HAL open science

Modèles d'âge virtuel et de risques concurrents pour la maintenance imparfaite

Yann Dijoux

To cite this version:

Yann Dijoux. Modèles d'âge virtuel et de risques concurrents pour la maintenance imparfaite. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT : . tel-00379525

HAL Id: tel-00379525

https://theses.hal.science/tel-00379525

Submitted on 28 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'Institut polytechnique de Grenoble

Spécialité : mathématiques appliquées

préparée au Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK)

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique (MSTII)**

présentée et soutenue publiquement

par

Yann Dijoux

le 1er octobre 2008

Modèles d'âge virtuel et de risques concurrents pour la maintenance imparfaite

Directeur de thèse : Olivier GAUDOIN

JURY

M.	Gérard GREGOIRE	, Président
M.	Jean-Yves DAUXOIS	, Rapporteur
M.	Michel ROUSSIGNOL	, Rapporteur
M.	Olivier GAUDOIN	, Directeur de thèse
M.	Emmanuel REMY	, Examinateur

Table des matières

Table des matières **2**

Table des figures **9**

Introduction **11**

Abréviations **15**

1 Notations et modèles de base **17**
1.1 Notations . . . 17
1.2 Caractérisation du processus des maintenances . . . 20
1.3 Modèles de base pour un seul type de maintenance . . . 22
1.3.1 Introduction . . . 22
1.3.2 Le modèle ABAO . . . 23
1.3.3 Le modèle AGAN . . . 23
1.3.4 Les modèles d'âge virtuel . . . 24
1.3.5 Les modèles de Kijima . . . 25
1.3.6 Les modèles à réduction arithmétique de l'âge . . . 26
1.3.7 Le modèle de Brown-Proschan (BP) . . . 27
1.4 Modèles de base pour deux types de maintenances : les modèles de risques concurrents . . . 27
1.4.1 Définition des risques concurrents classiques (UCR) . . . 27
1.4.2 Fonctions usuelles . . . 29
1.4.3 Problèmes d'identifiabilité . . . 31
1.4.4 Bornes des fonctions de survie marginales . . . 32
1.5 Les principaux modèles de risques concurrents classiques pour l'analyse des maintenances . . . 33
1.5.1 Introduction . . . 33
1.5.2 Modèle à risques indépendants (IUCR) . . . 33
1.5.2.1 Définition et propriétés . . . 33
1.5.2.2 Modèle de mélanges . . . 34
1.5.2.3 L'hypothèse de Makeham . . . 34
1.5.2.4 Le modèle de Ebrahimi-Molefe . . . 34
1.5.3 L'hypothèse de signe aléatoire (RS) . . . 35
1.5.3.1 Définition et propriétés . . . 35
1.5.3.2 Modèle Repair Alert (RA) . . . 35
1.5.3.3 Modèle de censure hautement corrélé . . . 37

1.5.4 Modèle à hasards proportionnels . . . 37
1.5.5 Modèle doublement indépendant . . . 38
1.5.6 Modèle Delay-Time (DT) . . . 38
1.5.7 Modèles avec inspections . . . 38
1.5.7.1 Modèle à Alerte Proportionnelle et Inspection Périodique (PWCI) . . . 39
1.5.7.2 Modèle à Alerte Aléatoire et Inspection Périodique (RWCI) 39
1.5.8 Modèles construits à partir de copules . . . 39
1.5.9 Les modèles de fragilité . . . 40
1.5.10 Autres modèles . . . 41
1.6 Approche statistique pour les modèles de risques concurrents classiques . . 41
1.6.1 Introduction . . . 41
1.6.2 Estimation paramétrique . . . 41
1.6.3 Estimation non paramétrique . . . 42
1.6.3.1 Les estimateurs . . . 42
1.6.3.2 Etude d'un jeu de données . . . 43
1.6.3.3 Propriétés de l'estimateur de ϕ . . . 44
1.6.3.4 Propriétés des estimateurs des fonctions CS^* . . . 49
1.6.3.5 Test de monotonie de ϕ . . . 50

2 Les modèles d'âge virtuel et de risques concurrents généralisés 53
2.1 Définition des modèles de risques concurrents généralisés (GCR) . . . 53
2.2 Modèles d'âge virtuel généralisés . . . 56
2.2.1 Définition . . . 56
2.2.2 Quelques modèles GVA . . . 59
2.3 Le modèle de Langseth-Lindqvist : propriétés et difficultés . . . 62
2.3.1 Définition . . . 62
2.3.2 Calcul du temps moyen d'attente de la prochaine maintenance . . . 62
2.3.3 Fonction de vraisemblance . . . 63
2.4 Variante du modèle de Langseth-Lindqvist . . . 64
2.4.1 Modèle IPRA-ARA$_1$ . . . 64
2.4.2 Présentation des données . . . 64
2.4.3 Etude préliminaire en considérant les MP déterministes . . . 65
2.4.4 Analyse des données avec le modèle IPRA-ARA$_1$ . . . 66

Premières conclusions et orientations 69

3 Un nouveau modèle de risques concurrents dépendants : l'alert-delay 71
3.1 Définition du modèle alert-delay . . . 71
3.2 Propriétés du modèle alert-delay . . . 72
3.2.1 Identifiabilité faible du modèle . . . 74
3.2.2 Fonction de vraisemblance . . . 76
3.3 Le modèle alert-delay exponentiel . . . 77
3.3.1 Définition . . . 77
3.3.2 Propriétés . . . 77
3.4 Analyse statistique du modèle alert-delay exponentiel . . . 79

3.4.1 Introduction . . . 79
3.4.2 Estimation non paramétrique . . . 79
3.4.3 Estimation par maximum de vraisemblance . . . 80
3.4.4 Estimation par la méthode des moments . . . 81
3.4.5 Résultats de simulations . . . 82
3.4.5.1 Variations de p . . . 82
3.4.5.2 Variations de μ . . . 84
3.4.5.3 Variations de k . . . 85
3.4.6 Application à un jeu de données réelles . . . 87
3.4.7 Extension du modèle alert-delay . . . 88
3.4.7.1 Définition . . . 88
3.4.7.2 Identifiabilité . . . 89
3.4.7.3 Discussion . . . 90

4 Quelques modèles de risques concurrents généralisés 91
4.1 Les modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants 91
4.1.1 Introduction . . . 91
4.1.2 Modèles IUCR exponentiels . . . 92
4.1.3 Les modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants (CIGCR) . . . 93
4.1.4 Identifiabilité . . . 94
4.1.5 Modèles CIGCR exponentiels . . . 95
4.1.6 Un modèle CIGCR exponentiels exploitable . . . 96
4.1.7 Un modèle plus général . . . 98
4.1.8 Applications à des données réelles . . . 100
4.1.8.1 Etude des données $EDF1$ . . . 100
4.1.8.2 Etude des données $EDF2$ . . . 101
4.1.9 Etude des données “Hydrodata” . . . 102
4.2 L’hypothèse de signe aléatoire généralisée (GRS) . . . 103
4.2.1 Définition . . . 103
4.2.2 Le modèle Repair Alert généralisé . . . 107
4.2.3 Modèle de censure hautement corrélé généralisé . . . 109
4.3 Modèles à hasards proportionnels généralisés (GPH) . . . 109
4.3.1 Définition . . . 109
4.3.2 Hypothèses sur les lois conditionnelles des U_{k+1} . . . 111
4.3.2.1 Vigilance constante . . . 111
4.3.2.2 Deux états de vigilance . . . 111
4.3.2.3 Loi conditionnelle fonction du nombre de MC consécutives 113
4.3.2.4 Loi conditionnelle fonction de la proportion de MC . . . 113
4.3.3 Hypothèses sur les lois conditionnelles des W_{k+1} . . . 114
4.3.3.1 Modèles d’âges virtuels généralisés . . . 114
4.3.3.2 Lois exponentielles . . . 114
4.3.3.3 Lois exponentielles et présence de variables externes . . . 115
4.3.4 Modèle doublement indépendant généralisé . . . 116
4.3.4.1 Présentation . . . 116
4.3.4.2 Modèles basés sur les âges virtuels généralisés . . . 117

4.3.4.3 Un exemple : le modèle $DIW - ARA_1$ 119
4.4 Le modèle alert-delay généralisé (GAD) 120
4.4.1 Définition 120
4.4.2 Le modèle alert-delay exponentiel généralisé 121
4.4.2.1 Définition 121
4.4.2.2 Paramétrisation de p_{k+1} 121
4.4.2.3 Paramétrisation de λ_{k+1} 122
4.4.2.4 Paramétrisation de μ_{k+1} 123
4.4.3 Le modèle alert-delay combiné aux âges virtuels 124
4.5 Conclusion 126

5 Efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire 127
5.1 Motivation de l'étude 127
5.2 Intensités initiales en baignoire 130
5.2.1 Définition 130
5.2.2 Intensité non bornée sans vie utile 131
5.2.3 Intensité non bornée avec vie utile 134
5.2.4 Intensité asymptotiquement bornée sans vie utile 136
5.3 Hypothèses sur les âges effectifs pour un seul type de maintenance 136
5.3.1 Introduction 136
5.3.2 Modèle $ABAO - ARA_1(\rho)$ 137
5.3.3 Modèle $AIA(\rho_J) - ARA_1(\rho_V)$ 139
5.3.4 Modèle $AIA(\rho_J) - ARA_\infty(\rho_V)$ 142
5.3.5 Modèle $BTBP(p_J) - BTBP(p_V)$ 144
5.3.6 Autres modèles 146
5.4 Hypothèses sur les âges effectifs pour deux types de maintenances 147
5.4.1 Modèle $AIA(\rho_{c,J}, \rho_{p,J}) - ARA_1(\rho_{c,V}, \rho_{p,V})$ 147
5.4.2 Modèle $AIA(\rho_{c,J}, \rho_{p,J}) - ARA_\infty(\rho_{c,V}, \rho_{p,V})$ 148
5.4.3 Modèle $BTBP(p_{c,J}, p_{p,J}) - BTBP(p_{c,V}, p_{p,V})$ 149
5.4.4 Autres modèles 149
5.5 Construction d'un modèle 150
5.6 Conclusion 152

6 Deux modèles d'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire 153
6.1 Premier modèle 153
6.1.1 Définition 153
6.1.2 Propriétés 154
6.1.2.1 Intensité de défaillance 154
6.1.2.2 Fiabilité et MTTF 155
6.1.2.3 Intensité d'usure minimale 155
6.1.2.4 Extension de la durée de vie utile 156
6.1.3 Estimation 158
6.1.3.1 Méthodes d'estimation 158
6.1.3.2 Simulations lorsque t_J et t_V sont connus 159
6.2 Second modèle 162
6.2.1 Définition 162

6.2.2 Propriétés 163
6.3 Application à des données réelles 164
6.3.1 Etude des données EDF1 164
6.3.1.1 Présentation des données 164
6.3.1.2 Premier modèle 164
6.3.1.3 Second modèle 165
6.3.2 Etude des données EDF2 166
6.3.2.1 Présentation des données 166
6.3.2.2 Etude préliminaire 167
6.3.2.3 Etude à partir d'une intensité en baignoire 168
6.4 Conclusion 169

Conclusions et perspectives **171**

Bibliographie **172**

Table des figures

1.1 Une trajectoire des trois processus de maintenance 19
1.2 Intensité de défaillance dans le cas ABAO 23
1.3 Intensité de défaillance dans le cas AGAN 24
1.4 Intensité de défaillance dans le cas ARA_1 26
1.5 Intensité de défaillance dans le cas ARA_∞ 26
1.6 Intensité de défaillance dans le cas BP 28
1.7 Principe des risques concurrents 29
1.8 Illustration de l'hypothèse 1.86 du modèle Repair Alert 37
1.9 Exemple de données réelles vérifiant $\widehat{CS}_Y^* > \widehat{CS}_Z^*$ 43

2.1 Intensité de défaillance pour le système 11 67
2.2 Intensité de défaillance pour le système 11 sans période de jeunesse 68

3.1 Fonctions CS^* théoriques et leurs estimateurs pour $k = 20$ 80
3.2 Fonction ϕ théorique et son estimateur pour $k = 20$ 80
3.3 Fonctions CS^* théoriques et leurs estimateurs pour $k = 200$ 80
3.4 Fonction ϕ théorique et son estimateur pour $k = 200$ 80
3.5 Estimation de la MSE de $\hat{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}$ 85
3.6 Estimation de la MSE de $\hat{\mu}$ et $\tilde{\mu}$ 86
3.7 Estimation de la MSE de $\hat{p}$ et $\tilde{p}$ 86
3.8 fonctions CS^* et ϕ empiriques et théoriques ajustées par la méthode des moments 88
3.9 Exemples de fonctions alert delay 90

5.1 modèle BP et intensité croissante 128
5.2 modèle ARA et intensité croissante 128
5.3 modèle BP et intensité décroissante 129
5.4 modèle ARA et intensité décroissante 129
5.5 Intensité initiale [44] 131
5.6 Intensité initiale [43] 132
5.7 Intensité initiale [71] 132
5.8 Intensité initiale [72] 133
5.9 Intensité initiale [61] 134
5.10 Intensité initiale (5.19) 135
5.11 Exemple d'intensités initiales (5.20) 137
5.12 Ages effectifs autour de t_J 138
5.13 Trajectoire des âges virtuels pour un modèle $ABAO - ARA_1$ 139
5.14 Trajectoire des âges virtuels pour un modèle $ABAO - ARA_1$ 142

5.15 Trajectoire des âges virtuels pour un modèle $AIA - ARA_\infty$ 145
5.16 Trajectoire des âges virtuels pour un modèle BTBP-BTBP 147
5.17 Trajectoire d'intensité avec maintenances efficaces en période de jeunesse . 151

6.1 Un exemple d'intensités avec différents choix de ρ 154
6.2 Comportement de l'intensité de défaillance en période d'usure 157
6.3 Extension de la durée de vie utile 158
6.4 Les différents types d'intensité 164
6.5 Intensité de défaillance pour le système 11 166
6.6 Intensité de défaillance estimée pour WB1. 168
6.7 Tr1 : Intensité estimée 170
6.8 Tr2 : Intensité estimée 170
6.9 Tr3 : Intensité estimée 170
6.10 Tr4 : Intensité estimée 170

Introduction

Au cours de ces dernières décennies, les études sur la fiabilité des systèmes, à savoir leur aptitude à exécuter des fonctions requises sans défaillance, se sont amplement développées. En effet, les problèmes de sécurité (centrales nucléaires, transports aériens...) rendent primordiale l'evaluation des risques de ces systèmes complexes. Dans notre étude, nous considérons que les systèmes sont soumis à deux types d'action afin de les maintenir ou de les rétablir en état de marche :

- **Les maintenances correctives** (MC) interviennent suite à une défaillance. Les actions effectuées visent à remettre en marche le système. Comme les défaillances se produisent inévitablement à des instants aléatoires, les maintenances correctives qui en résultent sont aussi de nature aléatoire. Il est donc nécessaire de considérer que les instants de MC sont des variables aléatoires.
- **Les maintenances préventives** (MP) interviennent lorsque le système est en état de fonctionnement. Les opérations réalisées ont pour but de réduire la dégradation du système afin de retarder une éventuelle panne ultérieure. Les maintenances préventives peuvent être de plusieurs types :
  - **MP systématiques** : L'ensemble des instants de MP est établi dès la mise en route du système. Ces instants de MP sont donc déterministes.
  - **MP planifiées** : Les instants de MP suivent un calendrier préétabli mais pouvant tenir compte du passé du processus des maintenances. Cela signifie par exemple qu'après chaque maintenance, on établit la date de la future MP. A la différence des MP systématiques, il est possible de réactualiser la politique des MP afin de mieux prendre en compte les informations obtenues sur la dégradation du système. Comme cette réactualisation n'était pas prévue à la mise en route du système, les dates de MP planifiées sont donc aléatoires.
  - **MP conditionnelles** : Suite à l'observation d'une dégradation avancée du système, l'équipe de maintenance décide d'effectuer une maintenance préventive. Comme l'état de dégradation du système est fortement lié aux instants de défaillance potentiels, les MP conditionnelles sont exécutées à des instants aléatoires. A noter que la terminologie "conditionnelle" ne fait pas référence à une probabilité conditionnelle mais s'emploie pour refléter la condition du système nécessitant une MP (*Conditioned-based maintenance* en anglais).

Dans la très grande majorité du manuscrit, nous considérons que l'équipe de maintenance effectue une surveillance du système afin de prévenir toute défaillance. Cela consiste donc à supposer que les MP sont conditionnelles. Par la suite et sauf indication contraire, le terme MP désigne une MP conditionnelle.

Les instants des MP dépendent alors étroitement de la dégradation du système. D'autre part, les instants des MC sont aussi naturellement liés à cette dégradation. Il existe donc une dépendance entre le processus des MP et celui des MC. De plus, on comprend bien qu'après une remise en route du système, on ne peut pas observer ces deux événements simultanément : soit on arrive à détecter un état avancé de dégradation et on effectue une MP, soit une défaillance se produit, suivie d'une MC. On dispose au final de l'instant du premier des deux événements et du type de maintenance effectué. Mathématiquement, le cadre des **risques concurrents** permet de modéliser une situation où plusieurs événements sont susceptibles de se produire et seuls l'instant et le type du premier événement survenu sont observés. Nous allons donc utiliser cet outil de modélisation dans le contexte de l'analyse de la maintenance en considérant d'une part un "risque" de MP et d'autre part un "risque" de MC. Bon nombre de modèles de risques concurrents supposent que les risques sont indépendants. Bien que cette hypothèse aboutisse à des calculs relativement simples, elle n'est pas réaliste dans le contexte de maintenances préventives conditionnelles. Il est donc nécessaire d'utiliser ou de proposer des modèles où les risques soient dépendants. Plus précisément, on s'attend à ce que cette dépendance reflète le comportement réel du système ainsi que la politique de maintenance effectuée. Malheureusement, un résultat classique des risques concurrents est que les modèles ne sont pas identifiables pour des risques non indépendants. Des versions plus faibles de l'identifiabilité doivent être considérées afin de pouvoir utiliser des modèles de risques concurrents dépendants.

Un critère essentiel de la sûreté de fonctionnement des systèmes est celui de l'efficacité des maintenances, tant préventives que correctives. En effet, des maintenances efficaces auront pour effet de retarder l'apparition des défaillances. Les deux hypothèses les plus employées sont de supposer que la maintenance est soit parfaite et remet le système à neuf, soit minimale et ne fait que remettre le système en état de marche. Il est évident que la réalité se situe entre ces deux extrêmes. Les **modèles de maintenance imparfaite** permettent justement de prendre en compte des maintenances meilleures que minimales et moins bonnes que parfaites. Les modèles de maintenance imparfaite les plus répandus sont les **modèles d'âge virtuel**, qui consistent à supposer qu'un système maintenu se comporte comme un système neuf dont l'âge est inférieur à son âge réel.

D'autre part, il faut prendre en compte la dégradation du système neuf. Classiquement, on considère que les systèmes se dégradent continûment ou s'améliorent continûment. Si l'on étudie des systèmes industriels, il est tout à fait logique de privilégier la première hypothèse, la seconde étant plus liée au comportement des logiciels. Toutefois, le comportement des systèmes est généralement plus complexe. Pour de nombreux systèmes, on observe tout d'abord une période de jeunesse où les défaillances sont dues à des défauts de conception, puis une période de vie utile où le comportement du système est optimal, et enfin une période d'usure où les défaillances sont liées à la dégradation de ces systèmes. Les courbes liées à la dégradation sont alors communément appelées **"courbes en baignoire"**.

Ce manuscrit propose de faire la jonction entre ces différentes thématiques. La motivation de ma thèse réside en particulier dans l'étude de jeux de données fournis par EDF dans le cadre de plusieurs collaborations entre EDF et le Laboratoire Jean Kuntzmann. Les modèles probabilistes employés ont utilisé une généralisation des modèles d'âge vir-

tuel en présence de MP et de MC, proposée dans [33]. Les premières conclusions ont mis en évidence une période de jeunesse et une usure à long terme des systèmes. Toutefois, de nombreuses simplifications ont été employées, en partie dues au fait que les modèles d'âge virtuel classiques ne sont pas adaptés aux systèmes présentant une période de jeunesse. D'autre part, ces études ont montré l'intérêt de construire des modèles de risques concurrents adaptés aux maintenances imparfaites. Ce manuscrit s'attache donc à développer deux grands thèmes :

- Etudier et proposer des modèles de risques concurrents dépendants en présence de maintenance imparfaite.
- Proposer des modèles d'âge virtuel en présence de MP et de MC, adaptés aux systèmes présentant une période de jeunesse.

La structure du manuscrit est la suivante. Dans le **chapitre 1**, nous présentons une modélisation générale du processus des maintenances préventives et correctives. Nous faisons alors appel aux processus ponctuels bivariés ou colorés. Ensuite, nous présentons les modèles de base d'efficacité de la maintenance en présence d'un seul type de maintenance. Puis nous proposons le contexte des risques concurrents dits classiques (UCR) pour modéliser la dépendance entre les MP et les MC. Ces modèles supposent que les maintenances effectuées sont parfaites. Enfin, nous effectuons une étude statistique des modèles UCR. On met alors en évidence l'importance d'une fonction ϕ, dont la monotonie est un critère essentiel de selection de modèle. En particulier, nous constatons qu'aucun modèle UCR avec risques dépendants n'a une fonction ϕ croissante.

Dans le **chapitre 2**, nous utilisons les travaux proposés dans [36] pour faire le lien entre maintenance imparfaite et risques concurrents grâce aux modèles de risques concurrents généralisés (GCR). Cette modélisation permet de prendre en compte une dépendance quelconque entre les MP et les MC associée à des effets de maintenance quelconques. En particulier, nous présentons une généralisation des âges virtuels. En fin de chapitre, nous étudions le premier modèle combinant risques concurrents et maintenance imparfaite proposé dans [57]. Une variante est proposée afin de pouvoir exploiter des données EDF. L'étude de ces données pointe les limites des modèles préexistants, en particulier le fait que ces modèles de maintenance ne sont pas adaptés pour des systèmes présentant une période de jeunesse.

Dans le **chapitre 3**, nous définissons un nouveau modèle UCR : le modèle alert-delay. Les principales caractéristiques de ce modèle sont présentées pour des lois quelconques. Ensuite, nous étudions plus en détail ce modèle en considérant des lois exponentielles. Nous montrons alors que la fonction ϕ associée est croissante. Une étude statistique de ce modèle est proposée faisant intervenir les estimateurs de maximum de vraisemblance et des moments. Enfin, nous appliquons ce modèle à des données pour lesquelles une estimation non paramétrique de ϕ donne une fonction croissante.

Au cours du **chapitre 4**, plusieurs modèles UCR sont généralisés dans le cadre GCR. Pour ces modèles, nous utilisons le passé du processus des maintenances afin de prendre en compte les efficacités des maintenances. Pour le premier modèle étudié, nous présentons une application à plusieurs jeux de données fournis par EDF. Pour les autres, des paramétrisations simples et diverses sont présentées afin de modéliser les efficacités des maintenances.

Les **chapitres 5 et 6** sont consacrés à étudier des modèles d'efficacité de la maintenance pour des courbes en baignoire. Dans le chapitre 5, nous commençons par identifier

les limites des modèles classiques avant de proposer plusieurs classes de modèles de maintenance imparfaite à l'aide de modèles d'âge virtuel. Ces modèles peuvent prendre en compte un seul ou deux types de maintenance. Nous donnons alors une méthodologie pour construire un modèle adapté aux données. Dans le chapitre 6, nous développons deux modèles particuliers définis dans le chapitre 5, l'un en présence de MC seules et l'autre de MC et de MP. Les principales propriétés de ces modèles sont alors présentées. Une étude à base de simulations est effectuée pour le premier modèle. Enfin, nous appliquons ces deux modèles à des jeux de données pour lesquels une période de jeunesse a été détectée.

Abréviations

ABAO	Aussi mauvais que vieux
AD	Modèle alert-delay
AGAN	Aussi bon que neuf
AIA	Modèle à augmentation arithmétique de l'âge
$\mathbf{ARA}_1$	Modèle à réduction arithmétique de l'âge de mémoire 1
$\mathbf{ARA}_\infty$	Modèle à réduction arithmétique de l'âge de mémoire ∞
BP	Modèle de Brown-Proschan
BTBP	Modèle de Brown-Proschan adapté en période de jeunesse
CIGCR	Modèle de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants
EAD	Modèle alert-delay exponentiel
GAD	Modèle alert-delay généralisé
GCR	Modèle de risques concurrents généralisés
GPH	Modèle à hasards proportionnels généralisé
GRS	Hypothèse de signe aléatoire généralisée
GVA	Modèle d'âge virtuel généralisé
IPRA	Modèle Intensity Proportional Repair Alert
IUCR	Modèle de risques concurrents classiques indépendants
MC	Maintenance corrective
MP	Maintenance préventive
MTTF	Temps moyen avant défaillance
RA	Modèle Repair Alert
RS	Hypothèse de signe aléatoire
UCR	Modèle de risques concurrents classiques

$\mathbb{1}_X$	fonction indicatrice de X
$(k; w_1, \ldots, u_k)$	$(K_t = k; \{W_i = w_i, U_i = u_i\}_{k \geq i \geq 1})$
Y	Risque de MP
Z	Risque de MC
W	Instant de la maintenance $= \min(Y, Z)$
U	Type de la maintenance $= \mathbb{1}_{\{Y \leq Z\}}$
$S_X(x)$	fonction de survie de la variable aléatoire X en x
$F_X(x)$	fonction de répartition de la variable aléatoire X en x
$f_X(x)$	fonction de densité de la variable aléatoire X en x

K_{t^-}	Limite à gauche du processus K_t
$\sum_{i=a}^{b}$	Cette somme vaut 0 si $a > b$
$\prod_{i=a}^{b}$	Ce produit vaut 1 si $a > b$
h_+	$\sup(h, 0)$
$L_t(\theta; k; w_1, \ldots, u_k)$	Fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances sur l'intervalle $[0, t]$

Chapitre 1

Notations et modèles de base

Dans ce premier chapitre, nous introduisons les concepts de base de notre étude. Nous présentons dans un premier temps le formalisme nécessaire à la modélisation stochastique du processus des maintenances en présence de maintenances correctives (MC) et de maintenances préventives conditionnelles (MP). Ensuite, nous proposons un aperçu des modèles classiques de fiabilité quand un seul type de maintenance est présent en privilégiant les modèles d'âge virtuel. Puis nous présentons un cadre de modélisation répandu pour prendre en compte deux types de maintenances : les risques concurrents classiques. Ces modèles supposant des maintenances qui renouvellent le système, on ne s'intéressera donc pas à leur efficacité mais plutôt à la dépendance entre les instants de défaillance et les instants de maintenance préventive. Enfin, une approche statistique dans le cadre des risques concurrents est proposée. Dans ce contexte, certaines fonctions comme la fonction ϕ sont utiles à la sélection de modèle. Nous présentons alors de nouveaux résultats concernant la qualité d'un estimateur de ϕ ainsi qu'un test de monotonie sur ϕ basé sur la statistique de Wilcoxon.

1.1 Notations

On souhaite étudier des données d'actions de maintenance pour des systèmes soumis à des maintenances correctives et des maintenances préventives. A titre illustratif, le tableau 1.1 présente un exemple d'un extrait d'un jeu de données proposé dans le tableau 2.1 analysé dans le chapitre 2.

Unité 11	788	1090	1207	1705	2483
	MP	MC	MC	MP	Censure

Tab. 1.1 – Exemple de jeu de données

Il s'agit de données de maintenance de certains composants de systèmes de production d'électricité fournies par EDF. On dispose des instants et types de maintenances effectués

pour un des systèmes considérés. Ces instants de maintenances sont donnés en jours à partir de la date de mise en service. L'instant de censure correspond à la date d'arrêt d'observation du système. En plus des instants de maintenances, il faudra prendre en compte le fait qu'il n'y a eu aucune maintenance entre la dernière maintenance et la date de censure.

Il existe deux manières équivalentes de modéliser ces données de maintenance : **les processus ponctuels bivariés** et **les processus ponctuels colorés**. Dans l'approche processus bivarié, on distingue le processus des maintenances correctives et le processus des maintenances préventives. On définit alors les instants de maintenance et les processus de comptage relatifs à chaque type de maintenance.

Pour le processus des défaillances ou maintenances correctives, on note

- $\{T_i\}_{i\geq 1}$: instants des MC. On pose $T_0 = 0$.
- $\{X_i\}_{i\geq 1}$: durées inter-MC. $X_i = T_i - T_{i-1}$ et $T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$.
- $\{N_t\}_{t\geq 0}$: processus de comptage des MC.

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}$$

Pour le processus des maintenances préventives, qu'elles soient conditionnelles, planifiées ou déterministes :

- $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$: instants des MP. On pose $\tau_0 = 0$.
- $\{\chi_i\}_{i\geq 1}$: durées inter-MP. $\chi_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ et $\tau_i = \sum_{j=1}^{i} \chi_j$.
- $\{M_t\}_{t\geq 0}$: processus de comptage des MP.

$$M_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

Le processus bivarié résulte alors de l'union des deux processus de comptage :

$$\{N_s, M_s\}_{0\leq s\leq t} = \{N_t, M_t, T_1, \ldots, T_{N_t}, \tau_1, \ldots, \tau_{M_t}\} \tag{1.1}$$

Sur l'exemple, on a les valeurs suivantes : $\tau_1 = 788$, $T_1 = 1090$, $T_2 = 1207$, $\tau_2 = 1705$. L'instant d'arrêt de l'observation est $t = 2483$, et à cet instant, $N_t = 2$ et $M_t = 2$.

Dans l'approche processus coloré, on rassemble les instants de MC et de MP dans un processus de comptage global et on attribue une couleur à chaque type de maintenance. Cette modélisation prend la forme suivante :

- $\{C_i\}_{i\geq 1}$: instants des maintenances. On pose : $C_0 = 0$.
- $\{W_i\}_{i\geq 1}$: durées inter-maintenances. $W_i = C_i - C_{i-1}$ et $C_i = \sum_{j=1}^{i} W_j$.
- $\{K_t\}_{t\geq 0}$: processus de comptage des maintenances :

$$K_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{C_i \leq t\}} \tag{1.2}$$

– Le principe de coloration consiste à utiliser un processus $U = \{U_i\}_{i\geq 1}$ qui indique si les maintenances successives sont préventives ou correctives :

$$U_i = \mathbb{1}_{\{C_i = \tau_{M_{C_i}}\}} = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ maintenance est préventive} \\ 0 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ maintenance est corrective} \end{cases} \tag{1.3}$$

Le processus coloré résulte de l'union du processus de comptage K et du processus de couleur U :

$$\{K_s, U_{K_s}\}_{0\leq s\leq t} = \{K_t, C_1, U_1, \ldots, C_{K_t}, U_{K_t}\} \tag{1.4}$$

Sur l'exemple, on a : $C_1 = 788$, $C_2 = 1090$, $C_3 = 1207$, $C_4 = 1705$ et $U_1 = 1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $U_4 = 1$, $t = 2483$, $K_t = 4$.

La figure 1.1 présente le processus de maintenance associé aux données fournies dans le tableau 1.1 pour les 2000 premiers jours d'observation.

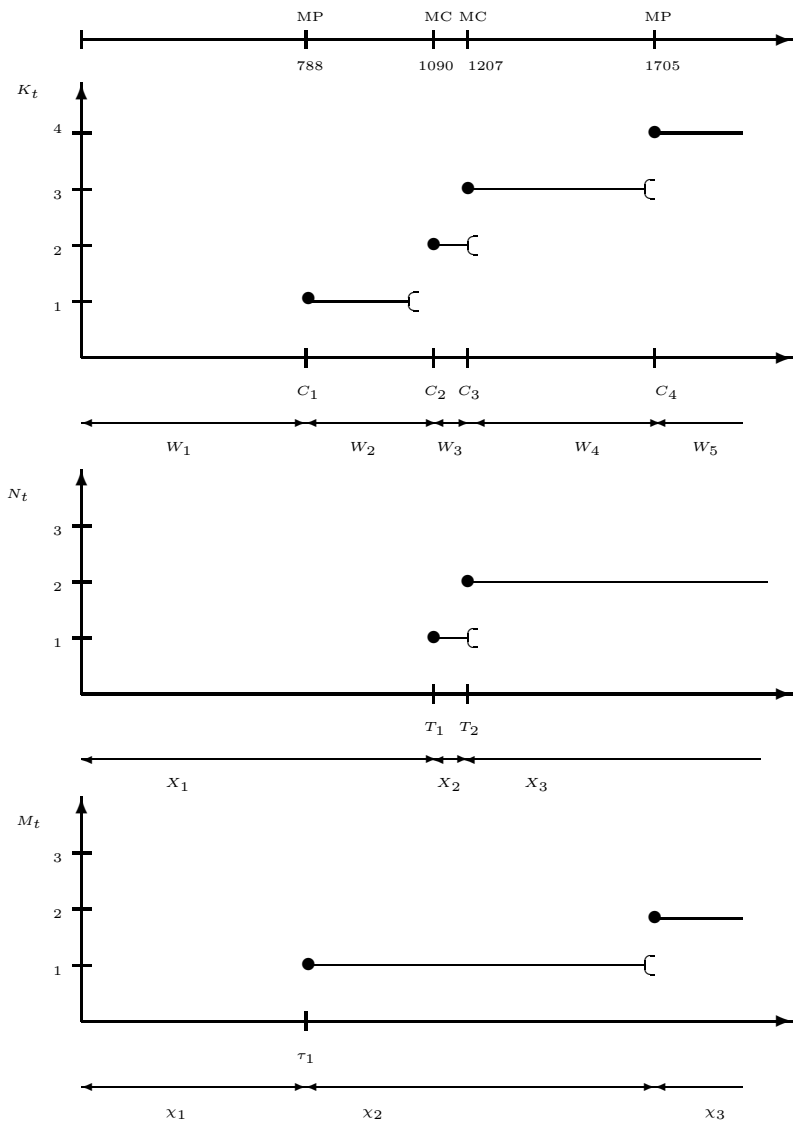


FIG. 1.1 – Une trajectoire des trois processus de maintenance

Les représentations par processus bivarié ou processus coloré sont strictement équivalentes :

$$N_t = \sum_{i=1}^{K_t}(1-U_i) \qquad \text{et} \quad M_t = \sum_{i=1}^{K_t} U_i \tag{1.5}$$

$$K_t = M_t + N_t \qquad \text{et} \quad U_k = M_{C_k} - M_{C_{k-1}} \tag{1.6}$$

Les trois processus de comptage définis vérifient les hypothèses suivantes, exprimées pour le processus $\{N_t\}_{t\geq 0}$:

- $N_0 = 0$ *p.s.*
- $\{N_t\}_{t\geq 0}$ est à valeurs entières.
- Les trajectoires de N_t sont constantes par morceaux, croissantes, continues à droite avec limite à gauche.
- $\{N_t\}_{t\geq 0}$ est un processus aléatoire simple. Cela signifie qu'il ne peut y avoir deux maintenances simultanément :

$$\forall t > 0 \ , \ \forall \Delta t > 0 \ , \ P(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2) = o(\Delta t) \tag{1.7}$$

Par la suite, nous emploierons de préférence l'approche des processus colorés, à savoir (K, U), plutôt que (N, M). D'autre part, on suppose que les durées des maintenances sont négligeables ou ne sont pas prises en compte.

Par convention, toute variable aléatoire sera notée en lettre majuscule et sa réalisation avec la même lettre minuscule. Dans les probabilités conditionnelles, on utilisera l'écriture abrégée $(k; w_1, \ldots, u_k)$ au lieu de $(K_t = k; \{W_i = w_i, U_i = u_i\}_{k\geq i\geq 1})$.

1.2 Caractérisation du processus des maintenances

On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace probabilisé correspondant à nos observations. On munit cet espace d'une filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ appelée histoire du processus des maintenances. $\mathcal{F}_t$ représente l'ensemble des événements survenus avant l'instant t susceptibles d'avoir une influence sur l'occurrence de la prochaine maintenance. $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par le passé du processus des maintenances, ainsi que d'un éventuel processus de variables externes $B = \{B_i\}_{i\geq 1}$:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{K_s, U_{K_s}, B_{K_s}\}_{0\leq s\leq t}) \tag{1.8}$$

Les processus ponctuels sont entièrement caractérisés par leur intensité [2]. Pour les processus K, N, M, les intensités de maintenance sont définies de la façon suivante :

- l'intensité de maintenance globale :

$$\lambda_t^K(K, U, B) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_{t^-} = 1 | \mathcal{F}_{t^-}) \tag{1.9}$$

- l'intensité de maintenance corrective :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | \mathcal{F}_{t^-}) \tag{1.10}$$

– l'intensité de maintenance préventive :

$$\lambda_t^M(K,U,B) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(M_{t+\Delta t} - M_{t^-} = 1 | \mathcal{F}_{t^-}) \tag{1.11}$$

On peut montrer que l'on a la relation suivante [2, page 74] :

$$\lambda_t^K(K,U,B) = \lambda_t^N(K,U,B) + \lambda_t^M(K,U,B) \tag{1.12}$$

Dans le cas où il n'y a pas de processus externe B, on peut écrire $\mathcal{F}_{t^-}$ de manière plus simple :

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(K_{t^-}, C_1, ..., C_{K_{t^-}}, U_1, ..., U_{K_{t^-}}) \tag{1.13}$$

$\mathcal{F}_{t^-}$ prend ainsi en compte le nombre de maintenances juste avant l'instant t ainsi que l'ensemble des types et instants de maintenances dans le passé du processus. On notera alors les intensités $\lambda_t^K(K,U)$, $\lambda_t^N(K,U)$, $\lambda_t^M(K,U)$. Le processus des maintenances est dans ce cas un processus ponctuel auto-excité.

Les intensités de maintenance caractérisent complètement le processus des maintenances. On peut ainsi déterminer par exemple les lois conditionnelles des durées inter-maintenances et types de maintenances grâce aux formules de Jacod [2, page 96] :

$$\begin{aligned} &P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 \,|w_1, \ldots, u_k) \\ &\qquad = \int_w^{+\infty} \lambda_{c_k+u}^N(k, w_1, \ldots, u_k) P(W_{k+1} > u | w_1, \ldots, u_k) du \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} &P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 \,|w_1, \ldots, u_k) \\ &\qquad = \int_w^{+\infty} \lambda_{c_k+u}^M(k, w_1, \ldots, u_k) P(W_{k+1} > u | w_1, \ldots, u_k) du \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$P(W_{k+1} > w | w_1, \ldots, u_k) = exp\left(-\int_0^w \lambda_{c_k+s}^K(k, w_1, \ldots, u_k)\, ds\right) \tag{1.16}$$

$$P(U_{k+1} = 1 | W_{k+1} = w, w_1, \ldots, u_k) = \frac{\lambda_{c_k+w}^M(k, w_1, \ldots, u_k)}{\lambda_{c_k+w}^K(k, w_1, \ldots, u_k)} \tag{1.17}$$

Inversement, les intensités de maintenance peuvent s'écrire à l'aide de ces lois conditionnelles :

$$\lambda_t^K(k, w_1, \ldots, u_k) = -\frac{d}{dt} \ln P(W_{k+1} > t - c_k | w_1, \ldots, u_k) \tag{1.18}$$

$$\lambda_t^N(k, w_1, \ldots, u_k) = \frac{-(d/dt) P(W_{k+1} > t - c_k, U_{k+1} = 0 | w_1, \ldots, u_k)}{P(W_{k+1} > t - c_k | w_1, \ldots, u_k)} \tag{1.19}$$

$$\lambda_t^M(k, w_1, \ldots, u_k) = \frac{-(d/dt) P(W_{k+1} > t - c_k, U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k)}{P(W_{k+1} > t - c_k | w_1, \ldots, u_k)} \tag{1.20}$$

Dans une perspective statistique, si on note θ le vecteur des paramètres d'un modèle, on peut écrire la fonction de vraisemblance associée à l'observation de ce processus jusqu'à un instant t [2, page 97] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t(\theta, k, w_1, \ldots, u_k) &= \prod_{i=1}^{k} \lambda_{c_i}^N(i-1, w_1, \ldots, u_{i-1})^{1-u_i} \lambda_{c_i}^M(i-1, w_1, \ldots, u_{i-1})^{u_i} \\ &\times \; e^{-\sum_{j=1}^{k+1} \int_{c_{j-1}}^{c_j} \lambda_s^K(j-1, w_1, \ldots, u_{j-1}) ds}\end{aligned} \tag{1.21}$$

avec la convention $c_0 = 0$ et $c_{k+1} = t$.

1.3 Modèles de base pour un seul type de maintenance

1.3.1 Introduction

Avant de décrire des modèles où interviennent deux types de maintenances avec éventuellement deux effets de maintenance différents, on s'intéresse aux modèles classiques où l'on ne prend en compte qu'un seul type de maintenance. Il s'agit par exemple de ne s'intéresser qu'aux défaillances (maintenances correctives) d'un système. Dans ce cadre, on ne s'intéresse qu'à une seule intensité, appelée intensité de défaillance, et naturellement définie, dans le cas où il n'y a pas de processus externe, par :

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | N_t, T_1, ..., T_{N_{t^-}}) \tag{1.22}$$

On appellera intensité initiale le taux de défaillance de la variable aléatoire T_1, date d'occurrence de la première panne, définie par :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t < T_1 \leq t + \Delta t | T_1 > t) \tag{1.23}$$

Avant la première panne, l'intensité de défaillance est égale à l'intensité initiale

$$\forall t < T_1 \ , \qquad \lambda_t = \lambda(t) \tag{1.24}$$

La forme la plus usitée pour ce taux est celle pour laquelle la variable aléatoire T_1 est de loi de Weibull :

$$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}, \quad \alpha > 0 \ , \beta > 0 \tag{1.25}$$

On notera $\Lambda(t)$ la primitive de $\lambda(t)$.

1.3.2 Le modèle ABAO

Le modèle ABAO pour As Bad As Old consiste à supposer les réparations minimales : après chaque panne, on remet le système en marche, dans l'état exact où il se trouvait au moment de la panne. Par exemple, cela consiste à remettre en marche le disjoncteur après une panne de courant sans rechercher les causes exactes de la défaillance.

L'hypothèse ABAO implique que l'intensité de défaillance dépend uniquement du temps :

$$\lambda_t = \lambda(t) \tag{1.26}$$

Le processus aléatoire correspondant est un processus de Poisson non homogène (NHPP). Si on considère une intensité initiale de type (1.25), ce processus est appelé Power-Law-Process [63]. Le paramètre α est analogue à un paramètre d'échelle et le paramètre β traduit la vitesse d'usure du système :

- $\beta > 1$: le système se dégrade. C'est en général le cas des matériels.
- $\beta < 1$: le système s'améliore. C'est le cas par exemple pour les logiciels dont les corrections améliorent la fiabilité.
- $\beta = 1$: le système ne vieillit pas. L'intensité de défaillance est constante au cours du temps, ce qui correspond au processus de Poisson homogène (HPP) très couramment employé en fiabilité.

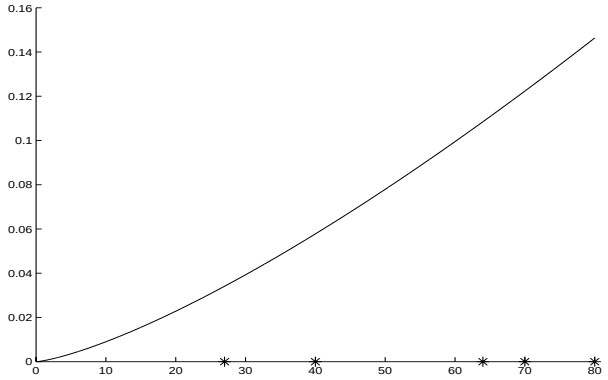


FIG. 1.2 – Intensité de défaillance dans le cas ABAO

La figure 1.2 représente une intensité de défaillance d'un système pour des MC ABAO. Dans cette figure et dans toutes les suivantes, l'intensité initiale est supposée de type Weibull et les * sur l'axe des abscisses représentent les instants de défaillance.

1.3.3 Le modèle AGAN

Dans le modèle AGAN pour As Good As New, on considère que les réparations après une panne sont parfaites et remettent le système à neuf. Cela peut correspondre au remplacement d'une ampoule défectueuse par une neuve de même génération.

L'hypothèse AGAN entraîne que les X_i sont indépendantes et de même loi (iid), le processus des défaillances est alors un processus de renouvellement. Il en découle que

l'intensité prend la forme suivante :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}}) \tag{1.27}$$

L'intensité de défaillance dépend seulement du temps écoulé depuis la dernière panne. La figure 1.3 représente l'intensité de défaillance d'un système pour des MC AGAN.

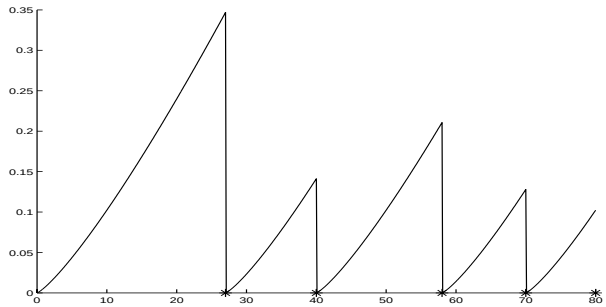


FIG. 1.3 – Intensité de défaillance dans le cas AGAN

Il est clair que la réalité se situe entre ces deux cas extrêmes : une maintenance standard va réduire l'intensité de défaillance mais ne remettra pas le système à neuf. Les modèles correspondants s'appellent les **modèles de maintenance imparfaite**. Parmi ceux-ci, on ne s'intéresse ici qu'aux plus usuels, les modèles d'âge virtuel.

1.3.4 Les modèles d'âge virtuel

Le principe des modèles d'âge virtuel, proposés par Kijima, Morimura et Suzuki [52], consiste à supposer qu'après la $i^{\text{ème}}$ réparation, le système fonctionne comme un système neuf qui aurait vécu un âge A_i sans avoir eu de panne. Cet âge A_i, appelé âge effectif, est le plus souvent une fonction déterministe du passé du processus : $A_i = A_i(T_1, ..., T_i)$, avec $A_0 = 0$. On peut alors calculer la loi des durées inter-défaillances $\{X_i\}_{i\geq 1}$ conditionnellement à l'âge du système et à son passé.

Soit une variable aléatoire Y de même loi que le premier instant de défaillance $T_1 = X_1$. L'hypothèse effectuée s'écrit alors :

$$\forall i \geq 0, \forall x \geq 0, P(X_{i+1} > x | X_1, ..X_i) = P(Y > A_i + x | Y > A_i) \tag{1.28}$$

Si on note S la fonction de survie de Y, on obtient alors :

$$\forall i \geq 0, \forall x \geq 0, P(X_{i+1} > x | X_1, ..., X_i) = \frac{S(A_i + x)}{S(A_i)} \tag{1.29}$$

On définit de façon naturelle l'âge virtuel du système à tout instant t, que l'on note $A(t)$. C'est l'âge virtuel qu'a le système à la dernière panne auquel on rajoute le temps écoulé depuis cette dernière panne, c'est-à-dire :

$$A(t) = t - T_{N_{t^-}} + A_{N_{t^-}} \tag{1.30}$$

Alors, l'intensité de défaillance du modèle s'exprime en fonction de cet âge virtuel :

$$\lambda_t = \lambda(A(t)) = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + A_{N_{t^-}}) \tag{1.31}$$

Ces modèles généralisent les modèles AGAN et ABAO. En effet, si on considère que les âges virtuels sont nuls après chaque réparation ($\forall i,\ A_i = 0$), cela revient à dire que le système est remis à neuf (modèle de réparation parfaite AGAN). A l'inverse, si l'âge virtuel après chaque réparation est identique à l'âge réel du système ($\forall i,\ A_i = T_i$), cela revient bien à avoir des réparations minimales remettant le système dans l'état où il était avant la panne (modèle ABAO).

1.3.5 Les modèles de Kijima

Kijima [51] définit deux classes de modèles d'âges virtuels, connus sous le nom de modèles de Kijima de types I et II :

- Modèles de Kijima de type I : L'effet de la $i^{\text{ème}}$ maintenance est de réduire l'âge virtuel du système avant la défaillance, à savoir $A_{i-1} + X_i$, d'une quantité proportionnelle à la durée écoulée depuis la dernière maintenance $B_i X_i$, avec $B_i \in [0, 1]$. On obtient alors :

$$\forall\, i \ \geq\ 1,\ \ A_i = A_{i-1} + (1 - B_i)X_i \tag{1.32}$$

  A partir de l'équation (1.31), on en déduit l'intensité de défaillance de ce modèle :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{j=1}^{N_{t^-}}(1 - B_j)X_j) \tag{1.33}$$

- Modèles de Kijima de type II : L'effet de la $i^{\text{ème}}$ maintenance est de réduire l'âge virtuel global du système d'une quantité qui lui est proportionnelle B_i, avec $B_i \in [0, 1]$. On obtient alors :

$$\forall\, i \ \geq\ 1,\ \ A_i = (1 - B_i)(A_{i-1} + X_i) \tag{1.34}$$

  On en déduit alors l'intensité de défaillance de ce modèle :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{j=1}^{N_{t^-}}(\prod_{k=j}^{N_{t^-}}(1 - B_k))X_j) \tag{1.35}$$

Pour ces deux modèles, la variable B_i représente l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance. En particulier, si les B_i sont tous égaux à 0, les maintenances sont minimales (ABAO) et si les B_i sont tous égaux à 1, les maintenances sont parfaites (AGAN). Si on considère des maintenances imparfaites, l'idée la plus naturelle est de supposer que les B_i sont déterministes et constants : $\forall\ i \geq 1,\ B_i = \rho$. Ce paramètre ρ est appelé efficacité de la maintenance ou facteur d'amélioration. Il en résulte les modèles particuliers suivants pour chaque type de modèle :

– Pour les modèles de Kijima de type I, on obtient un modèle défini par Malik [59] sous le nom de modèle à réduction proportionnelle de l'âge (PAR) et qui a été étudié

par Doyen et Gaudoin [35] sous le nom de modèle ARA_1. L'intensité de défaillance s'ecrit :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_{t^-}}) \tag{1.36}$$

– Pour les modèles de Kijima de type II, on obtient un modèle défini par Brown, Mahoney et Sivalzian [10] (BMS) et qui a été étudié par Doyen et Gaudoin [35] sous le nom de modèle ARA_∞. L'intensité de défaillance s'ecrit :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho \sum_{j=0}^{N_{t^-}-1} (1-\rho)^j T_{N_{t^-}-j}) \tag{1.37}$$

Pour ces deux modèles, on peut s'intéresser à quelques valeurs remarquables de ρ :
– $\rho = 1$: la maintenance est parfaite.
– $\rho = 0$: la maintenance est minimale.
– $\rho \in]0, 1[$: la maintenance est efficace.

1.3.6 Les modèles à réduction arithmétique de l'âge

Doyen et Gaudoin [35] ont proposé une classe de modèles dits à réduction arithmétique de l'âge de mémoire m (ARA_m) dont le principe est que la réduction d'âge dépend de l'effet des m dernières maintenances. L'intensité est définie comme suit :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho \sum_{j=0}^{Min(m-1, N_{t^-}-1)} (1-\rho)^j T_{N_{t^-}-j}) \tag{1.38}$$

La mémoire m correspond au nombre maximal d'instants de défaillance précédents qui peuvent influencer l'intensité de défaillance. On retrouve bien les modèles ARA_1 et ARA_∞ pour les valeurs de m respectives 1 et ∞. Les figures 1.4 et 1.5 représentent des trajectoires d'intensités pour les modèles ARA_1 et ARA_∞.

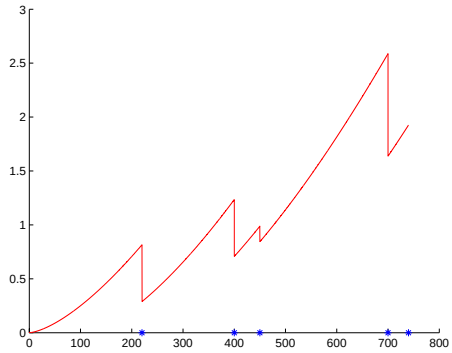


FIG. 1.4 – Intensité de défaillance dans le cas ARA_1

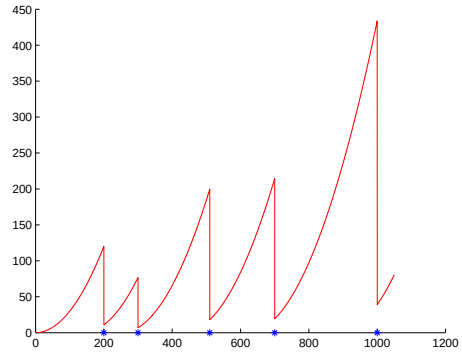


FIG. 1.5 – Intensité de défaillance dans le cas ARA_∞

1.3.7 Le modèle de Brown-Proschan (BP)

Le modèle de Brown-Proschan (BP, [11]) est l'un des premiers modèles de réparations imparfaites proposé dans la littérature. Il est défini de la manière suivante : quand un système tombe en panne, la réparation est parfaite avec une probabilité p (AGAN) et le système repart à neuf. Sinon, la réparation est minimale (ABAO), avec donc une probabilité $1-p$, et le système redémarre avec l'âge qu'il avait avant la panne.

On modélise l'effet des maintenances effectuées par des variables aléatoires B_i :

$$\begin{cases} B_i = 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ réparation est parfaite (AGAN)} \\ B_i = 0 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ réparation est minimale (ABAO)} \end{cases} \tag{1.39}$$

Les variables B_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p : $B(p)$. Ces variables B_i sont indépendantes des variables $\{X_j\}_{j\leq i}$ et agissent donc comme un processus externe. Le modèle BP est un modèle d'âge virtuel pour lequel A_i est le temps écoulé depuis la dernière réparation parfaite juste après la $i^{\text{ème}}$ réparation. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} A_i = 0 & \text{si la réparation effectuée a été parfaite } (B_i = 1). \\ A_i = A_{i-1} + X_i & \text{si la réparation effectuée a été minimale } (B_i = 0). \end{cases}$$

Il en découle que :

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} (\prod_{k=j}^{i} (1 - B_k)) X_j \tag{1.40}$$

On en déduit l'intensité de défaillance, qui est de la forme Kijima de type II :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{j=1}^{N_{t^-}} (\prod_{k=j}^{N_{t^-}} (1 - B_k)) X_j) \tag{1.41}$$

On remarque que dans les cas particuliers $p = 0$ $(B_i = 0)$ et $p = 1$ $(B_i = 1)$, on retrouve les modèles ABAO et AGAN respectivement.

La figure 1.6 représente une trajectoire de cette intensité. Les instants des maintenances AGAN et ABAO sont respectivement représentés sur l'axe des abscisses par des cercles et des étoiles.

1.4 Modèles de base pour deux types de maintenances : les modèles de risques concurrents

1.4.1 Définition des risques concurrents classiques (UCR)

Une situation de risques concurrents (CR pour competing risks) intervient lorsqu'un événement aléatoire peut être du à plusieurs causes. Cette situation se rencontre dans de multiples domaines, tels que la médecine, la fiabilité, la biologie, la finance, l'actuariat. On retrouve la théorie des risques concurrents dès le $18^{\text{ème}}$ siècle avec les travaux de Daniel Bernoulli [9] sur l'étude des causes possibles de décès dans une population.

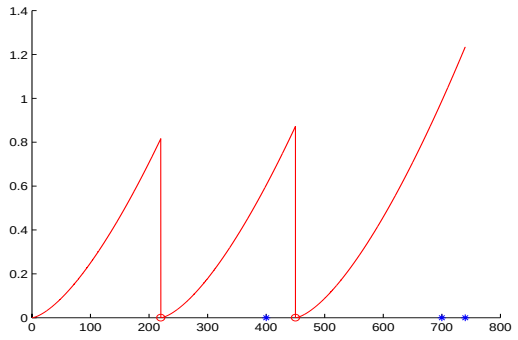


FIG. 1.6 – Intensité de défaillance dans le cas BP

En sûreté de fonctionnement, les risques concurrents permettent de modéliser des systèmes soumis à plusieurs modes de défaillance [19, 55]. Le cadre des risques concurrents est aussi très commode afin de modéliser des données censurées ou tronquées [65, 73].

En analyse de la maintenance, Cooke et Paulsen [21] ont proposé les premiers de modéliser la dépendance entre maintenances préventives et correctives par la méthode des risques concurrents de la manière suivante. Au moment où on remet en fonctionnement un système après une maintenance, on ne sait pas si la prochaine défaillance surviendra avant ou après la prochaine maintenance préventive. Autrement dit, après la $(k-1)$ ème maintenance (à la date C_{k-1}), on ne sait pas si la prochaine maintenance sera préventive ou corrective. On modélise alors la durée potentielle d'attente de chaque type de maintenance par des variables aléatoires Y_k et Z_k définies de la manière suivante :

- Y_k est la durée d'attente de la prochaine maintenance, si elle est préventive.
- Z_k est la durée d'attente de la prochaine maintenance, si elle est corrective.

La prochaine maintenance réellement observée sera donc celle qui se produira la première et aura lieu après le temps d'attente suivant :

$$W_k = \min(Y_k, Z_k) \tag{1.42}$$

La nature de cette prochaine maintenance, préventive ou corrective, est déterminée par :

$$U_k = \mathbb{1}_{\{Y_k \leq Z_k\}} = \begin{cases} 1 & \text{si la } k^{\text{ ème}} \text{ maintenance est préventive} \\ 0 & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ maintenance est corrective} \end{cases} \tag{1.43}$$

La figure 1.7 illustre le principe de construction des modèles CR.

Dans un modèle de risques concurrents, on suppose en plus que les couples (Y_k, Z_k) sont indépendants et de même loi. Cela revient à dire que les effets des MP et MC sont AGAN : après chaque maintenance, le système est remis à neuf. Le processus global des maintenances est un processus de renouvellement :

$$\lambda_t^K(K, U) = \lambda(t - C_{K_{t^-}}) \tag{1.44}$$

On désigne par (Y, Z) un couple de variables aléatoires de même loi que les (Y_k, Z_k). Y est appelé risque de MP et Z est appelé risque de MC. W et U sont respectivement

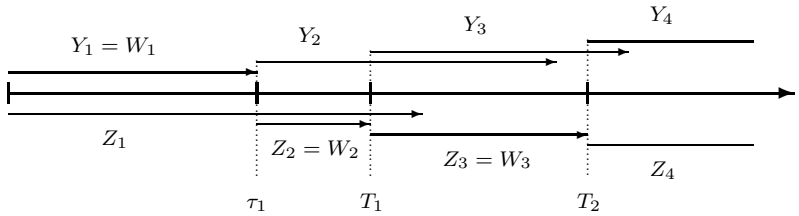


FIG. 1.7 – Principe des risques concurrents

l'instant et le type de la maintenance. Seules les variables W et U sont observées, les variables Y et Z ne l'étant pas. On ne s'intéresse pas dans un premier temps à modéliser l'efficacité de la maintenance mais à définir la dépendance entre les deux variables de risque.

Nous désignerons par **risques concurrents classiques** les risques concurrents où l'on considère les maintenances parfaites. La notation abrégée sera **UCR** pour *Usual Competing Risks Models*. Dans le chapitre suivant, nous généraliserons les modèles de risques concurrents aux maintenances imparfaites.

1.4.2 Fonctions usuelles

La dépendance entre le risque de MP Y et le risque de MC Z s'exprime par la loi jointe de (Y, Z), définie par sa fonction de survie bivariée :

$$S(y, z) = P(Y > y, Z > z) \tag{1.45}$$

Les difficultés d'identifiabilité détaillées plus loin font que l'on ne peut estimer que les fonctions liées à la loi jointe de (W, U). Ces fonctions sont appelées **fonctions de sous-survie** :

$$S_Z^*(z) = P(Z > z, Z < Y) = P(W > z, U = 0) \tag{1.46}$$
$$S_Y^*(y) = P(Y > y, Y \leq Z) = P(W > y, U = 1) \tag{1.47}$$

La loi de l'instant W de la première maintenance est déterminée par sa fonction de survie :

$$S_W(w) = P(Y > w, Z > w) = S(w, w) = S_Y^*(w) + S_Z^*(w) \tag{1.48}$$

D'autre part, la loi du type U de la première maintenance est définie par :

$$P(U = 1) = P(Y \leq Z) = S_Y^*(0) \tag{1.49}$$
$$P(U = 0) = P(Z < Y) = S_Z^*(0) \tag{1.50}$$

Crowder [26] a défini les **fonctions de sous-hasard** qui correspondent aux taux de hasard de la première maintenance lorsque l'on connaît son type. Ces fonctions sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}\lambda_c(w) &= \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\Delta w} P(w < Z \leq w + \Delta w, Z < Y | W > w) \\ &= \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\Delta w} P(w < W \leq w + \Delta w, U = 0 | W > w) \end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned}\lambda_p(w) &= \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\Delta w} P(w < Y \leq w + \Delta w, Y \leq Z | W > w) \\ &= \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\Delta w} P(w < W \leq w + \Delta w, U = 1 | W > w) \end{aligned} \tag{1.52}$$

On établit alors que :

$$\lambda_c(w) + \lambda_p(w) = \lambda_W(w) \tag{1.53}$$

Les fonctions de sous-hasard, les fonctions de sous-survie et la fonction de survie jointe sont reliées par les relations suivantes :

$$\lambda_c(w) = \frac{-S_Z^{*\prime}(w)}{S_Y^*(w) + S_Z^*(w)} = \frac{-\left[\frac{\partial}{\partial z} S(y,z)\right]_{(w,w)}}{S(w,w)} \tag{1.54}$$

$$\lambda_p(w) = \frac{-S_Y^{*\prime}(w)}{S_Y^*(w) + S_Z^*(w)} = \frac{-\left[\frac{\partial}{\partial y} S(y,z)\right]_{(w,w)}}{S(w,w)} \tag{1.55}$$

Enfin, on montre que :

$$S_Z^*(z) = \int_z^{+\infty} \lambda_c(u) \exp\left(-\int_0^u \lambda_W(w) dw\right) du = \int_z^{+\infty} \left[-\frac{\partial}{\partial z} S(y,z)\right]_{(s,s)} ds \tag{1.56}$$

$$S_Y^*(y) = \int_y^{+\infty} \lambda_p(u) \exp\left(-\int_0^u \lambda_W(w) dw\right) du = \int_y^{+\infty} \left[-\frac{\partial}{\partial y} S(y,z)\right]_{(s,s)} ds \tag{1.57}$$

On peut remarquer que la loi de (W, U) ne dépend de la fonction de survie jointe qu'à travers ses valeurs sur la première diagonale $(y = z)$, ce qui est à l'origine du problème classique d'identifiabilité des risques concurrents usuels.

On définit les **fonctions de survie marginales** par :

$$S_Y(y) = P(Y > y) = S(y, 0) \tag{1.58}$$

$$S_Z(z) = P(Z > z) = S(0, z) \tag{1.59}$$

De manière équivalente, on définit leurs taux de hasard :

$$\lambda_Y(y) = \frac{-S_Y'(y)}{S_Y(y)} \tag{1.60}$$

$$\lambda_Z(z) = \frac{-S_Z'(z)}{S_Z(z)} \tag{1.61}$$

On appelle **fonctions de sous-survies conditionnelles** (ou normalisées) les fonctions de sous-survies conditionnées par la connaissance du risque qui s'est manifesté le premier :

$$CS_Z^*(z) = P(Z > z|Z < Y) = P(W > z|U = 0) = \frac{P(Z > z, Z < Y)}{P(Z < Y)} = \frac{S_Z^*(z)}{S_Z^*(0)} \quad (1.62)$$

$$CS_Y^*(y) = P(Y > y|Y \leq Z) = P(W > y|U = 1) = \frac{P(Y > y, Y \leq Z)}{P(Y \leq Z)} = \frac{S_Y^*(y)}{S_Y^*(0)} \quad (1.63)$$

Par exemple, CS_Z^* est la fonction de survie de Z sachant que $Z < Y$. On a $CS_Z^*(0) = CS_Y^*(0) = 1$.

Enfin on définit une fonction dont le nom n'est pas normalisé et qu'on appellera **fonction $\boldsymbol{\phi}$** :

$$\begin{aligned} \phi(w) &= P(Y \leq Z|W > w) = P(U = 1|W > w) = \frac{P(U = 1, W > w)}{P(W > w)} && (1.64) \\ &= \frac{S_Y^*(w)}{S_W(w)} = \frac{S_Y^*(w)}{S_Y^*(w) + S_Z^*(w)} && (1.65) \end{aligned}$$

On a $\phi(0) = S_Y^*(0) = P(Y \leq Z) = P(U = 1)$.

Concrètement, $\phi(w)$ est la probabilité que la prochaine maintenance soit préventive sachant qu'elle n'a pas encore eu lieu à l'instant w. On dit pour abréger que $\phi(w)$ est la probabilité de MP au delà de w.

Comme on le verra plus tard, l'intérêt des fonctions CS^* et ϕ est qu'elles permettent de choisir des modèles UCR adaptés à des jeux de données.

1.4.3 Problèmes d'identifiabilité

Dans une approche statistique, il est naturel de vouloir estimer les lois de Y et Z au vu d'observations $(Y_k, Z_k)_{\{1 \leq k \leq n\}}$. Malheureusement, Tsiatis [66] a prouvé que les distributions de Y et Z ne sont pas identifiables lorsque les risques sont dépendants. L'une des raisons de cette non identifiabilité vient du fait que l'on n'observe pas directement le couple (Y, Z) mais le couple (W, U). Une façon d'exprimer ce résultat est donnée par Cooke [18] :

Théorème 1.1 *Soient Y et Z des durées de vie aléatoires continues.*

1. *Si Y et Z sont indépendantes, si Y' et Z' sont indépendantes et telles que $S_Y^* = S_{Y'}^*$ et $S_Z^* = S_{Z'}^*$, alors (Y, Z) et (Y', Z') ont même loi.*

2. *Si (S_1^*, S_2^*) est une paire de fonctions de sous-survies continues, alors il existe des variables aléatoires indépendantes Y et Z telles que $S_Y^* = S_1^*$ et $S_Z^* = S_2^*$.*

Le résultat 1. signifie qu'il existe un seul modèle UCR avec risques indépendants correspondant à une paire de sous-survies donnée. Le résultat 2. signifie qu'à toute paire de sous-survies, on peut toujours associer un modèle UCR avec risques indépendants, celui pour lequel les taux de hasard sont λ_c et λ_p. Autrement dit, 2. permet de confirmer

qu'on ne peut pas identifier les lois de Y et de Z dans le cas général et 1. dit que, sous l'hypothèse d'indépendance des risques, on peut identifier ces lois.

On peut proposer un exemple inspiré de Bedford et Mesina [8] où deux couples de loi donnent les mêmes fonctions de sous-survies :

- W et U sont indépendants. U est de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y = W + (1-U)\epsilon$ et $Z = W + U\epsilon$, où ϵ est une constante strictement positive. On constate que Y et Z sont fortement dépendants.
- $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$ sont indépendants, $\tilde{Y}$ a pour survie $S_{\tilde{Y}}(y) = (S_W(y))^p$ et $\tilde{Z}$ a pour survie $S_{\tilde{Z}}(z) = (S_W(z))^{(1-p)}$.

Ces deux modèles ont les mêmes fonctions de sous-survies : $S_Y^*(y) = pS_Z(y)$ et $S_Z^*(z) = (1-p)S_Z(z)$. Au vu des données, il est donc impossible de distinguer la loi jointe (Y, Z) de la loi jointe $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$.

1.4.4 Bornes des fonctions de survie marginales

Comme un modèle de risques concurrents n'est pas identifiable, il n'est pas possible de reconstruire les lois de Y et Z au vu des observations W et U. Cela revient à dire que l'on ne peut pas déterminer les fonctions S_Y et S_Z connaissant S_Y^* et S_Z^*. En revanche, il est possible d'encadrer ces fonctions de survie marginales à partir des fonctions de sous-survies. En 1976, Peterson [62] a ainsi obtenu la relation suivante :

$$S_Y^*(y) + S_Z^*(z) \geq S(y,z) \geq S_Y^*(\max(y,z)) + S_Z^*(\max(y,z)) = S_W(\max(y,z)) \tag{1.66}$$

Notons q la probabilité d'effectuer une MP :

$$q = P(Y \geq Z) = S_Y^*(0)\ , \tag{1.67}$$

Peterson obtient alors des bornes sur les survies S_Y et S_Z à partir des inégalités (1.66) :

$$S_Y^*(y) + 1 - q \geq S_Y(y) \geq S_Y^*(y) + S_Z^*(y) = S_W(y) \tag{1.68}$$

$$S_Z^*(z) + q \geq S_Z(z) \geq S_Y^*(z) + S_Z^*(z) = S_W(z) \tag{1.69}$$

Peterson montre que ces limites sont atteintes. Pourtant, il est possible d'obtenir des bornes fonctionnelles plus fines. Crowder [26] s'est intéressé aux fonctions suivantes :

$$\Delta_Y(y) = S_Y^*(y) + 1 - q - S_Y(y) \tag{1.70}$$

$$\Delta_Z(z) = S_Z^*(z) + q - S_Z(z) \tag{1.71}$$

D'après les équations (1.68) et (1.69), ces fonctions sont positives. Crowder [26] a de plus démontré que ces fonctions sont nécessairement croissantes. A partir de ces considérations, Bedford et Meilijson [7] ont donné une caractérisation de S_Y et S_Z lorsque les fonctions de sous-survies S_Y^* et S_Z^* sont connues. En particulier, si il existe une fonction de survie S_Z vérifiant (1.69), alors il existe une fonction de survie jointe pour (Y, Z) ayant S_Z comme distribution marginale si et seulement si la fonction Δ_Z est croissante et positive.

1.5 Les principaux modèles de risques concurrents classiques pour l'analyse des maintenances

1.5.1 Introduction

Pour un modèle de risques concurrents classique, l'objectif n'est pas de modéliser l'efficacité de la maintenance puisqu'elle est supposée AGAN. Il s'agit plutôt de définir la dépendance entre les deux types de maintenance. La politique de maintenance idéale consisterait à effectuer la maintenance préventive juste avant la défaillance, ce qui se produit quand $\forall\ k,\ Y_k = Z_k - \epsilon_k$, avec ϵ_k petit. Si les Y_k sont nettement plus petits que les Z_k, on n'observe pas de défaillance, mais on fait les MP trop tôt, donc à un coût trop élevé. A l'inverse, la pire politique serait celle où on n'observe que des défaillances, ce qui arrive pour $Y_k > Z_k, \forall k$. Par la suite, nous décrivons les modèles de risques concurrents les plus usuels dans le cadre de la maintenance, en exprimant la dépendance entre les variables Y et Z et en essayant de donner des informations sur la monotonie de ϕ lorsque cela est possible.

1.5.2 Modèle à risques indépendants (IUCR)

1.5.2.1 Définition et propriétés

C'est la situation la plus simple où l'on considère Y et Z indépendants :

$$S(y,z) = S_Y(y)S_Z(z) \tag{1.72}$$

Le modèle est alors complètement défini par les lois marginales de Y et Z. On appelera **risques concurrents classiques indépendants** (noté **IUCR** pour *Independent Usual Competing Risks*) les UCR pour lesquels les variables de risque sont indépendantes.

Les équations (1.54) et (1.55) permettent de montrer que les sous-hasards de ce modèle sont simplement les taux de hasard des variables de risque :

$$\lambda_c(w) = \lambda_Z(w) \tag{1.73}$$

$$\lambda_p(w) = \lambda_Y(w) \tag{1.74}$$

On obtient également les résultats suivants :

$$S_Z^*(z) = -\int_z^{+\infty} S_Y(u)\, dS_Z(u) \tag{1.75}$$

$$S_Y^*(y) = -\int_y^{+\infty} S_Z(u)\, dS_Y(u) \tag{1.76}$$

et :

$$S_Z(z) = \exp\left(-\int_0^z \lambda_c(u)\, du\right) = \exp\left(\int_0^z \frac{S_Z^{*\prime}(u)}{S_Y^*(u) + S_Z^*(u)}\, du\right) \tag{1.77}$$

$$S_Y(y) = \exp\left(-\int_0^y \lambda_p(u)\, du\right) \exp\left(\int_0^y \frac{S_Y^{*\prime}(u)}{S_Y^*(u) + S_Z^*(u)}\, du\right) \tag{1.78}$$

Ainsi, pour un modèle IUCR, on peut exprimer les survies des variables de risque à l'aide des sous-hasards ou des sous-survies. Par conséquent, on pourra estimer les lois

de Y et de Z, ce qui n'est pas possible pour un modèle UCR quelconque. Cela illustre l'identifiabilité du modèle lorsque les risques sont indépendants [18].

De par la simplicité de ces hypothèses et des calculs qui en découlent, les modèles IUCR sont les modèles les plus courants dans la littérature [27, 65]. Il n'y a pas de résultats généraux pour les fonctions CS^* et ϕ dans les modèles IUCR. Une monotonie éventuelle de ϕ dépend du choix des lois des variables de risques Y et Z. Par exemple, ϕ est constante si on considère les lois de Y et Z exponentielles.

1.5.2.2 Modèle de mélanges

Comme exemple de modèle IUCR, Bunea, Cooke et Lindqvist [13] supposent que la survie de Z est un mélange de deux lois exponentielles et que Y est de loi exponentielle. Les fonctions de survies de Y et Z ont l'expression suivante :

$$S_Y(t) = \exp(-\lambda_y t) \tag{1.79}$$

$$S_Z(t) = p\exp(-\lambda_{c1}t) + (1-p)\exp(-\lambda_{c2}t) \tag{1.80}$$

avec $p \in [0,1], \lambda_y, \lambda_{c1}, \lambda_{c2} > 0$.

Il est alors très simple d'en déduire les fonctions de sous-survie et des quantités élémentaires comme le MTTF. Une propriété intéréssante de ce modèle de mélange est que la fonction ϕ est croissante. Ce modèle a été développé afin d'exploiter des données issues d'une usine Norsk-Hydro pour lesquelles une estimation non paramétrique de ϕ donnait une fonction croissante. Ces données seront étudiées dans la section 1.6.3.2.

1.5.2.3 L'hypothèse de Makeham

Les équations (1.73) et (1.74) pour lesquelles les fonctions de sous-hasards sont simplement égales aux taux de hasard des variables de risque sont appelées hypothèse de Makeham [58, 40].

Comme on l'a montré, ces hypothèses sont vérifiées lorsque les risques sont indépendants. Pourtant, il est possible [70] de définir des risques dépendants pour lesquels ces égalités sont vérifiées.

1.5.2.4 Le modèle de Ebrahimi-Molefe

Ce modèle [38] suppose qu'il existe deux fonctions g et u croissantes telles que :

$$\forall y \geq 0\ ,\ \forall z > 0\ ,\ P(Y > y | Z > z) = \exp(-g(y)u(z)) \tag{1.81}$$

avec les conditions $g(0) = 0, u(0) = 1$.

Les auteurs ne fournissent pas de réelles justifications pour ce modèle mais montrent que sous certaines hypothèses supplémentaires, ce modèle est identifiable. On montre aisément que les fonctions de sous-hasard ont alors l'expression suivante :

$$\forall\, t\ \geq 0\ \ \lambda_c(t) = \lambda_Z(t) + u'(t)g(t) \tag{1.82}$$

$$\forall\, t\ \geq 0\ \ \lambda_p(t) = \lambda_Y(t)u(t) \tag{1.83}$$

L'hypothèse de Makeham correspond à $u \equiv 1$, c'est-à-dire au cas où Y et Z sont indépendants (1.81). La monotonie éventuelle de ϕ dépendra du choix de la loi de Z et des fonctions g et u.

L'hypothèse d'indépendance semble raisonnable si les risques concurrents sont différents modes de défaillance ou une défaillance et une censure. Mais cette hypothèse n'est pas réaliste pour les risques de MP et MC, car les deux types de maintenances sont liés au processus de dégradation.

1.5.3 L'hypothèse de signe aléatoire (RS)

1.5.3.1 Définition et propriétés

Proposée par Cooke [18], une hypothèse de dépendance très couramment employée mais qui ne définit pas à elle seule un modèle est l'hypothèse de **signe aléatoire** (*Random sign assumption* ou *Age-Dependent censoring*). Elle suppose que le signe de $Y - Z$ est indépendant de Z, ou de manière équivalente que U et Z sont indépendants. Cela signifie que le type de la maintenance ne dépend pas de l'instant potentiel de panne. Une des principales caractéristiques de l'hypothèse de signe aléatoire est que la fonction ϕ est maximale à l'origine [18] :

$$\sup_t \phi(t) = \phi(0) = S_Y^*(0) = P(U = 1). \tag{1.84}$$

D'autre part, on peut comparer les fonctions de sous-survie conditionnelles :

$$\forall w > 0,\ CS_Z^*(w) \geq CS_Y^*(w) \tag{1.85}$$

Des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour définir un modèle complet de risques concurrents. Une autre caractéristique importante du modèle de signe aléatoire est que la loi de Z est identifiable. En effet, on peut calculer la survie de Z à partir de fonctions estimables :

$$\forall z > 0,\ \ S_Z(z) = \frac{S_Z^*(z)}{P(U = 1)}$$

Cette propriété découle directement de l'hypothèse d'indépendance entre Z et U.

1.5.3.2 Modèle Repair Alert (RA)

Proposé par Langseth et al. [57], les hypothèses du modèle *Repair Alert* (RA) sont les suivantes :

- Le modèle suppose l'hypothèse de signe aléatoire.
- Il existe une fonction G croissante avec $G(0) = 0$ telle que

$$P(Y \leq y | Z = z, Y < Z) = \frac{G(y)}{G(z)} \tag{1.86}$$

- La probabilité que la MP ait lieu avant la MC est un paramètre du modèle :

$$q = P(Y < Z) = P(U = 1) \tag{1.87}$$

Langseth et Lindqvist [54] ont choisi pour fonction G le taux de hasard cumulé de Z Λ_Z. Ce modèle particulier s'appele IPRA pour *Intensity Proportional Repair Alert*. On peut s'intéresser aux fonctions usuelles pour le modèle IPRA. Les fonctions de sous-survie et de survie ont l'expression suivante [54] :

$$S_Z^*(z) = (1-q)e^{-\Lambda_Z(z)} \tag{1.88}$$

$$S_Y^*(y) = q(e^{-\Lambda_Z(y)} - \Lambda_Z(y)Ie(\Lambda_Z(y))) \tag{1.89}$$

$$S_W(w) = e^{-\Lambda_Z(w)} - q\Lambda_Z(w)Ie(\Lambda_Z(w)) \tag{1.90}$$

où la fonction Ie est l'intégrale exponentielle définie par :

$$Ie(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv \tag{1.91}$$

Les sous-hasards sont :

$$\lambda_c(t) = \frac{(1-q)\lambda_Z(t)e^{-\Lambda_Z(t)}}{e^{-\Lambda_Z(t)} - q\Lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t))} \tag{1.92}$$

$$\lambda_p(t) = \frac{q\lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t))}{e^{-\Lambda_Z(t)} - q\Lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t))} \tag{1.93}$$

La fonction ϕ vaut :

$$\phi(w) = \frac{q(e^{-\Lambda_Z(w)} - \Lambda_Z(w)Ie(\Lambda_Z(w)))}{e^{-\Lambda_Z(w)} - q\Lambda_Z(w)Ie(\Lambda_Z(w))} \tag{1.94}$$

On montre que la fonction ϕ est décroissante.

Revenons un peu plus en détail sur l'hypothèse (1.86) du modèle Repair Alert. Sachant qu'une défaillance aurait lieu à l'instant $Z = z$, et sachant qu'on effectuera une MP avant cette défaillance, la densité conditionnelle de Y est proportionnelle à la fonction $g = G'$, appelée fonction repair alert [57]. De plus, si G est convexe, une MP aura tendance à être effectuée juste avant une panne.

Le fait d'anticiper une défaillance juste avant son occurrence présente plusieurs avantages. On peut éviter de nombreuses complications dues aux pannes. De plus, anticiper trop tôt une défaillance en effectuant une MP peut engendrer des coûts de maintenance très élevés. La figure 1.8 illustre la propriété précédente : si on suppose une hypothèse uniforme ($G = id$), la durée d'attente de la prochaine MP serait une valeur quelconque sur l'intervalle $[0, Z]$. En revanche, l'hypothèse (1.86) revient à prendre une valeur quelconque sur $[0, G(Z)]$ et à inverser cette valeur pour obtenir la durée d'attente Y de la prochaine MP. La convexité de G, qui est souvent vérifiée si G est un taux de hasard cumulé, conduit à une valeur de Y proche de Z ce qui traduit une"bonne" anticipation des défaillances. La fonction G reflète ainsi la réactivité de l'équipe de maintenance.

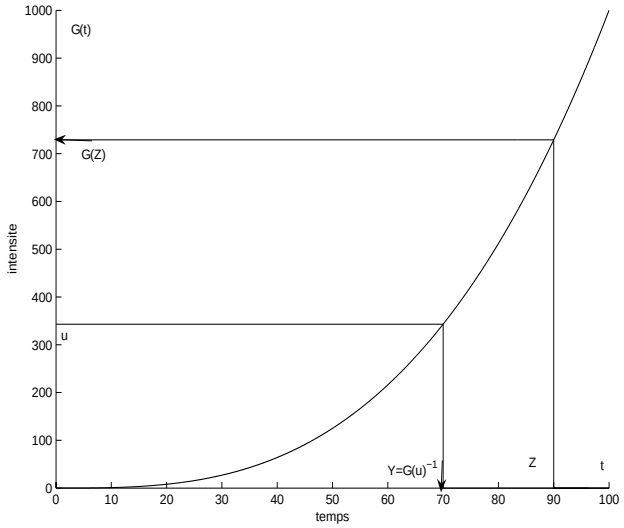


FIG. 1.8 – Illustration de l'hypothèse 1.86 du modèle Repair Alert

1.5.3.3 Modèle de censure hautement corrélé

Ce modèle proposé par Bunea et Bedford sous le nom de *Highly Correlated Censoring model* [12] est tel que :

- Le modèle suppose l'hypothèse de signe aléatoire.
- $Y = (1 - p\delta)Z$, où δ est une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-1, +1\}$, indépendante de Z, et $p \in [0, 1]$.
- La probabilité que la MP ait lieu avant la MC est $q = P(Y < Z) = P(\delta = +1)$.

En tant que modèle utilisant l'hypothèse de signe aléatoire, la fonction ϕ est maximale à l'origine. Une condition suffisante sur le taux de hasard λ_Z pour que cette fonction soit décroissante est la suivante :

$$\forall\, r \geq 1, \forall\, z \geq 0, \quad \frac{\lambda_Z(rz)}{\lambda_Z(z)} > \frac{1}{r} \tag{1.95}$$

Cette relation est vérifiée pour les taux de hasard les plus courants comme les taux de hasard des lois exponentielles et de Weibull.

1.5.4 Modèle à hasards proportionnels

On suppose cette fois-ci que le type U et l'instant W de maintenance sont indépendants [26]. Mathématiquement, cela se traduit par des fonctions de sous-hasard proportionnelles d'où son nom de *Proportional hazards model*.

$$\forall\, t \geq 0, \quad \lambda_p(t) = \frac{q}{1-q}\lambda_c(t) \tag{1.96}$$

q est la probabilité d'effectuer une maintenance préventive : $q = P(U = 1)$. Comme U et W sont indépendants, la fonction ϕ est constante pour ce modèle.

Enfin, il est à noter que ce modèle n'est pas lié au modèle du même nom présenté par Cox faisant intervenir des variables explicatives.

1.5.5 Modèle doublement indépendant

Ce modèle, proposé par Koziol et Green [53], est un cas particulier du modèle à risques indépendants et du modèle à hasards proportionnels. On suppose à la fois que Y et Z sont indépendants et que W et U sont indépendants. Pour des systèmes réparables, cette double hypothèse est peu réaliste mais permet d'aboutir à des calculs et des estimations très simples. Mathématiquement, le modèle doublement indépendant donne des conditions sur les taux de hasard de Y et Z :

$$\exists\, \theta \ \geq 0, \ \ \forall\, t \ \geq 0, \ \ \lambda_Y(t) = \theta \lambda_Z(t) \tag{1.97}$$

Il suffit ainsi de spécifier la loi de Z pour que le modèle soit entièrement défini. Par exemple, cela revient à choisir deux lois exponentielles indépendantes pour Y et Z ou deux lois de Weibull indépendantes avec un même paramètre de forme. En tant que modèle à hasards proportionnels, la fonction ϕ est constante pour ce modèle.

De manière un peu plus générale, Crowder [26] a démontré que sous l'hypothèse de Makeham, le modèle à hasards proportionnels est obtenu si et seulement si les intensités λ_Y et λ_Z sont proportionnelles ou de manière équivalente :

$$\exists\, \theta \ \geq 0, \quad \forall\, t \ \geq 0, \ \ S_Y(t) = S_Z(t)^\theta$$

1.5.6 Modèle Delay-Time (DT)

Le modèle Delay-Time (DT) [45, 17] est défini par :

$$\begin{array}{rcl} Y & = & A + B \\ Z & = & A + C \end{array} \tag{1.98}$$

où A, B et C sont mutuellement indépendantes.

Y et Z sont donc dépendantes par l'intermédiaire de A et indépendantes conditionnellement à A. A peut être assimilé à un signal d'alerte délivré par le système lorsqu'il est jugé trop dégradé. Après ce signal, il reste une durée B avant d'effectuer une MP et une durée C avant que le système ne tombe en panne.

Dans le cas où A, B et C sont de lois exponentielles, Hokstadt et Jensen [45] ont prouvé que les fonctions de sous-survie étaient identiques et de forme exponentielle. D'autre part, la fonction ϕ est constante. Le modèle DT exponentiel est donc un modèle à hasards proportionnels.

Le modèle DT est semblable au modèle PM-CD [24] (*Preventive Maintenance Coolen Dekker*) présenté par Coolen et Dekker où les auteurs tentent d'évaluer et d'optimiser les politiques d'inspections du système. Par ailleurs, un modèle similaire est utilisé en médecine par Jackson et al. [47].

1.5.7 Modèles avec inspections

Ces modèles proposés par Cooke [19] ne rentrent pas exactement dans le cadre des risques concurrents classiques puisqu'ils supposent que le système est aussi soumis à des inspections. Toutefois, il est possible de les définir comme des modèles UCR au sens où on s'intéresse à la loi jointe de (Y, Z).

1.5.7.1 Modèle à Alerte Proportionnelle et Inspection Périodique (PWCI)

Ce modèle proposé par Cooke [19] sous le nom de *Proportional Warning Constant Inspection* a les hypothèses suivantes :

- Le système est inspecté à des intervalles réguliers de durée I à partir de sa mise en service.
- Avant une défaillance, le système émet un signal d'alerte à une date proportionnelle à l'instant potentiel de panne, $\frac{Z}{\delta}$, $\delta > 1$.
- Si le signal d'alerte est observé durant une inspection, une maintenance préventive est automatiquement effectuée. Ainsi, on peut définir l'instant potentiel de la MP Y comme l'instant de la prochaine inspection après le signal d'alerte :

$$Y = ([\frac{Z}{\delta I}] + 1)I \tag{1.99}$$

  où [ ] est la fonction partie entière.
- Le modèle est alors entièrement spécifié par le taux de hasard de Z.

Pour ce modèle, on peut montrer que la fonction ϕ est croissante. Cela parait logique car plus l'instant de panne intervient tardivement, plus la durée entre le signal d'alerte et la panne, à savoir $Z(1-\frac{1}{\delta})$, va être importante et plus la probabilité d'avoir une inspection suivie d'une MP durant cet intervalle va être importante. On peut remarquer que pour des valeurs de Z suffisamment grandes, on va nécessairement effectuer une MP. Cela se traduit par une fonction ϕ valant 1 au delà d'une certaine date ($\frac{I\delta}{\delta-1}$).

1.5.7.2 Modèle à Alerte Aléatoire et Inspection Périodique (RWCI)

Pour ce modèle (*Random Warning Constant Inspection*, [19]), on suppose que le système émet une alerte avant la panne et que la durée de l'alerte est indépendante de l'instant de défaillance. Ce signal d'alerte est tronqué à 0 dans les cas limites. Si on note D la durée d'alerte et A le moment où l'alerte est déclenchée, on obtient : $A = max(0, Z-D)$. D'autre part le système est inspecté périodiquement à intervalles de temps I à partir de sa mise en service. Si lors de cette inspection, on observe l'alerte, on effectue une MP. Y est donc défini par :

$$Y = ([\frac{A}{I}] + 1)I = ([\frac{\max(0, Z-D)}{I}] + 1)I \tag{1.100}$$

Le modèle est alors entièrement spécifié par le taux de hasard de Z. Pour ce modèle, la fonction ϕ n'est pas monotone. Cooke [19] a en revanche montré que cette fonction est constante aux instants d'inspections.

Le modèle *Constant Warning Constant Inspection* [19] est un cas particulier du modèle précédent RWCI, pour lequel l'alerte est donnée à une durée constante avant la potentielle défaillance : $D = d$. Il est nécessaire que ce délai soit inférieur à la durée entre deux inspections car autrement toute défaillance serait évitée et la loi de Z ne pourrait être identifiée.

1.5.8 Modèles construits à partir de copules

Les copules sont un moyen simple de caractériser une distribution multidimensionnelle. Dans le cadre des risques concurrents, une copule permet de définir la fonction de survie

jointe $S(y,z)$ ou de manière équivalente la fonction de répartition jointe correspondante que l'on note $H(y,z) = P(Y \leq y, Z \leq z)$. On peut citer les articles de Zhang et Klein [75], et Kaishev et al. [50] qui utilisent les fonctions copules dans le cadre des risques concurrents. Dans le domaine de la fiabilité, on peut citer les articles de Bedford [3], Bunea et Bedford [12] et Bassan et al. [4].

Une fonction copule C est définie de manière suivante. La copule des variables Y et Z est la fonction de répartition sur le carré unité $[0,1]^2$ du couple $(F_Y(Y), F_Z(Z))$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rccl} C: & [0,1]^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & C(u,v) = H(F_Y^{-1}(u), F_Z^{-1}(v)) \end{array} \tag{1.101}$$

La copule pour des risques indépendants est :

$$C(u,v) = uv \tag{1.102}$$

Couramment utilisée, la classe des copules archimédiennes vérifie :

$$C(u,v) = g^{-1}(g(u) + g(v)) \tag{1.103}$$

où g est une fonction continue, convexe appelée fonction génératrice telle que $g(0) = \infty$ et $g(1) = 0$.

Les copules expriment une dépendance spécifique entre les variables de risque. Pourtant, la donnée d'une copule ne suffit pas à déterminer leurs lois. Malgré tout, Zhang et Klein [75] ont prouvé que sous des hypothèses de régularité, la donnée des fonctions de sous-survie et d'une fonction copule déterminent entièrement les lois marginales de Y et de Z. En d'autres termes, cela signifie que le modèle est identifiable.

Des fonctions utiles dans ce domaine, appelées "mesures d'association", sont les fonctions ρ de Spearman et τ de Kendall facilement estimables à partir de données et qui sont des indicateurs de dépendance au même titre que la fonction ϕ. En fiabilité, Bunea et Bedford [12] ont utilisé ces mesures d'association comme point de départ pour le choix d'une fonction copule. A partir d'estimations de ρ et τ, les auteurs ont choisi des fonctions copules pour lesquelles les paramètres du modèle s'expriment facilement en fonction de ces mesures.

1.5.9 Les modèles de fragilité

Les modèles de fragilité (*frailty models* [67], [1]) utilisent une variable externe ξ. En biologie, cette variable caractérise la susceptiblité d'un individu au sein d'une population à mourir, d'où son nom de "fragilité". Dans notre problématique de risques de MP et de MC, cela peut caractériser la vigilance de l'équipe de maintenance. Le principe des modèles de fragilité est le suivant. Sachant la variable externe ξ, les risques Y et Z sont indépendants. On obtient alors l'égalité suivante :

$$S(y,z;\xi) = S_Y(y;\xi)S_Z(z;\xi) \tag{1.104}$$

Il en découle des calculs de fonctions usuelles relativement simples. Peu d'études de ces modèles ont été faites dans le cadre de la fiabilité des systèmes. On peut néanmoins citer les travaux de Finkelstein et Esaulova [39] et de Yashin [74]. Pour utiliser ces modèles afin de caractériser le processus des MP et des MC, il est nécessaire de rajouter des hypothèses sur ξ.

1.5.10 Autres modèles

Il existe bien d'autres modèles de risques concurrents classiques. D'une part, il est possible de généraliser les modèles PWCI, RWCI et CWCI lorsque les inspections sont aléatoires. Par exemple, on peut supposer que les inspections suivent un processus de Poisson de paramètre $\frac{1}{I}$ et étudier les trois précédents modèles. Cooke et Bedford [22] ont étudié le cas du modèle PWRI pour *Proportional Warning Random Inspection* lorsque les inspections sont poissonniennes et l'alerte proportionnelle à l'instant potentiel de défaillance.

D'autre part, comme pour les modèles de fragilité, il est possible de proposer des modèles d'hétérogénéité en incluant des covariables qui expliquent les comportements d'individus au sein de la population à risque. Peu de ces modèles ont été adaptés en fiabilité et plus spécifiquement pour expliquer la dépendance entre MP et MC.

1.6 Approche statistique pour les modèles de risques concurrents classiques

1.6.1 Introduction

On étudie un système réparable qui est soumis à une séquence de maintenances préventives ou correctives. Cela consiste à observer une suite de durées inter-maintenance et leur type de maintenance associé, à savoir une séquence $(W_i, U_i)_{\{i\geq 1\}}$. Dans le cadre des risques concurrents classiques, on suppose que les $(W_i, U_i)_{\{i\geq 1\}}$ sont iid. Par la suite, nous proposons une approche paramétrique consistant à estimer les paramètres d'un modèle à partir des observations avant de présenter une étude non paramétrique, utile à la sélection de modèle.

1.6.2 Estimation paramétrique

Dans une approche paramétrique, on peut s'intéresser à calculer la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances $(W_i, U_i)_{\{1\leq i\leq k\}}$ iid. Si on note θ le vecteur des paramètres d'un modèle, on peut calculer la fonction de vraisemblance de la manière suivante :

$$L(\theta; w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\Delta w} P(w_i < W \leq w_i + \Delta w, U = u_i) \tag{1.105}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\Delta w} [P(W > w_i, U = u_i) - P(W > w_i + \Delta w, U = u_i)] \tag{1.106}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} P(W > w, U = u) &= \begin{cases} S_Y^*(w) & \text{si} \quad u = 1 \\ S_Z^*(w) & \text{si} \quad u = 0 \end{cases} \\ &= [S_Y^*(w)]^u \, [S_Z^*(w)]^{1-u} \end{aligned} \tag{1.107}$$

On en déduit plusieurs écritures possibles de la fonction de vraisemblance :

$$L(\theta; w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \left[-S_Y^{*\prime}(w_i)\right]^{u_i} \left[-S_Z^{*\prime}(w_i)\right]^{1-u_i} \tag{1.108}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left[-\frac{\partial}{\partial y} S(y,z)\right]_{(w_i,w_i)}^{u_i} \left[-\frac{\partial}{\partial z} S(y,z)\right]_{(w_i,w_i)}^{1-u_i} \tag{1.109}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} [\lambda_p(w_i)]^{u_i} \, [\lambda_c(w_i)]^{1-u_i} \, S_W(w_i) \tag{1.110}$$

1.6.3 Estimation non paramétrique

1.6.3.1 Les estimateurs

A partir de l'observation de k couples $(W_i, U_i)_{\{i \in [1,k]\}}$ supposés indépendants et de même loi, les estimateurs non paramétriques des fonctions de sous-survies, de sous-survies conditionnelles et de ϕ sont donnés par :

$$\widehat{S_Z^*}(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (1 - U_i) \mathbb{1}_{\{W_i > z\}}}{k}, \qquad \widehat{S_Y^*}(y) = \frac{\sum_{i=1}^{k} U_i \mathbb{1}_{\{W_i > y\}}}{k} \tag{1.111}$$

$$\widehat{CS_Z^*}(z) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (1 - U_i) \mathbb{1}_{\{W_i > z\}}}{k - \sum_{i=1}^{k} U_i}, \qquad \widehat{CS_Y^*}(y) = \frac{\sum_{i=1}^{k} U_i \mathbb{1}_{\{W_i > y\}}}{\sum_{i=1}^{k} U_i} \tag{1.112}$$

$$\widehat{\phi}(w) = \frac{\sum_{i=1}^{k} U_i \mathbb{1}_{\{W_i > w\}}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\{W_i > w\}}} \tag{1.113}$$

On construit ces estimateurs en remplaçant les probabilités qui définissent les fonctions S_Z^* (1.46), S_Y^* (1.47), CS_Z^* (1.62), CS_Y^* (1.63) et ϕ (1.64) par leur équivalent empirique. Par exemple, cela revient à remplacer $P(U = 1, W > w)$ par la proportion des maintenances qui sont préventives et pour lesquelles la durée écoulée depuis la maintenance précédente est supérieure à w.

Finalement, en comparant la forme des fonctions estimées et celles des fonctions théoriques pour plusieurs modèles, on peut déterminer quel modèle est le plus adapté pour des données. C'est ce qui a été fait par exemple dans [13]. On peut s'intéresser à quelques cas particuliers :

- Si $\widehat{CS_Z^*} > \widehat{CS_Y^*}$ et $\widehat{\phi}$ maximum à l'origine, on peut privilégier un modèle de signe aléatoire défini dans la section 1.5.3. Si de plus, $\widehat{\phi}$ est décroissante, on peut choisir le modèle IPRA, défini dans la section 1.5.3.2.
- Si $\widehat{CS_Z^*}$ est proche de $\widehat{CS_Y^*}$ et $\widehat{\phi}$ pratiquement constante, on peut opter pour un modèle à hasards proportionnels défini dans la section 1.5.4 et en particulier le modèle DT exponentiel défini dans la section 1.5.6.
- Si $\widehat{CS_Y^*} > \widehat{CS_Z^*}$ et $\widehat{\phi}$ croissante, le seul modèle présenté qui puisse être choisi est le modèle de mélange défini dans la section 1.5.2.2, qui suppose les risques indépendants.

1.6.3.2 Etude d'un jeu de données

Nous reprenons un des jeux de données étudiés dans [13]. Ce jeu de données provient de données de maintenances pour deux compresseurs identiques provenant d'une usine Norsk-Hydro productrice d'ammoniac.

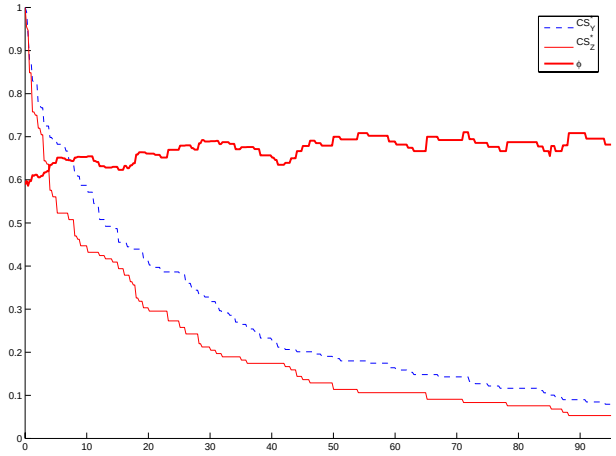


FIG. 1.9 – Exemple de données réelles vérifiant $\widehat{CS_Y^*} > \widehat{CS_Z^*}$

Ce système est observé sur une durée de 21 ans entre 1968 et 1989. Au cours de cette période, 321 maintenances ont eu lieu. Les deux causes de maintenances ne sont pas exactement des MP et des MC mais des maintenances dues à des défaillances électriques ou mécaniques. Les défaillances électriques (132 occurrences) doivent à tout prix être évitées pour des raisons de coût de maintenance très élevé en comparaison des réparations peu coûteuses dues à des défaillances mécaniques. Il est logique de supposer une dépendance entre ces deux types de défaillances comme il est logique de proposer une analogie entre les défaillances mécaniques et les MC d'une part et entre les défaillances électriques et les MP d'autre part.

Les estimations graphiques sont proposées sur la figure 1.9. Pour ces données, il semble judicieux de choisir un modèle pour lequel la fonction ϕ est croissante et $CS_Y^* > CS_Z^*$. Pour le moment, aucun modèle avec risques concurrents dépendants ne permet modéliser cette situation. Le seul modèle qui convienne est le modèle IUCR de mélange présenté dans la section 1.5.2.2.

1.6.3.3 Propriétés de l'estimateur de ϕ

On souhaite tout d'abord estimer la qualité de l'estimateur $\widehat{\phi}(w)$. Cette fonction définie par l'équation (1.113) doit être adaptée afin d'éviter toute forme indéterminée. En effet, si toutes les maintenances ont lieu avant w, numérateur et dénominateur valent 0. Il paraît logique de ne pas pouvoir estimer la fonction ϕ au delà de $\max_{i=1..k} w_i$. Nous proposons finalement l'estimateur suivant pour ϕ, noté $\widehat{\phi_k}$:

$$\widehat{\phi_k}(w) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{k} U_i \mathbb{1}_{\{W_i > w\}}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\{W_i > w\}}} & \text{si } \max_{i=1..k} W_i > w \\ \gamma(W_1, \ldots, U_k) \in [0,1] & \text{si } \max_{i=1..k} W_i \leq w \end{cases} \tag{1.114}$$

où $\gamma(W_1, \ldots, U_k)$ est une fonction déterministe du passé du processus.

S'intéresser à la qualité de l'estimateur revient par exemple à calculer le biais et la variance de cet estimateur. Pour le biais $\mathcal{B}$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.2 *Le biais $\mathcal{B}[\widehat{\phi_k}(w)]$ de l'estimateur $\widehat{\phi_k}(w)$ vaut :*

$$\mathcal{B}[\widehat{\phi_k}(w)] = E[\widehat{\phi_k}(w)] - \phi(w) = (E[\gamma(W_1, \ldots, U_k) | \max_{i=1..k} W_i \leq w] - \phi(w))(1 - S_W(w))^k \tag{1.115}$$

Comme $\gamma(W_1, \ldots, U_k)$ est borné, cet estimateur est asymptotiquement sans biais. On note $B_i = \mathbb{1}_{\{W_i > w\}}$ et $V_k = \sum_{i=1}^{k} B_i$.

Démonstration : Comme on observe des variables iid, les B_i sont de lois de Bernoulli de paramètre $p = S_W(w)$ indépendantes. De même, les U_i sont de lois de Bernoulli de paramètre $q = S_Y^*(0)$ indépendantes. V_k est de loi binomiale de paramètre k et p. On va calculer $E[\widehat{\phi_k}(w)]$ en conditionnant par rapport à V_k :

$$\begin{aligned} E[\widehat{\phi_k}(w)] &= \sum_{i=0}^{k} E[\widehat{\phi_k}(w) | V_k = i] P(V_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} [E[\frac{\sum_{j=1}^{k} U_j B_j}{V_k} | V_k = i]] P(V_k = i) + E[\gamma(W_1, \ldots, U_k) | V_k = 0] P(V_k = 0) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} E[U_k B_k | V_k = i] P(V_k = i) + E[\gamma(W_1, \ldots, U_k) | V_k = 0](1 - S_W(w))^k \end{aligned} \tag{1.116}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} E[U_k B_k | V_k = i] P(V_k = i) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} P(U_k = 1, B_k = 1 | V_k = i) P(V_k = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} P(U_k = 1, B_k = 1, V_k = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} P(U_k = 1, B_k = 1) P(V_{k-1} = i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} P(W > w, U = 1) P(V_{k-1} = i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} S_Y^*(w) P(V_{k-1} = i-1) \qquad (1.117) \\
&= S_Y^*(w) \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i} C_{k-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{k-i} \\
&= \frac{S_Y^*(w)}{p} \sum_{i=1}^{k} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \\
&= \frac{S_Y^*(w)}{p} (1 - (1-p)^k) \\
&= \frac{S_Y^*(w)}{S_W(w)} [1 - (1 - S_W(w))^k] \qquad (1.118) \\
&= \phi(w)[1 - (1 - S_W(w))^k]
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$E[\widehat{\phi_k}(w)] = \phi(w)[1 - (1 - S_W(w))^k] + E[\gamma(W_1, \ldots, U_k) | V_k = 0](1 - S_W(w))^k \qquad (1.119)$$

D'où le résultat.

Cet estimateur est sans biais lorsque $E[\gamma(W_1, \ldots, U_k) | \max_{i=1..k} W_i \leq w] = \phi(w)$. Il parait alors malheureusement difficile d'avoir un estimateur sans biais de ϕ en w. Toutefois, on peut proposer plusieurs choix pour $\gamma(w_1, \ldots, u_k)$:

- $\gamma(W_1, \ldots, U_k)$=0. Cela signifie qu'au-delà de $\max\limits_{i=1..k} W_i$, on considère que toutes les maintenances sont correctives. Le biais est alors le suivant :

  $$\mathcal{B}[\widehat{\phi_k}(w)] = -\phi(w)(1 - S_W(w))^k$$

  On obtient un biais négatif. C'est en effet logique de sous-estimer $\phi(w)$ si on fixe son estimateur à 0 à partir d'un seuil.

- $\gamma(W_1, \ldots, U_k)$=1. A l'inverse, cela signifie qu'au-delà de $\max\limits_{i=1..k} W_i$, on considère que toutes les maintenances sont préventives. Le biais est alors le suivant :

  $$\mathcal{B}[\widehat{\phi_k}(w)] = (1 - \phi(w))(1 - S_W(w))^k$$

Tout naturellement, on obtient cette fois-ci une sur-estimation de $\phi(w)$.

– $\gamma(W_1, \ldots, U_k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} U_i}{k}$. Cela revient à estimer $\phi(w)$ par la proportion de MP. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E[\gamma(W_1, \ldots, U_k) | \max_{i=1..k} W_i \leq w] &= E[\frac{\sum_{i=1}^{k} U_i}{k} | \max_{i=1..k} W_i \leq w] \\
&= E[U_k | \max_{i=1..k} W_i \leq w] \\
&= P(U_k = 1 | \max_{i=1..k} W_i \leq w) \\
&= P(U_k = 1 | W_k \leq w) \\
&= \frac{P(U = 1; W \leq w)}{1 - S_W(w)} \\
&= \frac{P(U = 1) - P(U = 1; W > w)}{1 - S_W(w)} \\
&= \frac{\phi(0) - \phi(w) S_W(w)}{1 - S_W(w)}
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Finalement, en remplaçant cette expression dans (1.115), on aboutit à :

$$\mathcal{B}[\widehat{\phi_k}(w)] = (\phi(0) - \phi(w))(1 - S_W(w))^{k-1} \tag{1.121}$$

Si la fonction ϕ a de faibles variations, cette estimation semble plus performante que les deux précédentes. En revanche, si ϕ varie de manière importante, on ne peut pas faire de comparaison.

– $\gamma(W_1, \ldots, U_k) = U^*$, où U^* est le type de maintenance associé à la plus grande valeur de W_i. Il parait vraisemblable que pour ce choix de $\gamma(W_1, \ldots, U_k)$, l'estimation de $\phi(w)$ sera meilleure que les précédentes, et d'autant meilleure si ϕ est monotone.

D'autre part, on peut remarquer que sous la condition que $V_k > 0$, l'estimateur de $\phi(w)$ est sans biais :

Théorème 1.3 *:* $E[\widehat{\phi_k}(w) | V_k > 0] = \phi(w)$

Démonstration : Pour prouver cette égalité, on effectue un conditionnement par rapport à V_k :

$$\begin{aligned}
E[\widehat{\phi_k}(w) | V_k > 0] &= \sum_{i=0}^{k} E[\widehat{\phi_k}(w) | V_k = i; V_k > 0] P(V_k = i | V_k > 0) \\
&= \sum_{i=1}^{k} E[\widehat{\phi_k}(w) | V_k = i; V_k > 0] P(V_k = i | V_k > 0) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} E[\widehat{\phi_k}(w) | V_k = i] P(V_k = i)}{P(V_k > 0)}
\end{aligned} \tag{1.122}$$

Or le numérateur a été obtenu dans l'équation (1.117) lors du calcul du biais de $\widehat{\phi_k}(w)$. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} E[\widehat{\phi_k}(w)|V_k > 0] &= \frac{\phi(w)[1-(1-S_W(w))^k]}{P(V_k > 0)} \\ &= \frac{\phi(w)[1-(1-S_W(w))^k]}{1-P(V_k = 0)} \\ &= \phi(w) \ \square \end{aligned} \tag{1.123}$$

Enfin, on montre que cet estimateur est convergent :

Théorème 1.4 *: $\widehat{\phi_k}(w)$ est un estimateur convergent en moyenne quadratique de $\phi(w)$, indépendant de γ.*

Démonstration : Pour prouver la convergence de notre estimateur, il faut montrer que l'erreur quadratique moyenne tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini :

$$\lim_{k\to\infty} E[(\widehat{\phi_k}(w) - \phi(w))^2] = 0 \tag{1.124}$$

Comme l'erreur quadratique moyenne se décompose en deux termes : variance de l'estimateur et carré de son biais, il suffit de montrer que ces deux termes tendent vers 0. Comme l'estimateur est asymptotiquement sans biais, le carré du biais tend nécessairement vers 0. Il faut donc montrer que la variance de l'estimateur converge vers 0, ou de manière equivalente pour un estimateur asymptotiquement sans biais que $E[(\widehat{\phi_k}(w))^2]$ tend vers $\phi(w)^2$. Pour cela, on effectue le même conditionnement en fonction de V_k :

$$\begin{aligned} E[\widehat{\phi_k^2}(w)] &= \sum_{i=0}^{k} E[\widehat{\phi^2}(w)|V_k = i]P(V_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} E[\frac{[\sum_{j=1}^{k} U_j B_j]^2}{i^2}|V_k = i]P(V_k = i) + E[\gamma^2(W_1,\ldots,U_k)|V_k = 0]P(V_k = 0) \\ &= E[\gamma^2(W_1,\ldots,U_k)|V_k = 0](1-S_W(w))^k + \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i^2} E[U_k B_k|V_k = i]P(V_k = i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} E[U_k B_k U_{k-1} B_{k-1}|V_k = i]P(V_k = i) \end{aligned} \tag{1.125}$$

Cette somme se décompose en trois termes :

- $E[\gamma^2(W_1,\ldots,U_k)|V_k = 0](1-S_W(w))^k$ converge vers 0 puisque la fonction γ est bornée.
- Un calcul similaire à celui de $\sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i^2} E[U_k B_k|V_k = i]P(V_k = i)$ a déjà été fait dans la démonstration de l'espérance. En reprenant les équations (1.117), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i^2} E[U_k B_k | V_k = i] P(V_k = i) = \frac{S_Y^*(w)}{p} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \tag{1.126}$$

Le lemme suivant montre que cette quantité converge vers 0.

Lemme 1 : $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} = 0$

$$\begin{array}{rcl} \text{En effet, } |\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} C_k^i p^i (1-p)^{k-i}| & = & \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i} C_{k+1}^{i+1} p^i (1-p)^{k-i} \\ & \leq & \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} 2 C_{k+1}^{i+1} p^i (1-p)^{k-i} \\ & = & \frac{2}{k+1} \sum_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^{i} p^{i-1} (1-p)^{k+1-i} \\ & = & \frac{2}{p(k+1)} \sum_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^{i} p^{i} (1-p)^{k+1-i} \\ & \leq & \frac{2}{p(k+1)} \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i} p^{i} (1-p)^{k+1-i} \\ & \leq & \frac{2}{p(k+1)} \\ & \xrightarrow{k\to\infty} & 0 \end{array} \tag{1.127}$$

– Pour le troisième terme, on effectue des calculs similaires à la démonstration sur l'espérance de l'estimateur :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} E[U_k B_k U_{k-1} B_{k-1} | V_k = i] P(V_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} P(U_k = 1; B_k = 1; U_{k-1} = 1; B_{k-1} = 1 | V_k = i) P(V_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} P(U_k = 1; B_k = 1; U_{k-1} = 1; B_{k-1} = 1; V_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} P(U_k = 1; B_k = 1) P(U_{k-1} = 1; B_{k-1} = 1) P(V_{k-2} = i-2) \\ &= \sum_{i=2}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} [S_Y^*(w)]^2 C_{k-2}^{i-2} p^{i-2} (1-p)^{k-i} \\ &= \frac{[S_Y^*(w)]^2}{p^2} \sum_{i=2}^{k} \frac{k(k-1)}{i^2} C_{k-2}^{i-2} p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \phi^2(w) \sum_{i=2}^{k} \frac{k(k-1)(k-2)!}{i^2 (i-2)! (k-i)!} p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \phi^2(w) \sum_{i=2}^{k} \frac{i-1}{i} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \phi^2(w) \sum_{i=2}^{k} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} - \phi^2(w) \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \phi^2(w)(1 - (1-p)^k - kp(1-p)^{k-1}) - \phi^2(w) \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i} C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \end{aligned} \tag{1.128}$$

Le premier de ces deux termes tend vers $\phi^2(w)$ tandis que le second tend vers 0 grâce au lemme 1.

Au final, on obtient : $\lim_{k\to\infty} E[(\widehat{\phi_k}(w))^2] = \phi(w)^2$. Cela conclut la démonstration sur la convergence de l'estimateur. $\square$

1.6.3.4 Propriétés des estimateurs des fonctions CS^*

Nous avons jusqu'à présent porté notre étude sur la qualité de l'estimateur de ϕ. On peut proposer une étude similaire pour les estimateurs de CS^*. Pour cela, il est nécessaire de définir ces estimateurs afin d'éviter toute forme indéterminée. Les estimateurs sont les suivants :

$$\widehat{CS^*_{Z,k}}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(1-U_i)\mathbb{1}_{\{W_i>z\}}}{k-\sum_{i=1}^{k}U_i} & \text{si } \sum_{i=1}^{k}U_i < k \\ \tau_Z(W_1,\ldots,U_k) \in [0,1] & \text{si } \sum_{i=1}^{k}U_i = k \end{cases} \tag{1.129}$$

$$\widehat{CS^*_{Y,k}}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{k}U_i\mathbb{1}_{\{W_i>y\}}}{\sum_{i=1}^{k}U_i} & \text{si } \sum_{i=1}^{k}U_i > 0 \\ \tau_Y(W_1,\ldots,U_k) \in [0,1] & \text{si } \sum_{i=1}^{k}U_i = 0 \end{cases} \tag{1.130}$$

On peut remarquer une très grande symétrie entre la construction des CS^* et de ϕ. En effet, ces trois fonctions sont construites à partir de deux variables de Bernoulli : la première relative à $B_i = \mathbb{1}_{\{W_i>w\}}$ de paramètre $p = S_W(w)$ et la seconde relative à U_i de paramètre $q = S^*_Y(0)$. On constate que si l'on permute le rôle de ces deux lois de Bernoulli, on passe de l'estimateur de ϕ à celui de CS^*_Y. Les résultats pour l'estimateur de CS^*_Y peuvent donc être obtenus par complète symétrie en remplaçant le paramètre q par p et inversement. Les résultats sur CS^*_Z sont alors obtenus par symétrie sur les effets de maintenance.

Au final, on obtient les résultats suivants :

Théorème 1.5 *: $\widehat{CS^*_{Z,k}}(z)$ et $\widehat{CS^*_{Y,k}}(y)$ sont des estimateurs asymptotiquement sans biais et convergents de $CS^*_Z(z)$ et $CS^*_Y(y)$ respectivement. Plus précisément, les biais de ces estimateurs sont :*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[\widehat{CS^*_{Z,k}}(z)] &= [E[\tau_Z(w_1,\ldots,u_k)|\sum_{i=1}^{k}u_i = k] - CS^*_Z(z)]S^*_Y(0)^k \\ \mathcal{B}[\widehat{CS^*_{Y,k}}(y)] &= [E[\tau_Y(w_1,\ldots,u_k)|\sum_{i=1}^{k}u_i = 0] - CS^*_Y(y)]S^*_Z(0)^k \end{aligned} \tag{1.131}$$

1.6.3.5 Test de monotonie de ϕ

La visualisation des fonctions $\widehat{CS_Z^*}$, $\widehat{CS_Y^*}$ et $\widehat{\phi}$ donne des indications précieuses sur le choix d'un modèle. Dans le contexte de la maintenance, Dewan et al. [29] ont proposé une procédure statistique basée sur le test de Kendall afin de tester si ϕ est constante. Ces tests sont basés sur les travaux de Deshpande et Sengupta [28] et on peut noter que Dykstra et al. [37] ont aussi étudié cette problématique. Par la suite, nous proposons une procédure de tests non paramétriques, facilement implémentable, basée sur le test de Wilcoxon, toujours afin de tester si ϕ est constante.

Le principe est le suivant : si la fonction ϕ associée à un modèle est constante, cela signifie que W et U sont indépendants, ce qui correspond à un modèle à hasards proportionnels. En effet, cela revient à :

$$\phi(w) = P(U = 1|W > w) = P(U = 1) \tag{1.132}$$

Les hypothèses que l'on souhaite tester sont les suivantes :
- H_0 : ϕ est constante.
- H_1 : ϕ n'est pas constante.
- H_2 : ϕ est croissante.
- H_3 : ϕ est décroissante.

En se plaçant sous H_0, supposons que l'on observe un échantillon de k maintenances $(W_i, U_i)_{\{1\leq i\leq k\}}$. Comme W et U sont indépendants, on peut considérer que les durées de MC observées $(W_i, U_i = 0)_{\{1\leq i\leq k\}}$ et les durées de MP observées $(W_i, U_i = 1)_{\{1\leq i\leq k\}}$ sont deux sous-échantillons de $(W_i)_{\{1\leq i\leq k\}}$. On suppose que les W_i sont tous distincts. Soit $W_1^*, \ldots, W_k^*$ la statistique d'ordre de l'échantillon $W_1, \ldots, W_k$ et U_i^* le type de la maintenance associé à la durée W_i^*. Notons que $U_1^*, \ldots, U_k^*$ est différente de la statistique d'ordre de $U_1, \ldots, U_k$.

Sous H_0, comme W et U sont indépendants, le rang d'un instant d'observation est indépendant du type de la maintenance. Ainsi, les deux sous-échantillons doivent être répartis de manière homogène dans l'échantillon complet. En revanche, si ϕ est croissante, les rangs de $(W_i, U_i = 1)_{\{1\leq i\leq k\}}$ doivent être plus élevés que $(W_i, U_i = 0)_{\{1\leq i\leq k\}}$ parce que plus W est grand, plus il y a de chances que la prochaine maintenance soit préventive. Enfin, si ϕ est décroissante, les rangs de $(W_i, U_i = 0)_{\{1\leq i\leq k\}}$ doivent être plus élevés que $(W_i, U_i = 1)_{\{1\leq i\leq k\}}$.

Le test de Wilcoxon permet de comparer deux échantillons indépendants. Il est basé sur la somme des rangs des observations du second échantillon dans l'échantillon complet. Dans notre contexte, cette somme est la somme des rangs des MP dans l'échantillon de toutes les maintenances et vaut $\sum_{i=1}^{k} iU_i^*$. Sous H_0, comme le mélange des deux échantillons est homogène, cette somme doit être proche de $\frac{(k+1)\sum_{i=1}^{k} U_i}{2}$. Cette somme doit être la plus grande possible sous H_2 et la plus faible possible sous H_3. Finalement, le test de Wilcoxon de monotonie de ϕ est basé sur la propriété suivante :

Propriété 1.1 *Sous H_0 (ϕ constante), on a :*

$$T = \frac{2\sum_{i=1}^{k} iU_i^* - (k+1)\sum_{i=1}^{k} U_i}{\sqrt{(k+1)(\sum_{i=1}^{k} U_i)(k - \sum_{i=1}^{k} U_i)}}\sqrt{3} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \tag{1.133}$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne la loi normale centrée réduite. En pratique, il est nécessaire d'observer au moins 8 MP et 8 MC afin de pouvoir faire une approximation normale [14]. Autrement, on doit utiliser les tables de la loi de Wilcoxon [69]. Sous l'approximation normale, on construit les tests en définissant leur région critique $\mathcal{W}$. On obtient :

Théorème 1.6 *Tests de monotonie de ϕ de seuil α :*
- *(i) Test de "$H_0 : \phi$ constante" contre "$H_1 : \overline{H_0}$" : $\mathcal{W} = \left\{|T| > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$.*
- *(ii) Test de "$H_2 : \phi$ décroissante" contre "$H_3 : \phi$ croissante" : $\mathcal{W} = \{T > u_\alpha\}$.*
- *(iii) Test de "$H_3 : \phi$ croissante" contre "$H_2 : \phi$ décroissante" : $\mathcal{W} = \{T < -u_\alpha\}$.*
  où u_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi normale centrée réduite.

Bien que construite de manière très différente, la statistique T_D proposée dans [28] est asymptotiquement équivalente à la statistique T. On peut montrer en effet que :

$$T_D = \sqrt{\frac{k(k+1)}{(k-1)^2}}\ T \tag{1.134}$$

Pour illustrer la démarche, on teste sur les données Norsk-Hydro de la figure 1.9 si la fonction ϕ est croissante en utilisant le test *(ii)*. On obtient comme statistique $T = 1.74$. La p-valeur correspondante est $\alpha_c = 4.1\%$. En particulier, en se fixant un seuil de 5%, on conclut que ϕ est croissante, ce qui est conforme à la visualisation de $\widehat{\phi}$. Le test confirme donc qu'un modèle pertinent pour ces données doit avoir une fonction ϕ croissante, ce qui n'est le cas d'aucun des modèles classiques de risques concurrents dépendants.

Chapitre 2

Les modèles d'âge virtuel et de risques concurrents généralisés

---

Les modèles de risques concurrents classiques supposent que les maintenances sont parfaites. A chaque remise en route du système, le passé du système n'a aucun impact sur le processus. Il paraît pourtant réaliste de supposer les maintenances imparfaites et par conséquent de considérer que les maintenances passées influent sur la fiabilité future du système. Pour cela, nous reprenons dans ce chapitre la modélisation des risques concurrents généralisés proposée par Doyen et Gaudoin [36] qui permet de prendre en compte le passé du processus. D'autre part, il est nécessaire de généraliser les modèles de base de maintenances imparfaites au cas où les deux types de maintenances coexistent. Nous reprenons ainsi la définition des modèles d'âge virtuel généralisés [36]. Ce cadre de modélisation nous permet d'étudier le modèle de Langseth et Lindqvist [54] qui est le premier modèle de maintenance imparfaite avec MP et MC . Enfin, nous proposons une variante de ce modèle en modifiant les hypothèses sur les âges virtuels et nous l'appliquons à un jeu de données réelles.

2.1 Définition des modèles de risques concurrents généralisés (GCR)

Dans l'approche risques concurrents, on suppose que les effets des maintenances sont parfaits, qu'elles soient préventives ou correctives. Il serait pourtant réaliste de considérer que les effets des maintenances soient imparfaits et que ces effets puissent dépendre du type de maintenance effectué. Dans ce chapitre, on reprend la modélisation des risques concurrents pour des effets de maintenance quelconques proposée par Doyen et Gaudoin [36].

Un modèle de **risques concurrents généralisés**, noté GCR pour *Generalized Competing Risks*, est un modèle de risques concurrents pour lequel les couples $\{(Y_k, Z_k)\}_{k\geq 1}$ ne sont pas supposés indépendants et de même loi (iid). Cela entraîne que les $\{(W_k, U_k)\}_{k\geq 1}$ ne sont également pas iid. En pratique cela signifie que les effets des maintenances ne sont pas supposés parfaits.

Les fonctions usuelles pour les UCR de la section 1.4.2 peuvent alors être généralisées pour les GCR par le biais d'un conditionnement par rapport au passé du processus des maintenances. Ainsi nous généralisons (1.45) en définissant la **fonction de survie MC-MP** (conditionnelle) après la $k^{\text{ème}}$ maintenance par :

$$S_{k+1}(y,z;w_1,\ldots,u_k) = P(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z | w_1,\ldots,u_k) \tag{2.1}$$

De la même façon, on généralise la notion de fonction de sous-survie conditionnellement au passé du processus :

$$S^*_{Y_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k) = P(Y_{k+1} > y, Y_{k+1} \leq Z_{k+1} | w_1,\ldots,u_k) \tag{2.2}$$

$$S^*_{Z_{k+1}}(z;w_1,\ldots,u_k) = P(Z_{k+1} > z, Z_{k+1} < Y_{k+1} | w_1,\ldots,u_k) \tag{2.3}$$

En prenant des hypothèses de régularité sur les fonctions de survie jointes des risques S_k et sur leurs dérivées partielles, on peut exprimer les fonctions de sous-survie généralisées grâce à la propriété suivante :

$$S^*_{Y_{k+1}}(y,w_1,\ldots,u_k) = \int_y^{+\infty} \left[-\frac{\partial}{\partial y} S_{k+1}(y,z;w_1,\ldots,u_k)\right]_{(s,s)} ds \tag{2.4}$$

$$S^*_{Z_{k+1}}(z,c_1,u_1,..,c_k,u_k) = \int_z^{+\infty} \left[-\frac{\partial}{\partial z} S_{k+1}(y,z;w_1,\ldots,u_k)\right]_{(s,s)} ds \tag{2.5}$$

Il est clair qu'il existe un lien direct entre les approches risques concurrents généralisés et processus colorés :

$$S_{k+1}(w,w;w_1,\ldots,u_k) = P(W_{k+1} > w | w_1,\ldots,u_k) \tag{2.6}$$

$$S^*_{Y_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k) = P(W_{k+1} > y, U_{k+1} = 1 | w_1,\ldots,u_k) \tag{2.7}$$

$$S^*_{Z_{k+1}}(z;w_1,\ldots,u_k) = P(W_{k+1} > z, U_{k+1} = 0 | w_1,\ldots,u_k) \tag{2.8}$$

En outre, à l'aide des formules (1.18), (1.19) et (1.20), il est possible d'exprimer les intensités de maintenance en fonction des fonctions de survie :

$$\lambda^K_t(K,U) = -\frac{d}{dt} \ln S_{K_{t^-}+1}(t - C_{K_{t^-}}, t - C_{K_{t^-}}; W_1,\ldots,U_{K_{t^-}}) \tag{2.9}$$

$$\lambda^N_t(K,U) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial z} S_{K_{t^-}+1}(y,z;W_1,\ldots,U_{K_{t^-}})\right]_{(t-C_{K_{t^-}},t-C_{K_{t^-}})}}{S_{K_{t^-}+1}(t - C_{K_{t^-}}, t - C_{K_{t^-}}; W_1,\ldots,U_{K_{t^-}})} \tag{2.10}$$

$$\lambda^M_t(K,U) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial y} S_{K_{t^-}+1}(y,z;W_1,\ldots,U_{K_{t^-}})\right]_{(t-C_{K_{t^-}},t-C_{K_{t^-}})}}{S_{K_{t^-}+1}(t - C_{K_{t^-}}, t - C_{K_{t^-}}; W_1,\ldots,U_{K_{t^-}})} \tag{2.11}$$

On constate que, comme dans le cas des risques concurrents usuels, les fonctions de sous-survie généralisées et les intensités de maintenance ne dépendent des fonctions de

survie MC-MP que par leurs valeurs sur la diagonale. Par conséquent, on aura pour les modèles GCR les mêmes problèmes d'identifiabilité que pour les modèles UCR.

On définit les fonctions de sous-hasards généralisées :

$$\begin{aligned}&\lambda_{c,k+1}(w;w_1,\ldots,u_k)=\\&\lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\Delta w}P(w<Z_{k+1}\leq w+\Delta w, Z_{k+1}<Y_{k+1}|W_{k+1}>w;w_1,\ldots,u_k)\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_{p,k+1}(w;w_1,\ldots,u_k)\\&\lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\Delta w}P(w<Y_{k+1}\leq w+\Delta w, Y_{k+1}\leq Z_{k+1}|W_{k+1}>w;w_1,\ldots,u_k)\end{aligned} \tag{2.13}$$

En comparant (1.19), (1.20) et (2.12),(2.13), on constate que :

$$\lambda_{c,k+1}(w;w_1,\ldots,u_k) = \lambda^N_{c_k+w}(k;w_1,\ldots,u_k) \tag{2.14}$$

$$\lambda_{p,k+1}(w;w_1,\ldots,u_k) = \lambda^M_{c_k+w}(k;w_1,\ldots,u_k) \tag{2.15}$$

On peut aussi généraliser les fonctions de sous-survies conditionnelles :

$$\begin{aligned}CS^*_{Z_{k+1}}(z;w_1,\ldots,u_k) &= P(Z_{k+1}>z|Z_{k+1}<Y_{k+1};w_1,\ldots,u_k)\\&= P(W_{k+1}>z|U_{k+1}=0;w_1,\ldots,u_k)\\&= \frac{S^*_{Z_{k+1}}(z;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Z_{k+1}}(0;w_1,\ldots,u_k)}\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}CS^*_{Y_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k) &= P(Y_{k+1}>y|Y_{k+1}\leq Z_{k+1};w_1,\ldots,u_k)\\&= P(W_{k+1}>y|U_{k+1}=1;w_1,\ldots,u_k)\\&= \frac{S^*_{Y_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(0;w_1,\ldots,u_k)}\end{aligned} \tag{2.17}$$

D'autre part, la fonction ϕ généralisée est définie comme suit :

$$\phi_{k+1}(w;w_1,\ldots,u_k) = P(Y_{k+1}\leq Z_{k+1}|W_{k+1}>w;w_1,\ldots,u_k) \tag{2.18}$$

$$= P(U_{k+1}=1|W_{k+1}>w;w_1,\ldots,u_k) \tag{2.19}$$

$$= \frac{S^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)+S^*_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)} \tag{2.20}$$

Enfin, dans le cadre d'une approche paramétrique des variables de risques, on peut, en utilisant l'equation (1.21) d'une part et les équations (2.9), (2.10) et (2.11) d'autre part, calculer la fonction de vraisemblance basée sur l'observation de k maintenances entre 0 et t :

$$\begin{aligned}
L_t(\theta, k, w_1, \ldots, u_k) &= S_{k+1}(t-c_k, t-c_k; w_1, \ldots, u_k) \textstyle\prod_{i=1}^{k} \left[-\frac{\partial}{\partial y} S_i(y, z; w_1, \ldots, u_{i-1})\right]_{(w_i, w_i)}^{u_i} \\
&\times \prod_{i=1}^{k} \left[-\frac{\partial}{\partial z} S_i(y, z; w_1, \ldots, u_{i-1})\right]_{(w_i, w_i)}^{1-u_i} \\
&= \left[\prod_{i=1}^{k} (\lambda_{p,i}(w_i; w_1, \ldots, u_{i-1}))^{u_i} (\lambda_{c,i}(w_i; w_1, \ldots, u_{i-1}))^{1-u_i}\right] \\
&\times e^{-\sum_{i=1}^{k+1} \int_0^{w_i} [\lambda_{p,i}(u; w_1, \ldots, u_{i-1}) + \lambda_{c,i}(u; w_1, \ldots, u_{i-1})] du}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Un modèle sera défini de manière équivalente par les intensités de MP et de MC ou par les fonctions de sous-survie généralisées. On peut définir ces fonctions de sous-survie si on connait les lois jointes conditionnelles des (Y_{k+1}, Z_{k+1}) sachant $(w_1, \ldots, u_k)$. Le conditionnement reflète l'effet de la maintenance. Il faut donc à la fois prendre en compte la dépendance entre MP et MC, ce qui peut se faire à l'aide d'un modèle de risques concurrents classique, et l'effet de la maintenance. Pour ce dernier point, on peut entre autres adapter les modèles d'âge virtuel, ce que nous proposons dans la section suivante.

2.2 Modèles d'âge virtuel généralisés

2.2.1 Définition

Pour généraliser les modèles d'âge virtuel classiques en présence de deux types de maintenance, il faut adapter l'équation (1.28). On considère qu'après la $k^{\text{ème}}$ maintenance, le système se comporte comme un système neuf qui aurait fonctionné une durée A_k sans être maintenu. L'équivalent de (1.28) proposé par Doyen et Gaudoin [36] est alors :

$$\forall k \geq 0,\ \forall w \geq 0,\ \forall u \in [0,1], \tag{2.22}$$
$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = u | w_1, \ldots, u_k) = P(W > w + A_k, U = u | W > A_k)$$

où (W, U) est un couple aléatoire de même loi que (W_1, U_1), et A_k est une fonction du passé du processus $(W_1, \ldots, U_k)$.

Un **modèle d'âge virtuel généralisé** noté **GVA** pour *General Virtual Age Model* est un modèle pour lequel la relation (2.22) est vérifiée.

Il est aussi possible de définir les modèles GVA à partir des modèles de risques concurrents généralisés. Cela revient à supposer qu'après la $k^{\text{ème}}$ maintenance, les variables de risque Y_{k+1} et Z_{k+1} se comportent comme les variables de risque d'un système neuf n'ayant pas subi de maintenance entre 0 et A_k :

$$\begin{aligned}
&\forall k \geq 0,\ \ \forall y, z \geq 0, \\
S_{k+1}(y, z; w_1, \ldots, u_k) &= P(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z \,|\, w_1, \ldots, u_k)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} &= P(Y > A_k + y, Z > A_k + z | Y > A_k, Z > A_k) \\ &= \frac{S_1(A_k + y, A_k + z)}{S_1(A_k, A_k)} \end{aligned} \tag{2.24}$$

où (Y, Z) est un couple aléatoire de même loi que (Y_1, Z_1). Notons que l'équation (2.23) permet en particulier de retrouver la relation (2.22). On remarque que l'effet de la maintenance est symétrique, puisque c'est le même âge effectif A_k qui influence les deux risques Y_{k+1} et Z_{k+1}. Il serait possible de définir des effets non symétriques.

Puisque l'on se ramène à des équations faisant intervenir les variables de risques relatives au système neuf encore non maintenu, on peut utiliser l'ensemble des notations du chapitre précédent relatives aux UCR. Par la suite, on remplacera ainsi les variables Y_1, Z_1 par les notations Y, Z. On notera aussi S_W la fonction de survie relative à l'instant de la première maintenance : $S_W(t) = S_1(t, t) = P(W_1 > t)$.

En prenant $y = z = w$ dans (2.23), on obtient la loi conditionnelle de la durée d'attente de la prochaine maintenance :

$$P(W_{k+1} > w | w_1, \ldots, u_k) = P(W_1 > w + A_k | W_1 > A_k) = \frac{S_W(A_k + w)}{S_W(A_k)} \tag{2.25}$$

En prenant $w = 0$ dans (2.22), on obtient la loi conditionnelle du futur type de maintenance :

$$P(U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k) = P(U = 1 | W > A_k) = \phi(A_k) \tag{2.26}$$

Comme précédemment, on définit l'âge virtuel du système à tout instant t :

$$A(t) = t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}} \tag{2.27}$$

On rappelle l'expression des fonctions de sous-hasard λ_p et λ_c :

$$\lambda_c(t) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial z} S_1(y, z)\right]_{(t,t)}}{S_W(t)} \quad , \quad \lambda_p(t) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial y} S_1(y, z)\right]_{(t,t)}}{S_W(t)} \tag{2.28}$$

En combinant les équations (2.10), (2.11) et (2.28), on obtient les intensités de maintenance suivantes pour les modèles d'âge virtuel :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda_c(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}) \tag{2.29}$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \lambda_p(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}) \tag{2.30}$$

$$\lambda_t^K(K, U) = \lambda_W(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}) \tag{2.31}$$

Les fonctions de sous-survie généralisées ont l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) &= \frac{S^*_Z(A_k + z)}{S_W(A_k)} \\
&= \int_z^\infty \lambda_c(A_k + u) \exp\left(-\int_0^u \lambda_W(A_k + w)dw\right)du \\
S^*_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) &= \frac{S^*_Y(A_k + y)}{S_W(A_k)} \\
&= \int_y^\infty \lambda_p(A_k + u) \exp\left(-\int_0^u \lambda_W(A_k + w)dw\right)du
\end{aligned} \tag{2.32}$$

A partir des équations précédentes et de l'écriture de ϕ_{k+1} proposée dans l'équation (2.20) , il est simple d'établir que la fonction ϕ généralisée vaut alors :

$$\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = \phi(w + A_k) \tag{2.33}$$

Enfin, on peut aussi calculer la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances entre 0 et t. Il suffit de combiner l'équation (2.21) avec les équations précédentes pour avoir l'expression de la vraisemblance soit en fonction des sous-survies, soit des intensités :

$$\begin{aligned}
L_t(\theta, k, w_1, \ldots, u_k) &= S_W(t - c_k + A_k) \left[\prod_{i=1}^k \frac{[-S^{*\prime}_Y(w_i + A_{i-1})]^{u_i} \, [-S^{*\prime}_Z(w_i + A_{i-1})]^{1-u_i}}{S_W(A_i)}\right] \\
&= \left[\prod_{i=1}^k (\lambda_p(w_i + A_{i-1}))^{u_i} (\lambda_c(w_i + A_{i-1}))^{1-u_i}\right] \\
&\quad \times \; e^{-\sum_{i=1}^{k+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} \lambda_W(u - c_{i-1} + A_{i-1})du}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

La loi des observations est entièrement caractérisée par la donnée de la dépendance entre les risques pour un système neuf et des âges virtuels A_k. La dépendance entre les risques peut être définie à partir d'un modèle de risques concurrents classique (UCR) proposé dans la section 1.5. D'autre part, on peut généraliser les hypothèses sur les âges virtuels en présence de deux types de maintenances. Nous proposons dans la suite quelques hypothèses simples sur les efficacités de maintenance en présence de MP et MC.

Finalement, pour construire un modèle GVA, il faut procéder en 3 étapes :

1. Définir les âges effectifs A_k en caractérisant les effets des MC et des MP de manière similaire à ce qui existe pour les modèles classiques d'âge virtuel.
2. Modéliser la dépendance entre les MP et les MC en définissant la fonction de survie jointe S_1. Calculer les sous-hasards λ_p et λ_c à l'aide de (2.28).
3. En déduire les intensités de MC et MP $\lambda^N_t(K, U)$ et $\lambda^M_t(K, U)$ en appliquant (2.29) et (2.30).

2.2.2 Quelques modèles GVA

Nous donnons dans cette section quelques exemples basiques de modèles GVA [33, 36] :

- **MP et MC parfaites :** On considère que chaque type de maintenance remet à neuf le système : $\forall k \geq 1,\ A_k = 0$. On est exactement dans le cadre des risques concurrents classiques où l'on supposait les maintenances parfaites. Les intensités dépendent ainsi uniquement du temps écoulé depuis la dernière maintenance et la fonction de vraisemblance est la même que pour les UCR. En particulier, les intensités de MP et MC vérifient alors :

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda_c(t - C_{K_{t^-}}) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M(K,U) = \lambda_p(t - C_{K_{t^-}}) \tag{2.35}$$

  Le processus des maintenances globales est alors un processus de renouvellement.

- **MP et MC minimales :** On considère des maintenances de type ABAO : $\forall k \geq 1,\ A_k = C_k$. Les intensités de MP et MC sont deux fonctions déterministes du temps qui vérifient :

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda_c(t) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M(K,U) = \lambda_p(t) \tag{2.36}$$

- **MP et MC ARA$_1$:** De manière analogue à la présentation du modèle ARA$_1$ avec uniquement des MC, on peut définir des effets de maintenance ARA$_1$ en présence de deux types de maintenances.
  L'âge virtuel du système est nul à $t = 0$. Après chaque maintenance, l'âge virtuel du système augmente de manière proportionnelle au dernier temps d'attente selon un paramètre ρ_c pour les MC et ρ_p pour les MP. Ainsi :

$$A_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ A_{k-1} + (1-\rho_c)W_k & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ maintenance est corrective.} \\ A_{k-1} + (1-\rho_p)W_k & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ maintenance est préventive.} \end{cases} \tag{2.37}$$

  L'écriture des âges effectifs peut se simplifier de la manière suivante :

$$\forall k \geq 1,\ A_k = C_k - \sum_{i=1}^{k} \rho_p^{U_i} \rho_c^{1-U_i} W_i \tag{2.38}$$

  Les intensités de MP et MC vérifient alors :

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda_c \left(t - \sum_{i=1}^{K_{t^-}} \rho_p^{U_i} \rho_c^{1-U_i} W_i \right) \tag{2.39}$$

$$\lambda_t^M(K,U) = \lambda_p \left(t - \sum_{i=1}^{K_{t^-}} \rho_p^{U_i} \rho_c^{1-U_i} W_i \right) \tag{2.40}$$

  En prenant $\rho_p = \rho_c = \rho$, MP et MC ont la même efficacité. Le processus des maintenances K a alors pour intensité :

$$\lambda_t^K(K) = \lambda(t - \rho\, C_{K_{t^-}}) \tag{2.41}$$

Il s'agit donc d'un modèle ARA_1 similaire à celui proposé dans le chapitre 1. Les cas $\rho_p = 1$ ou $\rho_c = 1$ ne correspondent pas à des MP AGAN ou des MC AGAN. Par contre, les cas $\rho_p = 0$ et $\rho_c = 0$ correspondent bien respectivement à des MP ABAO et des MC ABAO. En effet, supposons $\rho_p = 1$ et $\rho_c = 0$. L'intensité de maintenance globale s'écrit alors :

$$\lambda_t^K(K, U) = \lambda(t - \sum_{i=1}^{K_t} U_i W_i) \tag{2.42}$$

On constate alors qu'après une MC ($U_k = 0$), l'intensité de maintenance globale est continue ce qui caractérise un effet de maintenance ABAO. En revanche, après une MP ($U_k = 1$), l'intensité ne prend pas une valeur nulle, à moins que toutes les maintenances observées aient été préventives. Le système après une MP n'est pas remis à neuf, donc les MP ne sont pas AGAN. Plus précisément, les MP remettent le système dans l'état où il était après la précédente MC. En effet, si la $k^{\text{ème}}$ maintenance est préventive, on a :

$$A_k = A_{k-1} + (1 - \rho_p)W_k = A_{k-1} = A_{k-2} = \text{âge du système après la dernière MC.}$$

Les âges virtuels augmentent seulement après une MC, ce qui traduit un vieillissement définitif du système. Ceci traduit une différence notable d'interprétation du facteur ρ selon qu'il y ait un type ou plusieurs types de maintenance :

- Avec un seul type de maintenance, un facteur ρ égal à 1 signifie une remise à neuf du système.
- Lorsqu'il y a deux types de maintenances et des paramètres ρ_p et ρ_c différents, si ρ_p est égal à 1, cela signifie que le système est remis dans l'état où il était après la précédente MC. On peut alors parler de maintenance AGAP pour *As Good As Previous*. Pour avoir une remise à neuf du système, il faut que ρ_p et ρ_c soient égaux à 1.

- **MP et MC ARA_∞ :** On considère que l'âge du système après maintenance est proportionnel à son âge juste avant la maintenance d'un facteur ρ_p si on effectue une MP et ρ_c sinon.

$$A_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (1 - \rho_c)(A_{k-1} + W_k) & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ maintenance est corrective.} \\ (1 - \rho_p)(A_{k-1} + W_k) & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ maintenance est préventive.} \end{cases} \tag{2.43}$$

Notons ρ_i l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance :

$$\rho_i = \rho_p^{u_i} \rho_c^{1-u_i} \tag{2.44}$$

Les intensités de MP et MC peuvent alors s'écrire :

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda_c(t - \sum_{i=0}^{N_{t^-}-1} \rho_{N_{t^-}-i} \prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{N_{t^-}-j})T_{N_{t^-}-i}) \tag{2.45}$$

$$\lambda_t^M(K,U) = \lambda_p(t - \sum_{i=0}^{N_{t^-}-1} \rho_{N_{t^-}-i} \prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{N_{t^-}-j})T_{N_{t^-}-i}) \tag{2.46}$$

Comme la maintenance a un effet sur l'âge global du système, l'interprétation des paramètres ρ_p et ρ_c est la même que pour le modèle ARA_∞ avec un seul type de maintenance. Par exemple, si $\rho_p = 1$, les MP sont parfaites et le système repart à neuf et si $\rho_p = 0$, les MP sont minimales (ABAO).

- **MP et MC BP :** On généralise le modèle de Brown-Proschan [11] aux modèles avec deux types de maintenances. Les MP sont parfaites avec une probabilité p_p et minimales avec une probabilité $1 - p_p$. Les MC sont parfaites avec une probabilité p_c et minimales avec une probabilité $1 - p_c$. On modélise alors l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance par une variable aléatoire B_i définie par :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases} \tag{2.47}$$

Les B_i sont des variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètres différents suivant le type de maintenance :

$$\begin{cases} \text{sachant } U_i = 1 & B_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p_p) \\ \text{sachant } U_i = 0 & B_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p_c) \end{cases} \tag{2.48}$$

Connaissant la valeur des B_i, on peut considérer que l'effet des maintenances suit un modèle d'âge virtuel : l'âge virtuel du système correspond au temps écoulé depuis la dernière maintenance parfaite. Les âges effectifs ont l'expression suivante :

$$\forall k \geq 1, \quad A_k = \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=j}^{k} (1 - B_i) W_j \tag{2.49}$$

Les intensités de maintenance s'expriment alors de la manière suivante :

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda_c(t - C_{K_{t^-}} + \sum_{j=1}^{K_{t^-}} \prod_{k=j}^{K_{t^-}} (1 - B_k) W_j) \tag{2.50}$$

$$\lambda_t^M(K,U) = \lambda_p(t - C_{K_{t^-}} + \sum_{j=1}^{K_{t^-}} \prod_{k=j}^{K_{t^-}} (1 - B_k) W_j) \tag{2.51}$$

2.3 Le modèle de Langseth-Lindqvist : propriétés et difficultés

2.3.1 Définition

Le premier modèle de risques concurrents adapté afin de prendre en compte des maintenances imparfaites a été proposé en 2003 par Langseth et Lindqvist [54, 57]. Il s'agit en fait d'un modèle de risques concurrents généralisé avec des effets de type âge virtuel. Ce modèle n'a toutefois pas initialement été proposé avec le formalisme des modèles GCR et GVA. Dans cette partie, nous allons donc présenter ce modèle dans le cadre GCR-GVA. Cela aboutit à définir le modèle IPRA-BP. Ensuite, nous calculons la MTTF pour ce modèle. Le modèle étant difficilement exploitable, nous proposons une variante de ce modèle : IPRA-ARA$_1$. Nous appliquons enfin ce modèle à un jeu de données.

La définition du modèle IPRA-BP proposé par Langseth et Lindqvist comporte les hypothèses suivantes :

- **Dépendance entre les risques :** le modèle de risques concurrents usuels de référence est le modèle IPRA [57] présenté dans la section 1.5.3.2. Il s'agit d'un cas particulier du modèle repair-alert dont on rappelle les hypothèses :
  - Le modèle fait l'hypothèse de signe aléatoire.
  - $P(Y \leq y | Z = z, Y < Z) = \dfrac{\Lambda_Z(y)}{\Lambda_Z(z)}$, où Λ_Z est le taux de hasard cumulé de Z.
  - $q = P(Y < Z) = P(U = 1)$.
- **Efficacité de la maintenance :** les maintenances sont de type Brown-Proschan d'efficacité p_p pour les MP et p_c pour les MC. L'équation (2.49) rappelle l'écriture des âges effectifs.

2.3.2 Calcul du temps moyen d'attente de la prochaine maintenance

Après chaque maintenance, il est intéressant de prévoir la date d'occurence de la prochaine. On peut dans ce but calculer l'espérance de la prochaine maintenance conditionnellement à tout le passé du processus : $E[W_{k+1}|w_1, \ldots, u_k]$.

On va calculer cette espérance sans faire d'hypothèses sur les âges effectifs mais en supposant que le taux de hasard de Z est de type Weibull : $\Lambda_Z(t) = \alpha t^\beta$.

On peut calculer cette espérance de la manière suivante :

$$E[W_{k+1}|w_1, \ldots, u_k] = \int_0^\infty P(W_{k+1} > t|w_1, \ldots, u_k)dt$$

A partir de (2.25), on obtient :

$$P(W_{k+1} > t|w_1, \ldots, u_k) = \frac{e^{-\Lambda_Z(t+A_k)} - q\Lambda_Z(t + A_k)Ie(\Lambda_Z(t + A_k))}{e^{-\Lambda_Z(A_k)} - q\Lambda_Z(A_k)Ie(\Lambda_Z(A_k))} \tag{2.52}$$

On intègre cette quantité pour passer à l'espérance :

$$E[W_{k+1}|w_1,\ldots,u_k] = \frac{\int_0^\infty e^{-\Lambda_Z(t+A_k)}dt - q\int_0^\infty \Lambda_Z(t+A_k)Ie(\Lambda_Z(t+A_k))dt}{e^{-\Lambda_Z(A_k)} - q\Lambda_Z(A_k)Ie(\Lambda_Z(A_k))} \tag{2.53}$$

Il est nécessaire maintenant de calculer deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\Lambda_Z(t+A_k)}dt \text{ et } I_2 = \int_{A_k}^\infty \Lambda_Z(t+A_k)Ie(\Lambda_Z(t+A_k))dt$$

Pour I_1, on obtient :

$$I_1 = \int_{\alpha A_k^\beta}^\infty \frac{e^{-v}v^{\frac{1}{\beta}-1}dv}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta} = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta},\alpha A_k^\beta)}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta} \tag{2.54}$$

où $\Gamma(y,x)$ représente la fonction Gamma incomplète : $\Gamma(y,x) = \int_x^\infty e^{-u}u^{y-1}du$.
Pour I_2, on obtient :

$$I_2 = \int_0^\infty \Lambda_Z(t+A_k)Ie(\Lambda_Z(t+A_k))dt = \int_{\alpha A_k^\beta}^\infty \frac{v^{\frac{1}{\beta}}Ie(v)dv}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta} \tag{2.55}$$

En intègrant par parties et en utilisant le fait que $Ie'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$, on obtient :

$$I_2 = \frac{-\alpha Ie(\alpha A_k^\beta)(A_k^{\beta+1})}{\beta+1} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}(\beta+1)}\Gamma(\frac{1}{\beta}+1,\alpha A_k^\beta) \tag{2.56}$$

On obtient finalement :

$$E[W_{k+1}|w_1,\ldots,u_k] = \frac{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta},\alpha A_k^\beta)}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta} - q\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta}+1,\alpha A_k^\beta)}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}(\beta+1)} + q\frac{\alpha A_k^{\beta+1}Ie(\alpha A_k^\beta)}{\beta+1}}{e^{-\alpha A_k^\beta} - q\alpha A_k^\beta Ie(\alpha A_k^\beta)} \tag{2.57}$$

2.3.3 Fonction de vraisemblance

Les principales propriétés du modèle IPRA ont été fournies dans la section 1.5.3.2. On rappelle tout de même l'écriture des fonctions de sous-hasard :

$$\lambda_c(t) = \frac{(1-q)\lambda_Z(t)e^{-\Lambda_Z(t)}}{e^{-\Lambda_Z(t)} - q\Lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t))} \tag{2.58}$$

$$\lambda_p(t) = \frac{q\lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t))}{e^{-\Lambda_Z(t)} - q\Lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t))} \tag{2.59}$$

Dans une approche statistique, on peut calculer la fonction de vraisemblance associée au modèle. Il s'avère toutefois que les variables B_k représentant les effets de maintenances sont en pratique non observés. Pour pallier à l'existence de variables cachées, on peut calculer une fonction de vraisemblance ne prenant en compte que les observations des dates de maintenances et des types de maintenances. Il faut alors effectuer un conditionnement par rapport aux variables B_k. Ce résultat a été obtenu par Doyen [33]. A partir

de l'observation de k maintenances sur $[0, t[$, cette vraisemblance s'exprime de manière récursive :

$$L_t(\theta, k, w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k}(1 - p_p^{u_i} p_c^{1-u_i})\lambda_p^{u_i}(c_i)\lambda_c^{1-u_i}(c_i)e^{-\Lambda_W(t)}$$

$$+\sum_{j=1}^{k} p_p^{u_j} p_c^{1-u_j}[\prod_{i=j+1}^{k}(1 - p_p^{u_i} p_c^{1-u_i})\lambda_p^{u_i}(c_i - c_j)\lambda_c^{1-u_i}(c_i - c_j)]e^{-\Lambda_W(t-cj)}L(c_1, \ldots, u_j) \quad (2.60)$$

avec $\Lambda_W(t) = -\ln(e^{-\Lambda_Z(t)} - q\Lambda_Z(t)Ie(\Lambda_Z(t)))$.

En supposant que Z soit de loi de Weibull, $\Lambda_Z(t) = \alpha t^\beta$, il faut estimer l'ensemble des paramètres suivants : $\theta = (\alpha, \beta, p_p, p_c, q)$. Il est à noter que Langseth et Lindqvist ont utilisé une fonction de vraisemblance erronnée dans [54] qui leur permettait d'avoir des résultats plus simples.

L'estimation des paramètres est rendue complexe par la forme récursive de la vraisemblance, due à la présence des variables non observées B_i. Elle sera plus simple si, au lieu du modèle BP, on utilise un modèle dans lequel il n'y a pas de variables externes, comme le modèle ARA_1. Nous allons donc proposer une variante du modèle IPRA-BP dans laquelle les maintenances effectuées sont de type ARA_1.

2.4 Variante du modèle de Langseth-Lindqvist

2.4.1 Modèle IPRA-ARA_1

On garde les mêmes hypothèses que Langseth et Lindqvist sur la dépendance entre MP et MC, à savoir le modèle IPRA, mais on modifie l'effet des maintenances de BP à ARA_1. On suppose que les maintenances correctives et préventives sont de type ARA_1 de paramètres ρ_c et ρ_p respectivement. Les âges effectifs correspondants ont été donnés en (2.38).

En utilisant (2.34), on peut calculer la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances entre 0 et t :

$$\begin{aligned} L_t(\theta, k, w_1, \ldots, u_k) &= \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_Z(A_{i-1}+w_i)(1-q)^{1-u_i} q^{u_i} e^{-\Lambda_Z(A_{i-1}+w_i)(1-u_i)}[Ie(\Lambda_Z(A_{i-1}+w_i))]^{u_i}}{e^{-\Lambda_Z(A_i)} - q\Lambda_Z(A_i)Ie(\Lambda_Z(A_i))} \\ &\times [e^{-\Lambda_Z(t-c_k+A_k)} - q\Lambda_Z(t - c_k + A_k)Ie(\Lambda_Z(t - c_k + A_k))] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Là encore, il n'y pas d'écriture explicite des estimateurs du modèle mais, il est assez simple d'évaluer la fonction de vraisemblance et de maximiser cette fonction selon des méthodes de gradient ou des évaluations par grilles fines.

2.4.2 Présentation des données

On souhaite étudier des données réelles de maintenances de certains composants de systèmes de production d'électricité fournies par EDF. Ces données ont précédemment

été étudiées dans [33] et à travers plusieurs collaborations entre l'INP Grenoble et EDF. On dispose, pour 17 unités de production supposées indépendantes et de fonctionnement identique, de leur instant de mise en fonctionnement, de leurs instants de maintenances préventives et correctives et de leur date de fin d'observation qui est considérée comme une censure. Les données sont présentées dans le Tableau 2.1. On a en tout 28 maintenances, 16 préventives et 12 correctives. L'unité est le jour.

Unité 1	2145 (MP)	4582 (Censure)			
Unité 2	853 (MP)	4368 (Censure)			
Unité 3	158 (MC)	1942 (MP)	5009 (Censure)		
Unité 4	311 (MP)	3273 (Censure)			
Unité 5	4120 (MC)	5040 (Censure)			
Unité 6	2689 (MP)	4643 (Censure)			
Unité 7	4394 (MP)	5739 (Censure)			
Unité 8	2602 (MC)	5130 (Censure)			
Unité 9	1462 (MP)	2259 (MC)	5040 (Censure)		
Unité 10	1667 (MC)	2073 (MP)	3607 (Censure)		
Unité 11	788 (MP)	1090 (MC)	1207 (MC)	1705 (MP)	2483 (Censure)
Unité 12	82 (MC)	2921 (MP)	4454 (MC)	4703 (Censure)	
Unité 13	3011 (MC)	3559 (MP)	4248 (Censure)		
Unité 14	3528 (MP)	5433 (Censure)			
Unité 15	201 (MP)	298 (MP)	2008 (MC)	2968 (Censure)	
Unité 16	321 (MC)	5344 (Censure)			
Unité 17	742 (MP)	6348 (Censure)			

Tab. 2.1 – Données EDF1 : données initiales

Comme on considère des systèmes identiques et indépendants, la vraisemblance globale est le produit des vraisemblances de chaque unité.

2.4.3 Etude préliminaire en considérant les MP déterministes

Une première étude de ces données a été effectuée dans [34]. Cette analyse faisait l'hypothèse que les maintenances préventives étaient à des instants déterministes. Il n'y a alors pas de modèle de risques concurrents sous-jacent. En supposant les MP planifiées, le processus des MP correspond à une censure du processus des défaillances. Doyen [33] a proposé une modélisation générale du processus des MP et MC lorsque les MP sont planifiées.

Lors de la première étude, ils ont pris pour Z une loi de Weibull $\lambda_Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$. L'analyse des résultats des estimations a mis en évidence deux phénomènes :

– Il existe une période de jeunesse lors de laquelle les systèmes sont en déverminage. Par exemple, si on suppose les MC et les MP de type ARA_∞, comme en (2.43), de paramètres ρ_p et ρ_c respectivement, les estimations obtenues sont les suivantes :

$$\hat{\alpha} = 0.0012,\ \hat{\beta} = 0.776,\ \hat{\rho}_c = -366,\ \hat{\rho}_p = 0.8$$

L'estimation du paramètre β est inférieure à 1, ce qui signifie que les systèmes s'améliorent au cours du temps même en l'absence de maintenances, résultat a priori surprenant pour un système qu'on penserait se détériorer. Cette valeur traduit en fait une période de jeunesse du système : pendant les premiers mois de mise en service du système, des rôdages doivent être effectués pour corriger les erreurs de conception. D'autre part, on obtient une valeur de $\hat{\rho}_c$ négative. L'interprétation de ce paramètre est à reconsidérer du fait que l'intensité est décroissante. Cela revient à avoir des maintenances correctives efficaces tandis que $\hat{\rho}_p$ positif correspond à effectuer des maintenances préventives nuisibles.

– Afin de supprimer l'effet de la période de jeunesse, toutes les maintenances ayant eu lieu avant le millième jour de fonctionnement ont été supprimées, tout en conservant l'origine des temps à la mise en route des systèmes. En effet, les maintenances effectuées pendant le déverminage ont normalement pour effet d'éliminer de façon localisée les défauts de jeunesse sans changer le niveau global d'usure du système.

  Par suite, en prenant le même modèle ARA_∞ et en conservant la même intensité initiale, les estimations suivantes ont été obtenues :

$$\hat{\alpha} = 3.24\,10^{-6}\ , \hat{\beta} = 1.44\ , \hat{\rho}_c = 0.16\ , \hat{\rho}_p = 1$$

  L'estimation de β est alors bien supérieure à 1 ce qui traduit une usure du système. En outre, on trouve une efficacité de maintenance corrective faible et une efficacité de maintenance préventive égale à 1 ce qui montre que les MP sont parfaites.

Le choix de supposer les MP planifiées a permis une analyse prometteuse des données. Pourtant, les instants des MP dépendent de l'état de dégradation du systèmes et il est bien plus réaliste de faire l'hypothèse que ces MP sont conditionnelles. Aussi allons nous analyser ces données à l'aide du modèle IPRA-ARA$_1$ défini dans la section 2.4.1.

2.4.4 Analyse des données avec le modèle IPRA-ARA$_1$

A partir des informations fournies par EDF sur les dates de maintenances correctives et préventives, on va estimer conjointement les paramètres du modèle d'âge virtuel généralisé IPRA-ARA$_1$. On suppose comme précédemment que Z suit une loi de Weibull : $\lambda_Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Afin d'estimer les paramètres du modèle, à savoir $\theta = (\alpha, \beta, \rho_c, \rho_p, q)$, il faut donc maximiser la fonction de vraisemblance obtenue en (2.61). Pour cela, on peut effectuer une méthode de gradient. Toutefois, le calcul des dérivées partielles de la fonction de vraisemblance s'avère compliqué. La méthode utilisée a donc été de quadriller une grille de dimension 5 selon chaque paramètre, et d'évaluer la vraisemblance sur cette grille. On note $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}_c, \hat{\rho}_p, \hat{q})$ les estimateurs de maximum de vraisemblance.

Les estimations des paramètres du modèle sont les suivantes :

$$\begin{array}{rclrclrl} \hat{\alpha} & = & 0.00045, & \hat{\beta} & = & 0.95, & \hat{q} = 0.55, \\ \hat{\rho}_c & = & 0.95, & \hat{\rho}_p & = & 0.01 & \end{array} \tag{2.62}$$

On constate comme dans l'étude précédente que la valeur de $\hat{\beta}$ est inférieure à 1. Dans ces conditions, les valeurs de $\hat{\rho}_c$ et de $\hat{\rho}_p$ doivent être interprétées de la manière suivante :

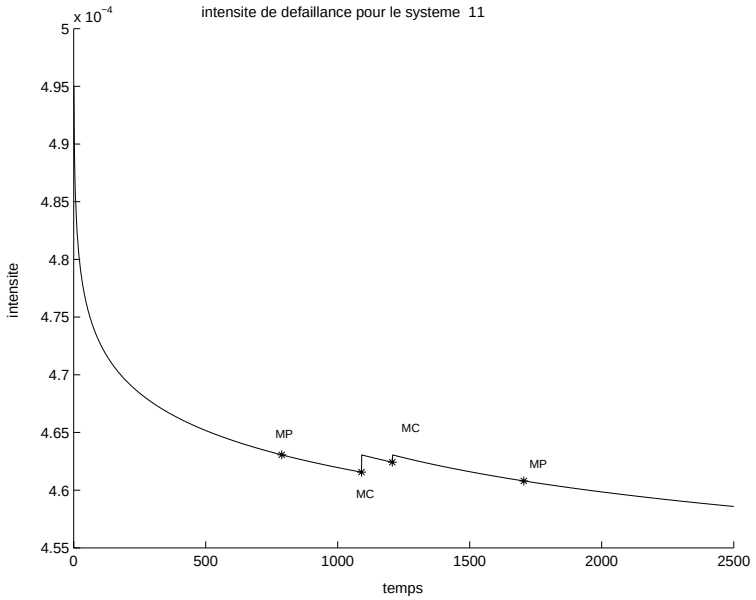


FIG. 2.1 – Intensité de défaillance pour le système 11

- ρ_c, paramètre relatif aux maintenances correctives est estimé positif. Cela signifie que les maintenances correctives remettent le système dans un état antérieur à celui de la panne. Or, comme le système a tendance à s'améliorer ($\hat{\beta} < 1$), les MC provoquent donc un rajeunissement du système et sont donc nuisibles au système. En outre, cette valeur étant proche de 1, l'âge virtuel du système est quasi identique à l'âge virtuel juste après la précédente MP.
- Une valeur proche de 0 pour $\hat{\rho}_p$ signifie que la maintenance préventive est minimale ; l'état du système est le même avant et après la maintenance. Ainsi, le système a tendance à rajeunir au cours du temps ; les MP n'accentuent pas le rajeunissement mais permettent une amélioration définitive du système.
- La valeur de $\hat{q}$ correspond à la probabilité d'effectuer une maintenance préventive plutôt que corrective. Intuitivement, on estimerait q par le pourcentage global de maintenances préventives effectuées :

$$\tilde{q} = \frac{\text{Nombre de MP}}{\text{Nombre total de maintenances}} = 0.57$$

On constate que les deux estimations $\hat{q}$ et $\tilde{q}$ sont très proches l'une de l'autre.

La figure 2.1 représente l'intensité de défaillance (2.39) avec les paramètres ci-dessus pour le système 11. On constate sur la figure que les MC sont nuisibles et que les MP sont sans effet. En outre, on remarque que l'intensité après une MC est identique à l'intensité au moment de la précédente MP.

Comme lors de la précédente analyse, on supprime les maintenances intervenues avant le millième jour de fonctionnement tout en conservant la même origine des temps. On recommence l'analyse avec ces nouvelles données. Voici les nouvelles estimations des paramètres :

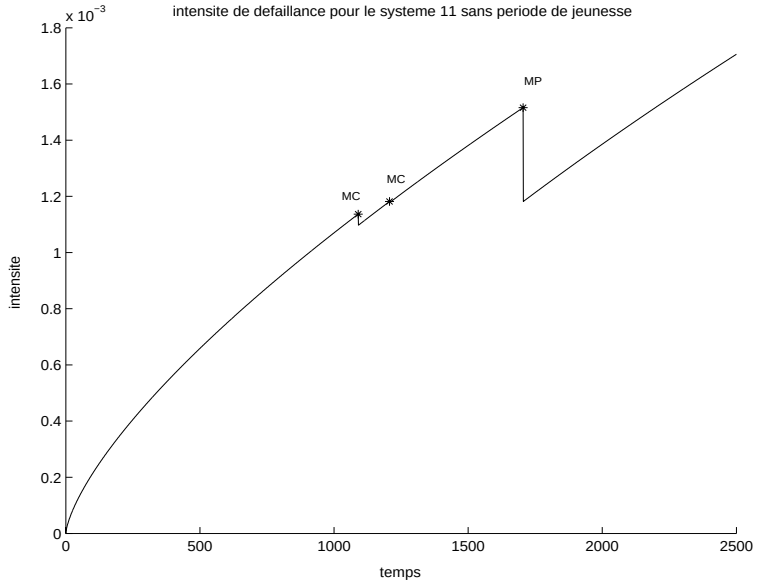


FIG. 2.2 – Intensité de défaillance pour le système 11 sans période de jeunesse

$$\begin{array}{rclrclrcl} \hat{\alpha} & = & 5\ 10^{-7}, & \hat{\beta} & = & 1.70, & \hat{q} = 0.47, \\ \hat{\rho}_c & = & 0.03, & \hat{\rho}_p & = & 0.99 & \end{array} \tag{2.63}$$

- On constate qu'en ne prenant pas en compte la période de jeunesse, la valeur de $\hat{\beta}$ est plus grande que 1, ce qui correspond à une usure du système.
- La valeur de $\hat{\rho}_c$ est cette fois-ci proche de 0, ce qui signifie que les maintenances correctives sont minimales (de type ABAO) : le système ne rajeunit pas après une maintenance corrective.
- A l'inverse, les maintenances préventives sont presque parfaites ($\hat{\rho}_p$ très proche de 1). Ainsi, nous sommes dans une situation symétrique à la précédente : les MP remettent le système dans l'état où il était au moment de la précédente panne. Même si les maintenances préventives sont parfaites, elles ne remettent pas le système à neuf mais dans l'état où il était après la dernière défaillance. Il est donc primordial de limiter les MC ou d'anticiper les dégradations du système par une MP, car les dégradations du système après une MC sont définitives.
- En ce qui concerne la valeur de $\hat{q}$, elle correspond approximativement au pourcentage de maintenances préventives (52%)
- La valeur de $\hat{\alpha}$ a diminué d'un facteur 1000 par rapport à l'ancienne estimation.

La courbe d'intensité de défaillance se modifie radicalement comme le montre la figure 2.2. On constate que les MC sont pratiquement minimales et que les MP redonnent au système l'âge qu'il avait au moment de la dernière MC.

Ces résultats sont cohérents avec la première étude. D'autre part, les estimations de β et des efficacités de maintenance sont conformes à l'intuition des praticiens.

Premières conclusions et orientations

Au cours du premier chapitre, nous avons modélisé le processus des maintenances correctives et préventives à l'aide de processus ponctuels bivariés ou colorés. Dans un premier temps, nous avons présenté les principaux modèles de maintenance imparfaite en présence d'un seul type de maintenance. Ensuite, nous avons proposé de modéliser la dépendance entre MP et MC à l'aide de modèles de risques concurrents classiques. Ces modèles supposent les maintenances parfaites.

Lors du second chapitre, nous avons effectué la réunion entre les modèles de maintenances imparfaites et les modèles de risques concurrents en utilisant la modélisation proposée dans [36]. D'une part, nous avons défini les modèles de risques concurrents généralisés (GCR). D'autre part, nous avons présenté les modèles d'âge virtuel en présence de deux types de maintenances. Cela permet ainsi de prendre en compte à la fois une dépendance quelconque entre les dates des deux types de maintenance et des effets quelconques de ces maintenances.

Enfin, nous avons étudié le premier modèle prenant en compte des risques concurrents et des maintenances imparfaites [57]. Une variante de ce modèle a ensuite été définie, puis a été appliquée à un jeu de données fourni par EDF [34]. Les résultats obtenus lors cette analyse ont mis en évidence certaines limites de modélisation :

- Dans le cadre des risques concurrents classiques, l'hypothèse la plus souvent utilisée est l'hypothèse de signe aléatoire. Cette hypothèse n'est pas suffisante pour construire un modèle UCR. D'autre part, la fonction ϕ est maximale à l'origine voire décroissante pour la plupart des modèles. Or, pour certains jeux de données, une estimation non paramétrique de la fonction ϕ aboutit à une fonction croissante et il n'est alors pas réaliste de choisir un modèle comportant l'hypothèse de signe aléatoire.
- Les seuls modèles GCR qui existent sont en fait des modèles GVA.
- Dans les deux études du jeu de données, les maintenances ayant lieu au cours de la période de jeunesse ont été purement et simplement supprimées de l'analyse finale. Le fait que l'on ne puisse pour l'instant étudier cette période vient du choix de l'intensité initiale. Pour une intensité de type Weibull, cette fonction est soit croissante soit décroissante.
- En étudiant le jeu de données avec période de jeunesse, on observe que l'interprétation des paramètres d'efficacité n'est pas la même pour des intensités décroissantes que pour des intensités croissantes. En effet, les modèles d'efficacité de la maintenance classiques font l'hypothèse que les systèmes se dégradent de manière continue, ce qui correspond à choisir nécessairement une intensité de défaillance croissante pour des systèmes neufs. Pour des systèmes qui ne vérifient pas ces hypothèses, les modèles

d'âge virtuel ne sont donc pas adaptés.

Suite à ces observations, nous effectuons nos travaux de recherche avec les objectifs suivants :

1. Proposer des modèles UCR pour lesquels la fonction ϕ est croissante.
2. Définir des modèles GCR simples pas nécessairement basés sur les modèles d'âge virtuel.
3. Proposer des modèles de maintenance imparfaite pour des systèmes présentant une période de jeunesse. Les intensités de défaillance pour des systèmes non maintenus présentant une période de jeunesse sont communément des courbes en baignoire.

Ces points seront étudiés au cours des chapitres suivants :

- Au cours du chapitre 3, nous présentons un nouveau modèle de risques concurrents : le modèle alert-delay. Ce modèle suppose qu'un signal est émis avant la défaillance du système et qu'il faut un délai supplémentaire avant que l'équipe de maintenance puisse faire une MP potentielle. Lorsque les distributions sont exponentielles, ce modèle a la propriété d'avoir une fonction ϕ croissante.
- Le chapitre 4 est consacré à proposer plusieurs modèles GCR simples. Tout d'abord, on adaptera l'hypothèse de risques indépendants en proposant les modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants. Ensuite, on généralisera l'hypothèse de signe aléatoire dans le cadre GCR. Cela permet alors d'étendre des modèles UCR tels que le modèle repair-alert ou le modèle de censure hautement corrélé. Enfin, nous proposerons des généralisations des modèles à hasards proportionnels et alert-delay.
- Dans le chapitre 5, on proposera une modélisation générale de l'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire afin de prendre en compte une potentielle période de jeunesse. On montre qu'il est nécessaire d'adapter les modèles d'âge virtuel pour ces intensités.
- Le chapitre 6 présente deux modèles particuliers d'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire. Le premier modèle est conçu pour un seul type de maintenance et le second pour deux types de maintenance.

Chapitre 3

Un nouveau modèle de risques concurrents dépendants : l'alert-delay

---

Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau modèle de risques concurrents classique. Dans un premier temps, nous développerons l'ensemble des propriétés du modèle en ne faisant pas d'hypothèses particulières sur la loi des variables aléatoires qui le définissent. Dans un deuxième temps, on supposera que ces variables aléatoires sont de loi exponentielle, ce qui permet d'avoir des propriétes intéressantes sur la fonction ϕ. Nous proposerons une étude statistique de ce modèle particulier basé sur une estimation par la méthode de maximum de vraisemblance et par la méthode des moments. Des résultats de simulations et une application à un jeu de données réelles sont proposés. Enfin, une extension de ce modèle est proposée.

3.1 Définition du modèle alert-delay

Afin de définir un modèle de risques concurrents classique, il est nécessaire de définir la dépendance entre le risque de MP Y et le risque de MC Z. Le modèle proposé est défini par le lien entre les dates potentielles des MP et MC, exprimé de la façon suivante :

$$Y = pZ + \mathcal{E} \tag{3.1}$$

où :

- $p \in [0, 1]$.
- Z et $\mathcal{E}$ sont des variables aléatoires positives et indépendantes.
- Z a pour fonction de survie S_Z.
- $\mathcal{E}$ a pour fonction de survie $S_{\mathcal{E}}$.

Nous désignerons ce modèle sous le nom de modèle alert delay, que l'on notera AD (Alert-Delay). L'idée qui préside à la construction de ce modèle est de considérer qu'une maintenance préventive efficace doit avoir lieu avant la défaillance, ce qui peut s'exprimer

par $Y = pZ$, où $p \in [0,1]$. Pour des raisons de coûts, la MP est idéale si elle est effectuée le plus tard possible, c'est-à-dire juste avant la défaillance, donc si p est proche de 1. Mais il faut prendre en compte la possibilité que, de temps en temps, la défaillance survienne avant la MP, donc que $Y > Z$. Pour cela, on rajoute un délai $\mathcal{E}$ à l'expression précédente et on obtient $Y = pZ + \mathcal{E}$. Il n'y a pas de raison de supposer que ce délai dépend de l'instant de la défaillance potentielle, donc on peut supposer que Z et $\mathcal{E}$ sont indépendants. A priori, n'importe quelles lois sont possibles pour Z et $\mathcal{E}$. Nous étudierons en détail le cas particulier de lois exponentielles uniquement pour avoir un modèle simple. Mais il paraîtrait logique d'étudier le cas où Z est de loi de Weibull pour prendre en compte l'usure du système étudié.

pZ peut être compris comme une alerte délivrée par le système juste avant la défaillance et $\mathcal{E}$ comme le délai nécessaire pour effectuer la MP après cette alerte. Le modèle est alors similaire au modèle delay-time défini dans la section 1.5.6. Il a même exactement la même forme si on pose $A = pZ$, $B = \mathcal{E}$ et $C = (1-p)Z$. Mais A et C ne sont pas indépendantes. Le modèle Repair Alert défini dans la section 1.5.3.2 fait lui aussi intervenir la notion d'alerte mais les hypothèses sont radicalement différentes de notre modèle. Enfin, le modèle PWCI défini dans en 1.5.7.1 fait l'hypothèse que l'alerte a lieu à un instant proportionnel à la durée d'attente de la défaillance potentielle mais notre contexte d'étude est différent puisque l'on ne considère pas d'inspections.

L'efficacité de la MP se traduit à la fois par le fait que l'alerte n'est pas donnée trop tôt et que le délai d'intervention est court : p doit être proche de 1 (mais pas trop) et $\mathcal{E}$ doit être d'espérance faible par rapport à l'espérance de Z.

Outre une écriture sous forme de modèle à délai, notre modèle inclut d'autres cas particuliers :

- Pour $p = 0$, $Y = \mathcal{E}$, donc Y et Z sont indépendants. On retrouve le modèle IUCR.
- Pour $p = 1$, $Y = Z + \mathcal{E} > Z$, donc on n'observe que des MC.
- S'il n'y a pas de délai ($\mathcal{E} = 0 \ \ p.s.$), $Y = pZ$, donc on n'observe que des MP.

3.2 Propriétés du modèle alert-delay

On calcule l'ensemble des fonctions usuelles des modèles UCR définies dans la section 1.4.2.

- **La fonction de survie jointe** : comme Z et $\mathcal{E}$ sont indépendantes, il en découle que :

$$S(y,z) = P(Y > y, Z > z) = P(\mathcal{E} > y - pZ, Z > z) = \int_z^\infty S_{\mathcal{E}}(y-px) f_Z(x)dx \quad (3.2)$$

Pour $y - px < 0$, $S_{\mathcal{E}}(y-px) = 1$, et deux cas sont alors à envisager :

1. Si $y < pz$,

$$S(y,z) = \int_z^\infty f_Z(x)dx = S_Z(z) \quad (3.3)$$

2. Si $y \geq pz$,

$$S(y,z) = \int_z^{\frac{y}{p}} S_{\mathcal{E}}(y-px) f_Z(x)dx + \int_{\frac{y}{p}}^\infty f_Z(x)dx \quad (3.4)$$

$$= \int_z^{\frac{y}{p}} S_{\mathcal{E}}(y-px)f_Z(x)dx + S_Z\left(\frac{y}{p}\right) \tag{3.5}$$

$$\tag{3.6}$$

La fonction de survie jointe a donc l'expression suivante :

$$S(y,z) = \begin{cases} S_Z(z) & \text{si } y < pz \\ \displaystyle\int_z^{\frac{y}{p}} S_{\mathcal{E}}(y-px)f_Z(x)dx + S_Z\left(\frac{y}{p}\right) & \text{si } y \geq pz \end{cases} \tag{3.7}$$

Lorsque $p = 0$, on obtient $S(y,z) = S_Z(z)S_{\mathcal{E}}(y) = S_Z(z)S_Y(y)$, ce qui montre bien que les risques sont alors indépendants. On retrouve bien le modèle IUCR.

- **La loi de l'instant de la MP potentielle** : la loi de Y est obtenue en écrivant que :

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(Y > y, Z > 0) = S(y,0) \tag{3.8}$$

On obtient :

$$S_Y(y) = \int_0^{\frac{y}{p}} S_{\mathcal{E}}(y-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{y}{p}) \tag{3.9}$$

- **La loi de l'instant de la prochaine maintenance** : la loi de W est obtenue en écrivant que $S_W(w) = S(w,w)$. On obtient :

$$S_W(w) = \int_w^{\frac{w}{p}} S_{\mathcal{E}}(w-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{w}{p}) \tag{3.10}$$

- **Les fonctions de sous-survie** : on calcule S_Z^* en conditionnant par rapport à Z :

$$\begin{aligned} S_Z^*(z) &= P(Z > z, U = 0) \\ &= P(Z > z, \mathcal{E} > (1-p)Z) \\ &= \int_z^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx \end{aligned} \tag{3.11}$$

D'autre part, on utilise la relation obtenue dans l'équation (1.48) : $S_Y^* + S_Z^* = S_W$, pour en déduire S_Y^* :

$$S_Y^*(y) = \int_y^{\frac{y}{p}} S_{\mathcal{E}}(y-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{y}{p}) - \int_y^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx \tag{3.12}$$

$$\tag{3.13}$$

- **La loi du type de la prochaine maintenance** : la loi de U est obtenue grâce aux équations (1.50) et (1.49) : $S_Z^*(0) = P(U = 0)$ et $S_Y^*(0) = P(U = 1)$. On obtient :

$$\begin{aligned} P(U=0) &= \int_0^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx \\ P(U=1) &= 1 - \int_0^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx \end{aligned} \tag{3.14}$$

On retrouve bien le fait que si $p = 1$, $P(U = 1) = 0$, donc on n'a que des MC.

- **Les fonctions de sous-survie conditionnelles** : en appliquant directement les définitions des fonctions CS_Y^* et CS_Z^* à l'aide de sous-survies définies par les équations (1.62) et (1.63), on obtient :

$$\begin{aligned} CS_Y^*(y) &= \frac{\displaystyle\int_y^{\frac{y}{p}} S_{\mathcal{E}}(y-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{y}{p}) - \int_y^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx}{1-\displaystyle\int_0^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx} \\ CS_Z^*(z) &= \frac{\displaystyle\int_z^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx} \end{aligned} \tag{3.15}$$

  Il est intéressant de pouvoir comparer ces deux fonctions dans une perspective de choix de modèle. Dans le cas présent, il n'est pas possible de proposer une telle comparaison sans faire d'hypothèses supplémentaires sur les lois de Z et $\mathcal{E}$. Nous verrons par la suite qu'une telle comparaison est possible si ces lois sont exponentielles.

- **La fonction** ϕ : la fonction ϕ se calcule elle aussi directement à partir des sous-survies grâce à la formule établie par l'équation (1.65). On obtient :

$$\phi(w) = 1 - \frac{\displaystyle\int_w^{\infty} S_{\mathcal{E}}((1-p)x)f_Z(x)dx}{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} S_{\mathcal{E}}(w-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{w}{p})} \tag{3.16}$$

  Il n'y a pas de résultat général sur le sens de variation de ϕ.

- **Les fonctions de sous-hasards** : en utilisant les équations (1.54) et (1.55), on obtient les sous-hasards de ce modèle :

$$\lambda_c(w) = \frac{S_{\mathcal{E}}((1-p)w)f_Z(w)}{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} S_{\mathcal{E}}(w-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{w}{p})} \tag{3.17}$$

$$\lambda_p(w) = \frac{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} f_{\mathcal{E}}(w-px)f_Z(x)dx}{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} S_{\mathcal{E}}(w-px)f_Z(x)dx + S_Z(\frac{w}{p})} \tag{3.18}$$

3.2.1 Identifiabilité faible du modèle

Dans le cadre des risques concurrents classiques, on a montré dans la section 1.4.3 qu'il n'y a jamais identifiabilité du modèle à moins de supposer les risques indépendants. Il est donc généralement impossible de reconstituer la loi de (Y, Z) au vu des observations (W, U).

En se basant sur le théorème 1.1 de Cooke, nous proposons une version plus faible de l'identifiabilité que nous nommerons identifiabilité faible :

Définition 3.1 *: Le modèle alert-delay est faiblement identifiable à la condition suivante : si les durées de vie aléatoires (Y, Z) et (Y', Z') définissent 2 modèles alert-delay tels que $S_Y^* = S_{Y'}^*$ et $S_Z^* = S_{Z'}^*$, alors (Y, Z) et (Y', Z') ont même loi.*

Des travaux similaires ont été proposés pour le modèle repair-alert [57]. L'identifiabilité faible signifie que les fonctions S_Y^* et S_Z^* définissent un unique vecteur $(p, S_Z, S_\mathcal{E})$ dont les composants sont des fonctions ou paramètres du modèle alert-delay. Démontrer l'identifiabilité faible est essentiel si l'on souhaite effectuer une étude statistique de notre modèle. En effet, si l'on cherche à estimer par exemple le paramètre p au vu des observations, il est nécessaire que p soit unique. Autrement, il est impossible d'apporter une interprétation physique à notre modèle. Pour le modèle AD, on a la propriété suivante :

Théorème 3.1 *Pour p différent de 1, le modèle est faiblement identifiable.*

Démonstration : afin de prouver l'identifiabilité faible du modèle, nous supposons que deux jeux de paramètres $(p, S_Z, S_\mathcal{E})$ et $(p', S_{Z'}, S_{\mathcal{E}'})$ donnent les mêmes fonctions de sous-survies S_Y^* et S_Z^*. L'objectif de la démonstration est de prouver que ces deux jeux de paramètres sont nécessairement identiques.

Si on s'intéresse tout d'abord à S_Z^* :

$$\forall\ z \geq 0,\ \ S_Z^*(z) = \int_z^\infty S_\mathcal{E}((1-p)x) f_Z(x)dx = \int_z^\infty S_{\mathcal{E}'}((1-p')x) f_{Z'}(x)dx \tag{3.19}$$

Intéressons nous maintenant à S_Y^* :

$$\begin{aligned} \forall\ y \geq 0, \quad S_Y^*(y) &= \textstyle\int_y^{\frac{y}{p}} S_\mathcal{E}(y-px) f_Z(x)dx + S_Z(\frac{y}{p}) - \int_y^\infty S_\mathcal{E}((1-p)x) f_Z(x)dx \\ &= \textstyle\int_y^{\frac{y}{p'}} S_{\mathcal{E}'}(y-p'x) f_{Z'}(x)dx + S_{Z'}(\frac{y}{p'}) - \int_y^\infty S_{\mathcal{E}'}((1-p)x) f_{Z'}(x)dx \end{aligned} \tag{3.20}$$

Grâce à l'égalité (3.19), les derniers termes dans l'égalité sont égaux, donc on obtient :

$$\forall\ y \geq 0,\ \ \int_y^{\frac{y}{p}} S_\mathcal{E}(y-px) f_Z(x)dx + S_Z(\frac{y}{p}) = \int_y^{\frac{y}{p'}} S_{\mathcal{E}'}(y-p'x) f_{Z'}(x)dx + S_{Z'}(\frac{y}{p'}) \tag{3.21}$$

En utilisant le fait que $S_\mathcal{E}(y-px)$ est égal à 1 pour $x > \frac{y}{p}$, on obtient :

$$S_Z(\frac{y}{p}) = \int_{\frac{y}{p}}^\infty f_Z(x)dx = \int_{\frac{y}{p}}^\infty S_\mathcal{E}(y-px) f_Z(x)dx \tag{3.22}$$

On peut alors simplifier l'écriture de (3.21) de la manière suivante :

$$\forall\ y \geq 0,\ \ \int_y^\infty S_\mathcal{E}(y-px) f_Z(x)dx = \int_y^\infty S_{\mathcal{E}'}(y-p'x) f_{Z'}(x)dx \tag{3.23}$$

On obtient alors :

$$\forall\ y \geq 0,\ \ \int_y^\infty \left[S_\mathcal{E}(y-px) f_Z(x) - S_{\mathcal{E}'}(y-p'x) f_{Z'}(x)\right] dx = 0 \tag{3.24}$$

Si l'intégrande est non nul, il existera forcément par construction une valeur y_0 telle $\int_{y_0}^{\infty}[S_{\mathcal{E}}(y_0 - px)f_Z(x) - S_{\mathcal{E}'}(y_0 - p'x)f_{Z'}(x)]dx \neq 0$, ce qui est contradictoire avec la précédente équation. L'intégrande est donc nul pour toute valeur de x :

$$\forall\ y \geq 0\ \forall\ x \geq y\ \ S_{\mathcal{E}}(y - px)f_Z(x) - S_{\mathcal{E}'}(y - p'x)f_{Z'}(x) = 0 \tag{3.25}$$

Soit $u \geq 0$. On applique l'égalité précédente aux points suivants $(x = u, y = pu)$ et $(x = u, y = p'u)$ et on obtient :

$$\begin{array}{rcl} f_Z(u) & = & S_{\mathcal{E}'}((p - p')u)f_{Z'}(u) \\ f_{Z'}(u) & = & S_{\mathcal{E}}((p' - p)u)f_Z(u) \end{array} \tag{3.26}$$

Si $p > p'$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} f_Z(u) & = & S_{\mathcal{E}'}((p - p')u)f_{Z'}(u) \\ f_{Z'}(u) & = & f_Z(u) \end{array} \tag{3.27}$$

Comme $S_{\mathcal{E}'}$ n'est pas identiquement égal à 1, l'hypothèse aboutit à une contradiction.

L'hypothèse $p < p'$ aboutit de manière analogue à une contradiction. On a donc $p = p'$ et $f_{Z'}(u) = f_Z(u)$. On en déduit que Z et Z' ont la même loi.

D'autre part, l'équation (3.25) s'écrit alors :

$$\forall\ y \geq 0\ \forall\ x \geq y \quad S_{\mathcal{E}}(y - px) \ = \ S_{\mathcal{E}'}(y - px) \tag{3.28}$$

On ne peut pas directement écrire que les survies sont égales étant donné les conditions sur y et x. Soit $u > 0$. Pour $p \neq 1$, on pose $y > \frac{u}{1-p}$ et $x = \frac{y-u}{p}$. On vérifie forcément $x \geq y$. L'équation (3.28) devient alors :

$$S_{\mathcal{E}}(u) = S_{\mathcal{E}'}(u) \tag{3.29}$$

Si p est strictement inférieur à 1, on a donc prouvé que $S_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}'}$. Ce qui prouve que $(p, S_Z, S_{\mathcal{E}}) = (p', S_{Z'}, S_{\mathcal{E}'})$ et le modèle est identifiable. En revanche, pour $p = 1$, les survies de l'équation (3.28) étant forcément égales à 1, n'importe quelles survies $S_{\mathcal{E}}$ et $S_{\mathcal{E}'}$ vérifient l'égalité et le modèle n'est pas identifiable. Ce qui termine la démonstration. □

Il parait tout à fait logique de ne pas avoir d'identifiabilité de $S_{\mathcal{E}}$ et $S_{\mathcal{E}'}$ pour $p = 1$. En effet, si $p = 1$, on a :

$$Y = Z + \mathcal{E} > Z$$

Cela signifie que l'on n'observe que des MC et aucune MP. Il est alors impossible de déterminer les risques relatifs aux MP.

3.2.2 Fonction de vraisemblance

Dans une approche statistique, on calcule la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances. On utilise pour cela l'équation (1.110) obtenue dans la section 1.6.2. On obtient alors :

$$L(\theta; w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \left(\int_{w_i}^{\frac{w_i}{p}} f_{\mathcal{E}}(w_i - px) f_Z(x) dx \right)^{u_i} \left[S_{\mathcal{E}}((1-p)w_i) f_Z(w_i) \right]^{1-u_i} \quad (3.30)$$

où θ représente les paramètres du modèle.

Afin d'avoir un modèle exploitable, il est nécessaire de faire des hypothèses sur les lois de $\mathcal{E}$ et Z. L'idée la plus simple et que nous supposons à partir de la prochaine section est que ces lois sont exponentielles.

3.3 Le modèle alert-delay exponentiel

3.3.1 Définition

Une idée naturelle et qui permet d'obtenir des résultats simples est de supposer que les deux variables Z et $\mathcal{E}$ sont de lois exponentielles. On définit ainsi le modèle alert-delay exponentiel que l'on notera **EAD** (Exponential Alert-Delay) :

$$Y = pZ + \mathcal{E} \quad (3.31)$$

où :

- $p \in [0, 1]$.
- Z et $\mathcal{E}$ sont des variables aléatoires indépendantes.
- Z est de loi exponentielle de paramètre λ.
- $\mathcal{E}$ est de loi exponentielle de paramètre μ.

3.3.2 Propriétés

On reprend l'ensemble des expressions définies dans la section précédente en adaptant au cas exponentiel :

- **La fonction de survie jointe** :

$$S(y, z) = \begin{cases} e^{-\lambda z} & \text{si } y < pz \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - p\mu} e^{-[(\lambda - p\mu)z + \mu y]} - \dfrac{p\mu}{\lambda - p\mu} e^{-\frac{\lambda y}{p}} & \text{si } y \geq pz \end{cases} \quad (3.32)$$

- **La loi de l'instant de la MP potentielle** :

$$S_Y(y) = \frac{\lambda}{\lambda - p\mu} e^{-\mu y} - \frac{p\mu}{\lambda - p\mu} e^{-\frac{\lambda}{p} y} \quad (3.33)$$

Donc la loi de Y est un mélange de deux lois exponentielles.

- **La loi de l'instant de la prochaine maintenance** :

$$S_W(w) = \frac{\lambda}{\lambda - p\mu} e^{-[\lambda + (1-p)\mu]w} - \frac{p\mu}{\lambda - p\mu} e^{-\frac{\lambda}{p} w} \quad (3.34)$$

Donc la loi de W est aussi un mélange de deux lois exponentielles.

- **Les fonctions de sous-survie** :

$$S_Y^*(y) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda - p\mu)[\lambda + (1-p)\mu]} e^{-[\lambda+(1-p)\mu]y} - \frac{p\mu}{\lambda - p\mu} e^{-\frac{\lambda}{p}y} \tag{3.35}$$

$$S_Z^*(z) = \frac{\lambda}{\lambda + (1-p)\mu} e^{-[\lambda+(1-p)\mu]z} \tag{3.36}$$

- **La loi du type de la prochaine maintenance** :

$$P(U=0) = \frac{\lambda}{\lambda + (1-p)\mu} \qquad P(U=1) = \frac{(1-p)\mu}{\lambda + (1-p)\mu} \tag{3.37}$$

Comme attendu, si μ est grand et p pas trop proche de 1, la probabilité d'effectuer une MP est plus grande que la probabilité d'effectuer une MC. On retrouve quelques cas particuliers mis en évidence dans la section 3.1 :

– Si $p = 1$, $P(U = 1) = 0$, et on n'observe que des MC.
– Si $p = 1$ et $\mu = +\infty$, $P(U = 1) = 1$, et on n'observe que des MP.

- **Les fonctions de sous-survie conditionnelles** :

$$CS_Y^*(y) = \frac{\lambda}{(1-p)(\lambda - p\mu)} e^{-[\lambda+(1-p)\mu]y} - \frac{p(\lambda + (1-p)\mu)}{(1-p)(\lambda - p\mu)} e^{-\frac{\lambda y}{p}} \tag{3.38}$$

$$CS_Z^*(z) = e^{-[\lambda+(1-p)\mu]z} \tag{3.39}$$

On calcule alors la différence entre ces fonctions :

$$CS_Y^*(w) - CS_Z^*(w) = \frac{p[\lambda + (1-p)\mu]}{(1-p)(\lambda - p\mu)} \left[e^{-[\lambda+(1-p)\mu]w} - e^{-\frac{\lambda}{p}w} \right] \tag{3.40}$$

On montre facilement que cette quantité est positive :

$$\forall w > 0,\ CS_Z^*(w) \leq CS_Y^*(w) \tag{3.41}$$

Il s'agit exactement de la relation inverse obtenue avec l'hypothèse de signe aléatoire présentée dans la section 1.5.3.

- **La fonction ϕ** :

$$\phi(w) = \frac{\mu}{\lambda + (1-p)\mu} \frac{\lambda e^{-[\lambda+(1-p)\mu]w} - p[\lambda + (1-p)\mu] e^{-\frac{\lambda w}{p}}}{\lambda e^{-[\lambda+(1-p)\mu]w} - p\mu e^{-\frac{\lambda w}{p}}} \tag{3.42}$$

Si on dérive cette fonction, on obtient l'expression suivante :

$$\phi'(w) = \frac{\lambda\mu(1-p)(\lambda - p\mu)^2}{\lambda + (1-p)\mu} \frac{e^{-\frac{(\lambda - p\mu)(1-p)w}{p}}}{(\lambda e^{-(\lambda+(1-p)\mu)w} - p\mu e^{-\frac{\lambda w}{p}})^2} \tag{3.43}$$

Cette fonction est strictement positive ce qui signifie que la fonction ϕ est strictement croissante. Cela signifie que plus le temps passe, plus la probabilité que la prochaine maintenance soit préventive augmente.
Comme pour les sous-survies conditionnelles, c'est la propriété inverse de celle du modèle IPRA présenté dans la section 1.5.3.2. On a vu dans la section 1.6.3 que certains jeux de données, comme les données Norsk-Hydro, vérifient les propriétés des sous-survies conditionnelles et de la fonction ϕ de notre modèle. Nous avons donc de bonnes raisons de penser que ce modèle pourrait être adapté à ces données.

- **Les fonctions de sous-hasard** :

$$\lambda_c(w) = \frac{\lambda(\lambda - p\mu)}{\lambda - p\mu e^{-\frac{(1-p)(\lambda-p\mu)}{p}w}} \tag{3.44}$$

$$\lambda_p(w) = \lambda\mu \frac{1 - e^{-\frac{(1-p)(\lambda-p\mu)}{p}w}}{\lambda - p\mu e^{-\frac{(1-p)(\lambda-p\mu)}{p}w}} \tag{3.45}$$

3.4 Analyse statistique du modèle alert-delay exponentiel

3.4.1 Introduction

Dans cette section, trois méthodes différentes d'estimation sont proposées pour des données issues d'un modèle alert-delay exponentiel en considérant des maintenances parfaites. Dans ces conditions, cela revient à observer des couples (W_i, U_i) iid. La première approche consiste à utiliser les estimateurs non paramétriques des fonctions de sous-survie conditionnelles et de la fonction ϕ proposés dans la section 1.6.3. Les deux autres méthodes proposées sont la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Les qualités des estimateurs pour les deux méthodes paramétriques sont comparées à partir de simulations du modèle EAD.

3.4.2 Estimation non paramétrique

Afin de valider l'utilisation des estimateurs non paramétriques des CS^* et de ϕ définis dans les équations (1.112) et (1.113), on simule une succession de k maintenances selon le modèle EAD en choisissant comme paramètres $\lambda = 1$, $\mu = 10$ and $p = 0.7$.

Ce choix de paramètres aboutit à observer 75% de MP, ce qu'on peut supposer être une proportion réaliste. De plus, le délai est en moyenne dix fois plus court que la durée potentielle de panne et le signal émis par le système intervient à 70% de l'instant potentiel de la défaillance.

Dans un premier temps, un nombre peu élevé de maintenances est simulé ($k = 20$), afin de refléter les situations les plus courantes que l'on rencontre. En effet, la majorité des jeux de données, comme les données EDF1 présentées dans le tableau 2.1, comporte très peu de maintenances. La figure 3.1 représente les fonctions CS^* théoriques ainsi que leurs

estimateurs empiriques. On observe bien que $\widehat{CS_Y^*}$ est supérieure à $\widehat{CS_Z^*}$. L'estimation de ces fonctions est plutôt bonne pour $\widehat{CS_Y^*}$ mais moins satisfaisante pour $\widehat{CS_Z^*}$. Cela vient du fait que l'on observe un total de 3 défaillances.

La figure 3.2 présente la fonction ϕ théorique et son estimation non paramétrique pour le même jeu de paramètres. On observe que $\widehat{\phi}$ est légèrement croissant. Même si cette estimation est assez éloignée de la fonction théorique ϕ, les ordres de grandeurs des estimations sont respectés.

Les figures 3.3 et 3.4 présentent les mêmes couples de figures mais en considérant $k = 200$ maintenances. Il est aussi pertinent de considérer un grand nombre de maintenances puisque le jeu de données Norsk-Hydro comporte 321 maintenances. On observe que les fonctions CS_Z^*, CS_Y^* et ϕ sont très bien estimées.

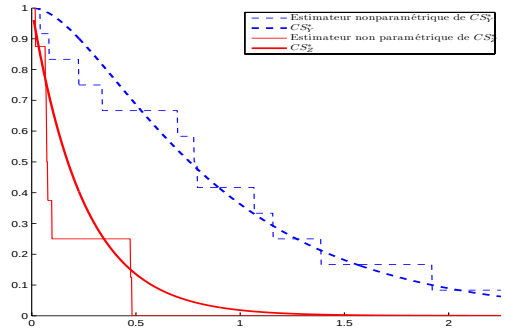


FIG. 3.1 – Fonctions CS^* théoriques et leurs estimateurs pour $k = 20$

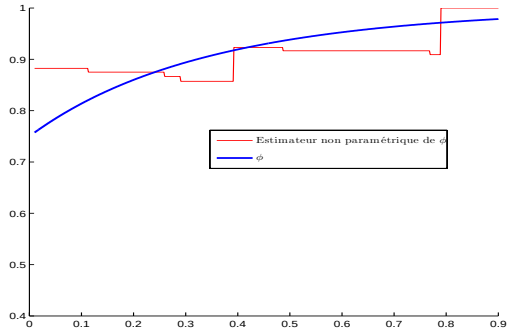


FIG. 3.2 – Fonction ϕ théorique et son estimateur pour $k = 20$

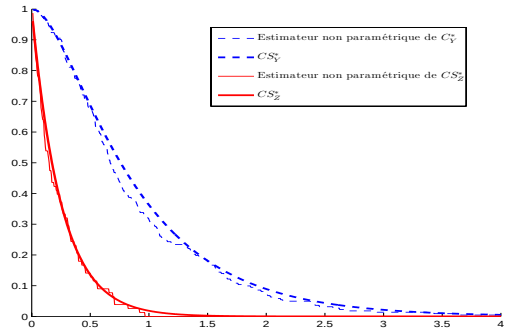


FIG. 3.3 – Fonctions CS^* théoriques et leurs estimateurs pour $k = 200$

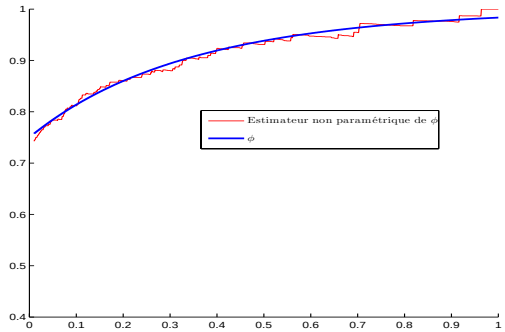


FIG. 3.4 – Fonction ϕ théorique et son estimateur pour $k = 200$

3.4.3 Estimation par maximum de vraisemblance

A partir de l'équation (3.30), nous pouvons estimer les paramètres λ, μ et p du modèle au vu de l'observation des k premières maintenances en maximisant la fonction de vraisemblance qui a l'expression suivante :

$$L(\lambda,\mu,p;w_1,\ldots,u_k)=\lambda^k\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{\mu}{\lambda-p\mu}\right]^{u_i}\left[e^{-[\lambda+(1-p)\mu]w_i}-e^{-\frac{\lambda}{p}w_i}\right]^{u_i}e^{-[\lambda+(1-p)\mu]w_i(1-u_i)} \tag{3.46}$$

Il n'y a pas d'expression explicite des estimateurs de maximum de vraisemblance, mais on pourra sans problèmes les calculer en maximisant numériquement la fonction ci-dessus.

3.4.4 Estimation par la méthode des moments

Afin d'effectuer une estimation par la méthode des moments, on calcule trois espérances dans le cadre du modèle EAD :

$$\begin{aligned} e_u &= E[U]=P(U=1)=P(Y<Z)\\ e_y &= E[Y|Y<Z]=\int_0^\infty CS_Y^*(y)dy\\ e_z &= E[Z|Z<Y]=\int_0^\infty CS_Z^*(z)dz \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ces espérances s'expriment en fonction de λ, μ and p de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e_u &= \frac{(1-p)\mu}{\lambda+(1-p)\mu}\\ e_y &= \frac{1}{(1-p)(\lambda-p\mu)}[\frac{\lambda}{\lambda+(1-p)\mu}-\frac{p^2(\lambda+(1-p)\mu)}{\lambda}]\\ e_z &= \frac{1}{\lambda+(1-p)\mu} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Chacune de ces espérances peut être estimée par sa moyenne empirique correspondante. Tout d'abord, e_u peut être estimée par la proportion de MP observées. e_y peut être estimée par la durée moyenne d'attente avant une MP et e_z par la durée moyenne d'attente avant une MC. A partir de l'observation de k maintenances, ces estimateurs que l'on notera $(\tilde{e_u},\tilde{e_y},\tilde{e_z})$, ont les expressions suivantes :

$$\tilde{e_u}=\frac{\sum_{i=1}^{k}u_i}{k} \qquad \tilde{e_y}=\frac{\sum_{i=1}^{k}w_iu_i}{\sum_{i=1}^{k}u_i} \qquad \tilde{e_z}=\frac{\sum_{i=1}^{k}w_i(1-u_i)}{k-\sum_{i=1}^{k}u_i} \tag{3.49}$$

Il est possible d'obtenir une expression des paramètres du modèle (λ,μ,p) comme fonction de (e_u,e_y,e_z) en inversant les 3 équations obtenues en (3.48). On obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1-e_u}{e_z}\\ \mu &= \frac{e_u}{e_z-(1-e_u)(e_y-e_z)}\\ p &= (1-e_u)(\frac{e_y}{e_z}-1) \end{aligned} \tag{3.50}$$

Ainsi, les estimateurs des moments des paramètres $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{p})$ sont obtenus en remplaçant les quantités (e_u, e_y, e_z) par leurs estimateurs $(\tilde{e_u}, \tilde{e_y}, \tilde{e_z})$ dans (3.50). Pour certains exemples, on peut obtenir des valeurs de $\tilde{p}$ plus grandes que 1 ou inférieures à 0. Quand cela se produit, $\tilde{p}$ est estimé à 1 ou 0 et les équations (3.50) doivent être adaptées afin de calculer $\tilde{\mu}$.

3.4.5 Résultats de simulations

Afin d'évaluer la qualité des estimateurs pour les deux méthodes paramétriques proposées, nous simulons plusieurs répliques du modèle EAD pour différents jeux de paramètres (λ, μ, p) et différentes tailles d'échantillons k. Pour chaque méthode, le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne (MSE) des estimateurs sont estimés par leur versions empiriques sur 2000 répliques. On désignera par B le biais empirique, et par V la variance empirique. L'erreur quadratique moyenne vérifie l'égalité suivante : $MSE = B^2 + V$. La fonction de vraisemblance ayant une expression complexe, nous avons préféré utiliser une maximisation de cette fonction sur une grille très fine plutôt que d'employer des méthodes de gradient. Le comportement de la fonction de vraisemblance semble suffisamment régulier pour valider cette méthode de maximisation.

Dans un premier temps, nous ne faisons varier que le paramètre p afin de prendre en compte l'instant d'alerte. Puis, seul le paramètre μ varie afin d'estimer l'impact du délai. Enfin, nous faisons varier la taille de l'échantillon en augmentant le nombre k de maintenances. Cela permet d'évaluer la vitesse de convergence des estimateurs. On considère que λ est un paramètre d'échelle. Il n'est donc pas nécessaire d'étudier les variations de ce paramètre.

3.4.5.1 Variations de p

Dans cette section, on considère les jeux de paramètres suivants : $\lambda = 1$, $\mu = 10$ et $p \in \{0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$. Pour ces valeurs de paramètres, la probabilité de réaliser une MP varie entre 50 % et 90%. Tout d'abord, on considère un nombre peu élevé de maintenances en fixant $k = 20$. Puis, nous avons effectué les mêmes estimations en considérant des tailles d'échantillon plus élevées en fixant $k = 200$. Les résultats sont présentés dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 pour $k = 20$ et dans les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6 pour $k = 200$.

p	$B[\hat{\lambda}]$	$B[\tilde{\lambda}]$	$V[\hat{\lambda}]$	$V[\tilde{\lambda}]$	$MSE(\hat{\lambda})$	$MSE(\tilde{\lambda})$
0.1	0.32	0.46	0.65	0.82	0.75	1.03
0.3	0.22	0.23	0.41	0.47	0.46	0.52
0.5	0.11	0.15	0.24	0.32	0.25	0.34
0.7	0.10	0.12	0.14	0.19	0.15	0.20
0.9	-0.10	-0.10	0.11	0.10	0.12	0.11

TAB. 3.1 – Biais et variance empirique des estimateurs de $\lambda = 1$ (k=20)

L'analyse de l'ensemble de ces résultats amène aux conclusions suivantes :

- La méthode de maximum de vraisemblance (MLE) est presque toujours plus performante que la méthode des moments (ME)

p	$B[\hat{\mu}]$	$B[\tilde{\mu}]$	$V[\hat{\mu}]$	$V[\tilde{\mu}]$	$MSE(\hat{\mu})$	$MSE(\tilde{\mu})$
0.1	4.90	7.94	111.01	128.44	135.03	191.48
0.3	3.25	6.26	124.42	141.00	134.99	180.18
0.5	3.11	5.12	131.26	129.56	140.93	155.77
0.7	2.93	3.01	128.87	136.65	137.45	145.71
0.9	-3.21	-4.12	198.31	224.11	208.61	241.08

TAB. 3.2 – Biais et variance empirique des estimateurs de $\mu = 10$ (k=20)

p	$B[\hat{p}]$	$B[\tilde{p}]$	$V[\hat{p}]$	$V[\tilde{p}]$	$MSE(\hat{p})$	$MSE(\tilde{p})$
0.1	0,052	0,192	0,021	0,111	0.0237	0.148
0.3	0,028	0,194	0,085	0,096	0.0858	0.133
0.5	0,010	0,123	0,103	0,117	0.103	0.132
0.7	-0,054	-0,027	0,069	0,073	0.072	0.074
0.9	-0,125	-0,122	0,069	0,079	0.0846	0.094

TAB. 3.3 – Biais et variance empirique des estimateurs de p (k=20)

p	$B[\hat{\lambda}]$	$B[\tilde{\lambda}]$	$V[\hat{\lambda}]$	$V[\tilde{\lambda}]$	$MSE(\hat{\lambda})$	$MSE(\tilde{\lambda})$
0.1	0.056	0.060	0.095	0.120	0.098	0.123
0.3	0.035	0.049	0.065	0.079	0.066	0.081
0.5	0.003	0.019	0.041	0.048	0.041	0.048
0.7	-0.013	-0.010	0.022	0.024	0.022	0.024
0.9	-0.044	-0.045	0.011	0.010	0.013	0.012

TAB. 3.4 – Biais et variance empirique des estimateurs de $\lambda = 1$ (k=200)

p	$B[\hat{\mu}]$	$B[\tilde{\mu}]$	$V[\hat{\mu}]$	$V[\tilde{\mu}]$	$MSE(\hat{\mu})$	$MSE(\tilde{\mu})$
0.1	0.765	0.995	8.155	13.131	8.740	14.121
0.3	0.785	1.243	11.544	20.012	12.160	21.557
0.5	1.001	1.491	27.999	38.916	29.002	41.139
0.7	1.102	1.692	57.824	79.456	59.030	82.319
0.9	1.034	1.252	61.767	80.557	62.836	82.129

TAB. 3.5 – Biais et variance empirique des estimateurs de $\mu = 10$ (k=200)

p	$B[\hat{p}]$	$B[\tilde{p}]$	$V[\hat{p}]$	$V[\tilde{p}]$	$MSE(\hat{p})$	$MSE(\tilde{p})$
0.1	0.009	0.010	0.004	0.006	0.004	0.006
0.3	0.013	0.013	0.009	0.016	0.009	0.016
0.5	0.002	0.005	0.012	0.015	0.012	0.015
0.7	-0.013	-0.015	0.016	0.018	0.016	0.018
0.9	-0.080	-0.079	0.021	0.018	0.027	0.024

TAB. 3.6 – Biais et variance empirique des estimateurs de p (k=200)

- λ et p sont particulièrement bien estimés, même pour un faible nombre de maintenances.
- Quelle que soit la méthode, μ est très mal estimé. Lorsque l'on considère un nombre important de maintenances, les biais des estimateurs de μ sont corrects mais les variances restent très élevées.
- A mesure que p augmente, la MSE des estimateurs de λ a tendance à décroître tandis que les MSE relatives à p et μ ont tendance à croître. En effet, lorsque p se rapproche de 1, la proportion de MC devient importante. Comme λ est un paramètre lié uniquement au processus des MC, il est naturel que son estimation s'en trouve meilleure quand p augmente. A l'inverse, comme p et μ sont des paramètres fortement liés a la politique de MP, il est logique que leur estimation se dégrade pour des p croissants.

3.4.5.2 Variations de μ

Dans cette partie, on tente d'évaluer l'impact du délai sur les estimations des paramètres. On choisit l'ensemble des jeux de paramètres suivants : $k = 20$, $\lambda = 1$, $\mu \in \{1; 2; 5; 10; 20; 50\}$ et $p = 0.7$. Nous ne jugeons pas nécessaire d'effectuer ces estimations pour $k = 200$ qui donneront des meilleurs résultats comme on l'a constaté dans la section précédente. Dans ces conditions, l'alerte intervient dans des délais réalistes (à 70% de l'instant potentiel de la défaillance). D'autre part, les variations du paramètre μ permettent d'observer une proportion de MP variant entre 23% et 94%. Comme dans la section précédente, le biais, la variance et la MSE des estimateurs sont estimés à partir de 2000 répliques pour chaque méthode. Les résultats sont présentés dans les tableaux 3.7, 3.8 et 3.9 :

μ	$B[\hat{\lambda}]$	$B[\tilde{\lambda}]$	$V[\hat{\lambda}]$	$V[\tilde{\lambda}]$	$MSE(\hat{\lambda})$	$MSE(\tilde{\lambda})$
1	0.01	0.02	0.03	0.09	0.03	0.09
2	0.04	0.04	0.09	0.11	0.09	0.11
5	0.08	0.09	0.11	0.19	0.12	0.19
10	0.11	0.12	0.16	0.21	0.17	0.22
20	-0.08	0.27	0.24	0.68	0.17	0.75
50	-0.1	0.49	0.25	1.01	0.24	1.25

TAB. 3.7 – Biais et variance empirique des estimateurs de $\lambda = 1$ ($k = 20$)

μ	$B[\hat{\mu}]$	$B[\tilde{\mu}]$	$V[\hat{\mu}]$	$V[\tilde{\mu}]$	$MSE(\hat{\mu})$	$MSE(\tilde{\mu})$
1	0.81	1.58	2.84	3.44	3.49	5.93
2	1.82	2.67	6.44	8.13	9.75	15.25
5	2.31	3.14	48.48	62.91	53.81	72.76
10	3.01	3.19	131.11	126.54	140.17	136.71
20	5.32	-1.28	187.99	166.67	216.29	168.30
50	5.99	-4.03	524.12	491.37	560.00	507.61

TAB. 3.8 – Biais et variance empirique des estimateurs de μ ($k = 20$)

μ	$B[\hat{p}]$	$B[\tilde{p}]$	$V[\hat{p}]$	$V[\tilde{p}]$	$MSE(\hat{p})$	$MSE(\tilde{p})$
1	-0.067	-0.141	0.063	0.098	0.102	0.118
2	-0.057	-0.078	0.053	0.101	0.104	0.107
5	-0.042	-0.089	0.052	0.069	0.071	0.077
10	-0.050	-0.018	0.073	0.070	0.072	0.070
20	-0.119	-0.029	0.135	0.134	0.148	0.135
50	-0.131	-0.033	0.157	0.147	0.164	0.149

TAB. 3.9 – Biais et variance empirique des estimateurs de $p = 0.7$ ($k = 20$)

L'analyse de ces tableaux renforce les conclusions précédentes. En effet, pour p et λ, les deux méthodes sont très proches et les résultats des estimations sont très bons à l'exception des très grandes valeurs de μ. Si on s'intéresse maintenant aux estimations de μ, on observe qu'elles restent très médiocres, quelle que soit la méthode d'estimation. D'autre part, on remarque que la méthode du maximum de vraisemblance est toujours plus performante que la méthode des moments pour le paramètre λ. Pour μ et p, la MLE est meilleure pour de faibles valeurs de μ mais la ME devient plus performante pour les grandes valeurs de μ.

3.4.5.3 Variations de k

Les figures 3.5, 3.6 et 3.7 représentent l'erreur quadratique moyenne des 2 méthodes d'estimation pour le jeu de paramètres $\lambda = 1$, $\mu = 10$ et $p = 0.7$ et différentes valeurs de k. Pour les 3 estimateurs, la MSE est visiblement convergente pour chacune des méthodes. Les MSE relatives aux estimations de λ et p sont très proches pour les deux méthodes mais sont meilleures pour la MLE. Ce resultat est bien plus marqué pour les estimations de μ.

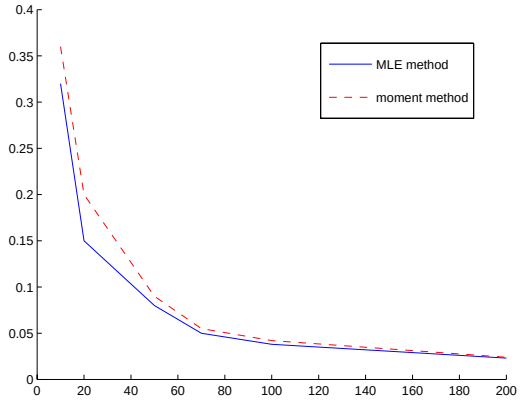


FIG. 3.5 – Estimation de la MSE de $\hat{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}$

En conclusion, la méthode du maximum de vraisemblance semble généralement plus performante que la méthode des moments quelle que soit la taille de l'échantillon et quel que soit l'estimateur considéré. Il faut donc privilégier la MLE à la ME.

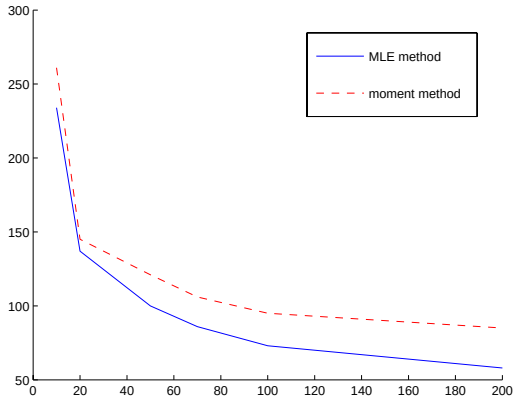


FIG. 3.6 – Estimation de la MSE de $\hat{\mu}$ et $\tilde{\mu}$

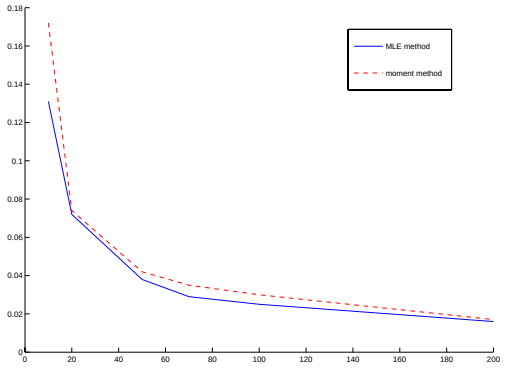


FIG. 3.7 – Estimation de la MSE de $\hat{p}$ et $\tilde{p}$

3.4.6 Application à un jeu de données réelles

On reprend l'analyse du jeu de données présenté dans la section 1.6.3. La forme des estimateurs non paramétriques de CS_Y^*, CS_Z^* et ϕ et le test de Wilcoxon sur la constance de ϕ avaient montré qu'un modèle avec ϕ croissant et $CS_Y^* > CS_Z^*$ semblait adapté. Le choix du modèle EAD semble donc approprié. On estime alors les paramètres du modèle EAD sur ce jeu de données avec les deux méthodes d'estimation paramétriques. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.10.

	λ	μ	p
MLE	0.020	0.029	0.001
Méthode des moments	0.026	0.041	0.124

Tab. 3.10 – Estimation des paramètres

Les estimations de λ et μ sont proches selon les deux méthodes. En revanche, la différence d'estimation pour le paramètre p entre les deux méthodes est importante en termes d'ordre de grandeur. Pourtant, le point à signaler le plus important est que ces estimations sont proches de 0. Cela correspond à avoir une faible dépendance entre les risques de MP et de MC. Afin de juger de la validité du modèle EAD sur les données, on calcule tout d'abord quelques quantités à partir des estimations. Par exemple, avec ces estimations, la probabilité de réaliser une MP est de 59.2% pour la méthode de maximum de vraisemblance et de 58.0% pour la méthode des moments. La proportion de MP pour le jeu de données étant de 58.9%, cela conforte le choix de notre modèle. De plus, le fait que ces probabilités soient proches malgré le fait que les estimations de p soient apparemment très différentes confirme le fait que seul l'ordre de grandeur de p est significatif.

Un autre moyen pour vérifier la pertinence de notre modèle est de superposer les courbes empiriques d'une part et celles théoriques utilisant les paramètres estimés d'autre part, obtenues pour les fonctions CS^* et ϕ. Pour la MLE, le fait que $\hat{p}$ soit très proche de 0 amène à une fonction ϕ pratiquement constante et des fonctions CS^* presque identiques, ce qui pour le dernier point est plutôt en désaccord avec les observations. Pour la méthode des moments, on remarque sur la figure (3.8) que l'allure de la fonction ϕ estimée est très proche de la fonction empirique. En revanche, les fonctions CS^* ne correspondent pas très bien à leur équivalent empirique.

Cela montre ainsi les limites de notre modèle. Il serait intéressant d'effectuer une analyse similaire des données en utilisant un modèle AD où les distributions ne soient pas exponentielles pour Z et $\mathcal{E}$. Cela permettrait de prendre en compte l'usure du système. On pourrait aussi choisir d'autres modèles pour lesquels $CS_Y^* > CS_Z^*$. D'autre part, on considère des maintenances parfaites, ce qui ne semble pas réaliste au vu du système considéré (usine de production d'ammoniac). Deux perspectives s'ouvrent alors suite à cette première étude :

- Proposer un modèle AD prenant en compte l'usure du système.
- Adapter le modèle AD aux risques concurrents généralisés (GCR) afin de prendre en compte des maintenances imparfaites.

Différentes pistes à ces deux problématiques sont proposées dans la section 4.4.

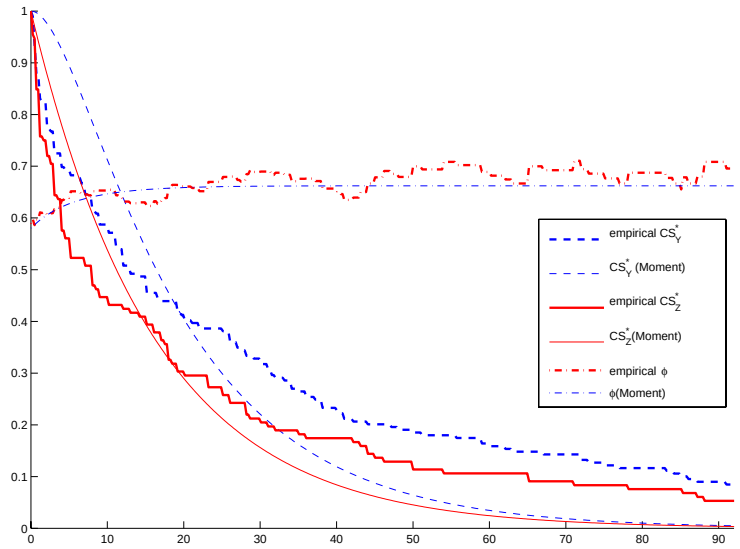


FIG. 3.8 – fonctions CS^* et ϕ empiriques et théoriques ajustées par la méthode des moments

3.4.7 Extension du modèle alert-delay

3.4.7.1 Définition

Jusqu'à présent, on a supposé que le signal d'alerte pour un système neuf intervenait à un instant proportionnel de la date potentielle de panne. On peut généraliser cette hypothèse en supposant que ce signal est une fonction g qu'on appelera *fonction alert-delay*. Il en découle le modèle suivant :

$$Y = g(Z) + \mathcal{E} \tag{3.51}$$

où :

- g est une fonction positive telle que :

$$\forall\, z > 0,\ g(z) \leq z \tag{3.52}$$

- Z et $\mathcal{E}$ sont des variables aléatoires indépendantes.
- Z a pour fonction de survie S_Z.
- $\mathcal{E}$ a pour fonction de survie $S_{\mathcal{E}}$, qui est strictement décroissante.

La condition (3.52) sur g est assez intuitive : le signal d'alerte doit intervenir avant la défaillance.

Il est possible pour ce modèle de calculer l'ensemble des fonctions usuelles des risques concurrents ($S(y,z)$, S^*_Y, S^*_Z, ϕ) sous forme intégrale qui ont des expressions proches de celles du modèle alert-delay de base. Pour ne pas alourdir le texte et du fait que nous n'appliquons pas ce modèle à des données de maintenance, nous ne donnons que l'expression des fonctions de sous-survies :

$$\begin{aligned} S_Z^*(z) &= \int_z^\infty S_{\mathcal{E}}(x-g(x))f_Z(x)dx \\ S_Y^*(y) &= \int_y^\infty S_{\mathcal{E}}(y-g(x))f_Z(x)dx - \int_y^\infty S_{\mathcal{E}}(x-g(x))f_Z(x)dx \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.4.7.2 Identifiabilité

On peut adapter le théorème 3.1 sur l'identifiabilité du modèle alert-delay de base proposé dans la section 3.2.1. Pour cela, on rajoute la condition H_0 suivante :

$$H_0 : \quad \lim_{x\to\infty}(x-g(x)) = +\infty \tag{3.54}$$

Théorème 3.2 *Sous H_0, le modèle alert-delay généralisé est faiblement identifiable.*

On sera aussi amené à utiliser la condition suivante :

$$H_{min} : \quad (\forall u > 0) \ \ (\exists x > 0) \quad (x-g(x)) \geq u \tag{3.55}$$

Démonstration : supposons que deux jeux de paramètres $(g, S_Z, S_{\mathcal{E}})$ et $(h, S_{Z'}, S_{\mathcal{E}'})$ donnent les mêmes fonctions de sous-survies S_Y^* et S_Z^*. En identifiant les fonctions de sous-survie, on retrouve un système d'équations similaire à celui obtenu en (3.26). Soit $u > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_Z(u) &= S_{\mathcal{E}'}(g(u)-h(u))f_{Z'}(u) \\ f_{Z'}(u) &= S_{\mathcal{E}}(h(u)-g(u))f_Z(u) \end{aligned} \tag{3.56}$$

Si $g(u)$ est différent de $h(u)$, l'une des survies est nécessairement égale à 1 car prise en une valeur négative et l'autre est strictement inférieure à 1 car cette fonction de survie est strictement décroissante. Cela aboutit à une contradiction, donc on a montré que g et h sont identiques et on en déduit que Z et Z' ont la même loi. On obtient alors une condition similaire à celle obtenue en (3.28) :

$$\forall \ y \geq 0, \ \forall \ x \geq y, \quad S_{\mathcal{E}}(y-g(x)) \ = \ S_{\mathcal{E}'}(y-g(x)) \tag{3.57}$$

Soit $u > 0$. Pour que $S_{\mathcal{E}}(u) = S_{\mathcal{E}'}(u)$, il faut trouver un couple (x, y) avec $y \leq x$, tel que $u = y - g(x)$. Cette condition n'est autre que H_{min}. On a donc prouvé l'identifiabilité faible du modèle sous H_{min}. L'hypothèse H_0 est une sous-hypothèse de H_{min} extrêmement peu contraignante et réaliste sur g et le modèle est donc faiblement identifiable sous H_0. □

On peut proposer une interprétation de l'hypothèse H_0. Si l'espace de temps entre le signal et la panne potentielle reste fini, il est impossible d'observer des grandes valeurs du délai $\mathcal{E}$. On ne peut alors pas identifier la queue de distribution de la loi du delai $\mathcal{E}$. Illustrons cette propriété par un exemple : supposons que le signal d'alerte ait lieu une durée T_0 avant la potentielle panne ou à l'instant 0 si la potentielle panne aura lieu avant T_0. La fonction d'alert delay est donc définie par :

$$\forall x \ \geq 0 \quad g_{T_0}(x) = (x-T_0)_+ = sup(x-T_0, 0) \tag{3.58}$$

Si le délai est supérieur à T_0, on observera nécessairement une défaillance. Il est donc impossible d'estimer la loi de $\mathcal{E}$ pour des valeurs supérieures à T_0 et le modèle n'est donc pas complètement identifiable. Il est donc nécessaire que l'écart entre le signal et la panne potentielle puisse prendre toutes les valeurs possibles. L'hypothèse minimale pour vérifier l'identifiabilité est H_{min}. Pour le modèle de base, la fonction alert-delay est la suivante :

$$\forall x \ \geq 0, \quad g_1(x) = px \ , \ p \in [0,1] \tag{3.59}$$

On vérifie bien que l'hypothèse H_0 n'est vérifiée que si p est différent de 1, d'où la condition sur p du théorème 3.1.

3.4.7.3 Discussion

Ce modèle général permet de prendre en compte des signaux d'alerte plus généraux que le modèle de base où cette alerte est proportionnelle à l'instant de panne potentielle. On peut donc adapter la fonction g selon le type de système considéré et suivant la politique de maintenance en vigueur. A titre illustratif, on peut supposer que la fonction alert-delay dépende de deux facteurs de proportionnalité $p_1 \in [0,1]$, $p_2 \in [0,1]$ et d'une durée x_0 :

$$\forall x \ \geq 0, \quad g_2(x) = \begin{cases} p_1 x & \text{si } x < x_0 \\ p_2(x - x_0) + p_1(x_0) & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \tag{3.60}$$

Comme cas particulier, on peut supposer que le signal se produit à un instant proportionnel à Z jusqu'à un instant prévu puis constant. Cela se rencontre pour des systèmes délivrant automatiquement une alerte pour des durées de fonctionnement importantes. La fonction alert-delay est alors la suivante :

$$\forall x \ \geq 0, \quad g_{seuil}(x) = \begin{cases} px & \text{si } x < x_0 \\ px_0 & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \tag{3.61}$$

Différents exemples de fonctions alert-delay sont présentés sur la figure 3.9.

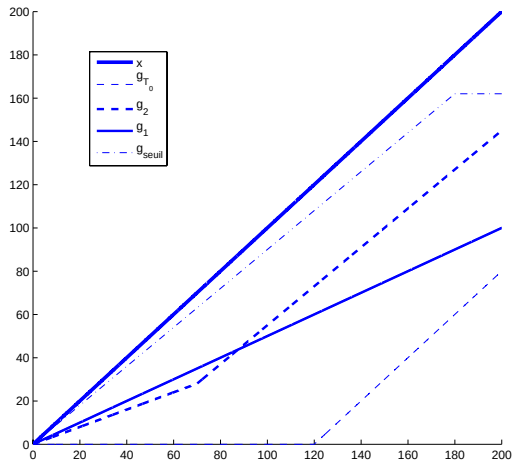


FIG. 3.9 – Exemples de fonctions alert delay

Chapitre 4

Quelques modèles de risques concurrents généralisés

Au cours de ce chapitre, plusieurs modèles de risques concurrents classiques sont généralisés dans le cadre des modèles GCR définis dans le chapitre 2. L'objectif est de prendre en compte le passé du processus afin de modéliser l'efficacité des maintenances. Dans un premier temps, on généralise les modèles IUCR définis dans la section 1.5.2. Cela permet d'obtenir une modélisation très simple et un modèle particulier est proposé, puis appliqué sur des données réelles. Ensuite, nous présentons plusieurs modèles pour lesquels les propriétés de la fonction ϕ se généralisent aux fonctions ϕ_{k+1} définies en (2.20). Nous proposons les modèles de signe aléatoire généralisés pour lequel ϕ_{k+1} est maximum à l'origine, puis des généralisations du modèle à hasards proportionnels où ϕ_{k+1} est constant et enfin quelques généralisations du modèle alert-delay où ϕ_{k+1} est croissante pour certaines extensions proposées. Pour les deux derniers modèles, certaines généralisations font intervenir le principe des âges virtuels.

4.1 Les modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants

4.1.1 Introduction

Les modèles de risques concurrents usuels (UCR) les plus simples sont les modèles à risques indépendants (IUCR) présentés dans la section 1.5.2. Ils sont par ailleurs au centre du problème crucial d'identifiabilité des modèles UCR. Nous proposons dans cette partie d'étudier leur équivalent dans le cadre des risques concurrents généralisés (GCR). Les modèles correspondants seront appelés modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants (CIGCR).

A priori, l'hypothèse d'indépendance des risques entre les MP et les MC semble contradictoire avec un de nos objectifs qui est précisément de prendre en compte la dépendance entre les deux types de maintenance. Mais nous allons voir que si cet argument est valable pour les IUCR, il ne le sera plus pour les CIGCR.

Dans un premier temps, nous allons donner les principales caractéristiques des modèles IUCR dont les risques sont exponentiels. Puis nous définirons les modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants. Nous énoncerons un résultat d'identifiabilité dans ce cadre analogue au théorème 1.1. Nous étudierons le cas où les lois de probabilité sous-jacentes sont exponentielles, ce qui permettra de construire des modèles exploitables. En particulier, nous détaillerons la construction d'un modèle à 5 paramètres pour lequel on peut facilement évaluer et prévoir à la fois la fiabilité du système étudié et les effets des maintenances.

4.1.2 Modèles IUCR exponentiels

C'est le cas où Y et Z sont indépendantes et de lois exponentielles. Par souci de cohérence, on notera λ_p et λ_c les paramètres respectifs des lois de Y et Z, qui, ici, seront donc des constantes.

Alors on voit immédiatement que W est de loi exponentielle de paramètre $\lambda_c + \lambda_p$ en utilisant l'équation (1.53). On observe donc un processus ponctuel dont les durées inter-évènements sont indépendantes et de même loi exponentielle, chaque évènement pouvant être de deux natures possibles. Il s'agit donc d'un *processus de Poisson homogène coloré*.

On montre facilement les résultats suivants :

- Les fonctions de sous-survie ont les expressions suivantes :

$$S_Z^*(z) = \frac{\lambda_c}{\lambda_p + \lambda_c}\, e^{-(\lambda_p+\lambda_c)z} \tag{4.1}$$

$$S_Y^*(y) = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \lambda_c}\, e^{-(\lambda_p+\lambda_c)y} \tag{4.2}$$

- Les fonctions de sous-hasards sont constantes :

$$\lambda_c(w) = \lambda_c \tag{4.3}$$

$$\lambda_p(w) = \lambda_p \tag{4.4}$$

- Les sous-survies conditionnelles sont égales et de forme exponentielle :

$$CS_Z^*(z) = CS_Y^*(z) = e^{-(\lambda_p+\lambda_c)z} \tag{4.5}$$

- ϕ est constante :

$$\phi(w) = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \lambda_c} \tag{4.6}$$

Enfin, à partir de l'équation (1.110), il est très facile d'estimer par maximum de vraisemblance les paramètres λ_p et λ_c de ce modèle au vu de l'observation de k maintenances entre 0 et t. Les estimations sont :

$$\hat{\lambda}_p = \frac{M_{c_k}}{t} = \frac{\text{nombre de MP observées}}{\text{durée totale de fonctionnement}} \tag{4.7}$$

$$\hat{\lambda}_c = \frac{N_{c_k}}{t} = \frac{\text{nombre de MC observées}}{\text{durée totale de fonctionnement}} \tag{4.8}$$

On souhaite désormais construire l'équivalent des résultats de cette section dans le cadre des risques concurrents généralisés.

4.1.3 Les modèles de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants (CIGCR)

Un **modèle de risques concurrents généralisés conditionnellement indépendants**, noté CIGCR pour *Conditionally Independent Generalized Competing Risks*, est un modèle GCR pour lequel les variables de risque Y_{k+1} et Z_{k+1} sont indépendantes conditionnellement au passé du processus : $\forall k \geq 0,\ \ \forall y \geq 0,\ \ \forall z \geq 0,$

$$P\left(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z | w_1, \ldots, u_k\right) = P\left(Y_{k+1} > y | w_1, \ldots, u_k\right) P\left(Z_{k+1} > z | w_1, \ldots, u_k\right) \tag{4.9}$$

c'est-à-dire :

$$S_{k+1}(y, z; w_1, \ldots, u_k) = S_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k)\ S_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.10}$$

Alors on a évidemment :

$$S_{W_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k) = S_{Y_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k)\ S_{Z_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.11}$$

Cette hypothèse signifie que, sachant tout l'historique des maintenances, les dates potentielles des prochaines MP et MC sont indépendantes. Mais ces dates peuvent dépendre des maintenances passées. On a donc bien ainsi exprimé une dépendance entre les deux types de maintenance, donc ce modèle peut s'avérer réaliste.

Les résultats (1.73) et (1.74) pour les modèles IUCR se généralisent facilement pour les modèles CIGCR et permettent de déterminer les expressions des intensités de MC, MP et globale pour les modèles CIGCR :

$$\lambda_t^N(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_{Z_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.12}$$

$$\lambda_t^M(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_{Y_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.13}$$

$$\lambda_t^K(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_{W_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.14}$$

Donc le modèle est entièrement défini par les lois conditionnelles de Y_{k+1} et Z_{k+1} sachant $(W_1 = w_1, \ldots, U_k = u_k)$.

Inversement, on obtient :

$$S_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = \exp\left(-\int_0^z \lambda_{c_k+u}^N(k; w_1, \ldots, u_k)\, du\right) \tag{4.15}$$

$$S_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = \exp\left(-\int_0^y \lambda_{c_k+u}^M(k; w_1, \ldots, u_k)\, du\right) \tag{4.16}$$

$$S_{W_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k) = \exp\left(-\int_0^w \lambda_{c_k+u}^K(k; w_1, \ldots, u_k)\, du\right) \tag{4.17}$$

4.1.4 Identifiabilité

Puisqu'on peut exprimer les fonctions de survie conditionnelles de Y_{k+1} et de Z_{k+1} en fonction des intensités de MP et de MC, c'est forcément que le modèle est identifiable. On peut aller plus loin en donnant l'équivalent du théorème 1.1 pour les modèles CIGCR :

Théorème 4.1 .

1. *Si $\{(Y_k, Z_k)\}_{k\geq 1}$ et $\{(\tilde{Y}_k, \tilde{Z}_k)\}_{k\geq 1}$ sont deux modèles CIGCR ayant les mêmes intensités de MP et de MC, alors les deux processus ont même loi, ce qui signifie que les lois conditionnelles de Y_{k+1} et de $\tilde{Y}_{k+1}$ sachant $(W_1 = w_1, \ldots, U_k = u_k)$ sont les mêmes et que les lois conditionnelles de Z_{k+1} et de $\tilde{Z}_{k+1}$ sachant $(W_1 = w_1, \ldots, U_k = u_k)$ sont les mêmes.*

2. *Soit $\{(Y_k, Z_k)\}_{k\geq 1}$ un modèle GCR quelconque. Alors il existe un modèle CIGCR et un seul $\{(\tilde{Y}_k, \tilde{Z}_k)\}_{k\geq 1}$ ayant les mêmes intensités de MP et de MC.*

Démonstration : La première partie du théorème est immédiate. En effet, à partir des équations (4.15) et (4.16), si les intensités de MP et de MC des deux modèles sont identiques, les lois conditionnelles sont nécessairement identiques.

Pour la seconde partie, on définit le modèle $\{(\tilde{Y}_k, \tilde{Z}_k)\}_{k\geq 1}$, en supposant que :

- Ce modèle fait l'hypothèse d'indépendance conditionnelle.
- $S_{\tilde{Y}_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = \exp\left(-\int_0^y \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k)\, du\right)$
- $S_{\tilde{Z}_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = \exp\left(-\int_0^z \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k)\, du\right)$

où λ^M_t et λ^N_t sont les intensités de MP et de MC du modèle $\{(Y_k, Z_k)\}_{k\geq 1}$. Alors, l'intensité de MC pour le modèle $\{(\tilde{Y}_k, \tilde{Z}_k)\}_{k\geq 1}$ s'obtient en utilisant (4.12) :

$$\begin{aligned}
\lambda^{\tilde{N}}_t(k; w_1, \ldots, u_k) &= \lambda_{\tilde{Z}_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \\
&= \frac{-d}{dt} \ln S_{\tilde{Z}_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \\
&= \frac{-d}{dt}\left[-\int_0^{t-c_k} \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k)\, du\right] \\
&= \lambda^N_t(k; w_1, \ldots, u_k)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

De manière similaire, on démontre que $\lambda^{\tilde{M}}_t(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda^M_t(k; w_1, \ldots, u_k)$. Cela termine la démonstration du théorème. □

En clair, cela signifie d'abord que, quand on suppose que les effets des maintenances sont quelconques, même si on observe les dates et les types de toutes les maintenances, ce ne sera pas suffisant pour déterminer la loi des durées d'attente des prochaines MP et MC potentielles, sauf si on suppose que celles-ci sont indépendantes conditionnellement au passé. Par ailleurs, pour tout modèle GCR, il existe un modèle CIGCR donnant les mêmes observations. En particulier, pour tout modèle d'âge virtuel généralisé, il existe un modèle CIGCR équivalent.

Donc si notre objectif est simplement de prévoir le futur du processus des maintenances, on peut très bien supposer que les dates des prochaines MP et MC potentielles sont conditionnellement indépendantes. Mais si on veut avoir des informations sur ce que serait le processus des défaillances en l'absence de MP, il faut faire des hypothèses sur la loi conjointe de (Y_{k+1}, Z_{k+1}) sachant $(W_1 = w_1, \ldots, U_k = u_k)$.

4.1.5 Modèles CIGCR exponentiels

C'est le cas où les lois conditionnelles de Y_{k+1} et Z_{k+1} sachant $(W_1 = w_1, \ldots, U_k = u_k)$ sont des lois exponentielles. Les paramètres de ces lois sont donc des fonctions de $(w_1, \ldots, u_k)$. On les notera respectivement $\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k)$ et $\lambda^Z(w_1, \ldots, u_k)$. Les taux de hasard correspondants sont donc constants :

$$\forall y \geq 0,\ \lambda_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = \lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.19}$$

$$\forall z \geq 0,\ \lambda_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = \lambda^Z(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.20}$$

et les fonctions de survie sont :

$$S_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = e^{-\lambda^Z(w_1,\ldots,u_k)\, z} \tag{4.21}$$

$$S_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = e^{-\lambda^Y(w_1,\ldots,u_k)\, y} \tag{4.22}$$

Alors la fonction de survie jointe est :

$$S_{k+1}(y, z; w_1, \ldots, u_k) = e^{-\lambda^Y(w_1,\ldots,u_k)\, y - \lambda^Z(w_1,\ldots,u_k)\, z} \tag{4.23}$$

et la loi conditionnelle de W_{k+1} est encore une loi exponentielle :

$$S_{W_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k) = e^{-[\lambda^Y(w_1,\ldots,u_k) + \lambda^Z(w_1,\ldots,u_k)]\, w} \tag{4.24}$$

Les équations (4.12), (4.13) et (4.14) permettent d'écrire les intensités de MC, MP et globale de ce modèle :

$$\lambda_t^N(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda^Z(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.25}$$

$$\lambda_t^M(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.26}$$

$$\lambda_t^K(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) + \lambda^Z(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.27}$$

On remarque que ces trois intensités ne dépendent pas directement de l'instant présent t mais seulement du passé du processus des maintenances à cet instant. Ce n'est pas une situation de processus ponctuel classique.

On retrouve pour les fonctions de sous-survie et de sous-survie conditionnelles généralisées des résultats équivalents à ceux des modèles IUCR exponentiels obtenus en (4.1), (4.2) et (4.5) :

$$\begin{aligned} S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) &= \frac{\lambda^Z(w_1, \ldots, u_k)}{\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) + \lambda^Z(w_1, \ldots, u_k)} \\ &\times\ e^{-[\lambda^Y(w_1,\ldots,u_k) + \lambda^Z(w_1,\ldots,u_k)]\, z} \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} S^*_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) &= \frac{\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k)}{\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) + \lambda^Z(w_1, \ldots, u_k)} \\ &\times\ e^{-[\lambda^Y(w_1,\ldots,u_k) + \lambda^Z(w_1,\ldots,u_k)]\, y} \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$CS^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = CS^*_{Y_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = e^{-[\lambda^Y(w_1,\ldots,u_k) + \lambda^Z(w_1,\ldots,u_k)]\, z} \tag{4.30}$$

Les sous-survies conditionnelles sont égales, comme pour des IUCR exponentiels, résultat obtenu en (4.6). Pour la fonction ϕ_{k+1}, on obtient :

$$\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k)}{\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) + \lambda^Z(w_1, \ldots, u_k)} \tag{4.31}$$

Donc $\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k)$ est constante en w, mais dépend du passé du processus.

Enfin, à partir de (2.21), on peut déterminer la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances entre 0 et t, qui vaut :

$$L_t(\theta; w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \lambda^Z(w_1, \ldots, u_{i-1})^{1-u_i} \lambda^Y(w_1, \ldots, u_{i-1})^{u_i}$$

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{k+1} \left[\lambda^Y(w_1, \ldots, u_{i-1}) + \lambda^Z(w_1, \ldots, u_{i-1})\right] w_i\right) \tag{4.32}$$

avec par convention $w_{k+1} = t - c_k$.

On ne peut pas aller plus loin tant qu'on n'a pas précisé comment λ_Y et λ_Z dépendent de $(w_1, \ldots, u_k)$. Pour cela, il faut déterminer comment on va modéliser la dépendance entre les MP et les MC. Nous proposons un modèle exploitable dans la section suivante.

4.1.6 Un modèle CIGCR exponentiels exploitable

La dépendance entre les MP et les MC peut se traduire de la façon suivante. S'il y a eu beaucoup de défaillances (donc de MC) dans le passé, le matériel étudié n'est pas assez fiable. Pour l'améliorer, on aura donc tendance à anticiper les MP, c'est-à-dire à effectuer les MP plus tôt que prévu. Inversement, si on a fait beaucoup de MP dans le passé, l'effet de ces MP devrait être de retarder l'apparition des défaillances. Enfin, on peut supposer qu'une défaillance peut avoir un impact sur les futures potentielles défaillances. Cette dernière hypothèse permet de prendre en compte le phénomène de défaillances en cascades régulièrement observé sur certains systèmes.

En résumé, beaucoup de MC peuvent accélérer les MP et éventuellement les MC et beaucoup de MP peuvent retarder les MC. Il s'agit de construire un modèle qui reflète ces hypothèses.

Au départ, un matériel neuf a un taux de MP λ_p et un taux de MC λ_c, ce qui signifie que Y_1 et Z_1 sont de lois exponentielles de paramètres respectifs λ_p et λ_c. On suppose de plus que ces variables sont indépendantes.

Nous considérons ici que retarder une maintenance revient à multiplier le taux concerné par une constante inférieure à 1. De même, anticiper une maintenance revient à multiplier le taux concerné par une constante supérieure à 1.

Ainsi, si la première maintenance est une MP ($u_1 = 1$), on va supposer que :

- $\lambda^Y(w_1, 1) = \lambda_p$.
- $\lambda^Z(w_1, 1) = \alpha\lambda_c$ avec $\alpha > 0$.

Cela signifie que si la première maintenance est une MP, on ne change pas la fréquence d'apparition de la prochaine MP, et si $\alpha < 1$, on diminue la fréquence d'apparition de la prochaine MC. On peut ainsi traduire le fait que la MP a pour but de retarder l'apparition des défaillances.

De même, si la première maintenance est une MC ($u_1 = 0$), on va supposer que :

- $\lambda^Y(w_1, 0) = \beta\lambda_p$ avec $\beta > 0$.
- $\lambda^Z(w_1, 0) = \gamma\lambda_c$ avec $\gamma > 0$.

Cela signifie que si la première maintenance est une MC et si $\beta > 1$, on augmente la fréquence d'apparition de la prochaine MP et modifie la fréquence d'apparition de la prochaine MC. Plus précisément, si $\gamma > 1$, cela signifie que cette fréquence augmente : la MC retarde la future défaillance. A l'inverse, si $\gamma < 1$, cela signifie que cette fréquence diminue : la défaillance accélère l'arrivée d'une future panne.

On a ainsi traduit le fait que la défaillance a pour effet d'amener l'équipe de maintenance à anticiper les MP et pris en compte la possibilité de cascades de défaillances.

On synthétise ces deux cas sous la forme suivante :

- $\lambda^Y(w_1, u_1) = \lambda_p \beta^{1-u_1}$.
- $\lambda^Z(w_1, u_1) = \lambda_c \alpha^{u_1} \gamma^{1-u_1}$.

En faisant les mêmes hypothèses sur les maintenances suivantes, on obtient au bout du compte :

$$\lambda^Y(w_1, \ldots, u_k) = \lambda_p \beta^{\sum_{i=1}^{k}(1-u_i)} = \lambda_p \beta^{N_{c_k}} \tag{4.33}$$

$$\lambda^Z(w_1, \ldots, u_k) = \lambda_c \alpha^{\sum_{i=1}^{k} u_i} \gamma^{\sum_{i=1}^{k}(1-u_i)} = \lambda_c \alpha^{M_{c_k}} \gamma^{N_{c_k}} \tag{4.34}$$

N_{c_k} et M_{c_k} sont respectivement les nombres de MC et de MP survenues avant la $k^{\text{ème}}$ maintenance. On a $N_{c_k} + M_{c_k} = k$.

On peut définir le modèle par :

1. La loi conditionnelle de Y_{k+1} sachant $(w_1, \ldots, u_k)$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda_p \beta^{N_{c_k}}$.
2. La loi conditionnelle de Z_{k+1} sachant $(w_1, \ldots, u_k)$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda_c \alpha^{M_{c_k}} \gamma^{N_{c_k}}$.
3. Y_{k+1} et Z_{k+1} sont indépendantes conditionnellement à $(w_1, \ldots, u_k)$.

Les équations (4.25), (4.26) et (4.27) fournissent les intensités de MC, MP et globale de ce modèle :

$$\lambda_t^N(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_c \alpha^{M_{c_k}} \gamma^{N_{c_k}} \tag{4.35}$$

$$\lambda_t^M(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_p \beta^{N_{c_k}} \tag{4.36}$$

$$\lambda_t^K(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_p \beta^{N_{c_k}} + \lambda_c \alpha^{M_{c_k}} \gamma^{N_{c_k}} \tag{4.37}$$

Ces intensités ne dépendent que des nombres de MP et de MC effectuées à chaque instant et pas des instants des maintenances ni de l'instant présent. C'est une idée proche de la classe des modèles dits à durées inter-défaillances exponentielles (ETBF, [41]) développés en fiabilité des logiciels.

Les 5 paramètres du modèle peuvent s'interpréter facilement :

- λ_c caractérise la fiabilité intrinsèque du système : c'est le taux de défaillance du système si on ne le maintient pas.
- λ_p caractérise la politique de maintenance préventive initiale : c'est le taux d'occurrence des MP si on remplace le système par un neuf à chaque défaillance.

- α caractérise l'efficacité de la MP : plus α est petit, plus la MP va réussir à retarder la défaillance.
- β caractérise la réactivité de l'équipe de maintenance : plus β est grand, plus on va anticiper les MP en cas de défaillance. Notons qu'il n'est pas souhaitable de trop anticiper la MP : la MP doit être effectuée le plus près possible de la défaillance potentielle.
- γ reflète l'impact d'une défaillance sur les défaillances ultérieures.

4.1.7 Un modèle plus général

Pour le précédent modèle, les intensités dépendent du nombre total de MP et de MC effectués dans le passé. Plutôt que de faire intervenir le nombre total de MP et de MC, il pourrait être pertinent de s'intéresser aux successions de maintenances : seule une succession de MP va retarder la MC, seule une succession de MC va entraîner une anticipation de la MP et un impact sur la MC. Plus simplement, on peut supposer que seul le dernier type de maintenance a un effet sur les futures MP et MC. A cet effet, on généralise le modèle précédent en modifiant les équations (4.35) et (4.36). On introduit des fonctions $\varphi(w_1, \ldots, u_k)$ et $\psi(w_1, \ldots, u_k)$ qui dépendent du passé du processus. Par souci de simplicité, nous noterons ces fonctions φ_k et ψ_k respectivement. Finalement, on fait les hypothèses suivantes :

$$\lambda_t^N(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k} \tag{4.38}$$

$$\lambda_t^M(k; w_1, \ldots, u_k) = \lambda_p \beta^{\varphi_k} \tag{4.39}$$

Si l'on considère que l'effet des maintenances porte sur l'ensemble des maintenances, on obtient :

$$\varphi_k = N_{c_k} \qquad \psi_k = M_{c_k} \tag{4.40}$$

Si l'on considère que cet effet porte sur les dernières maintenances successives observées, on aboutit à :

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{k} (1 - u_j) \qquad \psi_k = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{k} u_j \tag{4.41}$$

Cela signifie que seule une succession de MP ou de MC peut retarder ou anticiper la future maintenance. φ_k représente alors le nombre de MC successives effectuées avant la $k^{\text{ème}}$ maintenance comprise et ψ_k le nombre de MP successives effectuées avant la $k^{\text{ème}}$ maintenance comprise.

Si l'on considère que l'effet des maintenances porte uniquement sur la dernière maintenance :

$$\begin{array}{lll} \varphi_k = 1 - u_k & , \quad \psi_k = u_k & \text{pour } k \geq 1, \\ \varphi_k = 0 & , \quad \psi_k = 0 & \text{pour } k = 0. \end{array} \tag{4.42}$$

Il suffit maintenant d'appliquer les résultats généraux des modèles CIGCR exponentiels pour calculer les fonctions de sous-survies, de sous-survie conditionnelles et la fonction

ϕ_{k+1} :

$$S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}}{\lambda_p \beta^{\varphi_k} + \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}} \, e^{-[\lambda_p \beta^{\varphi_k} + \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}]\, z} \tag{4.43}$$

$$S^*_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\lambda_p \beta^{\varphi_k}}{\lambda_p \beta^{\varphi_k} + \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}} \, e^{-[\lambda_p \beta^{\varphi_k} + \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}]\, y} \tag{4.44}$$

$$CS^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = CS^*_{Y_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = e^{-[\lambda_p \beta^{\varphi_k} + \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}]\, z} \tag{4.45}$$

$$\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\lambda_p \beta^{\varphi_k}}{\lambda_p \beta^{\varphi_k} + \lambda_c \alpha^{\psi_k} \gamma^{\varphi_k}} \tag{4.46}$$

Enfin, la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances entre 0 et t est :

$$L_t(\lambda_p, \lambda_c, \alpha, \beta, \gamma; w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_c \alpha^{\psi_{i-1}} \gamma^{\varphi_{i-1}})^{1-u_i} \, (\lambda_p \beta^{\varphi_{i-1}})^{u_i}$$

$$\exp\left(- \sum_{i=1}^{k+1} \left[\lambda_p \beta^{\varphi_{i-1}} + \lambda_c \alpha^{\psi_{i-1}} \gamma^{\varphi_{i-1}} \right] \, w_i \right) \tag{4.47}$$

Maximiser cette fonction va permettre d'estimer les 5 paramètres du modèle λ_p, λ_c, α et β et γ.

En annulant les dérivées partielles du logarithme de la vraisemblance par rapport à chacun des 4 paramètres, on obtient que les estimations de maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_p$, $\hat{\lambda}_c$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ vérifient :

- $\hat{\lambda}_p$ et $\hat{\lambda}_c$ ont des expressions explicites en fonction de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\lambda}_p = \frac{M_{C_k}}{\sum_{i=1}^{k+1} \hat{\beta}^{\varphi_{i-1}} W_i} \qquad \hat{\lambda}_c = \frac{N_{C_k}}{\sum_{i=1}^{k+1} \hat{\alpha}^{\psi_{i-1}} \hat{\gamma}^{\varphi_{i-1}} W_i} \tag{4.48}$$

- $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont solution de trois équations implicites :

$$\left[\sum_{i=1}^{k} (1 - U_i) \psi_{i-1} \right] \left[\sum_{i=1}^{k+1} \hat{\alpha}^{\psi_{i-1}} \hat{\gamma}^{\varphi_{i-1}} W_i \right] = N_{C_k} \sum_{i=1}^{k+1} \hat{\alpha}^{\psi_{i-1}} \hat{\gamma}^{\varphi_{i-1}} \psi_{i-1} W_i \tag{4.49}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k} (1 - U_i) \varphi_{i-1} \right] \left[\sum_{i=1}^{k+1} \hat{\alpha}^{\psi_{i-1}} \hat{\gamma}^{\varphi_{i-1}} W_i \right] = N_{C_k} \sum_{i=1}^{k+1} \hat{\alpha}^{\psi_{i-1}} \hat{\gamma}^{\varphi_{i-1}} \varphi_{i-1} W_i \tag{4.50}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k} U_i \varphi_{i-1} \right] \left[\sum_{i=1}^{k+1} \hat{\beta}^{\varphi_{i-1}} W_i \right] = M_{C_k} \sum_{i=1}^{k+1} \hat{\beta}^{\varphi_{i-1}} \varphi_{i-1} W_i \tag{4.51}$$

On peut résoudre numériquement ces équations puis injecter les valeurs obtenues dans les équations précédentes, et on obtient ainsi les estimations de maximum de vraisemblance des 5 paramètres. L'interprétation des valeurs obtenues permet d'évaluer à la fois la fiabilité du système et l'efficacité des 2 types de maintenance. Les fonctions de sous-survies et la fonction ϕ permettent de prévoir le futur immédiat de l'ensemble du processus.

4.1.8 Applications à des données réelles

4.1.8.1 Etude des données $EDF1$

On étudie les données EDF répertoriées sous le nom $EDF1$ fournies dans le tableau 2.1 étudiées dans le chapitre 2. On rappelle que l'on dispose, pour 17 unités de production supposées indépendantes et de fonctionnement identique, de leur instant de mise en fonctionnement, de leurs instants de maintenances préventives et correctives et de leur date de fin d'observation. Il n'est pas possible d'effectuer en l'état une estimation des paramètres du modèle CIGCR ci-dessus, puisque ces données comprennent pour chacun des systèmes très peu de maintenances en moyenne. Pour cette raison et tout en restant infiniment prudent sur l'analyse des résultats, nous avons aggloméré ces données, pour ne plus considérer qu'un système global ayant les mêmes propriétés que chacun des systèmes. Les tableaux 4.1 et 4.2 donnent les instants et types de maintenances pour les données agglomérées.

82	158	201	298	311	321	742
788	853	1090	1207	1462	1667	1705
1942	2008	2073	2145	2259	2602	2689
2921	3011	3528	3559	4120	4394	4454

Tab. 4.1 – Instants de maintenances (données agglomérées)

0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0

Tab. 4.2 – Effets de maintenances (données agglomérées)

Pour ces estimations, nous supposons que $\gamma = 1$, ce qui signifie qu'une défaillance n'a pas d'impact sur les défaillances futures. Les résultats d'estimation sont alors une simplification des résultats obtenus en (4.48), (4.49), (4.50) et (4.51). On effectue successivement deux estimations des paramètres du modèle, d'une part en considérant que l'effet de la maintenance dépend de la totalité des maintenances (4.40) et d'autre part que cet effet ne dépend que des dernières maintenances successives (4.41). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.3.

Maintenances totales	$\hat{\lambda}_p = 0.0063$	$\hat{\lambda}_c = 0.044$	$\hat{\alpha} = 0.945$	$\hat{\beta} = 0.915$
Maintenances successives	$\hat{\lambda}_p = 0.0031$	$\hat{\lambda}_c = 0.016$	$\hat{\alpha} = 1.675$	$\hat{\beta} = 1.255$

Tab. 4.3 – Résultats de l'estimation

Si on considère le modèle 'maintenances totales', on constate que les estimations des paramètres α et β sont proches de 1. Cela signifie que les maintenances ne sont pas efficaces et ne parviennent ni à retarder l'apparition des futures MC ni à anticiper les

$Tr1$	290 (MC)	336 (MC)	353 (MC)	413 (MC)	444 (MP)
	453 (MC)	563 (MC)	585 (MC)	598 (MC)	699 (MC)
	857 (MC)	1055 (MC)	1602 (MC)	1784 (MC)	1785 (MC)
	1804 (MC)	1856 (MC)	1923 (MC)	1925 (MC)	1948 (MP)
	2296 (MC)	2400 (MC)	2944 (MC)	3410 (MP)	4748 (MC)
	4851 (MP)	5548 (MP)	6038 (MC)	6093 (MC)	6113 (Censure)
$Tr2$	186 (MP)	542 (MC)	728 (MC)	809 (MC)	986 (MC)
	985 (MC)	1062 (MC)	1067 (MC)	1237 (MP)	1479 (MC)
	2679 (MP)	4127 (MP)	4189 (MC)	5421 (MC)	5466 (MP)
	6113 (Censure)				
$Tr3$	843 (MP)	1977 (MC)	2361 (MP)	3557 (MC)	3727 (MP)
	4530 (MC)	4703 (MC)	4912 (MC)	5536 (MC)	5887 (MP)
	6113 (Censure)				
$Tr4$	237 (MC)	339 (MC)	547 (MP)	751 (MC)	968 (MC)
	1616 (MP)	3003 (MP)	3851 (MC)	3980 (MC)	4794 (MC)
	5224 (MP)	6113 (Censure)			

TAB. 4.4 – Données EDF2 : instants et types des maintenances (en jours).

futures MP. D'autre part, l'estimation pour le modèle 'maintenances successives' aboutit au fait que les MP sont nuisibles puisqu'elles accélèrent l'apparition des pannes ($\hat{\alpha} > 1$). Enfin, la MC aboutit bien à anticiper les MP ($\hat{\beta} > 1$).

4.1.8.2 Etude des données $EDF2$

Nous effectuons une étude relative aux problèmes d'érosion pour certains composants de production d'electricité d'EDF. Ces données portent sur 4 tranches, désignées sous les noms de Tr1,..., Tr4. Les données mises en forme pour l'estimation sont présentées dans le tableau 4.4. Pour chaque système, nous disposons des instants de MP, de MC et la date de fin d'observation, considérée comme une censure.

Pour chacune des tranches du système et pour les deux modèles utilisés, les résultats des estimations sont donnés dans les tableaux 4.5 à 4.8. Les paramètres λ_p et λ_c étant des paramètres d'échelle sans rapport avec l'efficacité des maintenances, nous ne ferons pas de commentaires sur les valeurs de leurs estimations.

Maintenances totales	$\hat{\lambda_p} = 7,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 1.2,10^{-2}$	$\hat{\alpha} = 0.547$	$\hat{\beta} = 1.013$
Maintenances successives	$\hat{\lambda_p} = 5,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 6,10^{-4}$	$\hat{\alpha} = 0.309$	$\hat{\beta} = 1.19$

TAB. 4.5 – Résultats pour Tr1

Pour $Tr1$, on constate que l'estimation de α dans les deux modèles est bien inférieure à 1 ce qui signifie que les maintenances préventives parviennent à retarder les futures défaillances. Plus précisément, les estimations proches de 0.5 signifient que la durée d'attente d'une panne double approximativement après chaque MP. Concernant l'estimation de β, on obtient des valeurs légèrement supérieures à 1. Cela signifie que suite à une

Maintenances totales	$\hat{\lambda_p} = 1,10^{-3}$	$\hat{\lambda_c} = 6.4,10^{-3}$	$\hat{\alpha} = 0.549$	$\hat{\beta} = 0.98$
Maintenances successives	$\hat{\lambda_p} = 6,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 2.4,10^{-3}$	$\hat{\alpha} = 0.58$	$\hat{\beta} = 1.35$

TAB. 4.6 – Résultats pour Tr2

Maintenances totales	$\hat{\lambda_p} = 5,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 2,10^{-4}$	$\hat{\alpha} = 2.09$	$\hat{\beta} = 1.14$
Maintenances successives	$\hat{\lambda_p} = 5,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 1.1,10^{-3}$	$\hat{\alpha} = 0.879$	$\hat{\beta} = 1.42$

TAB. 4.7 – Résultats pour Tr3

Maintenances totales	$\hat{\lambda_p} = 6,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 2.7,10^{-2}$	$\hat{\alpha} = 0.68$	$\hat{\beta} = 1.04$
Maintenances successives	$\hat{\lambda_p} = 3,10^{-4}$	$\hat{\lambda_c} = 1.7,10^{-3}$	$\hat{\alpha} = 0.66$	$\hat{\beta} = 1.91$

TAB. 4.8 – Résultats pour Tr4

maintenance corrective, la date de la prochaine MP est anticipée mais dans une légère mesure.

Pour $Tr2$, les conclusions sont pratiquement identiques à celles de la première tranche. Les MP sont sensiblement efficaces et retardent l'apparition des futures défaillances. Les MC n'ont pratiquement aucun effet si on considère le modèle avec 'maintenances totales' et plutôt efficaces pour le modèle avec 'maintenances successives'.

Pour $Tr3$, les résultats de l'estimation pour le modèle 'maintenances totales' sont très surprenants. Une valeur proche de 2 pour α correspond à diviser par deux le temps d'attente d'une panne à la suite d'une MP ce qui est à l'opposé de la politique de maintenance voulue. Cette valeur plutôt aberrante peut-être due à un nombre trop faible d'observations. Remarquons qu'un problème similaire a été observé en analysant ces données avec le modèle de Brown-Proschan dans [25]. En revanche, concernant les résultats pour le modèle 'maintenances successives', on conclut que les MP sont légèrement efficaces et parviennent à retarder l'apparition des défaillances et que les MC sont plutôt efficaces.

Pour $Tr4$, les conclusions sont comparables à la majorité des résultats précédents : pour les deux modèles, les MP sont plutôt efficaces. Concernant l'efficacité des MC, on conclut à des maintenances non efficaces pour le modèle 'maintenances totales' et des maintenances très efficaces pour le modèle 'maintenances successives'.

4.1.9 Etude des données "Hydrodata"

On reprend l'étude des données "Hydrodata" présentées dans la section 1.6.3.2. Les résultats d'estimation suivant les deux modèles utilisés sont donnés dans le tableau 4.9.

Maintenances totales	$\hat{\lambda_p} = 0.0149$	$\hat{\lambda_c} = 0.0303$	$\hat{\alpha} = 0.9972$	$\hat{\beta} = 1.0017$
Maintenances successives	$\hat{\lambda_p} = 0.0209$	$\hat{\lambda_c} = 0.0238$	$\hat{\alpha} = 1.0728$	$\hat{\beta} = 0.9899$

TAB. 4.9 – Résultats pour Norsk-Hydro

On constate tout d'abord que l'estimation par les deux méthodes aboutit à des résultats

du même ordre de grandeur. Plus précisément, on observe que les paramètres relatifs à l'efficacité des maintenances sont très proches de 1. Cela signifie donc que les MP et MC passées n'ont pas d'influence sur les instants de maintenance futurs. Il parait donc raisonnable d'envisager un modèle de risques concurrents usuel pour l'étude de ces données, ce qui conforte la validité de cette méthode utilisée dans [13].

4.2 L'hypothèse de signe aléatoire généralisée (GRS)

4.2.1 Définition

Dans un modèle UCR, l'hypothèse de signe aléatoire, définie dans la section 1.5.3, consiste à supposer le type d'une maintenance U indépendant de l'instant potentiel de défaillance Z. Le principe de **l'hypothèse de signe aléatoire généralisée**, noté **GRS** pour *Generalized Random Sign assumption*, est une généralisation de l'hypothèse classique afin de prendre en compte le passé du processus. Cette généralisation se place dans le cadre des modèles GCR présentés dans le chapitre 2. Le principe de cette hypothèse est qu'après k maintenances, on suppose les variables U_{k+1} et Z_{k+1} indépendantes conditionnellement au passé du processus $(W_1 = w_1, \ldots, U_k = u_k)$. L'interprétation de cette hypothèse est analogue au cas des UCR : conditionnellement au passé et quel que soit l'instant de la future potentielle défaillance, la probabilité de faire une MP ou une MC est indépendante de cet instant.

Il est possible de dégager certaines propriétés de l' hypothèse de signe aléatoire généralisée :

- La fonction de sous-survie généralisée $S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) &= P(Z_{k+1} > z, Z_{k+1} < Y_{k+1} \,|w_1, \ldots, u_k) \\ &= P(Z_{k+1} > z, U_{k+1} = 0 \,|w_1, \ldots, u_k) \\ &= P(Z_{k+1} > z \,|w_1, \ldots, u_k) P(U_{k+1} = 0 \,|w_1, \ldots, u_k) \\ &= S_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) S^*_{Z_{k+1}}(0; w_1, \ldots, u_k) \end{aligned} \tag{4.52}$$

- La fonction de sous-survie conditionnelle généralisée $CS^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k)$ vérifie :

$$CS^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = \frac{S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k)}{S^*_{Z_{k+1}}(0; w_1, \ldots, u_k)} = S_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.53}$$

- Comme dans le cadre UCR avec l'équation (1.85), on peut comparer les fonctions de sous-survies conditionnelles généralisées :

  Propriété 4.1 *:*

$$CS^*_{Z_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k) > CS^*_{Y_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.54}$$

  Démonstration : On note $q(w_1, \ldots, u_k)$ la probabilité conditionnelle que la $(k+1)^{\text{ème}}$ maintenance soit préventive : $q(w_1, \ldots, u_k) = P(U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
CS^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k) &= \frac{S^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(0;w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \frac{P(W_{k+1}>w,U_{k+1}=1|w_1,\ldots,u_k)}{q(w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \frac{P(Y_{k+1}>w,Z_{k+1}>w,U_{k+1}=1|w_1,\ldots,u_k)}{q(w_1,\ldots,u_k)} \\
&\leq \frac{P(Z_{k+1}>w,U_{k+1}=1|w_1,\ldots,u_k)}{q(w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \frac{q(w_1,\ldots,u_k)S_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}{q(w_1,\ldots,u_k)} \\
&= CS^*_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)\ \square
\end{aligned} \tag{4.55}$$

- Comme dans le cadre des UCR avec l'équation (1.84), ϕ_{k+1} est maximale à l'origine :

  Propriété 4.2 $\forall\, w \geq 0\ ,\ \phi_{k+1}(w;w_1,\ldots,u_k) \leq \phi_{k+1}(0;w_1,\ldots,u_k)$

  Démonstration : Il suffit de reprendre la définition de ϕ_{k+1} et d'utiliser le résultat précédent de la propriété 4.1 :

$$\begin{aligned}
\phi_{k+1}(w;w_1,\ldots,u_k) &= \frac{S^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)+S^*_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{S^*_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1-q(w_1,\ldots,u_k)}{q(w_1,\ldots,u_k)}\dfrac{CS^*_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}{CS^*_{Y_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)}} \\
&\leq \frac{1}{1+\dfrac{1-q(w_1,\ldots,u_k)}{q(w_1,\ldots,u_k)}} \\
&= q(w_1,\ldots,u_k) \\
&= \phi_{k+1}(0;w_1,\ldots,u_k)\ \square
\end{aligned} \tag{4.56}$$

  Propriété 4.3 *: L'intensité de maintenance corrective a l'expression suivante :*

$$\lambda^N_t(K,U) = \lambda_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)[1-\phi_{k+1}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)] \tag{4.57}$$

  Démonstration : En utilisant l'équation (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
\lambda^N_t(K,U) &= \lambda_{c,k+1}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k) \\
&= \frac{(-S^*_{Z_{k+1}})'(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)+S^*_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \frac{(-S_{Z_{k+1}})'(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)S^*_{Z_{k+1}}(0;w_1,\ldots,u_k)}{S^*_{Y_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)+S^*_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \frac{(-S_{Z_{k+1}})'(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)\dfrac{S^*_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)}{S_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)}}{S^*_{Y_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)+S^*_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)} \\
&= \lambda_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)[1-\phi_{k+1}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)]\ \square
\end{aligned} \tag{4.58}$$

- Cooke [18] a donné une condition d'existence d'un modèle de signe aléatoire dans le cadre UCR. Nous généralisons cette condition de la manière suivante.

Théorème 4.2 *Il existe un modèle GCR avec l' hypothèse de signe aléatoire généralisé ayant comme intensités de MP et de MC λ^N et λ^M si et seulement si :*

$$\begin{aligned}&\forall t \geq 0, \quad \forall k \geq 1, \quad \int_t^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_t^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du \\ &\leq \int_0^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du\end{aligned} \tag{4.59}$$

Démonstration : La première implication est immédiate en utilisant la propriété 4.2. Tout d'abord, on réécrit ϕ_{k+1} en fonction des intensités de maintenance en utilisant les équations (1.15) et (1.16) :

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) &= \frac{S^*_{Y_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k)}{S_{W_{k+1}}(w; w_1, \ldots, u_k)} \\ &= \frac{\int_w^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du}{e^{-\int_0^w \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv}} \\ &= \int_w^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_w^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du\end{aligned} \tag{4.60}$$

La propriété 4.2 se réécrit alors sous la forme (4.59).
Nous allons maintenant démontrer l'implication réciproque. Pour cela, on suppose que les intensités de maintenance vérifient (4.59). Il s'agit désormais de construire un modèle GCR avec l'hypothèse de signe aléatoire généralisée pour lequel les fonctions de sous-survie généralisées concordent avec les intensités λ^N_t et λ^M_t.
On utilisera les notations et conventions suivantes :

$$q_{k+1} = q_{k+1}(w_1, \ldots, u_k) = \int_0^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du \tag{4.61}$$

$$h_1(t) = h_1(t; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\int_t^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du}{\int_0^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du} \tag{4.62}$$

$$h_2(t) = h_2(t; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\int_t^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du}{\int_0^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k;w_1,\ldots,u_k)dv} du} \tag{4.63}$$

Les fonctions h_1 et h_2 seront les fonctions CS^* du modèle construit. Dans ces conditions, des calculs simples montrent que si (4.59) est vérifiée, alors $h_1(t; w_1, \ldots, u_k) < h_2(t; w_1, \ldots, u_k)$. Cela entraîne $h_1^{-1}(h_2(t; w_1, \ldots, u_k); w_1, \ldots, u_k) \leq t$.

Nous définissons à présent le modèle suivant :

– Z_{k+1} a pour fonction de survie conditionnelle h_2,
– Conditionnellement au passé, U_{k+1} est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre q_{k+1}, indépendante de Z_{k+1}.
– Y_{k+1} est définie par :

$$Y_{k+1} = (1 - U_{k+1})(Z_{k+1} + 1) + U_{k+1} h_1^{-1}(h_2(Z_{k+1})) \tag{4.64}$$

Pour $U_{k+1} = 0$, $Y_{k+1} = Z_{k+1} + 1 > Z_{k+1}$. Pour $U_{k+1} = 1$, $Y_{k+1} = h_1^{-1}(h_2(Z_{k+1})) \leq Z_{k+1}$. Donc, on a défini un modèle GCR. Ce modèle est un modèle de signe aléatoire généralisé d'après la seconde hypothèse. Vérifions que sous la condition (4.59), les fonctions de sous-survie généralisées calculées à partir des intensités de maintenance ou à partir de notre modèle sont les mêmes. Tout d'abord, on part des intensités :

$$S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) = \int_z^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du \tag{4.65}$$

$$S^*_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = \int_y^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du \tag{4.66}$$

D'autre part, ces fonctions pour notre modèle valent :

$$\begin{aligned}
S^*_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) &= P(Z_{k+1} > z, U_{k+1} = 0 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= S_{Z_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) P(U_{k+1} = 0 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= h_2(z; w_1, \ldots, u_k)(1 - q_{k+1}(w_1, \ldots, u_k)) \\
&= \frac{\displaystyle\int_z^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du}{\displaystyle\int_0^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du} \\
&\times (1 - \int_0^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du) \\
&= \frac{\displaystyle\int_z^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du}{\displaystyle\int_0^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du} \\
&\times \int_0^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du \\
&= \int_z^\infty \lambda^N_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$
\begin{aligned}
&S^*_{Y_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) = P(Y_{k+1} > y, U_{k+1} = 1 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= P((1 - U_{k+1})(Z_{k+1} + 1) + U_{k+1} h_1^{-1}(h_2(Z_{k+1})) > y, U_{k+1} = 1 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= P(h_1^{-1}(h_2(Z_{k+1})) > y, U_{k+1} = 1 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= P(h_1^{-1}(h_2(Z_{k+1})) > y|w_1, \ldots, u_k) P(U_{k+1} = 1 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= P((h_2(Z_{k+1})) > h_1(y)|w_1, \ldots, u_k) P(U_{k+1} = 1 \,|w_1, \ldots, u_k) \\
&= h_1(y)\; q_{k+1}(w_1, \ldots, u_k) \\
&= \frac{\displaystyle\int_y^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du}{\displaystyle\int_0^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du} \\
&\times \int_0^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du \\
&= \int_y^\infty \lambda^M_{c_k+u}(k; w_1, \ldots, u_k) e^{-\int_0^u \lambda^K_{c_k+v}(k; w_1, \ldots, u_k) dv} du
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Ce qui termine la démonstration. □

Nous proposons à présent deux modèles supposant l'hypothèse de signe aléatoire généralisée. Nous généralisons le modèle repair-alert et le modèle de censure hautement corrélé défini au cours du chapitre 1.

4.2.2 Le modèle Repair Alert généralisé

Le modèle Repair Alert a été défini dans la section 1.5.3.2. Si on se place après la $k^{\text{ème}}$ maintenance, les hypothèses afin de généraliser ce modèle sont les suivantes :

- Le modèle suppose l'hypothèse de signe aléatoire généralisée.
- Il existe une suite de fonctions croissantes G_{k+1} vérifiant $\forall k \geq 0,\ G_{k+1}(0) = 0$ telles que :

$$
P(Y_{k+1} \leq y | Z_{k+1} = z, Y_{k+1} \leq Z_{k+1}, w_1, \ldots, u_k) = \frac{G_{k+1}(y; w_1, \ldots, u_k)}{G_{k+1}(z; w_1, \ldots, u_k)} \tag{4.69}
$$

  Comme pour le modèle RA classique, ces fonctions reflètent la réactivité de l'équipe de maintenance.
- La probabilité conditionnelle que la prochaine maintenance soit une MP est :

$$
P(Y_{k+1} < Z_{k+1} | w_1, \ldots, u_k) = q(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.70}
$$

On peut exprimer l'impact du passé sur le processus des maintenances de différentes façons :

– $q(w_1, \ldots, u_k)$ peut refléter la politique de maintenance. Si beaucoup de MC sont observées, tout doit être fait afin d'éviter une future MC et la valeur de $q(w_1, \ldots, u_k)$ doit être élevée. Par exemple, on peut proposer cette paramétrisation :

$$q(w_1, \ldots, u_k) = 1 - (1-q)^{N_{C_k}+1} \tag{4.71}$$

Comme pour le modèle CIGCR présenté dans la section 4.1.7, on peut s'intéresser au nombre de MC consécutives dans le passé plutôt qu'au nombre total de MC. On obtient alors :

$$q(w_1, \ldots, u_k) = 1 - (1-q)^{\sum_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{k} (1-u_j)+1} \tag{4.72}$$

– Les fonctions G_{k+1} peuvent être adaptées pour refléter la réactivité de l'équipe de maintenance au fil du temps. Par exemple, on peut supposer qu'il existe une fonction G croissante telle que

$$G_{k+1}(t; w_1, \ldots, u_k) = G(t)^{N_{C_k}+1} \tag{4.73}$$

En faisant cette hypothèse, les maintenances préventives potentielles interviendront juste avant la potentielle défaillance. En effet, on obtient :

$$P(Y_{k+1} \in [z-h; z] | Z_{k+1} = z, Y_{k+1} \leq Z_{k+1}, w_1, \ldots, u_k) = 1 - \left(\frac{G(z-h)}{G(z)} \right)^{N_{C_k}+1}, \tag{4.74}$$

qui tend vers 1 quand k augmente.

Là encore, nous avons choisi une écriture faisant intervenir le nombre total de MC, mais on peut prendre en compte le nombre de MC consécutives dans le passé du processus.

– La loi de Z_{k+1} peut prendre en compte l'efficacité des maintenances dans le passé du processus.

Tout comme Lindqvist et al. [57] ont prouvé l'identifiabilité faible du modèle RA dans le cadre UCR, on peut prouver que le modèle Repair Alert reste identifiable dans cette version généralisée.
D'autre part, on peut donner l'expression de l'intensité de défaillance pour notre modèle. Pour ne pas alourdir les formules, nous notons $q_{k+1} = q(w_1, \ldots, u_k)$ et $G_{k+1}(t) = G_{k+1}(t; w_1, \ldots, u_k)$. On obtient alors :

$$\lambda_t^N(k; w_1, \ldots, u_k) = \frac{(1-q_{k+1}) f_{Z_{k+1}}(t-c_k)}{S_{Z_{k+1}}(t-c_k) - q_{k+1} G_{k+1}(t-c_k) \int_{t-c_k}^{\infty} \frac{f_{Z_{k+1}(u)}}{G_{k+1}(u)} du} \tag{4.75}$$

où $f_{Z_{k+1}}$ et $S_{Z_{k+1}}$ sont respectivement la densité et la fonction de survie de Z_{k+1} conditionnellement au passé.
L'expression des intensités est trop complexe pour fournir des estimations paramétriques explicites des paramètres, même pour des hypothèses simples sur Z_{k+1}, G_{k+1} et q_{k+1}. Toutefois, des estimations numériques peuvent être implémentées de manière efficace.

4.2.3 Modèle de censure hautement corrélé généralisé

Le modèle de censure hautement corrélé a été défini dans la section 1.5.3.3. Si on se place après la $k^{\text{ème}}$ maintenance, les hypothèses afin de généraliser ce modèle sont les suivantes :

- Le modèle suppose l'hypothèse de signe aléatoire généralisée.
- $Y_{k+1} = (1 - p\delta_{k+1})Z_{k+1}$, où δ_{k+1} est une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-1, +1\}$ indépendante de Z_{k+1} conditionnellement au passé, avec $p \in [0, 1]$.
- La probabilité conditionnelle que la $(k+1)^{\text{ème}}$ maintenance soit préventive est :

$$q(w_1, \ldots, u_k) = P(Y_{k+1} < Z_{k+1}|w_1, \ldots, u_k) = P(\delta_{k+1} = +1|w_1, \ldots, u_k)$$

La discussion sur comment fixer les paramètres du modèle est similaire à celle de la section précédente :

– L'influence du passé des maintenances sur la future maintenance peut être prise en compte à travers $q(w_1, \ldots, u_k)$. Par exemple, $q(w_1, \ldots, u_k)$ peut être élevé si beaucoup de MC sont intervenues dans le passé immédiat et modéré si beaucoup de MP ont eu lieu. On peut alors proposer les équations (4.71) et (4.72), présentées dans la section précédente. On peut remarquer que le paramètre p du modèle pourrait aussi dépendre du passé du processus : $p(w_1, \ldots, u_k)$. Cela signifierait que le risque de MP pourrait intervenir plus ou moins tôt.

– Le risque Z_{k+1} doit prendre en compte les efficacités des maintenances effectuées dans le passé. Par exemple, on peut construire la loi de Z_{k+1} en partant du principe qu'une MP tend à rallonger la durée d'attente de la potentielle prochaine défaillance. De nombreuses hypothèses sur la loi de Z_{k+1} sont alors possibles.

4.3 Modèles à hasards proportionnels généralisés (GPH)

4.3.1 Définition

Nous généralisons dans le cadre GCR les modèles à hasards proportionnels définis dans la section 1.5.4. Un **modèle à hasards proportionnels généralisé**, noté **GPH** pour *Generalized Proportional Hazards model* est un modèle GCR pour lequel les variables aléatoires W_{k+1} et U_{k+1} sont indépendantes conditionnellement au passé du processus. Cela signifie que l'instant et le type de la prochaine maintenance sont indépendants conditionnellement au passé du processus.

Les fonctions de sous-survies généralisées vérifient :

$$\begin{aligned} S^*_{Y_{k+1}}(y, w_1, \ldots, u_k) &= P(W_{k+1} > y, U_{k+1} = 1|w_1, \ldots, u_k) \\ &= P(W_{k+1} > y|w_1, \ldots, u_k)P(U_{k+1} = 1|w_1, \ldots, u_k) \\ &= S_{W_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k)q(w_1, \ldots, u_k) \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned} S^*_{Z_{k+1}}(z, w_1, \ldots, u_k) &= P(W_{k+1} > z, U_{k+1} = 0|w_1, \ldots, u_k) \\ &= P(W_{k+1} > z|w_1, \ldots, u_k)P(U_{k+1} = 0|w_1, \ldots, u_k) \\ &= S_{W_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k)[1 - q(w_1, \ldots, u_k)] \end{aligned} \tag{4.77}$$

Pour les modèles à hasards proportionnels classiques, la fonction ϕ est constante. Cette propriété se généralise aux fonctions $\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k)$ qui sont constantes en w :

$$\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = P(U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k) = S^*_{Y_{k+1}}(0, w_1, \ldots, u_k) = q(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.78}$$

On peut s'intéresser aux fonctions de sous-hasards généralisées qui ont l'expression suivante :

$$\lambda_{c,k+1}(z; w_1, \ldots, u_k) = [1 - q(w_1, \ldots, u_k)]\lambda_{W_{k+1}}(z; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.79}$$

$$\lambda_{p,k+1}(y; w_1, \ldots, u_k) = q(w_1, \ldots, u_k)\lambda_{W_{k+1}}(y; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.80}$$

On en déduit à partir des équations (2.14) et (2.15) l'écriture des intensités de maintenance :

$$\lambda^N_t(k; w_1, \ldots, u_k) = [1 - q(w_1, \ldots, u_k)]\lambda_{W_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.81}$$

$$\lambda^M_t(k; w_1, \ldots, u_k) = q(w_1, \ldots, u_k)\lambda_{W_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.82}$$

En particulier, on obtient la relation suivante :

$$\lambda^M_t(k; w_1, \ldots, u_k) = \theta(w_1, \ldots, u_k)\lambda^N_t(k; w_1, \ldots, u_k) \tag{4.83}$$

avec $\theta(k, w_1, \ldots, u_k) = \dfrac{q(w_1, \ldots, u_k)}{1 - q(w_1, \ldots, u_k)}$.

Cette formule généralise celle obtenue dans l'équation (1.96) pour des intensités proportionnelles dans le cadre UCR. On peut alors parler de modèle à intensités de maintenance proportionnelles, avec un coefficient de proportionnalité dépendant du passé du processus.

Pour plus de clarté, on notera :

$$q_{k+1} = q(w_1, \ldots, u_k) \text{ et } \theta_{k+1} = \frac{q_{k+1}}{1 - q_{k+1}} \tag{4.84}$$

Enfin, la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances sur un intervalle [0,t] vaut :

$$L_t(\theta; w_1, .., u_k) = S_{W_{k+1}}(t - c_k; w_1, \ldots, u_k) \prod_{i=1}^{k} q_i^{u_i}(1 - q_i)^{1-u_i} f_{W_i}(w_i; w_1, \ldots, u_{i-1}) \tag{4.85}$$

Cette écriture s'obtient en utilisant l'expression de la fonction de vraisemblance obtenue en (2.21) et les résultats sur les modèles GPH obtenus en (4.79) et (4.80). On remarque que, pour un modèle GPH, la fonction de vraisemblance est le produit de deux vraisemblances : l'une liée aux lois conditionnelles des U_{k+1} et l'autre aux lois conditionnelles des W_{k+1}. En particulier, il est possible de faire une estimation disjointe des paramètres liés aux deux lois conditionnelles si ces lois ne font pas intervenir des paramètres communs.

Définir un modèle GPH revient à définir les lois conditionnelles des W_{k+1} ainsi que les probabilités conditionnelles d'effectuer une MP $P(U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k)$. Par la suite, nous présentons deux approches différentes des modèles GPH. Dans les deux sections suivantes,

nous proposons quelques exemples de lois conditionnelles pour U_{k+1} tout d'abord, puis pour W_{k+1}, en effectuant des estimations lorsque cela est possible. Les paramètres liés aux lois conditionnelles de U_{k+1} seront liés à la réactivité de l'équipe de maintenance tandis que les paramètres liés aux lois conditionnelles de W_{k+1} seront liés à l'usure du système ainsi qu'à l'efficacité des maintenances. Enfin, dans la section 4.3.4, nous proposons une approche basée sur les modèles GVA et nous étudions un modèle particulier.

4.3.2 Hypothèses sur les lois conditionnelles des U_{k+1}

Pour toutes les hypothèses que l'on propose, on suppose que la probabilité d'effectuer une MP avant la première défaillance pour un système neuf est q :

$$\begin{array}{rcl} P(U_1 = 1) & = & q \\ P(U_1 = 0) & = & 1 - q \end{array} \tag{4.86}$$

4.3.2.1 Vigilance constante

On suppose que la probabilité d'effectuer une MP conditionnellement au passé est constante :

$$P(U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k) = q \tag{4.87}$$

C'est la situation la plus simple où le passé n'influe pas sur le type de la future maintenance. A partir de l'observation de k maintenances, q est simplement estimé par la proportion de MP :

$$\hat{q} = \frac{\sum_{i=1}^{k} U_i}{k} = \frac{M_{c_k}}{k} \tag{4.88}$$

4.3.2.2 Deux états de vigilance

On considère que la probabilité conditionnelle de MP dépend uniquement du type de la dernière maintenance :

$$P(U_{k+1} = 1 | w_1, ..., u_k) = \begin{cases} q & \text{si } u_k = 1, \text{ la dernière maintenance est préventive} \\ r & \text{si } u_k = 0, \text{ la dernière maintenance est corrective} \end{cases} \tag{4.89}$$

Une valeur de r supérieure à q signifie qu'il y a une vigilance plus grande après une MC.

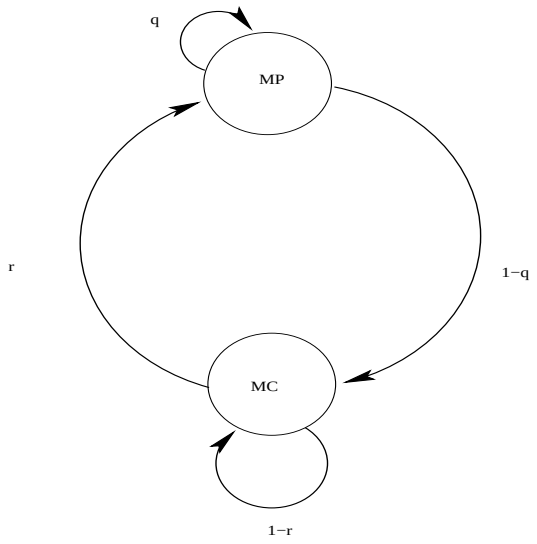
On constate que dans ce modèle le processus $\{U_i\}_{i \geq 1}$ est en fait une chaîne de Markov homogène. En effet, les probabilités d'effectuer une MC dépendent uniquement du type de la dernière maintenance :

$$\forall k \geq 0, \quad P(U_{k+1} = 1 | w_1, \ldots, u_k) = q^{u_k} r^{1-u_k} \tag{4.90}$$

La matrice P des transitions relative à cette chaîne de Markov est :

$$P = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ 1-q & q \end{pmatrix} \tag{4.91}$$

Voici le graphe de Markov associé :



Cette chaîne de Markov admet une loi stationnaire $\pi = (\pi_{MC}, \pi_{MP})$. Ces valeurs correspondent aux proportions à terme des MP et des MC. On obtient les résultats suivants :

$$\pi_{MP} = \frac{r}{1 + r - q}$$

$$\pi_{MC} = \frac{1 - q}{1 + r - q}$$

On constate que la proportion de MP π_{MP} est une fonction croissante de r et de q. C'est logique car r et q sont les probabilités d'effectuer une maintenance préventive après une MC et une MP respectivement. Intéressons nous aux valeurs aux bornes de ces deux paramètres :

- Un paramètre q égal à 0 n'a pas vraiment de sens car cela correspond à ne pas observer 2 MP consécutives.
- De la même manière, un paramètre r égal à 0 n'a pas de sens car cela revient à ne plus jamais maintenir préventivement le système à partir de la première panne.
- Si les paramètres q et r sont identiques, cela signifie que la politique de maintenance préventive est indépendante du passé.
- Un paramètre q égal à 1 n'est pas réaliste car cela correspond à n'effectuer que des MP.
- Enfin, un paramètre r égal à 1 signifie que l'on ne peut pas observer deux MC consécutives. Dans ce cas, la probabilité limite d'effectuer une MP est :

  $$\pi_{MP} = \frac{1}{2 - q}$$

  Cette proportion est supérieure à $\frac{1}{2}$, ce qui est logique puisque deux MC consécutives ne peuvent avoir lieu.

Bien que le calcul du régime stationnaire fournisse des informations importantes, on observe en pratique généralement peu de données de maintenances et il est donc plus raisonnable de proposer une estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance. La fonction de vraisemblance associée à l'observation des k premiers types de maintenances vaut :

$$\begin{aligned} L(q,r;u_1,..,u_k) &= \prod_{i=1}^{k} P(U_i=1|u_1,\ldots,u_{i-1})^{u_i} P(U_i=0|u_1,\ldots,u_{i-1})^{1-u_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k} [q^{u_{i-1}} r^{1-u_{i-1}}]^{u_i} [(1-q)^{u_{i-1}}(1-r)^{1-u_{i-1}}]^{1-u_i} \end{aligned} \tag{4.92}$$

Il est alors facile d'obtenir les estimateurs de q et r, qui ont l'expression suivante :

$$\hat{q} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} U_i U_{i+1}}{\sum_{i=0}^{k-1} U_i} \quad \text{et} \quad \hat{r} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (1-U_i) U_{i+1}}{\sum_{i=0}^{k-1} (1-U_i)} \tag{4.93}$$

avec $U_0 = 1$.

On peut aisément interpréter les résultats d'estimation des paramètres q et r. L'estimateur de q est la proportion de MP effectuée sachant que dans l'état précédent, on a effectué une MP. L'estimateur de r est la proportion de MP effectuée sachant que dans l'état précédent, on a effectué une MC.

4.3.2.3 Loi conditionnelle fonction du nombre de MC consécutives

Nous reprenons une démarche similaire à celle proposée dans la section 4.1.7 : seul le nombre de MC consécutives dans le passé a un impact sur le type de la prochaine maintenance. Au lieu de supposer que l'état de vigilance ne dépende que du dernier état, on suppose alors qu'il dépend du nombre de dernières MC consécutives. Plus ce nombre est important, plus on va vouloir anticiper les MC en effectuant une MP. On fait donc l'hypothèse suivante :

$$P(U_{k+1}=1|w_1,\ldots,u_k) = 1-(1-q)\theta^{\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=i}^{k}(1-u_j)} \tag{4.94}$$

- q représente bien la probabilité d'effectuer une MP pour un système neuf.
- $\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=i}^{k}(1-u_j)$ représente le nombre de MC consécutives dans le passé.
- θ représente la réactivité de l'équipe de maintenance. En particulier, $\theta = 0$ signifie que le passé n'a pas d'influence comme pour la première section et $\theta = 1$ signifie que l'on ne peut observer 2 MC consécutives.

On peut estimer les paramètres θ et q par maximum de vraisemblance, mais les estimateurs n'ont pas d'expression explicite.

4.3.2.4 Loi conditionnelle fonction de la proportion de MC

Au lieu de raisonner sur le passé immédiat du processus, on peut supposer qu'on souhaite anticiper les MC lorsque la proportion de défaillance est importante. On fait l'hypothèse suivante :

$$P(U_{k+1} = 1|w_1, \ldots, u_k) = q + (1-q)\frac{N_{C_k}}{k+1} \tag{4.95}$$

Cette hypothèse ne fait pas intervenir précisément la proportion de MC pour ne pas que cette proportion vaille exactement 1.

Ainsi, si la proportion de MC est peu importante, la probabilité conditionnelle d'effectuer une MP reste proche de q. A l'inverse, si on observe une proportion importante de MC, cette probabilité est proche de 1. On montre aisément qu'à partir de l'observation de k maintenances, l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{q}$ est solution de l'équation suivante :

$$\frac{N_{c_k}}{1-q} = \sum_{i=1}^{k} u_i \frac{1 - \frac{N_{C_{i-1}}}{i}}{q + (1-q)\frac{N_{C_{i-1}}}{i}} \tag{4.96}$$

4.3.3 Hypothèses sur les lois conditionnelles des W_{k+1}

4.3.3.1 Modèles d'âges virtuels généralisés

Il est possible d'adapter tous les modèles d'âge virtuel dans notre contexte. Il suffit de donner une loi pour W et des hypothèses sur les effets de maintenances pour construire les lois conditionnelles des W_{k+1}. On peut en particulier choisir une loi de Weibull pour W et des effets de type ARA_1, ARA_∞ ou BP. On rappelle l'équation (2.25) qui permet de calculer les termes nécessaires au calcul de la vraisemblance :

$$P(W_{k+1} > w|w_1, \ldots, u_k) = \frac{S_W(A_k + w)}{S_W(A_k)} \tag{4.97}$$

4.3.3.2 Lois exponentielles

Nous proposons un modèle pour lequel les lois conditionnelles des W_{k+1} sont exponentielles de paramètre $\lambda_{k+1} = \lambda(w_1, \ldots, u_k)$. Les considérations proposées sont analogues à celles présentées dans la section 4.1.6. Pour un système neuf, on suppose que le taux de hasard de W_1 est de loi exponentielle de paramètre λ. Nous considérons qu'une maintenance efficace retarde la dégradation du système, ce qui conduit à multiplier le taux de défaillance par un facteur α après une MP ou γ après une MC. Au final, λ_2 a la valeur suivante :

$$\lambda_2 = \alpha^{u_1}\gamma^{1-u_1}\lambda \tag{4.98}$$

avec $\alpha, \gamma > 0$.

En faisant les mêmes hypothèses sur les maintenances suivantes, on obtient :

$$\lambda_{k+1} = \alpha^{M_{c_k}}\gamma^{N_{c_k}}\lambda \tag{4.99}$$

L'interprétation des paramètres est très semblable à celle déjà rencontrée :

- λ caractérise la loi du premier instant de maintenance pour un système neuf.

- α et γ représentent l'efficacité des MP et MC respectivement. Par exemple, un facteur α plus petit que 1 signifie que le taux de défaillance après une MP décroît, et le temps d'attente moyen de la future maintenance augmente. Cela signifie que la MP est efficace. A l'inverse, si ce paramètre est supérieur à 1, l'intensité de défaillance augmente, ce qui signifie que la maintenance est nuisible. Enfin, si α vaut 1, l'intensité de défaillance reste inchangée, ce qui correspond à une maintenance minimale. Les interprétations pour γ sont similaires.

Il est alors possible d'écrire la fonction de vraisemblance associée aux observations mais les estimateurs des paramètres n'ont pas d'expression explicite.

4.3.3.3 Lois exponentielles et présence de variables externes

Nous proposons un second modèle pour les lois conditionnelles des W_{k+1}. Dans un premier temps, on ne différencie pas l'efficacité des MP et des MC. Les hypothèses que l'on propose sont que les lois conditionnelles des W_{k+1} sont exponentielles. Tout comme pour le modèle BP, on fait intervenir une variable externe B indépendante de W et U qui représente l'efficacité de la maintenance.

On suppose que pour un système neuf, la loi de W est exponentielle de paramètre λ. On suppose que les lois conditionnelles des W_{k+1} sont exponentielles de paramètres $\lambda(k; w_1, \ldots, u_k, b_1, \ldots, b_k)$. Par convention, on notera $\lambda_{k+1} = \lambda(k; w_1, \ldots, u_k, b_1, \ldots, b_k)$.

Une maintenance est efficace avec une probabilité p. Dans ce cas, le taux de défaillance est multiplié par une constante $\alpha < 1$. Sinon, la maintenance n'est pas efficace ou du moins ne compense pas la dégradation du système. Dans ce cas, le taux de défaillance est multiplié par une constante $\beta > 1$.

On modélise l'effet des maintenances par une variable aléatoire B_k :

$$\begin{cases} B_k = 1 & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ maintenance est efficace} \\ B_k = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.100}$$

Les variables B_k sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Ces variables B_k sont indépendantes des variables $\{W_j\}_{j \leq k}$ et $\{U_j\}_{j \leq k}$ et agissent donc comme un processus externe.

La fonction λ_{k+1} vaut alors :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k \alpha^{b_k} \beta^{1-b_k} \tag{4.101}$$

On obtient alors :

$$\lambda_{k+1} = \lambda \alpha^{\sum_{i=1}^{k} b_i} \beta^{k - \sum_{i=1}^{k} b_i} \tag{4.102}$$

On peut s'intéresser au temps moyen d'attente de la future maintenance $E[W_{k+1}]$. On utilise le fait qu'une somme de variables aléatoires de même loi de Bernoulli indépendantes est de loi binomiale.

$$\begin{aligned}
E[W_{k+1}] &= \sum_{j=0}^{k} E[W_{k+1}|\sum_{i=1}^{k} B_i = j]P(\sum_{i=1}^{k} B_i = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} E[W_{k+1}|\sum_{i=1}^{k} B_i = j]C_k^j p^j (1-p)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\lambda \alpha^j \beta^{k-j}} C_k^j p^j (1-p)^{k-j} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\frac{p}{\alpha}\right)^j \left(\frac{1-p}{\beta}\right)^{k-j} \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{p}{\alpha} + \frac{1-p}{\beta}\right)^k
\end{aligned} \tag{4.103}$$

L'évolution de cette espérance dépend de la valeur de $\frac{p}{\alpha} + \frac{1-p}{\beta}$:
- Si cette valeur est plus grande que 1, les maintenances sont globalement efficaces et compensent la dégradation du système.
- Si cette valeur est plus petite que 1, les maintenances interviennent à des instants de plus en plus rapprochés ce qui traduit une usure du système.
- Si cette valeur vaut 1, le comportement du système est stable.

On peut aussi s'intéresser à l'estimation de ces paramètres. Malheureusement, les effets des maintenances ne sont généralement pas observés. Il est donc nécéssaire d'adapter l'ensemble des résultats classiques afin de pouvoir effectuer une estimation. En particulier, il est nécessaire de calculer une intensité dite propre, notamment utilisée par Doyen [33] dans le cadre du modèle BP. Il est assurément possible de calculer cette vraisemblance propre, qui a certainement une écriture récursive comme pour le modèle BP.

Enfin, il est possible de généraliser ce modèle en différenciant les efficacités des MP et des MC. Pour cela, on fait l'hypothèse que les B_k sont des variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètres différents suivant le type de maintenance :

$$\begin{cases} \text{sachant } U_k = 1 & B_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(p_p) \\ \text{sachant } U_k = 0 & B_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(p_c) \end{cases} \tag{4.104}$$

D'autre part, on peut aussi différencier les facteurs d'efficacité de maintenance : une maintenance efficace multiplie le taux de défaillance par un facteur α_c et α_p si on effectue respectivement une MC ou une MP et une maintenance non efficace multiplie ce taux par un facteur β_c et β_p si on effectue respectivement une MC ou une MP.

4.3.4 Modèle doublement indépendant généralisé

4.3.4.1 Présentation

Le modèle doublement indépendant classique suppose d'une part que les risques Y et Z sont indépendants et d'autre part que l'instant W et le type U de la maintenance sont indépendants. Nous généralisons ce modèle afin de prendre en compte le passé du processus. Le modèle doublement indépendant généralisé fait donc les hypothèses suivantes :

- Le modèle est CIGCR, donc Y_{k+1} et Z_{k+1} sont indépendants conditionnellement au passé du processus ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} S_{k+1}(y,z;w_1,\ldots,u_k) &= P\left(Y_{k+1}>y, Z_{k+1}>z|w_1,\ldots,u_k\right) \\ &= P\left(Y_{k+1}>y|w_1,\ldots,u_k\right) P\left(Z_{k+1}>z|w_1,\ldots,u_k\right) \end{aligned} \tag{4.105}$$

- Le modèle est GPH, donc W_{k+1} et U_{k+1} sont indépendants conditionnellement au passé du processus.

Ce modèle a les propriétés suivantes :
– En tant que modèle CIGCR, ce modèle est identifiable comme prouvé dans le théorème 4.1.
– En tant que modèle GPH, les fonctions ϕ_{k+1} sont constantes.
– Les fonctions de survies marginales conditionnelles vérifient :

$$S_{Y_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k) = S_{Z_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k)^{\theta_{k+1}} \tag{4.106}$$

ou de manière équivalente :

$$\lambda_{Y_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k) = \theta_{k+1}\lambda_{Z_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k) \tag{4.107}$$

Ces formules généralisent celles obtenues en (1.96) et (1.97) dans le cadre UCR.
D'autre part, on obtient :

$$\begin{aligned} S_{k+1}(y,z;w_1,\ldots,u_k) &= S_{Z_{k+1}}(y;w_1,\ldots,u_k)^{\theta_{k+1}} S_{Z_{k+1}}(z;w_1,\ldots,u_k) \\ S_{W_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k) &= S_{Z_{k+1}}(w;w_1,\ldots,u_k)^{\theta_{k+1}+1} \end{aligned} \tag{4.108}$$

Enfin, la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances sur un intervalle [0,t] vaut :

$$\begin{aligned} L_t(\theta;k,w_1,..,u_k) &= S_{Z_{k+1}}(t-c_k;w_1,\ldots,u_k)^{\theta_{k+1}+1} \\ &\times \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{u_i}[-S'_{Z_i}(w_i;w_1,\ldots,u_{i-1})]S_{Z_i}(w_i;w_1,\ldots,u_{i-1})^{\theta_i} \end{aligned} \tag{4.109}$$

Cette écriture s'obtient à partir de l'équation (4.85) en exprimant les q_i en fonction des θ_i et les lois conditionnelles des Z_i en fonction des lois conditionnelles des W_i grâce à (4.108).

Un modèle est alors entièrement défini par la donnée des lois conditionnelles de Z_{k+1} et des probabilités conditionnelles d'effectuer une MP q_{k+1} ou de manière équivalente θ_{k+1}.

4.3.4.2 Modèles basés sur les âges virtuels généralisés

Les lois les plus simples pour Z_{k+1} sont des lois exponentielles. Mais, à partir des équations (4.25), (4.26) et (4.31), on montre aisément qu'un modèle CIGCR avec des lois exponentielles est automatiquement à hasards proportionnels. Cela signifie que le modèle proposé dans la section 4.1.6 est en particulier un modèle doublement indépendant

généralisé. On obtenait effectivement des fonctions $\phi_{k+1}(.; w_1, \ldots, u_k)$ constantes pour ce modèle.

Dans cette section, nous proposons quelques résultats en utilisant les modèles d'âge virtuel généralisés. Pour reprendre la méthodologie présentée à la fin de la section 2.2.1, on doit donc définir la dépendance entre MP et MC pour un système neuf et faire des hypothèses sur les âges effectifs. On suppose que pour un système neuf, la loi de la première maintenance suit le modèle doublement indépendant, ce qu'on peut écrire :

– Y indépendant de Z.
– W indépendant de U.

Cela conduit à avoir $S_Y = S_Z^\theta$, avec $P(U = 1) = q = \dfrac{\theta}{1+\theta}$. On a alors la propriété suivante.

Propriété 4.4 *: Tout modèle GVA dont le modèle UCR sous-jacent est le modèle doublement indépendant est un modèle doublement indépendant généralisé.*

Démonstration : Sous l'hypothèse GVA, le modèle est à la fois CIGCR et GPH. En effet, on peut montrer que le modèle est CIGCR :

$$\begin{aligned} S_{k+1}(y, z; w_1, \ldots, u_k) &= P(Y_{k+1} > y; Z_{k+1} > z | w_1, \ldots, u_k) \\ &= \frac{S_1(A_k + y, A_k + z)}{S_1(A_k, A_k)} \\ &= \frac{S_Y(A_k + y)}{S_Y(A_k)} \frac{S_Z(A_k + z)}{S_Z(A_k)} \\ &= P(Y_{k+1} > y | w_1, \ldots, u_k) P(Z_{k+1} > z | w_1, \ldots, u_k) \end{aligned} \tag{4.110}$$

D'autre part, en utilisant successivement les équations (2.32) et (2.25), on montre que le modèle est GPH :

$$\begin{aligned} P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | w_1, \ldots, u_k) &= S^*_{Z_{k+1}}(w; w_1, .., u_k) \\ &= \frac{S^*_Z(A_k + z)}{S_W(A_k)} \\ &= \frac{(1-q) S_W(A_k + z)}{S_W(A_k)} \\ &= P(U_{k+1} = 0 | w_1, \ldots, u_k) P(W_{k+1} > w | w_1, \ldots, u_k) \end{aligned} \tag{4.111}$$

Nous avons ainsi prouvé que le modèle GVA obtenu est un modèle doublement indépen–dant généralisé. □

D'autre part, on remarque que $q_{k+1} = q$ ou de manière équivalente $\theta_{k+1} = \theta$. Le fait que ces paramètres soient constants signifie que la probabilité d'effectuer une MP ne dépend pas du passé du processus. Les fonctions GCR ont une expression simple. En particulier, $\forall k \geq 0,\ \phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = q_{k+1} = q$. Dans ce cas, les fonctions ϕ_{k+1} sont égales et constantes. On peut également calculer la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances sur un intervalle [0,t] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t(\theta; k, w_1, .., u_k) &= \frac{S_Z(A_k + t - c_k)^{\theta+1}}{S_Z(A_k)^{\theta+1}} \theta^{\sum_{i=1}^k u_i} \prod_{i=1}^k \frac{[-S'_Z(A_{i-1} + w_i)] S_Z(A_{i-1} + w_i)^\theta}{S_Z(A_{i-1})^{\theta+1}} \\ &= \frac{S_W(A_k + t - c_k)}{S_W(A_k)} \prod_{i=1}^k q^{u_i}(1-q)^{1-u_i} \frac{f_W(A_{i-1} + w_i)}{S_W(A_{i-1})}\end{aligned} \tag{4.112}$$

La première expression s'obtient à partir de (4.109). La seconde écriture se trouve à partir de l'équation (4.85) en remplaçant q_i par q et en utilisant les propriétés élémentaires des âges virtuels.

4.3.4.3 Un exemple : le modèle $DIW - ARA_1$

On veut définir un modèle doublement indépendant généralisé basé sur les âges virtuels généralisés. Pour cela, on doit définir la loi de Z et les efficacités des maintenances. On choisit une loi de Weibull pour Z de paramètre de forme β et de paramètre d'échelle α. La loi de Y est automatiquement une loi de Weibull de paramètre de forme β et de paramètre d'échelle $\alpha\theta$.

D'autre part, on suppose les efficacités des maintenances de type ARA_1 de paramètres ρ_p et ρ_c pour respectivement les MP et les MC. On rappelle que les âges effectifs sont alors, d'après (2.38) :

$$A_k = C_k - \sum_{j=1}^k \rho_p^{U_j} \rho_c^{1-U_j} W_j$$

Ce modèle sera appelé $DIW - ARA_1$ pour modèle Doublement Indépendant-Weibull avec effet ARA_1. A partir de (4.112), on en déduit la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances sur un intervalle [0,t], qui vaut :

$$\begin{aligned}L_t(w_1, .., u_k) &= \alpha^k \beta^k \theta^{M_{c_k}} \prod_{i=1}^k (c_i - \sum_{j=1}^{i-1} \rho_p^{u_j} \rho_c^{1-u_j} w_j)^{\beta-1} \\ &\times \quad e^{-(\theta+1)\alpha \sum_{i=1}^{k+1} [(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} \rho_p^{u_j} \rho_c^{1-u_j} w_j)^\beta - (c_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \rho_p^{u_j} \rho_c^{1-u_j} w_j)^\beta]}\end{aligned} \tag{4.113}$$

avec pour convention $c_{k+1} = t$.

On peut ensuite estimer chacun des paramètres :

– Le paramètre θ a un estimateur explicite :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^k U_i}{\sum_{i=1}^k (1 - U_i)} = \frac{M_{C_k}}{N_{C_k}} \tag{4.114}$$

On estime θ par le rapport entre le nombre de MP et celui de MC. C'est logique puisque $\theta = \dfrac{q}{1-q}$.

– L'estimateur de α s'exprime en fonction des autres estimateurs :

$$\hat{\alpha} = \frac{N_{C_k}}{\sum_{i=1}^{k+1}(C_i - \sum_{j=1}^{i-1}\hat{\rho}_p^{U_j}\hat{\rho}_c^{1-U_j}W_j)^{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^{k+1}(C_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1}\hat{\rho}_p^{U_j}\hat{\rho}_c^{1-U_j}W_j)^{\hat{\beta}}} \tag{4.115}$$

– On ne peut pas estimer de manière explicite les autres paramètres du modèle, mais une estimation numérique est possible.

4.4 Le modèle alert-delay généralisé (GAD)

4.4.1 Définition

Nous généralisons dans le cadre GCR le modèle alert-delay introduit au chapitre 3. Le modèle alert-delay généralisé, noté **GAD** pour *Generalized alert-delay model* est défini de la façon suivante :

$$Y_{k+1} = p_{k+1}Z_{k+1} + \mathcal{E}_{k+1} \tag{4.116}$$

où :

- $p_{k+1} \in [0,1]$ et dépend du passé du processus : $p_{k+1} = p(w_1, \ldots, u_k)$.
- $\forall k$, Z_{k+1} et $\mathcal{E}_{k+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes conditionnellement à $(w_1, \ldots, u_k)$.
- La loi conditionnelle de Z_{k+1} sachant $(w_1, \ldots, u_k)$ a pour fonction de survie $S_{Z_{k+1}}(., w_1, \ldots, u_k)$.
- La loi conditionnelle de $\mathcal{E}_{k+1}$ sachant $(w_1, \ldots, u_k)$ a pour fonction de survie $S_{\mathcal{E}_{k+1}}(., w_1, \ldots, u_k)$.

Les interprétations pratiques de cette généralisation sont les suivantes :

– Le paramètre p_{k+1} relatif au temps d'alerte dépend du passé du processus. Cela signifie que l'alerte peut intervenir plus ou moins tôt. Par exemple, si on observe une proportion trop importante de MC dans le passé, l'équipe de maintenance peut essayer de régler un seuil d'alerte plus précoce afin d'éviter une future MC. Pour notre modèle, cela revient à définir une valeur p_{k+1} inférieure à la précédente valeur p_k.
– La loi conditionnelle de Z_{k+1} sachant $(w_1, \ldots, u_k)$ permet de prendre en compte plusieurs phénomènes sur la dégradation du système au cours du temps. D'une part, on peut supposer que les MP tendent à retarder les défaillances. A l'inverse, si on observe beaucoup de MC, on peut supposer que le système se dégrade fortement.
– La loi conditionnelle de $\mathcal{E}_{k+1}$ sachant $(w_1, \ldots, u_k)$ permet de prendre en compte le délai d'attente avant d'effectuer une MP lorsque l'alerte est donnée. Par exemple, si on observe un nombre important de MC, l'équipe de maintenance va avoir tendance à être la plus réactive possible et diminuer au maximum le délai après l'alerte.

Définir un modèle alert-delay généralisé complet revient à préciser comment évolue le paramètre p_{k+1} ainsi que les lois conditionnelles de Z_{k+1} et $\mathcal{E}_{k+1}$. Par la suite, nous proposons deux modèles GAD. Tout d'abord, nous généralisons le modèle alert-delay exponentiel (EAD). Ensuite, nous définirons un modèle où les lois de dégradation ne

sont plus exponentielles et où l'efficacité des maintenances est prise en compte grâce aux modèles d'âges virtuels.

4.4.2 Le modèle alert-delay exponentiel généralisé

4.4.2.1 Définition

Ce modèle suppose que la loi conditionnelle de Z_{k+1} sachant le passé est la loi exponentielle de paramètre $\lambda_{k+1} = \lambda(w_1, \ldots, u_k)$ et la loi conditionnelle de $\mathcal{E}_{k+1}$ sachant le passé est la loi exponentielle de paramètre $\mu_{k+1} = \mu(w_1, \ldots, u_k)$. Les notations λ_{k+1} et μ_{k+1} sont informelles mais simplifient les formules.

On peut établir toutes les propriétés de ce modèle en combinant les résultats du modèle alert-delay de la section précédente et les résultats généraux sur les modèles GCR. Par exemple, en combinant les équations (2.14) et (3.44), on obtient l'intensité de défaillance de ce modèle :

$$\lambda_t^N(k; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\lambda_{k+1}\left[\lambda_{k+1} - p_{k+1}\mu_{k+1}\right]}{\lambda_{k+1} - p_{k+1}\mu_{k+1} e^{-\frac{1-p_{k+1}}{p_{k+1}}[\lambda_{k+1} - p_{k+1}\mu_{k+1}](t-c_k)}} \tag{4.117}$$

Les fonctions $\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k)$ ont l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) &= \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1} + (1-p_{k+1})\mu_{k+1}} \\ &\times \frac{\lambda_{k+1} e^{-[\lambda_{k+1}+(1-p_{k+1})\mu_{k+1}]w} - p_{k+1}[\lambda_{k+1} + (1-p_{k+1})\mu_{k+1}] e^{-\frac{\lambda_{k+1} w}{p_{k+1}}}}{\lambda_{k+1} e^{-[\lambda_{k+1}+(1-p_{k+1})\mu_{k+1}]w} - p_{k+1}\mu_{k+1} e^{-\frac{\lambda_{k+1} w}{p_{k+1}}}}\end{aligned} \tag{4.118}$$

Comme dans le cadre UCR, $\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k)$ est croissante en w.

La fonction de vraisemblance associée à l'observation des k premières maintenances sur un intervalle [0,t] s'obtient à partir des équations (2.21) et (3.46) et a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}L_t(\theta; k, w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \left[\frac{\mu_i}{\lambda_i - p_i\mu_i}\right]^{u_i} \left[e^{-(\lambda_i+(1-p_i)\mu_i)w_i} - e^{-\frac{\lambda_i}{p_i} w_i}\right]^{u_i} e^{-(\lambda_i+(1-p_i)\mu_i)w_i(1-u_i)} \\ \times\left[\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - p_{k+1}\mu_{k+1}} e^{-[\lambda_{k+1}+(1-p_{k+1})\mu_{k+1}](t-c_k)} - \frac{p_{k+1}\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1} - p_{k+1}\mu_{k+1}} e^{-\frac{\lambda_{k+1}}{p_{k+1}}(t-c_k)}\right]\end{aligned} \tag{4.119}$$

Le modèle prend directement en compte la dépendance entre Y_{k+1} et Z_{k+1}, mais il faut aussi prendre en compte la façon dont le passé du processus des maintenances influe sur ces variables. Pour cela, il faut exprimer comment p_{k+1}, λ_{k+1} et μ_{k+1} dépendent de $(w_1, \ldots, u_k)$. Nous proposons par la suite plusieurs paramétrisations possibles.

4.4.2.2 Paramétrisation de p_{k+1}

On propose plusieurs paramétrisations de p_{k+1} comme suit :

– La paramétrisation la plus simple est de supposer que ce seuil d'alerte est constant au cours du temps :

$$p_{k+1} = p \quad , \quad p \in [0,1] \tag{4.120}$$

– Une seconde idée est de supposer qu'il existe deux seuils d'alerte : p_{min} et p_{max}. Pour un système pour lequel on n'observe que des MP, le seuil d'alerte est peu élevé : $p_{k+1} = p_{max}$. En revanche, si l'on n'observe que des MC, l'instant d'alerte doit avoir lieu le plus tôt possible afin d'éviter une prochaine défaillance : $p_{k+1} = p_{min}$. Pour les cas intermédiaires, on suppose que le seuil d'alerte est une pondération de p_{min} et p_{max} en fonction de la proportion de MP. Finalement, on définit p_{k+1} de la manière suivante :

$$p_{k+1} = \frac{p_{max} \sum_{i=1}^{k} u_i + p_{min} \sum_{i=1}^{k} (1-u_i)}{k} \quad , \quad k > 1 \tag{4.121}$$

On suppose enfin que $p_1 = p_{max}$: le seuil d'alerte est peu élevé à la mise en route du système.

– Enfin, on peut supposer qu'après une MP, le seuil d'alerte est p_0 mais qu'une MC fait diminuer cette valeur d'un facteur proportionnel δ. Le passé intervient donc à travers le nombre de MC consécutives observées dans le passé immédiat. Finalement, on obtient :

$$p_{k+1} = \delta^{\sum_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{k} (1-u_j)} p_0 \tag{4.122}$$

avec $p_0 \in [0,1]$ et $\delta \in [0,1]$.

Les exemples de paramétrisation proposés ne forment pas une liste exhaustive. Lorsque l'on étudie des données réelles, il faut prendre en compte la politique de maintenance effectuée afin de choisir l'une des hypothèses de paramétrisation.

4.4.2.3 Paramétrisation de λ_{k+1}

$\lambda_{k+1} = \lambda(w_1, \ldots, u_k)$ est le taux de hasard de la loi de Z_{k+1} sachant le passé du processus des maintenances. Voici différentes paramétrisations possibles de λ_{k+1} :

– Comme dans la section 4.1.6, on suppose que pour un système neuf, le taux de défaillance du système est λ_c. On fait l'hypothèse que les MP tendent à retarder les défaillances et multiplient le taux de défaillance par un facteur α inférieur à 1. De plus, on suppose que les MC ont aussi un impact sur les futurs instants des défaillances et multiplient le taux de défaillance par un facteur γ. Si ce facteur est inférieur à 1, cela signifie que les MC sont efficaces et retardent les futures MP. Si ce facteur est supérieur à 1, cela signifie que l'occurence d'une défaillance accélère l'apparition des futures MC (phénomène de cascade de défaillances). Ainsi, λ_{k+1} a l'expression suivante :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_c \, \alpha^{\sum_{i=1}^{k} u_i} \gamma^{\sum_{i=1}^{k} (1-u_i)} \tag{4.123}$$

avec $\lambda_c > 0$, $\alpha < 1$ et $\gamma > 0$.

– On peut aussi prendre en compte le vieillissement du système en considérant que ce taux doit être une fonction croissante du nombre de maintenances observées. On obtient alors des hypothèses similaires à celles des modèles classiques de fiabilité des logiciels de Moranda [60] et Jelinski-Moranda [48] :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_c \, \alpha^k \tag{4.124}$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_c + \alpha k \tag{4.125}$$

avec $\alpha > 0$.

– Par analogie avec les processus de Poisson non homogènes, on peut aussi prendre :

$$\lambda_{k+1} = \alpha\beta c_k^{\beta-1} \tag{4.126}$$

Dans ce cas, il est nécessaire de rajouter une condition sur la valeur initiale $\lambda(0)$. On peut aussi ne s'interesser à la fiabilité du système qu'à partir de la seconde panne et considérer la donnée du premier instant de maintenance comme une variable "externe". Toutefois, cela reviendrait à ne pas prendre en compte toute l'information dont on dispose et lorsque les jeux de données sont de petite taille, cette hypothèse n'est pas à envisager.

Là encore, d'autres hypothèses peuvent être envisagées et le choix de la paramétrisation dépend du type de système étudié.

4.4.2.4 Paramétrisation de μ_{k+1}

On suppose que pour un système neuf, $\mu_1 = \mu$. Plus μ_{k+1} est élevé, plus court sera le délai $\mathcal{E}_{k+1}$. On peut supposer que, lorsqu'un système a subi beaucoup de défaillances, on exerce une surveillance accrue, qui a pour effet de raccourcir ce délai. Alors μ_{k+1} peut être une fonction croissante du nombre de défaillances survenues.

– Par exemple, si on suppose que μ_{k+1} est (approximativement) proportionnel au pourcentage de défaillances survenues, on obtient :

$$\mu_{k+1} = \frac{N_{c_k} + 1}{k+1} \, \mu \tag{4.127}$$

– On peut choisir une écriture de type puissance :

$$\mu_{k+1} = \beta^{\frac{N_{c_k}+1}{k+1}} \, \mu \qquad \beta > 1 \tag{4.128}$$

Le décalage de 1 dans ces deux équations permet d'éviter $\mu_{k+1} = 0$.

– On peut remplacer le pourcentage de défaillances survenues par le nombre des dernières défaillances consécutives survenues :

$$\mu_{k+1} = \left[1 + \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{k} (1 - u_j) \right] \mu \tag{4.129}$$

$$\mu_{k+1} = \beta^{\sum_{i=1}^{k} \prod_{j=i}^{k} (1 - u_j)} \, \mu \qquad \beta > 1 \tag{4.130}$$

Par exemple, pour l'équation (4.129), si on n'observe que des MP, $\mu_{k+1} = \mu$, et le délai est en moyenne le même. En revanche, si on n'observe que des MC, $\mu_{k+1} = (k+1)\mu$ et le délai moyen décroît en fonction de k.

4.4.3 Le modèle alert-delay combiné aux âges virtuels

Nous proposons une deuxième généralisation du modèle AD en utilisant les principes des âges virtuels. Ce modèle est un modèle GAD car nous faisons l'hypothèse que $Y_{k+1} = p_{k+1}Z_{k+1} + \mathcal{E}_{k+1}$. Mais ce modèle n'est pas GVA puisque les hypothèses d'âge virtuel ne portent que sur Z_{k+1}. Il n'est en effet pas possible de conserver la relation précédente pour un modèle GVA autrement que pour un système neuf.

Dans la section précédente, on a supposé que le taux de hasard conditionnel de Z_{k+1} était constant puisqu'on faisait l'hypothèse de lois exponentielles. Pour des systèmes qui se dégradent, il semble naturel de supposer que ce taux de hasard croît avec le temps. D'autre part, on prend en compte l'efficacité des maintenances en utilisant des âges virtuels. Les hypothèses du modèle sont donc les suivantes :

- Le système neuf a un taux de hasard λ_Z de type Weibull :

$$\lambda_Z(z) = \lambda_{Z_1}(z) = \alpha\beta z^{\beta-1} \tag{4.131}$$

- L'efficacité des maintenances suit un modèle d'âge virtuel, avec comme âges effectifs :

$$A_k = A(w_1, \ldots, u_k) \tag{4.132}$$

  Par exemple, cette maintenance peut être de type ARA_1 ou ARA_∞ avec des efficacités ρ_p pour les MP et ρ_c pour les MC. Les expressions des âges effectifs ont été obtenues respectivement en (2.38) et (2.43).

- Après k maintenances, la dépendance entre les dates potentielles de MP et MC est de type alert-delay :

$$Y_{k+1} = pZ_{k+1} + \mathcal{E}_{k+1} \tag{4.133}$$

- $p \in [0, 1]$. On considère que le seuil d'alerte p est constant.
- La loi conditionnelle de $\mathcal{E}_{k+1}$ sachant le passé est la loi exponentielle de paramètre μ. Cela signifie que le délai suit une loi exponentielle qui ne dépend pas du passé du processus. La première hypothèse semble naturelle étant donné que l'on s'intéresse à un délai d'attente. La seconde hypothèse peut évidemment être généralisée à des délais dont les lois prennent en compte le passé du processus comme dans la section précédente. Le but est de présenter ici un modèle relativement simple.
- Nous ne portons la propriété des âges virtuels que sur Z_{k+1} et pas sur Y_{k+1}. Pour cela, on adapte l'équation (1.28) afin de déterminer la loi conditionnelle de Z_{k+1} sachant le passé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} > z | w_1, \ldots, u_k) &= \frac{P(Z > A_k + z)}{P(Z > A_k)} \\ &= \frac{S_Z(A_k + z)}{S_Z(A_k)} \end{aligned} \tag{4.134}$$

Une fois le modèle défini, on peut calculer l'ensemble des fonctions usuelles relatives aux risques concurrents généralisés. Malheureusement, du fait qu'on ait choisi un taux de hasard initial de type Weibull, on ne peut pas avoir des expressions simples de ces fonctions, mais uniquement des expressions intégrales. Par exemple, on peut donner les fonctions de sous-hasards généralisées. Pour cela, on généralise l'écriture des fonctions de sous-hasards obtenues en (3.17) (3.18) pour les lois conditionnelles de $\mathcal{E}_{k+1}$ et Z_{k+1} et on utilise l'écriture de la loi conditionnelle de Z_{k+1} présentée en (4.134). On obtient alors :

$$\lambda_{c,k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = \frac{S_{\mathcal{E}}((1-p)w) f_Z(A_k + w)}{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} S_{\mathcal{E}}(w - px) f_Z(A_k + x)dx + S_Z(A_k + \frac{w}{p})} \tag{4.135}$$

$$\lambda_{p,k+1}(w; w_1, \ldots, u_k) = \frac{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} f_{\mathcal{E}}(w - px) f_Z(A_k + x)dx}{\displaystyle\int_w^{\frac{w}{p}} S_{\mathcal{E}}(w - px) f_Z(A_k + x)dx + S_Z(A_k + \frac{w}{p})} \tag{4.136}$$

En revanche, nous n'avons pas de monotonie des fonctions $\phi_{k+1}(w; w_1, \ldots, u_k)$ pour ce modèle. Enfin, en utilisant l'écriture de la fonction de vraisemblance dans le cadre GCR en fonction des fonctions de sous-hasards généralisées fournie en (2.21), on en déduit la fonction de vraisemblance associée à l'observation de k maintenances :

$$L_t(\theta; k, w_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(\int_{w_i}^{\frac{w_i}{p}} f_{\mathcal{E}}(w_i - px) f_Z(x + A_{i-1})dx\right)^{u_i} \left(S_{\mathcal{E}}((1-p)w_i) f_Z(w_i + A_{i-1})\right)^{1-u_i}}{S_Z(A_{i-1})} \tag{4.137}$$

$$\times \frac{\displaystyle\int_{t-c_k}^{\infty} S_{\mathcal{E}}((t - c_k - px)_+) f_Z(A_k + x)dx}{S_Z(A_k)} \tag{4.138}$$

Pour notre modèle particulier avec Z de loi de Weibull et $\mathcal{E}$ de loi exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned} L_t(\theta; k, w_1, \ldots, u_k) &= \prod_{i=1}^{k} \alpha\beta \left(\int_{w_i}^{\frac{w_i}{p}} \mu(x + A_{i-1})^{\beta-1} e^{-\mu(w_i - px) - \alpha(x + A_{i-1})^{\beta}} dx\right)^{u_i} \\ &\times [\prod_{i=1}^{k} (w_i + A_{i-1})^{(\beta-1)(1-u_i)}] e^{-(\mu(1-p)w_i + \alpha(w_i + A_{i-1})^{\beta})(1-u_i) + \alpha A_{i-1}^{\beta}} \\ &\times \int_{t-c_k}^{\infty} \alpha\beta(A_k + x)^{\beta-1} e^{-\mu(t - c_k - px)_+ - \alpha(A_k + x)^{\beta} + \alpha A_k^{\beta}} dx \end{aligned} \tag{4.139}$$

Il n'est pas possible de simplifier cette expression au-delà. Si l'on doit appliquer ce modèle à des données réelles, les estimateurs seront obtenus en maximisant cette fonction uniquement à l'aide de méthodes numériques.

4.5 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, des modèles de risques concurrents classiques ont été généralisés dans le cadre GCR : les classes de modèles CIGCR, GRS, GPH et GAD ont été introduites. Dans chaque situation, des modèles relativement simples ont été proposés. Ces modèles n'ont été appliqués à des jeux de données que pour un modèle CIGCR particulier. Une perspective intéressante serait d'appliquer les autres modèles proposés à ces données. Cette étape nécessite d'une part de pouvoir choisir à partir des données un modèle GCR adapté. Cette étape était possible dans le cadre UCR grâce entre autres à l'étude de la fonction ϕ. Il serait intéressant de généraliser cette approche dans le cadre GCR en utilisant les fonctions ϕ_{k+1}. D'autre part, une fois une classe de modèles choisie, parmi toutes les hypothèses proposées de paramétrisation, il faut identifier celles qui sont les plus réalistes au vu des observations et en accord avec la politique de maintenance effectuée. Enfin, la liste des extensions de modèles GCR proposée n'est pas exhaustive et d'autres modèles UCR peuvent être généralisés dans le cadre GCR, comme par exemple le modèle Delay-Time.

Chapitre 5

Efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire

---

Au cours du chapitre 2, l'étude d'un jeu de données avait mis en évidence la présence d'une période de rodage ou de jeunesse pour les systèmes réparables considérés. Cela revient à observer tout d'abord des défaillances dues à des défauts de jeunesse avant d'observer les premières pannes dues à l'usure. Au cours de ce chapitre, nous proposons de modéliser le processus des maintenances en présence d'une période de jeunesse par un modèle d'âge virtuel, ce qui nécessite de définir l'intensité initiale ainsi que les âges effectifs. Les intensités initiales ont généralement des courbes en baignoire : l'intensité est décroissante en période de jeunesse, puis constante si on prend en compte une période de vie utile et enfin croissante en période d'usure. Après avoir montré la nécessité d'adapter les efficacités de maintenances aux intensités en baignoire, nous proposerons dans ce chapitre différents types d'intensités initiales en baignoire puis différentes modélisations des âges effectifs. A partir de ces exemples, nous proposerons d'étudier dans le chapitre suivant deux modèles complets. Ces deux modèles seront appliqués a plusieurs jeux de données présents dans la littérature.

5.1 Motivation de l'étude

En présence d'un seul type de maintenance, un modèle d'âge virtuel est défini par une séquence particulière d'âges effectifs A_i et par une intensité initiale. En effet, on rappelle que l'intensité de défaillance obtenue en (1.31) s'exprime de la manière suivante :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + A_{N_{t^-}}) \tag{5.1}$$

D'autre part, nous rappelons les principaux modèles d'âges virtuels présentés dans la section 1.3 en mentionnant l'écriture des âges effectifs correspondants :

- Le modèle ABAO présenté dans la section 1.3.2. Les maintenances sont minimales : $A_i = T_i$.

– Le modèle AGAN présenté dans la section 1.3.3. Chaque maintenance remet le système à neuf : $A_i = 0$.

– Le modèle de Brown-Proschan présenté dans la section 1.3.7. L'efficacité de la maintenance dépend d'un paramètre p :

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} \left[\prod_{k=j}^{i} (1 - B_k) \right] X_j, \tag{5.2}$$

où B_k est une variable aléatoire indépendante à la fois de X_k et des $\{X_j, B_j\}_{1 \leq j < k-1}$, et de loi de Bernoulli de paramètre p.

– Le modèle ARA_1 présenté dans la section 1.3.6. L'efficacité de la maintenance dépend d'un paramètre ρ :

$$A_i = A_{i-1} + (1 - \rho) X_i = (1 - \rho) T_i \tag{5.3}$$

– Le modèle ARA_∞ présenté dans la section 1.3.6. L'efficacité de la maintenance dépend d'un paramètre ρ :

$$A_i = (1 - \rho)(A_{i-1} + X_i) \tag{5.4}$$

Tous ces modèles sont construits en supposant une intensité initiale croissante. La Figure 5.1 représente une trajectoire de l'intensité de défaillance pour un modèle BP et une intensité initiale de type Weibull avec pour paramètres $\alpha = 0.01, \beta = 3$ et $p = 0.5$. Les marqueurs circulaires correspondent à des instants de défaillances suivis d'une maintenance parfaite (AGAN) et les marqueurs étoilés correspondent à des instants de défaillances suivis d'une maintenance minimale (ABAO). La Figure 5.2 représente une trajectoire de l'intensité de défaillance pour un modèle ARA_1 avec la même intensité initiale et une efficacité de maintenance $\rho = 0.5$. Les marqueurs circulaires indiquent les instants de pannes sur l'axe des abscisses.

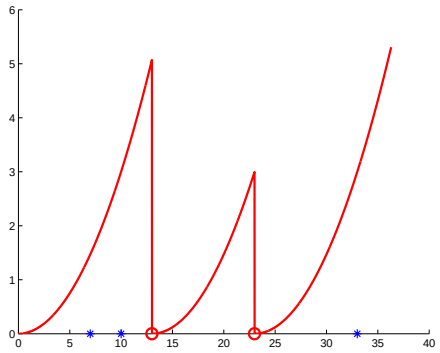


FIG. 5.1 – modèle BP et intensité croissante

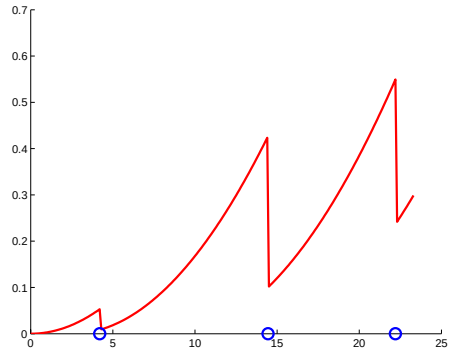


FIG. 5.2 – modèle ARA et intensité croissante

Dans ces deux exemples, on observe que l'intensité de défaillance après réparation ($\lambda_{T_{i+}}$) est inférieure à l'intensité de défaillance juste avant la panne ($\lambda_{T_{i-}}$). Cela signifie bien que la maintenance effectuée est efficace. En revanche, une intensité initiale

décroissante aboutit à des conclusions diamétralement opposées sur l'efficacité de la maintenance. Plus précisément, si on s'intéresse à l'intensité de défaillance aux alentours d'une défaillance, on a :

$$\begin{cases} \lambda_{T_{i^-}} & = & \lambda(A_{i-1} + X_i) \\ \lambda_{T_{i^+}} & = & \lambda(A_i) \end{cases} \tag{5.5}$$

D'autre part, les âges effectifs pour les modèles BP et ARA_1 ont la propriété suivante :

$$A_i \leq A_{i-1} + X_i \tag{5.6}$$

En fonction de la monotonie de l'intensité initiale, les conclusions sur les efficacités des maintenances sont les suivantes :

- $\lambda(t)$ est croissante $\Rightarrow \forall i$, $\lambda_{T_{i^+}} \leq \lambda_{T_{i^-}}$ $\Rightarrow$ la maintenance est efficace.
- $\lambda(t)$ est décroissante $\Rightarrow \forall i$, $\lambda_{T_{i^+}} \geq \lambda_{T_{i^-}}$ $\Rightarrow$ la maintenance est nuisible.
- Si $\lambda(t)$ n'est pas monotone, on ne peut tirer aucune conclusion.

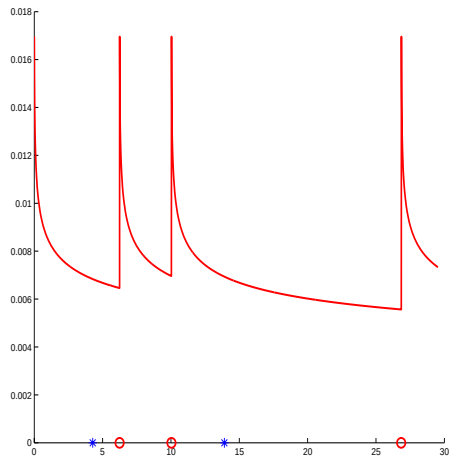


FIG. 5.3 – modèle BP et intensité décroissante

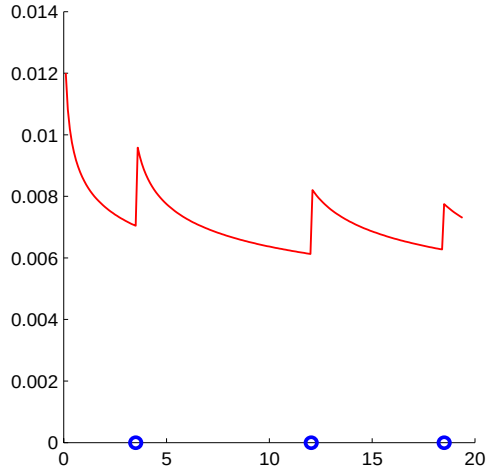


FIG. 5.4 – modèle ARA et intensité décroissante

Les figures 5.3 et 5.4 reflètent ces propriétés. La Figure 5.3 représente une trajectoire de l'intensité de défaillance pour un modèle BP avec une intensité initiale décroissante ($\alpha = 0.01, \beta = 0.85, p = 0.5$). Après une réparation minimale (*), l'intensité de défaillance reste inchangée mais à la suite d'une réparation parfaite (o), le système est remis à neuf. De ce fait, le système est plus dégradé à la suite de la maintenance que juste avant la défaillance pour des intensités initiales décroissantes. Une maintenance As Good As New (AGAN) pour une intensité croissante correspond à une maintenance As Bad As New (ABAN) pour une intensité décroissante. Dans ce contexte, il est justifié de considérer les maintenances comme étant nuisibles. Ces conclusions sont similaires si l'on considère la Figure 5.4 représentant une trajectoire de l'intensité de défaillance pour un modèle ARA_1 et une intensité initiale décroissante ($\alpha = 0.01$, $\beta = 0.85$, $\rho = 0.9$). Les mêmes considérations peuvent être faites en présence de deux types de maintenances. A titre

d'exemple, on a vu sur la figure 2.1 qu'une estimation d'intensité de défaillance de type ARA_1 aboutissait à la conclusion que la MC dégradait le système.

On rencontre les mêmes types de problèmes en considérant des intensités initiales plus complexes comme les intensités en baignoire. En effet, pour un modèle BP, une maintenance parfaite aboutit inévitablement à remettre le système en période de jeunesse. De manière equivalente pour le modèle ARA_1, une maintenance en période de jeunesse peut-être considérée comme nuisible.

En d'autres termes, on a montré qu'une réduction des âges virtuels aboutit à une maintenance efficace uniquement pour des systèmes qui se dégradent. Pourtant, en pratique, il existe de nombreuses situations pour lesquelles les taux de hasard sont décroissants ou en forme de baignoire, que ce soit par la présence d'une période de jeunesse, de mortalité infantile, d'hétérogénéité, etc... Il est donc nécessaire d'adapter les hypothèses classiques sur les âges virtuels si l'on souhaite prendre en compte des intensités non croissantes.

5.2 Intensités initiales en baignoire

5.2.1 Définition

Nous décrivons dans cette section plusieurs modèles d'intensités initiales en baignoire. Rappelons que l'intensité initiale est le taux défaillance de l'instant T_1 de la première panne. Il est plus usuel de parler de "taux de défaillance en baignoire", mais nous conservons la terminologie "intensité" pour être cohérent avec la logique de notre modélisation.

Une intensité en baignoire comporte 3 périodes :

- La période de jeunesse : le système est en cours de déverminage et des défaillances apparaissent du fait de défauts de conception. A mesure que le temps passe, la probabilité d'observer une panne due à un défaut de jeunesse diminue. Durant cette période, l'intensité est donc décroissante.
- La période de vie utile : le système fonctionne dans ses conditions optimales. Les défaillances peuvent être considérées comme des événements accidentels. L'intensité durant cette période est constante.
- La période d'usure : c'est le vieillissement qui est à l'origine des défaillances du système. Durant cette période de fin de vie du système, l'intensité est croissante.

En outre, on suppose que l'intensité est continue. On comprend donc pourquoi une intensité de ce type est dite "en baignoire".

Par la suite, nous proposons un aperçu de la littérature concernant les intensités en baignoire. Pour chacune des intensités, nous donnons une expression de l'instant de fin de période de jeunesse que nous notons t_J. A cet instant, l'intensité en baignoire est minimale. Les intensités en baignoire proposées peuvent correspondre à différents types de systèmes observables. Par exemple, on considérera des intensités pouvant être bornées ou non bornées et des intensités présentant ou non une période de vie utile. Deux de ces modèles feront l'objet d'une étude plus approfondie au cours du chapitre suivant.

5.2.2 Intensité non bornée sans vie utile

La très grande majorité des intensités en baignoire définies dans la littérature correspond à des intensités non bornées ne présentant pas d'intervalle spécifique où l'intensité est constante. Voici les principales intensités en baignoire utilisées en fiabilité, définies chronologiquement :

- Hjorth (1977, [44]). L'une des premières intensités permettant de prendre en compte les périodes de jeunesse a l'expression suivante :

$$\lambda(t) = \delta t + \frac{\theta}{1+\beta t} \tag{5.7}$$

avec $\delta, \theta, \beta > 0$.
Sous la condition que $\beta\theta > \delta$, cette intensité correspond à une courbe en baignoire comme on peut l'observer sur la figure 5.5 avec le choix des paramètres suivants : $\theta = 3,\ \beta = \delta = 1$.

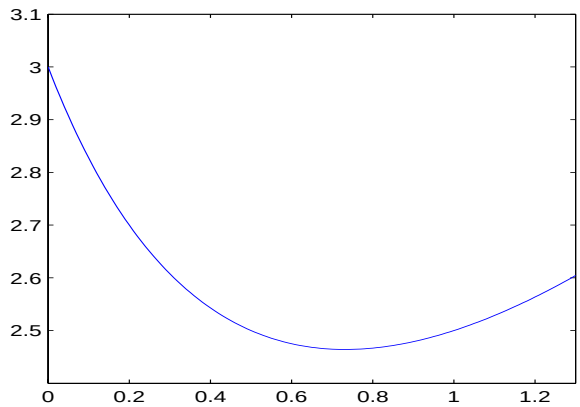


FIG. 5.5 – Intensité initiale [44]

Le minimum de la courbe est atteint pour la valeur t_J suivante :

$$t_J = \frac{\sqrt{\frac{\theta\beta}{\delta}} - 1}{\beta} \tag{5.8}$$

- Haupt et Schäbe (1992, [43]). Cette intensité obtenue à partir d'une méthode de transformée du temps d'observation (*TTT plot*) a la particularité de n'être définie que sur un intervalle borné [0,T] :

$$\lambda(t) = \frac{1+2\beta}{2TA(t)(1+\beta-A(t))}\mathbb{1}_{\{t\leq T\}} \tag{5.9}$$

avec $A(t) = \sqrt{\beta^2 + (1+2\beta)\frac{t}{T}}$, $1 > \beta > \frac{-1}{3}$.

Un exemple d'intensité est proposé sur la figure 5.6 avec les paramètres $\beta = 0.2$ et $T = 1$.
Le minimum de la courbe est atteint pour la valeur t_J suivante :

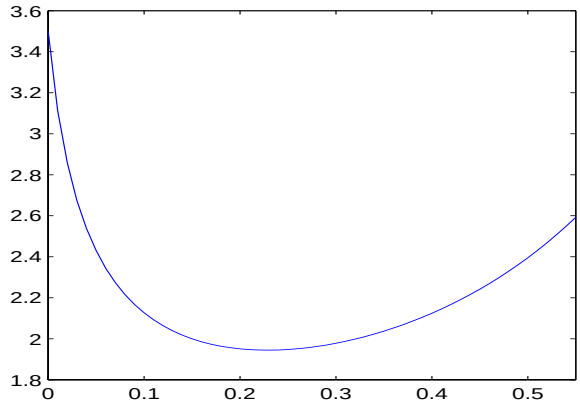


FIG. 5.6 – Intensité initiale [43]

$$t_J = \frac{T(1+2\beta-3\beta^2)}{4(1+2\beta)} \tag{5.10}$$

- Xie et Lai (1995, [71]). Les intensités de Weibull sont décroissantes si le paramètre de forme β est inférieur à 1 et sont croissantes si β est supérieur à 1. Une idée naturelle proposée par Xie et Lai [71] afin de construire une intensité en baignoire est de combiner ces deux types d'intensités. On obtient alors le modèle de Weibull additif dont l'intensité vaut :

$$\lambda(t) = b(at)^{b-1} + d(ct)^{d-1} \tag{5.11}$$

avec $a, c > 0$ et $b > 1$ et $d < 1$.
Un exemple d'intensité est proposé sur la figure 5.7 avec les paramètres $a = 0.3, b = 3, c = 0.1, d = 0.3$.

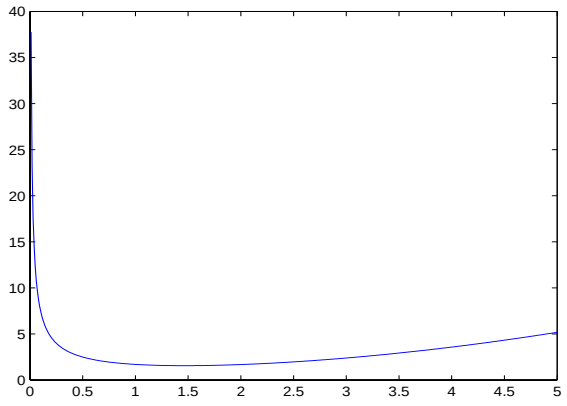


FIG. 5.7 – Intensité initiale [71]

La courbe atteint un minimum pour la valeur suivante :

$$t_J = \frac{c^d d(1-d)}{a^b b(b-1)}^{\frac{1}{b-d}} \tag{5.12}$$

Dans ce même article [71], les auteurs proposent un modèle particulier qui permet de réduire de manière importante le nombre de paramètres du modèle, appelé modèle de Weibull additif réduit :

$$\lambda(t) = b(at)^{b-1} + \frac{1}{b}(at)^{\frac{1}{b}-1} \tag{5.13}$$

avec $a > 0$ et $b > 1$.
Dans ces conditions, le minimum de la fonction est :

$$t_J = ab^{\frac{-3b}{b^2-1}} \tag{5.14}$$

- Chen (2000, [16]), Xie et al. (2002, [72]). Il s'agit d'une intensité proposée par Chen à laquelle Xie, Tang et Goh ont rajouté un paramètre d'échelle et qui a l'expression suivante :

$$\lambda(t) = \lambda\beta(\frac{t}{\alpha})^{\beta-1}\exp((\frac{t}{\alpha})^{\beta}) \tag{5.15}$$

avec $\lambda, \alpha > 0$ et $1 > \beta > 0$.

Un exemple d'intensité est proposé sur la figure 5.8 avec les paramètres $\beta = 0.6$, $\lambda = \alpha = 1$.

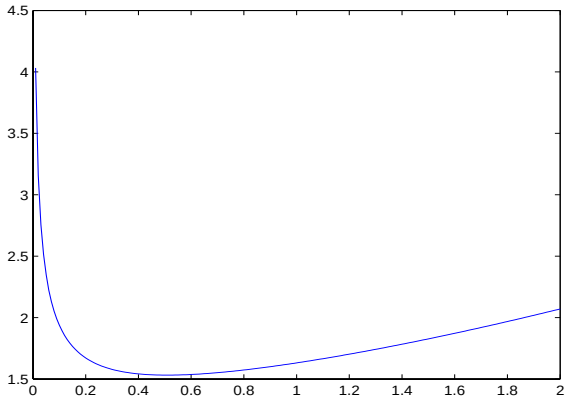


FIG. 5.8 – Intensité initiale [72]

La fonction atteint son minimum en t_J qui s'exprime de la manière suivante :

$$t_J = \alpha(\frac{1}{\beta} - 1)^{\frac{1}{\beta}} \tag{5.16}$$

- Murthy, Xie et Jiang (2004,[61]). Au lieu d'additionner des intensités de type Weibull comme dans [71], on peut aussi définir deux sections dans le temps avec des intensités toujours de type Weibull. On obtient la courbe bisectionnelle suivante :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \beta_J(\frac{t}{\eta_J})^{\beta_J-1} & \text{si } t \leq t_J \\ \beta_V(\frac{t}{\eta_V})^{\beta_V-1} & \text{si } t_J \leq t \end{cases} \tag{5.17}$$

sous la condition de continuité $t_J = (\frac{\beta_V}{\beta_J}\frac{\eta_J^{\beta_J-1}}{\eta_V^{\beta_V-1}})^{\frac{1}{\beta_J-\beta_V}}$, et avec $\alpha_J, \alpha_V \geq 0$, $\beta_J < 1$, $\beta_V > 1$ et $t_J > 0$.

Par construction, on obtient ainsi directement le minimum de la courbe en fonction des paramètres du modèle. Un exemple d'intensité est proposé sur la figure 5.9 avec le choix des paramètres suivants : $\eta_J = 0.1, \beta_J = 0.5, \eta_V = 4, \beta_V = 2$.

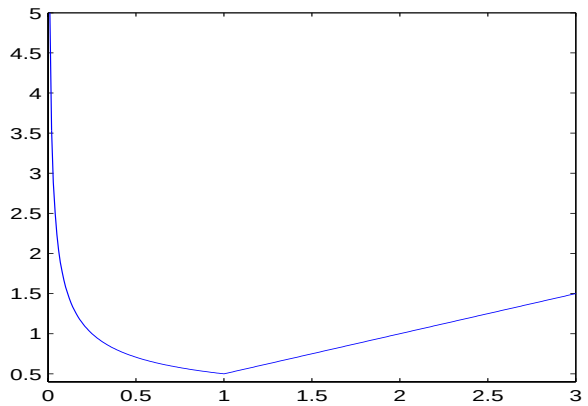


FIG. 5.9 – Intensité initiale [61]

D' autres courbes en baignoire ont été proposées. On peut citer les intensités définies par Wang (2000, [68]), Pulcini (2001, [64]), Ghitany (2004, [42]) et plus récemment Bebbington et al. (2007, [5]).

5.2.3 Intensité non bornée avec vie utile

On souhaite désormais proposer des intensités présentant une période de vie utile. Les travaux de Murthy, Xie et Jiang [61] débouchent sur la définition d'intensités sectionnelles de type Weibull. Comme cas particulier, Jiang et Murthy [49] considèrent trois sections avec un paramètre de forme étant successivement inférieur, égal puis supérieur à 1. On obtient alors une intensité en baignoire qui a les caractéristiques voulues :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \beta_J(\frac{t}{\eta_J})^{\beta_J-1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda & \text{si } t_J < t < t_V \\ \beta_V(\frac{t}{\eta_V})^{\beta_V-1} & \text{si } t \geq t_V \end{cases} \tag{5.18}$$

avec $\alpha_J, \alpha_V \geq 0$, $\beta_J < 1$, $\beta_V > 1$ et $t_J > 0$.

Tout comme pour le modèle bisectionnel présenté en (5.17), des conditions de continuité doivent être remplies en t_J et t_V.

A présent, nous définissons un second modèle sur le même principe que le précédent. Ce modèle a l'avantage de ne pas avoir de conditions de continuité, ce qui rend son utilisation

beaucoup plus facile. Ce modèle comporte les 3 périodes caractéristiques et est de type Weibull en période de jeunesse et période d'usure. L'intensité s'écrit de la forme suivante :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_J \beta_J (t_J - t)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda & \text{si } t_J < t < t_V \\ \lambda + \alpha_V \beta_V (t - t_V)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_V \leq t \end{cases} \tag{5.19}$$

avec $\lambda, \alpha_J, \alpha_V \geq 0$, $\beta_J, \beta_V > 1$ et $t_V > t_J > 0$.

Cette intensité vérifie bien les conditions d'une courbe en baignoire. La Figure 5.10 donne un exemple de cette intensité initiale pour $\lambda = 1$, $\alpha_J = \alpha_V = 0.01$, $\beta_J = \beta_V = 3$, $t_J = 10$ et $t_V = 30$.

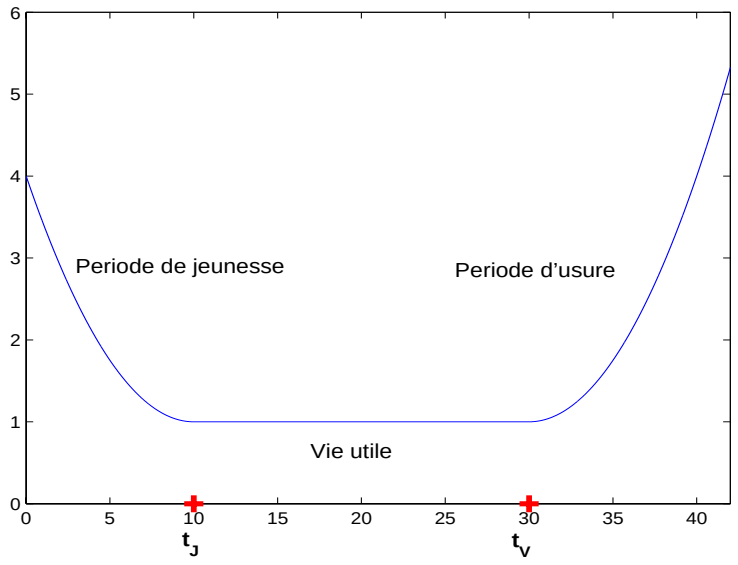


FIG. 5.10 – Intensité initiale (5.19)

Intéressons nous plus en détail aux paramètres de ce modèle :

- t_J est l'instant de fin de la période de jeunesse et de début de la période de vie utile.
- t_V est l'instant de fin de la période de vie utile et de début de la période d'usure.
- λ est le taux de panne durant la période de vie utile.
- Hormis le terme λ, l'intensité en période d'usure est de type Weibull. Le paramètre β_V correspond au paramètre de forme indiquant la vitesse de dégradation du système. Plus β_V est important, plus la dégradation du système est rapide. α_V est simplement un paramètre d'echelle.
- L'intensité en période de jeunesse est également de type Weibull, mais du fait du signe - devant la variable t, le paramètre β_J a une interprétation inhabituelle. En effet, plus la valeur de ce paramètre est importante, plus l'amélioration du système est notable en période de jeunesse et il est donc crucial de ne pas négliger cette période de vie du système. A l'inverse, si ce paramètre β_J est proche de 1, l'intensité est presque constante en période de jeunesse, ce qui signifie que le comportement

du système est pratiquement identique en période de jeunesse et en période de vie utile. Le paramètre α_J représente là aussi un paramètre d'echelle relatif à la période de jeunesse.

5.2.4 Intensité asymptotiquement bornée sans vie utile

Certains systèmes sont automatiquement remplacés par un système neuf ou plus performant lorsque leur dégradation est trop importante. Pour ce type de systèmes, il n'est donc pas primordial de considérer une intensité de défaillance pouvant atteindre l'infini. Idée [46] a proposé l'intensité asymptotiquement bornée suivante, basée sur une perturbation d'un modèle exponentiel :

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta}\left[1 - \epsilon\frac{1+\ln(\frac{t}{\eta})}{1+\epsilon\frac{t}{\eta}\ln(\frac{t}{\eta})}\right] \tag{5.20}$$

Cette intensité ne comporte que deux paramètres :

- Le paramètre η correspond au paramètre lié à la loi exponentielle initiale non perturbée. On remarque qu'asymptotiquement, l'intensité initiale vaut $\frac{1}{\eta}$.
- Le paramètre ϵ correspond au paramètre de perturbation du modèle initial exponentiel :
  - Pour $\epsilon = 0$, le modèle initial n'est pas perturbé :

    $$\lambda(t) = \frac{1}{\eta}$$

  - Plus ϵ croît, plus l'intensité initiale a une représentation marquée en courbe en baignoire. L'intensité décroît entre 0 et une valeur t_J puis croît jusqu'à une valeur plancher égale à $\frac{1}{\eta}$. t_J est solution de l'équation suivante :

    $$\frac{t_J}{\eta}(1+\ln(\frac{t_J}{\eta})+\ln^2(\frac{t_J}{\eta})) = \frac{1}{\epsilon} \tag{5.21}$$

    En pratique, t_J est très proche de la valeur $\frac{\eta}{\sqrt{\epsilon}}$

La figure 5.11 présente des exemples d'intensités initiales avec $\epsilon \in \{0, 0.3, 0.5, 0.7, 1\}$ et $\eta = 1$. On peut remarquer que toutes les courbes se croisent au point $\dfrac{\eta}{e}$.

5.3 Hypothèses sur les âges effectifs pour un seul type de maintenance

5.3.1 Introduction

Le principe général des modèles d'âges virtuels que nous proposons est qu'une maintenance efficace réduit l'âge du système pour une intensité croissante et l'augmente pour une intensité décroissante. Si on considère plus spécifiquement une intensité en baignoire, nous faisons les considérations suivantes :

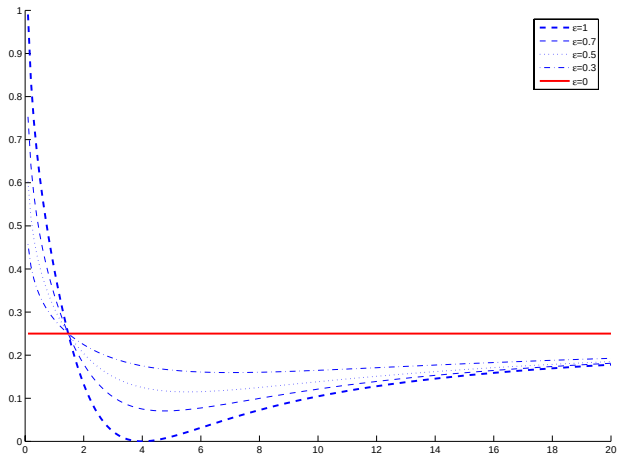


FIG. 5.11 – Exemple d'intensités initiales (5.20)

- En période de jeunesse, une maintenance efficace doit éliminer les défauts de rodage. Optimalement, après une maintenance en période de jeunesse, le système ne doit plus présenter de défauts de conception et son âge virtuel serait alors t_J : le système se comporte comme s'il était en début de vie utile.
- En période d'usure, une maintenance efficace tend à éliminer toute dégradation du système. Là aussi, une maintenance optimale ramène le système en début de vie utile t_J.

Par la suite, nous développons quatre façons différentes de modéliser des effets de maintenance non nuisibles pour des intensités initiales présentant une période de jeunesse, quand on n'observe que des maintenances correctives.

5.3.2 Modèle $ABAO - ARA_1(\rho)$

L'idée la plus simple est de considérer que les maintenances sont minimales durant la période de jeunesse. On a ainsi $A_n = T_n$ jusqu'à l'instant t_J. Sous cette hypothèse, les maintenances n'ont pas d'effet en période de jeunesse, donc en particulier, elles ne permettent pas de réduire la durée de cette période.

Lors de la période d'usure du système, c'est-à-dire à partir de t_J, on suppose que l'effet de la maintenance est de type ARA_1 de paramètre ρ. Deux cas doivent être considérés :

- Pour la première maintenance durant la période d'usure, on suppose que l'effet ARA_1 n'a lieu que sur la période de temps ayant lieu après t_J et non sur toute la dernière durée inter-défaillance. Cela empêche ainsi d'effectuer une maintenance nuisible. Cette hypothèse revient simplement à considérer que l'effet ARA_1 qui a pour but de "rajeunir" le système ne peut avoir lieu que si le système vieillit et en aucun cas en période de jeunesse. Ainsi, d'après l'équation (5.3), au lieu d'avoir une expression de type $A_n = A_{n-1} + (1-\rho)(T_n - T_{n-1})$ comme dans le cas ARA_1 standard, nous définissons l'âge effectif par :

$$A_n = t_J + (1-\rho)(T_n - t_J) \tag{5.22}$$

La figure 5.12 illustre le comportement de l'efficacité de la première maintenance suivant t_J.

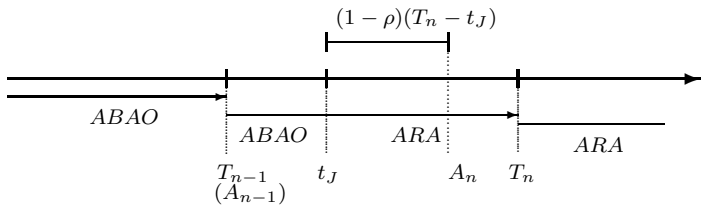


FIG. 5.12 – Ages effectifs autour de t_J

– Pour les maintenances suivantes, l'efficacité de la maintenance est de type ARA_1 :

$$A_n = A_{n-1} + (1-\rho)X_n \tag{5.23}$$

L'écriture des âges effectifs est donc :

$$A_n = \begin{cases} T_n & \text{si } T_n \leq t_J \\ t_J + (1-\rho)(T_n - t_J) & \text{si } T_{n-1} < t_J < T_n \\ A_{n-1} + (1-\rho)X_n & \text{si } T_n \geq t_J \end{cases} \tag{5.24}$$

En fait, il est possible de réécrire les âges effectifs de manière plus simple. En effet, jusqu'à t_J, les âges effectifs sont égaux aux âges réels ($A_n = T_n$). Puis, pour la première défaillance en période de vie utile ($T_{n-1} < t_J < T_n$), on obtient :

$$A_n = t_J + (1-\rho)(T_n - t_J) = T_n - \rho(T_n - t_J)$$

Finalement, on effectue un raisonnement par récurrence pour les âges effectifs suivants. Supposons $A_n = T_n - \rho(T_n - t_J)$. Alors :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + (1-\rho)X_{n+1} = T_n - \rho(T_n - t_J) + (1-\rho)X_{n+1} \\ &= T_n + X_{n+1} - \rho(T_n + X_{n+1} - t_J) \\ &= T_{n+1} - \rho(T_{n+1} - t_J). \end{aligned} \tag{5.25}$$

On constate donc qu'il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre la première défaillance après t_J et les suivantes. Les âges effectifs s'écrivent donc simplement :

$$A_n = \begin{cases} T_n & \text{si } T_n \leq t_J \\ T_n - \rho(T_n - t_J) & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.26}$$

Si on s'intéresse aux valeurs limites de ρ, on observe que :

– $\rho = 0 \implies \forall\, n,\ A_n = T_n$. Toutes les maintenances sont minimales (ABAO).

– $\rho = 1 \implies \forall\, n,\ A_n = t_J$ si $T_n > t_J$. Ainsi, les maintenances ramènent le système à l'instant t_J. Etant donné que l'intensité initiale est minimale en t_J, on peut comprendre sans mal que le système se comporte de manière optimale à l'instant t_J. Un paramètre ρ égal à 1 ne correspond donc pas à effectuer une maintenance parfaite qui remettrait le système à neuf mais à une maintenance optimale.

La figure 5.13 représente une trajectoire des âges virtuels en considérant $t_J = 100$ et $\rho = 0.8$.

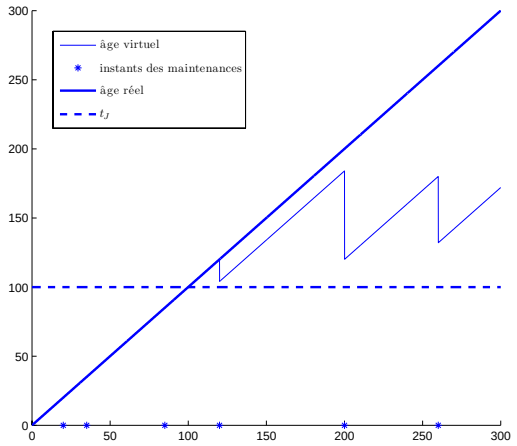


FIG. 5.13 – Trajectoire des âges virtuels pour un modèle $ABAO - ARA_1$

5.3.3 Modèle $AIA(\rho_J) - ARA_1(\rho_V)$

Le premier modèle ne permet pas de prendre en compte une efficacité de la maintenance lors de la période de jeunesse. On propose dans cette section une modélisation similaire au modèle précédent, mais adaptée à la période de rodage. On suppose que la maintenance en période de jeunesse permet de faire décroître de manière proportionnelle le temps restant pour atteindre l'instant t_J. Pour commencer, après la première panne qui a lieu à l'instant T_1, le temps restant jusqu'à t_J est naturellement $t_J - T_1$. Le premier âge effectif sera donc :

$$A_1 = T_1 + \rho_J(t_J - T_1) \tag{5.27}$$

En généralisant cette formule, on suppose que les âges effectifs en période de jeunesse sont :

$$A_n = A_{n-1} + X_n + \rho_J(t_J - A_{n-1} - X_n) = (1 - \rho_J)(A_{n-1} + X_n) + \rho_J t_J \tag{5.28}$$

- $\rho_J = 0 \implies \forall\, n,\ A_n = T_n$. Les âges effectifs sont égaux aux âges réels. La maintenance est minimale (ABAO).
- $\rho_J = 1 \implies \forall\, n,\ A_n = t_J$. La première maintenance permet d'éliminer tous les défauts de jeunesse et de faire fonctionner le système dans ses conditions optimales.

Nous noterons cette augmentation arithmétique de l'âge en période de jeunesse AIA (**Arithmetic Increase of Age**). On peut observer une très grande similarité entre le modèle AIA en période de jeunesse et le modèle ARA_∞. En effet, l'équation (5.4) pour le modèle ARA_∞ est analogue à celle proposée pour le modèle AIA en (5.28). Plus précisément, pour ces deux modèles, l'efficacité de la maintenance porte sur l'âge complet du système juste avant cette maintenance.

D'autre part, on considère pour la période d'usure des maintenances de type ARA_1 d'efficacité ρ_V. Toute comme dans la section précédente, il est nécessaire de généraliser cette efficacité pour ne pas revenir en période de jeunesse et ainsi effectuer une maintenance nuisible. Dans un premier temps, on adapte l'équation (5.22) pour la première

maintenance en période d'usure. Pour cela, on considère que le rajeunissement proportionnel ne fait intervenir que le temps écoulé depuis t_J. On obtient alors :

$$A_n = t_J + (1 - \rho_V)(A_{n-1} + X_n - t_J) \tag{5.29}$$

Pour les maintenances suivantes, on garde l'écriture usuelle des âges effectifs pour un modèle ARA_1 :

$$A_n = A_{n-1} + (1 - \rho_V)X_n \tag{5.30}$$

Nous considérons que les efficacités en période de jeunesse et période d'usure ne sont pas les mêmes pour plusieurs raisons :

- Il est logique de considérer que les actions de maintenance diffèrent entre la période de jeunesse où on effectue un déverminage du système et la période d'usure où les maintenances ont lieu sur la dégradation du système.
- On observe généralement beaucoup plus de défaillances en période d'usure. Cela est logique car on conçoit bien que la période de jeunesse doit être relativement courte. En considérant un seul paramètre d'efficacité ρ, son estimation se ferait essentiellement à partir des données en période d'usure et on pourra difficilement quantifier l'impact réel de la maintenance sur la période de jeunesse. Par exemple, des maintenances très efficaces en période d'usure aboutiraient à avoir une estimation de ρ proche de 1. Au vu de la définition du modèle, cela contraindrait à observer en moyenne une seule maintenance en période de jeunesse, ce qui est une contrainte beaucoup trop forte.

Pour des raisons pratiques, si l'on souhaite simplifier la modélisation en ne conservant qu'un seul paramètre d'efficacité de maintenance, il suffit d'appliquer les futurs résultats au cas particulier $\rho = \rho_J = \rho_V$.

Comme dans l'exemple précédent, on peut expliciter les âges effectifs de la manière suivante.

Propriété 5.1 *: Si on suppose qu'il y a p maintenances en période de jeunesse, les âges effectifs pour un modèle $AIA(\rho_J) - ARA_1(\rho_V)$ sont :*

$$A_n = \begin{cases} T_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n-i}) & \text{si } n \leq p \\ t_J + (1-\rho_V)(\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}) + T_n - t_J) & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.31}$$

Démonstration : Ces démonstrations s'effectuent par récurrence. Tout d'abord, on vérifie par récurrence l'écriture des âges effectifs en période de jeunesse. Pour le terme d'initialisation, on a :

$$A_1 = T_1 + \rho_J(t_J - T_1) = T_1 + \rho_J(1-\rho_J)^0(t_J - T_1)$$

Ensuite, pour la récurrence proprement dite, on suppose la relation vérifiée au rang n. Calculons A_{n+1} :

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= A_n + X_{n+1} + \rho_J(t_J - A_n - X_{n+1}) \\
&= T_n + X_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n-i}) \\
&+ \rho_J(t_J - T_n - X_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n-i})) \\
&= T_{n+1} + (1-\rho_J)\sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n-i}) + \rho_J(t_J - T_{n+1}) \\
&= T_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^{i+1}(t_J - T_{n-i}) + \rho_J(t_J - T_{n+1}) \\
&= T_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n+1-i}) + \rho_J(1-\rho_J)^0(t_J - T_{n+1-0}) \\
&= T_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n+1-i})
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Cela termine la première partie de la démonstration. Il faut effectuer un second raisonnement par récurrence pour les maintenances intervenant après t_J. Le terme d'initialisation correspond à l'âge effectif A_{p+1} :

$$\begin{aligned}
A_{p+1} &= t_J + (1-\rho_V)(A_p + X_{p+1} - t_J) \\
&= t_J + (1-\rho_V)(T_p + \sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}) + X_{p+1} - t_J) \\
&= t_J + (1-\rho_V)(T_{p+1} - t_J + \sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}))
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Ensuite, on suppose que la relation est vérifiée pour A_{p+n}. On calcule alors A_{p+n+1} :

$$\begin{aligned}
A_{p+n+1} &= A_{p+n} + (1-\rho_V)(X_{p+n+1}) \\
&= t_J + (1-\rho_V)(\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}) + T_{p+n} - t_J) + (1-\rho_V)X_{p+n+1} \\
&= t_J + (1-\rho_V)(\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}) + T_{p+n+1} - t_J)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

La relation est naturellement vérifiée au rang suivant ce qui termine la démonstration. □

On peut remarquer qu'en période d'usure, l'écriture des âges effectifs est :

$$A_n = T_n - \rho_V(T_n - t_J) + (1-\rho_V)(A_p - T_p) \tag{5.35}$$

Cette écriture est analogue à celle obtenue en (5.25) pour le modèle $ABAO-ARA_1$. En particulier, pour $\rho_J = 0$, on retrouve exactement les mêmes équations, ce qui est logique puisque cela revient à considérer des maintenances minimales en période de jeunesse.

La figure 5.14 représente une trajectoire des âges virtuels en considérant $t_J = 100$, $\rho_J = 0.5$ et $\rho_V = 0.8$. On observe que les âges augmentent après les deux premières maintenances, ce qui permet de se trouver en fin de période de jeunesse bien avant t_J. Au delà, les âges diminuent suite aux maintenances, ce qui traduit des maintenances efficaces.

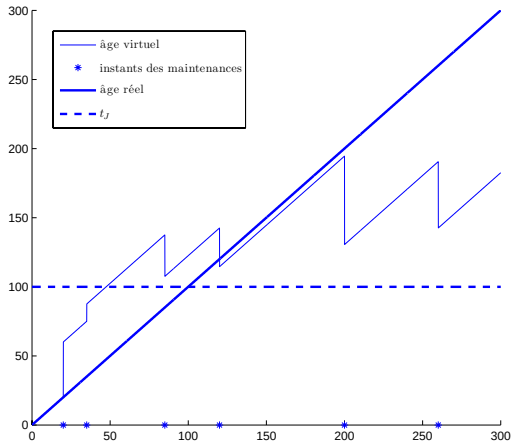


FIG. 5.14 – Trajectoire des âges virtuels pour un modèle $ABAO - ARA_1$

5.3.4 Modèle $AIA(\rho_J) - ARA_\infty(\rho_V)$

Dans cette section, on conserve les hypothèses sur les efficacités de maintenance en période de jeunesse. En revanche, on adopte des efficacités de maintenance de type ARA_∞ pour la période d'usure du système. Pour un modèle classique, une maintenance ARA_∞ consiste à rajeunir l'intégralité du système de manière proportionnelle à son âge virtuel. D'après l'équation (5.4), on obtient : $A_n = (1-\rho)(A_{n-1} + X_n)$. Pour ce modèle, on considère que l'efficacité ne porte que sur le temps écoulé depuis t_J afin de ne pas revenir en période de jeunesse. On obtient alors :

$$A_n = t_J + (1-\rho_V)(A_{n-1} + X_n - t_J) \tag{5.36}$$

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de différencier l'efficacité de la première maintenance en période d'usure des suivantes. Plus particulièrement, on remarque que l'écriture de l'efficacité de la première maintenance est identique à celle du modèle précédent d'après (5.29).

On peut discuter de l'impact du paramètre ρ_V :

- $\rho_V = 0 \implies \forall\ n,\ A_n = A_{n-1} + X_n$. Les âges du système avant et après une maintenance en période d'usure sont identiques. Cela signifie que la maintenance est minimale (ABAO). Le fait que les maintenances en période de jeunesse puissent être efficaces fait que l'on ne retrouve pas $A_n = T_n$.
- $\rho_V = 1 \implies \forall\ n,\ A_n = t_J$. Nous avons adapté le modèle ARA_∞ de sorte à avoir une maintenance optimale pour $\rho_V = 1$ ramenant le système en t_J.

Comme on l'a signalé dans la section précédente, il existe une grande similarité entre le modèle AIA et ARA_∞. Plus précisément, on remarque que l'écriture des âges effectifs est identique pour un modèle AIA en période de jeunesse et pour notre modèle ARA_∞ adapté :

$$A_n = \begin{cases} t_J + (1-\rho_J)(A_{n-1} + X_n - t_J) & \text{en période de jeunesse} \\ t_J + (1-\rho_V)(A_{n-1} + X_n - t_J) & \text{en période d'usure} \end{cases} \tag{5.37}$$

La raison en est que, dans les deux cas, la maintenance ramène le système vers t_J de manière proportionnelle. C'est bien le cas pour la définition du modèle AIA en période de jeunesse. C'est aussi le cas pour un modèle ARA_∞ classique avec $t_J = 0$, ici adapté aux t_J non nuls.

Notons ρ_i l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance :

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_J & \text{en période de jeunesse } (i \leq p) \\ \rho_V & \text{en période d'usure } (i > p) \end{cases} \tag{5.38}$$

Alors, $\forall n > 0, \quad A_n = t_J + (1-\rho_n)(A_{n-1} + X_n - t_J)$.

Tout comme dans les sections précédentes, il est possible d'avoir une expression explicite des âges effectifs. Nous l'exprimons de deux manières identiques.

Propriété 5.2 *: Si on suppose qu'il y a p maintenances en période de jeunesse, les âges effectifs pour un modèle $AIA(\rho_J) - ARA_\infty(\rho_V)$ sont :*

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{cases} T_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{n-i}) & \text{si } n \leq p \\ T_n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-p-1} \rho_V(1-\rho_V)^i(T_{n-i} - t_J) & \\ +(1-\rho_V)^{n-p} \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}) & \text{si } n > p \end{cases} \\ &= T_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n-j})](t_J - T_{n-i}) \end{aligned} \tag{5.39}$$

On considère que pour $i = 0$, un produit vide vaut naturellement 1.

Démonstration : On démontre cette propriété par récurrence en utilisant la seconde écriture des âges effectifs. La relation est vérifiée pour le premier terme A_1. Supposons la relation vérifiée au rang n et calculons A_{n+1} :

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= t_J + (1-\rho_{n+1})(A_n + X_{n+1} - t_J) \\
&= t_J + (1-\rho_{n+1})(T_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n-j})](t_J - T_{n-i}) + X_{n+1} - t_J) \\
&= T_{n+1} + \rho_{n+1}(t_J - T_{n+1}) + (1-\rho_{n+1}) \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n-j})](t_J - T_{n-i}) \\
&= T_{n+1} + \rho_{n+1}(t_J - T_{n+1}) + (1-\rho_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \rho_{n+1-i}[\prod_{j=1}^{i-1}(1-\rho_{n+1-j})](t_J - T_{n+1-i}) \\
&= T_{n+1} + \rho_{n+1-0}(t_J - T_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \rho_{n+1-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n+1-j})](t_J - T_{n+1-i}) \\
&= T_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_{n+1-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n+1-j})](t_J - T_{n+1-i})
\end{aligned} \tag{5.40}$$

La première écriture des âges effectifs en fonction de ρ_J et ρ_V découle alors des résultats précédents. En période de jeunesse, le résultat est immédiat. En période d'usure, on developpe les résultats de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
A_n &= T_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n-j})](t_J - T_{n-i}) \\
&= T_n + \sum_{i=0}^{n-p-1} \rho_V(1-\rho_V)^i(t_J - T_{n-i}) + \sum_{i=n-p}^{n-1} \rho_J(1-\rho_V)^{n-p}(1-\rho_J)^{i-n+p}(t_J - T_{n-i}) \\
&= T_n - \sum_{i=0}^{n-p-1} \rho_V(1-\rho_V)^i(T_{n-i} - t_J) + (1-\rho_V)^{n-p} \sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - T_{p-i}) \ \square
\end{aligned} \tag{5.41}$$

On peut remarquer que la démonstration proposée permet de prendre en compte un nombre quelconque d'efficacités de maintenance ρ_i. En particulier, ces démonstrations restent vérifiées si on considère deux types d'efficacité de maintenances associés - par exemple - à deux types de maintenances, comme on le verra plus tard.

La figure 5.15 représente une trajectoire des âges virtuels en considérant $t_J = 100$, $\rho_J = 0.5$ et $\rho_V = 0.8$. En comparant avec la figure 5.14, on remarque que les âges effectifs en période de jeunesse sont identiques au modèle précédent. C'est normal puisque les efficacités des maintenances sont identiques pour cette période. La différence s'observe en période d'usure où le modèle $AIA(\rho_J) - ARA_\infty(\rho_V)$ donne des âges effectifs plus faibles que pour le modèle $AIA(\rho_J) - ARA_1(\rho_V)$.

5.3.5 Modèle $BTBP(p_J) - BTBP(p_V)$

Dans les sections précédentes, nous avons proposé un modèle d'âges effectifs AIA qui s'est révélé être un équivalent du modèle ARA_∞ pour des intensités décroissantes. Il n'est par contre pas possible d'adapter le modèle ARA_1 en période de jeunesse. En effet, le modèle ARA_1 tient compte d'une efficacité sur le temps écoulé depuis la dernière

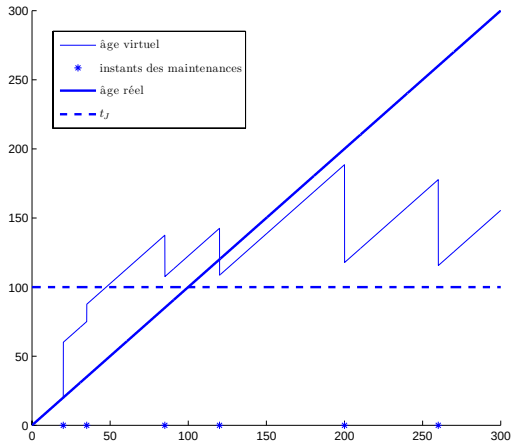


FIG. 5.15 – Trajectoire des âges virtuels pour un modèle $AIA - ARA_\infty$

maintenance. Or, en période de jeunesse, le temps écoulé entre deux maintenances n'a pas réellement d'importance. Ce qui compte, c'est le temps qu'il reste à parcourir jusqu'à l'instant t_J. En revanche, il est tout à fait possible d'adapter le modèle de Brown-Proschan en tenant compte de la précédente remarque. On définit alors le modèle suivant :

- En période de jeunesse, les réparations sont minimales avec une probabilité p_J et amènent le système à l'instant t_J avec la probabilité $1 - p_J$.
- En période d'usure, les réparations sont minimales avec une probabilité p_V et ramènent le système à l'instant t_J avec la probabilité $1 - p_V$.

Ce modèle n'est pas un modèle de renouvellement classique comme pour le modèle de Brown-Proschan mais permet de restaurer le système dans ses conditions optimales. Nous appellerons ce modèle **BTBP (Bathtub-Shaped Brown-Proschan model)**.

On définit l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance par une variable aléatoire B_i telle que :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est optimale et ramène le système en } t_J \\ 0 & \text{si la maintenance est minimale} \end{cases} \tag{5.42}$$

Les B_i sont des variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètres p_J en période de jeunesse et de loi de Bernoulli de paramètres p_V en période d'usure.

Les âges effectifs ont l'expression suivante :

$$A_n = B_n t_J + (1 - B_n)(A_{n-1} + X_n) \tag{5.43}$$

On peut étudier les valeurs remarquables des efficacités de maintenance :

- $p_J = 0 \implies \forall n \leq p,\ A_n = T_n$. La maintenance en période de jeunesse est minimale (ABAO).
- $p_J = 1 \implies \forall n \leq p,\ A_n = t_J$. Au cours de la première maintenance en période de jeunesse, tous les défauts de jeunesse sont éliminés.
- $p_V = 0 \implies \forall n > p,\ A_n = T_n$. La maintenance en période d'usure est minimale (ABAO).

– $p_J = 1 \implies \forall n > p,\ A_n = t_J$. Toute maintenance en période d'usure ramène le système dans ses conditions optimales.

Comme l'équation (5.2) pour le modèle BP classique, il existe une expression explicite des âges effectifs.

Propriété 5.3 *: Les âges effectifs pour un modèle $BTBP(p_J) - BTBP(p_V)$ sont :*

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{k=j}^{n} (1 - B_k) \right] X_j + t_J \sum_{j=1}^{n} B_j \left[\prod_{k=j+1}^{n} (1 - B_k) \right] \tag{5.44}$$

Démonstration : Ces démonstrations s'effectuent par récurrence. La relation est vérifiée pour A_1. Supposons la relation vérifiée au rang n et calculons A_{n+1} :

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= B_{n+1} t_J + (1 - B_{n+1})(A_n + X_{n+1}) \\
&= B_{n+1} t_J + (1 - B_{n+1})(X_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{k=j}^{n} (1 - B_k) \right] X_j + \sum_{j=1}^{n} B_j \left[\prod_{k=j+1}^{n} (1 - B_k) \right] t_J) \\
&= (1 - B_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{k=j}^{n} (1 - B_k) \right] X_j + (1 - B_{n+1}) X_{n+1} \\
&\quad + (1 - B_{n+1}) t_J \sum_{j=1}^{n} B_j \left[\prod_{k=j+1}^{n} (1 - B_k) \right] + B_{n+1} t_J \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{k=j}^{n+1} (1 - B_k) \right] X_j + (1 - B_{n+1}) X_{n+1} \\
&\quad + t_J \sum_{j=1}^{n} B_j \left[\prod_{k=j+1}^{n+1} (1 - B_k) \right] + B_{n+1} t_J \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \left[\prod_{k=j}^{n+1} (1 - B_k) \right] X_j + t_J \sum_{j=1}^{n+1} B_j \left[\prod_{k=j+1}^{n+1} (1 - B_k) \right]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Ce qui termine la démonstration. □

La figure 5.16 représente une trajectoire des âges virtuels en considérant $t_J = 100$, $p_J = 0.5$ et $p_V = 0.8$. On observe que la première maintenance est minimale, puis que la seconde est optimale et permet de se retrouver en fin de période de jeunesse. D'autre part, les maintenances suivantes optimales ramènent aussi le système en t_J tandis que les autres sont ABAO.

5.3.6 Autres modèles

Il est évidemment possible de proposer d'autres modèles d'efficacité de la maintenance, en particulier :

- $ABAO - ARA_\infty$
- $ABAO - BTBP$
- $AIA - BTBP$

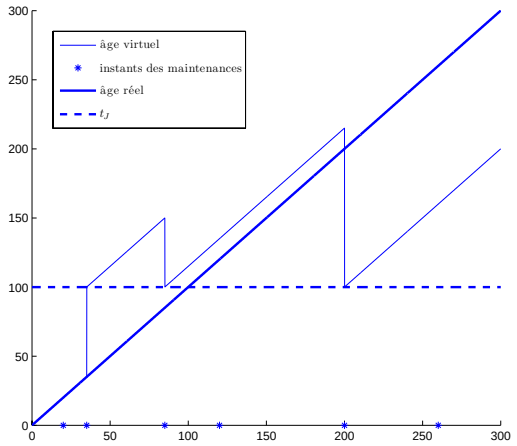


FIG. 5.16 – Trajectoire des âges virtuels pour un modèle BTBP-BTBP

- $BTBP - ARA_1$
- $BTBP - ARA_\infty$

Dans chaque cas, il est aussi possible d'avoir des expressions explicites des âges effectifs.

5.4 Hypothèses sur les âges effectifs pour deux types de maintenances

On considère dans cette section que les systèmes étudiés sont soumis à la fois à des maintenances correctives et à des maintenances préventives. Nous présentons quelques exemples de généralisations de modèles proposés dans la section précédente, en présence de deux types de maintenance.

5.4.1 Modèle $AIA(\rho_{c,J}, \rho_{p,J}) - ARA_1(\rho_{c,V}, \rho_{p,V})$

On suppose que les maintenances sont de type AIA en période de jeunesse et de type ARA_1 au delà. On différencie les efficacités de maintenances correctives et préventives dans chacune des périodes. On obtient alors 4 paramètres sur l'efficacité de la maintenance : $(\rho_{p,J}, \rho_{p,V})$ relatifs aux MP et $(\rho_{c,J}, \rho_{c,V})$ relatifs aux MC. L'interprétation de ces paramètres est très similaire à celle proposée en présence d'un seul type de maintenance.

Dans ces conditions, on peut calculer les âges effectifs du système. On note toujours p le nombre de maintenances jusqu'à l'instant t_J. D'autre part, on note ρ_i l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance :

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_{p,J}^{U_i} \rho_{c,J}^{1-U_i} & \text{en période de jeunesse} \\ \rho_{p,V}^{U_i} \rho_{c,V}^{1-U_i} & \text{en période d'usure} \end{cases} \tag{5.46}$$

Propriété 5.4 *: Les âges effectifs pour un modèle $AIA(\rho_{c,J}, \rho_{p,J}) - ARA_1(\rho_{c,V}, \rho_{p,V})$ sont :*

$$A_n = \begin{cases} C_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n-j})](t_J - C_{n-i}) & \text{si } n \leq p \\ A_p + C_n - C_p - \rho_{p+1}(A_p + W_{p+1} - t_J) - \sum_{i=p+2}^{n} \rho_i W_i & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.47}$$

Même si l'écriture des âges effectifs en période d'usure fait intervenir un terme A_p, il ne s'agit pas d'une formule de récurrence puisque la valeur de A_p peut-être obtenue à partir de son expression en période de jeunesse : $A_p = C_p + \sum_{i=0}^{p-1} \rho_{p-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{p-j})](t_J - C_{p-i})$. Nous avons utilisé le terme A_p pour ne pas alourdir l'écriture des âges effectifs.

Démonstration : Pour les âges effectifs en période de jeunesse, il suffit de se réferer à la démonstration de la propriété 5.2, proposée pour le modèle $AIA - ARA_\infty$. On a en effet souligné que cette démonstration s'appliquait avec un nombre quelconque de types de maintenances. La seule différence réside dans les notations qui varient entre la modélisation du processus de maintenances en présence de MC seules ou MP et MC. Pour l'écriture des âges effectifs en période d'usure, on procède par récurrence. Pour le terme d'initialisation, on a :

$$\begin{aligned} A_{p+1} &= t_J + (1-\rho_{p+1})(A_p + W_{p+1} - t_J) \\ &= A_p + C_{p+1} - C_p - \rho_{p+1}(A_p + W_{p+1} - t_J) \end{aligned} \tag{5.48}$$

Pour le terme générique, supposons la relation vérifiée à l'ordre n et calculons A_{n+1} :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + (1-\rho_{n+1})W_{n+1} \\ &= A_p + C_n - C_p - \rho_{p+1}(A_p + W_{p+1} - t_J) - \sum_{i=p+2}^{n} \rho_i W_i + (1-\rho_{n+1})W_{n+1} \\ &= A_p + C_{n+1} - C_p - \rho_{p+1}(A_p + W_{p+1} - t_J) - \sum_{i=p+2}^{n+1} \rho_i W_i \end{aligned} \tag{5.49}$$

Ce qui termine la démonstration. □

5.4.2 Modèle $AIA(\rho_{c,J}, \rho_{p,J}) - ARA_\infty(\rho_{c,V}, \rho_{p,V})$

Dans cette section, on suppose que les maintenances en période de jeunesse sont de type AIA pour les MC et les MP de paramètres d'efficacité respectifs $\rho_{c,J}$ et $\rho_{p,J}$. En période d'usure, les maintenances sont de type ARA_∞ pour les MC et les MP de paramètres d'efficacité respectifs $\rho_{c,V}$ et $\rho_{p,V}$. Comme on l'a remarqué précédemment, l'écriture des âges effectifs est equivalente entre le modèle AIA et ARA_∞. Comme pour le modèle $AIA - ARA_\infty$ avec un seul type de maintenance, on obtient une écriture assez compacte des âges effectifs. De la même manière, si on note ρ_i l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance :

$$\rho_i = \begin{cases} \rho_{p,J}^{U_i} \rho_{c,J}^{1-U_i} & \text{en période de jeunesse,} \\ \rho_{p,V}^{U_i} \rho_{c,V}^{1-U_i} & \text{en période d'usure,} \end{cases} \tag{5.50}$$

on obtient comme âges effectifs :

$$A_n = C_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n-i}[\prod_{j=0}^{i-1}(1-\rho_{n-j})](t_J - C_{n-i}) \tag{5.51}$$

La démonstration de cette expression découle directement de celle proposée pour le modèle $AIA - ARA_\infty$ (5.39) avec un seul type de maintenance.

5.4.3 Modèle $BTBP(p_{c,J}, p_{p,J}) - BTBP(p_{c,V}, p_{p,V})$

Nous considérons des maintenances de type Brown-Proschan adaptées aux courbes en baignoire pour chaque type de maintenance et chaque période du système. Ces maintenances sont d'efficacité $p_{c,J}$ et $p_{p,J}$ respectivement pour les MC et MP en période de jeunesse et $p_{c,V}$ et $p_{p,V}$ respectivement pour les MC et MP en période d'usure. Là aussi, l'interprétation des paramètres est similaire à celle du modèle équivalent avec un seul type de maintenance.

Si B_i représente l'efficacité de la $i^{\text{ème}}$ maintenance, la définition du modèle aboutit à :

$$P(B_i = 1|W_1, \ldots, U_i) = \begin{cases} p_{p,J}^{U_i} p_{c,J}^{1-U_i} & \text{en période de jeunesse} \\ p_{p,V}^{U_i} p_{c,V}^{1-U_i} & \text{en période d'usure} \end{cases} \tag{5.52}$$

Les âges effectifs gardent l'expression suivante :

$$A_n = B_n t_J + (1 - B_n)(A_{n-1} + W_n) \tag{5.53}$$

Les âges effectifs conservent la même expression que dans le cas où on considère un seul type de maintenance, seule la loi des B_k a changé par rapport à (5.44) :

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \left[\prod_{k=j}^{n}(1-B_k)\right] W_j + (\sum_{j=1}^{n} B_j \left[\prod_{k=j+1}^{n}(1-B_k)\right])t_J \tag{5.54}$$

5.4.4 Autres modèles

De nombreux modèles peuvent être présentés en utilisant les hypothèses sur les âges effectifs proposées précédemment :

- En période de jeunesse, on peut choisir entre les hypothèses AIA et $BTBP$ ou $ABAO$ comme cas particulier.
- En période d'usure, on peut utiliser les modèles ARA_1, ARA_∞, $BTBP$, ou tout autre modèle adapté aux courbes en baignoire.
- Il est possible de différencier les efficacités des MP et des MC. On peut proposer des modèles du type $ABAO|AIA(\rho_{p,J}) - ARA_1(\rho_{c,V})|ARA_\infty(\rho_{p,V})$.
- A l'inverse, on peut supposer que des maintenances peuvent avoir des efficacités identiques comme par exemple le modèle $AIA(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)$.

Le choix d'un modèle particulier devra étroitement dépendre du type de données que l'on traîte et des informations dont on dispose sur la politique de maintenance effectuée.

5.5 Construction d'un modèle

On suppose que l'on souhaite étudier un jeu de données réelles où une période de jeunesse a été détectée. Afin de proposer un modèle complet en adéquation avec les données, il suffit alors de combiner une intensité initiale et un type d'efficacité de la maintenance de manière appropriée parmi les exemples proposés dans les sections précédentes.

Cela spécifie alors entièrement un modèle et permet en particulier de calculer l'intensité de défaillance. On peut ainsi calculer la fonction de vraisemblance afin d'effectuer une estimation des paramètres du modèle choisi. On rappelle les principaux résultats sur les intensités de défaillance et sur les fonctions de vraisemblance.

- **Pour des systèmes avec un seul type de maintenance :**

  – On rappelle l'écriture de l'intensité de défaillance donnée en (5.1) :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + A_{N_{t^-}}) \tag{5.55}$$

  – La fonction de vraisemblance associée à l'observation de n durées inter-défaillances $(x_1, ..., x_n)$ pour une intensité initiale $\lambda(t)$ et des âges effectifs $(A_1, ..., A_n)$ sur un intervalle $[0, t]$ vaut [56] :

$$\begin{aligned} L_t(\theta; n, x_1, .., x_n) &= \left[\prod_{i=1}^{n} \lambda_{t_i^-}\right] e^{-\sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_s ds} \\ &= \left[\prod_{i=1}^{n} \lambda(A_{i-1} + x_i)\right] e^{-\sum_{i=1}^{n+1} [\Lambda(A_{i-1} + x_i) - \Lambda(A_{i-1})]} \end{aligned} \tag{5.56}$$

  où θ représente l'ensemble des paramètres du modèle et $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$.

  La figure 5.17 est un exemple de trajectoire d'intensité de défaillance en considérant l'intensité initiale de Idée de paramètres $\epsilon = 0.8$, $\eta = 3$ et une efficacité de maintenance de type $AIA(\rho_J = 0.8) - ARA_\infty(\rho_V = 0.8)$.
  On peut noter sur la figure 5.17 que l'intensité du système maintenu peut-être supérieure à l'intensité initiale. Ainsi, un système maintenu minimalement fonctionnerait à cet instant mieux que le système maintenu. Sur cet exemple, on observe effectivement que durant une très courte période avoisinant t_J, l'intensité de défaillance est supérieure à l'intensité initiale. Heureusement, ce phénomène est très marginal. Il n'intervient que si les maintenances en période de jeunesse sont très efficaces et les maintenances en période d'usure sont peu efficaces. Dans tous les cas, ce phénomène est localisé sur une courte période aux alentours de la fin de la période de jeunesse.

- **Pour des systèmes avec deux types de maintenances :**

  1. Si on considère que les systèmes sont soumis à des maintenances correctives et à des maintenances préventives déterministes.

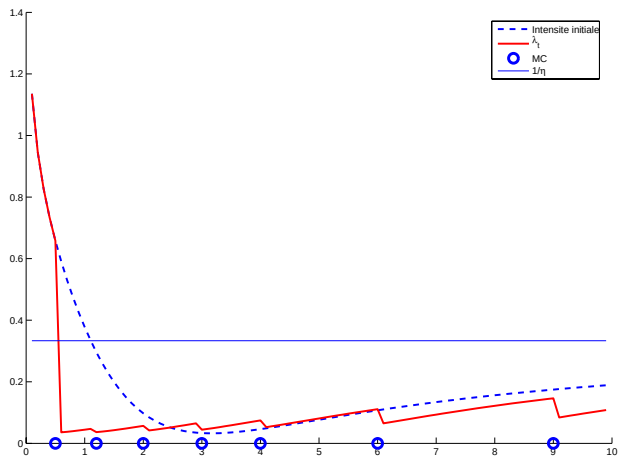


FIG. 5.17 – Trajectoire d'intensité avec maintenances efficaces en période de jeunesse

– L'écriture de l'intensité de défaillance est donnée par [33] :

$$\lambda_t^N = \lambda(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}) \tag{5.57}$$

– La fonction de vraisemblance associée à l'observation de k durées inter-maintenances $(w_1, ..., w_k)$ et des types de maintenances $(u_1, ..., u_k)$ pour une intensité initiale λ et des âges effectifs $(A_1, ..., A_k)$ sur un intervalle $[0, t]$ est [33] :

$$L_t(\theta; k, w_1, ..., u_k) = \prod_{i=1}^{k} [\lambda(A_{i-1} + w_i)]^{1-u_i} \, e^{-\sum_{i=1}^{k+1}[\Lambda(A_{i-1} + w_i) - \Lambda(A_{i-1})]} \tag{5.58}$$

2. Si on considère que les systèmes sont soumis à des maintenances correctives et à des maintenances préventives conditionnelles.

– L'écriture de l'intensité de défaillance a été obtenue en (2.29) :

$$\lambda_t^N = \lambda_c(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}) \tag{5.59}$$

– La fonction de vraisemblance associée à l'observation de k durées inter-maintenances $(w_1, ..., w_k)$ et des types de maintenances $(u_1, ..., u_k)$ et des âges effectifs $(A_1, ..., A_k)$ sur un intervalle $[0, t]$ a été obtenue en (2.34) et vaut :

$$L_t(\theta, k, w_1, \ldots, u_k) = \left[\prod_{i=1}^{k} (\lambda_p(w_i + A_{i-1}))^{u_i} (\lambda_c(w_i + A_{i-1}))^{1-u_i}\right] \times e^{-\sum_{i=1}^{k+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} \lambda_W(u - c_{i-1} + A_{i-1}) du} \tag{5.60}$$

La forme en baignoire peut alors se porter soit sur λ_W, soit sur λ_c.

5.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une méthodologie afin de construire des modèles d'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire. Nous avons dressé une liste non exhaustive d'intensités en baignoire et d'efficacités de la maintenance en présence d'un ou deux types de maintenances.

Dans le chapitre suivant, nous allons développer deux modèles particuliers. Le premier est valable quand on n'observe que des maintenances correctives. Il est basé sur l'intensité initiale (5.19) et les âges effectifs (5.26). Le second est valable quand on observe des maintenances correctives et des maintenances préventives à instants déterministes. Il est basé sur l'intensité initiale (5.20) et les âges effectifs (5.47).

Chapitre 6

Deux modèles d'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire

---

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une modélisation générale de l'efficacité des maintenances imparfaites pour des intensités initiales en baignoire. Dans ce chapitre, nous développons deux modèles particuliers. Le premier suppose un seul type de maintenance, des maintenances minimales en période de jeunesse et ensuite de type ARA_1. Le second considère deux types de maintenance et des maintenances efficaces en période de jeunesse comme en période d'usure. Enfin, nous appliquons ces modèles à plusieurs jeux de données fournis par EDF.

6.1 Premier modèle

6.1.1 Définition

Les maintenances sont supposées uniquement correctives. L'intensité initiale est du type (5.19), en baignoire avec 3 périodes distinctes :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda + \alpha_J \beta_J (t_J - t)^{\beta_J - 1} & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda & \text{si } t_J < t < t_V \\ \lambda + \alpha_V \beta_V (t - t_V)^{\beta_V - 1} & \text{si } t_V \leq t \end{cases} \tag{6.1}$$

avec $\lambda, \alpha_J, \alpha_V \geq 0$; $\beta_J, \beta_V > 1$; $t_V > t_J > 0$.

Les efficacités des maintenances sont de type $ABAO - ARA_1(\rho)$ définies en (5.26) : les réparations sont minimales en période de jeunesse et de type ARA_1 à partir de la période de vie utile. Les âges effectifs sont :

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{cases} T_n & \text{si } T_n \leq t_J \\ T_n - \rho(T_n - t_J) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= T_n - \rho(T_n - t_J)_+ \end{aligned} \tag{6.2}$$

Récapitulons brièvement l'impact de ρ sur la durée de vie utile du système :

- $\rho = 0 \Rightarrow \forall n, \quad A_n = T_n$. Les maintenances sont minimales. Les réparations n'ont aucun effet sur la durée de vie utile du système.
- $\rho = 1 \Rightarrow \forall n, \quad A_n = t_J$ si $T_n > t_J$. Toute maintenance au delà de la période de jeunesse remet le système dans son état de fonctionnement optimal. Le système se trouve indéfiniment en début de période de vie utile suite à une réparation.
- La figure 6.1 presente 4 exemples d'intensités de défaillance pour différentes valeurs de ρ ($\rho = 0; 0.3, 0.7; 1$), tout en fixant les valeurs suivantes aux autres paramètres : $\lambda = 1; \alpha_J = \alpha_V = 0.01, \beta_J = \beta_V = 3; t_J = 10; t_V = 30$. Pour $\rho = 0$, l'intensité de défaillance est égale à l'intensité initiale. Pour $\rho = 1$, l'intensité est constante à partir de t_J. La maintenance permet donc d'éviter l'usure du système. Les autres paramètres choisis mènent à des situations intermédiaires. Ainsi, plus la valeur de ρ est importante, plus la durée de vie utile effective est longue, ce qui est une caractéristique majeure de ce modèle. En d'autres termes, on peut distinguer d'une part la durée de vie utile initiale du système, à savoir $t_V - t_J$, de la durée de vie utile effective du système maintenu, qui est aléatoire, et qui est d'autant plus longue que les maintenances sont efficaces.

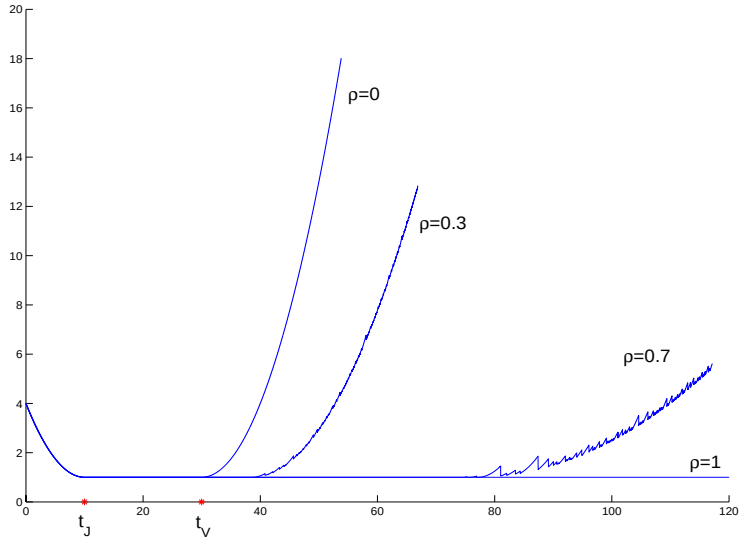


FIG. 6.1 – Un exemple d'intensités avec différents choix de ρ

6.1.2 Propriétés

6.1.2.1 Intensité de défaillance

D'après (6.2) et (5.1), l'intensité de défaillance peut s'écrire :

$$\lambda_t = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } T_{N_{t^-}} \leq t_J \\ \lambda(t - \rho(T_{N_{t^-}} - t_J)) & \text{si } T_{N_{t^-}} > t_J \end{cases} \tag{6.3}$$

La condition "$T_{N_{t^-}} \leq t_J$" signifie que la précédente maintenance est intervenue en période de jeunesse, mais l'instant d'observation t peut tout aussi bien se situer en période de jeunesse, de vie utile ou d'usure. L'intensité devient différente de l'intensité initiale à partir du premier instant de défaillance après la période de jeunesse.

6.1.2.2 Fiabilité et MTTF

On rappelle les définitions de la fonction de fiabilité et de la durée moyenne de fonctionnement avant panne (MTTF) :

$$R_t(\tau) = P(T_{N_t} > t + \tau | N_t, T_1, ..., T_{N_t}) \tag{6.4}$$

$$MTTF_t = E[T_{N_t+1} - t | N_t, T_1, ..., T_{N_t}] \tag{6.5}$$

Pour calculer la fiabilité, calculons tout d'abord $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, le taux de hasard cumulé de l'instant de la première défaillance T_1 :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \lambda t + \alpha_J(t_J^{\beta_J} - (t_J - t)^{\beta_J}) & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda t + \alpha_J t_J^{\beta_J} & \text{si } t_J < t < t_V \\ \lambda t + \alpha_J t_J^{\beta_J} + \alpha_V (t - t_V)^{\beta_V} & \text{si } t_V \leq t \end{cases} \tag{6.6}$$

$$= \lambda t + \alpha_J(t_J^{\beta_J} - (t_J - t)_+^{\beta_J}) + \alpha_V (t - t_V)_+^{\beta_V}$$

D'autre part, la fiabilité peut s'écrire de la manière suivante :

$$R_t(\tau) = e^{-\int_t^{t+\tau} \lambda_s ds} \tag{6.7}$$

En utilisant l'éxpression de l'intensité de défaillance obtenue en (6.3) et en remplaçant Λ par son expression exacte, on obtient que la fiabilité s'écrit :

$$R_t(\tau) = \begin{cases} e^{-\lambda\tau - \alpha_J(t_J - t)_+^{\beta_J} + \alpha_J(t_J - t - \tau)_+^{\beta_J} + \alpha_V(t - t_V)_+^{\beta_V} - \alpha_V(t + \tau - t_v)_+^{\beta_V}} & \text{si } T_{N_t} \leq t_J \\ e^{-\lambda\tau + \alpha_V(t - t_V - \rho(T_{N_t} - t_J))_+^{\beta_V} - \alpha_V(t + \tau - t_V - \rho(T_{N_t} - t_J))_+^{\beta_V}} & \text{si } T_{N_t} > t_J \end{cases} \tag{6.8}$$

Le MTTF peut être facilement obtenu grâce à la propriété suivante :

$$MTTF_t = \int_0^\infty R_t(\tau) d\tau$$

Il n'a pas d'expression explicite mais se calcule très facilement à l'aide d'outils numériques.

6.1.2.3 Intensité d'usure minimale

Comme pour les modèles ARA_1 classiques [35], on montre que ce modèle présente une intensité d'usure minimale. Rappelons la définition de cette intensité :

$$\forall t \geq 0 \ \ , \ \ P(\lambda_t \geq \lambda_{min}(t)) = 1 \tag{6.9}$$

$$\forall t \geq 0 \ \ \forall \epsilon > 0 \ \ , \ \ P(\lambda_t < \lambda_{min}(t) + \epsilon) > 0 \tag{6.10}$$

$\lambda_{min}(t)$ est une fonction déterministe qui est une borne inférieure maximale pour l'intensité de défaillance.

Propriété 6.1 *: L'intensité d'usure minimale est :*

$$\lambda_{min}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda(t - \rho(t - t_J)) & \text{si } t \geq t_J \end{cases} \tag{6.11}$$

Démonstration : Tout d'abord, jusqu'à t_J, λ_t est une fonction déterministe $\lambda(t)$ qui est naturellement égale à $\lambda_{min}(t)$. Désormais, on considère un instant t au-delà de t_J.

$$T_{N_{t^-}} < t \Rightarrow t - \rho(T_{N_{t^-}} - t_J) > t - \rho(t - t_J)$$

Comme λ est croissante à partir de t_J, on obtient :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho(T_{N_{t^-}} - t_J)) \geq \lambda(t - \rho(t - t_J)) = \lambda_{min}(t) \tag{6.12}$$

Ainsi, $P(\lambda_t > \lambda_{min}(t)) = 1$ et la première partie de la définition est validée.

Soit $\epsilon > 0$. Considérons la continuité de λ au point $t - \rho(t - t_J)$:

$$\exists \eta > 0,\ \forall h,\ |h| < \eta \Rightarrow \lambda(t - \rho(t - t_J) + h) - \lambda(t - \rho(t - t_J)) < \epsilon \tag{6.13}$$

Soit $\eta_0 = min(\eta, t - t_J)$ et $h_0 = \rho\eta_0 \in]0, \eta_0[$. On obtient :

$$\lambda(t - \rho(t - t_J) + h_0) - \lambda(t - \rho(t - t_J)) < \epsilon \tag{6.14}$$

De plus, si $\lambda_t > 0$, $P(T_{N_{t^-}} > t - \eta_0) > 0$. Si $T_{N_{t^-}} > t - \eta_0$, comme λ est croissante à partir de t_J, on aboutit à :

$$\lambda(t - \rho(T_{N_{t^-}} - t_J)) < \lambda(t - \rho(t - \eta_0 - t_J)) = \lambda(t - \rho(t - t_J) + h_0) < \lambda(t - \rho(t - t_J)) + \epsilon \tag{6.15}$$

L'inégalité précédente prouve que si $T_{N_{t^-}} > t - \eta_0$, alors $\lambda_t < \lambda_{min}(t) + \epsilon$. Comme $P(T_{N_{t^-}} > t - \eta_0) > 0$, on obtient que $P(\lambda_t < \lambda_{min}(t) + \epsilon) > 0$ ce qui conclut la démonstration. □

Tout comme pour les modèles ARA_1 classiques, l'intensité de défaillance juste après une maintenance est égale à l'intensité d'usure minimale :

$$\forall i,\ \ \lambda_{T_{i^+}} = \lambda_{min}(T_i)$$

La Figure 6.2 illustre ce propos. Il s'agit d'un zoom de la Figure 6.1 pour la trajectoire d'intensité de défaillance avec $\rho = 0.7$. Les deux fonctions λ_t et $\lambda_{min}(t)$ ont la même allure et sont égales après chaque défaillance.

6.1.2.4 Extension de la durée de vie utile

On a observé précédemment que l'efficacité de la maintenance avait un impact sur la durée de vie utile du système. Cette section permet de quantifier précisément l'impact de ρ sur cette durée de vie utile. Soit τ_V le dernier instant pour lequel l'intensité d'usure minimale est constante :

$$\tau_V = Inf\{t > t_J; \lambda_{min}(t) > \lambda\} \tag{6.16}$$

Comme on l'a souligné dans la section précédente, les intensités de défaillance et d'usure minimale sont égales après une défaillance. De ce fait, une maintenance intervenant

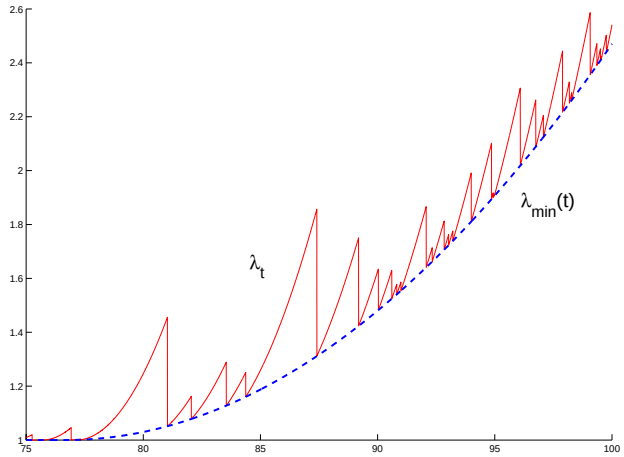


FIG. 6.2 – Comportement de l'intensité de défaillance en période d'usure

après τ_V ne remettra pas le système dans ses conditions de fonctionnement optimales mais dans sa période d'usure. Il semble donc naturel de considérer τ_V comme la fin effective de la période de vie utile du système maintenu.

$$\begin{aligned} \tau_V &= Inf\{t > t_J; \lambda_{min}(t) > \lambda\} = Inf\{t > t_J; \lambda(t - \rho(t - t_J)) > \lambda\} \\ &= Inf\{t > t_J; t - \rho(t - t_J)) > t_V\} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Ainsi :

$$\tau_V = \frac{t_V - \rho t_J}{1 - \rho} \tag{6.18}$$

On peut dans un premier temps observer que τ_V est plus grand que t_V :

$$\tau_V = t_V + \frac{\rho}{1 - \rho}(t_V - t_J) \tag{6.19}$$

Comme attendu, la réduction d'âge en période de vie utile aboutit à rallonger la période effective de vie utile du système. On peut étudier plus précisément l'impact de ρ sur cette extension de vie utile. Pour un système non maintenu, la durée de vie utile du système est $t_V - t_J$. Du fait des maintenances de type ARA_1, la durée de vie utile effective du système maintenu est :

$$\tau_V - t_J = \frac{1}{1 - \rho}(t_V - t_J) \tag{6.20}$$

On peut s'intéresser à quelques valeurs particulières de ρ :

- $\rho = 0 \Rightarrow$ Pas d'augmentation de la durée de vie utile.
- $\rho = 0.5 \Rightarrow$ La durée de vie utile est doublée.
- $\rho = 0.9 \Rightarrow$ La durée de vie utile est multipliée par 10.
- $\rho = 1 \Rightarrow$ La durée de vie utile croît indéfiniment.

D'autre part, on peut remarquer que τ_V ne correspond pas au premier instant, que l'on notera Y, pour lequel l'intensité de défaillance dépasse la valeur λ à partir de la fin de période de jeunesse.

$$Y = Inf\{t > t_J; \lambda_t > \lambda\} \tag{6.21}$$

La figure 6.3 illustre cette remarque. Bien que l'intensité quitte le "fond" de la baignoire à l'instant Y, la réparation suivante, qui a lieu avant τ_V, remet le système dans ses conditions optimales. On peut noter la propriété suivante sur Y :

$$t_V \leq Y \leq \tau_V \tag{6.22}$$

De plus, τ_V ne correspond pas à un instant de panne. Mais c'est à partir de la maintenance suivant τ_V, à savoir $T_{N_{\tau_V}+1}$, que le système n'est plus restauré en période de vie utile comme on peut l'observer sur la Figure 6.3.

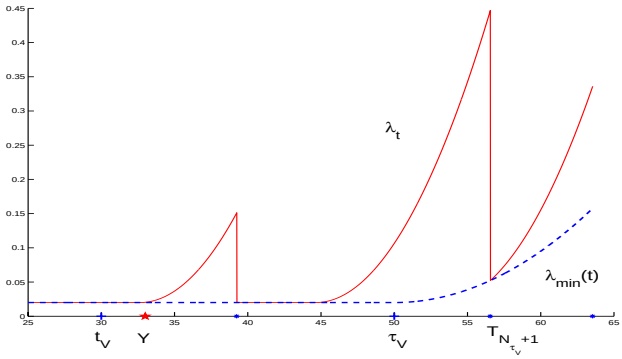


FIG. 6.3 – Extension de la durée de vie utile

6.1.3 Estimation

6.1.3.1 Méthodes d'estimation

Afin de pouvoir appliquer ce modèle sur des données réelles, il est nécessaire de proposer une méthode d'estimation des paramètres. En particulier, estimer ρ permet de savoir de combien de temps la vie utile sera prolongée. Pour un modèle d'âge virtuel, on utilise l'expression de la fonction de vraisemblance obtenue en (5.56) ainsi que les âges effectifs obtenus en (6.2) :

$$\begin{aligned} L(\theta; t_1, .., t_n) &= \left[\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i - \rho(t_{i-1} - t_J)_+)\right] \\ &\times \; e^{-\sum_{i=1}^{n}[\Lambda(t_i - \rho(t_{i-1} - t_J)_+) - \Lambda(t_{i-1} - \rho(t_{i-1} - t_J)_+)]} \end{aligned} \tag{6.23}$$

où θ représente l'ensemble des paramètres du modèle, à savoir :

$$\theta = (\alpha_J, \beta_J, \alpha_V, \beta_V, \lambda, t_J, t_V, \rho)$$

Les expressions des âges effectifs et de l'intensité initiale sont bien trop complexes pour obtenir une expression explicite des estimateurs. Il est donc nécessaire d'employer des méthodes numériques. La principale difficulté réside dans le fait que 8 paramètres doivent être estimés conjointement. Cela nécessite des calculs numériques coûteux à la

fois en temps et en mémoire. C'est pourquoi nous proposons une méthode plus simple d'estimation des paramètres.

- Dans un premier temps, on fait l'hypothèse que le début et la fin de la période de vie utile effective $(t_J; \tau_V)$ peuvent être approchés par des instants de défaillance $(T_i; T_j)$:
$$\exists\,(i,j)\ ,\ 1 \leq i < j \leq n\ ,\ t_J = T_i \quad \text{et} \quad \tau_V = T_j \tag{6.24}$$
Cette simplification semble bien réaliste si on suppose que le nombre de pannes est suffisamment important.
- Pour chaque jeu de paramètres possible $(t_J; \tau_V)$=$(T_i; T_j)$, on estime λ par son estimateur naturel. En effet, suivant les hypothèses, entre l'instant t_J et l'instant τ_V, l'intensité est constante de valeur λ, ce qui mène à l'estimation suivante :
$$\hat{\lambda}_{i,j} = \frac{j-i-1}{T_j - T_i} \tag{6.25}$$
Bien evidemment, un estimateur optimal de λ devrait prendre en compte les instants de pannes en période de jeunesse et période d'usure étant donné que l'intensité dépend aussi de λ au cours de ces deux périodes. Pourtant, si le nombre de défaillances en période de vie utile est suffisamment important, $\hat{\lambda}$ sera probablement un bon estimateur.
- La paramétrisation du modèle permet désormais d'effectuer deux estimations disjointes pour le reste des paramètres. D'une part, α_J et β_J peuvent être estimés à l'aide des instants de défaillance en période de jeunesse $T_1, ..., T_i$. En effet, le processus des défaillances durant cette période est un NHPP dont l'intensité dépend de α_J, β_J et λ. D'autre part, α_V, β_V et ρ peuvent être estimés à partir des instants $T_{j+1}, ..., T_n$ comme pour un modèle ARA_1 classique. Cela conduit aux estimateurs suivants :
$$\hat{\theta}_{i,j} = (\hat{\alpha_J}_{i,j}, \hat{\beta_J}_{i,j}, \hat{\alpha_V}_{i,j}, \hat{\beta_V}_{i,j}, \hat{\lambda}_{i,j}, T_i, T_j, \hat{\rho}_{i,j})$$
- Enfin, pour chaque jeu de paramètres possible $\hat{\theta}_{i,j}$, on calcule la vraisemblance associée. L'estimateur final $\hat{\theta}$ sera celui qui aura la plus grande vraisemblance :
$$\hat{\theta} = (\hat{\alpha_J}, \hat{\beta_J}, \hat{\alpha_V}, \hat{\beta_V}, \hat{\lambda}, \hat{t_J}, \hat{t_V}, \hat{\rho}) = Arg \max_{i,j;i<j} \{L(\hat{\theta}_{i,j}, T_1, ..., T_n)\} \tag{6.26}$$

6.1.3.2 Simulations lorsque t_J et t_V sont connus

On souhaite évaluer la qualité des estimateurs présentés dans la section précédente. Pour simplifier, on supposera que t_J et t_V sont connus. Cette hypothèse semble raisonnable, attendu que dans beaucoup de situations, des experts parviennent à évaluer ces deux paramètres. La méthode d'estimation présentée reste inchangée hormis le fait qu'il n'est plus utile d'estimer t_J et τ_V par des instants de défaillance. Afin d'évaluer la qualité de chaque estimateur, on effectue des simulations pour différents jeux de paramètres. Pour un jeu de paramètres donné, on estime le biais, la variance et le coefficient de variation des estimateurs à partir de leur versions empiriques sur 1000 simulations.

En plus de la qualité des estimateurs, il est intéressant d'étudier leur convergence. Pour cela, on fixe les valeurs des paramètres et on fait varier le nombre de défaillances.

En observant le comportement des estimateurs, on peut en déduire que les estimateurs sont convergents. Pour notre modèle, il ne s'avère pas pertinent de simplement augmenter le nombre de pannes. En effet, fixer les paramètres du modèle revient à déterminer un nombre moyen de défaillances en période de jeunesse et période de vie utile. Ainsi, avec peu de défaillances, on ne peut estimer que les paramètres de la période de jeunesse. A l'inverse, un nombre très important de pannes revient à avoir une large proportion de celles-ci durant la période d'usure. La qualité des estimateurs de la période d'usure sera alors meilleure mais sans toutefois que soit améliorée la qualité des estimateurs relatifs aux périodes de jeunesse et de vie utile. De ce fait, afin d'augmenter le nombre de pannes dans chaque période, il est nécessaire à la fois d'augmenter le nombre d'observations et de modifier les valeurs des paramètres.

Pour un jeu de paramètres initial $(\alpha_{J0}, \beta_{J0}, \alpha_{V0}, \beta_{V0}, \lambda_0, \rho_0)$, il est possible d'avoir un ordre de grandeur du nombre de défaillances en période de jeunesse (PJ) et période de vie utile effective (VU) :

$$E[N_{PJ}] = E[N_{t_J}] = \lambda_0 t_J + \alpha_{J0} t_J^{\beta_{J0}} \tag{6.27}$$

$$E[N_{VU}] = E[N_{\tau_V} - N_{t_J}] \approx \lambda_0(\tau_V - t_J) \tag{6.28}$$

La première égalité découle du fait que le processus de défaillances en période de jeunesse est un NHPP. En considérant des maintenances minimales, l'espérance du nombre de défaillances à l'instant t_J est égale au taux de hasard cumulé à ce même instant, $\Lambda(t_J)$.

La seconde équation résulte des propriétés de la loi exponentielle. Comme on peut considérer que l'intensité est pratiquement constante entre t_J et τ_V, le nombre moyen de pannes est approximativement proportionnel à la durée de cette période, d'un facteur λ_0. Finalement, un moyen simple d'augmenter le nombre de défaillances durant la période de jeunesse et la période de vie utile est de multiplier les paramètres λ_0 et α_{J0} par un même facteur.

Pour chaque jeu de paramètres, on simule un nombre approprié n de défaillances. Comme indiqué précédemment, on estime les paramètres sur 1000 répliques afin d'obtenir les moyenne empirique, variance empirique et coefficient de variation empirique des estimateurs. Les paramètres t_J et t_V seront désormais fixés à 10 et 30 respectivement. Les autres paramètres sont choisis de manière à avoir en moyenne deux fois moins de défaillances en période de jeunesse qu'en période de vie utile.

Dans un premier temps, le Tableau 6.1 présente les résultats pour des simulations de 10 défaillances, où les paramètres sont choisis de façon à observer en moyenne 2, 4, et 4 pannes dans chacune des périodes successives.

	λ	α_J	β_J	α_V	β_V	ρ
Paramètres	0.1	0.001	3	0.01	3	0.5
Moyenne empirique	0.19	0.0002	3.41	0.011	3.38	0.60
Variance empirique	0.11	0.0009	0.83	0.12	1.01	0.17
Coefficient de variation	1.74	150	0.27	31.49	0.297	0.688

TAB. 6.1 – Résultats des estimations pour 10 défaillances

On simule à présent 100 défaillances de manière à observer en moyenne 20, 40, et 40 pannes dans chacune des périodes successives. Les résultats sont présentés dans le Tableau

6.2.

	λ	α_J	β_J	α_V	β_V	ρ
Paramètres	1	0.01	3	0.01	3	0.5
Moyenne empirique	1.05	0.0091	3.04	0.0085	3.14	0.55
Variance empirique	0.09	0.02	0.09	0.011	0.16	0.09
Coefficient de variation	0.29	15.55	0.099	17.44	0.127	0.55

TAB. 6.2 – Résultats des estimations pour 100 défaillances

Enfin, on effectue des simulations de 1000 défaillances de façon à observer en moyenne 20, 40, et 40 pannes dans chacune des périodes successives. Les résultats sont présentés dans le Tableau 6.3.

	λ	α_J	β_J	α_V	β_V	ρ
Paramètres	10	0.1	3	0.01	3	0.5
Moyenne empirique	10.05	0.0971	3.007	0.0098	3.04	0.53
Variance empirique	0.13	0.02	0.027	0.002	0.099	0.08
Coefficient de variation	0.036	1.45	0.055	4.56	0.10	0.533

TAB. 6.3 – Résultats des estimations pour 1000 défaillances

L'analyse de ces résultats mène aux remarques suivantes :

- L'estimation des paramètres semble plutôt bonne. Même avec un nombre de pannes peu élevé (tableau 6.1), on retrouve l'ordre de grandeur des paramètres.
- La majorité des estimateurs semble généralement surestimer la vraie valeur des paramètres. A mesure que l'on augmente le nombre de défaillances, on observe toujours une surestimation des paramètres mais les estimateurs semblent asymptotiquement convergents.
- On pourrait s'attendre à une meilleure estimation des paramètres (α_V, β_V) que des paramètres (α_J, β_J) attendu que le nombre moyen de défaillances est deux fois plus important en période d'usure qu'en période de jeunesse. Pourtant, les estimations en terme de moyenne, variance et coefficient de variation empiriques, sont en général meilleures pour (α_J, β_J) que pour (α_V, β_V). Cela s'explique par la présence d'une efficacité de maintenance durant la période d'usure. Le paramètre ρ rend difficile la distinction entre un système bien maintenu se dégradant rapidement et un système moins bien maintenu mais avec une dégradation moindre. On comprend que, pour avoir des estimateurs aussi performants, le nombre de défaillances doit être significativement plus important pour un modèle d'âge virtuel que pour un NHPP .
- Il n'y a aucun sens à vouloir comparer les résultats complets entre les différents tableaux pour la raison que les paramètres varient entre chaque tableau. C'est pour cela qu'on présente le coefficient de variation, qui est sans dimension et qui permet ce type de comparaison. On observe que cet indicateur décroît lorsque le nombre n de pannes augmente. Plus précisément, ce coefficient semble converger très rapidement

pour les paramètres relatifs à la période de jeunesse et la période de vie utile. En revanche, cette vitesse de convergence semble bien plus faible pour les paramètres relatifs à la période d'usure, et plus particulièrement pour α_V.

6.2 Second modèle

6.2.1 Définition

Dans ce second modèle, on considère des maintenances correctives et des maintenances préventives à instants déterministes. L'intensité initiale est du type (5.20), asymptotiquement bornée :

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta}\left[1 - \epsilon\frac{1+\ln(\frac{t}{\eta})}{1+\epsilon\frac{t}{\eta}\ln(\frac{t}{\eta})}\right] \tag{6.29}$$

Les efficacités de maintenance sont une simplification de celles de (5.47) : les efficacités sont de type AIA puis ARA_1, d'efficacité identique pour les MP et les MC, mais distinctes entre la période de jeunesse et la période d'usure. Cela correspond ainsi à un modèle $AIA(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)$. On obtient comme âges effectifs l'expression suivante :

Propriété 6.2 *: Pour un modèle $AIA(\rho_J, \rho_J) - ARA_1(\rho_V, \rho_V)$ avec p maintenances en période de jeunesse, les âges effectifs sont :*

$$A_n = \begin{cases} C_n + \sum_{i=0}^{n-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - C_{n-i}) & \text{si } n \leq p \\ t_J + (1-\rho_V)[\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - C_{p-i}) + C_n - t_J] & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.30}$$

Démonstration : En période de jeunesse, il suffit de remplacer ρ_i par ρ_J dans l'expression (5.47). Au delà de cette période, on effectue les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
A_n &= A_p + C_n - C_p - \rho_{p+1}(A_p + W_{p+1} - t_J) - \sum_{i=p+2}^{n} \rho_i W_i \\
&= A_p + C_n - C_p - \rho_V(A_p + W_{p+1} - t_J) - \rho_V \sum_{i=p+2}^{n} W_i \\
&= A_p + C_n - C_p - \rho_V(A_p - t_J) - \rho_V \sum_{i=p+1}^{n} W_i \\
&= A_p + C_n - C_p - \rho_V(A_p - t_J) - \rho_V(C_n - C_p) \\
&= t_J - (1-\rho_V)t_J + (1-\rho_V)A_p + (1-\rho_V)C_n - (1-\rho_V)C_p \\
&= t_J - (1-\rho_V)t_J + (1-\rho_V)[C_p + \sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - C_{p-i})] + (1-\rho_V)C_n - (1-\rho_V)C_p \\
&= t_J + (1-\rho_V)[\sum_{i=0}^{p-1} \rho_J(1-\rho_J)^i(t_J - C_{p-i}) + C_n - t_J] \ \square
\end{aligned} \tag{6.31}$$

6.2.2 Propriétés

L'intensité de défaillance $\lambda_t^N = \lambda(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}})$ n'a pas d'expression plus simple.

Propriété 6.3 *: L'intensité d'usure minimale vaut :*

$$\lambda_{min}(t) = \begin{cases} \lambda(t_J) & \text{si } t \leq t_J \\ \lambda(t - \rho_V(t - t_J)) & \text{si } t \geq t_J \end{cases} \tag{6.32}$$

Démonstration : la démonstration est très similaire à celle proposée pour la propriété 6.1. En période de jeunesse, une maintenance peut avoir lieu à tout moment à partir de 0. Si cette maintenance est parfaite ($\rho_J = 1$), l'âge virtuel du système après cette maintenance sera t_J et l'intensité de défaillance sera $\lambda(t_J)$. En période d'usure, toutes les maintenances sont de type $ARA_1(\rho_V)$. On effectue alors la même démonstration que celle de l'intensité d'usure minimale du premier modèle, en remplaçant ρ par ρ_V. □

De même, il existe une borne supérieure minimale pour l'intensité de défaillance que l'on appelle intensité d'usure maximale.

Propriété 6.4 *: L'intensité d'usure maximale vaut :*

$$\lambda_{max}(t) = \max\left(\lambda(t + t_J), \lambda(t)\right) \tag{6.33}$$

Démonstration : la démonstration de cette propriété est assez intuitive : si une maintenance parfaite a lieu juste après la mise en route du système, le système aura alors un âge virtuel t_J et une intensité $\lambda(t_J)$. A partir de ce moment, si il n'y a plus de maintenance, l'intensité de défaillance sera $\lambda(t + t_J)$. La seule possibilité pour que l'intensité soit plus grande a lieu en période de jeunesse si aucune maintenance n'a lieu, d'où le terme $\lambda(t)$. □

La figure 6.4 représente une trajectoire de ces intensités pour les paramètres suivants : $\epsilon = 0.8, \eta = 110, \rho_J = \rho_V = 0.7$. Comme on l'a vu précedemment, un inconvénient potentiel du modèle est que l'intensité de défaillance peut être supérieure à l'intensité initiale du modèle. D'autre part, on remarque que λ_t et $\lambda_{min}(t)$ ne sont pas égales après une maintenance. Cela vient du fait que les maintenances sont efficaces en période de jeunesse.

Afin de calculer la fonction de vraisemblance, il est utile de calculer le taux de hasard cumulé $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t) = \frac{t}{\eta} - \ln(1 + \epsilon \frac{t}{\eta} \ln(\frac{t}{\eta}))$$

Pour un modèle d'âge virtuel considérant à la fois des MC et des MP déterministes, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L_t(\theta; n, w_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda(A_{i-1} + w_i))^{1-u_i} e^{-\sum_{i=1}^{n+1} [\Lambda(A_{i-1} + w_i) - \Lambda(A_{i-1})]}$$

où, par convention, $w_{n+1} = t - C_n$ et $A_0 = 0$.

Dans notre modèle, à la fois l'intensité initiale $\lambda(t)$ et les âges effectifs A_i dépendent des paramètres du modèle η, ϵ, ρ_J et ρ_V.

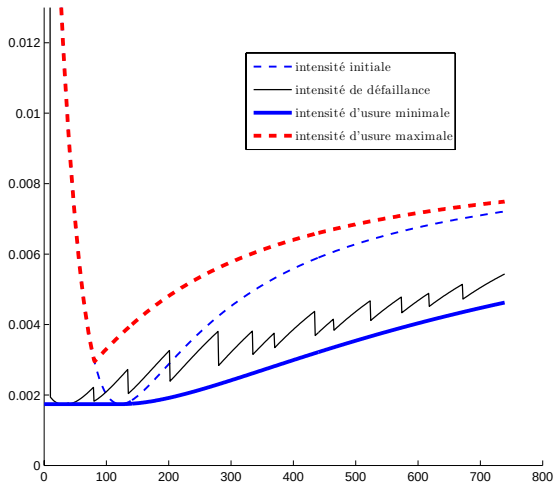


FIG. 6.4 – Les différents types d'intensité

6.3 Application à des données réelles

6.3.1 Etude des données EDF1

6.3.1.1 Présentation des données

Nous reprenons l'étude du jeu de données EDF1 présenté dans le tableau 2.1. Rappelons que ces données proviennent de l'observation de 17 unités de production supposées indépendantes et de fonctionnement identique. Au cours de la section 2.4.4, nous avons mis en évidence une période de jeunesse pour ces systèmes de l'ordre de 1000 jours. Nous avions alors simplement supprimé toutes les maintenances en période de jeunesse. Cette étape ne sera pas nécessaire si nous appliquons à ces données un des modèles adaptés aux courbes en baignoire présentés précédemment.

6.3.1.2 Premier modèle

Le premier modèle n'est a priori pas adapté à ces données, puisqu'il ne concerne que les maintenances correctives. Par ailleurs, la méthode d'estimation proposée plus haut pour ce modèle nécessite un très grand nombre de données, ce qui n'est pas le cas ici. En effet, les données EDF1 comprennent pour chacun des systèmes très peu de maintenances en moyenne. Néanmoins, dans la mesure où la question des intensités en baignoire s'est posée à partir de ces données, il était intéressant de les adapter pour pouvoir appliquer le premier modèle.

Pour cela, comme pour l'étude de ces données dans le chapitre 4, on a aggloméré l'ensemble de ces données sans cette fois-ci différencier le type des maintenances, ce qui permet d'avoir 28 instants de maintenances. Nous rappelons les données résultantes dans le Tableau 6.4.

L'estimation des paramètres du premier modèle aboutit aux résultats présentés dans le Tableau 6.5.

82	158	201	298	311	321	742
788	853	1090	1207	1462	1667	1705
1942	2008	2073	2145	2259	2602	2689
2921	3011	3528	3559	4120	4394	4454

TAB. 6.4 – Données EDF1 : données agglomérées

$\widehat{t_J} = 1090$	$\widehat{t_V} = 3559$	$\widehat{\tau_V} = 4176$
$\widehat{\alpha_J} = 2.1E-5$	$\widehat{\beta_J} = 1.7$	$\widehat{\lambda} = 0.006$
$\widehat{\alpha_V} = 4.05E-6$	$\widehat{\beta_V} = 2.33$	$\widehat{\rho} = 0.2$

TAB. 6.5 – Données EDF1 : estimation des paramètres du premier modèle

$\widehat{\beta}_J$ est significativement plus grand que 1. Cela signifie qu'il est pertinent au vu des données de supposer l'existence d'une période de jeunesse. La fin de la période de jeunesse est estimée à 1090 jours, ce qui concorde très bien avec le premier avis d'expert qui évaluait cet instant à 1000 jours. On observe que la très grande majorité des défaillances se produit durant la vie utile des systèmes. De plus, le paramètre β_V est estimé à une valeur plus grande que 1, ce qui met en évidence l'usure après la vie utile. Mais l'interprétation de cette estimation doit restée mesurée car seules 3 maintenances ont lieu dans la période d'usure. D'autre part, une valeur de $\widehat{\rho}$ égale à 0.2 signifie que les maintenances sont en moyenne peu efficaces. Enfin, on estime la fin effectice de la période de vie utile $\widehat{\tau_V}$ à 4176 jours. Cela confirme que les maintenances sont peu efficaces puisqu'une seule maintenance a lieu entre les fins de périodes de vie utile initiale et effective.

Avec toutes les réserves dues à l'agglomération des données, cette première étude indicative permet d'aboutir aux conclusions suivantes :

- On met effectivement en présence une période de jeunesse d'approximativement 1000 jours.
- La majorité des maintenances après la période de jeunesse ont lieu en période de vie utile.

Ce dernier point permet d'envisager d'utiliser pour ces données un modèle avec une intensité initiale asymptotiquement bornée. Dans ce contexte, le second modèle parait particulièrement approprié puisqu'il fait aussi la distinction entre MP et MC et comporte peu de paramètres, ce qui facilite les estimations.

6.3.1.3 Second modèle

On applique le second modèle sur les données initiales, sans agglomérer les 17 unités. La vraisemblance associée à cet ensemble de systèmes sera le produit des vraisemblances de chaque système. Par ailleurs on considère que ces systèmes sont indépendants et de fonctionnement similaire, ce qui en pratique revient à considérer les paramètres identiques pour chaque système. Ce modèle est plus satisfaisant que le premier pour les raisons suivantes :

- Il prend en compte le fait que les systèmes fonctionnent en parallèle.

– Il permet de différencier les défaillances des MP déterministes.

– On peut prendre en compte la date de fin d'observation de chaque système ce qui est d'autant plus important que le nombre total de données est très faible.

Dans ces conditions, les estimations sont données dans le Tableau 6.6.

$\hat{\rho_J} = 0.49$	$\hat{\rho_V} = 0.99$	$\hat{\epsilon} = 0.89$	$\hat{\eta} = 1113$

TAB. 6.6 – Données EDF1 : estimation des paramètres du second modèle

Pour estimer t_J, il faut résoudre l'équation (5.21). On obtient $\hat{t_J} = 1174$ jours. Le fait que ϵ soit estimé proche de 1 montre clairement l'existence d'une période de jeunesse. D'autre part la fin de cette période est estimée a 1174 jours, ce qui concorde encore avec le premier avis d'expert. On observe que les maintenances sont plutôt efficaces pendant la période de jeunesse ($\hat{\rho_J} = 0.49$) et diminuent potentiellement la durée de la période de jeunesse de moitié. D'autre part, les maintenances pendant la période d'usure sont estimées pratiquement parfaites ($\hat{\rho_V} = 0.99$). Asymptotiquement, la durée d'attente entre deux défaillances est de 1113 jours.

Enfin, la figure 6.5 représente l'intensité de défaillance pour le système 11 avec les paramètres ci-dessus. On observe que la première maintenance qui a lieu en période de jeunesse est plutôt efficace puisque l'intensité diminue de façon significative après cette maintenance. D'autre part, on constate que les maintenances suivantes sont optimales. Cette courbe semble plus réaliste que celles obtenues dans l'étude initiale donnant les figures 2.1 et 2.2.

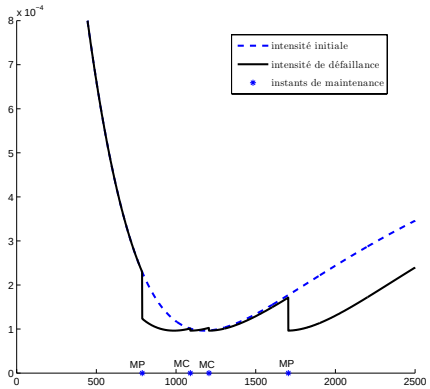


FIG. 6.5 – Intensité de défaillance pour le système 11

6.3.2 Etude des données EDF2

6.3.2.1 Présentation des données

Nous reprenons dans cette section l'étude des données répertoriées sous le nom $EDF2$ fournies dans le tableau 4.4 étudiées dans le chapitre 4. Nous rappellons que ces données proviennent de l'observation de 4 tranches, désignées sous les noms de Tr1,..., Tr4.

6.3.2.2 Etude préliminaire

Dans un premier temps, nous allons justifier l'emploi d'un modèle d'efficacité de la maintenance pour une intensité en baignoire. Pour cela, nous étudions ces systèmes à partir d'intensités initiales de type Weibull et des modèles classiques d'efficacité de la maintenance. Ce travail a été effectué dans le cadre d'une collaboration entre l'INP Grenoble et EDF en 2005 et les estimations ont été implémentées par Laurent Doyen que je remercie.

On estime par maximum de vraisemblance les efficacités de maintenance préventive et corrective pour chacune des 4 tranches. Pour ce faire, on fait les hypothèses suivantes :

- Avant la première maintenance (préventive ou corrective) le système neuf a un taux de défaillance de type Weibull :

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1},\ \alpha > 0$$

  Les paramètres α et β dépendent de la tranche considérée, sont supposés inconnus et sont donc estimés.
- Après chaque défaillance une MC est réalisée. La durée de cette MC est supposée négligeable. Toutes les MC d'une même tranche sont supposées avoir la même efficacité de maintenance ρ_c. Cette efficacité est de type ARA_1.
- Les maintenances préventives sont supposées être réalisées à des dates planifiées avant la mise en route du système, et leur durée est supposée négligeable. Toutes les MP d'une même tranche sont supposées avoir la même efficacité de maintenance ρ_p. Cette efficacité est de type ARA_1.
- La date de fin d'observation est supposée déterministe ou indépendante des instants de défaillance.

Les résultats des estimations sont consignés dans le tableau 6.7. Pour le dernier système Tr4, nous sommes confrontés à des problèmes numériques du au fait que les modèles proposés ne sont pas adaptés aux β inférieurs à 1.

	$Tr1$	$Tr2$	$Tr3$	$Tr4$
$\hat{\alpha}$	0.132	0.124	$2.39\,10^{-21}$	NA
$\hat{\beta}$	0.53	0.42	6.63	< 1
$\hat{\rho_c}$	0.97	1	0.79	NA
$\hat{\rho_p}$	-2	1	1	NA

Tab. 6.7 – Données EDF2 : Etude prélimninaire

Cette étude montre que pour les tranches Tr1, Tr2 et Tr4, on estime que l'intensité initiale a un paramètre β inférieur à 1, c'est à dire que le système en l'absence de maintenance a tendance à s'améliorer. Les modèles d'efficacité de maintenance n'ont pas été conçus pour ce type de situation ce qui est à l'origine de valeurs parfois surprenantes de $\hat{\rho_p}$. Dans le cas de Tr3, on trouve des résultats plus conformes à ce à quoi on peut s'attendre pour des modèles de dégradation, même si une estimation de β supérieure à 6 représente une dégradation extrêmement forte de ce système.

La figure 6.6 représente l'intensité de défaillance pour les données de la tranche Tr1 avec les valeurs estimées des paramètres. On constate que les MC sont nuisibles et les MP rela-

tivement efficaces. Comme ce modèle n'a pas été conçu pour des intensités décroissantes, ces conclusions sont à nuancer.

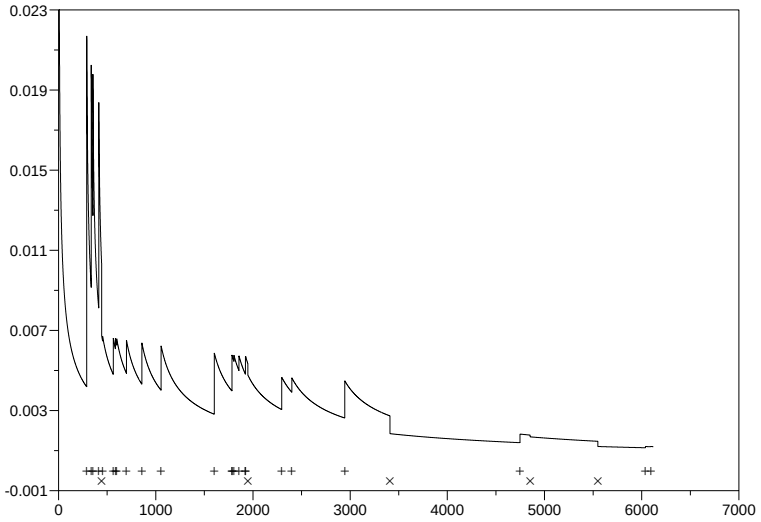


FIG. 6.6 – Intensité de défaillance estimée pour WB1.

Comme nous observons des systèmes sensés se dégrader, il ne parait pas cohérent de supposer qu'ils s'améliorent au cours du temps. Il semble donc logique de supposer que ces systèmes présentent une période de rodage (pour les systèmes Tr1, Tr2 et Tr4) dont l'impact est suffisamment important pour masquer la dégradation de ces systèmes lors d'une estimation. Rien ne permet en revanche de montrer la présence d'une période de jeunesse pour Tr3.

Au vu de ces résultats, nous allons donc proposer une étude de ces données en utilisant des modèles d'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire. Contrairement aux données EDF1, il n'est pas raisonnable d'envisager que ces 4 systèmes fonctionnent de manière similaire. En effet, la première étude montre bien que tous les systèmes ont des comportements différents.

6.3.2.3 Etude à partir d'une intensité en baignoire

Pour cette étude, nous avons utilisé le second modèle. On rappelle que ce modèle présente une intensité initiale asymptotiquement bornée, suppose les MP déterministes et suppose que les efficacités des maintenances sont différentes en période de jeunesse et d'usure. Le premier point semble cohérent avec les données puisqu'on ne semble pas observer d'accélération notable des défaillances au cours du temps. Le second point est conforme à la politique des maintenances. En effet, les maintenances effectuées sont planifiées. Le dernier point permet d'avoir une idée plus précise des efficacités des maintenances en période de jeunesse et période d'usure, les données étant suffisamment nombreuses pour nous permettre ces estimations.

L'estimation des paramètres est donnée dans le Tableau 6.8. La date t_J de fin de la période de jeunesse, bien que n'étant pas un paramètre du modèle, est estimée à partir des autres estimations des paramètres. Les figures 6.7 à 6.10 présentent les intensités de défaillance estimées pour les 4 tranches.

	$Tr1$	$Tr2$	$Tr3$	$Tr4$
$\hat{\eta}$	169	285	250	389
$\hat{\rho_J}$	0.89	0.90	$[0,1]$	0.1
$\hat{\rho_V}$	0.99	1	0.9	0.9
$\hat{\epsilon}$	0.19	0.26	1	0.49
$\hat{t_J}$	361	503	250	550

TAB. 6.8 – Données EDF2 : estimation des paramètres du second modèle

On observe tout d'abord que les estimations des paramètres diffèrent entre chaque tranche ce qui conforte l'idée d'étudier chaque système séparément. D'autre part, voici les interprétations, tranche par tranche des résultats.

- Pour Tr1, on observe une période de jeunesse peu prononcée ($\hat{\epsilon} = 0.19$). Durant cette période, 3 maintenances ont lieu et ces maintenances sont très efficaces. La très grande majorité des maintenances a lieu durant la période d'usure du système au cours de laquelle les maintenances sont très efficaces. Toutefois, du fait que la période de jeunesse ne soit pas très prononcée, les variations de l'intensité sont faibles et l'impact de l'efficacité de la maintenance est moins important si l'intensité est approximativement constante comme on peut l'observer sur le graphe 6.7.
- Pour Tr2, les conclusions sont très similaires. Une seule maintenance a lieu au cours de la période de jeunesse, ce qui parait conforme à l'observation des données étant donné l'écart entre la première maintenance et les suivantes.
- Pour Tr3, on estime une fin potentielle de période de jeunesse à 250 jours. Or, la première maintenance a lieu après 843 jours. Ce système ne présente donc pas de période de jeunesse, ce qui conforte la première analyse effectuée. Dans ce contexte, l'efficacité de la maintenance en période de jeunesse ne peut être estimée. Une valeur de ϵ estimée à 1 et une efficacité de la maintenance en période d'usure proche de 1 signifient que l'on a approximativement un processus de renouvellement, ce qui peut s'observer sur le graphe 6.9.
- Pour Tr4, le comportement du système est similaire à Tr1 et Tr2. Toutefois, la courbe en baignoire est plus marquée que pour ces systèmes ($\hat{\epsilon} = 0.49$), ce qui s'observe sur le graphe 6.10. Les maintenances en période de jeunesse sont en revanche très médiocres ($\hat{\rho_J} = 0.1$)

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé deux modèles d'efficacité de la maintenance pour des intensités en baignoire. Ces modèles ont été appliqués à des jeux de données pour des systèmes où une période de jeunesse avait été détectée lors d'une précédente

étude. Nos résultats d'estimation confortent les premières conclusions tout en apportant des informations précieuses sur l'efficacité des maintenances en période de jeunesse et sur la durée de ces périodes de jeunesse.

Les futures perspectives seraient de différencier les efficacités des MP et des MC. Cela rendrait les calculs d'estimation un peu plus complexes. De plus, les observations sont souvent peu nombreuses et la multiplication des paramètres d'efficacité rend la qualité des estimateurs moins bonne. Toutefois, cela permettrait de distinguer l'effet de chaque type de maintenance.

Enfin, il serait intéressant de proposer des modèles d'efficacité pour lesquels l'intensité de défaillance pour un système maintenu ne puisse pas être plus grande que l'intensité initiale d'un système. Bien que très marginal pour les modèles proposés, il serait logique d'un point de vue pratique que ce phénomène ne puisse se produire.

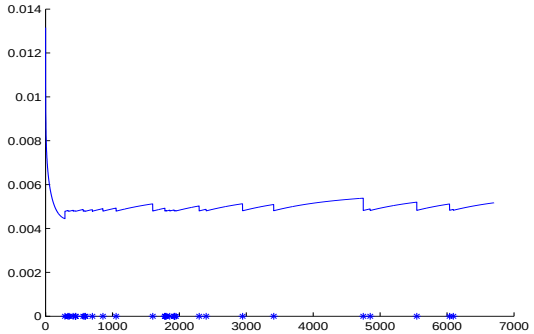


FIG. 6.7 – Tr1 : Intensité estimée

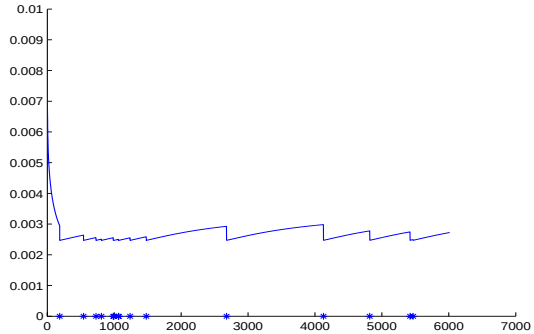


FIG. 6.8 – Tr2 : Intensité estimée

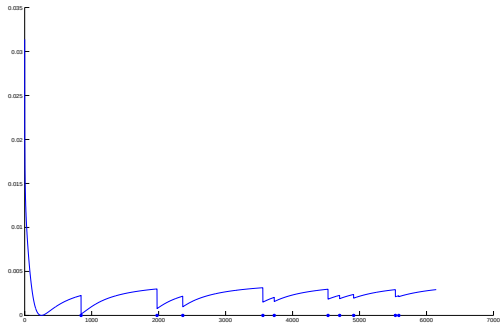


FIG. 6.9 – Tr3 : Intensité estimée

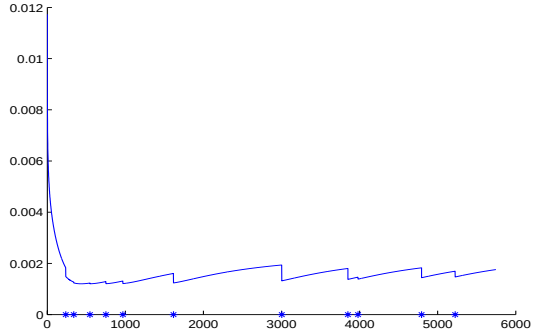


FIG. 6.10 – Tr4 : Intensité estimée

Conclusions et perspectives

Cette thèse est consacrée à la modélisation de la maintenance imparfaite dans le cadre des âges virtuels et des risques concurrents. Nous avons dans un premier temps présenté les principaux modèles de maintenance imparfaite en présence d'un seul type de maintenance puis proposé une synthèse des principaux modèles de risques concurrents classiques. Quelques critères de sélection de modèle ont été proposés et nous avons étudié en détail la qualité de certains estimateurs de fonctions usuelles des UCR. Au cours de cette analyse statistique, nous avons mis en évidence l'absence de modèle UCR à risques dépendants pour lequel la fonction ϕ est croissante. Pourtant, il existe des jeux de données pour lesquels l'estimateur de ϕ est croissant.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé le cadre des modèles de risques concurrents généralisés et des modèles d'âge virtuel généralisés afin de pouvoir prendre en compte des effets de maintenance et des dépendances entre les risques quelconques. Grâce aux données fournies par EDF, nous avons pu alors mettre en évidence les limites des premiers modèles GCR. D'une part ces modèles sont peu nombreux et les hypothèses proposées ne sont pas toujours réalistes. D'autre part, ces modèles utilisent systématiquement le principe des âges virtuels généralisés. Enfin, aucun de ces modèles n'est exploitable si on souhaite étudier des systèmes présentant une période de jeunesse.

Au vu de ces considérations, nous avons alors proposé un nouveau modèle UCR : le modèle alert-delay. Les hypothèses de ce modèle nous paraissent tout à fait conformes à ce qu'on pourrait observer sur des systèmes réels. Nous avons prouvé une version faible de l'identifiabilité pour ce modèle et effectué une étude plus fine en considérant des lois exponentielles. Nous avons alors mis en évidence le fait que la fonction ϕ pour ce modèle particulier est croissante. En plus d'une étude statistique de ce modèle, on a pu l'appliquer à un jeu de données adapté. Bien que les résultats des estimations soient conformes aux observations, on a vu que même ce modèle n'était pas parfaitement satisfaisant pour expliquer les données. Une perspective prometteuse serait d'utiliser d'autres lois que des lois exponentielles pour le modèle AD. Bien qu'aucun résultat général n'ait pu être trouvé, on peut envisager d'obtenir une fonction ϕ croissante pour d'autres lois. Il semble que cela soit le cas pour des lois de Weibull, mais il faut rester prudent tant que nous n'avons pas de preuve.

Nous avons ensuite proposé plusieurs classes de modèles GCR, utilisant ou non le principe des âges virtuels. Tout d'abord les modèles CIGCR généralisant les modèles de risques concurrents indépendants. Ces modèles ont l'avantage d'être automatiquement identifiables, d'être très facilement utilisables sans malgré tout avoir les inconvénients des modèles IUCR puisqu'on réussit à prendre en compte les efficacités des maintenances. Un modèle simple a ensuite été proposé et appliqué à des données réelles. Pour les autres

classes de modèles proposées (GRS, GPH, GAD), nous nous sommes efforcés de présenter des généralisations simples et qui semblent à nos yeux réalistes. Pour autant, de nombreux travaux peuvent être envisagés :

- Proposer des critères permettant de vérifier si les données sont issues d'un modèle UCR ou d'un modèle GCR.
- Si on fait le choix d'un modèle GCR, proposer des critères de sélection de classes de modèles. On peut imaginer généraliser l'étude faite sur ϕ aux fonctions ϕ_{k+1}. C'est vraisemblablement un problème difficile mais on peut envisager de tester quelques cas simples tels que la constance ou l'égalité des fonctions ϕ_{k+1}. De toutes les manières, il est nécessaire d'avoir plus d'informations, soit par critères statistiques, soit par avis d'expert avant de choisir une classe de modèle.
- Si on fait le choix d'une classe particulière de modèles GCR, proposer des paramétrisations réalistes. La connaissance des systèmes et de leur condition d'exploitation fournit des informations importantes. D'autre part, il est peut-être possible d'orienter notre choix de paramétrisation à partir de critères statistiques comme par exemple en testant la présence d'une cascade de défaillances.
- Enfin, la liste de modèles GCR présentée n'est pas exhaustive et d'autres modèles UCR peuvent être généralisés.

La dernière partie de ce manuscrit est consacrée à adapter les modèles d'âge virtuel pour des systèmes présentant une période de jeunesse. Pour ces systèmes, on a considéré que l'instant auquel un système neuf fonctionne optimalement se situe en fin de période de jeunesse. Nous avons ainsi adapté les hypothèses classiques (ARA_1, ARA_∞, BP) afin qu'une maintenance optimale ne remette pas le système à neuf mais dans l'état où il se trouve en fin de période de jeunesse. Les modèles que nous avons présentés prennent en compte un ou deux types de maintenance. Dans les deux cas, nous avons étudié un modèle particulier puis appliqué ces modèles à des jeux de données où des périodes de jeunesse avaient été détectées. Les résultats obtenus sont conformes avec les premières analyses effectuées et fournissent des informations qui ne nécessitent pas un avis d'expert sur l'instant de fin de période de jeunesse et sur les efficacités des maintenances. Plusieurs perspectives peuvent être envisagées :

- Avoir des informations sur la qualité des estimateurs, dans un premier temps pour des modèles simples avec un seul type de maintenance.
- Appliquer ces modèles en différenciant les effets des MP et des MC.
- Proposer des modèles pour lesquels l'intensité de défaillance soit toujours inférieure à l'intensité initiale.
- Adopter une approche risques concurrents non seulement sur les types de maintenance, mais aussi sur les périodes de la vie du système : rodage, vie utile, usure.

Bibliographie

[1] O.O. Aalen, N.L. Hjort, Frailty models that yield proportional hazards, *Statistics and Probability Letters*, 58(4), 335–342, 2002.

[2] P.K. Andersen, O. Borgan, R.D. Gill, N. Keiding, *Statistical models based on counting processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1983.

[3] T. Bedford, On the use of minimally informative copulae in competing risk problems, *Statistical Probabilistic Models in Reliability*, C. Ionescu and N. Limnios, Eds : Birkhauser, 39–50, 1998.

[4] B. Bassan, F. Spizzichino, On some properties of dependence and aging for residual lifetimes in the exchangeable case. In Doksum, K. and Lindqvist, B.H., editors, *Mathematical and Statistical methods in Reliability*, Quality, Reliability and Engineering Statistics, 235–249. World Scientific Publishing Co., 2003.

[5] M. Bebbington, C. Lai, R. Zitikis, A flexible Weibull extension, *Reliability Engineering and System Safety* , 92(6), 719–726, 2007.

[6] T. Bedford, B. Lindqvist, The identifiability problem for repairable systems subject to competing risks *Advances in Applied Probability* 36 :774–790, 2004.

[7] T. Bedford , I. Meilijson, A Characterization of Marginal Distributions of (Possibly Dependent) Lifetime Variables which Right Censor each other, *The Annals of Statistics*, 25(4), 1622–1645 , 1997.

[8] T. Bedford, C. Mesina, The impact of modeling assumptions on maintenance optimization. Dans *Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR 2000), Bordeaux,* 171–174, 2000.

[9] D. Bernoulli, Essai d'une analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir, *Histoires et Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1–45, 1760.

[10] J.F. Brown, J.F. Mahoney, B.D. Sivalzian, Hysteresis repair in discounted replacement problems, *IIE Transactions*, 15(2), 156–165, 1983.

[11] M. Brown, F. Proschan, Imperfect repair, *Journal of Applied Probability*, 20, 851–859, 1983.

[12] C. Bunea, T. Bedford, The effect of model uncertainty on maintenance optimization, *IEEE Transactions on Reliability*, 51(4), 486–493, 2002.

[13] C. Bunea , R.M. Cooke, B.H Lindqvist, Competing risks perspective on reliability databases. In Doksum, K. and Lindqvist, B.H., editors, *Mathematical and Statistical methods in Reliability*, Quality, Reliability and Engineering Statistics, 355–370. World Scientific Publishing Co., 2003.

[14] P. Caperaa, B. van Cutsem, Méthodes et modèles en statistique non paramétrique, *Presses de l'Université Laval*, Dunod, 1988.

[15] J.K. Chan, L. Shaw, Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance, *IEEE Transactions on Reliability*, 42(4), 566–571, 1993.

[16] Z. Chen, A new-two parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function, *Statistics and Probability Letters*, 49, 155–161, 2000.

[17] A. Christer, A review of delay time analysis for modelling plant maintenance. In Osaki, S., editor, *Stochastic models in reliability and maintenance*, 89–124, Springer, 2002.

[18] R.M. Cooke, The total time on test statistic and age-dependent censoring, *Statistics and Probability Letters*, 18(3), 307–312, 1993.

[19] R.M. Cooke, The design of reliability data bases, part II : competing risk and data compression. *Reliability Engineering and System Safety*, 51, 209–223, 1996.

[20] R.M. Cooke, J. Paulsen, Concepts for measuring maintenance performance and methods for analysing competing failure modes, *Proceedings of the ESREL Conference, La Baule*, 497–506, 1994.

[21] R.M. Cooke, J. Paulsen, Concepts for measuring maintenance performance and methods for analysing competing failure modes, *Reliability Engineering and System Safety*, 55, 135–141, 1997.

[22] R.M. Cooke, T. Bedford, *Probabilistic Risk Analysis : Foundations and Methods*, Cambridge University Press, 2001.

[23] R.M. Cooke, T. Bedford, Reliability databases in perspective, *IEEE Transactions on Reliability*, 51(3), 294-310, 2002.

[24] F.P.A. Coolen, R. Dekker , Analysis of a 2-Phase model for optimization of condition-monitoring intervals, *IEEE Transactions on Reliability*, 44(3), 505–511, 1995.

[25] F. Corset, L. Doyen, O. Gaudoin, Mise en oeuvre de méthodes fréquentielles et bayésiennes pour l'estimation de l'efficacité des maintenances des matériels réparables, Rapport de contrat LMC-EDF n° 8610-BVW-4300050422, 2006.

[26] M.J. Crowder, *Classical competing risks*, Chapman & Hall, London, 2001.

[27] H.A. David, M.L. Moeschberger, *The Theory of Competing Risks*, Griffin, London, 1978.

[28] J.V. Deshpande, D. Sengupta, Testing the hypothesis of proportional hazards in two populations, *Biometrika*, 82(2), 251–61, 1995.

[29] I. Dewan, J.V. Deshpande, S.B. Kulathinal, On Testing Dependence between Time to Failure and Cause of Failure via Conditional Probabilities, *Scandinavian Journal of Statistics*, 31, 79–91, 2004.

[30] Y. Dijoux , A virtual age model based on a bathtub shaped initial intensity, *Reliability Engineering and System Safety*, en révision, 2008.

[31] Y. Dijoux, L. Doyen, O. Gaudoin, Conditionally independent generalized competing risks for maintenance analysis, *Advances in Mathematical Modeling for Reliability*, T. Bedford, J. Quigley, L. Walls, B. Alkali, A. Daneshkhah and G. Hardman eds., IOS Press, Amsterdam, 88–95, 2008.

[32] Y. Dijoux, O. Gaudoin, The alert-delay competing risks model for maintenance analysis, *Journal of Statistical Planning and Inference*, à paraître, disponible en ligne, doi : 10.1016/j.jspi.2008.05.021, 2008.

[33] L. Doyen, Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.

[34] L. Doyen, O. Gaudoin, C. Domecq, M.A. Garnero, S. Lacombe, A. Lannoy, Evaluation de l'efficacité de la maintenance de matériels réparables, *Proc. Conf. Nat. Maîtrise des risques et Sûreté de Fonctionnement, $\lambda\mu$14, Bourges, October 2004,* 47-52.

[35] L. Doyen, O. Gaudoin, Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age, *Reliability Engineering and System Safety*, 84(1), 45-56, 2004.

[36] L. Doyen, O. Gaudoin, Imperfect maintenance in a generalized competing risks framework, *Journal of Applied Probability*, 43(3), 825–839, 2006.

[37] R. Dykstra, S. Kochar, T. Robertson, Restricted tests for testing independence of time to failure and cause of failure in a competing-risks model, *The Canadian Journal of Statistics*, 26(1), 57–68, 1998.

[38] N. Ebrahimi, D. Molefe, Survival function estimation when lifetime and censoring time are dependent, *Journal of Multivariate Analysis*, 87, 101–132, 2003.

[39] M. Finkelstein, V. Esaulova, On asymptotic failure rates in bivariate frailty competing risks models, *MPIDR Working Papers from Max Planck Institute for Demographic Research*, 2006.

[40] M. Gail, A review and critique of some models used in competing risks analysis, *Biometrics*, 31, 209–222, 1975.

[41] O. Gaudoin, J. Ledoux, *Modélisation aléatoire en fiabilité des logiciels*, Hermès Science Publications, 2007.

[42] M.E. Ghitany, The Monotonicity of the Reliability Measures of the Beta Distribution, *Applied Mathematics Letters*, 17, 1277–1283, 2004.

[43] E. Haupt, H. Schäbe, A new model for a lifetime distribution with bathtub shaped failure rate, *Microelectronics Reliability*, 32, 633–639, 1992.

[44] U. Hjorth, A reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub shaped failure rates, *Technometrics* ,22, 99-109, 1980.

[45] P. Hokstadt, U. Jensen, Predicting the failure rate for components that go through a degradation state, *Safety and Reliability* , 53, 389-396, 1998.

[46] E. Idee, Description sous forme de mélanges de lois des lois de Weibull ou logistiques dont l'un des paramètres est perturbé selon un modèle aléatoire simple. Publication interne au sein du laboratoire LAMA, 2007.

[47] C.H. Jackson, L.D. Sharples, S.G. Thompson, S.W. Duffy, E. Couto, Multistate Markov models for disease progression with classification error, *Journal of the Royal Statistical Society : Series D (The Statistician)*, 52(2), 193-209, 2003.

[48] Z. Jelinski, P.B. Moranda, Software reliability research, In : W. Freiberger (Ed.), *Statistical Computer Performance Evaluation*, Academic, New York, 465–484, 1972.

[49] R. Jiang, N.P. Murthy, Two sectional models involving three Weibull distributions, *Quality and Reliability Engineering International*, 13, 83-96, 1997.

[50] V. Kaishev, D. Dimitrova, S. Haberman, Modelling the joint distribution of competing risks survival times using copula functions, *Insurance : Mathematics and Economics*, 41(3), 339–361, 2007.

[51] M. Kijima, Some results for repairable systems with general repair, *Journal of Applied Probability*, 26, 89–102, 1989.

[52] M. Kijima, M. Morimura, Y. Suzuki, Periodical replacement problem without assuming minimal repair. *European Journal of Operational Research*, 37, 194-203, 1988.

[53] J.A. Koziol, S.B. Green, A Cramér-von Mises statistic for randomly censored data, *Biometrika*, 63(3), 465–474, 1976.

[54] H. Langseth, B.H. Lindqvist, A maintenance model for components exposed to several failure mechanisms and imperfect repair. In Doksum, K. and Lindqvist, B.H., editors, *Mathematical and Statistical methods in Reliability*, Quality, Reliability and Engineering Statistics, 355–370. World Scientific Publishing Co., 2003.

[55] W. Li, H. Pham, Reliability Modeling of Multi-State Degraded Systems with Multi-Competing Failures and Random Shocks, *IEEE Transactions on Reliability*, 54(2), 297–301, 2005.

[56] B.H. Lindqvist, On the Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems, *Statistical Science*, 21(4), 532-551, 2006.

[57] B.H. Lindqvist, B. Stove, H. Langseth, Modelling of dependence between critical failure and preventive maintenance : the repair alert model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136(5), 1701 :1717, 2006.

[58] W.M. Makeham, On an Application of the Theory of the Composition of Decremental Forces, *Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine*, 18, 317–322, 1874.

[59] M.A.K. Malik, Reliable preventive maintenance scheduling, *AIIE Transactions*, 11(3), 221–228, 1979.

[60] P.B. Moranda, Event altered rate models for general reliability analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, 28(5), 376–381, 1975.

[61] N.P. Murthy, M. Xie, R. Jiang, Weibull models, Wiley, 2004.

[62] A.V. Peterson, Bounds for a joint distribution function with fixed subdistribution functions : Application to competing risks, *Proceedings of the National Academy of Sciences* , 73, 11–13, 1976.

[63] S.E. Rigdon, A.P. Basu, *Statistical methods for the reliability of repairable systems*, Wiley, 2000.

[64] G. Pulcini, Modeling the failure data of a repairable equipment with bathtub type failure intensity, *Reliability Engineering and System Safety* , 71(2), 209–218, 2001.

[65] A. M. Sarhan, Analysis of Incomplete, Censored Data in Competing Risks Models with Generalized Exponential Distributions, *IEEE Transactions on Reliability*, 56(1), 132–138, 2007.

[66] A. Tsiatis, A non-identifiability aspect in the problem of competing risks, *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 72, 20-22, 1975.

[67] J.W. Vaupel, K. G. Manton, E. Stallard, The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality, *Demography*, 16, 439–454, 1979.

[68] F.K. Wang, A new model with bathtub-shaped failure rate using an additive Burr XII distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, 70(3), 305–312, 2000.

[69] F. Wilcoxon, Probability tables for individual comparisons by ranking methods, *Biometrics*, 3(3), 1947.

[70] J. S. Williams, S. W. Lagakos, Models for censored survival analysis : Constant-sum and variable-sum models, *Biometrika*, 64, 215-24, 1977.

[71] M. Xie, C.D. Lai, Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function, *Reliability Engineering and System Safety*, 52, 87–93, 1995.

[72] M. Xie, Y. Tang, T.N. Goh, A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function, *Reliability Engineering and System Safety* , 76(3), 279–285, 2002.

[73] G. Yang, Life expectancy under random censorship, *Stochastic Processes and their Applications*, 6, 33-39, 1977.

[74] A. I. Yashin, Correlated frailty models in the analysis of dependent failure times, *Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Reliability*, MMR 2002, Trondheim, 2002.

[75] M. Zhang, J. P. Klein, Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula, *Biometrika*, 82 :127–138, 1995.

Résumé : Ce travail se situe dans le cadre de la modélisation aléatoire pour la sûreté de fonctionnement des systèmes réparables. Nous considérons des systèmes soumis à des maintenances correctives et préventives conditionnelles. La principale problématique que nous traitons est de modéliser conjointement la dépendance entre les deux types de maintenances en utilisant le cadre des risques concurrents et l'efficacité des maintenances imparfaites en utilisant le principe des âges virtuels. Dans ce cadre, nous proposons des modèles de maintenance imparfaite pour des systèmes présentant une période de jeunesse.

Dans un premier temps, nous proposons un nouveau modèle de risques concurrents classique, le modèle alert-delay, qui permet de prendre en compte la dépendance entre les deux types de maintenances. Ses propriétés originales permettent d'analyser certains jeux de données pour lesquels aucun modèle usuel n'était adapté. Dans un deuxième temps, nous présentons plusieurs classes de modèles de risques concurrents généralisés : nous généralisons les modèles classiques en tenant compte du passé afin de caractériser l'efficacité des maintenances et la réactivité des équipes de maintenance. Enfin, nous présentons une classe générale de modèles de maintenance imparfaite pour des systèmes présentant une période de jeunesse. Jusqu'à présent, les modèles n'étaient adaptés qu'aux systèmes se dégradant continûment. Deux modèles particuliers sont alors étudiés plus en détail.

Dans chacune de ces parties, les modèles proposés sont appliqués à des jeux de données issus de l'industrie.

Mots clés : modélisation aléatoire, fiabilité, maintenance corrective, maintenance préventive, risques concurrents, âges virtuels, période de jeunesse, statistique.

Abstract : This work deals with stochastic modelling for the reliability of repairable systems. We consider systems subject to corrective and condition-based preventive maintenance. The main topic of this thesis is the joint modelling of the dependency between both kinds of maintenances using the competing risks framework, and the efficiency of imperfect maintenance based on the virtual age models. In this framework, we propose imperfect maintenance models for systems presenting a burn-in period.

In a first part, a new usual competing risks model called alert-delay is presented. The original properties of this model allow to analyze some datasets that could not be fitted by usual models. In a second part, we propose several extensions of the usual competing risks models in a generalized competing risks framework. The assumptions proposed reflect the maintenance efficiency as well as the reactivity of the maintenance crew. Finally, we present a general modelling of the maintenance efficiency for systems presenting a burn-in period. Up to now, the classical models were only adapted for systems wearing out continuously. Two particular models are studied in details.

In each part, the models proposed are applied to datasets issued from the industry.

Keywords : stochastic modelling, reliability, corrective and preventive maintenance, competing risks, virtual age, burn-in period, statistics.