusion, d'un mode à pertes d'un cylindre circulaire. On suppose que les champs de ce dernier mode, localisés dans chaque inclusion, n'interagissent pas entre eux, car les inclusions sont suffisamment distantes les unes des autres (faible rapport $\frac{d}{\Lambda}$), et leurs pertes faibles (on se place à proximité de sa longueur de coupure).

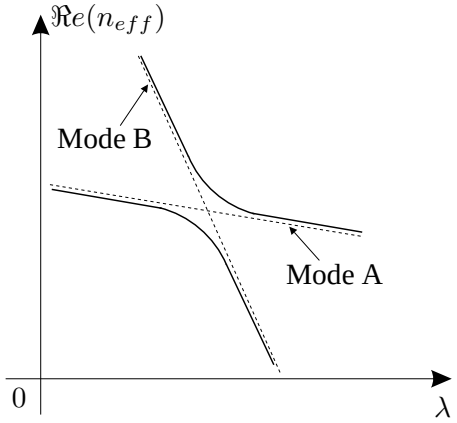


FIG. 7.37 – Schéma illustrant un anti-croisement de modes dans une FOM de type ARROW : $\Re e(n_{eff})$ en fonction de λ. Le mode A est un mode à pertes de la FOM (généralement le mode fondamental $C3/4$). La courbe en pointillé associée au mode A serait celle hypothétiquement obtenue sans tenir compte de l'anti-croisement. La courbe en pointillé est associée au mode B qui est un mode à pertes d'une inclusion de la FOM. Les courbes en trait plein sont celles effectivement obtenues numériquement pour le mode A.

On néglige alors les effets de couplage et chaque cylindre circulaire peut être indépendemment considéré comme une fibre optique circulaire conventionnelle à saut d'indice (de haut indice). Par abus de langage, le mode B de la FOM sera décrit comme le mode de cette fibre conventionnelle. La MD a permis de confirmer les observations de ce type de transition de délocalisation du mode fondamental initialement faites à l'aide de la MM disponible au sein du laboratoire. Dans la section suivante, nous exposons les premiers résultats numériques qui ont fait l'objet de l'article [88]. La dernière section concerne la comparaison entre nos résultats numériques (obtenus par la MD) et des mesures effectuées par l'équipe de PHLAM de l'Université de Lille I sur une FOM de type ARROW dont les inclusions sont à gradient d'indice. Dans ces deux sections, l'anti-croisement étudié sera abordé en deux étapes. Tout d'abord, nous établirons les propriétés de dispersion (n_{eff} en fonction de λ) à proximité de la longueur de coupure d'un mode à perte d'une fibre optique conventionnelle. Ensuite, nous décrirons et interpréterons l'anti-croisement du mode fondamental $C3/4$ (mode A) de la FOM de type ARROW à inclusions circulaires avec le mode (mode B) associé à celui d'une seule inclusion.

7.4.2 Observation numérique de la transition de délocalisation du mode fondamental d'une FOM de type ARROW par anti-croisement

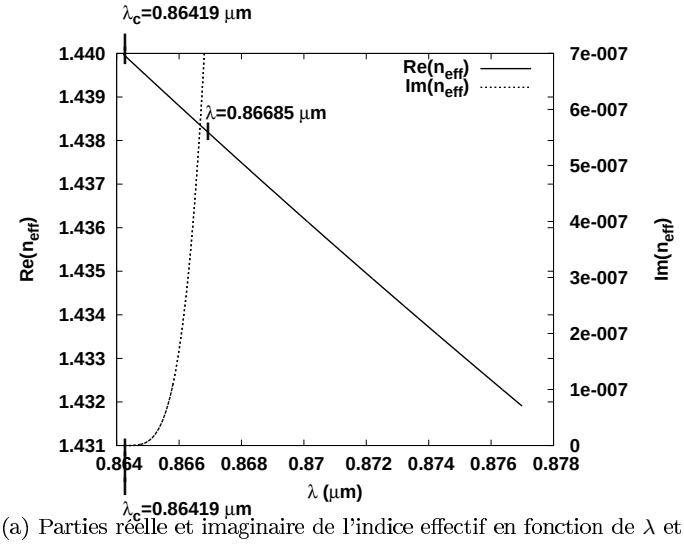
Nous considérons la même FOM ARROW à inclusions circulaires que celle étudiée dans l'article [35] : $\Lambda = 5.64\ \mu m$, $d = 3.315\ \mu m$, $n_{cyl} = 1.8$ et $n_{mat} = 1.44$. Nous faisons varier la longueur d'onde λ autour de $0.867\ \mu m$, qui correspond à une discontinuité que nous avons observée dans la figure 3 de cet article.

Mode EH_{33} d'une inclusion de la FOM de type ARROW .

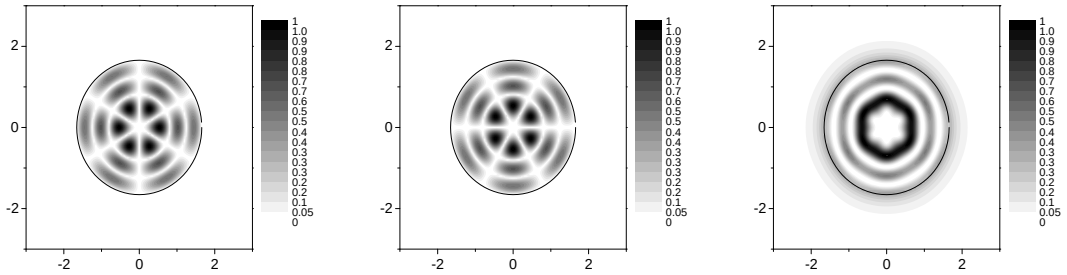
Une inclusion de cette FOM de type ARROW s'identifie à une fibre optique conventionnelle à saut d'indice. Dans le programme, cette fibre équivaut à un cylindre circulaire centré sur l'origine. Dans le chapitre 6.5.1, nous avons établi la grande précision des résultats obtenus pour cette configuration géométrique. On rappelle les paramètres choisis :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
$R\ (=\frac{d}{2})$	$1.6575\ \mu m$
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.8
n_{mat}	1.44

Autres paramètres	***Valeurs***
N	3
λ	0.864 à 0.878 μm
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	5
$\mathcal{A}_p$	9



(a) Parties réelle et imaginaire de l'indice effectif en fonction de λ et mise en évidence de la longueur d'onde de coupure $\lambda_c = 0.86419\ \mu m$



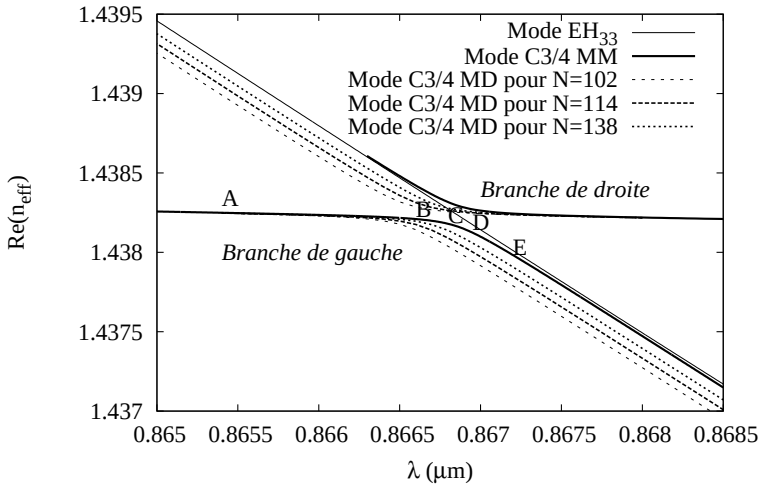
(b) Carte de $|E_z|$ normalisé pour $\lambda = 0.86685\ \mu m$ (c) Carte de $|H_z|$ normalisé pour $\lambda = 0.86685\ \mu m$ (d) Carte de $|P_z|$ normalisé pour $\lambda = 0.86685\ \mu m$

FIG. 7.38 – Etude du mode EH_{33} de la fibre conventionnelle

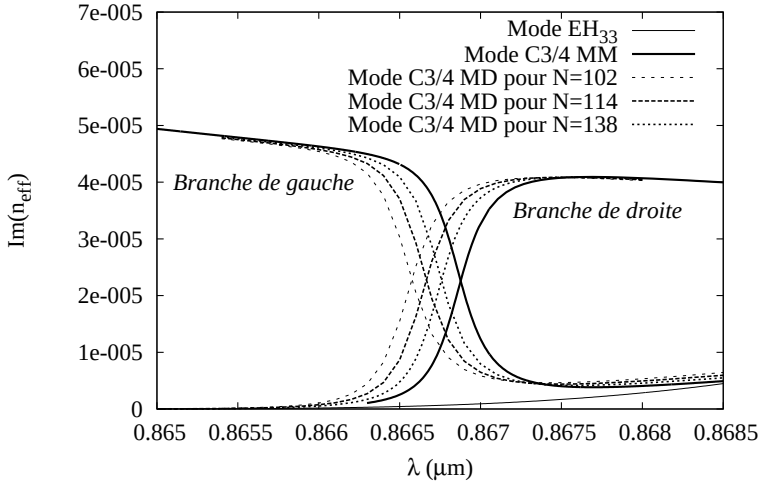
L'écart d'indice entre le cylindre et le milieu extérieur est trop important pour utiliser l'approximation du faible guidage, puisque $\Delta_{ind} = 18\%$ selon la relation 6.40. La longueur d'onde de coupure la plus proche de $\lambda = 0.867\ \mu m$ est associée au mode EH_{33} (un des deux modes du groupe LP_{43} si on veut se raccrocher au cas du guidage faible) et vaut $\lambda_c = 0.86419\ \mu m$ (valeur calculée à partir des équations du tableau 6.6). A $\lambda = 0.867\ \mu m$, le mode EH_{33} est un mode à pertes. La figure 7.38(a) montre les parties réelle et imaginaire de l'indice effectif du mode EH_{33} pour λ variant de $0.864\ \mu m$ à $0.878\ \mu m$. Les deux courbes sont en parfait accord avec la valeur de λ_c prévue par la théorie. On rappelle que cette longueur d'onde est celle pour laquelle le mode guidé devient un mode à pertes (dans le sens des λ croissants) : $\Im m\,(n_{eff}) > 0$ et $\Re e\,(n_{eff}) < n_{mat} = 1.44$. Les figures 7.38(b) à 7.38(d) représentent les cartes de champs de ce mode pour $\lambda = 0.86685\ \mu m$. On retrouve les six lobes angulaires caractéristiques de l'ordre azimutal $\nu = 3$ et les trois lobes radiaux associés au numéro $\mu = 3$ du mode $EH_{\nu\mu}$.

Mode fondamental $C3/4$ de la FOM ARROW C_{6v} et anti-croisement .

Les calculs numériques sont effectués à l'aide de la MM et de la MD. En ce qui concerne la FOM modélisée par la MD, il s'agit du même type de géométrie que la FOM classique C_{6v} à une couche d'inclusions circulaires, étudiée à la section 7.1.2, mais le contraste d'indice est inversé. Les

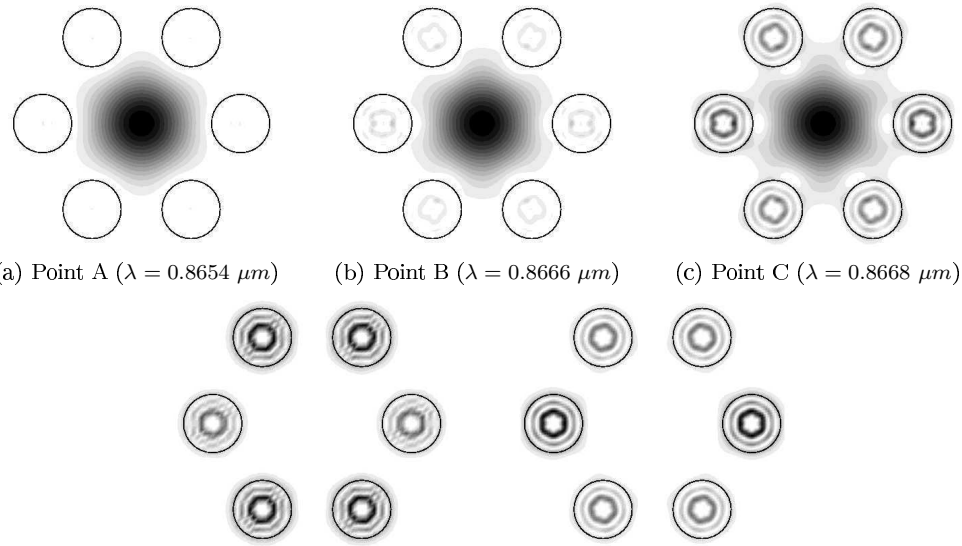


(a) Partie réelle de l'indice effectif en fonction de λ pour la MM et la MD



(b) Partie imaginaire de l'indice effectif en fonction de λ pour la MM et la MD

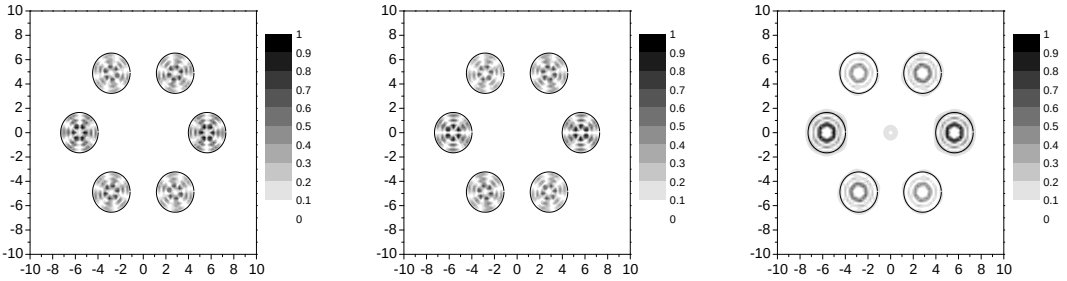
FIG. 7.39 – Anti-croisement du mode fondamental $C3/4$-a de la FOM ARROW avec le mode à pertes EH_{33} de la fibre conventionnelle



(a) Point A ($\lambda = 0.8654\ \mu m$) (b) Point B ($\lambda = 0.8666\ \mu m$) (c) Point C ($\lambda = 0.8668\ \mu m$)

(d) Point D ($\lambda = 0.8669\ \mu m$) (e) Point E ($\lambda = 0.8672\ \mu m$)

FIG. 7.40 – Cartes de $|P_z|$ calculées par la MM pour les points A à E de la figure 7.39(a)



(a) Carte de $|E_z|$) (b) Carte de $|H_z|$ (c) Carte de $|P_z|$

FIG. 7.41 – Cartes de champs du mode fondamental $C3/4$ calculées par la MD à $\lambda = 0.86685\ \mu m$ (voir la figure 7.39(a))

paramètres détaillés sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
N_T	6
d	3.315 μm
Λ	5.64 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{cyl}	1.8
n_{mat}	1.44
Autres paramètres	
λ	0.865 à 0.8685 μm

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	102,114,138
τ_c	10%
L_1 et L_2	15
L_3	7
P_1, P_2 et P_3	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

La zone modulée est plus épaisse, ce qui explique les nombres de couches S plus élevés ($L_1 = L_2 = 15$ au lieu de 10 et $L_3 = 7$ au lieu de 5). Nous nous intéressons au mode fondamental $C3/4$ de cette FOM de type ARROW.

La figure 7.39(a) montre l'évolution en fonction de λ de $\Re e\,(n_{eff})$ du mode "fondamental" localisé dans le coeur, calculé avec la MM et la MD pour $N = 102$, 114 et 138. Pour l'instant, concentrons-nous seulement sur la courbe associée à la MM. La droite associée à l'indice effectif du mode EH_{33} (voir figure 7.38(a)) est également représentée. Il apparaît un anti-croisement entre la courbe de dispersion du mode fondamental $C3/4$ de FOM et celle du mode à pertes EH_{33} calculée pour une inclusion cylindrique circulaire. En fait, on voit que l'anti-croisement se situe dans la région où les courbes du mode $C3/4$ sont proches de celles du mode EH_{33}. Pour le mode fondamental $C3/4$, elles se scindent en deux branches. Au niveau de l'anti-croisement, on se rend compte que la branche de gauche tend asymptotiquement vers la courbe du mode EH_{33} par valeur inférieure en indice effectif, alors que la branche de droite tend asymptotiquement vers cette même courbe par valeur supérieure. Quant à $\Im m\,(n_{eff})$ en fonction de λ illustrée par la figure 7.39(b), on constate que les courbes du mode fondamental se scindent également en deux branches. Dans les deux cas, les pertes diminuent rapidement au niveau de l'anti-croisement pour tendre asymptotiquement vers celles associées au mode EH_{33}. Afin d'interpréter cet effet, on introduit cinq points le long de la branche de gauche, à différentes longueurs d'onde :

Points	λ (μm)
A	0.8654
B	0.8666
C	0.8668
D	0.8669
E	0.8672

Les figures 7.40(a) à 7.40(e) représentent les cartes de $|P_z|$ calculées par la MM pour ces cinq points. Du point A au point E, on observe que l'intensité du champ du mode fondamental localisé dans le coeur diminue progressivement, alors qu'on voit apparaître un champ identique dans toutes les inclusions cylindriques. On remarque que la carte de $|P_z|$ du mode EH_{33} calculée précédemment à $\lambda = 0.86685$ μm (voir figure 7.38(d)) s'identifie très précisément aux champs observés dans chacune des inclusions. Lors de l'anti-croisement, il se produit ce que nous appellerons une "transition de délocalisation" du mode fondamental du coeur de la FOM vers les inclusions.

Concernant les résultats de la MD pour $N = 102$, 114 et 138, il apparaît effectivement sur les figures 7.39(a) et 7.39(b) l'anti-croisement des modes, mais les branches ne convergent pas asymptotiquement vers la courbe de dispersion du mode EH_{33}. Pour une valeur de N fixée, elles tendent vers une droite fictive dépendante de la précision des résultats. Malgré des ordres de troncature N élevés (supérieurs à 100), cette imprécision se justifie par le contraste d'indice élevé entre les inclusions et la matrice, ainsi que par la sélectivité en longueur d'onde du phénomène (finesse de l'intervalle d'étude : 3.5 10^{-3} μm). Néanmoins, lorsque N augmente, les courbes convergent vers celles calculées par la MM, ce qui confirme et valide la description précédente de l'anti-croisement. A $N = 102$ et $\lambda = 0.86685$ μm, les cartes de champs calculées avec la MD (voir figures 7.41(a)

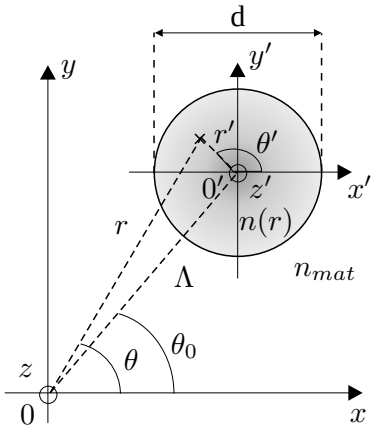


FIG. 7.42 – Représentation d'une inclusion à gradient d'indice (de profil $n(r)$) dans le repère global $(Oxyz)$ et le repère local $(O'x'y'z')$

à 7.41(c)) révèlent les symétries des modes EH_{33} dans les inclusions (voir les figures 7.38(b) à 7.38(d)).

Nous limitons cette étude à cet anti-croisement de modes et nous ne nous attarderons pas sur les résultats qui concernent celui également observé du mode $C3/4$ de la FOM de type ARROW avec le mode associé à HE_{53} (le second mode du groupe LP_{43}) vers $\lambda = 0.855\ \mu m$ (voir l'article [88]). La transition de délocalisation des modes de coeur vers les inclusions semble être conditionnée par de nombreux paramètres. Dans l'article [88], l'influence du pitch (Λ) a été étudiée, ainsi que celle du contraste d'indice. Nous avons constaté que l'anti-croisement du mode fondamental $C3/4$ avec des modes de polarisation HE est beaucoup plus sélectif en longueur d'onde qu'avec des modes de polarisation EH. Cette étude reste en cours d'investigation. Il semblerait que les symétries des modes interviennent dans cette sélectivité des anti-croisements.

7.4.3 Etude d'une FOM à gradient d'indice

Problématique .

Nous avons cherché à vérifier expérimentalement l'existence de la transition de délocalisation d'un mode de coeur vers les inclusions par anti-croisement et plus généralement à mieux comprendre les mécanismes sous-jacents à la propagation des modes de coeur dans les FOMs de type ARROW. Dans ce but, nous collaborons avec l'équipe du PhLAM (IRCICA) de l'Université de Lille I qui fabrique et caractérise ce type de fibres. Leur fibre optique qui nous intéresse possède une matrice constituée de silice pure et des inclusions de silice dopées au germanium [90]. Le procédé de fabrication induit un gradient radial parabolique des indices de réfraction des inclusions. En notant n_{mat} l'indice de la matrice, d le diamètre d'une inclusion, n_{max} son indice maximal (au centre du cylindre), l'équation du profil d'indice dans le repère local $(O'x'y'z')$ de l'inclusion (voir figure 7.42) s'écrit :

$$n(r') = \begin{cases} n_{max} - \frac{4\Delta}{d^2} r'^2 \text{ si } r' \leq \frac{d}{2} \\ n_{mat} \text{ si } r' > \frac{d}{2} \end{cases} \tag{7.7}$$

où Δ est le paramètre de décroissance de l'indice : en $r' = \frac{d}{2}$, on a $n(r') = n_{max} - \Delta$. Dans notre étude, nous nous limitons à un profil d'indice continu à la surface de l'inclusion, soit $\Delta = n_{max} - n_{mat}$. Nous étudions la FOM de type ARROW fabriquée au PhLAM (IRCICA) qui comprend sept couches d'inclusions de diamètre $d = 6.24\ \mu m$, de pitch $\Lambda = 9.136\ \mu m$ (même rapport $\frac{d}{\Lambda}$ que dans la FOM utilisée dans l'article [90]), $n_{mat} = 1.444$ et $n_{max} = 1.474$. Etant donnée la faible valeur de $\Delta = 3\ 10^{-2}$, l'approximation du faible guidage est valable. Pour cette FOM de type ARROW, la mesure du spectre en transmission (puissance de sortie notée P_{out} en fonction de λ) sur des sections transverses limitées au coeur a été gracieusement effectuée par l'équipe de l'IRCICA (voir

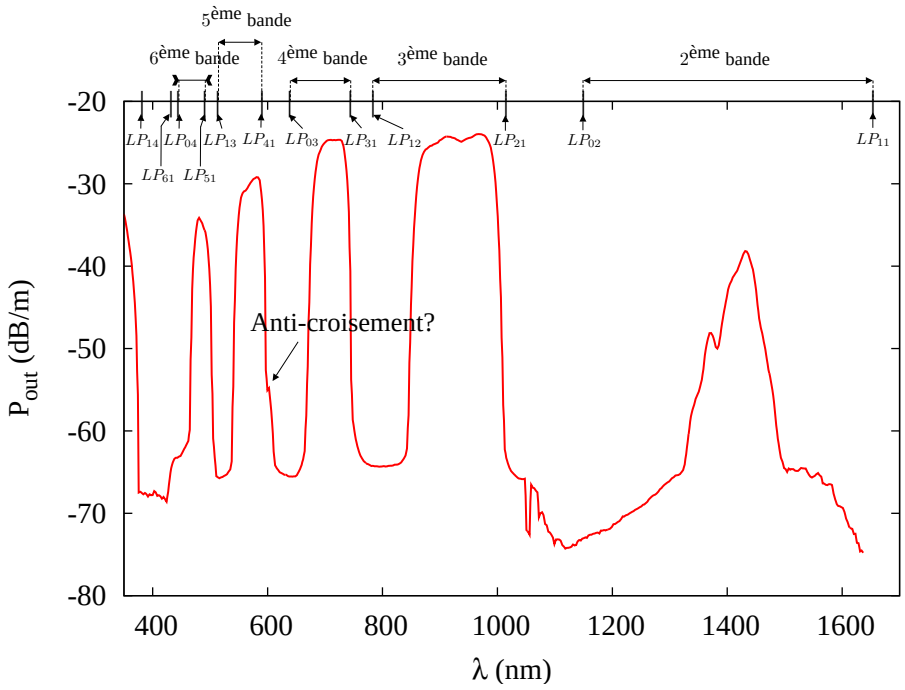


FIG. 7.43 – Puissance de sortie expérimentale du coeur de la FOM à inclusions inhomogènes. Spectre gracieusement fourni par G. Bouwmans de l'IRCICA (Université de Lille I)). On voit apparaître 5 bandes de transmission (La dernière est centrée sur 1400 nm environ)

figure 7.43). On voit apparaître les bandes de transmission caractéristiques de ce genre de fibre. Les valeurs maximales de la puissance correspondent à la propagation dans la fibre d'un mode localisé dans le coeur (le mode fondamental). Les bords des bandes sont attribués approximativement aux coupures des modes des inclusions qui figurent sur l'axe supérieur du graphique (nous verrons plus loin comment les déterminer). Si nous observons attentivement le bord des bandes de transmission (proches des longueurs d'onde de coupure), on se rend compte qu'apparaissent certains accidents sur la courbe, voire même des pics d'atténuation de la puissance de sortie sur de fines plages de longueurs d'ondes (ceci est aussi visible sur la figure 2.a de l'article [90], un zoom est effectué à la figure 7.53 de ce manuscript). En particulier pour la bande de transmission comprise entre $\lambda = 500$ nm et 600 nm, on voit une sorte de petite bosse sur le flanc droit d'une des bandes de transmission. Nous avons soupçonné que son origine était due à un éventuel anti-croisement de modes. Pour le vérifier, nous avons tenté de modéliser cette FOM. Malheureusement, la MM disponible au laboratoire ne peut pas considérer une telle fibre car elle est actuellement limitée à des matériaux homogènes. Dans le cas de la méthode différentielle, ce système opto-géométrique reste tout-à-fait abordable ; il constitue un nouveau système opto-géométrique à étudier. Dans un premier temps, nous allons voir comment nous avons implémenté un cylindre à gradient d'indice centré sur l'origine. Pour la FOM considérée, nous établirons les propriétés de dispersion des modes dont la coupure se situe à proximité de $\lambda = 600$ nm. Ensuite nous décrirons l'implémentation par la méthode différentielle d'une FOM ARROW dont les inclusions circulaires sont à gradient d'indice. Nous comparerons enfin ces premiers résultats obtenus à la courbe de transmission expérimentale.

Modes EH_{31} et HE_{51} d'une inclusion de la FOM ARROW .

Nous modélisons une fibre optique à gradient d'indice centrée sur l'origine par une succession concentrique de couches homogènes et isotropes (voir la section 3.2.3 où le calcul de la matrice de transmission d'une couche est semi-analytique). Le profil parabolique de l'indice d'équation donnée par (7.7) est alors discrétisé (comme indiqué sur la figure 7.44). Afin d'éviter des écarts d'indice trop importants entre deux couches successives, la discrétisation par pas constant est effectuée sur l'axe des ordonnées correspondant aux indices $n(r')$. On subdivise le segment $[n_{mat}, n_{max}]$ en

$L+1$ sous-segments identiques, numérotés dans l'ordre croissant de n_{max} à n_{mat}. On obtient un ensemble discret de valeurs d'indice n'_s avec $s \in [1, L]$ (voir figure 7.44) :

$$n'_s = n_{max} - s\frac{\Delta}{L+1} \tag{7.8}$$

pour lesquelles on déduit les L rayons correspondants r'_s par la fonction réciproque de la restriction de la fonction (7.7) pour $r' \leq \frac{d}{2}$:

$$r'_s = R\sqrt{\frac{n_{max} - n'_s}{\Delta}} \tag{7.9}$$

avec $R = \frac{d}{2}$. On définit ainsi $L+1$ couches homogènes isotropes. La région de l'espace comprise entre $r = 0$ et $r = r'_1$ correspond au milieu (int). On remarque que r'_1 diminue d'autant plus que L augmente. Pour les autres couches $s \in [1, L]$, l'indice est choisi comme la valeur moyenne du profil d'indice entre r'_s et r'_{s+1} :

$$n_s = n_{max} - \frac{\Delta}{3R^2}\frac{{r'_{s+1}}^3 - {r'_s}^3}{r'_{s+1} - r'_s} \tag{7.10}$$

Nous utilisons l'algorithme S en considérant chaque couche homogène comme une couche S, ce qui justifie la notation employée (indice "s"). Il est important de distinguer cette discrétisation du cylindre circulaire inhomogène en L couches homogènes avec celle utilisée pour les réseaux par la "staircase approximation" [57] et contestée dans l'article [59]. En effet, la surface d'un réseau, et particulièrement ses vecteurs normaux et tangentiels, doivent être considérés dans chaque couche définies dans la "staircase approximation". Dans notre cas, il n'y a pas de surface de diffraction, mais seulement des surfaces fictives crées aux interfaces des couches homogènes. Autrement dit, la discrétisation concerne le profil d'indice et non une surface de diffraction.
On rappelle les paramètres opto-géométriques de la fibre modélisée : R, n_{max}, n_{mat} et Δ (égal à $n_{max} - n_{mat}$ dans le cas présent). Les paramètres du cylindre circulaire à gradient d'indice parabolique sont :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
$R\ (= \frac{d}{2})$	3.12 μm
Paramètres des milieux	
n_{max}	1.474
n_{mat}	1.444
$\Delta\ (= n_{max} - n_{mat})$	3.10^{-2}

Autres paramètres	***Valeurs***
N	10
L	20
λ	0.57 à 0.7 μm
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	5
$\mathcal{A}_p$	9

On applique la formule (6.40) établie pour les fibres optiques à saut d'indice, en remplaçant n_{cyl} par la valeur moyenne du profil parabolique de la fibre $n_{max} - \frac{\Delta}{3} = 1.464$. On trouve l'écart d'indice suivant $\Delta_{ind} \approx 1.36\%$. Cette valeur étant voisine de 1%, nous pourrons tolérer l'approximation de faible guidage. Nous cherchons les modes d'une telle fibre optique dont les longueurs d'onde de coupure sont proches de $\lambda_c = 0.6\ \mu m$. L'article [114] donne les fréquences normalisées de coupure des premiers modes LP (approximation de faible guidage) pour une fibre à gradient d'indice parabolique de rayon infini (approximation d'un profil parabolique parfait). Les longueurs d'onde de coupure placées sur l'axe supérieur des abscisses de la figure 7.43 ont été déterminées à partir des résultats donnés dans cet article. Le mode LP_{41} demeure celui qui possède la valeur de λ_c la plus proche de $\lambda = 0.6\ \mu m$ (du bord droit de la bande de transmission expérimentale entre $\lambda = 0.5\ \mu m$ et $0.6\ \mu m$). Il regroupe les modes EH_{31} et HE_{51} et sa longueur d'onde de coupure vaut $\lambda_c = 0.5856\ \mu m$. La figure 7.45(a) montre les parties réelles et imaginaires de l'indice effectif, obtenues par notre programme numérique, des modes EH_{31} et HE_{51} pour λ variant de $0.57\ \mu m$ à $0.7\ \mu m$. A une longueur d'onde fixée, on constate que les indices effectifs des modes EH_{31} et HE_{51} sont légèrement différents. En effet, le programme effectue un calcul rigoureux qui ne tient pas compte de l'approximation de faible guidage. Toutefois les courbes associées aux modes EH_{31} et HE_{51} restent proches l'une de l'autre. Elles confirment la valeur de λ_c trouvée précédemment

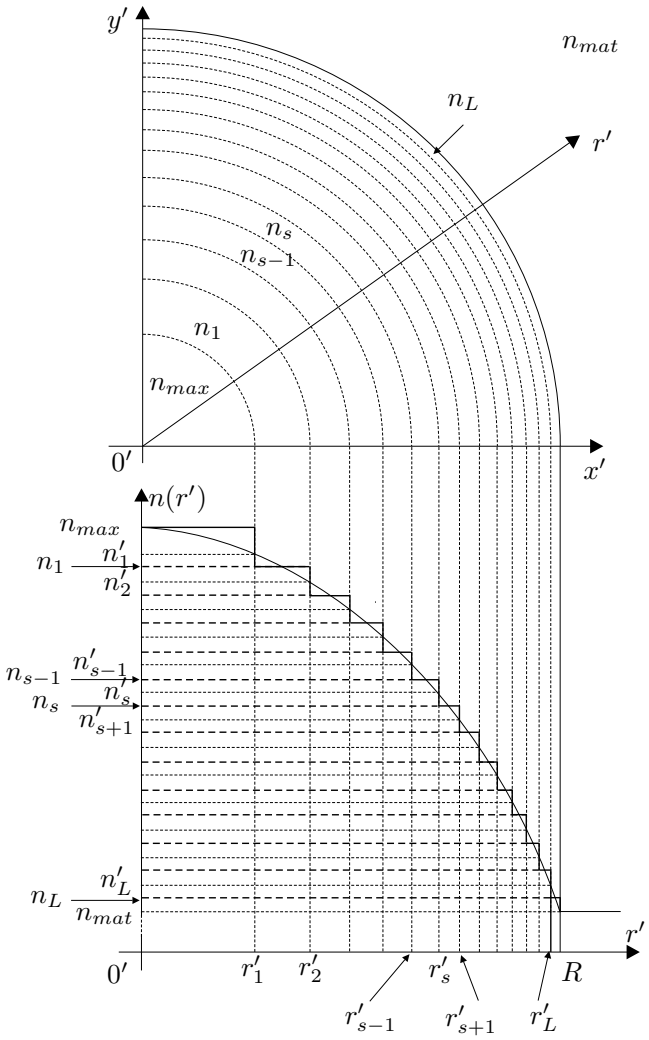


FIG. 7.44 – Discrétisation du profil d'indice parabolique d'un cylindre circulaire à gradient d'indice centré sur l'origine

grâce à l'article [114]. Les figures 7.45(b) à 7.45(d) représentent les cartes de champs du mode EH_{31} pour $\lambda = 0.599\ \mu m$ et les figures 7.46(a) à 7.46(c) les cartes de champs du mode HE_{51} pour la même longueur d'onde. On vérifie que les champs respectent exactement les symétries de ces modes.

Mode fondamental $C3/4$ de la FOM ARROW C_{6v} et anti-croisement .

Nous modélisons une FOM C_{6v} de type ARROW à une couche d'inclusions circulaires à gradient d'indice. Elle possède le même type de géométrie que les FOMs précédemment étudiées à inclusions homogènes (voir section 7.1.2). Etant donné que le profil d'indice des inclusions est continu à leur interface (en $r' = \frac{d}{2}$), la description des coefficients de Fourier des champs ne requiert plus l'utilisation de la méthode FFF. Il suffit de prendre les équations relatives à la méthode différentielle classique (3.16). Dans le cas contraire (discontinuité du profil d'indice aux surfaces des inclusions), la méthode FFF amène à prendre la matrice Q_ϵ donnée par (3.15). Les matrices de Toeplitz $[\![N_r^2]\!]$, $[\![N_\theta^2]\!]$ et $[\![N_r N_\theta]\!]$ restent alors identiques à celles définies pour des cylindres homogènes (voir section 7.1.2). Nous allons décrire comment calculer les éléments de la matrice de Toeplitz $[\![\epsilon]\!]$, c'est-à-dire les coefficients de Fourier de la fonction $\epsilon(r,\theta)$ dans la zone modulée. Tout d'abord, on procède au changement de variable du système de coordonnées (r', θ', z') (repère local) au système de coordonnées (r, θ, z) (repère global) dans la fonction $n(r')$ donnée par la relation (7.7). Sur la sous-période $T = \frac{2\pi}{N_T}$, la fonction $n(r,\theta)$ s'écrit :

$$n(r,\theta) = \begin{cases} \mathcal{A}_1(r) + \mathcal{A}_2(r)\cos(\theta - \theta_0) \text{ si } \theta \in \left[\theta_0 - \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)\right] \\ n_{mat} \text{ si } \theta \in \left[\theta_0 - \frac{\pi}{T}, \theta_0 - \widetilde{\theta}(r)\right] \cup \left[\theta_0 + \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \frac{\pi}{T}\right] \end{cases} \tag{7.11}$$

avec

$$\mathcal{A}_1(r) = n_{max} - \frac{4\Delta}{d^2}\left(r^2 + \Lambda^2\right) \text{ et } \mathcal{A}_2(r) = \frac{8\Delta r \Lambda}{d^2} \tag{7.12}$$

et $r \in [R_{min}, R_{max}]$. On rappelle que $\widetilde{\theta}(r)$ est donné par la relation (3.112) (dans laquelle R_0 est remplacé par Λ). Ensuite, on en déduit l'expression de la fonction permittivité $\epsilon(r,\theta)$ qui est le carré de la fonction $n(r,\theta)$:

$$\epsilon(r,\theta) = \begin{cases} \mathcal{B}_1(r) + \mathcal{B}_2(r)\cos(\theta - \theta_0) + \mathcal{B}_3(r)\cos^2(\theta - \theta_0) \text{ si } \theta \in \left[\theta_0 - \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \widetilde{\theta}(r)\right] \\ n_{max}^2 \text{ si } \theta \in \left[\theta_0 - \frac{\pi}{T}, \theta_0 - \widetilde{\theta}(r)\right] \cup \left[\theta_0 + \widetilde{\theta}(r), \theta_0 + \frac{\pi}{T}\right] \end{cases} \tag{7.13}$$

avec

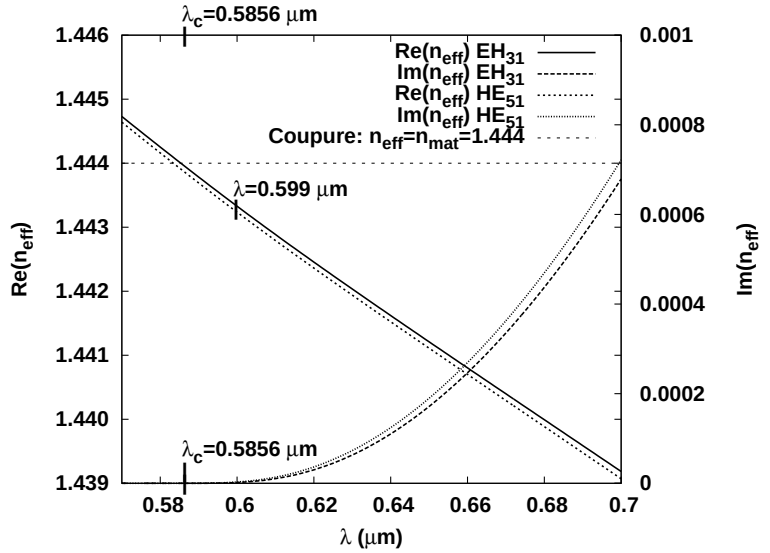
$$\mathcal{B}_1(r) = \mathcal{A}_1^2,\ \mathcal{B}_2(r) = 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \text{ et } \mathcal{B}_3(r) = \mathcal{A}_2^2 \tag{7.14}$$

Par rapport à une inclusion homogène, il suffit de constater que le profil d'indice parabolique induit le calcul supplémentaire de coefficients de Fourier d'une fonction en *cosinus* et de son carré. Bien que le calcul des coefficients de Fourier de $\epsilon(r,\theta)$ reste analytique, nous ne les expliciterons pas étant donnée la complexité de leur expression.

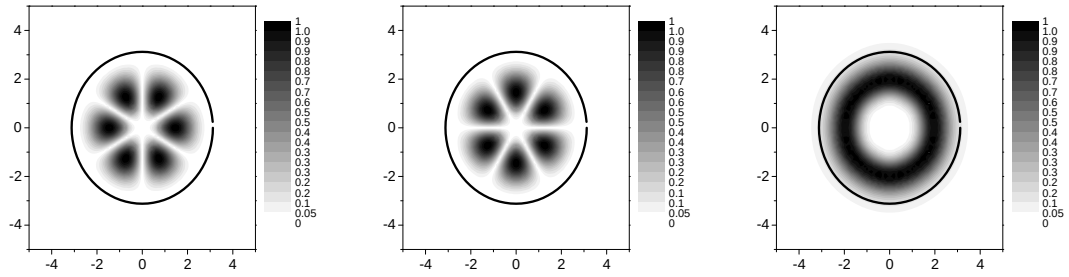
Les paramètres de la FOM C_{6v} à une couche d'inclusions circulaires à gradient d'indice sont regroupés dans le tableau suivant :

Paramètres géométriques	***Valeurs***
N_T	6
d	6.24 μm
Λ	9.136 μm
θ_0	0^o
Paramètres des milieux	
n_{max}	1.474
n_{mat}	1.444
$\Delta\ (= n_{max} - n_{mat})$	3.10^2
Autres paramètres	
λ	0.52 à 0.64 μm

Paramètres numériques	***Valeurs***
N	60
τ_c	10%
L_1 et L_2	20
L_3	10
P_1, P_2 et P_3	10
Paramètres de la recherche de n_{eff}	
$\mathcal{A}_f$	6
$\mathcal{A}_p$	9

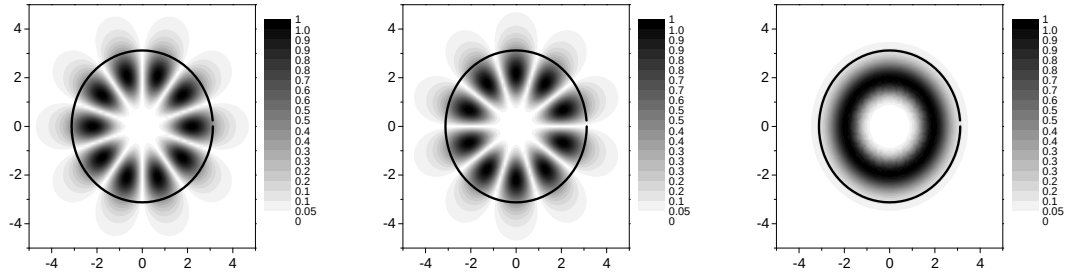


(a) Parties réelle (échelle de gauche) et imaginaire (échelle de droite) de l'indice effectif en fonction de λ des modes EH_{31} et HE_{51} et longueur d'onde de coupure à $\lambda_c = 0.5856\ \mu m$ pour le mode LP_{41} (qui comprend les modes EH_{31} et HE_{51})



(b) Carte de $|E_z|$ normalisées (c) Carte de $|H_z|$ normalisées (d) Carte de $|P_z|$ normalisées

FIG. 7.45 – Etude du mode EH_{31} de la fibre conventionnelle pour $\lambda = 0.599\ \mu m$



(a) Carte de $|E_z|$ normalisées (b) Carte de $|H_z|$ normalisées (c) Carte de $|P_z|$ normalisées

FIG. 7.46 – Etude du mode HE_{51} de la fibre conventionnelle pour $\lambda = 0.599\ \mu m$

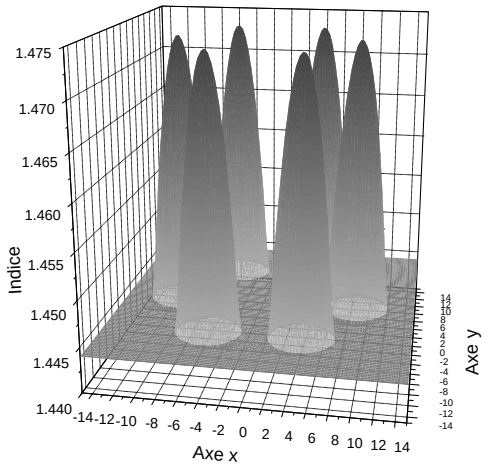


FIG. 7.47 – Profil d'indice de la FOM de type ARROW dans le plan de section principal

La figure 7.47 est une représentation en trois dimensions du profil d'indice de la FOM dans le plan de section principale, "vu" par le programme numérique (reconstruction de $\epsilon(r,\theta)$ par son développement de Fourier tronqué à $N = 60$, et selon la discrétisation de l'intégration par l'algorithme S). En calculant l'indice effectif du mode fondamental $C3/4$ de la FOM pour λ variant de $0.52\ \mu m$ à $0.64\ \mu m$, nous avons observé, d'après les résultats numériques, un anti-croisement localisé vers $\lambda = 0.595\ \mu m$. Il apparaît sur les figures 7.48 et 7.49 qui représentent respectivement les parties réelles et imaginaires des modes $C3/4$, EH_{31} et HE_{51} en fonction de λ. On se rend compte que l'approximation de faible guidage n'est plus adapté pour décrire les modes avec une précision suffisante par rapport à la sélectivité en longueur d'onde de l'anti-croisement : les courbes associées aux deux modes EH_{31} et HE_{51} sont complètement décalées l'une de l'autre. Sur la figure 7.48, on remarque également la bonne précision obtenue pour les courbes du mode fondamental $C3/4$ par comparaison à la courbe du mode EH_{31} (meilleure que celles obtenues pour une FOM à inclusions homogènes, voir figure 7.39(a)). En effet, cette dernière est quasiment l'asymptote des branches de gauche et de droite. Cette observation s'explique par la faible différence d'indice entre n_{max} et n_{mat} et la continuité du profil d'indice sur la surface des inclusions. On voit sur les deux figures que l'anti-croisement du mode fondamental $C3/4$ a lieu pour le mode EH_{31}, mais reste difficile à obtenir pour le mode HE_{51} (anti-croisement sur un intervalle trop fin en longueur d'onde). Ceci est conforme à l'observation que nous avions faite pour la FOM de type ARROW à inclusions homogènes étudiée dans la section précédente. On introduit trois points le long de la branche de gauche, à différentes longueurs d'onde :

Points	$\lambda\ (\mu m)$
A	0.55
B	0.5926
C	0.598

Pour chacun de ces points, les figures 7.50(a) à 7.52(c) montrent les cartes de champs du mode fondamental. Celles relatives au point A (figures 7.50(a) à 7.50(c) pour $\lambda = 0.55\ \mu m$) révèlent le champ caractéristique du mode fondamental localisé dans le coeur. Cependant, les cartes de $|E_z|$ et $|H_z|$ font apparaître dans chaque inclusion un champ associé à un mode d'ordre azimutal $\nu = 1$. Ceci a également été observé sur des images photographiques (profil d'intensité) prises sur la FOM expérimentale à des longueurs d'onde inférieures à $0.6\ \mu m$ (photographies non illustrées). Pour le point B, les cartes de champs (figures 7.51(a) à 7.51(c)) correspondent à la longueur d'onde ($\lambda = 0.5926\ \mu m$) de l'anti-croisement avec le mode associé à HE_{51}. On retrouve effectivement le champ caractéristique du mode HE_{51} (voir figures 7.46(a) à 7.46(b)) dans chaque cylindre.

On remarque qu'une partie du champ est toujours localisée dans le coeur (début de la transition de délocalisation). Pour le point C, les cartes de champs 7.52(a) à 7.52(c) correspondent à une longueur d'onde qui se situe après l'anti-croisement avec le mode associé à EH_{31}. On vérifie que le champ du coeur s'est bien délocalisé dans les inclusions à l'intérieur desquelles apparaît le champ caractéristique du mode EH_{31} (voir figures 7.45(b) à 7.45(d)). La carte de $|\mathcal{P}_z|$ révèle néanmoins une symétrie différente.

Nous allons confronter ces résultats numériques aux résultats expérimentaux. La figure 7.53 représente à la fois le spectre en transmission expérimental de la figure 7.43 (sur la bande de transmission entre $\lambda = 0.5\ \mu m$ et $0.6\ \mu m$) et la partie réelle de l'indice effectif calculé par la MD des modes $C3/4$, HE_{51} et EH_{31} en fonction de la longueur d'onde. De même, on compare dans la figure 7.54 le spectre en transmission expérimental et la partie imaginaire de l'indice effectif de ces mêmes modes. Il semblerait que les anti-croisements coïncident avec la décroissance de la bande de transmission et non à la petite irrégularité observée à $\lambda = 0.599\ \mu m$. Ces résultats encourageants doivent tout de même être considérés avec prudence car la dispersion matérielle n'est pas prise en compte dans le calcul numérique et le nombre de couches d'inclusions de la fibre modélisée (une seule) n'est pas celui de la fibre expérimentale (sept couches). Cette étude reste à ce jour en cours d'analyse.

Discussion .

On peut s'interroger quant à l'existence d'une FOM de type ARROW à inclusions homogènes (comme étudiée dans la section 7.4.2) qui serait équivalente à la FOM de type ARROW à inclusions inhomogènes considérée dans cette dernière étude. Ceci permettrait de pouvoir effectuer l'étude des anti-croisements à l'aide de méthodes différentes (en particulier la MM) que la MD. Pour cela, on prend un indice des inclusions homogènes égal à la moyenne du profil parabolique de l'indice des inclusions inhomogènes. Dans le cas présent d'un profil tel que $n_{max} = 1.474$ et $n_{mat} = 1.444$ ($\Delta = 3.\ 10^{-2}$), cet indice vaut $n_{cyl} = 1.464$. Cependant, les prédictions (en première approximation) des anti-croisements et des bandes de transmissions avec les coupures des inclusions isolés (fibres conventionnelles) diffèrent entre ces deux types de FOMs. En effet, la figure 7.55 compare les longueurs d'onde de coupure des modes LP (approximation de faible guidage) de la fibre conventionnelle à gradient d'indice étudiée précédemment (telle que $n_{max} = 1.474$, $n_{mat} = 1.444$ et $\Delta = 3.\ 10^{-2}$, voir la figure 7.43) à celles de la fibre conventionnelle à saut d'indice équivalente (telle que $n_{max} = 1.464$ et $n_{mat} = 1.444$). Toutes ces valeurs de longueurs d'ondes sont déterminées par la théorie et non par le calcul numérique. On constate que l'ordre des longueurs d'ondes de coupures associées à la fibre à saut d'indice est différent de celui des longueurs d'ondes de coupures associées à la fibre à gradient d'indice. Dans le cas de la fibre à saut d'indice, il apparaît des modes LP supplémentaires. On remarque surtout que les écarts importants des valeurs obtenues d'une fibre à l'autre ne permettent pas de prévoir des bandes de transmission sur les mêmes plages de longueur d'onde. Par conséquent, on ne peut envisager une FOM de type ARROW à inclusions homogènes équivalente à celle à inclusions inhomogènes, afin d'étudier les anti-croisements sur les bords des bandes de transmission. Pour ce cas particulier de FOM à inclusions inhomogènes, on se rend compte de l'intérêt de la MD.

On peut également se demander également quel est l'intérêt d'étudier des FOMs de type ARROW à inclusions inhomogènes par rapport à des FOMs de type ARROW à inclusions homogènes. Une partie de la réponse est illustrée dans la figure 7.55. Les bandes de transmission possèdent des bords plus marqué pour des inclusions à gradient d'indice que pour des inclusions à saut d'indice. Pour la plage de longueur de coupure considérée (entre $0.4\ \mu m$ et $2\ \mu m$), les écarts des longueurs de coupures de la fibre inhomogène associées aux bords des bandes de transmission sont effectivement plus importants. De plus, il y a moins de longueur d'onde de coupure de mode LP (il n'y a pas celles des modes LP_{71}, LP_{52} et LP_{33}). Par conséquent, les bandes de transmission sont plus larges pour une FOM de type ARROW à inclusions inhomogènes. Ensuite, le choix du profil du gradient d'indice offre un nouveau de degré de liberté. On peut envisager des profils paraboliques, gaussiens, multicouches,...

Par ailleurs, il est utile de préciser que la détermination des phenomènes d'anti-croisement ou des bords des bandes de transmission pour une FOM de type ARROW par l'analyse des propriétés

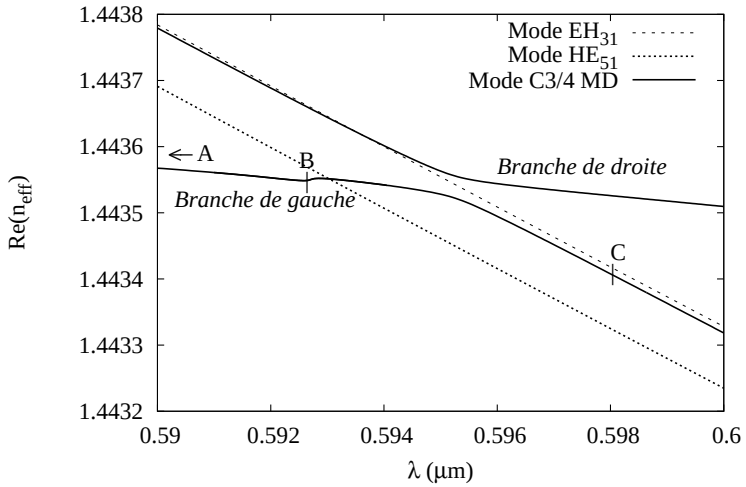


FIG. 7.48 – $\Re e\,(n_{eff})$ en fonction de λ des modes $C3/4$, EH_{31} et HE_{51}. Les points A, B et C se trouvent sur la branche de gauche. Le point A se situe à $\lambda = 0.55\ \mu m$, le point B à $\lambda = 0.5926\ \mu m$ et le point C à $\lambda = 0.598\ \mu m$

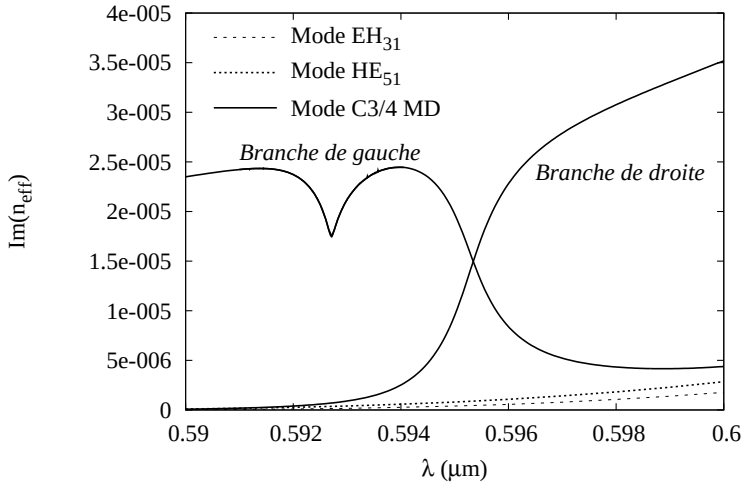
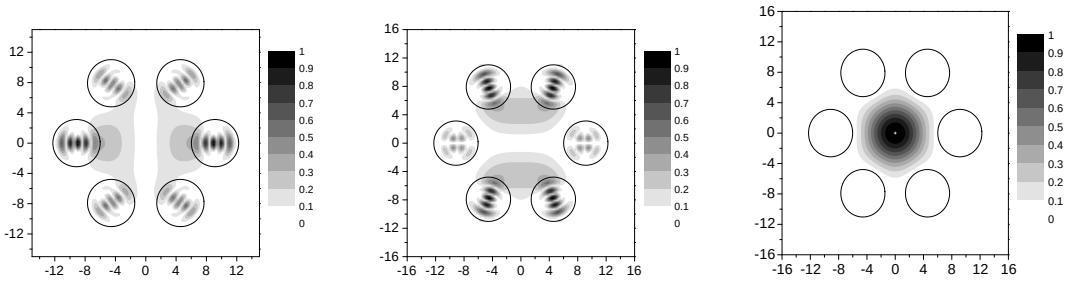
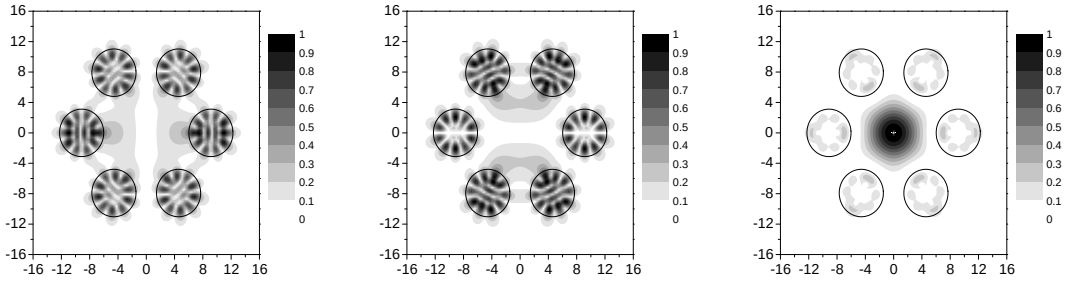


FIG. 7.49 – $\Im m\,(n_{eff})$ en fonction de λ des modes $C3/4$, EH_{31} et HE_{51}



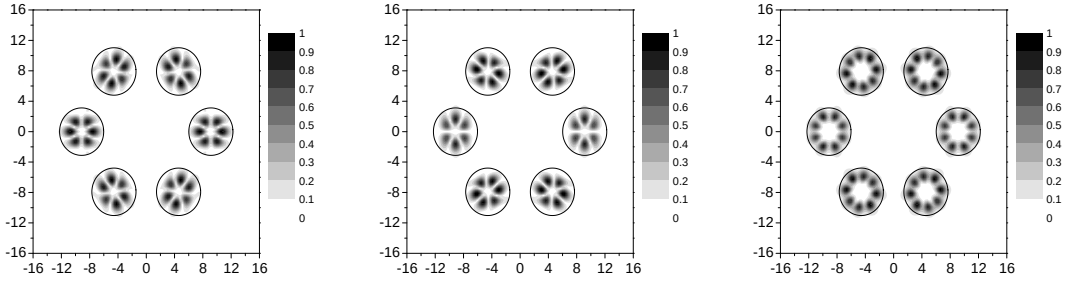
(a) Point A : Cartes de $|E_z|$ normalisées (b) Point A : Cartes de $|H_z|$ normalisées (c) Point A : Cartes de $|P_z|$ normalisées

FIG. 7.50 – Cartes de champs calculées par la MD pour les points A de la figure 7.48 à $\lambda = 0.55\ \mu m$



(a) Point B : Cartes de $|E_z|$ normalisées (b) Point B : Cartes de $|H_z|$ normalisées (c) Point B : Cartes de $|P_z|$ normalisées

FIG. 7.51 – Cartes de champs calculées par la MD pour les points B de la figure 7.48 à $\lambda = 0.5926\ \mu m$



(a) Point C : Cartes de $|E_z|$ normalisées (b) Point C : Cartes de $|H_z|$ normalisées (c) Point C : Cartes de $|P_z|$ normalisées

FIG. 7.52 – Cartes de champs calculées par la MD pour les points C de la figure 7.48 à $\lambda = 0.598\ \mu m$

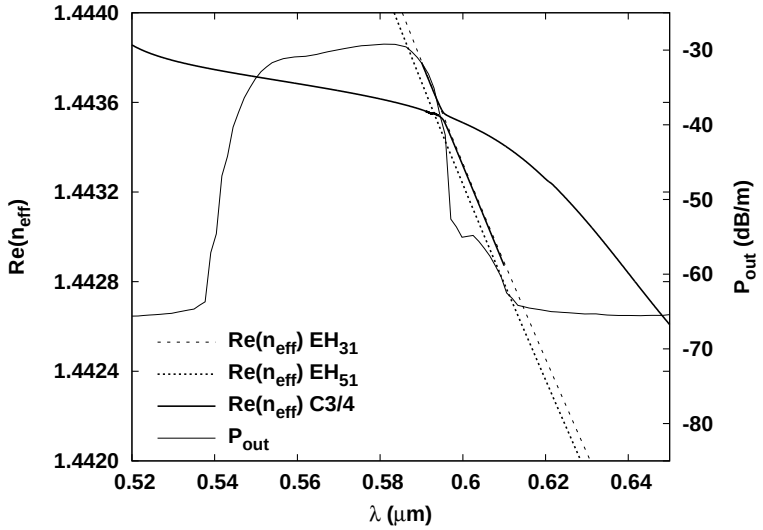


FIG. 7.53 – $\Re e\,(n_{eff})$ des modes $C3/4$, EH_{31} et HE_{51} en fonction de λ, et puissance de sortie expérimentale (trait fin)

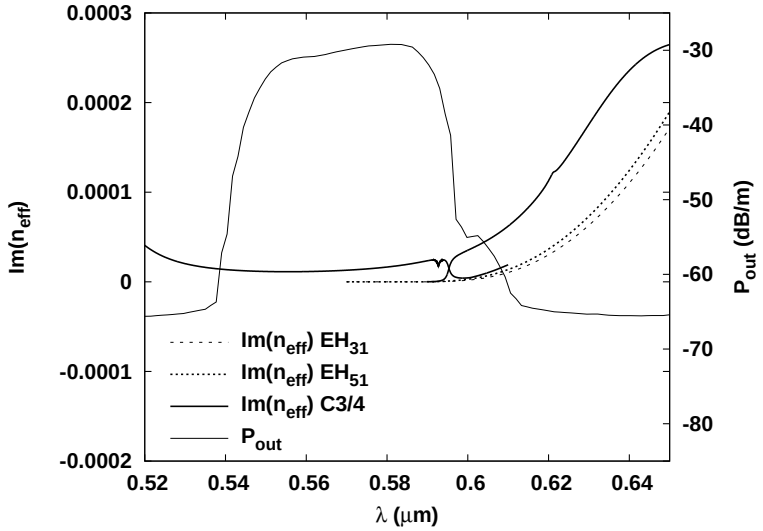


FIG. 7.54 – $\Im m\,(n_{eff})$ des modes $C3/4$, EH_{31} et HE_{51} en fonction de λ, et puissance de sortie expérimentale (trait fin)

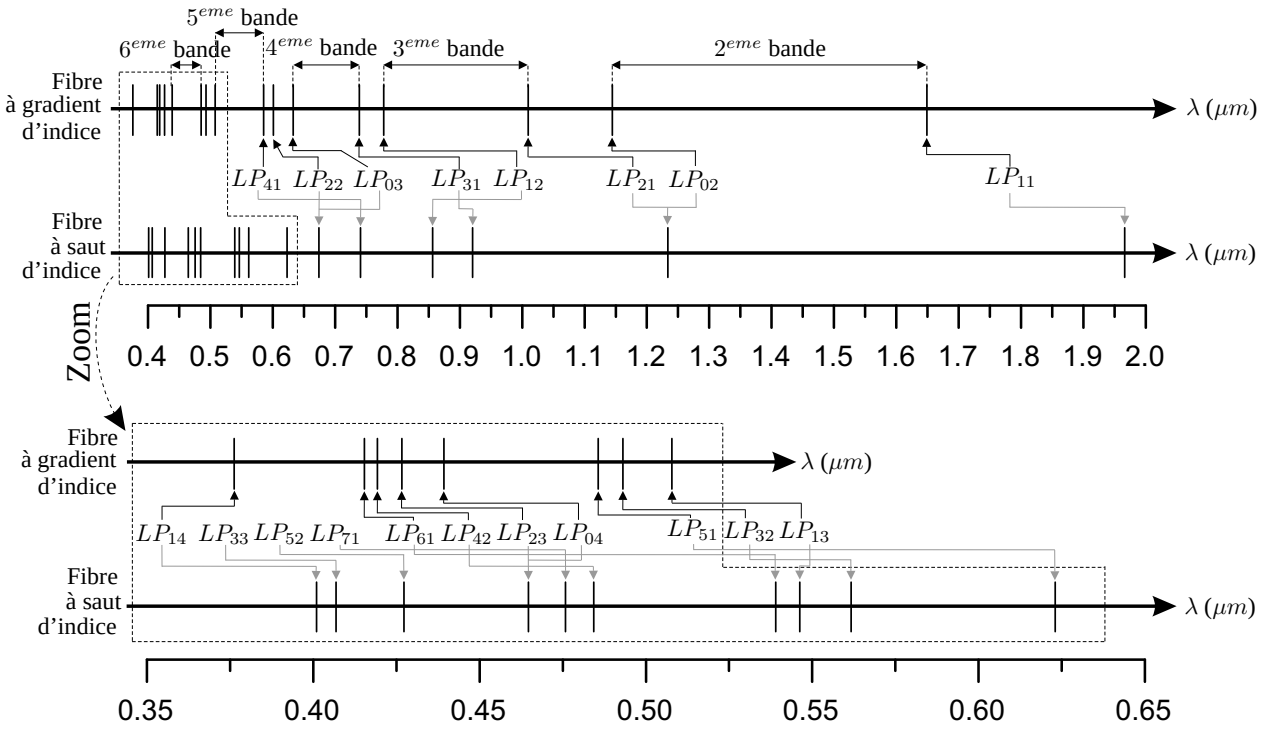


FIG. 7.55 – Comparaison des longueurs d'onde de coupure (avec l'approximation du faible guidage) entre la fibre conventionnelle à gradient d'indice considérée et la fibre conventionnelle à saut d'indice équivalente. Les intervalles de longueur d'onde associés aux bandes de transmission de la figure 7.43 de la FOM de type ARROW à inclusions inhomogènes sont également représentés

d'une inclusion isolée, c'est-à-dire d'une fibre conventionnele, n'est pas la seule envisageable. Il peut exister des interactions avec des modes de couplages entre plusieurs inclusions. Nos très récents travaux, en cours d'analyse, semblent justifier cette hypothèse.

CONCLUSION DU CHAPITRE Ce chapitre conclut l'implémentation de la méthode différentielle pour l'étude des fibres optiques microstructurées. De nombreux tests sur des FOMs C_{6v} à inclusions homogènes de section circulaire ont permis de valider cette méthode par comparaison avec la Méthode Multipolaire, largement répandue pour l'étude de ce genre de FOM. Les précisions obtenues sont amplement satisfaisantes tant sur les parties réelles des indices effectifs que sur les parties imaginaires. Ensuite, nous avons établi l'influence des paramètres géométriques sur des FOMs de géométrie spécifique à la méthode différentielle (inclusions de section sectorielle et FOMs de type "grapefruit"). Enfin, l'exposé s'achève par la mise en évidence d'un phénomène de transition de délocalisation dans les inclusions du mode fondamental d'une FOM de type ARROW. Les comparaisons observations expérimentales/simulations numériques sont encourageantes même si elles restent partielles. Ces comparaisons devraient se poursuivre et s'étendre car la Méthode Différentielle est particulièrement bien adaptée à ces FOMs à gradient d'indice.

Chapitre 8

Conclusion générale

8.1 Résumé des principaux résultats obtenus

Les articles cités dans cette conclusion font référence à des publications réalisées dans le cadre de la thèse. Les trois points suivants ont été abordés dans cette thèse :

Application de la méthode FFF et de l'algorithme S dans la méthode différentielle :

La première tâche consistait à établir en coordonnées cylindriques le formalisme théorique de la méthode différentielle pour des objets cylindriques. Dans le deuxième chapitre, la théorie a été écrite pour le cas général d'un cylindre de section droite arbitraire et présentant une périodicité selon son axe, rempli d'un matériau inhomogène, anisotrope et de conductivité finie. L'application de la méthode de la factorisation de Fourier rapide (FFF) conduit à un nouveau système différentiel, différent de celui initialement obtenu par la méthode différentielle classique. Dans la première moitié du troisième chapitre, nous expliquons comment intégrer ce système différentiel dans le cas d'un cylindre de profil arbitraire invariant selon l'axe du cylindre, dont le matériau est homogène, isotrope et de conductivité finie. Nous avons présenté cette intégration au moyen des deux algorithmes : celui de propagation de la matrice T et celui de la matrice S. Cette dernière représente une matrice de diffraction pour laquelle les contaminations numériques (lors du processus d'intégration) ont été évitées. La matrice S permet, par un simple produit matriciel, de résoudre le problème de la diffraction conique d'une onde plane par le système cylindrique considéré.

La seconde moitié de ce chapitre a été consacrée à l'analyse des tests numériques de validation de la théorie. Ces tests ont confirmé le besoin de prendre en compte la méthode FFF et l'algorithme S dans l'implémentation de la méthode différentielle. Les résultats numériques ont été illustrés pour un profil cylindrique circulaire. Nous avons comparé le cas d'un cylindre centré sur l'origine (calcul semi-analytique sans intégration) à celui d'un cylindre excentré qui impose l'utilisation de la méthode différentielle. Ces travaux ont fait l'objet de l'article [83].

Le quatrième chapitre a abordé le cas particulier de la diffraction classique. Les équations ont été réécrites en polarisation TE et TM. Nous nous sommes essentiellement intéressés à l'étude numérique de la polarisation TM qui requiert l'emploi de la méthode FFF (ce qui n'est pas le cas pour la polarisation TE). Nous avons obtenu des résultats très satisfaisants pour les profils cylindriques circulaire et elliptique. L'article [82] est dédié à la méthode différentielle écrite en polarisation TM.

Etude de l'anisotropie dans les structures cylindriques :

Dans le cinquième chapitre, nous avons présenté une nouvelle théorie qui traite de la diffraction conique d'une onde plane par un cylindre circulaire homogène et anisotrope centré sur l'origine. Son principe est de décomposer les champs électromagnétiques en une base d'ondes planes solutions de l'équation de propagation écrite pour un milieu anisotrope. Quelques résultats numériques de validation ont été exposés. Ces travaux ont été publiés dans l'article [84]. Ce chapitre s'achève par l'utilisation de cette nouvelle théorie dans les équations de la méthode différentielle afin de concevoir l'étude de la diffraction par des objets cylindriques anisotropes de profil arbitraire.

Application de la méthode différentielle à l'étude des fibres optiques microstructurées :
Nous avons atteint l'objectif final des travaux de thèse : appliquer la méthode différentielle à l'étude des fibres optiques, en particulier des fibres optiques microstructurées (FOMs).
Nous avons décrit, dans le sixième chapitre, comment résoudre le problème modal (recherche de modes se propageant selon l'axe du cylindre) à partir de la méthode différentielle. Plusieurs approches ont été énoncées. Nous avons implémenté celle qui exploite pleinement les avantages de l'algorithme S. Ensuite, nous avons établi un formalisme qui permet de prendre en compte les symétries (périodicités angulaires) de la section droite de la fibre optique étudiée et des modes recherchés. Ces symétries apparaissent principalement dans les fibres optiques microstructurées. Leur prise en compte permet une classification rigoureuse des modes, et une réduction importante des temps de calcul. Ce chapitre s'est terminé par l'étude numérique de quelques fibres optiques à profil simple (sections circulaire, elliptique et rectangulaire). En particulier, la recherche de modes dans une fibre conductrice à section circulaire a servi à l'étude de plasmons se propageant à la surface d'une plaque métallique trouée [89].
Le dernier chapitre a été entièrement consacré à l'analyse des résultats numériques de la recherche de modes dans les FOMs. La comparaison avec ceux obtenus avec la méthode multipolaire, largement utilisée pour l'étude des FOMs, valide solidement la méthode différentielle pour des FOMs de différentes symétries (C_{6v} et C_{2v}), à une ou plusieurs couches d'inclusions circulaires. Nous avons établi un des principaux intérêts de la méthode différentielle pour l'étude des fibres optiques microstructurées, à savoir le calcul avec de très bonnes précisions sur les parties réelle et imaginaire des indices effectifs associés aux modes à pertes. Ces précisions sont directement liés aux paramètres de discrétisation intrinsèques à la méthode, et ne nécessitent pas un ajustement empirique d'autres paramètres (comme la zone des PML dans la méthode des éléments finis). De nouveaux profils géométriques spécifiques à la méthode différentielle (FOMs à inclusions sectorielles et fibres de type "grapefruit") ont été étudiés. Nos travaux à ce sujet sont présentés dans les articles [86, 85, 87].
Enfin, nous avons exposé nos récents résultats [88] sur la transition de délocalisation de modes de coeur d'une FOM de type ARROW dans les inclusions de haut indice par anti-croisement avec des modes à pertes d'une inclusion isolée. Des comparaisons entre des mesures expérimentales (sur une fibre de l'IRCICA de l'Université de Lille I) et des résultats numériques (obtenus par la méthode différentielle à l'Institut Fresnel) ont donné des résultats très encourageants concernant ce phénomène sur une FOM de type ARROW à inclusions inhomogènes. Le profil d'indice des inclusions à gradient d'indice dans ces FOMs de type ARROW présente l'intérêt d'ajouter un intéressant degré de liberté pour l'étude de la propagation de la lumière dans ces fibres optiques microstructurées car les propriétés de ces fibres ARROW sont fortement liées à celles des inclusions individuelles les constitutant.

8.2 Travaux en cours et perspectives

Plusieurs travaux sont en cours d'approfondissement. Tout d'abord, l'investigation du phénomène d'anti-croisement de modes n'est pas terminée. Nous commençons seulement à analyser des anti-croisements qui se produisent pour d'autres modes de coeur (mode de classe $C2$, par exemple) avec d'autres modes d'inclusions. On sait que les propriétés de guidage des inclusions de haut indice conditionnent celles de la FOM de type ARROW, en particulier ses bandes de transmission. Quelques points restent à éclaircir, parmi lesquels l'influence de la polarisation (HE ou EH, classe de symétrie) des modes de coeur et/ou des inclusions. Ou encore, lorsque les modes des cylindres deviennent fortement à pertes ou lorsque les diamètres des cylindres deviennent grands (rapport $\frac{d}{\Lambda}$ élevé), comment interviennent précisément les effets de couplage des modes entre les inclusions ? Nous avons commencé à aborder cette question dans l'article [88] mais un grand nombre de questions se pose encore. Ensuite, nous allons très prochainement coupler la Méthode Multipolaire et la méthode différentielle afin d'exploiter les avantages de chacune d'entre elles. Nous pourrons ainsi envisager des FOMs avec de nombreuses couches d'inclusions (Méthode Multipolaire) de profil arbitraire et à milieux variés (méthode différentielle). En particulier, nous pourrons approfondir l'étude des FOMs de type ARROW dont les inclusions sont à gradient d'indice. Enfin, nous pensons implémenter la généralisation de la méthode différentielle à des matériaux anisotropes,

évoquée à la fin du cinquième chapitre.

Un des avantages de la méthode différentielle est de pouvoir considérer des objets à géométries et à milieux variés. Dans les travaux de thèse présentés, les calculs numériques ont été limités à des objets cylindriques invariants selon leur axe, remplis de matériaux diélectriques linéraires, le plus souvent homogènes (sans oublier les FOMs de type ARROW à gradient d'indice) et isotropes. L'implémentation numérique de la méthode différentielle peut être étendue de deux manières : suivant la géométrie de l'objet d'une part et les propriétés des matériaux d'autre part.

Autres formes géométriques :

La théorie différentielle énoncée au premier chapitre permet d'envisager une variation périodique du cylindre selon son axe. Ceci revient à prendre en compte une périodicité (selon z) supplémentaire à celle déjà utilisée (selon θ) et implique néanmoins une augmentation importante de la taille des matrices dans la méthode différentielle. On pourrait considérer, par exemple, des FOMs torsadées, ou encore un alignement d'objets de géométrie tridimensionnelle. A partir de ce formalisme de la méthode différentielle en coordonnées cylindriques, nous pourrions également décrire la diffraction d'un seul objet tridimensionnel par l'ajout de PML sur les parois du domaine d'intérêt périodique (selon l'axe z).

Dans tout le manuscrit, nous avons décrit des géométries dont on connaît explicitement les expressions mathématiques des surfaces. La possibilité d'implémenter des profils quelconques par un maillage de l'espace, par exemple, rendrait plus aisée l'étude de structures plus complexes. De même, on peut imaginer un calcul systématique des coefficients de Fourier quel que soit le profil géométrique, soit de manière numérique (par utilisation d'un algorithme de type "Fast Fourier Transform"), soit de manière analytique (description des grandeurs opto-géométrique par des fonctions créneaux développées analytiquement en série de Fourier).

Autres propriétés des matériaux :

Il est inutile de citer à nouveau nos projets amorcés pour l'étude de l'anisotropie dans les cylindres de profil arbitraire par la méthode différentielle. Cette dernière a été généralisée à l'optique non linéaire dans le cas des objets décrits en coordonnées cartésiennes. Connaissant l'intérêt porté aux effets non linéaires dans les fibres optiques, nous pourrions naturellement envisager d'élaborer un code numérique adapté en utilisant le formalisme présenté dans ce manuscrit (méthode différentielle en coordonnées cylindriques).

Annexe A

Relations entre les blocs des matrices S et T

Sommaire

A.1 Position du problème et notations 221
A.2 Calculs intermédiaires 222
A.2.1 Calcul de $B^{(s)}$ en fonction de $A^{(s)}$ et $B^{(int)}$ 222
A.2.2 Calcul de $A^{(int)}$ en fonction de $A^{(s)}$ et $B^{(int)}$ 222
A.3 Calcul des blocs de la matrice $S^{(s+1)}$ 223
A.3.1 Le bloc $S_{22}^{(s+1)}$ 223
A.3.2 Le bloc $S_{12}^{(s+1)}$ 223
A.3.3 Le bloc $S_{21}^{(s+1)}$ 223
A.3.4 Le bloc $S_{11}^{(s+1)}$ 223

A.1 Position du problème et notations

Dans cette annexe, nous allons démontrer les relations (3.77) à (3.80) qui relient les blocs des matrices S et T, de part et d'autre de la couche (s) avec $s \in [1, L]$. Plus précisément, on cherche à exprimer les blocs de la matrice $S^{(s+1)}$ de l'interface $(s+1)$ (en $r = r_{s+1}$) en fonction de ceux de la matrice $S^{(s)}$ de l'interface (s) (en $r = r_s$) et de la matrice $T^{(s)}$ de la couche (s). Ecrivons tout d'abord les relations nécessaires à ce calcul. Pour simplifier l'écriture, nous noterons :

$$A^{(s)} = \left[A^{(j_s)}(r_s)\right] \text{ et } B^{(s)} = \left[B^{(j_s)}(r_s)\right]$$

puis

$$A^{(int)} = \left[A^{(int)}(R_{min})\right] \text{ et } B^{(int)} = \left[B^{(int)}(R_{min})\right]$$

D'après les notations introduites dans l'équation (3.75), on déduit de l'expression (3.73) qui définit de la matrice $T^{(s)}$ de la couche (s) que :

$$A^{(s+1)} = T_{11}^{(s)} A^{(s)} + T_{12}^{(s)} B^{(s)} \tag{A.1}$$

$$B^{(s+1)} = T_{21}^{(s)} A^{(s)} + T_{22}^{(s)} A^{(s)} \tag{A.2}$$

A partir de l'expression de définition (3.74) de la matrice $S^{(s)}$ écrite pour l'interface en $r = r_s$, on obtient :

$$B^{(s)} = S_{11}^{(s)} B^{(int)} + S_{12}^{(s)} A^{(s)} \tag{A.3}$$

$$A^{(int)} = S_{21}^{(s)} B^{(int)} + S_{22}^{(s)} A^{(s)} \tag{A.4}$$

De même, on trouve pour l'interface en $r = r_{s+1}$:

$$B^{(s+1)} = S_{11}^{(s+1)} B^{(int)} + S_{12}^{(s+1)} A^{(s+1)} \tag{A.5}$$

$$A^{(int)} = S_{21}^{(s+1)} B^{(int)} + S_{22}^{(s+1)} A^{(s+1)} \tag{A.6}$$

A.2 Calculs intermédiaires

A.2.1 Calcul de $B^{(s)}$ en fonction de $A^{(s)}$ et $B^{(int)}$

En insérant l'équation (A.3) dans la relation (A.2), on obtient directement :
$B^{(s+1)} = T_{21}^{(s)} A^{(s)} + T_{22}^{(s)} \left[S_{11}^{(s)} B^{(int)} + S_{12}^{(s)} A^{(s)} \right]$, d'où :

$$B^{(s+1)} = \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] A^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} B^{(int)} \tag{A.7}$$

L'équation (A.4) conduit à :

$$A^{(s)} = \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} \left[A^{(int)} - S_{21}^{(s)} B^{(int)} \right] \tag{A.8}$$

En insérant cette dernière équation dans la relation (A.7), on en déduit que :
$B^{(s+1)} = \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} A^{(int)} + \left\{ T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} - \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} \right\} B^{(int)}$
En introduisant l'équation (A.6), on trouve :

$$\begin{aligned} B^{(s+1)} &= \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{22}^{(s+1)} A^{(s+1)} \\ &+ \left\{ \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s+1)} + T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} - \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} \right\} B^{(int)} \end{aligned} \tag{A.9}$$

A.2.2 Calcul de $A^{(int)}$ en fonction de $A^{(s)}$ et $B^{(int)}$

En insérant l'équation (A.8) dans la relation (A.1), on obtient directement :
$A^{(s+1)} = T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} \left[A^{(int)} - S_{21}^{(s)} B^{(int)} \right] + T_{12}^{(s)} B^{(s)}$
$= T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} A^{(int)} - T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} B^{(int)} + T_{12}^{(s)} B^{(s)}$
On remplace $B^{(s)}$ par son expression (A.3) :
$A^{(s+1)} = T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} A^{(int)} - T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} B^{(int)} + T_{12}^{(s)} \left[S_{11}^{(s)} B^{(int)} + S_{12}^{(s)} A^{(s)} \right]$
$= T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} A^{(int)} + \left\{ T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} - T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} \right\} B^{(int)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} A^{(s)}$
En introduisant à nouveau l'équation (A.8), on trouve :
$A^{(s+1)} = T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} A^{(int)} + \left\{ T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} - T_{11}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} \right\} B^{(int)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} \left[A^{(int)} - S_{21}^{(s)} B^{(int)} \right]$
$= \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] A^{(int)} + T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} B^{(int)} - \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} B^{(int)}$
En multipliant cette dernière expression par $\times S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1}$, on obtient :
$S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} A^{(s+1)} = A^{(int)} - S_{21}^{(s)} B^{(int)} + S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} B^{(int)}$
Finalement, on en extrait l'expression de $A^{(int)}$:

$$A^{(int)} = S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} A^{(s+1)} + \left\{ S_{21}^{(s)} - S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} \right\} B^{(int)} \tag{A.10}$$

A.3 Calcul des blocs de la matrice $S^{(s+1)}$

A.3.1 Le bloc $S_{22}^{(s+1)}$

Par identification, on trouve grâce à (A.10) et (A.6) :

$$S_{22}^{(s+1)} = S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} \tag{A.11}$$

A.3.2 Le bloc $S_{12}^{(s+1)}$

Par identification, on trouve grâce à (A.9) et (A.5) : $S_{12}^{(s+1)} = \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{22}^{(s+1)}$
L'équation (A.11) permet donc d'écrire :

$$S_{12}^{(s+1)} = \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} \tag{A.12}$$

A.3.3 Le bloc $S_{21}^{(s+1)}$

Par identification, on trouve grâce à (A.10) et (A.6) : $S_{21}^{(s+1)} = S_{21}^{(s)} - S_{22}^{(s)} \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)}$
L'équation (A.11) permet donc d'écrire :

$$S_{21}^{(s+1)} = S_{21}^{(s)} - S_{22}^{(s+1)} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} \tag{A.13}$$

A.3.4 Le bloc $S_{11}^{(s+1)}$

Par identification, on trouve grâce à (A.9), (A.5) et (A.13) :
$S_{11}^{(s+1)} = \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} \left[S_{21}^{(s)} - S_{22}^{(s)} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} \right] - \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)}$
$\Rightarrow S_{11}^{(s+1)} = T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} - \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[S_{22}^{(s)} \right]^{-1} S_{22}^{(s+1)} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)}$
On déduit de l'équation (A.11) :
$S_{11}^{(s+1)} = T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} - \left[T_{21}^{(s)} + T_{22}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right] \left[T_{11}^{(s)} + T_{12}^{(s)} S_{12}^{(s)} \right]^{-1} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)}$
L'équation (A.12) permet donc d'écrire :

$$S_{11}^{(s+1)} = T_{22}^{(s)} S_{11}^{(s)} - S_{12}^{(s+1)} T_{12}^{(s)} S_{11}^{(s)} \tag{A.14}$$

Annexe B

Détermination analytique des vecteurs d'onde et amplitudes d'une onde plane dans un milieu anisotrope

Sommaire

B.1 Racines d'un polynôme d'ordre 4 225
B.1.1 Cas général 225
B.1.2 Cas d'un polynôme bicarré 226
B.2 Vecteurs propres solutions de l'équation de propagation dans un milieu anisotrope 227
B.2.1 Cas général 227
B.2.2 Cas où $\vec{A}_i.\vec{e}_\rho = 0$ $(i \in \{1,2\})$ 227

La détermination d'une onde plane se propageant dans un milieu anisotrope s'effectue par la résolution du système homogène d'équation linéaire (5.8) de matrice $\mathcal{H}(\vec{k})$. Le vecteur d'onde associé est alors solution de l'équation (5.11) qui se réduit sous la forme du polynôme d'ordre 4 (5.15) ou (5.17). Son vecteur polarisation devient le vecteur propre associé à la valeur propre nulle du système (5.8). Afin d'être convaincu du caractère analytique de la détermination de cette onde plane, on expose dans cette annexe le calcul complet des racines du polynôme d'ordre 4, puis le calcul du vecteur propre solution de (5.8).

B.1 Racines d'un polynôme d'ordre 4

B.1.1 Cas général

Dans le cas général, les solutions de l'équation (5.11) sont les racines du polynôme d'ordre 4 (5.15). Elles sont également les racines de ce polynôme normalisé par le coefficient h_4 et que l'on note :

$$P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \tag{B.1}$$

Etant donnée la complexité des expressions des racines d'un tel polynôme, on les écrit en plusieurs étapes. On définit dans un premier temps les termes intermédiaires suivants :

$$a_1 = b^2 - 3ac + 12d \tag{B.2}$$

$$a_2 = 2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd \tag{B.3}$$

$$b_1 = \frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}} a_1}{3\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1^3}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3} \tag{B.4}$$

$$b_2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}} a_1}{3\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1^3}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3} \tag{B.5}$$

$$b_3 = \frac{4ab - a^3 - 8c}{4\sqrt{b_1}} \tag{B.6}$$

Les quatres racines notées X_i, $i \in [1, 4]$ ont pour expression :

$$X_1 = -\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2 - b_3}}{2} \tag{B.7}$$

$$X_2 = -\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2 - b_3}}{2} \tag{B.8}$$

$$X_3 = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2 + b_3}}{2} \tag{B.9}$$

$$X_4 = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2 + b_3}}{2} \tag{B.10}$$

B.1.2 Cas d'un polynôme bicarré

Dans le cas où $\gamma_0 = 0$, les solutions de l'équation (5.11) deviennent les racines d'un polynôme d'ordre 4 bicarré. Il prend la forme donnée par l'équation (5.17) pour le cas particulier $\gamma_0 = 0$ ou par l'équation (5.72) pour le cas particulier d'un milieu uniaxe. Les solutions de ces équations sont également les racines de ces polynômes normalisés par le coefficient h_4. On considère le cas du polynôme d'ordre 4 suivant :

$$P(X) = X^4 + aX^2 + b \tag{B.11}$$

La résolution de l'équation $P(X) = 0$ appelée équation bicarrée demeure plus simple que le cas général précédent. En posant $Y = X^2$, on cherche alors les solutions bien connues du polynôme d'ordre 2 $Y^2 + aY + b = 0$ qui sont $Y_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ et $Y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$. On en déduit alors que les quatre solutions de l'équation bicarrée sont $X_1 = \sqrt{Y_1}$, $X_2 = -\sqrt{Y_1}$, $X_3 = \sqrt{Y_2}$ et $X_4 = -\sqrt{Y_2}$; soit :

$$X_1 = \sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \tag{B.12}$$

$$X_2 = -\sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \tag{B.13}$$

$$X_3 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \tag{B.14}$$

$$X_4 = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \tag{B.15}$$

B.2 Vecteurs propres solutions de l'équation de propagation dans un milieu anisotrope

B.2.1 Cas général

Nous cherchons l'expression du vecteur polarisation $\vec{A}_i$, $i \in \{1,2\}$, solution du problème homogène d'équation (5.8). Nous considérons, pour commencer, le cas général où $\gamma_0 \neq 0$. La matrice $\mathcal{H}(\vec{k})$ s'écrit dans ce cas :

$$\mathcal{H}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \chi^2 - (\epsilon_r)_{\rho\rho} & -(\epsilon_r)_{\rho\phi} & -\chi^2\tau_i - (\epsilon_r)_{\rho z} \\ -(\epsilon_r)_{\phi\rho} & \chi^2\tau_i^2 + \chi^2 - (\epsilon_r)_{\phi\phi} & -(\epsilon_r)_{\phi z} \\ -\chi^2\tau_i - (\epsilon_r)_{z\rho} & -(\epsilon_r)_{z\phi} & \chi^2\tau_i^2 - (\epsilon_r)_{zz} \end{pmatrix} \tag{B.16}$$

En notant les composantes du vecteur polarisation recherché $A_{i,\zeta} = \vec{A}_i.\vec{e}_\zeta$ avec $\zeta \in \{\rho, \phi, z\}$, l'équation (5.8) s'écrit :

$$\begin{cases} \left[\chi^2 - (\epsilon_r)_{\rho\rho}\right] A_{i,\rho} - (\epsilon_r)_{\rho\phi} A_{i,\phi} - \left[\chi^2\tau_i + (\epsilon_r)_{\rho z}\right] A_{i,z} = 0 \\ -(\epsilon_r)_{\phi\rho} A_{i,\rho} + \left[\chi^2\left(1+\tau_i^2\right) - (\epsilon_r)_{\phi\phi}\right] A_{i,\phi} - (\epsilon_r)_{\phi z} A_{i,z} = 0 \\ -\left[\chi^2\tau_i + (\epsilon_r)_{z\rho}\right] A_{i,\rho} - (\epsilon_r)_{z\phi} A_{i,\phi} + \left[\chi^2\tau_i^2 - (\epsilon_r)_{zz}\right] A_{i,z} = 0 \end{cases} \tag{B.17}$$

D'après (5.11), on sait que la valeur de τ_i est telle que le déterminant de ce système d'équations linéaires est nul. Une de ses trois équations devient alors linéairement dépendante des deux autres. On choisit de garder les deux premières équations à partir desquelles on exprime les composantes $A_{i,\phi}$ et $A_{i,z}$ en fonction du paramètre $A_{i,\rho}$. On obtient alors :

$$A_{i,\rho} = \mu, \text{ (constante arbitraire)} \tag{B.18}$$

$$A_{i,\phi} = \frac{det\begin{pmatrix} \chi^2 - (\epsilon_r)_{\rho\rho} & \chi^2\tau_i^2 + (\epsilon_r)_{\rho z} \\ (\epsilon_r)_{\phi\rho} & -(\epsilon_r)_{\phi z} \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} (\epsilon_r)_{\rho\phi} & \chi^2\tau_i + (\epsilon_r)_{\rho z} \\ \chi^2\left(1+\tau_i^2\right) - (\epsilon_r)_{\phi\phi} & -(\epsilon_r)_{\phi z} \end{pmatrix}}\mu \tag{B.19}$$

$$A_{i,z} = \frac{det\begin{pmatrix} (\epsilon_r)_{\rho\phi} & \chi^2 + (\epsilon_r)_{\rho\rho} \\ \chi^2\left(1+\tau_i^2\right) - (\epsilon_r)_{\phi\phi} & (\epsilon_r)_{\phi\rho} \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} (\epsilon_r)_{\rho\phi} & \chi^2\tau_i + (\epsilon_r)_{\rho z} \\ \chi^2\left(1+\tau_i^2\right) - (\epsilon_r)_{\phi\phi} & -(\epsilon_r)_{\phi z} \end{pmatrix}}\mu \tag{B.20}$$

où μ est un paramètre dont la valeur est fixée lorsque le vecteur $\vec{A}_i$ est normalisé $\left(\left\|\vec{A}_i\right\| = 1\right)$, pour obtenir le vecteur $\vec{\Gamma}_i$ selon (5.18). Ce vecteur n'existe que si le déterminant au dénominateur des relations (B.19) et (B.20) est non nul ; autrement dit, si $A_{i,\rho} \neq 0$.

B.2.2 Cas où $\vec{A}_i.\vec{e}_\rho = 0$ ($i \in \{1,2\}$)

Si $A_{i,\rho} = 0$ alors deux des trois équations du système (B.17) deviennent linéairement dépendantes. On choisit de garder la seconde et la troisième d'entre elles :

$$\begin{cases} \left[\chi^2\left(1+\tau_i^2\right) - (\epsilon_r)_{\phi\phi}\right] A_{i,\phi} - (\epsilon_r)_{\phi z} A_{i,z} = 0 \\ -(\epsilon_r)_{z\phi} A_{i,\phi} + \left[\chi^2\tau_i^2 - (\epsilon_r)_{zz}\right] A_{i,z} = 0 \end{cases} \tag{B.21}$$

Or la valeur de τ_i, solution de l'équation (5.11), annule nécessairement le déterminant de ce système. Ainsi, on trouve en utilisant la seconde équation du système (B.21) :

$$A_{i,\rho} = 0 \tag{B.22}$$

$$A_{i,\phi} = \mu, \text{ (constante arbitraire)} \tag{B.23}$$

$$A_{i,z} = \frac{\epsilon_{z\phi}}{\chi^2\tau_i^2 - \epsilon_{zz}}\mu \tag{B.24}$$

Si $\chi^2\tau_i^2 - \epsilon_{zz} = 0$ alors $A_{i,\phi} = 0$ et $A_{i,z} \neq 0$, soit :

$$\vec{A}_i = \mu\vec{e}_z \tag{B.25}$$

Annexe C

Rappel sur le coefficient de dispersion chromatique

Le but de cet annexe est de rappeler brièvement l'origine et le sens de la dispersion chromatique, dont l'expression est donnée par (6.37). Nous considérons une composante "A" du champ associée à un mode de la fibre (généralement le mode fondamental). On ne s'intéresse pas ici à la dépendance transverse du champ $A(r,\theta)$ (voir la relation (6.1)), mais uniquement à sa dépendance spatio-temporelle selon l'axe de propagation z, soit $\mathcal{A}(z,t)$. On suppose que cette composante s'exprime comme une impulsion de la forme :

$$\mathcal{A}(z,t) = \Re e\left\{a(z,t)e^{i(k_0 z-\omega_0 t)}\right\} \tag{C.1}$$

où $a(z,t)$ est son enveloppe et $e^{i(k_0 z-\omega_0 t)}$ l'onde-porteuse de nombre d'onde k_0 et de pulsation ω_0. Par transformation de Fourier spatio-temporelle, l'onde enveloppe de cette impulsion se décompose sur une base continue d'ondes données par (6.1). Chacune des ces ondes est donc une solution, à une longueur d'onde donnée, du problème modal tel qu'il est résolu par la méthode différentielle ($n_{eff}(\lambda)$). En supposant que le spectre temporel de l'onde-enveloppe soit étroit, on détermine le développement de Taylor (à l'ordre 2) de sa relation de dispersion $\beta(\omega)$, au voisinage de la pulsation ω_0 :

$$\beta(\omega) \approx \beta'(\omega-\omega_0) + \frac{\beta''}{2}(\omega-\omega_0)^2 \tag{C.2}$$

où $\beta' = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}$ et $\beta'' = \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right)_{\omega_0}$. Ce dernier est appelé le coefficient de dispersion chromatique de la vitesse de groupe (DVG). La fonction $\beta(\omega)$ est déduite de $n_{eff}(\lambda)$ d'après (6.2), sachant que $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. En ne prenant en compte que le phénomène de dispersion (on néglige les effets non linéaires), on montre que l'onde enveloppe, après une distance de propagation z, s'exprime selon :

$$a\,(z,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(0,\Omega)e^{i\left(\frac{\beta''}{2}\Omega^2 z-\Omega\tau\right)}d\Omega \text{ avec } \left\{\begin{array}{c}\tau = t-\beta' z\\ \tilde{a} = TF_{temp}(a)\end{array}\right. \tag{C.3}$$

TF_{temp} signifie "transformée de Fourier temporelle". Cette relation montre que l'on connaît l'évolution spatio-temporelle de l'onde enveloppe par la donnée de son champ en $z=0$: $a(0,t)$. Prenons l'exemple classique d'une impulsion dont l'intensité $I(0,t) = a(0,t)a^*(0,t)$ est initialement gaussienne :

$$I(0,t) = I_0 e^{-\frac{t^2}{\delta_0}}$$

où δ_0 est la largeur de la fonction gaussienne. Par application de la relation (C.3), on trouve l'expression de l'intensité de l'onde enveloppe en z ($I(z,t) = a(z,t)a^*(z,t)$) :

$$I(z,t) = i(z)e^{-\frac{(t-\beta' z)^2}{\delta(z)^2}} \text{avec} \left\{\begin{array}{l}\delta(z) = \delta_0\sqrt{1+\left(\frac{\beta'' z}{\delta_0^2}\right)^2}\\ i(z) = I_0\sqrt{1+\left(\frac{\beta'' z}{\delta_0^2}\right)^2}\end{array}\right.$$

On constate qu'il s'agit toujours d'une onde de type gaussienne. Sa largeur $\delta(z)$ croît avec z, c'est-à-dire que l'onde enveloppe s'étale temporellement au cours de la propagation de l'onde selon z : c'est le phénomène de dispersion. L'expression de $\delta(z)$ révèle que ce phénomène est directement relié à la grandeur β'' (alors que β' n'intervient pas).

En dérivant deux fois la relation de dispersion $\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} n_{eff}(\omega)$ par rapport à ω, on trouve que $\beta''(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \frac{d^2 n_{eff}}{d\omega^2}$ (en négligeant de manière empirique les dérivées du premier ordre). Ensuite, on effectue le changement de variable de ω à λ d'après $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, ce qui permet d'aboutir à

$$\beta''(\lambda) = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \tag{C.4}$$

On définit le coefficient de dispersion chromatique par $D(\lambda) = \frac{\partial \beta'}{\partial \lambda}$, d'où on déduit la relation entre D et β'' :

$$D(\lambda) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta''(\lambda) \tag{C.5}$$

En remplaçant $\beta''(\lambda)$ par son expression selon λ (C.4), on retrouve la relation (6.37). En vue d'établir des communications à haut débit dans les fibres optiques par envoi successif d'implusions de courte largeur temporelle, l'objectif est d'éviter ce phénomène de dispersion. Ainsi, on cherche des modes avec une dispersion chromatique $D(\lambda_0)$ nulle. Mais cela ne suffit pas, puisqu'une impulsion possède également une largeur spatiale, se répartissant sur une plage de longueur d'onde. Il faudrait alors que $D(\lambda)$ s'annule sur l'ensemble des valeurs de cet intervalle (centré sur λ_0). A défaut, on cherche à réduire autant que possible la pente de la droite $D(\lambda)$ au voisinage de λ_0 telle que $D(\lambda_0) = 0$. Cette valeur de λ_0 (si elle existe) demeure intrinsèquement dépendante du mode considéré.

Bibliographie

[1] M. Nevière, M. Cadilhac, and R. Petit. Applications of conformal mapping to the diffraction of electromagnetic waves by grating. *IEEE Trans. Ant. Propag.*, 21 :37–46, 1973.

[2] J. Chandeson, D. Maystre, and G. Raoult. A new theorical method for diffraction gratings and its numerical application. *J. Opt. (Paris)*, 11 :235–241, 1980.

[3] M. Nevière and E. Popov. New theorical method for electromagnetic wave diffraction by a metallic or dielectric cylinder, bare or coated with a thin dielectric. *J. Elec. Waves Appl.*, 12 :1265–1296, 1998.

[4] G. Cerutti-Maori, R. Petit, and M. Cadilhac. Etude numérique du champ diffracté par un réseau. *C. R. Ac. Sc. Paris*, 268 :1060–1063, 1969.

[5] R. Petit. Diffraction d'une onde plane par un réseau métallique. *Rev. Opt.*, 45 :353–370, 1966.

[6] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre. Scaterring by a random set of parallel cylinders. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(9) :2526–2538, 1994.

[7] G. Tayeb. The method of fictitious sources applied to diffraction gratings. *Special issue of GMT, Appl. Comput. Electromagn. Soc. J.*, 9 :90–100, 1994.

[8] F. Zolla, R. Petit, and M. Cadilhac. Electromagnetic theory of diffraction by a system of parallel rods : the method of fictitious sources. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(3) :1087–1096, 1994.

[9] F. Zolla. *Contribution à l'étude de la diffraction et de l'absorption des ondes électromagnétiques.* PhD thesis, Université d'Aix-Marseille III, 1993.

[10] D. Maystre and P. Vincent. Diffraction d'une onde plane électromagnétique plane par un objet cylindrique non infiniment conducteur de section arbitraire. *Opt. Comm.*, 5(5) :327–330, 1972.

[11] E. Ngakosso, M. Saillard, and P. Vincent. Theorical and numerical study of conical diffraction by cylindrical objects. *J. Elec. W. Appl.*, 9(4) :479–502, 1995.

[12] J.C. Nédélec. *Notions sur les techniques d'éléments finis.* Ellipse, Mathématiques et applications 7, Paris, 1991.

[13] A.C. Cangellaris. Finite element analysis of electromagnetic scattering from inhomogeneous cylinders at oblique incidence. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 39(5) :645–650, 1991.

[14] R.G. Rojas. Scattering by an inhomogeneous dielectric/ferrite cylinder of arbitrary cross-section shape. Oblique incidence case. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 36 :238–246, 1988.

[15] T. Itoh, G. Pelosi, and P. Silvester. *Finite Element Software for Microwave Engineering.* John Wiley and Sons, Inc, New York, 1996.

[16] R.A. Depine and J.M. Simon. Diffracting grating efficiencies conformal mapping method for a good real conductor. *Optica Acta*, 29 :1459, 1982.

[17] E. Ngakosso, M. Saillard, and P. Vincent. Electromagnetic diffraction by homogeneous cylinders of the field radiated by a dipole : a rigourous computation. *J. Elec. W. Appl.*, 9(9) :1189–1206, 1995.

[18] G. Tayeb and S. Enoch. Combined fictitious-sources-scattering-matrix method. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21 :1417–1423, 2004.

[19] J.C. Monzon and N.J. Damaskos. Two-dimensional scattering by homogeneous anisotropic rod. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 34(10) :1243–1249, 1986.

[20] J.C. Monzon. Three-dimensional scattering by an infinite homogeneous anisotropic circular cylinder : A spectral approach. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 35(6) :670–682, 1987.

[21] A.W. Snyder and J.D. Love. *Optical Waveguide Theory.* Chapman & Hall, New York, 1983.

[22] K. Okamoto. *Fundamentals of optical waveguides.* Optics And Photonics, Academic Press.

[23] P. Yeh, A. Yariv, and E. Marom. Theory of bragg fiber. *J. Opt. Soc. Am.*, 68 :1196–1201, 1978.

[24] W.K. Burns and A.F. Milton. Mode conversion in planar-dielectric separating waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.*, 11 :910–915, 1975.

[25] B.S. Kawasaki, K.O. Hill, and R.G. Lamont. Biconical-taper single-mode fiber coupler. *Opt. Lett.*, 6 :327–328, 1981.

[26] J.A. Fleck, J.R. Morris, and M.D. Feit. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere. *Appl. Phys.*, 10 :129–160, 1976.

[27] M.D. Feit and J.A. Fleck. Light propagation in gradded-index optical fibers. *Appl. Opt.*, 17 :3990–3998, 1978.

[28] L.D. Hutcheson, I.A. White, and J.J. Burke. Comparison of bending losses in integrated optical circuits. *Opt. Lett.*, 5 :276–278, 1980.

[29] D. Yevick and B. Hermansson. New formulations of the matrix beam propagation method : Application to rib waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.*, 25 :221–229, 1989.

[30] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 14 :302–307, 1966.

[31] F. Zolla, G. Renversez, A. Nicolet, B. Kuhlmey, S. Guenneau, and D. Felbacq. *Foundations of Photonic Crystal Fibres.* Imperial College Press, London, 2005.

[32] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *IEEE Trans. on Magn. Comp.*, 23 :377–382, 1981.

[33] J.P. Bérenger. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 44(1) :110–117, 1966.

[34] J.C. Knight, T.A. Birks, P.St.J. Russel, and D.M. Atkin. All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. *Opt. Lett.*, 21(19) :1547–1549, 1996.

[35] T.P. White, R.C. McPhedran, and C. Martijn de Sterke. Resonance and scattering in microstructured optical fibers. *Opt. Lett.*, 27(22) :1977–1979, 2002.

[36] N.M. Lichinitser, S.C. Dunn, B. Usner, B.J. Eggleton, T.P. White, R.C. McPhedran, and C. Martijn de Sterke. Resonance in microstructured optical waveguides. *Opt. Express*, 11(10) :1243–1251, 2003.

[37] P.R. McIsaac. Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides I : Summary of results. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 23(5) :421–429, 1975.

[38] P.R. McIsaac. Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides II : Theory. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 23(5) :429–433, 1975.

[39] M.J. Steel, T.P. White, C. Martijn de Sterke, R.C. McPhedran, and L.C. Botten. Symmetry and degeneracy in microstructured optical fibers. *Opt. Lett.*, 26(8) :488–490, 2001.

[40] B.T. Kuhlmey, T.P. White, G. Renversez, D. Maystre, L.C. Botten, C. Martijn de Sterke, and R.C. McPhedran. Multipole method for microstructured optical fibers II : implementation and results. *J. Opt. Soc. Am. B*, 19(10) :2331–2340, 2002.

[41] J.M. Fini. Improved symmetry analysis of many-moded microstructure optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 21(8) :1431–1436, 2004.

[42] T.P. White, B.T. Kuhlmey, R.C. McPhedran, D. Maystre, G. Renversez, C. Martijn de Sterke, and L.C. Botten. Multipole method for microstructured optical fibers I : formulation. *J. Opt. Soc. Am. B*, 19(10) :2322–2330, 2002.

[43] B.T. Kuhlmey, R.C. McPhedran, and C. Martijn de Sterke. Modal cutoff in microstructured optical fibers. *Opt. Lett.*, 27(19) :1684–1686, 2002.

[44] G. Renversez, F. Bordas, and B.T. Kuhlmey. Second mode transition in microstructured optical fibers : determination of the critical geometrical parameter and study of the matrix refractive index and effects of cladding size. *Opt. Lett.*, 30(11) :1264–1266, 2005.

[45] B. Kuhlmey, G. Renversez, and D. Maystre. Chromatic dispersion and losses of microstructured optical fibers. *Appl. Opt.*, 42(4) :634–639, 2003.

[46] G. Renversez, B. Kuhlmey, and R.C. McPhedran. Dispersion management with microstructured optical fibers : Ultra-flattened chromatic dispersion with low losses. *Appl. Lett.*, 28(12) :989–991, 2003.

[47] S. Campbell, R.C. McPhedran, and C. Martijn de Sterke. Differential multipole method for microstructured optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 21(11) :1919–1928, 2004.

[48] K. Saitoh and M. Koshiba. Leakage loss and group velocity dispersion in air-core photonic bandgap fibers. *Opt. Express*, 11(23) :3100–3109, 2003.

[49] K. Saitoh, N. A. Mortensen, and M. Koshiba. Air-core photonic bang-gap fibers : the impact of surface modes. *Opt. Express*, 12(3) :394–400, 2004.

[50] D. Rittenhouse. An optical problem proposed by F. Hopkinson and solved. *J. Am. Phil. Soc.*, 201 :202–206, 1786.

[51] T. Young. On the theory of light and colors. *Phil. Trans. II*, pages 399–408, 1803.

[52] J. Fraunhofer. Über die brechbarkeit des electrishen lichts. *K. Acad. d. Wiss. zu München*, pages 61–62, 1824.

[53] M. Nevière, P. Vincent, and R. Petit. Sur la théorie du réseau conducteur et ses applications à l'optique. *Nouv. Rev. Opt.*, 5 :65–77, 1974.

[54] M. Nevière, G. Cerutti-Maori, and M. Cadilhac. Sur une nouvelle méthode de résolution du problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur. *Opt. Commun.*, 3 :48–52, 1971.

[55] M. G. Moharam and T. K. Gaylord. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffracting. *J. Opt. Soc. Am.*, 71 :811–818, 1981.

[56] M. Nevière and E. Popov. *Light propagation in periodic media ; differential theory and design.* Marcel Dekker, New York, Basel and Honk Kong, 2003.

[57] M. G. Moharam and T. K. Gaylord. Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am.*, 72 :1385–1392, 1982.

[58] D. M. Pai and K. A. Awada. Analysis of dielectric gratings of arbitrary profiles and thicknesses. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8 :755–762, 1991.

[59] E. Popov, M. Nevière, B. Gralak, and G. Tayeb. Staircase approximation validity for arbitrary-shaped gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(1) :33–42, 2002.

[60] G. Tayeb. *Contribution à l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des réseaux. Réflexion sur les méthodes existantes et sur leur extension aux milieux anisotropes.* PhD thesis, Université d'Aix-Marseille III, 1990.

[61] M. Nevière and F. Montiel. Deep gratings : a combination of the differential theory and the multiple reflection series. *Opt. Comm.*, 108 :1–7, 1994.

[62] F. Montiel and M. Nevière. Differential theory of gratings : extension to deep gratings of arbitrary profile and permittivity through the R-matrix propagation algorithm. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :3241–3250, 1994.

[63] L. Li. Bremmer series, R-matrix propagation algorithm, and numerical modeling of diffraction gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :2829–2836, 1994.

[64] L. Li. Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13 :1024–1035, 1996.

[65] P. Lalanne and G. M. Morris. Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13 :779–784, 1996.

[66] L. Li. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13 :1870–1876, 1996.

[67] L. Li. New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14 :2758–2767, 1997.

[68] E. Popov and M. Nevière. Grating theory : new equations in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17 :1773–1784, 2000.

[69] E. Popov and M. Nevière. Maxwell equations in Fourier space : fast Fourier formulation for arbitrary shaped, periodic, anisotropic media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18 :2886–2894, 2001.

[70] N. Bonod. *Méthode différentielle : Développement et applications.* PhD thesis, Université de Provence, 2004.

[71] N. Bonod, E. Popov, and M. Nevière. Factorization of nonlinear Maxwell equations in periodic media. Application to the optical Kerr effect. *Opt. Commun.*, 244 :389–398, 2005.

[72] N. Bonod, R. Reinisch, E. Popov, and M. Nevière. Optimization of surface plasmon enhanced magneto-optical effects. *J. Opt. Soc. Am. B*, 21 :791–797, 2004.

[73] E. Popov, B. Chernov, M. Nevière, and N. Bonod. Differential theory : application to highly conducting gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21 :199–206, 2004.

[74] N. Bonod, E. Popov, and M. Nevière. Differential theory of diffraction by finite cylindrical objects. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22 :481–490, 2005.

[75] E. Popov, M. Nevière, and N. Bonod. Factorization of products of discontinuous functions applied to Fourier-Bessel basis. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21 :46–52, 2004.

[76] S. Enoch, E. Popov, and M. Nevière. 3-D photonic crystals dispersion relation : improved convergence using fast Fourier factorization (FFF) method. *Proc. SPIE*, 4438 :183–190, 2001.

[77] S. Enoch, E. Popov, and N. Bonod. Analysis of the physical origin of surface modes on finite size photonic crystals. *Phys. Rev. B*, 72, 2005.

[78] P. Vincent and R. Petit. Sur la diffraction d'une onde plane par un cylindre diélectrique. *Opt. Commun.*, 5(4) :261–266, 1972.

[79] B. Stout, M. Nevière, and E. Popov. Light diffraction by a three-dimensional object : differential theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(11) :2385–2404, 2005.

[80] B. Stout, M. Nevière, and E. Popov. Mie scattering by an anisotropic object. Part I : homogeneous sphere. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 :1111–1123, 2006.

[81] B. Stout, M. Nevière, and E. Popov. Mie scattering by an anisotropic object. Part II : arbitrary-shaped object - differential theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 :1124–1134, 2006.

[82] P. Boyer, E. Popov, M. Nevière, and G. Tayeb. Diffraction theory in TM polarization : application of the fast Fourier factorization method to cylindrical devices with arbitrary cross section. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(11) :2146–2153, 2004.

[83] P. Boyer, E. Popov, M. Nevière, and G. Renversez. Diffraction theory : Application of the fast Fourier factorization to cylindrical devices with arbitrary cross lighted in conical mounting. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(5) :1146–1158, 2006.

[84] M. Nevière, E. Popov, and P. Boyer. Diffraction theory of an anisotropic circular cylinder. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(7) :1731–1740, 2006.

[85] P. Boyer, G. Renversez, E. Popov, and M. Nevière. The fast Fourier factorization method applied to the study of arbitrary cross section microstructured optical fibers. *Proc. SPIE*, 5840 :409–420, 2005.

[86] P. Boyer, G. Renversez, E. Popov, and M. Nevière. A new differential method applied to the study of arbitrary cross section microstructured optical fibers. *Optical and Quantum Electronics*, 38 :217–230, 2006.

[87] P. Boyer, G. Renversez, E. Popov, and M. Nevière. The fast Fourier factorization method as a modal method for arbitrary profile microstructured optical fibers. *soumise au J. Opt. Soc. Am. B.*

[88] G. Renversez, P. Boyer, and A. Sagrini. Antiresonant reflecting optical waveguide microstructured fibers revisited : a new analysis based on leaky mode coupling. *Opt. Express*, 14(12), 2006.

[89] E. Popov, M. Nevière, P. Boyer, and N. Bonod. Light transmission through a subwavelength hole. *Opt. Comm.*, 255 :338–348, 2005.

[90] G. Bouwmans, L. Bigot, Y. Quiquempois, F. Lopez, L. Provino, and M. Douay. Fabrication and characterization of an all-solid 2D photonic bandgap fiber with a low-loss region ($<$ 20 dB/km) around 1550 nm. *Opt. Express*, 13(21) :8452–8459, 2005.

[91] J.P. Hugonin and P. Lalanne. Perfectly matched layers as nonlinear coordinate transforms : a generalized formulation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(9) :1844–1849, 2005.

[92] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[93] J. Van Bladel. *Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill book company, New York, 1964.

[94] R. Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*. Masson, Paris, 1993.

[95] M. Nevière. Bragg-Fresnel multilayer gratings : electromagnetic theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 :1835–1845, 1994.

[96] J.C. Brazas, L. Li, and A. McKeon. High efficiency input coupling into optical waveguide using grating with double corrugation. *Appl. Opt.*, 34 :604–609, 1995.

[97] S. Huard. *Polarisation de la lumière*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, 1994.

[98] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, second edition, 2002.

[99] M. Nevière. The homogeneous problem. *Electromagnetic Theory of Gratings. Topics in current Physics, chapter 5 Springer-Verlag*, 22, 1980.

[100] B.T. Kuhlmey. *Theorical and numerical investigation of the physics of microstructured optical fibres*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille III et Université de Sydney, 2003.

[101] J.D. Joannopoulos, R. Meade, and J.N. Winn. *Photonic Crystals Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, 1995.

[102] J.M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gérard, D. Maystre, and A. Tchelnokov. *Les cristaux photoniques*. Hermes, Paris, 2003.

[103] T.P. White, R.C. McPhedran, C.Martijn de Sterke, L.C. Botten, and M.J. Steel. Confinement losses in microstructured optical fibers. *Opt. Lett.*, 26(21) :1660–1662, 2001.

[104] B.T. Kuhlmey, R.C. McPhedran, C. Martijn de Sterke, A. Robinson, G. Renversez, and D. Maystre. Microstructured optical fibers : where's the edge ? *Opt. Express*, 10(22) :1285–1290, 2002.

[105] S. Wilcox, L.C. Botten, C. Martijn de Sterke, B. Kuhlmey, R.C. McPhedran, D.P. Fussel, and S. Tomljenovic-Hanic. Long wavelength behavior of the fundamental mode in microstructured optical fibers. *Opt. Express*, 13(6) :1978–1984, 2005.

[106] H.P. Uranus and H.J.W.M. Hoekstra. Modeling of microstructured waveguides using a finite-element-based vectorial mode solver with transparent boundary conditions. *Opt. Express*, 12(12) :2795–2809, 2004.

[107] K.M. Kiang, K. Frampton, T.M. Monro, R. Moore, J. Tucknott, D.W. Newak, D.J. Richardson, and H.N. Rutt. Extruded single-mode non-silica glass holey optical fibres. *Elect. Lett.*, 38(12) :546–547, 2002.

[108] V.V. Ravi Kanth Kumar, A.K. George, W.H. Reeves, J.C. Knight, P.St. Russel, F.G. Omenetto, and A.J. Taylor. Extruded soft glass photonic crystal fiber for ultrabroad supercontinuum generation. *Opt. Express*, 10(25) :1520–1524, 2002.

[109] Y.K. Lizé, E.C. Mägi, V.G. Ta'eed, J.A. Bolger, P. Steinvurzel, and B.J. Eggleton. Microstructured optical fiber photonic wires with subwavelengh core diameter. *Opt. Express*, 12(14) :3209–3217, 2004.

[110] E.C. Mägi, H.C. Nguyen, and B.J. Eggleton. Air-hole collapse and mode transitions in microstructured fiber photonic wires. *Opt. Express*, 13(2) :453–459, 2005.

[111] N.M. Lichinitser, S.C. Dunn, P.E. Steinwuzel, B.J. Eggleton, T.P. White, R.C. McPhedran, and C. Martijn de Sterke. Application of an ARROW model for designing tunable photonic devices. *Opt. Express*, 12 :1540–1550, 2004.

[112] J. Laegsgaard04. Gap formation and guided modes bandgap fibres with high-index. *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, 6 :798–804, 2004.

[113] A. Argyros, T.A. Birks, S.G. Leon-Saval, C.M.B. Cordeiro, F. Luan, and P.St. Russel. Photonic bandgap with an index step of one percent. *Opt. Express*, 13 :309–314, 2005.

[114] T.I. Lukowski and F.P. Kapron. Parabolic fiber cutoffs : A comparison of theories. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(9) :1185–1187, 1977.

Elaboration d'une méthode différentielle pour l'étude des fibres optiques microstructurées

Résumé :

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire décrit le développement d'une méthode numérique élaborée dans le but d'étudier la propagation de la lumière dans des objets de géométrie cylindrique. Ce document est divisé en deux parties.

La première partie introduit les équations de base de la dernière version de la méthode différentielle (méthode de la « factorisation de Fourier rapide ») dans le système de coordonnées cylindriques. Les tests numériques valident confortablement cette théorie aussi bien dans le cas de la diffraction classique (TE et TM) que dans le cas de la diffraction conique. Parallèlement à ces travaux, une nouvelle méthode numérique est proposée, permettant de modéliser la diffraction de la lumière par un cylindre circulaire anisotrope. Elle a été implémentée et validée avec succès.

La seconde partie est essentiellement consacrée à la modélisation des fibres optiques microstructurées afin d'étudier leurs propriétés de guidage des modes à pertes qui s'y propagent. Un formalisme relatif à la méthode utilisée est écrit en tenant compte des propriétés de symétrie opto-géométrique présentes dans ce genre de guide d'onde. Les résultats très satisfaisants montrent en particulier que la méthode différentielle appartient à la famille restreinte des méthodes numériques pouvant déterminer avec précision à la fois la partie réelle et la partie imaginaire (pertes) de l'indice effectif des modes recherchés.

La méthode différentielle présente l'avantage de pouvoir considérer des sections arbitraires pour les objets diffractants (les inclusions dans le cas des fibres optiques microstructurées). Cette méthode permet aussi l'étude d'objets constitués de matériaux inhomogènes et/ou anisotropes. En particulier, nous nous sommes intéressés à une fibre optique microstructurée de type « Antiresonant Reflecting Optical Waveguide » dont les inclusions circulaires possèdent un gradient d'indice parabolique. La comparaison des résultats numériques avec des mesures expérimentales est très encourageante.

Achievement of a differential method for the study of microstructured optical fibers

Abstract :

This PhD manuscript deals with the development of a numerical method in order to study the propagation of the light by objects with cylindrical shape. This document is split into two parts.

The first part introduces basis equations of the last version of the differential method ("fast Fourier factorization" method) written in cylindrical coordinates. Several tests successfully validate this theory in the case of conical diffraction, then in the particular case of the classical diffraction (TM and TE). In the same time, a new numerical method is proposed which permits to modelize the diffraction of light by an anisotropic circular cylinder. This method has been implemented and successfully validated.

The second part is essentially devoted to the modelling of microstructured optical fibers in order to study leaky modes which propagate in such optical devices. A formalism related to the used method is written taking into account the opto-geometric symmetrical properties of this kind of waveguides. The very satisfaying results particularly show that the differential method belongs to the group of numerical method which can compute with accuracy both the real part and the imaginary part (losses) of the effective index of studied modes.

The differential method presents the advantage to consider arbitrary cross section diffracting devices (inclusions in the case of microstructured optical fibers). This method also permits to study objets filled with inhomogeneous and/or anisotropic media. Our recent works particularly focus on "AntiResonant Reflecting Optical Waveguide" microstructured optical fibers. Comparisons between numerical results and experimental measurements are encouraging.