

SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES

Mouhamad HOSSEIN

Dirigé par

Philippe DELANOË

Laboratoire J.A.Dieudonné

Soutenance de thèse

(Mardi 12 Mai 2009, Nice)

Jury :

M. Arnaud BEAUVILLE

M. Nassif GHOUSSOUB

M. Philippe DELANOË

M. Erwann DELAY

M. Olivier DRUET

Professeur à l'Université de Nice-France

Professeur à l'Université de British Columbia-Canada

Directeur de recherches au CNRS-France

Maître de conférences à l'Université d'Avignon-France

Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon-France

EDPs elliptiques de second ordre dans \mathbb{R}^n

1 EDP linéaire

$$L[u] = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u$$

où $a^{ij} = a^{ji}$, $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. L est dit elliptique au point x si la matrice $a^{ij}(x)$ est définie, nous la prendrons par convention définie positive

EDPs elliptiques de second ordre dans \mathbb{R}^n

1 EDP linéaire

$$L[u] = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u$$

où $a^{ij} = a^{ji}$, $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. L est dit elliptique au point x si la matrice $a^{ij}(x)$ est définie, nous la prendrons par convention définie positive; c-a-d, si $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeurs propres de $[a^{ij}(x)]$, alors,

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

EDPs elliptiques de second ordre dans \mathbb{R}^n

1 EDP linéaire

$$L[u] = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u$$

où $a^{ij} = a^{ji}$, $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. L est dit elliptique au point x si la matrice $a^{ij}(x)$ est définie, nous la prendrons par convention définie positive; c-a-d, si $\lambda(x), \Lambda(x)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeurs propres de $[a^{ij}(x)]$, alors,

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. On dit que L est elliptique dans $\omega \subset \mathbb{R}^n$ si L est elliptique pour tout point x dans ω . Si de plus Λ/λ est borné dans ω alors on dit que L est uniformément elliptique dans ω .

EDPs elliptiques de second ordre dans \mathbb{R}^n

① EDP linéaire

$$L[u] = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u$$

où $a^{ij} = a^{ji}$, $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. L est dit elliptique au point x si la matrice $a^{ij}(x)$ est définie, nous la prendrons par convention définie positive; c-a-d, si $\lambda(x), \Lambda(x)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeurs propres de $[a^{ij}(x)]$, alors,

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. On dit que L est elliptique dans $\omega \subset \mathbb{R}^n$ si L est elliptique pour tout point x dans ω . Si de plus Λ/λ est borné dans ω alors on dit que L est uniformément elliptique dans ω .

Hopf, Oddson, Miller, Serrin, Schauder...

EDPs elliptiques de second ordre dans \mathbb{R}^n

1 EDP Quasilineaire

$$Q[u] = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du)$$

où $a^{ij} = a^{ji}$, $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et $a(x, z, p)$, $b(x, z, p)$ définis $\forall (x, z, p) \in (\omega, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Q est dit elliptique au point (x, z, p) si la matrice $a^{ij}(x, z, p)$ est définie positive.

EDPs elliptiques de second ordre dans \mathbb{R}^n

1 EDP Quasilinéaire

$$Q[u] = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du)$$

où $a^{ij} = a^{ji}$, $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et $a(x, z, p)$, $b(x, z, p)$ définis $\forall (x, z, p) \in (\omega, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Q est dit elliptique au point (x, z, p) si la matrice $a^{ij}(x, z, p)$ est définie positive.

Meyers, Trudinger, Donglas, Dapont, Serrin, Bakelman, Ladyzhenskaya...

EDPs elliptiques de second ordre

- 1 EDP totalement non linéaire

$$F[u] = F(x, u, Du, D^2u)$$

F est une fonction réelle définie sur $\Omega = \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{n \times n}$ désigne l'espace des matrices symétriques ($n \times n$).

EDPs elliptiques de second ordre

1 EDP totalement non linéaire

$$F[u] = F(x, u, Du, D^2u)$$

F est une fonction réelle définie sur $\Omega = \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{n \times n}$ désigne l'espace des matrices symétriques ($n \times n$).

F est dite elliptique au point $\gamma = (x, z, p, r) \in \Omega$ si la matrice

$$F_{ij}(\gamma) = \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\gamma), \quad i, j = 1, \dots, n$$

est définie positive.

EDPs elliptiques de second ordre

1 EDP totalement non linéaire

$$F[u] = F(x, u, Du, D^2u)$$

F est une fonction réelle définie sur $\Omega = \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{n \times n}$ désigne l'espace des matrices symétriques ($n \times n$).

F est dite elliptique au point $\gamma = (x, z, p, r) \in \Omega$ si la matrice

$$F_{ij}(\gamma) = \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\gamma), \quad i, j = 1, \dots, n$$

est définie positive.

Caffarelli, Nirenberg, Spuck, Ivočkina, Evans, Krylov, Trudinger, Lions, Aleksandrov . . .

Équations hessiennes

La classe des équations hessiennes est le premier cas particulier totalement non linéaire important, elles s'écrivent :

$$\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) = f(x, u, Du)$$

Équations hessiennes

La classe des équations hessiennes est le premier cas particulier totalement non linéaire important, elles s'écrivent :

$$\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) = f(x, u, Du)$$

$\mathcal{F}(\lambda)$ symétrique, homogène, concave et défini sur une cône de positivité Γ^+ où $\mathcal{F} > 0$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_i} > 0, \forall i$.

Équations hessiennes

La classe des équations hessiennes est le premier cas particulier totalement non linéaire important, elles s'écrivent :

$$\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) = f(x, u, Du)$$

$\mathcal{F}(\lambda)$ symétrique, homogène, concave et défini sur une cône de positivité Γ^+ où $\mathcal{F} > 0$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_i} > 0, \forall i$.

- 1 Exemple important : $\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) := [\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}}$ dans Γ_κ

Équations hessiennes

La classe des équations hessiennes est le premier cas particulier totalement non linéaire important, elles s'écrivent :

$$\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) = f(x, u, Du)$$

$\mathcal{F}(\lambda)$ symétrique, homogène, concave et défini sur une cône de positivité Γ^+ où $\mathcal{F} > 0$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_i} > 0, \forall i$.

- ① Exemple important : $\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) := [\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}}$ dans Γ_κ
 - Pour $\kappa = 1$ on obtient une équation de Poisson $\Delta u = f$

Équations hessiennes

La classe des équations hessiennes est le premier cas particulier totalement non linéaire important, elles s'écrivent :

$$\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) = f(x, u, Du)$$

$\mathcal{F}(\lambda)$ symétrique, homogène, concave et défini sur une cône de positivité Γ^+ où $\mathcal{F} > 0$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_i} > 0, \forall i$.

- ① Exemple important : $\mathcal{F}(\lambda(D^2u)) := [\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}}$ dans Γ_κ
 - Pour $\kappa = 1$ on obtient une équation de Poisson $\Delta u = f$
 - Pour $\kappa = n$ on a une équation de Monge-Ampère $[\det(D^2u)]^{\frac{1}{\kappa}} = f > 0$.

Équations de courbure

Les équations de courbure sont de la forme :

$$F(\lambda(II)) = f(x, u, Du) > 0$$

où II est la second forme fondamentale. Ces équations sont plus difficiles à résoudre, elles ne sont pas considérés dans cette thèse

Solution entière

Dans la thèse on considère les équations hessiennes de la forme :

$$m_\kappa [\lambda(D^2f)(x)] = [\psi(x)]^{\frac{1}{\kappa}} > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Solution entière

Dans la thèse on considère les équations hessiennes de la forme :

$$m_\kappa [\lambda(D^2f)(x)] = [\psi(x)]^{\frac{1}{\kappa}} > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \quad (1)$$

où m_κ est la moyenne symétrique élémentaire d'ordre κ à n variables ($n \geq \kappa$), homogène de degré 1 et telle que $m_\kappa(1, \dots, 1) = 1$, f asymptote à $\frac{1}{2}|x|^2$ et ψ une fonction positive donnée asymptote à 1.

Solution entière

Dans la thèse on considère les équations hessiennes de la forme :

$$m_\kappa [\lambda(D^2f)(x)] = [\psi(x)]^{\frac{1}{\kappa}} > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \quad (1)$$

où m_κ est la moyenne symétrique élémentaire d'ordre κ à n variables ($n \geq \kappa$), homogène de degré 1 et telle que $m_\kappa(1, \dots, 1) = 1$, f asymptote à $\frac{1}{2}|x|^2$ et ψ une fonction positive donnée asymptote à 1.

$\lambda(D^2f)$ désigne le n -uplet des valeurs propres de la matrice hessienne de f par rapport à la *métrique euclidienne standard* de \mathbb{R}^n .

Solution entière

Dans la thèse on considère les équations hessiennes de la forme :

$$m_\kappa [\lambda(D^2f)(x)] = [\psi(x)]^{\frac{1}{\kappa}} > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \quad (1)$$

où m_κ est la moyenne symétrique élémentaire d'ordre κ à n variables ($n \geq \kappa$), homogène de degré 1 et telle que $m_\kappa(1, \dots, 1) = 1$, f asymptote à $\frac{1}{2}|x|^2$ et ψ une fonction positive donnée asymptote à 1.

$\lambda(D^2f)$ désigne le n -uplet des valeurs propres de la matrice hessienne de f par rapport à la *métrique euclidienne standard* de \mathbb{R}^n .

Nous supposerons toujours $\lambda(D^2f)$ dans le cône de positivité de m_κ (*ellipticité de l'équation*)

Solution entière

Les équations s'écrivent encore :

$$\mathcal{M}_\kappa[u] = m_\kappa(\lambda(I + D^2u)) = (1 + \phi)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2)$$

Solution entière

Les équations s'écrivent encore :

$$\mathcal{M}_\kappa[u] = m_\kappa(\lambda(I + D^2u)) = (1 + \phi)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2)$$

ou

$$\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[m_\kappa(\lambda(I + D^2u))] = \frac{1}{\kappa} \log(1 + \phi) \quad (3)$$

Solution entière

Les équations s'écrivent encore :

$$\mathcal{M}_\kappa[u] = m_\kappa(\lambda(I + D^2u)) = (1 + \phi)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2)$$

ou

$$\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[m_\kappa(\lambda(I + D^2u))] = \frac{1}{\kappa} \log(1 + \phi) \quad (3)$$

avec $f = \frac{1}{2}|x|^2 + u$ et $\psi = 1 + \phi > 0$ où u et ϕ s'annulent convenablement à l'infini.

Solution entière

Les équations s'écrivent encore :

$$\mathcal{M}_\kappa[u] = m_\kappa(\lambda(I + D^2u)) = (1 + \phi)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2)$$

ou

$$\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[m_\kappa(\lambda(I + D^2u))] = \frac{1}{\kappa} \log(1 + \phi) \quad (3)$$

avec $f = \frac{1}{2}|x|^2 + u$ et $\psi = 1 + \phi > 0$ où u et ϕ s'annulent convenablement à l'infini.

Notre choix de f à l'infini permet à l'opérateur différentiel non-linéaire $\mathcal{N}_\kappa[u]$ d'être *invariant par les rotations* de \mathbb{R}^n .

Solution entière

Les équations s'écrivent encore :

$$\mathcal{M}_\kappa[u] = m_\kappa(\lambda(I + D^2u)) = (1 + \phi)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2)$$

ou

$$\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[m_\kappa(\lambda(I + D^2u))] = \frac{1}{\kappa} \log(1 + \phi) \quad (3)$$

avec $f = \frac{1}{2}|x|^2 + u$ et $\psi = 1 + \phi > 0$ où u et ϕ s'annulent convenablement à l'infini.

Notre choix de f à l'infini permet à l'opérateur différentiel non-linéaire $\mathcal{N}_\kappa[u]$ d'être *invariant par les rotations* de \mathbb{R}^n .

Notre contribution concerne le cas $1 < \kappa < n$.

Résultat déjà connu

Le problème de Dirichlet posé dans un ouvert borné (de géométrie convenable) a été traité pour l'équation hessienne dans l'article Caffarelli, Nirenberg, Spruck. *Acta Math*, (1986).

Plan

① SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES RÉELLES

Plan

- 1 SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES RÉELLES
- 2 SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES COMPLEXES

Table des matières

1 Introduction

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal
- 3 Fonction κ -admissible

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal
- 3 Fonction κ -admissible
- 4 Unicité de la solution κ -admissible

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal
- 3 Fonction κ -admissible
- 4 Unicité de la solution κ -admissible
- 5 Théorie linéaire
 - Espace de Hölder à poids

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal
- 3 Fonction κ -admissible
- 4 Unicité de la solution κ -admissible
- 5 Théorie linéaire
 - Espace de Hölder à poids
- 6 Méthode de résolution (Méthode de continuité)
 - Méthode de continuité

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal
- 3 Fonction κ -admissible
- 4 Unicité de la solution κ -admissible
- 5 Théorie linéaire
 - Espace de Hölder à poids
- 6 Méthode de résolution (Méthode de continuité)
 - Méthode de continuité
- 7 Estimation à priori
 - Existence d'une solution radiale
 - Estimation d'ordre zéro pondérée
 - Estimation d'ordre 2 sans poids
 - Estimation pondérée

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Résultat principal
- 3 Fonction κ -admissible
- 4 Unicité de la solution κ -admissible
- 5 Théorie linéaire
 - Espace de Hölder à poids
- 6 Méthode de résolution (Méthode de continuité)
 - Méthode de continuité
- 7 Estimation à priori
 - Existence d'une solution radiale
 - Estimation d'ordre zéro pondérée
 - Estimation d'ordre 2 sans poids
 - Estimation pondérée
- 8 Equations hessiennes complexes

Résultat principal

Théorème

Pour toute fonction $\phi \in C_{p+2}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi := 1 + \phi > 0$, tous $n > 2$ et $p \in (0, n - 2)$, il existe une unique solution $u \in C_p^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible de l'équation (3).

Résultat principal

Théorème

Pour toute fonction $\phi \in C_{p+2}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi := 1 + \phi > 0$, tous $n > 2$ et $p \in (0, n - 2)$, il existe une unique solution $u \in C_p^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible de l'équation (3).

Remarque

Soit u une telle solution de l'équation (3) et $k \in \mathbb{N}$. Alors, si $\phi \in C_{p+2}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $u \in C_p^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une matrice symétrique

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\kappa \in \{1, \dots, n\}$

Fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une matrice symétrique

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\kappa \in \{1, \dots, n\}$

Définition

Notons $F_\kappa(A) = \sum_{|I|=\kappa} A_{II}$, la somme des mineurs principaux d'ordre κ de A . Par définition on a :

$$F_\kappa(A) = \frac{1}{\kappa!} \sum_{\substack{i_1 \dots i_\kappa \\ j_1 \dots j_\kappa}} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_\kappa j_\kappa}$$

Fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une matrice symétrique

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\kappa \in \{1, \dots, n\}$

Définition

Notons $F_\kappa(A) = \sum_{|I|=\kappa} A_{II}$, la somme des mineurs principaux d'ordre κ de A . Par définition on a :

$$F_\kappa(A) = \frac{1}{\kappa!} \sum_{\substack{i_1 \dots i_\kappa \\ j_1 \dots j_\kappa}} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_\kappa j_\kappa}$$

Lemme

Pour toute matrice symétrique A telle que $\lambda(A) \in \Gamma_\kappa$, la fonction

$$A \longrightarrow [F_\kappa(A)]^{\frac{1}{\kappa}}$$

est elliptique et concave, où Γ_κ est la cône de positivité de m_κ

Fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une matrice symétrique

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\kappa \in \{1, \dots, n\}$

Définition

Notons $F_\kappa(A) = \sum_{|I|=\kappa} A_{II}$, la somme des mineurs principaux d'ordre κ de A . Par définition on a :

$$F_\kappa(A) = \frac{1}{\kappa!} \sum_{\substack{i_1 \dots i_\kappa \\ j_1 \dots j_\kappa}} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_\kappa j_\kappa}$$

Lemme

Pour toute matrice symétrique A telle que $\lambda(A) \in \Gamma_\kappa$, la fonction

$$A \longrightarrow [F_\kappa(A)]^{\frac{1}{\kappa}}$$

est elliptique et concave, où Γ_κ est la cône de positivité de m_κ

$$\Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sigma_i(\lambda(A)) > 0, \forall i = 1, \dots, \kappa\}.$$

Fonction κ -admissible

Définition

Une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est dite κ -admissible si $\lambda[a_u(x)] \in \Gamma_\kappa$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $a_u = I + D^2u$

Fonction κ -admissible

Définition

Une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est dite κ -admissible si $\lambda[a_u(x)] \in \Gamma_\kappa$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $a_u = I + D^2u$

Propriétés (de l'opérateur \mathcal{F}_κ)

$\forall u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible, le linéarisé de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{F}_\kappa[u] : u \mapsto \mathcal{F}_\kappa[u] := F_\kappa(a_u)$$

est elliptique et s'écrit sous forme divergentielle.

Principe de Comparaison

Lemme (Principe de comparaison)

Soient $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ κ -admissibles nulles à l'infini telles que

$$m_\kappa[\lambda(a_u)] \leq m_\kappa[\lambda(a_v)] \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Alors

$$u \geq v \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

Principe de Comparaison

Lemme (Principe de comparaison)

Soient $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ κ -admissibles nulles à l'infini telles que

$$m_\kappa[\lambda(a_u)] \leq m_\kappa[\lambda(a_v)] \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

Alors

$$u \geq v \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

Corollaire (Unicité de la solution κ -admissible)

Il existe au plus une solution C^2 de l'équation (3) κ -admissible et nulle à l'infini.

Espace de Hölder à poids

$C_p^{k,\alpha}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $C^{k,\alpha}(\Omega)$:

$$\|u\|_{C_p^{k,\alpha}(\Omega)} = \sum_{i=0}^k M_{p,i}(u) + M_{p,k+\alpha}(u)$$

Espace de Hölder à poids

$C_p^{k,\alpha}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $C^{k,\alpha}(\Omega)$:

$$\|u\|_{C_p^{k,\alpha}(\Omega)} = \sum_{i=0}^k M_{p,i}(u) + M_{p,k+\alpha}(u)$$

où

$$M_{p,i}(u) := \sup_{x \in \Omega} \{ \sigma(x)^{p+i} |D^i u(x)| \} \text{ et}$$

$$M_{p,i+\alpha}(u) := \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ x \neq x'}} \left\{ \min(\sigma(x)^{p+i+\alpha}, \sigma(x')^{p+i+\alpha}) \frac{|D^i u(x) - D^i u(x')|}{|x-x'|^\alpha} \right\}.$$

avec $\sigma(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ et $p \in \mathbb{R}$.

Théorème d'isomorphisme

Théorème

Soit $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique sur \mathbb{R}^n tel que $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij} \in C_0^{k,\alpha}$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$. Alors pour tout $p \in (0, n - 2)$, L est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$.

Théorème d'isomorphisme

Théorème

Soit $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique sur \mathbb{R}^n tel que $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij} \in C_0^{k,\alpha}$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$. Alors pour tout $p \in (0, n - 2)$, L est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$.

On a :

$$d\mathcal{F}_\kappa[u](v) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) \partial_j v \right)$$

Théorème d'isomorphisme

Théorème

Soit $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique sur \mathbb{R}^n tel que $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij} \in C_0^{k,\alpha}$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$. Alors pour tout $p \in (0, n-2)$, L est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$.

On a :

$$d\mathcal{F}_\kappa[u](v) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) \partial_j v \right) \Rightarrow d\mathcal{N}_\kappa[u](v) = \frac{d\mathcal{F}_\kappa[u](v)}{\kappa \sigma_\kappa(\lambda(a_u))}$$

Théorème d'isomorphisme

Théorème

Soit $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique sur \mathbb{R}^n tel que $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij} \in C_0^{k,\alpha}$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$. Alors pour tout $p \in (0, n-2)$, L est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$.

On a :

$$d\mathcal{F}_\kappa[u](v) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) \partial_j v \right) \Rightarrow d\mathcal{N}_\kappa[u](v) = \frac{d\mathcal{F}_\kappa[u](v)}{\kappa \sigma_\kappa(\lambda(a_u))}$$

Lemme

Pour tout $k > 0$ et pour tout $u \in C_p^{k+2,\alpha}$ κ -admissible, l'application :

$$d\mathcal{N}_\kappa[u] : C_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$$

est un isomorphisme.

Équation de continuité

Pour $t \in [0, 1]$, nous allons considérer l'équation de continuité :

Équation de continuité

Pour $t \in [0, 1]$, nous allons considérer l'équation de continuité :

$$\mathcal{N}_\kappa[u_t] = \frac{1}{\kappa} \log[1 + t\phi] = \frac{1}{\kappa} \log(\psi_t) \quad (4)$$

Équation de continuité

Pour $t \in [0, 1]$, nous allons considérer l'équation de continuité :

$$\mathcal{N}_\kappa[u_t] = \frac{1}{\kappa} \log[1 + t\phi] = \frac{1}{\kappa} \log(\psi_t) \quad (4)$$

avec $\phi \in C_{p+2}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_1 = \psi = 1 + \phi > 0$ et

Équation de continuité

Pour $t \in [0, 1]$, nous allons considérer l'équation de continuité :

$$\mathcal{N}_\kappa[u_t] = \frac{1}{\kappa} \log[1 + t\phi] = \frac{1}{\kappa} \log(\psi_t) \quad (4)$$

avec $\phi \in C_{p+2}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_1 = \psi = 1 + \phi > 0$ et

$\mathcal{T} = \{t \in [0, 1] \text{ tel que, il existe } u_t \text{ solution } \kappa - \text{admissible de (4)}\}$.

Équation de continuité

Pour $t \in [0, 1]$, nous allons considérer l'équation de continuité :

$$\mathcal{N}_\kappa[u_t] = \frac{1}{\kappa} \log[1 + t\phi] = \frac{1}{\kappa} \log(\psi_t) \quad (4)$$

avec $\phi \in C_{p+2}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_1 = \psi = 1 + \phi > 0$ et

$\mathcal{T} = \{t \in [0, 1] \text{ tel que, il existe } u_t \text{ solution } \kappa\text{-admissible de (4)}\}$.

Théorème

L'équation (3) admet une solution κ -admissible si l'ensemble \mathcal{T} est ouvert et fermé dans $[0, 1]$.

\mathcal{T} ouvert et fermé

- 1 \mathcal{T} est ouvert dans $[0, 1]$

\mathcal{T} ouvert et fermé

- 1 \mathcal{T} est ouvert dans $[0, 1]$
 - Si, $t \in \mathcal{T}$, alors l'opérateur linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$ est un isomorphisme de $C_p^{2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{0,\alpha}$ et d'après le théorème d'inversion locale, et la κ -admissibilité étant une propriété ouverte, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(t - \epsilon, t + \epsilon) \cap [0, 1] \subset \mathcal{T}$. Donc \mathcal{T} est relativement ouvert dans $[0, 1]$.

\mathcal{T} ouvert et fermé

- 1 \mathcal{T} est ouvert dans $[0, 1]$
 - Si, $t \in \mathcal{T}$, alors l'opérateur linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$ est un isomorphisme de $C_p^{2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{0,\alpha}$ et d'après le théorème d'inversion locale, et la κ -admissibilité étant une propriété ouverte, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(t - \epsilon, t + \epsilon) \cap [0, 1] \subset \mathcal{T}$. Donc \mathcal{T} est relativement ouvert dans $[0, 1]$.
- 2 \mathcal{T} fermé dans $[0, 1]$

\mathcal{T} ouvert et fermé

- 1 \mathcal{T} est ouvert dans $[0, 1]$
 - Si, $t \in \mathcal{T}$, alors l'opérateur linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$ est un isomorphisme de $C_p^{2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{0,\alpha}$ et d'après le théorème d'inversion locale, et la κ -admissibilité étant une propriété ouverte, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(t - \epsilon, t + \epsilon) \cap [0, 1] \subset \mathcal{T}$. Donc \mathcal{T} est relativement ouvert dans $[0, 1]$.
- 2 \mathcal{T} fermé dans $[0, 1]$
 - Ce résultat suit classiquement des estimations *a priori* sur u_t pour $t \in \mathcal{T}$, construites ci-après, qui fournissent une borne sur $\|u_t\|_{C_p^{2,\alpha}}$ indépendante de $t \in \mathcal{T}$

\mathcal{T} ouvert et fermé

- 1 \mathcal{T} est ouvert dans $[0, 1]$
 - Si, $t \in \mathcal{T}$, alors l'opérateur linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$ est un isomorphisme de $C_p^{2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{0,\alpha}$ et d'après le théorème d'inversion locale, et la κ -admissibilité étant une propriété ouverte, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(t - \epsilon, t + \epsilon) \cap [0, 1] \subset \mathcal{T}$. Donc \mathcal{T} est relativement ouvert dans $[0, 1]$.
- 2 \mathcal{T} fermé dans $[0, 1]$
 - Ce résultat suit classiquement des estimations *a priori* sur u_t pour $t \in \mathcal{T}$, construites ci-après, qui fournissent une borne sur $\|u_t\|_{C_p^{2,\alpha}}$ indépendante de $t \in \mathcal{T}$
 - En particulier, la κ -admissibilité de u_t avec t adhérent à \mathcal{T} est *a priori* assurée par l'équation (4) elle-même.

Calcul de la solution radiale

Si ϕ est radiale et $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ nulle à l'infini solution κ -admissible de l'équation (3) alors $u(x) \equiv U(r)$ est radiale.

Calcul de la solution radiale

Si ϕ est radiale et $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ nulle à l'infini solution κ -admissible de l'équation (3) alors $u(x) \equiv U(r)$ est radiale.

on a :

$$\partial_{ij}u(x) = \frac{x_i x_j}{r^2} \left(\ddot{U} - \frac{\dot{U}}{r} \right) + \delta_{ij} \frac{\dot{U}}{r}.$$

Pour faire le calcul de $m_\kappa[\lambda(a_u)]$ au point $x \neq 0$, on se ramène par rotation au cas $x = (r, 0, \dots, 0)$. Alors, si u satisfait l'équation (3), U vérifie l'équation différentielle suivante

Calcul de la solution radiale

Si ϕ est radiale et $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ nulle à l'infini solution κ -admissible de l'équation (3) alors $u(x) \equiv U(r)$ est radiale.

on a :

$$\partial_{ij}u(x) = \frac{x_i x_j}{r^2} \left(\ddot{U} - \frac{\dot{U}}{r} \right) + \delta_{ij} \frac{\dot{U}}{r}.$$

Pour faire le calcul de $m_\kappa[\lambda(a_u)]$ au point $x \neq 0$, on se ramène par rotation au cas $x = (r, 0, \dots, 0)$. Alors, si u satisfait l'équation (3), U vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\kappa}{n} \left(\ddot{U} + 1 \right) \left(\frac{\dot{U}}{r} + 1 \right)^{\kappa-1} + \frac{n-\kappa}{n} \left(\frac{\dot{U}}{r} + 1 \right)^\kappa = 1 + \varphi$$

Calcul de la solution radiale

Proposition

Si ϕ est radiale avec $1 + \phi > 0$, alors la solution radiale U nulle à l'infini de l'équation (3) s'écrit formellement :

$$U(r) = - \int_r^\infty s \left[\left(1 + n \int_0^1 \varphi(\tau s) \tau^{n-1} d\tau \right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] ds.$$

En plus si, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solution nulle à l'infini de l'équation (3), $\phi \in C_{p+2}^0$ et $p \in (0, n-2)$, alors $u(x) = U(r)$ et $u \in C_p^0$; précisément on a :

$$\|u\|_{C_p^0} \leq n[p(n-2-p)]^{-1} \|\phi\|_{C_{p+2}^0}$$

Construction des solution radiales sup et inf

Construction de u^\pm Comme $\phi \in C_{p+2}^0(\mathbb{R}^n)$, il existe des constantes $0 < C_1 \leq C_2$ telles que :

$$1 + \phi^+ \equiv \exp \left[-C_1 \sigma(r)^{(-p-2)} \right] \leq 1 + t\phi \leq 1 + C_2 \sigma(r)^{-p-2} \equiv 1 + \phi^-$$

Construction des solution radiales sup et inf

Construction de u^\pm Comme $\phi \in C_{p+2}^0(\mathbb{R}^n)$, il existe des constantes $0 < C_1 \leq C_2$ telles que :

$$1 + \phi^+ \equiv \exp \left[-C_1 \sigma(r)^{(-p-2)} \right] \leq 1 + t\phi \leq 1 + C_2 \sigma(r)^{-p-2} \equiv 1 + \phi^-$$

Par construction on a :

$$1 + \phi^+ = \mathcal{N}_\kappa[u^+] \leq \mathcal{N}_\kappa[u_t] = 1 + t\phi \leq \mathcal{N}_\kappa[u^-] = 1 + \phi^-$$

Construction des solution radiales sup et inf

Construction de u^\pm Comme $\phi \in C_{p+2}^0(\mathbb{R}^n)$, il existe des constantes $0 < C_1 \leq C_2$ telles que :

$$1 + \phi^+ \equiv \exp \left[-C_1 \sigma(r)^{-(p-2)} \right] \leq 1 + t\phi \leq 1 + C_2 \sigma(r)^{-p-2} \equiv 1 + \phi^-$$

Par construction on a :

$$1 + \phi^+ = \mathcal{N}_\kappa[u^+] \leq \mathcal{N}_\kappa[u_t] = 1 + t\phi \leq \mathcal{N}_\kappa[u^-] = 1 + \phi^-$$

donc d'après la principe de comparaison et la κ -admissibilité de u^\pm on obtient :

$$u^- \leq u_t \leq u^+$$

Construction des solution radiales sup et inf

Construction de u^\pm Comme $\phi \in C_{p+2}^0(\mathbb{R}^n)$, il existe des constantes $0 < C_1 \leq C_2$ telles que :

$$1 + \phi^+ \equiv \exp \left[-C_1 \sigma(r)^{-(p-2)} \right] \leq 1 + t\phi \leq 1 + C_2 \sigma(r)^{-p-2} \equiv 1 + \phi^-$$

Par construction on a :

$$1 + \phi^+ = \mathcal{N}_\kappa[u^+] \leq \mathcal{N}_\kappa[u_t] = 1 + t\phi \leq \mathcal{N}_\kappa[u^-] = 1 + \phi^-$$

donc d'après la principe de comparaison et la κ -admissibilité de u^\pm on obtient :

$$u^- \leq u_t \leq u^+$$

et d'après la proposition précédente on obtient l'estimation C_p^0

Estimation d'ordre 2 sans poids

Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| = 1$ et on note par $\partial_\xi = \sum \xi_i \partial_{x_i}$.

Estimation d'ordre 2 sans poids

Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| = 1$ et on note par $\partial_\xi = \sum \xi_i \partial_{x_i}$. On a :

$$N_\kappa[a_{u_t}] := \mathcal{N}_\kappa[u_t] = \frac{1}{\kappa} \log(\psi_t)$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| = 1$ et on note par $\partial_\xi = \sum \xi_i \partial_{x_i}$. On a :

$$N_\kappa[a_{u_t}] := \mathcal{N}_\kappa[u_t] = \frac{1}{\kappa} \log(\psi_t)$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 N_\kappa}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \partial_\xi(u_t)_{ij} \partial_\xi(u_t)_{kl}}_{\leq 0} + \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi}(u_t)_{ij} = \frac{1}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t)$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

$$L(\partial_{\xi\xi}(u_t)) := \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi}(u_t)_{ij} \geq \frac{1}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t) \quad (5)$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

$$L(\partial_{\xi\xi}(u_t)) := \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi}(u_t)_{ij} \geq \frac{1}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t) \quad (5)$$

On diagonalise $D^2 u_t(x)$, on pose $\lambda_i = 1 + (u_t)_{ii}$ on obtient :

$$L(u_t) = \kappa - (n - \kappa + 1) \frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa}. \quad (6)$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

$$L(\partial_{\xi\xi}(u_t)) := \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi}(u_t)_{ij} \geq \frac{1}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t) \quad (5)$$

On diagonalise $D^2 u_t(x)$, on pose $\lambda_i = 1 + (u_t)_{ii}$ on obtient :

$$L(u_t) = \kappa - (n - \kappa + 1) \frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa}. \quad (6)$$

D'après (5) et (6) l'inégalité $L\tilde{w}_t \leq 0$ entraîne au point x_0 :

$$\frac{1}{\kappa} (\log(\psi_t))_{11} - \kappa + (n - \kappa + 1) \frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa} \leq 0$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

$$L(\partial_{\xi\xi}(u_t)) := \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi}(u_t)_{ij} \geq \frac{1}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t) \quad (5)$$

On diagonalise $D^2 u_t(x)$, on pose $\lambda_i = 1 + (u_t)_{ii}$ on obtient :

$$L(u_t) = \kappa - (n - \kappa + 1) \frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa}. \quad (6)$$

D'après (5) et (6) l'inégalité $L\tilde{w}_t \leq 0$ entraîne au point x_0 :

$$\frac{1}{\kappa} (\log(\psi_t))_{11} - \kappa + (n - \kappa + 1) \frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa} \leq 0$$

+

Inégalité de Newton pour σ_κ

$$\text{On obtient au point } x_0 : \quad \sigma_1 \leq C$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

Lemme

Il existe une constante $C > 0$ indépendante de $t \in [0, 1]$ telle que, pour tout vecteur unitaire ξ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\partial_{\xi\xi} u_t(x)| \leq C.$$

Estimation d'ordre 2 sans poids

Lemme

Il existe une constante $C > 0$ indépendante de $t \in [0, 1]$ telle que, pour tout vecteur unitaire ξ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\partial_{\xi\xi} u_t(x)| \leq C.$$

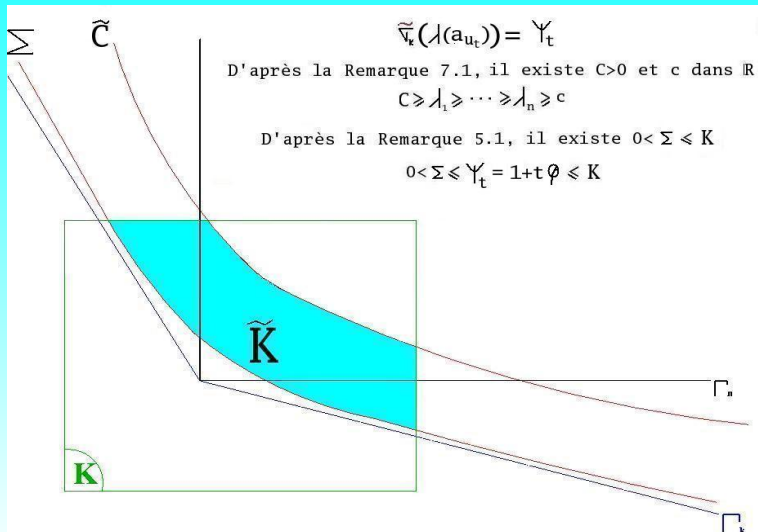
Pour finir, on prend $\partial_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_i \pm \partial_j)$ pour $i \neq j$ et on conclut que :

Proposition

$\exists C$ indépendante de $t \in [0, 1]$ telle que :

$$|(u_t)_{ij}| \leq C.$$

Ellipticité uniforme



Estimation $C_p^{2,\alpha}$

Lemme

Soit $x_0 \in R^n$ fixé, soit $X = \frac{x-x_0}{\sigma(x_0)}$ et soit $0 < \rho < 1$ on définit les boules:

$$B_\rho = \{X \in R^n, |X| \leq \rho\}.$$

$\forall u \in C_p^{k,\alpha}$, associons à u la fonction :

$$X \in B_\rho \longmapsto u_{x_0}(X) = [\sigma(x_0)]^p u(x)$$

La norme $\sup_{x_0 \in R^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)}$ est équivalente à la norme $\|u\|_{C_p^{k,\alpha}}$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

Pour $u \in C_p^4(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible et $f = \mathcal{N}_\kappa[u] \in C_{p+2}^2(\mathbb{R}^n)$, on définit sur B_ρ les deux fonctions :

$$u_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^p u(x) , \quad f_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^{p+2} \mathcal{N}_\kappa[u](x)$$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

Pour $u \in C_p^4(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible et $f = \mathcal{N}_\kappa[u] \in C_{p+2}^2(\mathbb{R}^n)$, on définit sur B_ρ les deux fonctions :

$$u_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^p u(x) , \quad f_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^{p+2} \mathcal{N}_\kappa[u](x)$$

En outre :

$$d\mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}](v)(X) = \frac{\sum \frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)(x) v_{ij}(X)}{\kappa \sigma_\kappa(\lambda(a_u(x)))}$$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

Pour $u \in C_p^4(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible et $f = \mathcal{N}_\kappa[u] \in C_{p+2}^2(\mathbb{R}^n)$, on définit sur B_ρ les deux fonctions :

$$u_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^p u(x) , \quad f_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^{p+2} \mathcal{N}_\kappa[u](x)$$

En outre :

$$d\mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}](v)(X) = \frac{\sum \frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)(x) v_{ij}(X)}{\kappa \sigma_\kappa(\lambda(a_u(x)))}$$

il existe des constantes C et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant seulement de n , λ et Λ telles que:

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* \leq C \{ \|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* + \|u_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* \}$$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

Pour $u \in C_p^4(\mathbb{R}^n)$ κ -admissible et $f = \mathcal{N}_\kappa[u] \in C_{p+2}^2(\mathbb{R}^n)$, on définit sur B_ρ les deux fonctions :

$$u_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^p u(x), \quad f_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^{p+2} \mathcal{N}_\kappa[u](x)$$

En outre :

$$d\mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}](v)(X) = \frac{\sum \frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)(x) v_{ij}(X)}{\kappa \sigma_\kappa(\lambda(a_u(x)))}$$

il existe des constantes C et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant seulement de n , λ et Λ telles que:

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* \leq C \{ \|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* + \|u_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* \}$$

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* = \|v\|_{C^2(B_\rho)}^* + \sup_{x,x' \in B_\rho} d_{x,x'}^{2+\alpha} \frac{|D^2 v(x) - D^2 v(x')|}{|x - x'|^\alpha}$$

avec $d_x = \text{dist}(x, \partial B_\rho)$, $d_{x,x'} = \min(d_x, d_{x'})$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

D'après l'inégalité d'interpolation, on obtient avec une autre constante uniforme C

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* \leq C\{\|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}.$$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

D'après l'inégalité d'interpolation, on obtient avec une autre constante uniforme C

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* \leq C\{\|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}.$$

Si Ω borné, $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\theta = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ et $\varrho = \frac{1}{2} \text{diam}\Omega$, alors pour toute fonction $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$

$$\min(1, \theta^{2+\alpha})\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq \|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}^* \text{ et } \|v\|_{C^2(\Omega)}^* \leq \max(1, 4\varrho^2)\|v\|_{C^2(\Omega)}$$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

D'après l'inégalité d'interpolation, on obtient avec une autre constante uniforme C

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* \leq C\{\|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}.$$

Si Ω borné, $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\theta = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ et $\varrho = \frac{1}{2} \text{diam}\Omega$, alors pour toute fonction $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$

$$\min(1, \theta^{2+\alpha})\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq \|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}^* \text{ et } \|v\|_{C^2(\Omega)}^* \leq \max(1, 4\varrho^2)\|v\|_{C^2(\Omega)}$$

donc on obtient ici avec $\Omega = B_\rho$ et $\Omega' = B_{\rho/2}$ et avec une autre constante uniforme C dépendant de ϱ mais pas de x_0 :

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_{\rho/2})} \leq C\{\|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}$$

Estimation $C_p^{2,\alpha}$

D'après l'inégalité d'interpolation, on obtient avec une autre constante uniforme C

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}^* \leq C \{ \|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)}^* + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)} \}.$$

Si Ω borné, $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\theta = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ et $\varrho = \frac{1}{2} \text{diam}\Omega$, alors pour toute fonction $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$

$$\min(1, \theta^{2+\alpha}) \|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq \|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}^* \text{ et } \|v\|_{C^2(\Omega)}^* \leq \max(1, 4\varrho^2) \|v\|_{C^2(\Omega)}$$

donc on obtient ici avec $\Omega = B_\rho$ et $\Omega' = B_{\rho/2}$ et avec une autre constante uniforme C dépendant de ϱ mais pas de x_0 :

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_{\rho/2})} \leq C \{ \|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)} \}$$

Prenant le $\text{Sup}_{x_0 \in \mathbb{R}^n}$, nous obtenons (encore avec un autre uniforme constante C)

$$\|u\|_{C_p^{2,\alpha}} \leq C \left\{ \|\mathcal{N}_\kappa[u]\|_{C_{\rho+2}^2} + \|u\|_{C_p^0} \right\}.$$

Equations hessiennes complexes

Les équations hessienne complexes dans tout \mathbb{C}^n :

$$m_\kappa[\lambda(\partial_{\bar{i}\bar{j}}f(z))] = [\psi(z, \bar{z})]^{\frac{1}{\kappa}} > 0 \quad (7)$$

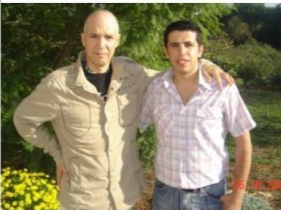
Merci



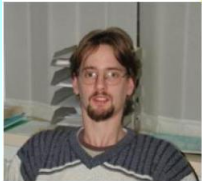
Merci



pour



votre



attention

