



**HAL**  
open science

# Modélisation phénoménologique de pulvérisation de sprays couplée à une approche LES pour la phase gazeuse.

Julien Jouanguy

► **To cite this version:**

Julien Jouanguy. Modélisation phénoménologique de pulvérisation de sprays couplée à une approche LES pour la phase gazeuse.. Physique [physics]. Université de Rouen, 2007. Français. NNT : . tel-00380980

**HAL Id: tel-00380980**

**<https://theses.hal.science/tel-00380980>**

Submitted on 4 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée à l'

**UNIVERSITÉ DE ROUEN**

U.F.R. des Sciences

en vue de l'obtention du Doctorat

Discipline : Physique

Spécialité : Energétique

Présentée par

**Julien JOUANGUY**

**Modélisation phénoménologique de  
pulvérisation de sprays couplée à une  
approche LES pour la phase gazeuse**

**Directeur de thèse :** M. Gorokhovski, Professeur, Ecole Centrale de Lyon

## **Jury**

Rapporteurs :	R. Borghi	Professeur, Ecole Centrale de Marseille
	F. Dupoirieux	Maître de recherche à l'ONERA
Examineurs :	M. Massot	Professeur, Ecole Centrale de Paris
	B. Oesterlé	Professeur, ESSTIN de Nancy
	M. Lance	Professeur, Ecole Centrale de Lyon
	A. Cartellier	Directeur de recherche du CNRS







# Remerciements

Cette thèse de doctorat a été réalisée au sein du Laboratoire de Thermodynamique rattaché au CORIA CNRS UMR 6614. Je tiens à remercier Michel Ledoux, directeur de cette structure, de m'y avoir accueilli.

Merci à Roland Borghi et Francis Dupoirieux d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Que soient également remercié Michel Lance, Benoît Oesterlé, Marc Massot et Alain Cartelier pour leur participation au jury.

Mes remerciements vont également à Mikhael Gorokhovski pour avoir su encadrer ces recherches et pour les nombreuses idées qu'il a pu m'apporter durant ces années.

J'aimerais également remercier Christophe Letellier qui m'a donné le goût de la recherche ainsi que Pierre Parenthoen et Michel Gonzalez pour leur patience, leur gentillesse durant le stage de DEA. Merci de m'avoir donné envie de faire une thèse.

Je voudrais également remercier Anna Chtab pour sa gentillesse, sa disponibilité, ses encouragements et ses réponses à mes nombreuses questions pendant la thèse.

Mes remerciements vont également à tout le personnel de L'IUT génie thermique de Rouen pour leur accueil chaleureux durant ma dernière année de thèse, en particulier François Petit, Valéry Quedrue, Gilles Courant, Jacques Motte, Françoise Sulpice et Caroline Noel.

Cette thèse fut également une période de ma vie riche en émotions et pleine de très belles rencontres, que je n'oublierai pas, ainsi merci à vous Sandra, Sam, Alex T, JB, Gilles et Mathieu L (mes deux potes du bureau du bonheur), David, Thibaut, Romain, Camille, Mathieu D, Cyprien, Alex N., Nico pour tout le soutien, les rires, les soirées, les discussions, le Diochon, les pauses café à toute heure, et pour tous les moments partagés.

Merci également à ma famille, et plus particulièrement à mes parents Annick et Claude ainsi qu'à ma soeur Elise pour toute l'énergie qu'ils ont pu me donner, pour leur aide, leur écoute depuis toujours et leurs nombreux encouragements.

Et enfin, je tiens à remercier tout particulièrement celle qui m'a toujours soutenue, supporté, encouragé, motivé, compris ... les mots me manquent ... Gaëlle, merci pour tout et pour toujours.







# Table des matières

<b>OBJECTIF DE L'ETUDE.....</b>	<b>- 1 -</b>
<b>CHAPITRE 1 L'ATOMISATION.....</b>	<b>5</b>
1.1 Critères.....	6
1.2 Analyse des mécanismes d'atomisation primaire.....	11
1.2.1 Théorie des instabilités.....	11
1.2.2 Résultats expérimentaux.....	13
1.2.3 Longueur intacte.....	17
1.2.4 Angle de spray.....	19
1.3 Analyse des mécanismes d'atomisation secondaire.....	20
1.3.1 Résultats expérimentaux.....	20
1.3.2 Différents mécanismes d'atomisation secondaire.....	22
1.3.3 Echelles typiques de tailles après la rupture.....	31
1.4 Approches numériques existantes pour la simulation de l'atomisation primaire	36
1.4.1 Simulation numérique directe.....	36
1.4.2 Modèle ELSA (Eulerian Lagrangian Spray Atomization).....	38
1.4.3 Approche LES/VOF.....	40
1.5 Nouvelle approche stochastique, sa position et l'idée de base.....	41
1.6 Conclusion.....	44
<b>CHAPITRE 2 MODELE STOCHASTIQUE D'ATOMISATION D'UN JET ASSISTE PAR AIR.....</b>	<b>45</b>
1.7 Hypothèse de symétrie d'échelle.....	45
1.8 Processus log-brownien.....	50
1.9 Conclusion.....	51
<b>CHAPITRE 3 CALCUL METHODIQUE D'UN JET GAZEUX ROND TURBULENT INJECTE DANS UN ENVIRONNEMENT AU REPOS ; APPLICATION D'UNE METHODE DE TYPE LES.....</b>	<b>53</b>
1.10 Approche de type LES.....	53

1.10.1	Bref rappel sur les échelles typiques employées pour la turbulence et la simulation.....	53
1.10.2	Equations filtrées.....	60
1.10.3	Modèle de Smagorinsky.....	61
1.10.4	Procédure dynamique de M. Germano.....	62
<b>1.11</b>	<b>Résultats du calcul d'un jet rond.....</b>	<b>64</b>
1.11.1	Résumé des résultats théoriques et expérimentaux.....	65
1.11.2	Résultats de calculs et discussion.....	67
<b>1.12</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>72</b>
<b>CHAPITRE 4 APPLICATION A LA MODELISATION DE L'ATOMISATION PRIMAIRE.....</b>		<b>73</b>
<b>1.13</b>	<b>Particules stochastiques « floatting cutter » .....</b>	<b>73</b>
<b>1.14</b>	<b>Equations stochastiques des « floatting cutter ».....</b>	<b>76</b>
<b>1.15</b>	<b>Choix de <math>\langle \ln \alpha \rangle</math> et <math>\langle \ln^2 \alpha \rangle</math> .....</b>	<b>77</b>
<b>1.16</b>	<b>Choix de la fréquence de fragmentation .....</b>	<b>78</b>
<b>1.17</b>	<b>Modélisation de présence de liquide.....</b>	<b>78</b>
1.17.1	Algorithme de calcul de présence de liquide .....	78
1.17.2	Description de l'expérience de Werquin et but de la comparaison.....	83
1.17.3	Simulation 2D .....	84
1.17.4	Symétrie isotropique ; modélisation de présence de liquide en 3D .....	90
<b>1.18</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>95</b>
<b>CHAPITRE 5 MODELISATION DE L'ATOMISATION SECONDAIRE.....</b>		<b>97</b>
<b>1.19</b>	<b>Formation de parcelles détachées ; leurs positions initiales, tailles et vitesses. ....</b>	<b>99</b>
1.19.1	Positions initiales des parcelles détachées .....	99
1.19.2	Taille initiale des parcelles détachées. ....	99
1.19.3	Vitesses initiales des parcelles détachées.....	102
<b>1.20</b>	<b>Phase gazeuse conditionnelle, transport lagrangien des parcelles détachées .....</b>	<b>102</b>
<b>1.21</b>	<b>Modélisation des collisions.....</b>	<b>103</b>
1.21.1	Modèle de P.J. O'Rourke .....	104
1.21.2	Introduction de la fragmentation dans le modèle de O'Rourke .....	108
<b>1.22</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>111</b>
<b>CHAPITRE 6 RESULTATS DE SIMULATION LES COUPLES AVEC LE MODELE STOCHASTIQUE EN 2D ET 3D .....</b>		<b>113</b>
<b>1.23</b>	<b>Distributions au voisinage de l'injecteur.....</b>	<b>113</b>

1.24	Evolution du diamètre de Sauter .....	117
1.25	Fraction massique de liquide.....	119
1.26	Angle du spray .....	121
1.27	Champ de vitesse moyen de liquide .....	122
1.28	Conclusion.....	123
<b>CONCLUSION .....</b>		<b>124</b>
<b>ANNEXE A APPLICATION DU MODELE A UN JET DE TYPE DIESEL .....</b>		<b>127</b>
A.1	Présentation de l'expérience.....	127
A.2.	Caractéristiques des « floatting cutter ».....	128
A.3.	Formation de parcelles.....	131
A.5.	Résultats .....	134
<b>ANNEXE B SOLUTION AUTO-SIMILAIRE POUR UN JET AXISYMETRIQUE... 138</b>		
<b>ANNEXE C METHODES NUMERIQUES..... 144</b>		
C.1	Notation d'indices.....	144
C.2	Equations discrétisées .....	145
C.3	Schéma semi-implicite itératif.....	146
C.4	Conditions aux limites.....	149
C.5	Résolution de l'équation de Poisson pour la pression.....	150
C.6	Coordonnées cylindriques .....	151
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>		<b>154</b>







## Objectif de l'étude

Dans les injecteurs co-axiaux air-assistés, le jet liquide est injecté à travers un orifice circulaire à une faible vitesse. Ce jet est entouré de gaz à forte vitesse. Une catégorie importante d'applications de ce type d'injecteur est représentée par les moteurs de fusées où, à la sortie de l'injecteur, un jet d'oxygène liquide interagit avec un co-courant rapide d'hydrogène gazeux et se brise en fragments. Prédire les caractéristiques de ces fragments est essentiel pour simuler les phénomènes qui succèdent à la pulvérisation : la dispersion, la vaporisation et finalement, la combustion. De nombreuses études ont été menées notamment à travers le GdR 5240 « Combustion dans les moteurs fusées ». Ce GdR s'est achevé en 2001 par un colloque de synthèse. Durant ce programme, plusieurs travaux ont été réalisés sur l'atomisation du jet liquide dans ce type de configurations. Des fluides de substitution ont été utilisés pour effectuer des mesures des échelles caractéristiques du liquide.

En particulier, plusieurs études expérimentales réalisées par L. Raynal [77] 1997, P. Marmottant 2001 [58], O. Werquin 2001 [106], M. Hong et *al.* 2002 [40] M. Hong 2003 [39], C.M. Varga et *al.* 2003 [100] ont permis de mieux comprendre les mécanismes responsables de la déstabilisation du liquide au voisinage de l'injecteur. Cette zone est appelée zone d'atomisation primaire. Elle se traduit par « l'épluchage du jet » et la formation de fragments de liquide dans l'écoulement. Ces fragments évoluent ensuite spatialement en se brisant (atomisation secondaire) ou en se regroupant (coalescence). Des études expérimentales ont également été menées par J.C. Lasheras et *al.* [52], C.M. Varga et *al.* 2003 [100] et M. Hong 2003 [39] de façon à prédire les tailles des fragments dans le spray.

Dans un moteur de fusée, la pression de la chambre de combustion peut être élevée (~110 bars) et les vitesses relatives entre les phases sont grandes. Les nombres de Weber et de Reynolds sont donc élevés, de l'ordre respectivement de  $10^5$  et  $10^6$ . Ces conditions sont difficiles à réaliser

en laboratoire, d'où la nécessité d'utiliser des fluides de substitution de façon à comprendre les mécanismes dominants dans ce type de situations.

Dans ce contexte, la simulation numérique s'avère un outil efficace pour réaliser ce type de conditions. Elle fait appel à la résolution d'écoulements turbulents diphasiques, les valeurs du nombre de Reynolds étant élevées. Plusieurs approches peuvent être proposées. La première est la résolution directe des équations diphasiques (DNS), en identifiant une interface liquide/gaz à chaque pas de temps avec la formation des éléments liquides détachés lorsque leur taille devient de l'ordre de celle de la maille de calcul. Dans le cadre académique, cette approche peut aider à comprendre le mécanisme de pulvérisation. Cependant dans les moteurs, le nombre de Weber, la fréquence de fragmentation, et le spectre de tailles interagissant directement lors de la fragmentation (des gouttes de l'ordre d'une dizaine de microns peuvent être formées à partir de gros éléments liquides). Cela nécessite des capacités informatiques excessives, ce qui fait de la DNS un outil très coûteux numériquement et difficile à mettre en œuvre pour explorer la totalité du spray.

L'approche basée sur les équations de type RANS développée par A.Vallet [97] et A. Vallet et *al.* [99] résout ce problème. Elle considère un milieu homogène où dans chaque volume, deux mouvements peuvent exister simultanément ; le liquide et le gaz se déplacent l'un et l'autre indépendamment. Le comportement moyen d'un tel écoulement diphasique est gouverné par les équations moyennes. Le phénomène d'atomisation est considéré dans le cadre du mélange turbulent de type RANS d'un jet lourd interagissant avec l'environnement gazeux. Dans ce mélange, les effets de la diffusion « à contre-gradient » pilotée par le gradient de pression moyenne sont mis en avant. L'application de cette approche Eulerienne ([62], [61],[45]) à la modélisation de la pulvérisation air-assistée démontre des avantages. La modélisation de N. Meyers et F. Dupoirieux montre le détachement, en moyenne, de paquets liquides de formes complexes au voisinage de l'injecteur, en accord avec les observations expérimentales. Cela indique les perspectives immédiates d'application de cette approche dans les configurations réelles du moteur. Néanmoins, il reste un point de réserve. Il s'agit de phénomènes d'intermittence, d'autant plus prononcés que les nombres de Reynolds et de Weber sont grands. Concernant la phase liquide, l'intermittence se manifeste dans la nature fractale de la fragmentation air-assistée, observée dans de nombreuses expériences [89], [20], 0 avec une topologie d'écoulement liquide très complexe. Cela implique que pendant la fragmentation, l'évolution de la variance dans les distributions caractérisant le comportement du jet liquide peut être très significative. Ceci demande de nouvelles fermetures, différentes de celles traditionnelles. Concernant la phase gazeuse, il est connu qu'une approche de type RANS néglige les effets d'intermittence. Ces effets peuvent provoquer une accumulation spatiale de l'interface gaz/liquide ce qui est en désaccord avec les hypothèse de type Boussinesq. Cette réserve motive des recherches d'approches de modélisation de l'atomisation air-assistée. Il est toujours utile de

développer de nouvelles idées (« correctes » ou « non-correctes ») afin d'attaquer un problème si complexe. Une tentative a été faite dans ce travail.

Dans les dernières années, les calculs d'écoulements turbulents gazeux utilisent souvent la résolution des grandes structures turbulentes couplée à une modélisation pour les petites échelles (LES). Cette approche est très coûteuse et nécessite de gros moyens informatiques. Cependant, le développement de ces derniers permet de l'appliquer à des calculs pratiques dans des configurations réelles. Il a été démontré [64] que dans des configurations d'écoulements intermittents avec des structures cohérentes et des zones de décollement de couche limite, cette approche est précise. Cependant, à l'heure actuelle, il n'existe aucune formulation de type LES étendue à la modélisation Eulerienne d'un spray en pulvérisation air-assistée. Les méthodes décrites dans [23], [13] emploient une LES de type monophasique sans modéliser les termes de sous-maille qui apparaissent à cause de la présence de l'interface (approche de type DNS sous résolue).

La tentative de simulation LES de spray réalisée dans ce travail est phénoménologique et très simple. Elle combine la simulation des grandes échelles dans l'écoulement de gaz turbulent avec la simulation stochastique de la fragmentation du jet liquide. Nous considérerons que la pulvérisation primaire air-assistée à grands nombres de Reynolds et de Weber est un phénomène critique de type cascade, régie par l'hypothèse de symétrie d'échelle et de symétrie isotropique. Dans ce contexte, la structure aléatoire du liquide non-fragmenté est modélisée par les trajectoires spatiales de particules stochastiques gouvernées par ces symétries. Les mécanismes physiques de fragmentation proposés par les études expérimentales ( L. Raynal [77], P. Marmottant [58] M. Hong [39]) sont introduits dans cette modélisation stochastique de façon effective à l'aide de deux paramètres (le rapport des longueur d'onde associées aux instabilités de Rayleigh-Taylor et de Kelvin-Helmoltz et le transfert d'énergie cinétique du gaz vers le liquide). La statistique de cette structure tridimensionnelle conditionne les endroits de détachement de gouttes ainsi que l'écoulement de gaz par la probabilité de présence de liquide non-fragmenté au voisinage de l'injecteur. La dynamique lagrangienne des fragments formés autour du cœur liquide est donc modifiée par la présence de liquide non fragmenté. Ces fragments sont ensuite soumis à l'atomisation secondaire et à la coalescence toutes deux modélisées par une approche stochastique à travers les collisions entre gouttes.

Dans la première partie de ce manuscrit, nous présenterons les résultats expérimentaux concernant ces différentes phases et les caractéristiques en découlant. Les différentes approches numériques utilisées dans la littérature seront brièvement décrites. Puis nous présenterons la méthode que nous avons choisie d'appliquer et les conditions dans lesquelles il est possible de l'utiliser. Le formalisme associé ainsi que les équations découlant de cette approche seront présentés dans le chapitre 2.

Dans la troisième partie, nous présenterons la méthode de type LES et les modèles utilisés ainsi que les résultats obtenus pour la phase gazeuse. Ces résultats seront comparés à des résultats expérimentaux afin de valider notre code de calcul.

La phase liquide sera modélisée en deux parties : la phase d'atomisation primaire et la phase d'atomisation secondaire. Nous appliquerons dans le chapitre 4 le formalisme décrit dans le chapitre 2 à la modélisation de la phase d'atomisation primaire. Les résultats obtenus avec le modèle seront comparés aux résultats expérimentaux. Dans le chapitre 5, nous décrirons le modèle choisi pour simuler la phase d'atomisation secondaire.

Finalement, nous présenterons une comparaison de nos résultats de simulation des grandes échelles avec les résultats expérimentaux. Ces comparaisons porteront sur l'évolution des échelles du liquide dans l'écoulement ainsi que sur les caractéristiques globales du spray (angle, champ de vitesse du liquide ...).

Pour démontrer la faisabilité de cette approche dans les conditions de spray de type Diesel, nous présenterons dans l'annexe A des résultats de simulations dans une configuration où le liquide est injecté à forte vitesse dans un milieu gazeux au repos.

# Chapitre 1 L'Atomisation

Le phénomène d'atomisation se produit lors de l'interaction d'un jet liquide en mouvement et d'un gaz environnant. Cela aboutit à la fragmentation du liquide sous forme de gouttelettes ou de fragments. Il existe plusieurs situations dans lesquelles ce phénomène se réalise. Par exemple, lorsque le jet liquide est injecté à forte vitesse dans un milieu au repos. Ces conditions apparaissent dans les moteurs de type diesel. Un autre exemple est l'injection d'un jet liquide à faible vitesse entouré d'un écoulement gazeux à grande vitesse. Il s'agit alors d'un jet assisté par air ou air-assisté. Dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur ce type de spray.

D'après les visualisations expérimentales, durant l'atomisation du jet liquide, on distingue deux phases (sur la figure 1.1, un schéma distinguant ces phases est représenté pour le cas de la pulvérisation air-assistée). La première met en jeu une zone de liquide non fragmenté appelée cœur liquide. A la périphérie de celui-ci, on trouve plusieurs types de fragments détachés. Ceux-ci se présentent sous différentes formes géométriques : des filaments ou des gouttes par exemple.

Le cœur liquide est défini comme la zone de l'écoulement dans laquelle la fraction massique de liquide conserve une valeur maximale sans discontinuité [41].

Les fragments détachés sont ensuite soumis à différents mécanismes physiques qui peuvent aboutir à une réduction (fragmentation, évaporation) ou à une augmentation (coalescence) de leurs tailles. La phase durant laquelle se produisent ces différents mécanismes est appelée phase d'atomisation secondaire. De nombreux paramètres peuvent intervenir sur ces deux étapes d'atomisation, traduisant l'action de mécanismes différents : par exemple, les vitesses des deux phases, leurs masses volumiques, leurs viscosités, la tension de surface du liquide ou les caractéristiques géométriques de l'injecteur ... Pour étudier l'influence de ces mécanismes sur le spray, des nombres sans dimension ont été construits. Ils correspondent à des critères permettant de déterminer l'influence relative des phénomènes mis en jeu. Dans une première partie de ce chapitre, nous présenterons ces critères. Ensuite, nous décrirons les résultats expérimentaux concernant les deux phases d'atomisation ainsi que les échelles typiques associées à la phase liquide qui en sont déduites. Nous présenterons également les différentes approches utilisées

pour prédire le phénomène d'atomisation. Puis nous introduirons l'approche que nous avons choisie d'utiliser dans ce travail.

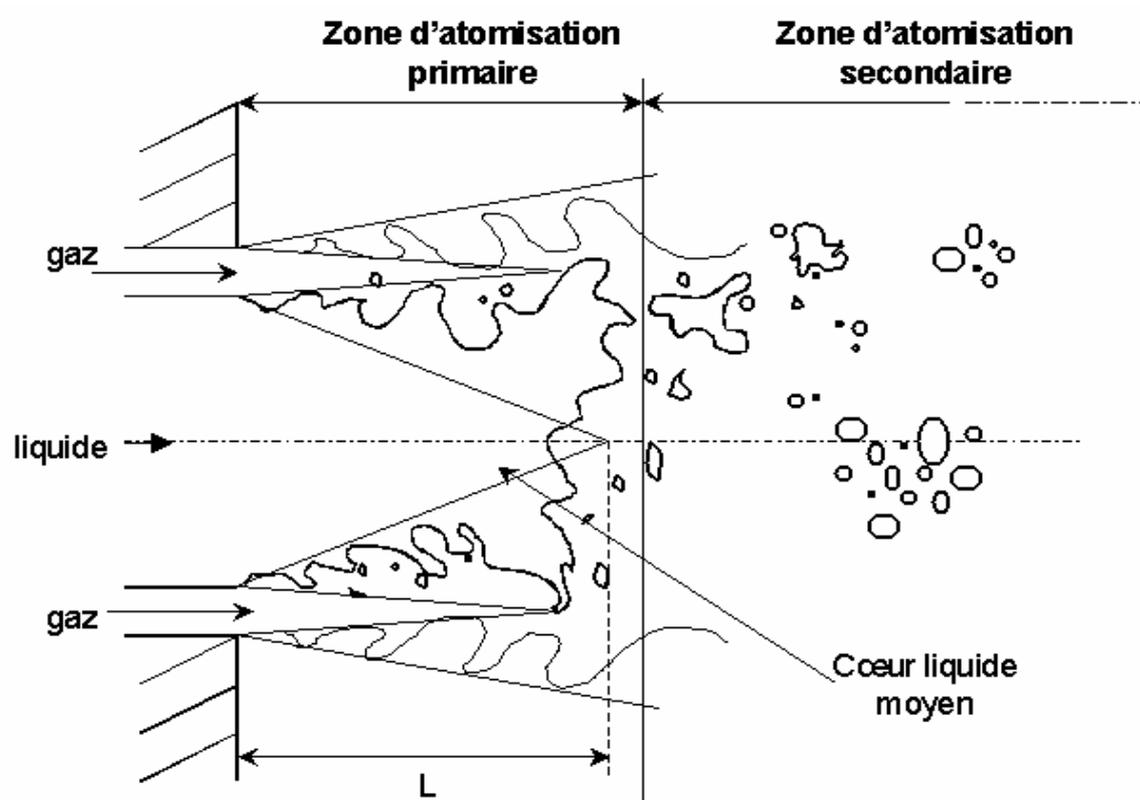


Fig 1.1. Schéma des zones d'atomisation primaire et secondaire dans un jet assisté par gaz [41].

## 1.1 Critères

### Nombre de Reynolds $Re$

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il traduit le rapport du transfert par convection et par diffusion de la quantité de mouvement. Ce nombre s'exprime par :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1)$$

où  $U$  est une échelle de vitesse,  $L$  une échelle de longueur et  $\nu$  une viscosité cinématique.

Il peut être associé à un écoulement, à un spray, à une goutte ou à un fragment selon les échelles prises en compte dans son expression. Par exemple, pour une goutte, le nombre de Reynolds gazeux peut être exprimé par :

$$\text{Re}_g = \frac{|u_p - u_g|L}{\nu_g} \quad (1.2)$$

où  $\nu_g$  est la viscosité du gaz,  $u_p$  et  $u_g$  sont respectivement les vitesses de la goutte et du gaz.

Ce nombre de Reynolds correspond au rapport des forces aérodynamiques externes sur les forces de viscosité de la goutte. Il caractérise l'écoulement gazeux autour de la goutte.

On peut également définir le nombre de Reynolds d'un jet de gaz :

$$\text{Re} = \frac{u_g D_g}{\nu_g} \quad (1.3)$$

où  $u_g$  est la vitesse débitante du gaz et  $D_g$  le diamètre de l'injecteur.

Dans le cas d'un écoulement turbulent développé caractérisé par un grand nombre de Reynolds, le comportement des grandes échelles n'est pas influencé par la viscosité. En revanche, aux petites échelles, il existe un équilibre entre les forces de viscosité et les forces d'inertie. A.N. Kolmogorov [46] a introduit le nombre de Reynolds turbulent :

$$\text{Re}_t = \frac{u_{l_{tur}} l_{tur}}{\nu} \quad (1.4)$$

où  $l_{tur}$  est l'échelle typique turbulente et  $u_{l_{tur}}$  est l'incrément de vitesse entre deux points distants de  $l_{tur}$ . La valeur critique de ce nombre est obtenue lorsque l'énergie cinétique est dissipée sous forme d'énergie interne. Elle correspond à une valeur de l'ordre de 1, définissant l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ .

### **Nombre de Weber We**

Le nombre de Weber représente le rapport des forces d'inertie et de tension de surface. Les forces d'inertie ou aérodynamiques sont déstabilisatrices, c'est à dire qu'elles favorisent la fragmentation d'un élément liquide. Au contraire, les forces de tension de surface sont stabilisatrices, ce qui signifie qu'elles s'opposent à la fragmentation de l'élément liquide. Le

nombre de Weber mesure la compétition entre ces deux actions exercées sur un élément liquide, sa forme générale est :

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \quad (1.5)$$

où  $\rho$  est une masse volumique,  $U$  est une échelle de vitesse,  $L$  est une échelle de longueur et  $\sigma$  est la tension de surface. Selon le mécanisme déstabilisateur considéré, ces échelles peuvent être différentes. Par exemple, il est possible de définir le nombre de Weber gazeux pour une goutte sous la forme :

$$We_g = \frac{\rho_g (u_g - u_p)^2 r_p}{\sigma} \quad (1.6)$$

Dans ce cas, la force aérodynamique exercée fait intervenir la différence des vitesses entre la goutte et le gaz environnant,  $u_p$  et  $u_g$  respectivement. L'écoulement de gaz étant déstabilisateur, on utilise la masse volumique du gaz  $\rho_g$  dans l'expression de ce nombre. L'échelle de longueur  $L$  caractérise l'élément liquide. Dans le cas d'une goutte sphérique, il s'agit de son rayon  $r_p$  ou de son diamètre.

Il est également possible de définir le nombre de Weber collisionnel  $We_{rel}$ . Il caractérise la collision entre deux gouttes de même rayon  $r$ . Cette fois, l'énergie déstabilisatrice est apportée par la différence de vitesses entre les deux gouttes entrant en collision. Ce nombre de Weber est donc construit à partir de la différence des vitesses entre les deux éléments liquides  $u_{p1}$  et  $u_{p2}$ , leur masse volumique  $\rho_l$  et la tension de surface du liquide  $\sigma$ . L'échelle caractéristique est le rayon des deux gouttelettes  $r$ . Ce nombre de Weber s'exprime par la relation :

$$We_{rel} = \frac{\rho_l (u_{p1} - u_{p2})^2 2r}{\sigma} \quad (1.7)$$

Dans une turbulence développée à grand nombre de Reynolds, caractérisée par l'échelle intégrale  $L_{tur}$ , quand la goutte est d'une taille supérieure à la taille dissipative,  $L_{tur} > r_p \approx l_{tur} > \eta$ , les incréments spatiaux de vitesse la déstabilisent et provoquent sa rupture. On peut définir le nombre de Weber turbulent  $We_t$  sous la forme :

$$We_t = \frac{\rho_g \langle u_{l_{tur}}^2 \rangle l_{tur}}{\sigma} \quad (1.8)$$

où  $\langle u_{l_{tur}}^2 \rangle$  est la valeur moyenne du carré de l'incrément de vitesse entre deux points distants de  $r_p \approx l_{tur}$ . La même hypothèse que pour le nombre de Reynolds peut être introduite pour le nombre de Weber turbulent  $We_t$ . L'analogie réside dans la possibilité de déterminer les caractéristiques des grandes échelles sans faire intervenir la tension de surface. En revanche, aux petites échelles, il est très important car il impose l'échelle typique moyenne associée à la phase liquide. Cette idée a été proposée par M. Gorokhovski 1997 [32] et R. Borghi et al. 1998 [96] indépendamment.

### **Nombre de Ohnesorge Oh**

Le nombre d'Ohnesorge représente le rapport de la force de viscosité interne à la goutte et de la force de tension de surface, il s'exprime par :

$$Oh = \frac{\sqrt{We_t}}{Re_l} \quad (1.9)$$

où  $Re_l = \frac{|u_p - u_g| L}{\nu_l}$ ,  $We_t = \frac{\rho_l (u_{p1} - u_{p2})^2 L}{\sigma_l}$  et  $\nu_l$  est la viscosité du liquide

### **Rapport des flux de quantité de mouvement des deux phases**

Le rapport  $M$  représente le rapport des flux de quantité de mouvement surfaciques des deux phases. Dans les jets assistés par air, c'est un paramètre très important qui exprime le potentiel de la phase gazeuse à atomiser la phase liquide. Il s'exprime ainsi :

$$M = \frac{\rho_g u_g^2}{\rho_l u_l^2} \quad (1.10)$$

### Rapport des flux de masse des deux phases

Le rapport des flux de masses des deux phases est également un paramètre important. Il est noté  $m$  et est exprimé par :

$$m = \frac{\rho_g u_g (D_g^2 - D_l^2)}{\rho_l u_l D_l^2} \quad (1.11)$$

où  $D_l$  est le diamètre du jet de liquide et  $u_l$  est la vitesse débitante du liquide.

### Nombre de cavitation

La cavitation peut également intervenir sur la fragmentation du jet, elle est caractérisée par le nombre de cavitation  $CN$  :

$$CN = \frac{\frac{1}{2} \rho_l u_l^2}{p_g - p_{\text{vap}}} \quad (1.12)$$

où  $p_{\text{vap}}$  est la pression de vapeur saturante à une température donnée.

Quand  $CN$  est inférieur à une valeur critique  $CN_{cr}$ , des poches de cavitation peuvent se former dans l'injecteur. Pour des nombres  $CN$  plus élevés, des structures de cavitation atteignent la sortie de l'injecteur (écoulement supercavitant) et peuvent affecter le spray de façon significative. Quand les bulles de cavitation arrivent à la sortie de l'injecteur, la surface effective de l'injecteur se réduit, alors que la vitesse d'injection augmente [65].

D'autres paramètres peuvent s'avérer nécessaires à la caractérisation du spray tels que le rapport des masses volumiques  $\rho_l / \rho_g$  ou le niveau de turbulence dans l'écoulement. Ce dernier est évalué par les quantités  $\frac{l_{tur}}{D_l}$  et  $\frac{\sqrt{k_{tur}}}{u_l}$  où  $k_{tur}$  est l'énergie cinétique turbulente.

## 1.2 Analyse des mécanismes d'atomisation primaire

### 1.2.1 Théorie des instabilités

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude de la zone d'atomisation primaire à travers le développement d'instabilités liquide/gaz.

Ce type d'approche consiste à écrire les équations gouvernant l'écoulement pour une variable perturbée. Cette méthode permet ensuite de déduire, par une étude de stabilité, les grandeurs caractéristiques de l'instabilité qui se développe. Cette théorie est basée sur les travaux originaux de J.W.S. Rayleigh 1878 [76], J. Plateau 1873 [74] ou C. Weber 1931 [105]. Différents ouvrages reprennent la théorie des instabilités appliquées à la mécanique des fluides comme par exemple S. Chandrasekhar 1961 [15].

Dans le cas d'un écoulement liquide/gaz, on suppose qu'il existe un déplacement infinitésimal de l'interface liquide/gaz sous la forme :

$$\eta = \eta_0 \exp(i\underline{\omega}t - i\underline{k}z) \quad (1.13)$$

Dans cette expression,  $\eta_0$  est l'amplitude de la perturbation initiale. Les grandeurs  $\underline{\omega}$  et  $\underline{k}$  sont complexes et sont définies par :

$$\underline{k} = k + ik_i$$

$$\underline{\omega} = \omega + i\omega_i$$

Les parties réelles sont des grandeurs caractéristiques de l'instabilité. En effet,  $k$  est le nombre d'onde et peut être relié à la longueur d'onde  $\lambda$  avec  $\lambda = 2\pi/k$  et  $\omega$  est la pulsation qui peut être reliée à la fréquence  $f = \omega/2\pi$ . Les parties imaginaires décrivent les croissances des perturbations spatiale pour  $k_i$  et temporelle pour  $\omega_i$ .

Le déplacement infinitésimal de l'interface engendre des perturbations de pression et de vitesse.

Ces perturbations sont analysées sous la forme d'ondes caractérisées par  $\underline{k}$  et  $\underline{\omega}$ .

Selon la configuration choisie, on écrit les équations qui régissent le mouvement de l'écoulement en introduisant la perturbation infinitésimale pour chacune des variables qui nous intéressent. Par exemple, si la vitesse est notée  $u$ , elle s'exprime comme :

$$u = U + \delta u \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \delta u = \delta u_0 \exp(i\omega t - ikz)$$

Chacune des variables impliquées est alors exprimée sous cette forme et introduite dans les équations. Cela permet d'obtenir une relation entre  $\underline{k}$  et  $\underline{\omega}$  appelée relation de dispersion. Selon les conditions limites et la configuration du problème, cette relation prend des formes différentes. Par exemple, lorsque l'on fait intervenir la tension de surface, on utilise la relation de Laplace qui s'exprime sur une surface  $dS$  par :

$$dP = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.15)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les deux rayons de courbure principaux de la surface  $dS$  et  $dP$  est la différence de pression exercée sur l'interface.

Il existe alors plusieurs façons d'effectuer l'analyse de stabilité : soit en étudiant la croissance spatiale de la perturbation, soit en étudiant sa croissance temporelle. Si l'on s'intéresse à la croissance spatiale, il faut considérer le vecteur d'onde  $\underline{k}$  complexe où  $k_i$  est le taux de croissance spatial des oscillations.

Dans ce cas,  $\underline{\omega}$  est purement réel, soit  $\omega_i = 0$ , signifiant que l'amplitude en un point de l'espace oscille mais ne s'amplifie pas. La relation de dispersion donne donc  $k_i(\omega)$  et  $k(\omega)$ . La courbe  $k_i(\omega)$  admet un maximum  $\omega_M$  qui permet d'obtenir le mode  $(k(\omega_M), \omega_M)$  le plus amplifié, c'est celui qui est sélectionné par l'instabilité.

Dans le cas d'une croissance temporelle des oscillations, on suppose que l'oscillation ne croît pas selon l'espace. Son nombre d'onde est  $\underline{k} = k$ , c'est-à-dire  $k_i = 0$ . L'amplitude de la perturbation oscille et croît dans le temps, ce qui signifie que  $\underline{\omega} = \omega + i\omega_i$ . Le mode  $(k, \omega)$  sélectionné est celui qui maximise  $\omega_i(k)$ .

Selon les conditions initiales du problème, l'équation de dispersion prend des formes différentes. Cela aboutit à une instabilité de type différent. Par exemple, si  $\delta\rho = 0$ , on parle d'instabilité de type Kelvin Helmholtz due au mouvement relatif dans un même fluide. Dans le cas où  $\delta u = 0$ , on parle d'instabilité de type Rayleigh Taylor induite par la différence de masses volumiques entre les deux fluides ou l'accélération de l'un par rapport à l'autre.

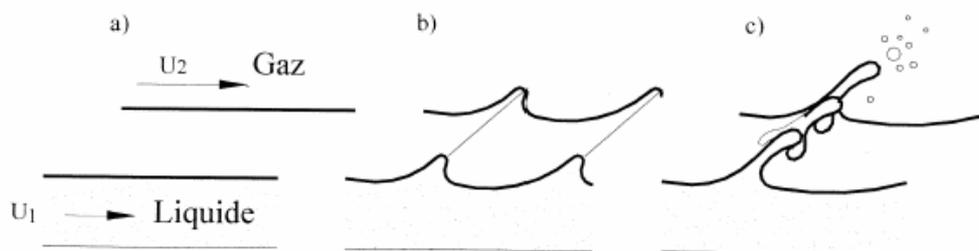
Des auteurs se sont inspirés de ce type de raisonnement pour construire des modèles d'atomisation. On peut, par exemple, associer l'atomisation des fragments liquides au développement d'une instabilité à leur surface [80]. Les échelles temporelle et spatiale introduites

dans le modèle sont alors déduites de la théorie linéaire des instabilités. Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus dans le cas de jets assistés par air.

### 1.2.2 Résultats expérimentaux

Le mécanisme qui conduit à la déstabilisation du liquide dans le cadre de l'atomisation assistée par air a été étudié par plusieurs auteurs. Les études effectuées récemment au LEGI et les résultats de L. Raynal 1997 [77], E. Villermaux 1998 [101], P. Marmottant 2001 [58], M. Hong 2003 [39], C. M. Varga *et al.* 2003 [100], M. Lalo & A. Cartelier 2006 [51] permettent de comprendre quel mécanisme ou quel type d'instabilité est responsable de la fragmentation du jet liquide.

D'après M. Hong 2003 [39], l'atomisation est contrôlée par un scénario à deux phases (Fig 1.2).



**Fig 1.2.** Mécanisme de brisure primaire : a. écoulement liquide/gaz coaxial, b. instabilité primaire, c. instabilité secondaire, M. Hong [39].

La première phase est attribuée au développement d'une instabilité dite primaire. Celle-ci est due à la différence des profils de vitesse entre le gaz et le liquide. Elle conduit à une ondulation de la surface liquide et est appelée instabilité de cisaillement ou de Kelvin Helmholtz. Cette instabilité est donc fortement dépendante des profils du liquide et du gaz, et donc de la couche limite qui se développe dans chacun d'eux sur les parois de l'injecteur.

Dans le même temps, L. Raynal 1997 [77] et P. Marmottant 2001 [59] ont montré que dans la configuration assistée par air, la couche limite gazeuse formée dans l'injecteur par l'écoulement à grande vitesse domine le développement de cette instabilité. Ainsi, l'épaisseur de vortécité du gaz  $\delta_g$  est un paramètre important pour la caractériser. Suite à l'analyse de E. Villermaux 1998 [101] d'instabilités à grands nombres de Weber et de Froude et les mesures de L. Raynal 1997 [77], la dépendance du mode le plus amplifié de l'instabilité de Kelvin Helmholtz envers  $\delta_g$  est la suivante :

$$\lambda_{KH} \approx C_{KH} \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} \delta_g \quad (1.16)$$

où  $C_{KH} = 2$  pour les injecteurs axisymétriques (Marmottant [58]) et  $\delta_g$  est donnée par une loi du type Blasius pour une couche limite laminaire (dans le cas turbulent,  $\delta_g$  représente l'épaisseur de sous-couche visqueuse) :

$$\delta_g = C_\delta \frac{D_g - D_l}{2\sqrt{\text{Re}_g}} \quad (1.17)$$

Plusieurs valeurs de  $C_\delta$  ont été mesurées :

- 3.48 par L. Raynal [77] pour un jet axisymétrique.
- 5.6 par P. Marmottant [58] pour un jet axisymétrique.
- 6.03 par M. Hong [39] pour un jet plan.
- 3.56 par M. Lalo et *al.* [51] pour un jet axisymétrique.

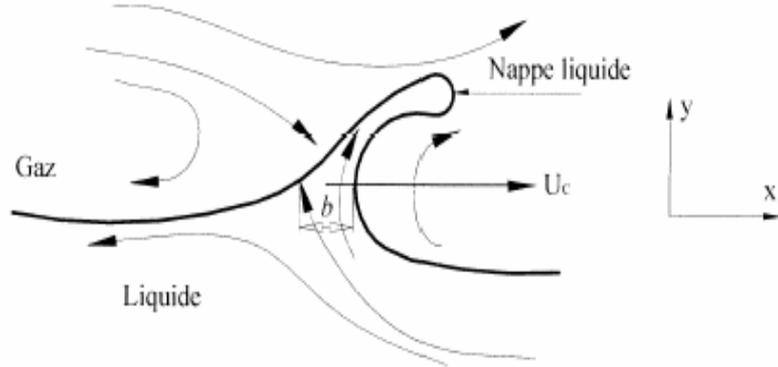
Le nombre de Reynolds  $\text{Re}_g$  est ici basé sur l'épaisseur d'injection du gaz, sa vitesse et sa vorticité :

$$\text{Re}_g = \frac{u_g (D_g - D_l)}{\nu_g} \quad (1.18)$$

La deuxième phase de développement de l'atomisation primaire est associée à l'instabilité de Rayleigh Taylor. Elle se traduit par la naissance de filaments dans la direction transverse à l'écoulement qui sont ensuite étirés et fragmentés. Comme représenté sur la figure 1.2, l'instabilité de Rayleigh Taylor se développe suite à l'évolution de l'instabilité de Kelvin Helmholtz. La longueur d'onde la plus amplifiée qui lui est associée s'exprime par (1.16). Afin de déterminer cette caractéristique pour l'instabilité de Rayleigh Taylor, considérons le cas de deux fluides uniformes non visqueux de masse volumique constante séparés par une frontière horizontale. La forme générale de la longueur d'onde du mode le plus amplifié de l'instabilité de Rayleigh Taylor est donnée par [15] :

$$\lambda_{RT} = 2\pi \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho_l a}} \quad (1.19)$$

où  $a$  est l'accélération du filament liquide.



**Fig 1.3.** Mécanisme de formation des filaments liquides, M. Hong [39].

Considérons la nappe de liquide représentée sur la figure 1.3.

Hong [39] et Varga [100] proposent de relier l'accélération dans (1.19) à la force aérodynamique exercée sur la nappe liquide  $F$  :

$$a = \frac{F}{m_n} \quad (1.20)$$

où la force exercée est prise sous la forme d'une force de traînée :

$$F = \frac{1}{2} C_d \rho_g (u_g - u_c)^2 A_n \quad (1.21)$$

Dans cette expression  $C_d$  est le coefficient de traînée de la nappe qui varie entre 1.5 et 2.7 ([72]), et a pour valeur moyenne 2 (Varga [100]),  $A_n$  est l'aire liquide normale à la force aérodynamique et  $u_c$  est la vitesse de la nappe égale à la vitesse de l'interface calculée à partir de l'égalité des pressions dynamiques (Dimotakis [24]) :

$$\rho_g (u_g - u_c)^2 = \rho_l (u_c - u_l)^2 \quad (1.22)$$

et s'exprime comme :

$$u_c = \frac{\sqrt{\rho_l} u_l + \sqrt{\rho_g} u_g}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_g}} \quad (1.23)$$

En notant  $b$  l'épaisseur initiale de la nappe de liquide, la masse de liquide accélérée étant  $m_n = \rho_l A_n b$ , on peut écrire :

$$a = \frac{F}{m_n} = \frac{1}{2} \frac{C_d}{b} \frac{\rho_g}{\rho_l} (u_g - u_c)^2 \quad (1.24)$$

Dans le cadre du mécanisme proposé sur la figure 1.3, l'épaisseur initiale de la nappe qui va se déstabiliser sous forme de filaments est proportionnelle à la longueur d'onde associée à l'instabilité primaire  $\lambda_{KH}$ . M. Hong [39] propose

$$b = \alpha_n \lambda_{KH} \quad (1.25)$$

On obtient finalement :

$$\lambda_{RT} = 2\pi \left( \frac{6\sigma\alpha_n\delta_g C_{KH}}{\rho_g C_d} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/4} \frac{1}{(u_g - u_c)} = 2\pi \left( \frac{6\alpha_n C_{KH}}{C_d} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/4} \delta_g We_{\delta_g}^{-1/2} \quad (1.26)$$

$$\text{avec } We_{\delta_g} = \frac{\rho_g (u_g - u_c)^2 \delta_g}{\sigma}$$

M. Hong et C.M. Varga et *al.* ont confronté ce modèle à l'expérience et déterminé les valeurs de  $\alpha_n$  dans leurs configurations. C.M. Varga et *al.* ont obtenu une valeur de l'ordre de 0.1 [100] et M. Hong de l'ordre de 0.04 [39].

Le temps caractéristique associé à la croissance de l'instabilité de Rayleigh Taylor peut ensuite être déterminé à partir de son expression générale [15] :

$$\omega^2 = \frac{k[(\rho_l - \rho_g)g - k^2\sigma]}{\rho_l + \rho_g} \quad (1.27)$$

en utilisant l'expression du nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda_{RT}$  et pour  $\rho_l \gg \rho_g$ , l'expression (1.27) prend la forme [100] :

$$\omega_{RT} = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_l}{\sigma}\right)^{1/4} a^{3/4} \quad (1.28)$$

finalemt, en utilisant les expressions (1.24) et (1.26), on obtient, pour  $u_g \gg u_l$  :

$$\omega_{RT} = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_l}{\sigma}\right)^{1/4} \left(\frac{C_d \rho_g u_g^2}{2\alpha_n \lambda_{KH} \rho_l}\right)^{3/4} \quad (1.29)$$

Dans les conditions de l'expérience de J.C. Lasheras et *al.* [52], cette grandeur est de l'ordre de  $10^{-6}$  s.

### 1.2.3 Longueur intacte

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus sur la longueur du cœur liquide, notée  $L$ , appelée également longueur intacte. E.J. Hopfinger 2001 [41] et E. Villermaux 1998 [101] proposent en première approximation de considérer le cœur liquide comme un cône (figure 1.1). La longueur  $L$  de ce cône est alors obtenue par conservation des flux de masse liquide :

$$m_s \frac{\pi D_l^2}{4} L = \rho_l u_l \frac{\pi D_l^2}{4} \quad (1.30)$$

où  $m_s$  est le flux de masse liquide par unité de surface.

L'approche de H. Rehab et *al.* 1997 [79] et J.C. Lasheras et *al.* 1998 [52] consiste à considérer qu'à grand nombre de Reynolds du gaz, l'arrachement du liquide ne dépend ni de la tension de surface, ni de la viscosité. Dans ce cas, la vitesse d'entraînement  $u_e$  du liquide par le gaz est régie par la continuité des pressions dynamiques à l'interface liquide/gaz :

$$\rho_l u_e^2 = C_e \rho_g u_g'^2 \quad (1.31)$$

où  $u'_g$  est la vitesse turbulente dans la couche de mélange entre le gaz et le liquide. Celle-ci est définie à partir des vitesses débitantes du gaz  $u_g$  et du liquide  $u_l$  par  $u'_g \approx 0.17(u_g - u_l)$  et  $C_e$  est une constante égale à 0.25 [79].

En utilisant  $m_s = \rho_l u_e$  on obtient :

$$L/D_l = 6 / \sqrt{M} \left( 1 - u_l/u_g \right) \quad (1.32)$$

Dans le cas où  $u_g$  est largement supérieur à  $u_l$ , cette expression devient (J.C. Lasheras et al. [52]) :

$$L/D_l = 6/\sqrt{M} \quad (1.33)$$

Par ailleurs, des résultats expérimentaux en fonction des nombres de Weber et de Reynolds ont également été obtenus par WHO. Mayer et al. 2004 [60] et H. Eroglu et al. 1991 [27]. Ces résultats montrent une forte dépendance envers ces paramètres et les auteurs proposent des corrélations expérimentales. Les nombres de Weber et de Reynolds utilisés s'expriment par :

$$We = \frac{\rho_g (u_g - u_l)^2 D_l}{2\sigma} \quad \text{et} \quad Re = \frac{u_l D_l}{\nu_l}$$

Les différents résultats expérimentaux sont obtenus à partir d'images moyennes. Cela signifie qu'ils permettent d'obtenir une expression de la longueur moyenne nécessaire au détachement du premier fragment sur l'axe du jet liquide. Les expressions obtenues expérimentalement sont regroupées dans le tableau 1.1.

Expérience	Phase gazeuse	Phase liquide	$D_l$ (m)	$D_g$ (m)	Corrélations expérimentales
H. Eroglu et al. [27]	air	eau	0.000971	0.01036	$\frac{L}{D_l} = 0.66 \left( \frac{We}{2} \right)^{0.4} Re^{0.6}$
WHO Mayer et al. [60]	azote	éthanol	0.0022	0.01	$\frac{L}{D_l} = 1.7 \left( \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0.18} \ln \left( \frac{Re_l}{\sqrt{We}} \right) - 0.16$
J.C. Lashreas et al. [52]	air	eau	0.0038	0.0056	$\frac{L}{D_l} = \frac{6}{\sqrt{M}}$

Tab 1.1 Synthèse des résultats expérimentaux sur la longueur intacte dans une configuration assistée par air.

### 1.2.4 Angle de spray

L'angle du spray est également un paramètre important pour caractériser le spray. Le demi-angle noté  $\theta$  est défini comme l'indique la figure 1.4 :

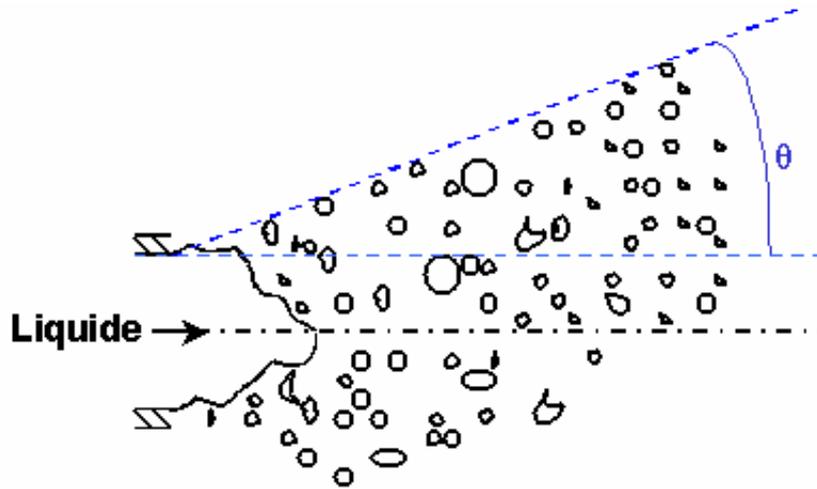


Fig. 1.4. Représentation schématique du demi-angle du spray.

E. Villermaux (1998) propose l'approximation suivante pour  $\theta$  [101] :

$$\theta \approx \left[ 45^\circ - \arctan\left(\frac{M^{\frac{1}{2}}}{6}\right) \right] \quad (1.34)$$

Cette approximation est valable uniquement pour les faibles valeurs de  $M$ , le cas limite étant  $M \approx 36$ . En effet, pour des valeurs supérieures de ce paramètre, le demi-angle du spray devient nul puis négatif. L'expression (1.34) n'est donc pas valable pour l'expérience de J.C. Lasheras et al. 1998 [52] dans laquelle les valeurs de  $M$  sont comprises entre 79 et 1426.

Par ailleurs, les travaux expérimentaux de L. Raynal 1997 [77] mettent en évidence un angle de spray de l'ordre de  $50^\circ$  par rapport au cœur liquide. Cet angle varie très peu en fonction du rapport  $M$ . Ces résultats sont confirmés par G. Boisdron 2006 [15] qui note une dépendance de l'angle par rapport au nombre de Weber  $We_b$  défini par :

$$We_b = \frac{\rho_g u_g^2 D_l}{\sigma}$$

Dans le cas où la vitesse du gaz est fixée à  $140 \text{ m/s}$ , comme dans l'expérience [51], les résultats obtenus par G. Boisdron [15] donnent un demi-angle de l'ordre de  $30^\circ$ .

J.C. Lasheras et *al.* 2000 [53] ont également proposé une expression pour le demi-angle de spray qui diminue avec la valeur de  $M$  sous la forme :

$$\theta \approx \left[ 45^\circ - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{M^{\frac{1}{2}}}{6} \right) \right] \quad (1.35)$$

L'expression (1.35) n'impose donc aucune restriction sur les valeurs de  $M$ .

### 1.3 Analyse des mécanismes d'atomisation secondaire

Nous allons maintenant présenter les résultats expérimentaux concernant la phase d'atomisation secondaire. Pour caractériser les fragments liquides dans le champ lointain, les auteurs ont mesuré l'évolution d'une échelle moyenne appelé diamètre de Sauter. Nous présenterons dans un premier temps les mesures de cette variable réalisées par J.C. Lasheras et *al.* 1998 [52]. Puis, nous décrirons les différents mécanismes qui peuvent être responsables de son évolution et les différentes échelles typiques en résultant.

#### 1.3.1 Résultats expérimentaux

Dans l'étude de Lasheras et *al.* [52], l'évolution du diamètre de Sauter  $D_{32}$  a été mesurée en fonction de la distance axiale par rapport à l'injecteur. Son expression est :

$$D_{32} = \frac{\int_0^{+\infty} (2r)^3 f(r) dr}{\int_0^{+\infty} (2r)^2 f(r) dr}$$

Dans cette expérience, le liquide (de l'eau) est injecté par un orifice circulaire de diamètre  $D_l = 0.0038 \text{ m}$  à une vitesse variant entre  $0.13 \text{ m/s}$  et  $0.55 \text{ m/s}$ . Le gaz (de l'air) est injecté à une distance de l'axe du jet égale à  $D_g/2$  où  $D_g = 0.0056 \text{ m}$ . La vitesse débitante du gaz varie entre  $119 \text{ m/s}$  et  $140 \text{ m/s}$ . Les valeurs de  $M$  sont donc comprises entre 1426 et 79, celles du nombre de Weber entre 1270 et 1262 et celles du nombre de Reynolds  $Re_g$  entre 783 et 3315.

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 1.5 et 1.6. Tout d'abord, on remarque que la première valeur mesurée se situe à  $x/D_g = 10$ . Cette valeur varie en fonction des vitesses débitantes du liquide et du gaz :

- A vitesse débitante de gaz constante, plus la vitesse débitante de liquide est grande, plus la valeur du  $D_{32}$  est grande, et ceci sur toute la distance sur l'axe.
- A vitesse débitante de liquide constante, plus la vitesse débitante de gaz est faible, plus la valeur du  $D_{32}$  est grande, et ceci sur toute la distance sur l'axe.

Les fortes valeurs du rapport  $M$  favorisent donc la fragmentation.

L'évolution du  $D_{32}$  en fonction de la distance axiale fait apparaître également un comportement spécifique :

- Pour  $10 < x/D_g < 20$ , on note une décroissance du  $D_{32}$  vers une valeur minimale.
- Pour  $20 < x/D_g < 80$ , le  $D_{32}$  augmente.

Ces conclusions doivent être reliées à un ou plusieurs mécanismes physiques. Nous parlerons ici d'atomisation secondaire pour tous les mécanismes physiques faisant intervenir les fragments détachés du cœur liquide. Nous présenterons donc différents mécanismes pouvant aboutir à la fragmentation ou à la coalescence des éléments liquides, puis nous montrerons ceux d'entre eux qui dominant dans cette expérience. Ceci nous permettra de proposer des modèles pour décrire ce type de spray et d'évaluer la validité de nos résultats.

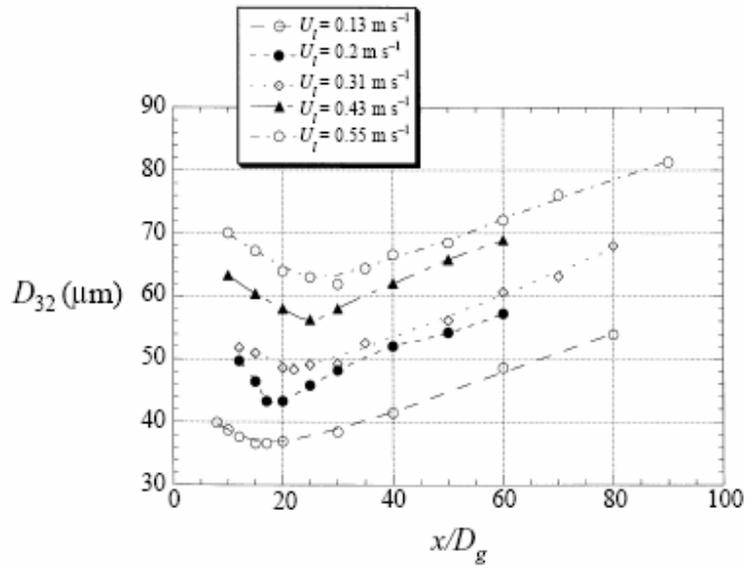


Fig 1.5. Evolution axiale du  $D_{32}$  pour différentes vitesses de liquide et une vitesse de gaz constante [52].

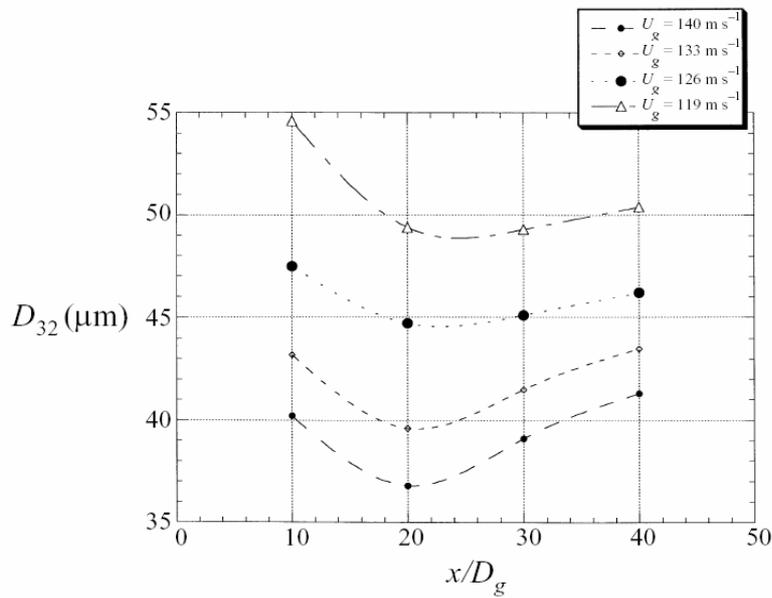


Fig 1.6. Evolution axiale du  $D_{32}$  pour différentes vitesses de liquide et une vitesse de gaz constante [52].

### 1.3.2 Différents mécanismes d'atomisation secondaire

Comme nous l'avons vu précédemment, plusieurs auteurs se sont intéressés aux mécanismes qui provoquent la formation de fragments détachés du cœur liquide. Plus particulièrement, certains ont cherché à prédire les échelles caractéristiques de taille et de vitesse qui leur sont associés. Ainsi P. Marmottant [58], M. Hong [39] et C.M. Varga et *al.* [100] considèrent que les gouttes sont de tailles proportionnelles à celles des filaments qui se forment. Cependant, l'évolution du  $D_{32}$  en fonction de la distance axiale mesurée par J.C. Lasheras et *al.* [52] semble montrer que d'autres mécanismes interviennent. De nombreux processus secondaires peuvent influencer sur l'évolution des échelles de longueur caractéristique dans l'écoulement diphasique comme l'indique E.J. Hopfinger 2001 [41] : la brisure par cisaillement, la brisure par la turbulence du gaz et la brisure par collision.

### Brisure par cisaillement

Les forces aérodynamiques étant déstabilisatrices et les forces de tension de surface ayant tendance à maintenir la goutte ou le fragment « compact », ces conditions peuvent aboutir à la fragmentation du liquide. On introduit donc généralement pour quantifier ce phénomène le nombre de Weber dit gazeux basé sur ces forces :

$$We_g = \frac{\rho_g (u_g - u_p)^2 r_p}{\sigma} \quad (1.36)$$

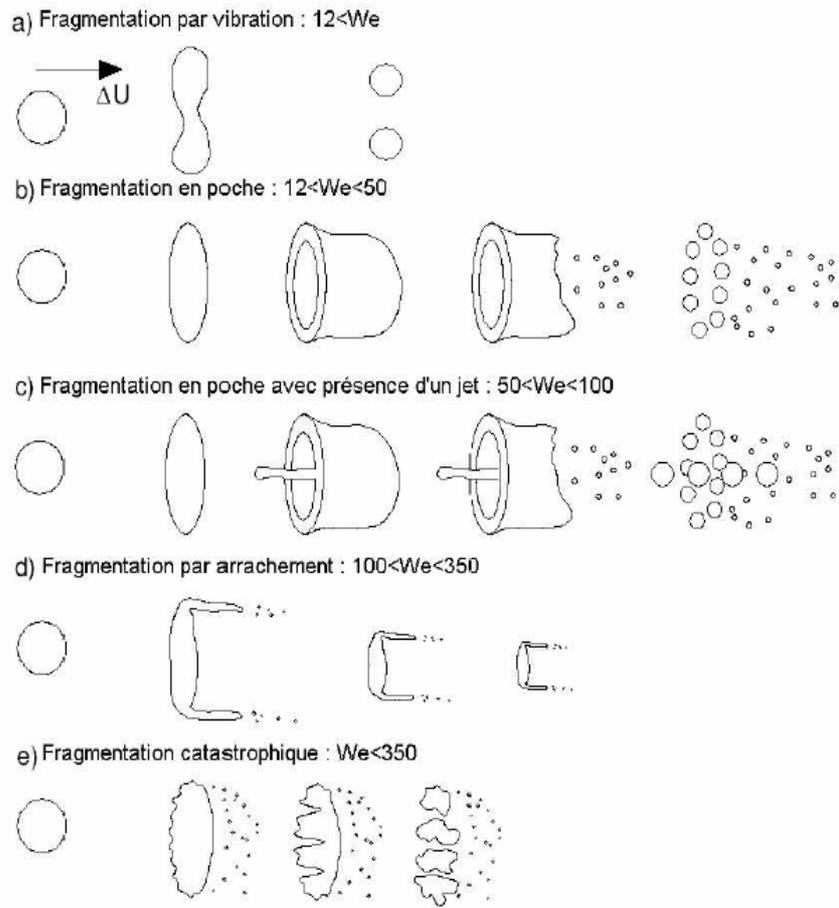
Dans ces expressions,  $u_p$  et  $r_p$  sont respectivement les vitesse et rayon des gouttes.

Ce nombre permet une classification des différents régimes d'atomisation comme indiqués sur la figure 1.7 :

- pour  $12 < We_g$ , on parle de « vibrational break-up » ou de régime de déformation. Ce mode n'est pas réellement un mode de rupture. Il correspond à une déformation de la goutte qui résulte de la pression dynamique s'appliquant sur la goutte et la force de tension de surface de celle-ci. Lorsque la vitesse du gaz environnant augmente, la pression dynamique s'appliquant sur la goutte croît et tend à la déformer. La courbure de la goutte augmente à son tour ce qui se traduit par l'amplification de la tension superficielle.
- Pour  $12 < We_g < 50$ , on parle de « bag break-up ». Ce régime apparaît lorsque la tension de surface ne compense plus la pression dynamique appliquée sur la surface de la goutte. La goutte se creuse pour former un sac qui s'étire dans le sens de l'écoulement. Sous l'effet des

perturbations de l'écoulement, le sac se perce conduisant peu à peu à sa désintégration en de fines gouttelettes.

- Pour  $50 < We_g < 100$ , on parle de « jet and bag break up », un jet se forme au centre en plus du « bag break up » et se brise plus tard.
- Pour  $100 < We_g < 350$ , on parle de « shear break-up », ou régime de rupture par cisaillement ou encore régime d'étirement. Il existe deux théories expliquant ce régime. La première (S. Hwang et *al.* 1996 [43]) suppose que la désintégration du fragment liquide est due à l'arrachage par la couche limite qui se forme à la surface de la goutte sous l'effet du cisaillement avec le courant gazeux. La deuxième théorie (J. Hinze, 1955 [37], 1959 [38], Z. Liu et *al.* 1997 [55]) repose sur l'allongement des extrémités de la goutte dans le sens de l'écoulement. Des ondes capillaires se forment alors à la surface de la goutte conduisant à la production de ligaments dans le sens de l'écoulement. Ces ligaments vont finalement se désintégrer pour former des gouttes.
- Pour  $350 < We_g$ , on parle de « wave crest stripping » et de « catastrophic break up », des vagues de courte longueur d'onde et de grande amplitude sont formées sur la face exposée à l'air, puis sont érodées par le courant d'air. Le mode « catastrophic » correspond au moment où les vagues sont d'amplitude suffisante pour casser la goutte mère. Ce processus se répète en cascade jusqu'à ce que le nombre de Weber associé aux fragments soit inférieur à sa valeur critique.



**Fig 1.7.** Différents régimes de fragmentation aérodynamique [72]

La brisure est très rapide et s'effectue dans un temps de l'ordre de  $2r_p / (u_g - u_p) \sqrt{\rho_l / \rho_g}$  [68]. Ce temps dans l'expérience de J.C. Lasheras et *al.* [52] calculé à partir des conditions initiales est de l'ordre de  $0,8 \text{ ms}$ . La distance parcourue par une goutte ayant pour vitesse initiale  $0,55 \text{ m/s}$  pendant ce temps est de l'ordre de  $0.11D_g$ . Il s'agit donc d'un mécanisme très rapide qui peut se produire au voisinage de l'injecteur.

### Brisure par la turbulence

Une autre analyse de ce mécanisme est possible en faisant intervenir la turbulence dans la phase gazeuse. Il a été proposé par A.N. Kolmogorov 1949 [48]. A la différence de la brisure par cisaillement, il fait intervenir l'énergie cinétique turbulente comme quantité déstabilisatrice. L'idée est la suivante : les fragments détachés sont étirés par le cisaillement turbulent jusqu'à l'état où, en moyenne, ce cisaillement est équilibré par les forces de tension superficielle.

En utilisant l'expression de Kolmogorov pour un incrément typique de vitesse entre deux points distants de  $\Delta$  dans la zone inertielle (ici  $\Delta$  joue le rôle du diamètre de la goutte), on obtient :

$$\langle u_{\Delta}^2 \rangle = \left( \frac{\nu_g}{\eta} \right)^2 \left( \frac{\Delta}{\eta} \right)^{2/3} \quad (1.37)$$

où  $\eta$  est l'échelle de Kolmogorov et  $\nu_g$  est la viscosité du gaz.

Le nombre de Weber  $We_t$  associé à ce processus est donc obtenu à partir de l'équilibre entre les forces de cisaillement turbulent et les forces de tension de surface et s'exprime par :

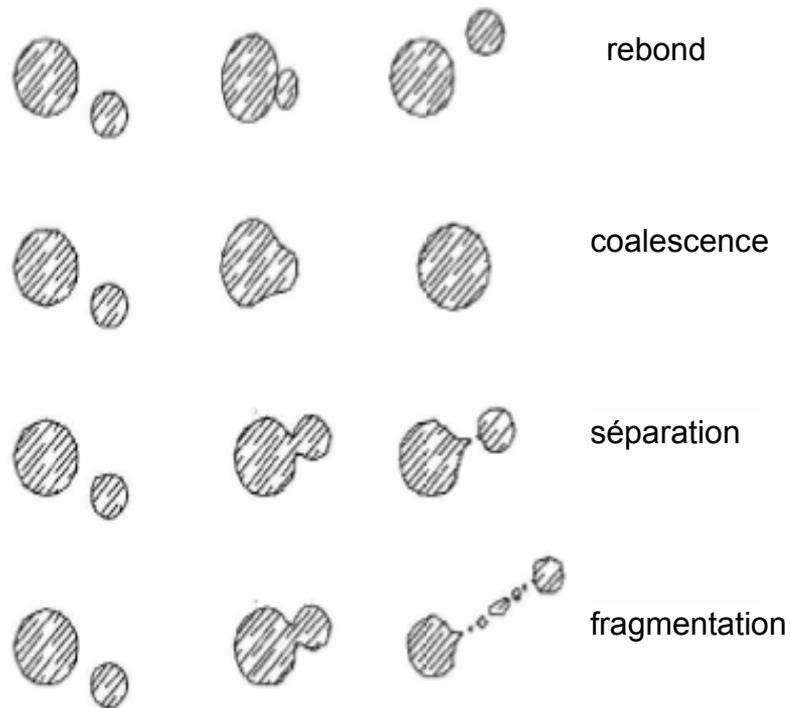
$$We_t = \frac{\rho_g \langle u_{\Delta}^2 \rangle r_p}{\sigma} \quad (1.38)$$

### **Brisure par collision et coalescence**

Les collisions entre gouttes peuvent aboutir à différents types de situation. Lorsque deux gouttes entrent en contact, plusieurs paramètres pilotent l'avenir de la collision. En effet, il existe une fine couche d'air entre les surfaces des deux gouttes pouvant les empêcher de coalescer. Plusieurs situations peuvent alors être envisagées (M. Orme 1997 [66]) :

- Si l'énergie cinétique relative entre les deux gouttes n'est pas suffisante, les deux gouttes rebondissent.
- Si l'énergie cinétique relative est assez grande pour traverser la fine couche d'air les deux gouttes coalescent et peuvent ensuite à nouveau se séparer. Cette séparation peut aboutir à la formation de filaments ou de gouttelettes de petites tailles.
- Si l'énergie cinétique est encore plus importante, les deux gouttes fragmentent en formant un nuage de gouttelettes.

Ces différents cas sont illustrés par la figure 1.8.



**Fig 1.8.** *Rebond, coalescence, rupture ou fragmentation faisant suite à la collision de deux gouttes, M. Orme [66].*

Il est donc possible de construire un nombre sans dimension mesurant à nouveau la compétition entre les forces déstabilisatrices et stabilisatrices. Ce nombre est appelé nombre de Weber relatif ou collisionnel. Il est basé sur la compétition entre l'énergie cinétique relative entre les deux gouttes et les forces de tension de surface. Pour deux gouttes de même taille, il prend la forme :

$$We_{rel} = \frac{\rho_l (u_{p1} - u_{p2})^2 2r}{\sigma} \quad (1.39)$$

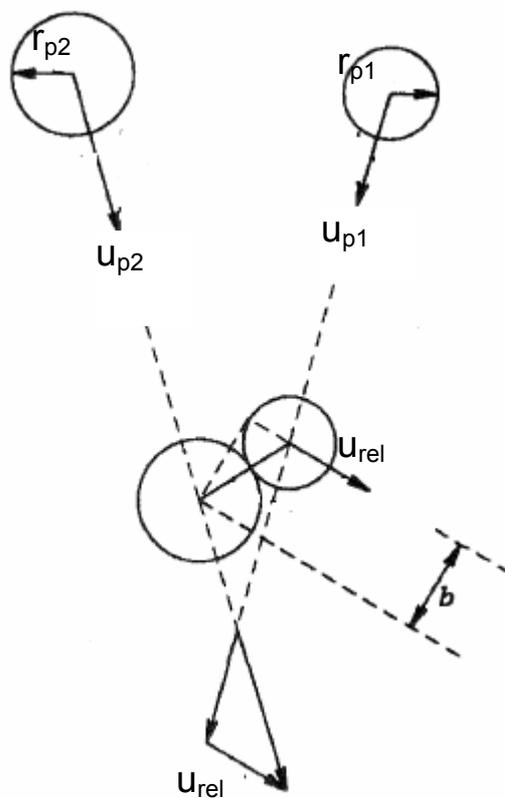
où  $u_{p1}$  et  $u_{p2}$  sont les vecteurs vitesse des deux gouttes.

L'autre paramètre déterminant le résultat de la collision est la façon dont les gouttes impactent. En effet, avec une énergie cinétique relative identique, l'angle avec lequel elles entrent en collision peut entraîner des situations différentes. Les auteurs ayant étudié ce phénomène ont proposé divers paramètres pour caractériser la collision. Une autre variable importante est le rapport des tailles des gouttelettes, ou rapport des diamètres que nous noterons ici  $\Delta$ .

$$\Delta = \frac{r_{p1}}{r_{p2}} \quad (1.40)$$

où  $r_{p1}$  et  $r_{p2}$  représentent respectivement les rayons de la plus petite et de la plus grosse goutte.

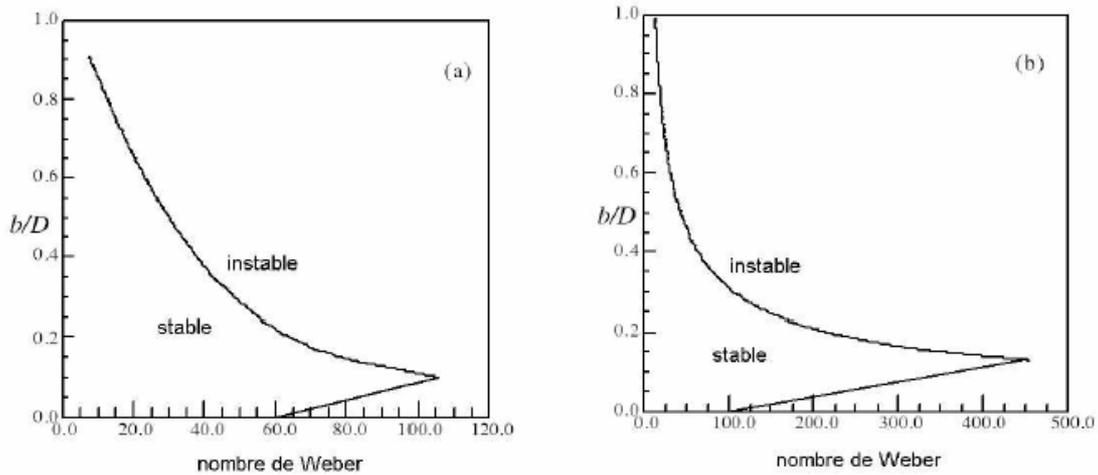
J.R. Adam *et al.* 1968 [1] ont observé le comportement de deux gouttes entrant en collision. Deux filets de gouttelettes de diamètres variant entre  $120 \mu\text{m}$  et  $600 \mu\text{m}$  sont dirigés l'un vers l'autre. Les résultats des différentes collisions sont alors comptabilisés. Les paramètres utilisés ici sont notés sur la figure 1.9.



**Fig. 1.9.** Schéma des paramètres de collision M. Orme [66].

Différentes inclinaisons des filets d'eau ont permis d'étudier l'influence de cette variable sur la collision. La gamme de vitesses relatives des gouttelettes explorée est comprise entre  $1 \text{ m/s}$  et  $8 \text{ m/s}$ . Le nombre de Weber  $We_{rel}$  varie donc entre 1.64 et 526. Cette expérience permet d'obtenir les limites des différents régimes de collision en fonction du nombre de Weber et du paramètre d'impact  $b$  qui caractérise l'angle de collision. Ces résultats sont présentés sur la figure 1.10 où le paramètre d'impact est adimensionné par le diamètre de la plus grosse goutte

$D = 2r_{p2}$ . Sur cette figure les régimes stable et instable correspondent au cas où les collision aboutissent à des coalescence ou séparation respectivement.



**Fig. 1.10.** Schéma des différents régimes de collision possibles pour des gouttelettes d'eau.

(a) gouttelettes de diamètre  $120 \mu\text{m}$  ; (b) gouttelettes de diamètre  $600 \mu\text{m}$ .

*J.R. Adam et al. [1]*

En fonction du nombre de Weber, on observe différents comportements :

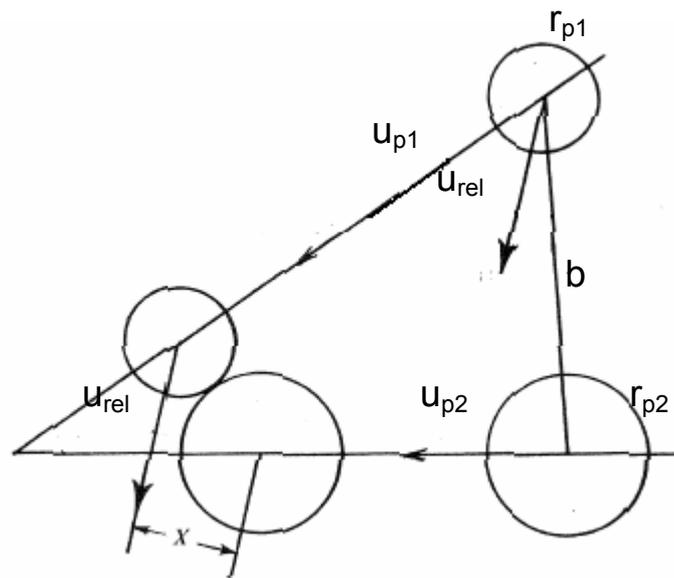
- A partir de  $We_{rel} \approx 10$ , il n'y a plus de rebond quelque soit le paramètre d'impact.
- A partir de  $We_{rel} \approx 100$ , il n'y a plus de coalescence quelque soit le paramètre d'impact
- Un nombre de Weber égal à 12 est suffisant pour avoir une fragmentation suite à une collision. Plus l'énergie cinétique relative est grande, plus le nombre de fragments formés est grand, donc, plus la fragmentation est efficace.

N. Ashgriz et *al.* 1990 [6] se sont intéressés aux résultats de collisions entre des gouttelettes d'hydrocarbure (heptane, décane ...). Ces études ont été menées pour une gamme de nombres de Weber relatifs allant de 5 à 100 avec trois rapports de tailles différents : 1, 0,5 et 0,75. Le paramètre d'impact est alors défini comme la distance entre le centre d'une des gouttes et le vecteur vitesse relatif placé au centre de l'autre goutte comme indiqué sur la figure 1.11. Dans cette étude, il est adimensionné par les rayons des gouttes :

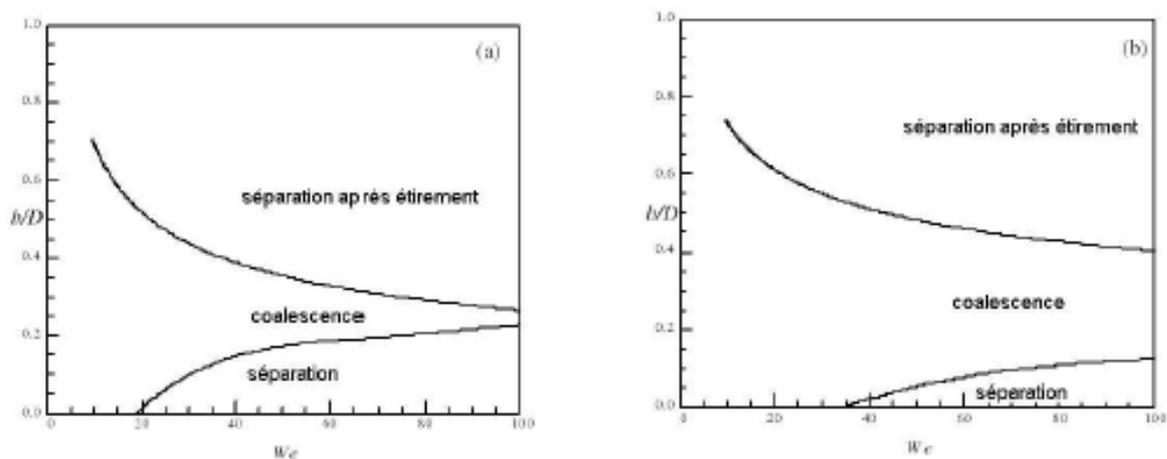
$$\chi = \frac{X}{r_{p1} + r_{p2}} \quad (1.41)$$

où  $X$  est le paramètre d'impact et  $\chi$  sa valeur adimensionnée.

Les mesures obtenues sont présentées sur la figure 1.12 . Elles permettent d'établir une cartographie des résultats de collision en fonction du nombre de Weber, du rapport de taille et du paramètre d'impact.

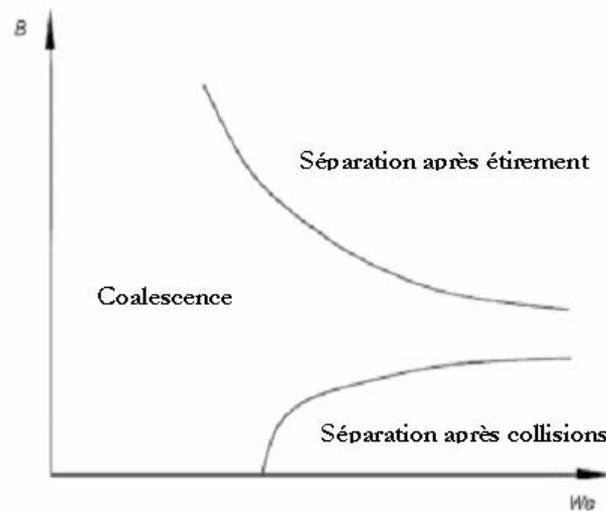


**Fig 1.11.** Définition des variables dans l'expérience de N. Ashgriz et al. [6].



**Fig. 1.12.** Cartographie des régimes de collision en fonction du nombre de Weber et du paramètre d'impact obtenue par N. Ashgriz et al. [6]

J. Qian et *al.* 1997 [75] ont étudié les effets de la pression, de la densité et de la viscosité de l'air ambiant sur les collisions de gouttelettes d'hydrocarbure. Les gouttelettes étudiées ont des diamètres de  $200 \mu\text{m}$  à  $400 \mu\text{m}$ . Les auteurs obtiennent la limite entre la coalescence stable et la coalescence temporaire dans le diagramme  $(We_{rel}, B)$  comme dans le cas de l'eau (figure 1.13).



**Fig 1.13.** Cartographie des régimes de collision en fonction du nombre de Weber et du paramètre d'impact, J. Qian et *al.* 1997 [75].

### 1.3.3 Echelles typiques de tailles après la rupture

Des échelles typiques peuvent être obtenues à partir des mécanismes d'atomisation décrits précédemment. Ces échelles sont très importantes car elles permettent d'estimer l'ordre de grandeur de la taille des gouttes dans l'écoulement. Il existe plusieurs études sur ce sujet. Certaines construisent cette échelle à partir des mécanismes d'atomisation secondaire et d'autres à partir des mécanismes d'atomisation primaire.

L'échelle typique associée aux mécanismes d'atomisation secondaire est en général basée sur un nombre de Weber critique  $We_c$  :

$$r_i = \frac{\sigma We_c}{\rho U^2} \quad (1.42)$$

A partir de cette valeur critique, il n'est plus possible de fragmenter l'élément liquide considéré. Dans l'expression (1.42),  $r_t$  est l'échelle typique des éléments liquides,  $\rho$  la masse volumique et  $U$  l'échelle de vitesse. Ces paramètres doivent être déterminés par le mécanisme physique responsable de l'atomisation.

### Cisaillement

Nous avons vu que le mécanisme d'atomisation lié au cisaillement est issu de la compétition entre les forces aérodynamiques exercées sur l'élément liquide et les forces de tension de surface. Le nombre de Weber associé à ce mécanisme est alors donné par l'expression (1.36). L'échelle typique associée à ce mécanisme est donc :

$$r_t = \frac{We_c \sigma}{\rho_g (u_g - u_p)^2} \quad (1.43)$$

Des études ont montré que la valeur critique  $We_c$  de ce nombre sans dimension pouvait être prise égale à 6 [72] ou 10 [41].

### Turbulence ( A.N. Kolmogorov [48], V.R. Kutsenov & V.A. Sabel'nikov [50], M. Gorokhovski [33] )

Dans l'expression proposée par M. Gorokhovski [33], la turbulence est le mécanisme responsable de l'atomisation. Pour déterminer l'échelle typique associée, M. Gorokhovski suit le raisonnement de A.N. Kolmogorov [48]. La forme générale de l'échelle typique résultant de ce mécanisme est :

$$r_t = \frac{\sigma We_{tc}}{\rho_g \langle u_\Delta^2 \rangle} \quad (1.44)$$

Notons  $k_{tur}$  l'énergie cinétique turbulente,  $\varepsilon$  le taux de dissipation visqueuse et  $\tau_{St}$  le temps de Stokes associé à l'élément liquide.

M. Gorokhovski [33] distingue deux cas pour l'estimation de  $\langle u_\Delta^2 \rangle$  :

- Quand l'inertie du liquide n'intervient pas, c'est à dire quand  $\tau_{St} > k/\varepsilon$ ,  $\langle u_\Delta^2 \rangle$  peut être exprimé par la relation (1.37). En prenant  $\Delta \approx 2r$  et en utilisant l'expression de l'échelle de Kolmogorov  $\eta = (v_g^3 / \varepsilon)^{1/4}$ , on obtient :

$$r_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma We_{lc}}{\varepsilon^{2/3} \rho_g} \right)^{3/5} \quad (1.45)$$

- Quand l'inertie du liquide intervient, soit quand  $\tau_{st} < k/\varepsilon$ , M. Gorokhovski [33] propose d'utiliser l'expression donnée par [50] :

$$\langle u_\Delta^2 \rangle = \varepsilon \tau_{st} \quad (1.46)$$

Dans ces conditions, l'expression de l'échelle typique proposée s'écrit :

$$r_i = \frac{1}{2} \left( \frac{We_{lc} 18 \nu \sigma}{\varepsilon \rho_l} \right)^{1/3} \quad (1.47)$$

### **Turbulence (J.C. Lasheras et al. [51])**

Une expression pour cette échelle typique a également été proposée par Lasheras et al. [51] basée sur la relation (1.45). Elle repose sur une estimation du taux de dissipation en présence de liquide. J.C. Lasheras et al. [51] proposent une relation de proportionnalité entre  $\varepsilon$  et le flux initial d'énergie cinétique par unité de masse :

$$\varepsilon = \frac{u_g^3}{(1+m)D_g} \quad \text{avec} \quad m = \frac{\rho_l u_l}{\rho_g u_g} \quad (1.48)$$

### **Collisions (A. Vallet et al. [99])**

Nous avons vu que les collisions pouvaient également aboutir à la fragmentation ou à la coalescence. Afin d'estimer l'échelle typique qui résulte de ce mécanisme, A. Vallet et al. [99] considèrent deux gouttes avant collision. Dans un système de coordonnées en mouvement avec le centre de masse du système, la quantité de mouvement reste nulle et la somme des énergies cinétique et de surface reste constante. Après collision, le rayon minimal des gouttes produites est tel que toute l'énergie cinétique est transformée en énergie de surface. En supposant qu'une des deux gouttes est cassée en deux gouttes de tailles similaires, on obtient :

$$\frac{4}{3} \pi \rho_l r_i^3 (\Delta v)^2 = 4 \pi \sigma r_i^2 \left( 2^{1/3} - 1 \right) \quad (1.49)$$

Dans l'étude de A. Vallet et *al.* [99], ce rayon correspond au rayon d'équilibre. En effet, en moyenne, les gouttes les plus grosses seront atomisées jusqu'à ce que ce rayon soit atteint et les plus petites coalesceront jusqu'à cette taille. Il est alors nécessaire d'estimer la vitesse relative moyenne entre deux gouttes entrant en collision.

Celle-ci est déduite du spectre de Kolmogorov, c'est à dire  $\Delta v(l) = (\varepsilon l)^{1/3}$  où  $l$  est la distance séparant les deux gouttes. Cette distance peut être évaluée comme l'espace moyen entre les gouttes, à savoir  $n^{-1/3}$  où  $n$  est la densité de gouttes par unité de volume. En utilisant cette estimation dans l'équation (1.36), on peut écrire :

$$r_i = 3 \left( 2^{1/3} - 1 \right) \frac{\sigma}{\rho_l} \varepsilon^{-2/3} n^{2/9} \quad (1.50)$$

Une autre possibilité est de considérer le mécanisme d'atomisation primaire. Les gouttes sont alors formées à partir des filaments issus des instabilités. Plusieurs études expérimentales ont relié le mécanisme primaire d'atomisation à l'échelle typique des gouttes dans le spray. Cette liaison se traduit par une relation de proportionnalité sous la forme :

$$r_i = C_\lambda \lambda_p \quad (1.51)$$

Dans cette expression,  $\lambda_p$  est la longueur d'onde associée à l'instabilité provoquant la fragmentation du liquide et  $C_\lambda$  est une constante de proportionnalité.

### **Echelle de Marmottant et Villermaux**

Marmottant et Villermaux [59] ont développé un modèle d'instabilité basé sur l'instabilité de Faraday avec une accélération normale à l'interface. L'accélération est engendrée par des ondes se propageant sur la couche liquide. La longueur d'onde  $\lambda_{MV}$  associée à cette instabilité s'écrit :

$$\lambda_{MV} = 3.45 \delta_g \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/3} We_{\delta_g}^{-1/3} \quad (1.52)$$

Les mesures expérimentales réalisées par Marmottant [58] montrent une relation de proportionnalité de type (1.51) sous la forme :

$$r_i \approx C_\lambda \lambda_{MV} \quad (1.53)$$

avec  $C_\lambda = 0,05$ .

### Echelle de Rayleigh Taylor (M. Hong [39], C.M. Varga et al. [100])

M. Hong [39] et C.M. Varga et al. [100] ont développé un modèle d'instabilité secondaire basé sur l'instabilité de Rayleigh Taylor. M. Hong [39] a ensuite étudié les tailles caractéristiques des gouttes formées dans le spray. La relation de proportionnalité entre la taille typique et la longueur d'onde associée à l'instabilité de Rayleigh Taylor s'écrit dans ce cas :

$$r_i \approx C_\lambda \lambda_{RT} \quad (1.54)$$

Hong a déterminé expérimentalement la valeur de la constante  $C_\lambda$  égale à 0,07.

### Modification de l'expression de $\lambda_{RT}$

Sur la base de ce raisonnement, nous proposons une autre expression pour la longueur d'onde du mode le plus instable de l'instabilité de Rayleigh Taylor. L'accélération dans (1.19) est écrite comme le rapport de l'énergie cinétique du mouvement relatif qui est dissipée sur l'interface par unité de temps  $C_d \rho_g (u_g - u_c)^2 u_g A_n$  et de la quantité de mouvement du liquide  $\rho_l u_l \lambda_{KH} A_n$ . Ainsi, en notant  $A_n$  la surface de l'interface et en supposant que l'épaisseur initiale  $b$  des filaments sur la figure 1.3 est de l'ordre de  $\lambda_{KH}$ , on peut écrire :

$$a = \frac{C_d \rho_g (u_g - u_c)^2 u_g A_n}{\rho_l u_l \lambda_{KH} A_n} \quad (1.55)$$

en simplifiant cette expression et en remplaçant  $\lambda_{KH}$  par l'expression (1.16), on obtient l'expression de l'accélération par :

$$a = \frac{C_d \rho_g (u_g - u_c)^2 u_g}{\rho_l u_l C_{KH} \delta_g \sqrt{\rho_l / \rho_g}} \quad (1.56)$$

On peut alors écrire une nouvelle relation pour l'échelle de Rayleigh Taylor :

$$\lambda_{RT} = 2\pi \left( \frac{6C_{KH}}{C_d} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/4} \delta_g We_{\delta_g}^{-1/2} \left( \frac{u_l}{u_g} \right)^{1/2} \quad (1.57)$$

N'ayant pas de résultats expérimentaux pour (1.57), dans la suite de cette étude, nous ferons l'hypothèse suivante : les éléments liquides résultant de l'atomisation primaire (précurseurs imposés à l'atomisation secondaire) ont une taille typique de l'ordre de cette longueur d'onde.

## 1.4 Approches numériques existantes pour la simulation de l'atomisation primaire

L'analyse en terme d'instabilités est qualitative, elle met en évidence le scénario physique qui domine la désintégration du jet liquide. En pratique, il est nécessaire de connaître l'évolution des grandeurs caractéristiques du spray en chacune de ses positions, d'où la nécessité de la simulation numérique. Ce sous-chapitre donne un très bref résumé des différentes approches numériques existantes.

### 1.4.1 Simulation numérique directe

Les méthodes de type simulation numérique directe (DNS) pour les écoulements diphasiques consistent à identifier une interface liquide/gaz dans le domaine de calcul. Pour cela, il existe deux approches : Lagrangiennes appelées « Front Tracking » et Eulériennes appelées « Front Capturing ».

Les méthodes Lagrangiennes reposent sur le suivi du front par l'intermédiaire d'une résolution explicite de l'interface. On peut citer la méthode des marqueurs G. Tryggvasson et *al.* 2000 [96] dans laquelle l'interface est représentée par un ensemble de points (marqueurs) connectés entre eux. Ces points se déplacent sur un maillage fixe à la vitesse locale de l'écoulement. Ce type de méthodes permet de résoudre très précisément l'interface si le champ de vitesse est bien résolu.

Les méthodes Eulériennes sont plus couramment utilisées pour simuler les écoulements diphasiques. Elles consistent à transporter un scalaire dans l'écoulement. Parmi celles-ci, on distingue deux types d'approches : l'approche « Volume of Fluid » (VOF) et l'approche Level Set. Dans les deux cas, l'équation de transport pour le scalaire  $\psi$  est donnée par la relation (1.58).

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + (U\nabla)\psi(x,t) = 0 \quad (1.58)$$

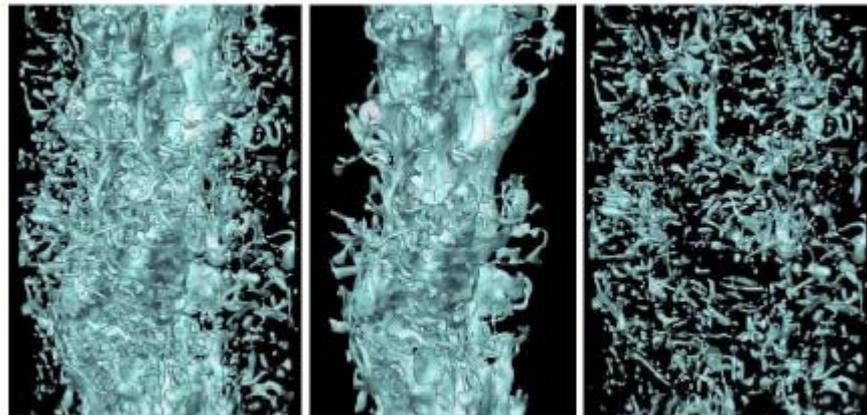
Dans le cas de la méthode VOF (R. Scardovelli et *al.* 1999 [86] ), le scalaire transporté est la fraction de liquide. L'équation (1.58) est résolue pour ce scalaire et permet d'obtenir la fraction de liquide dans chaque maille du domaine. Dans la méthode Level Set, le scalaire transporté est la

fonction Level Set  $\phi$  correspondant à la distance par rapport à l'interface (J. Sethian et *al.* 1997 [88]). La connaissance de ce scalaire dans chaque maille donne la localisation précise de l'interface et permet ensuite de déterminer les propriétés géométriques de l'interface par :

$$\begin{cases} n = \nabla \phi \\ \kappa(\phi) = -\nabla n \end{cases} \quad (1.59)$$

où  $n$  désigne la normale à l'interface et  $\kappa$  sa courbure locale.

La méthode Level Set a été appliquée à l'étude d'écoulements diphasiques par A. Berlemont, S. Tanguy 2004 [95] et T. Menard 2007 [63]. Des comparaisons entre la simulation et des résultats théoriques sur les instabilités interfaciales ont été réalisées par T. Menard 2007 [63]. Cette confrontation montre un bon accord entre la théorie et la simulation. Ce formalisme a ensuite été appliqué à la simulation d'un jet de type diesel, c'est à dire, dans le cas d'un jet de liquide débouchant à forte vitesse (100 m/s) dans un milieu gazeux au repos. Les méthodes VOF et Level Set ont cette fois été couplées. Sur la figure 1.14, nous présentons les résultats de simulation de T. Menard [63] où le cœur liquide et les fragments détachés sont séparés. On remarque une topologie très complexe de ces éléments (membranes, filament étirés, petites gouttes). Il est donc possible de calculer la distribution des tailles caractéristiques associées aux éléments liquides.



**Fig.1.14** . Zoom sur une portion du spray (à gauche), extraction du cœur liquide (au centre) et des gouttes (à droite) obtenus par DNS par T. Menard [63].

A partir de ces distributions, on peut mettre en évidence la sensibilité de ce type de calculs au maillage. A l'échelle de la maille, l'atomisation du liquide n'est plus régie par un mécanisme physique mais numérique. Cette dépendance vis à vis du maillage se traduit

par la présence de nombreux éléments liquides de tailles de l'ordre de celle de la maille. Cela revient donc à imposer l'échelle typique des gouttes dans le spray par l'intermédiaire du maillage. A l'heure actuelle, les moyens informatiques sont donc limités pour permettre une résolution entière de sprays à forts nombres de Weber et de Reynolds par cette approche. En effet, les fragments détachés du cœur liquide sont atomisés à de nombreuses reprises et des éléments liquides de grandes et petites tailles (de l'ordre du micron) peuvent être présents simultanément dans l'écoulement. De plus, les valeurs du temps caractéristique de croissance des instabilités primaire sont faibles (de l'ordre de  $10^{-6}$  s estimé par la relation (1.29) dans le cas de jet air-assisté). Ces valeurs imposent une restriction au niveau du pas de temps.

Cela fait de la simulation numérique directe un outil puissant pour les études plutôt fondamentales. Dans le même temps, les ingénieurs ont besoin d'évaluer les nouvelles conceptions et le développement de moteurs sur la base de calculs capables de décrire l'intégralité des sprays pour des temps de calculs raisonnables. Ce type de méthodes propose de ne pas résoudre toutes les échelles de liquide mais de ne prendre en compte que les plus petites par la modélisation. Le calcul ne permet donc pas une résolution exacte de l'écoulement diphasique mais une description statistique.

#### **1.4.2 Modèle ELSA (Eulerian Lagrangian Spray Atomization)**

Ce modèle est basé sur une approche Eulérienne du milieu diphasique traité comme un seul fluide (mélange liquide/gaz) à masse volumique fortement variable. Il décrit à la fois le comportement de l'écoulement à grande échelle (dard liquide, angle du spray ...) mais également à petite échelle (atomisation ou coalescence ...) pour des nombres de Weber et de Reynolds élevés.

Cette approche a été développée par A. Vallet et *al.* 2001 [99] et repose sur une analogie entre le processus d'atomisation dans de telles conditions et le mélange turbulent. Dans la théorie de la turbulence développée par A.N. Kolmogorov en 1941 [46], le comportement des grandes échelles n'est pas influencé par la viscosité. En revanche, aux petites échelles, il existe un équilibre entre les forces de viscosité et les forces d'inertie. Cet équilibre se traduit par un nombre de Reynolds égal à 1. Cette valeur correspond à la dissipation de l'énergie cinétique sous forme d'énergie interne. Pour le processus d'atomisation, c'est la compétition entre les forces de tension de surface et les forces d'inertie qui régit l'écoulement à petite échelle. C'est donc le nombre de Weber qui sera utilisé. L'analogie avec le mélange turbulent réside dans la possibilité de déterminer les caractéristiques des grandes échelles sans faire intervenir ce nombre. En revanche,

aux petites échelles, il est très important car il impose l'échelle typique moyenne associée à la phase liquide.

L'équation permettant de calculer la dispersion de la phase liquide est alors écrite pour la variable  $Y$  qui vaut 1 dans la phase liquide et 0 dans la phase gazeuse. En chaque point de l'écoulement, la variable  $\bar{Y}$  est la fraction volumique moyenne et la variable  $\tilde{Y} = \overline{\rho Y} / \bar{\rho}$  est la fraction massique moyenne de liquide. La densité moyenne de mélange est alors définie par :

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{\tilde{Y}}{\rho_l} + \frac{(1-\tilde{Y})}{\rho_g} \quad (1.60)$$

L'équation pour le transport de la fraction massique moyenne fait intervenir le terme non fermé  $\bar{\rho} u_i' \tilde{Y}$  où  $Y' = Y - \tilde{Y}$  et  $u_i' = u_i - \tilde{u}_i$ . Ce terme correspond à la dispersion du liquide due aux fluctuations turbulentes. Deux modèles ont été proposés pour le modéliser : le modèle de diffusion et le « Quasi Multiphase Model ».

La taille moyenne des gouttes, parcelles de liquide ou des ligaments, est calculée dans ce modèle par l'intermédiaire de  $\bar{\Sigma}$ , la densité d'interface moyenne dans l'écoulement diphasique. Quand l'écoulement est composé uniquement de gouttes de même diamètre dans la phase gazeuse, la connaissance de  $\bar{\Sigma}$  et  $\tilde{Y}$  permet de calculer le rayon des gouttes et la densité de nombre de gouttes par :

$$r = \frac{3\bar{\rho}\tilde{Y}}{\rho_l\bar{\Sigma}} \quad (1.61)$$

et

$$n = \frac{\rho_l^2\bar{\Sigma}^3}{36\pi\bar{\rho}^2\tilde{Y}^2} \quad (1.62)$$

Quand les gouttelettes ont des diamètres différents mais sont totalement sphériques, ces expressions donnent le diamètre moyen de Sauter.

La quantité  $\bar{\Sigma}$  suit une équation d'évolution. Dans le modèle développé par A. Vallet et al., elle fait intervenir un terme de convection, un terme de diffusion (car l'interface est également dispersée par la turbulence), des termes de production et de destruction prenant en compte les phénomènes physiques aboutissant à l'évolution du liquide. L'équation postulée prend la forme :

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Sigma} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_s \left( \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial x_i} \right) + \left( \frac{1}{T_{tur}} + \frac{1}{\tau_{tur}} \right) \bar{\Sigma} - V_s \bar{\Sigma}^2 \quad (1.63)$$

où  $D_s$  est un coefficient de diffusion,  $T_{tur}$  et  $\tau_{tur}$  sont respectivement deux échelles de temps de production de densité surface dues aux étirements turbulents par les grandes et petites échelles, et  $V_s$  caractérise le coefficient de destruction de densité de surface ayant la dimension d'une vitesse. Ces coefficients permettent d'introduire des mécanismes différents selon la modélisation choisie. Dans ce modèle, le comportement des petites échelles fait intervenir la tension de surface. Son action se traduit par une valeur d'équilibre de la densité de surface  $\bar{\Sigma}_{eq}$  :

$$\frac{1}{\tau_{tur}} \bar{\Sigma}_{eq} = V_s \bar{\Sigma}_{eq}^2 \quad (1.64)$$

Puisque dans le cas de conditions d'équilibre, le liquide est présent sous forme de gouttelettes, cette valeur peut être reliée à une échelle typique  $r_{eq}$ . Cette échelle peut être identifiée à l'échelle de longueur typique associée au liquide obtenue par la relation (1.50).

Cette approche a été appliquée dans le cas de jets de type Diesel [10] et assistés par gaz [62]. De plus, elle permet d'accéder directement à la densité de surface, paramètre important pour l'évaporation et la combustion.

Cependant, cette approche repose sur une méthode de type RANS et, par conséquent, en porte les points faibles :

- Elle ne donne accès qu'à une échelle de longueur moyenne du liquide (ce qui ne permet pas d'obtenir le spectre de tailles étendu observé dans les sprays).
- La forme présumée de l'équation (1.63) pour  $\bar{\Sigma}$  est supposée universelle, indépendamment de la configuration géométrique de l'écoulement et des conditions limites.
- Le terme de transport de  $\bar{\Sigma}$  est modélisé par un terme de diffusion; négligeant ainsi les effets d'un regroupement spatial des éléments liquides.

### 1.4.3 Approche LES/VOF

Une autre approche a été développée par V. Srinivasan et *al.* 2006 [92]. Elle couple la simulation des grandes échelles au suivi d'interface. Elle consiste à utiliser la méthode VOF pour prédire la position de l'interface comme dans les approches de type DNS décrites dans le paragraphe 1.4.1. Le caractère turbulent de l'écoulement diphasique est parallèlement simulé par simulation des grandes échelles. Cela signifie que l'écoulement est résolu directement jusqu'à une certaine échelle. A partir de celle-ci, le comportement des plus petites échelles est modélisé. Cette

approche semble capable de décrire l'interface liquide/gaz et la formation de gouttelettes issues de son étirement. L'avantage est qu'elle permet d'obtenir le comportement instationnaire de l'interface pour un coût de calcul moindre que les méthodes de type DNS. Cependant, aucun modèle de sous maille n'est introduit pour prendre en compte le comportement de l'interface vis à vis des petites structures turbulentes. Les termes de sous maille dus à la présence de l'interface et le saut des propriétés matérielles et des forces de tension de surface en découlant sont donc négligés. Dans ce contexte, ce type d'approches peut être considéré comme quasi-LES ou DNS sous résolue de l'interface liquide/gaz combinée avec un formalisme LES pour les régions monophasiques de l'écoulement G. M. Bianchi et *al.* 2005 [12], V. Srinivasan et *al.* 2006 [92], G. M. Bianchi et *al.* 2007 [13]. Ce type de méthodes peut permettre une meilleure connaissance de la phase d'atomisation primaire et des distributions des gouttes qui en découlent. Pour cela, il est nécessaire de savoir si la dynamique de l'interface aux petites échelles non résolues influence le comportement de l'interface aux échelles résolues. Des études de sensibilité au maillage au niveau des distributions de tailles de gouttes obtenues aux échelles résolues doivent donc être effectuées. Les conclusions décrites dans le paragraphe 1.4.1 [63] obtenues lors de DNS semblent indiquer une sensibilité au maillage de l'atomisation du jet liquide.

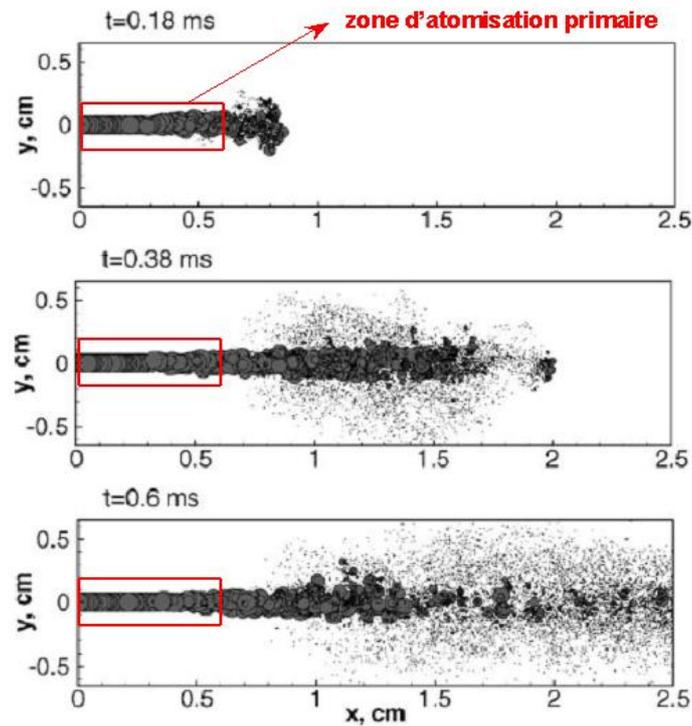
Dans ce contexte, nous proposerons dans ce travail une approche permettant de simuler le spray par une méthode de type LES pour la phase gazeuse. Elle combine la simulation des grandes échelles dans l'écoulement de gaz turbulent avec la simulation stochastique de la réduction du jet liquide. La structure tridimensionnelle du coeur liquide avec les gouttes arrachées est simulée de façon stochastique. Nous considérerons que la cascade de fragmentation est régie par l'hypothèse de symétrie d'échelle. Pour cela, il est nécessaire que la fréquence d'atomisation soit grande. Le rapport de  $\lambda_{RT}$  et  $\lambda_{KH}$  et le transfert d'énergie cinétique du gaz vers le liquide sont les paramètres du processus stochastique.

## 1.5 Nouvelle approche stochastique, sa position et l'idée de base

Le but est de proposer un nouveau modèle simple d'atomisation primaire permettant de déterminer statistiquement la configuration du coeur liquide ainsi que la position, la vitesse et la taille des éléments détachés du coeur liquide. Ces éléments devront être ensuite soumis à l'écoulement de gaz. Leur dynamique et l'évolution de leurs tailles devront donc être prédites. L'écoulement du gaz est modélisé par une approche de simulation des grandes échelles.

Dans les conditions d'un moteur de type moteur-fusée, Diesel, ou d'avion, les nombres de Weber et de Reynolds sont grands, et le nombre de fragmentations par unité de temps (fréquence de fragmentation) est très élevé. Le processus d'atomisation peut alors être considéré comme une cascade de fragmentations contrôlée par les mécanismes de formation. L'approche que nous utilisons repose donc sur l'hypothèse de symétrie d'échelle pour l'échelle typique de taille du liquide. Cette hypothèse a été formulée par M. Gorokhovski et *al.* 2003 [34] et plusieurs

applications ont été réalisées : M. Gorokhovski et *al.* 2003 [34], Apte et *al.* 2003[3] et I. Vinkovic et *al.* 2005 [101]. Dans ces applications, les échelles de liquide sont représentées par des sphères appelées parcelles. Ces parcelles représentent un ensemble statistique d'échelles de mêmes tailles et vitesses. La phase d'atomisation primaire est donc simulée par la fragmentation d'une sphère de la taille de l'injecteur comme sur la figure 1.15 (en rouge) [3]. L'échelle géométrique choisie est le rayon d'une sphère, ce qui ne peut pas réellement représenter la phase d'atomisation primaire mais plutôt d'atomisation secondaire.



**Fig. 1.15.** Résultats de simulations des grandes échelles de sprays effectuées dans [3].

Pour pallier à ce problème, nous considérons schématiquement un ensemble de réalisations (un ensemble de photos virtuelles comme sur la figure 1.16). La structure typique comprend le cœur liquide entouré par les éléments détachés.

Introduisons une variable  $r$  qui caractérise la distance entre la frontière du liquide non-fragmenté et le centre du jet liquide comme indiquée sur la figure 1.16. Au cours du temps, chaque réalisation se produit l'une après l'autre et ne se reproduit ensuite jamais. La variable  $r$  est donc aléatoire.

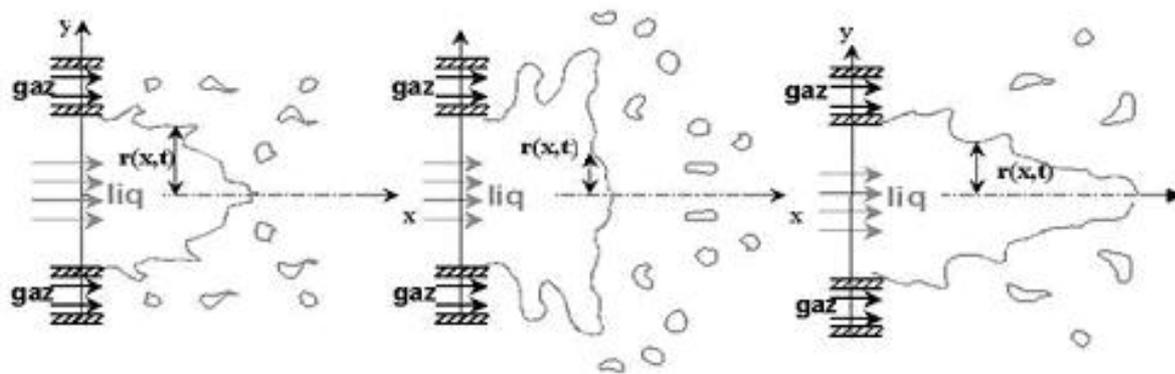


Fig 1.16. Schéma de différentes réalisations de la phase primaire d'atomisation assistée par air.

Considérons maintenant une fragmentation du cœur liquide comme l'indique la figure 1.17. A l'instant  $t - \delta t$ , un morceau de liquide est entraîné par le gaz à la surface du liquide (a). Ce morceau est alors accéléré (b) puis finalement se détache du cœur liquide (c). Ce phénomène aboutit donc à la réduction de l'échelle  $r$  associée au cœur liquide. Le nombre de degrés de liberté associés à ce détachement est très élevé. La description exacte de chacun de ces événements est donc une tâche extrêmement difficile. Cependant, à grands nombres de Reynolds et de Weber, le nombre de ruptures par unité du temps est très important. Ainsi, la fragmentation peut être représentée par un scénario simplifié (l'hypothèse de symétrie d'échelle) : si on suit de façon Lagrangienne la frontière du liquide non-fragmenté, la distance par rapport au centre du jet varie suivant  $r(x, t + \delta t) \rightarrow \alpha r(x, t)$ , où le coefficient  $\alpha$  compris entre 0 et 1 est indépendant de l'échelle. Chacun de ces suivis lagrangiens peut-être réalisé dans un plan aléatoire. La statistique de l'interface obtenue conditionne l'écoulement de gaz par la présence de liquide au voisinage de l'injecteur. La dynamique des fragments formés autour du cœur liquide est donc modifiée par la présence de liquide non fragmenté. Ces fragments sont ensuite soumis à l'atomisation secondaire et à la coalescence.

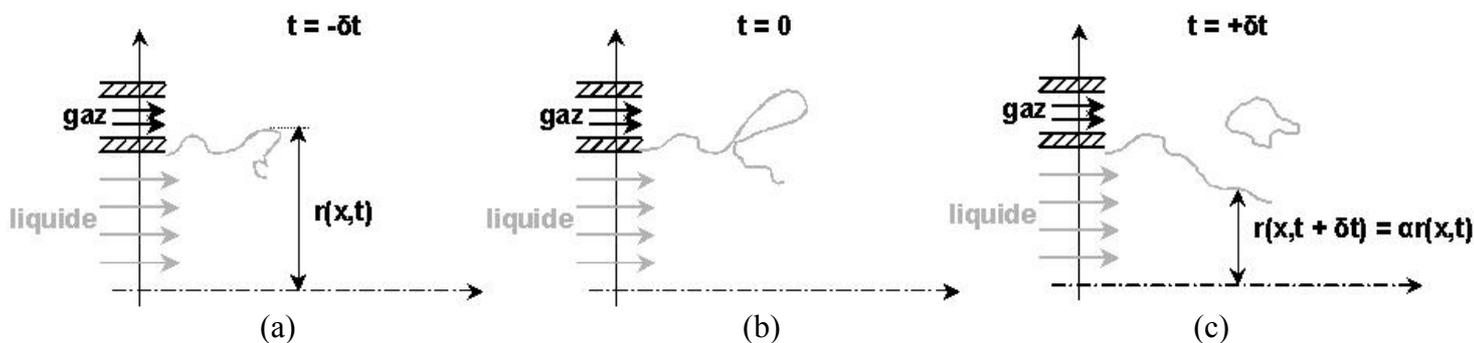


Fig 1.17. Schéma représentant l'hypothèse de symétrie d'échelle appliquée au cœur liquide.

## 1.6 Conclusion

Plusieurs approches pour simuler l'atomisation d'un jet liquide ont été présentées. La première consiste à prédire les échelles caractéristiques des instabilités se développant dans le spray. Dans le cas de nombres de Reynolds et de Weber élevés, cette approche n'est plus adaptée. La seconde, la DNS, consiste à résoudre toutes les échelles de liquide présentes dans l'écoulement. Elle impose donc une contrainte très forte sur le maillage utilisé. Dans les conditions actuelles, pour des grands nombres de Reynolds et de Weber, les capacités informatiques la rendent difficile à appliquer pour décrire le spray dans sa totalité. La troisième approche (modèle ELSA) propose de remédier à ces problèmes en introduisant une description moyenne de l'écoulement diphasique. Elle ne donne donc accès qu'à des échelles moyennes et ne permet donc pas de décrire les comportements instationnaires du liquide ou du gaz. Nous avons donc proposé une approche stochastique pour prédire la distribution du liquide au voisinage de l'injecteur. Celle-ci sera couplée à la simulation des grandes échelles pour la phase gazeuse de façon à saisir le caractère instationnaire de l'écoulement.

Dans la suite de ce mémoire, nous présenterons d'abord le formalisme utilisé pour modéliser l'évolution de la phase liquide et les équations découlant de l'hypothèse de symétrie d'échelle.

Nous décrivons alors la méthode utilisée pour simuler la phase gazeuse. Il s'agit de simulation des grandes échelles. L'idée est de simuler dans un premier temps un jet de gaz jusqu'à l'obtention de l'état statistiquement stationnaire, puis d'introduire la phase liquide. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux et une simulation numérique directe de jet turbulent seront présentées.

Ensuite, nous détaillerons l'application de l'hypothèse de symétrie d'échelle à la description de la phase d'atomisation primaire et nous comparerons nos résultats à l'expérience.

Le choix des paramètres utilisés pour former des gouttes résultant de la phase d'atomisation primaire sera ensuite décrit et des comparaisons avec l'expérience seront réalisées au niveau des tailles de ces gouttes. Dans une cinquième partie, nous décrivons également le modèle utilisé pour la phase d'atomisation secondaire basé sur le modèle de P.J. O'Rourke [67] .

Finalement, ces modèles seront couplés à la simulation des grandes échelles pour la phase gazeuse ce qui permettra d'obtenir la dynamique des gouttes à l'aide de méthodes Lagrangiennes. La vitesse du gaz sera conditionnée par la présence de liquide. Les résultats de simulation seront comparés à ceux obtenus dans la littérature.

## Chapitre 2 Modèle stochastique d'atomisation d'un jet assisté par air

Dans le paragraphe 1.5, nous avons schématisé brièvement l'approche que nous avons choisie d'utiliser pour modéliser l'atomisation d'un jet liquide. Celle-ci suppose que pendant l'évolution du jet au voisinage de l'injecteur, l'épaisseur caractéristique du liquide non-fragmenté varie en aval suivant l'hypothèse de symétrie d'échelle. Dans cette partie, nous allons tout d'abord résumer les universalités de la fragmentation à fréquence constante dans les conditions d'une symétrie d'échelle, puis nous allons dériver un processus stochastique qui correspond à ces universalités afin de modéliser la configuration du cœur liquide.

### 1.7 Hypothèse de symétrie d'échelle

On trouve le phénomène de fragmentation dans de nombreux processus : la cascade énergétique en turbulence, la pulvérisation de gouttes, la dégradation de polymères, le broyage de pierre, .... En général, la fragmentation d'un objet matériel (une particule solide, une goutte, un tourbillon, ...) est un processus stochastique conduisant par étapes successives à la production d'objets de tailles réduites. Vue les nombreuses applications, il est souhaitable de décrire les propriétés essentielles de la fragmentation et de les modéliser dans le cadre d'un modèle très simple. Un exemple a été proposé par A.N. Kolmogorov en 1941[47].

Dans ce travail, A.N. Kolmogorov considère la fragmentation de particules solides de carbone comme un processus aléatoire discret. Il fait l'hypothèse que la probabilité de briser chaque particule mère en un nombre donné de fragments est indépendante de la taille de la particule mère. En utilisant le théorème de la limite centrale, il prédit que, après un nombre élevé d'événement de fragmentation, ce processus discret devrait faire émerger une distribution log-normale pour la distribution des tailles des particules. En utilisant une formulation en terme

d'échelle, Le scenario de A.N. Kolmogorov indique que chaque processus de fragmentation réduit la taille typique des fragments,  $r \Rightarrow \alpha r$ , par un facteur aléatoire  $\alpha$ , positif et indépendant de  $r$  ( $0 < \alpha < 1$ ), gouverné par la fonction de distribution  $q(\alpha)$  appelé spectre de fragmentation normalisé de telle sorte que  $\int_0^1 q(\alpha) d\alpha = 1$ .

Une alternative au processus stochastique discret de A.N. Kolmogorov est donnée par les modèles mathématiques décrits dans [29], [78], [18], [19], [113], [56] et 0 qui sont basés sur la solution analytique de l'équation de fragmentation. Ceux-ci ne font pas appel au théorème de la limite centrale.

Ce type d'approche continue n'est pas une variante de la cascade de fragmentation de A.N. Kolmogorov. Dans les modèles discrets, le nombre d'évènements de fragmentation augmente dans le temps. Dans les modèles continus, c'est la distribution des tailles des particules qui évolue de façon continue dans le temps. Cela permet d'identifier les nouvelles caractéristiques de la fragmentation aux temps longs. Celles-ci diffèrent des prédictions obtenues par l'approche de A.N. Kolmogorov.

Les articles cités ci-dessus montrent une solution asymptotique de l'équation de fragmentation quand la fréquence de fragmentation est une fonction de puissance des tailles caractéristiques,  $\nu(r) \propto r^\lambda$ . Deux cas,  $\lambda < 0$  et  $\lambda > 0$  sont considérés. En pratique, il existe un autre cas où la fréquence est constante, c'est-à-dire  $\lambda = 0$ .

Les solutions obtenues dans la littérature deviennent discontinues si on impose  $\lambda \rightarrow 0$ . Pour remédier à ce problème, la fragmentation à fréquence constante a été analysée par M. Gorokhovski & V. Saveliev [34]. Ci-dessous nous résumons leurs résultats.

Dans le cas où la fréquence  $\nu$  de fragmentation est constante, l'équation cinétique de fragmentation pour la fonction de distribution  $f(r, t)$ , normalisée de telle sorte que  $\int_0^\infty f(r) dr = 1$ , prend la forme suivante :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f(r)}{\partial t} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{r}{\alpha}\right) q(\alpha) d\alpha - f(r) \quad (2.1)$$

La solution stationnaire de cette équation,  $f(r) = \int_0^1 \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{r}{\alpha}\right) q(\alpha) d\alpha$ , est une distribution de Dirac :

$$f(r) = \delta(r) \quad (2.2)$$

On peut se poser la question suivante: Comment la distribution  $f(r, t)$  évolue-t-elle vers l'état stable final sous la forme d'une distribution de Dirac?

Puisque la solution de l'équation de fragmentation (2.1) nécessite la connaissance de  $q(\alpha)$ , qui est, par principe, inconnu, il n'est pas possible de répondre totalement à cette question. Par contre, à cause de la symétrie d'échelles, l'évolution de  $f(r, t)$  passe par au moins deux distributions asymptotiques intermédiaires. L'évaluation de ces distributions ne nécessite pas la connaissance du spectre entier de  $q(\alpha)$ , mais uniquement de ses deux premiers moments logarithmiques. Aux temps longs, le comportement de la solution de l'équation (2.1) est uniquement déterminé par le rapport de ces deux moments.

Ceci se démontre de la façon suivante. La solution de (2.1) est :

$$f(r, t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \ln^2 \alpha \rangle \nu t}} \exp\left(-\frac{\langle \ln \alpha \rangle^2}{2 \langle \ln^2 \alpha \rangle} \nu t\right) \exp\left(-\frac{\left(\ln \frac{r}{R}\right)^2}{2 \langle \ln^2 \alpha \rangle \nu t}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{1-\frac{\langle \ln \alpha \rangle}{\langle \ln^2 \alpha \rangle}} \quad (2.3)$$

où  $R = \exp(\langle \ln r \rangle_0)$  indique l'échelle initiale de taille et  $\langle \ln^l \alpha \rangle = \int_0^1 \ln^l \alpha q(\alpha) d\alpha$ .

Cette expression confirme le résultat majeur de A.N Kolmogorov [47] concernant la forme asymptotique log-normale de la fonction de distribution de tailles lors de la fragmentation avec symétrie d'échelle. Cette première universalité implique que, quel que soit le spectre de fragmentation  $q(\alpha)$ , l'évolution de la PDF de taille  $f(r, t)$ , à partir de sa distribution initiale  $f(r_0)$  vers des tailles plus petites, est gouvernée par un processus log-normal avec deux paramètres. Ces paramètres sont les deux premiers moments logarithmiques de  $q(\alpha)$ ,  $\langle \ln \alpha \rangle$  et  $\langle \ln^2 \alpha \rangle$ .

Simultanément, l'équation (2.3) montre que pour des temps plus longs, le facteur propre à la distribution log-normale tend vers une valeur unitaire. La distribution des tailles de particules est alors déterminée par une loi de puissance avec un paramètre universel unique:  $\langle \ln \alpha \rangle / \langle \ln^2 \alpha \rangle$ :

$$f(r, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\propto} \left(\frac{1}{r}\right)^{1-\frac{\langle \ln \alpha \rangle}{\langle \ln^2 \alpha \rangle}} \quad (2.4)$$

Cela exprime la seconde universalité : à longue échéance, la fragmentation s'organise de telle sorte que la distribution des rayons suit un comportement puissance (fractal) piloté par le paramètre

$\langle \ln^2 \alpha \rangle / \langle \ln \alpha \rangle$  sans jamais atteindre le pic de Dirac (2.2) (la distribution devient de plus en plus raide, par conséquent la possibilité de sa normalisation se limite au cours du temps).

La première universalité permet d'obtenir de façon exacte une équation de type Fokker-Planck sans appliquer l'hypothèse classique que les moments  $\langle \ln^k \alpha \rangle$ ,  $k > 2$  sont petits [82], [44]. En effet, en développant  $\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{r}{\alpha}, t\right)$  en puissance de  $\ln \alpha$  [85] :

$$\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{r}{\alpha}, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^n f(r, t) \ln^n \alpha \quad (2.5)$$

l'équation (2.1) prend la forme :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = -\frac{\langle \ln \alpha \rangle}{1!} \frac{\partial}{\partial r} r f(r, t) + \frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{2!} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r f(r, t) - \frac{\langle \ln^3 \alpha \rangle}{3!} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r f(r, t) + K \quad (2.6)$$

Même si chaque terme de la partie droite de l'équation (2.6) peut être significatif, la première universalité implique qu'à longue échéance, les termes avec  $\langle \ln^k \alpha \rangle$  pour  $k > 2$  n'interviennent pas dans la solution et s'annulent. Par conséquent, l'équation (2.6) prend la forme suivante :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f(r)}{\partial t} = -\langle \ln \alpha \rangle \frac{\partial}{\partial r} (r f(r)) + \frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (r f(r)) \right) \quad (2.7)$$

Soit  $f_0(r_0)$  une distribution initiale de tailles de gouttes, la solution de (2.7) s'écrit :

$$f(r, t) = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \ln^2 \alpha \rangle \nu t}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\ln \frac{r_0}{r} + \langle \ln \alpha \rangle \nu t)^2}{2 \langle \ln^2 \alpha \rangle \nu t}\right) f_0(r_0) dr_0 \quad (2.8)$$

Supposons maintenant que la distribution initiale est une distribution de Dirac centrée sur l'échelle initiale des gouttes  $R$  :

$$f_0(r_0) = \delta(r_0 - R)$$

Dans ce cas, la solution de (2.7) devient une fonction log-normale :

$$f(r,t) = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \ln^2 \alpha \rangle v t}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\ln \frac{R}{r} + \langle \ln \alpha \rangle v t)^2}{2 \langle \ln^2 \alpha \rangle v t}\right) \quad (2.8)$$

Une signification possible de  $\langle \ln \alpha \rangle$  et  $\langle \ln^2 \alpha \rangle$  a été proposée par M.Gorokhovski [35]. La loi de puissance (2.4) implique que, quand le temps tend vers l'infini, la distribution des tailles des particules produites présente une forme fractale. En posant  $x = \ln r$  dans l'équation (2.4), on peut écrire :

$$T(x) = r \cdot f(r,t) \underset{t \rightarrow \infty}{\propto} e^{-\frac{x}{h}} \quad (2.9)$$

où

$$h = -\frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{\langle \ln \alpha \rangle} \quad (2.10)$$

L'équation (2.9) indique que, dans l'espace des  $x = \ln r$ , la distribution puissance asymptotique est identique à la distribution de Boltzmann pour des particules Browniennes dans un champ de potentiel. Cela permet d'identifier  $\langle \ln^2 \alpha \rangle / \langle \ln \alpha \rangle$  en utilisant la théorie d'Einstein sur le mouvement Brownien.

Dans cette théorie, le coefficient de diffusion dans l'équation de Fokker-Planck est représenté par le produit *mobilité\*énergie* alors que la vitesse de dérive est donnée par le produit *mobilité\*force*. Leur rapport définit donc une échelle de longueur typique. Si maintenant on se place dans l'espace des logarithmes, l'équation (2.7) prend la forme de l'équation d'Einstein :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -v \langle \ln \alpha \rangle \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \frac{v \langle \ln^2 \alpha \rangle}{2} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

où, par analogie, le rapport  $\langle \ln^2 \alpha \rangle / \langle \ln \alpha \rangle$  correspond à l'échelle de longueur typique adimensionnée dans l'espace des logarithmes de  $r$  :

$$\frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{\langle \ln \alpha \rangle} = \ln \left( \frac{r_*}{r_0} \right) \quad (2.10)$$

A chaque instant, les valeurs du rapport (2.10) permettent de déduire qualitativement l'allure de la fonction de distribution dans (2.9) : les valeurs grandes de ce rapport correspondent à une distribution constituée en majorité de fragments de grandes tailles, alors que les valeurs faibles de ce rapport correspondent à une distribution contenant un nombre plus élevé de fragments de petites tailles. On suppose que l'échelle  $r_0$  correspond à la taille initiale à partir de laquelle le processus de fragmentation avec symétrie d'échelle a été déclenchée, alors que  $r_*$  indique une échelle à partir de laquelle cette symétrie se brise (comme par exemple, l'échelle de Taylor dans la turbulence, où les forces de viscosité interviennent afin de résister à la cascade).

Ce formalisme décrit donc l'évolution de la fonction de distribution des échelles caractéristiques des fragments en fonction de 3 paramètres qui doivent être déterminés par les mécanismes physiques responsables de la fragmentation : la fréquence  $\nu$ , et les deux premiers moments logarithmiques du spectre de  $\alpha$ .

## 1.8 Processus log-brownien

A partir de (2.9), on peut écrire une équation stochastique pour chaque échelle. La démonstration rigoureuse de cette équation à partir de (2.7) est la suivante.

L'équation de type Langevin sous forme générale s'écrit :

$$\dot{r} = h(r, t) + g(r, t)\Gamma(t) \quad (2.11)$$

où  $\Gamma(t)$  est la force de Langevin supposée Gaussienne de moyenne nulle et telle que :

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \Gamma(t')\Gamma(t) \rangle = 2\delta(t-t') \quad (2.12)$$

D'autre part, en utilisant les deux premiers coefficients non nuls du développement de Kramers Moyal[82], l'équation de Fokker-Planck sous sa forme générale est :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( h + g \frac{\partial g}{\partial r} \right) f + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (g^2 f) \quad (2.13)$$

qui peut être écrite comme :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -h + g \frac{\partial g}{\partial r} \right) f + \frac{\partial}{\partial r} \left( g^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (2.14)$$

Ainsi, en réécrivant l'équation (2.7) comme :

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\langle \ln \alpha \rangle + \frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{2} \right) r f + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{2} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (2.15)$$

et en la comparant à l'équation (2.14), on obtient l'équation suivante :

$$\mathfrak{K} = \nu \langle \ln \alpha \rangle r + \sqrt{\frac{\nu \langle \ln^2 \alpha \rangle}{2}} r \Gamma(t) \quad (2.16)$$

Dans l'espace de  $x = \ln r$ , cette équation représente un mouvement brownien gouverné par l'équation stochastique de type Langevin :

$$\mathfrak{K} = \nu \langle \ln \alpha \rangle + \sqrt{\frac{\nu \langle \ln^2 \alpha \rangle}{2}} \Gamma(t) \quad (2.17)$$

L'équation (2.17) correspond à l'évolution stochastique de l'échelle  $r(x, t)$  obéissant à l'hypothèse de symétrie d'échelle.

## 1.9 Conclusion

Dans cette partie, nous avons décrit les équations issues de l'application de l'hypothèse de symétrie d'échelle pour la fragmentation d'une échelle de longueur  $r(x, t)$ . Ces équations aboutissent à la formulation d'un processus log-brownien. Celui-ci est exprimé sous deux formes :

- La forme (2.7) décrivant l'évolution de la fonction de distribution de l'échelle  $r(x, t)$ .
- La forme (2.17) décrivant l'évolution de l'échelle  $r(x, t)$ .

Ces deux expressions dépendent de 3 paramètres :

- La fréquence de fragmentation  $\nu$
- $\langle \ln \alpha \rangle$  et  $\langle \ln^2 \alpha \rangle$  qui sont déterminés par la relation (2.10)

Ces paramètres peuvent être reliés aux grandeurs physiques caractérisant la fragmentation. La fréquence introduit en effet le temps caractéristique du mécanisme et les deux autres paramètres deux échelles typiques à déterminer. Ce formalisme sera appliqué par la suite à la modélisation de la fragmentation du liquide dans un jet assisté par air. Les mécanismes responsables de l'atomisation seront identifiés et permettront de déterminer les paramètres  $\nu$ ,  $\langle \ln \alpha \rangle$ ,  $\langle \ln^2 \alpha \rangle$ . Cependant, il est nécessaire de décrire l'écoulement de gaz. Cet écoulement étant turbulent dans les conditions que nous souhaitons simuler ( $Re_g \sim 8.10^4$ ), nous avons choisi d'utiliser la simulation des grandes échelles pour le résoudre. Le formalisme que nous avons utilisé va maintenant être décrit.

# Chapitre 3 Calcul méthodique d'un jet gazeux rond turbulent injecté dans un environnement au repos ; application d'une méthode de type *LES*

Dans le paragraphe 1.4, nous avons présenté les différentes approches numériques utilisées pour les écoulements diphasiques. Nous avons choisi d'utiliser la simulation des grandes échelles. La procédure consiste dans un premier temps à résoudre un jet de gaz turbulent par LES. Nous présenterons donc le formalisme associé à cette approche. Afin de valider nos résultats nous montrerons également des comparaisons avec des résultats expérimentaux et de simulation numérique directe.

## 1.10 Approche de type LES

### 1.10.1 Bref rappel sur les échelles typiques employées pour la turbulence et la simulation.

En général, un écoulement à grand nombre de Reynolds est caractérisé par un large spectre d'échelles de longueurs (ou de temps). Au cours du temps ces échelles caractéristiques interagissent de façon très complexe, traduite par les équations de Navier-Stokes dans une configuration incompressible:

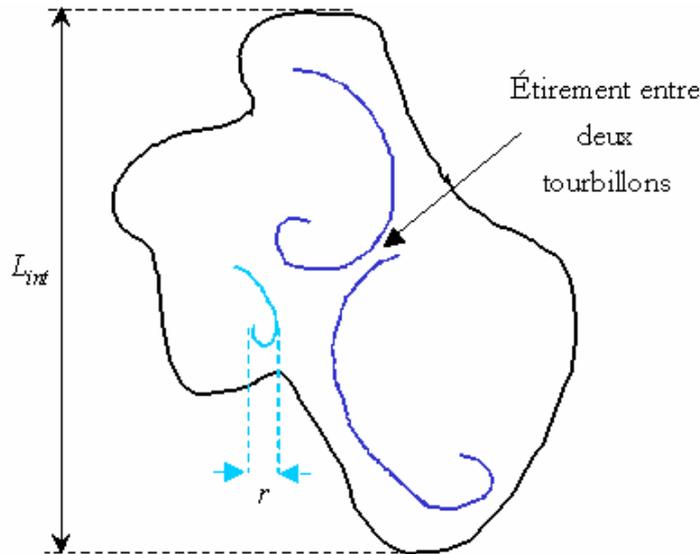
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

où  $\tau_{ij} = 2\nu S_{ij} = \nu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  représente la contrainte visqueuse,  $u_i$  est le vecteur de vitesse,  $P$ ,  $\rho$ , et  $\nu$  sont respectivement la pression, la densité et la viscosité cinématique du fluide.

Dans un tel écoulement, en moyenne, les échelles spatiales des plus grands tourbillons sont limitées par la géométrie d'écoulement (diamètre d'un tube, l'épaisseur de la couche limite, l'épaisseur d'un jet ...). Les dimensions des plus petits tourbillons sont typiquement liées au phénomène de dissipation visqueuse d'énergie cinétique en énergie thermique des molécules. En augmentant le nombre de Reynolds d'un écoulement, la taille de ces dernières devient plus petite. Cela fait apparaître un problème. Si pour une réalisation d'écoulement, on veut résoudre le spectre entier d'échelles turbulentes, chaque augmentation du nombre de Reynolds nécessite une nouvelle puissance d'ordinateur, « proportionnelle » à ce nombre de Reynolds. Dans cette situation, la pratique habituelle est de considérer une turbulence homogène stationnaire et d'introduire dans cette turbulence les universalités d'interactions turbulentes aux petites échelles, non accessibles par la résolution numérique à partir des équations de Navier-Stokes. Ensuite, la contribution effective aux petites échelles est couplée avec les variables moyennes aux échelles accessibles.

La théorie de Kolmogorov-Oboukhov, 1941 [46] d'une turbulence homogène est largement appliquée à des calculs d'écoulement turbulents. Dans cette théorie, la turbulence est considérée comme un nuage de particules fluides stochastiques corrélées et divergeant, en moyenne, les unes par rapport aux autres. Pour une paire de particules donnée, les tourbillons d'une taille inférieure à cette séparation contribuent peu à l'écartement des particules fluides. Les tourbillons d'une taille supérieure à cette séparation transportent deux particules ensemble. Seule la contribution des tourbillons d'une taille de l'ordre de la distance entre les deux particules est considérée comme essentielle pour la séparation entre deux particules. La turbulence est alors considérée comme un nuage de particules fluides où chaque couple de particules diverge de façon identique. Dès que la distance entre deux particules devient supérieure à une certaine distance  $L_{int}$  (que l'on appelle l'échelle intégrale), les particules fluides ne sont plus corrélées. Les effets d'étirement provoquent le transfert d'énergie cinétique fournie aux grandes échelles vers les échelles de plus en plus petites (figure. 3.1).



**Fig. 3.1.** Représentation schématique du transfert turbulent dans la cascade.

Kolmogorov a introduit les universalités pour un tel transfert : le taux de transmission d'énergie cinétique est, en moyenne, le même pour la plupart des tailles de tourbillons :

$$-\frac{d(\Delta_L u)^2}{dt} = \frac{(\Delta_r u)^2}{\tau_r} = \frac{(\Delta_r u)^3}{r} = \varepsilon_r = \varepsilon \quad (3.3)$$

où  $\Delta_L u$  représente l'incrément de vitesse entre deux particules fluides espacées d'une distance  $L$ ,  $\tau_r$  est l'échelle de temps associée à l'échelle de longueur  $r$ , et  $\varepsilon$  est le taux de dissipation visqueuse.

Par contre, dans la région dissipative, Kolmogorov a fait intervenir les effets de viscosité :

- L'échelle la plus petite en moyenne est donc introduite à partir de la viscosité et du taux de dissipation visqueuse  $r_{\min} = r_{\min}(v, \varepsilon)$ , elle est appelée échelle de Kolmogorov et son expression est donnée par :

$$\eta \equiv \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (3.4)$$

- Les échelles de temps et de vitesse associées aux structures de taille  $\eta$  (échelle de Kolmogorov) peuvent alors être obtenues :  $\tau_\eta \equiv \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}$  et  $(\Delta_\eta u)^2 \equiv (\varepsilon \nu)^{1/2}$ .

- $\text{Re}_\eta = \frac{(\Delta_\eta u) \eta}{\nu} = 1$  et  $\frac{(\Delta_\eta u)}{\eta} = \frac{1}{\tau_\eta}$

Il s'ensuit de la théorie de Kolmogorov, que :

- $\frac{L_{\text{int}}}{\eta} \approx \text{Re}_L^{3/4}$  (3.5)

- $\frac{(\Delta_L u)}{(\Delta_\eta u)} \approx \text{Re}_L^{1/4}$  (3.6)

- $\frac{T}{\tau_\eta} \approx \text{Re}_L^{1/2}$  (3.7)

- $\frac{\Delta_r u}{r} \approx \varepsilon^{1/3} r^{-2/3}$  (3.8)

où  $\text{Re}_L$  est le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale et  $T$  est l'échelle de temps associée aux plus grands tourbillons.

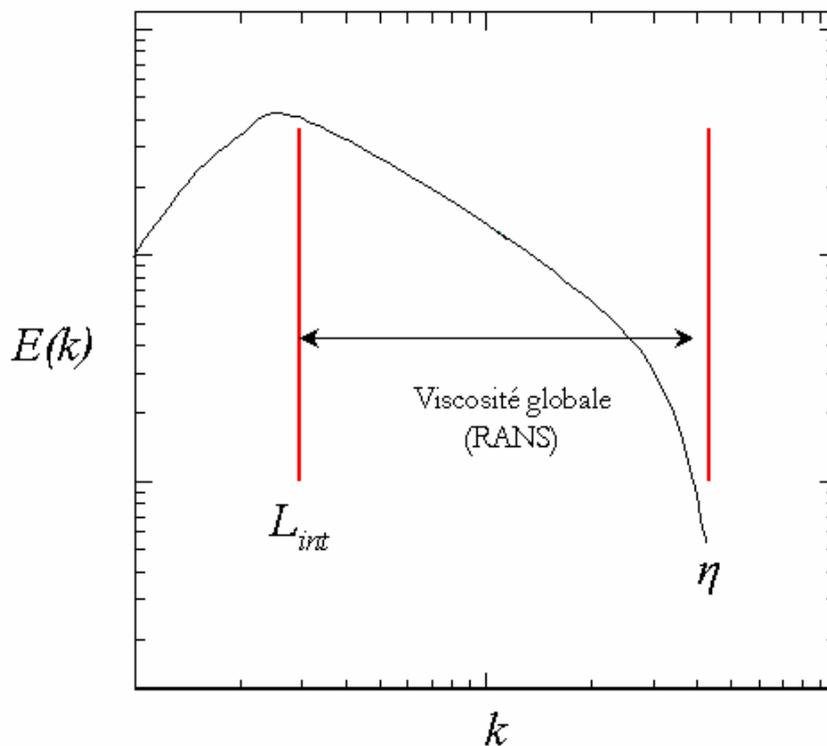
Notons maintenant, que pour résoudre les échelles dissipatives il faut un nombre de points égal à  $N^3 \approx \left(\frac{L_{\text{int}}}{\eta}\right)^3 \approx \left(\text{Re}_L^{3/4}\right)^3$ . Par exemple, pour  $\text{Re}=10^5$ , le nombre de points est de l'ordre de  $1.7 \cdot 10^{11}$ , pour  $\text{Re}=10^7$ , il est de l'ordre de  $5.6 \cdot 10^{15}$ , il est donc très coûteux en terme de ressource informatique d'effectuer de tels calculs. Pour modéliser un écoulement turbulent à un grand nombre de Reynolds, on distingue 2 grandes classes de méthode : les méthodes de types RANS (Reynolds Average Navier-Stokes) et de type LES (Large Eddy Simulation).

Dans la première, le RANS classique, toute sorte d'instationnarité est considérée comme turbulence. On suppose que le taux de transmission d'énergie cinétique est le même, en moyenne, pour la plupart des tourbillons, donc pour la plupart des échelles. Suivant ce raisonnement, le comportement des structures de tailles comprises entre les échelles intégrale et de Kolmogorov peut être modélisé de sorte que l'effet de la turbulence soit traité de façon globale pour toutes les échelles de l'écoulement (figure 3.2). Le caractère instationnaire de l'écoulement est donc vu comme une part de la turbulence et les quantités turbulentes sont traitées de façon statistique. Les

équations de Navier Stokes sont donc moyennées et les variables propres à l'écoulement (vitesse, pression) sont décomposées en une composante moyenne et une composante fluctuante:

$$u_i(x,t) = \langle u_i(x,t) \rangle + u_i'(x,t) \quad (3.9)$$

où  $\langle u_i(x,t) \rangle$  désigne la composante moyenne du champ de vitesse et  $u_i'(x,t)$  sa composante fluctuante.



**Fig. 3.2.** Spectre d'énergie turbulente et hypothèse formulée en RANS.

L'énergie cinétique de l'écoulement peut alors être calculée comme :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E(k) dk = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle u_i'^2 \rangle \quad (3.10)$$

Ainsi, la connaissance des grandeurs intégrales  $L_{int}$  et  $K$  permet de caractériser la turbulence dans l'écoulement et l'effet global de la turbulence est ajouté à l'écoulement laminaire.

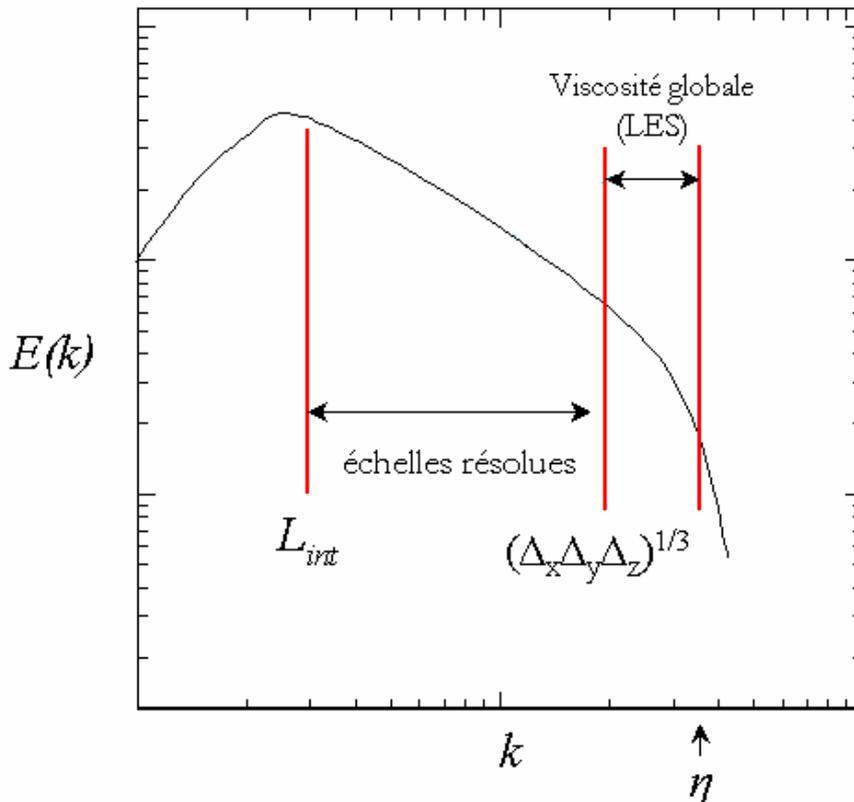
En utilisant la décomposition (3.9) dans les équations (3.1) et (3.2) puis en moyennant, on obtient:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial [\langle \tau_{ij} \rangle - \langle u_i' u_j' \rangle]}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

Ce système est alors non fermé et différents modèles ont été proposés pour le terme  $\langle u_i' u_j' \rangle$ . On peut citer par exemple les modèles  $K - \varepsilon$  ou de longueur de mélange. Ces modèles font intervenir une viscosité turbulente. Celle-ci a pour but de représenter l'influence des fluctuations de vitesse. Les variables mises en jeu sont les grandeurs intégrales telle que  $L_{int}$ ,  $K$  et  $\varepsilon$ . Les équations (3.11) et (3.12) sont donc résolues avec un modèle pour les grandeurs turbulentes moyennes. Par conséquent, l'information obtenue porte sur le champ de vitesse moyen et le caractère instationnaire de l'écoulement est traité de façon statistique. Par exemple, la présence d'une structure dans l'écoulement et son évolution sont traitées en terme de réalisations statistiques. Le résultat obtenu est alors la moyenne sur l'ensemble de ces réalisations. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas un maillage trop précis, puisque les différents phénomènes turbulents sont contenus dans la modélisation du terme non linéaire. En revanche, la présence instantanée d'une zone de forte vortacité ou de fort cisaillement n'est traitée qu'en terme de moyenne.

La deuxième méthode, appelée simulation des grandes échelles (LES) a été proposée par Deardorff [22]. Elle repose sur le fait que les grandes structures de l'écoulement n'ont pas un comportement universel et leur dynamique instationnaire peut être résolue à partir des équations de Navier Stokes filtrées. L'hypothèse formulée pour le RANS n'est donc plus valide. Par contre, aux petites échelles, on suppose que les variations du champ de vitesse sont tellement rapides par rapport à celles des grandes échelles que l'on peut introduire les universalités de Kolmogorov. Par conséquent, à l'échelle de temps typique pour les grandes structures, la turbulence aux petites échelles peut être considérée comme statistiquement isotrope et universelle. Le paramètre dominant est alors la quantité d'énergie injectée à partir des grandes structures. Le comportement des structures plus petites que la taille du filtre  $(\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^3$  est traité de façon globale comme indiqué sur la figure 3.3.



**Fig. 3.3.** Spectre d'énergie turbulente et hypothèse formulée en LES.

Dans cette situation, l'approche LES propose:

- 1- De filtrer les équations de Navier Stokes (3.1) et (3.2) afin de séparer les contraintes des grandes et petites structures turbulentes sur la dynamique générale de l'écoulement.
- 2- De résoudre numériquement les grandes amplitudes de vitesse à partir des équations filtrées.
- 3- De modéliser en même temps la contribution de la turbulence aux échelles non résolues.

Dans le cas où la simulation des grandes structures n'est pas très sensible à la façon dont la turbulence en sous-maille est modélisée, l'avantage de l'approche de type LES est évident: on obtient les propriétés importantes de l'écoulement turbulent pour un investissement informatique réduit par rapport à la DNS. Nous chercherons ici à proposer un modèle pour la globalité du spray. Cela signifie qu'il nous faudra simuler un grand domaine tout en prenant en compte les effets instationnaires dus à la turbulence. Nous utiliserons donc une méthode de type LES pour la phase gazeuse que nous allons maintenant présenter.

### 1.10.2 Equations filtrées

La définition d'une vitesse filtrée est la suivante :

$$\bar{u}_i(x,t) = \int u_i(\xi,t) G_{\bar{\Delta}}(\xi-x) d\xi \quad (3.13)$$

où  $G_{\bar{\Delta}}$  est une fonction de filtrage. Il existe plusieurs fonctions de filtrage : le filtre gaussien, le filtre de coupure de Fourier ... ( U. Piomelli [73]). Le filtre le plus simple est le filtre chapeau défini par :

$$G_{\bar{\Delta}}(\xi-x) = \begin{cases} 1/\bar{\Delta}, & |\xi-x| < \bar{\Delta}/2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.14)$$

ici  $\bar{\Delta}$  est une longueur caractéristique de filtrage qui est proportionnelle à la taille d'une maille du maillage.

Le filtrage des équations (3.1) et (3.2) donne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

Le deuxième terme non linéaire dans l'équation filtrée (3.16) contient le tenseur  $\overline{u_i u_j}$ . Pour obtenir la solution de (3.15)-(3.16) il faut fermer ce terme. Une des possibilités est de décomposer le champ de vitesse instantanée en deux parties : un champ à grande échelle (champ résolu) et un champ résiduel (champ modélisé) :

$$u_i(x,t) = \bar{u}_i(x,t) + u_i'(x,t) \quad (3.17)$$

Dans ce cas, l'équation (3.16) s'écrit formellement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij} - \tau'_{ij})}{\partial x_j} \quad (3.18)$$

où  $\overline{\tau}_{ij} = 2\nu\overline{S}_{ij} = \nu(\partial\overline{u}_i/\partial x_j + \partial\overline{u}_j/\partial x_i)$  est le tenseur des contraintes du champ résolu et

$\tau'_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$  est le tenseur des contraintes de sous-maille. Ce dernier peut être décomposé comme  $\tau'_{ij} = (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) + (\overline{u_i u'_j} + \overline{u'_i u_j}) + \overline{u'_i u'_j}$  où les termes représentent respectivement l'effet de l'interaction entre les champs résolus à deux échelles différentes (le tenseur de Leonard), l'interaction entre le champ résolu et le champ résiduel (le transfert d'énergie vers les échelles plus petites) et l'interaction au niveau du champ résiduel (la contrainte de Reynolds en sous-maille).

### 1.10.3 Modèle de Smagorinsky.

Chaque composante du tenseur  $\tau'_{ij}$  représente un phénomène très complexe ce qui rend difficile leur fermeture. On modélise généralement la contribution générale de toutes ces composantes sous la forme d'une dissipation effective au niveau des échelles résolues (le modèle de viscosité de sous-maille de J. Smagorinsky [91]).

$$\tau'_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \tau'_{kk} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} \quad (3.19)$$

$$\nu_t = C\overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \quad (3.20)$$

où  $|\overline{S}| = (2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2}$  et  $C$  est un paramètre à déterminer. Dans l'approche classique de Smagorinsky on introduit la constante  $C_s = \sqrt{C}$ .

Avec (3.20), l'équation de bilan de quantité de mouvement (3.18) s'écrit :

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial 2(\nu + \nu_t)\overline{S}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.21)$$

où  $\overline{p}$  s'exprime comme  $\overline{p} = \overline{P}/\rho + 1/3 \tau'_{kk}$ .

Dans le cas d'une turbulence isotrope et homogène, la valeur recommandée pour le paramètre  $C_s$  est comprise entre 0.18 et 0.23 [57] (donc  $C \cong 0.032 - 0.053$ ). Cependant, cette valeur n'est pas universelle, elle dépend du type d'écoulement. Par exemple, pour le calcul d'un écoulement en canal, J. W. Deardorff [22] a montré que  $C_s = 0.1$ . En général, là où la turbulence n'est plus isotrope et homogène, l'usage du paramètre  $C$  constant ne semble plus approprié. La modélisation d'écoulements avec des zones de transition à la turbulence développée (au voisinage des parois ou dans une couche de mélange par exemple) nécessite l'utilisation d'une procédure dynamique qui ajuste le paramètre  $C$ . Une approche basée sur une similarité

d'échelles a été proposée par M. Germano et *al.*[31]. Dans cette approche, on suppose que l'interaction entre la composante inférieure du champ résolu et la composante supérieure du champ non résolu est invariante dans le spectre de la cascade turbulente. Nous allons maintenant décrire cette procédure dynamique.

#### 1.10.4 Procédure dynamique de M. Germano.

Dans la procédure dynamique, on introduit un deuxième filtrage  $G_{\tilde{\Delta}}$  appelé filtre-test. La longueur caractéristique de ce filtre  $\tilde{\Delta}$  est supposée plus large que celle du filtre initial,  $\bar{\Delta}$ . L'application du filtre-test aux équations de Navier-Stokes déjà filtrées une fois (3.15) et (3.16) donne:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{t}_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.23)$$

où  $\tilde{t}_{ij}^{(1)} = \overline{u_i u_j}$

Par analogie avec l'équation filtrée (3.16), on peut introduire le tenseur des contraintes de « sous-test »  $T_{ij}' = \tilde{t}_{ij}' - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$ . Suite à l'hypothèse de similarité d'échelles, ce tenseur peut être également représenté dans le cadre du modèle de J. Smagorinsky avec le même paramètre  $C$  :

$$T_{ij}' - 1/3 \delta_{ij} T_{kk}' = -2C \tilde{\Delta}^2 \left| \tilde{S} \right| \tilde{S}_{ij} \quad (3.24)$$

Par ailleurs, on peut aussi appliquer le filtre-test à la définition de  $\tau_{ij}'$  par le modèle de J. Smagorinsky :

$$\tilde{\tau}_{ij}' - 1/3 \delta_{ij} \tilde{\tau}_{kk}' = -2C \bar{\Delta}^2 \tilde{\mathcal{G}}_{ij} \quad (3.25)$$

où  $\mathcal{G}_{ij} = \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij}$

D'après les définitions de  $\tilde{\tau}_{ij}'$  et  $T_{ij}'$ , la différence de ces tenseurs représente l'interaction des champs résolus aux différentes échelles de filtrage :

$$T_{ij}' - \tilde{\tau}_{ij}' = L_{ij} = \tilde{t}_{ij}^{(2)} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (3.26)$$

où  $\tilde{t}_{ij}^{(2)} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}$

En y substituant les deux équations précédentes, on obtient une expression permettant de trouver le paramètre  $C$  :

$$L_{ij} - 1/3\delta_{ij}L_{kk} = -2C\bar{\Delta}^2 M_{ij} \quad (3.27)$$

où

$$M_{ij} = \tilde{g}_{ij} - \left(\frac{\tilde{\Delta}}{\bar{\Delta}}\right)^2 \tilde{S}_{ij} \quad (3.28)$$

Pour obtenir  $C$ , ce système est surdéterminé. C'est pourquoi D.K. Lilly [54] a proposé d'appliquer la méthode des moindres carrés. Il définit:

$$Q = \left( L_{ij} - 1/3\delta_{ij}L_{kk} - 2C\bar{\Delta}^2 M_{ij} \right)^2 \quad (3.29)$$

où le minimum de  $Q$  ( $\partial Q/\partial C = 0$ ) se réalise à :

$$C\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{2} \frac{L_{ij}M_{ij}}{M_{ij}M_{ij}} \quad (3.30)$$

Dans les calculs pratiques, la valeur de  $C$  peut être tant positive que négative et provoquer des instabilités numériques. Une des possibilités pour éviter ce problème est d'utiliser l'expression (3.30) en terme de moyenne sur les domaines où l'écoulement est supposé homogène :

Par exemple, à chaque instant, dans le cadre d'une simulation d'un jet complètement développé, les moyennes sont calculées sur la direction azimutale en coordonnées cylindriques, alors que pour une simulation de turbulence homogène isotrope, elles sont obtenues sur tout le domaine de calcul.

$$C\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij}M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij}M_{ij} \rangle} \quad (3.31)$$

Finalement, le calcul de la viscosité turbulente ne dépend que du rapport des épaisseurs du filtre-test et du filtre initial  $\xi = \tilde{\Delta}/\bar{\Delta}$  via l'expression pour  $M_{ij}$  (1.30). Dans nos calculs, ce rapport est toujours  $\xi = 2$  et les épaisseurs de filtre seront déterminées comme :

$$\bar{\Delta}^3 = \bar{\Delta}_1\bar{\Delta}_3, \quad \tilde{\Delta}^3 = \tilde{\Delta}_1\tilde{\Delta}_3 \quad (3.32)$$

où  $\bar{\Delta}_i$  est un espacement de maillage dans la direction  $i$  et  $\tilde{\Delta}_i = 2\bar{\Delta}_i$ .

La transition du champ résolu  $\bar{u}(i, j, k)$  au champ attribué au filtre-test  $\tilde{u}(i, j, k)$  est réalisée numériquement en appliquant la formule d'intégration de Simpson. Par exemple, pour le filtrage dans la direction  $x$  on applique (en supposant le maillage uniforme):

$$\tilde{u}(i, j, k) = \frac{1}{6}\bar{u}(i-1, j, k) + \frac{2}{3}\bar{u}(i, j, k) + \frac{1}{6}\bar{u}(i+1, j, k) \quad (3.33)$$

Des expressions similaires sont utilisées pour toutes les autres quantités.

## 1.11 Résultats du calcul d'un jet rond

Dans cette partie, nous allons présenter différents résultats sur les jets ronds turbulents existants dans la littérature. Nous nous appuyerons sur des travaux théoriques ([104], [87] et [7]), expérimentaux ([108], [69], et [42]) et numérique ([14]). Nous expliquerons alors le choix de la configuration, du domaine ainsi que des conditions limites retenues. Nous utiliserons un système de coordonnées cylindriques. Dans ce repère, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right\} \\ \frac{Du_\theta}{Dt} - \frac{u_\theta u_r}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \nabla^2 u_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \\ \frac{Du_x}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \nabla^2 u_x \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial}{\partial x}$$

et

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

### 1.11.1 Résumé des résultats théoriques et expérimentaux.

Les études théoriques portent sur un jet turbulent dans une configuration axisymétrique. On observe, à la sortie du gaz, un cône potentiel sur une longueur  $x_c$  comme indiqué sur la figure 1.1. A l'extérieur de ce cône se développe une zone de mélange. Après une région de transition en aval où la couche de mélange annulaire « fusionne » sur l'axe, on trouve une zone où le jet est dit pleinement développé. Celle-ci est caractérisée par une intensité turbulente constante sur l'axe, soit  $u'_1/U_c = \text{const}$ , où  $U_c$  désigne la vitesse moyenne axiale locale et  $u'_1$  l'échelle associée aux fluctuations de vitesse sur l'axe. Ici, les paramètres importants qui interviennent sont le nombre de Reynolds  $Re=U_0D_g/\nu$  et le rapport  $R/\delta_\theta$  du profil initial de vitesse moyenne. Ici,  $\delta_\theta$  désigne l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite et  $R=D_g/2$  où  $D_g$  est le diamètre de l'injecteur et  $U_0$  la vitesse débitante. Ces paramètres pilotent la transition d'un régime laminaire vers un régime turbulent. Dans la région de transition, les perturbations croissent de sorte que les effets non linéaires apparaissent très rapidement, conduisant au développement du jet.

Plusieurs ouvrages ([104], [87], et [7]) traitent de la zone du jet où la turbulence est pleinement développée. En particulier, les auteurs ont cherché à dégager l'évolution des grandeurs clés telles que l'élargissement du jet, le profil radial de vitesse moyenne ou encore le niveau de turbulence. L'analyse d'un jet basée sur une hypothèse de similitude est présentée par C. Bailly et G. Comte-Bellot dans [7]. Les détails de cette analyse sont donnés dans l'Annexe B.

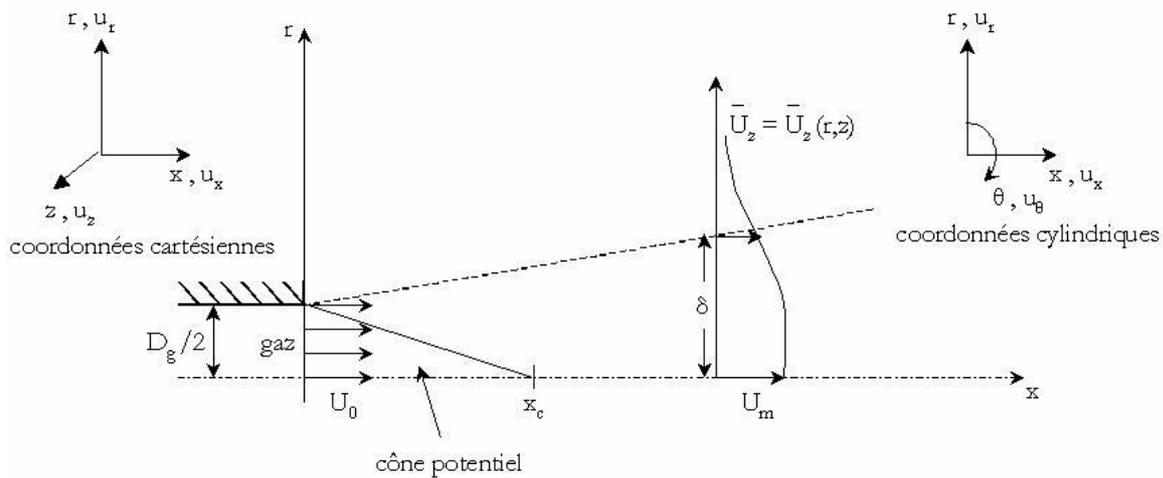


Fig. 3.4. Schéma du jet et des différentes variables utilisées.

Dans cette analyse, l'évolution du jet le long de l'axe a été exprimée de la façon suivante :

$$\frac{\delta(x)}{D_g} = a \frac{x - x_0}{D_g} \quad (3.36)$$

$$\frac{U_m(x)}{U_0} = b \frac{D_g}{x - x_0} \quad (3.37)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes à déterminer et  $x_0$  est l'origine virtuelle du jet à déterminer également. Ces variables caractérisent donc la zone de turbulence développée appelée aussi zone auto-similaire. Nous allons maintenant décrire les configurations utilisées par les différents auteurs pour l'étudier.

Du point de vue expérimental, trois études vont être présentées ici. I. Wygnanski & H. Fielder [108] ont effectué des mesures de vitesses dans un jet axisymétrique turbulent isotherme. Dans leur dispositif, le jet émerge d'un tuyau de diamètre  $D_g = 26.42$  mm avec une vitesse de  $U_0 = 51$  m/s. Le nombre de Reynolds basé sur ces paramètres est de l'ordre de  $10^5$ . Les mesures sont réalisées dans un domaine confiné (de longueur 51.82 cm et de section 22.86 cm\* 24.38 cm) pour éviter toute influence de l'extérieur. Une expérience dans une configuration très proche (même nombre de Reynolds) a été réalisée par H.J. Hussein et *al.* [42] :  $D_g = 25.4$  mm et  $U_0 = 56.2$  m/s.

Les mesures de N.R. Panchapakesan & J.L. Lumley [69] ont été effectuées pour un nombre de Reynolds plus faible (de l'ordre de  $1.1 \times 10^4$ ) dans un jet de diamètre 6.1 mm et une vitesse d'injection de 27 m/s.

Du point de vue numérique, B.J. Boersma et *al.* [14] ont confronté leurs calculs de type DNS aux résultats expérimentaux cités ci-dessus. Les simulations ont été effectuées dans le système de coordonnées sphériques sur un maillage de  $450 \times 80 \times 64$  soit 450 mailles (dans les directions respectivement radiale, azimutale et tangentielle). Le domaine de calcul considéré est limité par  $45D_g$  en longueur et par l'angle  $\theta_{\max} = \pi/40$  dans la direction azimutale. Le nombre de Reynolds égal à  $2.4 \times 10^3$  est moins élevé que celui des travaux expérimentaux. Nous avons utilisé ces différents résultats comme outils de comparaison.

### 1.11.2 Résultats de calculs et discussion

Nous nous sommes intéressés à la zone auto-similaire à travers une comparaison avec ces différents travaux. Pour cela, le calcul a été effectué dans un système de coordonnées cylindriques. La méthode numérique utilisée a été développée par C. Pierce [71]. Sa description complète est présentée dans l'Annexe~A. Dans cette approche, les équations filtrées de type (3.15) et (3.16) sont discrétisées par une méthode de différences finies du deuxième ordre sur un maillage décalé. Pour la discrétisation en temps, un schéma de type Crank-Nicolson est appliqué. L'intégration des équations s'effectue par une procédure itérative semi-implicite, notamment par les itérations de Newton-Raphson avec un Jacobien simplifié. L'équation de Poisson est résolue à l'aide de la transformation de Fourier. La modélisation de la turbulence se base sur l'expression de Smagorinsky couplée avec la procédure dynamique de J. Germano et *al.*

Les conditions limites utilisées sont des conditions convectives aux sorties et sont décrites en annexe. Le cas test retenu est un jet de diamètre  $D_g = 0.0056$  m, avec une vitesse débitante égale à  $U_0 = 90$  m/s et le nombre de Reynolds est égal à  $4.8 \times 10^3$ . Ce cas test nous a permis de comparer nos résultats aux résultats expérimentaux et numériques. Comme conditions limites d'entrée, nous avons choisi un profil plat perturbé par des fluctuations pseudo-aléatoires de valeur maximale  $0.001U_0$  afin de se rapprocher des conditions expérimentales et numériques. Nous calculerons les variables  $x_0$ ,  $a$  et  $b$  pour chacune des conditions d'écoulement que nous simulerons.

Dans un premier temps, nous avons cherché à déterminer  $x_0$ ,  $a$  et  $b$ . Pour cela, nous avons tracé  $U_0/U_m$  en fonction de  $x/D_g$  (figure 3.5) et  $\delta(x)/D_g$  en fonction de  $x/D_g$ . Sur la figure 3.5, nous avons comparé la partie linéaire de la courbe avec les différents résultats expérimentaux. Puisque  $x_0$  est l'origine virtuelle du jet, le système d'axe choisi ne montre pas la zone où la vitesse axiale reste quasiment constante. Cette partie de la courbe représente la zone de l'écoulement dans laquelle se développent les instabilités. Ces dernières entraînent l'apparition d'une zone de turbulence développée correspondant à la seconde partie de la courbe. Dans cette seconde zone, la demie épaisseur du jet croît de façon linéaire. Une synthèse des caractéristiques des jets ronds turbulents obtenus dans la littérature est présentée dans le tableau 1.1. On remarque un accord relativement bon sur ces variables entre la LES et les différents résultats expérimentaux et numériques. Cependant, la différence est moindre avec les résultats de B.J. Boersma et *al.* ([14]) et H.J. Hussein et *al.* ([42]). Une explication possible est liée à la procédure utilisée dans les calculs pour modéliser les conditions limites. En effet, le jet simulé est loin de la réalité car on impose un profil avec des vitesses nulles sur toute la zone extérieure au rayon du jet empêchant de modéliser l'entraînement par l'air ambiant. Lors des calculs de DNS de B.J. Boersma et *al.*, la configuration géométrique initiale du jet est la même que dans notre simulation

LES, ce qui expliquerait le bon accord entre les résultats. L'écart entre les valeurs obtenues par LES et les différentes expériences au niveau de l'origine virtuelle peut également s'expliquer par le niveau initial de turbulence. En effet, plus le niveau de turbulence est grand et plus l'apparition de la zone de turbulence s'opère rapidement, entraînant ainsi une origine virtuelle  $x_0$  plus petite. L'accord avec l'expérience dans la partie auto-similaire du jet s'observe cependant sur la figure 1.3. Un profil de vitesse moyenne a été tracé et comparé aux résultats expérimentaux. Ce profil est obtenu sur une section prise dans la zone de turbulence développée, zone dans laquelle apparaît le caractère auto-similaire du jet.

	<b>LES</b>	<b>Expérience</b>	<b>Expérience</b>	<b>Expérience</b>	<b>DNS</b>
	<b>Calcul actuel</b>	<b>I. Wagnanski et al. [108]</b>	<b>N.R. Panchapakesan et al. [69]</b>	<b>H.J. Hussein et al. [42]</b>	<b>B.J. Boersma et al. [14]</b>
Domaine	$44D_g \times 12.8D_g \times 2\pi$	$51.82cm \times 22.86cm \times 24.38cm$	$3.75m \times 4.25m \times 4.25m$	$10.4m \times 4.9m \times 4.9m$	$44D_g \times \pi/40 \times 2\pi$
Maillage	$150 \times 90 \times 62$				$450 \times 80 \times 64$
$Re = U_0 D_g / \nu$	$4.8 \times 10^3$	$\approx 10^5$	$1.1 \times 10^4$	$9.55 \times 10^4$	$2.4 \times 10^3$
$b$	5.9	5.7	6.06	5.8	5.9
$x_0$	$4.75 D_g$	$3 D_g$	-	$4 D_g$	$4.9 D_g$
$a$	0.098	0.086	0.096	0.094	-

**Tab. 3.1** – Récapitulatif des conditions et des résultats de calculs et d'expériences.

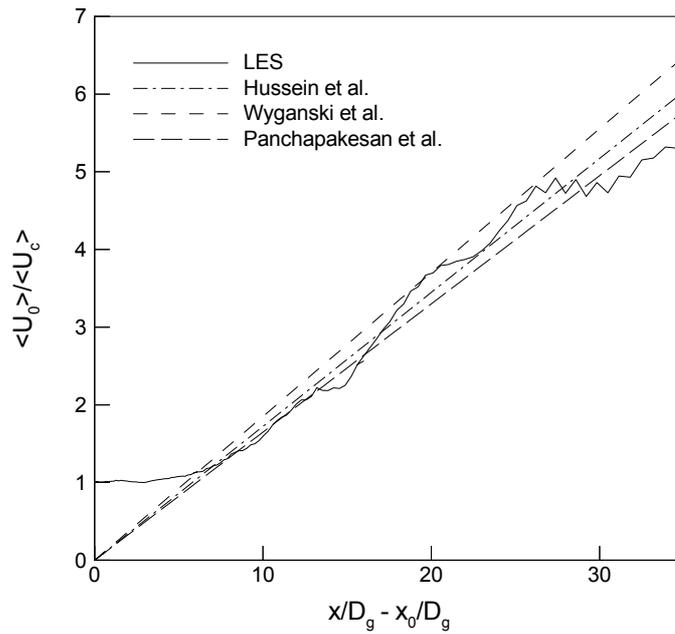


Fig. 3.5 – Inverse de la vitesse axiale du jet en fonction de la distance sur l'axe du jet.  $x_0$  correspond à l'origine virtuelle du jet. La vitesse axiale est adimensionnée par la vitesse débitante et la coordonnée par le diamètre du jet. Les résultats de simulation sont comparés aux résultats expérimentaux représentés par des droites.

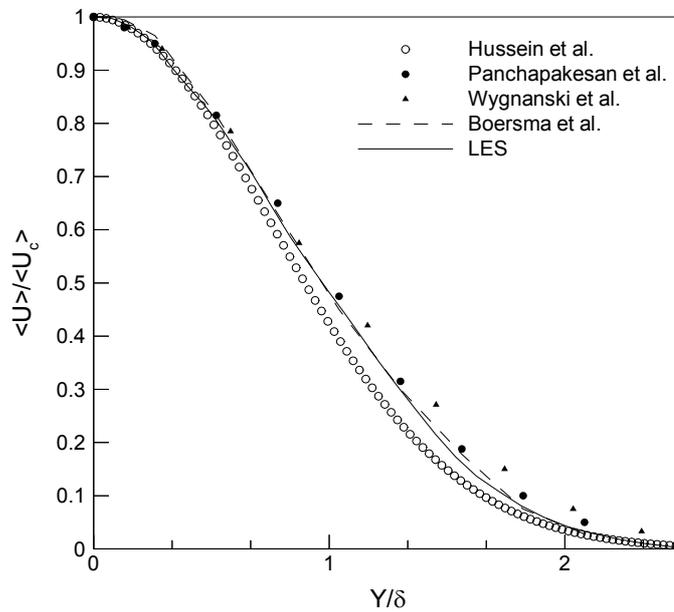
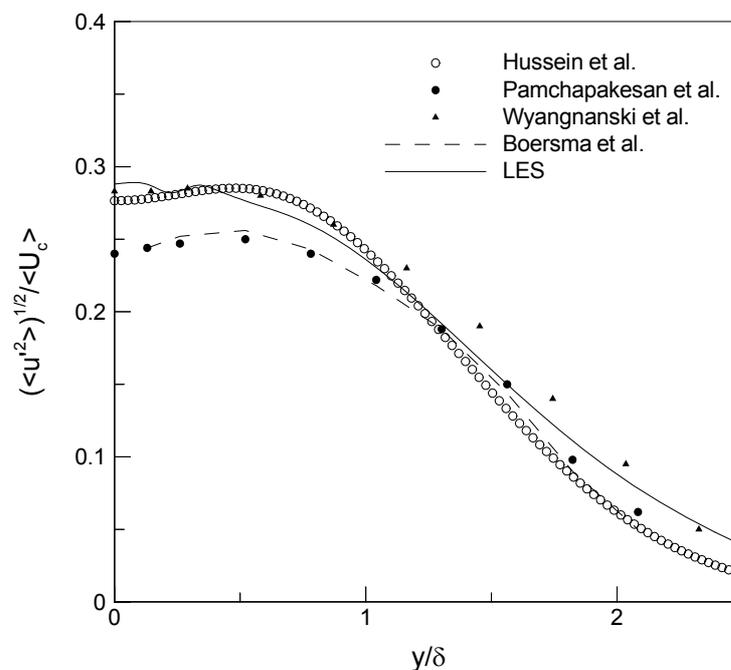
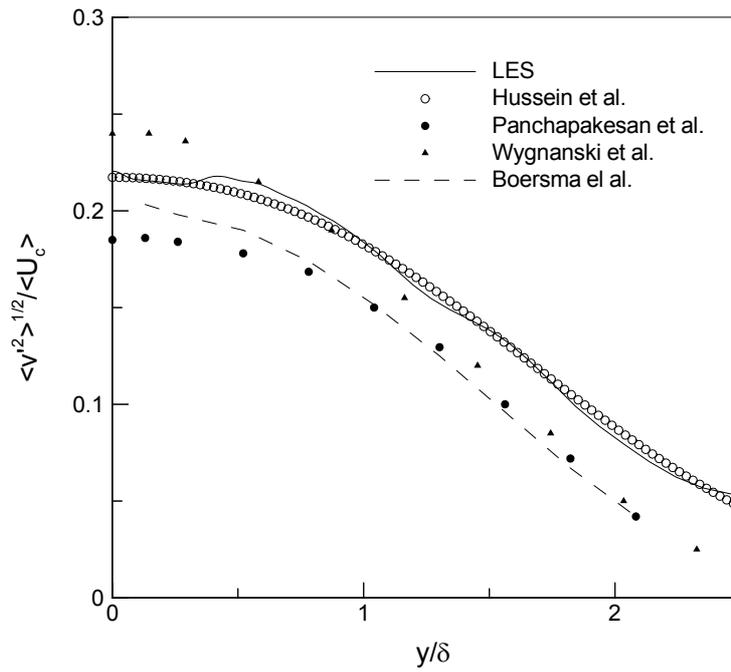


Fig. 3.6 – Profil de vitesse auto-similaire de vitesse longitudinale. La vitesse moyenne est adimensionnée par la vitesse moyenne axiale du jet et la coordonnée radiale par la demi-épaisseur du jet.

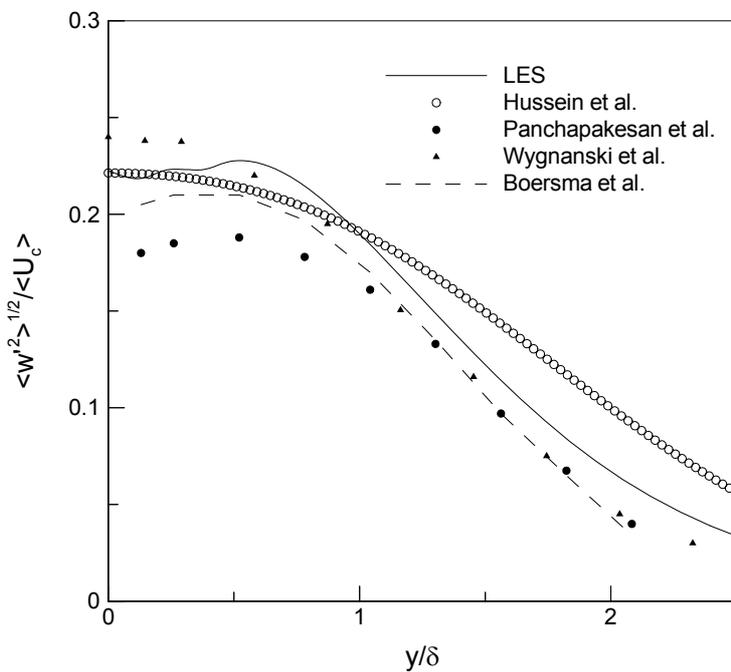
Nous avons également cherché à dégager le caractère turbulent du jet. Pour cela, nous avons effectué des statistiques sur l'ensemble du champ de vitesse du jet. La simulation a été effectuée en deux étapes. Une première correspondant à un temps égal  $200\tau_s$ , où  $\tau_s = D_g/U_0$ . Pendant cette étape, les statistiques ne sont pas calculées. Elle correspond au temps nécessaire pour parcourir 5 fois le domaine de calcul dans la direction axiale et pour atteindre un état statistiquement stationnaire. Cela signifie que les statistiques sur les variables relatives à l'écoulement ne varient plus dans le temps. A partir de cet instant, nous avons calculé les statistiques durant un temps de simulation équivalent à  $200\tau_s$ . Les moyennes sont effectuées dans le temps et dans la direction azimutale. Il est alors possible de tracer les différentes composantes des fluctuations de vitesse (figures 1.4, 1.5 et 1.6). Ces statistiques ont été tracées dans la zone auto-similaire. Elles caractérisent donc la zone de turbulence pleinement développée du jet. De plus, elles ont été obtenues dans une section éloignée de la sortie du domaine de calcul de façon à éviter une trop grande influence des conditions limites sur les résultats.



**Fig 3.7** - Profil de vitesse auto-similaire de variance de vitesse longitudinale adimensionnée par la vitesse moyenne axiale du jet . La coordonnée radiale est adimensionnée par la demi-épaisseur du jet.



**Fig 3.8** - Profil de vitesse auto-similaire de variance de vitesse radiale adimensionnée par la vitesse moyenne axiale du jet. La coordonnée radiale est adimensionnée par la demi-épaisseur du jet.



**Fig 3.9** - Profil de vitesse auto-similaire de variance de vitesse azimuthale adimensionnée par la vitesse moyenne axiale du jet. La coordonnée radiale est adimensionnée par la demi-épaisseur du jet.

Le niveau des fluctuations obtenus dans la simulation semble en bon accord avec l'expérience. Cependant, il est plus proche de celui obtenu dans les expériences de H.J. Hussein et *al.* [42] et I. Wygnanski et *al.* [108] et surestimé par rapport aux résultats de N.R. Panchapakesan et *al.* [69] et B.J. Boersma et *al.* [14]. Ceci pourrait être expliqué par la différence de géométrie par rapport aux expériences et la différence de nombre de Reynolds par rapport à la DNS.

## 1.12 Conclusion

Dans cette partie, nous avons donc présenté la méthode que nous utilisons pour la phase gazeuse. Il s'agit d'une approche LES qui permet d'obtenir le caractère instationnaire de l'écoulement. Les résultats obtenus par la simulation ont été comparés à différents résultats expérimentaux dans une configuration de jet rond turbulent. Les paramètres permettant de décrire ce type d'écoulement sont en bon accord avec l'expérience. De plus, les grandeurs turbulentes moyennes telles que les fluctuations de vitesse dans les directions spatiales sont quantitativement proches de l'expérience. Leurs évolutions sont également prédites de façon satisfaisante. Le caractère auto-similaire de ce type d'écoulement a également été observé par la simulation comme expérimentalement. Par la suite, nous utiliserons donc cette approche pour simuler l'écoulement de gaz incompressible dans une situation diphasique.

## Chapitre 4 Application à la modélisation de l'atomisation primaire

Dans le paragraphe 1.5, nous avons brièvement présenté l'idée de la modélisation stochastique de la structure du jet près de l'injecteur. Dans ce chapitre, nous décrivons sa réalisation. Nous supposons que la cascade d'épluchement du jet est contrôlée par le mécanisme d'atomisation primaire indiqué par M. Hong [39] et rappelé dans 1.2.2 (l'instabilité de Rayleigh Taylor suite à l'évolution de l'instabilité de Kelvin Helmholtz) et également par le transfert d'énergie cinétique du gaz au liquide.

### 1.13 Particules stochastiques « floating cutter »

Dans un premier temps, nous allons présenter l'approche que nous avons choisie pour modéliser la phase d'atomisation primaire. Lorsque le jet liquide est injecté à forts nombres de Weber et de Reynolds, il est très difficile de prédire la position exacte de l'interface liquide/gaz. Le nombre de degrés de liberté est très important. En même temps, pendant la cascade de fragmentation, la fréquence de chaque séparation est très élevée, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de symétrie d'échelle à ce processus.

Dans cette partie, nous appliquerons cette hypothèse à la phase d'atomisation primaire. Nous supposons que le mécanisme responsable de la fragmentation est le développement de l'instabilité de Rayleigh Taylor suite à l'évolution de l'instabilité de Kelvin Helmholtz (M. Hong [39]). Ainsi, quand un élément liquide est accéléré par le gaz, il est alors soumis à une cascade de fragmentation représentée par l'instabilité de Rayleigh Taylor et est arraché du cœur liquide.

Nous modélisons ici uniquement la zone de liquide intacte, ce qui signifie que la contribution des fragments sera négligée.

Considérons différentes réalisations possibles de l'évolution du cœur liquide comme indiqué sur la figure 4.1 La distance entre l'axe de symétrie et la position de l'interface sera notée  $r(x,t)$ . L'évolution de cette distance correspond donc à l'évolution de la frontière entre le cœur liquide et le gaz environnant.

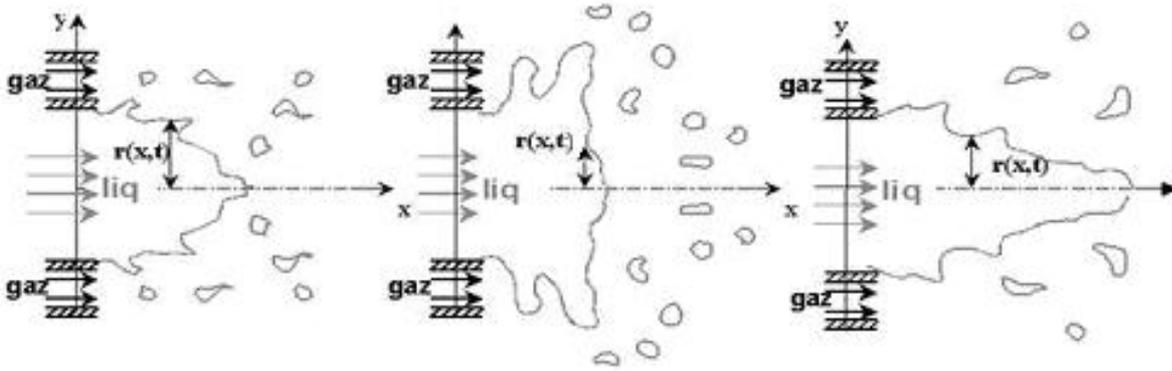


Fig 4.1. Schéma de différentes réalisations de la phase primaire d'atomisation assistée par air.

Des particules stochastiques sont injectées à la distance  $r(x=0, t=0) = r_0$  de l'axe de symétrie du jet liquide. L'évolution de ces particules appelées « floating cutter » dans la direction radiale est régie par l'évolution de  $r(x > 0, t > 0)$ . Chaque réalisation du cœur liquide correspond donc à une trajectoire de particule stochastique. Les hypothèses formulées dans ce travail sont les suivantes :

- Chaque trajectoire correspond à une réalisation indépendante parmi l'ensemble des réalisations.
- Chaque trajectoire s'effectue pendant un temps donné appelé temps de vie  $t_{vie}$ . Ce temps correspond au temps caractéristique et sera défini par la suite.
- L'évolution de  $r(x, t)$  dans la direction radiale obéit à l'hypothèse de symétrie d'échelle :  $r(x + \Delta x) \Rightarrow \alpha r(x)$  avec  $0 < \alpha < 1$  régie par le paramètre de fragmentation  $\langle \ln^2 \alpha \rangle / \langle \ln \alpha \rangle$  qui sera défini par la suite

- Dans la direction azimutale, les particules se déplacent de façon aléatoire.
- Dans la direction axiale la vitesse des particules est constante et est égale à la vitesse de

convection des vagues (ou crêtes) de liquide  $u_c = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_l} u_l}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_l}}$ .

- Le spray entourant le cœur liquide est fin (le champ de gouttelettes a un volume négligeable, mais une masse significative par rapport au gaz), par conséquent, la distribution de fraction de liquide au voisinage de l'injecteur est contrôlée en majorité par les statistiques des configurations spatiales du cœur liquide. La contribution des fragments désintégrés est négligée pour les statistiques de fraction de liquide.

Le « floating cutter » est considéré pendant son temps typique de vie  $t_{vie}$ . L'expérience montre que le rapport des flux de quantité de mouvement dans les phases gazeuse et liquide joue un rôle significatif dans le phénomène d'épluchage du jet liquide imposé à un écoulement d'air [106], [51]. Dans cette optique, on peut supposer que trois grandeurs physiques interviennent pour déterminer le temps de vie : la force d'arrachement due à  $\Delta\rho u^2 : 1/2(\rho_g u_g^2 - \rho_l u_l^2)$ , l'inertie par l'intermédiaire de la masse volumique du liquide  $\rho_l$ , et de diamètre de l'injecteur  $D_l$  qui caractérise l'échelle géométrique.

A partir de l'analyse dimensionnelle, une seule combinaison permet de construire le temps de vie basé sur ces variables :

$$t_{vie}^{-1} = \sqrt{\frac{|\rho_g u_g^2 - \rho_l u_l^2|}{2\rho_l}} \frac{1}{D_l} \quad (4.1)$$

Le temps de vie des particules stochastiques peut alors être exprimé en fonction du rapport

$M = \frac{\rho_g u_g^2}{\rho_l u_l^2}$  sous la forme :

$$t_{vie} = \sqrt{\frac{2}{|M-1|}} \frac{D_l}{u_l} \quad (4.2)$$

En fait, cette expression est cohérente avec l'expression (1.32) proposée par Lasheras et *al.* [51] pour la longueur intacte. En effet, si on suppose que la vitesse dans le cœur liquide reste égale à la vitesse d'injection  $u_l$ , on peut écrire  $L = u_l t_{vie}$ , ce qui aboutit à une expression pour les temps de vie donnés par Lasheras et *al.* ( $t_{Lash}$ ) sous la forme :

$$t_{Lash} = \frac{6D_l}{u_l \sqrt{M}} \quad (4.3)$$

or, dans les cas où  $M \gg 1$ , l'expression (4.2) peut être écrite comme :

$$t_{vie} = \sqrt{\frac{2}{|M|}} \frac{D_l}{u_l} = C_{Lash} t_{Lash} \quad (4.4)$$

où  $C_{Lash}$  est une constante égale à  $\sqrt{2}/6$ .

## 1.14 Equations stochastiques des « floating cutter »

Les équations qui régissent l'évolution de la particule sont les suivantes.

Dans la direction radiale :

$$V_{ip} = v \langle \ln \alpha \rangle r + \sqrt{\frac{v \langle \ln^2 \alpha \rangle}{2}} r \Gamma(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{dr}{dt} = V_{ip}$$

On suppose donc ici que la fragmentation du liquide s'effectue dans la direction radiale par l'intermédiaire du processus log-brownien. Dans cette équation,  $V_{ip}$  est la vitesse d'une particule stochastique dans la direction radiale,  $r$  est sa position,  $v$  est la fréquence associée au processus,  $\langle \ln \alpha \rangle$  et  $\langle \ln^2 \alpha \rangle$  sont deux paramètres qui vont être déterminés par la suite. Le mouvement de ces particules dans la direction axiale est alors donné par :

$$U_{ip} = u_c \quad (4.6)$$

$$\frac{dx_{ip}}{dt} = U_{ip}$$

où  $U_{ip}$  est la vitesse de la particule stochastique dans la direction axiale.

Les « floating cutter » sont des indicateurs de la position du cœur liquide. La vitesse des particules fluides à l'interface est donnée par  $u_c$ . Chaque portion de liquide subissant une accélération sur l'interface, donc ayant une vitesse différente de  $u_c$  (calculée par l'expression (1.19)) est déstabilisée par le mécanisme de Rayleigh Taylor et détachée du cœur liquide. Les « floating cutter » représentant le liquide non fragmenté se déplacent donc à cette vitesse constante. Les conditions initiales pour les équations (4.12)-(4.13) sont :

$$\begin{aligned} r(t=0) &= r_0 \\ x_{ip}(t=0) &= 0 \\ V_{ip}(t=0) &= 0 \\ U_{ip}(t=0) &= u_c \end{aligned} \quad (4.7)$$

où  $r_0$  représente le rayon de l'injecteur.

### 1.15 Choix de $\langle \ln \alpha \rangle$ et $\langle \ln^2 \alpha \rangle$

L'équation (2.10) indique que le rapport  $\langle \ln^2 \alpha \rangle / \langle \ln \alpha \rangle$  représente le logarithme de l'échelle typique des fragments adimensionnée :

$$\frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{\langle \ln \alpha \rangle} = \ln \left( \frac{r_{\min}}{r_*} \right) \quad (4.8)$$

$$\langle \ln \alpha \rangle = c \ln \left( \frac{r_{\min}}{r_*} \right) \quad (4.9)$$

où  $r_{\min}$  est l'échelle minimale et  $r_*$  est l'échelle initiale.

Le phénomène responsable de la fragmentation du jet liquide est l'instabilité de Rayleigh Taylor, mais celle-ci se développe à partir de l'instabilité de Kelvin Helmholtz. La cascade de fragmentation s'effectue donc de l'échelle  $\lambda_{KH}$  vers  $\lambda_{RT}$ , le rapport des paramètres du modèle s'exprime donc par le rapport de l'échelle  $\lambda_{RT}$  adimensionnée par  $\lambda_{KH}$  dans l'espace des logarithmes :

$$\frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{\langle \ln \alpha \rangle} = \ln \left( \frac{\lambda_{RT}}{\lambda_{KH}} \right) \quad (4.10)$$

$$\langle \ln \alpha \rangle = c \ln \left( \frac{\lambda_{RT}}{\lambda_{KH}} \right) \quad (4.11)$$

On voit alors apparaître une seule constante dans le modèle  $c$  fixée égale à 0.03 dans toute l'étude et qu'on ne changera pas quelles que soient les conditions expérimentales. En utilisant les expressions de M. Hong (1.26) et de M. Gorokhovski (1.57), on peut exprimer l'échelle adimensionnée sous la forme :

$$\text{Pour M. Hong : } \frac{\lambda_{RT}}{\lambda_{KH}} = 2\pi \left( \frac{6\alpha_n}{C_d C_{KH}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{-1/4} We_{\delta_g}^{-1/2} \quad (4.12)$$

$$\text{Pour M. Gorokhovski : } \frac{\lambda_{RT}}{\lambda_{KH}} = 2\pi \left( \frac{6}{C_d C_{KH}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{-1/4} \left( \frac{u_l}{u_g} \right)^{1/2} We_{\delta_g}^{-1/2} \quad (4.13)$$

## 1.16 Choix de la fréquence de fragmentation

L'équation (4.5) qui régit le mouvement des particules stochastiques fait intervenir la fréquence de fragmentation. Dans cette étude, nous avons considéré celle-ci comme l'inverse du temps caractéristique associé au phénomène de fragmentation. Celle-ci est donc obtenue à partir du temps de vie des particules stochastiques donnée par l'expression (4.1). Elle dépend donc des paramètres d'injection. Dans ce type de configuration assistée par air, elle est donc construite à partir des paramètres physiques qui pilotent la phase primaire de fragmentation et son expression est donnée par (4.1).

## 1.17 Modélisation de présence de liquide

### 1.17.1 Algorithme de calcul de présence de liquide

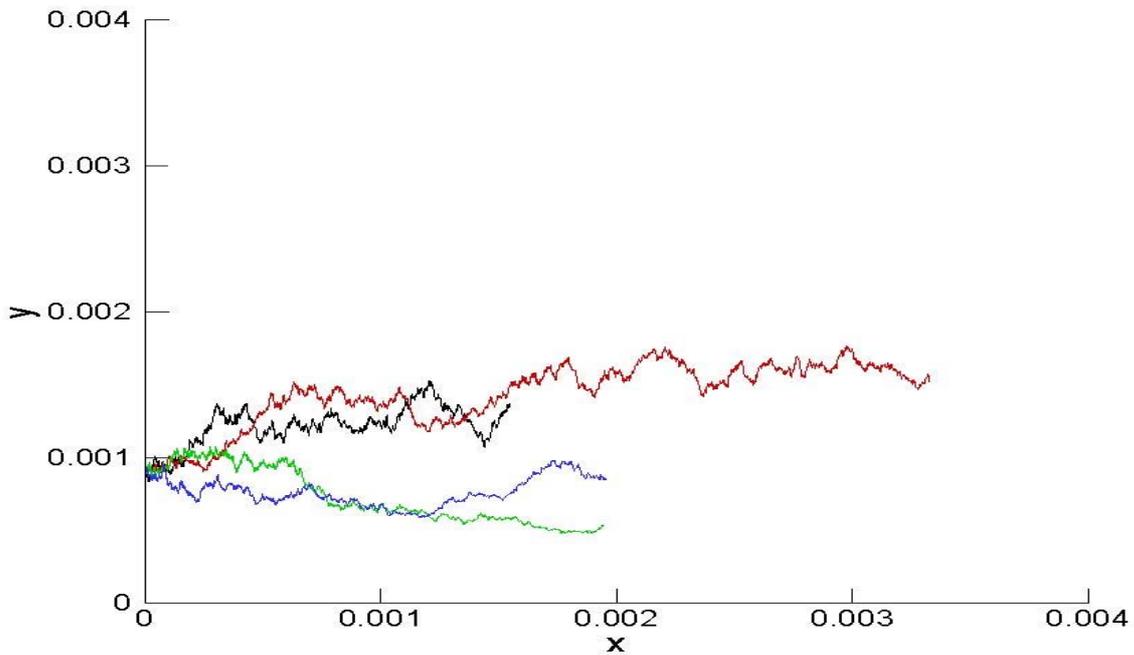
Nous allons maintenant présenter les conditions dans lesquels nous avons utilisé ce modèle pour calculer la présence de liquide au voisinage de l'injecteur.

Dans la situation de simulation des grandes échelles, le caractère turbulent de l'écoulement de gaz conduit sa vitesse à changer d'un instant à un autre. Les conditions initiales de vitesse du gaz changent donc à chaque pas de temps. Cela implique que chaque particule stochastique possède son propre temps de vie qui peut être différent des autres. La trajectoire de la particule stochastique est donc déterminée lorsque son temps de vie est terminé ou bien lorsque la distance qui sépare sa position de l'axe est inférieure à une valeur critique. Cette valeur critique est obtenue lorsque l'équilibre entre les forces aérodynamique et de tension de surface est obtenu. De façon à simuler une telle situation, une composante aléatoire a été ajoutée à la vitesse du gaz :

$$u_g = u_b + 0.3rnd$$

où  $u_b$  est la vitesse débitante du gaz et  $rnd$  est un nombre aléatoire compris entre  $-1$  et  $1$ .

Un exemple de différentes réalisations obtenues dans une telle situation est obtenu sur la figure 4.1.



**Fig 4.1.** Trajectoires de différentes particules stochastiques pour des vitesses débitantes de gaz  $U_g = 60 \text{ m/s}$  et de liquide  $u_l = 0.68 \text{ m/s}$ .

Les particules sont injectées à chaque pas de temps de façon à représenter le développement d'une réalisation du cœur liquide en fonction des conditions initiales changeantes. Un exemple de la situation obtenue dans l'écoulement diphasique est représenté sur la figure 4.2. Le schéma indique les différentes positions des particules à un instant donné t.

Pour que chaque « floating cutter » soit statistiquement équivalent, nous considérerons uniquement les trajectoires des particules ayant achevé leur temps de vie. Dès que cette situation est atteinte, une nouvelle particule est injectée de façon à conserver le nombre de particules présentes dans l'écoulement lorsque le régime est établi. Comme le montre la figure 4.3, le nombre de particules dans l'écoulement augmente donc dans un premier temps puis atteint une valeur constante.

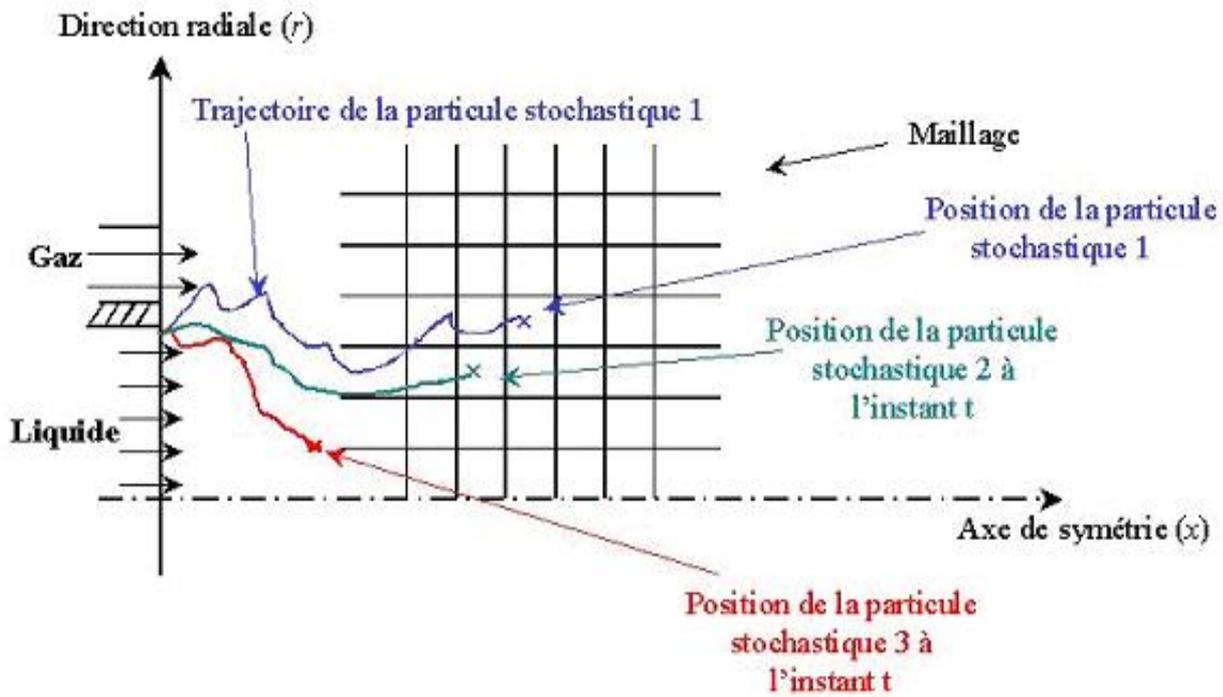


Fig 4.2. Schéma représentant différentes trajectoires des particules stochastiques à un instant donné.

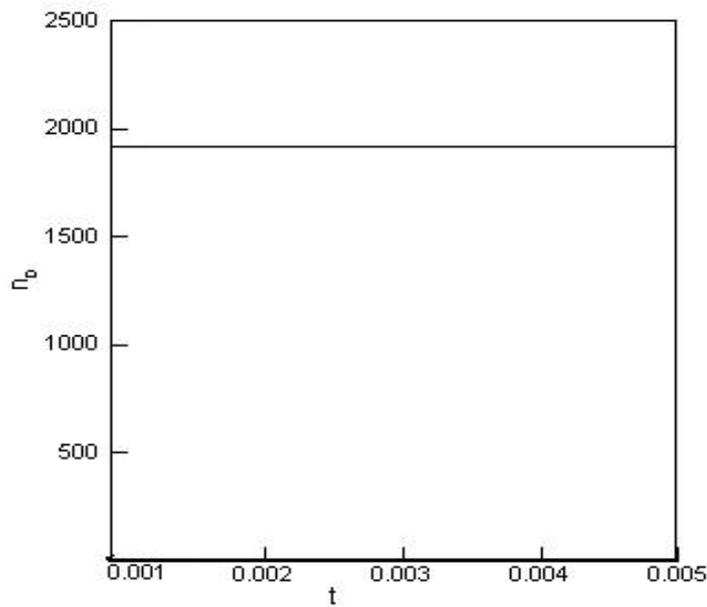


Fig 4.3. Evolution du nombre de particules stochastiques dans l'écoulement en fonction du temps à partir du moment où le nombre de particules stochastiques reste constant.

Pour une réalisation ayant achevé son temps de vie, on peut donc définir, à partir de sa trajectoire, une zone de liquide et de gaz. La situation obtenue est présentée sur la figure 4.4.

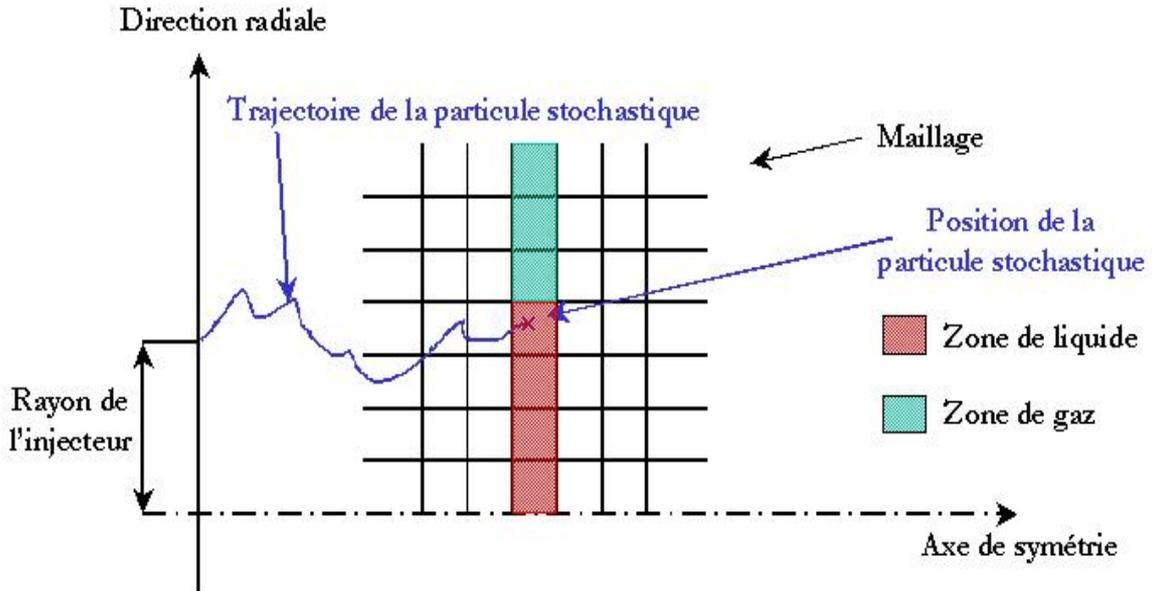


Fig 4.4. Schéma représentant les informations obtenues à l'aide d'une réalisation du cœur liquide.

Chacune des positions indique donc la maille dans laquelle se trouve la frontière entre le liquide et le gaz, ainsi, si on définit les indices  $i$  pour les abscisses et  $j$  pour les ordonnées, la probabilité d'avoir du liquide dans une maille  $(i, j)$  pour une réalisation  $k$  est donnée par :

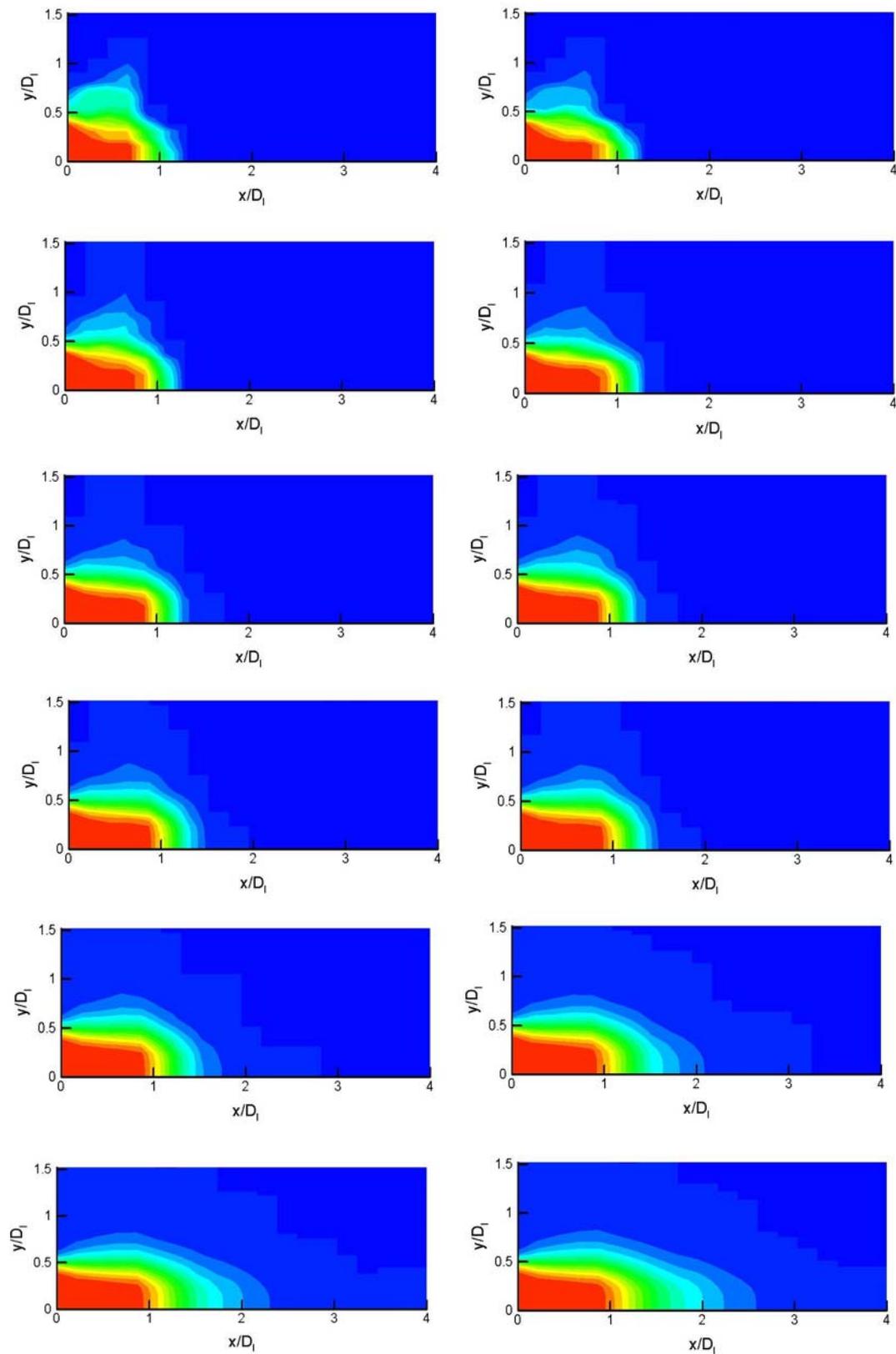
$$P_k(i, j) = n_{maille}(i, j) / n_{section}(i)$$

où  $n_{maille}(i, j)$  est le nombre de positions prises par la particule  $k$  dans la maille définie par les indices  $i$  et  $j$  et  $n_{section}(i)$  est le nombre de positions prises par la particule  $k$  dans la section définie par l'indice  $i$ .

On calcule donc la probabilité de présence du cœur liquide comme une statistique sur l'ensemble des particules stochastiques ayant achevé leur temps de vie :

$$P_L(i, j) = \sum_{k=1}^{n_r} P_k(i, j) / n_r$$

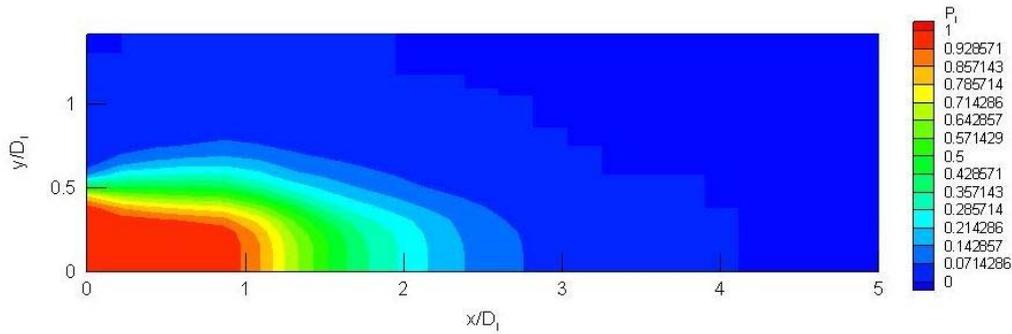
où  $n_r$  est le nombre de particules ayant atteint leur temps de vie. On accumule ensuite les statistiques obtenues à partir de l'ensemble de toutes les particules dont le temps de vie est achevé. L'évolution de la probabilité de présence du cœur liquide peut alors être obtenue au cours du temps comme sur la figure 4.5. où la statistique à différents instants a été tracée.



**Fig 4.5.** Etablissement d'un régime statistiquement stationnaire : probabilité de présence du cœur liquide respectivement aux instants

$37 \mu s$  ,  $74 \mu s$  ,  $112 \mu s$  ,  $148 \mu s$  ,  $185 \mu s$  ,  $224 \mu s$  ,  $260 \mu s$  ,  $296 \mu s$  ,  $783 \mu s$  ,  $1033 \mu s$  ,  $1283 \mu s$  e  $1533 \mu s$  .

Pour atteindre l'état statistiquement stationnaire, les simulations montrent que 500 réalisations sont nécessaires, ce qui signifie que le temps nécessaire est de l'ordre de  $500 * t_{vie}$ . Un exemple de distribution de probabilité de présence obtenue à l'état statistiquement stationnaire est représenté sur la figure 4.6. . Nous ne présenterons dorénavant dans ce travail que des résultats obtenus à l'état statistiquement stationnaire.



**Fig 4.6.** Exemple de distribution de probabilité de présence obtenue à l'état statistiquement stationnaire pour des vitesses  $u_g = 60 \text{ m/s}$  et  $u_l = 0.68 \text{ m/s}$ .

### 1.17.2 Description de l'expérience de Werquin et but de la comparaison

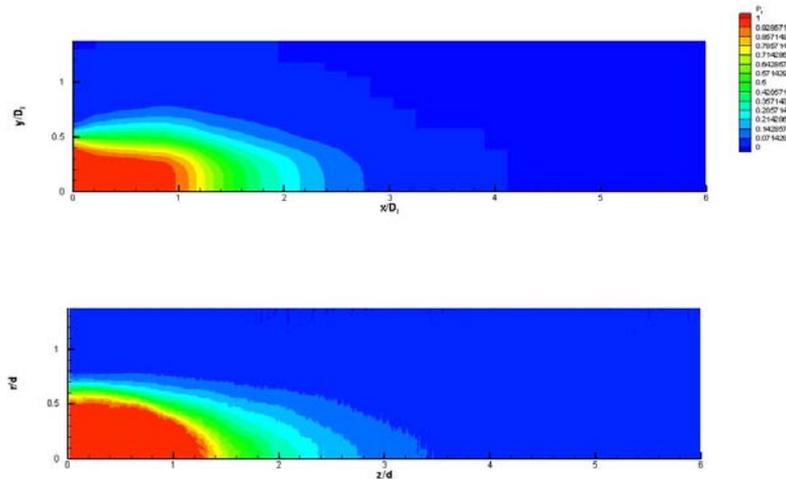
Afin de présenter les informations obtenues par ce modèle ainsi que son application, nous utiliserons les résultats expérimentaux de Werquin [106] dans lesquels les diamètres des sections d'injection du gaz et du liquide sont respectivement  $D_g = 0.0034 \text{ m}$  et  $D_l = 0.0018 \text{ m}$ . Les résultats de Werquin et al. [106] concernent la fraction volumique moyenne de liquide dans l'écoulement. On observe une forte dépendance envers le rapport  $M = \rho_g u_g^2 / \rho_l u_l^2$ . En effet, la longueur intacte reste identique pour des valeurs identiques de ce paramètre. On peut faire une correspondance entre la variable mesurée par Werquin et la présence de liquide. Les valeurs maximales de fraction volumique moyenne correspondent aux zones où la probabilité de présence de liquide est également maximale. Dans cette expérience, les valeurs de la vitesse débitante du liquide ont été testées entre  $0.42 \text{ m/s}$  et  $4.07 \text{ m/s}$  et celles de la vitesse débitante de gaz entre  $60 \text{ m/s}$  et  $180 \text{ m/s}$ .

Ces conditions correspondent à des valeurs de  $M$  supérieures dans tous les cas à 2.5. Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus par ce modèle à ceux de l'expérience de Werquin.

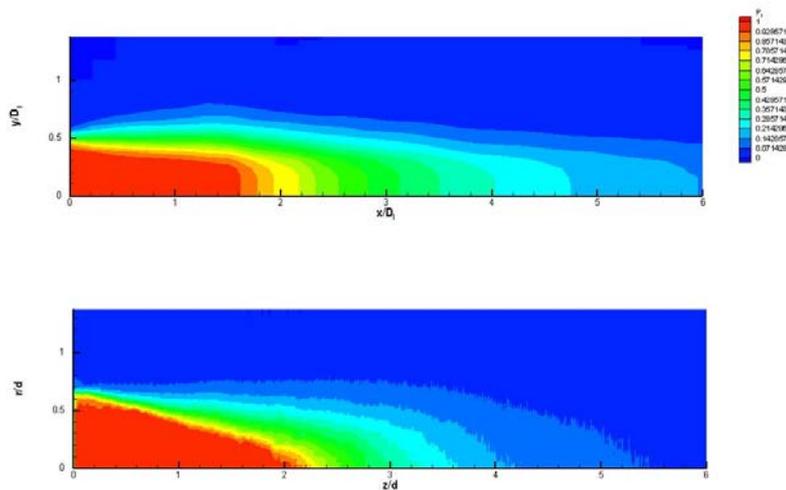
### 1.17.3 Simulation 2D

#### Variation en fonction de M

Les distributions de probabilité de présence du cœur liquide obtenues par la modélisation et les distributions de fraction volumique de liquide obtenues par l'expérience sont représentées pour différents cas sur les figures numérotées de 4.7 à 4.12.

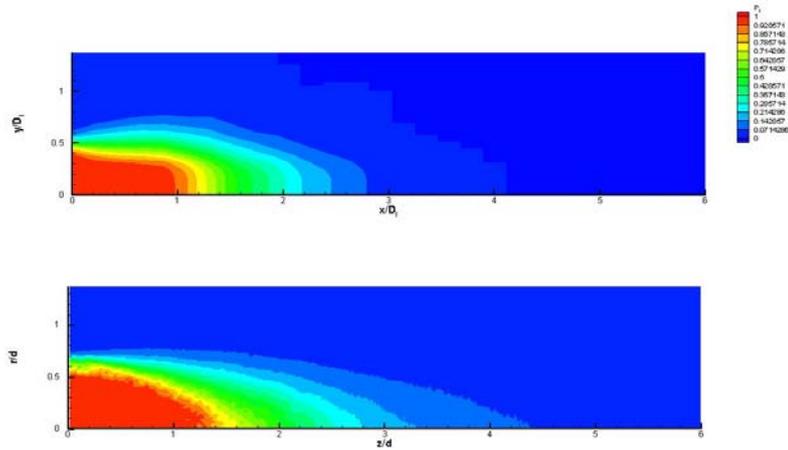


**Fig. 4.7.** Fraction volumique moyenne (en bas) et statistique de présence du cœur liquide (en haut) pour une vitesse de liquide de 0.68 m/s et de gaz de 60 m/s  $M = 10$ ,  $We_g = 136$ ,  $Re_l = 1352$ .

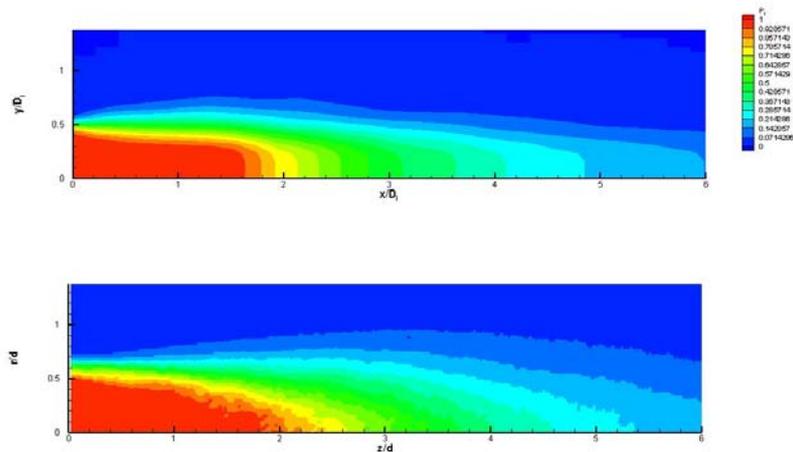


**Fig. 4.8.** Fraction volumique moyenne (en bas) et statistique de présence du cœur liquide (en haut) pour une vitesse de liquide de 1.36 m/s et de gaz de 60 m/s  $M = 2.5$ ,  $We_g = 136$ ,  $Re_l = 2646$ .





**Fig. 4.11.** Fraction volumique moyenne (en bas) et statistique de présence du cœur liquide (en haut) pour une vitesse de liquide de 2.03 m/s et de gaz de 180 m/s  $M = 10$ ,  $We_g = 1125$ ,  $Re_l = 4060$ .



**Fig. 4.12.** Fraction volumique moyenne (en bas) et statistique de présence du cœur liquide (en haut) pour une vitesse de liquide de 4.07 m/s et de gaz de 180 m/s  $M = 2.5$ ,  $We_g = 1125$ ,  $Re_l = 8120$ .

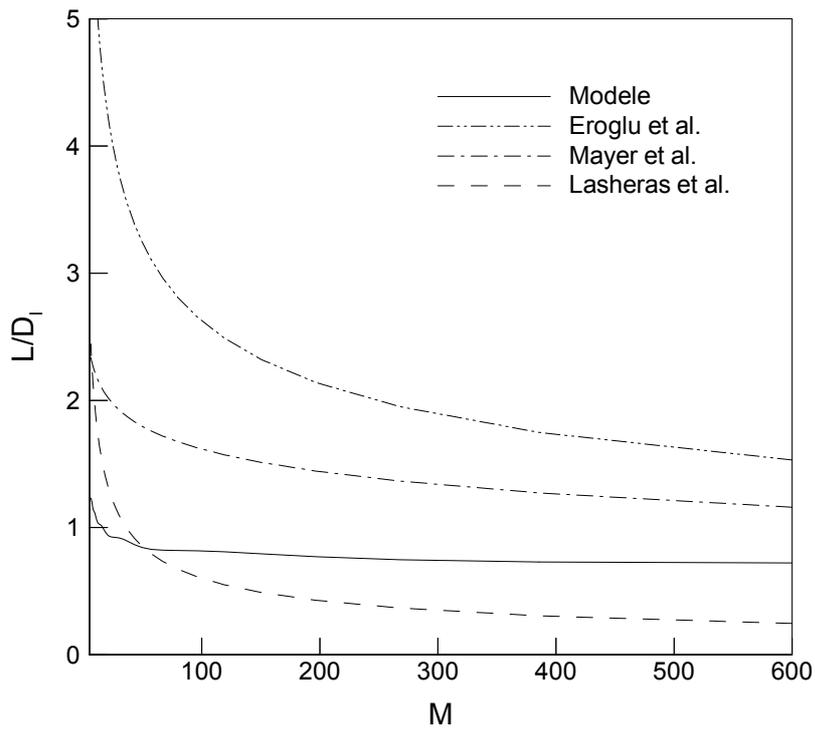
$u_l$	$u_g$	$M$	$We$	$Re$	$L/D_l$ Eroglu et al. [27]	$L/D_l$ Mayer et al. [60]	$L/D_l$ Lasheras et al. [51]	$L/D_l$ Modèle
0,68	60	10	136	1352	6,99	2,26	1,89	1,08
1,36	60	2,5	136	2646	10,46	2,60	3,79	1,73
1,3	115	10	500	2594	6,14	2,26	1,89	1,08
2,5	115	2,5	500	5187	9,31	2,62	3,79	1,73
2,03	180	10	1225	4060	5,62	2,26	1,89	1,08
4,07	180	2,5	1225	8120	8,51	2,61	3,79	1,73

**Tab 4.1.** Résultats obtenus pour la longueur de cœur liquide avec le modèle de type « floating cutter » et les corrélations expérimentales.

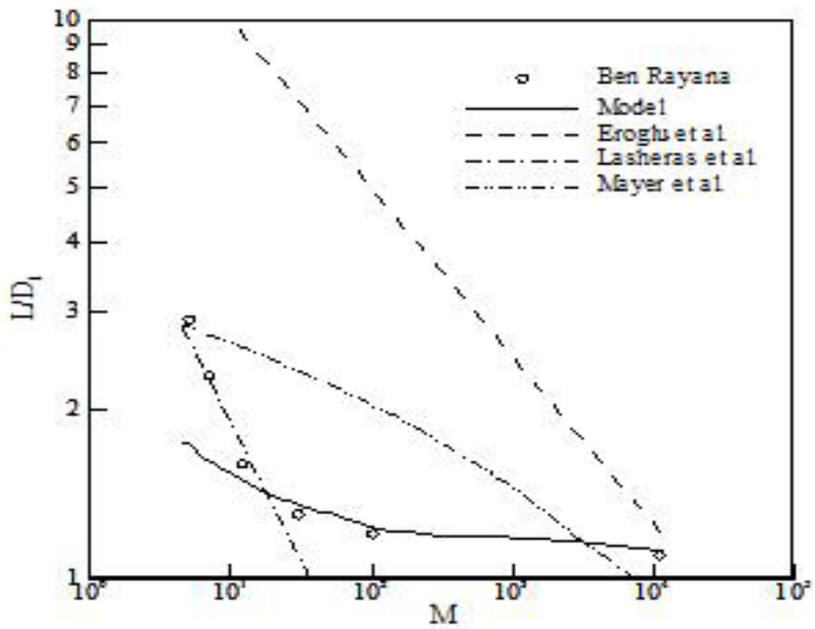
Les différents résultats obtenus par le modèle et les corrélations expérimentales sont présentés dans le tableau 4.1 . Cette expérience est réalisée à grand  $M$  et fort nombre de Weber, ce qui se rapproche des conditions réalisées dans les moteurs fusées. Cette expérience met en évidence la dépendance de la longueur intacte vis à vis du rapport  $M$  . En effet, pour des valeurs identiques de ce rapport, la longueur reste sensiblement la même. La majorité des valeurs présentées ici font apparaître ce comportement.

Cependant, la loi proposée par Eroglu et al. [27] présente un écart à  $M$  constant avec la variation des nombres de Weber et Reynolds. De plus, il semble que la valeur de la longueur obtenue soit surestimée d'un facteur de l'ordre de 4. La corrélation de Mayer [60], si elle reproduit le comportement en fonction de  $M$  , propose des différences moindres que l'expérience au niveau de la longueur du cœur liquide. Les résultats obtenus avec l'expression proposée par Lasheras [51] respectent la tendance expérimentale mais donnent des valeurs légèrement surestimées. La longueur donnée par notre approche reproduit qualitativement la tendance expérimentale en fonction de  $M$  mais sous-estime la longueur du cœur liquide.

Afin de confronter à nouveau ces résultats, nous nous sommes placés dans la configuration de Lasheras. Nous avons donc fixé la vitesse débitante de gaz à  $140 \text{ m/s}$  et fait varier la vitesse de liquide entre  $0.2$  et  $2 \text{ m/s}$  , obtenant ainsi des valeurs de  $M$  entre  $6$  et  $600$ . Les résultats obtenus avec les différentes approches sont présentés sur la figure 4.13. On remarque que le comportement obtenu à partir des différentes corrélations expérimentales en fonction de  $M$  est le même. Cependant, la diminution de la longueur avec l'augmentation de ce rapport obtenue par notre modèle est moins grande que celle obtenue avec les lois empiriques pour  $M > 20$  environ. Ce résultat est en accord avec les observations de Werquin et al. [106] puisque pour une vitesse de gaz donnée (ici  $115 \text{ m/s}$ ), les variations de vitesses de liquide (donc de  $M$  ) ne provoquent presque plus de différence pour  $M > 15$  .



**Fig 4.13.** Evolutions de la longueur du cœur liquide en fonction de  $M$  dans la configuration de J.C. Lasheras et al. [51].



**Fig 4.14.** Evolutions de la longueur du cœur liquide en fonction de  $M$  dans la configuration de Ben Rayana *Erreur ! Source du renvoi introuvable...*

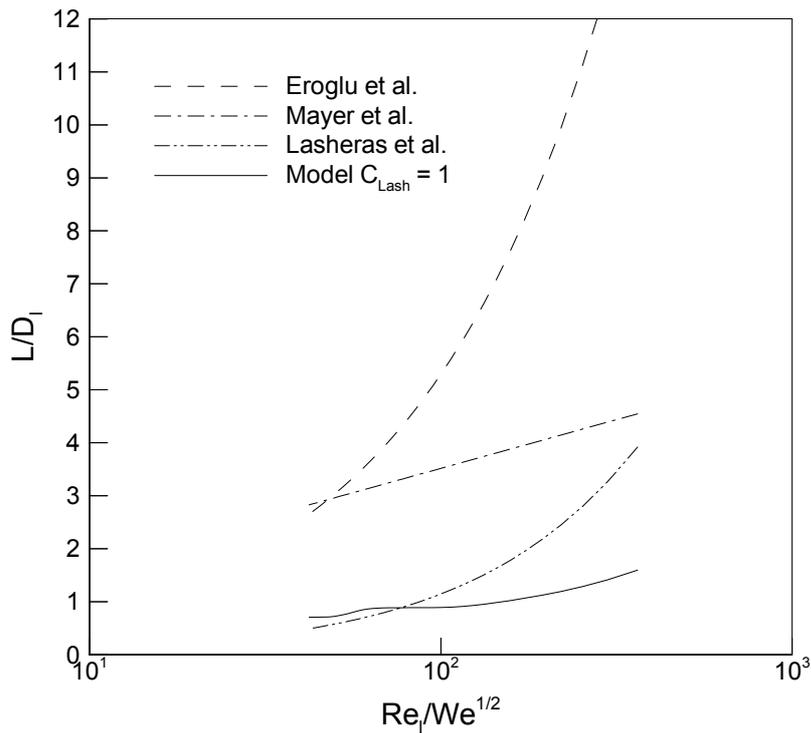
Nous avons également comparés les résultats de simulation avec l'expérience de Ben Rayana [11]. Les longueurs prévues par les différentes corrélations expérimentales présentées précédemment. Cette comparaison permet de fixer la plage de validité du modèle présenté dans ce chapitre. En effet, pour des valeurs de  $M < 10$ , la longueur du cœur liquide obtenue par l'intermédiaire de ce modèle est sous-estimée par rapport aux résultats expérimentaux. L'expression proposée par J.C. Lasheras et al. [52] semble en revanche donner des résultats très proches de l'expérience. Lorsque la valeur de  $M$  dépasse cette valeur de 10, le modèle proposé dans ce manuscrit montre un bon accord avec les longueurs de cœur liquide mesurées. Les résultats donnés par l'expression de Lasheras et al. sous-estime cette fois cette valeur.

### Variation en fonction de $Re$ et $We$

Nous nous sommes maintenant intéressés à l'évolution de la longueur de dard liquide en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Weber. Pour cela, nous avons utilisé les résultats expérimentaux obtenus par Mayer et al. [60]. Notre modèle ayant été construit pour une situation de fort  $M$  et de fort nombre de Weber  $We$ , nous avons uniquement retenu les cas qui correspondaient à de telles situations, à savoir un nombre  $M$  supérieur à 2.3 et un nombre de Weber supérieur à 68. Cette simulation a été effectuée dans les conditions expérimentales de Mayer et al. [60], les résultats obtenus à partir de leur corrélation constituent donc la courbe de référence.

Les résultats obtenus avec le modèle de type « floating cutter » sont présentés sur la figure 4.15 avec différentes valeurs pour la constante. On remarque que la corrélation de Eroglu et al. [27] surestime la longueur du cœur liquide alors que celle de Lasheras et al. [51] ainsi que l'utilisation de notre modèle la sous-estime. Par ailleurs, la tendance obtenue par nos calculs semble se rapprocher de celle de Mayer et al. [60]

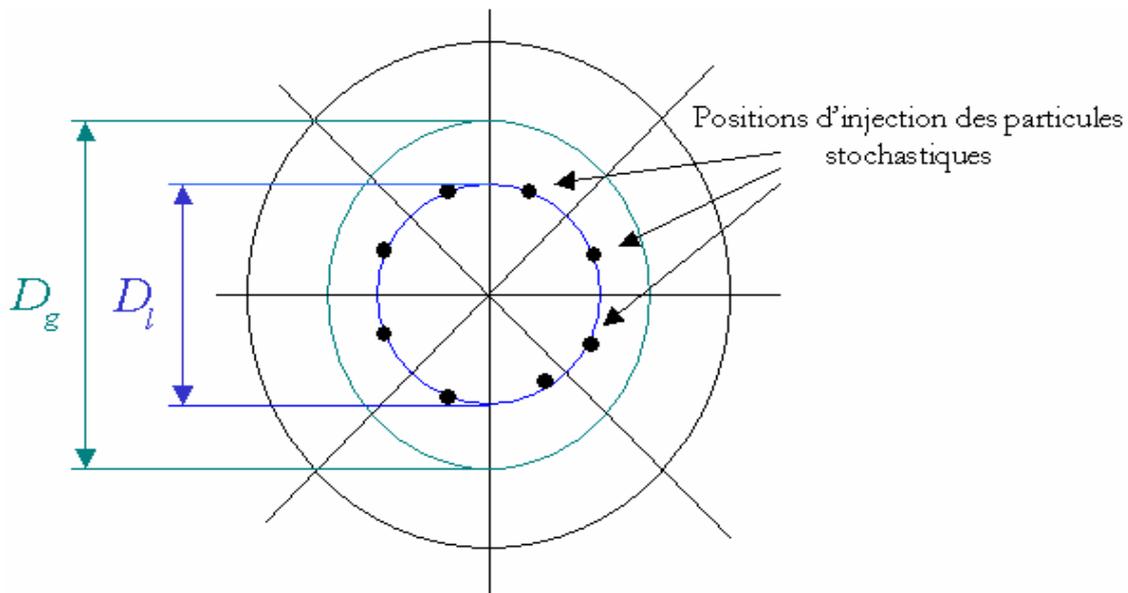
On remarque que les résultats pour les rapports  $Re_i/\sqrt{We}$  faibles sont en relatif accord avec ceux donnés par la corrélation de Mayer et al. [60]. La vitesse de liquide étant maintenue constante, ces résultats correspondent aux forts nombres de Weber et aux forts rapports  $M$ . En revanche, pour les cas où ces grandeurs deviennent petites, les résultats donnés par notre modèle s'écartent de ceux obtenus par Mayer et al.. Ceci peut être expliqué par le fait que l'hypothèse de symétrie d'échelle formulée par Gorokhovski et Saveliev [34] s'applique aux cas de fragmentation de type cascade donc caractérisés par des nombres de Weber et  $M$  grands.



**Fig 4.15.** Evolutions de la longueur du cœur liquide en fonction de  $Re_1$  et  $We$  dans la configuration de Mayer et al. [60] utilisation d'une constante pour le modèle.

#### 1.17.4 Symétrie isotropique ; modélisation de présence de liquide en 3D

Dans ces premiers essais, nous avons effectué des calculs dans un cas axisymétrique. Nous avons montré que le modèle développé était capable de décrire la fragmentation du jet liquide durant la phase d'atomisation primaire. Nous allons maintenant proposer d'appliquer cette approche dans un cas tridimensionnel. Le domaine de calcul ainsi que le maillage utilisés pour résoudre la phase gazeuse sont exprimés en coordonnées cylindriques. Les particules stochastiques représentant l'évolution de la phase liquide sont alors injectées dans chaque maille de la direction azimutale comme l'indique la figure 4.18.

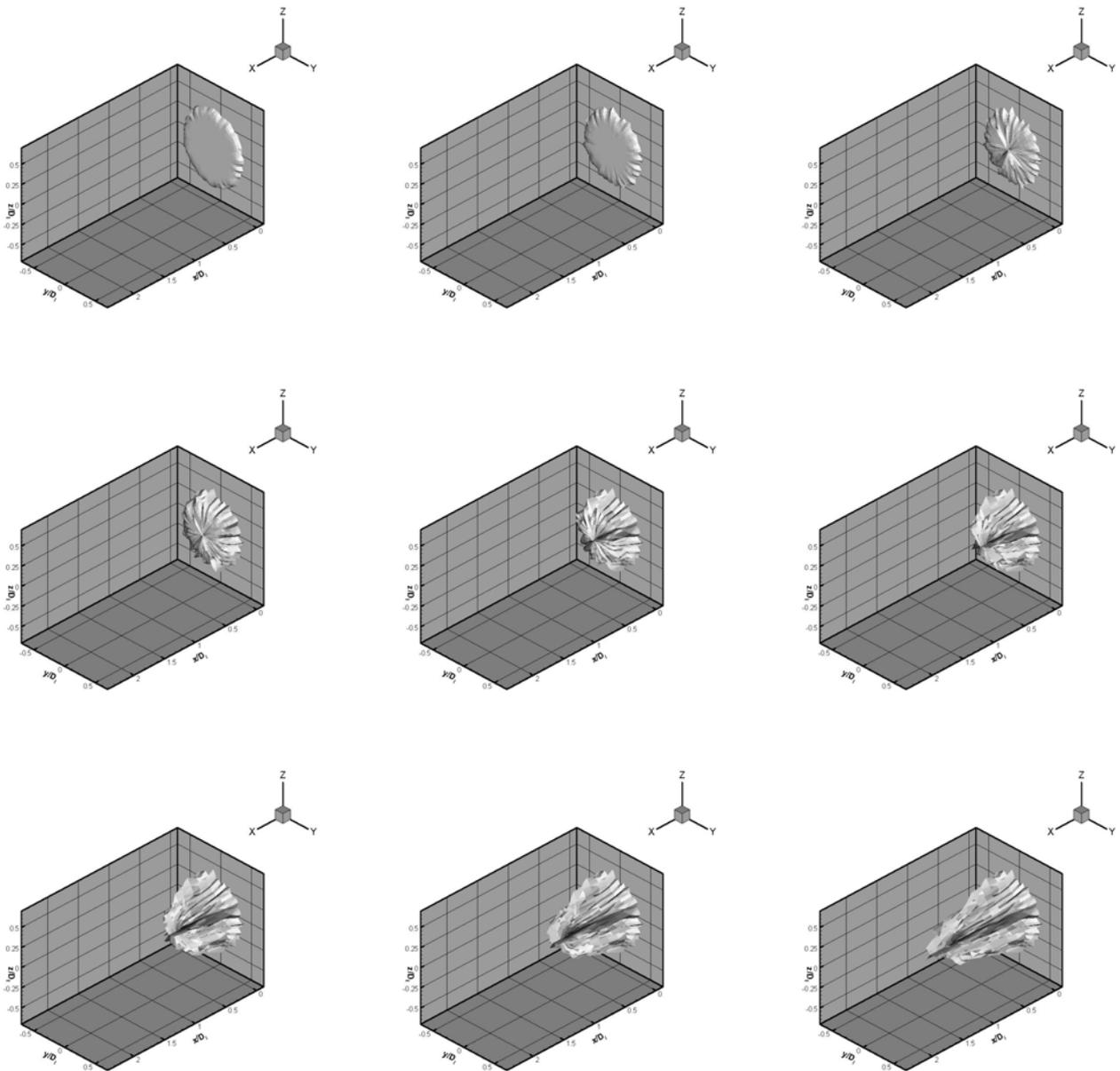


**Fig 4.16.** Représentation schématique du domaine en coordonnées cylindriques et des positions d'injection des particules stochastiques.

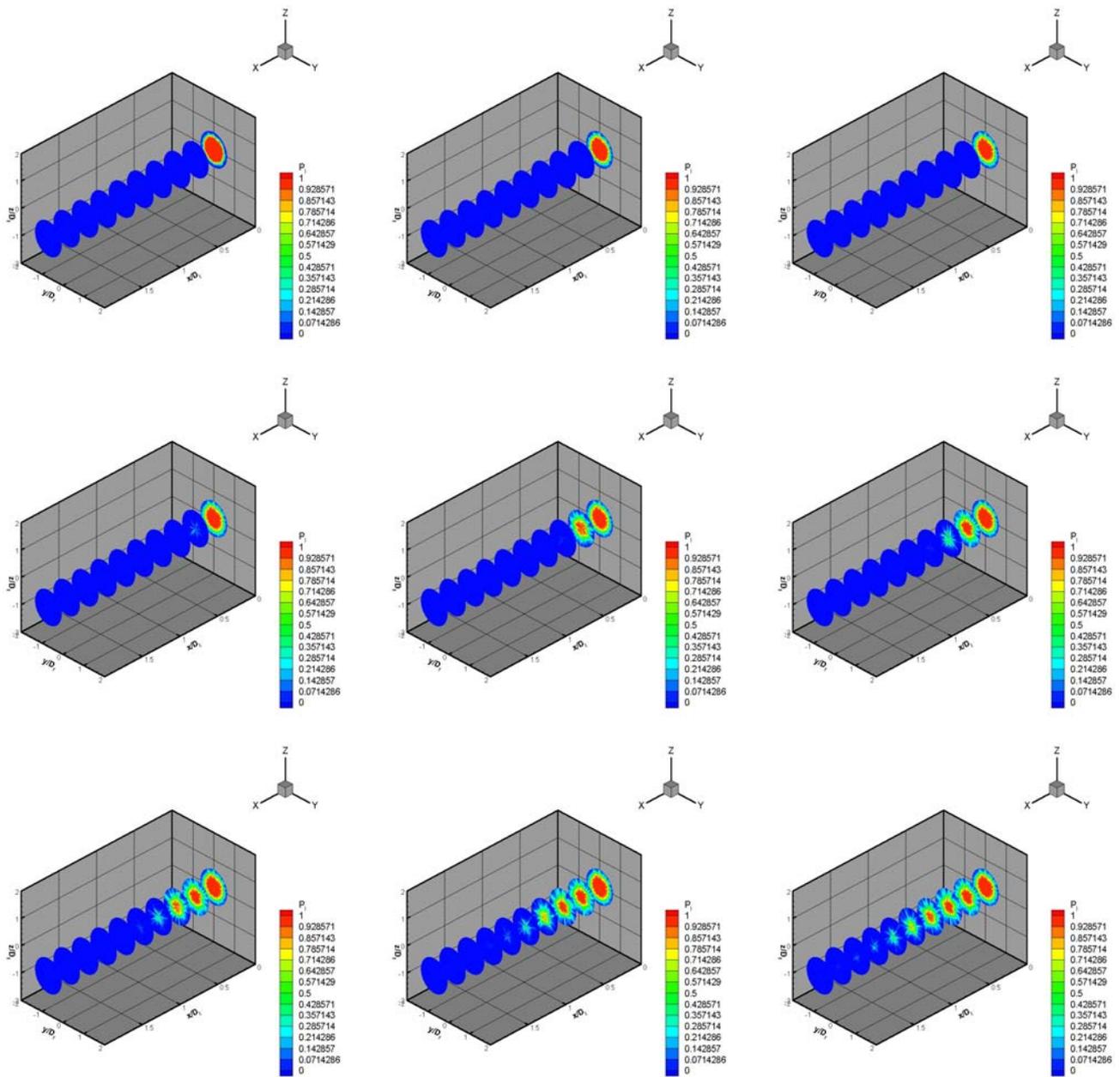
Les équations du mouvement sont alors les mêmes que dans le cas axisymétrique dans les directions radiale et axiale. En chaque point d'injection représenté sur la figure 4.16, on injecte plusieurs « floating guard » afin de représenter les différentes réalisations statistiques de la fragmentation du jet liquide. Il est alors possible de représenter le développement du cœur liquide dans le temps. Un tel résultat est présenté sur la figure 4.17 sous la forme d'évolution d'une surface. Cette surface correspond à la zone du domaine dans laquelle la probabilité de présence du cœur liquide est égale à 0.6. On peut voir le développement du cœur liquide et son « épluchage » dans la direction radiale.

Sur la figure 4.18, nous avons tracé, dans les mêmes conditions, la probabilité de présence du cœur liquide dans différentes sections du domaine de calcul. On peut voir la diminution de la zone de liquide non fragmenté dans la direction radiale au fur et à mesure que le liquide se déplace dans la direction axiale.

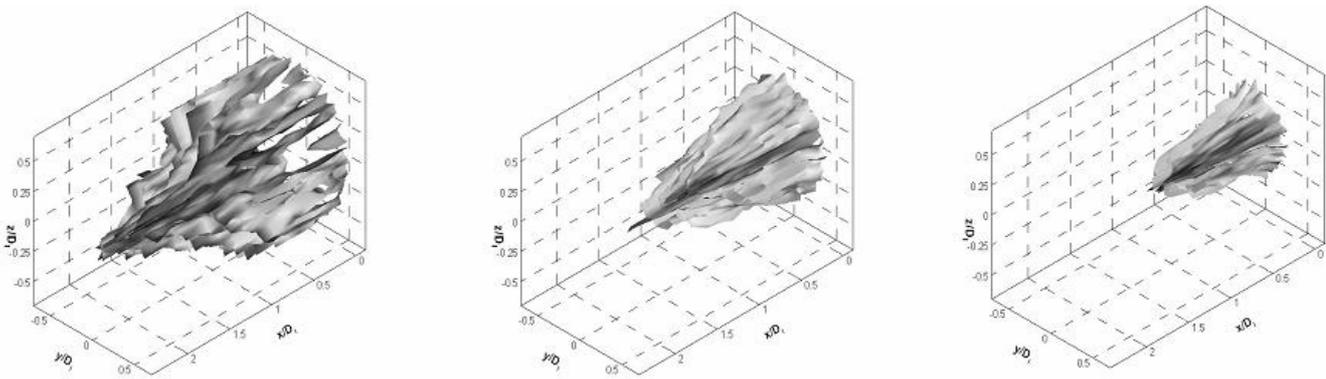
Les différentes surfaces de probabilité de présence du cœur liquide sont également représentées sur la figure 4.19. Cette fois, nous avons tracé ces surfaces à l'instant final, où l'état statistiquement stationnaire. A partir de cette figure, on observe la dispersion du liquide dans l'écoulement de gaz. La longueur intacte est obtenue par l'intermédiaire de la surface de probabilité égale à 0.9.



**Fig 4.17.** Evolution temporelle du cœur liquide en 3 dimensions à des instants séparés de  $1.10^{-6}$  s jusqu'à ce que le temps de vie des « floating guards » soit atteint,  $u_l = 0.68$  m/s et  $u_g = 60$  m/s. On a représenté ici une iso-surface de probabilité de présence égale à 0.6.

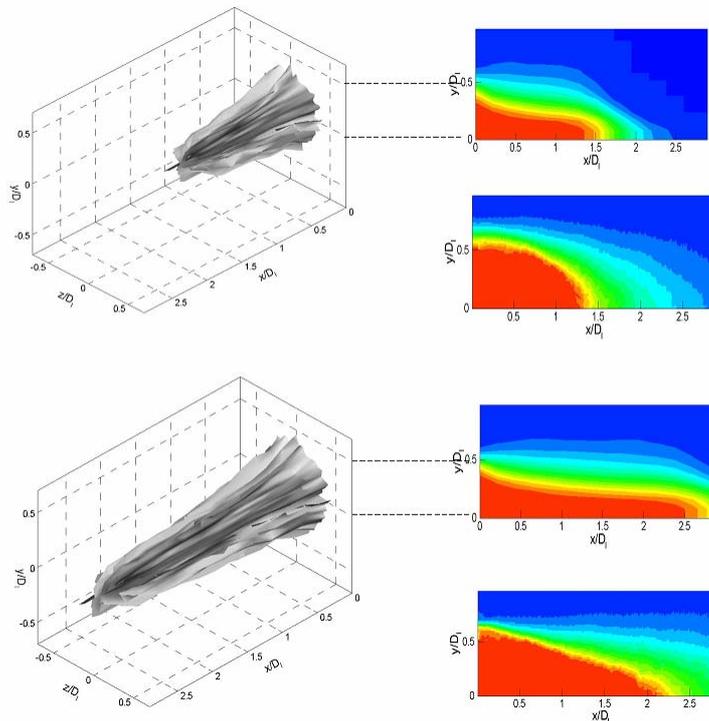


**Fig 4.18.** Evolution temporelle du cœur liquide en 3 dimensions à des instants séparés de  $1.10^{-6}$  s jusqu'à ce que le temps de vie des « floating guards » soit atteint,  $u_l = 0.68$  m/s et  $u_g = 60$  m/s. On a représenté ici les valeurs de la probabilité de présence de liquide non fragmenté dans différentes sections.



**Fig.4.19.** Iso-surfaces de probabilité de présence du cœur liquide 0.1, 0.5 et 0.9 respectivement

Afin de comparer les résultats obtenus en 3 dimensions à ceux obtenus par l'expérience et par le modèle axisymétrique, nous avons effectué la moyenne de probabilité de présence dans la direction azimutale. Cela signifie que dans chaque portion de cylindre, on effectue le calcul de la probabilité de présence du cœur liquide, et qu'on effectue la moyenne sur l'ensemble de ces portions. Nous avons réalisé ce type de simulation dans la configuration de Werquin et al. [106] et ces résultats sont présentés sur la figure 4.20.



**Fig 4.20.** Calculs tridimensionnels de la probabilité de présence du cœur liquide pour  $u_g=60$  m/s et  $u_l = 0.68$  m/s (en haut) et  $u_l = 1.36$  m/s (en bas); A gauche, iso-surface de probabilité de présence du cœur liquide égale à 0.9 et à droite moyenne sur l'ensemble des segments de la probabilité de présence (en haut à chaque fois) et fraction massique de liquide obtenue par l'expérience [106].

## 1.18 Conclusion.

Un modèle stochastique de jet en pulvérisation air-assistée a été proposé ici. Ce modèle permet de connaître la probabilité de présence de liquide non fragmenté à proximité de l'injecteur. Il dépend de 2 paramètres physiques liés aux phénomènes physiques aboutissant à la fragmentation du liquide.

Le mécanisme responsable de l'atomisation dans ce travail est l'instabilité de Kelvin Helmholtz contrôlée par l'épaisseur de vorticité de l'écoulement de gaz près de l'injecteur. Celle-ci entraîne le développement de l'instabilité de Rayleigh Taylor qui aboutit à la fragmentation du cœur liquide. Les paramètres physiques utilisés ont été tirés de l'expérience et plusieurs comparaisons ont été effectuées.

Tout d'abord, nous avons comparé la distribution de probabilité de présence obtenue avec ce modèle à la distribution de fraction volumique de liquide mesur e par O. Werquin [106]. Les résultats sont en accord avec l'expérience et l'évolution des caractéristiques du cœur liquide obtenue en fonction des variations de vitesse de liquide et de gaz sont en accord avec l'expérience.

Ensuite, nous avons évalué la sensibilité de la longueur du cœur liquide obtenue à partir de ce modèle à différents paramètres. Ces résultats ont été comparés à différentes corrélations expérimentales. Il semble que les tendances obtenues avec ce modèle soient en accord avec les résultats expérimentaux.

Cependant, ce modèle n'est applicable que dans une configuration spécifique du spray. En effet, ce modèle repose sur l'hypothèse de symétrie d'échelle pour la fragmentation du liquide. Cette hypothèse peut être formulée lorsque les valeurs de  $M$  sont grandes ( $M > 2.5$ ).

Les résultats obtenus par ce modèle vont nous permettre d'injecter des gouttes représentant les fragments détachés du cœur liquide. Ces fragments seront alors soumis aux processus d'atomisation secondaire dans l'écoulement. Cette zone d'atomisation primaire permet également de conditionner les composantes de vitesse par la présence de liquide non fragmenté. Les caractéristiques des gouttes form es et les processus d'atomisation vont maintenant être présentés dans le chapitre 5.



## Chapitre 5 Modélisation de l'atomisation secondaire

Afin de modéliser le comportement des fragments détachés du cœur liquide nous allons utiliser les résultats obtenus au chapitre 4. Nous supposons qu'à partir de la probabilité de présence de liquide non fragmenté, il est possible de déterminer les positions probables des éléments détachés qui seront entraînés ensuite par l'écoulement de gaz et seront ainsi soumises à la fragmentation secondaire et à la coalescence. De plus, en supposant que le spray autour du cœur liquide est suffisamment dilué, nous allons conditionner l'écoulement du gaz par la présence de liquide non fragmenté, afin de mieux représenter l'interaction entre les éléments détachés et le gaz. La démarche à suivre consiste à :

- déterminer les caractéristiques des parcelles détachées (taille caractéristique, positions et vitesses initiales).
- Conditionner la dynamique de ces parcelles en fonction de la présence de liquide non fragmenté.
- Proposer des modèles physiques d'atomisation secondaire.

Concernant ce dernier point, dans le paragraphe 1.3, nous avons décrit les mécanismes mis en avant dans la littérature pour la fragmentation secondaire du liquide. Estimons les diamètres typiques obtenus à partir de ces mécanismes vis-à-vis des mesures données dans J.C. Lasheras et *al.* [52] (1.3.1). Pour différentes vitesses débitantes de gaz et de liquide, les valeurs des diamètres typiques calculées à partir des différentes expressions présentées dans le chapitre 1 sont résumées dans le tableau 5.1.

$u_g (m/s)$	$u_l (m/s)$	$D_{32}(\mu m)$ expérience [52]	$2r_l(\mu m)$ (1.43)	$2r_l(\mu m)$ (1.45)	$2r_l(\mu m)$ (1.47)	$2r_l(\mu m)$ (1.48)
140	0.13	40	34.9	3118	84.5	74.9
140	0.2	50	34.9	3118	84.5	81.4
140	0.31	52	35.0	3118	84.5	90.3
140	0.43	63	35.0	3118	84.5	98.7
140	0.55	70	35.1	3118	84.5	106.1
133	0.13	43	38.6	3118	84.5	80.4
126	0.13	47	43.1	3118	84.5	86.6
119	0.13	55	48.3	3118	84.5	93.7

**Tab. 5.1.** Valeurs de  $D_{32}$  obtenues par des échelles typiques associées à différents mécanismes d'atomisation comparées à l'expérience pour plusieurs conditions d'injection.

Dans ces calculs, le taux de dissipation a été fixé à  $2.5 \times 10^8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ . Cette valeur correspond à la valeur maximale mesurée [52]. Dans ces conditions, les variations du  $D_{32}$  observées expérimentalement ne sont pas obtenues par les expressions (1.45) et (1.47) (brisure par la turbulence). En revanche, en utilisant l'expression (1.48) proposée par J.C. Lasheras et *al.* [52] couplée à (1.45), les variations du  $D_{32}$  en fonction de la vitesse débitante de liquide sont obtenues, pour une vitesse débitante de gaz constante. Cependant, les résultats expérimentaux sont surestimés et la valeur du taux de dissipation calculée par (1.48) est de l'ordre de  $\varepsilon = 7 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ . Si cette valeur ne peut être comparée à l'expérience au voisinage de l'injecteur, elle est supérieure à celle mesurée à une distance  $x/D_g \approx 20$  de l'injecteur. Cette position correspond à l'endroit où le  $D_{32}$  est minimal.

Les valeurs calculées par l'expression (1.43) (brisure par cisaillement) sont proches de la valeur minimale du  $D_{32}$  mesurée mais ne varient pas en fonction des conditions d'injection.

Il existe un autre mécanisme qui peut provoquer la fragmentation des parcelles après l'injection. Il s'agit de la brisure par collision. Elle dépend de plusieurs paramètres. L'un d'eux est le nombre de Weber  $We_{rel}$  basé sur la vitesse relative entre les deux gouttes et de leurs diamètres. Ainsi, quand  $We_{rel}$  est grand, les collisions aboutissent à une fragmentation et dans le cas contraire à une coalescence. Evaluons l'évolution de cette grandeur dans l'écoulement. Près de l'injecteur, la différence de vitesse entre les gouttes est importante du fait des mécanismes d'atomisation primaire et de la forte turbulence du gaz. Dans le champ lointain, cette différence s'amenuise, l'intensité de la turbulence étant plus faible. Ainsi, la vitesse relative diminue en

fonction de la distance axiale. Dans le cas de collisions, cela entraîne majoritairement des fragmentations près de l'injecteur et des coalescences dans la zone lointaine. Ceci peut expliquer la décroissance du  $D_{32}$  (liée à la fragmentation) dans un premier temps et sa croissance (liée à la coalescence) dans le champ lointain. La turbulence du gaz semble donc intervenir par l'intermédiaire des collisions entre gouttes : elle favorise les collisions aboutissant à une fragmentation au voisinage de l'injecteur aboutissant à des coalescences dans le champ lointain.

## 1.19 Formation de parcelles détachées ; leurs positions initiales, tailles et vitesses.

### 1.19.1 Positions initiales des parcelles détachées

Les fragments liquides seront représentés par des parcelles. Chaque parcelle forme une classe de gouttes possédant les mêmes caractéristiques: les trois composantes du vecteur vitesse  $u_p$ ,  $v_p$  et  $w_p$ , les trois composantes du vecteur position  $x_p$ ,  $y_p$  et  $z_p$ , une échelle caractéristique de longueur  $r_p$  (le rayon pour une sphère), et le nombre de fragments représentés par chaque parcelle  $n_p$ . Pour déterminer les positions  $x_p$ ,  $y_p$  et  $z_p$ , nous supposons que les zones où la probabilité de présence de liquide non fragmenté prend des valeurs entre 0.01 et 0.9 correspondent à des positions dans lesquelles on a une probabilité complémentaire à 1 de trouver des fragments.

### 1.19.2 Taille initiale des parcelles détachées.

Les tailles et nombre de gouttes représentées par une parcelle suivent une fonction présumée de distribution de taille, en satisfaisant la conservation du débit massique du liquide entrant. Cela signifie que la masse du liquide injectée est répartie dans les parcelles créées à chaque instant. Concernant la distribution présumée, les résultats expérimentaux près de l'injecteur indiquent une distribution des tailles sous la forme d'une exponentielle (P. Mamottant et *al.* [59]).

La preuve expérimentale d'une telle fonction a été obtenue également dans d'autres études : [30], [90]. Cette distribution est définie à partir d'une échelle caractéristique unique  $r_i$  et s'exprime sous la forme :

$$f(r) = \frac{1}{r_i} \exp\left(-\frac{r}{r_i}\right) \quad (5.1)$$

où  $r_i$  est le rayon moyen des fragments près de l'injecteur.

Une telle distribution apparaît dans des processus stochastiques sans mémoire [83] quand des événements se produisant à différents lieux ou instants ne sont pas corrélés [49]. Dans le contexte de l'atomisation, l'argument pour l'émergence d'une telle distribution a été proposé par M.Gorokhovski 2001 [33] :

Après beaucoup de fragmentations, la production de nombreuses gouttes entraîne une absence de corrélations temporelles entre leurs nombres. Ainsi, la probabilité de trouver la goutte mère devient proportionnelle à celle de trouver un ensemble de goutte produite. Cela se traduit par la relation :

$$f(r + dr) \approx f(r)f(dr)$$

Cette équation fonctionnelle est satisfaite si et seulement si  $f(r)$  possède une forme exponentielle dont les moments sont définis par l'expression :

$$\langle r^m \rangle = r_t^m \cdot m! \quad (m = 0, 1, 2 \dots)$$

pour des raisons de normalisation, cette distribution exponentielle doit être négative.

La méthode de tirage des tailles associées aux parcelles repose sur le choix du nombre de gouttes contenues dans chaque parcelle. Elle est identique à celle utilisée dans KIVA II [2]:

A partir d'une fonction de distribution de masse définie par :

$$g(r) = \frac{r^3}{6r_t^4} e^{-r/r_t}$$

$$\text{telle que } \int_0^{+\infty} g(r) dr = 1$$

les tailles sont tirées aléatoirement afin de conserver la masse du liquide débitant.

Il est alors nécessaire de déterminer l'échelle  $r_t$ . Nous allons estimer cette échelle à l'aide d'observations expérimentales. Nous utiliserons les résultats présentés par J.C. Lasheras et *al.* [52] (figures 1.4 et 1.5). Les comparaisons seront basées sur les valeurs obtenues à  $x/D_g \approx 10$  correspondant à la première position axiale de mesure. Les longueurs maximales du cœur liquide dans ces conditions sont de l'ordre de  $1D_l$ , soit  $0.67D_g$ .

Dans le tableau 5.2, nous avons comparé les échelles typiques données par les expressions (1.35) [51] obtenues par J.C. Lasheras et *al.* [52], (1.41) obtenue par M. Hong [39] et (1.43). Il apparaît que les valeurs obtenues par la relation (1.41) ne permettent pas d'obtenir la variation mesurée suite aux changements de vitesse de liquide.

$u_g(m/s)$	$u_l(m/s)$	$D_{32}(\mu m)$ expérience	$2r_t(\mu m)$ (1.48)	$\lambda_{RT}(\mu m)$ (1.26)	$\lambda_{RT}(\mu m)$ (1.52)	$\lambda_{RT}(\mu m)$ (1.57)
140	0.13	40	74.9	220.9	568.0	33.6
140	0.2	50	81.4	221.0	568.0	41.8
140	0.31	52	90.3	221.2	568.0	52.0
140	0.43	63	98.7	221.4	569.0	61.3
140	0.55	70	106.1	221.5	569.0	69.4
133	0.13	43	80.4	235.5	598.0	36.8
126	0.13	47	86.6	252.0	631.0	40.4
119	0.13	55	93.7	270.7	668.0	44.7

**Tab. 5.2.** Valeurs de  $D_{32}$  obtenues par le modèle comparées à l'expérience pour plusieurs conditions d'injection.

On remarque qu'avec les deux expressions (1.26) et (1.52) la variation des tailles observée dans l'expérience en fonction des vitesses débitantes de liquide et de gaz n'est pas obtenue pour l'expérience de J.C. Lasheras et *al.* En revanche, les expressions (1.48) et (1.52) permettent d'obtenir cet écart. La relation (1.48) est basée sur une estimation du taux de dissipation et surestime les tailles obtenues dans l'expérience. Par ailleurs, nous avons considéré que le mécanisme primaire d'atomisation était lié au développement d'une instabilité de Rayleigh Taylor. L'expression (1.57) basée sur ce mécanisme permet d'obtenir des résultats proches de l'expérience. Finalement, c'est celle que nous retiendrons pour former les gouttes résultant de l'atomisation primaire.

### 1.19.3 Vitesses initiales des parcelles détachées.

D'après E. Villermaux, 1998 la vitesse convective d'ondes interfaciales s'exprime par la formule (1.19). Cette expression a été attribuée à la valeur absolue de la vitesse initiale des parcelles détachées :

$$|u_p| = \frac{\sqrt{\rho_l} u_l + \sqrt{\rho_g} u_g}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_g}} \quad (5.2)$$

Dans le même temps, les parcelles détachées sont entraînées par l'écoulement turbulent dans la phase gazeuse, ce qui peut provoquer une dispersion des parcelles détachées dans la direction radiale. L'orientation du vecteur vitesse (5.2) a donc été déterminée en présumant une composante radiale distribuée de façon aléatoire entre 0 et  $|u_\perp|$ . Cette dernière est calculée à partir de l'énergie turbulente dans la phase gazeuse (conditionnée par la présence de liquide non fragmenté) transmise dans le sens radial à la phase liquide :

$$\rho_l |u_\perp|^2 = \rho_g \langle k_{tur,g} \rangle_l \quad (5.3)$$

où  $\langle k_{tur,g} \rangle_l = \frac{1}{2} (\langle u'^2 \rangle_l + \langle v'^2 \rangle_l + \langle w'^2 \rangle_l)$

### 1.20 Phase gazeuse conditionnelle, transport lagrangien des parcelles détachées

Les parcelles détachées sont alors transportées par l'écoulement. Les équations du mouvement des gouttes sont :

$$\frac{dx_p}{dt} = u_p \quad (5.4)$$

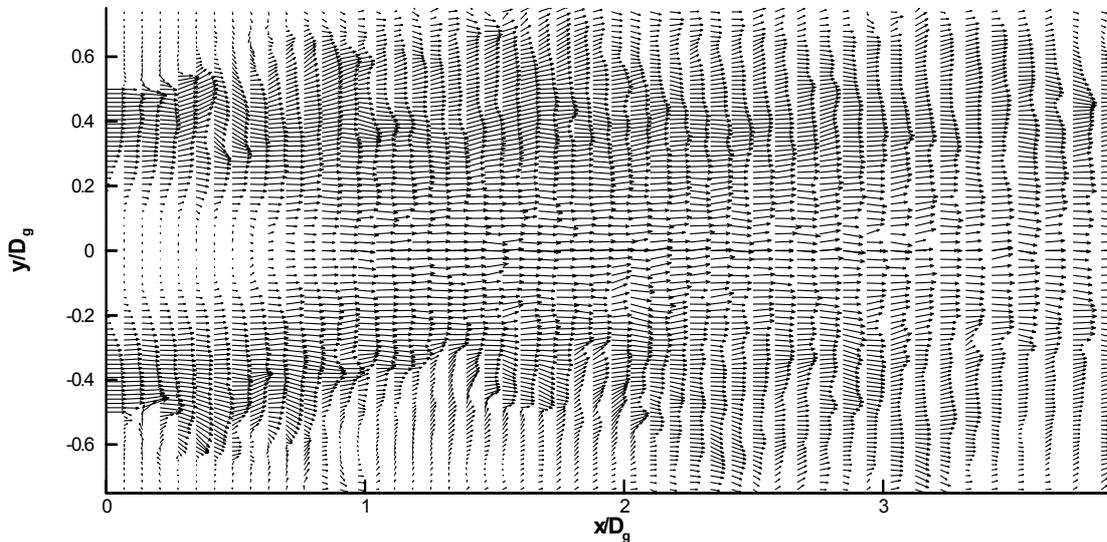
$$\frac{du_p}{dt} = \frac{f}{St_p} (\langle u_g \rangle_l - u_p) \quad (5.5)$$

où  $x_p$  et  $u_p$  sont respectivement la position et la vitesse des gouttes et  $\langle u_g \rangle_l$  est la vitesse du gaz conditionnée par la présence de liquide :

$$\langle u_g \rangle_l = u_g (1 - P_l) + u_l P_l \quad (5.6)$$

où  $P_l$  est la probabilité de présence de liquide,  $f$  est le coefficient de traînée et  $St_p$  est le nombre de Stokes de la particule.

Un exemple de champ de vitesse du gaz instantané tiré de la LES conditionné par la présence de liquide est représenté sur la figure 5.1.



**Fig 5.1.** *Champ de vitesse du gaz conditionné.*

Sur cette figure, on remarque une zone proche de l'injecteur dans laquelle la vitesse du gaz est très faible. Cette zone correspond au cœur liquide. En effet, près de la zone intacte de liquide, les particules fluides de gaz ont une vitesse proche de celle du liquide. Près des bords de l'injecteur, on note la présence de zones de forte vorticité caractérisées par des tourbillons. Il est important de souligner que cette approche nous permet d'obtenir la dynamique de ces tourbillons à grande échelle et ainsi de simuler leur action sur les gouttes transportées par la phase gazeuse.

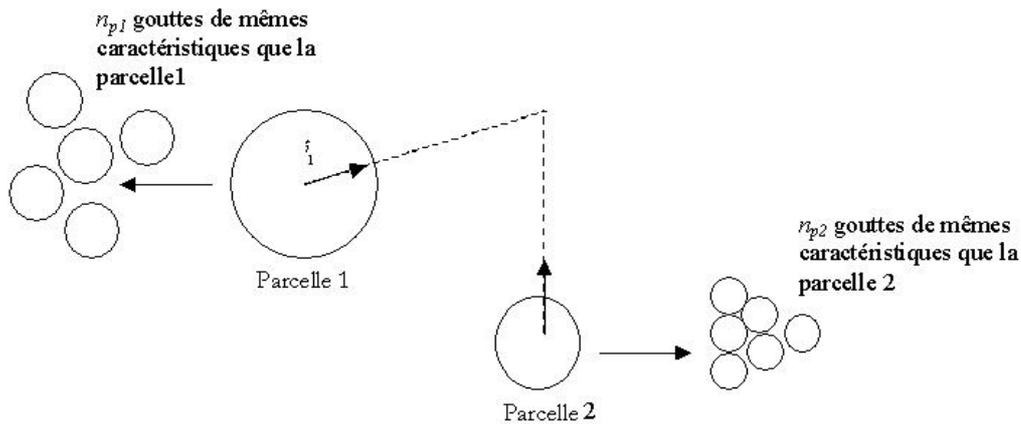
## 1.21 Modélisation des collisions

Les phénomènes liés aux collisions entre gouttes doivent maintenant être pris en compte. Pour se faire, nous avons choisi d'utiliser une approche statistique. Cela signifie que les collisions ainsi que leurs résultats seront trait es avec une certaine probabilité.

Le modèle utilis e ici est bas e, en partie, sur l'approche développée par P.J. O'Rourke [67]. En particulier, nous utiliserons l'expression qu'il propose pour déterminer la probabilité de rencontre entre deux gouttes. Nous présenterons dans un premier temps le modèle d evelopp e par P.J. O'Rourke. Ce modèle ne prend pas en compte les fragmentations suite aux collisions entre gouttelettes. Nous proposerons donc dans une seconde partie une modification de ce modèle pour tenir compte de la fragmentation dans le cadre de l'approche de P.J. O'Rourke.

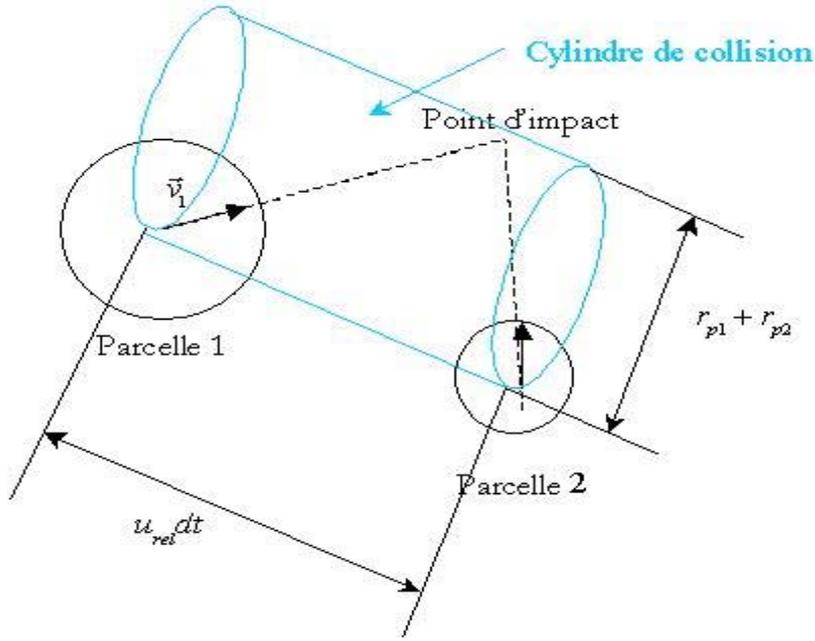
### 1.21.1 Modèle de P.J. O'Rourke

Considérons dans un premier temps deux parcelles portant les indices 1 et 2. L'indice 1 correspond à celle qui représente des gouttes de tailles plus grandes et l'indice 2 à celle représentant des gouttes de tailles plus petites. Les variables qui les caractérisent seront indicées avec ces chiffres comme l'indique la figure 5.2 .



**Fig 5.2.** Schéma d'une collision entre deux gouttelettes

Chacune de ces parcelles représente un ensemble de gouttes ayant les mêmes caractéristiques. Cela signifie que leur collision correspond à un ensemble de collisions. La probabilité qu'une collision se produise entre ces deux parcelles est obtenue par analogie avec la théorie cinétique des gaz (P.J. O'Rourke [68]). En effet, si on considère à nouveau les deux parcelles représentées sur la figure 5.2 , la vitesse relative  $\vec{u}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  définit, avec le pas de temps, la distance sur laquelle le couple peut entrer en collision . La section efficace de collision est alors définie par  $\pi(r_{p1} + r_{p2})^2$  et on peut construire un cylindre à partir de ces paramètres qui définit l'espace dans lequel peuvent se produire des collisions (figure 5.3) .



**Fig 5.3.** Cylindre de collisions considéré dans le modèle d'O'Rourke.

Si on suppose que les gouttes sont uniformément réparties dans chaque parcelle, le nombre de collisions est alors défini comme le rapport du volume occupé par les éventuelles collisions, c'est à dire du cylindre, et le volume total dans lequel peuvent se déplacer à chaque pas de temps les parcelles, soit le volume de la maille  $V_{maille}$ . Le volume total du cylindre de collisions est donné par  $\pi(r_{p1} + r_{p2})^2 \|\vec{v}_{p1} - \vec{v}_{p2}\| dt$ . Ainsi, la valeur maximale du nombre de collisions dans une maille est obtenue par l'expression :

$$n_{coll\ max} = \frac{n_{p1} n_{p2} \pi (r_{p1} + r_{p2})^2 \|\vec{v}_{p1} - \vec{v}_{p2}\| dt}{V_{maille}} \quad (5.7)$$

où  $n_{p1}$  et  $n_{p2}$  sont les nombres de gouttes contenues dans les parcelles 1 et 2, respectivement.

Nous supposons ici que la taille de la parcelle 2 reste inchangée et que seule celle de la parcelle 1 est altérée par la collision. Cela signifie qu'un nombre donné de gouttes de la parcelle 2 peut rencontrer toutes les gouttes de la parcelle 1. Le nombre moyen de collisions est donc donné par :

$$n_{coll} = \frac{n_{p2} \pi (r_{p1} + r_{p2})^2 \|\vec{v}_{p1} - \vec{v}_{p2}\| dt}{V_{maille}} \quad (5.8)$$

A partir de ce nombre, on peut définir la fréquence des collisions entre les gouttes séparant ces deux parcelles :

$$v_{coll} = \frac{n_{p2} \pi (r_{p1} + r_{p2})^2 \|v_{p1} - v_{p2}\|}{V_{maille}} \quad (5.9)$$

On suppose alors que la probabilité de collision suit une distribution de Poisson, donc sous la forme :

$$P_n = e^{-n_{coll}} \frac{n_{coll}^n}{n!} \quad (5.10)$$

où  $P_n$  est la probabilité qu'une parcelle subisse  $n$  collisions. La probabilité qu'il n'y ait aucune collision peut donc être obtenue :

$$P_0 = e^{-n_{coll}} \quad (5.11)$$

Un nombre aléatoire  $XX$  dans l'intervalle  $[0,1]$  peut alors être tiré. Si ce nombre est inférieur à  $P_0$ , aucune collision n'est calculée et dans le cas contraire, on considère qu'il y a une collision dont l'issue doit être déterminée. L'approche de P.J. O'Rourke consiste alors à considérer que les deux paramètres déterminant sont le paramètre d'impact et le nombre de Weber. P.J. O'Rourke se base donc sur la cartographie de la figure 1.11 pour déterminer la frontière entre coalescence et fragmentation. Un autre nombre aléatoire  $YY$  entre 0 et 1 est ensuite tiré. Le paramètre d'impact est calculé comme  $b = \sqrt{YY}(r_{p1} + r_{p2})$  et sa valeur détermine la nature de la collision. En effet, si  $b$  est inférieur à une valeur critique  $b_{cr}$  qui dépend du nombre de Weber  $We_{rel}$ , chaque collision aboutit à une coalescence et à un changement de la taille des partenaires. Dans le cas contraire, P.J. O'Rourke suppose que la collision aboutit à une déformation faible des gouttes et la collision se traduit uniquement par un changement des vitesses des parcelles. La valeur de ce paramètre dépend du rayon de la goutte, de la tension de surface du liquide et de la vitesse relative entre les gouttes et s'exprime par :

$$b_{cr}^2 = (r_{p1} + r_{p2})^2 \min(1.0, f(\gamma)/We_{rel})$$

$$f(\gamma) = \gamma^3 - 2.4\gamma^2 + 2.7\gamma \quad (5.12)$$

$$\gamma = r_{p1}/r_{p2}$$

Supposons qu'une collision aboutisse à la coalescence, le nombre de collisions est alors déterminé par la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k \leq XX < \sum_{k=0}^n P_k \quad (5.13)$$

Pour chaque goutte de la parcelle de plus grand rayon,  $n$  gouttelettes de plus petits rayons sont sélectionnées afin de simuler la coalescence. Chaque gouttelette de la parcelle 2 subit  $n$  coalescences avec des gouttelettes de la parcelle 1. La nouvelle taille associée à la parcelle 1 peut alors être obtenue par conservation de la masse. En effet, la masse contenue dans une goutte de la parcelle 1 est égale à la somme de sa masse initiale et de celle des gouttes qui coalescent avec elle, donc de la parcelle 2. En notant  $r_{p1i}$  la taille de la goutte avant coalescence, on peut écrire :

$$r_{p1}^3 = r_{p1i}^3 + nr_{p2}^3 \quad (5.14)$$

et finalement :

$$r_{p1} = (r_{p1i}^3 + nr_{p2}^3)^{\frac{1}{3}} \quad (5.15)$$

Le nombre de gouttes dans cette parcelle reste inchangé. En effet, on suppose dans cette approche que chaque goutte subit  $n$  coalescences. En revanche, le nombre de gouttelettes contenues dans la parcelle 2 est modifié comme :

$$n_{p2} = n_{p2i} - n \times n_{p1} \quad (5.16)$$

où  $n_{p2i}$  est le nombre de gouttes dans cette parcelle avant la coalescence.

Si ce nombre est insuffisant pour avoir  $n$  coalescences, alors  $n$  est recalculé pour que toutes les gouttes coalescent. La parcelle qui leur est associée est alors supprimée pour la suite de la simulation. La vitesse des gouttes dans cette parcelle n'est pas altérée puisque les restantes n'ont subi aucune collision. En revanche, les composantes de vitesse de la parcelle 1 sont modifiées de façon à conserver la quantité de mouvement. Si on note  $u_{p1i}$  et  $v_{p1i}$  ces composantes avant collision, on peut écrire :

$$m_1 u_{p1} = m_{1i} u_{p1i} + nm_2 u_{p2} \quad (5.17)$$

où  $m_1$  et  $m_{1i}$  sont respectivement les masses après et avant coalescence des gouttes de la parcelle

1. Et on obtient finalement :

$$u_{p1} = \frac{1}{r_{p1}^3} \left( r_{p1i}^3 u_{p1i} + nr_{p2}^3 u_{p2} \right) \quad (5.18)$$

$$v_{p1} = \frac{1}{r_{p1}^3} \left( r_{p1i}^3 v_{p1i} + nr_{p2}^3 v_{p2} \right) \quad (5.19)$$

### 1.21.2 Introduction de la fragmentation dans le modèle de O'Rourke

A la différence du modèle de P.J. O'Rourke, notre approche repose sur un unique paramètre concernant l'avenir de la collision, le nombre de Weber indiqué par l'observation expérimentale de [6]. Au dessus de cette valeur de 20, la collision aboutira à une fragmentation et en dessous à une coalescence.

La coalescence est modélisée de la même manière que P.J. O'Rourke (équations (5.7) à (5.11)) et nous utilisons l'approche présentée dans la thèse I. Vinkovic et *al.* [103] pour la fragmentation. Cette approche repose sur les formulations présentées dans le Chapitre 2. La solution de l'équation de Fokker Planck (2.8) est alors utilisée. Dans ces conditions, il est nécessaire de déterminer plusieurs paramètres :  $\langle \ln \alpha \rangle$  et  $\langle \ln^2 \alpha \rangle$  ainsi que le rayon minimal des gouttes issue de la fragmentation. Pour déterminer le rayon minimal des gouttes issues d'une fragmentation, on utilise le nombre de Weber collisionnel critique :

$$We_c = \frac{\rho_g \langle u_f^2 \rangle 2r_c}{\sigma} \quad (5.20)$$

où  $r_c$  est le rayon critique et  $\langle u_f^2 \rangle$  la vitesse relative entre deux gouttes distantes de  $l_{typ}$ . On peut écrire que :

$$r_c = \frac{\sigma We_c}{2\rho_g \langle u_f^2 \rangle} \quad (5.21)$$

Ce rayon détermine la taille minimale qui peut exister après cette collision.

La grandeur  $\langle u_f^2 \rangle$  doit donc être calculée de façon moyenne sur l'ensemble des collisions dans une maille de calcul. Nous supposons ici que la turbulence dans la phase gazeuse permet d'obtenir cette échelle moyenne.  $\langle u_f^2 \rangle$  peut donc être reliée à ce phénomène physique par l'expression de Kolmogorov donnant son expression entre deux points distants de  $l_{typ}$  :

$$\langle u_f^2 \rangle = \left( \varepsilon l_{typ} \right)^{2/3} \quad (5.22)$$

Pour déterminer  $l_{typ}$ , A. Vallet et *al.* [99], P.A. Beau [10] et N. Mayers [62], ont utilisé un espacement moyen entre les gouttes. Cependant, les collisions sont plutôt caractérisées par le libre parcours de gouttes en collisions non par l'espacement moyen entre les gouttes. Par exemple, si la taille de goutte est petite, quelque soit l'espacement, il n'y aura pas de collisions. C'est pourquoi nous avons calculé  $l_{typ}$  à partir de la section efficace de collision, du volume de la maille et du nombre total de collisions possibles  $n_{p1}n_{p2}$  :

$$l_{typ} = \frac{V_{maille}}{n_{p1}n_{p2}\pi(r_{p1} + r_{p2})^2} \quad (5.23)$$

La nouvelle expression pour l'échelle minimale résultant de la collision de deux parcelles est alors obtenue par :

$$r_c = \frac{\sigma We_c}{2\rho_g(\varepsilon l_{typ})^{2/3}} \quad (5.24)$$

Dans cette expression, la valeur du nombre de Weber critique utilisée est égale à 12 par analogie avec le cisaillement exercé par la phase gazeuse sur le liquide. Ainsi, seules les parcelles ayant une taille supérieure à  $r_c$  peuvent subir une fragmentation. Ce type de fragmentation aboutit à la formation de nombreuses gouttelettes et les paramètres sont calculés à partir de la taille maximale des deux parcelles  $r_{p1}$  et la taille minimale  $r_c$  :

$$\frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{\langle \ln \alpha \rangle} = \ln \left( \frac{r_c}{r_{p1}} \right) \quad (5.25)$$

$$\langle \ln \alpha \rangle = c_1 \ln \left( \frac{r_c}{r_{p1}} \right) \quad (5.26)$$

avec  $c_1 = 1$

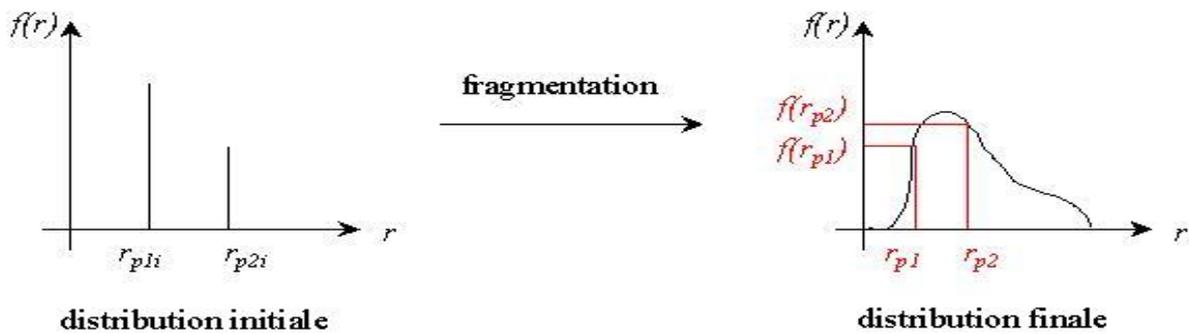
Ces expressions traduisent le fait que la taille des gouttes issues de la fragmentation tend statistiquement vers  $r_c$ . La distribution initiale est une double fonction de Dirac centrée sur les tailles  $r_{p1}$  et  $r_{p2}$ .

L'importance des pics est déterminée par le nombre de gouttes dans chaque parcelle, ainsi, on a :

$$\Delta r \delta(r - r_{p1}) = \begin{cases} \frac{n_{p1}}{n_{p1} + n_{p2}} & \text{si } r \in [r_{p1}, r_{p1} + \Delta r] \\ 0 & \text{si } r \notin [r_{p1}, r_{p1} + \Delta r] \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\Delta r \delta(r - r_{p2}) = \begin{cases} \frac{n_{p2}}{n_{p1} + n_{p2}} & \text{si } r \in [r_{p2}, r_{p2} + \Delta r] \\ 0 & \text{si } r \notin [r_{p2}, r_{p2} + \Delta r] \end{cases} \quad (5.28)$$

On peut donc faire évoluer cette distribution grâce à l'équation de Fokker-Planck comme indiqué sur la figure 5.4 :



**Fig 5.4.** Evolution de la fonction de distribution des gouttes durant la fragmentation.

La masse des deux parcelles est alors répartie entre les deux nouveaux partenaires de sorte que la fonction de distribution finale soit respectée de la meilleure façon possible. On tire donc deux nouveaux rayons aléatoirement de la distribution. Connaissant leurs « poids » statistiques

dans la nouvelle distribution  $\int_0^{r_{p1}} f(r) dr$  et  $\int_0^{r_{p2}} f(r) dr$ , on répartit les nombres de gouttes dans chaque parcelle par conservation de la masse comme :

$$n_{2/1} = \frac{\int_0^{r_{p2}} f(r) dr}{\int_0^{r_{p1}} f(r) dr}$$

$$n_{p1} = \frac{n_{p1i} r_{p1i}^3 + n_{p2i} r_{p2i}^3}{r_{p1}^3 + r_{p2}^3 n_{2/1}} \quad (5.29)$$

et

$$n_{p2} = n_{p1} n_{2/1} \quad (5.30)$$

Une composante aléatoire  $|u_{coll}|$  est ajoutée aux parcelles formées dans chaque direction de l'espace telle que :

$$|u_{coll}| = r_{p1i} * v_{coll} \quad (5.31)$$

Celle-ci est construite à partir des échelles de longueur  $r_{p1i}$  et de temps  $v_{coll}^{-1}$  caractéristiques des gouttes durant ce processus de fragmentation.

## 1.22 Conclusion

Dans cette partie, nous avons donc présenté la liaison entre la modélisation des phases d'atomisation primaire et secondaire. Cette liaison s'effectue par l'intermédiaire de la formation de parcelles au voisinage de l'injecteur. Celles-ci sont créées dans les zones de probabilité de présence du coeur liquide non nulles. Elles représentent donc les fragments détachés par le processus d'atomisation primaire.

Leurs tailles initiales sont issues du mécanisme d'atomisation primaire. L'écart obtenu en fonction des conditions d'injection est en accord avec celui obtenu expérimentalement.

Le but étant de prédire les caractéristiques du spray dans sa globalité, la dynamique des parcelles formées a été obtenue en fonction du champ de vitesse du gaz et de la présence de liquide.

Le processus de fragmentation responsable des tendances expérimentales observées semble être lié aux collisions entre les gouttes dans le spray. L'approche de P.J. O'Rourke [67] a donc été utilisée pour modéliser les collisions. Leur avenir est basé sur une valeur du nombre de Weber collisionnel (indiquée par les mesures) qui permet de distinguer les fragmentations des coalescences.

Dans la suite de ce travail, nous allons maintenant présenter les résultats obtenus par l'intermédiaire des modèles d'atomisation primaire et secondaire développés dans cette étude. Nous nous placerons dans les conditions de l'expérience de J.C. Lasheras et *al.* [51]. Les résultats obtenus pourront ensuite être comparés à l'expérience.



## Chapitre 6 Résultats de simulation *LES* couplés avec le modèle stochastique en 2D et 3D

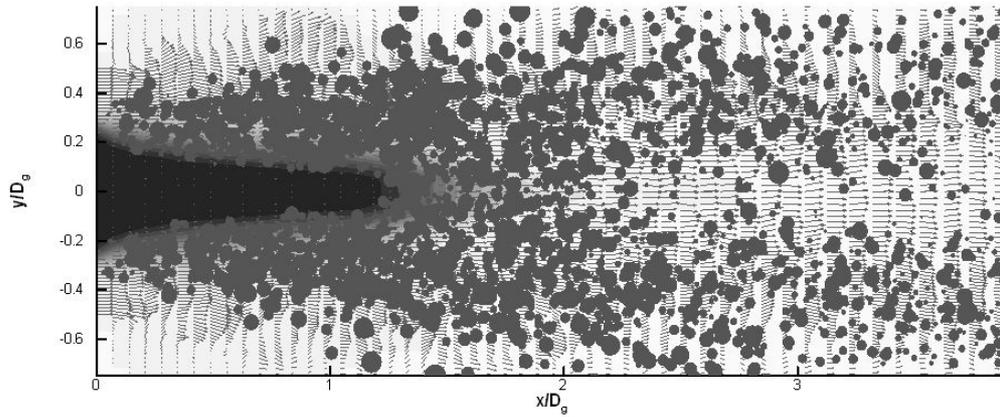
Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus avec l'approche stochastique décrite dans les chapitres 2, 4 et 5 couplée à la simulation des grandes échelles pour la phase gazeuse présentée dans le chapitre 3. Dans un premier temps, nous décrirons qualitativement les résultats obtenus au voisinage de l'injecteur. Puis nous comparerons quantitativement nos simulations avec les résultats expérimentaux de J.C Lasheras *et al.* 1998 [52].

### 1.23 Distributions au voisinage de l'injecteur

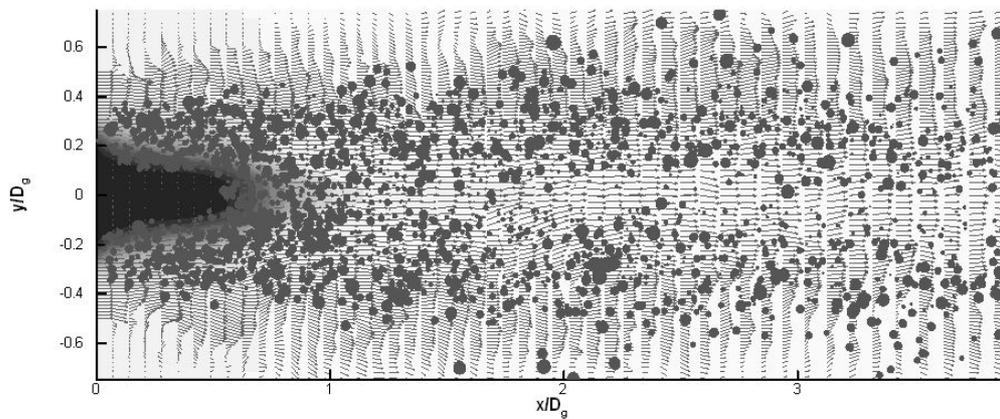
Nous avons superposé des visualisations de différentes variables dans un plan. Sur les figures 6.1 à 6.4, on peut voir la distribution de présence de liquide, les parcelles au voisinage de l'injecteur ainsi que le champ de vitesse instantanée du gaz conditionné par la présence de liquide par l'expression (5.6).

Plusieurs remarques peuvent être faites en fonction du

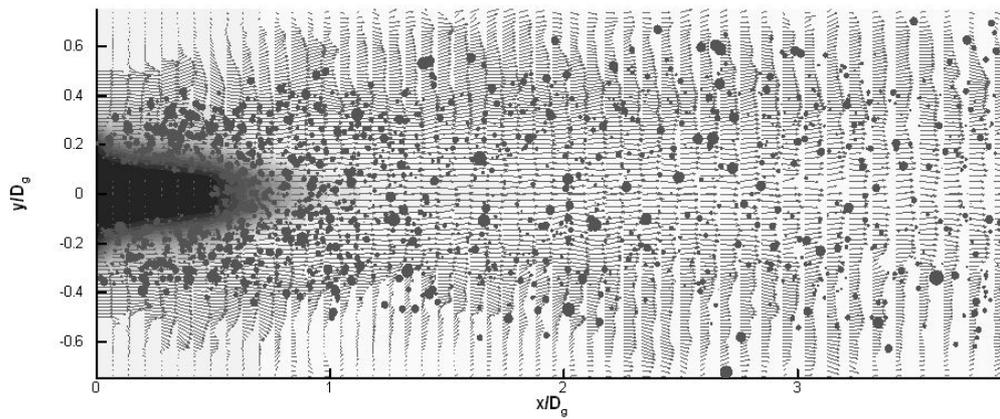
- Plus  $M$  est grand, plus la longueur de la zone de liquide non fragmenté est grande, avec des valeurs tout de même très proches lorsque  $M$  atteint des valeurs élevées.
- Plus  $M$  est grand, plus la taille moyenne des fragments est petite. Ces résultats sont à rapprocher du fait que les grandes valeurs de  $M$  favorisent la fragmentation.



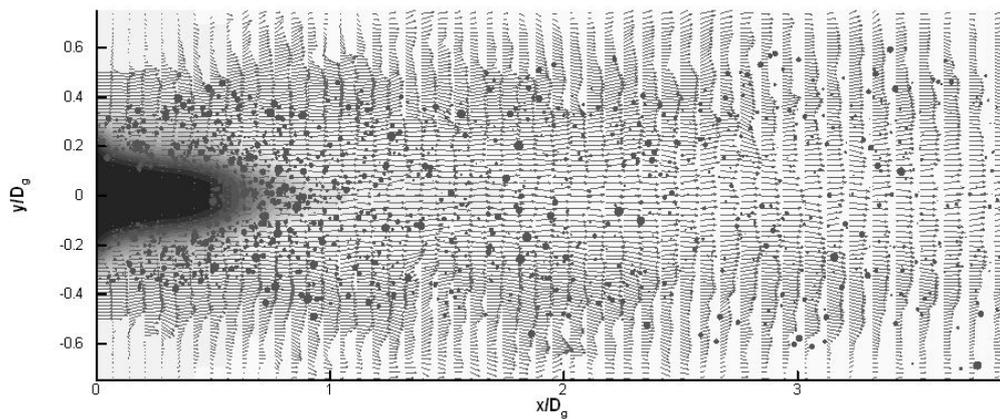
**Fig. 6.1.** Simulation du jet liquide injecté dans un coflow de gaz à forte vitesse ( $u_g=140\text{m/s}$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=2.8\text{m/s}$ .



**Fig. 6.2.** Simulation du jet liquide injecté dans un coflow de gaz à forte vitesse ( $u_g=140\text{m/s}$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=0.55\text{m/s}$ .



**Fig. 6.3.** Simulation du jet liquide injecté dans un coflow de gaz à forte vitesse ( $u_g=140m/s$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=0.33m/s$ .



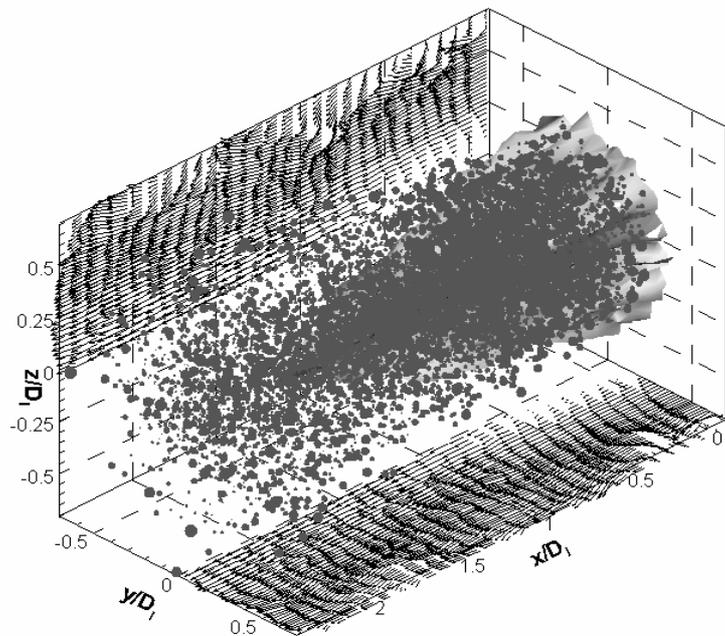
**Fig. 6.4.** Simulation du jet liquide injecté dans un coflow de gaz à forte vitesse ( $u_g=140m/s$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=0.13m/s$ .

Des visualisations tridimensionnelles ont également réalisées sur les figures 6.2 et 6.3. L'isosurface de probabilité de présence du coeur liquide égale à 0.5 ainsi que des projections du champ de vitesse du gaz conditionné par la présence de liquide et les fragments détachés du coeur liquide y ont été représentés. La vitesse débitante du gaz dans les deux cas est la même ( $u_{g0} = 140 m/s$ ) et celle du liquide varie. Les mêmes conclusions que sur les figures précédentes peuvent être tirées.

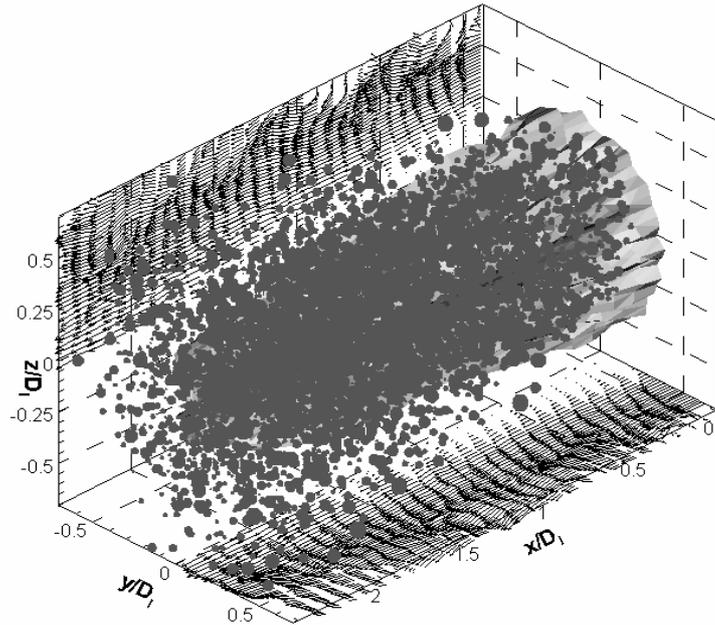
Les résultats montrent une densité de parcelles importante près de l'injecteur. Ces parcelles représentent les filaments liquides étirés et fragmentés au voisinage du coeur liquide. De plus, la

forme « dentelée » de l'isosurface de probabilité de présence met en évidence l'épluchage du jet liquide dans la direction radiale autour du cœur liquide. Cette forme représente qualitativement le cisaillement turbulent exercé par le gaz sur le liquide. Le conditionnement du champ de vitesse du gaz, même s'il s'effectue dans une zone très petite du domaine de calcul, est très important. En effet, cette zone est caractérisée par une forte densité de gouttes et de filaments qui peuvent entrer en collision. Cette forte densité est favorisée par le fait que dans les zones de forte probabilité de présence de liquide, les fragments séjournent plus longtemps.

On remarque également la présence de fragments de grande taille à la périphérie du jet (figure 6.6) représentant les morceaux de liquide détachés du coeur ainsi que des parcelles de très petite taille.



**Fig 6.5.** Simulation du jet liquide à faible vitesse ( $u_l=0.13m/s$  injecté dans un coflow de gaz à forte vitesse ( $u_g=140m/s$ ))



**Fig 6.6.** Simulation du jet liquide à faible vitesse ( $u_l=0.55\text{m/s}$  injecté dans un coflow de gaz à forte vitesse ( $u_g=140\text{m/s}$ )

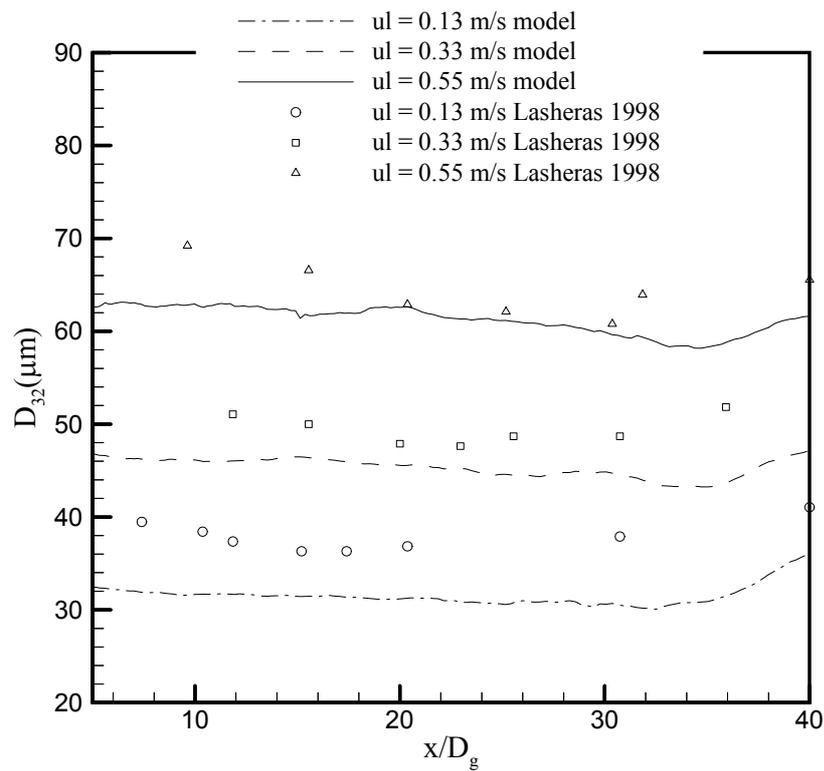
## 1.24 Evolution du diamètre de Sauter

Nous avons tracé les résultats obtenus pour le  $D_{32}$  en fonction de la distance axiale. Ces résultats sont comparés aux mesures de J.C. Lasheras et *al.* 1998 [52]. Les différentes observations expérimentales sont obtenues par la simulation :

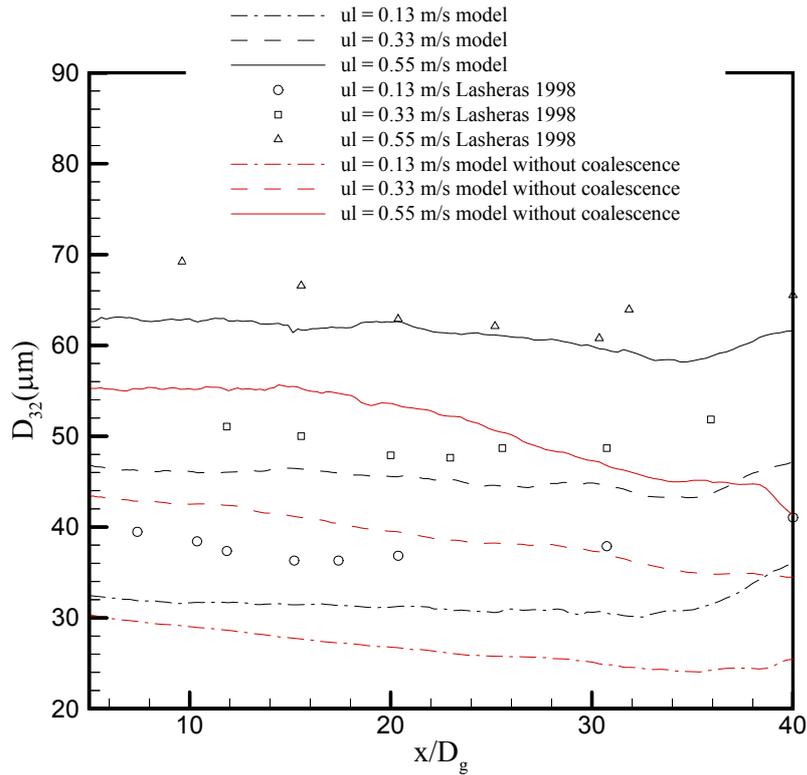
- Pour une même vitesse débitante de gaz, plus la vitesse de liquide est grande plus la valeur du  $D_{32}$  est grande. Les écarts obtenus par simulation en fonction de la vitesse de liquide sont de plus du même ordre de grandeur que dans l'expérience.
- Une première zone est observée dans laquelle le  $D_{32}$  décroît.
- Une deuxième zone est caractérisée par une croissance du  $D_{32}$ .

Cette évolution du diamètre de Sauter est obtenue grâce aux modèles de coalescence et de fragmentation. Sur la figure 6.8, nous avons tracé les résultats obtenus par simulation avec et sans modèle de coalescence. Ces courbes suggèrent la nécessité du modèle de coalescence pour

obtenir les tendances expérimentales. En effet, dans le cas où ce mécanisme n'est pas modélisé, les valeurs du  $D_{32}$  sont plus faibles et décroissent sur toute la distance. Dans ce sens, la prise en compte de la coalescence permet d'obtenir une valeur d'équilibre du diamètre de Sauter caractérisée par un minimum pour chaque courbe. Ce minimum est différent pour chaque vitesse débitante de liquide comme dans l'expérience.



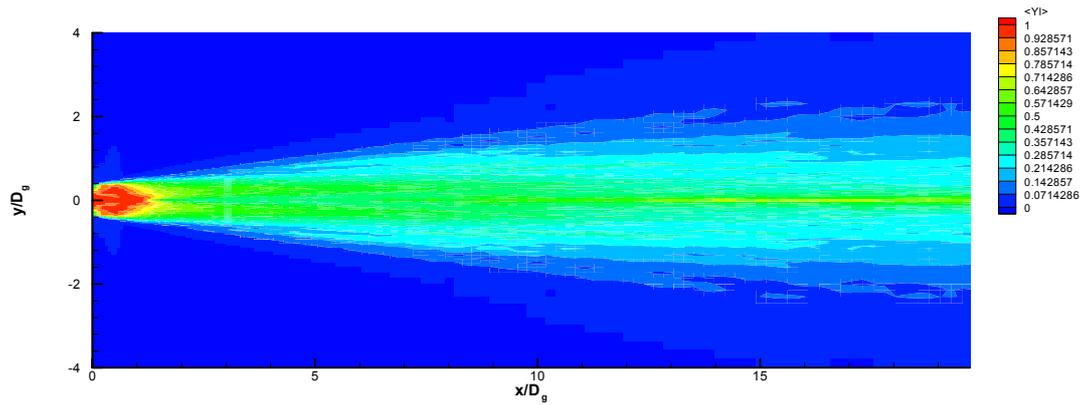
**Fig.6.7.** Comparaison du  $D_{32}$  calculé avec les mesures de J.C. Lasheras et al. [52].



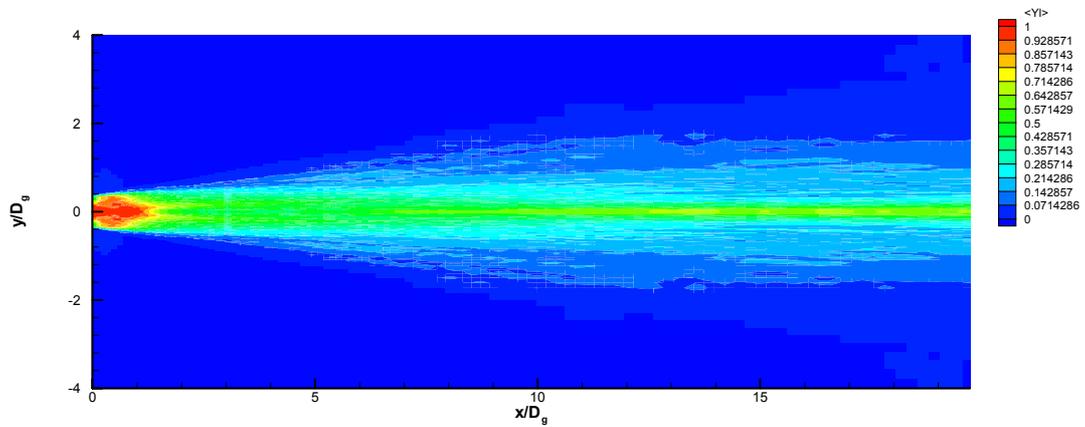
**Fig. 6.8** Comparaison du  $D_{32}$  calculé avec et sans modèle de coalescence et des mesures de J.C.Lasheras et al [52].

## 1.25 Fraction massique de liquide

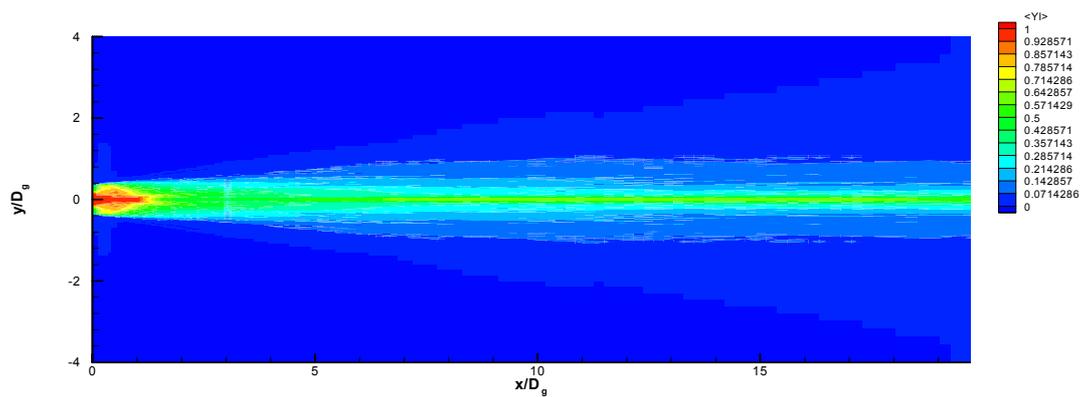
Il est également possible à partir des parcelles présentes dans l'écoulement de construire les champs Eulériens concernant la phase liquide. Dans chaque maille, on calcule les grandeurs moyennes sur l'ensemble des parcelles présentes. On conserve les résultats instantanés et on effectue la moyenne sur l'ensemble de ces champs. Les résultats sur la fraction massique moyenne du liquide sont présentés sur les figures 6.7 à 6.9. La vitesse débitante du gaz est maintenue constante et celle du liquide varie. On remarque une zone proche de l'injecteur caractérisée par une valeur maximale de fraction massique moyenne de liquide. Cette zone correspond au cœur liquide et aux filaments étirés par le gaz. Les valeurs de cette variable diminuent dans la direction radiale lorsque l'on s'éloigne du centre du spray. Nous allons maintenant utiliser ces champs pour comparer l'angle du spray obtenu avec les résultats dans la littérature.



**Fig. 6.7.** Fraction massique de liquide moyenne calculée ( $u_g=140\text{m/s}$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=0.55\text{m/s}$ .



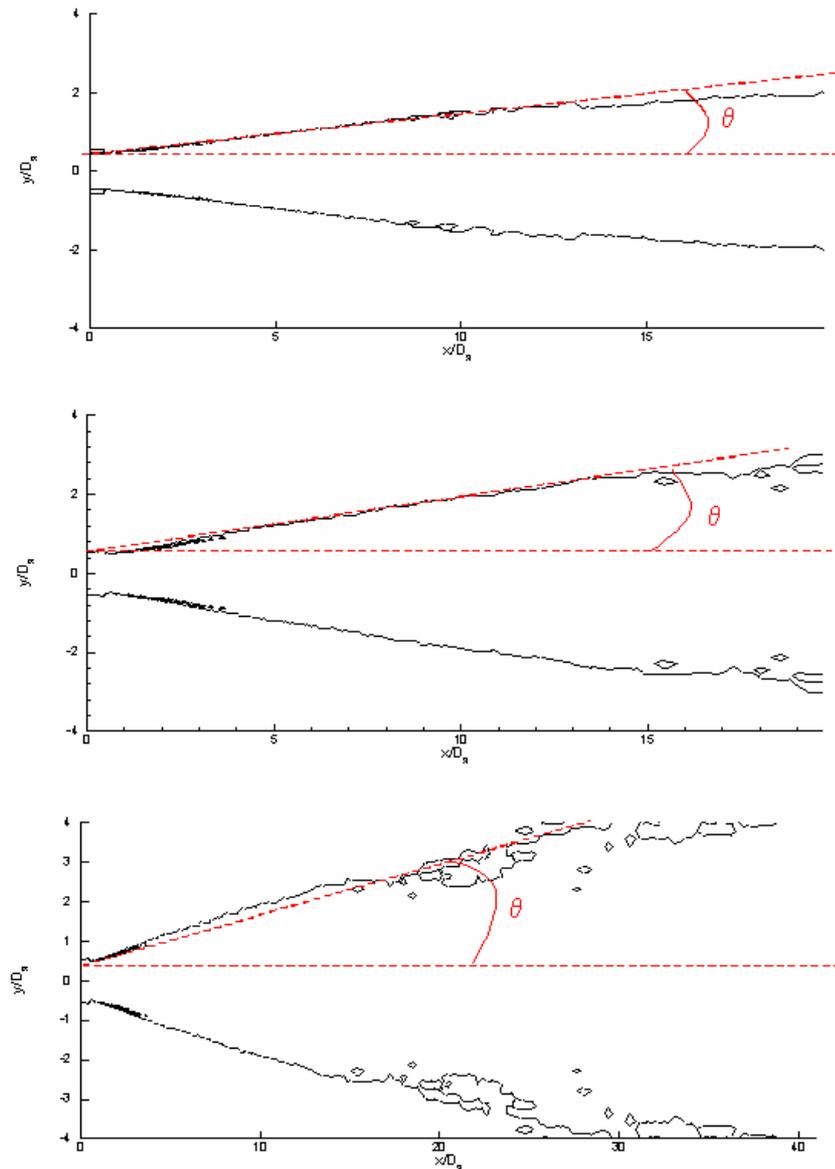
**Fig. 6.8.** Fraction massique de liquide moyenne calculée ( $u_g=140\text{m/s}$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=0.33\text{m/s}$ .



**Fig. 6.9.** Fraction massique de liquide moyenne calculée ( $u_g=140\text{m/s}$ ) pour une vitesse débitante de liquide  $u_l=0.13\text{m/s}$ .

## 1.26 Angle du spray

Nous avons mesuré le demi-angle  $\theta$  du spray par rapport à la surface de fraction massique de liquide égale à 0.01 de la manière indiquée sur la figure 6.10. Les valeurs de cet angle calculées à partir de l'expression (1.30) sont répertoriées dans le tableau 6.1 ainsi que celles obtenues par simulation.



**Fig 6.10.** Iso-fraction massique de liquide égale à 0.01 ( $u_g=140\text{m/s}$ ) pour différentes vitesses débitantes de liquide ( $u_l=0.55\text{m/s}$ ;  $u_l=0.33\text{m/s}$ ;  $u_l=0.13\text{m/s}$ ).

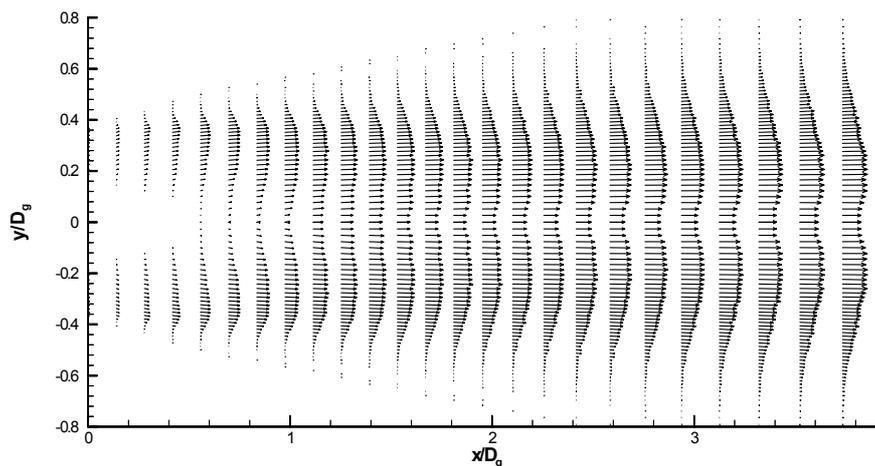
Vitesse du liquide (m/s)	Vitesse du gaz (m/s)	$M$	$\theta$ (Lasheras)	$\theta$ (simulation)
0.55	140	79	17.01	21.78
0.33	140	221	10.98	13.17
0.13	140	1426	4.51	9.06

**Tab 6.1.** Angles de spray obtenus par la modélisation.

Comme l'indique la figure 6.10, les valeurs de  $\theta$  diminuent en fonction de  $M$ . En effet, plus la valeur de la vitesse de liquide est grande, donc plus  $M$  est petit à vitesse de gaz constante, et plus la dispersion de la masse de liquide dans la direction radiale est grande. Les résultats obtenus par la simulation varient également en fonction de  $M$ . la tendance est donc en accord avec ceux de J.C. Lasheras et *al.* 2000. Cependant, les valeurs obtenues sont plus faibles que dans les expériences puisque les mesures de G. Boisdron 2006 indiquent un demi-angle de l'ordre de  $30^\circ$ . Une explication possible peut être que ces expériences ont été réalisées pour des valeurs de  $M$  plus faibles que dans notre simulation.

### 1.27 Champ de vitesse moyen de liquide

Le champ moyen de vitesse du liquide a également été représenté sur la figure 6.11.



**Fig. 6.11.** Champ moyen de liquide calculé.

La vitesse moyenne augmente progressivement. Elle est d'abord plus importante à la périphérie du jet liquide qu'au centre. Ceci est dû à l'accélération des fragments de liquide détaché par

l'écoulement annulaire de gaz. Cette différence s'amenuise lorsque la distance par rapport à l'injecteur augmente.

## 1.28 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté des résultats de simulation LES couplée aux modèles stochastiques d'atomisation primaire et secondaire pour la phase liquide présentés dans les chapitres précédents. Ces simulations ont été effectuées dans les conditions de J.C. Lasheras et *al.* 1998 [52], c'est à dire pour des valeurs de  $M$ ,  $We$  et  $Re_g$  élevées. Plusieurs tendances observées expérimentalement ont été obtenues par la modélisation en fonction des conditions initiales d'injection :

- L'évolution de la longueur du cœur liquide diminue lorsque  $M$  augmente.
- Les ordres de grandeur des  $D_{32}$  obtenus en fonction des vitesses débitantes de liquide sont proches des valeurs expérimentales.
- L'évolution axiale du  $D_{32}$  comporte deux phases successives de diminution et d'augmentation.
- Les valeurs minimales du  $D_{32}$  pour chaque vitesse débitante de liquide sont proches des mesures expérimentales.
- L'évolution du demi-angle de spray en fonction de  $M$  et son ordre de grandeur est proche de l'expérience.

## Conclusion

Dans ce travail de thèse, l'objectif était de proposer un modèle pour simuler les jets liquides assistés par gaz caractérisés par des nombres de Weber et de Reynolds élevés. Un modèle stochastique pour l'évolution de la phase liquide a été proposé. Celui-ci a été couplé à la simulation des grandes échelles de la phase gazeuse.

La procédure consiste dans un premier temps à résoudre un jet de gaz turbulent par une approche LES. Cette simulation est effectuée jusqu'à ce que le régime statistiquement stationnaire soit atteint. Ensuite, un modèle d'atomisation primaire est utilisé pour décrire le cœur liquide. Il permet de calculer la distribution de probabilité de présence de liquide non fragmenté au voisinage de l'injecteur. Des gouttes résultant de la phase d'atomisation primaire sont ensuite formées. Leur dynamique dans l'écoulement est calculée à partir du champ de vitesse du gaz conditionné par la présence de liquide. Elles sont ensuite soumises aux processus d'atomisation secondaire.

Concernant la phase d'atomisation primaire, nous avons considéré que la pulvérisation primaire air-assistée à grands nombres de Reynolds et de Weber est un phénomène critique de type cascade régi par l'hypothèse de symétrie d'échelle et de symétrie isotropique. Dans cette optique, la structure aléatoire du liquide non-fragmenté est modélisée par les trajectoires spatiales de particules stochastiques gouvernées par ces symétries. Les paramètres qui pilotent la dynamique stochastique de ces particules proviennent du mécanisme déstabilisateur : l'instabilité de Rayleigh Taylor à la suite d'accélération des ondes formées par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Ainsi un nouveau paramètre,  $\ln(\lambda_{RT}/\lambda_{KH})$  a été introduit pour la fragmentation dans les conditions de symétrie d'échelle, où  $\lambda_{KH} \approx C_{KH} \sqrt{\rho_l/\rho_g} \delta_g$  (L. Raynal [77]) et une nouvelle expression de  $\lambda_{RT}$  a été proposée sous une forme suivante :

$$\lambda_{RT} = 2\pi \left( \frac{6C_{KH}}{C_d} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/4} \delta_g We_{\delta_g}^{-1/2} \left( \frac{u_l}{u_g} \right)^{1/2}$$

Un autre paramètre pour la fragmentation caractérise le transfert d'énergie cinétique du gaz vers le liquide par rapport à l'inertie du liquide. Il s'agit de la durée de ce processus ou temps de vie des particules stochastiques :

$$t_{vie} = \sqrt{\frac{2}{|M-1|}} \frac{D_l}{u_l}$$

L'allure de la distribution de probabilité de présence de liquide est en accord relatif avec les résultats expérimentaux sur la fraction massique moyenne de liquide. De plus, les variations de longueur du cœur liquide en fonction des vitesses débitantes de gaz et de liquide obtenues par le modèle sont en accord avec l'expérience d' O. Werquin 2001 [106]. Des gouttes ont ensuite été formées à partir de l'échelle de Rayleigh Taylor et les tailles obtenues sont en accord avec l'expérience de J.C. Lasheras *et al.* 1998 [52].

Les gouttes ont alors été soumises aux mécanismes d'atomisation secondaire. Dans cette étude, l'évolution de l'échelle typique des gouttes est associée aux collisions. Le modèle de P.J. O'Rourke 1981 [67] a été utilisé pour déterminer la probabilité de collision. Chacune de ces collisions aboutit à la fragmentation ou à la coalescence. Le paramètre déterminant l'avenir de la collision est le nombre de Weber collisionnel. La coalescence a été modélisée par l'intermédiaire de l'approche de P.J. O'Rourke 1981 [67] et un modèle stochastique a été proposé pour la fragmentation sur la base du formalisme développé par M. Gorokhovski *et al.* 2003 [34] et en suivant l'approche de I. Vincokic *et al.* 2006 [103].

Les simulations ont été effectuées dans les conditions de l'expérience de J.C. Lasheras *et al.* 1998 [52]. Les résultats sont en accord avec l'expérience, en particulier, l'évolution spatiale de  $D_{32}$  mesurée ainsi que sa variation en fonction des vitesses débitantes du liquide et du gaz sont

obtenues. L'angle du spray a également été évalué par l'intermédiaire du champ moyen de fraction massique de liquide. Son évolution en fonction du rapport  $M$  est également obtenue.

L'approche proposée ici semble donc capable de simuler l'intégralité du spray et les paramètres du modèle ont été identifiés à des mécanismes physiques dans le temps facilement acceptable pour les calculs pratiques.

Dans le cadre du Post-doc d'A. Chtab, cette approche a été utilisée afin de modéliser des spray de type Diesel et couplée au code numérique KIVA II. L'action du liquide sur le gaz, provoquant sa mise en mouvement, a été introduite dans cette approche.

Ce travail est le premier pas vers une approche LES/injecteur stochastique. Le modèle a été utilisé pour simuler des sprays dans des conditions de laboratoire, à savoir avec des fluides de substitution par rapport aux conditions dans les moteurs de fusée. Avant d'utiliser ce modèle pour évaluer les grandeurs caractéristiques de la phase liquide dans les conditions réelles, il reste encore du travail : l'introduction des effets de courbure dans la dynamique des particules stochastiques, les effets de la dynamique de l'écoulement liquide, une autre modélisation de fragments formés autour du cœur liquide, ...

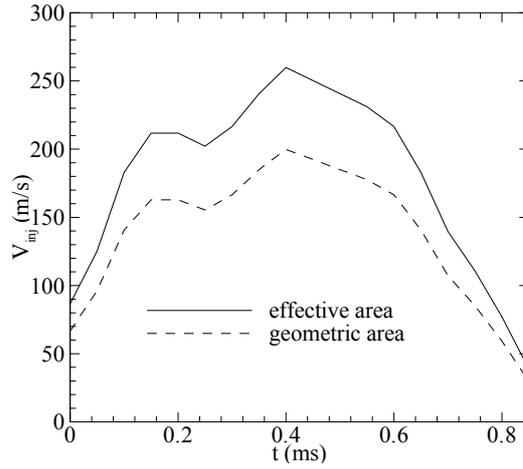
## Annexe A Application du modèle à un jet de type diesel

A l'heure actuelle, l'application de l'approche décrite dans le Chapitre 4 à des jets de type diesel dans le cadre de KIVA II fait l'objet de travaux réalisés par A. Chtab et M. Gorokhovski. Dans ces conditions, le liquide est injecté à forte vitesse dans un environnement de gaz au repos et le mécanisme dominant la phase atomisation primaire est très difficile à identifier : de nombreux processus dépendants les uns des autres peuvent influencer sur ce mécanisme. Des études expérimentales ont montré que parmi ceux-ci les plus importants étaient l'instabilité de Rayleigh Taylor ([111], [36], [9], [80], [70]), la turbulence ([109], [0], [30], [93]), les poches de cavitation dans l'injecteur ([94], [17], [8], [5]), ou les conditions instationnaires de la vitesse d'injection ([25]), ...([84])

Nous allons présenter l'application de l'approche basée sur les « floating cutter » à ce type de jet en introduisant les paramètres qui caractérisent l'instabilité de Raleigh-Taylor, le cisaillement et le caractère instationnaire de la vitesse d'injection due à la cavitation à l'intérieur de l'injecteur. Nous décrivons dans un premier temps l'expérience de référence. Puis nous identifierons les paramètres et les conditions initiales du modèle. La phase d'atomisation secondaire sera également simulée et des comparaisons expérimentales seront réalisées.

### A.1 Présentation de l'expérience

L'expérience que nous avons choisie comme référence a été réalisée par C. Arcoumanis et *al.* [4]. Il s'agit d'un spray de type diesel injecté dans de l'air au repos dans des conditions atmosphériques. L'injection du fuel est réalisée par un injecteur de diamètre 0.22 mm et le volume total injecté est égal à 4 mm<sup>3</sup>. Le temps d'injection est de l'ordre de 0.85 ms. L'évolution temporelle de la vitesse débitante est tracée sur la figure A.1. La courbe en pointillé représente cette évolution basée sur les caractéristiques géométriques de l'injecteur. Cependant, l'influence de la cavitation peut être très importante vis à vis de la vitesse d'injection. Elle peut provoquer une augmentation de 35% de sa valeur. Pour prendre en compte ce phénomène, C. Arcoumanis et *al.* ont calculé l'évolution de la vitesse en présence de cavitation. Les caractéristiques prenant en compte ce mécanisme seront dite effectives dans ce travail.



**Fig. A.1** Vitesse d'injection calculée à partir de l'aire géométrique de l'injecteur et de l'aire effective (C. Arcoumanis et al.).

## A.2. Caractéristiques des « floatting cutter »

Le mode de désintégration dans cette configuration diffère de celui de l'atomisation air-assistée. Les paramètres concernant les particules stochastiques doivent être associés aux mécanismes qui régissent ce mécanisme. Les équations de mouvement pour les « floatting cutter » sont données par :

Dans la direction radiale par l'équation (4.5) :

$$V_{ip} = v \langle \ln \alpha \rangle r + \sqrt{\frac{v \langle \ln^2 \alpha \rangle}{2}} r \Gamma(t) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dr}{dt} = V_{ip}$$

Et dans la direction axiale par :

$$U_{ip} = V_{inj}^{eff}(t_{inj}) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dx_{ip}}{dt} = U_{ip}$$

où  $V_{inj}^{eff}(t_{inj})$  est la vitesse débitante du liquide à l'instant  $t_{inj}$ . Cette valeur est obtenue à partir de la figure A.1. Elle tient compte du phénomène de cavitation et son évolution est représentée par la courbe en traits pleins sur cette figure.

Dans cette approche, nous supposons que le mécanisme qui provoque la fragmentation du cœur liquide est une instabilité de type Rayleigh Taylor. Celle-ci déstabilise le cœur liquide et provoque sa fragmentation jusqu'à une échelle critique notée  $r_c$ . A partir de cette échelle, il n'est plus possible de fragmenter les éléments liquides. Les paramètres du modèle sont donc déterminés à partir de :

$$\frac{\langle \ln^2 \alpha \rangle}{\langle \ln \alpha \rangle} = \ln \left( \frac{r_c}{\lambda_{RT}} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\langle \ln \alpha \rangle = c \ln \left( \frac{r_c}{\lambda_{RT}} \right) \quad (\text{A.4})$$

Dans ces expressions,  $\lambda_{RT}$  est la longueur d'onde associée au mode le plus amplifié de l'instabilité de Rayleigh Taylor. Celle-ci est calculée à partir des travaux de R.D. Reitz [80] :

$$\lambda_{RT} = 9.02 \langle R_{inj}^{eff} \rangle \frac{(1 + 0.45 Zh^{0.5})(1 + 0.4 Th^{0.7})}{(1 + 0.87 We^{1.67})^{0.6}} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{où } Zh = We_{fuel}^{0.5} / Re_{fuel} ; Th = Zh \cdot We_{gas}^{0.5} ; We_{gas} = \frac{\rho_g \langle V_{inj}^{eff} \rangle^2 \langle R_{inj}^{eff} \rangle}{\sigma} ; We_{fuel} = \frac{\rho_{fuel} \langle V_{inj}^{eff} \rangle^2 \langle R_{inj}^{eff} \rangle}{\sigma} ;$$

$$Re_{fuel} = \frac{\rho_{fuel} \langle V_{inj}^{eff} \rangle \langle R_{inj}^{eff} \rangle}{\nu_{fuel}}$$

Dans ces expressions  $\langle V_{inj}^{eff} \rangle^2$  et  $\langle R_{inj}^{eff} \rangle$  sont respectivement la vitesse débitante et le rayon effectifs moyennés sur le temps d'injection,  $\rho_{fuel}$ ,  $\nu_{fuel}$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du liquide. Le rayon critique  $r_c$  est calculé à partir de la valeur unitaire du nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho_g \langle V_{inj}^{eff} \rangle^2 r_c}{\sigma} = 1 \quad (\text{A.6})$$

La valeur de  $r_c$  est donc calculée à partir de :

$$r_{crit} = \frac{\sigma}{\rho_{gas} \langle V_{inj}^{eff} \rangle^2} \quad (\text{A.7})$$

La constante  $c$  du modèle a été fixée dans toute l'étude à 0.1 .

Le temps de vie des « floating cutter » est obtenu par analogie avec le temps caractéristique associé au cisaillement :

$$t_{vie}^{-1}(t) = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_{fuel}}} \frac{|u_g - V_{inj}^{eff}(t)|}{R_{inj}^{eff}(t)} \quad (A.8)$$

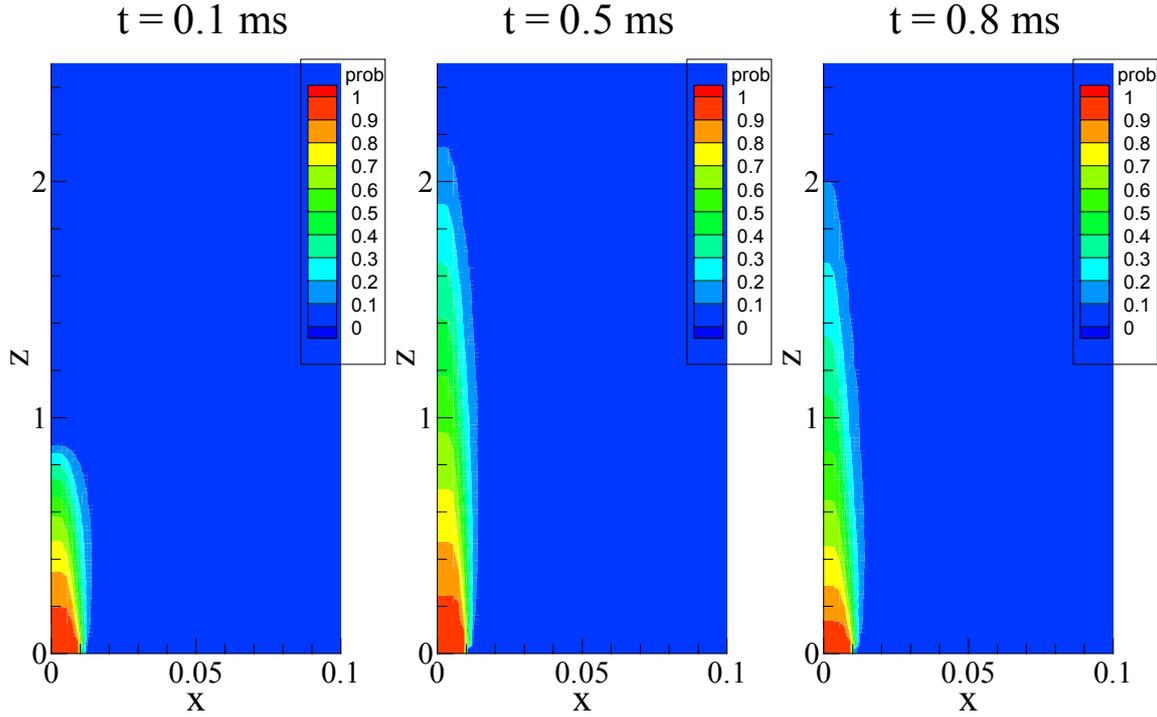
Dans cette expression, la vitesse débitante du gaz est égale à 0, le gaz étant au repos. Ce paramètre varie en fonction du temps et prend en compte le phénomène de cavitation.

Les conditions initiales pour les « floating cutter » sont alors déterminées par :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ r &= R_{inj}^{eff}(t) \\ u &= V_{inj}^{eff}(t) \\ v &= 0 \end{aligned} \quad (A.9)$$

où  $x$  et  $u$  sont respectivement les position et vitesse des « floating cutter » dans la direction axiale ;  $r$  et  $v$  sont respectivement les position et vitesse des « floating cutter » dans la direction radiale.

La probabilité de présence de liquide non fragmenté peut alors être calculée. Des résultats de simulations sont présentés sur la figure A.2. Le Fuel utilisé est du df2 de masse volumique  $\rho_{fuel} = 0.8 \text{ g/cm}^3$ . La température et la pression du gaz environnant sont respectivement de  $300^\circ K$  et de  $1 \text{ bar}$ . Le rayon effectif de l'injecteur est  $R_{inj}^{eff} = 0.00897 \text{ cm}$ . Une masse  $m_{inj} = 3.2 \text{ mg}$  de liquide est injectée à température  $T_{inj} = 300^\circ K$  durant  $t_{inj} = 0.85 \text{ ms}$ . Durant ce temps, la vitesse d'injection varie dans le temps entre 0 et  $260 \text{ m/s}$ .



**Fig A.2.** *Probabilité de présence de liquide non fragmenté à différents instants.*

On remarque que la longueur de cette zone de liquide non fragmentée varie dans le temps à cause de l'évolution des conditions initiales.

Dans les sprays de type Diesel, le jet de liquide est injecté à forte vitesse. De ce fait, le liquide entraîne le gaz environnant provoquant sa mise en mouvement. Les conditions sont telles que l'écoulement de gaz peut-être turbulent. La méthode utilisée pour simuler la phase gazeuse est une approche de type RANS. Le code utilisé est le code KIVA II [2].

### A.3. Formation de parcelles

Nous avons vu comment simuler la phase d'atomisation primaire du liquide. Celle-ci permet de déterminer la zone de liquide non fragmenté au voisinage de l'injecteur. Les fragments doivent ensuite être représentés et transportés dans l'écoulement. Pour cela, nous injectons des parcelles dans la zone où la probabilité de présence de liquide non fragmenté est comprise entre 0.01 et 0.99. Le rayon associé à ces parcelles est tiré d'une distribution exponentielle. La vitesse initiale des parcelles dans la direction axiale est la vitesse du liquide non fragmenté :

$$u_p = V_{inj}^{eff}(t) \quad (\text{A.10})$$

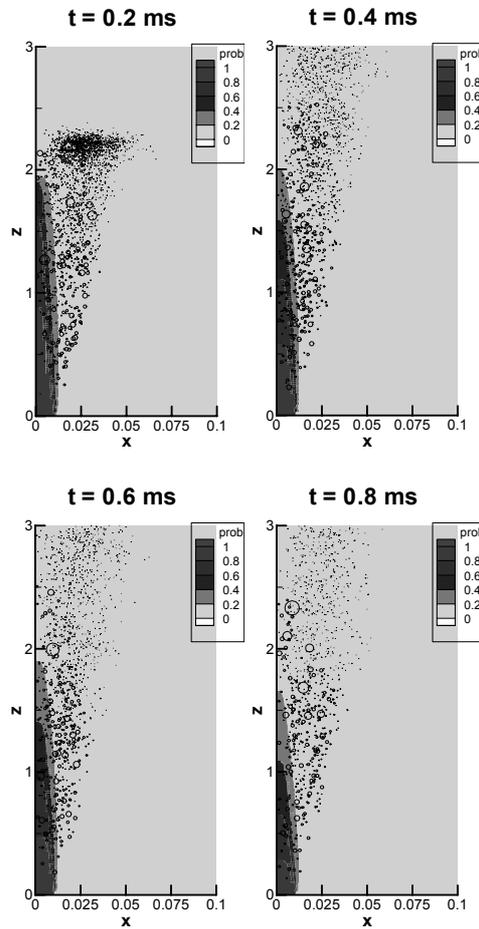
Dans la direction radiale, on suppose que les gouttes possèdent une composante imposée par la turbulence dans le liquide sous la forme :

$$v_p = \frac{r_p}{\tau_{turb}} = \sqrt{K_{liquid}} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_{fuel}}} \quad (A.11)$$

où  $\tau_{turb}$  est le temps caractéristique turbulent dans la phase liquide et  $K_{liquid}$  est l'énergie cinétique turbulente calculée à partir de la relation :

$$K_{liquid} = 0.3 \cdot V_{inj}^{eff}(t) \quad (A.12)$$

Un exemple de parcelles formées au voisinage de l'injecteur superposée à la probabilité de présence de liquide non fragmenté est représenté sur la figure A.3.



**Fig A.3.** Probabilité de présence de liquide non fragmenté et parcelles formées au voisinage de l'injecteur à différents instants (où  $x$  et  $z$  sont indiqués en cm) .

La distribution de probabilité de présence de liquide non fragmenté permet également de déterminer l'influence de la phase liquide sur la phase gazeuse. Le mouvement du gaz entraîné par le liquide est donc obtenu par cette méthode et peut être résolu par une méthode de type RANS utilisée dans le code KIVA II.

Le code KIVA II emploie la méthode stochastique de particules afin de modéliser la dynamique des sprays se vaporisant [107], [26]. Les collisions entre gouttelettes ainsi que la coalescence sont également modélisées par le modèle de P.J. O'Rourke [67] décrit dans le chapitre 5.

Le modèle d'atomisation secondaire utilisé dans cette approche est basé sur l'hypothèse de symétrie d'échelle décrit dans le chapitre 2.

A la différence de l'approche proposée pour les jets assistés par air, deux mécanismes de fragmentation secondaire sont pris en compte.

Le premier est la brisure par cisaillement. Le nombre de Weber qui caractérise ce mécanisme est donné par :

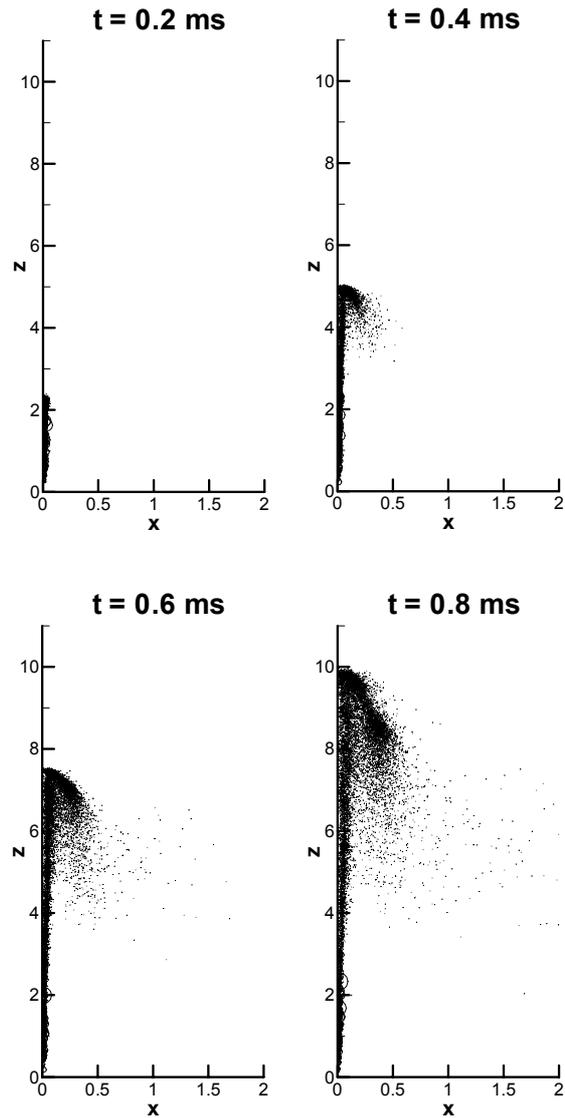
$$We_p^1 = \frac{\rho_g |u_g - u_p|^2 r_p}{\sigma} \quad (\text{A.13})$$

Le deuxième est la fragmentation des parcelles due à la décroissance de la vitesse effective d'injection du liquide. Le nombre de Weber qui le caractérise est donné par l'expression :

$$We_p^2 = \frac{\rho_{fuel} |d_t V_{inj}^{eff}|^2 r_p}{\sigma} \quad (\text{A.14})$$

où  $d_t V_{inj}^{eff}$  représente la variation dans le temps de la vitesse débitante effective du liquide.

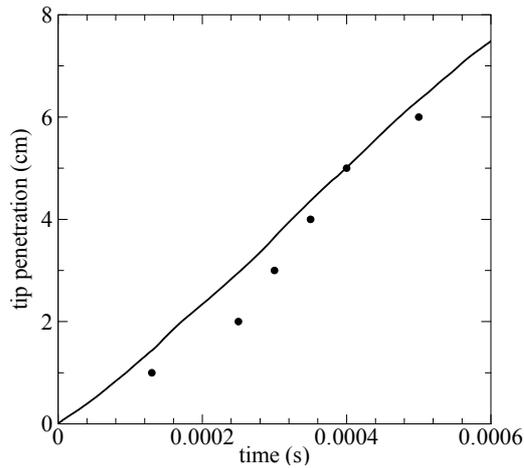
Le nombre de Weber est donc calculé comme le maximum des valeurs de  $We_p^1$  et  $We_p^2$ . Dans le cas où ce nombre excède sa valeur critique  $We_c$ , la parcelle est fragmentée. Cette procédure permet d'obtenir la distribution des parcelles dans le champ lointain comme l'indique la figure A.4.



**Fig A.4.** *Distribution des parcelles dans le spray à différents instants.*

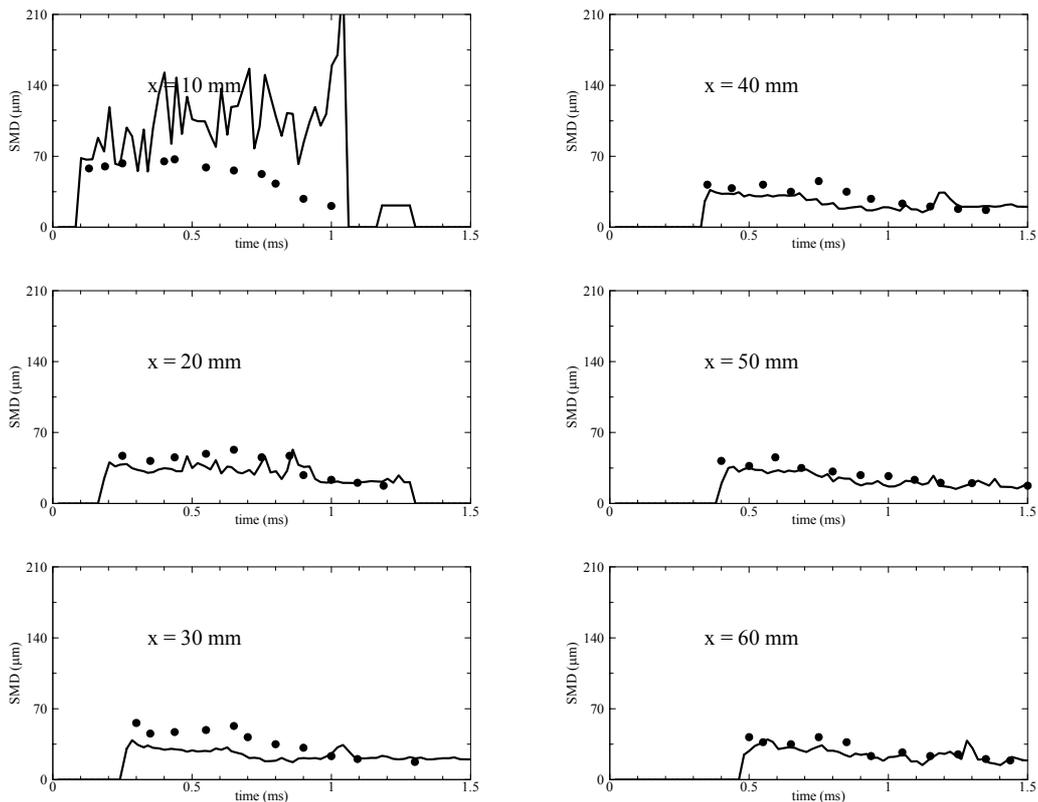
## A.5. Résultats

Cette approche permet de calculer plusieurs variables concernant le spray et de les comparer à des résultats expérimentaux. Dans un premier temps, la longueur de pénétration a été déterminée. Il s'agit de la distance séparant la goutte la plus éloignée de l'injecteur dans la direction axiale. Cette longueur simulée est représentée en comparaison avec l'expérience sur la figure A.5.



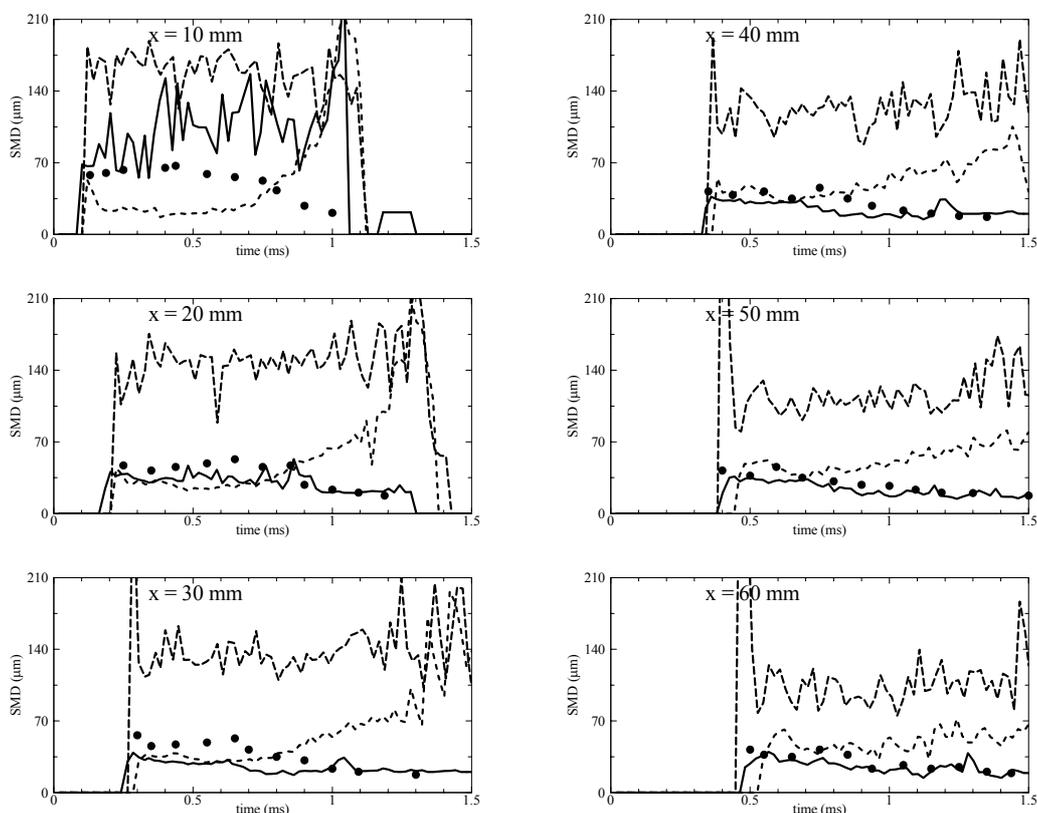
**Fig. A.5.** Comparaison entre la longueur de pénétration mesurée (symboles) et simulée (ligne) dans les conditions de l'expérience de C. Arcoumanis et al.

La valeur du diamètre de Sauter notée SMD peut également être déterminée pour chaque section en aval de l'injecteur. La figure A.6 compare son évolution temporelle à différentes distances de l'injecteur sur l'axe : 10, 20, 30, 40, 50 et 60 mm.



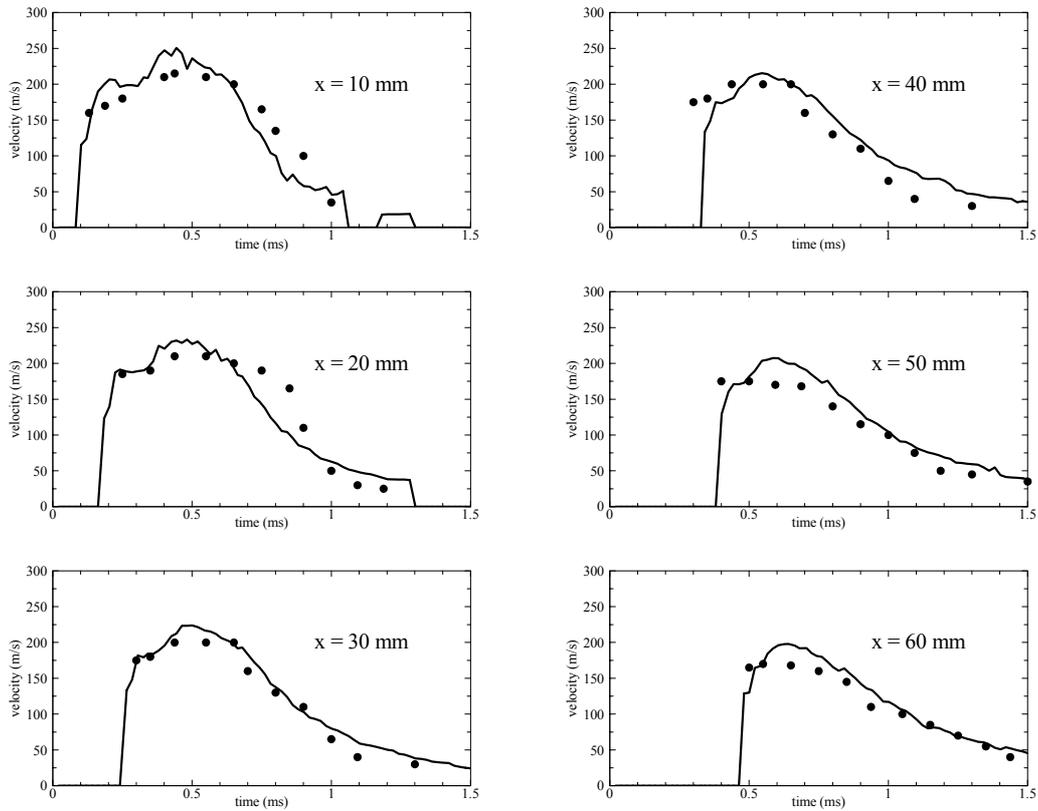
**Fig. A.6.** Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux (C. Arcoumanis et al.) pour l'évolution temporelle du diamètre de Sauter (SMD) au centre du spray à 10, 20, 30, 40, 50 et 60 mm en aval de l'injecteur : les symboles représentent les résultats expérimentaux et la ligne continue les résultats de simulation.

Ces résultats ont également été comparés aux calculs réalisés avec les modèle TAB (cite) et le modèle de R.D. Reitz (cite) sur la figure A.7.



**Fig. A.7.** Comparaison entre les résultats numériques obtenus avec différents modèle et expérimentaux (C. Arcoumanis et al.) pour l'évolution temporelle du diamètre de Sauter (SMD) au centre du spray à 10, 20, 30, 40, 50 et 60 mm en aval de l'injecteur : symboles : résultats expérimentaux, — modèle stochastique, ..... modèle TAB; --- modèle de R.D. Reitz.

L'évolution de la valeur moyenne de la vitesse axiale en fonction du temps peut également être calculée. Celle-ci est représentée sur la figure A.8 à différentes distances de l'injecteur sur l'axe ainsi que les résultats expérimentaux. Sur les figures A.6 et A.7, on remarque que l'évolution du SMD obtenue par l'expérience est en relatif accord avec les résultats expérimentaux. En particuliers, l'instant à partir duquel des gouttes traversent les différentes sections est relativement bien prédit par le modèle. De plus, la valeur du SMD est proche de la valeur expérimentale. Par rapport au modèle de R.D. Reitz, ces valeurs sont plus faibles et se rapproche des mesures. Le modèle TAB fait apparaître une zone de croissance du SMD pour des temps à peu près supérieur à 0.75 ms. Cette croissance n'est pas observée ni expérimentalement ni avec le modèle stochastique.



**Fig. A.8.** Comparaison entre les résultats expérimentaux (C.Arcoumanis et al.) et numériques pour l'évolution de la vitesse moyenne axiale du liquide à 10, 20, 30, 40, 50 et 60 mm en aval de l'injecteur.

Sur la figure A.8, on remarque que la vitesse moyenne axiale du liquide simulée est en accord avec les résultats expérimentaux. De plus, les instants de passage de la première et de la dernière gouttes semblent se rapprocher des mesures de C. Arcoumanis et al.. Ces résultats pour attester d'une bonne prédiction de la longueur de pénétration du spray.

Les résultats obtenus avec l'approche de type « floating cutter » sont donc encourageants. Ils sont proches des valeurs du SMD et de la vitesse moyenne axiale du liquide mesurées. De plus, l'évolution temporelle de ces grandeurs ainsi que la longueur de pénétration du spray sont relativement bien prédites.

## Annexe B Solution auto-similaire pour un jet axisymétrique.

Dans cette annexe, nous présentons les résultats théoriques concernant les jets monophasiques tirés de l'ouvrage [7] de C. Bailly et G. Compte-Bellot. L'obtention des équations (3.36) et (3.37) utilisée dans le paragraphe 3.2.1.y est décrite. Nous nous plaçons ici dans un système de coordonnées cylindriques.

Dans ces conditions, la conservation de la masse s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Pour les équations de Navier Stokes, nous utiliserons l'opérateur  $D/Dt$  que l'on peut expliciter en coordonnées cylindriques sous la forme:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial}{\partial x}$$

On peut alors écrire les équations de Navier Stokes comme:

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} - \frac{u_\theta u_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \nabla^2 u_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{Du_x}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \nabla^2 u_x \right\} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{avec } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

On introduit maintenant la décomposition de Reynold dans ces équations :  $u_r = \langle U_r \rangle + u'_r$ ,  $u_\theta = \langle U_\theta \rangle + u'_\theta$ ,  $u_x = \langle U_x \rangle + u'_x$ ,  $p = \langle P \rangle + p'$ , et on cherche une solution stationnaire pour un écoulement moyen axisymétrique. Dans ces conditions:

- $\langle U_\theta \rangle = 0$ , mais  $u'_\theta \neq 0$ .
- Pour toutes les quantités moyennes,  $\frac{\partial \langle F \rangle}{\partial \theta} = 0$ .
- L'axisymétrie impose à la turbulence d'être homogène dans la direction azimutale, soit  $\langle u'_r u'_\theta \rangle = \langle u'_x u'_\theta \rangle = 0$ .

L'équation moyennée de conservation de la masse s'écrit donc:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle U_r \rangle)}{\partial r} + \frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Les équations de Navier Stokes moyennées sont obtenues en explicitant la décomposition de Reynolds dans tous les termes :

$$\frac{D \langle U_r \rangle}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'^2_r \rangle)}{\partial r} - \frac{\partial \langle u'_x u'_r \rangle}{\partial x} + \frac{\langle u'^2_\theta \rangle}{r} + \nu \left[ \nabla^2 \langle U_r \rangle - \frac{\langle U_r \rangle}{r^2} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{D \langle U_x \rangle}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} - \frac{\partial (\langle u'^2_x \rangle)}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'_x u'_r \rangle)}{\partial x} + \nu \left[ \nabla^2 \langle U_x \rangle \right] \quad (\text{B.8})$$

avec :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle U_r \rangle \langle F \rangle)}{\partial r} + \frac{\langle U_x \rangle \partial \langle F \rangle}{\partial x}$$

D'après (B.8), on remarque que la pression moyenne n'est fonction que de  $r$  et de  $x$  soit  $\langle P \rangle = \langle P \rangle(r, x)$ . Le problème qui nous intéresse comporte à priori deux échelles de vitesse moyenne et de longueur suivant les directions radiale  $r$  et axiale  $x$ . Nous supposons de plus qu'une seule échelle de vitesse est nécessaire à l'estimation des fluctuations, on note alors:

- $U$  et  $V$  les échelles de vitesse respectivement dans les directions axiale et radiale.
- $L$  et  $\delta$  les échelles de longueur respectivement dans les directions axiales et radiales.
- $u$  l'échelle associée aux fluctuations de vitesse.

Pour un jet à grand vitesse d'injection, les échelles radiales de longueur et de vitesse sont plus petites que les échelles axiales correspondantes, soit :

- $\delta < L$  et  $\delta/L < 1$

Nous allons maintenant utiliser ces échelles pour construire les équations caractéristiques du jet rond turbulent axisymétrique.

- L'équation (B.5) permet d'estimer l'échelle radiale de vitesse moyenne  $V \approx U\delta/L$  qui est d'un ordre de grandeur inférieur à  $U$  en  $\delta/L$ .
- Par le même type de considération, on peut négliger dans (B.8) le terme  $\partial \langle u_x'^2 \rangle / \partial x$ , de l'ordre de  $u^2/L$ , devant le terme  $1/r \partial (r \langle u_r' u_x' \rangle) / \partial r$  de l'ordre de  $u^2/\delta$ .
- Le terme visqueux  $\nu [\nabla^2 \langle U_x \rangle]$  dans (B.8) s'écrit  $\nu [1/r \partial / \partial r (r \partial \langle U_x \rangle / \partial r) + \partial^2 \langle U_x \rangle / \partial x^2]$ . Il peut donc être estimé par  $\nu (U/\delta^2; U/L^2)$ . Le nombre de Reynolds  $Re$  d'un jet rond turbulent varie entre  $2 \cdot 10^3$  et  $10^6$  en considérant  $\delta$  égal au diamètre de l'injecteur. En faisant apparaître cette grandeur dans le terme visqueux, on obtient  $U^2/\delta Re$ . Par conséquent, ces termes peuvent être négligés.

On écrit donc l'équation (B.8) comme:

$$\frac{D \langle U_x \rangle}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'_x u'_r \rangle)}{\partial x}$$

Pour un écoulement turbulent, il est nécessaire que les termes autres que le terme de pression dans cette équation soient du même ordre de grandeur. Cette considération nous permet d'obtenir une estimation de l'échelle de vitesse turbulente comme  $u \approx (\delta/L)^{1/2} U$ . De la même façon, dans l'équation (B.6), si on suppose que  $\langle u'^2_r \rangle \approx \langle u'^2_\theta \rangle$ , le terme faisant intervenir ces deux grandeurs devient négligeable. Un terme devient d'un ordre de grandeur supérieur à tous les autres et seul le terme de pression est susceptible de le contrebalancer, on obtient donc:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'^2_r \rangle)}{\partial r} = 0$$

En intégrant de  $r$  à l'infini et en notant  $P_\infty$  la pression ambiante, on obtient  $\langle P \rangle + \rho \langle u'^2_r \rangle = P_\infty$ , ce qui permet d'estimer le gradient longitudinal de pression. Et finalement, les équations simplifiées régissant le jet turbulent axisymétrique sont :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle U_r \rangle)}{\partial r} + \frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle U_r \rangle \langle U_x \rangle)}{\partial r} + \frac{\partial (\langle U_x \rangle \langle U_x \rangle)}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u'_r u'_x \rangle)}{\partial r} \quad (\text{B.10})$$

On recherche maintenant une solution au problème pour les deux grandeurs clés associées à cet écoulement sous la forme:

$$\begin{aligned} \langle U_x \rangle &= U_m(x) f(\gamma) \\ -\gamma \langle u'_r u'_x \rangle &= U_m^2(x) f(\gamma) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

où  $\gamma = r/\delta(x)$ ,  $U_m$  désigne la vitesse moyenne axiale et  $\delta(x)$  la demi-épaisseur du jet.

Cette dernière est définie comme la distance radiale pour laquelle la vitesse moyenne est égale à la moitié de la vitesse sur l'axe. On a donc en particulier  $f(0)=1$ . Exprimons tout d'abord la contrainte de Reynolds  $\langle u'_r u'_x \rangle$  en fonction de  $\langle U_x \rangle$  seulement. On intègre pour cela l'équation (1B.10) dans la direction radiale depuis l'axe:

$$r\langle U_x \rangle \langle U_r \rangle + \int_0^r \frac{\partial \langle U_x^2 \rangle}{\partial x} r' dr' = -r \langle u'_r u'_x \rangle \quad (\text{B.12})$$

Une expression de la vitesse moyenne radiale peut alors être obtenue par intégration de l'équation de conservation de la masse (B.9). En tenant compte des propriétés de l'écoulement, à savoir  $\langle U_r \rangle = 0$  en  $r=0$ , on a :

$$r \langle U_r \rangle = - \int_0^r \frac{\partial \langle U_x \rangle}{\partial x} r' dr' \quad (\text{B.13})$$

Puis en substituant cette équation dans (B.12) et en utilisant (B.12), on obtient finalement deux relations pour les caractéristiques du jet:

$$\frac{\delta(x)}{D_g} = a \frac{x - x_0}{D_g} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{U_m(x)}{U_0} = b \frac{D_g}{x - x_0} \quad (\text{B.15})$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes à déterminer et  $x_0$  est l'origine virtuelle du jet à déterminer également.



## Annexe C Méthodes numériques

Dans cette partie, nous allons présenter les méthodes numériques développées par C.D.Pierce [71] pour résoudre le système d'équation de conservation de la masse et de quantité de mouvement (3.15) et (3.21). Ces méthodes ont été développées pour le cas d'écoulements compressibles (où l'équation de conservation d'énergie est résolue en plus). Nous les utiliserons dans ce travail pour des écoulements incompressibles. D'abord nous exposerons la discrétisation conservative en espace et en temps des équations (3.15) et (3.21), puis nous présenterons la technique itérative semi-implicite pour leur intégration.

### C.1 Notation d'indices

Avant de présenter les équations discrétisées, introduisons des notations compactes pour écrire les équations de conservation sous une forme similaire à celle d'équations différentielles. Ces notations vont nous permettre de simplifier les manipulations algébriques. La discrétisation au deuxième ordre inclut les opérations primitives d'interpolation et de différenciation dans les trois directions spatiales. Considérons un maillage bidimensionnel uniforme avec des mailles de tailles  $\Delta x$  et  $\Delta y$  dans les directions  $x$  et  $y$  d'indices respectifs  $i$  et  $j$ . Ainsi, les opérateurs d'interpolation s'expriment comme :

$$\bar{a} \Big|_{ij}^{-x} = \frac{a_{i+1/2,j} + a_{i-1/2,j}}{2}, \quad \bar{a} \Big|_{ij}^{-y} = \frac{a_{i,j+1/2} + a_{i,j-1/2}}{2} \quad (\text{C.1})$$

et les opérateurs de différenciation comme :

$$\delta_x(a) \Big|_{ij} = \frac{a_{i+1/2,j} - a_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad \delta_y(a) \Big|_{ij} = \frac{a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2}}{\Delta y} \quad (\text{C.2})$$

Notons que l'application d'un de ces opérateurs à une variable dans une direction produit un résultat décalé par rapport à cette variable. Par exemple,  $\bar{a}^x$  est écartée de  $\Delta x/2$  par rapport à  $a$  dans la direction  $x$ .

Par la suite nous utiliserons des identités suivantes facilement vérifiables par la substitution des opérateurs (C.1) et (C.2) :

$$\delta_x(\bar{ab}^x) = \bar{a} \delta_x(\bar{b})^x + b \delta_x(a) \quad (C.3)$$

$$\delta_x(ab) = \bar{a}^x \delta_x(b) + \bar{b}^x \delta_x(a) \quad (C.4)$$

$$\delta_x(\bar{a}^y) = \bar{\delta}_x(a)^y \quad (C.5)$$

$$\frac{\bar{a}^y}{a} = \frac{\bar{a}^x}{a} \quad (C.6)$$

Tous les termes qui apparaissent dans une de ces expressions doivent être définis à la même position (non-décalés l'un par rapport à l'autre). Par exemple, la multiplication  $\bar{ab}^x$  a un sens uniquement si  $b$  est décalé par rapport à  $a$  dans la direction  $x$  de telle sorte que  $\bar{b}^x$  soit situé au même emplacement que  $a$ .

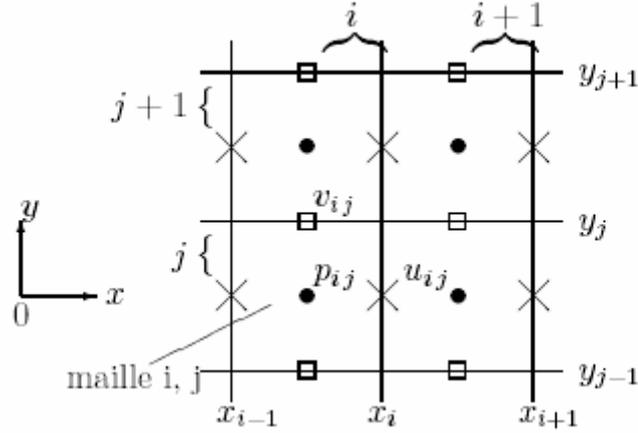
Quand les équations de conservation sont discrétisées sur un maillage non uniforme les opérateurs d'interpolation et de différenciation sont définis comme :

$$\bar{a}^x \Big|_i = c_i a_{i+1/2} + (1-c_i) a_{i-1/2}, \quad \delta_x(a) \Big|_i = \frac{a_{i+1/2} - a_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \quad (C.7)$$

où les  $c_i$  sont des coefficients d'interpolation linéaire.

## C.2 Equations discrétisées

Dans ce travail, on utilise un maillage décalé dans lequel les noeuds des composantes de vitesse sont déplacés par rapport à ceux des scalaires (la pression, la densité et la viscosité) dans l'espace. Par convention, les variables définies sur la face de la maille orientée dans le sens positif des coordonnées sont de même indice que la maille.



**Fig C.1** Maillage décalé.

Nous allons maintenant présenter les équations discrétisées de conservation de masse (3.15) et de quantité de mouvement (3.21) sous leur forme compacte. Pour simplifier les notations, nous nous affranchirons du symbole de filtrage dans les équations qui suivent :

$$\delta_{x_i}(u_i) = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$\delta_t(u_i) + \delta_{x_j} \left( \overline{u_j} \overline{u_i} \right) = -\delta_{x_i}(P) + \delta_{x_j}(\tau_{ij}) \quad (\text{C.9})$$

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \overline{v_j} \left[ \delta_{x_j}(u_i) + \delta_{x_i}(u_j) \right] & i \neq j \\ 2v \left[ \delta_{x_j}(u_i) \right] & i = j \end{cases}$$

### C.3 Schéma semi-implicite itératif

Les équations discrétisées (C.8, C.9) sont totalement implicites ce qui assure la stabilité et la robustesse du schéma, mais aussi rend les calculs plus coûteux. Il est donc préférable d'adopter un schéma semi-implicite qui est plus économique et par ailleurs conserve les propriétés recherchées telle que la stabilité, par exemple.

La discrétisation temporelle est similaire au schéma de Crank-Nicolson ou au schéma trapézoïdal, mais dans la partie droite de l'équation les variables sont interpolées entre les solutions aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . Pour une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{du}{dt} = f(u) \quad (\text{C.10})$$

La discrétisation en temps peut être écrite :

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=f\left[\frac{1}{2}(u^n+u^{n+1})\right] \quad (C.11)$$

Par exemple, si  $f(u)$  est une fonction linéaire, le schéma est identique au schéma trapézoïdal.

Quand  $f(u)$  est non-linéaire, l'équation (C.11) peut être résolue à l'aide des itérations de Newton-Raphson. Pour le cas où  $u$  et  $f$  sont des vecteurs, cette méthode nécessite la résolution d'un système d'équations algébriques.

Par la suite, nous utiliserons les conventions suivantes : soit l'indice  $n$  désignant la solution connue au temps  $t^n$ . l'indice  $k$  le numéro d'itération entre les solutions aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . Alors,  $u^{n+1,k}$  est la  $k^{\text{ième}}$  approximation de la solution  $u^{n+1}$  recherchée. En appliquant les itérations de Newton-Raphson à (C.11), nous obtenons :

$$u^{n+1,k+1}=u^n+\Delta t f\left[\frac{1}{2}(u^n+u^{n+1,k})\right]+1/2\Delta t\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right](u^{n+1,k+1}-u^{n+1,k}) \quad (C.12)$$

qui s'écrit sous forme « delta » ou forme résiduelle :

$$\left[1-1/2\Delta t\frac{\partial f}{\partial u}\right](u^{n+1,k+1}-u^{n+1,k})=u^n+\Delta t f\left[\frac{1}{2}(u^n+u^{n+1,k})\right]-u^{n+1,k} \quad (C.13)$$

avec comme conjecture initiale  $u^{n+1,0}=u^n$ .

Le schéma (C.13) possède des propriétés de stabilité qui dépendent du nombre d'itérations effectuées à chaque pas de temps. C.D. Pierce a montré que 2 itérations sont nécessaires pour garantir le deuxième ordre de précision en temps. Des itérations supplémentaires n'améliorent que la stabilité et non la précision.

Un schéma itératif explicite est obtenu si le Jacobien  $\partial f/\partial u$  dans (C.13) n'est pas pris en compte et un schéma semi-implicite si ce Jacobien est simplifié. L'économie d'un schéma implicite provient du choix judicieux des termes traités de manière implicite ou explicite. D'habitude, seulement les termes qui varient le plus sont traités implicitement, tels que les dérivées dans la direction où le maillage est le plus variable. Par exemple, si le maillage est raffiné près d'une paroi, on ne traite implicitement que les dérivées dans la direction perpendiculaire à la paroi. Dans le code de C.D. Pierce, pour des écoulements dans un canal, les termes suivants sont traités implicitement :

- la convection et la diffusion dans la direction perpendiculaire aux parois

- la pression dans toutes les directions à travers l'équation de Poisson.

Nous allons maintenant présenter la procédure itérative utilisée dans ce travail. Chaque itération est composée de 4 étapes :

**Etape 1.** Choix de la conjecture initiale. On utilise la solution au pas de temps précédent

$$u_i^{n+1,0} = u_i^n, \quad P^{n+1,0} = P^n \quad (C.14)$$

**Etape 2.** Avancement en temps de l'équation de conservation de quantité de mouvement et obtention de l'estimation provisoire des composantes de vitesse  $\hat{u}_i^{k+1}$ . Cette dernière est calculée en utilisant l'estimation actuelle de la pression  $P^{n+1,k}$ . Les équations de type (C.13) avec le Jacobien simplifié sont résolues séparément pour chaque composante de vitesse.

**Etape 3.** Résolution de l'équation de Poisson pour la pression. Celle-ci permet de déterminer le supplément au champ de vitesses de telle sorte que l'équation de conservation de masse pour  $u_i^{n+1,k+1}$  soit satisfaite.

On peut représenter les champs de vitesses et de pression comme la somme des estimations provisoires et des corrections additives,  $\delta u_i$  et  $\delta P$ .

$$u_i^{n+1,k+1} = \hat{u}_i^{k+1} + \delta u_i, \quad P^{n+1,k+1} = P^{n+1,k} + \delta P \quad (C.15)$$

On substitue ces expressions dans l'équation de quantité de mouvement. Comme on s'intéresse à la pression, on regroupe tous les autres termes dans  $R_i$  :

$$\frac{\hat{u}_i^{k+1} + \delta u_i - u_i^n}{\Delta t} = -\delta_{x_i} (P^{n+1,k} + \delta P) + R_i \quad (C.16)$$

On peut alors décomposer cette équation en deux parties :

$$\frac{\hat{u}_i^{k+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\delta_{x_i} (P^{n+1,k}) + R_i \quad (C.17)$$

$$\delta u_i = -\Delta t \delta_{x_i} (\delta P) \quad (C.18)$$

de telle sorte que l'équation (C.17) soit la même que celle résolue lors de l'étape 2.

L'application de l'opérateur de divergence à l'équation (C.18) fait apparaître une équation de Poisson pour la pression :

$$\begin{aligned}
\delta_{x_k} [\delta_{x_k} (\delta P)] &= -\delta_{x_j} (\delta u_j) / \Delta t \\
&= -\delta_{x_j} (u_j^{n+1,k+1} - \hat{u}_j^{k+1}) / \Delta t \\
&= -\delta_{x_j} (u_j^{k+1}) / \Delta t
\end{aligned} \tag{C.19}$$

où on impose la conservation de la masse à l'itération  $k+1$  en annulant le terme  $\delta_{x_j} (u_j^{n+1,k+1})$ .

La méthode de résolution de l'équation de Poisson est présentée par la suite. La correction pour la vitesse,  $\delta u_i$  est supposée nulle aux limites. Cela implique les conditions de type Neumann pour la correction de pression,  $\delta_n (\delta P) = 0$ .

**Etape 4.** Les vitesses et la pression sont corrigées

$$u_i^{n+1,k+1} = \hat{u}_i^{k+1} - \Delta t \delta_{x_i} (\delta P) \tag{C.20}$$

$$P^{n+1,k+1} = P^{n+1,k} + \delta P \tag{C.21}$$

On applique les conditions limites aux estimations finales de vitesses  $u_i^{n+1,k+1}$ . L'équation de bilan de masse est alors satisfaite exactement et le cycle de la procédure itérative est terminé. Si de nouvelles d'itérations sont nécessaires, le cycle est répété à partir de **l'étape 2**.

#### C.4 Conditions aux limites

Dans ce code on utilise deux types de conditions aux limites : d'entrée et de frontière libre. Pour les conditions d'entrée on doit imposer le profil de vitesse à l'embouchure du jet. Ce profil peut être laminaire (parabolique ou constant) ou turbulent. Dans le deuxième cas, on doit générer la vitesse instantané avec les propriétés statistiques (la vitesse moyenne et les niveaux de fluctuations) prédéterminées.

Dans ce travail, un profil déterminé par une vitesse moyenne  $U_{bulk}$  et des fluctuations *fluct* aléatoires ont été imposés directement :

$$U_{inj} = U_{bulk} (1 + fluct * random) \tag{C.22}$$

ici *random* est un nombre aléatoire compris entre -1 et 1 et *fluct* est donné par un pourcentage de la vitesse moyenne.

Les frontières libres incluent la sortie du domaine de calcul et les frontières "ouvertes" où le gaz peut également entrer dans le domaine (par exemple, aux limites latérales du domaine dans la simulation d'un jet libre). Pour les frontières de ce type on applique des conditions convectives :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{C.23})$$

où  $\phi$  est un scalaire ou une composante de vitesse,  $c$  désigne la vitesse convective et  $n$  est la normale extérieure de la frontière. Les dérivées normales sont calculées selon un schéma non-symétrique du premier ordre. La vitesse convective change à chaque pas de temps et est égale à la vitesse maximale sur toutes les frontières libres,  $c = \max(u_n)$ .

La conservation globale de masse est satisfaite si le flux « entrant » est équilibré par le flux « sortant » avec un changement de masse à l'intérieur du domaine. Dans ce but, à chaque pas de temps, une correction est appliquée à la vitesse de sortie afin de simuler la présence d'un gradient de pression et d'ajuster le flux « sortant ».

## C.5 Résolution de l'équation de Poisson pour la pression

Nous devons résoudre une équation de Poisson pour trouver la correction du champ de pression,  $\delta P$  :

$$\frac{\partial^2 \delta P}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \quad (\text{C.24})$$

La méthode appliquée est la suivante. D'abord on discrétise l'équation de Poisson dans l'espace physique sur un maillage régulier. Pour cela on utilise les différences finies au deuxième ordre

$$\begin{aligned} & \frac{\delta P(x+\Delta x, y, z) - 2\delta P(x, y, z) + \delta P(x-\Delta x, y, z)}{\Delta x^2} + \\ & \frac{\delta P(x, y+\Delta y, z) - 2\delta P(x, y, z) + \delta P(x, y-\Delta y, z)}{\Delta y^2} + \\ & \frac{\delta P(x, y, z+\Delta z) - 2\delta P(x, y, z) + \delta P(x, y, z-\Delta z)}{\Delta z^2} = \frac{1}{\Delta t} \text{div}(\vec{u}) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Ce système étant tridimensionnel, sa résolution directe n'est pas souhaitable. L'alternative retenue pour ce travail est la résolution dans l'espace spectral ou espace de Fourier.

Pour une fonction  $f(\vec{x})$  définie dans l'espace physique, la transformée de Fourier est :

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{x} \quad (C.26)$$

La transformée inverse est :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{k} \quad (C.27)$$

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (C.25) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left\{ \frac{\cos(k_1 \Delta x) - 1}{\Delta x^2} + \frac{\cos(k_2 \Delta y) - 1}{\Delta y^2} + \frac{\cos(k_3 \Delta z) - 1}{\Delta z^2} \right\} \delta \hat{P}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{d}i v(\vec{u})(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} \quad (C.28)$$

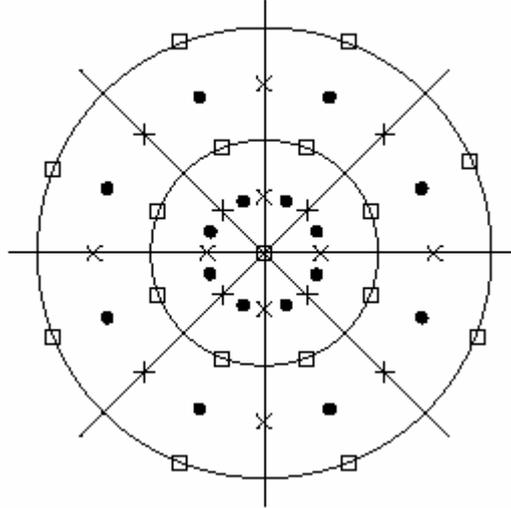
Comme cette relation doit être juste pour tous les  $\vec{x}$  on a :

$$\delta \hat{P}(\vec{k}) = \frac{1}{2\Delta t} \hat{d}i v(\vec{u})(\vec{k}) \left\{ \frac{\cos(k_1 \Delta x) - 1}{\Delta x^2} + \frac{\cos(k_2 \Delta y) - 1}{\Delta y^2} + \frac{\cos(k_3 \Delta z) - 1}{\Delta z^2} \right\}^{-1} \quad (C.29)$$

Il s'agit d'une équation algébrique dont la solution est la correction de pression dans l'espace spectral. Dans l'espace physique celle-ci est obtenue par transformée de Fourier inverse ( C.27). Lorsque le maillage n'est pas régulier dans une direction, on applique la transformée de Fourier uniquement pour les autres directions. On obtient alors dans l'espace spectral un système d'équations à résoudre.

## C.6 Coordonnées cylindriques

Dans cette partie nous décrivons brièvement les éléments spécifiques au système de coordonnées cylindriques. Le maillage décalé pour ce cas est représenté sur la figure B.2. Les coordonnées  $x$ ,  $r$  et  $\theta$  correspondent respectivement aux directions axiale, radiale et azimutale.



**Fig B.2.** *Système de coordonnées cylindriques. Maillage décalé. • : P, × : u<sub>θ</sub>, □ : u<sub>r</sub>*

Dans le système des coordonnées cylindriques, les équations de Navier-Stokes discrétisées s'écrivent :

-équation de continuité

$$\delta_x(u_x) + \frac{1}{r} \delta_r(ru_r) + \frac{1}{r} \delta_\theta(u_\theta) = 0$$

- équations de conservation de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \delta_t(u_x) &= \delta_x(f_{xx}) + \frac{1}{r} \delta_r(rf_{xr}) + \frac{1}{r} \delta_\theta(f_{x\theta}) \\ \delta_t(u_r) &= \delta_x(f_{rx}) + \frac{1}{r} \delta_r(rf_{rr}) + \frac{1}{r} \delta_\theta(f_{r\theta}) - \frac{\overline{f_{\theta\theta}}}{r} \\ \delta_t(u_\theta) &= \delta_x(f_{\theta x}) + \frac{1}{r} \delta_r(rf_{\theta r}) + \frac{1}{r} \delta_\theta(f_{\theta\theta}) - \frac{\overline{f_{\theta r}}}{r} \end{aligned}$$

où les composantes du tenseur de flux  $f_{ij}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\nu \delta_x \left( \overline{u_x} \right) - \overline{u_x} \overline{u_x} - p \\ f_{rr} &= 2\nu \delta_r \left( \overline{u_r} \right) - \overline{u_r} \overline{u_r} - p \\ f_{\theta\theta} &= \frac{2\nu}{r} \left[ \delta_\theta \left( \overline{u_\theta} \right) + \overline{u_r} \right] - \overline{u_\theta} \overline{u_\theta} - p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{xr} &= f_{rx} = \bar{v}^x \left[ \delta_x \left( \bar{u}_r \right) + \delta_r \left( \bar{u}_x \right) \right] - \bar{u}_r \bar{u}_x \\
f_{\theta r} &= f_{r\theta} = \bar{v}^{\theta} \left[ \delta_x \left( \bar{u}_r \right) + \frac{1}{r} \delta_{\theta} \left( \bar{u}_r \right) - \frac{\bar{u}_{\theta}}{r} \right] - \bar{u}_{\theta} \bar{u}_r \\
f_{x\theta} &= f_{\theta x} = \bar{v}^{\theta} \left[ \delta_x \left( \bar{u}_{\theta} \right) + \frac{1}{r} \delta_{\theta} \left( \bar{u}_x \right) \right] - \bar{u}_{\theta} \bar{u}_x
\end{aligned}$$

La pression n'est pas écrite séparément sous forme d'un gradient mais incluse dans le tenseur de flux. Dans l'équation sur la direction radiale, la pression apparaît dans les deux composantes de  $f_{ij}$  ( $f_{rr}$  et  $f_{\theta\theta}$ ) dont la combinaison amène à l'expression standard du terme de pression :

$$\frac{1}{r} \delta_r (rp) - \frac{\bar{p}}{r} = \delta_r (p)$$

L'équation de Poisson pour la pression dans le système de coordonnées cylindrique s'écrit sous forme habituelle :

$$\text{div}(\text{grad } \delta P) = \text{div}(\bar{u}) / \Delta t$$

soit:

$$\frac{\partial^2 \delta P}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \partial \delta P / \partial r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (1/r \partial \delta P / \partial \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right)$$

Le traitement spécifique des conditions limites n'est nécessaire que sur l'axe. Sur la figure B.2, on remarque que toutes les variables à l'exception de  $u_r$  sont décalées dans la direction radiale d'une distance de  $\Delta r/2$  par rapport à l'axe. Il est nécessaire de connaître leurs valeurs à travers l'axe (à la distance  $-\Delta r/2$ ) pour calculer les dérivées radiales. Ces valeurs sont déterminées par :

$$u_x(-\Delta r/2, \theta) = u_x(\Delta r/2, \theta + \pi)$$

$$u_{\theta}(-\Delta r/2, \theta) = -u_{\theta}(\Delta r/2, \theta + \pi)$$

La valeur de  $u_r$  sur l'axe est obtenue comme la moyenne des valeurs placées symétriquement par rapport à l'axe (à la distance de  $\Delta r$ ) :

$$u_r(r=0, \theta) = \frac{1}{2} (u_r(\Delta r, \theta) - u_r(\Delta r, \theta + \pi))$$

## Bibliographie

- [1] J.R. Adam, N.R. Lindblad & C.D. Hendricks (1968) The collision, coalescence and disruption of water droplets. *J. Appl. Phys.* 14, 11, 5173-5180.
- [2] A.A. Amsden, P.J. O'Rourke & T.D. Butler, KIVA II : a computer program for chemically reactive flows with sprays", Los Alamos National Laboratory report, LA-11560-MS,1989.
- [3] S.V. Apte , M. Gorokhovski, & P. Moin, (2003) LES of Atomizing Spray with Stochastic Modeling of Secondary Breakup. *J. Multiphase Flow* 29, 1503-1522.
- [4] C. Arcoumanis, M. Gavaises, B. French « Effect of fuel injection processes on the structure of diesel sprays" SAE Technical Paper Series, 970799, 1997.
- [5] C. Arcoumanis, M. Badami, M. Gavaises, Cavitation in Real-Size Multi-Hole Diesel Injector Nozzles, SAE Pap. 2000-01-1249, 2000.
- [6] N. Ashgriz N. & J.Y. Poo (1990) Coalescence and separation in binary collisions of liquid drops. *J. Fluid Mech.* 221, 183-204.
- [7] C. Bailly, G. Comte-Bellot, 2003 Turbulence. *CNRS édition*.
- [8] C. Badock, R. Wirth, A. Fath, A. Leipertz, Investigation of Cavitation in Real Size Diesel Injection Nozzles, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 20, pp. 538-544, 1999
- [9] J. C. Beale, R. D. Reitz, , Modeling Spray Atomization With the Kelvin-Helmholtz/ Rayleigh-Taylor Hybrid Model, *Atomization Sprays* 9, 623–650, 1999.

- [10] P.A. Beau, Modélisation de l'atomisation d'un jet liquide. Application aux sprays Diesel  
Thèse de doctorat, Université de Rouen, France, 2006.
- [11] Ben Rayana, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, France, 2007.
- [12] G. M. Bianchi, P. Pelloni, S. Toninel, R. Scardovelli, A. Leboissetier, and S. Zaleski  
Improving the knowledge of high-speed liquid jets atomization by using quasi-direct 3d  
simulation. Technical Report 2005-24-089, SAE, 2005
- [13] G. M. Bianchi, F. Minelli, R. Scardovelli, and S. Zaleski. 3d large scale simulation of the  
high-speed liquid jet atomization. Technical Report 2007 01-0244, SAE, 2007
- [14] B.J. Boersma, G. Brethouwer, & F.T.M. Nieuwstadt, 1998 A numerical investigation on  
the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet. *Phys. Fluids*  
**10** (4), pp.899-909.
- [15] G. Boisdron. Etude de l'atomisation d'un jet liquide assisté par air soumis à une onde  
acoustique stationnaire transverse haute fréquence. Thèse de doctorat, Université de  
Rouen, France, 2006.
- [16] S. Chandrasekhar , 1961, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon, Press  
Oxford.
- [17] H. Chaves, C.Ludwig, Characterization of Cavitation in Transparent Nozzles Depending  
on the Nozzle Geometry, ILASS 2005, Orléans 5-7 September 2005.
- [18] Z. Cheng and S. Redner, Scaling Theory of Fragmentation, *Phys. Rev. Letters*, V.60,  
N°24 1988.
- [19] Z. Cheng and S. Redner, Kinetics of Fragmentation, *J. Phys. A* 23 1233-1258, 1990.
- [20] B. Chehroudi and D.Talley, The fractal geometry of round turbulent cryogenic nitrogen  
jets at subcritical pressures, *J. Atomization and Sprays*, V.14, N°1, 81-91, 2004.
- [21] CNES, Combustion dans les moteurs fusées-Actes du colloque du Groupe de Recherche  
CNES/CNRS/ONERA/SNECMA, Cépadnès-Editions, 2001.

- [22] J.W. Deardorff, 1970 A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **41** (2), pp.453-480.
- [23] E. De Villiers, A. D. Gosman, and H. G. Weller. Large eddy simulation of primary diesel spray atomization. Technical Report 2004-01-0100, SAE, 2004
- [24] P.E. Dimotakis, 1986, Two dimensional shear layer entrainment *AIAA J.* 24, pp 1791-1796.
- [25] Domann, R., Hardalupas, Y., 2004, Breakup model for accelerating liquid jets. In: Proceedings of 42<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibition, Reno, Nevada
- [26] J.K. Dukowicz., A particle-fluid numerical model for liquid sprays. *Journal of Computational Physics*, vol 35 #2, pp. 229-253, 1980.
- [27] H. Eroglu & N. Chigier Coaxial atomizer liquid intact lengths.(1991) *Phys of Fluids A3* (2) 303-308 .
- [28] G.M. Faeth, L.P. Hsiang, P.K. Wu, Structure and Breakup Properties of Sprays, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 21, pp.99-127, 1995.
- [29] A.F. Fillipov On the distribution of the sizes of particles which undergo splitting *Theor. Prob. Appl (Engl. Transl.)* 4, 275, 1961
- [30] G.M. Faeth , L.P. Hsiang , P.K. Wu , Structure and Breakup Properties of Sprays, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 21, pp.99-127, 1995.
- [31] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, & W.H. Cabot 1991 A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A* **3** (7), pp.1760-1765.
- [32] M. Gorokhovski (1997), Atomization as a Stochastic Relaxation Process in the Spectrum of Liquid Fragments Sizes. 13th ILASS Conference, Florence, July 9-11, 1997. Proceedings, 271-276
- [33] M. Gorokhovski. The Stochastic Sub-Grid-Scale Approach for Spray Atomization. *J. Atomization and Sprays*, 11: 505-519, 2001.

- [34] M. Gorokhovski & V. Saveliev. Further Analyses of Kolmogorov's Model of Breakup. *J. Physics of Fluids*, 15(1): 184-192, 2003.
- [35] M. Gorokhovski In "Annual Research Briefs in Center of Turbulence", Stanford University, NASA, B. Reynolds, J.H. Ferziger (eds.), 197-204, 2003.
- [36] C. Habchi and T. Baritaud, Modeling atomization and break-up in high pressure Diesel Sprays, SAE Pap. 9700881, 1997
- [37] J. Hinze (1955) Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. *AichE J.* 1, 289-295
- [38] J. Hinze (1959) Turbulence. New-York : Mc Graw-Hill.
- [39] M. Hong Atomisation et mélange dans les jets coaxiaux liquide-gaz, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, France, 2003.
- [40] M. Hong, A. Cartellier, E. Hopfinger, Atomisation and mixing in coaxial injection, Proc. 4th Int. Conference on Launcher Technology "Space Launcher Liquid Propulsion", Liège, Belgique, 3-6 Décembre 2002).
- [41] E.J. Hopfinger dans « Combustion dans les moteurs fusées Acte du Colloque de Synthèse du groupe de Recherche CNES/CNRS/ONERA/SNECMA », pp.34-47, 2001.
- [42] H.J. Hussein, S.P. Capp & W.K. George 1994 Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet. *J. Fluid Mech.* 258, pp.31-75.
- [43] S. Hwang, Z. Liu & R.D. Reitz (1996) Breakup mechanisms and drag coefficients of high-speed vaporizing liquid drops. *Atomization and Sprays* 6, 353-376.
- [44] R. Iranpour , P. Chacon 1988, Basic Stochastic Process: The Mark Kac Lectures, Macmillan, New York.
- [45] S. Jay , F. Lacas , S. Candel , 2005, Combined surface density for dense spray combustion, *Combustion and Flame* 144, p. 558-577.

- [46] A.N. Kolmogorov, (1941), Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **32**, 141
- [47] A.N. Kolmogorov, On the Log-Normal Distribution of Particles Sizes During Breakup Process, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* , XXXI, 2, pp 99-101, (1941) .
- [48] A.N. Kolmogorov. On the Drops Breakup in the Turbulent Flow. *Gidromekhanika, DAN*, LXVI, NS: 825-828, 1949.
- [49] A.B. Kostinski , A.R. Jameson , Fluctuation Properties of Precipitation. Part III: On the Ubiquity and Emergence of the Exponential Drop Size Spectra, *J. Atmos. Sci.*, Vol.56, 1, pp. 111-121, 1999.
- [50] V.R. Kutsenov & V.A. Sabel'nikov , Turbulence and Combustion, Hemisphere Publishing Corporation, New York, p 362,1990.
- [51] M. Lalo, A. Cartellier, P. Gajan & A. Strzelecki Use of Faraday instabilities to enhance fuel pulverization in Air Blast Atomizers ICLASS 2006.
- [52] J.C. Lasheras E. Villermaux and E.J. Hopfinger. Break-up and atomization of a round water jet by a high-speed annular air jet; *J.Fluid Mech.* 357: 351-379, 1998.
- [53] J.C. Lasheras & E.J. Hopfinger . Liquid Jet Instability and Atomization in a Coaxial Gas Stream. *Ann. Rev. Fluid Mech.* pp 275-308 , 2000.
- [54] D.K. Lilly, 1992 A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A* 4(3), pp.633-635.
- [55] Z. Liu & R.D. Reitz (1997) An analysis of the distortion and breakup mechanisms of high speed liquid drop. *Inter. J. of Multiphase Flow* 23(4) 631-650.
- [56] E.D. McGrady and R.M. Ziff, "Shattering" Transition in Fragmentation, *Phys. Rev. Letters*, V.58, N°9, 1987.
- [57] N.N. Mansour, P. Moin, W.C. Reynolds & J.H. Ferziger 1977 Improvements in Large-Eddy Simulation Technique Special Methods and High-Order Statistics. *Proc. of the First Int. Symposium on Turbulent Shear Flows*.

- [58] P. Marmottant Atomisation d'un liquide par un courant gazeux, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, France, 2001.
- [59] P. Marmottant , E. Villermaux Mécanismes d'atomisation primaire dans les jets coaxiaux. dans « Combustion dans les moteurs fusées Acte du Colloque de Synthèse du groupe de Recherche CNES/CNRS/ONERA/SNECMA », pp.51-66, 2001.
- [60] WHO. Mayer & R. Branam Atomization characteristics on the surface of a round liquid jet , Experiments in fluids (2004) v.36 n°4 528-539.
- [61] N. Mayers, F. Dupoirieux, M. Habiballah, An Eulerian model for LOX/GH2 shear-coaxial jet atomization and combustion. First European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), Moscou, Russie, 2005
- [62] N. Mayers, Modélisation de la combustion cryotechnique avec prise en compte de l'atomisation primaire du jet d'oxygène liquide, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille 2, France, 2006.
- [63] T. Menard, Développement d'une méthode Level Set pour le suivi d'interface. Application à la rupture de jet liquide, Thèse de doctorat, Université de Rouen, France, 2007.
- [64] F. R. Menter<sup>1</sup>, M. Kuntz<sup>1</sup> and R. Langtry<sup>1</sup>, Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model, Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, 2003 Begell House, Inc
- [65] W.H. Nurick, 1976, Orifice cavitation and its effect on spray mixing. Journal of Fluids Engineering, 98, 681–687.
- [66] M. Orme(1997) Experiments on droplet collisions, bounce, coalescence and disruption. Prog. Energy. Combust. Sci. 23, 65-79.
- [67] P.J. O'Rourke , 1981, Collective drop effects on vaporizing liquid sprays, PhD thesis, University of Princeton.
- [68] P.J. O'Rourke , A.A. Amsden (1987) The T.A.B method for numerical calculation of spray droplet breakup. *SAE 872089*.

- [69] N.R. Panchapakesan, & J.L. Lumley 1993 Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jet. *J. Fluid Mech.* **246** , pp.197-223.
- [70] M.A. Patterson and R.D. Reitz, Modeling the effects of fuel spray characteristics on Diesel engine combustion and emissions, SAE Pap. 980131, 1998
- [71] C.D. Pierce, 2001 Progress-variable approach for large-eddy simulation of turbulent combustion. *Ph.D. thesis, Stanford University, Stanford, CA.*
- [72] M. Pilch & C.A. Erdman 1987 Use of time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquide drop. *Int. J. Multiphase Flow* 13, 6, 741-757.
- [73] U. Piomelli 1999 Large-eddy simulation: achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences* **35** (4), pp.335-362.
- [74] J. Plateau , 1873, Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires, Gaitier-Villars, Paris.
- [75] J. Qian & C.K. Law (1997) Regimes of coalescence and separation in droplet collision. *J. Fluid Mech.* 331, 59-80.
- [76] J.W.S. Rayleigh , 1878, On the instability of jets, *Proc. Lond. Math. Soc.* 10, 4-13.
- [77] L. Raynal, Instabilité et entraînement à l'interface d'une couche de mélange liquide-gaz. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, France, 1997.
- [78] S. Redner, Fragmentation, in *Statistical models for the fracture of disordered media*, eds. H.J. Herrmann, S.Roux, Elsevier, Amsterdam, 1990
- [79] H. Rehab , Villermaux E., Hopfinger E.J. Flow regimes of large velocity ratio coaxial jets. *J. Fluid Mech.* 345 (1997), 357-381.
- [80] R.D. Reitz. Modeling Atomization Process in High-Pressure Vaporizing Sprays. *J. Atomization and Sprays Tech*, 3: 309 – 337, 1987.
- [81] L.F. Richardson, 1922 *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press.

- [82] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*, 2<sup>nd</sup> ed., Springer, Berlin, 1989.
- [83] S.M. Ross , *Stochastic Processes*, Wiley, 510p., 1996.
- [84] K.A. Sallam, Z. Dai, G.M. Faeth, Liquid break-up at the surface of turbulent round liquid jets in still gases, *Int. J. Multiphase Flows*, 28, 427-449, 2002
- [85] V.L. Saveliev and M.A. Gorokhovski, Group-theoretical model of developed turbulence and renormalization of Navier-Stokes equations. *Phys. Rev. E* 72, 016302, (2005)
- [86] R. Scardovelli, S. Zaleski , *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31, 567-603, 1999.
- [87] H. Schlichting, 1979 *Boundary-Layer Theory*, 7th edition. *McGraw-Hill, New York*.
- [88] J. Sethian *Level Set methods and fast marching methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [89] U. Shavit and N. Chigier Fractal Dimensions of Liquid Jet Interface Under Breakup, *J. Atomization and Sprays*, 5, 525-543,1995.
- [90] H.C. Simmons , The Correlation of Drop-Size Distributions in Fuel-Nozzle Sprays, *J. Eng. for Power*, vol. 99, pp. 309-319,1977.
- [91] J. Smagorinsky, 1963 General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review* **91** (3), pp.99-164.
- [92] V. Srinivasan., A.J. Salazar ,K. Saito Modeling the effect of the injection velocity on the desintegration of round turbulent liquid jets using LES/VOF techniques. Iclass 2006 Aug27-Sept.1, Kyoto, Japan.
- [93] M. Stahl, M. Gnirß, N. Damaschke, C. Tropea, Laser Doppler measurements of nozzle flow and optical characterisation of the generated spray, ILASS-2005, Orleans, France, 2005.

- [94] Stahl, M.; Damaschke, N.; Tropea, C., Experimental investigation of turbulence and cavitation inside a pressure atomizer and optical characterization of the generated spray, ICLASS-2006, Aug. 27-Sept. 1, Kyoto, Japan, 2006.
- [95] S. Tanguy, Développement d'une méthode de suivi d'interface. Application aux écoulements diphasiques, Thèse de doctorat, Université de Rouen, France, 2004.
- [96] G. Tryggvasson, B. Bunner, A. Esmaeli, D. Juriv, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, J. Nas, & Y.J. Jan, A front-tracking method for the computations of multiphase flow, J. Comp. Phy. 169, pp 708-759, 2000.
- [97] A. Vallet, Contribution à la modélisation de l'atomisation d'un jet liquide haute pression. Thèse de doctorat, Université de Rouen, France, 1997.
- [98] A. Vallet , R. Borghi - An Eulerian model of atomization of a liquid jet. - Proceedings of the 3rd International Conference on Multiphase Flow : ICMF'98, Lyon, CD-ROM, paper 334, 8-12 juin 1998
- [99] A.Vallet, A. Burluka, R. Borghi, Development of a Eulerian model for the atomization of a liquid jet, *Atomization and Sprays*, Vol. 11, pp.619-642, 2001.
- [100] C.M. Varga, J.C. Lasheras, E.J. Hopfinger Initial breakup of a small-diameter liquid jet by a high-speed gas stream (2003) *J.Fluid.Mech* 497 – 405-434.
- [101] E. Villermaux. Mixing and spray formation in coaxial jets. *Journal of Propulsion and Power* 14(5): 807-817, 1998.
- [102] I. Vinkovic. Dispersion et mélange turbulents de particules solides et de gouttelettes par une simulation des grandes échelles et une modélisation stochastique lagrangienne. Application à la pollution de l'atmosphère. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France, 2005.
- [103] I. Vinkovic , C. Agguire , S. Simoens and M. Gorokhovski (2006), Large eddy simulation of droplet dispersion for inhomogeneous turbulent wall flow, *Int. J. of Multiphase Flow*, Vol. 32/3, 344-364 .
- [104] L.A. Vulis , V.P. Kashkarov 1965. Theory of Viscous-Fluid Jets. Nauka. Moscow

- [105] C. Weber , 1931, Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles. *Z. Angew. Math. Mech.* 11, 136-41.
- [106] O. Werquin Diagnostics des scalaires par plan laser dans les jets diphasiques denses. These de doctorat, Université de Rouen, France, 2001.
- [107] F.A. Williams, "Spray combustion and atomisation", *physics of Fluids*, vol 1 #6, pp. 541-545, 1958.
- [108] I. Wygnanski, & H. Fiedler, 1969 Some measurements in the self-preserving jet. *J. Fluid Mech.* **38** (3), pp.577-612.
- [109] P.K. Wu, L.K. Tseng, G.M. Faeth, Primary Breakup in Gas/Liquid Mixing Layers for Turbulent Liquids, *Atomization and Sprays*, vol. 2, pp. 295-317, 1992.
- [110] P.K. Wu and G.M. Faeth, Aerodynamic Effects on Primary Breakup of Turbulent Liquids, *Atomization and Sprays*, vol. 3, pp. 265-289, 1993.
- [111] Y. Yi and R. Reitz, Modeling the primary break-up of high-speed jets, *Atom. Sprays*, V.14, N°1, 53-80, 2004
- [112] W.X. Zhou and Z.H. Yu, Multifractality of drop breakup in the air-blast nozzle atomization process, *Phys. Rev. E*, 63, 016302, 2000.
- [113] R.M. Ziff and E.D. McGrady, The kinetics of cluster fragmentation and depolymerisation, *J. Phys. A*18, 3027-3037, 1985.
- [114] R.M. Ziff, New solutions to the fragmentation equation, *J. Phys. A Math Gen* 24, 2821-2828, 1991.