Etude de l'échantillonge en tomographie par emission de positons

Yannick Grondin

▶ **To cite this version:**

Yannick Grondin. Etude de l'échantillonge en tomographie par emission de positons. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT : . tel-00378589

HAL Id: tel-00378589

https://theses.hal.science/tel-00378589

Submitted on 24 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude de l'échantillonnage des données en tomographie par émission de positons

Yannick Grondin

Table des matières

Table des matières **i**

Introduction **1**

I Échantillonnage des données en Tomographie d'Émission de Positons **9**

1 Théorie de l'échantillonnage appliquée à la tomographie **13**

1.1 L'échantillonnage en tomographie à deux dimensions 13

1.1.1 La géométrie du type faisceau parallèle 13

1.1.2 La géométrie du type faisceau divergent 22

1.2 L'échantillonnage en tomographie à trois dimensions 25

1.2.1 Introduction 25

1.2.2 La géométrie du type faisceau parallèle 3D 27

1.2.3 La géométrie de type faisceau divergent 3D parallèle 32

1.2.4 La géométrie du type *fully 3D* 37

1.3 Conclusion 37

2 De l'acquisition des données à la reconstruction d'images en Tomographie d'Émission de Positons **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Le sinogramme 40
2.3 Les modes d'acquisition des données en TEP 41
2.3.1 Le mode d'acquisition 2D 41
2.3.2 Le mode d'acquisition 3D 41
2.4 L'échantillonnage des données en mode 2D 43
2.4.1 La géométrie du faisceau 43
2.4.2 Le schéma d'échantillonnage transversal 44
2.4.3 Le schéma d'échantillonnage axial 46
2.5 La reconstruction d'image 2D 47
2.5.1 Introduction 47
2.5.2 Formule d'inversion de la transformée en rayons X 2D 48
2.5.3 L'algorithme de rétroprojection filtrée 49
2.5.4 Les algorithmes de reconstruction itératifs 51
2.5.5 La régularisation 54
2.6 L'étude de l'échantillonnage en TEP 3D 54
2.6.1 Introduction 54
2.6.2 Traitement axial des données en mode 3D 55
2.7 La reconstruction d'image 3D 57
2.7.1 Introduction 57
2.7.2 La rétroprojection filtrée 3D 59
2.7.3 L'algorithme 3DRP 61
2.7.4 Les algorithmes de *rebinning* 61
2.7.5 Les algorithmes itératifs 3D 62
2.8 Conclusion 63

3 Étude de l'échantillonnage naturel en TEP 65

3.1 Introduction 65

3.2 L'échantillonnage en mode 2D pour scanners TEP cylindriques 66

3.2.1 La paramétrisation naturelle des lignes de réponse 66

3.2.2 Le support essentiel de $\hat{g}$ 68

3.2.3 Échantillonnage de g 68

3.2.4 Les interprétations géométriques 70

3.2.5 Étude de l'échantillonnage de g pour $\eta = 1/3$ 73

3.2.6 Généralisation 78

3.3 Schéma de compression des données 78

3.4 Conclusion 80

4 Simulations numériques et Monte Carlo 81

4.1 Introduction 81

4.2 Les simulations numériques 82

4.2.1 Vérification du support essentiel K_g 82

4.2.2 Simulations des schémas d'échantillonnage 84

4.3 Les simulations Monte Carlo 94

4.3.1 Principe 94

4.3.2 Principe des simulations GATE pour la vérification de l'allure de K_g 95

4.3.3 Le format des données 96

4.3.4 Les résultats 96

4.4 Conclusions 97

II Mise en place d'une chaîne de simulations du scanner TEP

LXe **101**

5 Introduction à la physique des détecteurs TEP et aux simulations Monte Carlo **105**

5.1 Introduction . . . 105

5.2 La physique de la détection . . . 105

5.2.1 Les interactions rayonnement-matière . . . 105

5.2.2 Le fonctionnement d'un détecteur . . . 108

5.2.3 Le spectre en énergie . . . 110

5.2.4 Les caractéristiques d'un détecteur TEP . . . 110

5.3 L'outil de simulation Monte Carlo . . . 111

5.3.1 Le principe de la méthode Monte Carlo . . . 111

5.3.2 La boîte à outils de simulation GEANT4 . . . 112

5.3.3 La boîte à outils de simulation GATE . . . 112

5.4 L'imagerie du petit animal . . . 113

5.4.1 Les motivations . . . 113

5.4.2 Les défis techniques des scanners TEP petit animal . . . 114

5.4.3 Un bref historique des scanners TEP pour l'imagerie de l'animal . . . 114

5.5 Scanner TEP petit animal au xénon liquide . . . 115

5.5.1 Les propriétés de détection du xénon liquide . . . 115

5.5.2 Description du scanner TEP LXe . . . 116

5.5.3 La reconstruction des interactions dans le plan transversal d'un module . . . 118

5.5.4 La mesure de la profondeur d'interaction . . . 118

5.5.5 Autres systèmes TEP au xénon liquide . . . 119

5.6 Conclusion . . . 120

6 Étude expérimentale et simulée du scanner TEP LXe 121

6.1 Évaluation des performances d'un module du TEP LXe 121

6.1.1 Introduction 121

6.1.2 Description du banc de test expérimental 121

6.1.3 Description de la simulation du banc de test 122

6.1.4 La modélisation des guides de lumières 128

6.1.5 Les résultats de la simulation du banc de test expérimental 131

6.1.6 Résultats expérimentaux du banc de test 137

6.1.7 Comparaison des résultats de la simulation et de l'expérience 140

6.2 Simulation du scanner TEP LXe complet 140

6.2.1 Introduction 140

6.2.2 Méthodes 141

6.2.3 Résultats de la simulation du TEP LXe complet 145

6.2.4 Discussion des résultats de la simulation du TEP LXe complet . . . 146

6.2.5 Autres géométries de test 149

6.3 Conclusion 150

Conclusions et perspectives 153

Bibliographie 155

Annexes 163

A Démonstration de la décomposition de L_e en 9 réseaux rectangulaires 163

B Proposition du support essentiel de $\widehat{Xf}$ dans la géométrie *fully 3D* 169

Introduction

La tomographie d'émission de positons (TEP) est une modalité d'imagerie de la médecine nucléaire. Comme tout autre système d'imagerie médicale (la radiologie, l'échographie, l'imagerie par résonance magnétique), la TEP englobe plusieurs domaines des sciences et de la technologie. Les mathématiques et le traitement du signal en tomographie apportent les résultats théoriques et les techniques permettant la reconstruction d'un objet volumique à partir de ses projections planaires. La physique qui fait référence à l'« émission de positons », permet de concevoir des détecteurs efficaces nécessaires pour l'élaboration de signaux aboutissant à une image finale. Ce sont ces différentes facettes d'une même technologie qui ont été abordées dans cette thèse.
La première partie de ce travail traite de l'acquisition des données en TEP. Cette étude relève du domaine de l'échantillonnage appliqué à la tomographie. L'objectif est d'optimiser la quantité de données mesurées par rapport à la résolution spatiale maximale qu'il est possible d'atteindre sur une image reconstruite pour un scanner donné.
L'autre partie de ce travail porte sur l'étude d'un tomographe à émission de positons (ou scanner TEP) ayant une géométrie d'acquisition de données novatrice. Le but de cette étude est d'évaluer les performances de ce scanner, en particulier en terme de résolution spatiale avec la géométrie proposée. Pour cela, une chaîne de simulations Monte Carlo, permettant de reproduire des examens réalistes en TEP, a été mise en place et les résultats ont été en partie confrontés aux données expérimentales.
La perspective commune aux deux thèmes abordés dans cette thèse est d'agir sur l'échantillonnage des mesures afin d'optimiser la quantité de données nécessaire à la reconstruction d'une image à haute résolution. L'une des problématiques à laquelle s'adresse cette étude est la réduction du temps de reconstruction d'images en TEP qui dépend directement du volume de données acquises. Nous allons présenter dans cette introduction les différentes notions importantes de cette thèse, en commençant par le principe général de l'imagerie TEP.

La physique de la tomographie par émission de positons

La TEP est une technique d'imagerie nucléaire où un traceur radioactif est injecté au patient. Elle utilise la propriété que possèdent certaines molécules radioactives de se fixer dans une région de l'organisme sans en altérer le fonctionnement physiologique. Ces molécules radio-pharmaceutiques sont composées d'une molécule biochimique (vecteur) qui trace le processus biologique que l'on désire étudier et d'un isotope radioactif, émetteur de positons (excédentaire en protons), qui va permettre de localiser ce processus spatialement et éventuellement temporellement. Ces isotopes sont produits dans des cyclotrons par bombardement de noyaux cibles par des faisceaux de protons ou de deutons. Leur période (durée après laquelle l'activité de l'isotope est réduite de moitié) est courte afin de minimiser l'irradiation du patient. Les structures hospitalières se situent donc à proximité du site de production des radiotraceurs. La molécule la plus utilisée est le fluorodéoxyglucose marqué au fluor 18 (^{18}F-FDG) en raison de ses nombreuses indications en oncologie, pour le diagnostic et le suivi de l'évolution des cancers en étudiant le métabolisme du glucose. D'autres isotopes radioactifs sont également utilisés en TEP, par exemple l'oxygène 15 (^{15}O) ou le carbone 11 (^{11}C) qui est particulièrement utilisé pour l'imagerie du cerveau en neurosciences. Par ailleurs, la quantification de la distribution du traceur dans les organes permettent de quantifier également le mécanisme physiologique étudié.

Les éléments radioactifs émetteurs de positons ont un noyau qui possède un excès de protons par rapport au nombre de neutrons. Ils se désintègrent alors vers un état stable en transformant un proton en neutron (désintégration β^+). Ce processus entraîne l'émission d'un neutrino et d'un positon qui se partagent l'énergie résiduelle de la transition sous forme d'énergie cinétique. Le positon émis dissipe son énergie cinétique lors de son parcours dans le milieu par des collisions avec les électrons. Lorsqu'il est au repos, il s'annihile avec un électron ce qui provoque l'émission de deux photons de 511 keV dans deux directions opposées. Ces deux quanta sont appelés photons d'annihilation, mais par abus de langage, ils sont souvent désignés par photons gamma (γ) (figure 1). La ligne formée par les deux photons gamma est appelée ligne de réponse (LOR en anglais pour *Line Of Response*). Chaque annihilation est donc caractérisée par une LOR dont la détection constitue le signal utile. Il est important de noter que le point d'émission du positon n'est pas confondu avec celui des photons d'annihilation. De plus, lorsque le positon n'est pas tout à fait au repos, l'angle séparant l'émission des photons d'annihilation n'est pas exactement de 180 °mais suit une distribution gaussienne dont la largeur à mi-hauteur est de 0.5 °. Ces deux phénomènes fixent une limite physique intrinsèque à la résolution à laquelle la distribution spatiale du radiotraceur est déterminée.

En général, les scanners TEP ont une forme cylindrique et sont composés de plusieurs couronnes de blocs de détecteurs (figure 2). Ainsi, les deux photons d'annihilation interagissent dans des détecteurs qui sont situés de part et d'autre de la LOR (figure 3.a (A)). Ces photons sont reconnus provenant de la même annihilation si la durée séparant la détection de chaque photon est comprise dans un intervalle de temps appelé fenêtre de coïncidence, qui est de l'ordre de quelques nanosecondes. Cette détection en coïnci-

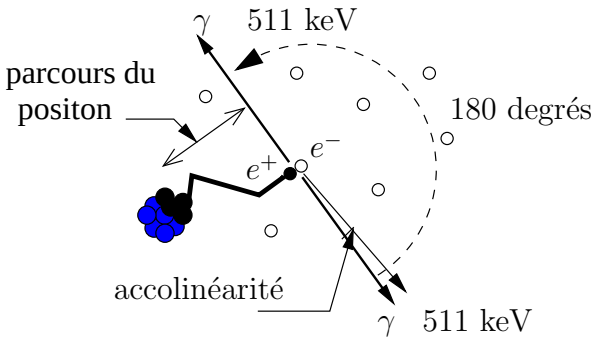


FIG. 1 – Annihilation du positon avec un électron provoquant l'émission de deux photons γ de 511 keV dans des directions opposées. Les points d'émission du positon et des photons d'annihilation ne sont pas confondus. Les directions d'émission des photons d'annihilation ne sont pas toujours parfaitement colinéaires. Ces deux phénomènes fixent une limite intrinsèque à la résolution de la localisation du radiotraceur.

dence constitue une collimation électronique. Cependant, certains cas de figure mettent en défaut ce type de détection, par exemple, lorsqu'un des photons a subi une diffusion Compton avant d'être détecté (figure 3.a (B)). Ce type d'interaction rayonnement-matière, que l'on détaillera au chapitre 4, a pour conséquence de dévier la trajectoire du photon et de diminuer son énergie (collision avec un électron du milieu). Ce type d'événement mène donc à l'enregistrement d'une fausse LOR. Un autre type d'événement, appelé coïncidence aléatoire, entraîne également un biais dans les mesures. Il a lieu lorsque deux photons provenant de deux annihilations différentes sont détectés dans la fenêtre de coïncidence (figure 3.a (C)). Une solution qui existe sur les premiers scanners TEP pour limiter l'enregistrement de tels événements menant à une localisation erronée du radiotraceur, est la présence de couronnes de plomb ou de tungstène qui ne laissent passer que les photons émis dans le plan de la couronne où ils sont détectés (figure 3.b). Cette technique se réfère au mode d'acquisition 2D du scanner TEP auquel est consacrée l'étude de l'échantillonnage des données de cette thèse (chapitre 3).

Un autre phénomène physique qui perturbe la détection en TEP est l'atténuation des

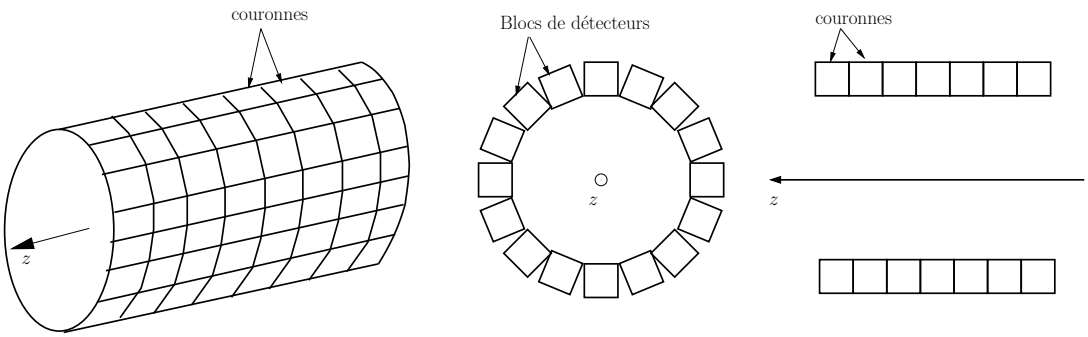
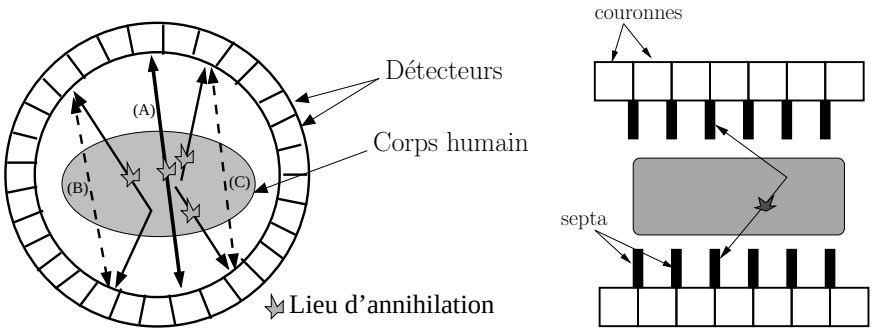


FIG. 2 – Représentation schématique d'un scanner TEP cylindrique. De gauche à droite : vue en perspective, coupe transversale, coupe longitudinale (ou axiale).



(a) (b)

FIG. 3 – (a) Différents événements amenant à l'enregistrement d'une paire de photons coïncidents : vrai coïncidence (A), enregistrement erroné de LORs dû à la diffusion Compton d'un des photons de la paire (B), coïncidence fortuite entre deux photons détectés dans la fenêtre de coïncidence mais provenant de deux annihilations différentes (C). (b) Événement diffusé dans le plan axial : les septa interceptent les photons dont l'émission n'a pas eu lieu dans le plan de la couronne.

photons γ. Lorsqu'un photon traverse de la matière, il interagit avec les constituants de celle-là, principalement avec les électrons (comme dans le cas de la diffusion Compton) et par conséquent perd son énergie au fur et à mesure des interactions, jusqu'à éventuellement déposer totalement son énergie dans le milieu. On parle alors d'absorption ou d'atténuation. Ainsi, si on veut quantifier précisément la distribution de radiotraceur dans les organes, il faut corriger l'atténuation qui sous-estime la densité de radiotraceur. Un modèle empirique, semblable à la loi de Beer-Lambert pour l'absortion de la lumière, décrit ce phénomène. Soit I_0 un faisceau de photons incidents et I le faisceau transmis après la traversée de la matière, nous avons alors la relation :

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu d} \tag{1}$$

où μ est le coefficient d'atténuation linéaire de la matière traversée d'épaisseur d, qui est ici supposée homogène. Dans le cas où la matière traversée est hétérogène, le corps humain par exemple, cette loi devient :

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\int_L \mu(x)dx} \quad \text{ou} \quad \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \int_L \mu(x)dx \tag{2}$$

où L désigne la ligne suivant laquelle le faisceau traverse la matière.
L'examen de radiologie qui utilise les rayons X, ou tomodensitométrie (TDM), est basé sur le phénomène d'atténuation. En effet, observer l'anatomie interne d'un individu revient à reconstruire la carte d'atténuation $\mu(x)$ du corps de la personne. Le contraste perçu comme une différence de niveau de gris sur une image numérique, résulte de la variation du coefficient d'atténuation entre les différentes structures irradiées par les rayons X. La TDM étant la première modalité d'imagerie assistée par ordinateur à être apparue dans le domaine médical, la tomographie a donc été introduite dans le domaine médical avec l'objectif de « voir l'intérieur du corps humain », c'est à dire, reconstruire la carte

d'atténuation $\mu(x)$.
Enfin, il est à noter qu'une autre modalité est également très utilisée en imagerie nucléaire, la tomographie par émission monophotonique (TEMP ou SPECT en anglais pour *Single-Photon Emission Computed Tomography*). Cette technique utilise également des radiotraceurs, mais de nature différente puisqu'ils émettent un seul photon γ par désintégration nucléaire. Les scanners TEMP sont constitués d'un ou de plusieurs détecteurs plans. Par ailleurs, un collimateur, en général une plaque épaisse de plomb, est monté devant le détecteur. Il est perforé de plusieurs trous laissant passer uniquement les photons γ ayant une direction d'émission spécifique. Les photons ayant une direction différente de celle de l'orientation des trous du collimateur sont arrêtés. Cette collimation permet ainsi d'avoir une information sur la ligne parcourue par le photon avant d'interagir dans le détecteur.

Le principe de la tomographie et la problématique de l'échantillonnage

Considérons de nouveau le cas d'un examen en TDM. En plaçant des détecteurs de manière opposée à la source de rayons X, l'intensité I du faisceau ayant traversé le corps du patient est ainsi mesurée. La même opération est répétée à plusieurs positions de l'ensemble source-détecteurs selon une trajectoire circulaire autour du patient. D'après la relation (2), les mesures obtenues correspondent à des intégrales linéaires de la fonction μ pour différentes positions de la source et des détecteurs autour du patient. Ces mesures représentent la transformée en rayons X de μ ou projections de μ dans l'espace à deux dimensions constitué par le plan d'irradiation. On exprimera la transformée en rayons X formellement au chapitre 1. La reconstruction tomographique vise à déterminer μ à partir de sa transformée en rayons X, ou autrement dit à inverser la transformée en rayons X de μ. C'est donc un problème inverse. En TEP, le problème se pose de manière similaire mais l'objet à reconstruire est de nature différente. L'objet ou la fonction qu'on appellera f que l'on souhaite déterminer lors d'un examen TEP, est la distribution volumique du radiotraceur injecté dans le corps du patient. Les mesures que l'on possède sont les LORs. En absence d'effets perturbateurs tels que la diffusion ou l'atténuation, le nombre d'événements enregistrés pendant un temps donné est proportionnel à l'intégrale de la concentration de radiotraceur le long des LORs. Par conséquent, les mesures obtenues en TEP correspondent à la transformée en rayons X de f. La reconstruction d'image en TEP consiste également à inverser cette transformée en rayons X. Les mêmes outils mathématiques sont ainsi utilisés quelle que soit la nature de la fonction à reconstruire (la reconstruction tomographique s'applique par ailleurs à d'autres domaines tel que la géophysique).
Dans la suite nous allons prendre f comme une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, selon qu'on considère la reconstruction d'un volume comme l'empilement de coupes parallèles du volume reconstruites de manière indépendante, ou qu'on considère le volume 3D dans son ensemble. La résolution avec laquelle on peut reconstruire f peut se

comprendre en introduisant sa transformée de Fourier, notée $\hat{f}$:

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i<x,\xi>} dx \tag{3}$$

où $<,>$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou 3. f a un support compact car elle représente la distribution de radiotraceur dans un volume fini (le corps du patient). Nous ferons l'approximation que la transformée de Fourier de f, noté $\hat{f}$ a un support essentiel compact limité par Ω, c'est à dire, $\hat{f}(\xi) \sim 0$, pour $|\xi| > \Omega$. Le plus petit détail de f est donc de dimension $2\pi/\Omega$. Les systèmes d'imagerie et les algorithmes de reconstruction d'image sont conçus dans l'optique d'atteindre cette résolution à partir d'un nombre fini de mesures. La théorie de l'échantillonnage intervient à ce niveau : combien et quelles mesures sont nécessaires pour atteindre la résolution de $2\pi/\Omega$ sur l'image reconstruite ? En TDM, l'enjeu de cette interrogation est évident puisque les positions de la source et des détecteurs étant parfaitement contrôlables, effectuer uniquement les mesures suffisantes dictées par la théorie de l'échantillonnage permet de moins irradier le patient. Cependant en TEP, il paraît moins facile de diminuer la dose délivrée au patient en jouant sur l'acquisition des données à cause du caractère aléatoire de l'émission photonique. En revanche, l'optimisation de l'acquisition des données a un impact sur le temps de calcul de la reconstruction d'images. En effet, la quantité importante de LORs enregistrées lors d'un examen TEP a pour conséquence de ralentir les algorithmes de reconstruction d'images, ce qui constitue un frein à l'efficacité et à la rentabilité de cette technique. Plusieurs solutions ont été mises en oeuvre pour remédier à ce problème, allant de l'amélioration du logiciel (algorithmes de reconstruction d'images) au matériel (architectures d'ordinateurs dédiées). Agissant en amont, **la théorie de l'échantillonnage indique quelle géométrie de scanners est préférable pour acquérir une quantité de LORs minimale permettant de reconstruire à la résolution** $2\pi/\Omega$. Cependant, en pratique, la conception des scanners reste largement empirique, basée sur des contraintes techniques des détecteurs et de l'utilisation d'algorithmes de reconstruction préétablis. La théorie de l'échantillonnage indique alors comment il est possible d'organiser et de compresser les données pour que le temps de reconstruction diminue, sans dégrader significativement la résolution de l'image. Nous verrons au chapitre 2 que cette pratique est déjà mise en oeuvre, mais sans cadre théorique précis.

La démarche de simulation numérique

La simulation numérique consiste à utiliser un programme informatique dans le but de reproduire virtuellement des phénomènes réels et d'en prédire l'évolution. Ce programme est basé sur un modèle mathématique et physique des phénomènes étudiés. La simulation numérique est devenu un outil indispensable dans tous les domaines scientifiques. Elle permet en effet de comprendre un phénomène physique, en maîtrisant les différents paramètres impliqués, ou de vérifier la pertinence d'une théorie en s'épargnant la mise en place d'expériences lourdes et coûteuses. Dans le cadre de cette thèse, deux types de simulations ont été réalisés : des simulations numériques purement géométriques et

des simulations Monte Carlo. Les premières ont été utilisées dans le but de générer des données selon différents modèles d'échantillonnage (chapitre 4). Ne considérant que les aspects géométriques, elles n'intègrent pas la réalité physique de la tomographie d'émission. Cependant, cette modélisation simplifiée permet de vérifier les aspects théoriques de l'échantillonnage sur des données exemptes de bruit et non biaisées (pas d'atténuation ni de diffusion). Au contraire, la méthode Monte Carlo est quant à elle plus adaptée à l'imagerie nucléaire. Cette méthode, basée sur l'utilisation de séquences de nombres aléatoires, permet de modéliser le caractère stochastique de la désintégration radioactive, du transport des photons dans la matière et de leur détection.
Des simulations Monte Carlo ont été utilisées pour la modélisation d'un prototype de détecteur TEP en phase de développement (chapitre 6). Les résultats simulés ont été confrontés aux résultats expérimentaux. Les simulations ont donc nécessité la prise en compte des phénomènes physiques ainsi que de tous les constituants de l'expérience. La démarche consistant à comparer la simulation et l'expérience permet d'apporter des informations supplémentaires, issues de la simulation, à l'analyse des résultats expérimentaux, et inversement, d'améliorer le modèle. Par ailleurs, dans le cas étudié, la simulation Monte Carlo a permis de prévoir les performances optimales du scanner TEP complet.

Le compromis résolution-sensibilité

La résolution spatiale qu'il est possible d'obtenir sur une image reconstruite en imagerie nucléaire est souvent le fruit d'un compromis avec la sensibilité du système utilisé. La désintégration radioactive étant un processus aléatoire, les images reconstruites contiennent par conséquent un bruit statistique poissonien important. La qualité de l'image est donc conditionnée, non seulement par la résolution avec laquelle on voit les détails de l'image, mais également par le rapport signal sur bruit de l'image. Un rapport signal sur bruit élevé exige le comptage d'un grand nombre d'événements, c'est à dire un système à haute sensibilité (pour une activité radioactive du traceur donnée). La sensibilité absolue d'un scanner TEP est définie par le rapport du nombre de photons enregistrés sur le nombre de désintégrations. Les scanners de haute résolution utilisant des détecteurs de petites dimensions possèdent ainsi une faible sensibilité par élément de détection. Par conséquent, la variance (ou le bruit) de l'image reconstruite est élevée. Ce bruit est traité dans les différents algorithmes de reconstruction (chapitre 2). Inversement, l'utilisation de détecteurs de plus grandes dimensions augmente leur sensibilité, diminuant ainsi le bruit dans l'image, mais dégradant la résolution atteignable par le scanner. De plus, un système à haute sensibilité en TEP augmente le biais dans l'image reconstruite à cause des coïncidences diffusées et aléatoires.

Organisation de la thèse et contributions

La première partie de cette thèse a consisté à étudier théoriquement le système d'échantillonnage mis en oeuvre dans l'acquisition des données en TEP. Pour cela, une étude préalable de l'échantillonnage de la transformée en rayons X, en deux et trois dimensions, dans diverses géométries d'acquisition de données en TDM a été menée. Cet état de l'art est proposé dans le premier chapitre de ce document. Nos efforts ont ensuite porté sur l'étude de l'acquisition des données qui est en pratique effectué sur les scanners TEP. Ces données peuvent être par ailleurs traitées et réorganisées afin de les rendre compatibles aux algorithmes de reconstruction d'images utilisés. Le chapitre 2 est consacré à l'état de l'art de ces traitements ainsi que des différents algorithmes de reconstruction d'images. Notre contribution dans cette première partie est la proposition d'un nouvel échantillonnage qui peut être mis en oeuvre en mode 2D de la TEP, détaillée au chapitre 3. Cette contribution s'appuie sur une paramétrisation naturelle de la transformée en rayons X en TEP. Afin de justifier nos résultats théoriques, nous avons mis en place des simulations numériques géométriques et Monte Carlo qui sont exposées au chapitre 4.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés au développement d'un scanner TEP fonctionnant au xénon liquide (TEP LXe) dédié à l'imagerie du petit animal. La géométrie de ce scanner est originale et assez facilement modulable, permettant l'application de schémas d'acquisition de données optimaux. Un module prototype de ce scanner a été développé au Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC) de Grenoble. Après un bref état de l'art des principaux types de détecteurs utilisés en TEP (chapitre 5), nous présentons au chapitre 6, une chaîne de simulations Monte Carlo qui a été développée pour prédire les performances de ce prototype en terme de résolution spatiale. Les contributions principales de cette partie résident dans les modifications apportées aux programmes de simulations Monte Carlo existants afin de modéliser le détecteur et les conditions expérimentales du banc de test mis en place. Par ailleurs, des programmes de traitements de données ont été développés dans le but d'évaluer les performances du TEP LXe sur des images reconstruites à partir des simulations d'acquisitions de données.

Première partie

Échantillonnage des données en Tomographie d'Émission de Positons

Introduction

Nous introduisons dans cette première partie les notions importantes de la théorie de l'échantillonnage. Dans le chapitre 1, nous allons aborder l'échantillonnage de la transformée en rayons X d'une fonction f, notée Xf, dans plusieurs types de géométrie en deux et trois dimensions. Lors de cet état de l'art, nous énoncerons le théorème essentiel de l'échantillonnage qui sera appliqué dans toute cette première partie. Les géométries d'échantillonnage de Xf seront principalement empruntées au cas particulier de la tomodensitométrie.
Le chapitre 2 visitera l'état de l'art de l'acquisition des données, du traitement jusqu'à la reconstruction d'images en tomographie d'émission de positons (TEP). Nous exposerons les différents modes d'acquisition des données en TEP ainsi que le format sous lequel les données sont traitées et stockées. Nous présenterons également les différents algorithmes de reconstruction, en particulier ceux qui ont été utilisés au cours de cette thèse.
Les chapitres 3 et 4 traitent des contributions apportées durant cette thèse au sujet de l'échantillonnage des données en TEP. Le chapitre 3 présentera les contributions théoriques qui seront vérifiées par des simulations numériques au chapitre 4.

Chapitre 1

Théorie de l'échantillonnage appliquée à la tomographie

1.1 L'échantillonnage en tomographie à deux dimensions

1.1.1 La géométrie du type faisceau parallèle

1.1.1.1 Introduction

La géométrie en faisceau parallèle est d'un point de vue historique la première stratégie d'acquisition de données en tomodensitométrie (TDM). En effet, une source associée à un unique détecteur était utilisée pour scanner une partie du corps du patient. Pour chaque coupe de la région d'intérêt, qui représente un espace deux dimensions (2D) dans le volume entier de trois dimensions (3D), un ensemble d'irradiations sous des angles différents, appelé projections, était réalisé indépendamment. Pour chaque projection, l'ensemble source-détecteur se translatait de manière rectiligne, avec un pas spatial donné, pour irradier l'ensemble de la coupe. De nos jours, d'autres techniques plus efficaces sont mises en oeuvre. Néanmoins, il est pratique de définir les notions mathématiques qui seront utilisées tout au long de ce chapitre dans ce cas simple, d'autant plus que dans certains cas de figure, il est possible de se ramener à cette géométrie en regroupant les lignes d'irradiations qui sont parallèles.

1.1.1.2 La transformée de Radon et en rayons X en deux dimensions

Soit f une fonction ayant pour support le disque unitaire de $\mathbb{R}^2$ et qui y est infiniment dérivable. Soit $\theta = (\cos\phi, \sin\phi)$ le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ d'angle polaire ϕ, et $\theta^\perp = (-\sin\phi, \cos\phi)$, le vecteur orthogonal à θ. La transformée en rayons X de f, notée Xf, est définie par :

$$Xf(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)dt \tag{1.1}$$

soit

$$Xf(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\cos\phi - t\sin\phi, s\sin\phi + t\cos\phi)dt \tag{1.2}$$

Xf représente l'intégrale de f suivant la droite de direction $\theta^\perp$ et de distance algébrique s à partir de l'origine (figure 1.1). Notre but est de reconstruire une approximation de f la plus précise à partir du plus petit nombre de mesures : c'est à ce niveau qu'intervient la théorie de l'échantillonnage. Avant d'introduire cette théorie, des outils de l'analyse de Fourier seront définis.

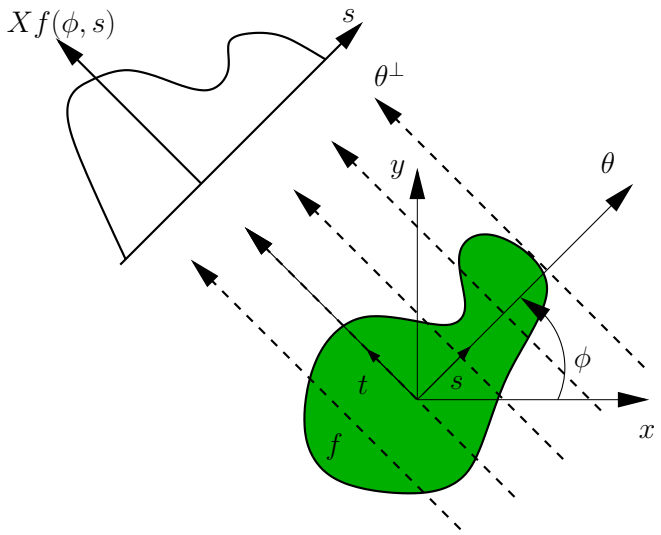


FIG. 1.1 – Paramétrisation de la transformée en rayons X de f, notée Xf.

1.1.1.3 L'analyse de Fourier

Xf est une fonction ayant pour domaine de définition $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Dans l'analyse de Fourier, le domaine de Xf doit avoir une structure de groupe : l'intervalle $[0, 2\pi)$ est alors complété par modulo 2π, on le nomme désormais le groupe $\mathbb{T}$. La transformée de Fourier 2D de Xf est définie par :

$$\begin{aligned} \widehat{Xf} &: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \widehat{Xf}(k, \sigma) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} Xf(\phi, s) e^{-i(k\phi + \sigma s)} ds d\phi \end{aligned} \tag{1.3}$$

La transformée de Fourier inverse d'une fonction g tel que :

$$\begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (k, \sigma) & \rightarrow & g(k, \sigma) \end{array} \tag{1.4}$$

avec $g \in L^1(\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g} & : & \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{g}(\phi, s) & = & (2\pi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} g(k, \sigma) e^{i(k\phi + \sigma s)} d\sigma \end{array} \tag{1.5}$$

Pour $\phi \in [0, 2\pi)$ fixé, on définit la fonction $X_\phi f$ de la seule variable s. La transformée de Fourier 1D de $X_\phi f$ s'exprime par :

$$\widehat{X_\phi f}(\sigma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} X_\phi f(s) e^{-i\sigma s} ds \tag{1.6}$$

On peut en déduire une relation très utile liant la transformée de Fourier de la projection de Xf à celle de f, appelée théorème de coupe-projection ou de la coupe centrale :

$$\widehat{X_\phi f}(\sigma) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\sigma\theta) \tag{1.7}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X_\phi f}(\sigma) & = & (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} X_\phi f(s) e^{-i\sigma s} ds \\ & = & (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp) e^{-i\sigma s} dt ds \\ & = & (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i<x, \sigma\theta>} dx \\ & = & (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\sigma\theta) \end{array}$$

□

On a successivement utilisé la définition de $\widehat{X_\phi f}(\sigma)$, la définition de Xf, réalisé le changement de variable $x = s\theta + t\theta^\perp$, et on a ensuite reconnu la transformée de Fourier de f, $<,>$ représentant le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ (équation 3 de l'introduction). Ce théorème affirme que les valeurs de la transformée de Fourier 1D de la projection de f suivant l'angle ϕ se retrouvent sur la coupe centrale de la transformée de Fourier 2D de f orientée du même angle (figure 1.2).

1.1.1.4 L'échantillonnage sur l'espace $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$

Dans la géométrie d'échantillonnage en faisceau parallèle, un ensemble P d'angles $\{\phi_j, j = 0, ..., P-1, P > 0\}$ est sélectionné et pour chaque angle ϕ_j, des droites

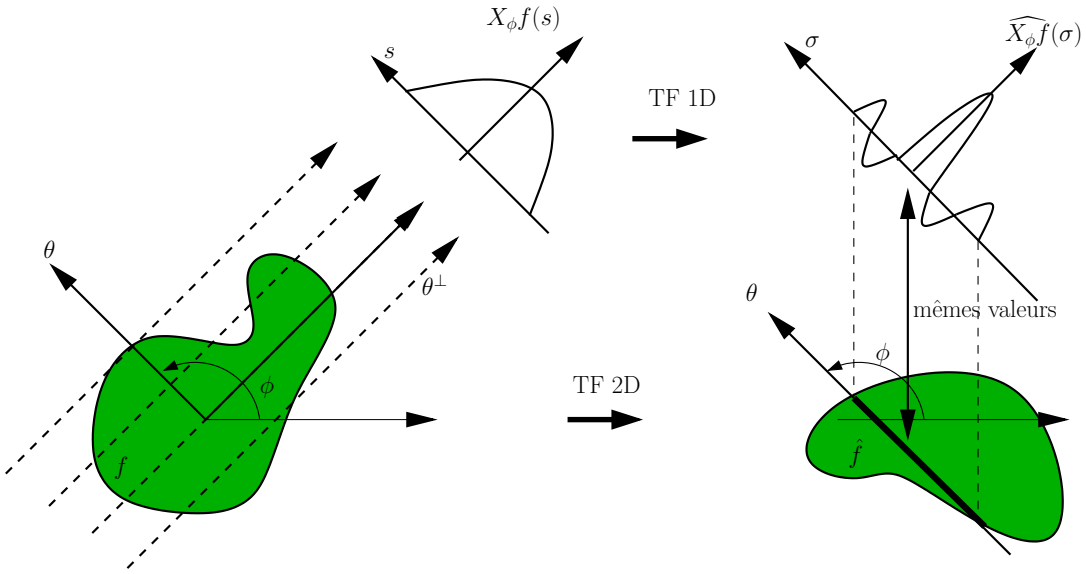


FIG. 1.2 – Illustration du théorème de la coupe central : La transformée de Fourier 1D de la projection $X_\phi f(s)$ est égale à la coupe centrale de la transformée de Fourier 2D de f d'angle ϕ.

$Xf(\phi_j, s_{jl}), l \in \mathbb{Z}$ sont mesurées. L'ensemble des points $\{\phi_j, s_{jl})$ où Xf est mesurée doit former un sous-groupe de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, ce dernier étant son ensemble de définition. Par ailleurs, il faut qu'il y ait plus d'une droite mesurée pour chaque angle. Un ensemble qui satisfait ces différents critères est appelé un réseau d'échantillonnage admissible. Il peut être défini de la façon suivante [Faridani 04] :

$$\begin{aligned} L &= L(d, N, P) \quad d > 0, \quad \text{N, P entiers tels que } 0 \leq N \leq P \\ &= \left\{ (\phi_j, s_{jl}) : \phi_j = \frac{2\pi j}{P}, s_{jl} = d\left(l + j\frac{N}{P}\right), j = 0, ..., P-1, l \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Une autre façon de définir L est d'introduire la matrice $\mathbf{W}$ de taille 2×2, non singulière tel qu'on ait $(2\pi, 0)^t \in \mathbf{W}\mathbb{Z}^2$ où $\mathbf{W}\mathbb{Z}^2 = \{\mathbf{W}(k, l)^t\}$, t signifiant la transposée d'un vecteur ou d'une matrice. Le sous-groupe L est alors obtenu par :

$$L = (\mathbf{W}\mathbb{Z}^2) \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R}) \tag{1.9}$$

Le réseau d'échantillonnage L est dit généré par la matrice $\mathbf{W}$. La matrice $\mathbf{W}$ peut être exprimée en fonction des entiers d, N, P par :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2\pi/P & 0 \\ Nd/P & d \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Les projections sont séparées d'un pas angulaire $\Delta\phi = 2\pi/P$ sur le disque unitaire. Pour chaque projection, les intégrales de f selon des droites sont séparées d'une distance $\Delta s = d$. Cet ensemble de droites est translaté de dN/P quand on passe de la projection ϕ_j à ϕ_{j+1}. Il existe différents types de réseaux. Les deux réseaux qui possèdent des propriétés

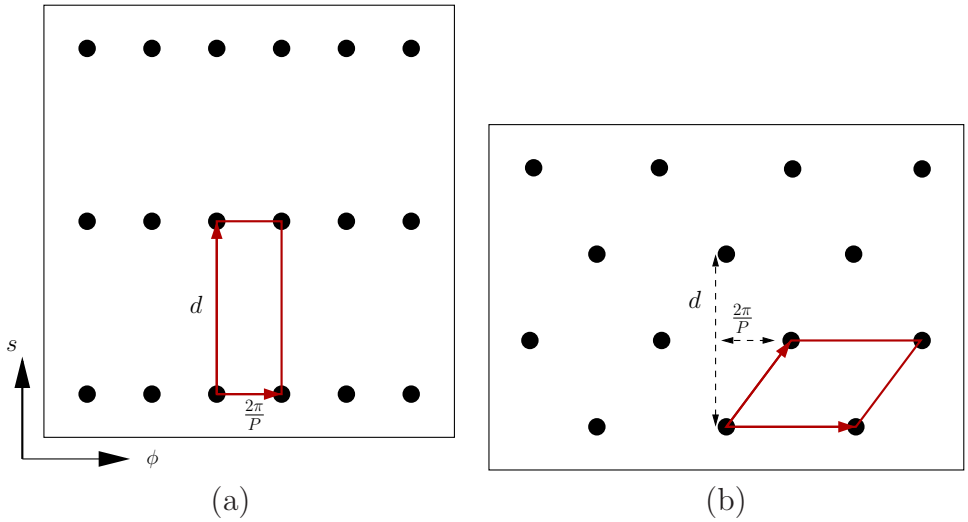
intéressantes sont le réseau standard et le réseau entrelacé. Le réseau standard, noté L_s, est obtenu pour $N = 0$ (figure 1.3.(a)) :

$$L_S = \left\{ (\phi_j, s_{jl}) : \phi_j = \frac{2\pi j}{P}, s_{jl} = dl, j = 0, ..., P-1, l \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.11}$$

On remarque que dans ce cas, les droites s_{jl} gardent la même distance par rapport à l'origine quelque soit l'angle ϕ_j. Le réseau entrelacé, noté L_I, est obtenu pour $N = P/2$ avec P qui est pris pair (figure 1.3.(b)) :

$$L_I = \left\{ (\phi_j, s_{jl}) : \phi_j = \frac{2\pi j}{P}, s_{jl} = d(l + \frac{j}{2}), j = 0, ..., P-1, l \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.12}$$

Dans ce cas, les droites de distances s_{jl} par rapport à l'origine sont translatées de $d/2$ quand on passe d'une projection à une autre (mais la distance entre deux droites parallèles reste toujours d).



(a) (b)

FIG. 1.3 – Représentation des réseaux standard (a) et entrelacé (b) ainsi que leur maille respective, définie comme le motif élémentaire qui est répété pour former le réseau entier.

Les réseaux standards et entrelacés sont les seuls à pouvoir exploiter la relation de symétrie de Xf :

$$Xf(\phi, s) = Xf(\phi + \pi, -s) \tag{1.13}$$

Cette relation permet de réduire les mesures des projections sur l'intervalle $[0, \pi)$. Pour pouvoir faire cela en pratique, P doit être pris comme un nombre pair dans le cas du réseau standard et multiple de 4 si on veut appliquer le réseau entrelacé d'échantillonnage. Une justification de cette condition est donnée dans [Faridani 00]. Il est également utile d'introduire la notion de réseau dual noté $L^\perp$, qui est la représentation de L dans l'espace de Fourier, défini par $L^\perp = 2\pi \mathbf{W}^{-\mathbf{t}} \mathbb{Z}^2$, avec :

$$\mathbf{W}^{-\mathbf{t}} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} P & -N \\ 0 & 2\pi/d \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Remarquons que si L est un réseau dense, $L^{\perp}$ sera éparse et réciproquement. Cette caractéristique peut être évaluée en calculant le déterminant de la matrice $\mathbf{W}$ et $\mathbf{W^{-t}}$, inverse l'une de l'autre. En effet, $|\det \mathbf{W}|$ représente l'aire de la maille du réseau, ce dernier étant défini comme le motif élémentaire qui est répété pour former le réseau en entier. Un réseau est donc d'autant plus éparse que $|\det \mathbf{W}|$ est grand ou que $|\det \mathbf{W^{-t}}|$ est petit.

1.1.1.5 La formule de la somme de Poisson et théorème classique de l'échantillonnage

Avant d'énoncer le théorème principal de l'échantillonnage, la formule de Poisson sommatoire sur laquelle il s'appuie sera rappelée pour les fonctions de $\mathbb{R}$ et ensuite de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$.

Théorème 1. *Soit $T > 0$, $h \in C(\mathbb{R})$ tel que h et $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, on a alors :*

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} T \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(x + kT) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{i\frac{2\pi k}{T}x} \tag{1.15}$$

En appliquant cette formule à la fonction h, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(x)e^{-ix\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} T \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + kT) e^{-i(x+kT)\xi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}\left(\xi + \frac{2\pi k}{T}\right) e^{i\frac{2\pi k}{T}x} \tag{1.16}$$

Théorème 2. *Soit $z \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $L(d, N, P)$ un réseau admissible et $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$, la formule de la somme de Poisson s'écrit alors :*

$$\frac{d}{P} \sum_{y \in L} g(z + y) e^{-i<z+y,\zeta>} = \sum_{\eta \in L^{\perp}} \hat{g}(\zeta + \eta) e^{i<z,\eta>} \tag{1.17}$$

où $<,>$ définit le produit scalaire sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$

Cette égalité sert à démontrer le théorème de non recouvrement de Shannon[Petersen 62] :

Théorème 3. *Soit $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), L = L(d, N, P)$ un réseau admissible d'échantillonnage et K un compact de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ tel que les translatés $K + \eta, \eta \in L^{\perp}$ soient disjoints. Soit χ_K, la fonction caractéristique sur K, i.e. $\chi_K(\zeta) = 1$ si $\zeta \in K$ et $\chi_K(\zeta) = 0$ si $\zeta \notin K$. Pour $z \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ on définit :*

$$Sg(z) = \frac{d}{P} \sum_{y \in L} \tilde{\chi_K}(z - y) g(y) \tag{1.18}$$

alors

$$|g(z) - Sg(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/K} |\hat{g}(\zeta)| d\zeta \tag{1.19}$$

Une démonstration de ce théorème est proposée dans [Faridani 04]. Sg représente la fonction interpolée à partir des valeurs discrètes de g sur le réseau L. On remarque que si $\hat{g}$ s'annule en dehors de K, alors $g = Sg$. Dans notre cas, la fonction g est la transformée en rayons X d'une fonction f dont on possède un nombre fini de mesures. f étant de support compact (les dimensions de la personne placée dans un scanner sont finies), il est alors impossible que $\widehat{Xf}$ ait elle aussi un support compact dans le domaine fréquentiel. L'erreur d'approximation de g par Sg existe toujours et est appelée erreur d'*aliasing* dont une évaluation est donnée par (1.19). Ce théorème montre donc que g est essentiellement déterminée par ses valeurs sur le réseau L si sa transformée de Fourier prend des faibles valeurs en dehors de K. La pertinence du système d'échantillonnage que l'on veut mettre en place afin de mesurer Xf, dépend, comme le montre le théorème, de son support essentiel dans le domaine fréquentiel. En effet, il faut que les translatés de K suivant les points du réseaux $L^\perp$ ne se recouvrent pas. Cela implique que la maille de $L^\perp$ soit suffisamment grande ($|\det \mathbf{W^{-t}}|$ grand) ou la maille de L suffisamment petite ($|\det \mathbf{W}|$ petit). Cependant, un échantillonnage pertinent ne requiert que peu de données, ce qui signifie que L doit être le plus éparse possible ou $L^\perp$ le plus dense possible. Le schéma d'échantillonnage, c'est à dire le réseau L suivant lequel on réalise les mesures de Xf, qui est optimal, est celui qui établi le meilleur compromis entre ces deux conditions opposées qui s'appliquent à L. Un tel schéma d'échantillonnage sera appelé par la suite un schéma efficace.

1.1.1.6 Le support essentiel de $\widehat{Xf}$

On suppose tout au long de ce chapitre que la fonction f à reconstruire est à bande limitée Ω, c'est à dire que pour $|\xi| > \Omega$, $|\hat{f}(\xi)|$ est négligeable. Dans notre cas où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, le support essentiel de $\hat{f}$ est un disque de rayon Ω (figure 1.4.(a)). Calculons la transformée de Fourier 2D de Xf :

$$\begin{aligned}
\widehat{Xf}(k,\sigma) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} Xf(\phi,s) e^{-i(k\phi+\sigma s)} ds d\phi && (1.20)\\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \widehat{X_\phi f}(\sigma) e^{-ik\phi} d\phi && (1.21)\\
&= \int_0^{2\pi} \hat{f}(\sigma\theta) e^{-ik\phi} d\phi && (1.22)\\
&= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_0^{2\pi} e^{-i<x,\sigma\theta>-ik\phi} d\phi dx && (1.23)
\end{aligned}$$

Posons : $x = |x|(\cos\psi, \sin\psi)$, les coordonnées polaires de x. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{Xf}(k,\sigma) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_0^{2\pi} e^{-i\sigma|x|\cos(\phi-\psi)-ik\phi} d\phi dx && (1.24)\\
&= i^k \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ik\psi} J_k(-\sigma|x|)\, dx && (1.25)
\end{aligned}$$

avec $J_k(t) = i^{-k}(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} e^{it\cos\phi - ik\phi}d\phi$, fonctions de Bessel de première espèce. D'après les propriétés de J_k, on peut montrer que $|\widehat{Xf}|$ décroît exponentiellement lorsque $|k| > |\sigma|$. Par ailleurs, comme f a une largeur de bande Ω, l'équation (1.22) implique que $\widehat{Xf}$ est négligeable pour $|\sigma| > \Omega$. Une démonstration détaillée se trouve dans [Natterer 86]. Nous obtenons ainsi l'expression analytique du support essentiel de $\widehat{X_f}$, noté K_P, ainsi que sa représentation géométrique proposée pour la première fois dans [Rattey 81] (figure 1.4.(b)) (Le paramètre ϑ introduit dans [Natterer 86] est ici pris égal à 1) :

$$K_p = \{(k,\sigma) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R} : |\sigma| < \Omega, |k| < |\sigma|\} \tag{1.26}$$

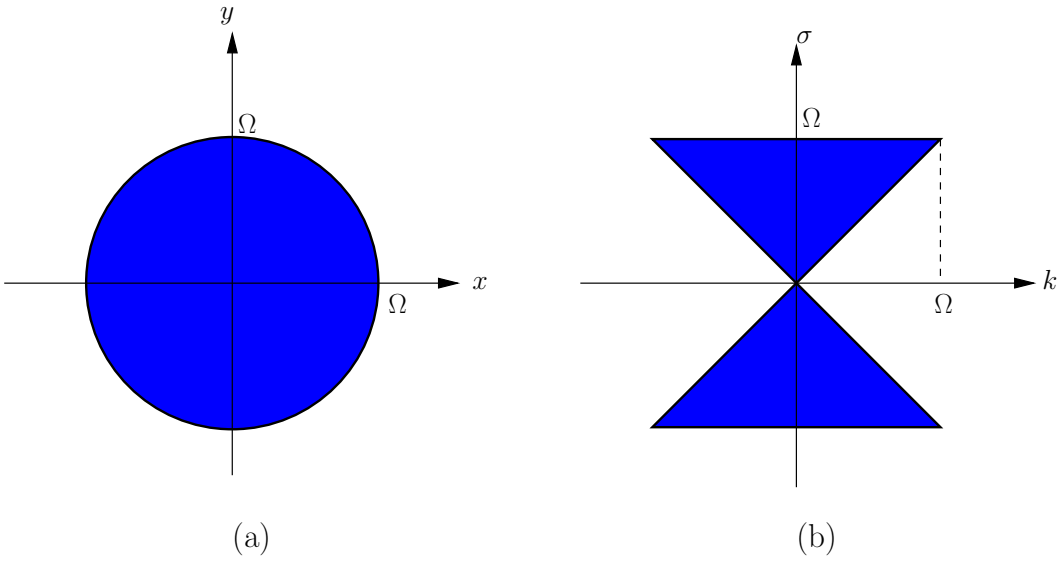


FIG. 1.4 – Représentation des supports essentiels de $|\hat{f}|$ (a) et de $|\widehat{Xf}|$ noté K_p (b).

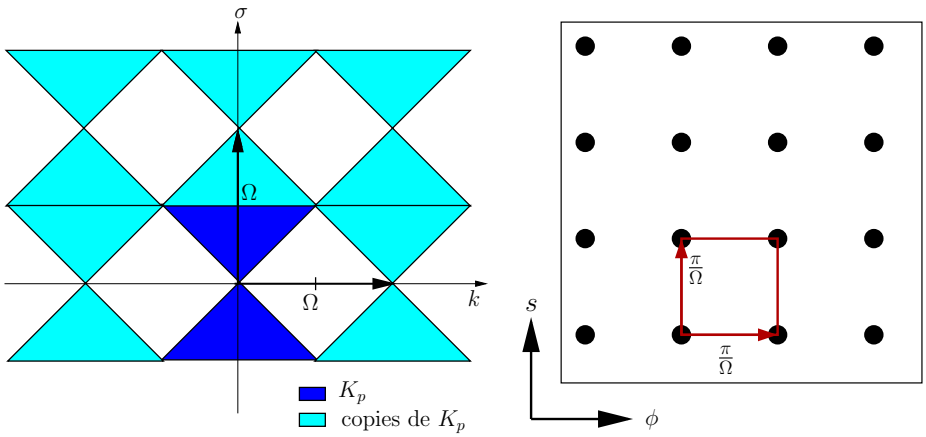
1.1.1.7 Les schémas d'échantillonnage

La figure 1.5.(a) montre comment l'espace de Fourier est occupé de manière optimale en respectant le théorème de non recouvrement de Shannon, dans le cas où le schéma d'échantillonnage est réalisé sur un réseau standard ou rectangulaire. Le réseau standard L_S est généré par la matrice diagonale $\mathbf{W_S}$ suivante :

$$2\pi\mathbf{W_S^{-t}} = \begin{pmatrix} 2\Omega & 0 \\ 0 & 2\Omega \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_S} = \tfrac{\pi}{\Omega}\mathbf{I_2} \tag{1.27}$$

où $\mathbf{I_2}$ est la matrice identité. Prenons P pair pour pouvoir exploiter la relation de symétrie de Xf (équation 1.13). On a donc $P = 2p$, p entier. Le réseau d'échantillonnage standard direct L_S peut s'écrire sous la forme suivante :

$$L_S = \mathbf{W_S}\mathbb{Z}^2 = \left\{(\phi_j, s_l) : \phi_j = j\frac{\pi}{\Omega}, s_l = l\frac{\pi}{\Omega}, j = 0,...,p-1, l \in \mathbb{Z}\right\} \tag{1.28}$$



(a) (b)

FIG. 1.5 – (a) Réseau d'échantillonnage standard dans le domaine de Fourier $L_S^{\perp}$: les conditions de non recouvrement sont satisfaites de manière optimale sur un réseau standard. (b) Représentation de L_S.

L_S qui est dans le cas général rectangulaire, est ici carré et est représenté à la figure 1.5.(b). Le théorème de non recouvrement de Shannon peut être appliqué si :

$$\Delta\phi \leq \frac{\pi}{\Omega} \quad \text{et} \quad \Delta s \leq \frac{\pi}{\Omega} \tag{1.29}$$

Elles imposent une valeur maximale de l'écart angulaire $\Delta\phi$ entre deux projections, ainsi qu'une distance maximale Δs entre les rayons. Un schéma efficace permettrait d'échantillonner avec un pas angulaire et radial plus important. Ceci est réalisé par le schéma d'échantillonnage entrelacé. La Figure 1.6 prouve que l'on peut paver de manière plus compacte l'espace de Fourier selon le réseau entrelacé généré par la matrice $\mathbf{W_I}$ (figure 1.6.(a)) :

$$2\pi\mathbf{W_I^{-t}} = \begin{pmatrix} \Omega & \Omega \\ 0 & 2\Omega \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_I} = \tfrac{\pi}{\Omega}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

Dans le cas du schéma entrelacé, nous prenons P multiple de 4 pour pouvoir exploiter la relation de symétrie. Le réseau d'échantillonnage entrelacé direct peut s'écrire sous la forme (figure 1.6.(b)) :

$$L_I = \mathbf{W_I}\mathbb{Z}^2 = \left\{(\phi_j, s_l) : \phi_j = j\frac{\pi}{\Omega}, s_l = l\frac{\pi}{\Omega}, j = 0, ..., p-1, l \in \mathbb{Z}, j + l \,\text{pair}\right\} \tag{1.31}$$

Les conditions de non recouvrement sont respectées si :

$$\Delta\phi \leq \frac{\pi}{\Omega} \quad \text{et} \quad \Delta s \leq \frac{2\pi}{\Omega} \tag{1.32}$$

Le pas radial Δs peut être doublé par rapport au cas standard. Le pas angulaire ne change pas. Cela signifie que la quantité de données nécessaires pour reconstruire f est jusqu'à deux fois moins importante avec le réseau entrelacé qu'avec le réseau standard. On aboutit au même résultat si on compare les déterminants des matrices :$|\det \mathbf{W_I}| = 2|\det \mathbf{W_S}|$. En conclusion, le réseau entrelacé est 2 fois plus efficace que le réseau standard pour l'échantillonnage de Xf.

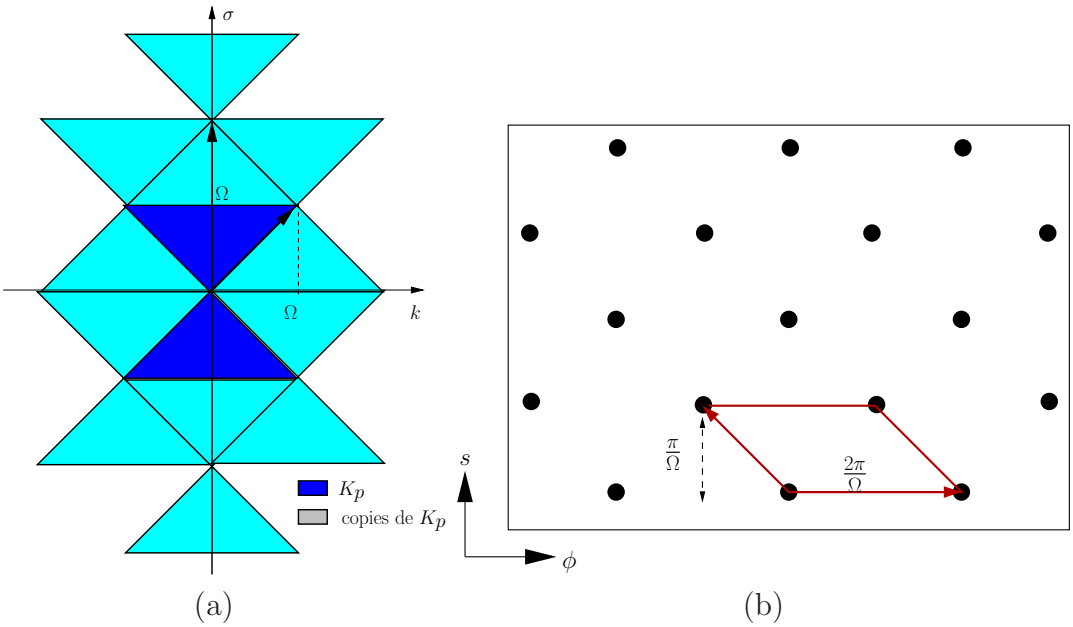


FIG. 1.6 – (a) Réseau d'échantillonnage entrelacé $L_I^{\perp}$: les conditions de non recouvrement sont satisfaites de manières optimale. b) Représentation de L_I.

1.1.2 La géométrie du type faisceau divergent

1.1.2.1 Introduction

La géométrie faisceau divergent a constitué une avancée dans la technologie de l'examen en scanner X. En effet, au lieu de faire un ensemble de translations radiales du couple source-détecteur pour chaque projection dans la géométrie parallèle, la source émet un faisceau ayant une forme d'éventail qui irradie d'un seul coup toute la coupe intéressée si le faisceau est suffisamment large. Une ligne de détecteurs, et non plus un seul détecteur, se situe à l'opposé pour capter les photons X. On obtient ainsi l'ensemble des projections en faisant uniquement des rotations de la source et des détecteurs (figure 1.7.(a)).

1.1.2.2 La transformée en faisceau divergent

Soit f une fonction ayant pour support le disque unitaire de $\mathbb{R}^2$ et qui y est infiniment dérivable. On note ρ le rayon du disque support de f, et r le rayon du scanner dans lequel est placé l'objet f. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $u \in S^1$, sphère unitaire de $\mathbb{R}^2$. On définit la transformée en faisceau divergent par :

$$D_x f(u) = \int_0^{+\infty} f(x + tu)dt \tag{1.33}$$

$D_x f$ représente l'intégrale de f suivant le rayon émanant de x avec la direction u. On paramètre $D_x f$ en définissant les angles suivants : soit β la coordonnée angulaire de la

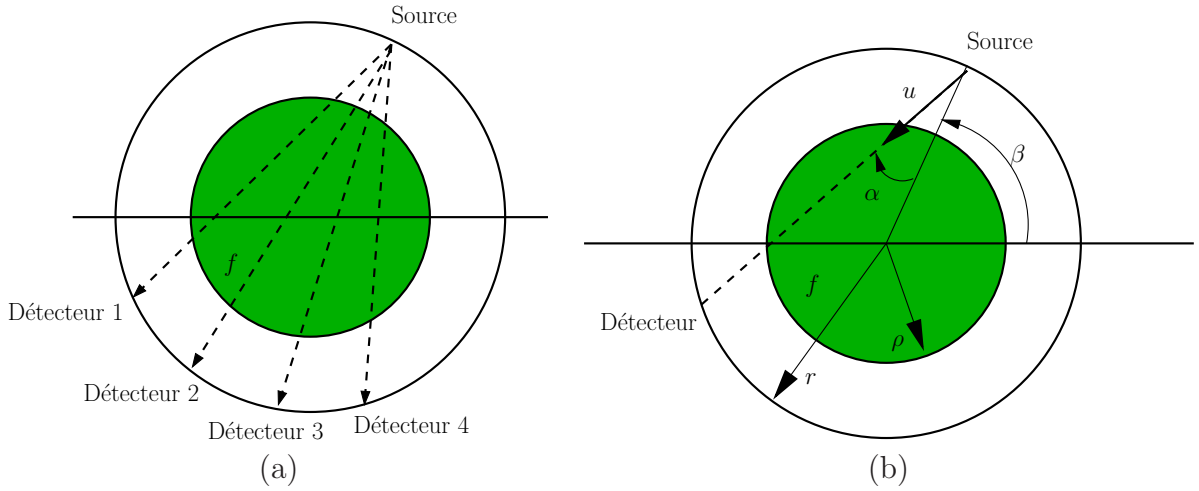


FIG. 1.7 – (a) Géométrie faisceau divergent. (b) Paramétrisation de la transformée en faisceau divergent

source x sur le scanner, et α l'angle que fait un rayon émanant de x dans la direction u et le rayon passant par le centre du scanner (figure 1.7.(b)). On paramètre alors u par $u = -(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$. Pour $\beta \in [0, 2\pi[$ et $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on peut écrire :

$$D_x f(u) = Df(\beta, \alpha) \quad \text{avec} \quad x = r(\cos\beta, \sin\beta) \tag{1.34}$$

On peut ainsi écrire la relation entre la transformée en rayons X et la transformée en faisceau divergent en prolongeant Df sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ selon la variable α :

$$Df(\beta, \alpha) = \begin{cases} Xf(\beta + \alpha - \frac{\pi}{2}, r\sin\alpha), & |\alpha| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\alpha| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{1.35}$$

En réalité, il existe $\alpha_{max} = \arcsin(\rho/r)$ tel que pour $|\alpha| \geq \alpha_{max}$, $Df = 0$. Cela vient du fait que f a pour support le disque de rayon ρ. Comme pour le cas parallèle, nous pouvons définir la structure des réseaux d'échantillonnage de Df. Dans une géométrie en faisceau divergent, la source se déplace sur P positions telles qu'on la repère par :

$$r(\cos\beta_j, \sin\beta_j), \quad \beta_j = j\Delta\beta, \quad \Delta\beta = \frac{2\pi}{P} \tag{1.36}$$

pour $j \in \{0, ..., P-1\}$. $\Delta\beta$ correspond à l'écart angulaire constant entre deux positions de la source. Par ailleurs, les angles α_{jl} des détecteurs s'écrivent :

$$\alpha_{jl} = l\Delta\alpha + \delta_j \tag{1.37}$$

où $\Delta\alpha = \alpha_{max}/Q$ pour $l \in \{0, ..., Q-1\}$, correspond à l'écart angulaire constant entre deux rayons du faisceau qui en contient Q, et δ_j qui correspond au décalage que peuvent avoir les détecteurs selon la position j de la source. Par ailleurs, la relation de symétrie que vérifie Df s'exprime par :

$$Df(\beta, \alpha) = Df(\beta + 2\alpha + \pi, -\alpha) \tag{1.38}$$

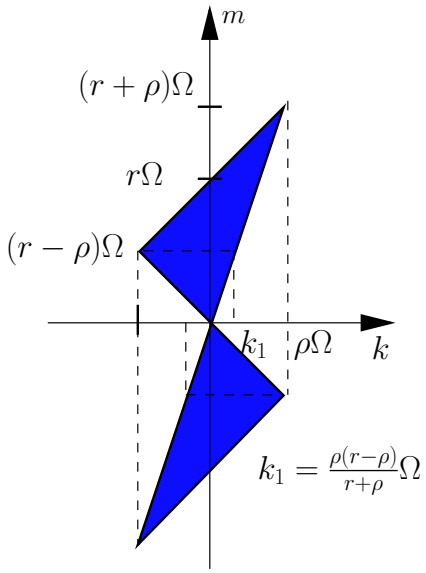


FIG. 1.8 – K_d : Support essentiel de $\widehat{Df}$

Comme dans le cas de la géométrie parallèle, nous allons rechercher les schémas d'échantillonnage et particulièrement ceux qui sont efficaces. Pour cela, nous appliquons les conditions de non recouvrement de Shannon aux fonctions définies sur le domaine $[0, 2\pi[\times[-\pi, \pi]$.

1.1.2.3 L'échantillonnage de Df

La transformée de Fourier de $Df(\beta, \alpha)$ s'exprime par :

$$\widehat{Df}(k, m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Df(\beta, \alpha) e^{-i(k\beta + m\alpha)} d\alpha d\beta \tag{1.39}$$

On suppose que $\hat{f}$ est essentiellement limitée par Ω. Le support essentiel de $\widehat{Df}$, noté K_d, déterminé dans [Natterer 93] s'exprime par :

$$K_d = \{(k, m) \in \mathbb{Z}^2 : |k - m| < r\Omega, |k| r < \rho |k - m|\} \tag{1.40}$$

La figure 1.8 donne une représentation géométrique de K_d. En appliquant les conditions de non recouvrement, on détermine le réseau d'échantillonnage standard dans l'espace de Fourier (figure 1.9.(a)) généré par la matrice $\mathbf{W_S^{-t}}$ suivante :

$$2\pi \mathbf{W_S^{-t}} = 2r\Omega \begin{pmatrix} \frac{\rho}{r+\rho} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_S} = \frac{\pi}{\rho\Omega} \begin{pmatrix} 1+\eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} ; \quad \eta = \frac{\rho}{r} \tag{1.41}$$

On peut alors écrire le réseau standard sous la forme :

$$L_S = \mathbf{W_S}\mathbb{Z}^2 = \left\{ (\beta_j, \alpha_l) : \beta_j = j\frac{\pi(1+\eta)}{\rho\Omega}, \alpha_l = l\frac{\pi\eta}{\rho\Omega}, j = 0, ..., P-1, l = 0, ..., Q-1 \right\} \tag{1.42}$$

Les conditions de non recouvrement des translatés de K_d imposent que le pas angulaire entre les positions de la source et que l'écart angulaire entre deux rayons du faisceau vérifient (figure 1.9.(b)) :

$$\Delta\beta \leq \frac{\pi(1+\eta)}{\rho\Omega} \quad \text{et} \quad \Delta\alpha \leq \frac{\pi\eta}{\rho\Omega} \tag{1.43}$$

Autrement dit, le schéma standard requiert un nombre minimal de positions de la source ainsi qu'un nombre minimal de rayons dans le faisceau. Cependant, ce réseau ne permet pas d'occuper l'espace de Fourier de manière optimale. On peut également translater K_d suivant un réseau de type entrelacé (figure 1.10.(a)) généré par la matrice $\mathbf{W_I^{-t}}$ suivante :

$$2\pi\mathbf{W_I^{-t}} = \Omega \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \rho - r & 2r \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_I} = \tfrac{\pi}{\rho\Omega} \begin{pmatrix} 2 & 1-\eta \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

En calculant les déterminants des deux matrices générant les réseaux standard et entrelacé, on aboutit à :

$$|\det \mathbf{W_I}| = \frac{2}{\eta+1} |\det \mathbf{W_S}| \tag{1.45}$$

Comme $\eta < 1$, le réseau entrelacé est plus efficace que le réseau standard. L'étude du schéma d'échantillonnage aboutit aux conditions suivantes :

$$\beta_j = j\Delta\beta \quad \text{et} \quad \alpha_{jl} = (j \, mod \, 2m)\gamma + l\Delta\alpha \tag{1.46}$$

avec $\Delta\beta$, m, $\Delta\alpha$ et γ qui dépendent de Ω et η. Pour une explication détaillée des conséquences géométriques des conditions d'échantillonnage du schéma entrelacé, nous recommandons [Natterer 93]. Ce schéma d'échantillonnage indique une acquisition des données en géométrie divergente avec un écart angulaire entre les positions de la source $\Delta\beta$ constant et entre les détecteurs, $\Delta\alpha$, constant également. Lorsque la source passe d'une position j à $j+1$, les détecteurs se translatent en se décalant de γ. Ils reviennent à leur position initiale après $2m$ translations. Nous constatons que pour cette étude, la relation de symétrie que vérifie Df n'est pas utilisée (relation 1.38). Des travaux récents ont permis de mettre à profit cette relation pour créer des schémas d'échantillonnage dédiés à des scanners de haute résolution [Izen 05].

1.2 L'échantillonnage en tomographie à trois dimensions

1.2.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent au cas de la tomographie en deux dimensions. Nous avons exposé les méthodes d'optimisation de l'acquisition des projections d'une coupe de l'objet f, ce qui revient à déterminer des schémas efficaces

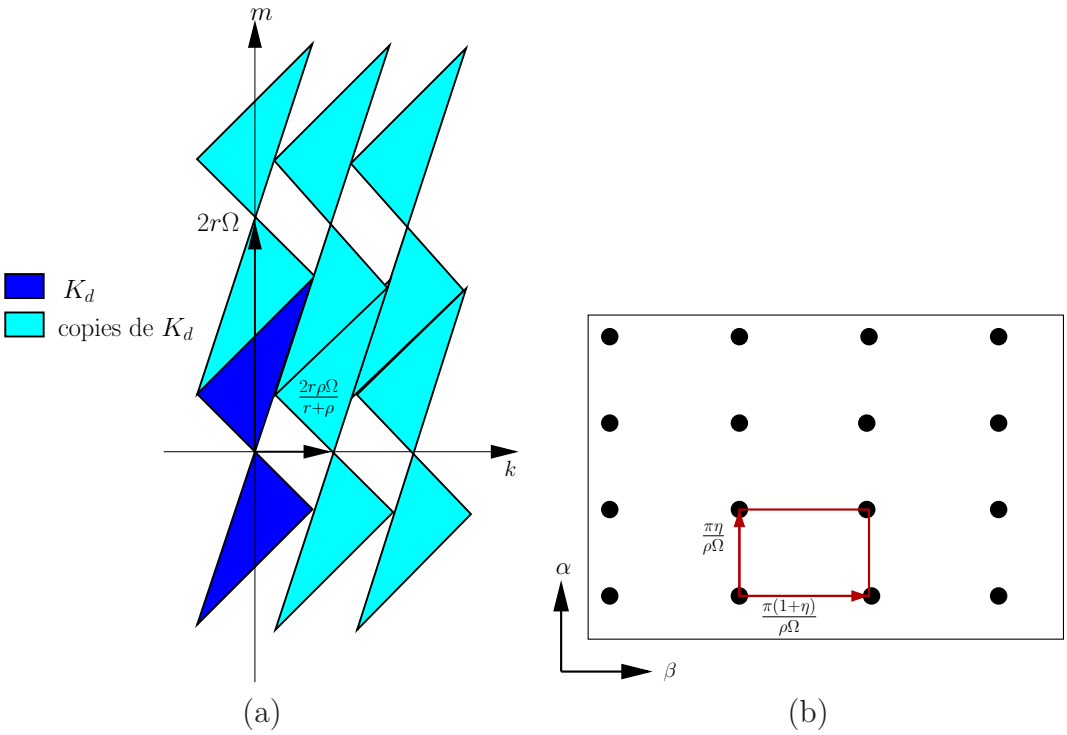


FIG. 1.9 – Réseau d'échantillonnage standard dans l'espace de Fourier (a) et L_S dans l'espace direct (b) en géométrie divergente.

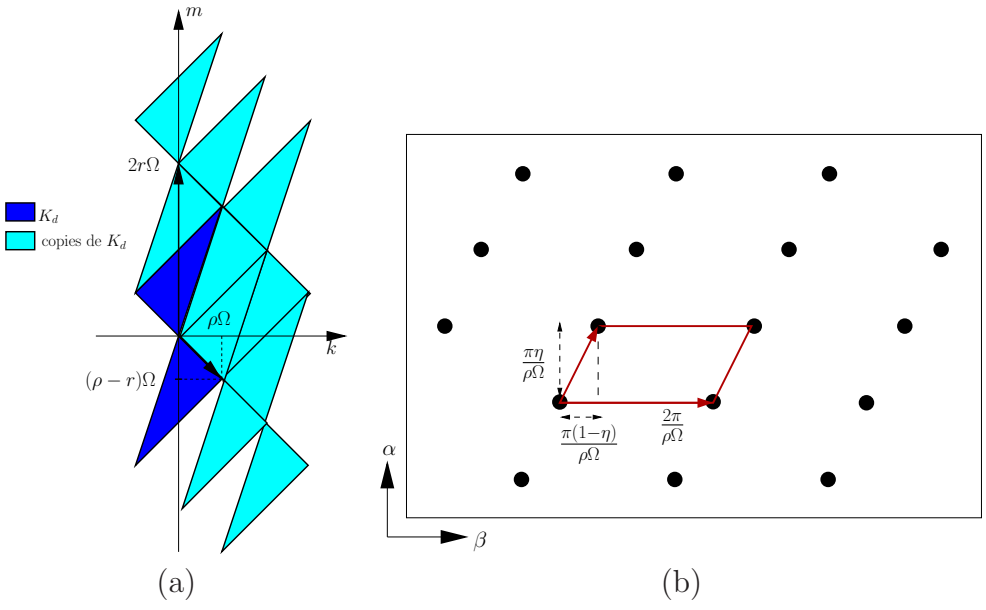


FIG. 1.10 – (a) Réseau d'échantillonnage entrelacé dans l'espace de Fourier. (b) Réseau d'échantillonnage entrelacé dans l'espace direct avec $\eta = 2/3$.

d'échantillonnage de Xf. Cependant, nous avons omis de considérer que f est dans la plupart des cas un objet volumique. Nous abordons donc ici la géométrie d'acquisition 3D à coupes parallèles. Cela signifie que l'acquisition des données se fait à travers des coupes transversales orthogonales à l'axe du scanner. Comme précédemment, nous commençons par étudier l'échantillonnage des données acquises dans le cas d'une géométrie de faisceau de type parallèle et ensuite du type divergent.

1.2.2 La géométrie du type faisceau parallèle 3D

1.2.2.1 Introduction

La géométrie d'acquisition en faisceau parallèle 3D correspond à la tomographie par émission monophotonique (TEMP ou SPECT) avec une collimation parallèle. Nous allons ainsi définir la transformée en rayons X 3D parallèle (3DPBXRT pour l'anglais *3D Parallel Beam X-Ray Transform*).

1.2.2.2 La transformée en rayons X 3D parallèle

Soit f, une fonction dont le support est un cylindre de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$ et qu'on suppose indéfiniment dérivable. Par ailleurs, on considère qu'elle est essentiellement limitée en fréquence par Ω. Sa transformée en rayons X 3D parallèle (figure 1.11) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_{3D}f &: [0,2\pi]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ X_{3D}f(\phi,s,z) &= \int_{\mathbb{R}} f(s\theta+t\theta^{\perp}+ze_3)dt \end{aligned} \tag{1.47}$$

avec $\theta=(\cos\phi,\sin\phi)$ désigne la direction de la projection et $\theta^{\perp}=(-\sin\phi,\cos\phi)$. La transformée de Fourier de $X_{3D}f$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{X_{3D}f} &: \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C} \\ \widehat{X_{3D}f}(k,\sigma,\zeta) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} X_{3D}f(\phi,s,z)e^{-i(k\phi+\sigma s+\zeta z)}dsdzd\phi \end{aligned} \tag{1.48}$$

Le support essentiel de $\widehat{X_{3D}f}$ est contenu dans l'ensemble K_p^{3D} démontré dans [Desbat 97] (figure(1.12)) :

$$K_p^{3D}=\{(k,\sigma,\zeta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} : |\sigma|<\Omega, |k|<|\sigma|, \zeta<M(\Omega,\sigma)\} \tag{1.49}$$

avec

$$M(\Omega,\sigma)=\begin{cases} \Omega & \text{si} \quad |\sigma|<1 \\ \sqrt{\Omega^2-\sigma^2} & \text{si} \quad 1<|\sigma|<\Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.50}$$

(Le paramètre ϑ introduit dans [Desbat 97] est ici pris égal à 1.)

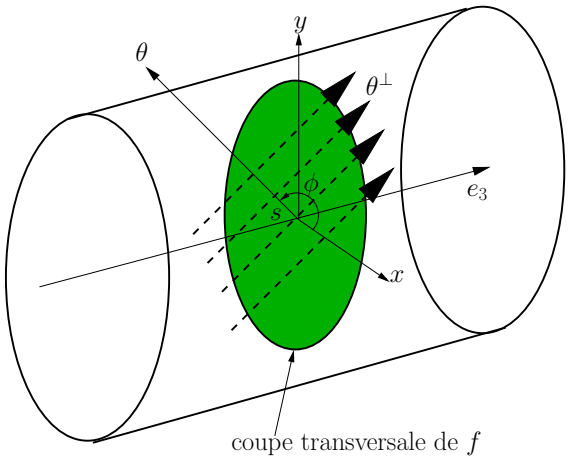


FIG. 1.11 – Paramétrisation de la transformée 3DPBXRT

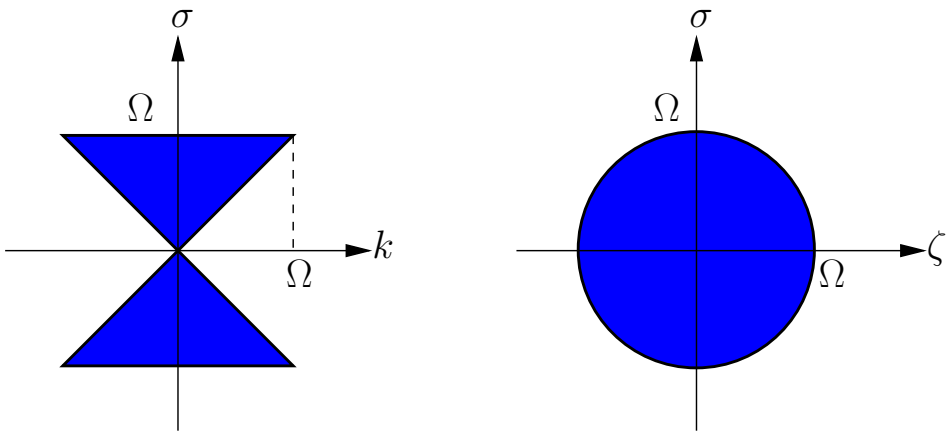


FIG. 1.12 – K_p^{3D} : Support essentiel de $\widehat{X_{3D}f}$. Coupe de K_p^{3D} représentée dans le plan (k, σ) (gauche) et dans le plan (ζ, σ) (droite).

1.2.2.3 Réseaux d'échantillonnage

En appliquant les conditions de non recouvrement de Shannon, on détermine le réseau d'échantillonnage standard (figure 1.13) généré par la matrice $\mathbf{W_S}$ suivante :

$$2\pi\mathbf{W_S^{-t}} = 2\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_S} = \tfrac{\pi}{\Omega}\mathbf{I_3} \tag{1.51}$$

où $\mathbf{I_3}$ est la matrice identité de dimension 3. Comme en deux dimensions, le nombre de positions angulaires P est pris pair pour pouvoir utiliser la relation de symétrie de la transformée en rayons X : $P = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$. On peut alors écrire le réseau standard L_S de la façon suivante :

$$L_S = \mathbf{W_S}\mathbb{Z}^3 = \left\{(\phi_j, s_l, z_k) : \phi_j = j\frac{\pi}{\Omega}, s_l = l\frac{\pi}{\Omega}, z_k = k\frac{\pi}{\Omega}, j = 0, ..., p-1, l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{1.52}$$

L_S est représenté sur la figure 1.16.(a). Les conditions de non recouvrement sont respectées si :

$$\Delta\phi \leq \tfrac{\pi}{\Omega} \quad ; \quad \Delta s \leq \tfrac{\pi}{\Omega} \quad ; \quad \Delta z \leq \tfrac{\pi}{\Omega} \tag{1.53}$$

On peut recouvrir de manière plus compacte l'espace de Fourier par le réseau hexagonal entrelacé (figure 1.14) générée par la matrice $\mathbf{W_{HI}}$ suivante :

$$2\pi\mathbf{W_{HI}^{-t}} = \Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_{HI}} = \tfrac{\pi}{\Omega} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

La figure 1.15 décrit le cas le plus critique où deux supports semblent se recouvrir sur le réseau hexagonal entrelacé. La représentation dans le plan (k, σ), schéma de gauche, montre que le support central et celui en pointillé se recouvrent sur les coins, alors que sur le schéma de droite, ils se recouvrent au centre. Une démonstration formelle dans [Desbat 97], basée sur cette remarque, permet de prouver qu'il y a non recouvrement des deux ensembles. Le nombre de positions angulaires P est pris comme un multiple de 4 dans ce cas afin d'utiliser la symétrie de la transformée en rayons X : $P = 2p$, $p \in 2\mathbb{Z}$. On peut alors écrire le réseau hexagonal entrelacé L_{HI} de la façon suivante :

$$L_{HI} = \mathbf{W_{HI}}\mathbb{Z}^3 = \left\{ \begin{array}{rcl} (\phi_j, s_l, z_k) & : & \phi_j = j\frac{\pi}{\Omega}, s_l = l\frac{\pi}{\Omega}, z_k = k\frac{\pi}{\sqrt{3}\Omega}, j = 0, ..., p-1, \\ & & l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, j + l \,\text{pair}, j + k \,\text{pair} \end{array} \right\}$$

L_S est représenté à la figure 1.16.(b). Les conditions de non recouvrement sont respectées si :

$$\Delta\phi \leq \tfrac{2\pi}{\Omega} \quad ; \quad \Delta s \leq \tfrac{2\pi}{\Omega} \quad ; \quad \Delta z \leq \tfrac{\pi}{\sqrt{3}\Omega} \tag{1.55}$$

Par rapport au schéma standard, le schéma hexagonal entrelacé requiert deux fois moins de positions angulaires et radiales, à condition d'entrelacer les lignes de projections entre

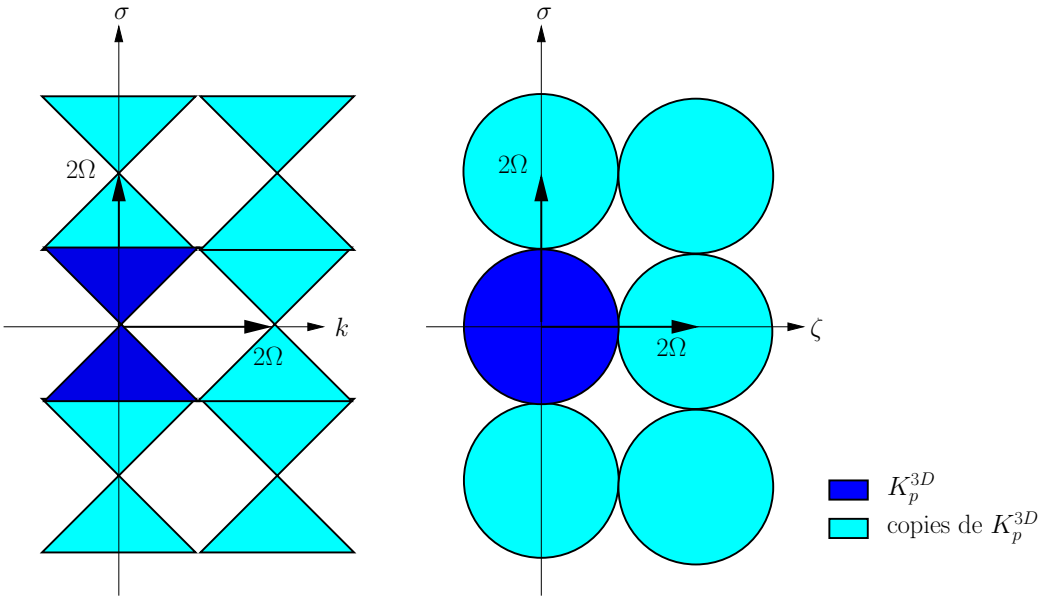


FIG. 1.13 – Réseau standard représenté représenté dans les plans $\tau = 0$ (gauche) et $k = 0$ (droite)

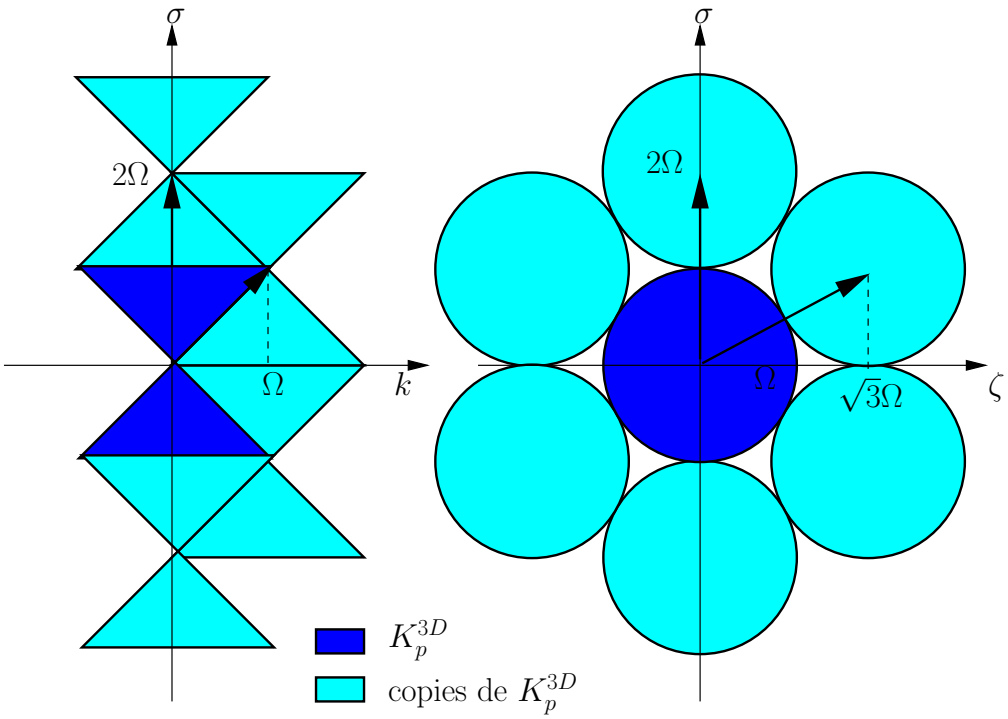


FIG. 1.14 – Réseau entrelacé hexagonal représenté dans les plans $\zeta = 0$ (gauche) et $k = 0$ (droite)

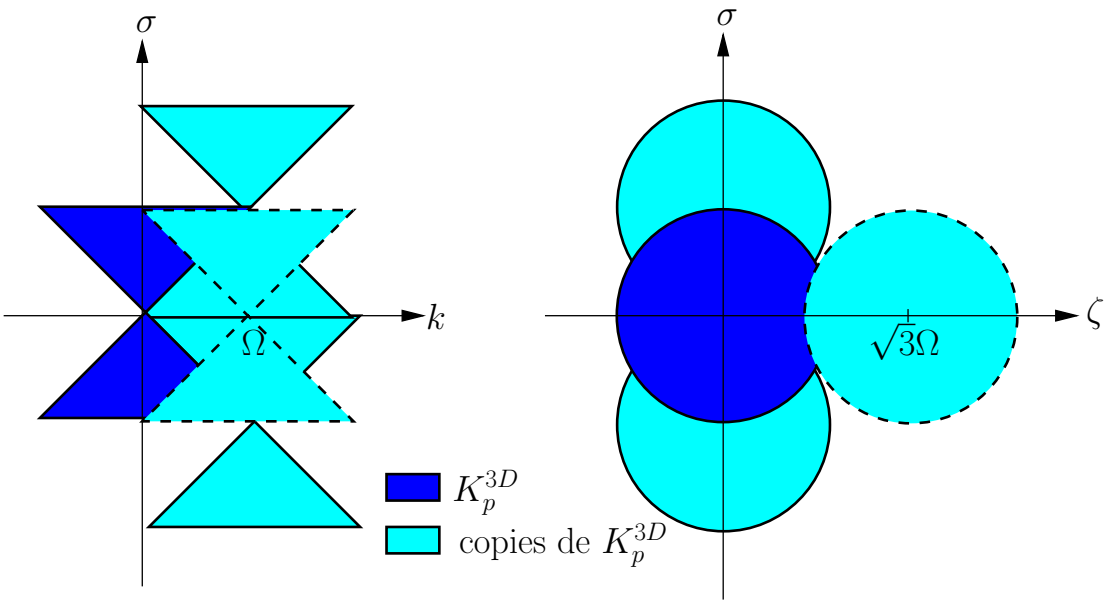


FIG. 1.15 – Réseau entrelacé hexagonal représenté dans les plans $\zeta = 0$ (gauche) et $k = 0$ (droite). Le support en pointillé est centré au point $(0, \Omega, \sqrt{3}\Omega)$

chaque coupe dont l'espacement est réduit d'un facteur $\sqrt{3}$. Ce schéma est donc $4/\sqrt{3} \sim 2,3$ plus efficace que le schéma standard. Le calcul des déterminants confirme ce raisonnement : $|\det \mathbf{W_{HI}}| = 4/\sqrt{3}|\det \mathbf{W_S}|$.
Le réseau hexagonal entrelacé peut également être vu comme l'union de deux réseaux standards à maille parallépipédique, générés par la matrice $\mathbf{W_{S'}}$, qui sont entrelacés avec un décalage indiqué par le vecteur a. $\mathbf{W_{S'}}$ et a s'expriment par [Desbat 97] :

$$\mathbf{W_{S'}} = \frac{2\pi}{\Omega}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad a = \frac{\pi}{\Omega}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

Pour $l \in \mathbb{Z}^3$, $l = (l_1, l_2, l_3)^t$:

$$\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{HI}} l\} = \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{a + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \tag{1.57}$$

En pratique, l'acquisition des données selon le schéma hexagonal entrelacé est mise en oeuvre avec une matrice de capteurs rectangulaires qui pour les positions angulaires impaires réalise une translation selon le vecteur a.

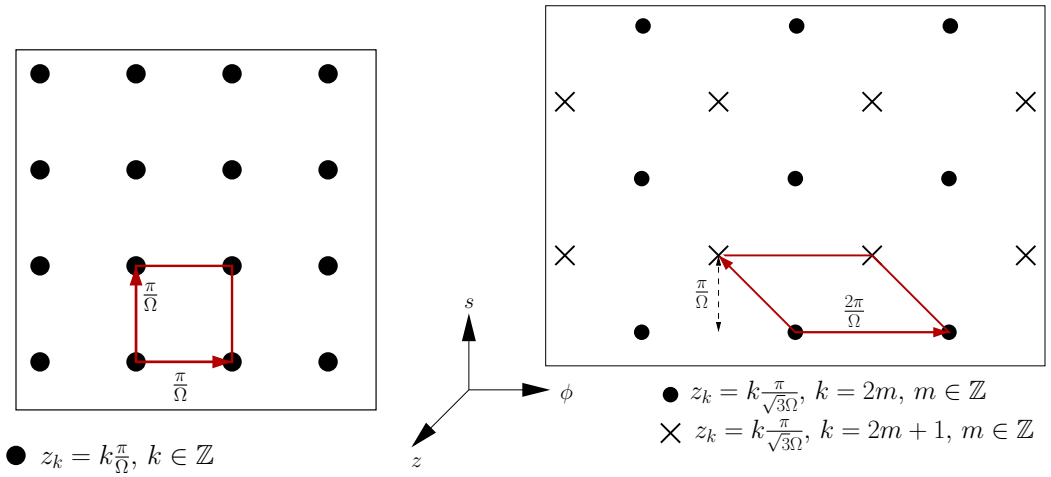


FIG. 1.16 – (a) Représentation de L_S dans le plan (ϕ, s) : le même schéma est répété parallèlement à chaque position de z_k. (b) Représentation de L_{HI} dans le plan (ϕ, s) : les points noirs du réseau sont à la position $z_k = k\frac{\pi}{\sqrt{3}\Omega}$ avec k pair, tandis que les croix représentent les positions k impairs. On peut également voir les réseaux formés par les points et les croix comme deux réseaux identiques mais décalés du vecteur a (relations 1.56 et 1.57).

1.2.3 La géométrie de type faisceau divergent 3D parallèle

1.2.3.1 Introduction

La géométrie d'acquisition de type faisceau divergent 3D parallèle est celle utilisée dans les scanners hélicoïdaux où la source décrit une hélice autour du patient lors de l'acquisition des données. Nous allons nous affranchir de la contrainte de la trajectoire hélicoïdale et exposer les conditions d'échantillonnage qui ont été établies dans le cas où cette trajectoire est circulaire dans chaque coupe transversale. Nous considérons donc des faisceaux divergents qui irradient de manière parallèle chaque plan transversal. Pour cela, nous allons définir la transformée en rayons X 3D divergent (3DFBXRT pour l'anglais *3D Fan Beam X-Ray Transform*).

1.2.3.2 La transformée en rayons X 3D divergent

Soit f, une fonction dont le support est un cylindre de rayon ρ dans $\mathbb{R}^3$ et qu'on suppose indéfiniment dérivable. On suppose que le scanner a un rayon $r > \rho$. Par ailleurs, on considère que f est essentiellement limitée en fréquence, la fréquence critique étant Ω.

La transformée en rayons X 3D divergent (figure 1.17) de f s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_{3D}f &: [0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ D_{3D}f(\beta,\alpha,z) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+tu)dt \end{aligned} \tag{1.58}$$

avec $x \in \mathbb{R}^3$ position de la source, $x = (r\cos\beta, r\sin\beta, z)^t$ et u vecteur indiquant la

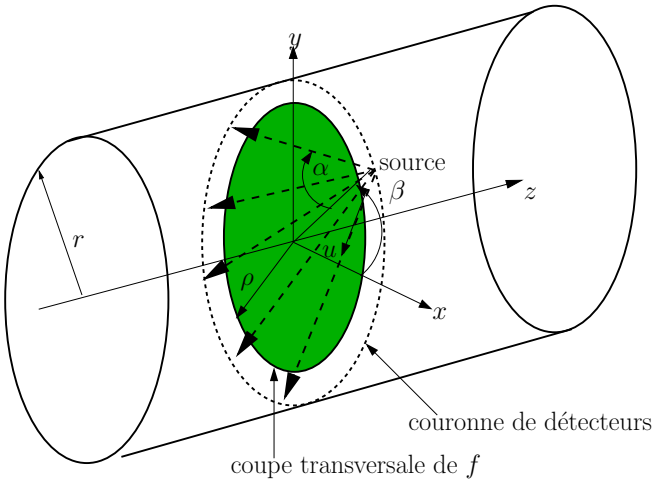


FIG. 1.17 – Paramétrisation de la transformée 3DFBXRT.

direction de l'émission des rayons X, $u = (-\cos(\beta+\alpha), -\sin(\beta+\alpha), 0)^t$. On peut rendre $D_{3D}f$ 2π-périodique en α en prenant $D_{3D}f = 0$ pour $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$. La transformée de Fourier de $D_{3D}f$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \widehat{D_{3D}f} &: \mathbb{Z}^2\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C} \\ \widehat{D_{3D}f}(k,m,\zeta) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}} D_{3D}f(\beta,\alpha,z)e^{-i(k\beta+m\alpha+\zeta z)}dzd\alpha d\beta \end{aligned} \tag{1.59}$$

Le support essentiel de $D_{3D}f$ est contenu dans l'ensemble K_d^{3D} [Desbat 04] (figure 1.18) :

$$K_d^{3D} = \{(k,m,\zeta)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{R} : |k-m|^2 + r^2\zeta^2 < r^2\Omega^2, r|k| < \rho|k-m|\} \tag{1.60}$$

1.2.3.3 Les réseaux d'échantillonnage

Le réseau rectangulaire le plus efficace (figure 1.19) qui respecte les conditions de non recouvrement est généré par la matrice suivante :

$$2\pi\mathbf{W_S^{-t}} = 2\Omega\begin{pmatrix} \frac{r\rho}{r+\rho} & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W_S} = \frac{\pi}{\rho\Omega}\begin{pmatrix} 1+\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \; ; \; \eta = \frac{\rho}{r} \tag{1.61}$$

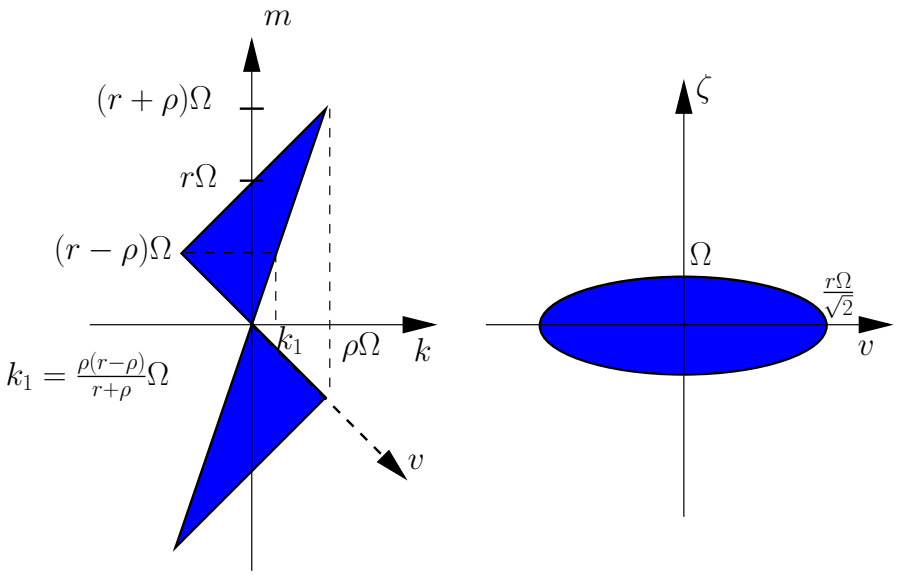


FIG. 1.18 – Coupe du support essentiel K_d^{3D} de $\widehat{D_{3D}f}$ représentée dans les repères (k, m) et (v, ζ)

Le calcul du déterminant donne :

$$|\det \mathbf{W_S}| = \left(\frac{\pi}{\rho\Omega}\right)^3 \eta(1+\eta)\rho \tag{1.62}$$

Un autre schéma qui empile les supports de manière à occuper plus complètement l'espace de Fourier est possible avec le réseau hexagonal entrelacé (figure 1.20) introduit précédemment. Ce réseau est généré par la matrice suivante :

$$2\pi\mathbf{W_{HI}^{-t}} = \Omega \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ \rho - r & 2r & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{W_{HI}} = \tfrac{\pi}{\rho\Omega} \begin{pmatrix} 2 & 1-\eta & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{\sqrt{3}} & \frac{2\rho}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

Comme dans le cas parallèle, la figure 1.21 décrit le cas critique où les supports semblent se recouvrir. La même remarque faite précédemment sert à démontrer que ce n'est pas le cas. Le calcul du déterminant donne :

$$|\det \mathbf{W_{HI}}| = \left(\frac{\pi}{\rho\Omega}\right)^3 \frac{4\eta\rho}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}(1+\eta)} |\det \mathbf{W_S}| \tag{1.64}$$

Or $\eta < 1$, le réseau hexagonal entrelacé est donc plus efficace que le réseau standard. Si nous considérons les réseaux d'échantillonnage dans l'espace direct (figure 1.22), nous constatons que ce sont les schémas d'échantillonnage de la géométrie divergente établis dans le cas 2D, mais avec les conditions sur la direction axiale imposées par la géométrie 3D à coupes parallèles que nous avons montrées précédemment dans le cas de la géométrie de type faisceau parallèle.

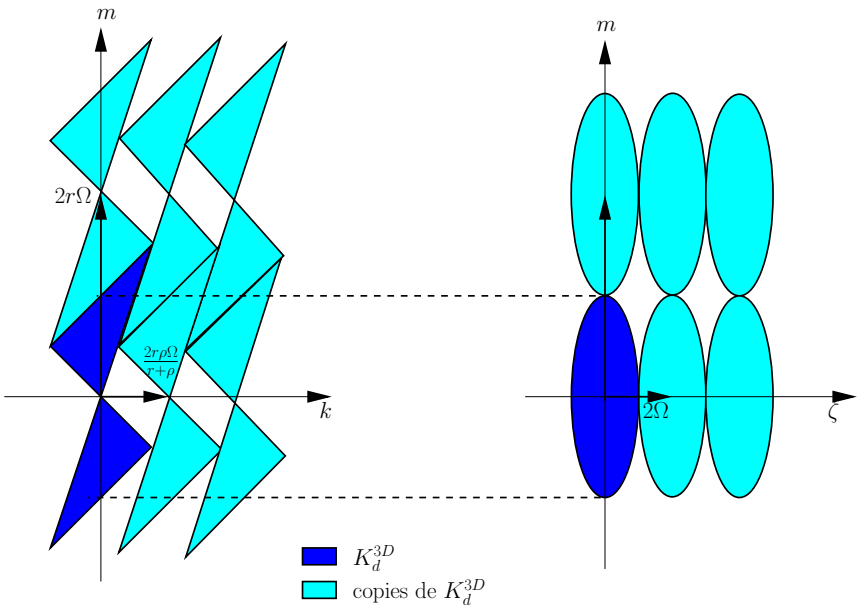


FIG. 1.19 – Réseau standard représenté dans les plans $\zeta = 0$ (gauche) et $k = 0$ (droite)

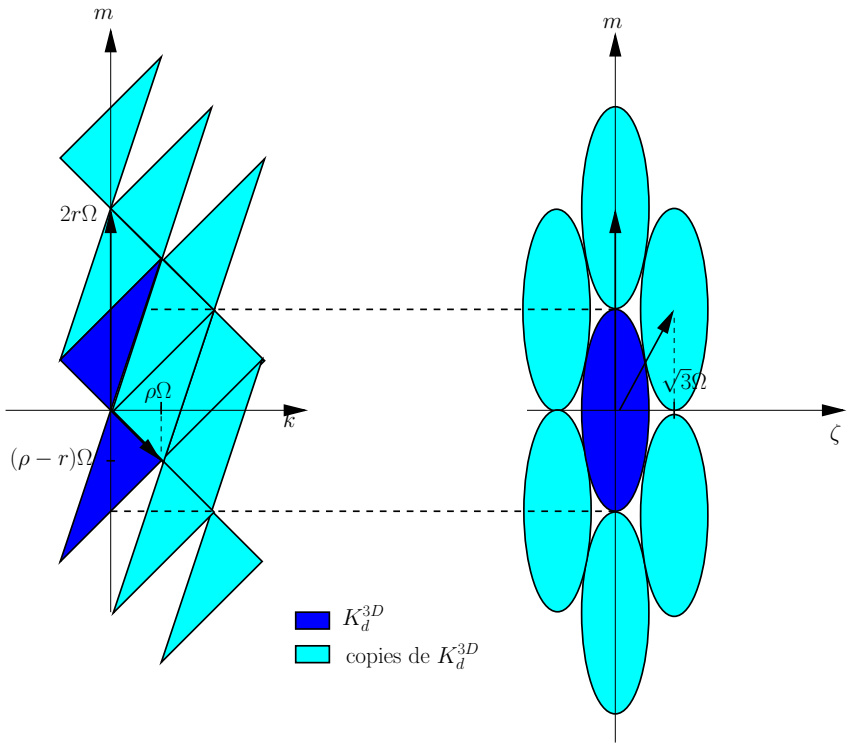


FIG. 1.20 – Réseau hexagonal entrelacé représenté dans les plans $\zeta = 0$ (gauche) et $k = 0$ (droite)

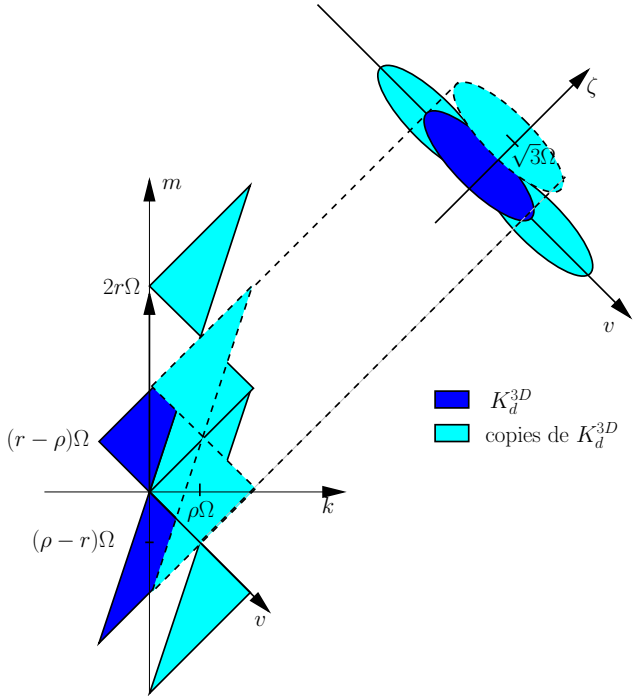


FIG. 1.21 – Réseau hexagonal entrelacé représenté dans les plans $\zeta = 0$ (gauche) et $k = 0$ (droite) dans la direction orthogonale à v. Le support en pointillé est centré au point $(\rho\Omega, (r-\rho)\Omega, \sqrt{3}\Omega)$

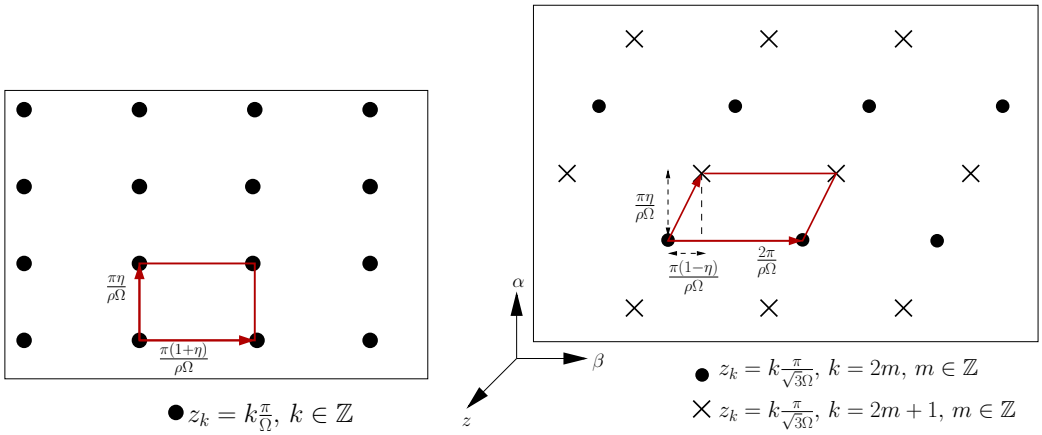


FIG. 1.22 – (a) Représentation de L_S dans le plan (β, α) : le même schéma est répété parallèlement à chaque position de z_k. (b) Représentation de L_{HI} dans le plan (β, α) pour $\eta = 2/3$: les points noirs du réseau sont à la position $z_k = k\frac{\pi}{\sqrt{3}\Omega}$ avec k pair, tandis que les croix représentent les positions k impairs.

1.2.4 La géométrie du type *fully 3D*

Nous avons exposé jusqu'à présent les résultats de l'échantillonnage en tomographie pour les cas où le faisceau contenant les lignes de projection irradie des plans parallèles entre eux et orthogonaux à l'axe du scanner. Il nous faut considérer maintenant les cas où l'espace irradié par le faisceau est volumique et n'appartient pas uniquement à des plans transversaux du scanner : c'est la géométrie dite *fully 3D*. La géométrie d'acquisition en faisceau conique appliquée en tomodensitométrie fait partie de ce cas et est actuellement utilisée dans les scanners cliniques modernes. La source émet un faisceau conique qui irradie plusieurs coupes du patient à la fois. Les détecteurs ne sont donc plus arrangés en une seule ligne, mais en plusieurs rangées formant une matrice enregistrant des projections de deux dimensions. Des travaux récents ([Brokish 06]) ont permis de déterminer une esquisse du support essentiel de la transformée de Fourier des données obtenues en projection conique circulaire. La géométrie conique est également présente en imagerie nucléaire, sur les caméras TEMP équipés d'un collimateur *pinhole*. Enfin, l'acquisition *fully 3D* est aussi appliquée en TEP, dans le mode de fonctionnement 3D, que nous allons détailler dans le chapitre suivant.

1.3 Conclusion

Nous avons exposé les principaux théorèmes et résultats de l'échantillonnage appliqués à la tomographie. Les géométries 2D ou 3D à coupes parallèles ont été abondamment étudiées dans la littérature, mais très peu de résultats ont été déterminés dans la géométrie *fully 3D* : ce type d'acquisition de données reste largement empirique. L'autre étape d'une application tomographique est la reconstruction d'images. Des algorithmes adaptés à la géométrie de l'acquisition des données et parfois optimisés pour tirer profit des schémas d'échantillonnage efficaces ont été développés afin de reconstruire l'image de l'objet à la résolution optimale [Faridani 00]. Nous allons nous focaliser dans le reste de ce travail sur les méthodes d'acquisition des données appliquées à la tomographie d'émission de positons (TEP). Le prochain chapitre sera consacré à une revue des schémas d'échantillonnage actuellement mis en oeuvre sur les scanners TEP. Les différents algorithmes de reconstruction en géométrie 2D et *fully 3D* seront également détaillés.

Chapitre 2

De l'acquisition des données à la reconstruction d'images en Tomographie d'Émission de Positons

2.1 Introduction

Les données acquises en TEP sont similaires à celles obtenues en TDM dans le sens où ce sont également des projections qui sont mesurées. Cependant, leur nature physique est différente puisqu'on mesure les projections des lieux d'annihilation renseignant sur la distribution du radiotraceur. Nous exposons dans ce chapitre la géométrie d'acquisition des données qui est mise en oeuvre sur la plupart des scanners TEP. L'échantillonnage en TEP est d'une certaine manière imposé par la géométrie du scanner car, à cause du caractère aléatoire des processus, on ne peut choisir ni le lieu d'émission ni la direction des rayons. Cependant, un deuxième échantillonnage s'opère lors du stockage des données utilisées lors de l'étape de reconstruction d'images. L'échantillonnage ou le réarrangement des données mis en oeuvre dépend de l'algorithme de reconstruction utilisé. Nous allons présenter dans ce chapitre, les différents modes d'acquisition des données en TEP et les algorithmes de reconstruction d'images classiques. L'échantillonnage des données mis en oeuvre en TEP dans le mode 2D, c'est à dire en prenant uniquement en compte les LORs appartenant aux plans des couronnes du scanner, sera décrit. Nous traiterons également les systèmes d'échantillonnage en mode 3D en l'absence de septa, qui reste pour l'instant très empirique. Ces descriptions seront largement inspirées par [Townsend 98].

Nous discuterons également du traitement et du ré-échantillonnage des données réalisés en partie dans le but d'adapter leur format aux algorithmes de reconstruction. Enfin, les différents types d'algorithmes de reconstruction d'images seront détaillés pour les deux modes d'acquisition de données.

2.2 Le sinogramme

En TEP comme en TDM, les projections d'une coupe de l'objet sont rangées dans une matrice de deux dimensions appelée sinogramme, paramétrée avec les variables de la géométrie en faisceau parallèle (s, ϕ) (figure 2.1.(a)) (nous avons inversé l'ordre des variables de Xf par rapport à la définition donnée au chapitre 1 pour être cohérent avec la littérature de la reconstruction d'images en TEP). Chaque élément de cette matrice correspond à une valeur de $Xf(s, \phi)$: pour un angle de projection donné, $\phi = \phi_0$, la ligne ϕ_0 du sinogramme indique les valeurs de $Xf(s, \phi_0)$ pour s décrivant les distances à l'origine de toutes les droites du faisceau. Sur toute la plage des ϕ, la distribution de $Xf(s, \phi)$ décrit une sinusoïde, d'où le nom donné à ce format de données (figure 2.1.(b)). La figure 2.2 représente une simulation numérique des projections de deux disques de différentes intensités (qui représenteraient deux structures ayant un coefficient d'atténuation différent en TDM ou deux sources ayant une activité différente en TEP) rangées dans un sinogramme. En TEP, chaque valeur du sinogramme est un pixel ou *bin* et représente le nombre d'émissions de photons de 511 keV le long de la LOR considérée. Cette ligne de réponse est en réalité un parallélépipède dont la section est fixée par les dimensions des détecteurs élémentaires composant les couronnes et par la taille de l'objet. Chaque fois qu'un évènement a lieu dans un parallélépipède on incrémente le pixel correspondant.

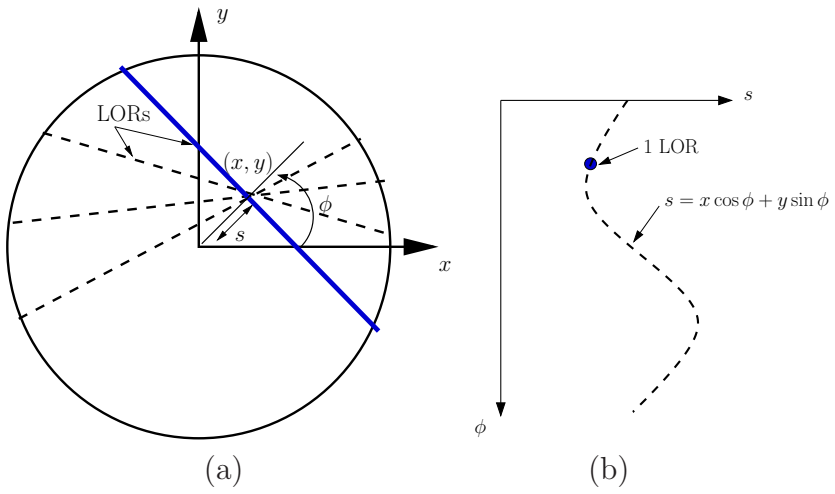
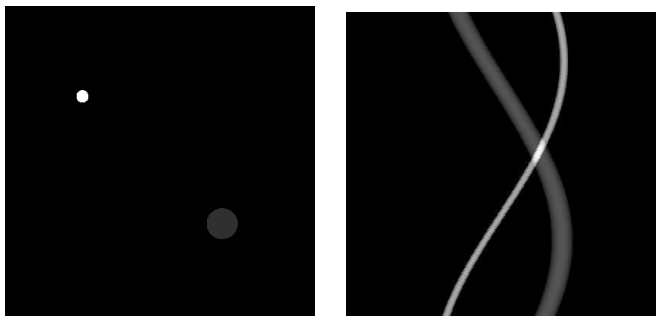


FIG. 2.1 – (a) Les variables (s, ϕ) de la géométrie en faisceau parallèle sont utilisées en TEP. (b) Rangement des projections dans des sinogrammes : une LOR correspond à un pixel du sinogramme.



(a) (b)

FIG. 2.2 – (a) Fantôme numérique composé de deux disques de différentes intensités. (b) Transformée en rayons X du fantôme rangée dans un sinogramme.

2.3 Les modes d'acquisition des données en TEP

2.3.1 Le mode d'acquisition 2D

Nous avons représenté sur la figure 2.3, un scanner cylindrique composé de plusieurs couronnes de détecteurs. Chaque couronne est à son tour composée de blocs de détecteurs. L'acquisition des données en TEP suivant le mode 2D tient compte uniquement des données localisées dans les plans transversaux du scanner, c'est à dire les plans orthogonaux à l'axe du scanner. Les lignes de réponses mesurées relient alors des détecteurs appartenant à la même couronne. Ceci est possible grâce aux septa montés sur les couronnes de détecteurs qui limitent l'enregistrement de LORs obliques (non orthogonales à l'axe du scanner et donc d'inclinaison $\theta \neq 0$) (figure 2.4.(a)). Cependant, on mesure généralement des LORs légèrement obliques, celles reliant deux couronnes voisines (angle d'inclinaison $\theta \sim 1^{\circ}$ environ). La présence de septa permet de réduire le taux de coïncidences aléatoires et diffusées. Ce dernier est de l'ordre de 30-60% des coïncidences totales pour une acquisition sans septa, alors qu'il est seulement de 10-20% pour une acquisition avec septa [Turkington 01] pour le même objet imagé.

2.3.2 Le mode d'acquisition 3D

L'acquisition des données en mode 3D s'opère sans les septa. Ce mode vient du constat que les septa ne sont pas utiles dans le sens où la collimation électronique (détection par coïncidence) permet d'identifier la LOR. Dans ce mode d'acquisition, les LORs obliques sont également mesurées (figure 2.4.(b)). L'avantage du mode 3D est principalement l'augmentation de la sensibilité du scanner d'un facteur entre 4 et 6 ([Fahey 02]) puisque davantage d'évènements sont comptabilisés. Les principaux inconvénients sont une hétérogénéité de la sensibilité le long de l'axe du scanner : une source placée au centre du scanner participe à davantage de LORs détectées qu'une source située au bord du champ de vue. Par ailleurs, les taux de coïncidences diffusées et aléatoires sont plus élevés.

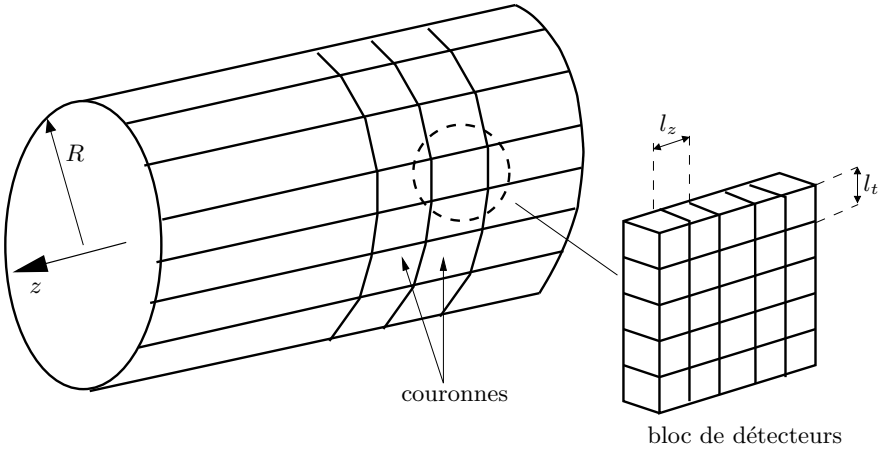
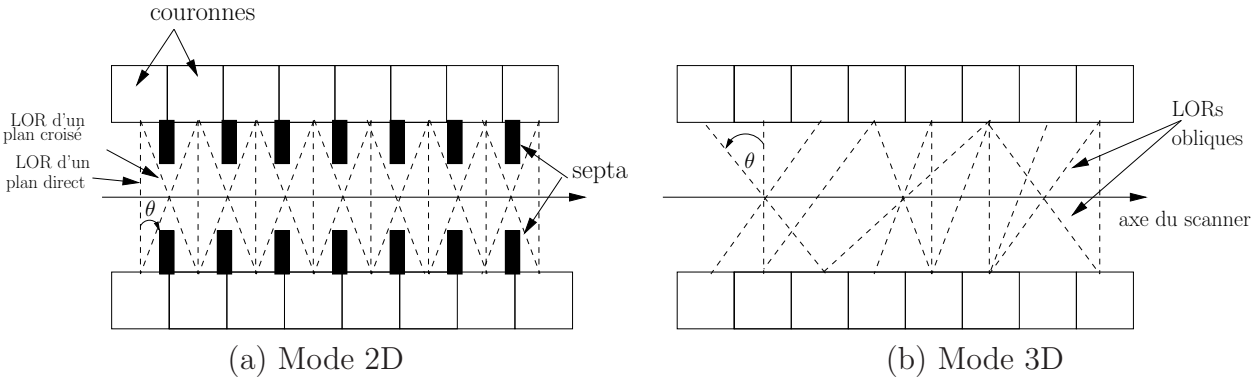


FIG. 2.3 – Représentation d'un scanner TEP cylindrique pour lequel les couronnes sont composées de blocs de détecteurs



(a) Mode 2D (b) Mode 3D

FIG. 2.4 – Modes d'acquisitions des données en TEP vues selon une coupe longitudinale du scanner

Enfin la reconstruction tridimensionnelle nécessite l'utilisation d'algorithmes plus complexes et coûteux en temps. Il est à noter que certains scanners peuvent fonctionner suivant les deux modes lorsqu'ils possèdent des septa rétractables.

2.4 L'échantillonnage des données en mode 2D

2.4.1 La géométrie du faisceau

Dans un plan transversal, la géométrie de l'échantillonnage est de type faisceau divergent. En pratique, on se ramène en géométrie parallèle avec une paramétrisation (s, ϕ) (figure 2.5). Cependant, dans ce cas, le pas radial Δs varie en fonction de s à cause de la courbure du scanner. Δs diminue en s'éloignant du centre selon l'expression suivante :

$$\Delta s = l_t \sqrt{1 - \left(\frac{s}{R}\right)^2} \tag{2.1}$$

avec l_t qui représente la largeur d'un détecteur dans la direction tangentielle du scanner, et R le rayon du scanner. Par conséquent, pour avoir un échantillonnage uniforme en s, il faut interpoler les mesures, ce qu'on appelle la correction d'arc.
Nous allons exposer la géométrie d'acquisition des données mise en oeuvre en TEP, détaillée dans [Townsend 98], avant de vérifier la conformité avec les conditions d'échantillonnage établies théoriquement en géométrie parallèle.

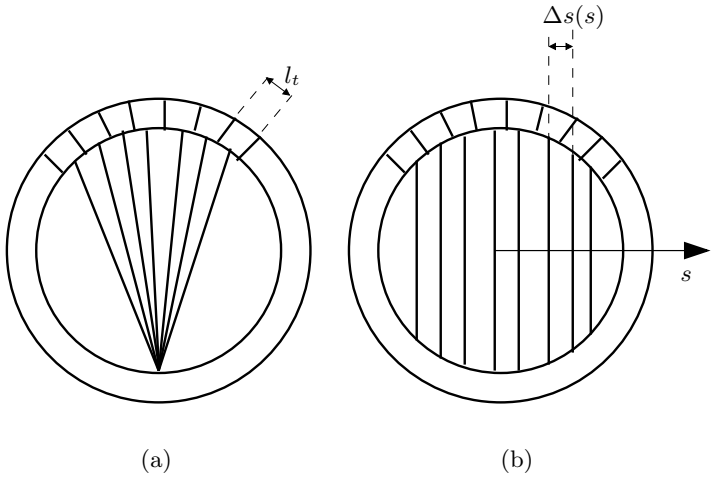


FIG. 2.5 – Représentation schématique d'une coupe transversale du scanner où l_t représente la largeur d'un détecteur : paramétrisation faisceau divergent (a) et parallèle (b).

2.4.2 Le schéma d'échantillonnage transversal

Pour décrire l'échantillonnage au niveau de l'acquisition et du traitement des données en mode 2D, on se place dans une couronne, sachant que le même schéma est appliqué pour les autres couronnes. Le nombre de détecteurs dans une couronne, noté N_d, est pris pair pour pouvoir exploiter la relation de symétrie que vérifie X_f (équation 1.13) permettant ainsi d'utiliser uniquement des projections sur $[0, \pi]$. Les données mesurées dans un plan transversal $Xf(s, \phi)$ sont enregistrées dans un sinogramme. Le schéma d'échantillonnage utilisé est représenté sur la figure 2.6. Dans le sinogramme, nous constatons que deux lignes consécutives, ϕ_j et ϕ_{j+1}, sont décalées de $\Delta s/2$: la LOR centrale passe tantôt au centre du scanner, tantôt à $\Delta s/2$. Dans ce cas, le nombre de projections N_ϕ pour $\phi \in [0, \pi]$ est égale à N_d, et le nombre de LORs pour une projection, N_s, est environ un quart de N_d à cause de la taille du champ de vue transversal. En pratique, on entrelace les lignes consécutives du sinogramme, ce qui revient à faire l'approximation que les projections ϕ_{j+1} sont parallèles à ϕ_j. On divise ainsi par deux le nombre de projections mais on double le nombre de lignes de mesure, c'est à dire l'échantillonnage en s. On obtient alors :

$$N_\phi = \frac{N_d}{2} = N_s \quad , \quad \Delta s = \frac{l_t}{2} \tag{2.2}$$

Quand on applique la correction d'arc, Δ_s reste inchangé et N_s diminue. Au final, le

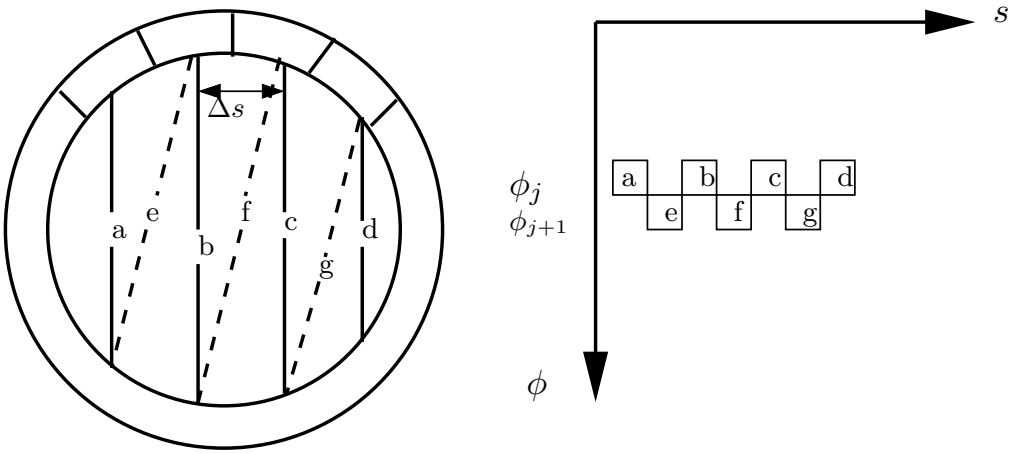


FIG. 2.6 – Échantillonnage dans le plan transversal du scanner (gauche) : les traits continus correspondent aux lignes de projection ϕ_j, les traits pointillés à ϕ_{j+1} rangées dans le sinogramme (droite).

schéma d'acquisition de données mis en place indique que le nombre de projections est à peu près égal au nombre de lignes mesurées par projection, ce dernier étant un peu plus faible.

Nous proposons de comparer ce résultat à celui obtenu lors de l'étude des conditions d'échantillonnage en géométrie parallèle. Supposons que la coupe f de l'objet ait pour support le disque de rayon ρ, c'est à dire pour $|x| > \rho, f(x) = 0$, et que f ait un support essentiel compact dans le domaine fréquentiel tel que pour $|\xi| > \Omega$, $|\hat{f}(\xi)|$ est négligeable.

Les conditions (1.29) déterminées au chapitre 1 pour le schéma standard s'écrivent alors [Natterer 99] :

$$\Delta\phi \leq \frac{\pi}{\rho\Omega} \quad , \quad \Delta s \leq \frac{\pi}{\Omega} \tag{2.3}$$

Or, un détecteur de largeur l_t peut être considéré comme un filtre passe-bas qui laisse passer les fréquences inférieures à $\Omega = 2\pi/l_t$, soit $l_t = 2\pi/\Omega$. Ainsi pour satisfaire les conditions d'échantillonnage standard, il faut que $\Delta s \leq l_t/2$, ce qui est en pratique réalisé. Par ailleurs, concernant N_ϕ et N_s, on a :

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{N_\phi} \quad , \quad \Delta s = \frac{2R}{N_s} \tag{2.4}$$

On déduit alors des conditions 2.3 :

$$N_\phi \geq \rho\Omega \quad , \quad N_s \geq \frac{2R\Omega}{\pi} \tag{2.5}$$

dans le cas le plus optimal, $N_\phi = \rho\Omega$, on déduit que :

$$N_\phi = \frac{\pi\rho}{2R} N_s \tag{2.6}$$

Or, le rapport $\rho/R \sim 2/3$ dans le cas général d'un examen TEP pour un adulte. On obtient donc $N_\phi \sim (\pi/3)N_s$, ce que vérifie l'échantillonnage appliqué en pratique.

2.4.2.1 Le *mashing*

Quand le nombre de détecteurs est important et que le support de l'objet n'est pas grand, on regroupe les projections voisines selon un coefficient appelée facteur de *mashing* m. Le nombre de projections devient alors $N'_\phi = N_\phi/2^m$, avec m qui vaut généralement 1 ou 2. Ainsi, on divise par 2 ou 4 la quantité des projections, sans pour autant affecter la résolution de l'image reconstruite. Cette opération de compression des projections a fait l'objet de recherches empiriques, selon la localisation et les dimensions de la source, pour analyser ses conséquences sur la résolution des images [Gadagkar 94]. Par ailleurs, selon une étude réalisée en TEP « temps de vol »(TOF-PET pour *Time of Flight PET*), où le temps de parcours des photons gamma est mesuré et fournit une information supplémentaire sur la localisation de l'annihilation, on peut appliquer un facteur de *mashing* très important pouvant réduire le nombre de projections d'un facteur 17 [Vandenberghe 06].
De manière théorique, l'effet du sous-échantillonnage angulaire, qui correspond au *mashing*, a été étudié par Faridani [Faridani 04]. Comme le montre la figure 2.7, le sous échantillonnage angulaire crée un recouvrement des supports K_p au niveau des coins. Pour un sous-échantillonnage faible, ce recouvrement ne crée pas d'artefact important car les amplitudes de ces fréquences sont faibles (l'amplitude maximale étant au centre de K_d). De plus, uniquement les hautes fréquences se mélangent ensemble, l'*aliasing* est

donc faible. Enfin, l'étape de reconstruction appliquant un filtre avec une fréquence de coupure plus faible que Ω (paragraphe 2.5.3) pour ne pas augmenter l'amplitude du bruit statistique (que sont les hautes fréquences), les effets du recouvrement des supports sont encore moins significatifs.

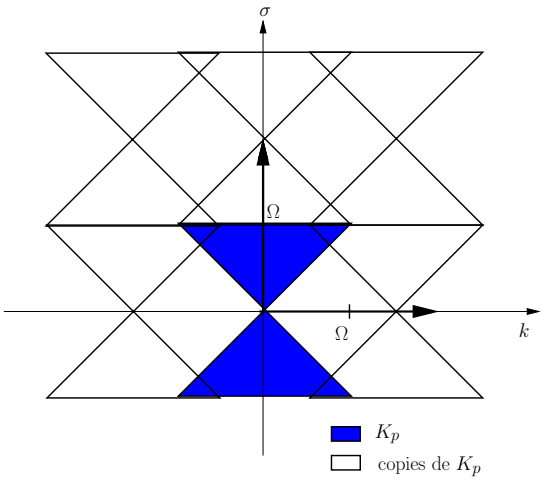


FIG. 2.7 – Le *mashing* se traduit par un recouvrement des supports essentiels au niveau des coins, là où les amplitudes sont faibles et où le mélange des fréquences se fait entre hautes fréquences. Les artefacts sur l'image reconstruite sont par conséquent faibles.

2.4.3 Le schéma d'échantillonnage axial

Dans la direction axiale, l'échantillonnage est dicté par la géométrie des détecteurs. Les LORs mesurées dans une même couronne sont rangées dans des sinogrammes dits directs : pour un scanner ayant N couronnes, on mesure donc N sinogrammes directs. Concernant les LORs appartenant à des plans reliant deux couronnes adjacentes, leur oblicité étant faible, elles sont rangées dans des sinogrammes dits croisés, dont la coordonnée z est définie comme étant au milieu des deux couronnes (figure 2.8). Cette méthode, semblable à l'entrelacement des LORs effectué dans le plan transversal, permet de diviser par deux le pas d'échantillonnage axial qui est égal à $l_z/2$. On peut remarquer que les sinogrammes croisés possèdent plus de statistiques que les sinogrammes directs puisqu'ils reçoivent la contribution de LORs obliques d'angles opposés. Pour un scanner comportant N couronnes, il y a alors $N-1$ sinogrammes correspondant à des plans croisés. Au total, on mesure $2N-1$ sinogrammes en mode d'acquisition 2D.

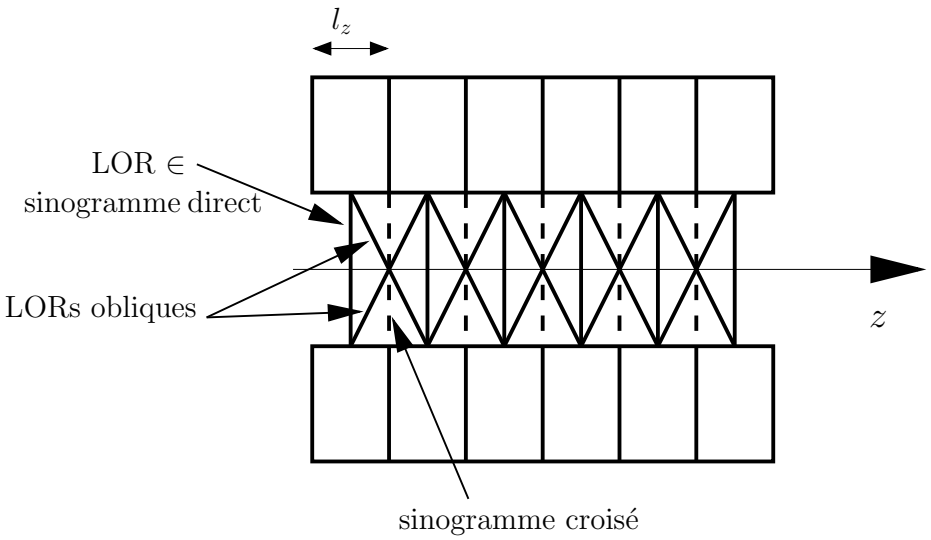


FIG. 2.8 – Coupe longitudinale d'un scanner : les lignes de réponse obliques reliant deux couronnes adjacentes forment les sinogrammes croisés (en traits pointillés) : le pas d'échantillonnage axial est ainsi doublé

2.5 La reconstruction d'image 2D

2.5.1 Introduction

Il existe deux familles d'algorithmes de reconstruction tomographique : les algorithmes analytiques et itératifs. Les premiers sont basés sur une formule d'inversion de la transformée en rayons X. L'algorithme de rétroprojection filtrée (FBP pour l'anglais *Filtered Backprojection*) est la méthode de reconstruction analytique la plus utilisée grâce à sa simplicité de mis en oeuvre et sa rapidité de calcul. Elle s'appuie sur l'inversion de la transformée en rayons X, basée sur le modèle continu d'intégrale le long des lignes de réponse. Cependant, ce modèle n'est pas précis puisque les détecteurs élémentaires ayant une certaine largeur, il faut plutôt considérer les tubes reliant les détecteurs en coïncidence comme domaines d'intégration. De plus, il ne prend pas en compte le caractère stochastique de la détection des photons. Au contraire, dans les méthodes itératives, le problème d'inversion est formulé de manière discrète et ne requiert pas l'approximation d'intégrale suivant des lignes de réponses. Ces méthodes modélisent de manière plus réaliste le système d'imagerie en tenant compte du caractère aléatoire de la détection, de la réponse des détecteurs, de l'atténuation de l'objet, des coïncidences diffusées et fortuites. Cependant, le prix à payer pour une telle précision est un temps de calcul beaucoup plus long à cause du processus d'itération. Nous allons dans un premier temps présenter une démonstration de l'inversion de la transformée en rayons X qui nous permettra d'expliquer les différentes étapes mises en oeuvre dans l'algorithme FBP 2D. Ensuite, nous détaillerons le principe de deux types d'algorithmes itératifs qui ont été utilisés lors de cette thèse.

2.5.2 Formule d'inversion de la transformée en rayons X 2D

Nous rappelons la transformée en rayons X de f ainsi que le système de paramétrisation (figure 2.9) :

$$Xf(s,\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^{\perp})dt \tag{2.7}$$

avec $\theta = (\cos\phi, \sin\phi)$ et $\theta^{\perp} = (-\sin\phi, \cos\phi)$. Les variables (x, y) et (s, t) étant reliées

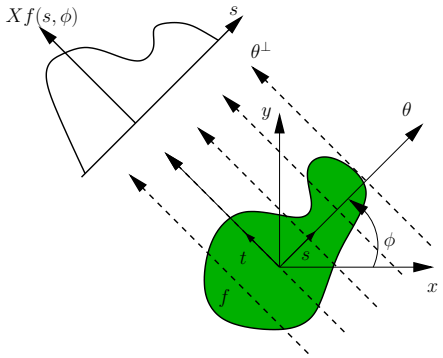


FIG. 2.9 – Paramétrisation de Xf

par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Nous rappelons également le théorème de coupe-projection, reliant la transformée de Fourier 1D des projections par rapport à la variable s, à la transformée de Fourier 2D de f :

$$\widehat{Xf}(\sigma,\phi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\sigma\theta) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\sigma\cos\phi, \sigma\sin\phi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\nu_x,\nu_y)|_{\tau=0} \tag{2.9}$$

l'invariance par rotation de la transformée de Fourier permettant d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

où (ν_x, ν_y) et (σ, τ) sont respectivement les variables de Fourier de (x, y) et (s, t). Nous pouvons maintenant inverser la transformée en rayons X en commençant par exprimer la transformée de Fourier inverse de f :

$$f(x,y) = 2\pi \int\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\nu_x,\nu_y) e^{i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)} d\nu_x d\nu_y \tag{2.11}$$

en faisant un changement en coordonnées polaires, on a $\nu_x = r\cos\phi$ et $\nu_y = r\sin\phi$. On obtient alors :

$$f(x,y) = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(r\cos\phi, r\sin\phi) e^{i2\pi r(x\cos\phi + y\sin\phi)} r dr d\phi \tag{2.12}$$

or en posant $\sigma = r$, d'après le théorème de coupe-projection et en reconnaissant s, nous obtenons :

$$f(x,y) = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{Xf}(\sigma,\phi) e^{i2\pi\sigma s} \sigma d\sigma d\phi \tag{2.13}$$

en coupant en deux l'intégrale suivant ϕ, en faisant le changement de variable $\phi \rightarrow \phi - \pi$ dans la deuxième intégrale et en utilisant la relation de symétrie $\widehat{Xf}(\sigma, \phi - \pi) = \widehat{Xf}(-\sigma, \phi)$, nous obtenons :

$$f(x,y) = 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{Xf}(\sigma,\phi) e^{i2\pi\sigma s} \sigma d\sigma d\phi + 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{Xf}(-\sigma,\phi) e^{-i2\pi\sigma s} \sigma d\sigma d\phi \tag{2.14}$$

enfin en faisant le changement de variable $\sigma \rightarrow -\sigma$, qui oblige à faire $\sigma d\sigma \rightarrow |\sigma| d\sigma$, et en regroupant les deux intégrales, nous obtenons :

$$f(x,y) = 2\pi \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{Xf}(\sigma,\phi) e^{i2\pi\sigma s} |\sigma| d\sigma d\phi \tag{2.15}$$

En nous basant sur l'équation (2.15), nous pouvons décrire les étapes de l'algorithme de rétroprojection filtrée.

2.5.3 L'algorithme de rétroprojection filtrée

L'implémentation de l'algorithme FBP en 2D suit les étapes suivantes :

- pour un angle ϕ (une ligne du sinogramme), on calcule la transformée de Fourier 1D de la projection : $\widehat{Xf}(\phi, \sigma)$,
- on applique le filtre rampe : $\widehat{Xf}^F(\sigma,\phi) = |\sigma| \widehat{Xf}(\phi,\sigma)$,
- on calcule la transformée de Fourier inverse : $\tilde{X}f^F(s,\phi)$,
- on rétroprojette la projection filtrée : $f(x,y) = f(x,y) + \Delta\phi \tilde{Xf}^F(s,\phi)$,
- on réitère pour tous les ϕ, tels que $0 \leq \phi < \pi$.

La figure 2.10 montre la reconstruction du fantôme numérique montré précédemment (figure 2.2.(a)) en utilisant l'algorithme FBP pour différents nombres de projections mesurées. En pratique, en présence de bruit statistique dans l'image comme c'est le cas en TEP, il est impossible d'inverser exactement la transformée en rayons X. L'étape de filtrage avec le filtre rampe, indispensable pour annuler l'effet de lissage que provoque la rétroprojection, accentue les hautes fréquences de l'image et notamment le bruit. Pour y remédier, on doit d'abord choisir attentivement la fréquence de coupure du filtre rampe et appliquer une fenêtre d'apodisation afin d'éliminer les fréquences au delà de la fréquence de coupure. Ce dernier filtrage déterminera la résolution qu'on peut obtenir dans l'image ainsi que le niveau de bruit.

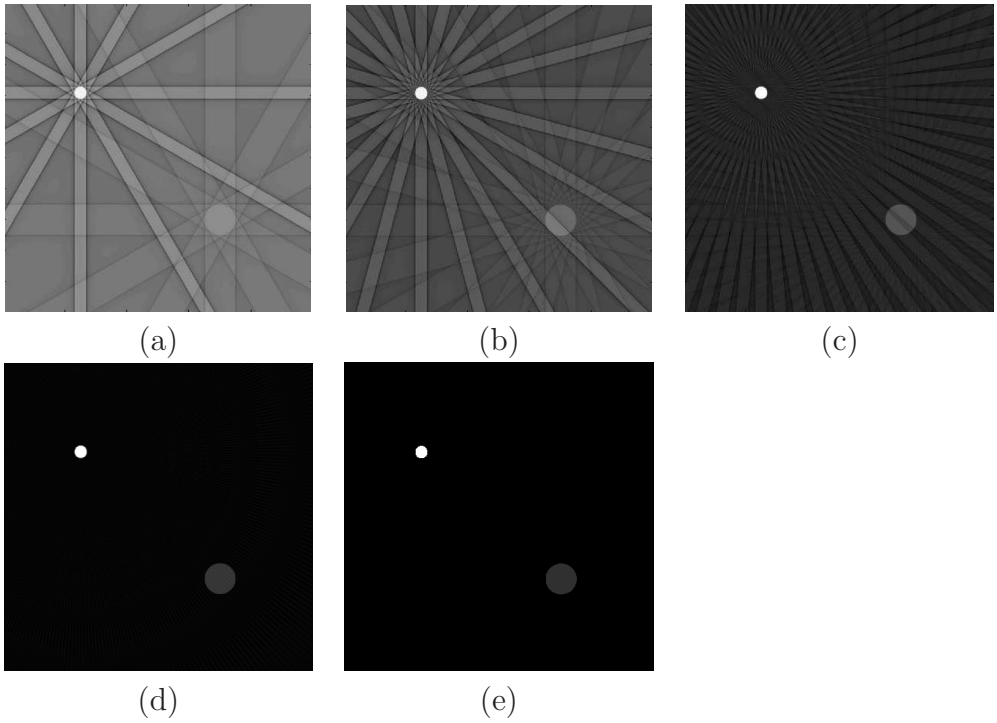


FIG. 2.10 – Rétroprojection filtrée d'un fantôme numérique pour différents nombres de projections N_ϕ entre 0 et 2π : de (a) à (d), $N_\phi = 12, 24, 72, 360$, (e) étant l'image originale. Le filtrage a été réalisé avec une fenêtre d'apodisation de type Hann. (Images reconstruites avec Matlab 7.4.0).

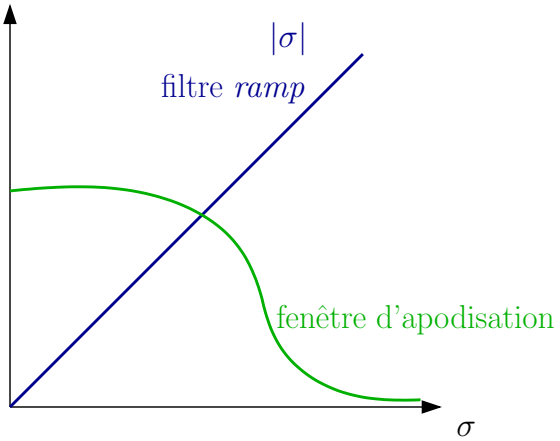


FIG. 2.11 – Représentation du filtre rampe et de la fenêtre d'apodisation

2.5.4 Les algorithmes de reconstruction itératifs

2.5.4.1 Introduction

Le problème de reconstruction peut se formuler d'une autre manière que par l'inversion de la transformée en rayons X, en particulier sous la forme d'une équation matricielle à résoudre :

$$g = \mathbf{H}f \tag{2.16}$$

où $g = \{g_i | i = 1, ..., P\}$ est le vecteur contenant les $P = N_\phi N_s$ éléments du sinogramme, $f = \{f_j | i = 1, ..., N\}$, le vecteur contenant les N pixels de l'image, et $\mathbf{H}$, une matrice appelée matrice système dont l'élément H_{ij} informe sur la probabilité qu'une émission dans le pixel j contribue au *bin* i du sinogramme. $\mathbf{H}$ représente ainsi le système d'imagerie en prenant en compte la réponse des détecteurs mais également l'atténuation de l'objet imagé si elle est connue. Deux catégories de méthodes itératives sont à distinguer. Tout d'abord, les méthodes algébriques de type ART (*Algebraic Reconstruction Techniques*) [Gordon 70] qui pose le problème de reconstruction (équation 2.16) comme la résolution de systèmes linéaires de grandes dimensions. Chaque équation de ce système représente un hyperplan dans l'espace de f. La méthode consiste, en partant d'une estimation initiale de f, de la projeter, au sens algébrique du terme, sur chaque hyperplan. Ainsi, en réitérant le même processus, on converge vers la solution du système qui est l'intersection de tous les hyperplans. Cependant, cette méthode ne donne pas toujours de solution en présence de bruit dans les données, car le système devient alors inconsistant. Une autre catégorie est composée de méthodes statistiques permettant de modéliser le processus aléatoire de la détection. Leur formulation permet d'utiliser d'autres modèles que les intégrales suivant des lignes, dans lesquelles on peut prendre en compte les phénomènes de bruit statistiques, de coïncidences diffusées et aléatoires. Deux critères sont fondamentaux pour élaborer un algorithme itératif. En premier, il faut définir un critère qui permet de mesurer la vraisemblance entre l'image reconstruite et l'image originale. Ce critère se traduit par une fonction dite objectif qui est à optimiser. Ensuite, il faut définir l'algorithme qui permet de trouver la solution optimisant la fonction objectif. Nous allons décrire le principe de deux algorithmes itératifs, l'algorithme statistique ML-EM *Maximum Likelihood Expectation Maximization* qui est très utilisé en TEP, optimisant un critère de maximum de vraisemblance, ainsi que l'algorithme de gradient conjugué, optimisant quant à lui un critère de moindre carré.

2.5.4.2 L'algorithme ML-EM

La méthode ML [Rockmore 76] a introduit la distribution de Poisson, qui caractérise l'émission et la détection des photons d'annihilation, dans la modélisation des projections mesurées. Dans cet algorithme, le critère de maximum de vraisemblance (ML) s'énonce de la manière suivante : quelle fonction f reconstruite choisir pour que les données observées g maximise $p(g|f)$, où $p(g|f)$ représente la loi de probabilité de l'observation de g déterminée

par le paramètre f ? La fonction objectif qui est donc à maximiser ici est la loi de Poisson ou son logarithme (les deux distributions atteignent leur maximum pour la même image) :

$$L(g|f) = \ln(p(g|f)) = \sum_{i=1}^{P} \left\{ g_i \ln \left(\sum_j H_{ij} f_j \right) - \sum_j H_{ij} f_j \right\} \tag{2.17}$$

Le processus d'itération qui permet de satisfaire ce critère, c'est à dire de trouver le maximum de la fonction $L(g|f)$, est dicté par l'algorithme EM [Shepp 82] :

$$f_j^{(k+1)} = \frac{f_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^{P} H_{ij}} \sum_{i=1}^{P} H_{ij} \frac{g_i}{\sum_{l=1}^{N} H_{il} f_l^{(k)}} \tag{2.18}$$

où $f^{(k)}$ est l'image à la k-ème itération. Le principe de l'algorithme est détaillé sur la figure 2.12. L'algorithme ML-EM, basé sur l'estimateur ML non biaisé, conduit à des images très bruitées. Les premières itérations donnent des images exhibant les basses fréquences, tandis que les hautes fréquences de l'image apparaissent quand le nombre d'itérations devient élevé. Par conséquent, il est préférable d'arrêter le processus d'itération avant convergence ou de réaliser un filtrage passe-bas sur l'image reconstruite afin de diminuer le bruit. Par ailleurs, comparé à l'algorithme FBP, ML-EM est beaucoup plus lent du fait des étapes de projection et rétroprojection à réaliser à chaque itération, sachant qu'il est nécessaire d'avoir environ 30 à 50 itérations afin d'obtenir une image pertinente. D'autres algorithmes ont donc été développés pour réduire le temps de calcul. Ces algorithmes regroupent les projections en plusieurs ensembles disjoints et appliquent la méthode de reconstruction sur chaque ensemble. L'algorithme *Ordered Subsets Expectation Maximization* (OS-EM) [Hudson 94] fait parti de cette famille de méthodes basées sur ML-EM mais avec cette modification. Il permet de diviser le temps de calcul par le nombre d'ensembles utilisés. Cependant, pour un biais équivalent à ML-EM, les images sont plus bruitées et l'étape de filtrage est toujours nécessaire.

2.5.4.3 Le critère des moindres carrés et l'algorithme de gradient conjugué

Un autre critère utilisé lorsque la nature des données statistiques n'est pas connue, consiste à mesurer l'erreur entre les projections de l'image reconstruite et les projections observées, en terme de distance euclidienne. Le critère de moindre carré s'énonce donc ainsi, choisir la fonction f tel qu'elle minimise l'erreur :

$$e = ||g - \mathbf{H}f||^2 \tag{2.19}$$

c'est à dire la distance entre les données observées g et les projections de f par la matrice $\mathbf{H}$. En calculant la dérivé partielle par rapport à f de e et en la prenant égal à zéro, on obtient la solution du problème de reconstruction d'après le critère de moindre carré, en supposant que la matrice $\mathbf{H}$ n'est pas singulière [Kawata 85] :

$$f = (\mathbf{H}^\mathbf{t}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^\mathbf{t} g \tag{2.20}$$

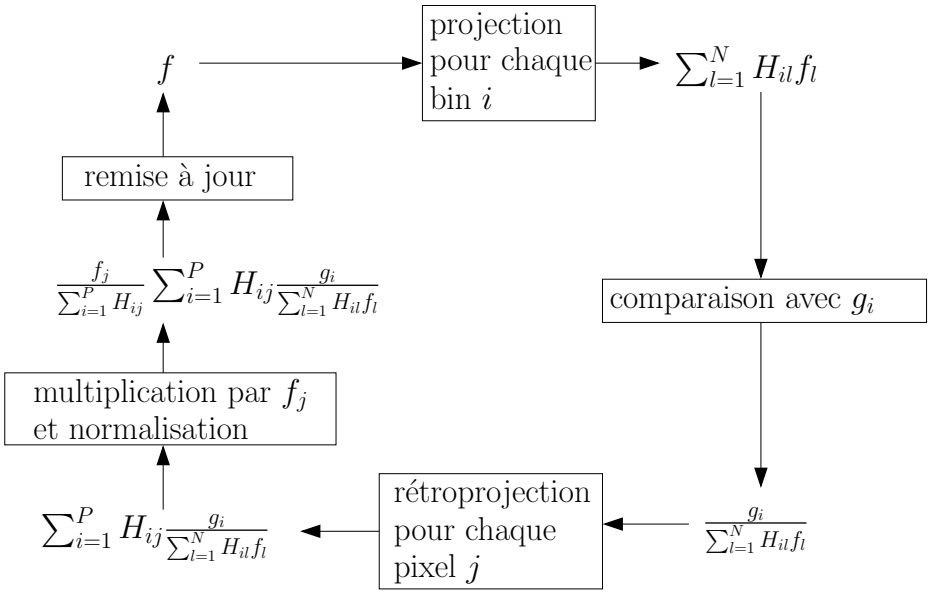


FIG. 2.12 – Principe de l'algorithme itératif ML-EM.

qui peut être convertie en l'expression suivante :

$$f = \mathbf{H^t}(\mathbf{HH^t})^{-1} g \tag{2.21}$$

Cette relation représente l'opération de rétroprojection filtrée. La matrice $(\mathbf{HH^t})^{-1}$ représente le filtre rampe dans l'espace direct, tandis que $\mathbf{H^t}$ représente la rétroprojection (la rétroprojection est l'opérateur dual de la projection [Natterer 86]). Cette équation n'est en réalité pas résolue directement par une méthode d'inversion mais plutôt de manière itérative. l'image reconstruite à l'itération $k+1$ s'écrit au moyen de l'itération précédente par la relation :

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k q_k \tag{2.22}$$

avec q_k, le vecteur de correction et α_k, le scalaire indiquant le taux de convergence, tous les deux calculés à l'itération k. q_k indique la direction de la convergence du processus itératif et est égal au gradient de e :

$$q_k = \mathbf{H^t}(g - \mathbf{H} f_k) \tag{2.23}$$

La vitesse de convergence est maximale pour un α_k optimal. Ce dernier est déterminé en calculant la dérivée partielle de e en fonction de α_k et en la prenant égale à zéro. Cette méthode itérative, appelée *steepest descent* [Gottfried 73], reste encore assez lente lorsque la dimension de $\mathbf{H}$ est grande. La méthode du gradient conjugué [Gottfried 73] consiste à optimiser α_k mais aussi q_k, afin de réduire le nombre d'itérations. On exprime alors f_{k+1} par la relation suivante :

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k r_k \tag{2.24}$$

avec

$$r_k = q_k - \beta_{k-1} r_{k-1} \tag{2.25}$$

Dans ce cas, le vecteur de correction noté ici r_k dépend du gradient q_k à l'itération courante et du vecteur de correction à l'itération précédente, r_{k-1}. Les coefficients α_k et β_{k-1} sont déterminés par les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} q_{k+1}^t r_k & = & 0 \\ (\mathbf{H}r_k)^t(\mathbf{H}r_j) & = & 0 \quad \text{si} \quad k \neq j \end{cases} \tag{2.26}$$

La première relation indique que le gradient de l'itération suivante est orthogonal au vecteur de correction courant. La deuxième relation indique que les $\{\mathbf{H}r_k, k = 0, ..., N\}$ sont orthogonaux entre eux. Ces conditions assurent la convergence de l'algorithme au maximum en n itérations, avec n le rang de la matrice $\mathbf{H^tH}$.

2.5.5 La régularisation

Les systèmes linéaires que se proposent de résoudre les méthodes de reconstruction itératives sont souvent mal conditionnés à cause de la présence du bruit dans les données. L'objectif de la régularisation est donc de fournir une solution stable à un problème inverse mal posé, c'est à dire, fournir une solution unique à un système linéaire qui peut en avoir plusieurs ou aucune. Considérons de nouveau la solution générale de la méthode des moindres carrés :$f = (\mathbf{H^tH})^{-1}\mathbf{H^t}g$. Elle n'existe que si la matrice $(\mathbf{H^tH})$ est inversible, ce qui est rarement le cas. Le critère des moindres carrés est alors modifié et on recherche à minimiser plutôt la fonction suivante :

$$e = ||g - \mathbf{H}f||^2 + \tau\Delta(f) \tag{2.27}$$

où τ est le paramètre de régularisation et Δ, la fonction de régularisation ou de pénalité. L'expression de Δ, qui peut être très diverse, va influencer la solution finale. Le paramètre τ décide de la force de la régularisation. D'une manière générale en reconstruction d'images, on peut dire que la régularisation a pour effet de lisser les images, en luttant contre une trop grande différence entre pixels voisins synonyme de bruit. Cependant, une fonction de pénalité doit être choisie avec l'objectif de réduire le bruit de l'image tout en préservant les contours.

2.6 L'étude de l'échantillonnage en TEP 3D

2.6.1 Introduction

A la différence du mode 2D, l'acquisition des données en TEP 3D permet aussi l'enregistrement des LORs obliques entre des couronnes éloignées et non juste adjacentes. Une propriété des LORs obliques est qu'elles coupent plusieurs plans transversaux. L'acquisition des données en mode 2D étant suffisante pour reconstruire l'image en procédant coupe par coupe, les données obtenues en mode 3D sont donc redondantes. Cependant,

la détection de photons étant un processus bruité, l'acquisition des LORs obliques augmente considérablement la sensibilité du système et permet de reconstruire l'image avec un meilleur rapport signal sur bruit. Cette redondance des données est cependant difficile à exploiter, d'autant plus qu'en mode 3D, l'espace des projections nécessite 4 paramètres, ce qui rend complexe la détermination géométrique des schémas d'échantillonnage. Aucune analyse complète théorique de l'échantillonnage en mode 3D n'a donc été proposée jusqu'à présent, bien que des pistes de réflexion aient été ouvertes dans une géométrie de scanners non cylindriques utilisant un système de paramétrisation adapté nommé *plano-gram* [Rodet 03]. Nous allons néanmoins décrire le schéma d'échantillonnage empirique et l'organisation des données 3D. L'arrangement des données dans les plans transversaux étant identique au mode 2D, le traitement axial des données sera davantage abordé. Nous nous inspirerons en grande partie de [Defrise 97].

2.6.2 Traitement axial des données en mode 3D

Considérons un scanner de rayon R et de longueur axiale L. Une paramétrisation classique des LORs en mode 3D est illustrée sur la figure 2.13 : une LOR oblique reliant deux couronnes c_1 et c_2, de coordonnées axiales respectives z_1 et z_2, et sa projection dans un plan transversal du scanner y sont représentées. Nous retrouvons dans le plan transversal, les deux paramètres (s, ϕ). Dans le plan longitudinal, la LOR est paramétrée par les deux variables $z = (z_1 + z_2)/2$ et $\Delta c = z_1 - z_2$, représentant respectivement la coordonnée axiale à mi-chemin entre les deux couronnes et leur espacement. La transformée en rayons X, Xf, d'une activité f comprise dans le scanner s'exprime alors par l'intégrale suivant la LOR d'après la relation :

$$Xf(s, \phi, z, \Delta c) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\cos\phi + t\xi_x, s\sin\phi + t\xi_y, z + t\xi_z)dt \tag{2.28}$$

où $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ est le vecteur unitaire le long de la ligne d'intégration :

$$\xi = \frac{(-\sin\phi, \cos\phi, \frac{\Delta c}{2\sqrt{R^2 - s^2}})}{\sqrt{1 + \frac{(\Delta c)^2}{4(R^2 - s^2)}}} \tag{2.29}$$

L'angle θ que fait une LOR oblique avec le plan transversal est :

$$\tan\theta = \frac{\Delta c}{2\sqrt{R^2 - s^2}} \tag{2.30}$$

Dans le cas où le champ de vue transaxial du scanner est petit comparé au rayon du scanner, ce qui signifie $s << R$, on peut faire l'approximation suivante :

$$\tan\theta \sim \frac{\Delta c}{2R} \tag{2.31}$$

Par conséquent, les LORs reliant deux mêmes couronnes, ayant donc les paramètres z et

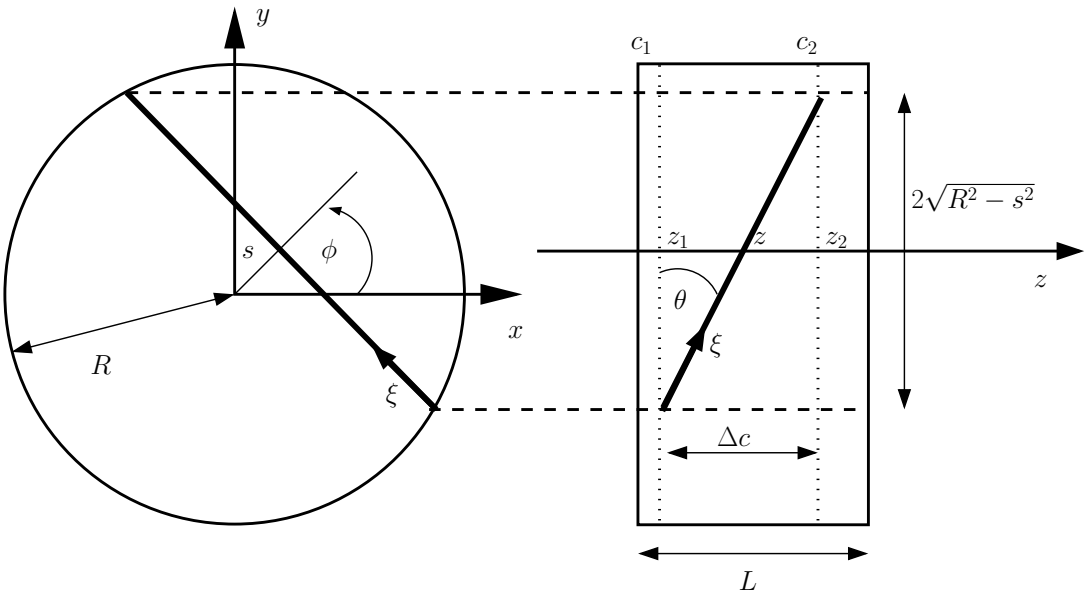


FIG. 2.13 – Projection dans un plan transversal (gauche) d'une LOR représentée dans le plan longitudinale (droite)

Δc identiques, peuvent être considérées parallèles puisque θ ne dépend plus de s dans le cadre de cette approximation. Ainsi, toutes les LORs obliques entre deux mêmes couronnes sont rangées dans un sinogramme dit oblique. Par conséquent, pour un scanner possédant N couronnes, il y aurait en théorie N^2 sinogrammes, ce qui correspond à une quantité très importante de données à traiter lors de la reconstruction d'image. En pratique, on réalise une compression des données axiales. D'abord, toutes les LORs d'inclinaison nulle sont rangées dans les sinogrammes directs du mode 2D. On considère ensuite uniquement quelques angles d'inclinaison non nulles, typiquement 2 ou 3 angles positifs et les mêmes opposés. Toutes les LORs d'inclinaison proche de ces angles sont regroupées ensemble dans un même sinogramme oblique : cette méthode de compression de données est appelée *spanning*. Elle se justifie par le fait que le mode 3D introduit des données redondantes. En effet, nous avons vu que l'acquisition 2D est suffisante pour reconstruire l'image. Il est alors possible en mode 3D de sous-échantillonner les données suivant la variable θ sans dégrader la résolution de l'image reconstruite. En pratique, on regroupe un certain nombre de LORs d'inclinaison θ proche dans un même sinogramme oblique, d'après un coefficient appelé *span*, noté S, toujours impair. Ce procédé fait apparaître des groupes de sinogrammes appelés segments. Le nombre de segments est limité par l'oblicité maximale autorisée des lignes de réponses, autrement dit le nombre maximal de couronnes qui peut séparer deux détecteurs en coïncidence (noté *mrd* pour *maximum ring difference*). Chaque segment est donc créé par le regroupement de sinogrammes obliques autour d'une inclinaison indiquée par Δc tel que :

$$\Delta c = 0, \pm S, \pm 2S, \pm 3S, ... \pm \Delta c_{max} \tag{2.32}$$

avec un abus de notation, nous nommons ici Δc, la différence des indices des couronnes, alors qu'il a été auparavant défini comme la différence des coordonnées axiales des cou-

ronnes. Les sinogrammes qui sont regroupés pour former un seul sinogramme d'inclinaison indiquée par Δc vérifient :

$$|k - \Delta c| \leq \frac{S-1}{2} \tag{2.33}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm N \tag{2.34}$$

où k représente l'indice des couronnes. Une représentation graphique permettant de synthétiser l'arrangement des données en TEP 3D est le Michelogramme (figure 2.14), faisant référence au chercheur Christian Michel qui l'a introduit. Nous constatons que certains sinogrammes finaux proviennent du regroupement de $(S-1)/2$ sinogrammes, tandis que d'autres, de $(S+1)/2$ sinogrammes. Il y a donc une différence de sensibilité dans les sinogrammes obliques. Si on revient au cas 2D, le traitement des données axiales correspond à $mrd = 1$ et $S = 3$. Le facteur de compression des données par cette méthode est d'environ $S/2$. Concernant l'échantillonnage de la coordonnée axiale z des sinogrammes obliques compressés, il dépend du segment Δc de la manière suivante :

$$z = -\frac{L - l_z}{2} + j\frac{l_z}{2} \tag{2.35}$$

$$j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, ..., 2N - 2 - j_0 \tag{2.36}$$

où $j_0 = max\{0, |\Delta c| - (S-1)/2\}$. Comme dans le cas 2D, au sein de chaque segment, le pas d'échantillonnage axial est égal à $l_z/2$. Enfin, une remarque importante à noter est que, du fait de la longueur finie du scanner, les sinogrammes obliques sont moins nombreux que les sinogrammes directs (figure 2.15). Les projections sont dites incomplètes ou tronquées, effet qui doit être pris en compte dans les algorithmes de reconstruction 3D.

2.7 La reconstruction d'image 3D

2.7.1 Introduction

La reconstruction d'image 3D, c'est à dire à partir de données acquises en mode 3D, diffère du problème de reconstruction en 2D pour deux raisons principales. Comme on l'a déjà remarqué, le nombre de projections varie selon la position de l'objet dans le champ de vue. La réponse du scanner n'est donc pas spatialement invariante, contrairement au mode 2D. Cela pose un problème pour la reconstruction par rétroprojection filtrée, puisqu'elle est basée sur des transformées de Fourier qui ne peuvent pas être calculées pour des projections tronquées. Par ailleurs, la reconstruction 2D est suffisante pour reconstruire l'image. Cependant, en présence de bruit, l'acquisition 3D a l'avantage considérable d'améliorer le rapport signal sur bruit, puisque la sensibilité du système est augmentée. Il en résulte une redondance de données qui a pour conséquence l'existence de multiples méthodes de reconstruction. Nous allons dans un premier temps exposer, sans démontrer, l'algorithme de rétroprojection filtrée 3D (FBP 3D), en faisant l'hypothèse que les projections ne sont pas tronquées. Ensuite, nous verrons comment, en pratique, on traite ce

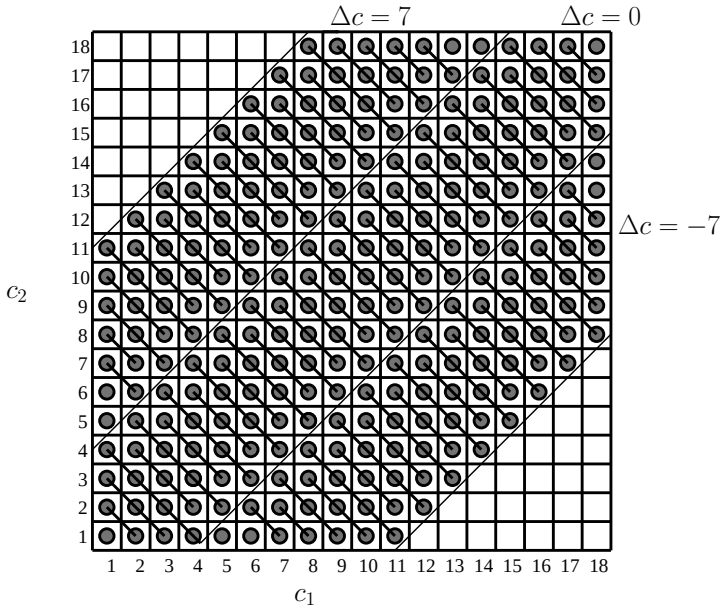


FIG. 2.14 – Michelogramme d'un scanner de 18 couronnes avec une contrainte sur l'oblicité maximale des lignes de réponses correspondant à un $mrd = 10$. Chaque point représente un sinogramme entre les couronnes c_1 et c_2. Les lignes reliant les points représentent les sinogrammes qui sont regroupés. Le span est ici d'un facteur 7 : il en résulte trois segments correspondant au nombre de couronnes séparant les sinogrammes résultant du regroupement : $\Delta c = 0, +7, -7$. Pour chaque segment, les sinogrammes sont regroupés par groupes de 3 ou de 4.

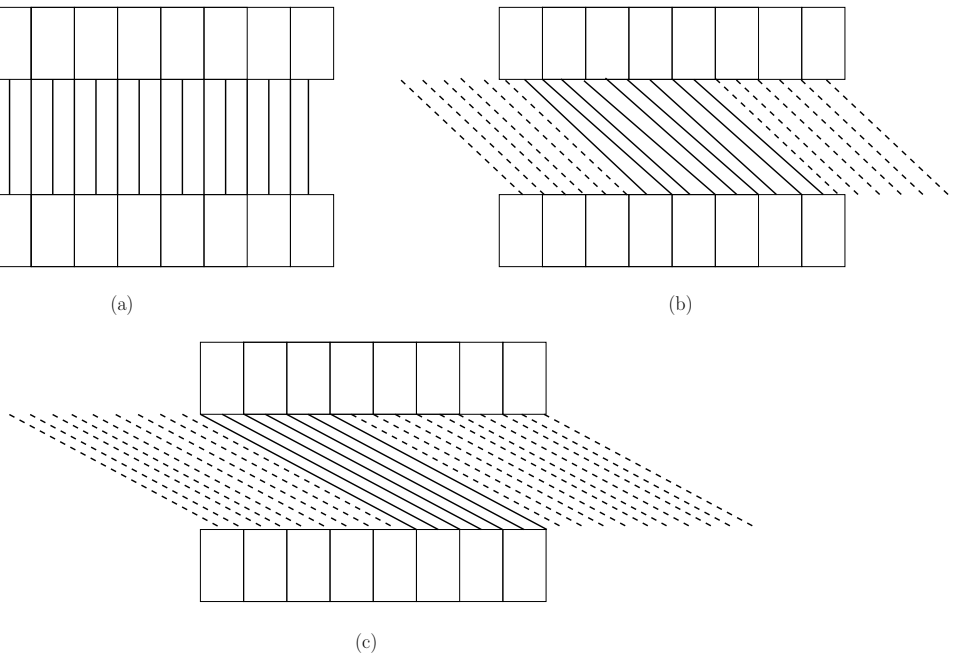


FIG. 2.15 – Rangement des données en TEP 3D : (a) sinogrammes directs pour $\Delta c = 0$, (b) sinogrammes correspondant à $\Delta c = 3$, les traits pointillés représentent les projections manquantes, (c) sinogrammes correspondant à $\Delta c = 5$: la troncature des projections est plus importante.

problème de non invariance spatiale dans une méthode standard de reconstruction basée sur FBP 3D, l'algorithme *3D Reprojection* (3DRP).

2.7.2 La rétroprojection filtrée 3D

Nous introduisons tout d'abord une nouvelle paramétrisation de la transformée en rayons X (figure 2.16) plus adéquate pour l'expression de la FBP 3D. Considérons la LOR dont un vecteur directeur est w, la transformée en rayons X d'une fonction $f(x, y, z)$ s'écrit :

$$Xf(s, t, \phi, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(su + tv + qw)dq \tag{2.37}$$

avec $u = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^t$, $v = (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\theta)^t$ et $w = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)^t$ (figure 2.16). $Xf(s, t, \phi, \theta)$ correspond au format de données appelé projection, équivalent au format sinogramme, excepté que l'arrangement des données est réalisé dans un ordre différent. Par ailleurs, on a les relations suivantes entre cette nouvelle paramétrisation et celle introduite au paragraphe précédent :

$$Xf(s, t, \phi, \theta) = Xf(s, \phi, z, \Delta c) \tag{2.38}$$

$$t = z\cos\theta \tag{2.39}$$

$$\tan\theta \sim \frac{\Delta c}{2R} \text{ (équation 2.31)}$$

Le théorème de la coupe centrale en 3D s'exprime de la manière suivante :

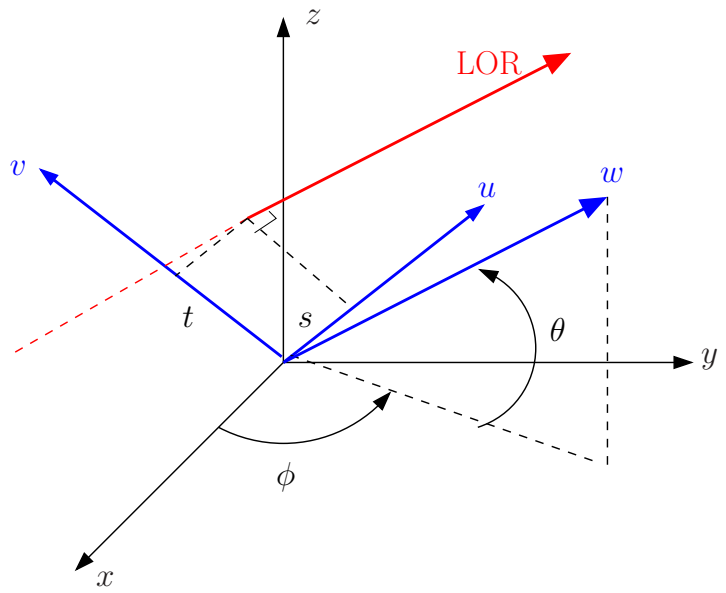


FIG. 2.16 – Paramétrisation de la transformée en rayons X d'une fonction 3D f, $Xf(s,t,\phi,\theta)$

$$\widehat{Xf}(\sigma,\tau,\phi,\theta) = 2\pi\hat{f}(\sigma u+\tau v) = 2\pi\hat{f}(\nu_x,\nu_y,\zeta)|_{w_q=0} \tag{2.40}$$

où (ν_x,ν_y,ζ) et (σ,τ,ω_q) sont respectivement les variables de Fourier de (x,y,z) et (s,t,q), vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix}\nu_x\\ \nu_y\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta\\ \cos\phi & -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\\ \omega_q\end{pmatrix} \tag{2.41}$$

Comme dans le cas 2D, ce théorème permet de relier la transformer de Fourier de Xf à celle de f. Ici, il signifie que la transformée de Fourier 2D de Xf par rapport aux deux premières variables, c'est à dire la transformée de Fourier 2D des projections, $\widehat{Xf}_{\phi,\theta}(\sigma,\tau)$, est équivalente au plan central de la transformée de Fourier 3D de f, orienté des mêmes angles (ϕ,θ). L'inversion de Xf se démontre grâce au théorème de coupe projection et permet la formulation suivante de f :

$$f(x) = \int_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{Xf}(\sigma,\tau,\phi,\theta)\hat{h}(\sigma,\tau,\phi,\theta)e^{i2\pi(\sigma s+\tau t)}\cos\theta d\sigma d\tau d\phi d\theta \tag{2.42}$$

où $\hat{h}(\sigma,\tau,\phi,\theta)$ est le filtre de Colsher [Colsher 80] dans le domaine fréquentiel. Il se comporte comme le filtre rampe mais en deux dimensions. En pratique, comme dans le cas 2D, il est nécessaire d'appliquer une fenêtre d'apodisation $W(\sigma,\tau)$ afin de diminuer les hautes fréquences amplifiées par le filtre de Colsher. L'algorithme FBP 3D s'implémente donc ainsi :

- calcul de la transformée de Fourier des projections $\widehat{Xf}(\sigma, \tau, \phi, \theta)$,
- application du filtre de Colsher et de la fenêtre d'apodisation : $\hat{h}(\sigma, \tau, \phi, \theta)W(\sigma, \tau)$,
- calcul de la transformée de Fourier inverse pour obtenir une projection filtrée : $\tilde{X}f^F(s, t, \phi, \theta)$,
- rétroprojection : $f(x, y, z) = f(x, y, z) + (\cos\theta\Delta\theta\Delta\phi)\tilde{X}f^F(s, t, \phi, \theta)$,
- réitération pour tous les ϕ tels que $0 \leq \phi < \pi$,
- réitération pour tous les θ tels que $|\theta| < \theta_{max}$, θ_{max} étant l'oblicité maximale des LORs.

Une analyse précise de la signification du filtre $\hat{h}$ est réalisée dans [Kinahan 04]. Des études détaillées sur l'inversion de la transformée en rayons X 4D ont montré que plusieurs expressions du filtre autres que celle de Colsher sont possibles, conduisant ainsi à des reconstructions différentes en présence de bruit dans les données [Defrise 89].

2.7.3 L'algorithme 3DRP

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait l'hypothèse que les projections $Xf(s, t, \phi, \theta)$ pour $0 \leq \phi < \pi$ et $|\theta| \leq \theta_{max}$ étaient complètes. En réalité, l'acquisition des données en mode 3D donne des projections qui sont incomplètes (figure 2.15). L'application directe de l'algorithme FBP 3D dans ce cas crée des artefacts importants qui reflètent la baisse de sensibilité en bordure du champ de vue axial. L'algorithme 3DRP [Kinahan 89] a donc été développé, en se basant sur FBP 3D, mais en résolvant en premier le problème des projections tronquées. L'idée de cette méthode est d'estimer les projections manquantes en reconstruisant tout d'abord l'objet à partir d'un ensemble de projections parallèles correspondant au mode 2D grâce à l'algorithme FBP 2D. Ensuite, l'image obtenue est projetée suivant les directions des projections incomplètes. En fusionnant les projections estimées et mesurées, les données sont ainsi complétées et on peut alors appliquer l'algorithme FBP 3D. Cependant, du fait de la grande quantité de LORs à rétroprojeter (malgré les compressions de données axiales et transversales, réalisées respectivement par *spanning* et *mashing*), l'algorithme 3DRP consomme beaucoup de temps de calcul. D'autres méthodes analytiques, basées sur des approximations, ont été mises en place pour réduire le temps de calcul tout en gardant un biais et une variance acceptables de l'image.

2.7.4 Les algorithmes de *rebinning*

Les algorithmes de *rebinning* modifient les projections acquises en mode 3D pour les mettre sous la forme de projections acquises en mode 2D. Les sinogrammes obliques sont donc réarrangés en sinogrammes directs et croisés. Il y a donc une compression de la taille des données, puisque de N^2 sinogrammes on passe à $2N - 1$ sinogrammes. Le but de tels algorithmes est d'accélérer le temps de calcul de la reconstruction d'images, en diminuant la taille des données. Cependant ils doivent être aussi performants que

l'algorithme 3DRP, qui est la référence des méthodes analytiques, en terme de qualité d'image finale. Il existe principalement trois algorithmes de *rebinning* : SSRB (*Single-Slice Rebinning* [Daube-Witherspoon 87], MSRB (*Multi-Slice Rebinning*) [Lewitt 94] et FORE (*Fourier Rebinning*)[Defrise 97]. L'algorithme SSRB est la plus simple à mettre en oeuvre puisqu'elle est basée sur l'approximation qu'une LOR oblique contribue au sinogramme direct se trouvant à mi-chemin entre les deux couronnes qu'elle relie. Cette approximation s'écrit de la manière suivante :

$$Xf(s, \phi, z, \Delta c) \sim Xf(s, \phi, z) \tag{2.43}$$

On peut remarquer que la qualité de cette approximation dépend d'une part de l'objet et d'autre part du scanner. En effet, si la source se trouve près de l'axe du scanner, cette méthode s'avère efficace (figure 2.17). Cependant, quand la source est au bord du champ de vue transversal, il y a un mauvais positionnement de la contribution de la LOR. Par conséquent, pour les scanners ayant un champ de vue important, cette méthode peut créer des distorsions sévères dans l'image. En réalité, il faut aussi considérer l'oblicité maximale des LORs. Dans le cas où θ_{max} est faible, (inférieur à 10°), les artefacts sont également faibles. La méthode MSRB est proche de SSRB, excepté que dans ce cas, une LOR oblique contribue à tous les plans transversaux qu'elle traverse. Cette méthode est aussi précise que 3DRP mais souffre d'une instabilité au bruit. Enfin, la méthode FORE, plus complexe à mettre en oeuvre, basée sur l'information donnée par la relation fréquence-distance [Edholm 86], est la plus précise, la plus stable au bruit et peut s'appliquer à des scanners autorisant un θ_{max} grand. Elle permet d'accélérer le temps de calcul d'un ordre de grandeur par rapport à 3DRP.

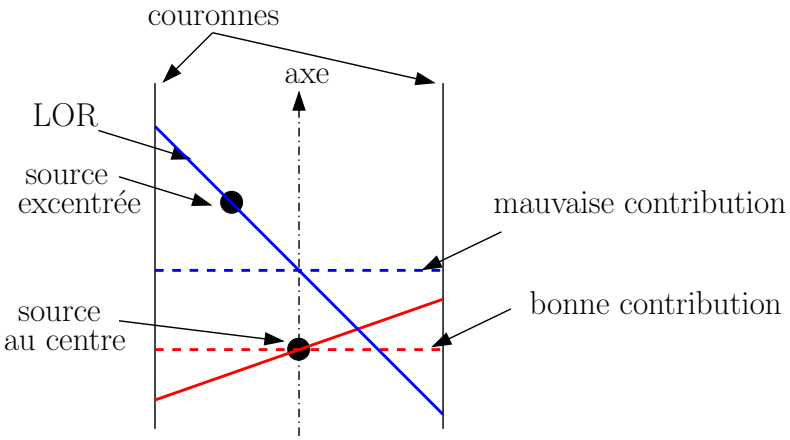


FIG. 2.17 – Illustration de la méthode de *rebinning* SSRB.

2.7.5 Les algorithmes itératifs 3D

Les algorithmes itératifs 3D suivent le même principe que les algorithmes exposés dans le cas 2D. La seule différence provient de la taille de la matrice système **H** qui est beaucoup

plus grande en 3D. Ainsi, les problèmes de stockage de **H** en mémoire et les temps de calcul élevés sont les défis que doivent affronter ces méthodes. Une solution fréquemment utilisée dans les scanners cliniques est d'appliquer l'algorithme FORE pour réarranger les projections 3D en projections 2D, suivi de l'algorithme de reconstruction OSEM 2D [Kinahan 96].

2.8 Conclusion

Ce chapitre résume la géométrie d'acquisition des données en mode 2D et 3D de la TEP ainsi que les principaux algorithmes de reconstruction d'images analytiques et itératifs. Le format classique de stockage des données, le sinogramme a été présenté. D'autres formats existent, comme les formats *linogram* [Edholm 87] et *planogram* [Brasse 04], qui sont adaptés pour des scanners composés de panneaux de détecteurs plans utilisés dans la technique de Tomographie d'Emission avec Détection de Coïncidence (TEDC) ou caméra PET/SPECT [van Lingen 00]. Nous avons vu que l'échantillonnage des données dans les plans transversaux respecte les conditions d'échantillonnage du schéma standard en faisceau parallèle. Dans le plan axial, l'échantillonnage est réalisé de manière empirique puisqu'aucune étude complète n'a été publiée jusqu'à présent en géométrie *fully 3D*, qui est la géométrie d'acquisition des données du mode 3D. Dans le prochain chapitre, nous utilisons le système de paramétrisation naturel des LORs qui conduit à un nouveau format de données et à de nouveaux schémas d'échantillonnage. La géométrie de l'étude correspond à la géométrie 3D à coupes parallèles, qui peut être mise en oeuvre dans le mode 2D en TEP.

Chapitre 3

Étude de l'échantillonnage naturel en TEP

3.1 Introduction

L'objectif de cette partie est d'étudier l'échantillonnage des données en TEP en utilisant une paramétrisation des LORs qui est cohérente avec la géométrie des scanners. Cette étude se limite aux scanners cylindriques fonctionnant en mode 2D où uniquement les LORs appartenant au plan des couronnes sont prises en compte (les LORs composant les sinogrammes croisés ne rentrent pas dans le cadre de cette étude). Pour cela, nous nous basons sur les résultats déterminés en géométrie 3DFBXRT (paragraphe 1.2.3) qui est reliée par un changement de variables linéaire au système de paramétrisation que nous adopterons. Les conditions de non recouvrement de Shannon seront appliquées afin de déterminer les schémas d'échantillonnage. Nous verrons que le rapport entre le diamètre du scanner et le support de l'objet joue un rôle dans la détermination du schéma d'échantillonnage le plus efficace. Enfin, nous proposerons un schéma de *mashing*, concept introduit au paragraphe 2.4.2.1, dans les cas où les schémas d'échantillonnage établis ne sont en pratique pas applicables directement.

3.2 L'échantillonnage en mode 2D pour scanners TEP cylindriques

3.2.1 La paramétrisation naturelle des lignes de réponse

Nous souhaitons utiliser la paramétrisation naturelle des lignes de réponse se situant dans une même couronne, qui prend en compte le fait que les détecteurs aux extrémités des LORs jouent exactement le même rôle et sont donc interchangeables, au contraire de la paramétrisation (s, ϕ). Pour cela, on décide de repérer les deux détecteurs en coïncidence par leurs coordonnées angulaires. De plus, comme le mode de fonctionnement 2D en TEP fait référence à la géométrie 3D à coupes parallèles, nous introduisons la troisième variable z qui a pour but d'identifier la position axiale de la couronne concernée (figure 3.1). On considère une fonction f de $\mathbb{R}^3$, de support cylindrique de rayon ρ, infiniment dérivable et essentiellement limitée en fréquence par Ω, placée dans un scanner cylindrique de rayon r, tel que $0 < \rho < r$. Soit g la transformée en rayons X de f, elle est définie par :

$$g(\psi_1, \psi_2, z) \quad : \quad [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{3.1}$$

$$g(\psi_1, \psi_2, z) \quad = \quad \int_{LOR(\psi_1, \psi_2, z)} f(t)dt \tag{3.2}$$

Posons $x = (\psi_1,\, \psi_2,\, z)^t \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ et soit $e_\pi = (0,\, \pi,\, 0)^t$. Nous pouvons exprimer g en fonction de la transformée 3DFBXRT de f, $D_{3D}f$ (définition 1.58), par la relation suivante :

$$g(x) = D_{3D}f(\mathbf{A}(x - e_\pi)) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$\mathbf{A}$ est la matrice qui permet d'exprimer les coordonnées (β, α, z) en fonction des variables (ψ_1, ψ_2, z), mais avec le décalage ajouté par e_π (figure 3.2). g possède une propriété de symétrie qui s'exprime simplement par la relation :

$$g(\psi_1, \psi_2, z) = g(\psi_2, \psi_1, z) \tag{3.4}$$

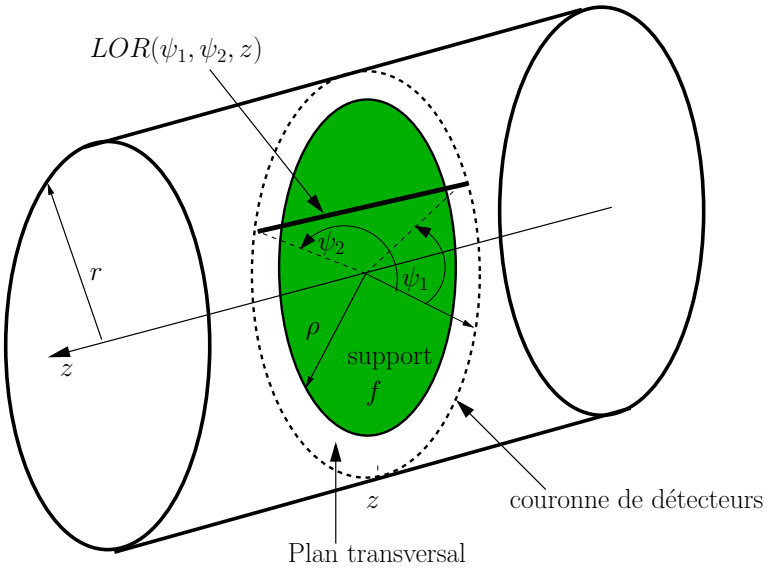


FIG. 3.1 – Paramétrisation d'une LOR avec les variables (ψ_1, ψ_2, z).

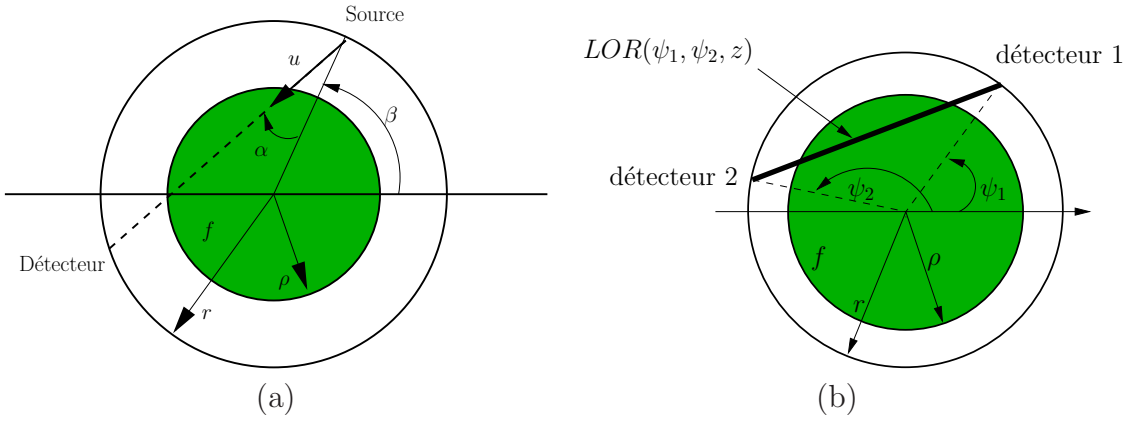


FIG. 3.2 – (a) Rappel de la paramétrisation d'une ligne de projection de vecteur directeur u dans la géométrie de type faisceau divergent. (b) Une nouvelle paramétrisation des LORs proposée dans un plan transversal de coordonnée axiale z.

3.2.2 Le support essentiel de $\hat{g}$

La transformée de Fourier de g, $\hat{g}$, peut s'exprimer en fonction de $\widehat{D_{3D}f}$ et se déduit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{g} &: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad (3.5)\\
\widehat{g}(\xi) &= \int_{[0;2\pi[}\int_{[0;2\pi[}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i<x,\xi>}dx\\
&= \int_{[0;2\pi[}\int_{[0;2\pi[}\int_{\mathbb{R}} D_{3D}f(\mathbf{A}(x-e_\pi))e^{-i<x,\xi>}dx\\
&= \int_{[0;2\pi[}\int_{[0;2\pi[}\int_{\mathbb{R}} D_{3D}f(\mathbf{A}x)e^{-i<x,\xi>+im\pi}dx\\
&= \frac{(-1)^m}{|\det\mathbf{A}|}\int_{[0;2\pi[}\int_{[0;2\pi[}\int_{\mathbb{R}} D_{3D}f(x)e^{-i<\mathbf{A^{-1}}x,\xi>}dx\\
&= \frac{(-1)^m}{|\det\mathbf{A}|}\int_{[0;2\pi[}\int_{[0;2\pi[}\int_{\mathbb{R}} D_{3D}f(x)e^{-i<x,\mathbf{A^{-t}}\xi>}dx\\
&= \frac{(-1)^m}{|\det\mathbf{A}|}\widehat{D_{3D}f}(\mathbf{A^{-t}}(\xi))
\end{aligned}$$

où $\xi=(k,m,\zeta)^t\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ et $<x,\xi>=k\psi_1+m\psi_2+\zeta z$ définit un produit scalaire. On en déduit que $|\widehat{g}(\xi)|$ est non négligeable si et seulement si $|\widehat{D_{3D}f}(\mathbf{A^{-t}}(\xi))|$ est non négligeable, c'est à dire, si et seulement si $\mathbf{A^{-t}}(\xi)$ appartient au support essentiel de $\widehat{D_{3D}f}$. L'expression analytique du support essentiel de $\widehat{D_{3D}f}$ est énoncée à la relation 1.60. On effectue le changement de variable indiqué par $\mathbf{A^{-t}}$:

$$\mathbf{A^{-t}}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{soit}\quad\begin{cases}k' &= k+m\\ m' &= 2m\\ \zeta' &= \zeta\end{cases} \qquad (3.6)$$

où (k',m',ζ') font ici référence aux variables de Fourier de (α,β,z). On détermine ainsi l'expression du support essentiel de $\hat{g}(k,m,\zeta)$, noté K_g, représenté à la figure 3.3 :

$$\begin{aligned}K_g=\{(k,m,\zeta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}, |k-m|^2+r^2\zeta^2<\Omega^2r^2; \qquad (3.7)\\ r|k+m|<\rho|k-m|\}\end{aligned}$$

3.2.3 Échantillonnage de g

Dans l'étude des schémas d'échantillonnage de g, nous allons considérer en premier le cas où $\eta=\rho/r=2/3$, qui correspond à peu près au rapport entre le diamètre du tronc d'un adulte (2ρ) et le diamètre d'un scanner TEP ($2r$). Pour cela nous recherchons

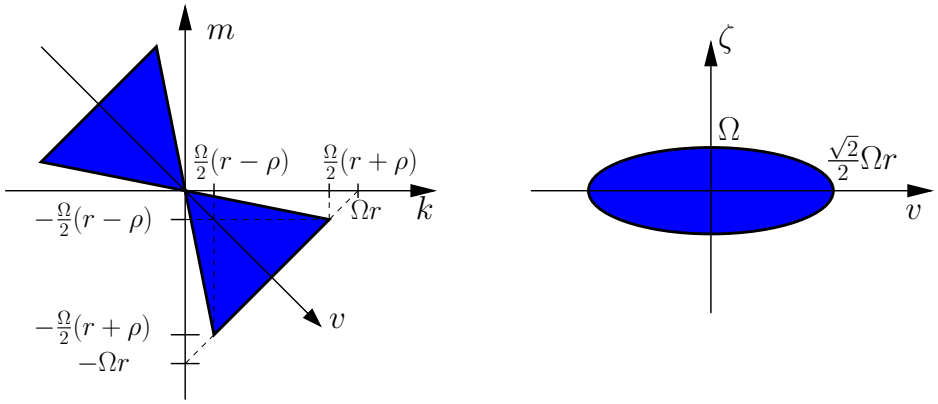


FIG. 3.3 – K_g : support essentiel de $\hat{g}$ représenté pour $\eta = \rho/r = 2/3$, en projection dans les plans (k, m) (gauche) et (v, ζ) (droite).

les réseaux d'échantillonnage L qui respectent les conditions de non recouvrement de Shannon. Le schéma standard (c'est à dire se traduisant par un réseau rectangulaire) le plus compact et respectant ces conditions, est généré par la matrice diagonale suivante $\mathbf{W_S^{-t}}$:

$$2\pi\mathbf{W_S^{-t}} = \Omega \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{W_S} = \tfrac{2\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

On a dans ce cas : $|\det \mathbf{W_S}| = \left(\frac{2\pi}{\Omega r}\right)^3 \frac{r}{2}$. La figure 3.4 illustre le respect des conditions de non recouvrement dans l'espace de Fourier du réseau dual.
Un autre schéma d'échantillonnage de type hexagonal, recouvre de manière plus compacte l'espace de Fourier et est généré par la matrice $\mathbf{W_H^{-t}}$:

$$2\pi\mathbf{W_H^{-t}} = \Omega \begin{pmatrix} r & 0 & \frac{r}{2} \\ 0 & r & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{W_H} = \tfrac{2\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{r}{2\sqrt{3}} & -\frac{r}{2\sqrt{3}} & \frac{r}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

On a dans ce cas : $|\det \mathbf{W_H}| = \left(\frac{2\pi}{\Omega r}\right)^3 \frac{r}{\sqrt{3}}$, ce qui signifie que le schéma hexagonal est $\frac{2}{\sqrt{3}}$ plus efficace que le schéma standard. La figure 3.5 illustre le respect des conditions de non recouvrement dans le domaine de Fourier du réseau hexagonal.
Le réseau d'échantillonnage dans le plan (k, m) est une grille carrée dans le schéma standard comme dans le schéma hexagonal. Il en est alors de même dans le plan (ψ_1, ψ_2) de l'espace direct. C'est une conséquence de la relation de symétrie que vérifie g. Les deux variables angulaires (ψ_1, ψ_2) doivent donc être échantillonnées de la même manière. La différence entre les deux réseaux $\mathbf{W_S^{-t}}\mathbb{Z}^3$ et $\mathbf{W_H^{-t}}\mathbb{Z}^3$ provient de l'empilement vertical des grilles carrées qui sont simplement superposées dans le schéma standard, alors que dans le schéma hexagonal, elles sont décalées dans le plan (v, ζ), pavant de manière plus compacte l'espace de Fourier. Cet empilement est du même type que celui mis en place dans la figure 1.21 pour l'échantillonnage de $D_{3D}f$ et le même argument justifie qu'il n'y a pas recouvrement. Cependant à la différence de l'échantillonnage de $D_{3D}f$, le réseau hexagonal décrit ici n'est pas entrelacé : en effet, cela ne respecterait pas la contrainte imposée

par le fait que les deux variables (ψ_1, ψ_2) soient symétriques et sont échantillonnées de la même manière.

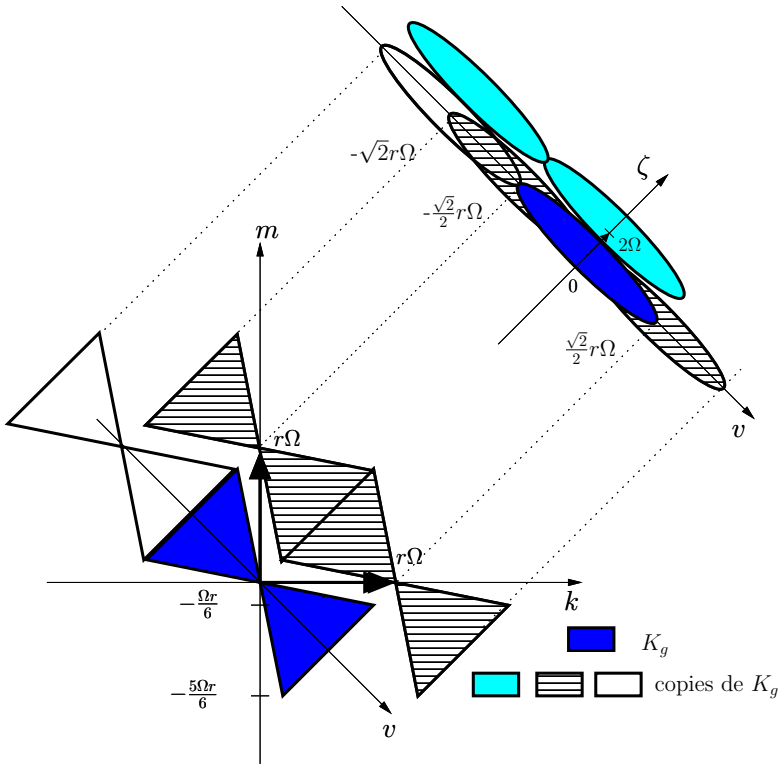


FIG. 3.4 – Schéma d'échantillonnage standard dans le cas où $\eta = 2/3$

3.2.4 Les interprétations géométriques

3.2.4.1 Le réseau d'échantillonnage standard

Dans l'espace direct, le réseau d'échantillonnage standard L_S (figure 3.6) s'écrit de la façon suivante :

$$L_S = \mathbf{W_S}\mathbb{Z}^3 = \{(\psi_1^j, \psi_2^l, z_k) : \psi_1^j = j\frac{2\pi}{r\Omega}, \psi_2^l = l\frac{2\pi}{r\Omega}, z_k = k\frac{\pi}{\Omega}, \\ j = 0, ..., P-1,\ l = 0, ..., P-1,\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{3.10}$$

où P désigne le nombre de positions angulaires sur $[0, 2\pi]$, équivalent au nombre de détecteurs. Ce schéma suggère que le pas angulaire $\Delta\psi_1$(le même que $\Delta\psi_2$) entre deux détecteurs adjacents sur une couronne et le pas axial Δz entre chaque couronne doivent vérifier :

$$\Delta\psi_1 \leq \tfrac{2\pi}{r\Omega} \quad , \quad \Delta z \leq \tfrac{\pi}{\Omega} \tag{3.11}$$

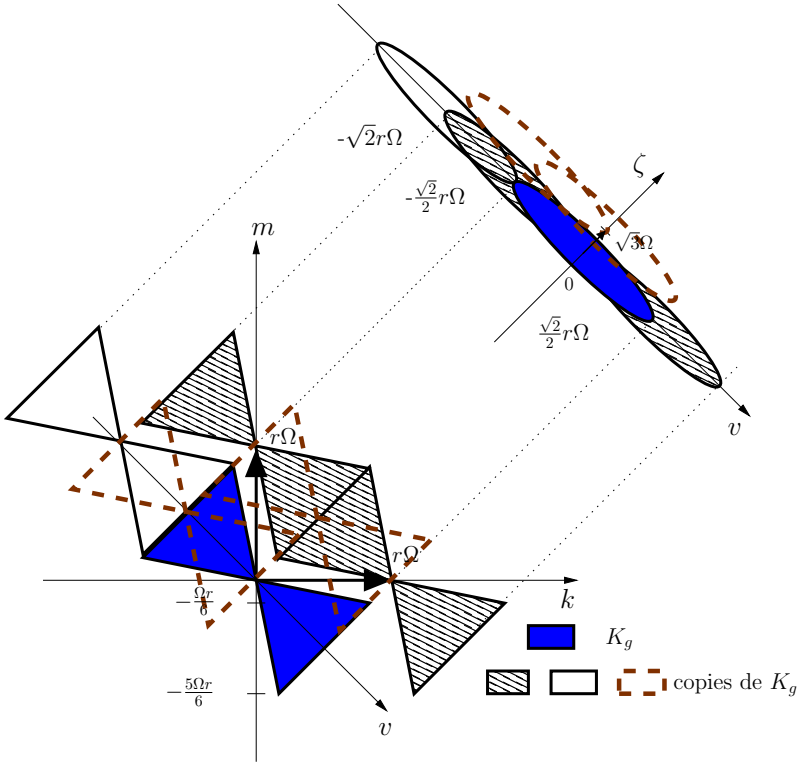


FIG. 3.5 – Schéma hexagonal dans le cas où $\eta = 2/3$. Les deux copies de K_g en pointillé représentées dans le plan (k, m) sont situées à la position $\zeta = \sqrt{3}\Omega$, comme on peut le voir dans le plan (v, ζ). Pour vérifier les conditions de non recouvrement, il faut vérifier que K_g ne possède aucune intersection avec ses copies translatées suivant le réseau d'échantillonnage. Le cas le moins trivial à montrer est celui de la copie en traits pointillés qui semble intersecter sur les coins avec K_g d'après la représentation dans le plan (k, m). Cependant, dans le plan (v, ζ), l'intersection semble avoir lieu au niveau du centre de l'ellipse. Une démonstration du non recouvrement des supports basée sur cette remarque est donnée dans [Desbat 97], dans le cas du schéma hexagonal entrelacé.

Considérons le cas le plus optimal où $\Delta\psi_1 = 2\pi/r\Omega$ et $\Delta z = \pi/\Omega$. Δz correspond à la longueur axiale l_z d'un détecteur. **Par conséquent, en faisant l'approximation que la longueur tangentielle d'un détecteur l_t vérifie : $l_t = r\Delta\psi_1$, nous déduisons que, dans les conditions de l'échantillonnage standard optimal, l_z doit être égal à $l_t/2$. Cette relation constitue le principal résultat de cette étude. La conséquence aussi importante consiste à dire que, dans le cas d'un détecteur ayant une surface de détection carrée par exemple, $l_t = l_z$, il y aura sur-échantillonnage dans le plan transversal d'un facteur 4 (2×2). Dans ce cas, c'est la longueur axiale du détecteur, l_z, qui fixe la résolution avec laquelle l'image de l'objet est reconstruite.**

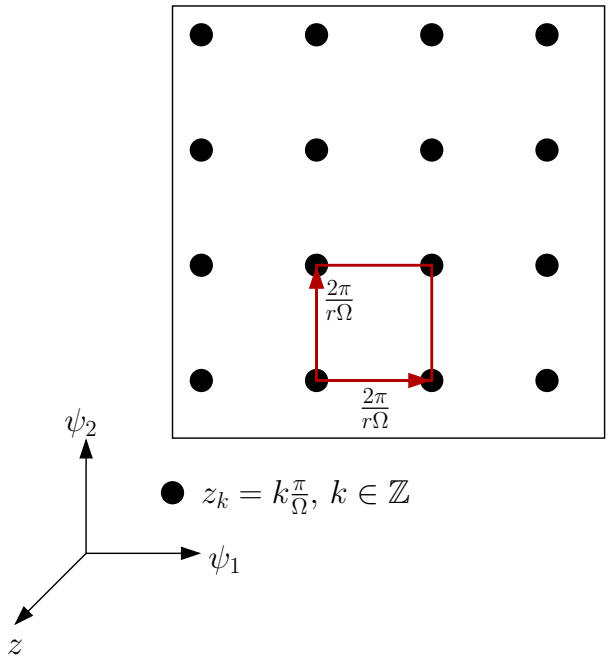


FIG. 3.6 – Schéma d'échantillonnage standard L_S.

3.2.4.2 Le réseau d'échantillonnage hexagonal

Dans l'espace direct, le réseau d'échantillonnage hexagonal L_H (figure 3.7) s'écrit de la façon suivante :

$$L_H = \mathbf{W_H}\mathbb{Z}^3 = \{(\psi_1^j, \psi_2^l, z_k) : \psi_1^j = j\frac{2\pi}{r\Omega}, \psi_2^l = l\frac{2\pi}{r\Omega}, z_k = k\frac{\pi}{\sqrt{3}\Omega}, \quad j = 0, ..., P-1,\ l = 0, ..., P-1,\ k \in \mathbb{Z},\ j+l+k \text{ pair}\} \tag{3.12}$$

Nous allons détailler la définition de ce réseau. Soit $l = (l_1, l_2, l_3)^t \in \mathbb{Z}^3$:

$$\mathbf{W_H}l = \frac{2\pi}{r\Omega}\left(l_1, l_2, -\frac{l_1+l_2}{2\sqrt{3}} + \frac{l_3}{\sqrt{3}}\right)^t \tag{3.13}$$

pour $l_1 + l_2$ pair, c'est à dire, $l_1 + l_2 = 2p, p \in \mathbb{Z}$, on obtient pour la coordonnée en z de $\mathbf{W_H}l$:

$$\frac{2\pi}{\Omega}\frac{-p + l_3}{\sqrt{3}} = 2p'\frac{\pi}{\sqrt{3}\Omega} \quad , \quad p' \in \mathbb{Z} \tag{3.14}$$

pour $l_1 + l_2$ impair, c'est à dire, $l_1 + l_2 = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$, on obtient pour la coordonnée en z de $\mathbf{W_H}l$:

$$\frac{2\pi}{\Omega}\left(\frac{-p + l_3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = (2p' - 1)\frac{\pi}{\sqrt{3}\Omega} \quad , \quad p' \in \mathbb{Z} \tag{3.15}$$

Par conséquent, pour chaque plan transversal séparé d'un pas axial de $\pi/\sqrt{3}\Omega$, seulement la moitié des lignes de réponse est nécessaire. Pour les couronnes de positions axiales $j\pi/\sqrt{3}\Omega$, $j \in 2\mathbb{Z}$, seuls sont pris en compte les événements enregistrés par deux détecteurs ayant des positions de parités identiques. Pour les couronnes adjacentes à la couronne j, celles d'indices $j + 1$ et $j - 1$, ce sont les événements coïncidents entre deux détecteurs de parités différentes qui sont pris en compte. La conséquence de ce schéma est un entrelacement axial et transversal des lignes de réponses (figure 3.8). En résumé, dans le cas hexagonal, les pas d'échantillonnage angulaire, $\Delta\psi_1$ et $\Delta\psi_2$ (ils sont identiques), et axial,Δz doivent vérifier :

$$\Delta\psi_1 \leq \frac{2\pi}{\Omega r} \quad , \quad \Delta z \leq \frac{\pi}{\Omega\sqrt{3}} \tag{3.16}$$

En considérant le cas optimal, on obtient que dans les conditions d'échantillonnage hexagonal, l_z est égal à $l_t/2\sqrt{3}$. Par rapport au schéma standard, le schéma hexagonal exige un échantillonnage axial presque deux fois plus grand. De plus, l'entrelacement transversal et axial des données, correspond en fait à une non utilisation de données disponibles et stockées (en effet, bien qu'on n'ait besoin que des LORs entrelacées, tous les détecteurs sont nécessaires, par conséquent les LORs non nécessaires sont mesurées !). Ce schéma ne semble donc pas pertinent dans le cas de la TEP, puisqu'il requiert davantage de couronnes de détecteurs et n'utilise pas toutes les données mesurées. Par ailleurs, le gain en efficacité de $2/\sqrt{3} \sim 1,15$ par rapport au schéma standard est faible.
Afin de compléter l'étude de l'échantillonnage de g, nous allons nous intéresser au cas où $\eta \neq 2/3$. En particulier, le cas correspondant à $\eta = 1/3$ est intéressant à étudier, avant de généraliser.

3.2.5 Étude de l'échantillonnage de g pour $\eta = 1/3$

Le rapport $\eta = \rho/r$ est important puisqu'il influe sur la forme du support K_g et par conséquent sur les schémas d'échantillonnage. Nous étudions ici le cas particulier où $\eta = 1/3$, qui peut s'appliquer au cas de l'examen d'un enfant, qui a un tronc moins large qu'un adulte. Pour cette valeur de η, le support essentiel de g devient plus étroit comme il est représenté sur la figure 3.9. Cela ne change cependant rien dans la direction ζ.

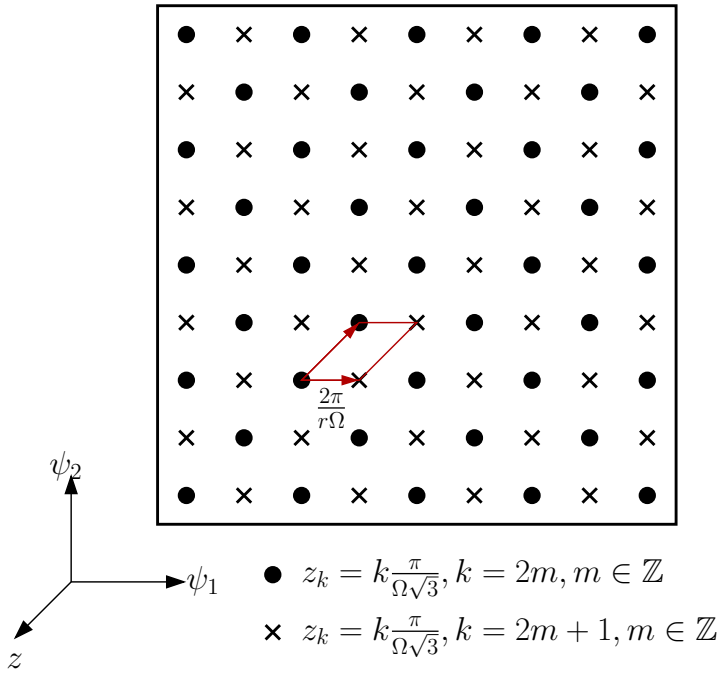
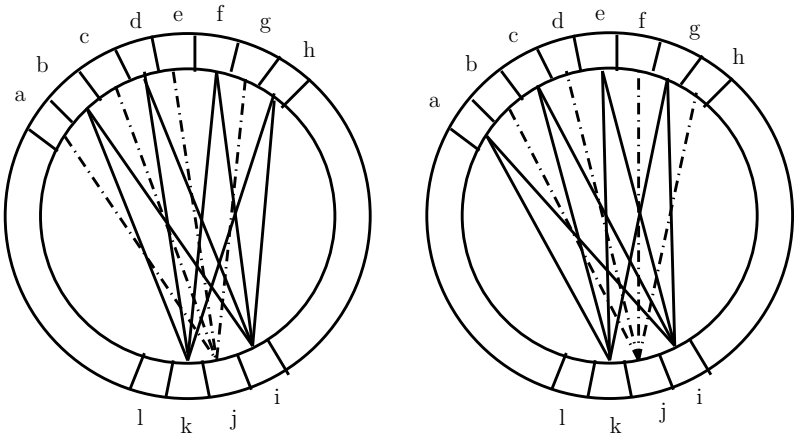


FIG. 3.7 – Représentation en projection dans le plan (ψ_1, ψ_2) du réseau d'échantillonnage hexagonal L_H.



(a) Plan indice j (b) Plan indice $j+1$ ou $j-1$

FIG. 3.8 – Conséquences géométriques du schéma hexagonal : il y a un entrelacement axial entre deux couronnes voisins.

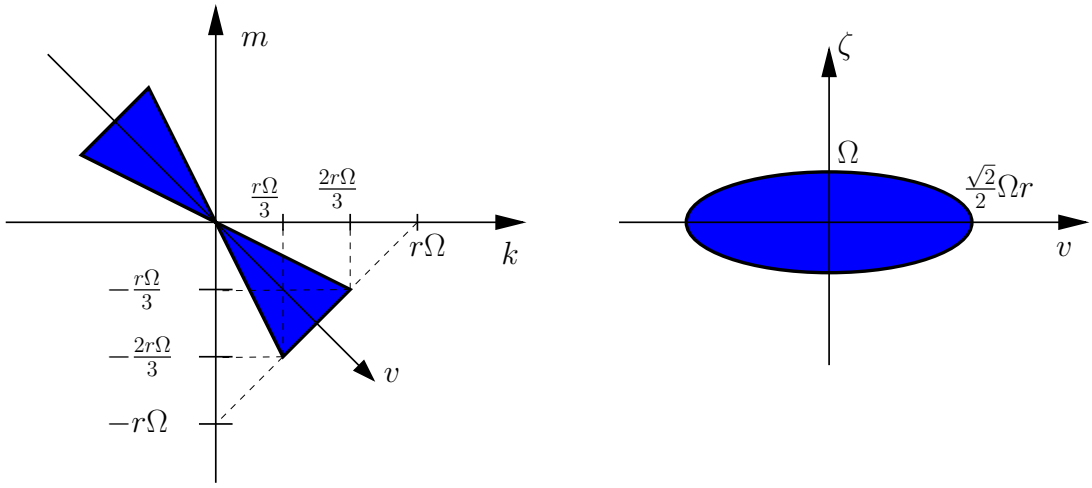


FIG. 3.9 – K_g : support essentiel de $\hat{g}$ représenté pour $\eta = 1/3$

g peut être échantillonnée sur le réseau standard généré par la matrice $\mathbf{W_S}$ (relation 3.8). Cependant on peut générer un réseau dual $L_e^{\perp}$ (figure 3.10), sur lequel les translatés de K_g remplissent de manière plus compacte le domaine de Fourier, par la matrice $\mathbf{W_e^{-t}}$ suivante :

$$2\pi\mathbf{W_e^{-t}} = \Omega \begin{pmatrix} r & 0 & \frac{r}{3} \\ 0 & r & \frac{r}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{W_e} = \frac{2\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{r}{2} & -\frac{r}{2} & \frac{3}{2}r \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Le réseau efficace L_e (figure 3.11) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L_e = \mathbf{W_e}\mathbb{Z}^3 = \{(\psi_1^j, \psi_2^l, z_k) : \psi_1^j = j\frac{2\pi}{r\Omega}, \psi_2^l = l\frac{2\pi}{r\Omega}, z_k = k\frac{\pi}{\Omega}, \\ j = 0, ..., P-1,\ l = 0, ..., P-1,\ k \in \mathbb{Z}\ , j + l + 2k \in 3\mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ce résultat se démontre en prenant $l \in \mathbb{Z}^3$ tel que $l = (l_1, l_2, l_3)^t$, en calculant $\mathbf{W_e}l$, et en traitant les cas où $l_1 + l_2 = 3m$, $l_1 + l_2 = 3m+1$ et $l_1 + l_2 = 3m+2$, $m \in \mathbb{Z}^3$ (démonstration similaire au cas du réseau hexagonal). Ce schéma efficace indique qu'en prenant une LOR sur trois de manière entrelacée transversalement mais aussi axialement suivant trois couronnes adjacentes (figure 3.12), on échantillonne suffisamment pour pouvoir reconstruire à la résolution maximale. Ce schéma est donc trois fois plus efficace que le schéma standard car exige trois fois moins de données, ce qui est confirmé par le calcul du déterminant de $\mathbf{W_e}$, $|\det \mathbf{W_e}| = 3|\det \mathbf{W_S}|$. Comparé au réseau hexagonal, ce schéma est plus efficace car l'espacement entre les couronnes est ici égal à π/Ω, comme dans le cas standard.

L_e peut également s'exprimer comme la réunion de 9 réseaux standards $L_{S'}$ qui sont générés par une même matrice $\mathbf{W_{S'}}$ mais avec un décalage. Soit la matrice $\mathbf{W_{S'}}$ et les vecteurs a_1 et a_2 définis par :

$$\mathbf{W_{S'}} = \frac{6\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \end{pmatrix} \quad a_1 = \frac{2\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \frac{2\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{r}{2} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

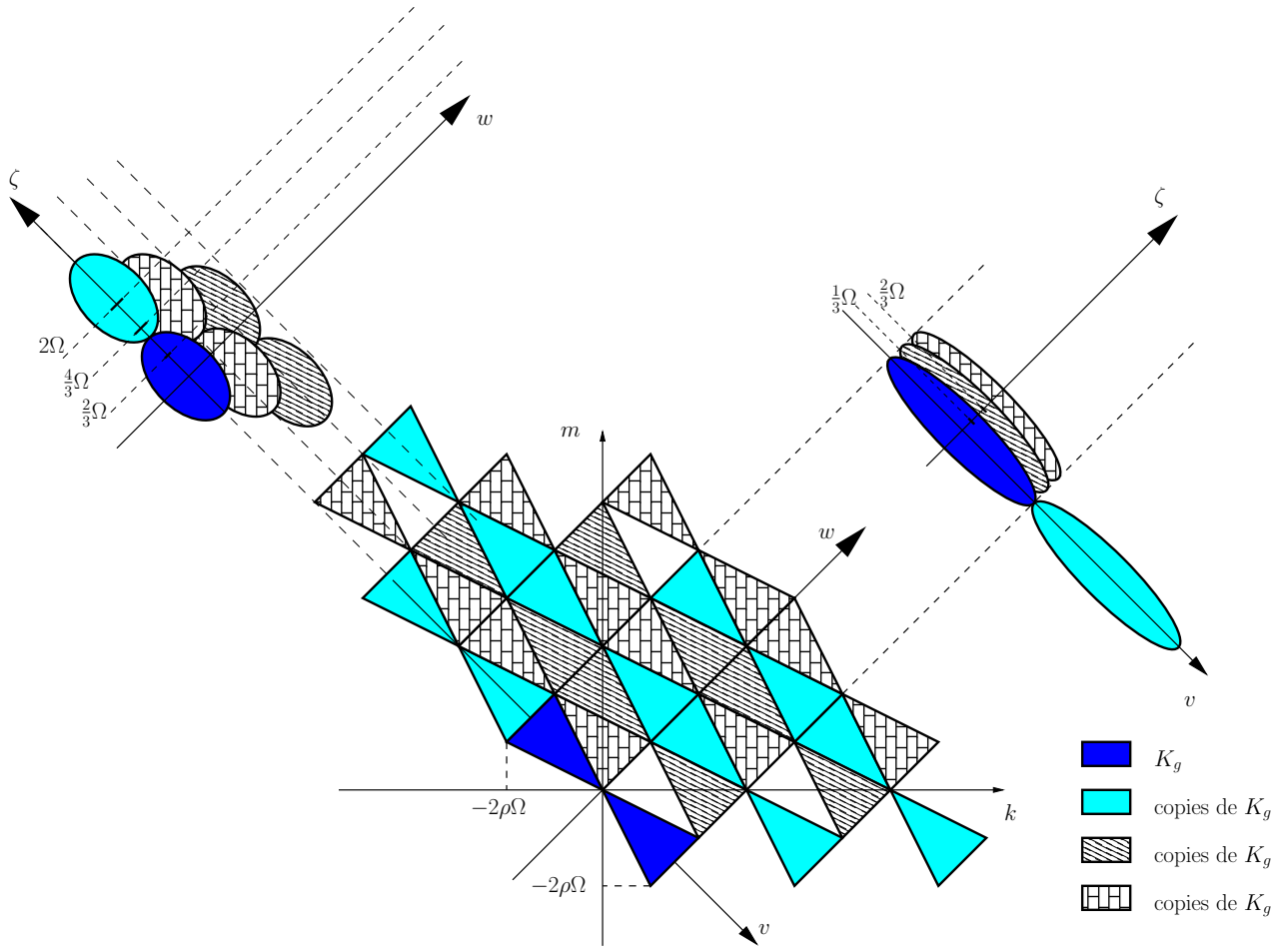
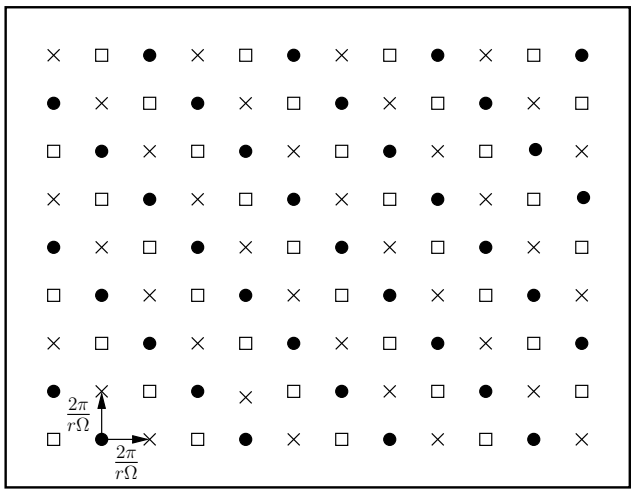
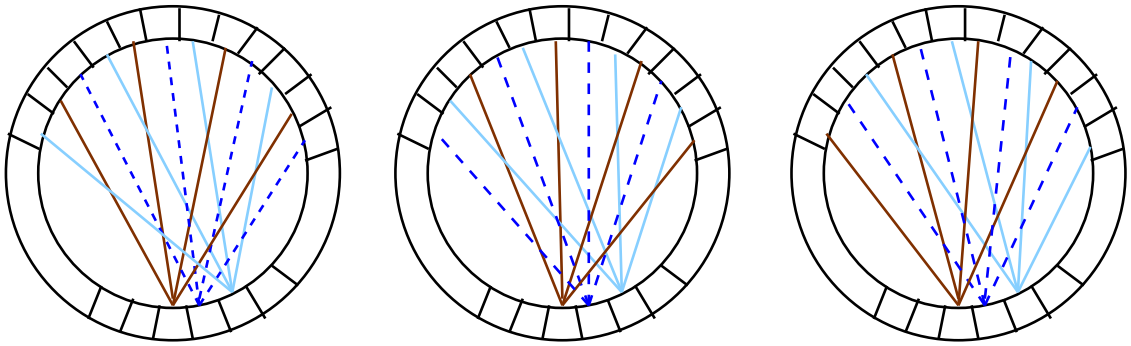


FIG. 3.10 – Réseau d'échantillonnage efficace dans le domaine de Fourier pour $\eta = 1/3$



● $z_k = k\frac{\pi}{\Omega}$, $k = 3m$, $m \in Z$
× $z_k = k\frac{\pi}{\Omega}$, $k = 3m+1$, $m \in Z$
□ $z_k = k\frac{\pi}{\Omega}$, $k = 3m+2$, $m \in Z$

FIG. 3.11 – Réseau d'échantillonnage efficace dans le domaine direct pour $\eta = 1/3$ en projection dans le plan (ψ_1, ψ_2)



plans z indice $3m$ | plans z indice $3m+1$ | plans z indice $3m+2$

FIG. 3.12 – Le schéma efficace indique un entrelacement transversal et axial : dans les plan transversaux z_k, une LOR sur 3 est pris en compte, les mêmes LORs étant traitées de nouveaux aux plans z_{k+3}. Dans les plans z_k, z_{k+1} et z_{k+2}, les LORs traitées sont entrelacées.

Alors, L_e s'exprime de la manière suivante :

$$L_e = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_e} l\} = \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{a_1 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{2a_1 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \quad (3.20)$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{a_2 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{a_1 + a_2 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{2a_1 + a_2 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right)$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{2a_2 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{a_1 + 2a_2 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{2a_1 + 2a_2 + \mathbf{W_{S'}} l\}\right)$$

La démonstration de ce résultat se trouve en annexe A.

3.2.6 Généralisation

Le réseau hexagonal L_H peut être appliqué quelque soit la valeur de η et s'avère être le plus efficace quand $\eta \geq \frac{2}{3}$. Par ailleurs, le réseau L_e est quand à lui utilisable pour $\eta = 1/3$ et est plus efficace que L_H. En fait, c'est également vrai pour $\eta < 1/3$, mais ces cas sont en pratique rares. La question se pose donc pour $\eta \in [1/3, 2/3]$: est ce qu'un réseau de type L_e peut s'appliquer ? La réponse est négative. En effet, nous constatons que pour $\eta = 1/3$, le plan (ψ_1, ψ_2) est occupé de manière compacte. Un support plus large causerait des intersections entre les copies du support.

3.3 Schéma de compression des données

Comme il a été vu dans le chapitre 2 avec la paramétrisation des lignes de réponses en géométrie parallèle, il est possible de compresser les données après acquisition, sans dégrader la résolution de l'objet reconstruit. Cette compression est effectuée en sous-échantillonnant suivant le paramètre ϕ. Nous proposons ici un schéma de *mashing* à deux dimensions, puisqu'il concerne le couple (ψ_1, ψ_2), basé sur le schéma d'échantillonnage hexagonal. Le schéma hexagonal est mise en oeuvre par l'utilisation de détecteurs rectangulaires dont la dimension tangentielle est $2\sqrt{3}$ fois plus grande que la dimension axiale. Par ailleurs, il faut réaliser un entrelacement transversal et axial des LORs mesurées. Comme l'échantillonnage axial est le facteur limitant, si nous considérons des détecteurs de forme carrée de côté égal au pas d'échantillonnage axial, il y a alors sur-échantillonnage dans les plans transversaux. Ce sont ces données sur-échantillonnées qui sont regroupées dans les mailles de *mashing* représentées à la figure 3.13.

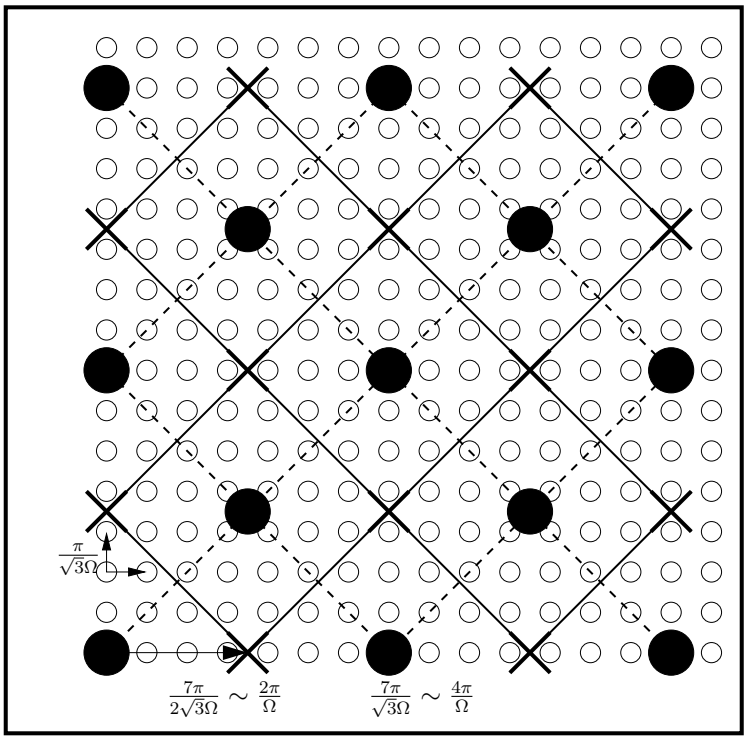


FIG. 3.13 – Schéma de mashing 2D centré sur les points du réseau hexagonal dans le système (ψ_1, ψ_2). Les points blancs représentent les lignes de réponse sur-échantillonnées avec des détecteurs carrés. Les points noirs et les croix qui représentent les points d'échantillonnage du système hexagonal dans deux couronnes adjacentes, sont les centres des mailles de *mashing* qui sont représentées en trait plein et pointillés pour différencier les deux couronnes adjacentes. Les mailles sont entrelacées axialement comme le schéma hexagonal. En moyenne, 24.5 lignes de réponse peuvent être regroupées dans une maille.

3.4 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle paramétrisation dans la formulation de l'échantillonnage pour le cas particulier de la TEP en mode 2D. Le schéma d'échantillonnage hexagonal qui s'avère être le plus efficace pour des valeurs de η les plus communes n'est en pratique pas pertinent en TEP, puisqu'il requiert davantage de détecteurs sans utiliser toutes les données mesurées. Cependant, l'utilisation du schéma de mashing présenté, basé sur l'étude du schéma hexagonal, peut être envisagé dans l'objectif de compresser les données sans perte de résolution tout en diminuant le temps de traitement. Pour des valeurs de η faibles, le réseau d'échantillonnage L_e est de loin le plus efficace. Cependant, la contrainte sur η est forte.
Dans le cas général, le schéma standard rectangulaire est donc le plus intéressant à mettre en oeuvre. Le principal résultat à retenir est que le schéma standard indique l'utilisation de détecteurs rectangulaires dont la longueur tangentielle est le double de la longueur axiale. Cette étude théorique est parue dans [Grondin 06, Grondin 07b]. Nous allons par la suite vérifier ce résultat en réalisant des tests numériques. Nous retrouverons également, par des simulations Monte Carlo adaptées pour reproduire des examens TEP, la forme du support K_g.

Chapitre 4

Simulations numériques et Monte Carlo

4.1 Introduction

Des simulations numériques ont été réalisées afin de vérifier les schémas d'échantillonnage établis théoriquement. Dans un premier temps, nous allons vérifier la forme du support K_g de $\hat{g}$ de laquelle sont déduits les schémas d'échantillonnage proposés. Ensuite, nous comparerons un schéma d'échantillonnage standard produit par des détecteurs carrés avec le schéma d'échantillonnage rectangulaire proposé au chapitre 3. La qualité de la reconstruction des images dans les deux cas sera évaluée.
Les simulations numériques réalisées ne décrivant pas fidèlement les phénomènes physiques en jeu en tomographie d'émission, nous avons mis en place des simulations Monte Carlo qui prennent en compte le caractère stochastique de l'imagerie nucléaire. Nous montrerons ainsi les résultats obtenus pour la vérification du support K_g dans les conditions réalistes d'un examen TEP.

4.2 Les simulations numériques

4.2.1 Vérification du support essentiel K_g

4.2.1.1 Méthodes

L'objectif de cette simulation est de vérifier la forme du support essentiel K_g. La démarche consiste à créer un fantôme numérique, à calculer ses projections géométriques dans le format (ψ_1, ψ_2, z) et à prendre le module de la transformée de Fourier des projections. Le fantôme numérique utilisé représente une source sphérique définie par trois indicatrices de boules, d'amplitudes croissantes, concaténées l'une dans l'autre. Les caractéristiques du fantôme sont données dans le tableau 4.1. L'idée est de construire ainsi une fonction de densité de radiotraceur suffisamment lisse (figure 4.1.(a)), afin que sa transformée de Fourier décroisse suffisamment rapidement à l'infini, de manière à ce que son support puisse être considéré essentiellement limité. Le champ de vue est un cube de demi arête égal à 1. Le scanner simulant les projections de la source est constitué de 300 détecteurs et de 32 couronnes pour un rayon de 1.5 (cas $\eta = 2/3$). Les détecteurs du scanner sont de forme carrée, c'est à dire que nous avons la relation $l_t = l_z$. Les projections sont générées par un algorithme de lancer de rayons dont le principe est d'émettre des droites dans les directions de l'espace dictées par le schéma d'échantillonnage, et de calculer la longueur d'intersection du rayon avec la source. Nous avons réalisé l'approximation qui consiste à échantillonner le parallélépipède formé par deux détecteurs par une seule ligne. Les rayons sont paramétrés par les variables angulaires (ψ_1, ψ_2, z).

4.2.1.2 Résultats

Les projections de la section centrale de la source sont représentées à la figure 4.1.(b). Cette image de $g(\psi_1, \psi_2, 0)$ est de taille 300×300 puisqu'il y a 300 détecteurs sur un tour complet de 2π. L'image est composée de deux branches symétriques par rapport à l'anti-diagonale. Cela s'explique par la relation de symétrie que vérifie g : $g(\psi_1, \psi_2, z) = g(\psi_2, \psi_1, z)$. De plus, ces paramètres étant chacun 2π périodique, des translations horizontales ou verticales du diagramme forment une courbe sinusoïdale oblique. La section centrale du support essentiel du module de la transformée de Fourier des projections est représentée à la figure 4.1.(c). Le support n'est pas orienté de la même façon que dans la représentation théorique (figure 3.3), puisqu'ici les fréquences positives augmentent du centre vers le bas de l'image (l'axe m de la figure 3.3 est orienté dans la direction opposée). La figure 4.1.(d) est une représentation en isosurface à 1/100 de la valeur maximale de $|\hat{g}|$, permettant de visualiser K_g en trois dimensions. Nous retrouvons donc bien l'allure du support essentiel de $\hat{g}$ qui a été déterminée théoriquement (équation 3.7).

c_x	c_y	c_z	r	d
0.9	0	0	0.03	3
0.9	0	0	0.05	2
0.9	0	0	0.07	1

TAB. 4.1 – Les caractéristiques du fantôme utilisé pour calculer K_g : c_x, c_y et c_z représentent les coordonnés du centre des sphères (l'axe x est vertical et orienté vers le bas, l'axe y est horizontal et orienté vers la droite), r et d, respectivement leur rayon et densité.

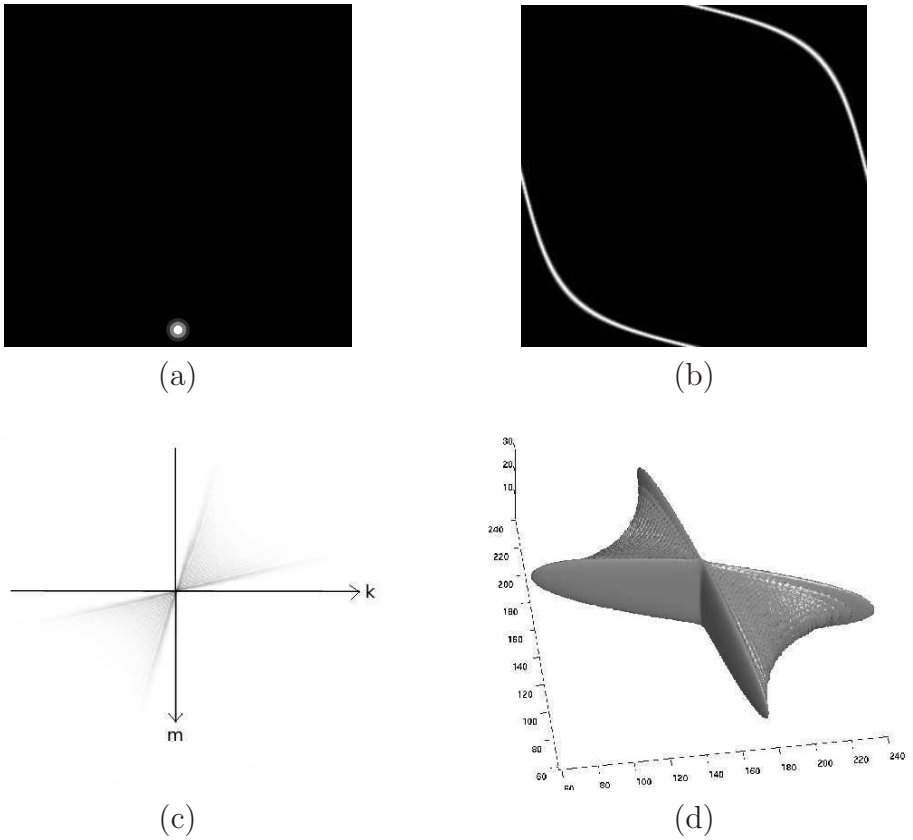


FIG. 4.1 – Résultats de la simulation numérique des projections d'une source sphérique par lancer de rayon. (a) Représentation de la source simulée f. (b) Image des projections $g(\psi_1, \psi_2, 0)$ dans le format (ψ_1, ψ_2, z) de la coupe centrale ($z = 0$) du fantôme. (c) Section centrale du support essentiel de la transformée de Fourier des projections : image de $|\hat{g}(k, m, 0)|$. (d) Représentation en isosurface de K_g : 1% $\max |\hat{g}|$.

4.2.2 Simulations des schémas d'échantillonnage

4.2.2.1 Le principe

L'objectif de cette partie est d'illustrer le résultat principal de notre étude de l'échantillonnage des données en TEP 2D. Nous rappelons ce résultat qui affirme que, dans le système de paramétrisation (ψ_1, ψ_2), l'utilisation de détecteurs rectangulaires tels que leur longueur tangentielle soit égale au double de leur longueur axiale, c'est à dire $l_t = 2l_z$, permet de reconstruire l'image à la résolution maximale, en particulier à la même résolution que peut atteindre un scanner composé de détecteurs carrés, $l_t = l_z$. Le principe de cette expérience est de simuler des projections d'un même fantôme selon les schémas d'échantillonnage rectangulaire et carré pour une longueur l_z donnée qui fixe la résolution spatiale de l'image. Par conséquent, pour un scanner de rayon et de longueur donnés, le schéma carré nécessite l'utilisation de deux fois plus de détecteurs que le schéma rectangulaire et génère ainsi quatre fois plus de données. Nous allons comparer la qualité des images reconstruites dans les deux cas.

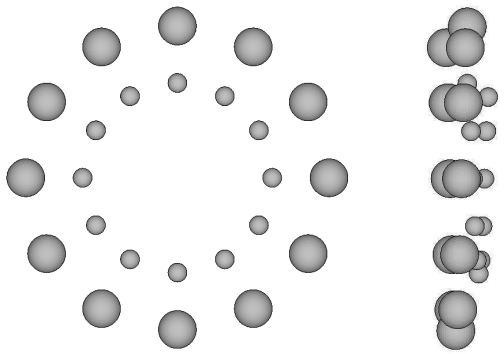
4.2.2.2 Description des simulations

Le scanner simulé a un rayon de 1.5 et un champ de vue cubique de demi arête égale à 1. Il est constitué de 32 couronnes. Pour l'application du schéma d'échantillonnage carré, les couronnes sont composées de 300 détecteurs, leur longueur tangentielle étant égale à l'espacement entre les couronnes (équivalent à leur longueur axiale) avec $l_t^c = l_z^c = 0.031$, où l'exposant c signifie carré. Quant au schéma d'échantillonnage rectangulaire, 150 détecteurs composent les couronnes, leur longueur tangentielle étant deux fois plus grande que l'espacement entre couronnes, soit $l_t^r = 2l_z^r = 0.062$, où l'exposant r signifie rectangulaire. Par conséquent, quatre fois moins de données sont acquises dans le schéma rectangulaire. Le fantôme numérique utilisé est le *clockphantom* dont les caractéristiques sont données dans [Turbell 01]. Il est constitué de 12 sphères dont les centres sont placés sur une hélice de rayon 0.8 et de pas 0.12, et de 12 sphères plus petites dont les centres sont placés sur une hélice de direction opposée, de rayon 0.5 et de pas 0.12 (figure 4.2). Les 12 grandes sphères ont un rayon de 0.1, les 12 petites, de 0.05. Elles ont toutes une intensité de 1. Ce fantôme ne respecte donc pas l'hypothèse de support fréquentiel essentiel limité puisque la transformée de Fourier de l'indicatrice d'une sphère (fonction discontinue) n'est pas à décroissance rapide, donc n'est pas limitée en fréquence. En nous plaçant dans cette situation défavorable, nous voulons évaluer la robustesse du schéma d'échantillonnage rectangulaire. La reconstruction des images est réalisée à l'échantillonnage 64×64×32 voxels, qui correspond à la résolution maximale accessible. La reconstruction à des résolutions plus faibles que 64×64×32 violerait les conditions d'échantillonnage de Shannon au niveau de la numérisation de l'image. La reconstruction a été effectuée à l'aide d'un algorithme algébrique itératif. La fonction objectif à optimiser correspond à un critère de moindre carré et la convergence est assurée par une méthode de gradient conjugué (paragraphe 2.5.4.3). Cependant, un terme de régularisation a été rajouté dans l'expression de l'erreur

à minimiser :

$$e = ||g - \mathbf{H}f||^2 + \tau||\Delta f||^2 \tag{4.1}$$

où Δ représente le laplacien et τ, un paramètre de régularisation.

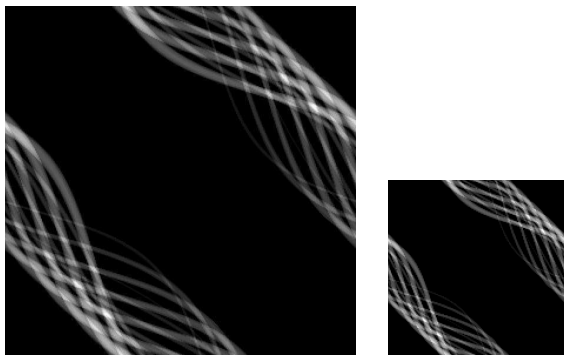


(a) (b)

FIG. 4.2 – Le clockphantom représenté dans les plans transversal (a) et axial (b). La représentation dans le plan axial permet de voir le positionnement des grandes et petites sphères sur les deux hélices de directions opposées.

4.2.2.3 Résultats de la reconstruction d'images

Les projections de la coupe centrale du fantôme dans les deux schémas d'échantillonnage sont représentées à la figure 4.3.



(a) (b)

FIG. 4.3 – Projections de la coupe centrale du clockphantom réalisées avec les schémas d'échantillonnage carré (a) et rectangulaire (b).

Différentes valeurs du paramètre de régularisation τ ont été testées pour la reconstruction des images. Il est possible de quantifier l'erreur entre l'image originale et les images reconstruites en calculant l'erreur par la norme L_2. Le graphe de la figure 4.4 compare les résultats du calcul des erreurs pour les schémas carré et rectangulaire en fonction de τ.

Nous constatons que dans les deux cas, il existe une valeur du paramètre de régularisation pour laquelle l'erreur est minimale. Par ailleurs, l'erreur est globalement plus faible dans le cas du schéma carré. Cependant, les minima des courbes, respectivement 0.01 et 0.0001 pour les schémas rectangulaire et carré, sont très faibles et non significatifs par rapport à 1. Nous considérerons par la suite les images reconstruites avec les valeurs des paramètres de régularisation correspondant à ces minima.

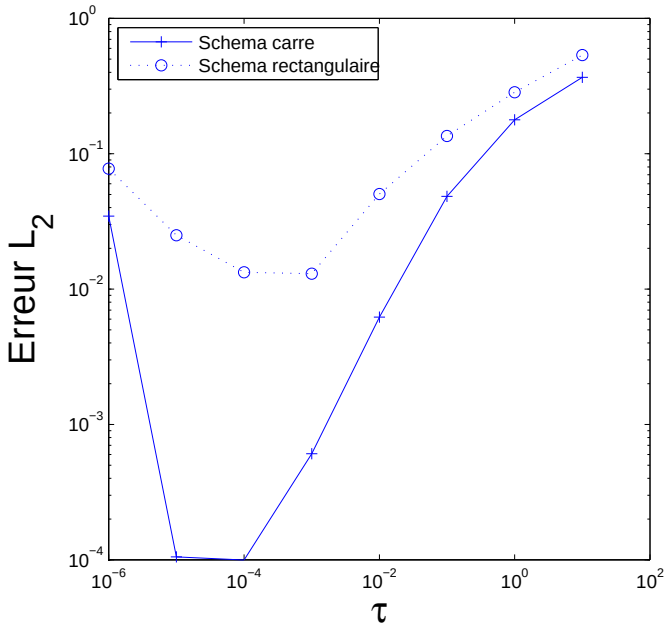
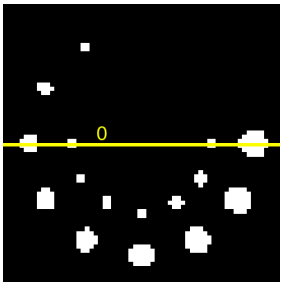
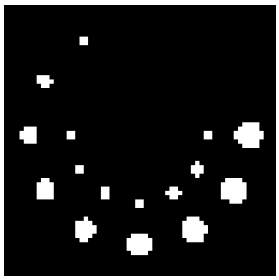


FIG. 4.4 – Graphes de l'erreur L^2 entre l'image reconstruite et originale en fonction du paramètre de régularisation τ pour les schémas carré et rectangulaire.

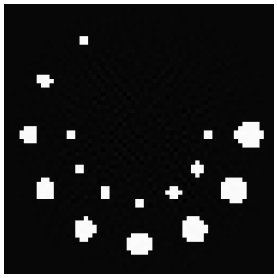
La coupe centrale des images reconstruites à partir des projections provenant des schémas d'échantillonnage carré et rectangulaire, est représentée respectivement aux figures 4.5.(b) et 4.5.(c). Une analyse visuelle ne permet pas de distinguer des différences entre les images reconstruites et l'image originale (figure 4.5.(a)). Un profil d'intensité linéaire horizontal passant par le centre des images, représenté sur l'image originale, confirme cette observation.
La figure 4.7 compare les schémas carré et rectangulaire dans les coupes coronales centrales des images reconstruites : les colonnes de l'image sont constituées de 32 pixels correspondant à la discrétisation axiale du scanner. Nous constatons visuellement que la résolution axiale des deux images 4.7.(a) et 4.7.(b) est très similaire de celle de l'image originale (figure 4.6.(a)), ce qui est confirmé par les profils linéaires d'intensité à travers deux sources des images reconstruites (figures 4.7.(c) à 4.7.(f)) et de l'image originale (figures 4.6.(b) et (c)).



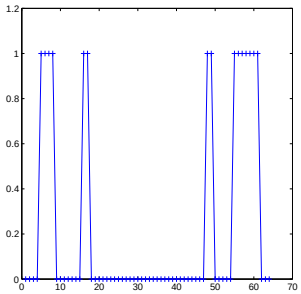
(a) Image originale



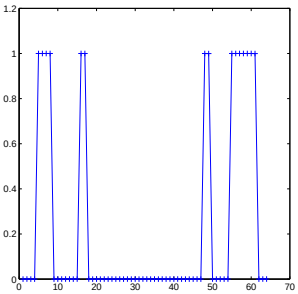
(b) Schéma carré



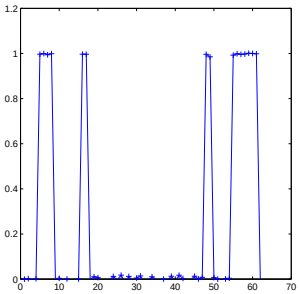
(c) Schéma rectangulaire



(d) Profil 0

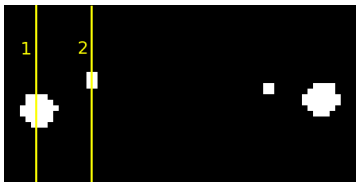


(e) Profil 0

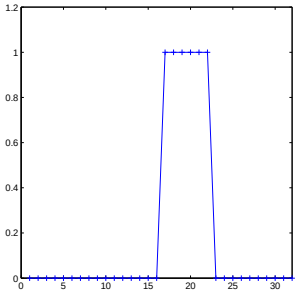


(f) Profil 0

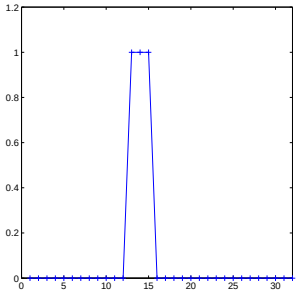
FIG. 4.5 – Images originale (a) et reconstruites à partir du système d'échantillonnage carré (b) et rectangulaire (c). Les profils linéaire d'intensité, passant par le centre de l'image comme représenté sur l'image originale, sont similaires pour les trois images : originale (d), échantillonnage carré (e) et rectangulaire (f).



(a) Image originale

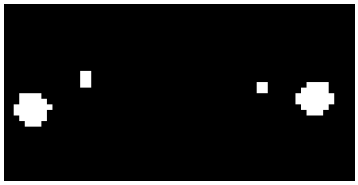


(b) Profil 1



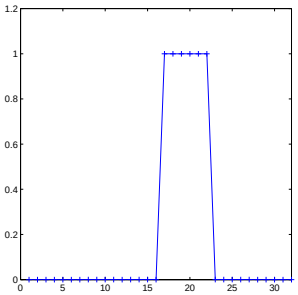
(c) Profil 2

FIG. 4.6 – Coupes coronales de l'image originale (a) et profils linéaires d'intensité 1 et 2.

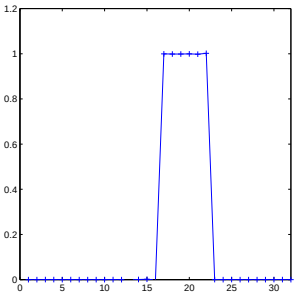


(a) Schéma carré

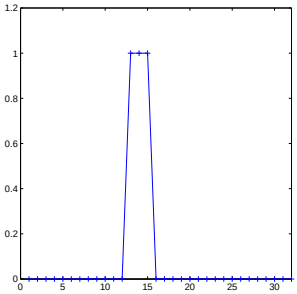
(b) Schéma rectangulaire



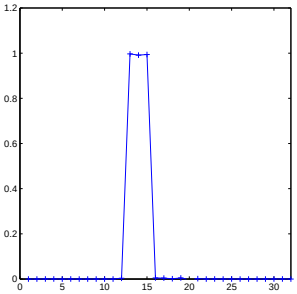
(c) Profil 1



(d) Profil 1



(e) Profil 2



(f) Profil 2

FIG. 4.7 – Coupes coronales de l'image reconstruite dans le cas du schéma carré (a) et rectangulaire (b). Profils linéaires d'intensité 1 et 2 de l'image reconstruite par le schéma carré, (c) et (e), et le schéma rectangulaire, (d) et (f).

4.2.2.4 Comparaisons des schémas rectangulaire et carré pour un nombre égal de données acquises

Des simulations supplémentaires ont été réalisées dans le but de comparer les schémas d'échantillonnage carré et rectangulaire lorsque le même nombre de données est acquis dans les deux schémas. Pour cela, nous avons gardé la géométrie du scanner modélisant le schéma rectangulaire identique : il est composé de 32 couronnes comportant 150 détecteurs chacune avec $l_t^r = 2l_z^r = 0.062$. En revanche, le scanner modélisant le schéma carré a été modifié pour que le nombre de données acquises soit identique au schéma rectangulaire. Le schéma carré générant quatre fois plus de données que le schéma rectangulaire dans le cas précédent, l'échantillonnage dans chacune des dimensions (ψ_1, ψ_2, z) a donc été réduit d'un facteur $\sqrt[3]{4}$. Le scanner modélisant ce nouveau schéma carré est par conséquent composé de 20 couronnes comportant chacune 190 détecteurs avec $l_t^c = l_z^c = 0.049$ (le nombre de données acquises avec ce schéma est faiblement supérieur au schéma rectangulaire). Les deux scanners ont cependant la même longueur. Par ailleurs, le *clockphantom* a également été utilisé comme fantôme pour cette simulation. Cette comparaison a été effectuée pour des reconstructions d'images échantillonnées par 64×64 pixels dans les plans transversaux de l'image.

Le programme qui a été développé souffre, pour l'instant, de ne pas décorréler les plans de projection et de reconstruction de l'image. Aussi bien, 20 coupes transversales du fantôme ont été reconstruites dans le schéma carré (figure 4.8), alors que 32 l'ont été dans le schéma rectangulaire (figure 4.9). Un ré-échantillonnage par interpolation trilinéaire a donc été effectué afin d'obtenir le même nombre de plans de reconstruction (figure 4.10).

Comme pour le cas précédent, nous avons essayé plusieurs paramètres de régularisation τ pour la reconstruction et calculé l'erreur par rapport à l'image originale grâce à la norme L_2. La figure 4.11 montre les courbes de résultats de l'erreur en fonction de τ. Nous constatons que les courbes d'erreur passent par un minimum chacune, bien que cela soit moins marqué pour le schéma carré. Nous constatons que l'erreur de la reconstruction à partir du schéma rectangulaire est globalement beaucoup plus faible que celle obtenue à partir du schéma carré. Les minima des courbes valent respectivement 0.36 et 0.01 pour les schémas carré et rectangulaire. De même que pour le cas précédent, nous allons considérer par la suite les images correspondant à ces minima.

La figure 4.12.(a) montre le résultat de la reconstruction et du ré-échantillonnage dans le plan central de l'image reconstruite concernant le nouveau schéma carré. Cette image est de moins bonne qualité que la coupe reconstruite la plus proche dans le cas du schéma rectangulaire représentée de nouveau à la figure 4.12.(b), ce qui est cohérent avec le calcul d'erreur effectué. Le profil linéaire horizontal passant par le centre de l'image confirme que le biais est plus élevé dans l'image reconstruite du schéma carré (figure 4.12.(c)) que dans celle du schéma rectangulaire (figure 4.12.(d)).
Concernant la résolution axiale, elle est dégradée dans le cas du schéma carré. Nous constatons sur l'image de la figure 4.12.(a) que les sphères situées dans des plans voisins sont visibles dans la coupe centrale. Cette différence de la résolution axiale entre les deux

schémas est mise en évidence à la figure 4.13. Les figures 4.13.(a) et 4.13.(b) sont des coupes coronales des images reconstruites dans les deux schémas. Nous constatons visuellement que le schéma rectangulaire fournit une image reconstruite ayant une résolution axiale supérieure à celle fournit par le schéma carré. De plus, des profils linéaires passant par deux des quatre disques de l'image (figures 4.13.(c) à 4.13.(f)) confirment cette observation.

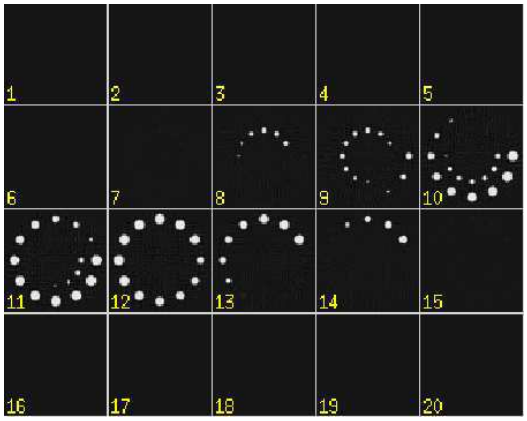


FIG. 4.8 – Images reconstruites à partir des 20 plans de projection dans le système d'échantillonnage carré.

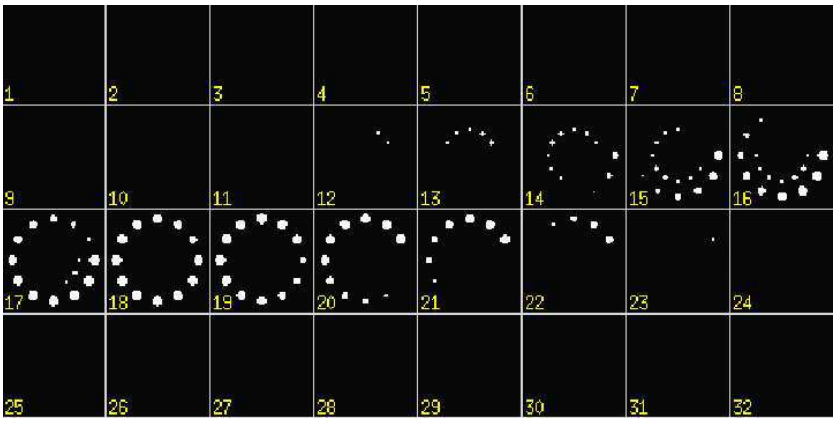


FIG. 4.9 – Images reconstruites à partir des 32 plans de projection dans le système d'échantillonnage rectangulaire.

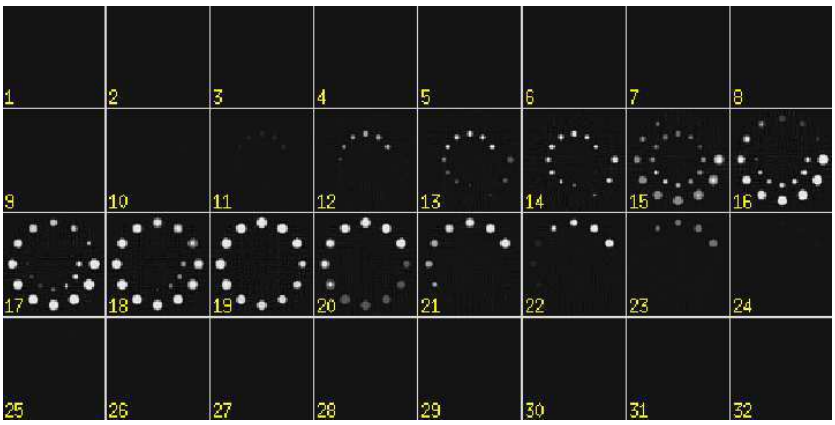


FIG. 4.10 – Images reconstruites ré-échantillonnées de 20 à 32 plans dans le système d'échantillonnage carré.

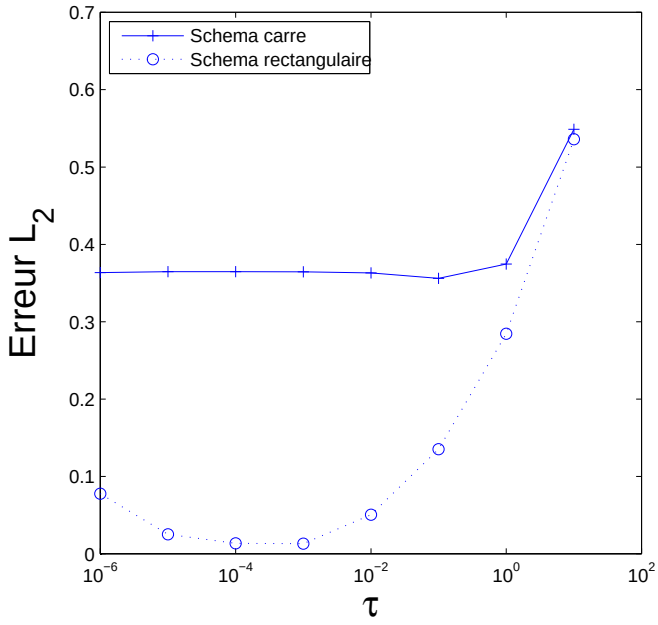
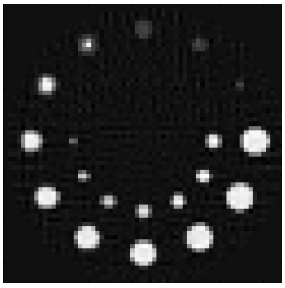
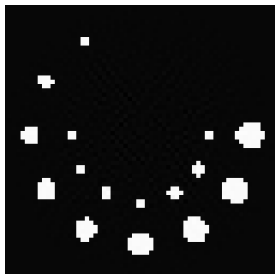


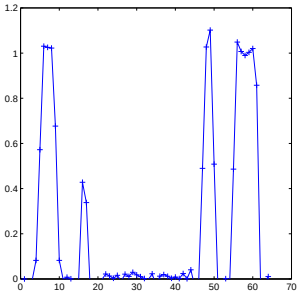
FIG. 4.11 – Graphes de l'erreur L^2 entre l'image reconstruite et originale en fonction du paramètre de régularisation τ pour les schémas carré et rectangulaire.



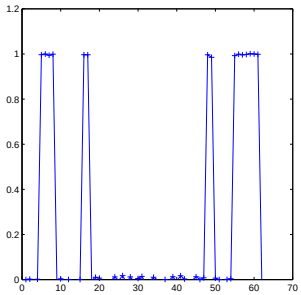
(a) Schéma carré



(b) Schéma rectangulaire

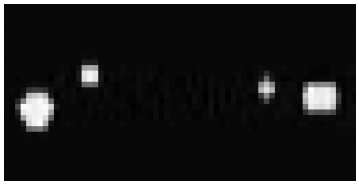


(c) Profil 0



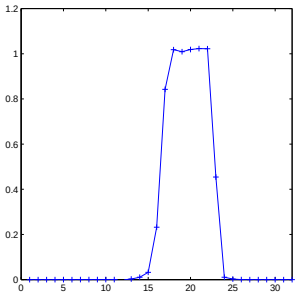
(d) Profil 0

FIG. 4.12 – Images reconstruites à partir du système d'échantillonnage carré (a) et rectangulaire (b) pour un nombre identique de données acquises dans les deux schémas. Profils d'intensité suivant une ligne horizontale passant par le centre des images reconstruites à partir des schémas carré (c) et rectangulaire (d).

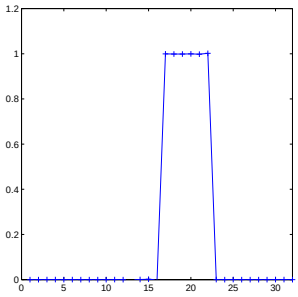


(a) Schéma carré

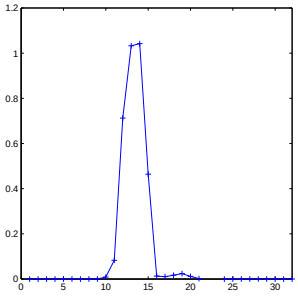
(b) Schéma rectangulaire



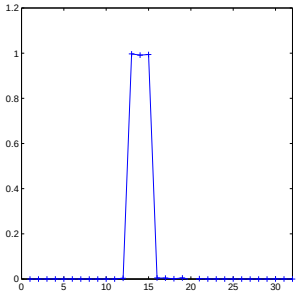
(c) Profil 1



(d) Profil 1



(e) Profil 2



(f) Profil 2

FIG. 4.13 – Coupes coronales de l'image reconstruite dans le cas du schéma carré (a) et rectangulaire (b). Profils linéaires d'intensité 1 et 2 de l'image reconstruite par le schéma carré, (c) et (e), et le schéma rectangulaire, (d) et (f).

4.2.2.5 Discussion des simulations numériques

Les simulations numériques ont permis dans un premier temps de vérifier la forme du support K_g. Cette vérification est indispensable car elle conditionne la possibilité de mise en oeuvre des schémas d'échantillonnage proposés.
Les résultats des simulations comparant l'échantillonnage à partir du schéma carré $300\times300\times32$ générant quatre fois plus de données que le schéma rectangulaire $150\times150\times32$, montrent que les images reconstruites sont de qualité similaire. Le calcul d'erreur indique une différence d'un facteur 100 entre les images volumiques des deux schémas. Cependant, ces valeurs étant très faibles, respectivement 0.01 et 0.0001 pour les schémas rectangulaire et carré, cette différence n'est pas perçue visuellement, et dans les deux cas, l'erreur n'est pas significative.
Dans le cas où la même quantité de données est acquise dans les schémas carré $190\times190\times20$ et rectangulaire $150\times150\times32$, **ce dernier fournit une image dont la résolution globale est meilleure que celle fournit par le schéma carré**. Ce constat visuel est valable aussi bien dans les coupes transversales que coronales. Par ailleurs, le calcul d'erreur par la norme L_2 confirme ce résultat quantitativement puisqu'une erreur de 0.36 a été déterminée entre les images reconstruites dans le schéma carré par rapport à l'image originale.

4.3 Les simulations Monte Carlo

4.3.1 Principe

Afin de réaliser des simulations plus réalistes que les tests numériques, nous avons utilisé un programme de simulation Monte Carlo nommé GATE [Jan 04] (le programme GATE sera détaillé au chapitre 6 (paragraphe 5.3), lorsque nous aurons auparavant exposé la physique des interactions rayonnement-matière). Les méthodes Monte Carlo permettent de simuler des phénomènes physiques stochastiques tels que la désintégration radioactive ou les interactions des particules élémentaires avec la matière, phénomènes qui ont lieu en imagerie nucléaire. Par conséquent, elles sont plus précises que les méthodes numériques présentées précédemment car elles simulent également la physique impliquée dans l'imagerie nucléaire, de l'émission à la détection des photons. Nous avons donc voulu vérifier la forme du support essentiel K_g dans le cas où les effets tels que la diffusion et l'atténuation des photons de 511 keV sont pris en compte. La forme géométrique de K_g étant indispensable à l'application des schémas d'échantillonnage établis dans le chapitre 3, les simulations réalistes Monte Carlo ont pour but de valider la pertinence de ces schémas dans le cas d'examens TEP réels.

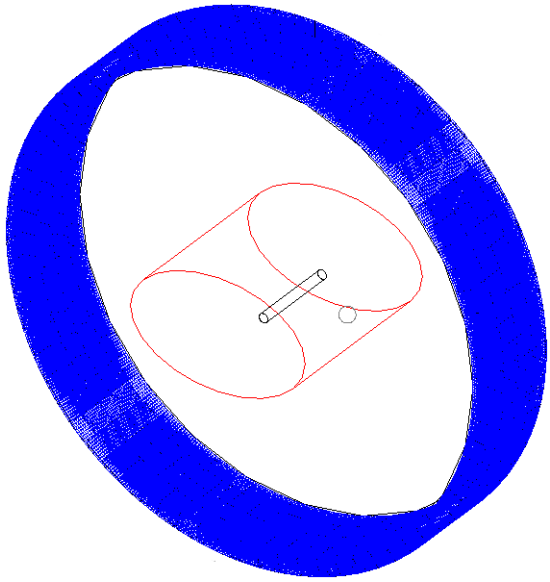


FIG. 4.14 – Représentation de la géométrie de la simulation.

4.3.2 Principe des simulations GATE pour la vérification de l'allure de K_g

Un scanner TEP clinique du type Ecat Exact HR+ a été simulé. Le scanner a un rayon de 41.2 cm et est composé de 576 détecteurs par couronne, avec 32 couronnes de détecteurs. La source simulée est composée de 5 sphères imbriquées les unes dans les autres telles que l'activité croît « par escalier »du bord vers le centre. Deux simulations ont été réalisées. Dans un premier temps nous simulons une acquisition sans milieu atténuant : la source est placée à l'air libre. Dans un second temps, la source est placée dans un fantôme composé d'un cylindre à base elliptique rempli d'eau et contenant un cylindre de calcium. On simule ainsi d'une manière simplifiée le corps d'un patient avec la colonne vertébrale (tableau 4.2 et figure 4.14).

	Rayon (mm)	Hauteur(mm)	Coordonnées x y z (mm)
5 sources sphériques concaténées de même activité	9,10,11,12,13	-	130 0 0
Corps : cylindre à base elliptique	160 (x) 100 (y)	160	0 0 0
Os : cylindre	8	160	30 0 0

TAB. 4.2 – Caractéristiques du fantôme simulé

4.3.3 Le format des données

Les données en sortie des simulations sont des sinogrammes 3D de type ECAT7, format de la série ECAT des scanners SIEMENS. L'oblicité des lignes de réponse a été restreinte : les coïncidences mesurées sont à l'intérieur d'une même couronne, ou entre deux couronnes adjacentes. Par ailleurs, un *span* de 3 a été appliqué : nous obtenons ainsi 63 sinogrammes, dont 32 sinogrammes directs et 31 sinogrammes croisés. Comme notre étude théorique a porté uniquement sur les sinogrammes directs, nous écartons les 31 sinogrammes croisés. De plus, un facteur de *mashing* de 1 est appliqué par défaut, ce qui correspond dans GATE, à l'entrelacement des projections. Enfin, nous avons réarrangé les données du format sinogramme (ϕ, s) au format naturel introduit précédemment, (ψ_1, ψ_2). Ceci est possible car les sinogrammes en sortie de GATE ne sont pas corrigés en arc. Le paramètre radial dans les sinogrammes n'est alors pas la variable s échantillonnée de manière uniforme, mais σ qui est reliée à s par $\sigma = R \arcsin(s/R)$ (figure 4.15). On réarrange alors les données du format (ϕ, σ) dans le format (ψ_1, ψ_2) en utilisant les relations suivantes :

$$\phi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad , \quad \sigma = R\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.2}$$

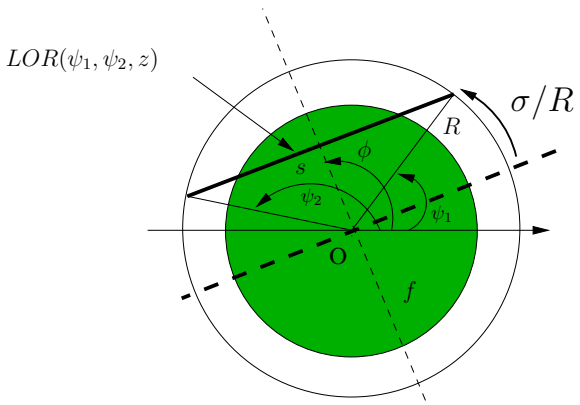


FIG. 4.15 – Les deux types de paramétrisation d'une ligne de réponse : (ϕ, σ) et (ψ_1, ψ_2)

4.3.4 Les résultats

Les figures 4.16.(a) à 4.16.(d) présentent les résultats de la simulation de l'acquisition des données lorsque la source est placée dans l'air, en l'absence de milieu atténuant les photons γ. Le sinogramme initial est tout d'abord désentrelacé afin d'obtenir toutes les projections. La taille originale du sinogramme est de 288×288 et après cette opération, elle est de 576×144 : le nombre de *bins* en ϕ est doublé, alors qu'en σ, le nombre de *bins* est divisé par 2. Le sinogramme réarrangé dans le système de paramétrisation (ψ_1, ψ_2) est

représenté à la figure 4.16.(a). Ce diagramme est carré de taille 576×576. Le support essentiel est obtenu en prenant la transformée de Fourier 3D de l'ensemble des projections. La figure 4.16.(b) représente une section centrale du support. L'orientation du support se justifie par la même remarque faite précédemment dans les simulations numériques. La figure 4.16.(c) est une représentation en isosurface à 1/40 de la valeur maximale du support essentiel. Par ailleurs, un profil d'intensité à travers la section centrale du support est réalisé et représenté en échelle semi-logarithmique à la figure 4.16.(d). Nous constatons que la forme du support essentiel de $\hat{g}$ simulé est très proche du résultat théorique quand la source est placée dans un milieu non atténuant. Le profil linéaire confirme la décroissance exponentielle aux bordures du support.
Lorsque la source est placée dans le fantôme (figures 4.17.(a) à 4.17.(d)), les effets de l'atténuation et de la diffusion sont visibles. Les branches du diagramme 4.17.(a) sont en effet très atténuées. Le support essentiel est donc plus déformé comme le montrent les figures 4.17.(b) et 4.17.(c), notamment aux hautes fréquences. La diffusion des photons qui agit comme un lissage des données, se comporte comme un filtre passe-bas. Cependant, on peut toujours reconnaître la forme du support essentiel original. Le profil linéaire (4.17.(d)) montre toujours une décroissance exponentielle même si celle-ci est moins importante qu'à la figure (4.16.(d)).

4.4 Conclusions

Nous avons montré dans ce chapitre les vérifications numériques des résultats théoriques énoncés au chapitre 3. La forme du support essentiel K_g a été prouvée aussi bien par des simulations numériques géométriques que Monte Carlo (les simulations Monte Carlo de K_g ont été présentées lors de la conférence EMBS 2007 [Grondin 07a]).
L'efficacité du schéma d'échantillonnage rectangulaire par rapport au schéma carré a également été testée sur un fantôme de référence. Il a été montré que, pour un nombre identique de données acquises, le schéma rectangulaire fournit des images reconstruites ayant une meilleure résolution homogène. Cependant, cette comparaison a été en parti effectuée sur des images du schéma carré qui ont dû être ré-échantillonnées afin d'obtenir un nombre identique de coupes transversales. Afin d'éliminer le biais qui peut être introduit par le ré-échantillonnage des coupes manquantes dans le schéma carré, une perspective de ce travail est de modifier le programme de reconstruction afin que ce soit la régularisation qui prenne en charge la complétion des coupes. Enfin, des simulations purement géométriques seules ont été réalisées. Une perspective de cette étude serait d'appliquer le schéma d'échantillonnage rectangulaire dans des simulations plus réalistes de type Monte Carlo. Les résultats devraient confirmer l'efficacité du schéma rectangulaire puisque la forme de K_g est peu influencée par les phénomènes de diffusion et d'atténuation.

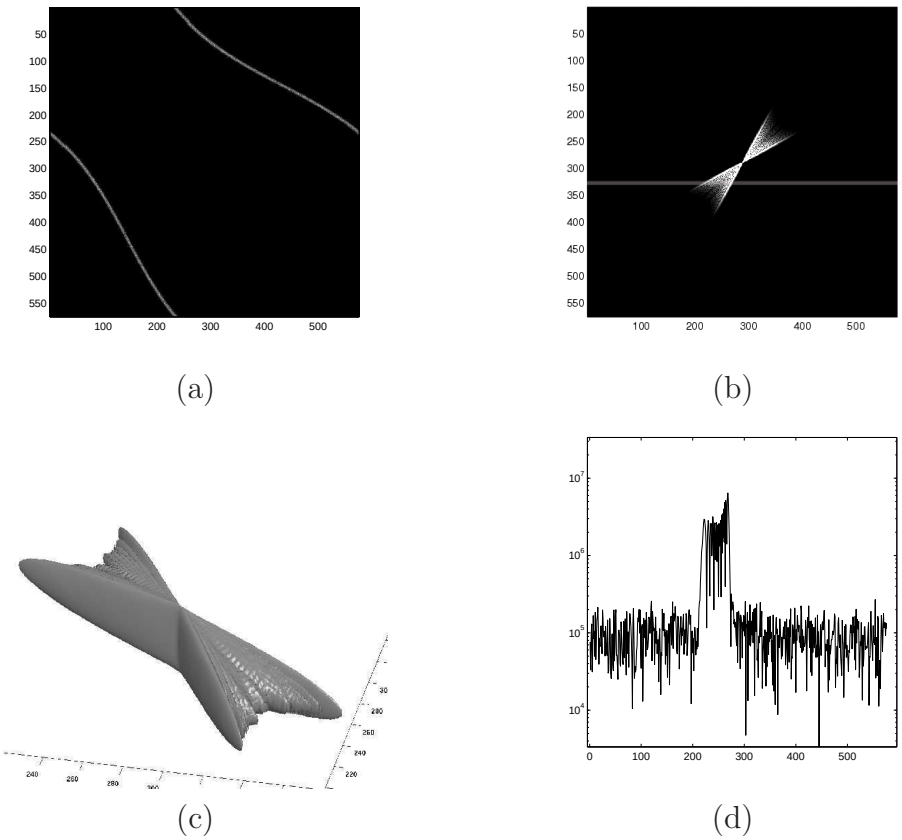


FIG. 4.16 – Simulations de l'acquisition des données d'une source sphérique placée dans l'air. (a) Sinogramme réarrangé dans le format (ψ_1, ψ_2). (b) Section centrale du support essentiel de la transformée de Fourier de l'ensemble des projections. (c) Représentation en trois dimensions du support essentiel de la transformée de Fourier des projections. (d) Profil d'intensité le long de la ligne représentée à la figure (b).

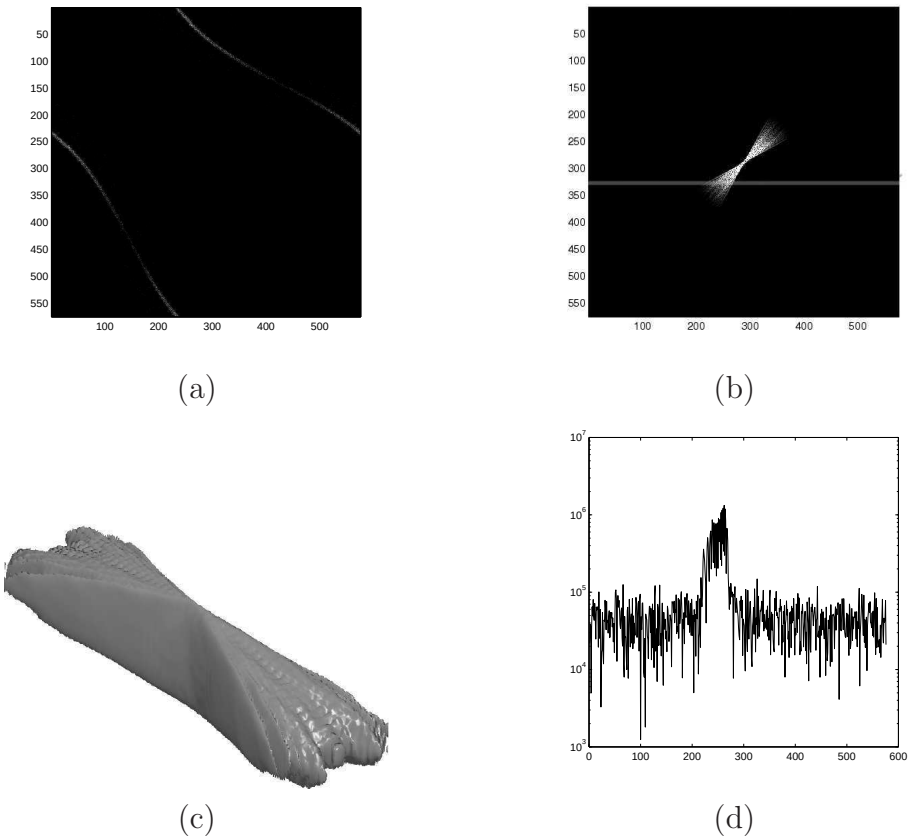


FIG. 4.17 – Simulations de l'acquisition des données d'une source sphérique placée dans un fantôme atténuant. (a) Sinogramme réarrangé dans le format (ψ_1, ψ_2). (b) Section centrale du support essentiel de la transformée de Fourier de l'ensemble des projections. (c) Représentation en trois dimensions du support essentiel de la transformée de Fourier des projections. (d) Profil d'intensité le long de la ligne représentée à la figure (b)

Deuxième partie

Mise en place d'une chaîne de simulations du scanner TEP LXe

Introduction

Nous étudions dans cette nouvelle partie, les performances d'un prototype de scanner TEP petit animal qui est en phase de développement au Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC) de Grenoble. L'une des particularités de ce scanner réside dans l'utilisation de modules de détection composés de xénon liquide. Ce scanner a été étudié en parti par Sébastien Jan [Jan 02] lors de son travail de thèse. Nous exposerons ici les développements réalisés depuis la fin de ses travaux.
Dans le chapitre 5, nous allons décrire les motivations de l'imagerie du petit animal ainsi que les défis technologiques qu'elle soulève. Cet état de l'art sera précédé d'une introduction aux principales interactions rayonnement-matière. Le fonctionnement des détecteurs ainsi que les propriétés des matériaux scintillants autorisant une détection efficace en TEP seront présentés, en particulier le xénon liquide. Par ailleurs, nous décrirons le principe du simulateur Monte Carlo GATE dédié à l'imagerie tomographique d'émission qui a été utilisé au cours de ce travail. Nous conclurons ce chapitre en introduisant le prototype de scanner TEP et le module qui a été fabriqué.
Le chapitre 6 traitera des contributions apportées dans cette partie. Nous décrirons les expériences qui ont été menées pour caractériser les performances du module ainsi que la chaîne de simulation qui a été mise en place. Nous préciserons la démarche de simulation et de traitement des données qui a été mise en oeuvre afin d'évaluer les performances du scanner complet en terme de résolution spatiale sur l'image reconstruite.

Chapitre 5

Introduction à la physique des détecteurs TEP et aux simulations Monte Carlo

5.1 Introduction

Nous introduirons dans ce chapitre les notions de base de la physique des interactions photon-matière ainsi que le fonctionnement et les propriétés des détecteurs classiques utilisés en TEP. Le principe des simulations Monte Carlo, particulièrement adaptées pour modéliser la désintégration radioactive, le transport des particules et le phénomène de détection, sera également décrit. Enfin, les enjeux de l'imagerie nucléaire du petit animal ainsi que le scanner TEP LXe dédié à ce type d'imagerie seront présentés.

5.2 La physique de la détection

5.2.1 Les interactions rayonnement-matière

Aux énergies mises en jeu en imagerie médicale, un faisceau de photons traversant la matière interagit avec ses constituants de trois manières différentes : par effet

photoélectrique, diffusion Compton ou diffusion Rayleigh. L'intensité du faisceau subit alors une atténuation, selon la loi empirique exponentielle présentée dans l'introduction :

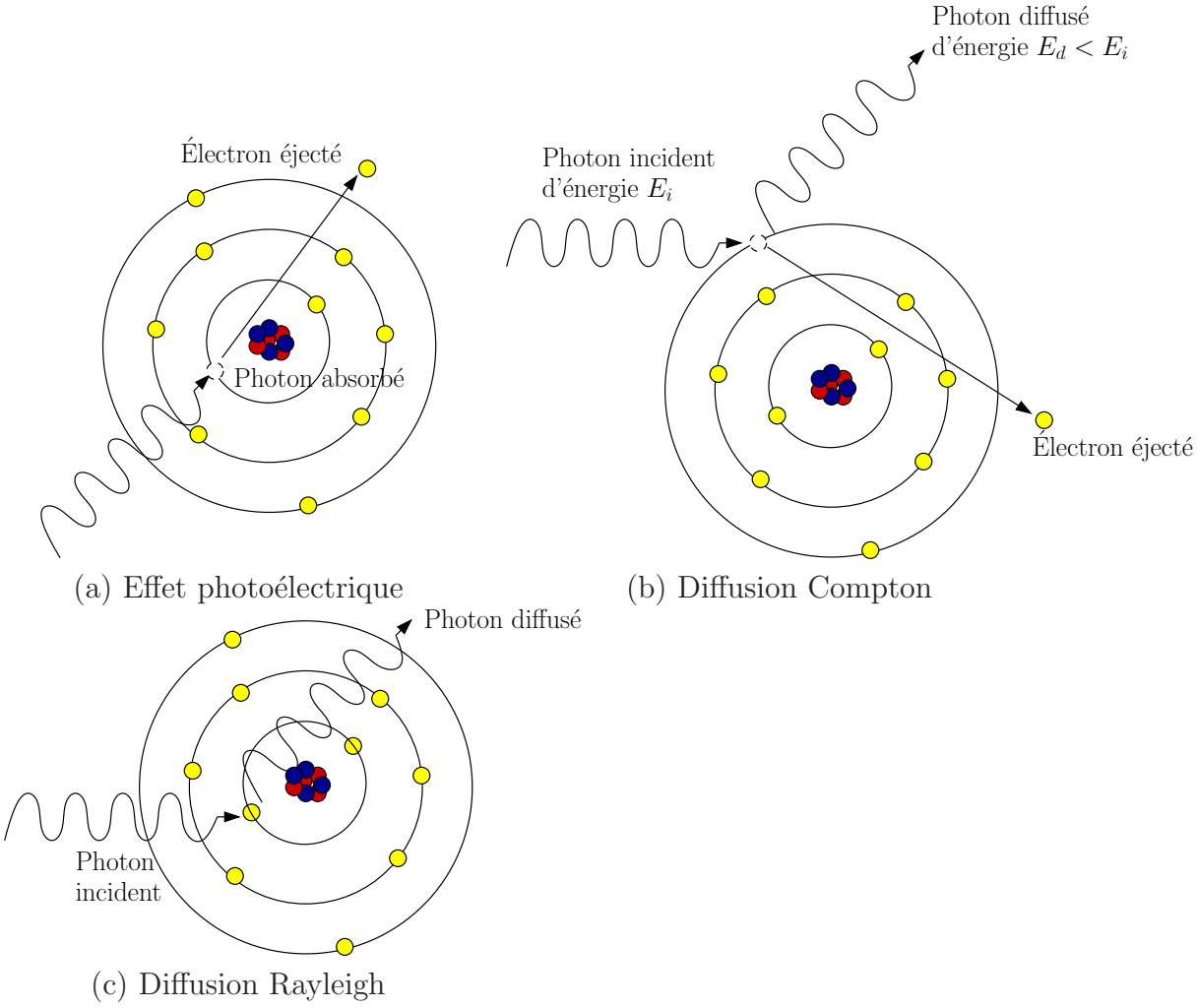
$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu d} \tag{5.1}$$

ou μ représente le coefficient d'atténuation linéaire (son unité est le cm^{-1}) de la matière traversée d'épaisseur d, dans le cas où celle-ci est homogène. L'effet photoélectrique se traduit par l'absorption du photon par un électron d'une couche proche du noyau de l'atome. L'électron acquiert alors suffisamment d'énergie pour être éjecté de l'atome (figure 5.1.(a)). Ce type d'interaction est favorisé par les photons de basses énergies et les matériaux ayant un numéro atomique Z élevé. L'effet Compton correspond à la diffusion du photon par un électron. Lors de cette interaction, le photon perd de l'énergie qu'il transmet à l'électron. Un photon diffusé est émis avec un angle de déviation par rapport à la direction du photon incident qui est lié à l'énergie transmise à l'électron (figure 5.1.(b)) : plus l'énergie transmise à l'électron est grande, plus grande est l'angle de déviation du photon diffusé. Il existe alors une énergie maximale reçue par l'électron, appelée énergie du front Compton, qui correspond à la rétrodiffusion du photon dans la direction antiparallèle à la direction incidente. La probabilité qu'un effet Compton ait lieu varie peu selon le matériau si bien que si l'on désire privilégier l'effet photoélectrique, il convient de choisir un matériau à Z élevé. Enfin la diffusion Rayleigh ou diffusion cohérente, correspond à un choc élastique (sans transfert d'énergie) entre le photon et un électron fortement lié à l'atome (figure 5.1.c). En effet l'onde électromagnétique, décrite comme le couplage d'un champ magnétique et électrique oscillant à la même fréquence, déforme le nuage électronique des atomes. Le barycentre des charges négatives oscille ainsi par rapport au noyau de l'atome : il en résulte la création d'un dipôle dont le rayonnement constitue la diffusion Rayleigh. La diffusion Rayleigh est favorisée par les photons de basses énergies et les matériaux à Z élevé. Cependant, elle est souvent négligée en TEP devant les effets photoélectrique et Compton. Par ailleurs, les électrons éjectés de leur couche par effet photoélectrique ou diffusion Compton, dits primaires, engendrent d'autres interactions inélastiques (collisions avec transfert d'énergie) avec d'autres électrons du milieu. La probabilité qu'un type d'interaction ait lieu par rapport aux autres est liée à la grandeur appelée section efficace notée σ. Elle est définie comme la probabilité qu'une particule incidente interagisse sur un écran contenant un noyau par unité de surface. σ s'exprime en barn, 1 barn valant 10^{-24} cm^2. Le coefficient d'atténuation linéaire est relié à la section efficace par la relation suivante :

$$\mu = \frac{\rho N_A}{A}\sigma \tag{5.2}$$

où ρ est la densité de la matière traversée (en g/cm^3), N_A est le nombre d'Avogadro exprimant le nombre d'atomes dans une mol, A est la masse molaire de la matière traversée (en g/mol). En imagerie TEP, le coefficient d'atténuation linéaire s'exprime par conséquent en fonction des sections efficaces des trois types d'interaction photon-matière présents :

$$\mu = \frac{\rho N_A}{A}(\sigma_{photoelectrique} + \sigma_{Compton} + \sigma_{Rayleigh}) \tag{5.3}$$



(a) Effet photoélectrique

(b) Diffusion Compton

(c) Diffusion Rayleigh

FIG. 5.1 – Les différents processus d'interaction rayonnement-matière impliqués dans l'imagerie TEP.

5.2.2 Le fonctionnement d'un détecteur

Les détecteurs les plus fréquemment utilisés en imagerie TEP sont constitués de cristaux inorganiques couplés à des photodétecteurs. Le rôle du cristal est d'arrêter le rayonnement de 511 keV. Le photon γ interagit avec les électrons du cristal en cédant une partie (diffusion Compton) ou toute son énergie (effet photoélectrique) selon le type d'interaction. Cela génère un phénomène de scintillation qui correspond à l'émission de photons lumineux résultant de l'excitation des électrons du cristal. Dans un photodétecteur, ces photons lumineux sont convertis en électrons et à la suite d'un processus d'amplification, en signal électrique. Il existe différents types de photodétecteurs, les principaux étant les tubes photomultiplicateurs (PMT) et les semi-conducteurs, en particulier les diodes à avalanches que nous ne détaillerons pas ici.
Dans le cas des PMTs, les photons de scintillation, après avoir traversé une fenêtre de quartz séparant le scintillateur du photodétecteur, interagissent sur la photocathode du PMT qui convertit l'énergie lumineuse en électrons par effet photoélectrique. Il s'ensuit une amplification en cascade du nombre d'électrons à chaque dynode du PMT qui aboutit à un signal électrique mesurable dont l'intégrale est proportionnelle à l'énergie déposée par le photon γ (figure 5.2.(a)). Le temps d'intégration de ce signal dépend de la rapidité de la décroissance de la lumière dans le cristal. Durant cette période très courte, le détecteur ne peut mesurer un autre événement. Cette durée, appelée temps mort, cause une perte de la sensibilité du détecteur. La figure 5.2.(a) représente un cristal couplé avec un PMT. Ce couplage est peu utilisé car, à cause des dimensions importantes des PMTs, il empêche l'utilisation de scintillateurs de petite taille.
D'autres arrangements sont en fait possibles, le plus utilisé étant des matrices de cristaux couplées avec quelques PMTs (figure 5.2.(b)). Cet arrangement sous forme d'un bloc de détecteurs permet d'améliorer la résolution spatiale. Dans ce cas, lorsqu'un photons de 511 keV incident dépose de l'énergie en plusieurs endroits du bloc de détection lors de diffusions Compton avant d'être totalement absorbé par effet photoélectrique, les photons de scintillation, dont le nombre est proportionnel à l'énergie déposée, sont collectés dans les différents PMTs. La position de l'interaction est alors calculée par une méthode barycentrique en fonction de l'énergie déposée à chaque interaction, selon le principe de la caméra de Anger [Anger 67].
Un autre type de photodétecteurs appelé PMT à localisation (PSPMT pour l'anglais *Position Sensitive PhotoMultiplier Tube*) permet d'obtenir une très bonne résolution spatiale du détecteur. Le principe des PSPMTs est d'effectuer la collection et l'amplification de la gerbe électronique localement autour de la position de la lumière incidente. Une des différentes structures existantes de PSPMTs est celle à anodes croisées pour laquelle les anodes sont constituées de bandes métalliques disposées suivant deux directions orthogonales. Cette structure réalise ainsi une localisation barycentrique de la gerbe électronique sur la grille d'anodes, permettant ainsi de remonter à la localisation du point d'impact de la lumière sur la photocathode (figure 5.3).

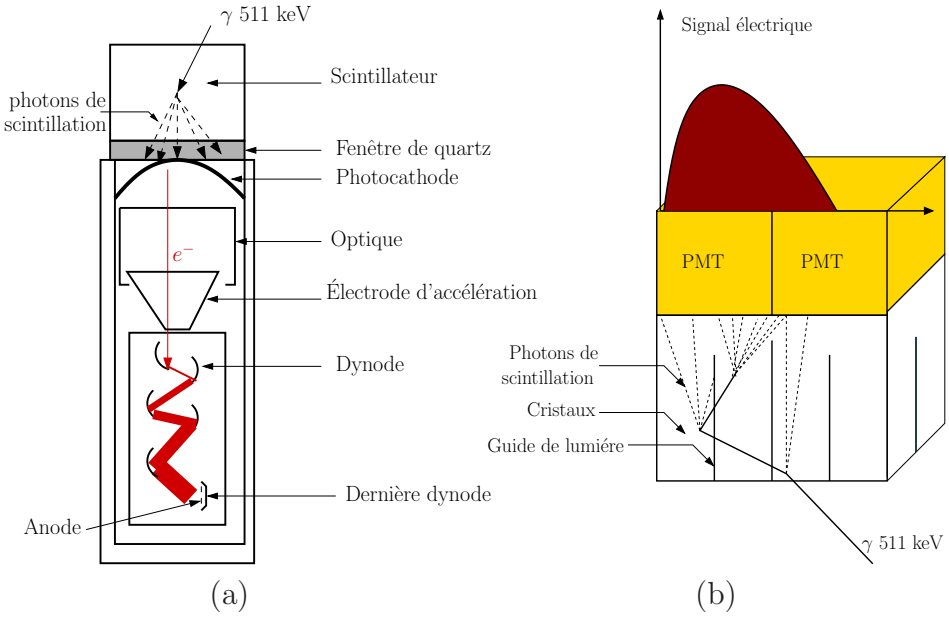


FIG. 5.2 – (a) Structure schématique d'un photomultiplicateur couplé à un scintillateur (schéma inspiré de [Pichler 04]). Le photon de 511 keV interagit dans le cristal provoquant la scintillation de photons lumineux. Ces derniers sont collectés par la photocathode du PMT et y interagissent en générant des électrons. La gerbe électronique est amplifiée à chaque étage de dynodes, aboutissant au final à un signal électrique mesurable. (b) Représentation schématique d'un bloc de détecteurs composé de 8 cristaux et de 2 PMTs. Plusieurs arrangements de tels blocs sont possibles (matrices de cristaux 8 par 8 ou 6 par 6, lus par 4 PMTs par exemple). La localisation de l'interaction se fait par un calcul barycentrique.

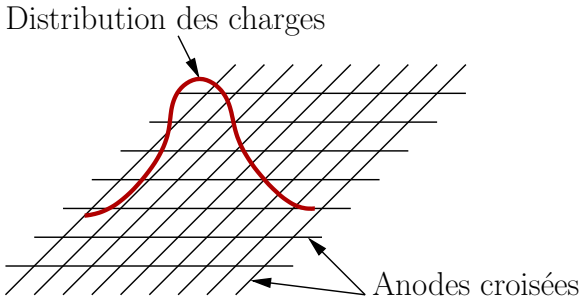


FIG. 5.3 – Représentation schématique de la structure des anodes croisées d'un PSPMT : localisation barycentrique de la gerbe électronique

5.2.3 Le spectre en énergie

L'intégrale du signal final en sortie du PMT étant proportionnelle à l'énergie du photon détecté, le détecteur fournit ainsi un spectre en énergie des événements comptabilisés. Ce spectre dans le cas idéal est composé de deux parties : le plateau Compton, qui représente les photons ayant réalisé des diffusions Compton dans le scintillateur avec un dépôt d'énergie maximale (front Compton), et le pic photoélectrique, qui représente les photons ayant déposé toute leur énergie dans le détecteur par effet photoélectrique. Dans le cas de la TEP, ce pic est situé à l'énergie 511 keV (figure 5.4.(a)) tandis que le front Compton est situé à 170,3 keV. En réalité, Le processus de détection étant statistique, l'allure d'un vrai spectre d'énergie est représentée à la figure (figure 5.4.(b)). Le pic photoélectrique a une certaine largeur à mi-hauteur qui indique la résolution FWHM (pour *Full Width at Half Maximum*) en énergie du détecteur. Plus la largeur du pic est faible, meilleure est la résolution en énergie. En pratique, pour éliminer les coïncidences diffusées, une fenêtre en énergie d'une largeur dépendant de la résolution est appliquée autour du pic photoélectrique.

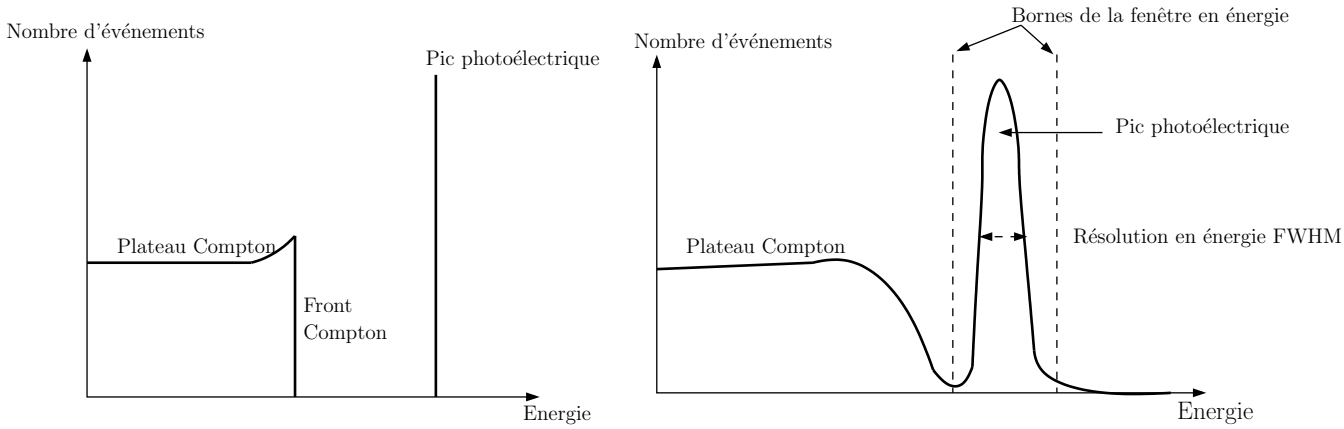


FIG. 5.4 – Spectre idéal (a) et spectre réel (b). La résolution FWHM en énergie est mesurée par la largeur du pic photoélectrique à mi-hauteur.

5.2.4 Les caractéristiques d'un détecteur TEP

Le couple idéal cristal et photodétecteur en TEP doit permettre une bonne résolution spatiale et une bonne efficacité de la détection. Pour cela, le cristal doit posséder les propriétés suivantes :

- une forte densité et un coefficient d'atténuation linéaire élevé pour arrêter le plus grand nombre de photons d'annihilation dans un volume de petite dimension,

- un rendement lumineux élevé, qui correspond au nombre de photons de scintillation générés par photon de 511 keV incident, afin de mesurer avec précision l'énergie déposée dans le cristal, permettant de discriminer les coïncidences diffusées,
- un temps de décroissance de la scintillation au sein du cristal court, afin de réduire le temps mort pendant lequel aucun autre photon γ incident n'est détecté, améliorant le taux de comptage ainsi que la résolution temporelle du détecteur qui permet de rejeter les coïncidences aléatoires,
- une photo-fraction élevée pour que le plus grand nombre de photons d'annihilation réalise un effet photoélectrique en première interaction, déposant ainsi directement toute leur énergie, ce qui améliore la localisation de l'interaction.

En ce qui concerne plus spécifiquement les photodétecteurs, leurs propriétés doivent remplir ces principaux critères :

- une interface entre le cristal et le photodétecteur d'une bonne transparence aux photons de scintillations afin que ces derniers atteignent en grand nombre le photodétecteur,
- une efficacité quantique (QE en anglais pour *Quantum Efficiency*) élevée, convertissant le plus grand nombre de photons de scintillation en porteurs de charge,
- un gain interne élevé, participant avec l'efficacité quantique et le rendement lumineux du cristal, à un signal de forte amplitude pour obtenir une bonne résolution en énergie.

Dans le cadre de l'imagerie du petit animal, nous allons voir que ces critères doivent être absolument vérifiés du fait des petites dimensions des animaux examinés. Avant d'aborder ce sujet, nous allons décrire l'un des programme de simulations utilisés dans le cadre de ce travail, particulièrement adapté pour modéliser les détecteurs de la TEP.

5.3 L'outil de simulation Monte Carlo

5.3.1 Le principe de la méthode Monte Carlo

Les interactions des photons, et en général, des particules élémentaires avec la matière, sont des phénomènes stochastiques dont il est possible d'évaluer la probabilité d'occurrence par le calcul des sections efficaces. Les méthodes Monte Carlo qui sont basées sur le tirage de nombres aléatoires sont adaptées pour simuler ce type de phénomènes physiques. En réalité, uniquement des séquences de nombres pseudo-aléatoires peuvent être générées par des algorithmes purement déterministes. Cependant, cette approximation est adoptée car ces algorithmes sont faciles à implémenter et permettent la reproductibilité de la même séquence de nombres pseudo-aléatoires, ce qui est utile pour réaliser différents tests comparatifs. Par ailleurs, une autre donnée nécessaire pour réaliser des simulations Monte Carlo est de connaître la fonction de densité de probabilité des grandeurs aléatoires du phénomène étudié, telles que l'intervalle de temps entre deux désintégrations radioactives, le parcours que réalise le photon entre deux interactions et le type d'interaction dans le

milieu. Nous allons par la suite présenter l'un des simulateurs Monte Carlo les plus efficaces développé par des physiciens du CERN (l'organisation européenne pour la recherche nucléaire), le code GEANT4, ainsi qu'un simulateur dédié à la physique médicale, GATE.

5.3.2 La boîte à outils de simulation GEANT4

GEANT4 [Agostinelli 03] est un simulateur Monte Carlo utilisé pour reproduire le parcours des particules élémentaires à travers la matière. Ce programme qui est en fait désigné comme une boîte à outils, est un ensemble de librairies écrites en C++ permettant de simuler des expériences ou des phénomènes ayant lieu dans les domaines aussi variés que la physique des hautes énergies, l'astrophysique, la radioprotection et la physique médicale. Les caractéristiques importantes de GEANT4 sont de permettre :

- la définition et la représentation de la géométrie des détecteurs,
- la définition des matériaux (les éléments simples, molécules et les mélanges),
- la définition des diverses particules,
- la génération des particules primaires (caractérisées entre autres par leur type, position, énergie et angle d'émission),
- la gestion de la trajectoire des particules définie par la notion de *step* entre chaque interaction,
- la description de la physique, entre autres la désintégration radioactive et les processus électromagnétiques tels que les différents types d'interaction particule-matière,
- la définition de détecteurs « enregistrant »l'interaction nommée *hit*, contenant les informations telles que la position et le type d'interaction, la nature de la particule, l'énergie déposée et la date du *step*,
- la visualisation des constituants simulés et l'interface utilisateur.

À partir de GEANT4, une autre boîte à outils de simulation spécifiquement dédiée à la physique médicale a été développée, GATE (GEANT4 Appliqué à la Tomographie d'Émission), initialement conçue pour la reproduction des examens TEP et TEMP.

5.3.3 La boîte à outils de simulation GATE

L'outil de simulation GATE [Jan 04] a été développé dans le but de reproduire des examens en imagerie nucléaire de manière plus précise que ce qui est possible de faire avec GEANT4 seul. L'accent a été mis sur la modélisation des processus temporels qui sont cruciaux en tomographie d'émission. En effet, le temps et les processus dynamiques interviennent à plusieurs niveaux : la désintégration des radiotraceurs, leur évolution spatio-temporelle, le mouvement des détecteurs en TEMP et les mouvements du patient (la respiration, les battements cardiaques) en sont des exemples. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de connaître le langage de programmation C++, puisque les simulations sont créées à partir d'un langage scripté, ce qui permet la prise en main du simulateur de

manière rapide, notamment par les cliniciens. Les principales caractéristiques de GATE sont de permettre :

- l'utilisation de modèles de scanners prédéfinis ou la définition d'une nouvelle géométrie de scanner propre à la simulation,
- l'utilisation de fantômes analytiques et voxélisés prédéfinis, la définition d'un fantôme propre à la simulation ou l'importation d'une carte d'atténuation issue de données réelles,
- la gestion du temps et des processus dynamiques, mentionnés précédemment,
- la définition de la physique, identique à GEANT4, mais avec les particularités qui sont l'intervention du caractère temporel de la désintégration, la génération aléatoire de l'énergie du positon, la non colinéarité des deux photons provenant de l'annihilation et un modèle des processus électromagnétiques plus adapté pour les basses énergies,
- la définition très détaillée de la chaîne de numérisation, appelée *digitizer*, formée de plusieurs modules de traitement et simulant l'électronique des détecteurs avec la possibilité d'indiquer les caractéristiques de la détection, telles que l'efficacité quantique dans le cas des PMTs, la résolution en énergie et le temps mort.

Le développement de GATE est assuré par la collaboration OpenGATE regroupant plusieurs laboratoires de recherches au niveau international. Il a été validé pour plusieurs scanners cliniques et de recherche, entre autres, les scanners TEP du type ECAT EXACT HR+ [Jan 05], ECAT HRRT [Bataille 04] et Philips Allegro/GEMINI [Lamare 06], mais également pour des scanners dédiés à l'imagerie animale tels que le microPET P4 [Jan 03].

5.4 L'imagerie du petit animal

5.4.1 Les motivations

L'utilisation du petit animal en laboratoire, principalement de la souris et du rat dont le génome est quasi-similaire au génome humain, a pour but d'étudier des processus physiologiques, comme le développement d'une maladie ou l'action d'un médicament, afin d'en déduire un modèle applicable ensuite à l'homme. Les méthodes classiques consistent à prélever les tissus utiles à l'analyse après avoir sacrifié l'animal, ce qui nécessite de posséder un nombre très important d'animaux et engendre des coûts importants. Une autre méthode est d'utiliser l'imagerie TEP ou TEMP dédiée au petit animal. Ces techniques permettent d'étudier, à l'aide d'un radiotraceur spécifique, des processus biologiques tout au long de la vie du traceur dans l'organisme d'un seul animal. Elles présentent l'avantage de pouvoir mesurer et quantifier de manière répétitive, à chaque stade de son évolution, un paramètre physiologique mis en évidence par un radiotraceur. Par ailleurs, les problèmes de variabilité entre animal sont résolus puisque l'étude se réalise sur un unique sujet. Nous détaillerons par la suite, uniquement l'utilisation du scanner TEP dédié à l'imagerie du petit animal.

5.4.2 Les défis techniques des scanners TEP petit animal

L'imagerie TEP du petit animal a pour but d'atteindre la résolution spatiale et la sensibilité la plus grande possible. Le rat et la souris étant respectivement 200 à 2000 fois moins volumineux que l'homme, les performances de ces scanners TEP spécifiques doivent donc surpasser ceux utilisés en clinique. Chez la souris, cela se traduit par la nécessité d'atteindre une résolution spatiale sub-millimétrique afin de visualiser les structures fines. Pour atteindre une telle résolution, des détecteurs de dimensions adéquates doivent être conçus, ce qui entraîne une baisse de la sensibilité par élément de détection. Par conséquent, cela nécessite l'utilisation de détecteurs efficaces, ayant un grand pouvoir d'arrêt des photons de 511 keV. Par ailleurs, le scanner doit pouvoir fonctionner à un taux de comptage élevé, avec une fenêtre de coïncidence fine afin d'éliminer le maximum de coïncidences fortuites qui se produisent davantage dans le cas d'un système compact. Enfin, pour utiliser chaque événement détecté de manière optimale, il faut maximiser le rapport signal sur bruit déterminé par la sensibilité par élément de détection du système. Cela est possible en utilisant des algorithmes de reconstruction d'images 3D, statistiques et itératifs, où les processus physiques du TEP petit animal sont modélisés [Qi 98].

5.4.3 Un bref historique des scanners TEP pour l'imagerie de l'animal

Plusieurs systèmes TEP spécifiques à l'imagerie de l'animal ont été développés depuis le début des années 1990. Initialement, ces systèmes étaient conçus pour l'imagerie des primates grâce à leur champ de vue transversal de grande dimension et fonctionnaient uniquement en mode 2D [Watanabe 92, Cutler 92]. La résolution spatiale que pouvaient atteindre ces systèmes était supérieure à 3 mm dans le plan transversal et 4 mm dans le plan axial au centre du champ de vue.
En 1995, le premier scanner TEP dédié particulièrement au petit animal, le RATPET [Bloomfield 95, Bloomfield 97], fut construit et opérait en mode 3D. Il pouvait atteindre une résolution spatiale transversale de 2.5 mm au centre du champ de vue, 4.5 mm dans le plan axial et avait une efficacité de détection absolue de 4.3% (avec une borne inférieure de la fenêtre en énergie de 250 keV). Cependant, sa résolution spatiale se dégradait drastiquement au bord du champ de vue en raison des effets de profondeur d'interaction (paragraphe 5.5.4) causés par un petit diamètre de 11.5 cm et une profondeur importante des cristaux, de l'ordre de 30 mm. Ces premiers scanners TEP animal utilisaient comme ensemble scintillateur-photodétecteur, le couplage BGO (germanate de bismuth) et PMT. L'autre génération de scanners qui se développa à partir de la fin des années 90, utilisa comme scintillateur, le LSO (oxyorthosilicate de lutetium dopé au cerium). En effet, ayant un rendement de scintillation plus important que le BGO et une constante de décroissance plus rapide pour un pouvoir d'arrêt très proche, son choix s'imposa pour la réalisation de scanners à haute résolution. La technologie du couplage LSO et PMT fut en particulier développée dans les différentes générations de scanners microPET [Cherry 96, Cherry 97]. Ces scanners sont destinés à l'imagerie du primate et du rongeur. Leurs performances n'ont

pas cessé d'être améliorées durant la dernière décennie [Tai 03, Yang 04]. Par exemple, la dernière génération des microPET, le Focus 120 destiné à l'imagerie de la souris ou du rat, peut atteindre une résolution transversale proche du millimètre et une résolution axiale de 1.5 mm, avec une sensibilité absolue de 7% sous certaines conditions [Kim 07].

5.5 Scanner TEP petit animal au xénon liquide

5.5.1 Les propriétés de détection du xénon liquide

Le xénon liquide (LXe) est un scintillateur qui a été abondamment étudié et utilisé dans le domaine expérimental de la physique des particules, puisque sa densité et son numéro atomique élevés permettent de stopper efficacement les rayons gamma. Le tableau 5.1 résume les propriétés intéressantes du LXe pour la détection en TEP en les comparant avec deux autres scintillateurs parmi les plus courants, à savoir le BGO et le LSO. Nous présentons également les propriétés du NaI(Tl) (iodure de sodium dopé au thallium), le premier scintillateur à s'imposer dans l'imagerie nucléaire mais qui n'est plus utilisé que par quelques groupes en TEP.
Les propriétés de ces scintillateurs pour la détection en TEP peuvent être divisées en deux catégories : les propriétés d'atténuation des photons de 511 keV incidents et les propriétés de scintillation. La densité et le numéro atomique du LXe sont inférieurs à ceux du BGO et du LSO, mais comparable à ceux de NaI(Tl). Il a donc un pouvoir d'arrêt acceptable vis-à-vis des photons d'annihilation. De même, le coefficient de photofraction du LXe de 20 % est comparable à celui de NaI(Tl).
Concernant les paramètres de l'émission lumineuse, le LXe s'avère très efficace. Son rendement de scintillation, de l'ordre de 43000 à 78600 MeV/photon [Doke 90, Mitsuhiro 92, Seguinot 95], est quasiment identique à celui de NaI(Tl) qui est la référence en terme de réponse lumineuse, ce qui lui assure une bonne résolution en énergie. Par ailleurs, sa constante de décroissance, composée de deux composantes à 3 et 27 ns, est faible : sa réponse temporelle est donc rapide, ce qui est un avantage pour développer un système à taux de comptage élevé. Cependant, la longueur d'onde faible des photons de scintillation (rayons ultraviolet (UV) de longueur d'onde 178 nm) est une difficulté pour élaborer un système de collection de lumière efficace. En revanche, la longueur d'atténuation du LXe vis-à-vis des photons UV étant très grande, plus de 20 cm, ces derniers ne sont quasiment pas absorbés le long de leur parcours dans le scintillateur jusqu'au photodétecteur.
Ces propriétés intéressantes du LXe pour la détection en TEP ont conduit plusieurs équipes de recherche à développer des scanners dont les détecteurs sont basés sur ce scintillateur [Lopes 95, Doke 06]. Nous allons décrire en particulier le système étudié dans le cadre de cette thèse.

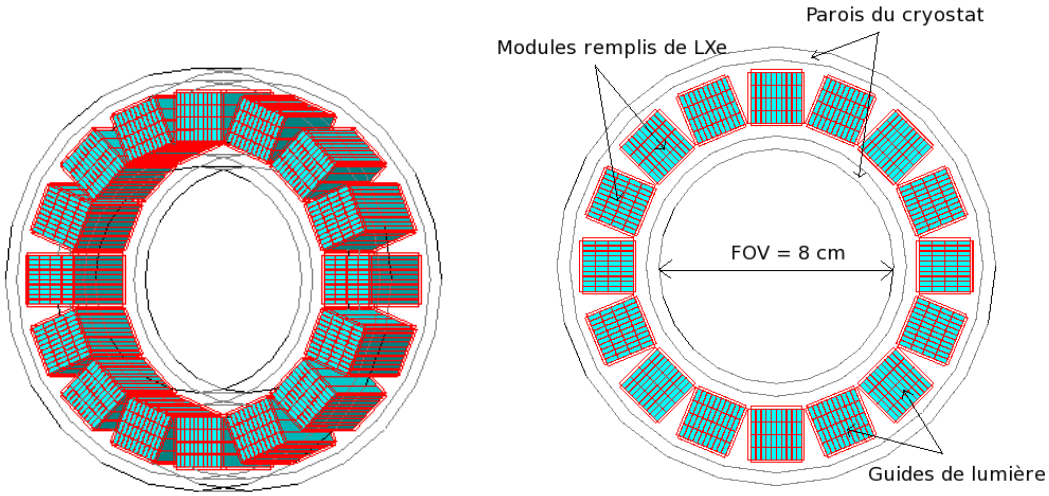
	Scintillateur	NaI(Tl)	LXe	BGO	LSO
Paramètres d'atténuation à 511 keV	Numéro atomique (effectif)	50	54	75	66
	Densité (g.cm^{-3})	3.7	3.1	7.1	7.4
	Photofraction (%)	18[a]	20[h]	41.5[b]	32.5[b]
	Longueur d'atténuation (cm)	2.6[a]	3.8[g]	1.1[b]	1.25[b]
Paramètres de l'émission lumineuse	Rendement lumineux relatif (%)	100[a]	$\sim$100[c]	22[a]	75[a]
	Constante de décroissance (ns)	230[a]	3-27[d]	300[b]	40[b]
	Pic de scintillation (nm)	410[f]	178[e]	480[b]	420[b]
	Longueur d'atténuation (cm)		> 20[e]		

[a][Dreuille 02]
[b][Braem 04]
[c]Déduit de [Seguinot 95]
[d][Kubota 78]
[e][Baldini 05]
[f][Lewellen 08]
[g]Déduit de [Chepel 99]
[h]The National Institute of Standards and Technology, 2006.
http ://physics.nist.gov/PhysRefData/contents.html

Tab. 5.1 – Comparaison des caractéristiques d'atténuation et de scintillation du xénon liquide avec deux des principaux scintillateurs utilisés en TEP, le BGO et le LSO, ainsi que le scintillateur de référence historique, le NaI(Tl).

5.5.2 Description du scanner TEP LXe

Le scanner TEP en cours de développement au LPSC est dédié à l'imagerie du petit animal et utilise comme milieu scintillant du xénon liquide, raison pour laquelle il a été appelé « TEP LXe ». Ce scanner sera composé de 16 modules de section 2×2 cm^2 disposés de manière à former un unique anneau. L'ensemble est placé dans un cryostat qui fixe le diamètre du champ de vue (FOV pour *Field Of View*) transversal du scanner à 8 cm. Ces modules sont orientés suivant l'axe du scanner, ce qui constitue l'autre particularité de ce prototype, puisque la majorité des scanners TEP sont composés de blocs de détecteurs qui pointent vers le centre du scanner (figure 5.5). Par ailleurs, chaque module, rempli de LXe, est divisé en 40 cellules par des guides de lumières en aluminium recouverts de MgF_2. La segmentation du module consiste en 4 couches de 10 guides de lumières de section 2×5 mm^2. Aux deux extrémités d'un module se trouve un PSPMT à anodes croisées. Lorsqu'un photon d'annihilation interagit dans un guide, des photons ultraviolet (UV) provenant de la scintillation du LXe sont émis de manière isotropique et se propagent le long du guide par des réflexions spéculaires jusqu'aux PSPMTs (figure 5.6), donnant ensuite, après traitement électronique, naissance à des signaux permettant la localisation de l'interaction et la détermination de l'énergie déposée.



(a) (b)

FIG. 5.5 – Le TEP LXe est composé de 16 modules orientées axialement et placées dans un cryostat : (a) vue en perspective, (b) vue dans un plan transversal.

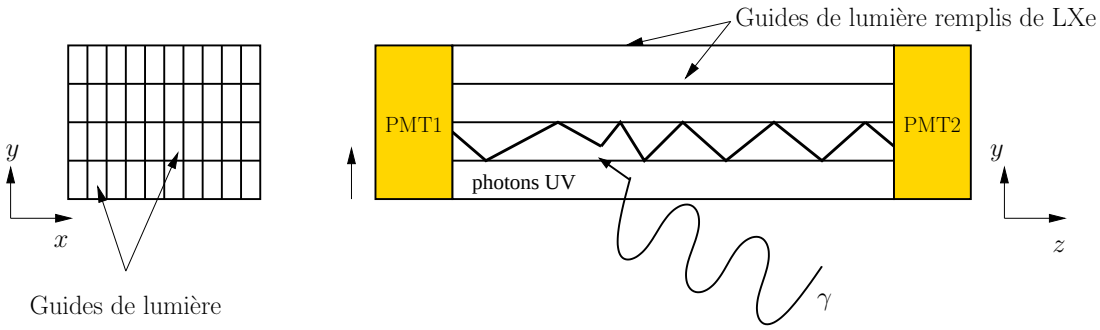


FIG. 5.6 – Un module de détection : (gauche) coupe transversale, (droite) coupe longitudinale. Les photons UV se propagent par réflexion sur les parois du guide de lumière.

5.5.3 La reconstruction des interactions dans le plan transversal d'un module

Il faut reconstruire trois coordonnées afin de localiser le point d'interaction du photon d'annihilation dans un module. Selon le nombre de photons UV atteignant les PSPMTs et par conséquent, le nombre de photoélectrons produits, un calcul barycentrique est réalisé afin de déterminer le guide où l'interaction a eu lieu. On détermine ainsi les coordonnées x et y (dans le plan transversal des modules) du point d'interaction. La figure 5.7 illustre cette opération dans le cas où un photon de 511 keV dépose toute son énergie par effet photoélectrique après 2 diffusions Compton. La coordonnée axiale z de l'interaction est quant à elle reconstruite en utilisant l'asymétrie des réponses des deux PSPMTs, méthode qui sera explicitée au paragraphe 6.1.4.3.

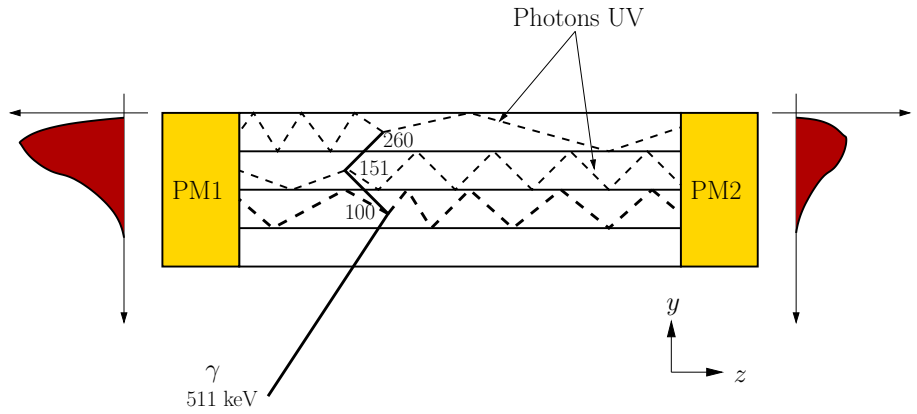
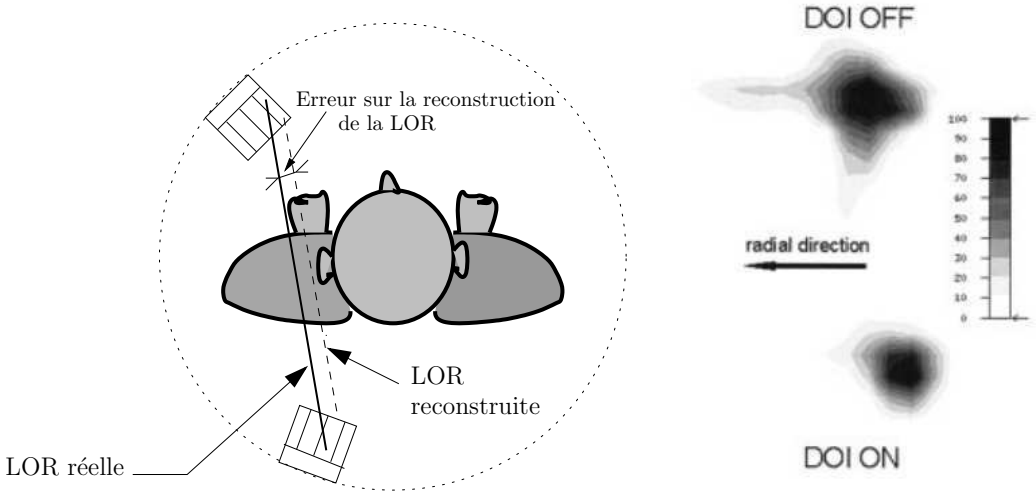


FIG. 5.7 – Calcul barycentrique de la localisation du point d'interaction. Cet exemple montre un photon incident qui réalise trois interactions dans le module en déposant une partie de son énergie à chaque fois (100, 151 et 260 keV). Le nombre de photons UV émis et par conséquent, le nombre de photoélectrons générés au niveau de la photocathode, est proportionnel à l'énergie déposée. Il en résulte un signal en sortie des PSPMTs dont le maximum est plus proche du lieu de dépôt d'énergie maximale. De plus, selon les positions des lieux d'interaction le long du module, l'amplitude des signaux de sortie des PSPMTs est différente dû à l'atténuation des photons UV dans les guides de lumière (paragraphe 6.1.4.2).

5.5.4 La mesure de la profondeur d'interaction

La géométrie axiale avec les PSPMTs aux extrémités des modules couplée à la segmentation des modules par plusieurs guides de lumières permettent de mesurer une donnée cruciale en TEP qui est la profondeur de l'interaction (DOI en anglais pour *Depth of Interaction*) du photon d'annihilation dans le scintillateur. Lorsque cette mesure n'est pas réalisée, les extrémités des LORs sont alors affectées à la surface des cristaux des

détecteurs en coïncidence. Ainsi, il existe une erreur entre la LOR réelle et la LOR reconstruite (figure 5.8.(a)). Si cette erreur est importante, il y a une dégradation de la résolution spatiale et un biais dans l'image reconstruite (figure 5.8.(b)).
Plusieurs autres systèmes permettent de mesurer la DOI [Lewellen 08]. En particulier, les détecteurs *phoswich*, parmi les premiers à pouvoir mesurer la DOI, sont composés de l'association d'au moins deux scintillateurs ayant des temps de décroissance lumineuse différents, comme sur le scanner ClearPET [Rey 07]. Cette différence de temps de décroissance lumineuse créant des signaux de formes différentes, l'idée est de discriminer efficacement les signaux pour déterminer le détecteur qui est à l'origine de la lumière et ainsi réduire l'erreur de parallaxe.



(a) (b)

FIG. 5.8 – (a) Erreur de parallaxe : quand la profondeur d'interaction n'est pas mesurée, les extrémités des LORs sont assignées à la surface des cristaux où l'interaction des photons d'annihilation a eu lieu. (b) Comparaison de deux images avec et sans mesure de la DOI : dans le cas où la DOI n'est pas mesurée, la distribution ponctuelle du radiotraceur est reconstruite avec une plus faible résolution (tâche plus large) et est mal positionnée (décalage spatial radial) (image extraite de [Wienhard 02]).

5.5.5 Autres systèmes TEP au xénon liquide

Plusieurs équipes ont étudié la faisabilité d'un détecteur TEP fonctionnant au LXe. L'une des premières fut l'équipe de l'Université de Coimbra au Portugal. Leur démarche consistait à utiliser non seulement le signal de scintillation (conversion des photons UV en signal électrique) mais également le signal d'ionisation. En effet, pour chaque photon d'annihilation de 511 keV interagissant dans le LXe, 32000 paires électron/ion sont créées. En imposant un champ électrique de part et d'autre du module de détection, le signal d'ionisation peut être collecté et une bonne résolution en énergie peut être attendue. Par ailleurs, afin de mesurer la profondeur d'interaction, le signal de scintillation (très

rapide) est utilisé comme un déclencheur pour la mesure du temps de dérives des électrons jusqu'à l'anode. On peut ainsi remonter à la position de l'interaction dans le détecteur. Le rapport des performances qu'ils ont obtenues avec leur chambre de test de 10×60×50 mm^3 (50 mm étant la longueur suivant la direction d'incidence des photons γ) fait état d'une résolution transversale submillimétrique, d'une résolution axiale de 5 mm et d'une résolution en énergie de 17%. Par ailleurs, ils ont mesuré une résolution temporelle de 1.3 ns [Chepel 02].

Une autre équipe ayant beaucoup contribué à l'étude des performances du LXe comme milieu de détection pour la physique des particules, et qui s'est ensuite intéressée à son application en imagerie médicale est celle de l'Université de Waseda au Japon. Leur démarche a pour but d'améliorer la résolution en énergie et en temps, en optimisant la mesure du signal de scintillation. Pour cela, des PMTs ayant une efficacité quantique de l'ordre de 22% ont été spécialement développés et sont disposés tout autour du volume sensible. Cependant, ce dispositif souffre d'une hétérogénéité des performances de la détection et les meilleurs résultats ont été mesurés dans un volume de 5×5×5 cm^3 au centre de la chambre de test. Ainsi, une résolution en énergie de 15.9 % et une résolution en temps de 260 ps ont été mesurées. Concernant les résolutions spatiales, elles sont de 3.4 mm en moyenne dans le plan transversal et de 2.1 mm en axial [Doke 06].

D'autres équipes de recherche travaillent actuellement sur cette thématique : Subatech en France (Nantes) [Grignon 07] et TRIUMF au Canada [Amaudruz 08]. Ces deux équipes tentent d'améliorer la résolution en énergie en mesurant, à l'instar de l'équipe de l'université de Coimbra, les signaux d'ionisation et de scintillation à partir de la technique de chambre à projection temporelle (en anglais TPC pour *Time Projection Chamber*). Ces deux équipes espèrent atteindre une résolution en énergie de l'ordre de 5%, dont il a été montré la faisabilité en physique des hautes énergies [Aprile 02], et une résolution spatiale submillimétrique.

5.6 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre, les principales notions concernant les interactions photon-matière nécessaires afin de comprendre le principe physique de la détection en TEP. Nous avons également présenté le scanner TEP LXe qui a été l'objet d'étude de cette thèse. Le principe des simulations Monte Carlo qui ont été utilisées pour caractériser les performances du TEP LXe a été également énoncé. Nous allons détailler, dans le prochain chapitre, la chaîne de simulations du TEP LXe qui a été mise en place et comparer les résultats simulés avec les résultats expérimentaux.

Chapitre 6

Étude expérimentale et simulée du scanner TEP LXe

6.1 Évaluation des performances d'un module du TEP LXe

6.1.1 Introduction

Un banc de test expérimental a été conçu afin d'évaluer les performances de détection d'un module prototype du TEP LXe. En parallèle, une chaîne de simulations Monte Carlo du banc de test a été mise en place dans le but d'aider à l'analyse des résultats expérimentaux obtenus avec un module, mais également pour réaliser un simulateur précis pouvant prédire les performances du TEP LXe complété des 15 autres modules. Nous allons dans un premier temps décrire l'expérience, la simulation du banc de test et le modèle utilisé pour reconstruire la coordonnée axiale (z) de l'interaction avant de confronter les résultats expérimentaux et simulés.

6.1.2 Description du banc de test expérimental

Un banc de test expérimental a été conçu afin d'évaluer les performances de détection d'un module du TEP LXe. La figure 6.1 schématise l'installation expérimentale dont des

photographies sont représentées aux figures 6.2 et 6.3. Le xénon gazeux est tout d'abord liquéfié en passant dans un dispositif cryogénique et transféré dans le module enfermé dans un cryostat. Le xénon utilisé possède une bonne pureté, 20 ppm, ce qui est suffisant pour garantir la scintillation et la collection efficace des photons UV après quelques centimètres de propagation. La température au sein du cryostat est de 165K et reste très stable (variation de l'ordre de quelques dixièmes de degrés). Les PSPMTs du module ne sont pas en contact direct avec le LXe. Ils sont séparés du LXe par une fenêtre de quartz, une fine couche d'air (0.3 mm d'épaisseur) et la fenêtre d'entrée des PSPMTs. Par conséquent, le long de leur parcours jusqu'aux photodétecteurs, les photons de scintillations rencontrent successivement des milieux ayant pour indice de réfraction 1.6-1.7 (LXe) (d'après [Baldini 05], le spectre de valeurs mesurées est dû à la pureté du LXe qui varie selon les études), 1.58 (cellule de quartz), 1.0 (air) avant d'atteindre la fenêtre d'entrée des PSPMTs (L'utilisation de la graisse optique ne convient pas pour la longueur d'onde des photons UV émis). Il en résulte un angle limite d'émission des photons UV de 36 à 39°par rapport à la normale à l'interface LXe et quartz. Au delà de cet angle, il n'y a pas de rayon réfracté dans l'air et par conséquent, le photon UV n'atteint pas le PSPMT (figure 6.4). Une source ^{22}Na de 2 mm de large est placée sous le cryostat, sur un chariot dont la direction de translation est suivant l'axe du module. Un détecteur LYSO de 2 mm^2 de surface de détection couplé à un PMT est placé de l'autre côté de la source afin de réaliser des mesures en coïncidence. Il est important de noter que les coïncidences seules sont enregistrées par le module (un photon γ interagissant dans le module mais sans aucun autre photon détecté dans la fenêtre de coïncidence par le LYSO n'est donc pas comptabilisé). Ainsi, une tranche du module de largeur supérieure à 2 mm est irradiée. Des collimateurs en plomb ayant une fente de 2 mm de largeur, sont placés entre la source et le module pour limiter les émissions dans la direction x.
Le but de l'expérience est d'évaluer la résolution spatiale, transversale et axiale, la résolution en énergie et la résolution temporelle du module le long de son axe. Cependant, dans cette étude, nous nous concentrerons principalement sur la résolution spatiale et en énergie de ce système de détection. Le pas de translation du chariot étant de 5 mm et la longueur du module étant de 50 mm, 11 mesures sont réalisées au total.

6.1.3 Description de la simulation du banc de test

6.1.3.1 Introduction

La simulation du banc de test expérimental peut être divisée en deux parties. La première partie utilise le programme Monte Carlo GATE afin de simuler les composants physiques de l'expérience, les phénomènes physiques liés à l'émission des photons d'annihilation ainsi que leurs interactions dans le module. La deuxième partie simule la scintillation et la propagation des photons UV dans les guides de lumières jusqu'aux PSPMTs. Ce programme a été réalisé à l'extérieur de GATE. Chaque partie va être détaillée en précisant les approximations qui ont été faites dans la simulation.

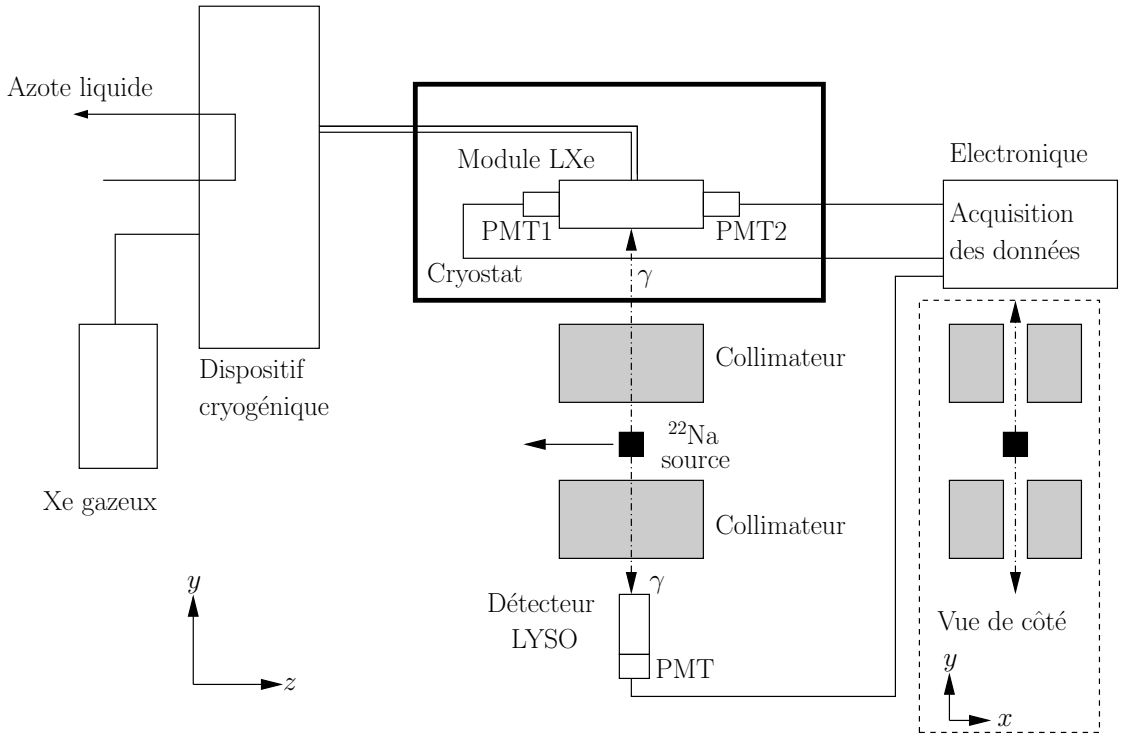
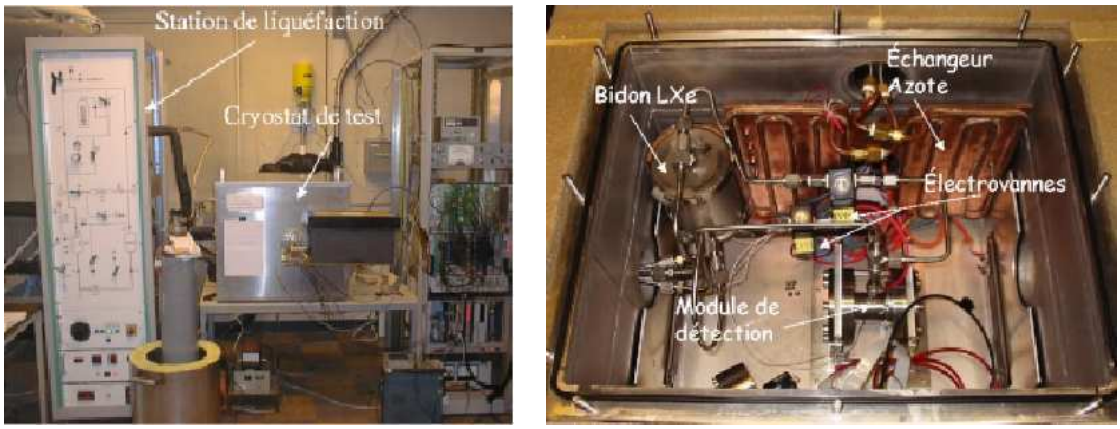
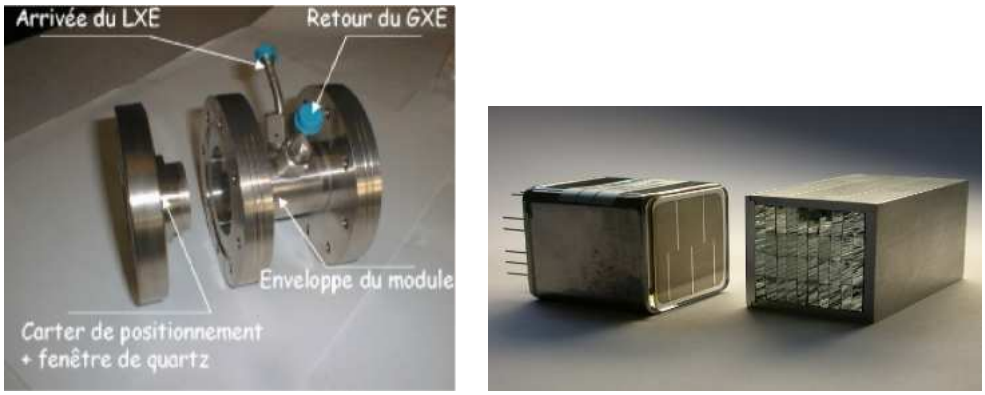


FIG. 6.1 – Schéma du banc expérimental d'évaluation des performances de détection d'un module TEP LXe



(a) (b)

FIG. 6.2 – Photographies de l'installation expérimentale (a) et de l'intérieur du cryostat de test (b).



(a) (b)

FIG. 6.3 – Photographies du module prototype (a), d'un PSPMT et d'une matrice de guides de lumière (b).

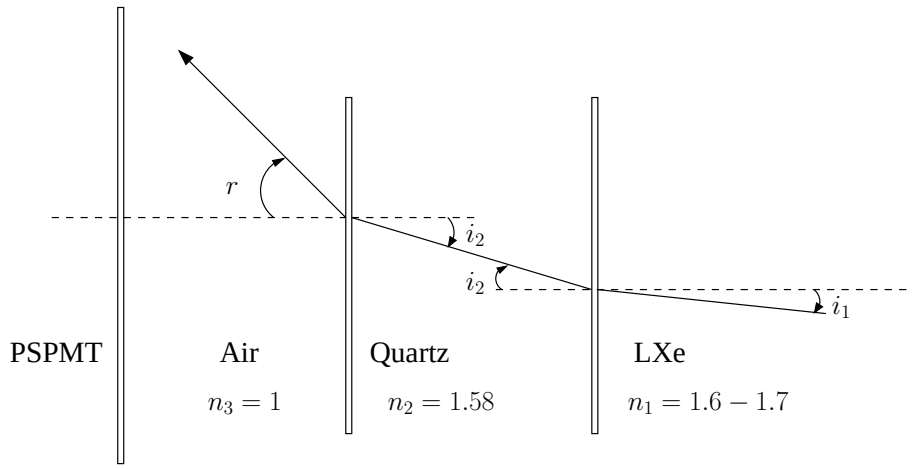


FIG. 6.4 – Parcours d'un rayon UV, issu de la scintillation dans le LXe, traversant une cellule de quartz et une couche d'air avant d'atteindre la fenêtre d'entrée du PSPMT. Le calcul de l'angle limite i_1 au delà duquel il n'existe pas de rayon réfracté dans l'air se fait de la manière suivante : l'angle limite i_2 entre le quartz et l'air vérifie $\sin(i_2) = n_3/n_2$, on en déduit que l'angle limite $i_1 = \arcsin((n_2/n_1)\sin(i_2)) = \arcsin((n_3/n_1)$. Pour $n_1 = 1.6$, l'angle limite i_1 vaut 38.7 °.

6.1.3.2 Simulation physique du banc de test : de l'émission aux interactions des photons d'annihilation avec le module

Cette première partie consiste à simuler l'installation expérimentale physique et l'émission des photons d'annihilation de 511 keV. Pour cela, le logiciel de simulation Monte Carlo, GATE, a été utilisé (figure 6.5). Le type de scanner *CylindricalPET* a été sélectionné mais un seul *rsector* a été défini afin de représenter le module[1]. Le module a été virtuellement divisé en 40 cristaux représentant les 40 subdivisions du module par les guides de lumières. Les propriétés du LXe ont été ajoutées à la base de données des matériaux de GATE afin de pouvoir définir le contenu du module comme étant composé de LXe. Les guides de lumière en aluminium d'épaisseur égale à 70 μm ont été simulés dans GATE. L'enveloppe du module a été définie comme un parallélépipède en aluminium d'épaisseur 1 mm. La source ^{22}Na de 2 mm de diamètre a été définie comme une source parfaite d'émission de photons d'annihilation, c'est à dire que ni le parcours du positon, ni l'accolinéarité des photons γ n'ont été modélisés. En effet, le but de cette simulation n'est pas de reconstruire l'image de la source mais uniquement de simuler la réponse du détecteur aux interactions des photons γ. Le cryostat et les collimateurs ont également été simulés. Le LYSO n'a pas été physiquement modélisé : les caractéristiques temporelles de la détection n'ont par conséquent pas été étudiées dans la simulation. Cependant, les événements détectés en coïncidence appartenant à un angle solide d'environ 2°vu de la source, une contrainte sur l'angle d'émission a donc été appliquée (figure 6.6) pour simuler la présence du LYSO. Les processus électromagnétiques sélectionnés dans GATE ont été l'effet photoélectrique, la diffusion Compton et la diffusion Rayleigh. Chaque interaction dans le module, appelée *hit*, est enregistrée et contient plusieurs informations (paragraphe 5.3.2). Parmi toutes les informations disponibles, celles qui sont nécessaires pour simuler la scintillation du LXe sont, pour chaque photon interagissant dans le module, la localisation spatiale et la valeur de l'énergie déposée par le photon lui-même ou par les différents électrons issus d'effets photoélectriques ou de diffusions Compton.

6.1.3.3 Simulation de la scintillation et de la propagation des photons UV dans les guides de lumières

Cette deuxième partie de la chaîne de simulation a pour but de simuler la réponse du module après interaction des photons de 511 keV. Elle utilise un programme spécialement conçu pour modéliser la géométrie des guides et du module. Ce programme prend en entrée la liste des *hits* simulés dans GATE. À chaque point d'interaction, un nombre proportionnel au dépôt d'énergie, représentant les photons UV issus de la scintillation du LXe, est généré. L'émission isotropique et la propagation de ces photons par réflexion spéculaires sur les guides de lumières sont simulées (Algorithme 1). Plusieurs paramètres sont impliqués dans cette simulation. La géométrie des guides est définie en fonction de

[1]Le terme *CylindricalPET* fait référence aux scanners de forme cylindrique, composés de blocs de détecteur élémentaires, appelés *rsector* dans GATE. cf. *GATE User's guide*, http ://opengatecollaboration.healthgrid.org/.

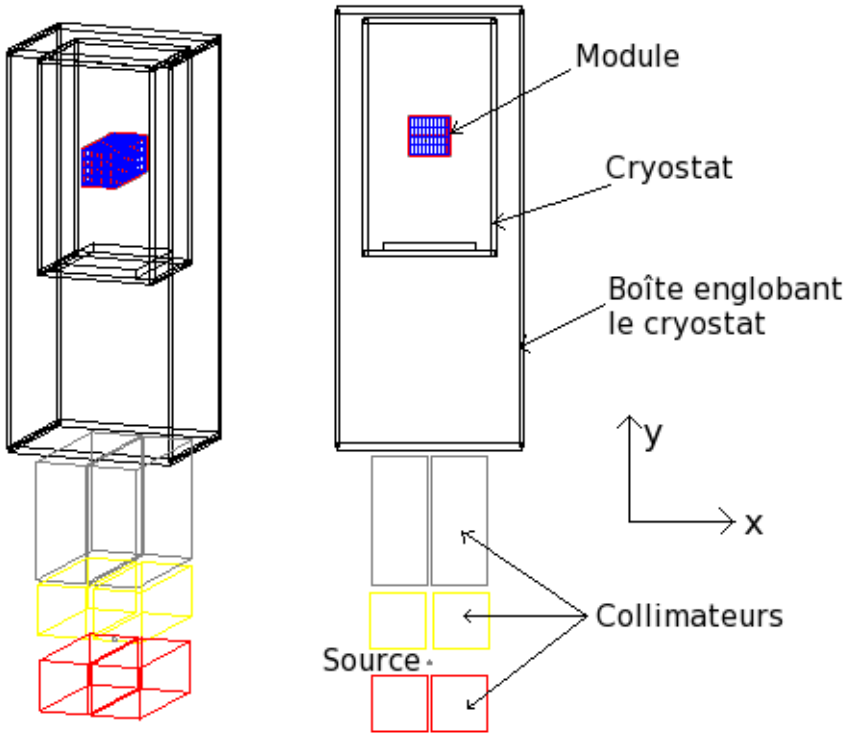


FIG. 6.5 – Simulation du banc de test dans GATE : vue en perspective (a) et vue en coupe transversale (b)

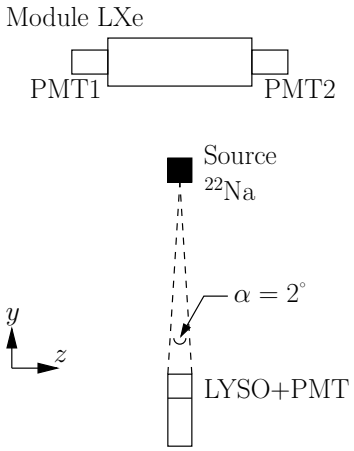


FIG. 6.6 – Angle solide de l'émission des photons d'annihilation détectés en coïncidence par le module et le LYSO.

la simulation dans GATE. Dans le cas présenté, les guides ont une longueur de 50 mm et une section de 2×5 mm^2. Le module est composé de 4 couches de 10 guides empilées verticalement, ce qui lui confère une section carrée de 20×20 mm^2. Par ailleurs, on définit également le coefficient de réflexion du guide, qui est pris à 0.8 (moyenne obtenue pour une mesure de la réflectivité sur un spectre de photons UV allant de 150 à 250 nm). L'angle limite, introduit précédemment, est pris en compte avec une valeur de 38 °. Le rendement lumineux du LXe est pris égal à 23000 photons UV générés par un dépôt d'énergie de 511 keV. Par ailleurs, dans cette simulation, la pureté du LXe n'est pas introduite puisqu'elle est expérimentalement bonne et n'introduit pas d'atténuation significative des photons de scintillation. Une efficacité quantique des PSPMTs de l'ordre de 20 %, selon la valeur indiquée par le constructeur, est prise en compte dans la simulation. En réalité, le gain des PSPMTs étant hétérogène sur toute sa surface d'entrée (variation d'un facteur 2 pour les PSPMTs utilisés), il faudrait incorporer ce paramètre dans la simulation. En pratique, il est difficile de la mesurer expérimentalement au niveau de chaque région délimitée par un guide de lumière. Nous avons donc fait l'approximation dans la simulation d'un gain identique et homogène pour les deux PSPMTs égal à 1.

Algorithme 1 Algorithme de la propagation des photons UV dans les guides de lumières causée par l'interaction d'un photon d'annihilation dans le module LXe. Les constantes connues de la simulation sont : N, le nombre de *hits* que réalise un photon γ dans le LXe, E_o égale à 511 keV, N_o, le nombre de photons UV générés par un dépôt d'énergie E_o, l'angle limite noté ang, le coefficient de réflexion noté ref. La variable i représente un *hit* d'énergie E_i déposée dans le LXe.

for $i = 1$ to N **do**
  on calcule le nombre de photons UV générés : $N_i^{UV} = N_o E_i / E_o$
  for $k = 1$ to N_i^{UV} **do**
    on tire un angle d'émission α de manière aléatoire
    if $\alpha < ang$ **then**
      on calcule la direction du photon UV à partir de son point d'émission
      on tire un nombre r compris entre 0 et 1 de manière aléatoire
      if $r < ref$ **then**
        on calcule la réflexion du photon UV sur la paroi du guide de lumière
      end if
      Le même test est réalisé pour chaque réflexion du photon sur les guides jusqu'aux PSPMTs
    end if
  end for
  on calcule le nombre de photons UV atteignant les PSPMTs causé par le *hit* i et on identifie le centre du guide touché
end for
on calcule le nombre total de photons UV atteignant les PSPMTs permettant d'assigner une position à l'interaction du γ dans le LXe

6.1.4 La modélisation des guides de lumières

6.1.4.1 Introduction

La modélisation des guides de lumière est nécessaire afin de localiser les points d'interaction des photons d'annihilation dans le module et de reconstruire l'énergie déposée. En réalité, les coordonnées transversales, x et y, des points d'interaction sont reconstruites directement grâce au calcul barycentrique réalisé par les PSPMTs expliqué précédemment. Concernant la coordonnée axiale z et l'énergie E, il faut appliquer une méthode de calcul permettant de déterminer ces valeurs à partir des réponses des deux PSPMTs. Nous allons voir que pour reconstruire chaque inconnue, il faudra appliquer une fonction de calibration. Pour la présentation des méthodes de calibration, nous allons utiliser des simulations d'émission et de propagation des photons UV que dans un seul guide. Nous validerons ensuite la démarche en l'appliquant sur les résultats expérimentaux.

6.1.4.2 Les simulations de calibration

Les simulations effectuées, afin de déduire les fonctions de calibration permettant de reconstruire z et E, consistent à simuler l'absorption complète de photons d'annihilation de 511 keV à plusieurs points précis le long du guide, sans introduire de largeur de collimation. Dans cette simulation, 1000 photons de 511 keV ont été simulés tous les 2 mm le long du guide. A chaque absorption, l'émission isotropique de 23000 photons UV se propageant dans le guide de lumière est simulée, avec les valeurs des paramètres physiques détaillés au paragraphe 6.1.3.3. Notons N_1 et N_2 le nombre de photoélectrons comptés respectivement par les PSPMT1 et PSPMT2. Le graphe 6.7 illustre la répartition de la moyenne des N_1 et N_2 sur les 1000 photons d'annihilation absorbés le long du guide. Nous constatons que la quantité de lumière détectée à chaque extrémité décroît exponentiellement vers le centre du guide. La formalisation qui a donc été adoptée pour modéliser la propagation des photons UV dans les guides de lumière et la collecte au niveau des PSPMTs s'écrit de la manière suivante :

$$N_1(z) = A\frac{N_0}{2}\exp\left(-\frac{\frac{l}{2}-z}{\lambda_{ref}}\right) \quad , \quad N_2(z) = A\frac{N_0}{2}\exp\left(-\frac{\frac{l}{2}+z}{\lambda_{ref}}\right) \tag{6.1}$$

Cette modélisation a initialement été introduite par les auteurs de [Braem 04]. Le paramètre λ_{ref} représente la longueur d'atténuation du guide. λ_{ref} dépend de la géométrie du guide, du coefficient de réflexion de la paroi du guide, de l'efficacité quantique des PSPMTs et de l'angle limite. A est une constante dépendant de l'efficacité quantique des PSPMTs et de l'angle limite, N_0 est le nombre de photons UV générés par un photon de 511 keV déposant la totalité de son énergie dans le LXe et l, la longueur axiale du module.

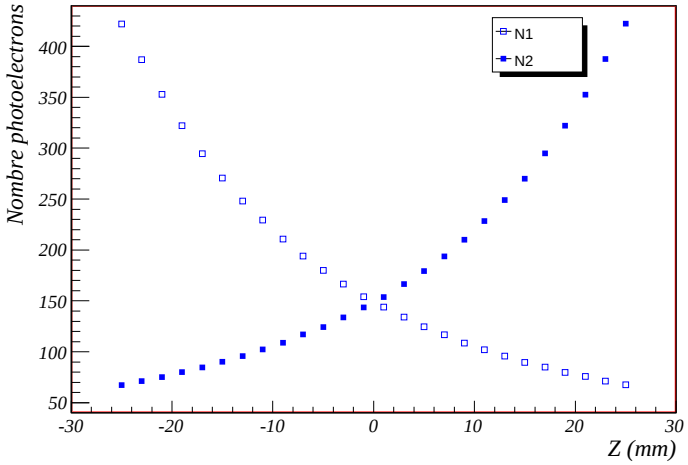


FIG. 6.7 – Distribution de la moyenne des photoélectrons collectés par les PSPMTs issus des interactions de 1000 photons d'annihilation à plusieurs positions le long du guide (le centre du guide est à $z = 0$).

6.1.4.3 Estimation de la coordonnée z de l'interaction

La première étape avant de pouvoir reconstruire z est de déterminer le paramètre λ_{ref}. Nous déduisons des équations (6.1) :

$$\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \frac{2z}{\lambda_{ref}} \tag{6.2}$$

A partir des simulations de calibration, nous avons tracé le graphe représenté par l'équation (6.2) (figure 6.8). Nous obtenons bien une fonction linéaire confirmant le choix du modèle. Nous pouvons par conséquent déterminer la valeur de λ_{ref} qui vaut 27 mm pour les caractéristiques particulières du guide décrites dans la simulation :

- le guide à section rectangulaire est de dimensions $2 \times 5 \times 50$ mm^3
- le coefficient de réflexion des parois du guide vaut 0.8
- l'efficacité quantique des PSPMTs est prise à 20 %
- l'angle limite dû à la propagations des photons UV dans plusieurs milieux d'indices de réfraction différents vaut 38 °.

La longueur d'atténuation du LXe vis à vis des photons UV qui est plus de 20 cm (tableau 5.1) est bien supérieure à λ_{ref}, elle est donc négligée. Enfin, on peut déduire la coordonnée axiale de l'interaction, que l'on notera dorénavant z_{rec}, par la relation (6.3) issue de (6.2) :

$$z_{rec} = \frac{1}{2}\lambda_{ref} \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) \tag{6.3}$$

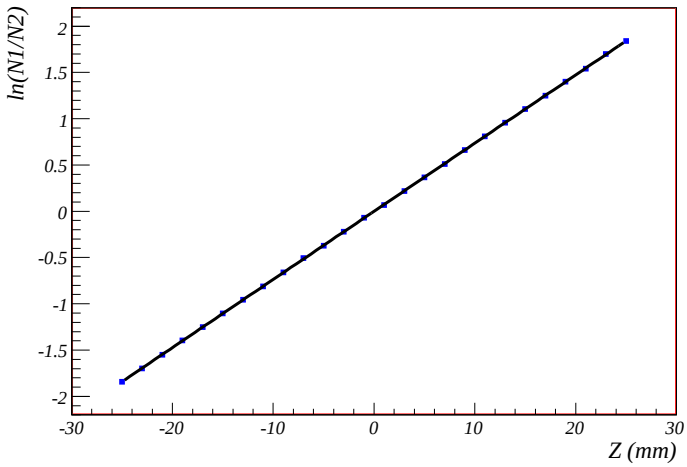


FIG. 6.8 – Détermination de λ_{ref}, spécifique aux caractéristiques du guide implémentées dans la simulation, en calculant la pente de la droite interpolant les points du graphe $\ln(N1/N2)$ en fonction de z.

6.1.4.4 Estimation de l'énergie E déposée lors de l'interaction

L'énergie déposée par le photon incident dans le guide de LXe est proportionnelle au nombre total de photoélectrons générés, c'est à dire à la somme $N_1 + N_2$. La figure (6.9) représente la distribution moyenne de $N_1 + N_2$ le long du module pour les 1000 photons d'annihilation que fournit la simulation de calibration. Nous constatons que le nombre total de photoélectrons générés n'est pas constant le long du module. Ceci est une conséquence des phénomènes d'atténuation dans le guide (réflexions, angle limite). Pour reconstruire la valeur exacte de l'énergie déposée, notée E_{rec}, il est donc nécessaire d'appliquer une fonction de correction de l'énergie, notée $f_{cor}(z_{rec})$, au point où l'interaction est reconstruite :

$$E_{rec} = \frac{N_1 + N_2}{f_{cor}(z_{rec})} \times 511\text{keV} \tag{6.4}$$

avec $f_{cor}(z_{rec})$, la fonction d'interpolation des points de la figure (6.9). La meilleure fonction d'interpolation s'avère être un polynôme de degré 4 parmi les différentes fonctions de fit testées. La figure 6.10 illustre la variation de l'énergie moyenne reconstruite par l'équation (6.4), en fonction de la position de l'interaction reconstruite suivant l'axe du guide. En omettant les valeurs de E_{rec} aux extrémités du guide, erronées à cause des effets de bord (on appliquera systématiquement cette démarche par la suite), la variation de l'énergie reconstruite est moins de 1% le long du guide.
Une autre grandeur de laquelle il est intéressant de discuter est $\sqrt{N1N2}$. D'après les équations (6.1) du modèle exponentiel de la propagation dans les guides de lumières, on obtient l'expression suivante :

$$\sqrt{N1N2} = A\frac{N_0}{2}\exp\left(-\frac{l}{2\lambda_{ref}}\right) \tag{6.5}$$

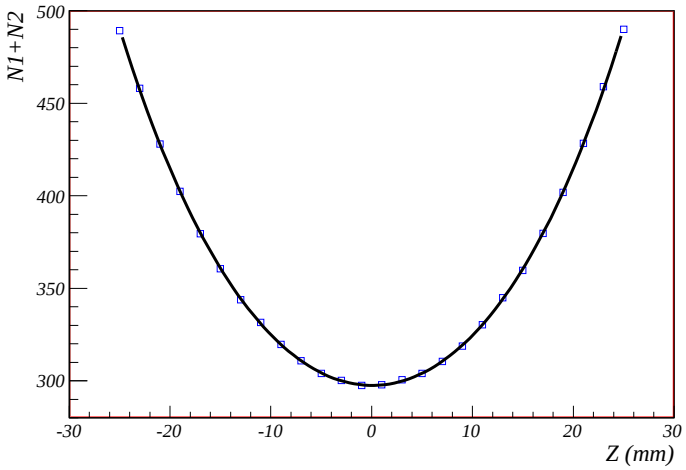


FIG. 6.9 – La somme des photoélectrons produits aux deux PSPMTs n'est pas constante le long du guide. La fonction interpolant les points du graphe f_{cor}, qui est un polynôme de degré 4, sert de fonction de calibration pour reconstruire l'énergie E_{rec} déposée lors de l'interaction.

qui est une constante. Or, en représentant $\sqrt{N1N2}$ le long du guide (figure 6.11), nous notons une variation progressive de cette grandeur, atteignant plus de 10 % entre le centre et les extrémités du guide. Nous constatons ainsi les limites du modèle proposé.

6.1.5 Les résultats de la simulation du banc de test expérimental

6.1.5.1 Introduction

Pour illustrer la réponse du module de détection, nous allons montrer dans cette partie les résultats de la simulation lorsque la source est située au centre du module. Nous présenterons les estimations des coordonnées transversales et axiales des points d'interaction, ainsi que de l'énergie. Pour les estimations de la coordonnée z et de l'énergie, nous exposerons la résolution obtenue en fonction de z.

6.1.5.2 L'estimation des coordonnées transversales x et y du point d'interaction

La figure 6.12 illustre la réponse du détecteur pour l'estimation des coordonnées x et y, notées x_{rec} et y_{rec}. Les simulations de propagation des photons UV et de leur collecte au niveau des PSPMTs, montrent que les 4 guides centraux dans la direction de x sont principalement irradiés (figure 6.12.(a)) ainsi que les guides qui leur sont superposés (figure 6.12.(b)). La position de la source au centre du module suivant l'axe x et la présence des

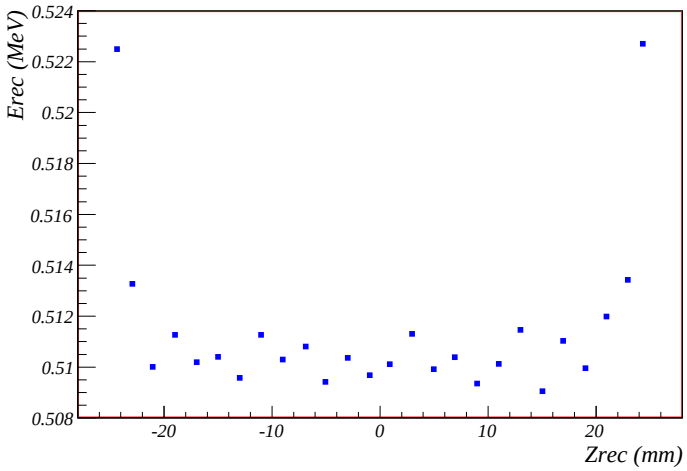


FIG. 6.10 – Variation de l'énergie moyenne reconstruite avec la fonction de correction f_{cor} le long du guide.

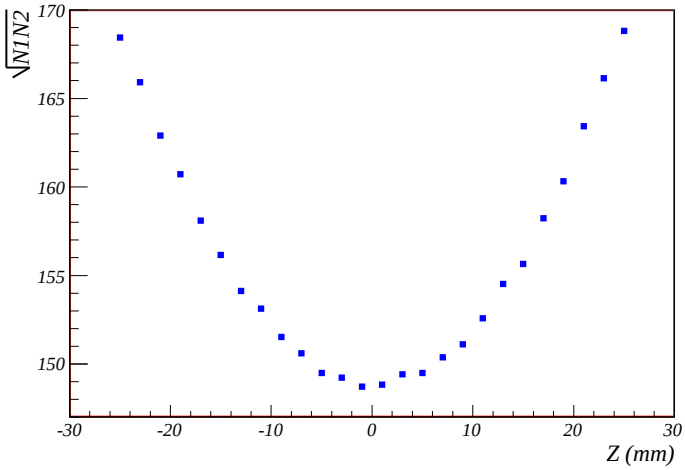
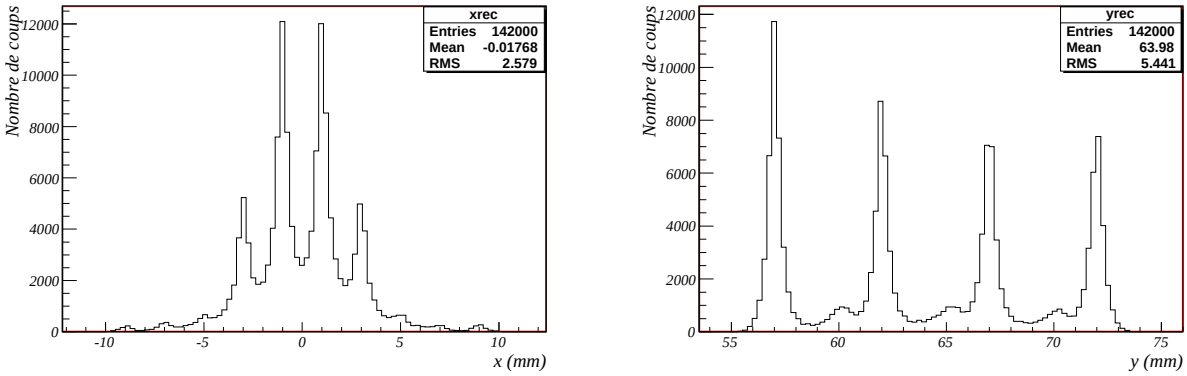


FIG. 6.11 – Variation de la grandeur $\sqrt{N1N2}$ le long du guide.

collimateurs font que seulement quelques guides sont atteints par les photons d'annihilation. La simulation montre que le module LXe sépare correctement les interactions ayant lieu dans différents guides, aussi bien en x qu'en y. Cependant, nous remarquons qu'il existe également des événements qui sont reconstruits entre les guides. Pour savoir quelle en était l'origine, nous avons calculé pour chaque photon d'annihilation interagissant dans le module, le nombre de guides différents dans lesquels il dépose de l'énergie. Nous obtenons l'histogramme représenté à la figure 6.13.(a). Nous constatons que la majorité des photons incidents ne réalise des interactions que dans un seul guide et qu'un tiers environ, dans plus d'un guide. Nous avons donc représenté à la figure 6.13.(b), l'estimation de y obtenue lorsque nous avons supprimé les photons d'annihilation ayant interagi dans plusieurs guides et gardé que ceux ayant interagi que dans un seul guide. Nous constatons alors que les événements reconstruits entre les guides ont été supprimés. Nous concluons donc qu'en pratique, ne connaissant pas quel guide a été touché en premier, il faudra appliquer une coupure pour ne pas prendre en compte ces événements qui risquent de mener à la reconstruction d'une fausse LOR.

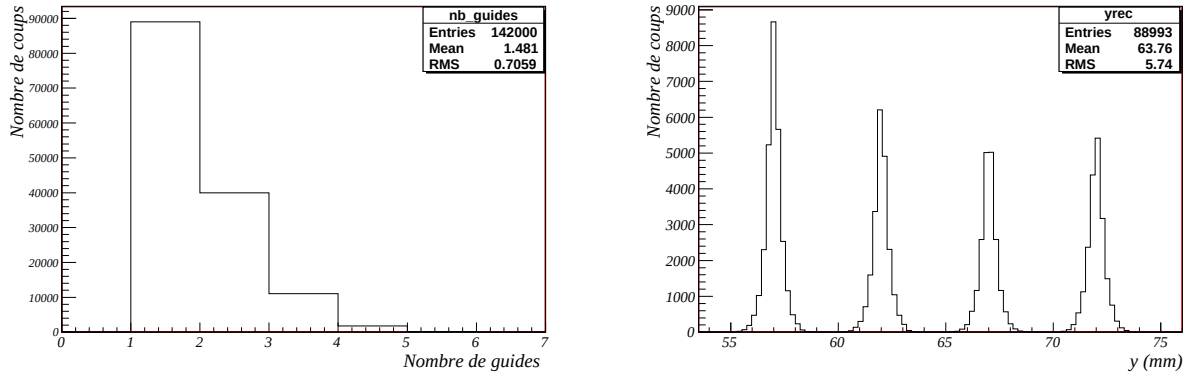


(a) (b)

FIG. 6.12 – Distributions de la coordonnée x reconstruite (a) et y reconstruite (b).

6.1.5.3 Estimation de la coordonnées axiale z du point d'interaction

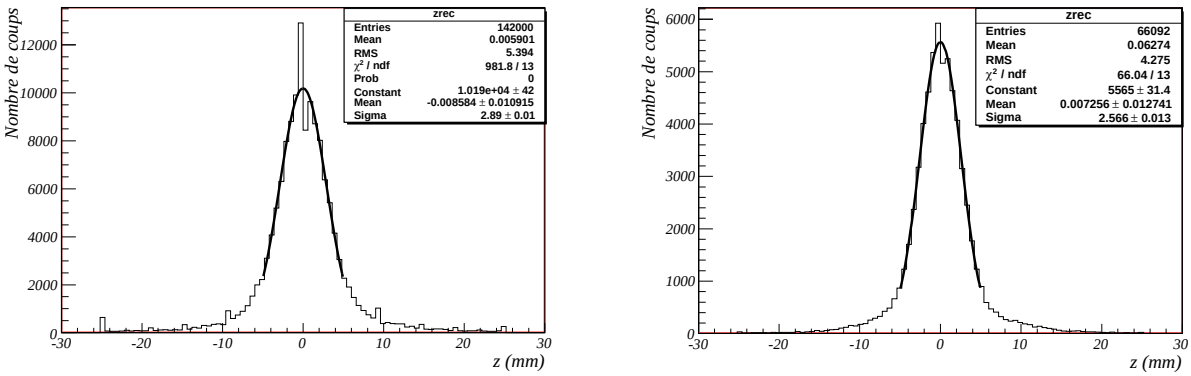
La figure 6.14 représente la distribution de la coordonnée axiale z des points d'interaction dans le module. Afin d'apprécier la qualité de l'estimation de z, nous réalisons un fit gaussien sur la distribution de z_{rec} (figure 6.14.(a)) dans le but d'obtenir la résolution axiale, sans correction de la largeur de la collimation. La figure 6.14.(a) indique que l'écart-type σ de la gaussienne approximant la distribution est de 2.89 ± 0.01 mm, ce qui correspond à une résolution en FWHM de 2.35 σ, soit 6.79 ± 0.02 mm. En réalisant cette opération sur 9 positions le long du module (les mesures aux deux extrémités n'ont pas été prises en compte du fait des effets de bord), nous obtenons une résolution moyenne en z le long du module de 6.86 ± 0.02 mm (FWHM). Par ailleurs, nous remarquons sur la figure 6.14.(a) que des interactions ont été reconstruites en dehors de la largeur de la collimation.



(a) (b)

FIG. 6.13 – (a) Histogramme représentant le nombre de guides différents touchés par les photons γ . (b) Distribution de la coordonnée y reconstruite en ne gardant que les photons ayant interagi dans un unique guide.

Ces événements ont réalisé des interactions Compton et peuvent être en partie éliminés en appliquant une coupure en énergie. La figure 6.14.(b) montre la distribution des z reconstruits avec une coupure en énergie à 0.4 MeV. Nous constatons que les interactions Compton ont été en bonne partie supprimées, au détriment cependant de la statistique globale de la détection. Par ailleurs, un fit gaussien réalisé sur la distribution de z_{rec} avec coupure en énergie, montre une amélioration de la résolution axiale qui devient environ 6.03 ± 0.03 mm (FWHM). La moyenne de la résolution axiale pour les 9 positions de la source le long du module en pratiquant une coupure en énergie à 0.4 MeV est de 6.10 ± 0.02 mm (FWHM). La figure 6.15 permet de comparer les résolutions axiales avec et sans coupure en énergie le long du module. Nous constatons que la résolution axiale est stable le long du module puisque un calcul d'écart-type indique qu'elle fluctue de 1.3 % autour de la résolution moyenne dans le cas où une coupure en énergie est appliquée.



(a) (b)

FIG. 6.14 – Distribution de la coordonnée z des points d'interaction dans le module sans coupure (a) et avec coupure (b) en énergie.

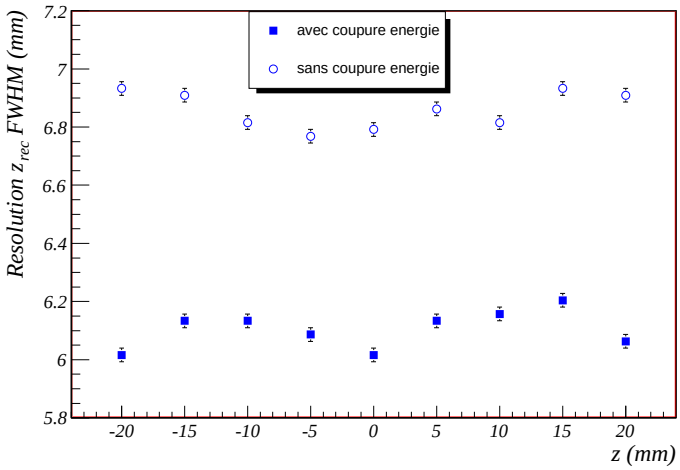


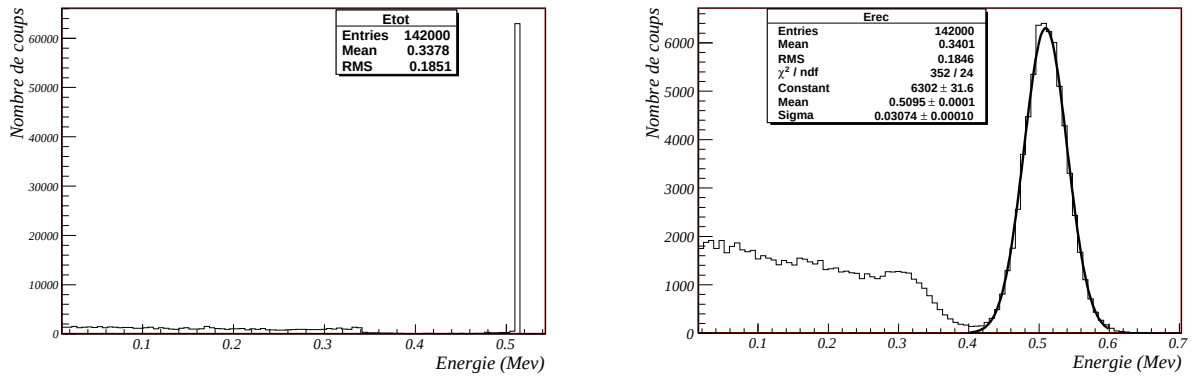
FIG. 6.15 – Résolution spatiale axiale le long du module avec et sans coupure en énergie à 0.4 MeV.

6.1.5.4 L'estimation de l'énergie déposée lors des interactions

La figure 6.16.(a) représente le spectre d'énergie des interactions en sortie de GATE. En réalité, GATE fournit uniquement l'énergie déposée localement lors de chaque interaction que réalise un photon d'annihilation le long de son parcours à travers le LXe. Le spectre de la figure 6.16.(a) est alors obtenu en sommant toutes ces énergies pour chaque photon incident de 511 keV, afin d'obtenir l'énergie totale déposée par chaque photon d'annihilation (dans cette somme, on tient compte également des énergies déposées lors des interactions inélastiques entre électrons, initiées par un photon γ). L'estimation de l'énergie est représentée par le spectre de la figure 6.16.(b). La résolution sur l'énergie reconstruite $res(E_{rec})$ est obtenue grâce à un fit gaussien sur le pic photoélectrique et est calculée par la relation :

$$res(E_{rec}) = 2.35 \times \frac{\sigma}{\mu} \times 100\% = 2.35 \times \frac{0.03074}{0.5095} = 14,18 \pm 0.05\% \text{ (FWHM)} \qquad (6.6)$$

où σ et μ sont respectivement l'écart-type et la valeur moyenne obtenus par le fit gaussien du spectre d'énergie. En répétant la même procédure pour chaque spectre d'énergie reconstruit à chaque position de la source le long du module, on obtient une résolution moyenne en énergie de 15.25 $\pm$ 0.06 %. La figure 6.17 renseigne sur la valeur de la résolution en énergie le long du module. Un calcul d'écart-type indique que la résolution en énergie fluctue de 7.6 % autour de sa valeur moyenne le long du module.



(a) (b)

FIG. 6.16 – (a) Spectre d'énergie en sortie de GATE, moyennant la somme des énergies déposées dans le LXe lors des interactions pour chaque photon d'annihilation. (b) Spectre d'énergie reconstruit après simulation de la réponse du module TEP LXe avec un fit gaussien sur le pic photoélectrique.

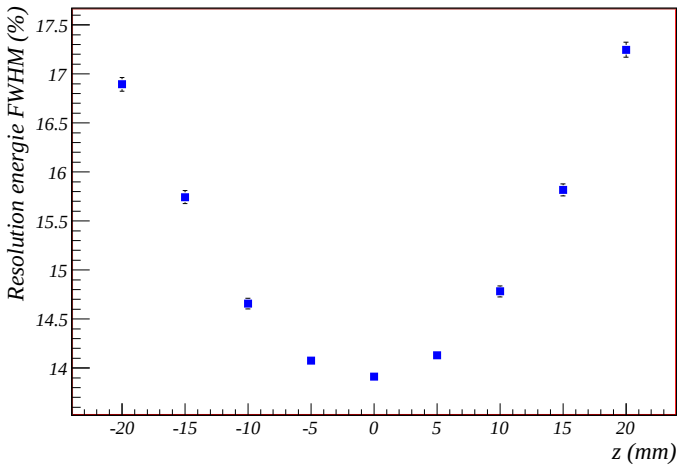


FIG. 6.17 – Résolution en énergie le long du module.

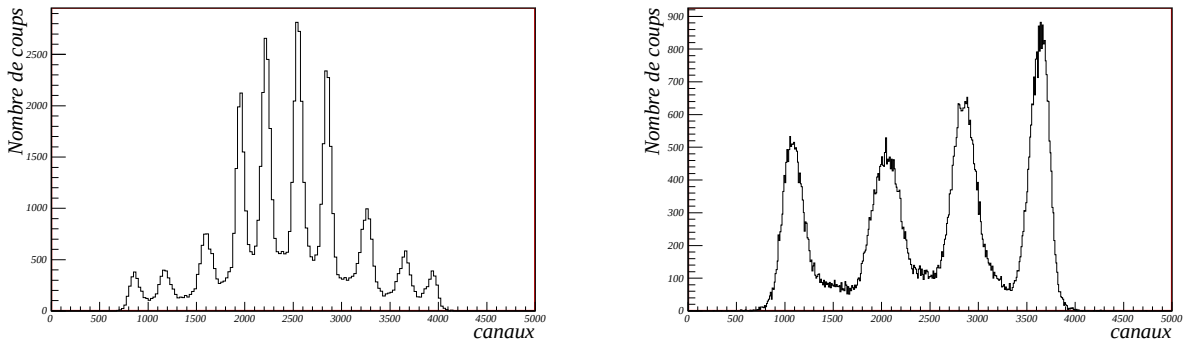
6.1.6 Résultats expérimentaux du banc de test

6.1.6.1 Introduction

La même procédure d'évaluation des performances du module TEP LXe, présentée en simulation, a été expérimentalement réalisée avec la présence d'un détecteur LYSO pour assurer le déclenchement de la mesure en coïncidence. La source est translatée sur 9 positions le long du module, ± 20 mm par rapport au centre avec un pas de 5 mm. Les extrémités du module ne sont pas irradiées à cause de la largeur trop importante du faisceau qui cause une diminution de photons incidents enregistrés en bordure du module. Les méthodes d'analyse utilisées pour traiter les données simulées ont servi également à traiter les données expérimentales. Il a été alors possible de vérifier la pertinence du modèle de propagation des photons UV dans les guides de lumière.

6.1.6.2 L'estimation des coordonnées transversales de l'interaction

L'expérience montre que les 40 guides du module peuvent être discriminés. Les figures 6.18.(a) et 6.18.(b) illustrent respectivement l'estimation des coordonnées x et y des interactions dans les 40 guides. La présence des collimateurs fait que les 4 guides centraux en x reçoivent le plus grand nombre de coups. Comme nous l'avons constaté dans la simulation, des événements situés entre les pics principaux sont enregistrés. Nous avons montré que ces événements proviennent de photons d'annihilation ayant réalisés des diffusions Compton dans au moins deux guides différents. Comme il existe une incertitude sur la localisation des différentes interactions réalisées par ces photons γ, des coupures sont appliquées entre chaque guide afin de les éliminer.

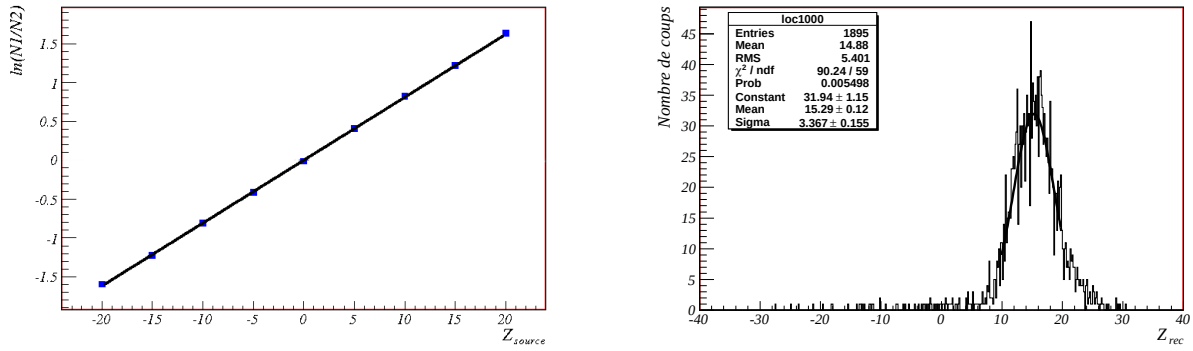


(a) (b)

FIG. 6.18 – (a) Reconstruction expérimentale de la coordonnée x. (b) Reconstruction expérimentale de la coordonnée y

6.1.6.3 La détermination de λ_{ref} et l'estimation de la coordonnée axiale de l'interaction

Les signaux des deux dynodes N_1 etN_2 servent à calculer λ_{ref}, dans le cas où le modèle exponentiel défini précédemment pour caractériser les guides peut être appliqué pour le traitement des données expérimentales. Pour chaque position de la source le long du module, la grandeur $\ln(N_1/N_2)$ est calculée. La valeur moyenne sur toutes les scintillations produites par les photons d'annihilation est obtenue en réalisant un fit gaussien de la distribution de $\ln(N_1/N_2)$. Les 16 guides centraux (4 en x et et 4 en y) qui sont principalement irradiés par la source sont ainsi étudiés. Les résultats pour chaque guide révèlent un comportement linéaire de la grandeur $\ln(N_1/N_2)$ en fonction de la coordonnée z de la source (figure 6.19.(a)). Ce résultat confirme la justesse du modèle exponentiel de la propagation des photons UV dans le guide de lumière pour l'estimation de la coordonnée axiale de l'interaction. Une valeur moyenne de λ_{ref} de 23.9 ± 1.0 mm a été déterminée sur les 16 guides. La coordonnée axiale est donc reconstruite en utilisant cette valeur de λ_{ref}. La figure 6.19.(b) représente l'estimation de la coordonnée z de l'interaction lorsque la source est située à une extrémité du module. Un fit gaussien est réalisé sur l'ensemble des reconstructions de z le long du module afin de déterminer la résolution de cette reconstruction. La figure 6.20 compare la résolution spatiale axiale obtenue le long du module dans le cas où tous les événements sont pris en compte et lorsqu'une coupure en énergie à 0.4 MeV est appliquée. Nous constatons que la résolution axiale est meilleure quand une coupure en énergie est effectuée, comme l'a montrée également la simulation : elle est en moyenne égale à 6.15 ± 0.17 mm (FWHM).



(a) (b)

FIG. 6.19 – (a) Détermination du λ_{ref} expérimental en calculant la pente de la droite interpolant le graphe $\ln(N_1/N_2)$ en fonction de la position z de la source (les barres d'erreurs sont plus petites que les marqueurs rectangulaires). (b) Reconstruction de z expérimentale pour une position de la source à une extrémité du module.

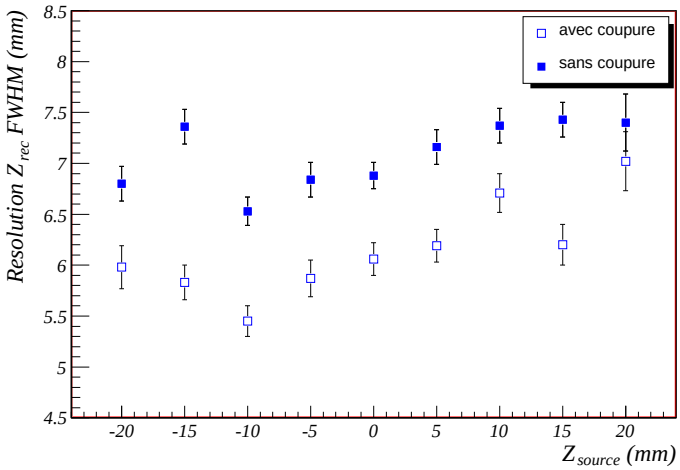
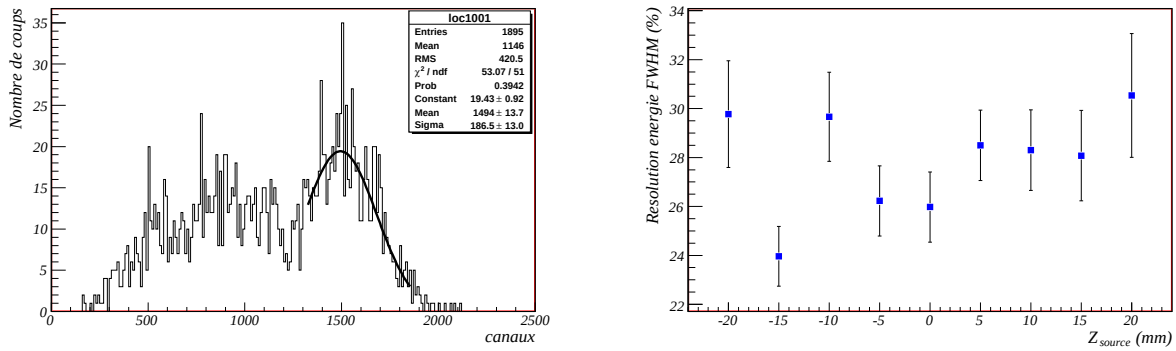


FIG. 6.20 – Résolution expérimentale en z le long du module avec et sans coupure en énergie à 0.4 MeV.

6.1.6.4 L'estimation de l'énergie

L'énergie déposée par un photon d'annihilation interagissant avec le LXe est proportionnelle à la somme des photoélectrons mesurés par les deux PSPMTs. La figure 6.21.(a) représente la somme $N_1 + N_2$ des réponses des deux photodétecteurs. Le signal n'a pas été calibré comme cela a été fait pour la simulation car un fit gaussien du pic photoélectrique observé sur ce type d'histogramme est suffisant pour indiquer la résolution en énergie atteinte expérimentalement. Le même traitement réalisé à chaque position de la source permet de tracer le graphe de la figure 6.21.(b), renseignant sur la résolution en énergie le long du module qui est en moyenne de 27.88 ± 1.72 %.



(a) (b)

FIG. 6.21 – (a) La somme des réponses N1 et N2 des deux PSPMTs est proportionnelle à l'énergie déposée dans le module : un fit gaussien du pic photoélectrique donne accès à la résolution en énergie. (b) Résolution expérimentale en énergie le long du module.

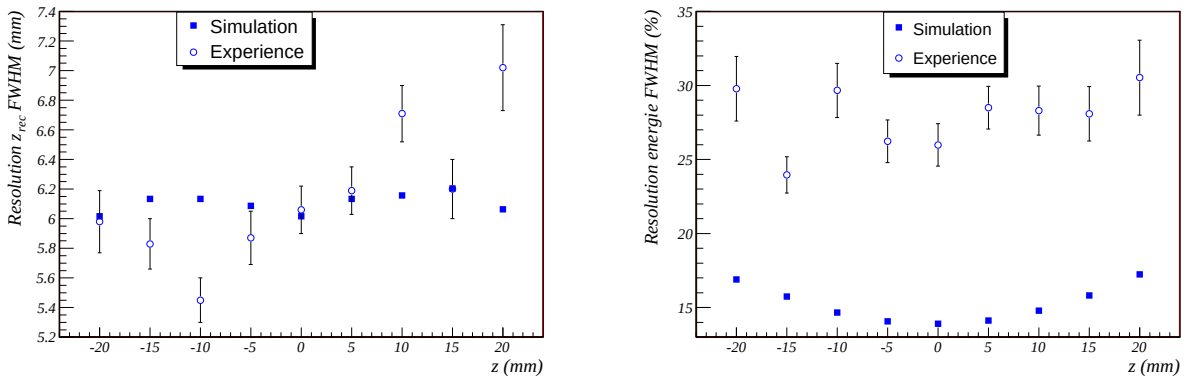
6.1.7 Comparaison des résultats de la simulation et de l'expérience

Les résultats expérimentaux (figure 6.18) et simulés (figure 6.12) permettent de distinguer les guides en x et en y qui sont irradiés : 4 guides centraux en x et les 4 guides en y. La longueur d'atténuation du guide λ_{ref} simulée, de l'ordre de 27 mm, est supérieure à celle déterminée expérimentalement, qui est de l'ordre de 24 mm. Cependant, en prenant un coefficient de réflexion de 0.77 au lieu de 0.8 dans la simulation, nous obtenons un nouveau λ_{ref} de 24.2 ± 1.3 mm.
En ce qui concerne l'estimation de la coordonnée axiale et de l'énergie, nous avons superposé à la figure 6.22, les résolutions en z et en énergie le long du module, obtenues avec les données expérimentales et simulées. L'évaluation de la résolution axiale faite expérimentalement et par la simulation, fournit des résultats proches (figure 6.22.(a)) : la moyenne sur tout le long du module est d'environ 6.2 mm (FWHM) pour l'expérience et 6.1 mm (FWHM) pour la simulation, pour une largeur de collimation de 2 mm.
Concernant la résolution de l'estimation de l'énergie, les valeurs expérimentales sont plus élevées que les valeurs obtenues par la simulation : la moyenne le long du module est d'environ 28 % pour l'expérience et 15 % pour la simulation. Cette différence s'explique par le fait que les PSPMTs ne sont pas complètement pris en compte dans la simulation. En effet, la simulation des PSPMTs n'a tenu compte que de leur efficacité quantique et de leur résolution spatiale. D'autres paramètres décrivant la réponse complexe des PSPMTs (comme le gain notamment) ont été volontairement omis car difficiles à évaluer. L'estimation de la coordonnée z utilisant le rapport des réponses des deux PSPMTs (relation 6.3), annule en partie la contribution de ces paramètres dans les données expérimentales, ce qui explique la bonne adéquation entre l'expérience et la simulation dans ce cas. Mais concernant l'estimation de l'énergie, la somme des réponses des PSPMTs est utilisée et cette contribution non simulée n'est donc pas annulée. De plus, la distribution de la résolution en z et en énergie le long du module, issue de la simulation, révèle une symétrie par rapport au centre du centre du guide à la coordonnée $z = 0$. En effet, on considère dans la simulation que les deux PSPMTs ont un comportement identique. Au contraire, l'expérience montre qu'en réalité leurs caractéristiques ne sont pas similaires puisque ces mêmes distributions pour l'expérience ne sont pas symétriques par rapport au centre du guide.

6.2 Simulation du scanner TEP LXe complet

6.2.1 Introduction

La simulation du banc de test du module TEP LXe a donné des résultats en accord avec l'expérience en ce qui concerne la localisation spatiale des interactions dans le module. Cette validation, pour l'instant partielle, a permis néanmoins la simulation du scanner en entier afin de prévoir ses performances en terme de résolution spatiale sur l'image reconstruite. L'objectif de cette partie du travail n'a donc pas été de faire une évaluation



(a) (b)

FIG. 6.22 – (a) Comparaison de la résolution en z obtenue des données expérimentales et simulées le long du module. (b) Comparaison de la résolution en énergie obtenue des données expérimentales et simulées le long du module (les barres d'erreur de la simulation sont plus petites que les marqueurs).

complète du futur TEP LXe, avec l'étude de tous les critères de performances que cela implique. Une analyse détaillée des performances du TEP LXe en utilisant les outils de simulations qui ont constitué les prémisses de GATE a été effectuée dans la thèse de Sébastien Jan [Jan 02]. Nous nous sommes plutôt concentrés sur la question de la résolution spatiale maximale qu'il est possible d'atteindre avec un tel système. À cette fin, nous avons simulé une acquisition où les effets dégradants la résolution de l'image ne sont pas modélisés (notamment la diffusion dans un fantôme, l'atténuation et le parcours du positon). La chaîne de simulations Monte Carlo mise en place a été étendue aux 16 modules afin de réaliser des coïncidences. Comme pour la simulation du banc de test expérimental, GATE a été utilisé afin de simuler les interactions des photons d'annihilation provenant d'une source dans le LXe. Le processus de scintillation dans chaque module a été simulé dans le programme Monte Carlo externe déjà présenté. Nous allons détailler chaque étape de la chaîne de simulation, en particulier le tri des coïncidences, la création des sinogrammes et la reconstruction d'images.

6.2.2 Méthodes

6.2.2.1 La Simulation dans GATE

La géométrie du scanner TEP LXe implémentée dans GATE est représentée à la figure 6.23. Un module est défini dans GATE comme il a été décrit au paragraphe 6.1.3.2. Nous rappelons brièvement ici ses caractéristiques : un module est de section carrée de dimension 2×2 cm^2 et de longueur 5 cm et il est divisé par des guides de lumières qui forment 40 compartiments de section rectangulaire de dimension 2×5 mm^2. Nous assignons le volume ainsi défini comme étant constitué de LXe. Les guides de lumières,

les parois du modules et le cryostat ont également été simulés. Un *repeater*[1] est appliqué afin de reproduire le même module 16 fois pour former l'anneau complet de diamètre 10.2 cm. Le diamètre du champ de vue transversal est de l'ordre de 8 cm et la longueur du champ de vue axial est de l'ordre de 5 cm. La physique simulée est celle qui a été utilisée précédemment : l'effet photoélectrique, la diffusion Compton et Rayleigh, sont les processus d'interaction rayonnement-matière pris en compte. Enfin, le but de cette partie de la chaîne de simulation étant de récupérer les *hits* ayant lieu dans les modules, aucune chaîne électronique de traitement, fonction remplie par le *Digitizer*[1], n'est définie.

La simulation qui a été effectuée représente un cas idéal car nous avons simulé des

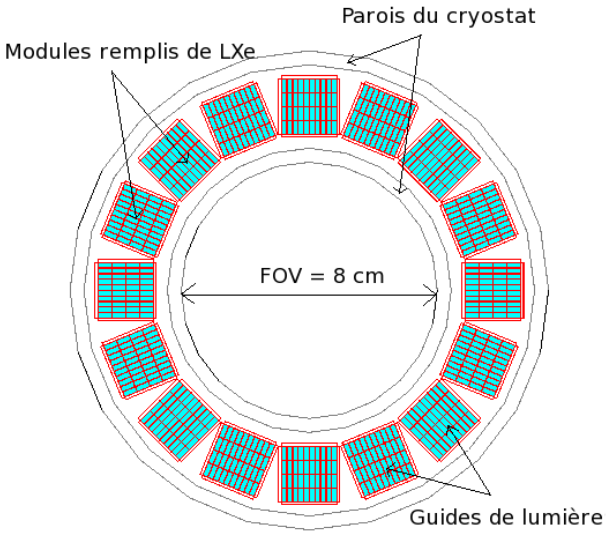


Fig. 6.23 – Géométrie du scanner TEP LXe implémentée dans GATE

sources ponctuelles émettant des photons d'annihilation, sans parcours de positons et avec une colinéarité parfaite de l'émission des photons 511 keV. Une source ponctuelle dans GATE correspond à une source fictive n'ayant aucune étendue volumique (diamètre nul). Par ailleurs, ces sources ont été placées dans l'air, milieu peu atténuant. Cette simulation ne prend par conséquent pas en compte les effets d'atténuation et de diffusion ayant lieu en présence d'un fantôme réaliste. Afin d'évaluer la résolution spatiale sur l'image reconstruite, nous avons simulé la désintégration de 4 sources ponctuelles placées à différents endroits du champ de vue transversal, dans le plan transversal central. La disposition des sources est représentée à la figure 6.24. L'acquisition est réalisée dans le mode 3D.

6.2.2.2 Tri des coïncidences

À partir de la collection de *hits*, le tri des coïncidences est réalisé. Comme nous ne nous intéressons pas à modéliser la réponse temporelle du TEP LXe, le tri des coïncidence est

[1]Terme de GATE. cf. *Gate user's guide*, http ://opengatecollaboration.healthgrid.org/

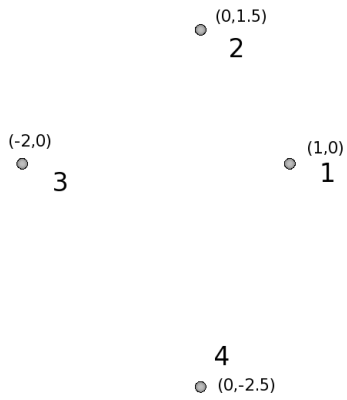


FIG. 6.24 – Position et coordonnées des sources simulées dans GATE dans le plan central du scanner à $z = 0$ (les coordonnées (0,0) correspondent au centre du champ de vue transversal dans le plan central) : chaque source est ponctuelle, c'est à dire que leur diamètre est nul (des sphères sont représentées pour indiquer la position des sources dans le champ de vue).

effectué de manière exacte puisque la simulation renseigne sur l'identité de l'annihilation d'où provient les photons de 511 keV. Le taux de coïncidences fortuites est donc nul dans notre simulation. Par ailleurs, ce tri est réalisé avant de simuler la propagation des photons UV dans les modules afin de réduire le temps de calcul (dans un scanner réel, les coïncidences sont évidemment déterminées par l'électronique de détection). Environ un million de LORs ont été détectées en coïncidence.

6.2.2.3 Simulation de la réponse des modules

Pour chaque paire de photon issue de la même annihilation et interagissant avec le LXe, nous simulons la génération des photons UV, leur propagation dans les guides et leur collection au niveau des photodétecteurs, donnant ensuite lieu à l'estimation de la position de l'interaction et de l'énergie. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux utilisés pour la simulation du banc de test (paragraphe 6.1.4.3) que nous rappelons ici :

- le coefficient de réflexion des parois du guide vaut 0.8
- l'efficacité quantique des PSPMTs est prise à 20 %
- l'angle limite dû à la propagations des photons UV dans plusieurs milieux d'indices de réfraction différents vaut 38 °
- 23000 photons sont générés par dépôt d'énergie de 511 keV.

6.2.2.4 Remplissage du sinogramme

À la sortie du simulateur du TEP LXe, nous possédons deux séries de données : x_1, y_1, z_1, E_1 et x_2, y_2, z_2, E_2, correspondant aux coordonnées spatiales reconstruites de

l'interaction et à l'énergie totale déposée reconstruite respectivement des photons 1 et 2 d'une paire en coïncidence. Afin de reconstruire l'image représentant la distribution spatiale de la source, nous créons dans un premier temps l'espace des projections en remplissant des sinogrammes. Selon le mode d'acquisition 2D ou 3D, il existe deux types de sinogrammes : les sinogrammes 3D caractérisés par les variables (s, ϕ, z) (provenant de la transformée en rayons X dans la géométrie du mode 2D (paragraphe 1.2.2)) et les sinogrammes 4D caractérisés par les variables $(s, \phi, z, \Delta c)$ (provenant de la transformée en rayons X dans la géométrie du mode 3D (paragraphe 2.6)). Dans les deux cas, les variables (s, ϕ) sont les mêmes et représentent la projection des coordonnées d'une LOR dans un plan transversal du scanner (dans le cas des sinogrammes 3D, les LORs et leurs projections sont confondues). Les photons en coïncidence constituant les extrémités d'une LOR, il est possible de calculer les variables (s, ϕ) du sinogramme à partir de leurs coordonnées cartésiennes grâce aux relations suivantes :

$$s = \frac{\det(P_1, P_2)}{||\overrightarrow{P_1P_2}||} \tag{6.7}$$

$$\cos(\phi) = \frac{(y_1 - y_2)}{||\overrightarrow{P_1P_2}||} \tag{6.8}$$

$$\sin(\phi) = \frac{(x_2 - x_1)}{||\overrightarrow{P_1P_2}||}$$

où P_1 et P_2 désignent respectivement les projections des photons 1 et 2 dans un plan transversal, la coordonnée z n'étant pas pris en compte dans ce calcul car elle n'intervient pas. Bien que le mode d'acquisition des données soit 3D, nous avons créé des sinogrammes 3D, et non 4D, en utilisant la méthode SSRB (paragraphe 2.7.4). Pour cela, nous avons calculé la coordonnée z des sinogrammes par la relation :

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{6.9}$$

avec z_1 et z_2, les coordonnées axiales respectives des photons 1 et 2. Par ce calcul, nous faisons l'approximation qu'une LOR, en réalité oblique, se situe dans le plan transversal à mi-distance entre les deux détecteurs en coïncidence.

Par ailleurs, nous avons également trié les données en ne gardant que les sinogrammes directs et croisés, c'est à dire les LORs appartenant au plan d'une couronne et celles reliant 2 couronnes voisines (paragraphe 2.4.3), ce qui revient à une acquisition du mode 2D. La méthode de *rebinning* n'étant pas précise dans les cas où l'oblicité des LORs est grande et les sources excentrées, la comparaison avec la reconstruction d'images à partir des données 2D devrait mettre en évidence les effets d'approximation de cette méthode.

Les conditions d'échantillonnage transversales pour un scanner comportant 160 détecteurs dans une couronne indiquent, d'après le paragraphe 2.4.2, que le nombre de projections et de lignes de mesure par projection est de 80. Le scanner TEP LXe contient en réalité 4 couches de 160 guides de lumière (16 modules comportant 4 couches de 10 guides de lumière chacun). Nous faisons donc l'approximation qu'une seule couche de guides de lumière est suffisant pour échantillonner l'espace des projections. En ce qui concerne la direction axiale, nous avons discrétisé les modules en 50 coupes de 1 mm chacune. Les

sources étant placées au centre du scanner, nous allons évaluer la résolution spatiale transversale de l'image reconstruite dans la coupe passant par le plan central du scanner et des sources.
Par ailleurs, nous avons choisi de placer les sources dans un même plan transversal afin de s'affranchir en partie des effets d'hétérogénéité de la sensibilité en mode 3D qui sont importants quand les sources sont disposées dans tout le champ de vue axial. Une méthode qui est utilisée afin de corriger la variation de sensibilité consiste à acquérir des données provenant d'un cylindre uniforme rempli d'une source radioactive β^+, occupant tout le champ de vue transversal et axial. Un ensemble de sinogrammes dit de normalisation est ainsi obtenu. En simulation, l'obtention de ces sinogrammes exige une puissance de calcul importante.

6.2.2.5 Reconstruction d'images

Les programmes de reconstruction d'images dont nous disposons sont basés sur l'algorithme de rétroprojection filtrée 2D (FBP 2D) et l'algorithme itératif ML-EM 2D. Ces algorithmes ont été implémentés par Nicolas Gac au cours de sa thèse au GIPSA-lab de Grenoble [Gac 08]. L'étape de filtrage des données pour FBP 2D est réalisée à partir du logiciel libre STIR[2][Labbé 99].

6.2.3 Résultats de la simulation du TEP LXe complet

La figure 6.25 représente le sinogramme de la coupe transversale centrale. Nous constatons que les branches du sinogramme représentant les projections de chaque source sont incomplètes et discontinues. Cet effet provient du manque des projections dû aux angles morts entre les modules du TEP LXe. Si les sinogrammes ne sont pas corrigés, la reconstruction par FBP 2D présente des artefacts que l'on peut visualiser à la figure 6.26.(a). Différentes méthodes de correction de la discontinuité des sinogrammes due aux angles morts du scanner existent. Une méthode est proposée dans [Karp 88]. Les auteurs utilisent l'espace de Fourier des données pour contraindre la contribution provenant des « trous »dans les sinogrammes, afin de reconstruire des images sans artefact avec FBP 2D. Cette méthode découle de l'idée plus générale qui consiste à utiliser des informations partielles supplémentaires dans un autre espace (en l'occurrence, l'espace de Fourier) que celui des données acquises, quand les deux espaces sont reliés par une transformation simple. Elle s'avère plus efficace qu'une interpolation linéaire effectuée respectivement selon la variable ϕ. Enfin, un moyen de s'affranchir de ce problème est d'utiliser un algorithme itératif de type ML-EM qui ne nécessite pas de projections complètes.
La figure 6.26.(b) représente l'image reconstruite par l'algorithme ML-EM 2D, après 10 itérations. Nous constatons que l'image ne présente pas d'artefact et est de meilleure qualité que celle reconstruite par FBP 2D, le temps de reconstruction étant cependant

[2] *Software for Tomographic Image Reconstruction*, http ://stir.sourceforge.net/

un peu plus long. La reconstruction de l'image par ML-EM 2D à partir uniquement des sinogrammes du mode 2D est représentée à la figure 6.27. Seulement 12% de l'ensemble des données acquises en mode 3D a été utilisé pour cette reconstruction.
Nous avons évalué les résolutions spatiales sur les images reconstruites par la méthode ML-EM 2D avec les données réarrangées par la méthode SSRB et les données 2D. La figure 6.28 indique la définition des résolutions radiale, tangentielle et axiale sur l'image d'une source ponctuelle. La résolution est obtenue en effectuant un ajustement gaussien sur les profils linéaires passant par le centre de la source dans la direction radiale, tangentielle ou axiale. Les figures 6.29 et 6.30 indiquent les résolutions mesurées pour les sources numéros 1, 2, 3 et 4, placées respectivement à une distance de 1, 1.5, 2 et 2.5 cm de l'axe du scanner, avec respectivement les données réarrangées par SSRB et du mode 2D.

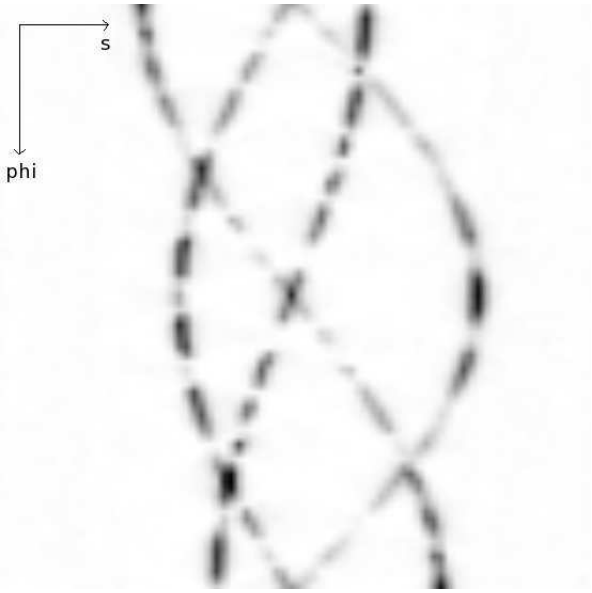
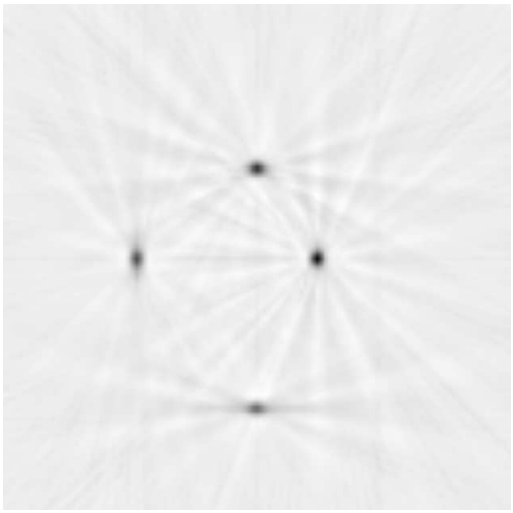


FIG. 6.25 – Sinogramme de la coupe centrale des sources : les « trous »dans les branches du sinogramme sont dus aux angles morts entre les modules du TEP LXe.

6.2.4 Discussion des résultats de la simulation du TEP LXe complet

Cette étude de la résolution spatiale du scanner porte sur une région moyenne du champ de vue, dans le sens où elle se situe entre le centre et les bords du champ de vue transversal. Dans [Jan 02], l'auteur a étudié les performances du TEP LXe, dans des situations plus réalistes, au centre du champ de vue, de 0 à 1.5 cm de l'axe du scanner. La comparaison des résolutions obtenus à 1 et 1.5 cm de l'axe avec ceux de [Jan 02], montre une meilleure résolution dans notre cas, ce qui est cohérent puisque notre simulation se place dans une situation idéale.
Dans la région du champ de vue que nous considérons, la résolution transversale varie



(a) Reconstruction par FBP 2D (b) Reconstruction par ML-EM 2D

FIG. 6.26 – Reconstruction de la coupe centrale des sources par FBP 2D (a) et ML-EM 2D (b) à partir des données réarrangées par la méthode SSRB. Dans (a), les artefacts, caractérisés par une amplification des rayons provenant de la rétroprojection autour des sources, sont causés par les sinogrammes discontinus. La reconstruction par ML-EM 2D (b) fournit une image de meilleure qualité que FBP 2D.

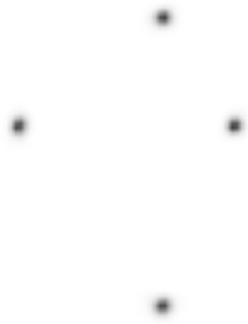


FIG. 6.27 – Reconstruction de la coupe centrale des sources par ML-EM 2D à partir des sinogrammes du mode 2D.

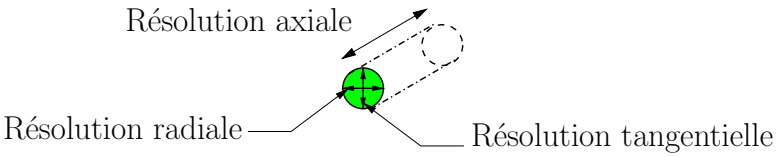
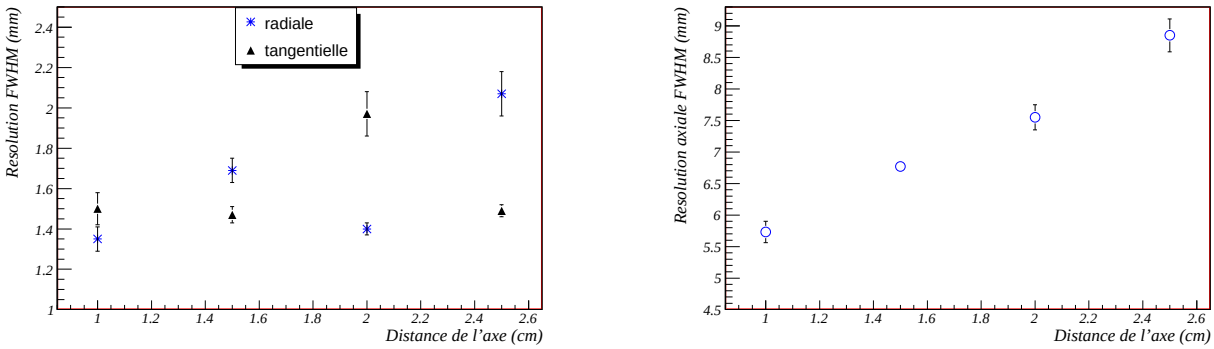
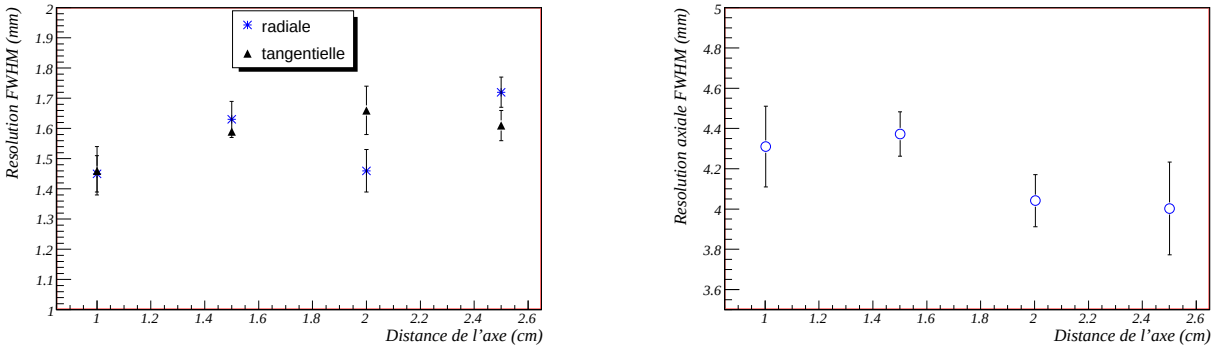


FIG. 6.28 – Définition des résolutions radiale, tangentielle et axiale d'une source ponctuelle.



(a) Résolutions spatiales radiales et tangentielles (b) Résolutions axiales

FIG. 6.29 – Résolutions spatiales mesurées sur les 4 sources ponctuelles placées à 1, 1.5, 2 et 2.5 cm du centre du champ de vue transversal, à partir des images reconstruites par la méthode SSRB + ML-EM 2D.



(a) Résolutions spatiales radiales et tangentielles (b) Résolutions axiales

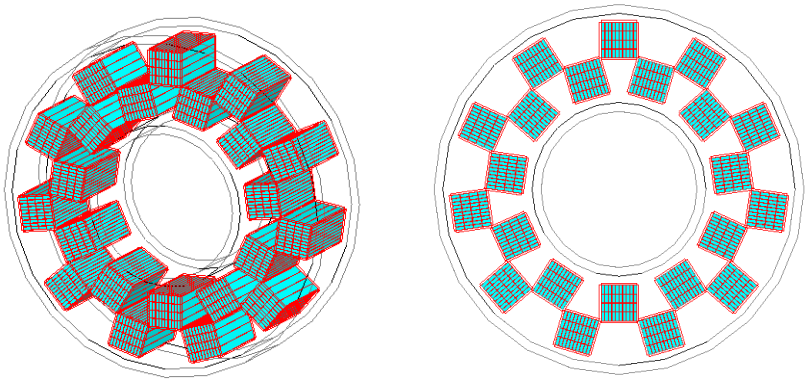
FIG. 6.30 – Résolutions spatiales mesurées sur les 4 sources ponctuelles placées à 1, 1.5, 2 et 2.5 cm du centre du champ de vue transversal, à partir des images reconstruites par ML-EM 2D avec les données 2D.

d'un peu moins de 1.4 mm à 2 mm dans le cas SSRB + ML-EM 2D (figure 6.29.(a)). Concernant la reconstruction à partir des données 2D, la résolution transversale varie de 1.45 à 1.7 mm en bordure du champ de vue (figure 6.30.(a)). Ces valeurs sont acceptables pour un prototype en développement. Nous constatons que l'évolution de la résolution transversale n'est pas monotone. Selon leur position sur l'axe horizontal (sources 1 et 3) ou vertical (sources 2 et 4) passant par le centre du champ de vue, les sources reconstruites sont rétrécies dans la direction de l'axe concerné. Ceci se traduit par un écart entre les résolutions radiales et tangentielles dont les grandeurs s'inversent d'une source à l'autre. Cet effet est propre à la reconstruction. Par ailleurs, l'amplitude de cet écart et de la variation de la résolution transversale est plus importante dans le cas où la méthode SSRB est appliquée. Ce comportement peut s'expliquer par le fait qu'en bordure du champ de vue, la méthode SSRB introduit un biais dans la reconstruction (paragraphe 2.7.4). Dans le mode 2D, la résolution transversale ne subit pas d'importante variation dans tout le champ de vue, ce qui constitue un bénéfice apporté par la mesure de la DOI, mais qui est moins visible quand le réarrangement SSRB est appliqué.
En ce qui concerne la résolution axiale, elle varie de manière monotone d'environ 5.5 à 9 mm dans le cas SSRB + ML-EM 2D (figure 6.29.(b)). Dans le cas où uniquement les données 2D sont reconstruites, la résolution axiale varie peu et se situe entre 4.0 et 4.3 mm. La résolution axiale est donc significativement dégradée quand le *rebinning* SSRB est appliqué sur l'ensemble des données acquises, et l'est d'autant plus lorsqu'on s'éloigne du centre du champ de vue. Le mode 2D, qui correspond à une restriction de l'oblicité des LORs réarrangées permet d'avoir une meilleure résolution axiale qui, grâce à la mesure de la DOI, est constante dans tout le champ de vue. En revanche, le prix à payer est une baisse considérable de la sensibilité de la reconstruction qui se traduirait dans des simulations plus réalistes par une dégradation du rapport signal sur bruit. Une solution consiste à déterminer le compromis entre sensibilité et résolution dans le choix de l'oblicité maximale des LORs reconstruites dépendant du type d'examen effectué. Enfin, l'utilisation d'un algorithme de reconstruction 3D permettrait d'optimiser ce compromis.

6.2.5 Autres géométries de test

La chaîne de simulations et de traitement décrite précédemment permet d'évaluer les performances futures du scanner TEP LXe dans la géométrie de conception actuelle. L'outil de simulation permet de tester d'autres géométries possibles dans le but d'optimiser la résolution et la sensibilité du système.
Une solution que nous avons envisagée afin de réduire les angles morts entre les détecteurs est de positionner les modules en quinconce comme représenté à la figure 6.31. Le nombre de modules est de 22 dans cette géométrie pour un champ de vue identique. Nous avons répété la même simulation effectuée précédemment pour tester le TEP LXe avec cette nouvelle géométrie. Les sources et la durée d'acquisition sont donc identiques. Le sinogramme de la coupe centrale des sources est représenté à la figure 6.32.(a). Nous constatons que les discontinuités dans les branches du sinogramme sont toujours présentes mais elles sont moins nombreuses que dans la géométrie du scanner étudiée précédemment. La sensibilité

du scanner avec les modules en quinconce est augmentée d'environ 5%. Le gain en sensibilité est relativement faible comparé au nombre de modules en plus utilisés (six modules supplémentaires). Cependant, il est possible d'augmenter la sensibilité en concevant une géométrie où les modules seraient positionnés en quinconce mais de manière plus compacte.
L'image reconstruite des quatre sources par l'algorithme ML-EM 2D à partir des sinogrammes du mode 2D est représentée à la figure 6.32.(b). Le calcul de la résolution spatiale pour la source 1, la plus proche du centre du champ de vue, indique une résolution transversale de l'ordre de 1.45 mm et une résolution axiale de l'ordre de 4.1 mm. Ces valeurs sont identiques à celles mesurées sur les images reconstruites de la géométrie classique.
En résumé, plusieurs géométries imaginables du TEP LXe sont relativement facile à tester grâce aux simulations Monte Carlo et aux différents programmes de traitement et de reconstruction d'images, qui ont été en partie développés et adaptés durant cette thèse.



(a) Vue en perspective (b) Vue dans un plan transaxial

FIG. 6.31 – Géométrie du TEP LXe avec les modules positionnés en quinconce.

6.3 Conclusion

Une chaîne de simulations Monte Carlo et de traitement de données a été mise en place pour caractériser les performances du TEP LXe. Les résultats de la première phase de cette étude, test expérimentaux et simulation du banc d'essai, ont été positifs. En particulier, une adéquation forte existe entre l'expérience et la simulation, concernant l'estimation de la coordonnée axiale des interactions, paramètre indispensable pour la mesure de la profondeur d'interaction. Cependant, une modélisation plus approfondie des PSPMTs est nécessaire pour simuler la réponse du module quant à l'estimation de l'énergie. Ces résultats ont fait l'objet de deux publications [Grondin 08, Gallin-Martel 08].
La simulation du TEP LXe complet a donné des résultats intéressants concernant la résolution spatiale transversale, de l'ordre de 1.5 mm au centre du champ de vue. La résolution axiale reste le point faible de ce détecteur, de l'ordre de 4.0 mm au maximum dans le cas où uniquement les sinogrammes du mode 2D sont pris en compte dans la

(a) Sinogramme de la coupe centrale (b) Image reconstruite de la coupe centrale

FIG. 6.32 – Simulation des quatre sources ponctuelles dans la géométrie en quinconce du scanner TEP LXe.

reconstruction. Un *rebinning* par la méthode SSRB appliqué sur l'ensemble des données acquises en mode 3D dégrade considérablement la résolution axiale, particulièrement en bordure du champ de vue. Par conséquent, afin d'optimiser le compromis sensibilité et résolution, l'utilisation de l'algorithme de *rebinning* FORE couplé à ML-EM 2D, ou d'algorithmes de reconstruction 3D est indispensable.

Conclusions et perspectives

Conclusions

La première partie de cette thèse a abordé le sujet de l'échantillonnage des données en TEP. L'acquisition des données étant principalement déterminée de manière empirique, nous étudions dans ce travail, les raisons théoriques qui peuvent indiquer de quelle manière cette acquisition est optimale en TEP. Pour cela, nous avons utilisé des résultats établis par la théorie de l'échantillonnage appliquée à la tomographie, plus particulièrement à la tomodensitométrie. Notre étude de l'échantillonnage en TEP est spécifique au mode 2D. Elle est originale dans le sens où elle utilise le système de paramètres le mieux adapté à la géométrie et au principe de fonctionnement de la TEP. L'une des contributions dans ce domaine réside dans la détermination de l'efficacité des détecteurs rectangulaires par rapport aux détecteurs carrés. En effet, pour un même nombre de données acquises, l'utilisation de détecteurs rectangulaires conduit à une résolution spatiale plus homogène. Nous avons également étudié d'autres schémas d'échantillonnage dans cette géométrie. Cependant leur utilisation demeure restreinte en pratique : le schéma hexagonal peut être appliqué dans le but de compresser des données, tandis que le schéma efficace L_e, dans des examens spécifiques où le rapport du tronc du patient et du rayon du scanner (qui a été désigné par η) est inférieur ou égal à 1/3. Pour vérifier ces résultats théoriques, des simulations numériques ont été utilisées. Les résultats ont partiellement confirmé la théorie, mais d'autres simulations sont nécessaires.
La deuxième partie de cette thèse a consisté à simuler les performances d'un scanner TEP dédié à l'imagerie du petit animal. L'originalité de ce scanner réside dans l'utilisation du xénon liquide comme milieu scintillant. Cette particularité offre la possibilité de concevoir des détecteurs de formes différentes et d'appliquer des schémas d'acquisition de données optimaux. L'objectif de ce travail a été de mettre en place une chaîne de simulation réaliste du scanner. La première phase a consisté à simuler le détecteur et à confronter les résultats issus d'un banc de test du module prototype avec les résultats simulés dans le but de valider le modèle utilisé dans la simulation. La seconde phase a été la simulation du scanner complet, dans une situation idéale, afin d'évaluer la résolution spatiale maximale qu'il est possible d'atteindre. Les données simulées à partir de sources ponctuelles, en mode 3D, ont été paramétrées dans la géométrie parallèle et la méthode de *rebinning* SSRB a permis de les réarranger en données du mode 2D. Nous avons également trié les données acquises et effectué une reconstruction en ne gardant que les données du mode 2D (sinogrammes

directs et croisés). Les résultats ont été concluant concernant la résolution transversale, de l'ordre de 1.5 mm dans la région centrale du champ de vue. La résolution axiale est cependant plus médiocre : 5.5 mm au maximum avec une dégradation importante en bordure du champ de vue quand la méthode SSRB est appliquée. La résolution axiale est meilleure, de l'ordre de 4 mm, et constante dans tout le champ de vue quand la reconstruction est réalisée uniquement avec les données 2D. Cependant, la statistique est dans ce cas sacrifiée. Nous pensons que ces résultats peuvent être améliorés par l'utilisation d'un algorithme de reconstruction itératif 3D afin d'atteindre une résolution optimale tout en gardant un rapport signal sur bruit élevé.

Perspectives

Une des perspectives de ce travail est d'appliquer les résultats d'échantillonnage déterminés dans la première partie de cette thèse au scanner TEP LXe. En effet, le scanner étant en phase de développement, la théorie de l'échantillonnage peut indiquer la géométrie, les dimensions et l'arrangement optimaux des modules et des guides le lumière d'un point de vue de l'acquisition des données. Cependant, des verrous technologiques doivent avant tout être dépassés.
La géométrie axiale des modules, indispensable pour permettre la mesure de la DOI favorisant ainsi la résolution transversale dans tout le champ de vue, souffre d'une grande imprécision sur la localisation de l'interaction. L'une des causes de cette faible résolution provient de la perte de photons UV au passage du LXe à la fenêtre d'entrée du PSPMT, séparés par une couche d'air causant un angle limite. La prochaine étape du développement expérimentale consiste à mettre directement les PSPMTs en contact avec le LXe. Le nombre de photons UV atteignant les PSPMTs serait plus important, améliorant ainsi la résolution de la localisation en z de l'interaction (la résolution en énergie deviendrait également meilleure). En effet, nous avons vu dans la première partie que l'échantillonnage en z est un paramètre critique.
Par ailleurs, le TEP LXe, comme la plupart des scanners actuels, fonctionne en mode 3D (seulement quelques scanners fonctionnent dans les deux modes). En effet, le gain en sensibilité est considérable, améliorant nettement la qualité des images. Le véritable enjeu est donc de déterminer les conditions d'échantillonnage dans cette géométrie de type *fully 3D*. Comme nous l'avons signalé, des tentatives ont été faites dans [Rodet 03]. Les auteurs utilisent pour cela la paramétrisation *planogram* [Brasse 04]. Cette géométrie est pratique car, ne faisant pas intervenir de variables angulaires (cette paramétrisation est dédiée aux scanners composés de têtes de détecteurs planaires donc non cylindriques), l'expression de la transformée de Fourier 4D de la transformée en rayons X de l'objet f est rendue simple, ce qui permet d'en déduire son support essentiel. Une difficulté demeure cependant : la représentation géométrique du support dans un espace de quatre dimensions. Nous pensons qu'une piste de réflexion a été ouverte dans [Defrise 97] pour la géométrie cylindrique, que nous utilisons en annexe B pour donner une ébauche du support essentiel de $\widehat{Xf}$ quand l'oblicité des LORs est prise en compte.

Bibliographie

[Agostinelli 03] S. Agostinelli & coll. *Geant4 : a simulation toolkit.* Nucl. Instrum. Meth. A, vol. 506, pages 250–303, 2003.

[Amaudruz 08] P. Amaudruz, P. Bryman, D. Kurchaninov, L. Lu, P. Marshall, C. Martin, J.P Muennich, A. Retiere, F. Sher & A. Sossi. *Design and performance of Liquid Xenon detectors for PET.* In IEEE Nuclear Science Symp. Conf. Rec, 2008.

[Anger 67] H.O. Anger. Instrumentation in nuclear medicine, chapitre Radioisotopes cameras. New York, Academic, 1967.

[Aprile 02] E. Aprile. *Detection of γ-rays with a 3.5 l liquid xenon ionization chamber triggered by the primary scintillation light.* Nucl. Instrum. Meth. A, vol. 480, pages 636–650, 2002.

[Baldini 05] A. Baldini, C. Bemporad, F. Cei, T. Doke, M. Grassi, A.A. Grebenuk, D.N. Grigoriev, T. Haruyama, K. Kasami, J. Kikuchi, A. Maki, T. Mashimo, S. Mihara, T. Mitsuhashi, T. Mori, D. Nicolo, H. Nishiguchi, W. Ootani, A. Papa K. Ozone, R. Pazzi, S. Ritt, R. Sawada, F. Sergiampietri, G. Signorelli, S. Suzuki, K. Terasawa, M. Yamashita, S. Yamashita, T. Yoshimura & Yu. Yuri. *Absorption of scintillation light in a 1001 liquid xenon γ-ray detector and expected detector performance.* Nucl. Instrum. Methods A, vol. 545, page 753–764, 2005.

[Bataille 04] F. Bataille, C. Comtat, S. Jan & R. Trebossen. *Monte Carlo simulation for the ECAT HRRT using GATE.* In IEEE Nuclear Science Symp. Conf. Rec, pages 2570–2574, 2004.

[Bloomfield 95] P.M. Bloomfield, R. Rajeswaran, T.J. Spinks, S.P. Hume, R. Myers, S. Ashworth, K.M. Clifford, W.F. Jones, L.G. Byars, J. Young, M. Andreaco, C.W. Williams, A.A. Lammertsma & T. Jones. *The design and physical characteristics of a small animal positron emission tomograph.* Phys. Med. Biol, vol. 40, pages 1105–1126, 1995.

[Bloomfield 97] P.M. Bloomfield, R. Myers, S.P. Hume, T.J. Spinks, A. Lam-

mertsma & T. Jones. *Three-dimensional performance of a small diameter positron emission tomograph.* Phys. Med. Biol, vol. 42, pages 389–400, 1997.

[Braem 04] A. Braem, M.C Llatas, E. Chesi, J.G. Correia, F. Garibaldi, C. Joram, S. Mathot, E. Nappi, M.R da Silva, F. Schoenahl, J. Séguinot, P. Weilhammer & H. Zaidi. *Feasibility of a novel design of high resolution parallax-free Compton enhanced PET scanner dedicated to brain research.* Phys. Med. Biol, vol. 49, pages 2547–2562, 2004.

[Brasse 04] D. Brasse, P.E. Kinahan, R. Clackdoyle, M. Defrise, C. Comtat & D.W. Townsend. *Fast Fully 3D Image Reconstruction using Planograms.* IEEE Trans. Med. Imag., vol. 23, pages 413–425, 2004.

[Brokish 06] J. Brokish & Y. Bresler. *Sampling requirements for Circular Cone Beam Tomography.* In IEEE Nuclear Science Symp. Conf. Rec, pages M11–451, 2006.

[Chepel 99] V. Chepel, V. Solovov, J. van der Marel, M.I. Lopes, P. Crespo, L. Janeiro, Dinis Santos, R. Ferreira Marques & A.J.P.L. Policarpo. *The Liquid Xenon Detector for PET : Recent Results.* IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 46, pages 1038–1044, 1999.

[Chepel 02] V. Chepel, M.I. Lopes, V. Solovov, R. Ferreira Marques & A.J.P.L. Policarpo. *Development of liquid xenon detector for medical imaging.* In The international work shop on Technique and Application of Xenon Detectors, volume 46, pages 28–40, 2002.

[Cherry 96] S.R. Cherry, S. Yiping, S. Siegel, R. W. Silverman, E. Muncuoglu, K. Meadors & M.E. Phelps. *Optical fiber readout of scintillator arrays using multi-channel PMT : a high resolution PET detector for animal imaging.* IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 43, pages 1932–1937, 1996.

[Cherry 97] S.R. Cherry, Y. Shao, R. W. Silverman, K. Meadors, S. Siegel, A. Chatziioannou, J.W. Young, W. Jones, J.C. Moyers, D. Newport, A. Boutefnouchet, T.H. Farquhar, M.J. Paulus M. Andreaco, D.M. Binkley, R. Nutt & M.E. Phelps. *MicroPET : a high resolution PET scanner for imaging small animals.* IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 44, pages 1161–1166, 1997.

[Colsher 80] J.G. Colsher. *Fully three dimensional positron emission tomography.* Phys. Med. Biol, vol. 25, pages 103–115, 1980.

[Cutler 92] P.D. Cutler, S.R. Cherry, E.J. Hoffman, W.M. Digby & M.E. Phelps. *Design features and performance of a PET system for*

animal research. J. Nucl. Med., vol. 33, pages 595–604, 1992.

[Daube-Witherspoon 87] M.E. Daube-Witherspoon & G. Muehllelner. *Treatment of axial data in three-dimensional PET.* J.Nucl.Med., vol. 28, pages 1717–1724, 1987.

[Defrise 89] M. Defrise, D.W. Townsend & R. Clack. *Three-dimensional image reconstruction from complete projections.* Phys. med. biol., vol. 34, pages 573–587, 1989.

[Defrise 97] M. Defrise, P.E. Kinahan, D.W. Townsend, C. Michel & M. Sibomana. *Exact and Approximate Rebinning Algorithms for 3-D PET Data.* IEEE Trans. Med. Imag., vol. 16, pages 145–158, 1997.

[Desbat 97] L. Desbat. Echantillonnage parallèle efficace en tomographie 3d. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 1997. 1193-1199.

[Desbat 04] L. Desbat, S. Roux, P. Grangeat & A. Koenig. *Sampling conditions of 3D parallel and fan-beam x-ray CT with application to helical tomography.* Phys. Med. Biol., vol. 49, pages 2377–2390, 2004.

[Doke 90] T. Doke, K. Masuda & E. Shibamura. *Estimation of absolute photon yields in liquid argon and xenon for relativistic (1 MeV) electrons.* Nucl. Instrum. Meth. A, vol. 291, pages 617–620, 1990.

[Doke 06] T. Doke, J. Kikuchi & F. Nishikido. *Time-of-flight positron emission tomography using liquid xenon scintillation.* Nucl. Instrum. Methods A, vol. 569, pages 863–871, 2006.

[Dreuille 02] O. Dreuille, P. Maszelin, H. Foehrenbach, G. Bonardel & J.F. Gaillard. Principe et technique de la tomographie par émission de positons (tep). 2002.

[Edholm 86] P.R. Edholm, R.M. Lewitt & B. Lindholm. *Novel properties of the Fourier decomposition of the sinogram.* Proceedings of the SPIE, vol. 671, pages 8–18, 1986.

[Edholm 87] P.R. Edholm & G.T. Herman. *Linograms in image reconstruction from projections.* IEEE Trans. Med. Imag., vol. MI-6, pages 301–307, 1987.

[Fahey 02] F.H. Fahey. *Data Acquisition in PET Imaging.* J. Nucl. Med. Technol., vol. 49, pages 30–39, 2002.

[Faridani 00] A. Faridani & E.L. Ritman. *High-resolution computed tomography from efficient sampling.* Inv. Prob., vol. 16, pages 635–650, 2000.

[Faridani 04] A. Faridani. Sampling, wavelets, and tomography. Birkhauser, Boston, 2004. pages 225-254.

[Gac 08] Nicolas Gac. *Adéquation Algorithme Architecture pour la reconstruction 3D en imagerie médicale TEP*. Thèse de doctorat, Gipsa-lab, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008.

[Gadagkar 94] H. Gadagkar & M. Casey. *Investigation the Effect of Angular Mashing of PET Sinogram Data on Reconstructed Images*. In IEEE Nuclear Science Symp. Conf. Rec, pages 1213–1216, 1994.

[Gallin-Martel 08] M.L Gallin-Martel, L. Gallin-Martel, Y. Grondin, O. Rossetto, J. Collot, D. Grondin, S. Jan, P. Martin, F. Mayet, P. Petit & F. Vezzu. *A liquid Xenon Positron Emission Tomograph : design and first prototype cell results*. Nucl. Instrum. Meth. A, page Accepté, 2008.

[Gordon 70] R. Gordon, R. Bender & G.T. Herman. *Algebraic reconstruction techniques for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography*. J. Theor. Biol, vol. 29, pages 471–481, 1970.

[Gottfried 73] B.S. Gottfried & J. Weisman. Introduction to optimization theory. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1973.

[Grignon 07] Cyril Grignon. *Étude et développement d'un téléscope Compton au xénon liquide dédié à l'imagerie médicale fonctionnelle*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Faculté des Sciences et Techniques, 2007.

[Grondin 06] Y. Grondin, L. Desbat, M. Defrise, T. Rodet, N. Gac, M. Desvignes & S. Mancini. *Data sampling in multislice mode PET for multi-ring scanner*. NSS-MIC Conference Record, vol. 4, pages 2180–2184, 2006.

[Grondin 07a] Y. Grondin & L. Desbat. *Monte Carlo simulations verifying sampling schemes in multislice mode*. EMBS Conference Record, pages 2920–2923, 2007.

[Grondin 07b] Y. Grondin, L. Desbat, M. Desvignes, S. Mancini & M. Defrise. *Etude de l'acquisition des données en TEP 2D*. GRETSI, pages 921–924, 2007.

[Grondin 08] Y. Grondin, M.L. Gallin-Martel, L. Gallin-Martel, M. Desvignes, L. Desbat, S. Mancini & O. Rossetto. *Simulation results of a small animal liquid xenon PET detector*. ISBI Conference Record, pages 1227–1230, 2008.

[Hudson 94] H.M. Hudson & R.S. Larkin. *Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data*. IEEE Trans. Med. Imag., vol. 13, pages 601–609, 1994.

[Izen 05] S.H. Izen, D.P. Rohler & Sastry. *Exploiting symmetry in fan beam CT : overcoming third generation undersampling.* SIAM J. Appl. Math, vol. 65, pages 1027–1052, 2005.

[Jan 02] Sebastien Jan. *Simulateur Monte Carlo et caméra à xenon liquide pour la Tomographie à Emission de Positons.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2002.

[Jan 03] S. Jan, A.F. Chatziioannou & C. Comtat et coll. *Monte Carlo simulation for the micro-PET P4 system using GATE.* Mol. Im. Biol., vol. 5, page 138, 2003.

[Jan 04] S. Jan & coll. *GATE : a simulation toolkit for PET and SPECT.* Phys. Med. Biol, vol. 49, pages 4543–4561, 2004.

[Jan 05] S. Jan, C. Comtat & D. Strul et coll. *Monte Carlo Simulation for the ECAT EXACT HR+ System Using GATE.* IEEE Trans. Nucl. Sci, vol. 52, pages 627–633, 2005.

[Karp 88] J.S. Karp, G. Muehllelner & R.M. Lewitt. *Constrained Fourier Space Method for Compensation of Missing Data in Emission Computed Tomography.* IEEE Trans. Med. Imag., vol. 7, pages 21–25, 1988.

[Kawata 85] S. Kawata & O. Nalcioglu. *Constrained Iterative Reconstruction by the Conjugate Gradient Method.* IEEE Trans. Med. Imag., vol. MI-4, pages 65–71, 1985.

[Kim 07] J.S. Kim, J.S. Lee, K.C. Im, S.J Kim, S.Y Kim, D.S. Lee & D.H. Moon. *Performance measurement of the microPET Focus 120 scanner.* J. Nucl. Med, vol. 48, pages 1527–1535, 2007.

[Kinahan 89] P.E. Kinahan & J.G. Rogers. *Analytic 3D image reconstruction using all detected events.* IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 36, pages 964–968, 1989.

[Kinahan 96] P.E. Kinahan, C. Michel, M. Defrise, DW. Townsend, M. Sibomana, M. Lonneux, D.F. Newport & J.D. Luketich. *Fast iterative image reconstruction of 3D PET data.* IEEE Nuclear Science Symp. Conf. Rec, pages 1918–1922, 1996.

[Kinahan 04] P.E. Kinahan, M. Defrise & R. Clackdoyle. Emission tomography, the fundamentals of pet and spect, chapitre 20. Elsevier Academic Press, 2004.

[Kubota 78] Kubota & et coll. *Experimental Techniques in High-Energy Nuclear and Particle Physics.* J. Phys. C : Solid State Phys, vol. 11, pages 2645–2651, 1978.

[Labbé 99] C. Labbé, K. Thielemans, H. Zaidi & C. Morel. *An object-oriented library incorporating efficient projection/backprojection*

operators for volume reconstruction in 3D PET. In Int. Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nucl. Med., pages 137–140, 1999.

[Lamare 06] F. Lamare, A. Turzo & Y. Bizais et coll. *Validation of a Monte Carlo simulation of the Philips Allegro/GEMINI PET systems using GATE*. Phys. Med. Biol., vol. 51, pages 943–962, 2006.

[Lewellen 08] T.M. Lewellen. *Recent developments in PET detector technology*. Phys. Med. Biol., vol. 53, pages 287–317, 2008.

[Lewitt 94] R.M. Lewitt, G. Muehllelner & J.S. Karp. *Three dimensional image reconstruction for PET by multi-slice rebinning and axial image filtering*. Phys. Med. Biol, vol. 39, pages 321–339, 1994.

[Lopes 95] M.I. Lopes, V. Chepel, J.C. Carvalho, R. Ferreira Marques & A.J.P.L. Policarpo. *Performance analysis based on a Monte Carlo simulation of a liquid xenon PET detector*. IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 46, pages 2298–2302, 1995.

[Mitsuhiro 92] M. Mitsuhiro, S. Shinichi & S. Eido. *Absolute number of photons produced by alpha-particles in liquid and gaseous xenon*. Nucl. Instrum. Meth. B, vol. 63, pages 297–308, 1992.

[Natterer 86] F. Natterer, éditeur. The mathematics of computerized tomography. Wiley, 1986.

[Natterer 93] F. Natterer. *Sampling in Fan-Beam Tomography*. SIAM J. Appl. Math., vol. 53, pages 358–380, 1993.

[Natterer 99] F. Natterer. *Sampling of functions with symmetries*. http ://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/num/Preprints/1999/natterer_1/, 1999.

[Petersen 62] D.P. Petersen & D. Middleton. *Sampling and reconstruction of wavenumber-limited functions in N-dimensional euclidean space*. Inf. Control, vol. 5, pages 279–323, 1962.

[Pichler 04] B.J. Pichler & S.L. Ziegler. Emission tomography, the fundamentals of pet and spect, chapitre 14. Elsevier Academic Press, 2004.

[Qi 98] J. Qi, S.R. Cherry R.M. Leahy, A. Chatziioannou & T.H. Farquhar. *High-resolution 3D bayesian image reconstruction using the microPET small-animal scanner*. Phys. Med. Biol, vol. 43, pages 1001–1013, 1998.

[Rattey 81] P.A. Rattey & A.G. Lindgren. *Sampling the 2-D Radon Transform*. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing, vol. 29, pages 994–1002, 1981.

[Rey 07] Martin Rey. *Étude du tomographe de haute résolution pour petits animaux ClearPET par la méthode de Monte Carlo*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.

[Rockmore 76] A. Rockmore & A. Macovski. *A maximum likelihood approach to emission image reconstruction from projections*. IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 23, pages 1428–1432, 1976.

[Rodet 03] T. Rodet, J. Nuyts, M. Defrise & C. Michel. *A study of data sampling in PET using planar detectors*. In IEEE Nuclear Science Symp. Conf. Rec, 2003.

[Seguinot 95] J. Seguinot, J. Tischhauser & T. Ypsilantis. *Liquid xenon scintillation yield and Fano factor measurements*. Nucl. Instrum. Meth. A, vol. 354, pages 280–287, 1995.

[Shepp 82] L.A. Shepp & Y. Vardi. *Maximum likelihood reconstruction for emission tomography*. IEEE Trans. Med. Imag., vol. 1, pages 113–122, 1982.

[Tai 03] Y.C Tai, A. Chatziioannou, Y. Yang, R.W. Silverman, K. Meadors, S. Siegel, D.F. Newport, J.R. Stickel & S.R. Cherry. *MicroPET 2 :design, development and initial performance of an improved microPET scanner for small-animal imaging*. Phys. Med. Biol, vol. 48, pages 1519–1537, 2003.

[Townsend 98] D.W. Townsend & B. Bendriem, éditeurs. The theory and practice of 3d pet. Kluwer Academic Publishers, B, 1998. pages 11-52.

[Turbell 01] Henrik Turbell. *Cone-Beam Reconstruction Using Filtered Backprojection*. Thèse de doctorat, Linköping University, 2001.

[Turkington 01] T.G. Turkington. *Introduction to PET instrumentation*. J. Nucl. Med. Technol, vol. 29, pages 1–8, 2001.

[van Lingen 00] A. van Lingen, B. Bendriem, P. Luk, W. Jones, J. Young & R. Nutt. *Initial characterization of a new hybrid tomograph : LSO/NaI PET/SPECT*. J. Nucl. Med, vol. 41, page 20P, 2000.

[Vandenberghe 06] S. Vandenberghe, M.E. Daube-Witherspoon, R.M. Lewitt & J.S. Karp. *Fast reconstruction of 3D time-of-flight PET data by axial rebinning and transverse mashing*. Phys. Med. Biol, vol. 51, pages 1603–1621, 2006.

[Watanabe 92] M. Watanabe, H. Uchida, H. Okada, K. Shimizu, N. Satoh, E. Yoshikawa, T. Ohmura T. Yamashita & E. Tanaa. *A high resolution PET for animal studies*. IEEE Trans. Med. Imag, vol. 11, pages 1177–1183, 1992.

[Wienhard 02] K. Wienhard, M. Schmand, M.E. Casey, K. Baker, L. Eriksson J. Bao, W.F. Jones, C. Knoess, M. Lenox, M. Lercher, P. Luk, C. Michel, J.H. Reed, N. Richerzhagen, J. Treffert, S. Vollmar, J.W. Young, W.D Heiss & R. Nutt. *The ECAT HRRT : performance and first clinical application of the new high resolution research tomograph.* IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 49, pages 104–110, 2002.

[Yang 04] Y. Yang, Y.C Tai, S. Siegel, D.F. Newport B. Bai, Q. Li, R. Leahy & S.R. Cherry. *MicroPET 2 :design, development and initial performance of an improved microPET scanner for small-animal imaging.* Phys. Med. Biol, vol. 49, pages 2527–2545, 2004.

Annexe A

Démonstration de la décomposition de L_e en 9 réseaux rectangulaires

Démonstration de la décomposition de L_e en 9 réseaux rectangulaires :

$$L_e = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{\mathbf{W_e}l\} = \left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{\mathbf{W_{S'}}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{a_1+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{2a_1+\mathbf{W_{S'}}l\}\right) \tag{A.1}$$
$$\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{a_2+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{a_1+a_2+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{2a_1+a_2+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)$$
$$\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{2a_2+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{a_1+2a_2+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{2a_1+2a_2+\mathbf{W_{S'}}l\}\right)$$

Démonstration.

$$\bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3}\{\mathbf{W_e}l\} = \left(\bigcup_{\substack{(l_1,l_2,l_3)^t\in\mathbb{Z}^3,\\ l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}}}\{\mathbf{W_e}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{\substack{(l_1,l_2,l_3)^t\in\mathbb{Z}^3,\\ l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}}}\{\mathbf{W_e}l\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{\substack{(l_1,l_2,l_3)^t\in\mathbb{Z}^3,\\ l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}}}\{\mathbf{W_e}l\}\right) \tag{A.2}$$

Chacun des trois ensembles, que nous notons L_{3m}, L_{3m+1} et L_{3m+2}, peut s'écrire en fonction de trois autres sous-ensembles, en distinguant les cas où $l_2 \in 3\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}+1$ et $3\mathbb{Z}+2$:

$$\begin{aligned}
L_{3m} &= \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \quad \text{(A.3)} \\
L_{3m+1} &= \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \\
L_{3m+2} &= \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} \right)
\end{aligned}$$

Nous cherchons à exprimer par la suite chaque sous-ensemble en fonction de $\mathbf{W_{S'}}$, a_1 et a_2 :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2l_1 \\ 2l_2 \\ -r(l_1+l_2)+3r \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(A.4)} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m-l_2) \\ 2l_2 \\ 3(1-m)r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m-3k) \\ 6k \\ 3(1-m)r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z} \\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} \right\} \text{avec } m'=1-m\,,k'=m-k \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l\} \quad \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k'-2 \\ 6k+2 \\ 3m'r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + a_1\} \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k'-4 \\ 6k+4 \\ 3m'r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + 2a_1\} \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2l_1 \\ 2l_2 \\ -r(3m+1)+3r \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(A.8)} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m+1-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r-r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k'+2 \\ 6k \\ 3m'r-r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + a_2\} \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m+1-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r-r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k+2 \\ 3m'r-r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + a_1 + a_2\} \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m+1-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r-r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k'-2 \\ 6k+4 \\ 3m'r-r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + 2a_1 + a_2\} \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+1\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2l_1 \\ 2l_2 \\ -r(3m+2)+3r \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(A.12)} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m+2-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r-2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k'+4 \\ 6k \\ 3m'r-2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + 2a_2\} \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m+2-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r-2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k'+2 \\ 6k+2 \\ 3m'r-2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+1\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + a_1 + 2a_2\} \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \{\mathbf{W_e}l\} &= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 2(3m+2-l_2) \\ 2l_2 \\ 3m'r-2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k+4 \\ 3m'r-2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{\substack{l_1+l_2=3m+2\,,\,m\in\mathbb{Z}\\ l_2=3k+2\,,\,k\in\mathbb{Z}}} \left\{ \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 6k' \\ 6k \\ 3m'r \end{pmatrix} + \frac{\pi}{r\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2r \end{pmatrix} \right\} \\
&= \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^3} \{\mathbf{W_{S'}}l + 2a_1 + 2a_2\} \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

□

Annexe B

Proposition du support essentiel de $\widehat{Xf}$ dans la géométrie *fully 3D*

La transformée en rayons X en TEP 3D

Nous rappelons ici des expressions de la transformée en rayons X 4D et de sa transformée de Fourier publiées dans [Defrise 97], que nous avons en parti exposées au paragraphe 2.6.2. Le support essentiel de $\widehat{Xf}$, en considérant l'oblicité des LORs comme un paramètre, peut en être déduit.
On considère une distribution volumique de radiotraceur $f(x, y, z)$ définit et infiniment dérivable sur le support cylindrique de rayon ρ, confinée dans un scanner cylindrique de rayon R tel que $\rho < R$ et de longueur L. Nous rajoutons ici l'hypothèse que f est essentiellement limitée en fréquence par Ω. L'intégrale de f suivant une ligne de réponse entre deux couronnes c_1 et c_2 s'écrit :

$$Xf(s, \phi, z, \Delta c) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \phi + t\xi_x, s \sin \phi + t\xi_y, z + t\xi_z)dt \tag{B.1}$$

où s et ϕ représentent les paramètres repérant la ligne de réponse en projection dans le plan transversal, $z = (c_1 + c_2)/2$, la coordonnée axiale du point localisé à mi-chemin entre les deux couronnes, $\Delta c = c_1 - c_2$, la différence entre les coordonnées axiales des deux couronnes et $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ le vecteur unitaire le long de la ligne d'intégration (figure

B.1) :

$$\xi = \frac{(-\sin\,\phi, \cos\,\phi, \frac{\Delta c}{2\sqrt{R^2-s^2}})}{\sqrt{1+\frac{(\Delta c)^2}{4(R^2-s^2)}}} \tag{B.2}$$

L'angle θ que fait une ligne de réponse oblique avec le plan transversal est :

$$\tan\theta = \frac{\Delta c}{2\sqrt{R^2-s^2}} \tag{B.3}$$

Dans le cas où le champ de vue transaxial du scanner est petit comparé au rayon du scanner, ce qui signifie $s << R$, on peut faire l'approximation suivante :

$$\tan\theta \sim \frac{\Delta c}{2R} \tag{B.4}$$

Par conséquent, les lignes de réponses reliant deux même couronnes, ayant donc les paramètres z et Δc identiques, peuvent être considérées parallèles puisque θ ne dépend plus de s.
Par ailleurs, les auteurs de [Defrise 97] introduisent une autre paramétrisation pour exprimer Xf :

$$Xf(s,\phi,z,\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\,\cos\,\phi - t\,\sin\phi, s\,\sin\,\phi + t\,\cos\phi, z+t\delta)dt \tag{B.5}$$

où $\delta = \tan\theta$ et t est la variable d'intégration suivant la projection de la LOR dans le plan transversal à la position axiale z. La transformée de Fourier de Xf par rapport aux variables (s,ϕ,z) s'exprime [Defrise 97](la transformée de Fourier de Xf relativement à la variable z est possible dans l'hypothèse que les projections tronquées sont complétées) :

$$\widehat{Xf}(\sigma,k,\zeta,\delta) = 2\pi(-i)^k \int_0^R \int_0^{2\pi} r\hat{f}(r,\beta,\zeta)\exp(-ik\beta)\exp\{-ik\,\arctan(\frac{\delta\zeta}{\sigma})\} \\ J_k\left(r\sigma\sqrt{1+\frac{\delta^2\zeta^2}{\sigma^2}}\right)\,d\beta\,dr \tag{B.6}$$

$\hat{f}(r,\beta,\zeta)$ représente la transformée de Fourier de f par rapport à la variable z exprimée en coordonnées cylindriques et s'écrit par la relation :

$$\hat{f}(r,\beta,\zeta) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(r\cos\beta, r\sin\beta, z)\exp(-i\zeta z))\,dz \tag{B.7}$$

J_k sont les fonctions de Bessel de première espèce. On peut exploiter la relation B.6 pour déterminer le support essentiel de $\widehat{Xf}(\sigma,k,\zeta,\delta)$.

Support essentiel de $\widehat{Xf}(\sigma,k,\zeta,\delta)$

Considérons la relation B.6. D'après l'hypothèse, $\hat{f}(r,\beta,\zeta)$ a un support essentiel limité par Ω. Par ailleurs, d'après les propriétés des fonctions de Bessel, $J_k\left(r\sigma\sqrt{1+\frac{\delta^2\zeta^2}{\sigma^2}}\right)$

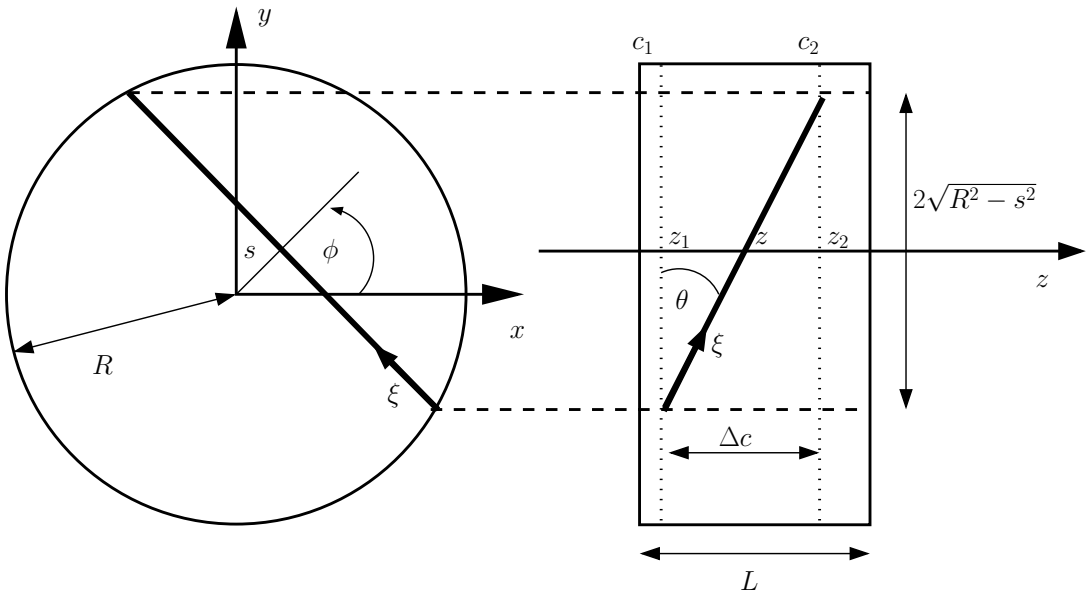


FIG. B.1 – Une coupe transversale (gauche) et longitudinale (droite) d'un scanner avec une ligne de réponse paramétrée

décroît exponentiellement pour $|k| > |\sigma|\sqrt{1+\frac{\delta^2\zeta^2}{\sigma^2}}$. Par ailleurs, d'après le théorème de la coupe centrale en 3D (relation 2.40) que nous rappelons :

$$\widehat{Xf}(\sigma,\tau,\phi,\theta) = 2\pi\hat{f}(\sigma u+\tau v) = 2\pi\hat{f}(\nu_x,\nu_y,\zeta)|_{w_q=0} \tag{B.8}$$

$\hat{f}$ ayant un support essentiel limité par Ω, nous déduisons que :

$$\sigma^2+\tau^2<\Omega^2 \tag{B.9}$$

où τ est la variable de Fourier de t (figure 2.16). D'après la relation 2.41, nous déduisons que $\tau = \zeta/\cos\theta$. Le théorème de la coupe centrale devient alors :

$$\sigma^2+\frac{\zeta^2}{(\cos\theta)^2}<\Omega^2 \quad \text{soit} \quad \sigma^2+(1+\delta^2)\zeta^2<\Omega^2 \tag{B.10}$$

Pour une oblicité de LORs donnée δ, le support essentiel de $\widehat{Xf}(\sigma,k,\zeta)$, noté K_δ est l'ensemble suivant :

$$K_\delta = \{(\sigma,k,\zeta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R} : \sigma^2+(1+\delta^2)\zeta^2<\Omega^2\,, k^2<\sigma^2+\delta^2\zeta^2\} \tag{B.11}$$

L'allure de K_δ est donnée à la figure B.2. Les branches hyperboliques de K_δ en projection dans le plan (k,σ) ont pour équation :

$$\left(\frac{k}{a}\right)^2-\left(\frac{\sigma}{b}\right)^2=1 \quad \text{avec} \quad a=\frac{\delta\Omega}{\sqrt{1+\delta^2}}\,, b=\delta\Omega \tag{B.12}$$

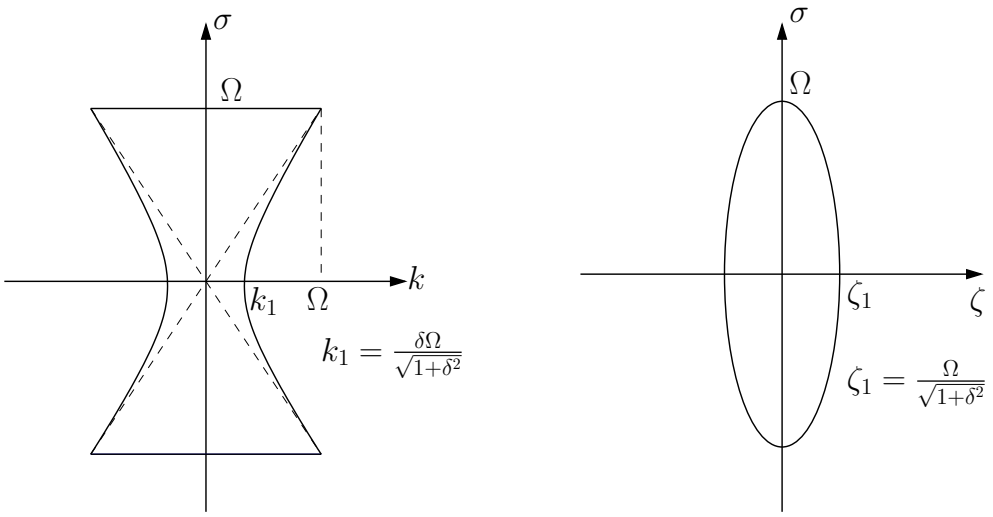


FIG. B.2 – Allure du support essentiel de $\widehat{Xf}(\sigma, k, \zeta)$ pour δ fixé, en projection dans le plan (k, σ) (gauche) et (ζ, σ) (droite). Les traits pointillés à l'intérieur du support sur la représentation en projection dans le plan (k, σ) (gauche), signifie l'allure du support pour la coupe $\zeta = 0$.