HAL
open science

Modélisation des inondations en milieu urbain : approches unidimensionnelle, bidimensionnelle et macroscopique

Julien Lhomme

▶ To cite this version:

Julien Lhomme. Modélisation des inondations en milieu urbain : approches unidimensionnelle, bidimensionnelle et macroscopique. Hydrologie. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2006. Français. NNT : . tel-00389236

HAL Id: tel-00389236
https://theses.hal.science/tel-00389236v1

Submitted on 28 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Montpellier II

Discipline : Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil
Ecole Doctorale : Terre Eau Espace
Formation Doctorale : Sciences de l'Eau dans l'Environnement Continental

présentée et soutenue publiquement par

Julien Lhomme

le 05/12/2006

Titre :

Modélisation des inondations en milieu urbain : approches unidimensionnelle, bidimensionnelle et macroscopique

Jury :

Bernard Chocat	INSA Lyon	Rapporteur
Philippe Fraunié	Université du Sud Toulon–Var	Rapporteur
Michel Desbordes	Université Montpellier II	Président
Sandra Soares-Frazão	Université Catholique de Louvain (B)	Examinateur
Philippe Gourbesville	Université Nice Sophia–Antipolis	Examinateur
Vincent Guinot	Université Montpellier II	Directeur de thèse

Avant-Propos

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire HydroSciences Montpellier (UMR 5569, IRD-CNRS-UM1-UM2).

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Vincent Guinot qui a dirigé cette thèse. Merci Vincent pour m'avoir guidé dans mon apprentissage de la modélisation hydrodynamique. Ta rigueur et ton exigence dans le travail m'ont poussé à avancer plus loin dans mes travaux.

Je remercie Bernard Chocat, professeur à l'INSA de Lyon, et Philippe Fraunié, professeur à l'Université du Sud Toulon-Var, pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.
Je remercie Philippe Gourbesville, professeur à l'Université de Nice Sophia-Antipolis, Sandra Soares-Frazão, chargée de recherche à l'Université Catholique de Louvain (Belgique) et Antoine Labrosse, directeur de la société DHI Eau & Environnement, pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie également Christophe Bouvier pour avoir encadré une partie de ce travail de thèse. Christophe, merci de m'avoir accompagné et conseillé depuis mon travail de DEA.

Un grand merci à Yves Zech et Sandra Soares-Frazão de l'Université Catholique de Louvain pour m'avoir permis de participer aux campagnes de mesures expérimentales à Louvain-la-Neuve. Merci Yves et Sandra pour cette expérience enrichissante. Merci également à tout le personnel du département de Génie Civil et Environnemental de l'UCL pour leur accueil chaleureux.

Je remercie vivement Michel Desbordes pour ses conseils avisés tout au long de cette thèse. Michel, si j'ai choisi de venir faire mon DEA à Montpellier, c'est assurément parce que mes stages en hydrologie urbaine m'avaient amené à découvrir vos travaux de recherche.

Cette thèse doit également beaucoup à la bonne ambiance de travail qui règne au sein du Laboratoire HydroSciences et plus globalement à la Maison des Sciences de l'Eau. Merci à tous ceux qui font vivre cette Maison. Merci en particulier à celles et ceux qui m'ont aidé ou dépanné au cours de cette thèse : Anne, Claudine, Pascal, Jean-Louis, Luc, Christian, Nadine, Nicole, Kristine, Marie-Claude, Eric et Nanée.
Merci à Marie-Georges, Christian, Vincent et François-Noël pour m'avoir accompagné au cours de mes interventions en tant que moniteur à Polytech'Montpellier.
Merci à tous les doctorants de la MSE pour leur amitié : Arthur, Guillaume, Fabiola, Kenza, Wilson, Paulina, Vincent, Christine, Marion, Marcos, Linda, Yin, Tahina, Matthias, Naomi, Tristan, ainsi que les "anciens" : Vincent, Marion, Catherine, Odile, Perrine.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien sans faille durant ce long parcours qui m'a mené jusqu'au doctorat.

Table des matières

Introduction générale **3**

I Les inondations pluviales en milieu urbain **5**

1 Description des phénomènes **7**
1.1 Le cycle urbain de l'eau 7
1.1.1 Circulation de l'eau dans le milieu urbain 7
1.1.2 Spécificités des bassins versants urbains 8
1.1.3 Vulnérabilité des zones urbaines 8
1.2 Description des crues en milieu urbain 9
1.2.1 Crues de faible importance 9
1.2.2 Crues de moyenne importance 9
1.2.3 Crues de forte importance 9

2 Revue bibliographique des différentes approches de modélisation **13**
2.1 La modélisation hydrologique/hydraulique 13
2.2 Modèles de production 15
2.3 Modèles de transfert globaux 15
2.3.1 Modèles globaux de type conceptuel 15
2.3.2 Modèles globaux de type boîte noire 16
2.4 Modèles de transfert filaires et sous-bassins 17
2.4.1 Modèles 1D conceptuels 17
2.4.2 Modèles 1D mécanistes 18
2.5 Modèles de transfert spatialisés 19
2.5.1 Modèles conceptuels distribués 20
2.5.2 Modèles 2D mécanistes 21
2.6 Modélisation à grande échelle 23
2.7 Modélisation des défluences 25
2.8 Avantages et inconvénients des différentes modélisations 29

II Modélisation unidimensionnelle d'un réseau de rues **31**

3 Couplage d'un modèle 1D simplifié et d'un modèle conceptuel de répartition des débits aux carrefours **35**
3.1 Présentation du modèle conceptuel de Chocat 36
3.1.1 Calcul du coefficient C_1 36
3.1.2 Calcul du coefficient C_2 37
3.1.3 Calcul du coefficient C_3 38

3.2 Extension du modèle conceptuel de Chocat à des carrefours à quatre branches . . . 38
3.2.1 Calcul des caractéristiques de la branche amont équivalente . . . 38
3.2.2 Calcul du coefficient de répartition . . . 41
3.3 Couplage avec un modèle 1D . . . 42
3.3.1 Propagation dans les mailles tronçon . . . 42
3.3.2 Traitement des mailles carrefour . . . 45
3.4 Mise en œuvre de la modélisation 1D sur un site réel . . . 45
3.4.1 Description du site et problématique . . . 45
3.4.2 Préparation de la topologie de la zone d'étude . . . 47
3.4.3 Résultat de la simulation . . . 50
3.4.4 Comparaison avec un modèle 2D . . . 51
3.5 Conclusions . . . 55

4 Développement d'une relation empirique de répartition des débits pour un carrefour à 4 branches 57
4.1 Principe . . . 57
4.2 Expression polynomiale de la relation de répartition . . . 58
4.2.1 Description du problème . . . 58
4.2.2 Construction des paramètres adimensionnés . . . 59
4.2.3 Écriture du polynôme . . . 60
4.3 Estimation des coefficients du polynôme . . . 62
4.3.1 Méthode de calcul des dérivées . . . 62
4.3.2 Choix des configurations de carrefours . . . 63
4.3.3 Simulations numériques . . . 65
4.3.4 Expression finale du polynôme . . . 66
4.4 Validation et étude de sensibilité . . . 66
4.4.1 Validation avec d'autres résultats numériques . . . 66
4.4.2 Validation expérimentale . . . 68
4.4.3 Sensibilité à la géométrie . . . 71
4.4.4 Utilisation en régime transitoire . . . 72
4.5 Comparaison avec le modèle de répartition conceptuel . . . 74
4.6 Conclusions . . . 75

5 Conclusions sur la modélisation 1D avec modèle simplifié de carrefour 79

III Modélisation macroscopique des zones urbaines 81

6 Les équations de propagation avec porosité 85
6.1 Établissement des équations de propagation avec porosité . . . 85
6.1.1 Définition des différents termes de porosité . . . 86
6.1.2 Équation de conservation de la masse . . . 87
6.1.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x . . . 88
6.1.4 Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction y . . . 89
6.1.5 Les forces extérieures . . . 90
6.2 Le système des équations de propagation . . . 94
6.2.1 Forme intégrale . . . 94
6.2.2 Forme différentielle . . . 95
6.3 Structure de la solution analytique . . . 96

6.3.1 La théorie des bicaractéristiques 97
6.3.2 La première famille de surfaces caractéristiques 100
6.3.3 La deuxième famille de surfaces caractéristiques 102
6.4 Le cas particulier de la porosité unique 102
6.4.1 Simplification du système d'équations 102
6.4.2 Calcul de la porosité de passage dans la direction normale à l'interface 103
6.5 Conclusions 104

7 Développement d'un modèle de perte de charge macroscopique 107
7.1 Formulation des pertes de charge au sein d'un réseau de rues 107
7.1.1 Carrefours et pertes de charge singulières 107
7.1.2 Traitement du terme source de perte de charge 108
7.2 Développement d'une relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 110
7.2.1 Présentation de la méthode utilisée 110
7.2.2 Paramètres géométriques et analyse dimensionnelle 110
7.2.3 Formulation polynomiale 111
7.2.4 Détermination des coefficients du polynôme 113
7.2.5 Méthodologie 114
7.2.6 Mise en œuvre de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 117
7.3 Validation numérique de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 117
7.3.1 Simplification de la relation 117
7.3.2 Validation numérique 121
7.3.3 Étude de sensibilité de la modélisation macroscopique aux valeurs du tenseur de perte de charge 125
7.4 Conclusions 128

IV Validation de la modélisation macroscopique sur modèles réduits 129

8 Validation expérimentale avec le modèle réduit de l'UCL 133
8.1 La campagne de mesures expérimentales 134
8.1.1 Le dispositif expérimental de l'UCL 134
8.1.2 Configurations d'écoulements et configurations de la zone urbaine 134
8.1.3 Le matériel de mesure 136
8.2 Méthodologie et objectifs de la validation 138
8.3 Écoulement permanent – configuration "ville en quinconce" 138
8.3.1 Influence de la densité du maillage 139
8.3.2 Apport du terme de perte de charge 139
8.3.3 Modification du coefficient de rugosité pour représenter la zone urbaine 142
8.3.4 Comparaison des vitesses expérimentales et numériques : l'imagerie digitale 144
8.3.5 Comparaison des vitesses expérimentales et numériques : le vélocimètre Doppler 144
8.3.6 Comparaison des champs de vitesse simulés 148
8.4 Écoulement transitoire – configuration "ville en quinconce" 154
8.4.1 Comparaison des profondeurs expérimentales et simulées 154

8.4.2 Comparaison des simulations CR, PC, CRC et PRC. 156
8.4.3 Comparaison des champs de vitesse expérimentaux et numériques. 159
8.4.4 Comparaison du régime permanent et du régime transitoire . . . 161
8.5 Écoulement transitoire – configuration "ville droite" 164
8.5.1 Profils en long de surface libre 164
8.5.2 Champs de vitesse 166
8.6 Comparaison des différentes configurations de la zone urbaine 166
8.7 Utilisation de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 168
8.8 Conclusions 171

9 Validation sur le modèle réduit de la plaine du Toce 173
9.1 Description du dispositif expérimental 173
9.2 Présentation des simulations numériques 175
9.3 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques 176
9.3.1 Configuration alignée 176
9.3.2 Configuration en quinconce 176
9.4 Conclusions 177

V Développement de techniques numériques pour les écoulements à surface libre 181

10 Un solveur de Riemann approché pour les équations de propagation classiques 185
10.1 Introduction 185
10.2 Principe du solveur 187
10.2.1 Forme caractéristique 187
10.2.2 Intégration le long des caractéristiques 188
10.2.3 Estimation du terme source intégré 189
10.3 Calcul des flux à l'interface 190
10.3.1 Résolution du système 190
10.3.2 Équation de continuité 190
10.3.3 Equation de quantité de mouvement 191
10.3.4 Implantation du solveur 193
10.3.5 Comparaison avec le solveur HLL 194
10.4 Tests numériques 195
10.4.1 Rupture de barrage sur fond horizontal 195
10.4.2 Ressaut hydraulique à l'aval d'un changement de pente 197
10.4.3 Bosse sur le fond d'un canal horizontal 198
10.5 Conclusions 199

11 Un solveur de Riemann approché pour les équations de propagation avec porosité 203
11.1 Principe du solveur 203
11.1.1 Forme caractéristique 204
11.1.2 Intégration le long des caractéristiques 204
11.1.3 Estimation du terme source intégré 205
11.2 Calcul des flux à l'interface 205
11.2.1 Résolution du système 205
11.2.2 Équation de continuité 206
11.2.3 Équation de quantité de mouvement 207

Conclusion générale **213**

Bibliographie **216**

VI Annexes **225**

A Schémas numériques de type Godunov **227**
A.1 Discrétisation en volumes finis . . . 228
A.2 Présentation de l'algorithme type . . . 229
A.3 Propriétés des équations de conservation scalaires . . . 230
A.3.1 La forme caractéristique. . . . 230
A.3.2 Construction de la solution avec la forme caractéristique. . . . 231
A.3.3 Choc, onde de raréfaction et discontinuité de contact. . . . 231
A.3.4 Méthode de l'égalité des aires pour les solutions discontinues. . . 232
A.3.5 Relation de saut au travers d'une discontinuité. . . . 233
A.4 Propriétés des systèmes hyperboliques de conservation . . . 233
A.4.1 Forme caractéristique . . . 234
A.4.2 Invariants de Riemann . . . 235
A.5 Le problème de Riemann . . . 236
A.5.1 Les différents types de problèmes de Riemann . . . 236
A.5.2 Résolution du problème de Riemann pour une équation scalaire . 237
A.5.3 Résolution du problème de Riemann pour les équations de propagation en eau peu profonde avec porosité . . . 239
A.5.4 Solveurs exacts et solveurs approchés . . . 244
A.5.5 Solveurs de Riemann et termes source . . . 245
A.6 Le solveur de Riemann HLL/HLLC . . . 245
A.6.1 Le solveur HLL . . . 245
A.6.2 Le solveur HLLC . . . 246
A.6.3 Estimation des célérités d'onde . . . 248
A.7 Utilisation des flux du solveur HLLC . . . 249
A.7.1 Équation de continuité . . . 249
A.7.2 Bilan de quantité de mouvement . . . 250
A.8 Traitement du terme source de frottement . . . 252
A.9 Conditions de stabilité et conditions aux limites . . . 253
A.9.1 Conditions de stabilité . . . 253
A.9.2 Conditions aux limites . . . 254

B Graphiques du Chapitre 8 **257**
B.1 Graphiques du §8.3.5 . . . 257
B.2 Graphiques du §8.4.1 . . . 262
B.3 Graphiques du §8.4.2 . . . 276
B.4 Graphiques du §8.4.3 . . . 278
B.5 Graphiques du §8.4.3 (2) . . . 282
B.6 Graphiques du §8.4.4 . . . 285
B.7 Graphiques du §8.5.1 . . . 287

Introduction générale

Introduction générale

Devant la recrudescence de violentes inondations ayant frappé des agglomérations depuis une vingtaine d'années (Nîmes en 1988, Vaison la Romaine en 1992, le département de l'Aude en 1999, le département du Gard en 2002), la problématique des inondations pluviales en milieu urbain a pris une place de plus en plus importante dans l'esprit des techniciens, des élus et des citadins.
La Partie I présente la problématique des inondations en milieu urbain. Ces inondations sont dues d'une part à l'apparition de phénomènes exceptionnels, d'autre part à une urbanisation irraisonnée. Le Chapitre 1 présente les spécificités du cycle de l'eau en milieu urbain. Les caractéristiques et la vulnérabilité des bassins versants urbains sont rappelées. Les différents phénomènes qui se produisent en période de crue sont décrits.

La modélisation numérique constitue un outil pour l'étude des inondations et la réduction de leurs effets. Les différentes approches de modélisation permettant de répondre aux besoins d'expertises en milieu urbain sont présentées au Chapitre 2. Les deux grandes familles d'approche utilisées à l'heure actuelle pour modéliser les inondations en milieu urbain sont l'approche unidimensionnelle (1D) et l'approche bidimensionnelle (2D). Bien que fournissant à priori une représentation plus réaliste des phénomènes, la modélisation 2D classique reste à l'heure actuelle difficilement utilisable en pratique lorsque les secteurs étudiés occupent une grande superficie. En effet, la variabilité de la géométrie urbaine implique un raffinement de maillage et des temps de calcul prohibitifs, ainsi que des besoins en données considérables. Cette thèse de doctorat a pour objet l'étude de formulations alternatives à la modélisation 2D classique.

La Partie II est consacrée au premier axe de travail, la modélisation unidimensionnelle et les modèles de répartition des débits aux carrefours. Dans un premier temps, une relation de répartition conceptuelle conçue pour des bifurcations de conduites a été adaptée à des carrefours à trois ou quatre branches (cf. Chapitre 3). Ce modèle de répartition a été couplé avec un modèle de propagation 1D et l'ensemble a été mis en œuvre sur le quartier Richelieu de Nîmes. La comparaison avec une modélisation 2D mise en œuvre par le Cemagref Lyon fait apparaître certaines différences.
Dans un deuxième temps, une relation de répartition empirique pour un carrefour à quatre branches a été développée en utilisant les résultats d'un grand nombre de simulations bidimensionnelles d'un carrefour isolé (cf. Chapitre 4). Une validation partielle a été réalisée en utilisant des mesures expérimentales fournies par l'INSA Lyon. Le Chapitre 5 dresse le bilan du travail effectué sur cette approche.

La Partie III est consacrée à la présentation du deuxième axe de travail, la modélisation 2D macroscopique. Cette approche consiste à décrire la zone urbaine par des propriétés géométriques statistiques, sans rechercher une description détaillée de l'écoulement. Des zones urbaines de grande étendue peuvent ainsi être décrites par un maillage relativement grossier, sur lequel le calcul est très rapide. Les résultats de

simulation peuvent être repris comme conditions aux limites de modèles plus fins où l'approche 2D classique est utilisée.
La modélisation macroscopique comporte deux spécificités : (i) l'introduction d'une porosité pour représenter la réduction de la section disponible pour l'écoulement et de la surface au sol disponible pour le stockage, (i) un terme spécifique de perte de charge singulière qui rend compte des pertes de charge dues aux changements de régimes et aux réflexions d'ondes induits par la géométrie urbaine. Le Chapitre 6 détaille le raisonnement permettant d'établir les équations de propagation avec porosité à partir de bilans de masse et de quantité de mouvement sur un volume de contrôle. Le terme de pertes de charge singulières peut être relié aux caractéristiques géométriques du réseau de rues, ceci fait l'objet du Chapitre 7.

Dans la Partie IV, la modélisation macroscopique est validée sur des cas-tests expérimentaux faisant appel à des modèles réduits et donne des résultats satisfaisants. Des mesures de profondeurs et de vitesses de surface ont été réalisées sur le modèle réduit de zone urbaine de l'UCL et comparées aux résultats des simulations numériques (cf. Chapitre 8). Les profondeurs et vitesses simulées par la modélisation 2D classique sont très proches des valeurs mesurées. L'approche macroscopique reproduit les grandes tendances de l'écoulement à l'intérieur de la zone urbaine avec des temps de calcul beaucoup plus courts. Une étude similaire réalisée sur le modèle réduit de la plaine du Toce est présentée au Chapitre 9.

La Partie V est consacrée à la présentation du travail effectué sur le développement de techniques numériques pour la résolution des équations de propagation avec termes source. Un solveur de Riemann d'état approché a été développé pour les équations bidimensionnelles classiques (cf. Chapitre 10). Il utilise l'hypothèse d'une structure de la solution à deux ondes de raréfaction et exprime les invariants de Riemann en fonction des flux. Le flux à l'interface est calculé directement, en tenant compte des termes source. Les résultats de simulations montrent une nette amélioration par rapport à un solveur classique. Le Chapitre 11 présente un solveur de Riemann utilisant la même approche pour les équations de propagation avec porosité.

Première partie

Les inondations pluviales en milieu urbain

Chapitre 1

Description des phénomènes

Sommaire

1.1 Le cycle urbain de l'eau **7**
1.1.1 Circulation de l'eau dans le milieu urbain 7
1.1.2 Spécificités des bassins versants urbains 8
1.1.3 Vulnérabilité des zones urbaines 8
1.2 Description des crues en milieu urbain **9**
1.2.1 Crues de faible importance 9
1.2.2 Crues de moyenne importance 9
1.2.3 Crues de forte importance 9

1.1 Le cycle urbain de l'eau

1.1.1 Circulation de l'eau dans le milieu urbain

L'urbanisation de l'espace par l'homme a complètement modifié le cycle de l'eau. Le cheminement de l'eau à partir de la précipitation peut être décrit schématiquement de la façon suivante (Figure 1.1) :

- l'eau précipitée tombe sur une surface imperméabilisée (toiture, trottoir,parking, etc.) ou non (espace vert, revêtement poreux, etc.),
- le ruissellement se forme, et l'eau rejoint le caniveau, de façon directe ou en passant par une gouttière,
- l'écoulement dans le caniveau rencontre un avaloir et l'eau descend dans un regard d'accès au réseau d'assainissement (unitaire ou pluvial),
- l'eau s'écoule dans une conduite, l'écoulement peut être à surface libre ou en charge,
- suivant les agglomérations, l'eau pluviale peut être stockée dans un bassin de retenue, et/ou acheminée vers une station d'épuration,
- finalement l'eau est rejetée dans le milieu naturel.

Le réseau d'assainissement (ou réseau de drainage) et le réseau de voirie constituent donc les principaux éléments du réseau hydrographique en milieu urbain.

En plus des processus décrits précédemment, trois phénomènes supplémentaires peuvent se produire en période de crue :

- une arrivée d'eau provenant de bassins situés en amont de la zone urbaine,

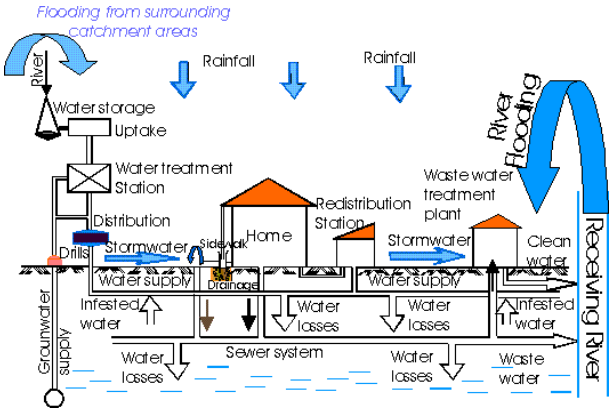


Figure 1.1 – Schéma du cycle urbain de l'eau. D'après VICAIRE (Virtual campus in hydrology and water ressources) http ://hydram.epfl.ch/VICAIRE

- le débordement d'un cours d'eau urbain,
- un blocage de l'eau au niveau de l'exutoire du réseau d'assainissement à cause du niveau d'eau trop élevé dans le milieu récepteur (cours d'eau ou mer).

1.1.2 Spécificités des bassins versants urbains

La chaleur dégagée par les zones urbaines peut déstabiliser des masses d'air humides et favoriser l'apparition d'orages (Chocat, 1997). De plus, les poussières urbaines émises par les activités humaines peuvent constituer des noyaux de condensation favorisant la formation de précipitations.

Les bassins versants urbains sont caractérisés par une forte proportion de surfaces imperméabilisées. L'infiltration de la lame d'eau précipitée est quasi-nulle sur les surfaces imperméables. Les volumes ruisselés sont donc beaucoup plus importants que dans un bassin versant naturel de mêmes caractéristiques géométriques. De plus, les systèmes de drainage des eaux pluviales ont longtemps été construits dans le but de transférer le plus vite possible l'eau à l'extérieur de la zone urbaine. Les vitesses d'écoulement de l'eau en milieu urbain sont donc beaucoup plus grandes que dans les bassins versants naturels. Ceci contribue à la formation de débits très importants dans la partie aval du réseau de drainage souterrain.

En outre, par leur petite taille et leurs temps de réponse courts les bassins versants urbains sont beaucoup plus sensibles aux pluies courtes et intenses que les bassins versants naturels.

1.1.3 Vulnérabilité des zones urbaines

Les éléments présentés au paragraphe précédent montrent que l'aléa est assez important dans les zones urbaines, principalement à cause des aménagements anthropiques, parfois également à cause de la topographie naturelle. Ainsi, les villes de Nîmes et Barcelone par exemple sont entourées de collines qui forment un bassin versant en forme d'amphithéâtre où les écoulements sont concentrés vers la ville située au centre de cet amphithéâtre.

D'autre part, les zones urbaines concentrent des populations importantes et des centres d'activités économiques. Beaucoup d'aménagements urbains ont été réalisés

sans se préoccuper de l'aléa inondation (serveurs informatiques dans des sous-sols, casernes de pompiers dans des zones inondables, absence de protection des entrées de parkings souterrains ou des accès aux stations de métro). Avec le développement de l'assainissement, des pratiques d'endiguement et de recalibration, les habitants des villes ont considéré que l'eau était parfaitement maîtrisée en milieu urbain. De plus, la mémoire collective est beaucoup moins forte en milieu urbain qu'en milieu rural (contacts moins importants entre habitants, changements de domicile plus fréquents) et les crues sont vite oubliées (Cogez *et al.*, 1994). La vulnérabilité des zones urbaines est donc importante.

Le risque étant défini par la conjonction d'un aléa et d'une vulnérabilité, le risque inondation est élevé dans les zones urbaines.

1.2 Description des crues en milieu urbain

1.2.1 Crues de faible importance

Le ruissellement produit sur les surfaces imperméabilisées est entièrement dirigé vers le réseau de drainage. L'écoulement dans le réseau d'assainissement se fait à surface libre si le débit capable du réseau n'est pas dépassé, ou en charge sans que la ligne de charge ne dépasse la cote du sol. L'essentiel des volumes ruisselés sont invisibles pour les citadins. Les nuisances causées aux habitants sont très faibles.

1.2.2 Crues de moyenne importance

Les débits générés par le ruissellement sont très proches du débit capable des conduites. Des mises en charge locales du réseau avec débordements en surface se produisent. De plus, l'écoulement dans le caniveau peut amasser au niveau des avaloirs des déchets (d'origine humaine ou naturelle) et ainsi réduire la capacité d'absorption de ces avaloirs. L'eau s'accumule au niveau des points bas. L'eau n'est plus maintenue dans le réseau de drainage mais les nuisances sont modérées (circulation ralentie ou détournée). Les dégâts matériels sont limités (inondations de caves ou de jardins).

1.2.3 Crues de forte importance

Les débits générés par le ruissellement s'ajoutent éventuellement aux débits provenant de bassins péri-urbains. Le rejet de l'eau dans le milieu naturel peut être perturbé et bloquer le fonctionnement du réseau de drainage. La capacité du réseau de drainage est dépassée par les débits produits ou collectés par la zone urbaine. Les écoulements s'installent souvent à l'emplacement d'anciens cours d'eau recouverts ou détournés (Guiton, 1994). Les points de débordement du réseau sont nombreux, les volumes débordés sont importants et un écoulement s'installe dans le réseau de voirie (Figure 1.2). La combinaison de vitesses élevées et de profondeurs importantes met en danger l'intégrité physique des personnes. La circulation des véhicules est entièrement bloquée, ceux-ci peuvent même être emportés par l'écoulement et former des embâcles (comme à Nîmes en octobre 1988, Figure 1.3). Les dégâts causés aux infrastructures sont considérables : détérioration des chaussées et du sous-sol urbain (Figure 1.4), dégâts sur les façades des bâtiments et sur les réseaux de façade (réseaux électriques ou de gaz), destructions causées par les objets entraînés par l'écoulement (voitures, plaques de bitume, mobilier urbain).

L'étude des crues peut se faire selon plusieurs approches : étude géomorphologique, étude expérimentale sur modèles réduits, collecte d'informations historiques ou modé-

lisation numérique. La modélisation numérique s'est beaucoup développée à partir de la fin des années 1970 avec le développement de l'informatique. Il s'agit de l'approche utilisée pour ce travail de doctorat. Le Chapitre 2 est consacré à la présentation de la modélisation numérique en hydrologie et en hydraulique, puis à la description des principales approches de modélisation des écoulements.

Figure 1.2 – Écoulements dans l'avenue Pompidou, crue du 3 octobre 1988 à Nîmes. D'après Desbordes *et al.* (1989).

Figure 1.3 – Voitures emportées par l'écoulement, crue du 3 octobre 1988 à Nîmes. D'après Desbordes *et al.* (1989).

Figure 1.4 – Dégâts sur la chaussée et les réseaux souterrains, crue du 3 octobre 1988 à Nîmes. D'après Desbordes *et al.* (1989).

Chapitre 2

Revue bibliographique des différentes approches de modélisation

Sommaire

2.1 La modélisation hydrologique/hydraulique 13
2.2 Modèles de production 15
2.3 Modèles de transfert globaux 15
2.3.1 Modèles globaux de type conceptuel 15
2.3.2 Modèles globaux de type boîte noire 16
2.4 Modèles de transfert filaires et sous-bassins 17
2.4.1 Modèles 1D conceptuels 17
2.4.2 Modèles 1D mécanistes 18
2.5 Modèles de transfert spatialisés 19
2.5.1 Modèles conceptuels distribués 20
2.5.2 Modèles 2D mécanistes 21
2.6 Modélisation à grande échelle 23
2.7 Modélisation des défluences 25
2.8 Avantages et inconvénients des différentes modélisations 29

2.1 La modélisation hydrologique/hydraulique

On peut distinguer quatre types d'utilisation de la modélisation hydrologique/hydraulique (Gaume, 2005) :

- la modélisation pour mieux comprendre : la modélisation permet de tester des scénarios de fonctionnement d'un bassin versant et de les confronter à des données mesurées ;
- la modélisation pour prévoir : à partir des données (ou des prévisions) de pluie, la modélisation permet d'estimer le débit d'un cours d'eau, avec des horizons de prévisions variables suivant le type de cours d'eau (de 30 mn à plusieurs jours) ;
- la modélisation pour extrapoler : l'impact de pluies ou de crues de grande période de retour peut être simulé, même si ce type d'événement n'a jamais été observé ;

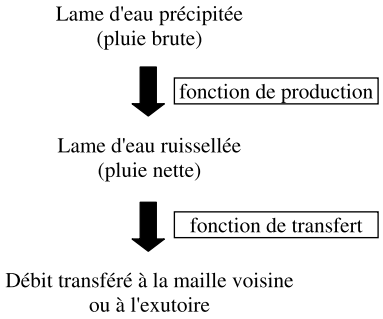


Figure 2.1 – Représentation simplifiée des processus modélisés en hydrologie de surface.

– la modélisation pour aménager : la modélisation permet de simuler la mise en place d'aménagements hydrauliques pour optimiser leur fonctionnement.

La modélisation du ruissellement et des écoulements (en milieu urbain ou en milieu naturel) est généralement réalisée en distinguant (i) la formation de la lame de pluie nette à partir de la lame de pluie brute (en prenant en compte les phénomènes d'infiltration, d'évapotranspiration, d'interception), et (ii) l'écoulement de cette lame de pluie nette (sous forme de ruissellement ou d'écoulement concentré) (Figure 2.1).

Remarque 1 : Dans la mesure où ce travail de doctorat s'est surtout intéressé au déplacement de l'eau dans une zone urbanisée, la présentation des modèles de production est réduite au strict minimum.

Remarque 2 : On utilise dans la suite un classement des modèles en deux catégories : conceptuels ou mécanistes. Cette séparation provient d'habitudes établies dans le domaine de l'hydrologie. D'autres classifications des modèles peuvent être faites (modèles déterministes ou stochastiques par exemple).

Les modèles mécanistes utilisent les équations de la physique comme point de départ pour décrire les phénomènes hydrologiques et hydrauliques d'un point de vue microscopique. Tous les paramètres intervenant dans ces modèles ont une signification physique.

Les modèles conceptuels utilisent des relations mathématiques pour représenter le comportement d'un élément hydrologique/hydraulique dans sa globalité, sans s'attacher à décrire les phénomènes microscopiques. Ils utilisent des paramètres qui n'ont pas toujours de signification physique.

Cependant, même les modèles mécanistes font intervenir un certain nombre d'hypothèses (la répartition hydrostatique des pressions dans les équations de Saint–Venant par exemple). Ainsi, certains modèles mécanistes "dégradés" (les modèles quasi–2D à casiers par exemple) sont tellement simplifiés qu'ils se rapprochent des modèles conceptuels, si bien que la limite est parfois floue entre ces deux catégories.

Dans un premier temps, on présente de façon très succincte les différents modèles de production utilisés en hydrologie urbaine (§2.2). On s'intéresse ensuite aux différentes modélisations du transfert de l'eau dans le bassin versant urbain. Les modèles sont présentés selon une complexité de représentation spatiale croissante : les modèles globaux (§2.3), puis les modèles filaires (§2.4), et enfin les modèles spatialisés (§2.5). Pour terminer, la section 2.6 présente différentes approches de modélisation à grande échelle et la section 2.7 est consacrée à la description de plusieurs approches utilisées pour la modélisation des défluences.

2.2 Modèles de production

En milieu urbain, du fait de la prépondérance des surfaces imperméabilisées, les fonctions de production utilisées sont généralement très simples (par rapport à celles utilisées en milieu naturel). La fonction de production différencie en général deux composantes dans les pertes au ruissellement, (i) les pertes initiales, (ii) les pertes continues (Desbordes, 1987; Chocat, 1997). Les pertes initiales représentent la lame d'eau nécessaire pour enclencher le processus de ruissellement (mouillage des surfaces, stockage dans les dépressions du sol). Les pertes initiales sont généralement prises constantes, elles sont satisfaites au début de l'événement. Les pertes continues représentent la fraction de la lame d'eau retenue sur place (infiltration dans le sol) au cours de l'événement. Elles peuvent être constantes ou fonction de l'intensité de pluie (coefficient de ruissellement). Pour l'étude des crues extrêmes causées par des précipitations intenses, la fonction de production se limite souvent à un simple coefficient de ruissellement car le volume d'eau concerné par les pertes initiales est négligeable par rapport au volume d'eau total.

Dans le cas d'une fonction de production avec pertes initiales et pertes continues par coefficient de ruissellement, le calcul de la lame nette se fait selon le processus suivant :

- tant que le cumul de pluie brute ne dépasse pas la valeur des pertes initiales, la lame de pluie nette est nulle,
- ensuite, la lame de pluie nette est égale à la lame de pluie brute multipliée par le coefficient de ruissellement.

En milieu urbain, le coefficient de ruissellement est souvent pris égal au coefficient d'imperméabilisation de la zone concernée (rapport des surfaces imperméabilisées sur la surface totale).

Les crues urbaines sont généralement de durée assez courte, et les pertes par évaporation sont négligées puisque d'une part les volumes concernés sont très faibles à l'échelle de temps considérée et d'autre part l'évaporation est quasi-nulle durant l'événement pluvieux. Les pertes par interception dues à la végétation sont également négligées compte tenu de la faible présence de la végétation en milieu urbain.

Il peut être nécessaire d'utiliser des fonctions de production plus complexes dans le cas de certaines villes entourées de bassins versants naturels drainés vers la ville (Nîmes par exemple). Le volume ruisselé provenant des bassins versants péri-urbains peut alors être plus important que le volume ruisselé produit dans la zone urbaine.
Les principales fonctions de production utilisées en milieu naturel sont le modèle SCS, le modèle de Horton, le modèle de Green et Ampt, TOPMODEL. On trouve dans Maidment (1993) et Ambroise (1998) une description détaillée de ces différentes fonctions de production.

Certaines modélisations hydrologiques en milieu urbain s'intéressent aux variations des débits dans le réseau d'assainissement à une échelle de temps de l'ordre du mois ou de l'année. Il est alors nécessaire de prendre en compte des phénomènes comme l'évapotranspiration, le ruissellement sur les surfaces naturelles, l'infiltration de l'eau du sol dans les réseaux d'assainissement à l'échelle de la parcelle (Morena, 2004).

2.3 Modèles de transfert globaux

2.3.1 Modèles globaux de type conceptuel

Chocat (1997) décrit de manière détaillée les modèles présentés dans cette section. Ces modèles sont les plus anciens parmi les modèles existants. On décrit l'évolution

du débit à l'exutoire du bassin versant considéré sans pouvoir calculer le débit dans le réseau hydrographique (naturel ou artificiel) du bassin versant. Ils restent néanmoins utiles dans certaines situations (absence de données précises sur le bassin versant, absence de moyens de calcul informatiques).

Les premiers modèles globaux ne calculaient que le débit de pointe obtenu à l'exutoire du bassin versant. La méthode rationnelle, introduite dans les années 1850 par Mulvaney (1851), est la plus ancienne méthode connue. Cette méthode permet d'estimer le débit de pointe d'un bassin versant en utilisant notamment le concept de temps de réponse d'un bassin. En France, la méthode de Caquot (1941), dérivée de la méthode rationnelle, sera préconisée par le Ministère de la reconstruction et de l'urbanisme à travers la Circulaire Générale 1333.

Le modèle de l'hydrogramme unitaire proposé par Sherman (1932) permet de calculer l'hydrogramme généré par une pluie donnée. Connaissant la réponse du bassin versant à une pluie élémentaire de durée très courte, on peut calculer le débit à l'exutoire pour une pluie quelconque en décomposant cette pluie en une somme de pluies élémentaires avec l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire. Il est nécessaire de disposer d'observations de pluie et de débit pour pouvoir utiliser cette méthode.

Le modèle du réservoir linéaire fait partie de la théorie générale de l'hydrogramme unitaire (Nash, 1957; Dooge, 1959). Il s'agit d'une des fonctions de transfert les plus utilisées en hydrologie urbaine. Le débit à l'exutoire du bassin versant est calculé comme le débit en sortie d'un réservoir dont le volume stocké est proportionnel au débit sortant.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} &= Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) &= K\,Q_s(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

où Q_e ($\mathrm{m^3s^{-1}}$) et Q_s ($\mathrm{m^3s^{-1}}$) sont respectivement le débit d'entrée (débit de pluie nette) et le débit de sortie, V_s ($\mathrm{m^3}$) est le volume stocké et K (s) est le temps de réponse du bassin. Le modèle du réservoir linéaire se comporte globalement comme un filtre passe-bas. Si le débit d'entrée est discrétisé avec un pas de temps Δt, on obtient une relation de récurrence simple d'emploi

$$Q_s(n) = e^{-\frac{\Delta t}{K}} Q_s(n-1) + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{K}}\right) Q_e(n) \tag{2.2}$$

En milieu urbain, le coefficient K peut être estimé par la formule suivante (Desbordes, 1974)

$$K = 5{,}07\, A^{0{,}18}\,(1 + C_{\mathrm{imp}})^{-1{,}9}\, L^{0{,}15}\, p^{-0{,}36}\, T_p^{0{,}21}\, H_p^{-0{,}07} \tag{2.3}$$

où A (ha) est la surface du bassin versant, C_{imp} est le coefficient d'imperméabilisation du bassin, L (m) est la longueur du plus long parcours dans le bassin, p (m/m) est la pente du plus long parcours, T_p (mn) est la durée de la pluie critique du bassin, H_p (mm) est la hauteur de pluie pendant cette période.
Divers modèles de transfert ont été construits à partir du modèle du réservoir linéaire : association de plusieurs réservoirs en cascade, réservoir non linéaire.

2.3.2 Modèles globaux de type boîte noire

Devant la complexité des phénomènes impliqués lors de l'établissement et la propagation du ruissellement, puis la formation des débits, une autre approche consiste à utiliser des fonctions prédéterminées pour relier les précipitations aux écoulements, sans analyse des phénomènes. Les modèles de type boîte noire sont souvent utilisés en

hydrologie. Parmi cette catégorie, les réseaux de neurones sont très répandus (Kim et Barros, 2001; Pereira Filho et Dos Santos, 2006). Un réseau de neurones consiste en un certain nombre d'opérateurs (les neurones), organisés en couches, et reliés entre-eux de manière plus ou moins complexe. Chaque neurone est défini par une relation de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left(b + \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i\right) \tag{2.4}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les variables d'entrée, b est le biais du neurone et Φ est la fonction d'activation du neurone. La fonction d'activation peut être de type linéaire, à palier ou sigmoïde (de type $\Phi(x) = (1 + \exp(cx))^{-1}$ avec c une constante). Ces modèle ne peuvent être utilisés qu'après un processus de calage, ils ne peuvent pas être utilisés pour évaluer l'impact de projets d'aménagements.

2.4 Modèles de transfert filaires et sous-bassins

Les modèles de transfert filaires utilisés avec des sous-bassins opèrent une distinction entre ruissellement de surface et écoulement concentré. Au lieu de représenter l'ensemble du bassin versant avec une seule unité hydrologique comme le font les modèles globaux, un bassin versant est découpé en sous-bassins sur lesquels on peut appliquer les méthodes du §2.3. Les débits produits par ces sous-bassins sont injectés dans un modèle filaire (ou unidimensionnel) qui représente uniquement le transfert de l'eau dans le réseau hydrographique (naturel ou artificiel). Par ce découpage, il est alors possible de connaître le débit à l'intérieur du bassin versant étudié.

2.4.1 Modèles 1D conceptuels

Le modèle de Muskingum représente le décalage temporel et l'amortissement du débit à la sortie d'un bief par rapport au débit d'entrée. Il a été introduit à la fin des années 1930. Comme le modèle du réservoir linéaire, il associe une équation de continuité et une équation de stockage

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} &= Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) &= K\Big(\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t)\Big) \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

où K (s) et α sont les deux paramètres du modèle. On peut obtenir une relation de récurrence si le débit d'entrée est discrétisé. Différentes méthodes d'estimation des paramètres K et α existent.

Un modèle de stockage développé à l'INSA Lyon permet de représenter le transfert de l'eau dans un réseau d'assainissement avec prise en compte des influences aval (Motiee *et al.*, 1996). Il repose sur deux équations proches de celles du modèle de Muskingum

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} &= Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) &= \left[\alpha A_{\mathrm{am}}(t) + (1-\alpha) A_{\mathrm{av}}(t)\right] \Delta x \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

où A_{am} et A_{av} (m^2) sont les sections mouillées respectivement à la limite amont et à la limite aval du bief concerné. Ce modèle nécessite un calcul itératif pour estimer S_{av}

dans un bief avec influence aval. Les résultats obtenus sont satisfaisants avec un temps de calcul très inférieur à celui d'une modélisation mécaniste (cf. §2.4.2).

Des modèles hydrologiques de type translation–stockage (*lag and route*) permettent de représenter de façon simplifiée les transformations du signal d'entrée (Q_e) au travers d'un bief. Diskin (1994) propose la relation suivante

$$Q_s(t) = m\,Q_e\Big(m(t-t_0)\Big) \tag{2.7}$$

où m est un paramètre adimensionnel tel que $0 < m < 1$ et t_0 (s) est paramètre de décalage temporel positif.

Bentura et Michel (1997) utilisent un modèle à réservoir quadratique pour représenter le transfert de l'eau dans un canal. Les deux équations du modèle sont

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} &= Q_e(t) - Q_s(t) \\ Q_s(t) &= \Big(V_s(t)/K\Big)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Les auteurs ont relié la valeur du paramètre K ($\mathrm{m}^{3/2}\mathrm{s}^{1/2}$) aux caractéristiques du canal et proposent la relation suivante

$$\ln K = 2 + \frac{0{,}0003}{i+0{,}0002} - \frac{0{,}0067}{n} + 0{,}71L + 0{,}3\frac{n}{i^{1/2}} \tag{2.9}$$

où i, n et L sont respectivement la pente, le coefficient de Manning ($\mathrm{m}^{-1/3}\mathrm{s}$) et la longueur du canal (m).

Ces différents modèles peuvent être utilisés pour simuler le transfert de l'eau dans une rue ou une conduite.

2.4.2 Modèles 1D mécanistes

Les modèles de transfert mécanistes unidimensionnels reposent sur les équations de Saint–Venant (introduites en 1781). Ces équations décrivent le mouvement de l'eau et la propagation des ondes en régime transitoire, elles s'écrivent habituellement de la façon suivante

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (uQ)}{\partial x} + gA\frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

où A est la section mouillée (m^2), Q est le débit ($\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$), u est la vitesse ($\mathrm{m\,s}^{-1}$), g est l'accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s}^{-2}$), S_0 est la pente de fond du canal et S_f est la pente de la ligne de charge. Ce système est obtenu en écrivant un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle. Il peut être récrit pour obtenir une expression conservative similaire à l'écriture (6.40) du système « shallow water ». Il repose sur les hypothèses suivantes (Cunge *et al.*, 1980) :

- l'écoulement est unidimensionnel, *i.e.* la vitesse est uniforme à l'intérieur de la section d'écoulement et la surface libre est horizontale,
- la courbure des lignes de courant est faible et l'accélération verticale est négligée, *i.e.* la répartition des pressions est hydrostatique,
- les effets du frottement sur les parois et le fond sont pris en compte avec une loi de résistance équivalente à celles utilisées en régime permanent.

Le terme J est souvent estimé avec la relation de Manning–Strickler

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2 A^2 R_h^{4/3}} \tag{2.11}$$

où K est le coefficient de frottement de Strickler ($\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$) et R_h est le rayon hydraulique (m).
Par leurs hypothèses, les équations de Saint–Venant ne sont pas adaptées pour décrire un écoulement dans un tronçon ayant une courbure importante (surface libre non horizontale), ou quand les vitesses ne peuvent plus être considérées comme uniformes dans la section (plaine d'inondation par exemple). Par contre, elles permettent de représenter les influences aval.

Al Mikdad (2000) a utilisé un modèle 1D basé sur les équations complètes de Saint–Venant pour simuler l'inondation d'un quartier de la ville de Nîmes. L'hypothèse d'égalité de la hauteur au niveau du carrefour est utilisée. L'extension de la zone inondée est bien reproduite mais les profondeurs simulées sont parfois assez différentes des relevés de laisses de crues correspondants.

La paramétrisation des frottements dans un modèle 1D reste délicate (écoulement dans des courbes, cf. Chapitre 3). La représentation des places, ronds-points et carrefours est problématique avec un modèle 1D.

Pour réduire le temps de calcul des simulations, les équations de Saint–Venant peuvent être simplifiées en éliminant certains termes.

- Quand les termes d'inertie $\partial Q/\partial t$ et $\partial(uQ)/\partial x$ peuvent être négligés, on obtient le modèle de l'onde diffusive. Le système (2.10) est récrit de la façon suivante

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

  En injectant (2.12 b) dans (2.12 a), on obtient une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en x, donc ce modèle permet de représenter les influences aval.
- Quand les termes d'inertie et le terme de pente de la surface libre $\partial h/\partial x$ peuvent être négligés, on obtient le modèle de l'onde cinématique. Ce modèle ne permet pas de représenter les influences aval, il n'est valide que pour des écoulements sur fortes pentes. Le bilan de quantité de mouvement se réduit à $S_0 = S_f$. On récrit le système (2.10) en remplaçant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par la relation de Manning–Strickler écrite avec la pente S_0 au lieu de S_f.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ &Q = K A R_h^{2/3} S_0^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

2.5 Modèles de transfert spatialisés

À l'inverse des modèles de la section précédente, où le bassin est décrit par un ensemble de sous-bassins avec une structure ramifiée, les modèles spatialisés utilisent un découpage du bassin en cellules ou mailles. Le calcul de la lame de pluie nette et du débit ruisselé ou écoulé est fait sur chaque maille.

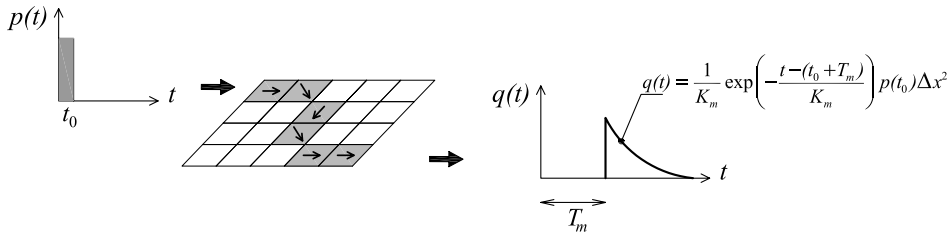


Figure 2.2 – Schéma de principe de la fonction de transfert translation–stockage distribuée. Calcul de la contribution élémentaire d'une maille.

2.5.1 Modèles conceptuels distribués

Les modèles conceptuels distribués utilisent généralement un maillage cartésien (mailles carrées régulières), ce qui permet de construire la topographie de la zone d'étude directement à partir d'un modèle numérique de terrain (MNT).

Oliveira et Maidment (1999) utilisent une version distribuée du modèle de l'hydrogramme unitaire pour modéliser le fonctionnement d'un bassin urbain.

Certains auteurs ont proposé une fonction de transfert de type translation–stockage en mode distribué (Zech *et al.*, 1993; Bouvier *et al.*, 1994; Oliveira et Maidment, 1999). Le MNT permet de produire la carte des directions de drainage, le drainage d'une cellule étant effectué vers la cellule voisine d'altitude la plus basse. Après calcul de la pluie brute et de la pluie nette sur chaque maille, le débit produit par une maille donnée est transféré à l'exutoire sans interaction avec les autres mailles.

Bouvier *et al.* (1994) proposent de calculer l'hydrogramme d'une maille donnée $q(t)$ avec le modèle du réservoir linéaire (Figure 2.2). Les contributions de l'ensemble des mailles sont sommées pour obtenir le débit $Q(t)$ à l'exutoire.

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 + T_m \\ \dfrac{1}{K_m} \exp\left(-\dfrac{t-(t_0-T_m)}{K_m}\right) p(t_0)\Delta x^2 & \text{si } t \geq t_0 + T_m \end{cases} \tag{2.14a}$$

$$Q(t) = \sum_m \int_0^t \frac{1}{K_m} \exp\left(-\frac{t-(t_0-T_m)}{K_m}\right) p(t_0)\Delta x^2 \mathrm{d}t_0 \tag{2.14b}$$

où T_m est le temps de parcours d'une maille m donnée jusqu'à l'exutoire, K_m est le paramètre d'amortissement de la maille m, $p(t_0)$ est la lame de pluie nette à la date t_0, Δx est la largeur de chaque maille. Les paramètres T_m et K_m de la fonction de transfert sont calculés pour chaque maille en utilisant le chemin de drainage jusqu'à l'exutoire. Le temps de parcours T_m est calculé pour chaque maille avec la relation suivante

$$T_m = \sum_k \frac{L_k}{V_k} \tag{2.14c}$$

où L_k est la distance parcourue dans la maille k (égale à Δx ou $\sqrt{2}\Delta x$ suivant l'orientation de la direction de drainage). V_k peut être fixé égal à une constante V_0, estimée comme étant la vitesse maximale atteinte à l'exutoire du bassin (Bouvier *et al.*, 1994). Le paramètre d'amortissement K_m est calculé pour chaque maille avec la relation suivante

$$K_m = K_0\, T_m \tag{2.14d}$$

où K_0 est un coefficient de calage, généralement pris égal à 0,7.

En suivant l'approche géomorphologique proposée par Moniot (1983), les vitesses V_k peuvent être estimées par la relation suivante

$$V_k = V_0\, i_k^{1/2}\, A_k^{1/5} \tag{2.15}$$

où i_k est la pente de la maille k et A_k est la surface totale drainée par la maille k.

(Lhomme *et al.*, 2004) proposent d'estimer le paramètre V_0 comme la valeur pour laquelle la somme des carrés des écarts entre vitesses physiques (avec la relation de Manning–Strickler ou par une modélisation 1D) et vitesses géomorphologiques est la plus faible sur un échantillon de tronçons du réseau de drainage. Avec cette formulation de V_k, la valeur $K_0 = 0{,}5$ a donné les meilleurs résultats. Cette fonction de transfert permet d'obtenir des hydrogrammes très proches de ceux donnés par une modélisation mécaniste 1D, avec des temps de calcul beaucoup plus courts, sans nécessiter une procédure de calage.

Dans une approche plus simple, Rodriguez *et al.* (2000) utilisent la relation de Manning–Strickler avec l'hypothèse que les conduites du réseau de drainage sont remplies à moitié.

$$V_k = \frac{1}{n}\left(\frac{R_k}{2}\right)^{2/3} i_k^{1/2} \tag{2.16}$$

où n est le coefficient de Manning des conduites et R_k est le rayon de la conduite passant dans la maille k.

2.5.2 Modèles 2D mécanistes

Les modèles mécanistes 2D reposent sur l'utilisation des équations bidimensionnelles de propagation d'ondes en eaux peu profondes (version 2D des équations de Saint–Venant) ou équations « shallow water ». Le raisonnement permettant d'obtenir ces équations est similaire à celui présenté au Chapitre 6.

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \\ uvh \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + gh^2/2 \end{bmatrix} = gh\begin{bmatrix} 0 \\ S_{0,x} - S_{f,x} \\ S_{0,y} - S_{f,y} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Ce système est obtenu par l'intermédiaire d'un bilan de masse et de deux bilans de quantité de mouvement (un bilan dans chaque direction x et y) sur un volume de contrôle. Comme pour les modèles mécanistes 1D, le schéma numérique de résolution des équations « shallow water » a une grande influence sur la qualité des résultats obtenus et sur la robustesse de la modélisation.

Haider *et al.* (2003) et Mignot *et al.* (2006) utilisent un modèle 2D reposant sur les équations « shallow water » pour représenter l'inondation de la ville de Nîmes. La comparaison avec un modèle 1D montre des différences au niveau des temps d'arrivée des pics de crue (Paquier *et al.*, 2003). L'extension de la zone inondée est bien reproduite par les deux approches mais les profondeurs simulées sont parfois assez différentes des relevés de laisses de crues correspondants.

Comme pour l'approche 1D, les équations « shallow water » peuvent être simplifiées en éliminant certains termes, afin de réduire le temps de calcul. Le système d'équations du modèle de l'onde diffusive s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} uh \\ gh^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} vh \\ 0 \\ gh^2/2 \end{bmatrix} = gh\begin{bmatrix} 0 \\ S_{0,x} - S_{f,x} \\ S_{0,y} - S_{f,y} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Le système d'équations du modèle de l'onde cinématique s'écrit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \\ &uh = Kh^{5/3} S_{0,x}^{1/2} \\ &vh = Kh^{5/3} S_{0,y}^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Vieux et Gauer (1994) présentent le modèle r.water.fea pour simuler le fonctionnement d'un bassin versant naturel, ce modèle utilise une structure à mailles carrées régulières (maillage cartésien) et le transfert de l'eau est effectué avec le modèle de l'onde cinématique.

Bouvier et Hingray (2001) utilisent une modélisation à mailles carrées régulières avec transfert de l'eau par le modèle de l'onde cinématique pour simuler une inondation de type pluvial dans un quartier de Ouagadougou. Les carrefours ne sont pas traités de manière spécifique.

Avant le développement de la modélisation 2D, les plaines d'inondations étaient simulées avec des modèles quasi-2D utilisant le concept de casiers. Le cours d'eau est modélisé avec un modèle 1D conventionnel, et le lit majeur est représenté par un ensemble de grandes cellules (dont les limites sont définies par les obstacles naturels ou artificiels à l'écoulement : remblais, collines). En considérant que l'écoulement dans le lit majeur est lent, les termes d'inerties sont négligeables et le débit entre deux cellules peut être calculé uniquement à partir des niveaux de la surface libre dans ces deux cellules (Cunge *et al.*, 1980). Ce débit peut être calculé de plusieurs façons : avec une loi de seuil, d'orifice ou avec la relation de Manning–Strickler.

Bates et De Roo (2000) utilisent un modèle 2D fonctionnant avec un maillage cartésien pour simuler l'inondation d'un lit majeur. L'écoulement dans le cours d'eau est représenté par le modèle de l'onde cinématique et l'écoulement dans le lit majeur est simulé avec un modèle à casiers. Les échanges d'eau entre casiers sont modélisés par la relation suivante

$$Q_{ij} = \frac{1}{n} A_{ij} R_{ij}^{2/3} S_{ij}^{1/2} \tag{2.20}$$

où Q_{ij}, A_{ij}, R_{ij} et S_{ij} sont respectivement le débit, la section mouillée, le rayon hydraulique et la pente de la surface libre entre les deux cellules i et j.

Les modélisations précédentes sont applicables à des inondations où l'eau provient de bassins versants drainés vers la zone d'étude ou des précipitations tombées sur cette zone. De plus, le réseau d'assainissement pluvial est négligé dans ces études. Cette hypothèse est valable pour des crues exceptionnelles (période de retour $\approx$ 100 ans) où la capacité du réseau est très inférieure aux débits circulant dans le réseau de voirie.

Pour des crues moins importantes (période de retour $\approx$ 10–50 ans), le fonctionnement du réseau d'assainissement ne peut pas être négligé. La modélisation doit être capable de prendre en compte les débordements du réseau de drainage. La modélisation ne doit pas uniquement stocker le volume débordé dans un réservoir virtuel, qui se videra dans le réseau à la fin de la crue. Il est important que le volume débordé puisse s'écouler à la surface pour bien représenter l'extension de l'inondation (Mark *et al.*, 2004). Le débordement du réseau de drainage vers la surface est souvent simulé, mais le retour de l'écoulement de surface vers le réseau de drainage (à la fin de la crue, dans un avaloir situé en aval du point de débordement) est plus rarement simulé.

Schmitt *et al.* (2004) présentent un outil couplant un modèle 1D pour l'écoulement dans le réseau d'assainissement (utilisant les équations complètes de Saint-Venant)

avec un modèle 2D simplifié (onde cinématique) pour le ruissellement et les écoulements résultants de débordements du réseau. Cette modélisation permet de simuler les débordements du réseau, l'inondation de la zone urbaine et les retours vers le réseau d'assainissement.

Hu *et al.* (1999) combinent deux modèles entièrement dynamiques pour simuler le réseau de drainage (modèle 1D) et l'écoulement en surface (modèle 2D). Les échanges entre le réseau et la voirie se font avec une loi d'orifice, le sens d'écoulement étant déterminé par la différence de charge entre l'écoulement en réseau et l'écoulement de surface.

Remarque 1 : La modélisation 3D représente l'ultime étape de représentation des écoulements, mais son coût en temps de calcul reste extrêmement prohibitif. Son utilisation est limitée à :

- des zones peu étendues où il est possible d'utiliser un maillage fin (Lee, 2006), ce qui permettrait de simuler seulement une zone de la taille d'un carrefour ;
- des zones de plus grande taille où le maillage est grossier (Bertrand *et al.*, 2006), ce qui ne permettrait pas de prendre en compte les singularités du milieu urbain.

Remarque 2 : La méthode de résolution numérique des équations de Saint–Venant a une grande importance sur les résultats obtenus. La formulation différentielle (2.10) n'est pas adaptée pour représenter des discontinuités de l'écoulement (choc, ressaut), il est préférable d'utiliser la forme intégrale du système (cf. 6.2.1).

Remarque 3 : La construction du maillage est une étape très importante dans le processus de modélisation. On distingue les maillages structurés et les maillages non structurés (Guinot et Cappelaere, 2005).
Un maillage structuré peut être cartésien (grille régulière de type MNT) : les points de calcul sont positionnés sur des lignes droites. Ce type de maillage n'est pas adapté pour décrire des géométries complexes, car il n'est pas possible d'augmenter localement la densité du maillage.
Les maillages structurés curvilignes ne présentent pas cet inconvénient, les points de calculs sont positionnés sur des lignes courbes. Une plus grande flexibilité est possible dans la description de la géométrie. Les éléments d'un maillage structuré sont toujours des quadrilatères.
Les maillages non structurés sont les plus souples, ils sont généralement constitués de triangles et de quadrilatères. Les points de calcul ne sont pas alignés selon des directions préférentielles. La transition entre des éléments de petite taille et des éléments de grande taille peut être plus courte qu'avec un maillage curviligne.

2.6 Modélisation à grande échelle

Une première façon d'aborder la modélisation à grande échelle consiste à étudier des bassins de taille "raisonnable" sur lesquels on peut comparer deux approches :

- une description détaillée du réseau hydrographique (le réseau d'assainissement en milieu urbain),
- une description plus grossière du réseau hydrographique, correspondant à la description la plus fine du réseau que l'on peut atteindre sur un bassin de très grande taille (du point de vue de l'effort de modélisation).

Chocat et Cabane (1999) montrent qu'une représentation partielle du réseau d'assainissement d'un bassin versant urbain permet d'obtenir un hydrogramme de crue très proche de celui obtenu avec une représentation complète du réseau, l'écart entre les représentations étant situé au niveau du pic de crue.

En réduisant de la même façon l'extension du réseau de drainage explicitement représenté dans un modèle mécaniste 1D, Lhomme *et al.* (2004) montrent que l'estimation du temps de réponse des sous bassins versants donnée par la relation (2.3) doit être divisée par 2 pour obtenir un hydrogramme proche de celui obtenu avec la représentation détaillée du réseau.

Une deuxième approche de la modélisation à grande échelle, dite approche « macroscopique », consiste à modifier les équations de propagation pour prendre en compte des singularités sans décrire leur géométrie de façon individuelle et détaillée.
Zoppou et Roberts (1999) modélisent la rupture d'un réservoir cylindrique (château d'eau) en milieu urbain avec un modèle 2D « shallow water ». Les bâtiments ne sont pas représentés comme des frontières imperméables pour simplifier la création du maillage mais les auteurs introduisent un terme "puits" pour représenter les pertes de quantité de mouvement

$$\mathbf{M}_{\text{buildings}} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghM_{bx} \\ ghM_{by} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{bx} = -\alpha uh \ , \quad M_{bx} = -\beta vh \tag{2.21}$$

Makhanov *et al.* (1999) représentent un réseau de canaux par des propriété statistiques (nombre de canaux, largeur, et orientation moyenne, cote de fond moyenne) pour simuler l'inondation du delta de la rivière Chao-Phraya à l'est de Bangkok. Cette méthode permet de ne pas représenter individuellement chaque canal dans le maillage. Le système d'équations de l'onde diffusive est écrit sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} &\mu\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = F \\ &q_L = q_{L,R} + q_{L,S} \\ &q_{L,R} = -D_{L,R}\frac{\partial z}{\partial L} \\ &q_{L,S} = -D_{L,S}\frac{\partial z}{\partial L} \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

avec $L = x$ ou $L = y$ et

$$\mu = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\sum_L\sum_p m_p W_{L,p} & \text{si } z < z_b \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.23a}$$

$$D_{L,R} = \sum_p m_p \frac{W_{L,p}(h_p)\left(R(h_p)\right)^{2/3}}{n_p\left|\partial z/\partial L\right|^{1/2}} \tag{2.23b}$$

$$D_{L,S} = \frac{h_s^{5/3}}{n_s(\text{grad } z)^{1/2}} \tag{2.23c}$$

$$W_{L,p} = \frac{w_{L,p}}{\Delta L} \tag{2.23d}$$

où z est la cote de la surface libre, q_x et q_y sont les débits unitaires respectivement dans les directions x et y, F est l'intensité de pluie, N est le nombre de groupes homogènes de canaux dans le volume de contrôle de dimensions Δx et Δy, p désigne un groupe de canaux, z_p et m_p sont respectivement la cote de fond moyenne et le nombre de canaux du groupe p, les indices R et S désignent respectivement les écoulements en rivière (ou canaux) et en surface, h est la profondeur de l'écoulement, $w_{L,p}$ est l'aire

de la section mouillée des canaux du groupe p dans le plan perpendiculaire à l'axe L, n est le coefficient de Manning, $R(h_p)$ est le rayon hydraulique moyen des canaux du groupe p.

Hsu *et al.* (2000) associent un modèle 1D utilisant les équations complètes de Saint-Venant avec un modèle 2D utilisant un transfert par onde diffusive, ce qui permet de simuler à la fois l'écoulement dans le réseau de drainage et les débordements du réseau vers la voirie. Les volumes débordés ne retournent pas vers le réseau quand celui-ci n'est plus en charge. Le milieu urbain est décrit avec un MNT constitué de mailles de 120 m de côté. Un coefficient β permet de prendre en compte la présence des bâtiments dans l'équation de continuité du modèle de l'onde diffusive.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\beta)uh\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\beta)vh\right] = s \\
&\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{su}{gh} + \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{K^2 h^{4/3}} = 0 \\
&\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{sv}{gh} + \frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{K^2 h^{4/3}} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

où $\beta = \sqrt{A_b/A}$ est le ratio de la superficie des bâtiments sur la superficie totale, s est le terme source (ou puit) lié aux débordements du réseau ou à l'action des pompes.

Le concept de porosité a été introduit pour la première fois par Defina *et al.* (1994). Mais les auteurs introduisent la porosité uniquement dans le bilan de quantité de mouvement.

Ce concept est ensuite repris par Hervouet *et al.* (2000) qui l'utilisent pour prendre en compte la présence d'une zone urbaine lors de l'inondation d'une plaine. La porosité est introduite à la fois dans l'équation de continuité et dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, écrites sous forme non conservative. Cependant, après simplifications, la porosité est éliminée du bilan de quantité de mouvement.

Une autre approche est développée au Laboratoire HydroSciences, en partenariat avec l'Université Catholique de Louvain (Guinot et Soares-Frazão, 2006). La porosité est introduite dans les équations de propagation écrites sous forme conservative. De plus, un terme source supplémentaire permet de prendre en compte les variations spatiales de porosité.

2.7 Modélisation des défluences

Les outils classiques de l'ingénierie hydraulique (relations du régime uniforme ou du régime graduellement varié, modèles 1D) ne permettent pas de traiter les défluences sans faire intervenir des hypothèses ou relations supplémentaires. Étant donné la complexité des phénomènes hydrodynamiques qui interviennent dans une défluence, aucun calcul analytique ne permet de traiter le problème dans un cas général. Les défluences ont donc été étudiées pendant longtemps selon une approche empirique et des lois de répartition issues de manipulations expérimentales ont été proposées.

La division d'un écoulement dans un canal ou une conduite a été étudiée expérimentalement à partir des années 1960, principalement pour des problématiques de réseaux d'irrigation ou d'ouvrages de dérivation en rivière. Les études se sont souvent concentrées sur les défluences en forme de T, *i.e.* un canal avec une branche de dérivation latérale avec un angle de 90°. Les notations utilisées par les différents auteurs ont été remplacées par une notation unique pour faciliter la compréhension et la comparaison des relations. Les différentes branches sont désignées par branche amont, branche aval

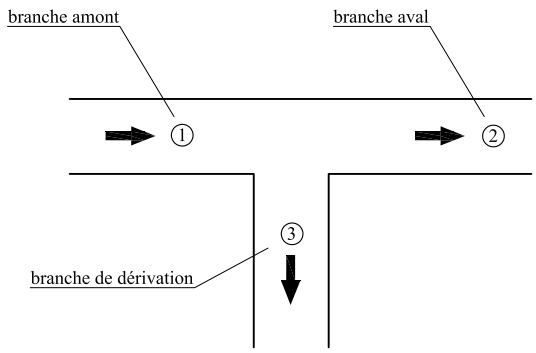


Figure 2.3 – Notations pour les défluences en forme de T.

Tableau 2.1 – Variables utilisées pour décrire la géométrie de la défluence et les caractéristiques de l'écoulement.

Symbole	Signification	Unité
ΔH	perte de charge	m
F	nombre de Froude	–
γ	poids volumique de l'eau	$\mathrm{Nm^{-3}}$
h	profondeur de l'écoulement	m
L	largeur	m
Q	débit	$\mathrm{m^3s^{-1}}$
θ	angle de la branche 3 par rapport à l'axe du canal	–
W	puissance de l'écoulement	$\mathrm{Nms^{-1}}$

et branche de dérivation comme indiqué sur la Figure 2.3. Les variables utilisées sont rassemblées dans le Tableau 2.1 et on utilise les indices 1, 2 et 3 pour désigner les variables de chaque branche. Tous ces travaux considèrent des branches horizontales de même niveau.
Sridharan et Lakshmana Rao (1966) utilisent des mesures réalisées à l'Indian Institute of Science (Bangalore) pour proposer une relation de répartition dans le cas d'une branche de dérivation à 90° quand l'écoulement dans le canal est subcritique et l'écoulement dans la branche de dérivation est supercritique

$$\frac{Q_3}{Q_1} = \begin{cases} 0{,}6181 \left(\dfrac{L_3}{L_1F_1}\right)^{1{,}78} & \text{si } 0{,}38 < \dfrac{L_3}{L_1F_1} < 0{,}62 \\ 0{,}43\dfrac{L_3}{L_1F_1} & \text{si } 0{,}62 < \dfrac{L_3}{L_1F_1} < 2{,}10 \end{cases} \tag{2.25}$$

Lakshmana Rao et Sridharan (1967) proposent une relation de répartition de la forme suivante

$$\log\left(Q_3/Q_1\right) + KF_2^{\alpha} = 0 \tag{2.26}$$

où K et α sont des coefficients empiriques. Cette relation est obtenue à partir d'une analyse dimensionnelle et d'une analyse de résultats expérimentaux pour diverses valeurs de largeurs, d'angle et de débits quand l'écoulement dans la branche amont est subcritique. Les auteurs donnent les valeurs de K et α issues des mesures expérimentales.

Nougaro et Boyer (1974) proposent une équation reliant les nombres de Froude et les profondeurs dans le canal et dans la branche de dérivation

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= F_2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{Q_3}{Q_2}\right) \\ F_1 &= F_3 \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{Q_3}{Q_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Les trois branches ont la même section. L'écoulement dans la branche amont est subcritique. Le canal aval et la branche de dérivation ont une sortie libre.
Ramamurthy et Satish (1974) utilisent les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour écrire la relation suivante dans le cas où l'écoulement dans la branche amont est subcritique

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}\frac{Q_3}{Q_1} - \left(2F_1^2 + 1\right)\left(1 - \frac{Q_3}{Q_1}\right)\frac{h_2}{h_1} + 2F_1^2\left(1 - \frac{Q_3}{Q_1}\right)^2 = 0 \tag{2.28}$$

La répartition de débit Q_3/Q_1 peut être calculée à partir de la profondeur dans les branches amont et aval et du nombre de Froude amont, à condition que le nombre de Froude de la branche de dérivation soit supérieur à 0,35 et que $L_3 \leq L_1$.
Ramamurthy *et al.* (1990) proposent une autre équation en raisonnant de manière similaire

$$\frac{1}{40}\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)F_1^4 + \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{Q_2}{Q_1} - \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \frac{h_1}{h_2}\right]F_1^2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{2h_1^2} = 0 \tag{2.29}$$

dans le cas où l'écoulement dans la branche amont est subcritique et les trois branches ont la même section.

Le principal inconvénient de ces relations est qu'elles ont été établies dans des conditions expérimentales spécifiques (régime d'écoulement dans la branche amont, section des branches, angle de la branche de dérivation) et leur domaine d'application est restreint à la gamme nécessairement limitée de conditions étudiées.

Certains auteurs ont présenté des formules empiriques de perte de charge pour représenter une branche de dérivation latérale. Ramamurthy *et al.* (1996) proposent la relation suivante pour une défluence en forme de T dans une conduite fermée de section rectangulaire

$$\Delta H_{13} = \frac{Q_3}{Q_1}\frac{L_1}{L_3}\left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \tag{2.30}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} C &= c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + c_3\eta^3 \\ c_0 &= 0{,}618 + 0{,}144\frac{L_3}{L_1} + 0{,}225\left(\frac{L_3}{L_1}\right)^2 \\ c_1 &= -0{,}096 - 0{,}286\frac{L_3}{L_1} - 0{,}977\left(\frac{L_3}{L_1}\right)^2 \\ c_2 &= -0{,}700 + 0{,}822\frac{L_3}{L_1} + 1{,}41\left(\frac{L_3}{L_1}\right)^2 \\ c_3 &= 0{,}200 - 0{,}685\frac{L_3}{L_1} - 0{,}644\left(\frac{L_3}{L_1}\right)^2 \\ \eta &= \sqrt{\frac{V_1^2}{V_1^2 + 2g(p_1 - p_c)/\gamma}} \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

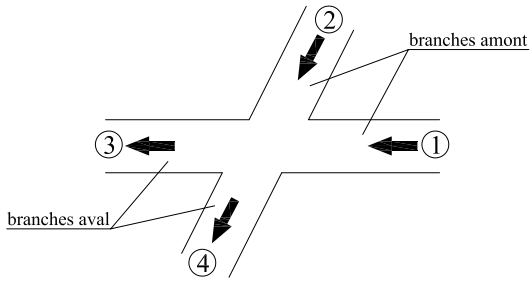


Figure 2.4 – Notations pour les défluences en forme de X.

où ΔH_{13} est la perte de charge entre la branche amont et la branche de dérivation, C est le coefficient de contraction de l'écoulement à l'entrée de la branche de dérivation, V_1 est la vitesse dans la branche amont, p_1 est la pression dans la branche amont, p_c est la pression dans la zone de recirculation.
Hsu *et al.* (2002) utilisent la relation de conservation de l'énergie appliquée aux trois branches pour écrire la relation suivante

$$\Delta H_{123} = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)\left[1 - \frac{2(h_3/h_1)^3 + \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 F_1^2}{(h_3/h_1)^2\,(2 + F_1^2)}\right] \tag{2.32}$$

où ΔH_{123} est la perte de charge totale due à la défluence.

La simulation numérique de type 2D ou 3D ne nécessite pas d'hypothèses particulières pour le traitement des défluences. En revanche, les hypothèses classiques de la modélisation 2D (cf. §2.5.2) ne seront pas vérifiées en règle générale dans une défluence. Shettar et Murthy (1996) et Khan *et al.* (2000) utilisent une modélisation 2D avec modèle de turbulence pour simuler l'écoulement dans une défluence en forme de T. Les résultats de la simulation sont comparés à des résultats expérimentaux et les auteurs obtiennent un bon accord pour la répartition des débits et la position de la zone de recirculation dans la branche de dérivation.
Neary *et al.* (1999) présentent l'utilisation d'une modélisation 3D avec modèle de turbulence appliquée à une défluence. La comparaison des vitesses simulées avec des mesures expérimentales est très bonne pour différentes profondeurs.

L'étude des défluences à quatre branches est liée à la problématique des inondations en milieu urbain puisque ces singularités sont peu présentes dans les réseaux d'irrigation ou les réseaux d'assainissement. Dans les cours d'eau naturels, les défluences sont parfois présentes mais souvent les écoulements séparés se rejoignent rapidement (île, chenal en tresse).
La plupart des études concernent des défluences (ou carrefours) avec deux branches amont et deux branches aval, on utilise les indices 1 à 4 comme indiqué sur la Figure 2.4 et les variables définies au Tableau 2.1.
Nania *et al.* (2004) ont proposé une relation polynomiale de degré 3 pour décrire le coefficient de répartition des débits

$$\frac{Q_3}{Q_1 + Q_2} = a_3\left(\frac{W_1}{W_1 + W_2}\right)^3 + a_2\left(\frac{W_1}{W_1 + W_2}\right)^2 + a_1\frac{W_1}{W_1 + W_2} + a_0 \tag{2.33}$$

avec

$$\left.\begin{array}{lllll} a_3 = 1{,}16, & a_2 = -1{,}44, & a_1 = 1{,}38, & a_0 = 0{,}04 & \text{si } 0{,}04 \leq \dfrac{W_1}{W_1+W_2} \leq 0{,}39 \\ a_3 = 0, & a_2 = 0, & a_1 = 0{,}664, & a_0 = 0{,}168 & \text{si } 0{,}39 \leq \dfrac{W_1}{W_1+W_2} \leq 0{,}61 \\ a_3 = 1{,}16, & a_2 = -2{,}04, & a_1 = 1{,}98, & a_0 = -0{,}14 & \text{si } 0{,}61 \leq \dfrac{W_1}{W_1+W_2} \leq 0{,}96 \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

Cette relation est valable pour un carrefour à angle droit avec un écoulement supercritique dans les branches amont, elle est issue d'une analyse dimensionnelle et de mesures expérimentales. Les trois comportements différents mis en évidence correspondent à trois différentes positions des ressauts.
Rivière et Perkins (2004) font une analogie entre la propagation de l'onde de raréfaction lors d'une rupture de barrage et la position des ondes de raréfaction présentes dans un carrefour à quatre branches à angle droit avec une seule entrée. Les auteurs en déduisent une relation de répartition valable pour un nombre de Froude supérieur à 2 dans la branche d'entrée.
Mignot *et al.* (2005) utilisent des relations empiriques existantes et un bilan de quantité de mouvement pour proposer une méthode d'estimation de l'angle du ressaut et de l'angle de déviation de l'écoulement principal pour un carrefour à deux entrées et deux sorties et à angle droit et pour des écoulements supercritiques dans les branches amont.
Rivière *et al.* (2005) comparent les répartitions de débits obtenues pour des écoulements amont subcritiques et supercritiques. Le coefficient de répartition varie linéairement en fonction du rapport des débits d'entrée en régime subcritique. La variation du coefficient de répartition apparaît beaucoup plus difficile à expliquer en régime supercritique.
Mignot (2005) montre qu'un modèle 2D est capable de reproduire de façon satisfaisante l'écoulement dans un carrefour à quatre branches. La répartition des débits simulés et la position des ressauts sont relativement peu sensibles à la densité du maillage dans le carrefour, contrairement à la largeur des ressauts qui est liée à la dimension des mailles.

2.8 Avantages et inconvénients des différentes modélisations

Compte tenu du développement de la micro-informatique, l'utilisation des modèles 1D et 2D s'est largement répandue. Cependant, les avantages et les inconvénients de ces deux approches placent le modélisateur en hydrologie urbaine face à un dilemme :

- l'écoulement dans le réseau de drainage et dans le réseau de voirie est approximativement de type 1D, sauf à proximité des carrefours où il est plutôt de type 3D ;
- la structure de l'écoulement dans le carrefour conditionne la répartition des débits, donc les carrefours doivent être correctement modélisés pour que la dynamique de la crue soit bien reproduite ;
- la modélisation 2D permet de simuler les principales caractéristiques de l'écoulement dans le carrefour (Mignot *et al.*, 2005), mais les temps de calcul deviennent importants si la zone d'étude est de grande taille ;
- la modélisation 1D est moins consommatrice de temps de calcul que la modélisation 2D, mais la modélisation des carrefours utilisée dans les modèles 1D (conservation de la charge ou de la hauteur) est très grossière ;

Étant donné ce constat, plusieurs pistes de recherche se présentent pour améliorer la modélisation des inondations en milieu urbain :

- piste n° 1 : améliorer le traitement des carrefours au sein des modèles 1D ;
- piste n° 2 : réduire le coût de calcul de la modélisation 2D (amélioration des algorithmes, utilisation de grands pas de temps) pour pouvoir simuler de grandes zones avec un maillage fin ;
- piste n° 3 : modifier la représentation du milieu urbain dans les modèles 2D, dans une démarche similaire aux travaux présentés au §2.6, pour permettre l'utilisation de maillages relativement grossiers et par conséquent réduire le coût de calcul.

Les pistes n° 1 et 3 ont été étudiées dans le cadre de ce travail de doctorat. La piste n° 1 fait l'objet de la Partie II. Les Parties III et IV sont consacrées à la piste n° 3.

Deuxième partie

Modélisation unidimensionnelle d'un réseau de rues

Présentation de la Partie II

On s'intéresse dans cette partie à la modélisation 1D d'un réseau de rues. Par comparaison avec le maillage utilisé par une modélisation 2D classique, le maillage utilisé par la modélisation 1D est relativement grossier. Les rues sont maillées avec un seul point de calcul pour toute la largeur, de même un carrefour est représenté par un seul point de calcul. Deux possibilités existent pour modéliser le comportement des carrefours :

- une relation de conservation de la hauteur d'eau ou de la charge dans la maille carrefour, cette relation vient compléter le système d'équations de propagation,
- une relation directe qui donne la valeur d'un coefficient de répartition à partir de paramètres relatifs aux caractéristiques du carrefour

L'hypothèse de conservations de la hauteur d'eau ou de la charge n'est pas satisfaisante, et ceci pour deux raisons :

- on peut vérifier expérimentalement que la profondeur et la charge ne sont pas constantes à l'intérieur d'un carrefour (ceci est également obtenu avec une simulation 2D de l'écoulement dans un carrefour) ;
- la répartition des débits est dépendante de la position du ou des ressauts à l'intérieur du carrefour quand les écoulements amont sont supercritiques (Mignot *et al.*, 2005). L'hypothèse d'une charge uniforme dans le carrefour conduira alors une mauvaise répartition des débits.

On s'intéresse dans cette partie à deux modélisations simplifiées de carrefours faisant appel à une relation directe.

Dans le Chapitre 3, une méthode conceptuelle de répartition des débits proposée par Chocat est modifiée pour être appliquée à des carrefours à trois et quatre branches. Ce modèle de répartition est ensuite couplé à un modèle de propagation 1D pour être utilisé sur un cas réel d'inondation urbaine.

Le Chapitre 4 présente une relation polynomiale de répartition des débits dans un carrefour à quatre branches développée dans le cadre de cette thèse. Cette relation empirique peut être utilisée avec un modèle 1D à la place de la méthode conceptuelle de répartition.

Le Chapitre 5 dresse un bilan du travail réalisé sur les modélisations simplifiées des carrefours.

Chapitre 3

Couplage d'un modèle 1D simplifié et d'un modèle conceptuel de répartition des débits aux carrefours

Sommaire

3.1 Présentation du modèle conceptuel de Chocat 36
3.1.1 Calcul du coefficient C_1 36
3.1.2 Calcul du coefficient C_2 37
3.1.3 Calcul du coefficient C_3 38
3.2 Extension du modèle conceptuel de Chocat à des carrefours à quatre branches 38
3.2.1 Calcul des caractéristiques de la branche amont équivalente 38
3.2.2 Calcul du coefficient de répartition 41
3.3 Couplage avec un modèle 1D 42
3.3.1 Propagation dans les mailles tronçon 42
3.3.2 Traitement des mailles carrefour 45
3.4 Mise en œuvre de la modélisation 1D sur un site réel . 45
3.4.1 Description du site et problématique 45
3.4.2 Préparation de la topologie de la zone d'étude 47
3.4.3 Résultat de la simulation 50
3.4.4 Comparaison avec un modèle 2D 51
3.5 Conclusions 55

Le modèle conceptuel proposé par Chocat (1997) permet le calcul de la répartition du débit lorsqu'une branche amont se divise en deux branches aval (défluence en forme de Y) dans un réseau d'assainissement. Ce modèle conceptuel a été légèrement modifié pour être appliqué à des écoulements dans des rues (assimilées à des canaux rectangulaires à ciel ouvert). Une version étendue a ensuite été développée pour permettre son utilisation sur des carrefours à quatre branches. Ce modèle étendu a finalement été mis en oeuvre au sein d'une modélisation 1D sur le site du quartier Richelieu à Nîmes (Lhomme *et al.*, 2006b).

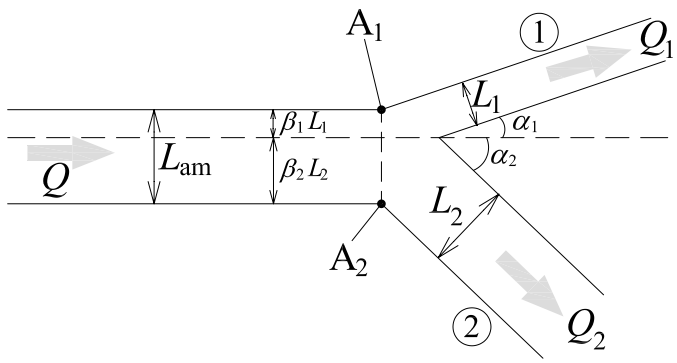


Figure 3.1 – Schéma d'un carrefour à 3 branches.

3.1 Présentation du modèle conceptuel de Chocat

Le coefficient de répartition C est défini comme le ratio du débit circulant dans une des deux branches aval sur le débit de la branche amont. Dans le modèle conceptuel de Chocat, C se calcule de la façon suivante

$$C = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = C_1 C_3 + (1 - C_3) C_2 \tag{3.1}$$

où Q_1 et Q_2 sont respectivement les débits dans les branches aval 1 et 2 (Figure 3.1) et C_1, C_2, C_3 sont trois coefficients auxiliaires qui tiennent compte de la géométrie du carrefour, de la topographie des branches aval et du nombre de Froude dans la branche amont. Le coefficient C ne prend pas en compte d'éventuelles influences aval. Cette section détaille le calcul des trois coefficients auxiliaires.

3.1.1 Calcul du coefficient C_1

Le coefficient auxiliaire C_1 prend en compte la géométrie de la défluence

$$C_1 = \frac{\beta_1 \cos\alpha_1}{\beta_1 \cos\alpha_1 + \beta_2 \cos\alpha_2} \tag{3.2}$$

où α_1 et α_2 sont respectivement les angles de déviation des branches 1 et 2, β_1 et β_2 sont respectivement les largeurs apparentes des branches 1 et 2 (Figure 3.1). Dans Chocat (1997), β_1 et β_2 sont les sections apparentes des branches 1 et 2 respectivement, puisque la méthode est appliquée à des conduites fermées. La section apparente d'une branche aval est définie comme la fraction de la section aval vue depuis la section amont (Figure 3.2).

L'application à des canaux ouverts nous amène à transformer les sections apparentes en largeurs apparentes. β_1 et β_2 peuvent être calculés directement en faisant l'hypothèse que les "points de décrochement" A_1 et A_2 des deux branches aval sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe de la branche amont (Figure 3.1) On obtient ainsi les expressions suivantes

$$\left.\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1 - \frac{L_1}{L_{\mathrm{am}} \cos\alpha_1} + \frac{1-\cos^2\alpha_1}{\cos\alpha_1 \sin\alpha_1} \frac{L_2}{L_{\mathrm{am}} \sin\alpha_2}}{1 + \frac{1}{\tan\alpha_2} \frac{1-\cos^2\alpha_1}{\cos\alpha_1 \sin\alpha_1}} \\ \beta_1 &= 1 - \beta_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

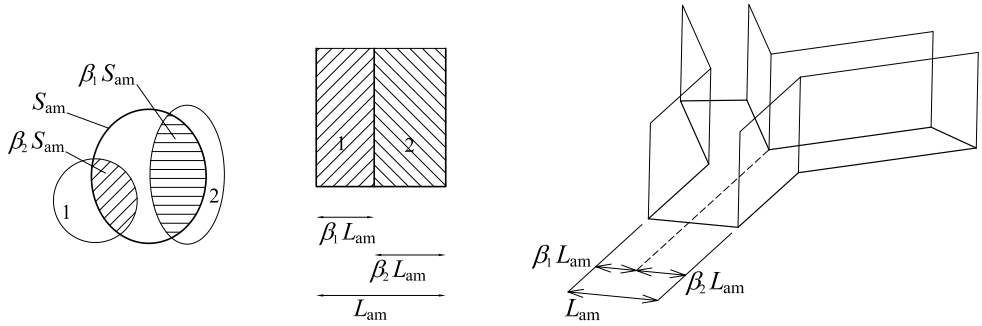


Figure 3.2 – Définition des sections apparentes pour des conduites fermées (gauche), définition des largeurs apparentes pour des canaux ouverts : vue de face (centre) et vue en perspective (droite).

où L_{am}, L_1, L_2 sont respectivement la largeur de la branche amont et les largeurs des branches 1 et 2.

On remarque que si α_1 est faible par rapport à α_2, ou si β_1 est grand par rapport à β_2, alors C_1 est élevé.

3.1.2 Calcul du coefficient C_2

Le coefficient C_2 (dit coefficient entropique) est égal à la valeur du coefficient de répartition dans le cas où la puissance totale P_T dans les deux branches aval est minimale. Cette puissance se calcule par la relation

$$P_T = P_1 + P_2 = \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2g}\right) Q_1 + \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2g}\right) Q_2 \tag{3.4}$$

où P_1 et P_2 sont respectivement les puissances dans les branches 1 et 2, g l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 les hauteurs de l'écoulement dans les branches 1 et 2, V_1 et V_2 la vitesse de l'écoulement dans les branches 1 et 2. L'équation précédente peut être récrite

$$P_T = QC_2 \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2g}\right) + Q(1 - C_2) \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2g}\right) \tag{3.5}$$

où Q est le débit dans la branche amont.

Il n'est pas possible de déterminer analytiquement la valeur de C_2 qui minimise P_T, il faut procéder par itérations. On choisit une valeur de C_2, ce qui nous permet de calculer Q_1 et Q_2. Les valeurs de h_1, h_2, V_1, V_2 sont calculées ensuite en considérant que l'écoulement dans chaque branche est en régime uniforme, puis on calcule P_T. En procédant ainsi pour un certain nombre de valeurs de C_2, on recherche quelle valeur de C_2 donne la plus faible valeur de P_T. C_2 étant compris entre 0 et 1, il faut tester vingt valeurs de C_2 pour obtenir une estimation à 0,05 près. Le calcul de h et V étant réalisé par la méthode de Newton à partir de la valeur de Q, la procédure complète nécessite un nombre important de calculs.

Cependant, il est noté dans Chocat (1997) que ce coefficient entropique conduit à une répartition des débits « sensiblement proportionnelle à la capacité des conduites aval, lorsque le taux de remplissage dépasse 60 % ». Ce mode de calcul approché du coefficient C_2 permet de réduire le nombre de calculs à effectuer, il a été retenu dans la suite pour la mise en oeuvre de cette méthode.

Remarque : La capacité (ou débit capable) d'une conduite fermée est égale au débit à pleine section, mais le débit capable n'est pas défini pour des canaux à ciel ouvert. On considérera que le débit capable d'un canal est calculé pour une hauteur d'eau $h_{\text{cap}} = 1$ m. L'expression du coefficient C_2 devient alors

$$C_2 = \frac{Q_{c,1}}{Q_{c,1} + Q_{c,2}} = \frac{\frac{(L_1 h_{\text{cap}})^{5/3}}{(L_1+2h_{\text{cap}})^{2/3}} i_1^{1/2}}{\frac{(L_1 h_{\text{cap}})^{5/3}}{(L_1+2h_{\text{cap}})^{2/3}} i_1^{1/2} + \frac{(L_2 h_{\text{cap}})^{5/3}}{(L_2+2h_{\text{cap}})^{2/3}} i_2^{1/2}} \tag{3.6}$$

où $Q_{c,1}$ et $Q_{c,2}$ sont respectivement les débits capables dans la branche 1 et dans la branche 2. Les écarts constatés entre le coefficient C_2 calculé à partir de l'équation (3.5) ou à partir de l'équation (3.6) sont compris entre 0 et 10 %.

3.1.3 Calcul du coefficient C_3

Le coefficient de pondération C_3 prend en compte le nombre de Froude dans la branche amont et la géométrie de la défluence

$$C_3 = C_{3,a} C_{3,b} = (\beta_1 \cos\alpha_1 + \beta_2 \cos\alpha_2)\left(1 - e^{-aF}\right) \tag{3.7}$$

où F est le nombre de Froude dans la branche amont et a un coefficient d'ajustement. Pour des conduites ovoïdes, le coefficient a est fixé de façon empirique à 2 (Chocat, communication personnelle). Cette valeur a été conservée pour les canaux rectangulaires.

Le premier terme $C_{3,a}$ quantifie l'écart des deux branches par rapport à la direction de la branche amont, il est calculé à partir des éléments utilisés pour le calcul du coefficient C_1. Plus α_1 et α_2 sont grands, plus $C_{3,a}$ sera faible. Le deuxième terme $C_{3,b}$ nécessite le calcul du nombre de Froude dans la branche amont. Plus l'écoulement amont a une vitesse importante, plus $C_{3,b}$ tend vers 1.

De façon globale, si α_1 reste constant mais α_2 augmente (tous les autres paramètres restant inchangés), C_1 augmente, C_2 reste constant, $C_{3,a}$ diminue et $C_{3,b}$ reste constant. C_3 diminue moins vite que C_1 n'augmente, si bien que finalement C augmente.

3.2 Extension du modèle conceptuel de Chocat à des carrefours à quatre branches

On cherche à étendre le modèle conceptuel de Chocat à des carrefours à quatre branches du type 2 entrées – 2 sorties. Ceci se fait en remplaçant les deux branches amont par une seule branche équivalente (Figure 3.3). Cette branche équivalente est définie au moyen d'un bilan simplifié de quantité de mouvement et d'un bilan de masse, ainsi que d'une hypothèse sur les débitances.

3.2.1 Calcul des caractéristiques de la branche amont équivalente

Par convention, on considère dans ce paragraphe un repère orthonormé direct (Oxy), disposé comme dans la Figure 3.3, tel que

- l'axe des abscisses (Ox) est placé sur l'axe d'une des deux branches, orienté dans le sens de l'écoulement,
- l'autre branche amont se trouve dans le demi-plan $y < 0$.

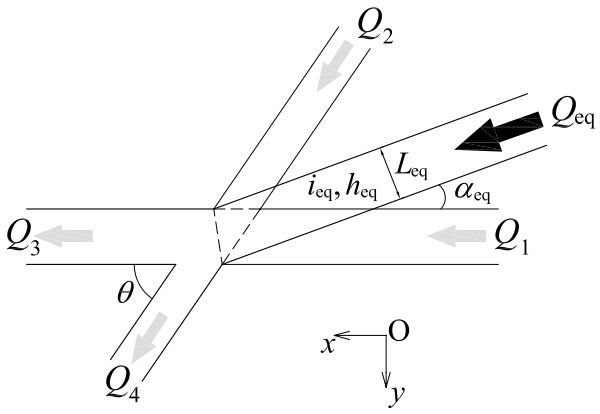


Figure 3.3 – Schéma de principe de la branche équivalente.

Les branches 1 et 2 sont les branches amont, les branches 3 et 4 sont les branches aval. Les branches 1 et 3 sont alignées, de même que les branches 2 et 4. Pour utiliser le modèle conceptuel de Chocat avec la branche amont équivalente, il faut déterminer les paramètres suivants :

- pour le calcul de α_3, α_4, β_3 et β_4 : α_{eq} et L_{eq} ;
- pour le calcul de F_{eq} : i_{eq} et h_{eq}.

Calcul de l'angle équivalent. La première étape est le calcul de l'angle α_{eq} que fait la branche équivalente avec la branche 1. On réalise un bilan simplifié de quantité de mouvement, sur le volume de contrôle triangulaire tracé en pointillés sur la Figure 3.3. Soit U_1 et U_2 les vecteurs vitesse uniformes respectivement dans la branche 1 et la branche 2 comme indiqué sur la Figure 3.4. $U_{2,x}$ et $U_{2,y}$ sont les projections de U_2 respectivement sur l'axe (Ox) et l'axe (Oy). $U_{1,x}$ est la projection de U_1 sur l'axe (Ox) et est égal à U_1, $U_{1,y}$ est nul. On appelle U_{eq} le vecteur vitesse uniforme dans la branche équivalente. De même, $U_{eq,x}$ et $U_{eq,y}$ sont les projections de U_{eq} respectivement sur l'axe (Ox) et l'axe (Oy). On note h_1, h_2 et h_{eq} la hauteur uniforme sur la section de l'écoulement respectivement dans la branche 1, la branche 2 et la branche équivalente.

On écrit la relation de continuité sur le volume de contrôle et les projections sur les axes (Ox) et (Oy) du bilan de quantité de mouvement, en négligeant les termes de pression.

$$U_{eq,x}L_1h_{eq} + U_{eq,y}\delta_2 h_{eq} = U_{2,y}\lambda_2 h_2 + U_{1,x}L_1h_1 = A_1 \tag{3.8}$$

$$U_{eq,x}^2 L_1 h_{eq} + U_{eq,x}U_{eq,y}\delta_2 h_{eq} = U_{2,x}U_{2,y}\lambda_2 h_2 + U_{1,x}^2 L_1 h_1 = A_2 \tag{3.9}$$

$$U_{eq,y}^2 \delta_2 h_{eq} + U_{eq,x}U_{eq,y}L_1 h_{eq} = U_{2,y}^2 \lambda_2 h_2 = A_3 \tag{3.10}$$

où λ_2 et δ_2 sont des dimensions du volume de contrôle définies sur la Figure 3.4

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{L_2}{\sin\theta} \\ \lambda_1 &= \frac{L_1}{\sin\theta} \\ \delta_2 &= \lambda_2 - \lambda_1\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

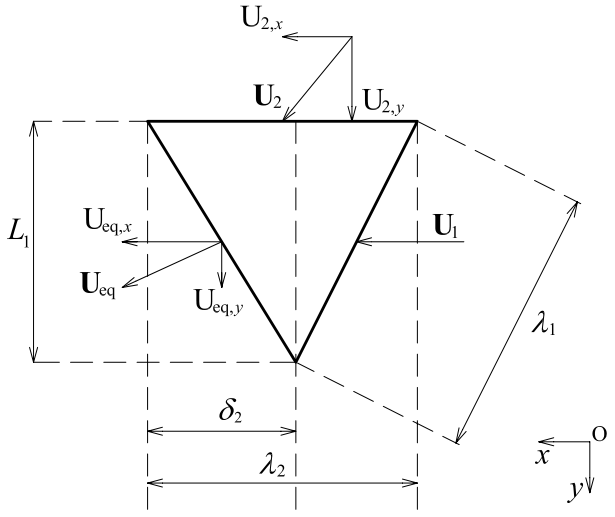


Figure 3.4 – Détail du volume de contrôle et notations.

avec θ l'angle entre les deux branches amont. La solution du système (3.8–3.10) est

$$\left.\begin{aligned} U_{\mathrm{eq},x} &= \frac{A_2}{A_1} \\ U_{\mathrm{eq},y} &= \frac{A_3}{A_1} \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

On peut ensuite écrire

$$\alpha_{\mathrm{eq}} = \arctan\left(\frac{U_{\mathrm{eq},y}}{U_{\mathrm{eq},x}}\right) = \arctan\left(\frac{A_3}{A_2}\right) \tag{3.13}$$

Calcul de la largeur équivalente. La largeur L_{eq} de la branche équivalente est déterminée implicitement par la valeur de α_{eq}, puisque par construction, la branche équivalente se connecte aux coins du volume de contrôle (Figure 3.5). On peut donc écrire les deux relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_{\mathrm{eq}} &= \frac{\beta_1 L_{\mathrm{eq}}}{\lambda_1} \\ \sin\alpha_1 &= \frac{\beta_2 L_{\mathrm{eq}}}{\lambda_2} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Puisque $\beta_1 + \beta_2 = 1$, on peut écrire

$$L_{\mathrm{eq}} = \beta_1 L_{\mathrm{eq}} + \beta_2 L_{\mathrm{eq}} = \lambda_1 \sin\alpha_{\mathrm{eq}} + \lambda_2 \sin\alpha_1 \tag{3.15}$$

Calcul de la pente équivalente. Pour le calcul de i_{eq}, on fait une hypothèse supplémentaire : on suppose que la débitance de la branche équivalente est égale à la somme des débitances des deux branches amont. Ceci nous permet d'écrire

$$Q_{\mathrm{eq}} = D_{\mathrm{eq}} i_{\mathrm{eq}}^{1/2} = (D_1 + D_2) i_{\mathrm{eq}}^{1/2} \tag{3.16}$$

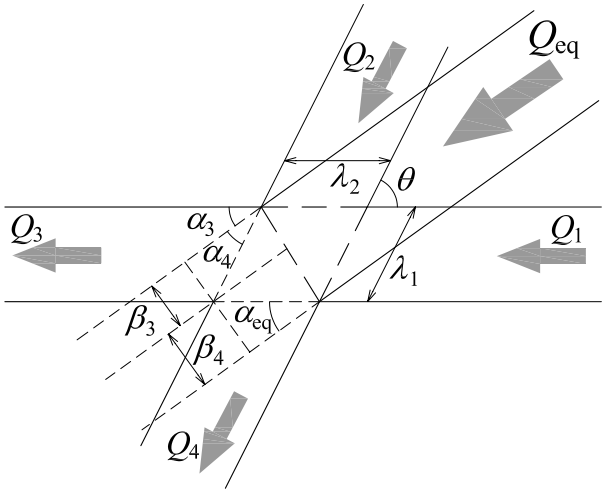


Figure 3.5 – Calcul de L_{eq} et disposition des angles α_{eq} et α_3.

où D_1, D_2 et D_{eq} sont respectivement les débitances dans les branches 1, 2 et dans la branche équivalente. D'autre part, en utilisant l'équation de conservation des débits, on peut écrire

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 = D_1 i_1^{1/2} + D_2 i_2^{1/2} \tag{3.17}$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$i_{eq} = \left(\frac{D_1 i_1^{1/2} + D_2 i_2^{1/2}}{D_1 + D_2} \right)^2 \tag{3.18}$$

Calcul de la profondeur équivalente. On utilise la méthode itérative de Newton pour calculer h_{eq} à partir de Q_{eq}, i_{eq} et L_{eq} avec la relation de Manning–Strickler.

$$Q_{eq} = K \frac{(L_{eq} h_{eq})^{5/3}}{(L_{eq} + 2h_{eq})^{2/3}} i_{eq}^{1/2} \tag{3.19}$$

On en déduit la vitesse V_{eq} de l'écoulement virtuel dans la branche équivalente

$$V_{eq} = \frac{Q_{eq}}{L_{eq} h_{eq}} \tag{3.20}$$

3.2.2 Calcul du coefficient de répartition

Une fois toutes les caractéristiques de la branche équivalente calculées, on applique la méthode du §3.1 avec la branche équivalente comme branche amont et les branches 3 et 4 comme branches aval.

On calcule C_1 avec les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\beta_3 \cos\alpha_3}{\beta_3 \cos\alpha_3 + \beta_4 \cos\alpha_4} \\
\alpha_3 &= \alpha_{\text{eq}} \\
\alpha_4 &= \theta - \alpha_3 \\
\beta_2 &= \frac{1 - \frac{L_3}{L_{\text{eq}} \cos\alpha_3} + \frac{1-\cos^2\alpha_3}{\cos\alpha_3 \sin\alpha_3} \frac{L_4}{L_{\text{eq}} \sin\alpha_4}}{1 + \frac{1}{\tan\alpha_4} \frac{1-\cos^2\alpha_3}{\cos\alpha_3 \sin\alpha_3}} \\
\beta_1 &= 1 - \beta_2
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

On calcule C_2 avec la relation suivante

$$C_2 = \frac{Q_{c,3}}{Q_{c,3} + Q_{c,4}} = \frac{\frac{L_3^{5/3}}{(L_3+1)^{2/3}} i_3^{1/2}}{\frac{L_3^{5/3}}{(L_3+1)^{2/3}} i_3^{1/2} + \frac{L_4^{5/3}}{(L_4+1)^{2/3}} i_4^{1/2}} \tag{3.22}$$

On calcule C_3 avec les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned}
C_3 &= (\beta_3 \cos\alpha_3 + \beta_4 \cos\alpha_4)(1 - \exp^{-aF}) \\
F &= \frac{V_{\text{eq}}}{\sqrt{g h_{\text{eq}}}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

3.3 Couplage avec un modèle 1D

Cette modélisation conceptuelle des carrefours a été couplée avec un modèle d'écoulement pour simuler la propagation d'une crue dans un réseau de rues. Ce couplage a été réalisé au sein de la plate-forme de modélisation Mercedes/Athys développée à l'UMR HydroSciences (Bouvier *et al.*, 1994; Bouvier et Delclaux, 1996).

La modélisation mise en place est basée sur une topologie constituée de mailles carrées régulières (maillage structuré cartésien), et reprend les principes de modélisation du modèle r.water.fea (Vieux et Gauer, 1994; Cappelaere *et al.*, 2003). La connexité entre mailles est assurée par un Modèle Numérique de Terrain (MNT) qui fournit les directions de drainage associées à chacune des mailles. La modélisation se limite à la propagation d'hydrogrammes de crue dans les rues en utilisant le modèle de l'onde cinématique. On ne s'intéresse pas à la production du ruissellement (bien que ceci aurait été possible en utilisant une fonction de production et des données de pluie).

Une maille est traitée différemment selon la catégorie à laquelle elle appartient : les mailles tronçon ou les mailles carrefour. Dans les mailles tronçon, le traitement se limite à la propagation de l'écoulement. Dans les mailles carrefour, le traitement comporte également la répartition de l'écoulement entre deux branches aval.

3.3.1 Propagation dans les mailles tronçon

À chaque pas de temps, le volume d'eau présent sur une maille est transféré vers la maille voisine d'altitude la plus basse. Le modèle de l'onde cinématique est issu du système d'équations de Barré de Saint-Venant (BSV), on l'obtient en négligeant les termes d'inertie et de pression dans le bilan de quantité de mouvement.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{3.24a}$$

$$S_f = S_0 \tag{3.24b}$$

où Q est le débit, A la section d'écoulement, S_0 la pente du fond du canal et S_f la pente de la ligne d'énergie. La première équation est l'équation de continuité, elle est inchangée par rapport au système BSV. La deuxième équation est l'équation dynamique simplifiée, elle est vérifiée seulement si la pente de fond est forte et si l'écoulement ne subit pas d'influences aval.

Remarque : Le système d'équations de Barré de Saint-Venant est la version unidimensionnelle du système « shallow water » présenté au Chapitre 6. Le système BSV est obtenu par le même raisonnement que celui utilisé pour le système « shallow water ».

L'écoulement dans les rues est assimilé à un écoulement en canal rectangulaire. On applique à l'équation (3.24 a) une discrétisation en différences finies selon un schéma explicite décentré amont

$$\mathrm{vol}(i,j,t+\Delta t) = \mathrm{vol}(i,j,t) + \Delta t\,(Q_e(i,j,t) - Q_s(i,j,t)) \tag{3.25}$$

où (i,j) sont les coordonnées d'une maille, $\mathrm{vol}(i,j,t)$ le volume d'eau présent sur la maille de coordonnées (i,j) à l'instant t en m^3, Δt le pas de temps en s, $Q_e(i,j,t)$ et $Q_s(i,j,t)$ sont respectivement la somme des débits entrants et la somme des débits sortants pour la maille (i,j) à l'instant t en m^3/s.
Le débit entrant $Q_e(i,j,t)$ est égal à la somme des débits sortants des mailles amont de la maille (i,j). On relie le volume $\mathrm{vol}(i,j,t)$ à la hauteur de l'écoulement $h(i,j,t)$ par la relation suivante

$$\mathrm{vol}(i,j,t) = l(i,j)L(i,j)h(i,j,t) \tag{3.26}$$

où $l(i,j)$ est la largeur de la rue sur la maille (i,j) (la rue n'a pas nécessairement la même largeur que la cellule dans laquelle elle passe), $L(i,j)$ est la distance parcourue par l'écoulement dans la maille (elle dépend de la largeur de la maille et de la direction de drainage).

L'utilisation de l'équation (3.24 b) revient à considérer que l'écoulement est localement uniforme. On utilise donc l'équation de Manning–Strickler pour relier le débit et la profondeur.

$$Q(i,j,t) = K\frac{[l(i,j)h(i,j,t)]^{5/3}}{[l(i,j)+2h(i,j,t)]^{2/3}}S_0(i,j)^{1/2} \tag{3.27}$$

où K est le coefficient de rugosité de Strickler en $\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$ considéré comme uniforme dans tout le réseau de rues.

Exemple : On considère la maille $(2;2)$ de la Figure 3.6. Les mailles amont de cette cellule sont les mailles $(1;3)$, $(2;3)$ et $(3;3)$. On connaît $\mathrm{vol}(i,j,t)$ sur toutes les mailles, ainsi que $l(i,j)$, $L(i,j)$ et $S_0(i,j)$. Le débit rentrant dans la maille $(2;2)$ est

$$Q_e(2,2,t) = Q_s(1,3,t) + Q_s(2,3,t) + Q_s(3,3,t) \tag{3.28}$$

On calcule la profondeur dans chaque maille

$$h(i,j,t) = \frac{\mathrm{vol}(i,j,t)}{l(i,j)L(i,j)} \tag{3.29}$$

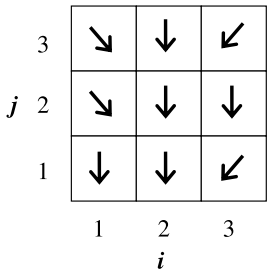


Figure 3.6 – Exemple d'un maillage carré régulier avec des directions de drainage.

On récrit (3.28) en utilisant (3.27)

$$\begin{aligned} Q_e(2,2,t) = {} & K\frac{[l(1,3)h(1,3,t)]^{5/3}}{[l(1,3)+2h(1,3,t)]^{2/3}}S_0(1,3)^{1/2} \\ & + K\frac{[l(2,3)h(2,3,t)]^{5/3}}{[l(2,3)+2h(2,3,t)]^{2/3}}S_0(2,3)^{1/2} \\ & + K\frac{[l(3,3)h(3,3,t)]^{5/3}}{[l(3,3)+2h(3,3,t)]^{2/3}}S_0(3,3)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.30}$$

On calcule $Q_s(2,2,t)$

$$Q_s(2,2,t) = K\frac{[l(2,2)h(2,2,t)]^{5/3}}{[l(2,2)+2h(2,2,t)]^{2/3}}S_0(2,2)^{1/2} \tag{3.31}$$

On peut maintenant calculer le volume à la date $t+\Delta t$

$$\mathrm{vol}(2,2,t+\Delta t) = \mathrm{vol}(2,2,t) + \Delta t\,(Q_e(2,2,t) - Q_s(2,2,t)) \tag{3.32}$$

Le pas de temps est calculé de sorte que la condition de stabilité de Courant soit respectée sur tout le maillage

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max_{i,j} c(i,j,t)} \tag{3.33}$$

On calcule la célérité dans une maille donnée par la relation

$$c(i,j,t) = \left(\frac{\partial Q}{\partial A}\right)_{i,j} \tag{3.34}$$

On fait l'hypothèse que la profondeur de l'écoulement est faible devant la largeur de la rue : $l(i,j) \gg h(i,j,t)$. On peut alors récrire (3.27) sous la forme

$$Q(i,j,t) = Kl(i,j)h(i,j,t)^{5/3}S_0(i,j)^{1/2} \tag{3.35}$$

On injecte (3.35) dans (3.34) avec $A(i,j) = l(i,j)h(i,j)$

$$\begin{aligned} c(i,j,t) &= \frac{1}{l(i,j)}\frac{\partial}{\partial h}\left(Kl(i,j)h(i,j,t)^{5/3}S_0(i,j)^{1/2}\right) \\ &= \frac{5}{3}Kh(i,j,t)^{2/3}S_0(i,j)^{1/2} = \frac{5}{3}V(i,j,t) \end{aligned} \tag{3.36}$$

On peut finalement récrire (3.33) de la façon suivante

$$\Delta t < \frac{3}{5} \frac{\Delta x}{\max_{i,j} V(i,j,t)} \tag{3.37}$$

3.3.2 Traitement des mailles carrefour

À la différence d'une maille tronçon qui a exactement deux autres mailles tronçon dans son voisinage immédiat (constitué des 8 mailles qui entourent la maille considérée), une maille carrefour a au minimum trois autres mailles tronçon dans son voisinage immédiat.

On caractérise une maille carrefour confluente par la présence dans son voisinage immédiat :

- d'au minimum deux mailles tronçon qui sont drainées vers la maille considérée,
- d'une seule maille tronçon qui n'est pas drainée vers la maille considérée .

Si l'on a affaire à une maille carrefour confluente, le débit d'entrée Q_e dans (3.25) sera alors composé de plusieurs termes. Cette configuration n'entraîne pas de modifications du traitement des débits par rapport à la structure de départ du modèle Mercedes.

On caractérise une maille carrefour défluente par la présence dans son voisinage immédiat :

- d'une ou plusieurs mailles tronçon qui sont drainées vers la maille considérée,
- d'au minimum deux mailles tronçon qui ne sont pas drainées vers la maille considérée.

Les mailles tronçon du voisinage immédiat qui sont drainées vers la maille carrefour sont naturellement appelées les mailles amont. Les mailles tronçon du voisinage immédiat qui ne sont pas drainées vers la maille carrefour sont toutes appelées les mailles aval, même si une seule d'entre elles est située dans la direction de drainage de la maille carrefour.

Pour les mailles carrefour défluentes, il faut déterminer si la maille est du type « 1 maille amont – 2 mailles aval », ou bien « 2 mailles amont – 2 mailles aval ». S'il y a plus de deux mailles aval, il est nécessaire de décomposer le carrefour en plusieurs sous-carrefours ayant chacun deux mailles aval.

La pente de chaque maille est calculée lors des opération de prétraitement, il faut fournir au modèle des fichiers contenant les largeurs et le coefficient de Strickler des mailles tronçon, afin de pouvoir utiliser le modèle conceptuel de répartition des débits.

3.4 Mise en œuvre de la modélisation 1D sur un site réel

Cette modélisation conceptuelle des carrefours a été mise en œuvre dans le cadre du projet RIO2 du Ministère de l'Écologie et du Développement Durable (MEDD). L'UMR HydroSciences était partie prenante de ce projet et avait pour objectif d'étudier une modélisation simplifiée des écoulements de crues en milieu urbain alors que d'autres équipes de recherches (Cemagref Lyon, CETE Méditerranée, CETMEF) employaient des modélisations plus complexes.

3.4.1 Description du site et problématique

Le site étudié est le quartier Richelieu situé au centre de la ville de Nîmes (Gard). Nîmes a très souvent été victime d'inondations importantes, mais l'événement le plus marquant est celui du 3 octobre 1988 (Desbordes *et al.*, 1989). L'estimation de la lame

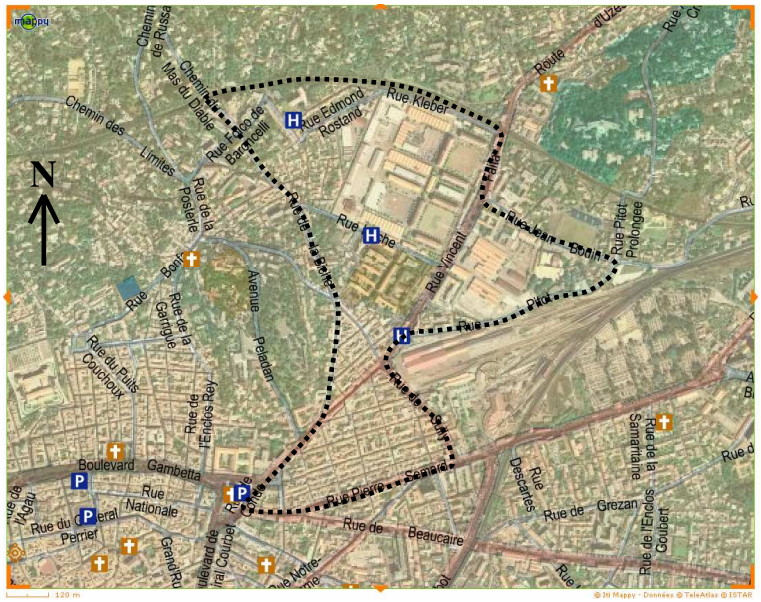


Figure 3.7 – Vue aérienne et plan du quartier Richelieu à Nîmes (la zone d'étude est délimitée par la ligne pointillée).

d'eau totale durant l'événement est de 350 mm, avec une période de retour de l'ordre de 100 ans. Ces pluies diluviennes ont généré un ruissellement important dans les collines qui entourent la ville (formations géologiques peu perméables avec de fortes pentes). Les cadereaux (ruisseaux temporaires) qui drainent ces collines ont la particularité de converger vers la ville de Nîmes, avant de se jeter dans le Vistre à l'aval de Nîmes, dans une zone de très faible pente. Le réseau d'assainissement pluvial a été rapidement saturé et l'eau s'est principalement écoulée dans les rues. Les dégâts matériels ont été considérables et 10 personnes sont décédées. La hauteur d'eau dans les rues était de l'ordre du mètre, avec des vitesses importantes.

Le quartier Richelieu a été retenu par le projet RIO2 parce qu'il constitue une entité de taille modeste que l'on peut relativement bien isoler du reste de la ville (Figure 3.7). Il est délimité au Nord par le remblai de la voie ferrée, qui comporte deux passages où l'eau est passée. Une colline (le mont Duplan) et la gare de marchandises délimitent le quartier respectivement côté Est et côté Ouest. La moitié Nord de la zone d'étude est occupée par de grands bâtiments (hôpital, caserne militaire). La moitié Sud est constituée d'îlots urbains de petite taille.

La capacité de transit du réseau d'assainissement est très faible devant les volumes d'eau amenés par les cadereaux. Il n'a donc pas été pris en compte dans le projet RIO2. Même si la lame d'eau précipitée sur la zone peut représenter un volume important, elle n'a pas été prise en compte. Les apports sont constitués par deux hydrogrammes de projet injectés aux deux entrées en limite Nord de la zone. Ces hydrogrammes d'une période de retour centennale ont été calculés à partir d'une modélisation hydrologique de tout le bassin versant de la ville de Nîmes par la société d'ingénierie BCEOM (BCEOM *et al.*, 2004).

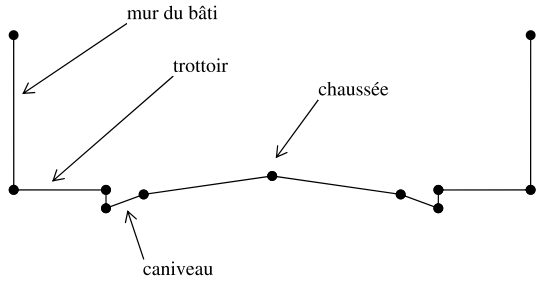


Figure 3.8 – Schéma des points points disponibles par section relevée.

3.4.2 Préparation de la topologie de la zone d'étude

Données disponibles. Pour préparer la topologie de la zone d'étude, deux types de données sont disponibles :

- des relevés topographiques réalisés par la DDE du Gard pour 174 sections de rues de la zone d'études,
- le plan cadastral de la zone.

Chaque section est composée de 11 points : le milieu de chaussée, et de part et d'autre, le haut et le bas du mur des habitations, le bord du trottoir, le fond du caniveau, le bord du caniveau (Figure 3.8). Les coordonnées géographiques et l'altitude sont connues pour les 11 points de chaque section.

Les rues sont assimilées à des canaux de section rectangulaire, on n'utilise que 3 points parmi les 11 disponibles dans une section donnée. Les deux points situés à la base des bâtiments permettent de calculer la largeur de la rue. L'altitude du milieu de la section est utilisée comme altitude de la rue.

Pixellisation du plan cadastral. Le plan cadastral disponible sous forme vectorielle est converti en une grille constituée de mailles carrées régulières (Figure 3.9 gauche) par une opération de pixellisation. Des mailles de 5 m de côté ont été utilisées, des mailles plus grandes n'auraient pas permis une description suffisamment précise du cheminement de l'eau. Les cellules tronçon et carrefour ont été distinguées manuellement des cellules "bâti" à l'intérieur de la grille cadastrale. Chaque cellule porte un code dans la grille cadastrale. Ce code est utilisé par l'outil de prétraitement pour afficher les couleurs (ou les niveaux de gris) sur la Figure 3.9. Mais ce code sert également à indiquer la largeur de la rue qui passe dans la cellule considérée (Figure 3.9 droite). On peut ensuite extraire de ce fond de plan modifié un fichier représentant la position ainsi que les largeurs des rues.

Création du MNT et calcul des pentes. Un MNT a été créé par interpolation des altitudes des points connus (Figure 3.10). Le MNT permet de calculer une carte des directions de drainage sur la zone d'étude. Pour une maille donnée, la direction de drainage est orientée vers la maille voisine d'altitude la plus basse. La pente d'une maille est calculée différemment selon que la direction de drainage est orthogonale ou diagonale (Figure 3.11)

$$\left.\begin{array}{ll} S_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_4 - z_1}{\Delta x} + \dfrac{z_3 - z_2}{\Delta x}\right) & \text{si la direction de drainage est orthogonale} \\ S_0 = \dfrac{z_4 - z_2}{\sqrt{2}\Delta x} & \text{si la direction de drainage est diagonale} \end{array}\right\} \quad (3.38)$$

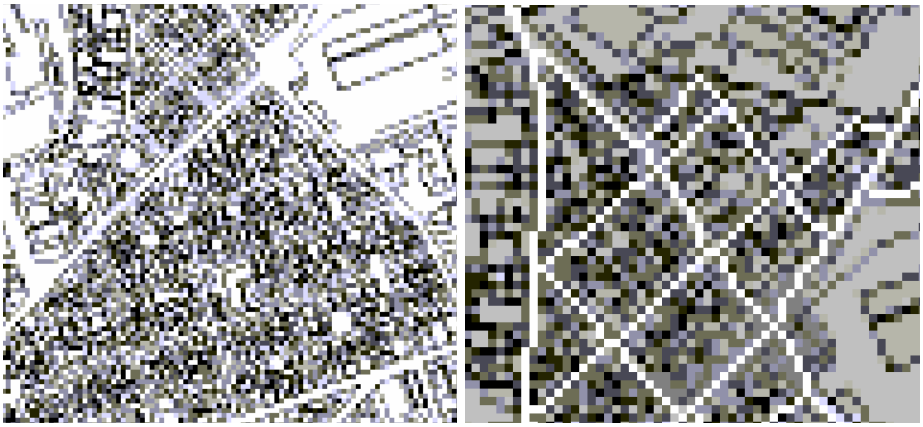


Figure 3.9 – Le plan cadastral pixellisé (gauche), identification du réseau de rues (droite).

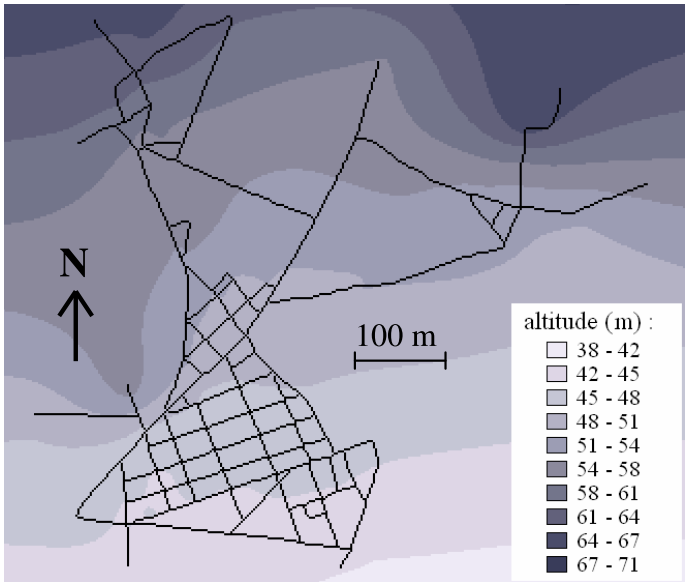


Figure 3.10 – Représentation du MNT par lignes de niveau et position du réseau de rues.

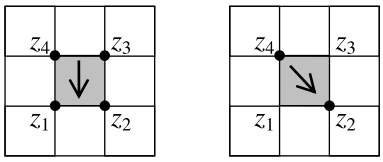


Figure 3.11 – Directions de drainage orthogonale (gauche) et diagonale (droite).

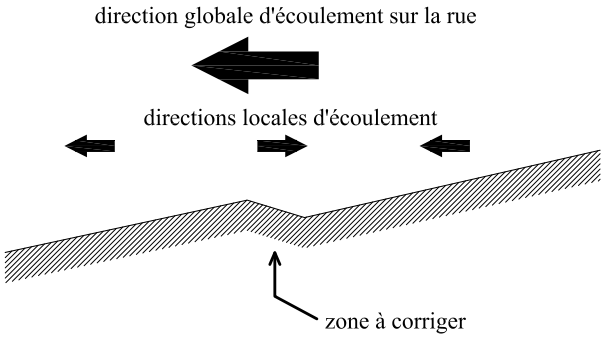


Figure 3.12 – Schéma de la correction locale de la direction de drainage dans une rue.

où z_1, z_2, z_3, z_4 sont les altitudes des 4 sommets de la cellule considérée et Δx la largeur des mailles.

Pour tenir compte du drainage imposé par les rues, on abaisse les altitudes de toutes les mailles du réseau de rues d'une valeur arbitraire de 50 m. De la sorte, l'eau ne peut circuler que dans le réseau de rues (on considère qu'il n'y a pas d'échanges entre la voirie et le bâti). Le sens global d'écoulement dans un tronçon est déterminé en utilisant les altitudes des deux carrefours situés aux extrémités du tronçon. Ceci permet d'éliminer d'éventuelles micro-dépressions dans le profil en long d'une rue (Figure 3.12) qui pourraient conduire à des zones d'accumulation dans cette modélisation.

Dans le cas d'une correction de direction de drainage, la pente calculée peut être négative. Le calcul de la pente est refait en considérant que l'on "agglomère" la maille considérée et la maille aval (Figure 3.13). Si la pente est à nouveau négative, ce processus d'agglomération est répété jusqu'à trouver une pente positive.

Opérations de prétraitement pour la répartition des débits. Il est nécessaire pour l'application du modèle conceptuel de répartition des débits de calculer les caractéristiques géométriques des carrefours défluents, en particulier les angles des différentes branches. L'angle entre deux branches est calculé en utilisant un voisinage de 5×5

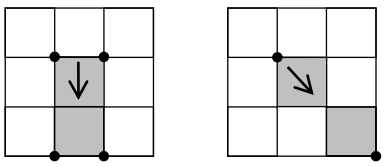


Figure 3.13 – Agglomération de la maille aval dans le cas d'une pente négative.

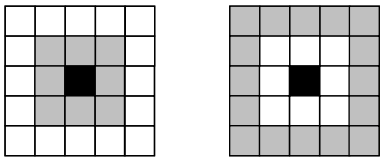


Figure 3.14 – Localisation du premier et du deuxième voisinage (la maille considérée est en noir, à gauche le premier voisinage est en gris, à droite le deuxième voisinage est en gris).

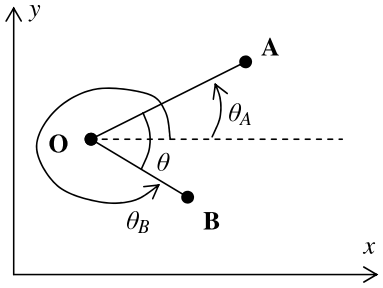


Figure 3.15 – Notations pour le calcul des angles.

mailles autour de la maille carrefour. En effet, si on utilise le voisinage 3×3 autour de la maille carrefour, l'angle entre deux branches peut prendre seulement 8 valeurs puisqu'il y 8 mailles dans ce voisinage (Figure 3.14). En utilisant le voisinage 5×5, cet angle peut prendre 16 valeurs, ce qui permet de décrire plus finement la géométrie du carrefour.

Pour calculer l'angle θ entre deux tronçons de rues (OA) et (OB), on calcule d'abord l'angle θ_{A} entre la branche (OA) et l'horizontale dans le sens trigonométrique, de même pour l'angle θ_{B} (Figure 3.15). En notant x_{A} et y_{A} les coordonnées du point A, et x_{O} et y_{O} les coordonnées du point O, on peut écrire

$$\theta_{\mathrm{A}} = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}}}\right) & \text{si } x_{\mathrm{A}} > x_{\mathrm{O}} \text{ et } y_{\mathrm{A}} > y_{\mathrm{O}} \\ 2\pi - \arctan\left(\dfrac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}}}\right) & \text{si } x_{\mathrm{A}} > x_{\mathrm{O}} \text{ et } y_{\mathrm{A}} < y_{\mathrm{O}} \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}}}\right) & \text{si } x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{O}} \text{ et } y_{\mathrm{A}} < y_{\mathrm{O}} \\ \pi - \arctan\left(\dfrac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}}}\right) & \text{si } x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{O}} \text{ et } y_{\mathrm{A}} > y_{\mathrm{O}} \end{cases} \tag{3.39}$$

On fait de même pour la branche (OB), et on a ensuite $\theta = \theta_{\mathrm{A}} - \theta_{\mathrm{B}}$. Il serait également possible de calculer l'angle entre deux branches par une pondération de l'angle calculé avec le premier voisinage et de l'angle calculé avec le deuxième voisinage autour de la maille intersection, pour obtenir une meilleure estimation de cet angle.

3.4.3 Résultat de la simulation

La simulation 1D + modèle conceptuel de carrefour a été effectuée avec un coefficient de Strickler uniforme de 40 $\mathrm{m}^{1/3}\mathrm{s}^{-1}$. Les deux hydrogrammes de projet sont injectés au niveau des rues Faita et Calvas (respectivement entrée Est et entrée Ouest,

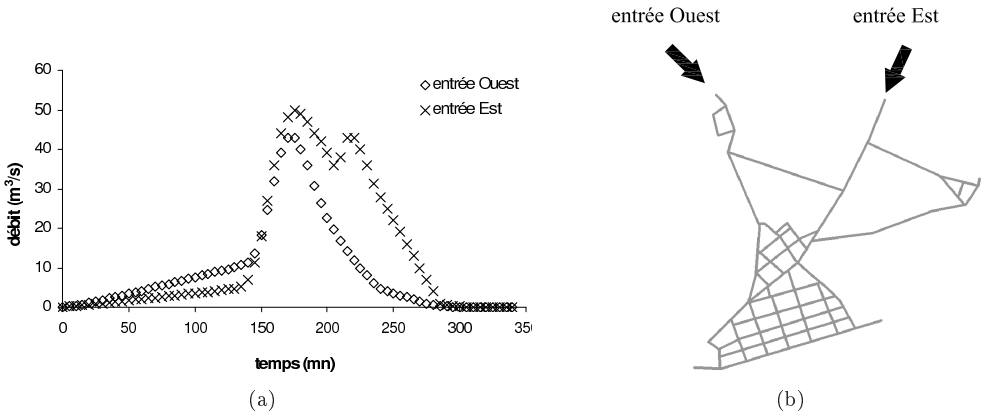


Figure 3.16 – (a) hydrogrammes de projets utilisés pour les simulations, (b) points d'injection des hydrogrammes dans le réseau de rues.

Figure 3.16). Les valeurs maximales simulées de débits et de hauteurs obtenus avec la simulation 1D ont été cartographiées sur la zone d'étude (Figures 3.17 et 3.18).

Les débits les plus importants circulent dans la rue Faita qui traverse la zone d'étude en diagonale et intercepte une partie importante des débits qui arrivent de l'entrée Ouest. Des débits importants circulent dans les rues de la Biche, de Sully, Hoche, de Villars, Catinat, Anatole France. Ces rues sont approximativement alignées sur la ligne de plus grande pente Nord-Sud de la zone d'étude.

Des relevés de laisses de crues ont été effectués par la DDE du Gard après l'évènement du 3 octobre 1988. Il s'agit de traces laissées par l'eau sur les bâtiments. Cependant, il est difficile de comparer les hauteurs maximales simulées avec les cotes des laisses de crues pour deux raisons.

- Les laisses de crues ont souvent été relevées au niveau de singularités hydrauliques (coin de bâtiment, proximité de carrefour), et la modélisation mise en place n'est pas adaptée pour représenter ces singularités.
- Un certain nombre de voitures ont été emportées par l'écoulement au cours de la crue et ont été bloquées dans la partie Sud de la zone où les rues sont moins larges, elles ont ainsi créé des embâcles qui ont très probablement influencé les lignes d'eau dans la moitié Sud.

3.4.4 Comparaison avec un modèle 2D

Plutôt que de comparer les résultats de la simulation avec les laisses de crues, une comparaison a été faite avec les résultats d'une modélisation 2D utilisant les mêmes données. Cette modélisation 2D a été réalisée par Emmanuel Mignot et André Paquier du Cemagref Lyon en utilisant le code de calcul Rubar20 (Paquier *et al.*, 2003) basé sur un algorithme de type Godunov. La modélisation 2D utilise les mêmes hydrogrammes et les mêmes données cadastrales que ceux utilisés avec la modélisation 1D. Les conditions aux limites sont les mêmes dans les deux modélisations (injections de débits à la limite Nord, pas d'échanges voirie-bâti, limites Est et Ouest à débit nul, sortie libre à la limite Sud). On peut trouver plus de détails sur la modélisation 2D dans Mignot (2005).

Estimation du coefficient de Strickler 1D équivalent au coefficient de Strickler 2D. La signification du coefficient de frottements de Strickler est différente pour

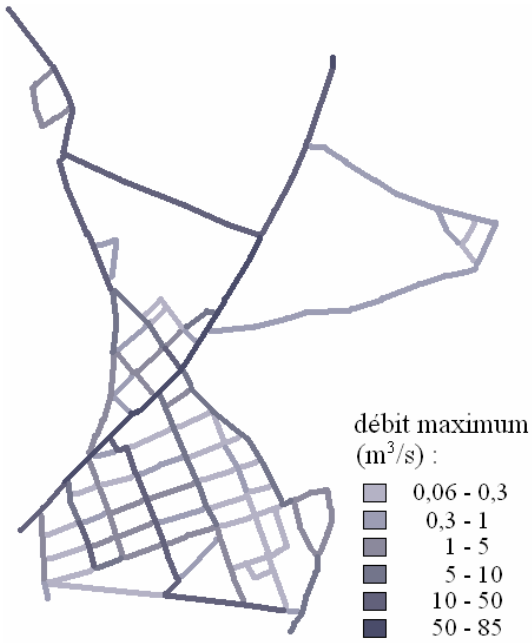


Figure 3.17 – Débits maximums simulés sur la zone d'étude.

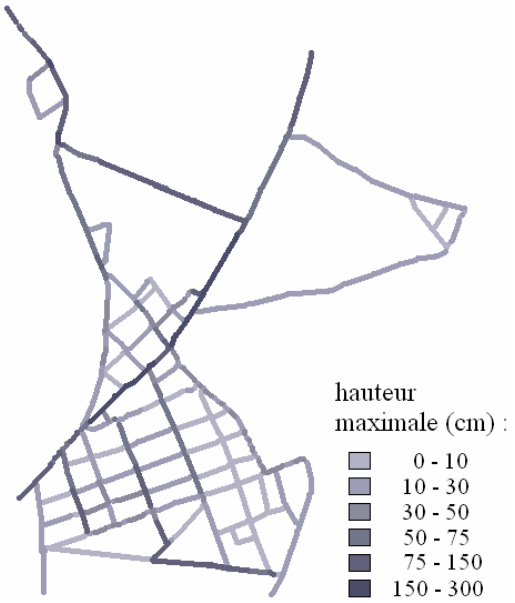


Figure 3.18 – Hauteurs maximales simulées sur la zone d'étude.

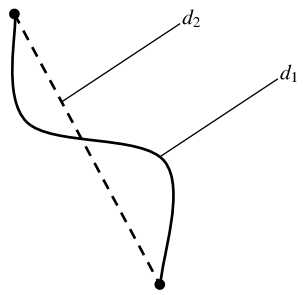


Figure 3.19 – Illustration du calcul de la sinuosité.

Tableau 3.1 – Caractéristiques des 3 cheminements retenus.

cheminement	s
n° 1	1,11
n° 2	1,43
n° 3	1,54
moyen	1,36

une modélisation 2D et pour une modélisation 1D. En effet, dans une modélisation 2D, le coefficient de Strickler représente seulement les frottements de l'écoulement sur le fond du canal. En revanche, pour une modélisation 1D, le coefficient de Strickler doit en plus représenter les pertes de charges se produisant dans les coudes (et les singularités en général). Pour que la modélisation 1D soit équivalente à la modélisation 2D, il est donc nécessaire d'utiliser un coefficient de Strickler $K_{1\mathrm{D}}$ plus faible.

Le coefficient $K_{1\mathrm{D}}$ a été estimé en utilisant une relation empirique (James, 1994) développée par le Soil Conservation Service. On calcule un coefficient de Manning modifié n' à partir du coefficient de Manning n en tenant compte de la sinuosité du canal (la valeur de n est déterminée à partir de tables de références).

$$\frac{n'}{n} = \begin{cases} 0{,}43s + 0{,}57 & \text{si } s < 1{,}7 \\ 1{,}30 & \text{si } s \geq 1{,}7 \end{cases} \tag{3.40}$$

où n' est le coefficient de rugosité de Manning ajusté, n le coefficient de rugosité de Manning pour un écoulement rectiligne et s la sinuosité, égale au rapport de la distance entre deux points mesurée le long de l'axe du cours d'eau sur la distance en ligne droite entre ces deux points (Figure 3.19)

$$s = \frac{d_1}{d_2} \tag{3.41}$$

Pour évaluer la sinuosité sur la zone d'étude, trois cheminements ont été retenus : un cheminement peu sinueux (Figure 3.20 gauche), un cheminement assez sinueux (Figure 3.20 centre) et un cheminement très sinueux (Figure 3.20 droite). La moyenne de la sinuosité sur ces trois cheminements a été estimée à 1,36 (Tableau 3.1).
L'équation (3.40) donne une valeur du rapport n'/n de 1,16. Puisque $K = 1/n$, on obtient finalement la valeur $K_{1\mathrm{D}} \approx 35$ m$^{1/3}$s^{-1} pour le coefficient de Strickler 1D équivalent au coefficient $K_{2\mathrm{D}} = 40$ m$^{1/3}$s^{-1} pris comme référence.

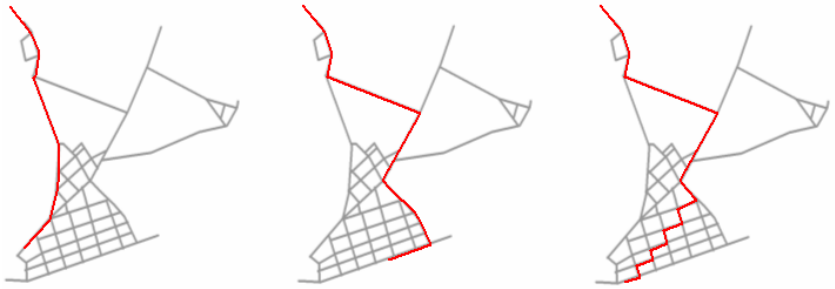


Figure 3.20 – Carte des trois cheminements retenus pour le calcul de la sinuosité.

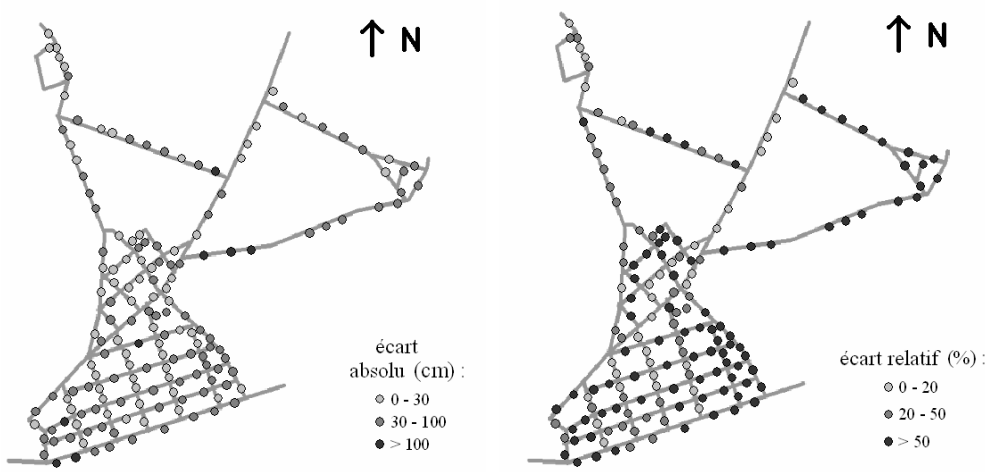


Figure 3.21 – Cartes des écarts absolus (gauche) et des écarts relatifs (droite).

L'événement de projet a été de nouveau simulé sur le quartier Richelieu avec le modèle 1D en prenant un coefficient de Strickler égal à 35 $m^{1/3}s^{-1}$. Cette simulation a ensuite été comparée avec la simulation 2D du Cemagref.

Comparaison des hauteurs maximales simulées. Les profondeurs maximales données par la modélisation 1D et la modélisation 2D ont été comparées sur un ensemble de 163 points positionnés dans les rues (ces points sont suffisamment éloignés des carrefours pour qu'on puisse considérer que l'écoulement y est unidimensionnel). Les écarts absolus ($h_{1D} - h_{2D}$) et les écarts relatifs ($\frac{h_{1D}-h_{2D}}{h_{2D}}$) ont été cartographiés (Figure 3.21). On constate que les écarts sont faibles dans les rues alignées selon la direction de la plus grande pente (Nord-Sud). Mais ces écarts sont plus importants dans les rues orientées Est-Ouest où la pente est plus faible.

Discussion. Plusieurs facteurs peuvent expliquer les écarts sur les hauteurs maximales : l'estimation du coefficient de Strickler, la représentation des carrefours et le modèle de l'onde cinématique.

On a calculé un coefficient de Strickler 1D équivalent au coefficient de Strickler 2D en utilisant une relation empirique, mais cette estimation semble assez grossière. Le calcul de la sinuosité moyenne n'est pas complètement représentatif du cheminement

réel de l'eau. Cependant différents essais ont montré que les hauteurs maximales sont relativement peu sensibles à une modification du coefficient de Strickler. De plus, la modification du coefficient de Manning est appliquée à l'ensemble de la zone d'étude, alors que les pertes de charge liées aux coudes et aux carrefours sont localisées.

Les écarts peuvent également être dus à la répartition des écoulements aux carrefours, puisque la représentation des carrefours est très différente dans les deux modélisations. Cette différence peut provenir du calcul de la branche équivalente réalisé lors de l'extension du modèle de défluence aux carrefours à 4 branches, ce calcul n'est peut-être pas représentatif des phénomènes qui se produisent dans le carrefour. Des phénomènes bidimensionnels comme des zones de recirculation peuvent intervenir dans la modélisation de l'écoulement, ils ne seront pas représentés dans la modélisation 1D.

De plus, le modèle de l'onde cinématique ne permet pas de tenir compte d'éventuelles influences aval, ce qui peut également expliquer les écarts entre les deux modélisations. En particulier, les écarts dans les rues orientées Est-Ouest peuvent être expliqués par leur pente trop faible pour que les hypothèses du modèle de l'onde cinématique soient vérifiées localement.

En l'absence de comparaison avec des données mesurées, on ne peut pas affirmer qu'une modélisation est meilleure que l'autre, même si la modélisation 2D constitue à priori une meilleure représentation des phénomènes physiques. Cependant, les temps de simulation sont assez courts avec la modélisation 1D, 20 mn pour cet événement de projet, alors que plusieurs heures sont nécessaires avec la modélisation 2D.

3.5 Conclusions

Un modèle conceptuel de répartition des débits pour des carrefours à trois ou quatre branches a été mis en place à partir d'un modèle existant conçu pour des défluences de conduites à trois branches. Ce modèle de répartition a été couplé avec une modélisation 1D pour simuler la propagation d'une crue dans le quartier Richelieu à Nîmes. La modélisation 1D utilise le modèle de l'onde cinématique pour transférer les volumes d'eau selon des directions de drainage définies avec un MNT. Des cartes de hauteurs et de débits maximums ont été produites. Une comparaison avec un modélisation 2D mise en œuvre par le Cemagref Lyon montre que les profondeurs maximales simulées sont assez différentes dans les rues à faibles pentes orientées perpendiculairement à la direction principale d'écoulement. La modélisation 1D est cependant beaucoup moins exigeante en temps de calcul que le modélisation 2D.

Chapitre 4

Développement d'une relation empirique de répartition des débits pour un carrefour à 4 branches

Sommaire

4.1 Principe **57**
4.2 Expression polynomiale de la relation de répartition . . **58**
4.2.1 Description du problème 58
4.2.2 Construction des paramètres adimensionnés 59
4.2.3 Écriture du polynôme 60
4.3 Estimation des coefficients du polynôme **62**
4.3.1 Méthode de calcul des dérivées 62
4.3.2 Choix des configurations de carrefours 63
4.3.3 Simulations numériques 65
4.3.4 Expression finale du polynôme 66
4.4 Validation et étude de sensibilité **66**
4.4.1 Validation avec d'autres résultats numériques 66
4.4.2 Validation expérimentale 68
4.4.3 Sensibilité à la géométrie 71
4.4.4 Utilisation en régime transitoire 72
4.5 Comparaison avec le modèle de répartition conceptuel . **74**
4.6 Conclusions **75**

4.1 Principe

Le but de ce travail est de proposer une relation qui fournisse une répartition des débits équivalente à celle donnée par un modèle 2D sur un carrefour à 4 branches. La relation de répartition est cherchée sous la forme d'un polynôme. Les coefficients de ce polynôme sont identifiés en utilisant les résultats de simulations numériques 2D avec

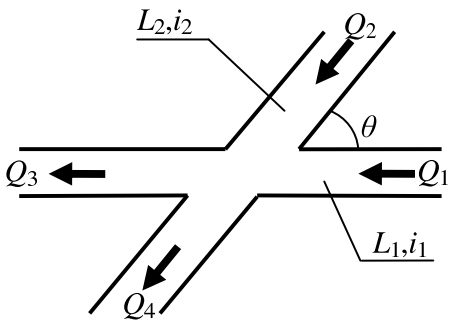


Figure 4.1 – Notations pour le carrefour à 4 branches.

maillage fin d'un écoulement à travers un carrefour à 4 branches. Différentes configurations de pente, de largeur et de débit sont simulées, et un coefficient de répartition est calculé à chaque fois. Les 21 configurations simulées permettent d'identifier les coefficients d'un polynôme du deuxième ordre choisi pour exprimer le coefficient de répartition.

4.2 Expression polynomiale de la relation de répartition

4.2.1 Description du problème

On considère un carrefour à 4 branches résultant du croisement de 2 canaux (Figure 4.1). Les branches 1 et 3 ont les mêmes caractéristiques géométriques, de même que les branches 2 et 4. L'écoulement est considéré uni-dimensionnel et uniforme dans les branches amont et aval. Les variables impliquées dans ce problème sont les suivantes
(i) les variables de l'écoulement :
- les débits Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 aux extrémités amont ou aval des branches,
- les profondeurs h_1, h_2, h_3, h_4 aux extrémités amont ou aval des branches

(ii) les variables géométriques :
- les largeurs b_1 et b_2 des deux canaux,
- les pentes i_1 et i_2,
- l'angle θ formé par les deux rues,
- le coefficient de Strickler considéré comme uniforme sur tout le domaine,
- l'accélération de la pesanteur g

Le problème est entièrement défini par 15 variables (à l'échelle considérée, la tension superficielle et la viscosité sont négligées). On peut réduire le nombre de variables impliquées en considérant les relations qui les lient.

Les 4 débits sont reliés par la relation de continuité

$$Q_4 = Q_1 + Q_2 - Q_3 \tag{4.1}$$

La formule de Manning–Strickler permet de relier les paramètres de l'écoulement et les paramètres géométriques

$$Q = K \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} i^{1/2} \tag{4.2}$$

Les variables K et i peuvent être regroupées en une seule variable $\psi = K^2 i$ qui caractérise la capacité d'un canal à faire transiter l'écoulement. On récrit la relation de Manning–Strickler en utilisant ψ

$$Q = \psi^{1/2} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} \tag{4.3}$$

On considère dans la suite les variables ψ_1 et ψ_2 à la place de K, i_1, i_2, ce qui permet de réduire le nombre total de variables à 14. L'équation du régime uniforme peut être écrite pour chacune des 4 branches.

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= f_1\left(Q_1, \psi_1, b_1\right) \\ h_2 &= f_2\left(Q_2, \psi_2, b_2\right) \\ h_3 &= f_3\left(Q_3, \psi_3, b_3\right) \\ h_4 &= f_4\left(Q_4, \psi_4, b_4\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Puisque Q_4, h_1, h_2, h_3, h_4 se déduisent des autres variables, les variables indépendantes sont au nombre de 9 : $Q_1, Q_2, Q_3, b_1, b_2, \psi_1, \psi_2, g, \theta$. Il y a seulement 2 dimensions impliquées dans ce problème : la longueur [L] et le temps [T]. Le théorème de Vaschy-Buckingham permet d'affirmer qu'une relation entre $9-2=7$ paramètres adimensionnels peut être écrite.

4.2.2 Construction des paramètres adimensionnés

La variable b_1 est considérée comme la longueur de référence et la variable b_1^3/Q_1 est considérée comme le temps de référence. Les 7 paramètres adimensionnés peuvent être formulés ainsi

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= \theta & \Pi_2 &= \frac{Q_2}{Q_1} \\ \Pi_3 &= \frac{Q_3}{Q_1} & \Pi_4 &= \frac{b_2}{b_1} \\ \Pi_5 &= \frac{\psi_1 b_1^{16/3}}{Q_1^2} & \Pi_6 &= \frac{\psi_2 b_1^{16/3}}{Q_1^2} \\ \Pi_7 &= \frac{Q_1}{g^{1/2} b_1^{5/2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

La relation entre ces 7 paramètres peut se mettre sous la forme

$$\Pi_3 = f\left(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7\right) \tag{4.6}$$

Par des substitutions entre paramètres adimensionnés, cette relation peut être récrite

$$\frac{Q_3}{Q_1+Q_2} = f'\left(\theta, \frac{Q_1}{Q_1+Q_2}, \frac{b_1}{b_1+b_2}, \frac{\psi_1}{\psi_1+\psi_2}, \frac{\psi_1 b_1^{16/3}}{Q_1^2}, \frac{Q_1}{g^{1/2} b_1^{5/2}}\right) \tag{4.7}$$

Le membre de gauche de cette équation est le coefficient de répartition des débits C. Le quatrième terme du membre de droite peut être récrit

$$\frac{\psi_1}{\psi_1+\psi_2} = \frac{K^2 i_1}{K^2 i_1 + K^2 i_2} = \frac{i_1}{i_1+i_2} \tag{4.8}$$

puisque K est uniforme. On récrit le cinquième terme du membre de droite en utilisant la définition de ψ

$$\frac{\psi_1 b_1^{16/3}}{Q_1^2} = \frac{Q_1}{K i_1^{1/2} b_1^{8/3}} \tag{4.9}$$

Les deuxième, troisième et quatrième termes du membre de droite sont normalisés, on normalise les autres termes.

$$\left.\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{\theta}{\pi} \\
\Pi_5 &= 1 - \frac{\frac{Q_1}{K i_1^{1/2} b_1^{8/3}}}{1 + \frac{Q_1}{K i_1^{1/2} b_1^{8/3}}} = \frac{K i_1^{1/2} b_1^{8/3}}{Q_1 + K i_1^{1/2} b_1^{8/3}} \\
\Pi_6 &= 1 - \frac{\frac{Q_1}{g^{1/2} b_1^{5/2}}}{1 + \frac{Q_1}{g^{1/2} b_1^{5/2}}} = \frac{g^{1/2} b_1^{5/2}}{Q_1 + g^{1/2} b_1^{5/2}}
\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

On écrit finalement la relation entre les 7 paramètres adimensionnés sous la forme

$$C = \frac{Q_3}{Q_1 + Q_2} = f''\left(\theta, \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}, \frac{b_1}{b_1 + b_2}, \frac{i_1}{i_1 + i_2}, \frac{K i_1^{1/2} b_1^{8/3}}{Q_1 + K i_1^{1/2} b_1^{8/3}}, \frac{g^{1/2} b_1^{5/2}}{Q_1 + g^{1/2} b_1^{5/2}}\right) \tag{4.11}$$

4.2.3 Écriture du polynôme

Développement en série de Taylor. Les variations du coefficient de répartition C sont approchées par un développement en série de Taylor du deuxième ordre

$$\begin{aligned}
C(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = C(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) &+ \sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x}_i) \frac{\partial C}{\partial x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x}_i)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{6} \sum_{j>i}^{6} (x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\theta}{\pi} & x_2 &= \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \\
x_3 &= \frac{b_1}{b_1 + b_2} & x_4 &= \frac{i_1}{i_1 + i_2} \\
x_5 &= \frac{K i_1^{1/2} b_1^{8/3}}{Q_1 + K i_1^{1/2} b_1^{8/3}} & x_6 &= \frac{g^{1/2} b_1^{5/2}}{Q_1 + g^{1/2} b_1^{5/2}}
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

et $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6)$ représente une situation de référence. Il est avantageux de définir la situation de référence de telle sorte que

$$\left.\begin{aligned}
C(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) &= \frac{1}{2} \\
\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = \overline{x}_4 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

On ne peut pas trouver de valeur de référence évidente pour x_5 et x_6. Si on considère un canal avec les caractéristiques suivantes

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= 10 \text{ m} \\ i_1 &= 0{,}01 \text{ m/m} \\ K &= 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

et un écoulement permanent uniforme de débit $Q_1 = 5$ m^3/s, les valeurs de x_5 et x_6 sont

$$\left.\begin{aligned} x_5 &= 0{,}9982 \\ x_6 &= 0{,}9949 \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

Inversement, si on considère un canal de caractéristiques (4.15), on obtient

$$\left.\begin{aligned} Q &= 2\,785 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{si } x_5 = 1/2 \\ Q &= 990 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{si } x_6 = 1/2 \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Il apparaît que les valeurs de $\overline{x}_5$ et $\overline{x}_6$ ne peuvent pas être calculées à priori, elles seront estimées au §4.3.2. Le développement en série de Taylor a été limité au deuxième ordre pour que la relation de répartition reste relativement simple.

Conditions de symétrie. En raisonnant sur la symétrie du carrefour, on peut écrire les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} C(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) &= \frac{1}{2} \\ C(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6) &= \frac{1}{2} \\ C(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, x_6) &= \frac{1}{2} \\ C(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6) &= \frac{1}{2} \\ C(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, x_6) &= \frac{1}{2} \\ C(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, x_5, x_6) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \forall x_1, x_5, x_6 \tag{4.18}$$

La première relation découle de la répartition équitable qui se produit quand les deux canaux ont les mêmes caractéristiques avec le même écoulement. Les autres relations découlent du fait que les paramètres x_5 et x_6 ne concernent qu'une seule branche. On peut écrire directement à partir de (4.18 a-c) que les dérivées suivantes sont nulles

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x_i}\right)_{\substack{x_j=\overline{x}_j \\ j\neq i}} = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}\right)_{\substack{x_j=\overline{x}_j \\ j\neq i}}, \quad i = 1{,}5{,}6 \tag{4.19}$$

Si on substitue la relation (4.12) dans l'équation (4.18 d), on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_5}\right)_{\substack{x_j=\overline{x}_j \\ j\neq 1, j\neq 5}} = 0 \tag{4.20}$$

En raisonnant de la même façon avec les équations (4.18 e-f), on peut écrire

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_6}\right)_{\substack{x_j=\overline{x}_j \\ j\neq 1, j\neq 6}} = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_5 \partial x_6}\right)_{\substack{x_j=\overline{x}_j \\ j\neq 5, j\neq 6}} = 0 \tag{4.21}$$

On peut écrire d'autres relations de symétrie en considérant l'effet d'une inversion des deux branches sur le coefficient de répartition.

$$\left.\begin{array}{l}
C(x_1,x_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4,x_5,x_6) = 1 - C(x_1,1-x_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4,x_5,x_6) \\
C(x_1,\overline{x}_2,x_3,\overline{x}_4,x_5,x_6) = 1 - C(x_1,\overline{x}_2,1-x_3,\overline{x}_4,x_5,x_6) \\
C(x_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,x_4,x_5,x_6) = 1 - C(x_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,1-x_4,x_5,x_6) \\
C(x_1,x_2,x_3,\overline{x}_4,x_5,x_6) = 1 - C(x_1,1-x_2,1-x_3,\overline{x}_4,x_5,x_6) \\
C(x_1,\overline{x}_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = 1 - C(x_1,\overline{x}_2,1-x_3,1-x_4,x_5,x_6) \\
C(x_1,x_2,\overline{x}_3,x_4,x_5,x_6) = 1 - C(x_1,1-x_2,\overline{x}_3,1-x_4,x_5,x_6)
\end{array}\right\} \tag{4.22}$$

En substituant la relation (4.12) dans les équations (4.22 a-c), on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_3^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_4^2}\right) = 0 \tag{4.23}$$

En substituant la relation (4.12) dans les équations (4.22 d-f), on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_3 \partial x_4}\right) = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_4}\right) = 0 \tag{4.24}$$

Finalement, en utilisant les équations (4.19-4.21) et (4.23-4.24), on peut simplifier la relation (4.12)

$$\begin{aligned}
C(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) &= C(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4,\overline{x}_5,\overline{x}_6) + \sum_{i=2}^{4}(x_i-\overline{x}_i)\frac{\partial C}{\partial x_i} \\
&+ (x_1-\overline{x}_1)\sum_{i=2}^{4}(x_i-\overline{x}_i)\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_i} + (x_5-\overline{x}_5)\sum_{i=2}^{4}(x_i-\overline{x}_i)\frac{\partial^2 C}{\partial x_5 \partial x_i} \\
&+ (x_6-\overline{x}_1)\sum_{i=2}^{4}(x_i-\overline{x}_i)\frac{\partial^2 C}{\partial x_6 \partial x_i}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Il faut estimer les 12 dérivées de cette relation pour expliciter le polynôme.

4.3 Estimation des coefficients du polynôme

4.3.1 Méthode de calcul des dérivées

Les différentes dérivées présentes dans la relation (4.25) sont estimées par la méthode des différences finies centrées

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} \approx \frac{C(\overline{x}_i+\delta) - C(\overline{x}_i-\delta)}{2\delta} \quad i = 2,3,4 \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} \approx \frac{1}{2\mu}\Bigg[&\frac{C(\overline{x}_i+\delta,\overline{x}_j+\mu) - C(\overline{x}_i-\delta,\overline{x}_j+\mu)}{2\delta} - \\
&\frac{C(\overline{x}_i+\delta,\overline{x}_j-\mu) - C(\overline{x}_i-\delta,\overline{x}_j-\mu)}{2\delta}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

avec la notation

$$\left.\begin{array}{l}
C(x_i) = C(x_i \neq \overline{x}_i, x_j = \overline{x}_j, j \neq i) \\
C(x_i,x_j) = C(x_i \neq \overline{x}_i, x_j \neq \overline{x}_j, x_k = \overline{x}_k, k \neq i, k \neq j)
\end{array}\right\} \tag{4.28}$$

En utilisant les équations (4.22 a-c), on peut simplifier les deux relations (4.26) et (4.27)

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\delta}\left[C(\overline{x}_i + \delta) - \frac{1}{2}\right] \quad i = 2, 3, 4 \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} \approx \frac{C(\overline{x}_i + \delta, \overline{x}_j + \mu) - C(\overline{x}_i - \delta, \overline{x}_j + \mu)}{2\delta\mu} \quad i = 2, 3, 4 \text{ et } j = 1, 5, 6 \tag{4.30}$$

Chaque dérivée première nécessite de connaître la valeur du coefficient de répartition d'une configuration. Par exemple pour estimer $\partial C/\partial x_2 = \partial C/\partial x_2$, il faut connaître C pour la configuration suivante

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 1/2 & \\ x_2 = \overline{x}_2 + \delta & i.e.\ Q_1 \neq Q_2 \\ x_3 = 1/2 & i.e.\ b_1 = b_2 \\ x_4 = 1/2 & i.e.\ i_1 = i_2 \end{array}\right\} \tag{4.31}$$

Chaque dérivée seconde nécessite de connaître la valeur du coefficient de répartition de deux configurations. Puisque le polynôme (4.25) contient 3 dérivées premières et 9 dérivées secondes, il faut connaître les coefficients de répartition correspondants à 21 configurations pour expliciter ce polynôme.

L'estimation de ces 21 coefficients de répartition est faite en réalisant pour chaque configuration une simulation numérique d'écoulement à travers le carrefour.

4.3.2 Choix des configurations de carrefours

La configuration de référence est définie par les paramètres suivants

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \pi/2 \\ Q_1 = Q_2 = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1} \\ b_1 = b_2 = 10 \text{ m} \\ i_1 = i_2 = 0{,}005 \text{ m/m} \end{array}\right\} \tag{4.32}$$

Les valeurs de $\overline{x}_5$ et $\overline{x}_6$ se déduisent de (4.13) et (4.32).

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x}_5 = 0{,}995 \\ \overline{x}_6 = 0{,}990 \end{array}\right\} \tag{4.33}$$

Les valeurs suivantes de δ et μ ont été retenues dans les équations (4.29) et (4.30) pour la définition des configurations à simuler

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 1/3 \text{ pour } x_2, x_3, x_4 \\ \mu = \pi/3 \text{ pour } x_1 \\ \mu = 0{,}004 \text{ pour } x_5 \\ \mu = 0{,}009 \text{ pour } x_6 \end{array}\right\} \tag{4.34}$$

Les caractéristiques des 3 configurations utilisées pour estimer les dérivées du premier ordre sont reportées au Tableau 4.1. Les caractéristiques des 6 configurations utilisées pour estimer les dérivées croisées du second ordre faisant intervenir θ sont reportées au Tableau 4.2. Les caractéristiques des 12 configurations utilisées pour estimer les dérivées croisées du second ordre faisant intervenir x_5 et x_6 sont reportées au Tableau 4.3. Ces 21 configurations sont appelées « configurations de calage ».

Tableau 4.1 – Caractéristiques des configurations utilisées pour estimer les dérivées du premier ordre.

n°	θ	Q_1	Q_2	b_1	b_2	i_1	i_2	q	l	i	x_5	x_6
01	$\pi/2$	10	2	10	10	0,005	0,005	0,833	0,500	0,500	0,995	0,990
02	$\pi/2$	10	10	10	2	0,005	0,005	0,500	0,833	0,500	0,995	0,990
03	$\pi/2$	10	10	10	10	0,005	0,001	0,500	0,500	0,833	0,995	0,990

Tableau 4.2 – Caractéristiques des configurations utilisées pour estimer les dérivées croisées du second ordre faisant intervenir θ.

n°	θ	Q_1	Q_2	b_1	b_2	i_1	i_2	q	l	i	x_5	x_6
04	$\pi/6$	10	2	10	10	0,005	0,005	0,833	0,500	0,500	0,995	0,990
05	$5\pi/6$	10	2	10	10	0,005	0,005	0,833	0,500	0,500	0,995	0,990
06	$\pi/6$	10	10	10	2	0,005	0,005	0,500	0,833	0,500	0,995	0,990
07	$5\pi/6$	10	10	10	2	0,005	0,005	0,500	0,833	0,500	0,995	0,990
08	$\pi/6$	10	10	10	10	0,005	0,001	0,500	0,500	0,833	0,995	0,990
09	$5\pi/6$	10	10	10	10	0,005	0,001	0,500	0,500	0,833	0,995	0,990

Tableau 4.3 – Caractéristiques des configurations utilisées pour estimer les dérivées croisées du second ordre faisant intervenir x_5 et x_6.

n°	θ	Q_1	Q_2	b_1	b_2	i_1	i_2	q	l	i	x_5	x_6
10	$\pi/2$	10	2	10	10	0,0015	0,0015	0,833	0,500	0,500	0,991	0,990
11	$\pi/2$	10	2	10	10	0,1280	0,1280	0,833	0,500	0,500	0,999	0,990
12	$\pi/2$	10	10	10	2	0,0015	0,0015	0,500	0,833	0,500	0,991	0,990
13	$\pi/2$	10	10	10	2	0,1280	0,1280	0,500	0,833	0,500	0,999	0,990
14	$\pi/2$	10	10	10	10	0,0015	0,0075	0,500	0,500	0,167	0,991	0,990
15	$\pi/2$	10	10	10	10	0,1280	0,0256	0,500	0,500	0,833	0,999	0,990
16	$\pi/2$	0,991	0,198	10	10	5E-5	5E-5	0,833	0,500	0,500	0,995	0,999
17	$\pi/2$	19,200	3,840	10	10	0,0187	0,0187	0,833	0,500	0,500	0,995	0,981
18	$\pi/2$	0,991	0,991	10	2	5E-5	5E-5	0,500	0,833	0,500	0,995	0,999
19	$\pi/2$	19,200	19,200	10	2	0,0187	0,0187	0,500	0,833	0,500	0,995	0,981
20	$\pi/2$	0,991	0,991	10	10	5E-5	2,5E-4	0,500	0,500	0,167	0,995	0,999
21	$\pi/2$	19,20	19,200	10	10	0,0187	0,0935	0,500	0,500	0,167	0,995	0,981

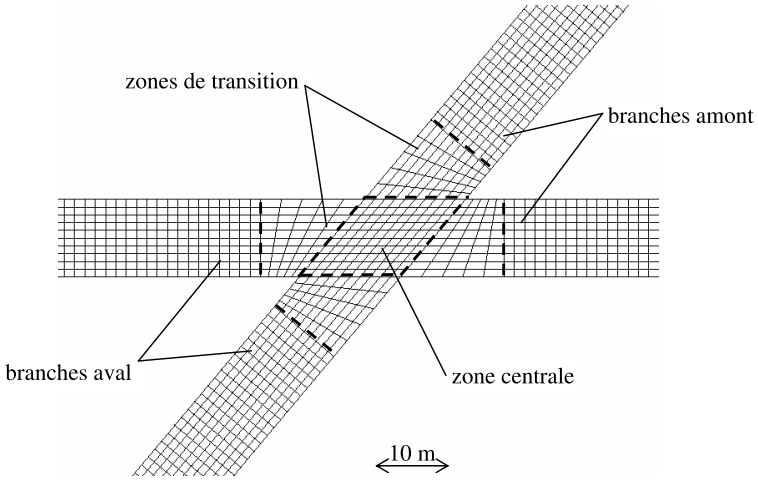


Figure 4.2 – Définition des différentes zones du carrefour pour les simulations numériques.

4.3.3 Simulations numériques

Les simulations numériques d'écoulement dans les carrefours ont été réalisées avec le code de calcul SW2D (Guinot, 2006) dont l'algorithme est décrit à l'annexe A. Un maillage structuré fin (composé de quadrilatères) a été construit pour chaque carrefour. Un carrefour est décomposé en 3 zones (Figure 4.2) :

- les branches amont et aval,
- les zones de transition,
- la zone centrale.

Les branches amont et aval sont planes, la zone centrale est horizontale et les zones de transition sont incurvées. Les zones de transition permettent d'avoir des branches amont et aval alignées et des sections transversales horizontales dans les branches amont et aval.

Des essais numériques ont montré que la convergence du coefficient de répartition est assurée avec un nombre minimum de 5 mailles dans une section en travers. Toutes les rues ont été maillées avec 5 mailles minimum dans la largeur (pour des rues très larges, on a utilisé plus de 5 mailles en largeur pour éviter une distorsion trop importante des mailles), un carrefour est donc maillé avec un minimum de 25 mailles. Globalement, les mailles ont des dimensions de l'ordre du mètre. Les mailles des branches amont et aval sont des rectangles, les mailles de la zone centrale sont des parallélogrammes. Les mailles des zones de transition ont été construites de façon à assurer une transition progressive entre les rectangles et les parallélogrammes.

La longueur des branches amont et aval a été choisie de sorte que le régime uniforme s'établisse entre la limite du domaine et la zone centrale (*i.e.* il n'y a pas d'influence des conditions aux limites sur l'écoulement dans la zone centrale). Pour les pentes fortes, cette longueur a été fixée à 40 m, pour les pentes faibles, elle a été fixée à 150 m. Les débits ont été imposés aux limites amont. La profondeur est imposée aux limites aval, la valeur imposée étant suffisamment élevée pour obtenir un écoulement subcritique à proximité de la limite dans le cas des pentes fortes.

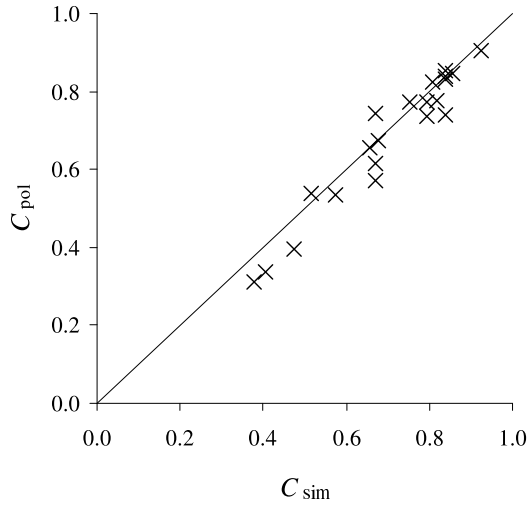


Figure 4.3 – Comparaison de C_{pol} et C_{sim} sur les configurations de calage.

4.3.4 Expression finale du polynôme

La simulation numérique des configurations décrites dans les Tableaux 4.1 à 4.3 permet d'estimer les coefficients du polynôme (4.25). Les coefficients obtenus pour chaque jeu de configurations sont reportés dans les Tableaux 4.4 à 4.6. L'expression finale du polynôme est alors

$$\begin{aligned} C \approx\ & 0{,}5 + 0{,}469(x_2 - 1/2) + 1{,}015(x_3 - 1/2) + 0{,}528(x_4 - 1/2) \\ & + (x_1 - 1/2)\,[1{,}063(x_2 - 1/2) - 0{,}588(x_3 - 1/2) - 0{,}545(x_4 - 1/2)] \\ & + (x_5 - \overline{x}_5)\,[61{,}613(x_2 - 1/2) - 11{,}658(x_3 - 1/2) + 52{,}029(x_4 - 1/2)] \\ & \quad + (x_6 - \overline{x}_6)\,[-40{,}255(x_2 - 1/2) + 2{,}893(x_3 - 1/2) - 4{,}595(x_4 - 1/2)] \end{aligned} \tag{4.35}$$

On remarque que l'on peut classer les trois paramètres x_2, x_3, x_4 selon leur influence relative (au premier ordre) en comparant leurs coefficients respectifs. Ainsi, le paramètre x_3 a la plus grande influence sur C, suivi de x_4 puis de x_2.

Le polynôme (4.35) a été appliqué aux 21 configurations de calage et les coefficients de répartition obtenus (C_{pol}) sont comparés à ceux donnés par les simulations numériques (C_{sim}) (Figure 4.3). L'écart moyen en valeur absolue entre C_{pol} et C_{sim} sur les 21 configurations est de 0,039 (Tableau 4.7).

4.4 Validation et étude de sensibilité

4.4.1 Validation avec d'autres résultats numériques

Le polynôme (4.35) a été appliqué à un jeu de 182 configurations, appelées configurations de validation, différentes des configurations de calage. Ce jeu de configurations de validation est constitué de 13 séries de configurations, chaque série étant composée de 14 configurations identiques mis à part l'angle θ qui varie de 20 à 150°. Les 13 séries sont réparties de la sorte :

- 8 séries où un seul des 3 paramètres x_2, x_3, x_4 est différent de 1/2, mais prend une valeur différente de la valeur utilisée pour les configurations de calage,

Tableau 4.4 – Estimation des dérivées du premier ordre.

configuration n°	$\frac{\partial C}{\partial q}$	$\frac{\partial C}{\partial b}$	$\frac{\partial C}{\partial i}$
01	0,469	–	–
02	–	1,015	–
03	–	–	0,528

Tableau 4.5 – Estimation des dérivées croisées du second ordre faisant intervenir θ.

configuration n°	$\frac{\partial^2 C}{\partial q \partial \theta}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial b \partial \theta}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial i \partial \theta}$
04 et 05	1,063	–	–
06 et 07	–	−0,588	–
08 et 09	–	–	−0,545

Tableau 4.6 – Estimation des dérivées croisées du second ordre faisant intervenir x_5 et x_6.

configuration n°	$\frac{\partial^2 C}{\partial q \partial x_5}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial b \partial x_5}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial i \partial x_5}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial q \partial x_6}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial b \partial x_6}$	$\frac{\partial^2 C}{\partial i \partial x_6}$
10 et 11	61,613	–	–	–	–	–
12 et 13	–	−11,658	–	–	–	–
14 et 15	–	–	52,029	–	–	–
16 et 17	–	–	–	−40,255	–	–
18 et 19	–	–	–	–	2,893	–
20 et 21	–	–	–	–	–	−4,595

Tableau 4.7 – Écarts entre C_{pol} et C_{sim} sur les configurations de calage.

	écart brut	écart en valeur absolue
valeur moyenne	−0,024	0,039
écart-type	0,045	0,033

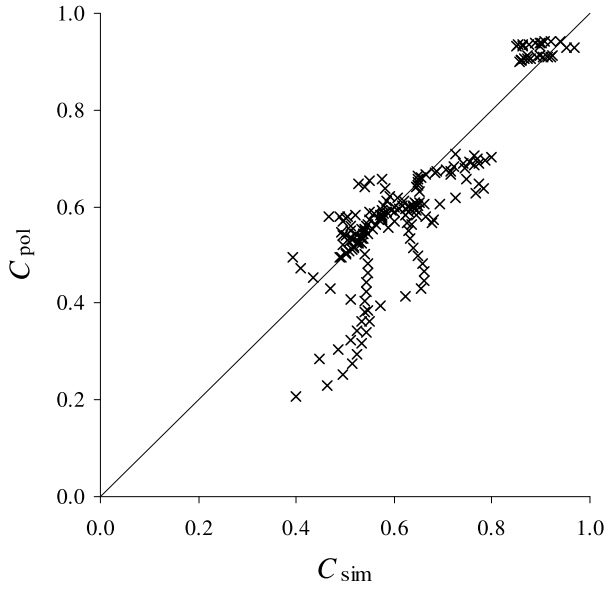


Figure 4.4 – Comparaison de C_{pol} et C_{sim} sur les configurations de validation.

Tableau 4.8 – Écarts entre C_{pol} et C_{sim} sur les configurations de validation.

	écart brut	écart en valeur absolue
valeur moyenne	0,020	0,047
écart-type	0,058	0,040

– 4 séries où 2 des 3 paramètres x_2, x_3, x_4 sont différents de $1/2$,
– 1 série où les 3 paramètres x_2, x_3, x_4 sont différents de $1/2$.

Comme pour les configurations de calage, on compare les coefficients de répartition C_{pol} obtenus avec le polynôme (4.35) et ceux donnés par les simulations numériques (C_{sim}) (Figure 4.4). L'écart moyen en valeur absolue entre C_{pol} et C_{sim} sur les 21 configurations est de 0,047 (Tableau 4.8). Cet écart est très proche de celui obtenu pour les configurations de calage. On peut donc dire que le polynôme (4.35) donne une bonne estimation du coefficient de répartition pour la gamme de paramètres explorée.

4.4.2 Validation expérimentale

Le polynôme (4.35) a été appliqué à une série de configurations pour lesquelles des mesures expérimentales existent. Ce travail expérimental a été réalisé par Emmanuel Mignot (Cemagref Lyon) et Nicolas Rivière (INSA Lyon) au Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique (UMR 5509 CNRS-ECL-INSA-UCBL). Le dispositif expérimental est composé de 4 canaux rectangulaires en verre disposés en croix (Figure 4.5). La longueur et la largeur des canaux sont respectivement de 2 m et 0,3 m. La zone centrale est horizontale. La pente de chaque canal peut être ajustée indépendamment entre −5 % et +5 %. Les débits ont été mesurés avec des débitmètres électromagnétiques disposés sur les conduites d'amenées et de sortie des canaux, les profondeurs ont été mesurées avec un limnimètre à pointe. Deux pompes alimentent deux bacs déversants, lesquels alimentent à leur tour les deux canaux d'entrée. Un dispositif en nid d'abeille permet de tranquilliser l'écoulement et de lui redonner un caractère unidimensionnel.

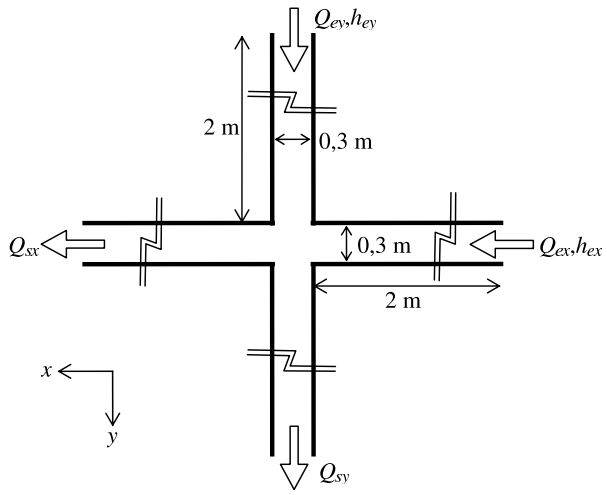


Figure 4.5 – Vue en plan du dispositif expérimental du LMFA.

Tableau 4.9 – Écarts entre C_{pol} et C_{exp} sur les configurations expérimentales.

	écart brut		écart en valeur absolue	
	valeur moyenne	écart-type	valeur moyenne	écart-type
config. 1 %–1 %	0,025	0,020	0,028	0,025
config. 3 %–3 %	0,108	0,037	0,108	0,037
config. 5 %–5 %	0,092	0,074	0,093	0,073
config. 5 %–1 %	−0,158	0,048	0,158	0,048
moyenne	−0,029	0,132	0,115	0,070

Puis deux vannes guillotines permettent de fixer la profondeur à la hauteur uniforme. Le dispositif est utilisé ici avec deux canaux d'entrée et deux canaux de sortie. La pente est la même pour le canal d'entrée et le canal de sortie dans chacune des deux directions x et y. Quatre configurations de pentes ont été testées : 1 %–1 %, 3 %–3 %, 5 %–5 % and 1 %–5 %. Plus de précisions sur ce dispositif expérimental peuvent être trouvées dans (Mignot, 2005).

Les mesures de profondeurs et de débits ont été faites pour 269 configurations. Dans ce travail, seules sont utilisées les configurations pour lesquelles les paramètres x_1 à x_6 sont situés dans la gamme de valeurs utilisée pour le calage du polynôme, soit 64 configurations. Le coefficient de répartition expérimental C_{exp} a été comparé au coefficient de répartition C_{pol} donné par le polynôme (4.35) (Figure 4.6). L'écart moyen en valeur absolue entre C_{pol} et C_{exp} sur les 64 configurations est de 0,115 (Tableau 4.9). L'écart moyen en valeur absolue entre C_{pol} et C_{exp} exprimé en pourcentage est de 24,6 %.
La comparaison de C_{pol} et C_{exp} sur les 205 autres configurations expérimentales donne des écarts nettement plus importants (Figure 4.7). Le polynôme (4.35) peut dans ce cas donner des valeurs hors de la gamme $[0, 1]$.

Il faudrait disposer de mesures expérimentales sur des carrefours à angle différent de 90° pour que la validation du polynôme (4.35) soit complète. Mais ces données sont difficiles à obtenir, puisqu'il faudrait démonter et remonter complètement le dispositif expérimental pour chaque valeur d'angle.

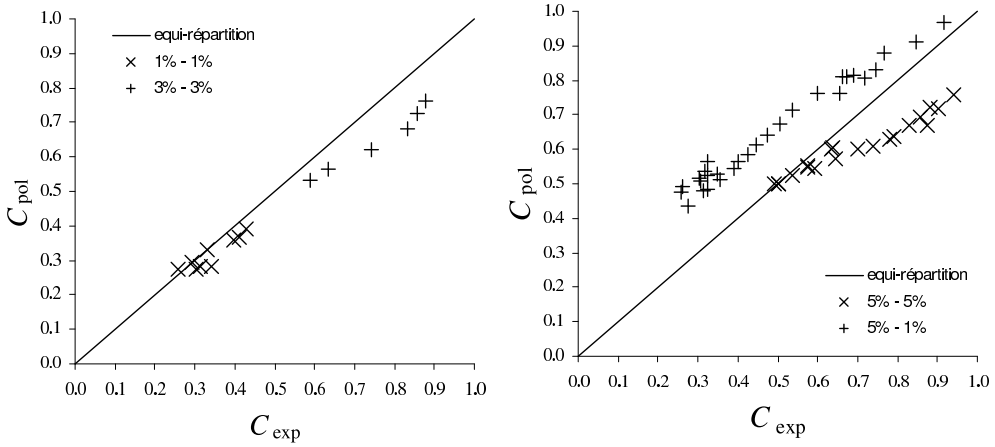


Figure 4.6 – Comparaison de C_{pol} et C_{exp} sur les 64 configurations expérimentales sélectionnées.

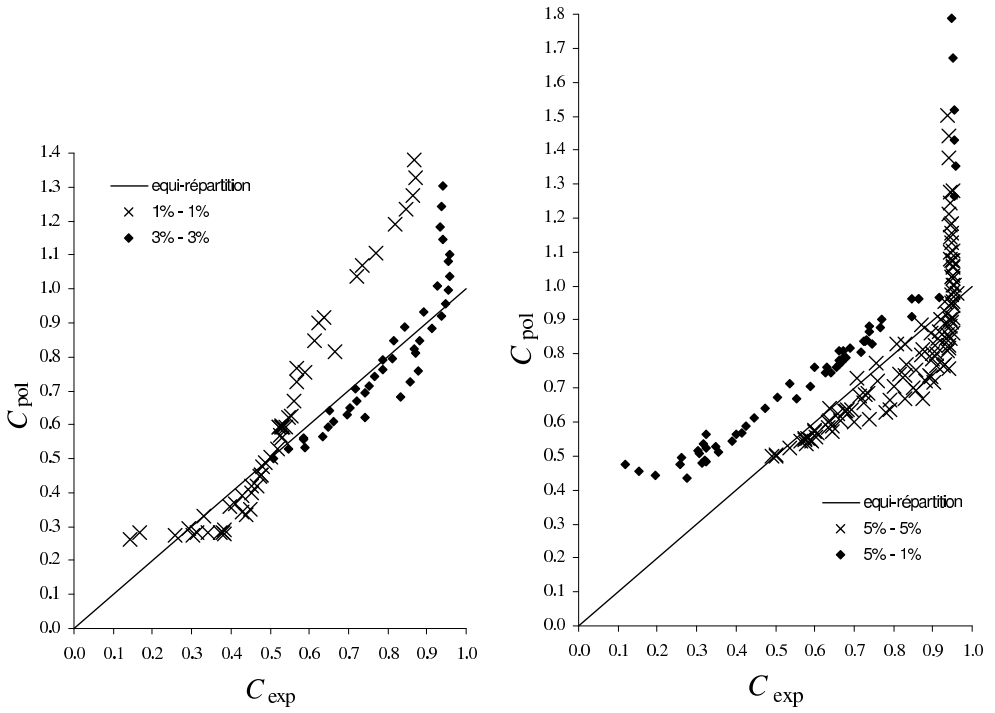


Figure 4.7 – Comparaison de C_{pol} et C_{exp} sur l'ensemble des configurations expérimentales.

Tableau 4.10 – Caractéristiques des 3 configurations pour la perturbation globale de la géométrie.

	Q_1	Q_2	$b_1 = b_2$	$i_1 = i_2$
pente forte	10	2	10	3,0
pente faible (a)	10	2	10	0,3
pente faible (b)	3,333	0,667	10	0,3

4.4.3 Sensibilité à la géométrie

En pratique, les carrefours réels n'ont pas un géométrie "idéale" comme celle décrite au §4.3.3, et souvent leur géométrie n'est pas connue de façon précise. Il est donc nécessaire de quantifier la sensibilité des simulations numériques à la topographie du carrefour pour savoir si le polynôme (4.35) peut être utilisé sur des carrefours de topographie différente de celle décrite au §4.3.3.

Perturbation globale de la géométrie. Une petite perturbation sinusoïdale des cotes du fond a été appliquée à toutes les mailles du carrefour (branches amont et aval, zones de transition, zone centrale)

$$z' = z + \alpha \cos\left(2\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda^2}\right) \tag{4.36}$$

où α et λ sont respectivement l'amplitude et la longueur d'onde de la sinusoïde. Pour reproduire les perturbations d'une chaussée sous l'effet du trafic, les valeurs suivantes ont été retenues

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}05 \text{ m} \\ \lambda = 1 \text{ m} \end{array}\right\} \tag{4.37}$$

Trois configurations ont été simulées, une avec des pentes fortes et deux avec des pentes faibles (Tableau 4.10). Les configurations "pente forte" et "pente faible (a)" ne diffèrent que par leur pente. La configuration "pente faible (b)" est identique à la configuration "pente faible (a)" mis à part que les débits sont divisés par 3 pour obtenir des profondeurs comparables à celles de la configuration "pente forte".
Chacune des 3 configurations est simulée numériquement de deux façons :
- avec la topographie décrite au §4.3.3,
- avec la perturbation globale des cotes du fond définie par (4.36–4.37),

et ceci pour 8 valeurs de l'angle θ (de 20 à 90°). On représente pour chaque configuration le coefficient de répartition obtenu avec la perturbation globale en fonction du coefficient de répartition obtenu sans la perturbation globale (Figure 4.8). On constate que les points sont assez proches de la première bissectrice. L'écart le plus important entre les deux coefficients de répartition correspondants est de 6 %. Dans la gamme de pente et de débits considérée, la perturbation globale du fond n'a pas beaucoup d'influence sur la répartition des débits. Puisque le polynôme (4.35) est issu des résultats des simulations numériques, il peut donc être appliqué à des carrefours dont les branches et la zone centrale ne sont pas parfaitement planes.

Modification de la construction de la zone centrale. La construction du carrefour peut être réalisée différemment de la méthode décrite au §4.3.3 : les branches amont et aval peuvent se connecter directement à la zone centrale sans zones de transition, mais la zone centrale n'est alors plus plane. Deux carrefours ont été construits

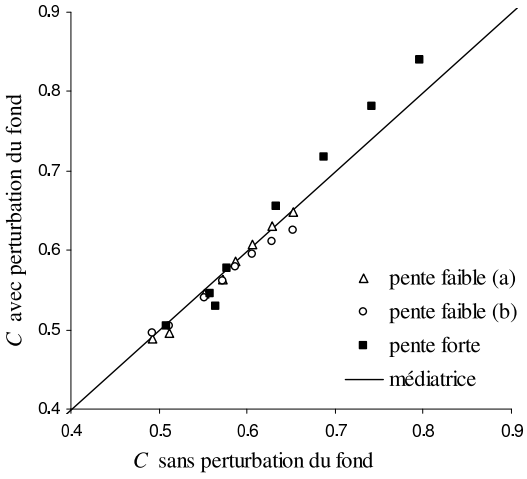


Figure 4.8 – Comparaison du coefficientde répartition sur les 3 configurations avec ou sans la perturbation globale des cotes du fond.

Tableau 4.11 – Caractéristiques des 2 configurations pour la modification de la construction de la zone centrale.

	Q_1	Q_2	$b_1 = b_2$	$i_1 = i_2$
pente forte	10	2	10	3,0
pente faible	10	2	10	0,3

de la sorte, un avec des pentes faibles dans les branches amont et aval, l'autre avec des pentes fortes (Tableau 4.11). L'angle θ a été limité à 90°, pour des valeurs supérieures, une contre-pente apparaît dans la zone centrale. Les 16 configurations obtenues (2 jeux de pentes, 8 valeurs d'angle θ) ont été simulées numériquement, et les coefficients de répartition obtenus ont été comparés avec ceux obtenus pour la construction du carrefour du §4.3.3 (Figure 4.9). On constate que les écarts sont faibles pour les configurations "pente faible" (environ 0,8 %), mais qu'ils sont beaucoup plus importants pour les configurations "pente forte" (environ 21,3 %).

Il est donc préférable de n'utiliser le polynôme (4.35) que pour des carrefours dont la zone centrale est approximativement horizontale.

4.4.4 Utilisation en régime transitoire

Le polynôme (4.35) a été établi en utilisant les résultats de simulations numériques en régime permanent. Il ne devrait à priori être utilisé que pour des écoulements permanents. Son comportement en régime transitoire peut malgré tout être étudié. Les deux configurations du Tableau 4.11 sont à nouveau utilisées. Un hydrogramme d'entrée variable a été construit avec une forme triangulaire : le débit augmente linéairement pendant 60 s pour être multiplié par 2, puis le débit revient à sa valeur de départ en 60 s (Figure 4.10). Cet hydrogramme est appliqué aux branches d'entrée une fois le régime permanent atteint.

Deux situations ont été testées :

- l'hydrogramme variable est appliqué simultanément aux deux branches d'entrée,
- l'hydrogramme variable est appliqué à une seule des deux branches d'entrée.

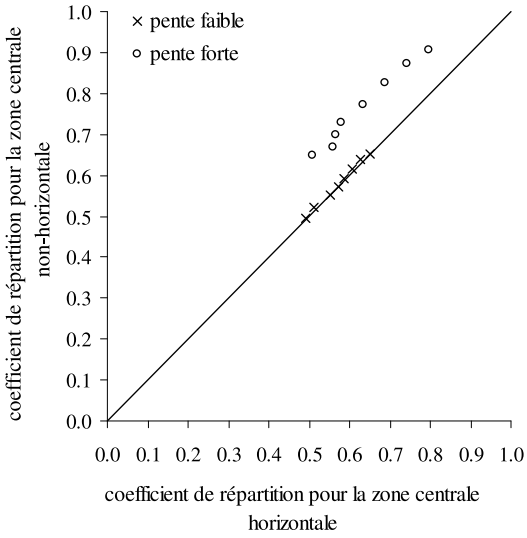


Figure 4.9 – Comparaison du coefficient de répartition pour deux constructions différentes du carrefour et de la zone centrale.

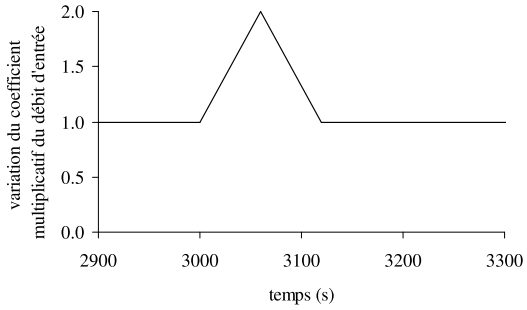


Figure 4.10 – Variation du coefficient multiplicateur du débit d'entrée en fonction du temps.

Ces différents configurations sont simulées numériquement et le coefficient de répartition numérique C_{sim} est comparé à la valeur C_{pol} donnée par le polynôme (4.35).

Deux hydrogrammes d'entrée variables. Puisque le polynôme (4.35) fait intervenir les débits d'entrée par le rapport $q = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2}$, la variation simultanée des deux débits d'entrée ne fait pas varier q et donc C_{pol} reste constant. En revanche, les simulations numériques donnent une oscillation du coefficient C_{sim} suite à la variation des deux débits d'entrée (Figure 4.11). Le coefficient C_{sim} varie globalement de $\pm 7\,\%$ sur les différentes configurations par rapport à la valeur atteinte en régime permanent.

Un seul hydrogramme d'entrée variable. Dans cette situation, le paramètre q varie, et le coefficient C_{pol} est également variable au cours du temps. On représente graphiquement la variation du coefficient de répartition par rapport à la valeur atteinte en régime permanent (Figure 4.12) pour la simulation numérique et le polynôme (4.35). Ceci explique que toutes les courbes commencent avec une ordonnée égale à 1. L'hydrogramme d'entrée variable a été appliqué à la branche n° 2, donc le paramètre

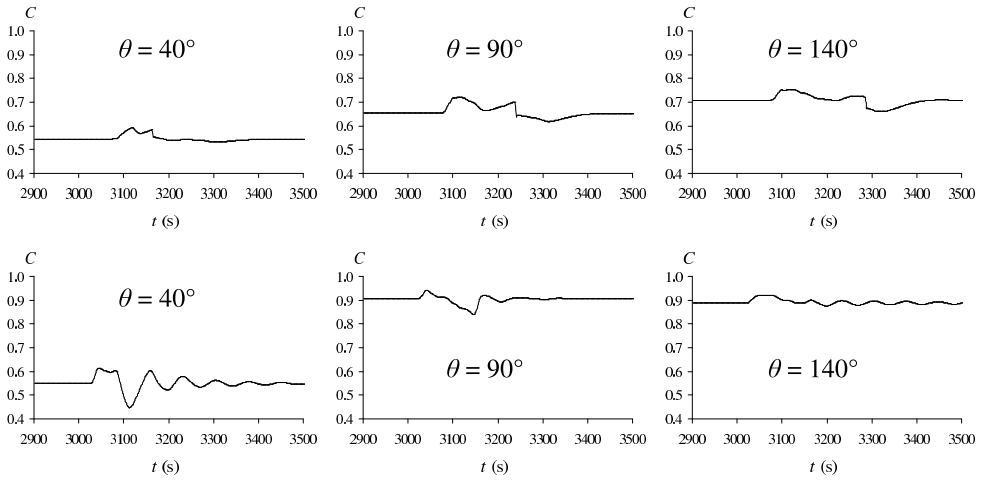


Figure 4.11 – Variation du coefficientde répartition numérique suite à la variation du débit des deux branches d'entrée, haut configuration pente faible, bas configuration pente forte.

q diminue et par conséquent le coefficient C_{pol} sera inférieur à la valeur du régime permanent pendant la période transitoire. On observe approximativement le même comportement avec le coefficient C_{sim} issu de la simulation numérique. Mais l'amplitude de la variation de C n'est pas la même : en configuration "pente faible" C_{pol} varie de 7,75 % alors que C_{sim} varie de 1,22 % dans le cas où l'écart entre les deux courbes est maximal. En configuration "pente forte" C_{pol} varie de 10,25 % alors que C_{sim} varie de 28,66 % également dans le cas où l'écart entre les deux courbes est maximal. De plus, la variation de C_{pol} est proportionnelle à la valeur de l'angle θ, en raison de la présence de la dérivée $\partial C/\partial q \partial \theta$. On n'observe pas ce comportement avec C_{sim}, en particulier pour la configuration "pente forte". On remarque que la variation de C n'est pas simultanée avec la variation du débit d'entrée, C_{pol} diminue dès que le débit d'entrée Q_2 augmente alors que la variation de C_{sim} est plus tardive. Ce décalage est dû au temps nécessaire pour que le changement de débit à la limite amont du domaine se propage jusqu'à la zone centrale puis aux limites aval où est calculé le coefficient de répartition. Ce laps de temps est plus court en configuration "pente forte".

On conclut donc que le polynôme (4.35) ne peut être utilisé en régime transitoire que si les variations de l'écoulement sont faibles et lentes (régime quasi-stationnaire ou données à grands pas de temps).

4.5 Comparaison avec le modèle de répartition conceptuel

On considère à nouveau le jeu de 182 configurations de validation. On applique la méthode décrite au §3.2 pour calculer le coefficient de répartition C_{conc} selon la méthode conceptuelle. On compare les valeurs de C_{pol} et C_{conc} à la valeur de C_{sim} (Figure 4.13). On constate que les coefficients de répartition calculés avec le polynôme (4.35) sont plus proches des coefficients de répartition numériques que les coefficients de répartition calculés avec le modèle conceptuel. La valeur moyenne des écarts de C_{pol} par rapport à C_{sim} est deux fois plus faible que celle de C_{conc} (Tableau 4.12).

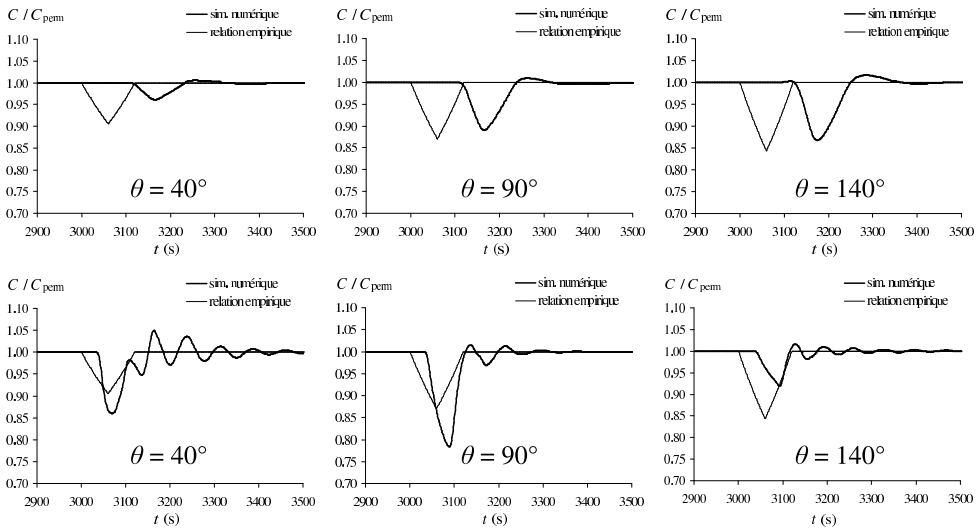


Figure 4.12 – Variation du coefficientde répartition donné par la simulation numérique et par le polynôme (4.35) suite à la variation du débit une seule branche d'entrée, haut configuration pente faible, bas configuration pente forte.

Tableau 4.12 – Comparaison des écarts respectifs entre C_{pol} et C_{sim} et entre C_{conc} et C_{sim} sur les configurations de validation.

	écarts en valeur absolue	
	valeur moyenne	écart-type
polynôme empirique	0,060	0,061
méthode conceptuelle	0,136	0,089

On fait de même avec les configurations expérimentales en comparant les valeurs de C_{pol} et C_{conc} à la valeur de C_{exp} (Figure 4.14). On constate que l'écart en valeur absolue par rapport à C_{exp} est légèrement plus faible pour C_{conc} que pour C_{pol}, mais l'écart en valeur relative est plus faible pour C_{pol} (24,6 %) que pour C_{conc} (27,0 %) (Tableau 4.13).

4.6 Conclusions

Un polynôme du second degré a été construit pour estimer la répartition des débits dans un carrefour à 4 branches (2 entrées – 2 sorties) en régime permanent. Il a été construit à partir des résultats de 12 simulations numériques 2D. Ce polynôme peut s'appliquer à des carrefours de configurations variables : l'angle, les ratios de débits entrants, des largeurs et des pentes sont pris en compte. Il est important que le carrefour

Tableau 4.13 – Comparaison des écarts respectifs entre C_{pol} et C_{exp} et entre C_{conc} et C_{exp} sur les configurations expérimentales.

	écarts en valeur absolue		écarts en valeur relative	
	valeur moyenne	écart-type	valeur moyenne	écart-type
polynôme empirique	0,115	0,070	0,246	0,223
méthode conceptuelle	0,107	0,076	0,270	0,269

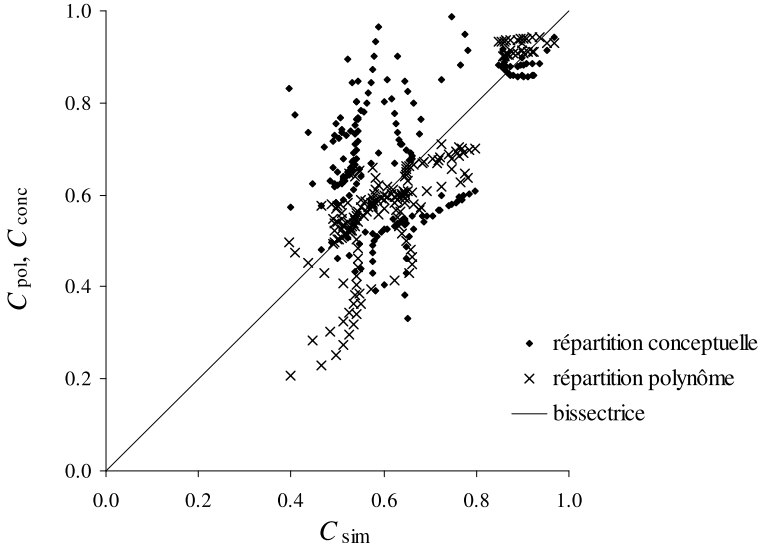


Figure 4.13 – Comparaison de C_{pol}, C_{conc} et C_{sim} sur les configurations de validation.

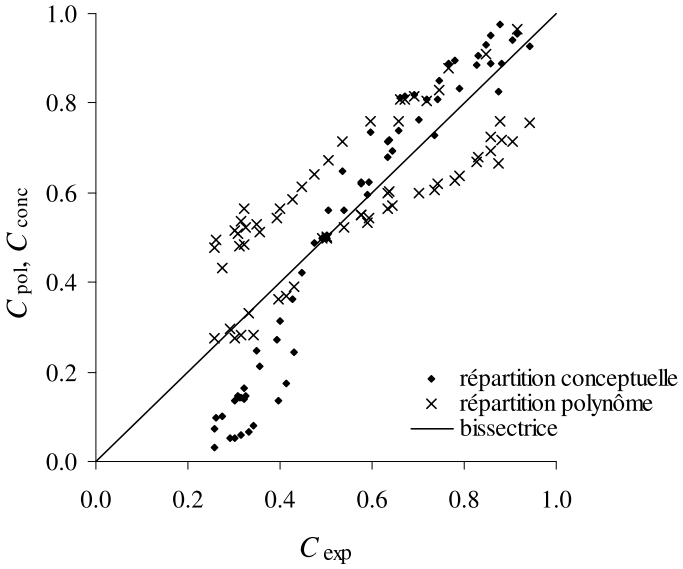


Figure 4.14 – Comparaison de C_{pol}, C_{conc} et C_{exp} sur les configurations expérimentales.

ait une zone centrale horizontale pour pouvoir appliquer le polynôme. L'utilisation de ce polynôme en régime transitoire marqué n'est pas satisfaisante.

Une validation du polynôme sur un ensemble de 182 configurations simulées par le code de calcul 2D montre que cette relation donne une bonne estimation du coefficient de répartition. Ceci permet de dire que la répartition donnée par le polynôme est quasi-équivalente à celle donnée par la simulation numérique 2D dans la gamme de paramètres étudiés, en l'absence d'influences aval. L'application du polynôme à une série de configurations expérimentales donne des résultats un peu moins bons mais acceptables. Cette dégradation de la qualité de l'estimation du coefficient de répartition peut provenir des écarts entre la simulation numérique 2D et les résultats expérimentaux. Une comparaison avec des configurations expérimentales d'angle différent de 90° serait nécessaire pour la cohérence du processus de validation. La comparaison avec la méthode conceptuelle de répartition du Chapitre 3 montre que le polynôme proposé apporte une amélioration du calcul de la répartition des débits.

Ce travail devrait être complété par une étude équivalente consacrée aux carrefours à trois branches pour pouvoir être utilisé dans le cadre d'une modélisation d'un réseau de rues. De même, il faudrait s'intéresser à un carrefour à 4 branches avec 1 entrée et 3 sorties (voire à un carrefour à 5 branches) pour pouvoir traiter tous les cas possibles. Le rôle des influences aval sur la répartition des débits pourrait être étudié en suivant la même démarche, mais le nombre de configurations à traiter serait considérable.

Chapitre 5

Conclusions sur la modélisation 1D avec modèle simplifié de carrefour

La modélisation 1D est à priori une méthode adaptée pour décrire l'écoulement dans un réseau de rues, puisque l'écoulement peut être considéré comme unidimensionnel dans une rue. Un traitement spécifique des carrefours doit permettre de prendre en compte correctement ces singularités où l'écoulement n'est pas unidimensionnel. Le choix a été fait dans ce travail de ne pas utiliser les hypothèses classiques de conservation de la hauteur d'eau ou de la charge pour représenter les carrefours puisque celles-ci sont en désaccord avec les phénomènes observés.

Dans un premier temps, une relation conceptuelle de répartition initialement proposée par Chocat a été étendue pour pouvoir être appliquée à des carrefours à quatre branches. Cette modélisation des carrefours a ensuite été couplée avec un modèle de propagation 1D pour réaliser une application pratique : la simulation de l'inondation d'un quartier de la ville de Nîmes. Cette modélisation donne des résultats intéressants, mais comme elle repose sur l'utilisation du modèle de l'onde cinématique, elle présente à la fois les avantages et les inconvénients de ce modèle de propagation. Les temps de simulation sont assez courts, ce qui permet d'envisager une utilisation dans un cadre opérationnel. Mais la non prise en compte des influences aval limite l'utilisation à des zones où la pente est suffisamment forte, ce qui a été mis en évidence par une comparaison avec une modélisation 2D du même quartier. Par ces limitations, la modélisation mise en place sera souvent inadaptée pour modéliser l'inondation d'un secteur urbain réel.

Le développement d'une relation empirique de forme polynomiale a permis d'obtenir des répartitions de débits plus proches de celles obtenues par les simulations 2D par rapport à la méthode conceptuelle. Comparé aux relations de répartition existantes (empiriques ou théoriques), le polynôme proposé s'adapte à une large gamme d'angles, mais il est limité au régime permanent ou quasi-stationnaire. Comme la méthode conceptuelle, la relation empirique ne tient pas compte des influences aval, ce qui limite son utilisation au cas de carrefours séparés soit par des branches de grande longueur dans lesquelles le régime uniforme peut s'établir, soit par des branches dans lesquelles l'écoulement est en régime supercritique. Le travail réalisé nécessite deux compléments pour envisager une application pratique de cette méthode de répartition :

- une étude du rôle des influences aval sur la répartition des débits,
- une étude d'autres formes de carrefours (3 branches, 5 branches, etc.)

Ceci représente un travail considérable en raison du très grand nombre de configurations à simuler pour prendre en compte toutes les situations possibles.

Étant donné que les deux méthodes de répartition utilisées ne tiennent intrinsèquement pas compte des influences aval, leur couplage avec un modèle de propagation plus complet que celui utilisé (onde diffusive ou équations de BSV complètes) ne permettrait probablement pas d'améliorer significativement la qualité des simulations, puisqu'une éventuelle influence aval ne pourrait pas s'étendre au delà d'un carrefour.

Une alternative à la modélisation 1D consiste à utiliser un modèle 2D classique avec un maillage "adaptatif" du réseau de rues. Un maillage fin au niveau des carrefours permet de traiter ceux-ci sans aucune hypothèse (autre que celle de répartition hydrostatique des pressions) ni ajout de modèle de répartition, et un maillage grossier dans les rues (jusqu'à n'utiliser qu'une maille dans la largeur d'une rue) permet de diminuer le nombre de mailles sans réduire la qualité des simulations. Cette approche permet de ne pas utiliser des hypothèses trop fortes comme celles qui interviennent dans les modèles 1D pour le traitement des carrefours.

Cependant, la nécessité d'assurer une transition progressive entre les zones maillées finement et les zones maillées grossièrement limite la réduction du nombre total de maille sur la zone d'étude et le gain en temps de calcul risque de ne pas être significatif.

Compte-tenu de l'ensemble des limitations évoquées, la suite de ce travail est consacrée au deuxième axe de recherche présenté au §2.8. L'approche 2D est retenue car elle est plus intéressante que l'approche 1D pour prendre en compte les géométries complexes, mais le système d'équations « shallow water » est modifié dans le but de prendre en compte les caractéristiques du milieu urbain sans utiliser un maillage fin. Dans la Partie III ci-après, on présente la modélisation 2D macroscopique, dans laquelle les bâtiments d'une zone urbaine ne sont plus représentés individuellement dans le maillage comme des frontières imperméables. Un terme de porosité introduit dans les équations de propagation représente la réduction de l'espace disponible pour l'écoulement. Ceci permet de modéliser une zone urbaine de grande superficie avec un maillage relativement grossier pour avoir des temps de calcul raisonnables, tout en gardant une bonne qualité de simulation.

Troisième partie

Modélisation macroscopique des zones urbaines

Présentation de la Partie III

Dans le cadre de la modélisation 2D classique, la géométrie des singularités est définie avec une certaine précision et les contours des bâtiments sont représentés comme des frontières imperméables pour constituer le réseau de rues. De plus, il est nécessaire d'avoir un maillage assez fin au niveau des carrefours de façon à représenter correctement la répartition des débits. Ceci conduit généralement à un nombre très important d'éléments dans les maillages utilisés en zone urbaine, et par conséquent les coûts de calcul sont prohibitifs.

À l'inverse, avec la modélisation 2D macroscopique, l'ensemble bâtiments/réseau de voirie est représenté par l'intermédiaire de ses propriétés moyennes. Un terme de porosité est introduit dans les équations de propagation pour représenter la réduction de l'espace disponible pour l'écoulement. Le Chapitre 6 détaille le raisonnement permettant d'établir les équations de propagation avec porosité à partir de bilans de masse et de quantité de mouvement sur un volume de contrôle. Puisqu'il n'est pas nécessaire de mailler les contours des bâtiments avec cette approche, il est possible d'utiliser des mailles de grande taille.
En plus de la porosité, il est nécessaire d'introduire dans les équations de propagation un terme de perte de charge supplémentaire pour représenter les pertes de charge qui se produisent au niveau des carrefours. Ce terme de perte de charge peut être relié aux caractéristiques géométriques du réseau de rues, ceci fait l'objet du Chapitre 7.

La modélisation 2D macroscopique représente donc une alternative intéressante à la modélisation 2D classique en milieu urbain, puisque le nombre total d'éléments pour mailler le domaine considéré est réduit (ces éléments étant plus grands que dans la modélisation 2D classique) et par conséquent le temps de calcul est diminué. La modélisation 2D macroscopique est mise en œuvre sur des modèles réduits et comparée d'une part à la modélisation 2D classique, d'autre part à des mesures expérimentales, dans la Partie IV.

Chapitre 6

Les équations de propagation avec porosité

Sommaire

6.1 Établissement des équations de propagation avec porosité 85
6.1.1 Définition des différents termes de porosité 86
6.1.2 Équation de conservation de la masse 87
6.1.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x 88
6.1.4 Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction y 89
6.1.5 Les forces extérieures 90
6.2 Le système des équations de propagation 94
6.2.1 Forme intégrale 94
6.2.2 Forme différentielle 95
6.3 Structure de la solution analytique 96
6.3.1 La théorie des bicaractéristiques 97
6.3.2 La première famille de surfaces caractéristiques 100
6.3.3 La deuxième famille de surfaces caractéristiques 102
6.4 Le cas particulier de la porosité unique 102
6.4.1 Simplification du système d'équations 102
6.4.2 Calcul de la porosité de passage dans la direction normale à l'interface 103
6.5 Conclusions 104

6.1 Établissement des équations de propagation avec porosité

On considère un volume de contrôle contenant des bâtiments et un réseau de rues. Ces bâtiments sont pris en compte par l'intermédiaire d'une porosité : seule une fraction ϕ de la surface en plan du volume de contrôle peut être occupée par l'eau, le reste de la surface en plan est occupé par les bâtiments considérés comme imperméables. Le

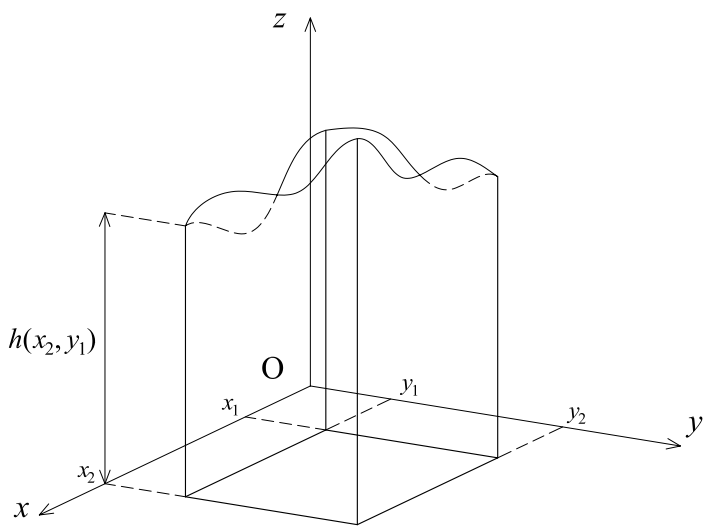


Figure 6.1 – Schéma du volume de contrôle.

volume de contrôle a les dimensions horizontales suivantes : $\delta x = x_2 - x_1$ et $\delta y = y_2 - y_1$ (Figure 6.1). On se place dans un repère orthonormé R(Oxyz).

On considère un écoulement de faible profondeur, et on ne s'intéresse qu'aux valeurs moyennes sur la verticale des variables de l'écoulement. On fait les hypothèses suivantes : (i) l'accélération verticale des particules fluides est négligeable, de sorte que la répartition hydrostatique des pressions est respectée sur la verticale, (ii) le fluide est incompressible, de sorte que la masse volumique ρ est constante et peut être éliminée des équations de bilan.

On fait un bilan de masse et de quantité de mouvement sur cet élément, pendant la durée $\delta t = t_2 - t_1$. Ce volume de contrôle est caractérisé par plusieurs termes de porosité définis au paragraphe suivant, alors que le reste de l'espace est un milieu ouvert.

6.1.1 Définition des différents termes de porosité

On définit la porosité de passage d'une surface donnée, perpendiculaire au plan (xy), comme étant la fraction de cette surface non occupée par des bâtiments. La porosité de passage dans une direction donnée est la porosité de passage d'une surface perpendiculaire à cette section. On s'intéresse dans la suite aux porosités de passage ϕ_x et ϕ_y, respectivement dans les directions (Ox) et (Oy). La porosité de stockage ϕ_s est définie de la même façon mais se rapporte à une surface contenue dans le plan (xy).

Ainsi, pour le volume de contrôle, la porosité de passage caractérise la réduction de la section disponible sur une face donnée de ce volume de contrôle pour un écoulement qui le traverse. La porosité de stockage caractérise la réduction de l'espace ouvert disponible pour l'eau à l'intérieur du volume de contrôle. Elle est égale à l'emprise au sol des bâtiments divisée par la surface en plan totale. La porosité est considérée variable dans l'espace mais constante dans le temps. Il est possible de ne considérer qu'un seul terme de porosité en fixant $\phi_x = \phi_y = \phi_s$ (voir §6.4).

Remarque : On considère que la porosité d'une maille donnée ne varie pas dans le temps pour deux raisons :

– de façon évidente, les bâtiments ne se déplaceront pas au cours de l'inondation

(à moins que l'on s'intéresse à un habitat précaire),

– d'autre part, on considère que les bâtiments ont des parois verticales, alors la porosité est indépendante de la hauteur de l'écoulement.

6.1.2 Équation de conservation de la masse

On écrit la conservation de la masse sur cet élément, c'est à dire que la variation de la masse $m(t)$ contenue dans le volume de contrôle, entre les dates t_1 et t_2, est égale au bilan des flux de masse sur les faces du volume de contrôle (Figure 6.2)

$$m(t_2) - m(t_1) = f_x(x_1) - f_x(x_2) + f_y(y_1) - f_y(y_2) \tag{6.1}$$

où $f_x(x_i)$ et $f_y(y_i)$ sont respectivement les flux de masse dans les directions x et y à travers les faces du volume de contrôle définies par les équations $x = x_i$ et $y = y_i$.

La masse $m(t)$ du volume de contrôle à la date t est égale à

$$m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho\phi_s(x, y, t)h(x, y, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.2}$$

où $h(x, y, t)$ est la hauteur de l'écoulement au point de coordonnées (x, y) à l'instant t. On adopte dans la suite la notation suivante : $(fg)(x, y, t) = f(x, y, t)g(x, y, t)$ où f et g sont deux variables de l'écoulement. La variation de la masse du volume de contrôle est donc égale à

$$m(t_2) - m(t_1) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_s h)(x, y, t_2) - (\phi_s h)(x, y, t_1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.3}$$

Le flux de masse f_x en x_i est égal à

$$f_x(x_i) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho\left(\phi_x uh\right)(x_i, y, t)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t, \quad i = 1 \text{ ou } 2 \tag{6.4}$$

et le flux de masse f_y en y_i est égal à

$$f_y(y_i) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho\left(\phi_y vh\right)(x, y_i, t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad i = 1 \text{ ou } 2 \tag{6.5}$$

où u et v sont respectivement les composantes selon les axes x et y du vecteur vitesse $\mathbf{V}$ (Figure 6.2). On injecte les équations (6.3–6.5) dans (6.1) pour obtenir l'équation de continuité

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_s h)(x, y, t_2) - (\phi_s h)(x, y, t_1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ + & \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_x uh)(x_2, y, t) - (\phi_x uh)(x_1, y, t)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ + & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho\left[(\phi_y vh)(x, y_2, t) - (\phi_y vh)(x, y_1, t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Cette notation intégrale est applicable quelle que soit la taille du volume de contrôle, et quel que soit la variation des variables dans ce volume de contrôle (en particulier, les variables de l'écoulement peuvent être discontinues).

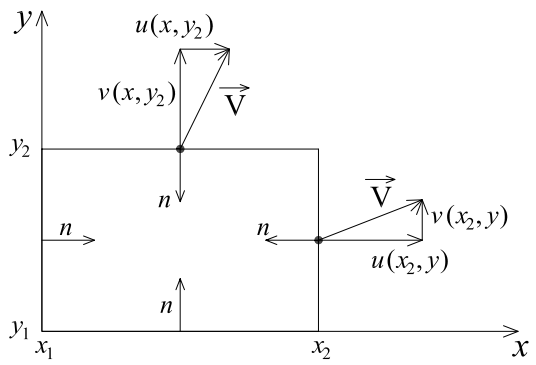


Figure 6.2 – Vue en plan du volume de contrôle avec les composantes du vecteur vitesse impliquées dans les bilans de masse et de quantité de mouvement.

6.1.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x

On fait un bilan de quantité de mouvement dans la direction x (Figure 6.2) : la variation de la quantité de mouvement $M_x(t)$ du volume élémentaire est égale au bilan des flux de quantité de mouvement, auquel il faut ajouter l'action des forces extérieures.

$$M_x(t_2) - M_x(t_1) = F_{xx}(x_1) - F_{xx}(x_2) + F_{xy}(y_1) - F_{xy}(y_2) + \Sigma_{(x)}^{t_2-t_1} \tag{6.7}$$

où $F_{xx}(x_i)$ est le flux de quantité de mouvement principal à travers la face du volume de contrôle définie par l'équation $x = x_i$ (c'est-à-dire la quantité de mouvement créée par la composante u qui se déplace à la vitesse u dans la direction x) et $F_{xy}(y_i)$ est le flux de quantité de mouvement secondaire à travers la face du volume de contrôle définie par l'équation $y = y_i$ (c'est-à-dire la quantité de mouvement créée par la composante u qui se déplace à la vitesse v dans la direction y), $\Sigma_{(x)}^{t_2-t_1}$ est la somme des forces extérieures s'exerçant dans la direction x.
La quantité de mouvement du volume de contrôle à la date t dans la direction x est égale à

$$M_x(t) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho \left(\phi_s h u\right)(x, y, t) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.8}$$

La variation de la quantité de mouvement du volume de contrôle pendant la durée δt est donc égale à

$$M_x(t_2) - M_x(t_1) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho \left[\left(\phi_s h u\right)(x, y, t_2) - \left(\phi_s h u\right)(x, y, t_1)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.9}$$

Le flux de quantité de mouvement principal $F_{xx}(x_i)$ s'écrit

$$F_{xx}(x_i) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho \left(\phi_x u^2 h\right)(x_i, y, t) \mathrm{d}y\mathrm{d}t, \quad i = 1 \text{ ou } 2 \tag{6.10}$$

Le flux de quantité de mouvement secondaire $F_{xy}(y_i)$ s'écrit

$$F_{xy}(y_i) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\phi_y u v h\right)(x, y_i, t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad i = 1 \text{ ou } 2 \tag{6.11}$$

On injecte les équations (6.9–6.11) dans (6.7) pour obtenir l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x.

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_s hu)(x,y,t_2)-(\phi_s hu)(x,y,t_1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left[\left(\phi_x u^2 h\right)(x_2,y,t)-\left(\phi_x u^2 h\right)(x_1,y,t)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \rho\left[(\phi_y uvh)(x,y_2,t)-(\phi_y uvh)(x,y_1,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\Sigma_{(x)}^{t_2-t_1}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

6.1.4 Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction y

On procède de la même façon que pour la direction x pour faire un bilan de quantité de mouvement dans la direction y. La variation de la quantité de mouvement $M_y(t)$ du volume élémentaire est égale à

$$M_y(t_2)-M_y(t_1)=F_{yy}(y_1)-F_{yy}(y_2)+F_{yx}(x_1)-F_{yx}(x_2)+\Sigma_{(y)}^{t_2-t_1} \tag{6.13}$$

où $F_{yy}(y_i)$ est le flux de quantité de mouvement principal à travers la face du volume de contrôle définie par l'équation $y=y_i$ (c'est-à-dire la quantité de mouvement créée par la composante v qui se déplace à la vitesse v dans la direction y) et $F_{yx}(x_i)$ est le flux de quantité de mouvement secondaire à travers la face du volume de contrôle définie par l'équation $x=x_i$ (c'est-à-dire la quantité de mouvement créée par la composante v qui se déplace à la vitesse u dans la direction x), $\Sigma_{(y)}^{t_2-t_1}$ est la somme des forces extérieures s'exerçant dans la direction y.
La quantité de mouvement du volume de contrôle à la date t dans la direction y est égale à

$$M_y(t)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left(\phi_s hv\right)(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.14}$$

La variation de la quantité de mouvement du volume de contrôle pendant la durée δt est donc égale à

$$M_y(t_2)-M_y(t_1)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_s hv)(x,y,t_2)-(\phi_s hv)(x,y,t_1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.15}$$

Le flux de quantité de mouvement principal $F_{yy}(y_i)$ s'écrit

$$F_{yy}(y_i)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \rho\left(\phi_y v^2 h\right)(x,y_i,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\quad i=1 \text{ ou } 2 \tag{6.16}$$

Le flux de quantité de mouvement secondaire $F_{yx}(x_i)$ s'écrit

$$F_{yx}(x_i)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left(\phi_x uvh\right)(x_i,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad i=1 \text{ ou } 2 \tag{6.17}$$

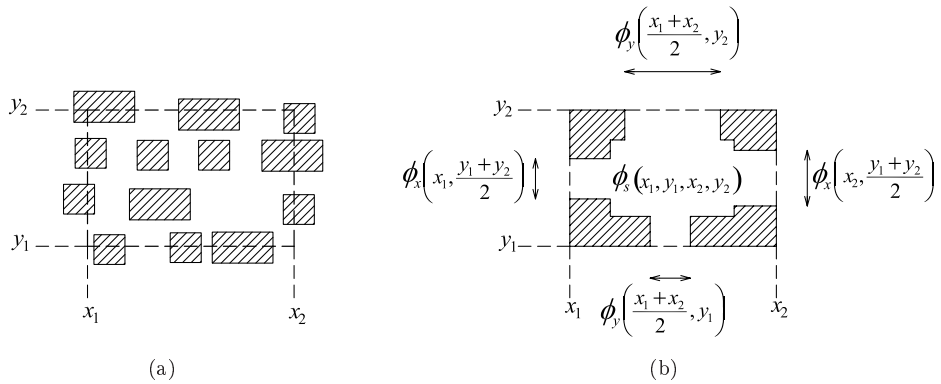


Figure 6.3 – Schéma du volume de contrôle avec différentes représentations de la porosité, (a) représentation réaliste, (b) représentation simplifiée après agglomération des blocs.

On injecte les équations (6.15–6.17) dans (6.13) pour obtenir l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction y.

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_s hv)(x,y,t_2) - (\phi_s hv)(x,y,t_1)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \rho\left[\left(\phi_y v^2 h\right)(x,y_2,t) - \left(\phi_y v^2 h\right)(x,y_1,t)\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{y_1}^{y_2} \rho\left[(\phi_x uvh)(x_2,y,t) - (\phi_x uvh)(x_1,y,t)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \Sigma_{(y)}^{t_2-t_1}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

6.1.5 Les forces extérieures

Ces forces sont (i) les forces de pression, (ii) la force de réaction du fond, (iii) les forces de frottement. Le poids étant orienté selon l'axe (Oz), sa projection sur les axes (Ox) et (Oy) est nulle et il n'intervient pas dans les deux relations de conservation de la quantité de mouvement.

On adoptera dans la suite une représentation simplifiée de la porosité : on considère que les bâtiments sont regroupés le long des limites du volume de contrôle (Figure 6.3). L'espace laissé libre par les blocs sur les faces du volume de contrôle est représenté par une seule ouverture, la porosité est considérée comme un rétrécissement brutal (on passe d'une largeur de 1 à une largeur ϕ_x ou ϕ_y).

Les forces de pression. Ces forces sont de deux types (Figure 6.4) :

- les forces de pression exercées par le fluide qui entoure le volume de contrôle à travers les ouvertures constituant la porosité de passage (notées avec un exposant (1)),
- les forces de pression exercées par les bâtiments sur le fluide (notées avec un exposant (2)).

Puisque l'on a fait l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions selon la verticale, la pression locale s'exprime sous la forme $p = \rho g z$, où z est la profondeur du point considéré mesurée depuis la surface. Si on considère la face du volume de contrôle définie par $x = x_1$, l'intégration de la force ponctuelle de pression sur cette

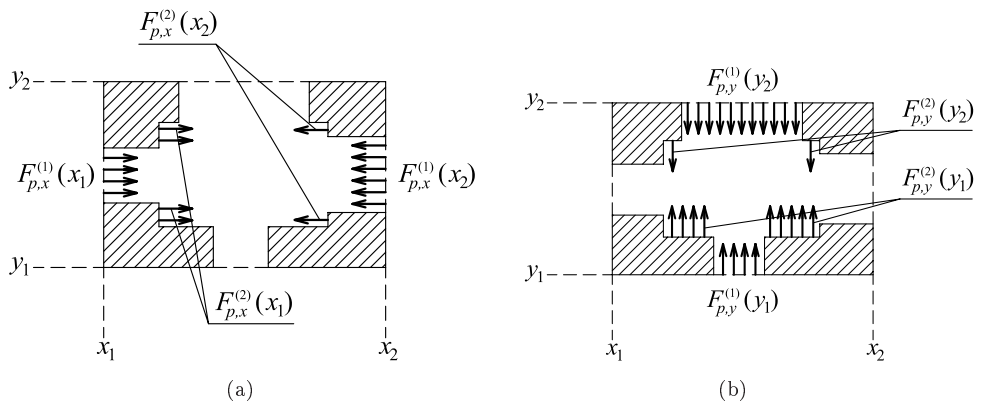


Figure 6.4 – Schéma des deux types de forces de pression considérées sur le volume de contrôle, (a) dans la direction x, (b) dans la direction y.

face donne

$$\begin{aligned}
F_{p,x}^{(1)}(x_1) &= \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{h(x_1,y)} \rho g z \sigma_x(x_1,y,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{h(x_1,y)} \rho g z \phi_x(x_1,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \rho g \phi_x(x_1,y) \left[\int_0^{h(x_1,y)} z \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \\
&= \rho g \int_{y_1}^{y_2} \phi_x(x_1,y) \frac{1}{2} h^2(x_1,y) \mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{6.19}$$

où $\sigma_x(x_1,y,z)$ est la largeur effective de la face définie par (x_1,y) à la profondeur z (correspondant à la section de passage disponible pour le fluide). En effet, on considère que la porosité de passage ne varie pas selon la verticale, et les faces du volume de contrôle sont verticales. En faisant le même raisonnement, on peut écrire pour la face $x = x_2$

$$F_{p,x}^{(1)}(x_2) = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} \phi_x(x_2,y) \frac{1}{2} h^2(x_2,y) \mathrm{d}y \tag{6.20}$$

La résultante $F_{p,x}^{(1)}$ des forces de pression exercées sur le volume de contrôle selon l'axe x par le flux entrant et sortant est donc

$$\begin{aligned}
F_{p,x}^{(1)} &= F_{p,x}^{(1)}(x_1) + F_{p,x}^{(1)}(x_2) \\
&= \frac{1}{2} \rho g \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\phi_x h^2\right)(x_1,y) - \left(\phi_x h^2\right)(x_2,y) \right] \mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{6.21}$$

De la même façon, on peut écrire la résultante $F_{P,y}^{(1)}$ des forces de pression sur le volume de contrôle selon l'axe y

$$F_{p,y}^{(1)} = \frac{1}{2} \rho g \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\phi_y h^2\right)(x,y_1) - \left(\phi_y h^2\right)(x,y_2) \right] \mathrm{d}x \tag{6.22}$$

À ces forces de pression s'ajoutent les forces de pression exercées par les bâtiments (Figure 6.4). Pour la face $x = x_1$ on obtient

$$\begin{aligned} F_{p,x}^{(2)}(x_1) &= \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{h(x_1,y)} \rho g z \sigma_s(x_1, y, z) \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{h(x_1,y)} \rho g z \left[\phi_s(x_1, y_1, x_2, y_2) - \phi_x(x_1, y)\right] \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \rho g \frac{1}{2} h^2(x_1, y) \left[\phi_s(x_1, y_1, x_2, y_2) - \phi_x(x_1, y)\right] \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.23}$$

De la même manière, on peut écrire pour la face $x = x_2$

$$F_{p,x}^{(2)}(x_2) = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g \frac{1}{2} h^2(x_2, y) \left[\phi_s(x_1, y_1, x_2, y_2) - \phi_x(x_2, y)\right] \mathrm{d}y \tag{6.24}$$

La résultante $F_{p,x}^{(2)}$ des forces de pression exercées sur le volume de contrôle selon l'axe x est donc

$$\begin{aligned} F_{p,x}^{(2)} &= P_x^{(2)}(x_1) + P_x^{(2)}(x_2) \\ &= \frac{1}{2}\rho g \phi_s(x_1, y_1, x_2, y_2) \int_{y_1}^{y_2} \left[h^2(x_1, y) - h^2(x_2, y)\right] \mathrm{d}y \\ &\qquad + \frac{1}{2}\rho g \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\phi_x h^2\right)(x_2, y) - \left(\phi_x h^2\right)(x_1, y)\right] \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.25}$$

En procédant de la même façon pour l'axe y, la résultante $F_{p,y}^{(2)}$ s'écrit

$$\begin{aligned} F_{p,y}^{(2)} &= \frac{1}{2}\rho g \phi_s(x_1, y_1, x_2, y_2) \int_{x_1}^{x_2} \left[h^2(x, y_1) - h^2(x, y_2)\right] \mathrm{d}x \\ &\qquad + \frac{1}{2}\rho g \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\phi_y h^2\right)(x, y_2) - \left(\phi_y h^2\right)(x, y_1)\right] \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.26}$$

Remarque : On peut faire une analogie avec une variation de section pour un écoulement unidimensionnel.

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho g \int_0^{h(x)} (h(x) - \eta) \frac{\partial \sigma_x(x, \eta)}{\partial x} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}x \tag{6.27}$$

où $\sigma_x(x, \eta)$ est la largeur de cet écoulement à l'abscisse x et à la profondeur η.

La force de réaction du fond. Puisque les forces de frottements sont traitées séparément, cette force est dirigée perpendiculairement au fond, et elle s'exerce sur la base du volume élémentaire. Par définition, sa composante verticale s'équilibre avec le poids, et sa projection sur les axes x et y sera fonction de la pente du fond. Soit $S_{0,x}$ et $S_{0,y}$ la pente du fond respectivement selon l'axe x et selon l'axe y. Le poids P du volume de contrôle s'écrit

$$P = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (\phi_s h)(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.28}$$

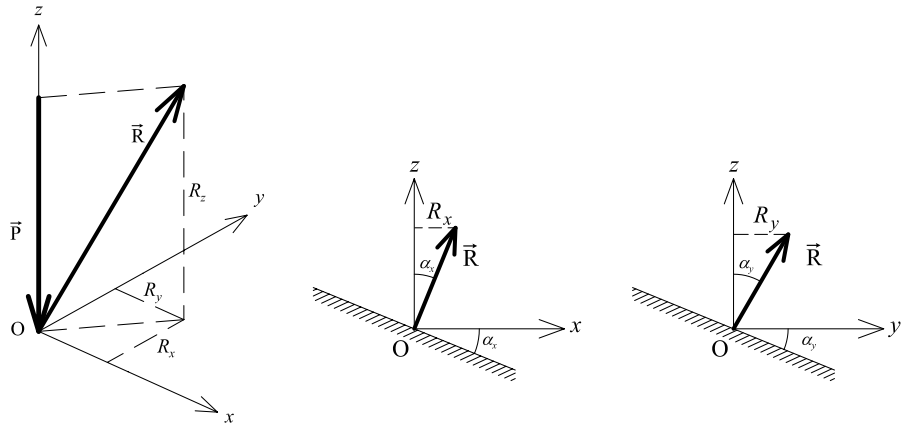


Figure 6.5 – Schéma du poids et de la force de réaction.

Soit $F_{r,x}, F_{r,y}, F_{r,z}$ les projections de la force de réaction $\mathbf{F}_r$ respectivement sur les axes x, y, z (Figure 6.5). On a les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} F_{r,z} &= P \\ F_{r,x} &= \tan(\alpha_x) F_{r,z} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} S_{0,x}(x) \left(\phi_s h\right)(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ F_{r,y} &= \tan(\alpha_y) F_{r,z} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} S_{0,y}(y) \left(\phi_s h\right)(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

Les forces de frottement. Elles peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} F_{f,x} &= \int_{\Gamma} -\tau_x \phi_s \mathrm{d}\Gamma \\ F_{f,y} &= \int_{\Gamma} -\tau_y \phi_s \mathrm{d}\Gamma \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

où τ_x et τ_y sont respectivement les contraintes de cisaillement selon les axes (Ox) et (Oy), Γ est la surface de contact entre le volume de contrôle et le fond. On fait l'hypothèse classique que la pente de la ligne de charge S_f est localement égale à celle du régime uniforme de même débit. On peut donc écrire

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= \rho g R_{h,x} S_{f,x} \\ \tau_y &= \rho g R_{h,y} S_{f,y} \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

où $R_{h,x}$ et $R_{h,y}$ sont respectivement le rayon hydraulique de l'écoulement dans la direction x et y. On fait également l'hypothèse que la largeur de la section d'écoulement est grande par rapport à la profondeur, et donc le rayon hydraulique peut être approché par la hauteur de l'écoulement. On obtient finalement

$$\left.\begin{aligned} F_{f,x} &= -\rho g \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} S_{f,x} \left(\phi_s h\right)(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ F_{f,y} &= -\rho g \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} S_{f,y} \left(\phi_s h\right)(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

La pente de la ligne de charge S_f est approximée en utilisant la formule de Manning-Strickler

$$\left.\begin{aligned} S_{f,x} &= \frac{\left(q^2+r^2\right)^{1/2}}{K^2h^{10/3}}\,q \\ S_{f,y} &= \frac{\left(q^2+r^2\right)^{1/2}}{K^2h^{10/3}}\,r \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

où q et r sont respectivement les débits unitaires selon les axes x et y.

6.2 Le système des équations de propagation

6.2.1 Forme intégrale

On obtient le système des équations de propagation en deux dimensions d'espace en réunissant l'équation de conservation de la masse (6.6) et les deux équations de conservation de la quantité de mouvement (6.12) et (6.18) et en introduisant les forces de pression (6.21), (6.22), (6.25) et (6.26), la force de réaction (6.29) et les forces de frottements (6.32). On considère que la masse volumique ρ est constante et peut être éliminée des équations.

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathbf{U}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{t_1}^{t_2}\int_{y_1}^{y_2}\mathbf{F}\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\mathbf{G}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{S}\mathrm{d}t \tag{6.34}$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} (\phi_s h)(x,y,t_2) - (\phi_s h)(x,y,t_1) \\ (\phi_s uh)(x,y,t_2) - (\phi_s uh)(x,y,t_1) \\ (\phi_s vh)(x,y,t_2) - (\phi_s vh)(x,y,t_1) \end{bmatrix} \tag{6.35a}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\phi_x uh)(x_2,y,t) - (\phi_x uh)(x_1,y,t) \\ (\phi_x u^2h)(x_2,y,t) - (\phi_x u^2h)(x_1,y,t) \\ (\phi_x uvh)(x_2,y,t) - (\phi_x uvh)(x_1,y,t) \end{bmatrix} \tag{6.35b}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\phi_y vh)(x,y_2,t) - (\phi_y vh)(x,y_1,t) \\ (\phi_y uvh)(x,y_2,t) - (\phi_y uvh)(x,y_1,t) \\ (\phi_y v^2h)(x,y_2,t) - (\phi_y v^2h)(x,y_1,t) \end{bmatrix} \tag{6.35c}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p,x}^{(1)} + F_{p,x}^{(2)} + F_{r,x} + F_{f,x} \\ F_{p,y}^{(1)} + F_{p,y}^{(2)} + F_{r,y} + F_{f,y} \end{bmatrix} \tag{6.35d}$$

Cette écriture des équations de propagation, bien que lourde à écrire, a l'avantage d'être valable même quand les variables de l'écoulement ne sont pas continues. Elle est également appelée « forme faible » des équations de propagation.

Les termes de pression $F_{p,x}^{(1)}$ et $F_{p,y}^{(1)}$ sont généralement regroupés avec les termes de flux de quantité de mouvement, les vecteurs $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{S}$ sont alors récrits de la façon suivante

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\phi_x uh)(x_2,y,t) - (\phi_x uh)(x_1,y,t) \\ \left(\phi_x u^2h + g\phi_x h^2/2\right)(x_2,y,t) - \left(\phi_x u^2h + g\phi_x h^2/2\right)(x_1,y,t) \\ (\phi_x uvh)(x_2,y,t) - (\phi_x uvh)(x_1,y,t) \end{bmatrix} \tag{6.36a}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\phi_y vh)(x, y_2, t) - (\phi_y vh)(x, y_1, t) \\ (\phi_y uvh)(x, y_2, t) - (\phi_y uvh)(x, y_1, t) \\ \left(\phi_y v^2 h + g\phi_y h^2/2\right)(x, y_2, t) - \left(\phi_y v^2 h + g\phi_y h^2/2\right)(x, y_1, t) \end{bmatrix} \tag{6.36b}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p,x}^{(2)} + F_{r,x} + F_{f,x} \\ F_{p,y}^{(2)} + F_{r,y} + F_{f,y} \end{bmatrix} \tag{6.36c}$$

6.2.2 Forme différentielle

Si les variables de l'écoulement sont continues et dérivables, la forme intégrale peut être récrite pour obtenir la forme différentielle. On obtient cette forme différentielle en deux étapes. On introduit d'abord des dérivées à la place des différences en utilisant un développement en série de Taylor. On se limite au 1er ordre et on fait tendre t_2 vers t_1, on obtient par exemple pour la première composante de $\mathbf{U}$:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \left[(\phi_s h)(x, y, t_2) - (\phi_s h)(x, y, t_1)\right] \approx \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\left(\phi_s h\right)}{\partial t} \mathrm{d}t \tag{6.37}$$

On peut donc reformuler l'équation (6.34) en faisant tendre t_2 vers t_1, x_2 vers x_1 et y_2 vers y_1

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathbf{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{6.38}$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \phi_s h \\ \phi_s uh \\ \phi_s vh \end{bmatrix} \tag{6.39a}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \phi_x uh \\ \phi_x u^2 h + g\phi_x h^2/2 \\ \phi_x uvh \end{bmatrix} \tag{6.39b}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \phi_y vh \\ \phi_y uvh \\ \phi_y v^2 h + g\phi_y h^2/2 \end{bmatrix} \tag{6.39c}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g \frac{\partial\left(\phi_x h^2\right)}{\partial x} - \frac{1}{2} g\phi_s \frac{\partial\, h^2}{\partial x} + \rho g \phi_s h \left(S_{0,x} - S_{f,x}\right) \\ \frac{1}{2} g \frac{\partial\left(\phi_y h^2\right)}{\partial y} - \frac{1}{2} g\phi_s \frac{\partial\, h^2}{\partial y} + \rho g \phi_s h \left(S_{0,y} - S_{f,y}\right) \end{bmatrix} \tag{6.39d}$$

La relation (6.38) étant valable partout dans l'espace (x, y, t), elle est également valable pour un volume infinitésimal. On peut donc faire disparaître les intégrales et on obtient le système sous forme différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_s \mathbf{U}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_x \mathbf{F}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_y \mathbf{G}\right) = \mathbf{S} \tag{6.40}$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g\dfrac{h^2}{2} \\ uvh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + g\dfrac{h^2}{2} \end{bmatrix} \tag{6.41a}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ g\phi_s h\left(S_{0,x} - S_{f,x}\right) - \dfrac{1}{2}g\phi_s\dfrac{\partial\, h^2}{\partial x} + \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\left(\phi_x h^2\right)}{\partial x} \\ g\phi_s h\left(S_{0,y} - S_{f,y}\right) - \dfrac{1}{2}g\phi_s\dfrac{\partial\, h^2}{\partial y} + \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\left(\phi_y h^2\right)}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.41b}$$

Le terme source $\mathbf{S}$ peut être remanié en regroupant le terme de pente du fond et le terme de pression en ϕ_s

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 0 \\ g\phi_s h\left(-\dfrac{\partial z_b}{\partial x} - S_{f,x}\right) - g\phi_s h\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\left(\phi_x h^2\right)}{\partial x} \\ g\phi_s h\left(-\dfrac{\partial z_b}{\partial y} - S_{f,y}\right) - g\phi_s h\dfrac{\partial h}{\partial y} + \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\left(\phi_y h^2\right)}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ g\phi_s h\left(-\dfrac{\partial z}{\partial x} - S_{f,x}\right) + \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\left(\phi_x h^2\right)}{\partial x} \\ g\phi_s h\left(-\dfrac{\partial z}{\partial y} - S_{f,y}\right) + \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\left(\phi_y h^2\right)}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.42}$$

où $z = z_b + h$ est la cote de la surface libre.

Remarque : L'équilibre statique est bien vérifié par ce système d'équations puisque avec u, v nuls et z constant, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} 0 \\ g\phi_x\dfrac{h^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g\phi_y\dfrac{h^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\phi_x h^2}{\partial x} \\ \dfrac{1}{2}g\dfrac{\partial\phi_y h^2}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.43}$$

6.3 Structure de la solution analytique

L'introduction de la porosité (sous sa double forme, porosité de passage et porosité de stockage) a peu modifié les équations de propagation. Par rapport au système classique, les termes supplémentaires sont :

- un terme de porosité en facteur des flux $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$,
- un terme source supplémentaire dans $\mathbf{S}$.

En effet, dans l'équation (6.40), $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont bien les vecteurs du système « shallow water » classique.

Nous allons nous intéresser aux changements dans la structure de la solution analytique qui résultent de la prise en compte d'une porosité. On reprend l'équation (6.40) en développant les dérivées des deux flux dans le membre de gauche (la porosité de stockage ϕ_s ne dépend pas du temps)

$$\phi_s \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \phi_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{F} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \mathbf{G} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \mathbf{S} \tag{6.44}$$

On divise (6.44) par ϕ_s et on regroupe les termes qui ne sont pas des flux dans le membre de droite.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\phi_x}{\phi_s} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\phi_y}{\phi_s} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{1}{\phi_s} \mathbf{S} - \mathbf{F} \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \mathbf{G} \frac{1}{\phi_s} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \tag{6.45}$$

On fait le changement de variables suivant

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x' &= \frac{\phi_s}{\phi_x} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y' &= \frac{\phi_s}{\phi_y} \mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

ce qui nous permet de récrire l'équation (6.45)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y'} = \frac{1}{\phi_s} \mathbf{S} - \mathbf{F} \frac{1}{\phi_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x'} - \mathbf{G} \frac{1}{\phi_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y'} \tag{6.47}$$

Le changement de variables (6.46) définit un nouveau repère $\mathbf{R}'(Ox'y'z)$. Dans ce repère $\mathbf{R}'$, la solution de la partie hyperbolique de (6.47) est identique à la solution de la partie hyperbolique du système classique de propagation en deux dimensions. Mais les courbes caractéristiques dans le repère $\mathbf{R}$ d'origine vont être modifiées par rapport au système « shallow water » classique.

6.3.1 La théorie des bicaractéristiques

La théorie des bicaractéristiques permet d'analyser le comportement de la solution analytique du système « shallow water » (Daubert et Graffe, 1967). On reprend l'équation (6.47) et on introduit les matrices Jacobiennes de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{U}$.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x'} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y'} = \frac{1}{\phi_s} \mathbf{S} - \mathbf{F} \frac{1}{\phi_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x'} - \mathbf{G} \frac{1}{\phi_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y'} \tag{6.48}$$

avec

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \tag{6.49}$$

On considère une surface (X) dont l'équation dans le repère $\mathbf{R}'$ est

$$t = \varphi(x', y') \tag{6.50}$$

et on suppose que $\mathbf{U}$ est connu sur (X) et vaut $\mathbf{U}_0$

$$\mathbf{U}(x', y', \varphi(x', y')) = \mathbf{U}_0(x', y') \tag{6.51}$$

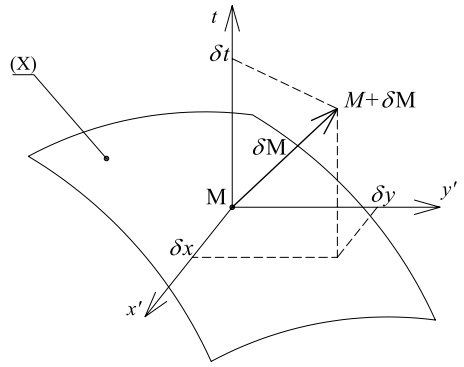


Figure 6.6 – Schéma de la surface (X) avec le point M et le vecteur $\delta\mathbf{M}$.

On considère également un point M de coordonnées (x, y, t) appartenant à (X) et on introduit un vecteur $\delta\mathbf{M}$ (Figure 6.6)

$$\delta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \delta x' \\ \delta y' \\ \delta t \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

On cherche à partir de l'équation (6.48) à identifier deux situations :
- dans quelles conditions il est possible de calculer $\mathbf{U}$ dans un voisinage de (X) à partir de $\mathbf{U}_0$,
- inversement, dans le cas contraire, quelles caractéristiques peut-on en déduire sur la surface (X).

Dans le deuxième cas, l'information contenue dans (X) n'influencera pas le reste de l'espace (x', y', t), elle restera "confinée" dans la surface (X). L'étude de ce cas particulier constitue la théorie des bicaractéristiques proprement dite.

On écrit le développement en série de Taylor de $\mathbf{U}$ au point M au premier ordre en $\delta\mathbf{M}$

$$\mathbf{U}(\mathrm{M} + \delta\mathbf{M}) = \mathbf{U}(\mathrm{M}) + \delta x' \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x'}(\mathrm{M}) + \delta y' \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y'}(\mathrm{M}) + \delta t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathrm{M}) + \mathrm{O}(\delta\mathbf{M}^2) \tag{6.53}$$

On pourra déterminer $\mathbf{U}$ au voisinage de (X) s'il est possible de calculer les valeurs de $\partial\mathbf{U}/\partial x'$, $\partial\mathbf{U}/\partial y'$ et $\partial\mathbf{U}/\partial t$ à partir de (6.48) et (6.51). En dérivant (6.51), on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x'} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial y'} &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

Ceci nous permet d'éliminer $\partial\mathbf{U}/\partial x'$, $\partial\mathbf{U}/\partial y'$ dans (6.48)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\left(\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x'} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right) + \mathbf{B}\left(\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial y'} - \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right) = \mathbf{T} \tag{6.55}$$

avec

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\phi_s}\mathbf{S} - \mathbf{F}\frac{1}{\phi_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial x'} - \mathbf{G}\frac{1}{\phi_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial y'} \tag{6.56}$$

On regroupe les termes en $\partial \mathbf{U}/\partial t$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\mathbf{A} - \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\mathbf{B}\right)\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{T} - \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x'} - \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial y'} \tag{6.57}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité de dimension 3×3. On introduit la matrice $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\mathbf{A} - \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\mathbf{B} \tag{6.58}$$

On peut déterminer $\partial \mathbf{U}/\partial t$ à partir de (6.57) seulement si $\det(\mathbf{C}) \neq 0$. Si la surface (X) est $t = \varphi(x', y') = 0$, alors $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ et on a $\det(\mathbf{C}) \neq 0$. Donc la connaissance des conditions initiales $\varphi(x', y') = 0$ permet de calculer $\mathbf{U}$ dans un voisinage de (X).

Dans le cas où $\det(\mathbf{C}) = 0$, $\partial \mathbf{U}/\partial t$ est indéterminé et il n'est pas possible de calculer $\mathbf{U}$ dans un voisinage de (X). On cherche à expliciter φ dans ce cas et on pose

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x'}, \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \tag{6.59}$$

Il est nécessaire de calculer $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour pouvoir calculer $\det(\mathbf{C})$. On montre que les deux matrices Jacobiennes s'écrivent dans le repère $\mathbf{R}'$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}_{\mathbf{R}'}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}_{\mathbf{R}'} \tag{6.60}$$

où $c = \sqrt{gh}$. La matrice $\mathbf{\Lambda}$ des valeurs propres et la matrice $\mathbf{K}$ des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ sont respectivement

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - c & 0 & u + c \\ v & 1 & v \end{bmatrix} \tag{6.61}$$

avec

$$\lambda^{(1)} = u - c, \quad \lambda^{(2)} = u, \quad \lambda^{(3)} = u + c \tag{6.62}$$

Remarque : On peut comparer les expressions précédentes avec les matrices Jacobiennes obtenues directement à partir de l'équation (6.40). La matrice Jacobienne de $\phi_x \mathbf{F}$ par rapport à $\phi_s \mathbf{U}$ dans le repère $\mathbf{R}$ est

$$\left(\frac{\partial(\phi_x \mathbf{F})}{\partial(\phi_s \mathbf{U})}\right)_{\mathbf{R}} = \frac{\phi_x}{\phi_s}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}_{\mathbf{R}} \tag{6.63}$$

La matrice $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{R}}$ des valeurs propres et la matrice $\mathbf{K}_{\mathrm{R}}$ des vecteurs propres de cette Jacobienne sont respectivement

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_x}{\phi_s}\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi_x}{\phi_s}\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\phi_x}{\phi_s}\lambda^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - c & 0 & u + c \\ v & 1 & v \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

On constate que dans le repère $\mathbf{R}'$ les valeurs propres et vecteurs propres des matrices Jacobiennes ne sont pas modifiées par rapport aux équations sans porosité (dans le repère d'origine). La propagation des ondes pour les équations avec porosité dans le repère $\mathbf{R}'$ est donc similaire à la propagation des ondes pour les équations classiques dans le repère d'origine $\mathbf{R}$, seule la vitesse de propagation sera différente. Ceci apparaît clairement dans la matrice des valeurs propres (6.64), puisque les valeurs propres correspondent aux vitesses de propagation des différentes ondes. Elles sont multipliées par ϕ_x/ϕ_s ou ϕ_y/ϕ_s dans le repère $\mathbf{R}$.

On peut calculer $\det(\mathbf{C})$ en utilisant (6.59) et (6.60)

$$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & -p & -q \\ -p(c^2-u^2)+quv & 1-2pu-qv & -qu \\ puv-q(c^2-v^2) & -pv & 1-pu-2qv \end{vmatrix} \tag{6.65}$$

ce qui donne après factorisation

$$\det(\mathbf{C}) = (1-pu-qv)\left[(1-pu-qv)^2 - c^2(p^2+q^2)\right] \tag{6.66}$$

On aboutit finalement à la relation d'équivalence suivante

$$\det(\mathbf{C}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-pu-qv)^2 - c^2(p^2+q^2) = 0 \\ \text{ou} \\ 1-pu-qv = 0 \end{cases} \tag{6.67}$$

Chacun de ces deux cas va conduire à une famille de surfaces caractéristiques.

6.3.2 La première famille de surfaces caractéristiques

On pose que

$$p = \rho\cos\theta, \quad q = \rho\sin\theta \tag{6.68}$$

On introduit (6.68) dans la première équation du terme de droite de (6.67), ce qui donne

$$1 - 2\rho\,(u\cos\theta + v\sin\theta) + \rho^2\left[(u\cos\theta + v\sin\theta)^2 - c^2\right] \tag{6.69}$$

Le déterminant de ce polynôme du second degré en ρ est égal à $4c^2$, ce qui permet d'écrire que la solution est

$$\rho = \frac{1}{u\cos\theta + v\sin\theta - \varepsilon c} \tag{6.70}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. On peut fixer $\varepsilon = -1$ puisque changer le signe de ε revient à changer θ en $\theta + \pi$. On introduit (6.70) dans (6.68) pour obtenir une expression des deux dérivées de la fonction $\varphi(x', y')$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x'} &= \rho\cos\theta = \frac{\cos\theta}{u\cos\theta + v\sin\theta + c} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} &= \rho\sin\theta = \frac{\sin\theta}{u\cos\theta + v\sin\theta + c} \end{aligned}\right\} \tag{6.71}$$

L'intégration de ces deux expressions nous permet d'avoir une expression de la fonction φ au voisinage du point M (u, v et c sont considérés constants dans ce voisinage)

$$\varphi(x', y') = \frac{x'\cos\theta + y'\sin\theta}{u\cos\theta + v\sin\theta + c} + \gamma \tag{6.72}$$

où γ est une constante qui peut être prise nulle si on considère que la surface (X) est définie par $t = \varphi(x', y') = 0$. En remaniant cette équation, on peut écrire que

$$(x' - u\varphi)\cos\theta + (y' - v\varphi)\sin\theta = c\varphi \tag{6.73}$$

On dérive par rapport à θ pour obtenir

$$-(x' - u\varphi)\sin\theta + (y' - v\varphi)\cos\theta = 0 \tag{6.74}$$

On somme les carrés des équations (6.73) et (6.74), ce qui permet d'écrire l'expression classique de la première famille de caractéristiques dans le repère $\mathbf{R}'$

$$(x' - ut)^2 + (y' - vt)^2 = c^2 t \tag{6.75}$$

ce qui correspond à l'équation suivante dans le repère $\mathbf{R}$

$$\left(\frac{\phi_s}{\phi_x}x - ut\right)^2 + \left(\frac{\phi_s}{\phi_y}y - vt\right)^2 = c^2 t \tag{6.76}$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse. On peut récrire cette équation pour faire apparaître le grand axe et le petit axe de l'ellipse

$$\frac{\left(x - \frac{\phi_x}{\phi_s}ut\right)^2}{\left(\frac{\phi_x}{\phi_s}ct\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{\phi_y}{\phi_s}vt\right)^2}{\left(\frac{\phi_y}{\phi_s}ct\right)^2} = 1 \tag{6.77}$$

Les caractéristiques de cette ellipse sont

- centre de coordonnées $\left(\frac{\phi_x}{\phi_s}ut; \frac{\phi_y}{\phi_s}vt\right)$
- grand axe de longueur $2\frac{\phi_x}{\phi_s}ct$ si $\phi_x > \phi_y$ ou $2\frac{\phi_y}{\phi_s}ct$ sinon
- petit axe de longueur $2\frac{\phi_y}{\phi_s}ct$ si $\phi_x > \phi_y$ ou $2\frac{\phi_x}{\phi_s}ct$ sinon

Le cône circulaire décrit par Daubert et Graffe (1967) (Figure 6.7 gauche) est devenu un cône ellipsoïdal (Figure 6.7 droite) puisque les ondes ne se déplacent plus à la même vitesse dans les deux directions de l'espace. La vitesse de propagation $\sqrt{gh}$ est remplacée par $(\phi_x/\phi_s)\sqrt{gh}$ dans la direction x et par $(\phi_y/\phi_s)\sqrt{gh}$ dans la direction y. De même, alors que le centre du cercle se déplace à la vitesse (u, v) dans les équations classiques, le centre de l'ellipse se déplace à la vitesse $((\phi_s/\phi_x)u, (\phi_s/\phi_y)v)$ dans les équations avec porosité.

On peut également paramétrer cette ellipse sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{\phi_s}{\phi_x}u + \delta\cos\theta\right)t \\ y &= \left(\frac{\phi_s}{\phi_y}v + \delta\sin\theta\right)t \end{aligned}\right\} \tag{6.78}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &\theta \in [0; 2\pi] \\ &\delta = \sqrt{\frac{b^2}{1 - e^2\cos\theta}} \\ &e = c/a \\ &c^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}\right\} \tag{6.79}$$

où a est le grand axe et b le petit axe. On vérifie bien que le cas $\phi_s = \phi_x = \phi_y$ nous ramène au cercle des équations classiques.

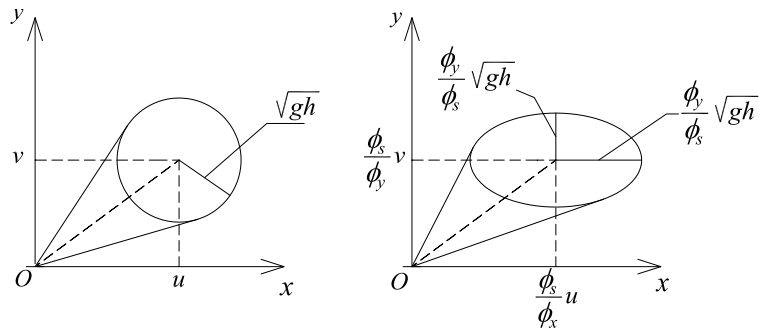


Figure 6.7 – Les surfaces caractéristiques vues en plan, à gauche le cas standard sans porosité (ou avec une porosité isotrope), à droite le cas avec porosité non isotrope.

6.3.3 La deuxième famille de surfaces caractéristiques

On approche φ par son développement en série de Taylor au 1er ordre, ce qui revient à utiliser les plans tangents à φ comme dans (Daubert et Graffe, 1967). On peut écrire en utilisant l'équation (6.59)

$$\varphi(x', y') = px' + qy' \tag{6.80}$$

On combine cette relation avec la deuxième équation du terme de droite de (6.67) pour éliminer q

$$\varphi(x', y') = px' + \frac{1 - pu}{v} y' \tag{6.81}$$

Tous les points de coordonnées $(\lambda u, \lambda v, \lambda)$, avec λ réel positif quelconque, satisfont cette relation dans le repère $\mathbf{R}'$. On en déduit que la deuxième famille de surfaces caractéristiques est constituée de la droite générée par le vecteur $[u, v, 1]$ dans le repère $\mathbf{R}'$, il s'agit du lieu des centres des ellipses décrites par (6.75). Dans le repère $\mathbf{R}$, il s'agit de la droite générée par le vecteur $[(\phi_s/\phi_x)u, (\phi_s/\phi_y)v, 1]$.

6.4 Le cas particulier de la porosité unique

6.4.1 Simplification du système d'équations

Dans le cas où on ne considère qu'une seule porosité sur la zone d'étude (la porosité de passage est égale à la porosité de stockage dans chaque direction), le système (6.40) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi \mathbf{G}) = \mathbf{S} \tag{6.82}$$

où $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont inchangés par rapport à (6.41a) mais $\mathbf{S}$ peut être récrit

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ g\phi h\,(S_{0,x} - S_{f,x}) + g\dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ g\phi h\,(S_{0,y} - S_{f,y}) + g\dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.83}$$

Dans la suite de ce travail, on ne considère que le cas de la porosité unique. En particulier, l'implantation numérique de la modélisation macroscopique a été faite pour le cas de la porosité unique. Si le formalisme mathématique de l'approche « porosité de passage/porosité de stockage »est correctement établi, son utilisation pratique n'est pas encore claire. En effet, dans la discrétisation en volumes finis, toutes les variables de l'écoulement et les paramètres géométriques sont des valeurs moyennes pour chaque cellule. Cela ne pose pas de problème pour la porosité de stockage, mais il est difficile dans ce cas de définir une porosité de passage spécifique pour chaque interface.

Il est possible cependant de définir les porosités de passage selon deux directions principales données puis de calculer la porosité de passage dans la direction normale à chaque interface.

6.4.2 Calcul de la porosité de passage dans la direction normale à l'interface

On considère un réseau régulier de rues dont la première direction principale est alignée sur l'axe x et la deuxième direction principale fait un angle θ avec l'horizontale (Figure 6.8 gauche). La largeur des rues selon la première et la deuxième direction principale sont respectivement l_1 et l_2. La largeur des bâtiments selon la première et la deuxième direction principale sont respectivement L_1 et L_2.
Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'aux rues de la deuxième direction principale. On considère un segment AB de longueur L, faisant un angle α avec l'horizontale. La longueur projetée de AB sur un axe perpendiculaire aux rues de la deuxième direction principale est

$$L' = L\cos(\pi/2 - \alpha + \theta) = L\sin(\alpha - \theta) \tag{6.84}$$

Le nombre de rues n_2 qui intersectent le segment AB est égal à

$$n_2 = \mathrm{int}\left(\frac{L'}{L_2 + l_2}\right) \tag{6.85}$$

où $\mathrm{int}(x)$ est la partie entière de x. La largeur des rues de la deuxième direction principale projetée sur AB est

$$l_2' = \frac{l_2}{\sin(\alpha - \theta)} \tag{6.86}$$

La porosité de passage ϕ_2 due aux rues de la deuxième direction principale à travers cet interface AB est donc

$$\phi_2 = \frac{n_2\, l_2'}{L} \approx \frac{l_2}{L_2 + l_2} \tag{6.87}$$

Cette porosité ϕ_2 est constante, en effet si α diminue, la longueur L' et le nombre de rues n_2 diminuent, mais la largeur projetée l_2' augmente.

On s'intéresse maintenant aux rues de la première direction principale. La longueur projetée de AB sur un axe perpendiculaire aux rues de la première direction principale est

$$L'' = L\sin(\pi - \alpha) \tag{6.88}$$

Le nombre de rues n_1 qui intersectent ce segment est égal à

$$n_1 = \mathrm{int}\left(\frac{L''}{L_1 + l_1}\right) \tag{6.89}$$

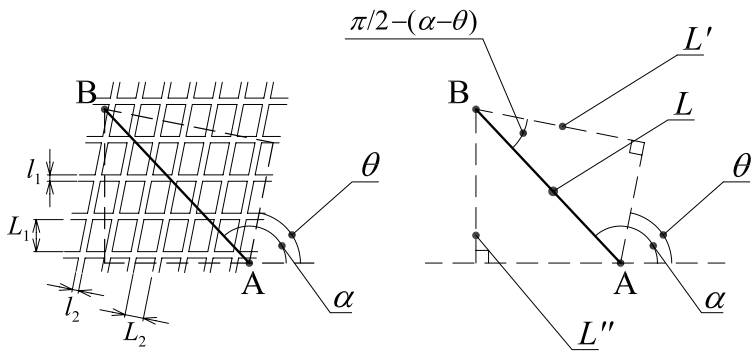


Figure 6.8 – Calcul de la porosité dans la direction normale à l'interface.

La largeur des rues de la première direction principale projetée sur AB est

$$l_1' = \frac{l_1}{\sin(\pi - \alpha)} \tag{6.90}$$

La porosité de passage ϕ_1 due aux rues de la première direction principale à travers cet interface AB est donc

$$\phi_1 = \frac{n_1\, l_1'}{L} \approx \frac{l_1}{L_1 + l_1} \tag{6.91}$$

Au final, on peut calculer la porosité de passage ϕ_{tot} à travers un interface d'orientation quelconque

$$\phi_{\text{tot}} = \phi_1 + \phi_2 \approx \frac{l_1}{L_1 + l_1} + \frac{l_2}{L_2 + l_2} \tag{6.92}$$

Remarque : Ceci n'est pas valable quand le segment AB est orienté selon une des deux directions principales. Dans ce cas, la porosité oblique est égale à l'une des deux porosités principales :
- si AB est aligné sur la première direction principale, $\phi_{\text{tot}} = \phi_2$,
- si AB est aligné sur la deuxième direction principale, $\phi_{\text{tot}} = \phi_1$.

6.5 Conclusions

L'établissement des équations « shallow water » avec porosité a été présenté dans ce chapitre, en distinguant porosité de stockage et porosité de passage dans un premier temps. La forme intégrale et la forme différentielle du système d'équations de propagation sont ensuite présentées. La structure analytique de la solution des équations de propagation a été étudiée et les différences avec la solution du système d'équations classique ont été mises en évidence. La simplification du système d'équations dans le cas d'une porosité unique a ensuite été considérée.

La modélisation macroscopique avec porosité unique est opérationnelle, elle est mise en œuvre sur des modèles réduits dans les deux chapitres de la Partie IV. Ce n'est pas le cas de la modélisation macroscopique avec porosité de stockage/porosité de passage, et ceci constitue une importante perspective pour la poursuite du travail sur la modélisation macroscopique.

Cependant, l'introduction de la porosité dans les équations de propagation n'est pas suffisante pour représenter l'influence du bâti sur l'écoulement. Le Chapitre 7 ci-après est consacré à l'utilisation d'un terme supplémentaire de perte de charge dans les équations de propagation pour représenter les pertes de charge singulières qui se produisent dans un réseau de rues. Une relation de prédétermination de ce terme de perte de charge développée au cours de cette thèse est présentée.

Chapitre 7

Développement d'un modèle de perte de charge macroscopique

Sommaire

7.1 Formulation des pertes de charge au sein d'un réseau de rues 107
7.1.1 Carrefours et pertes de charge singulières 107
7.1.2 Traitement du terme source de perte de charge 108
7.2 Développement d'une relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 110
7.2.1 Présentation de la méthode utilisée 110
7.2.2 Paramètres géométriques et analyse dimensionnelle 110
7.2.3 Formulation polynomiale 111
7.2.4 Détermination des coefficients du polynôme 113
7.2.5 Méthodologie 114
7.2.6 Mise en œuvre de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 117
7.3 Validation numérique de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 117
7.3.1 Simplification de la relation 117
7.3.2 Validation numérique 121
7.3.3 Étude de sensibilité de la modélisation macroscopique aux valeurs du tenseur de perte de charge 125
7.4 Conclusions 128

7.1 Formulation des pertes de charge au sein d'un réseau de rues

7.1.1 Carrefours et pertes de charge singulières

On considère un secteur urbain constitué d'un réseau de rues qui isolent des blocs (immeubles) que l'on supposera imperméables. Ce réseau de rues est constitué de tronçons et de carrefours. Un écoulement à travers ce réseau de rues est très largement conditionné par les pertes de charge qui se produisent aux carrefours. Ces pertes

d'énergie sont dues aux changements de régime et aux réflexions d'onde créés par les changements de géométrie et les jonctions/séparations d'écoulements secondaires.

Dans une modélisation 2D classique à maillage fin, les pertes de charge sont simulées naturellement par le code de calcul avec les échanges de quantité de mouvement puisque le maillage reproduit bien les contours des bâtiments. Avec la modélisation macroscopique, les bâtiments ne sont pas représentés dans le maillage et ces pertes d'énergie ne peuvent pas directement être simulées. Il est donc nécessaire d'introduire des pertes de charge supplémentaires pour tenir compte de la présence des bâtiments. Ceci peut être fait de deux façons différentes :

- diminuer la valeur du coefficient de Strickler pour augmenter les pertes de charge par frottement,
- ajouter un terme supplémentaire de perte de charge singulière dans les équations de propagation.

Cependant, les pertes de charge dans un carrefour s'apparentent plutôt à des pertes de charge singulières qui concernent la totalité de la section d'écoulement, et non le périmètre mouillé (Guinot et Soares-Frazão, 2006). On verra au §8.4.2 que la réduction du coefficient de Strickler ne donne pas des résultats satisfaisants en régime transitoire.

Puisque les pertes de charge qui se produisent aux carrefours concernent la totalité de la section d'écoulement, elles sont comparables aux pertes de charge qui se produisent lors des élargissement/rétrécissement dans un canal. On propose donc de les représenter par une relation de perte de charge singulière de la forme

$$\Delta H = \alpha \frac{V^2}{2g} \tag{7.1}$$

où ΔH est la perte de charge singulière, V la vitesse de l'écoulement et α un coefficient de perte de charge.

Dans une zone urbaine, le réseau de rues n'est pas nécessairement isotrope et aligné sur le système de coordonnées. On utilise donc un tenseur plutôt qu'un simple coefficient dans la relation de perte de charge. La formulation retenue pour le terme total de perte de charge est la suivante

$$\begin{bmatrix} S_{f,x} \\ S_{f,y} \end{bmatrix} = \frac{|Q|}{h^{10/3}} \left(\begin{bmatrix} \dfrac{1}{K_{xx}^2} & \dfrac{1}{K_{xy}^2} \\ \dfrac{1}{K_{yx}^2} & \dfrac{1}{K_{yy}^2} \end{bmatrix} + \frac{h^{4/3}}{2g} \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

où $|Q| = \left(q^2 + r^2\right)^{1/2}$, K_{xx}, K_{xy}, K_{yx} et K_{yy} sont les composantes du tenseur de rugosité (généralisation du coefficient de Strickler) et M_{xx}, M_{xy}, M_{yx} et M_{yy} sont les composantes du tenseur de perte de charge. On considère dans la suite un coefficient de Strickler isotrope et uniforme (*i.e.* $K_{xx} = K_{xy} = K_{yx} = K_{yy} = K$). Si le réseau de rues est isotrope et aligné sur le système de coordonnées, alors l'équation précédente devient

$$\begin{bmatrix} S_{f,x} \\ S_{f,y} \end{bmatrix} = \frac{|Q|}{h^{10/3}} \left(\frac{1}{K^2} + \frac{h^{4/3}}{2g} \begin{bmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{yy} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

7.1.2 Traitement du terme source de perte de charge

Avec l'introduction des pertes de charge singulières, le traitement numérique du terme total de perte de charge est modifié par rapport à la méthode présentée au paragraphe §A.8 de l'Annexe A.

La prise en compte des pertes de charge pour le calcul de la solution nécessite de résoudre l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial t} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} \end{bmatrix} = -g\frac{|Q|}{h^{7/3}}\left(\frac{1}{K^2} + \frac{h^{4/3}}{2g}\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Il n'est pas possible de découpler ce système en deux équations différentielles indépendantes à cause de la matrice des pertes de charge singulières. Il faut changer de repère pour se ramener à une équation de la forme

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial t} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

que l'on peut ensuite résoudre comme indiqué au §A.8. On récrit l'équation (7.4) en factorisant

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

avec

$$\mathbf{M} = -\frac{|Q|}{2h}\begin{bmatrix} \dfrac{2g}{K^2h^{4/3}} + M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & \dfrac{2g}{K^2h^{4/3}} + M_{yy} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

On définit $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P}$ la matrice des valeurs propres et la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{M}$. On peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{PDP}^{-1}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

On multiplie l'équation précédente à gauche par $\mathbf{K}^{-1}$ et on pose que

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K}^{-1}\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \mathbf{DY} \tag{7.10}$$

On procède ensuite à une semi-discrétisation pour remplacer h, q, r par h_i^n, q_i^n, r_i^n dans $\mathbf{D}$, ce qui nous permet d'écrire la solution de l'équation différentielle

$$\left.\begin{aligned} (Y_1)_i^{n+1} &= \exp\big((D_{11})_i^n\ t\big)(Y_1)_i^n \\ (Y_2)_i^{n+1} &= \exp\big((D_{22)_i^n}\ t\big)(Y_2)_i^n \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

On revient finalement aux variables de départ q, r

$$\begin{bmatrix} q_i^{n+1} \\ r_i^{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} (Y_1)_i^{n+1} \\ (Y_2)_i^{n+1} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

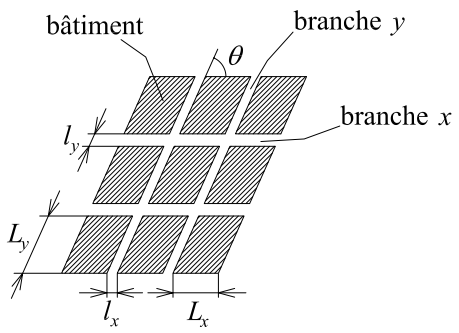


Figure 7.1 – Paramètres géométriques du réseau synthétique de rues.

7.2 Développement d'une relation de prédétermination du tenseur de perte de charge

L'utilisation du tenseur de perte de charge peut se faire par l'intermédiaire d'un calage de ses quatre termes pour reproduire correctement l'écoulement dans une zone urbaine.

Cependant, il a été décidé de relier les termes M_{xx}, M_{xy}, M_{yx}, M_{yy} aux caractéristiques géométriques de la zone urbaine (densité de bâti, largeur, pente, orientation des rues, ...) afin de permettre une utilisation de cette relation sur des sites urbains réels sans calage.

7.2.1 Présentation de la méthode utilisée

On a procédé à des simulations numériques d'écoulements dans des réseaux de rues synthétiques de caractéristiques variables (comparables à celles que l'on peut observer sur des sites réels) en utilisant la modélisation 2D classique. On extrait des résultats de la simulation numérique les valeurs des variables dans la zone centrale, où l'écoulement est périodique (*i.e.* uniforme d'un point de vue macroscopique). On calcule ensuite pour chaque configuration du réseau de rues les termes du tenseur de perte de charge qui permettraient d'avoir une équivalence entre la modélisation 2D classique et la modélisation 2D macroscopique. Une expression polynomiale a été retenue pour formuler la relation entre les termes du tenseur et les caractéristiques géométriques du réseau. Les différentes configurations ont été choisies de manière à permettre l'estimation des coefficients de ce polynôme.

7.2.2 Paramètres géométriques et analyse dimensionnelle

Les paramètres décrivant la géométrie du réseau de rues sont les suivants (Figure 7.1) :

- l_x et l_y les largeurs des rues respectivement suivant les directions x et y,
- L_x et L_y les largeurs des blocs respectivement suivant les directions x et y,
- $S_{0,x}$ et $S_{0,y}$ les pentes des rues respectivement suivant les directions x et y,
- θ l'orientation de la branche y par rapport à la branche x.

On a adopté par commodité les indices x et y pour désigner les deux directions principales du réseau de rues, mais ces directions ne sont pas forcément celles du système de coordonnées.

Avant de chercher à relier les variations des termes du tenseur aux variations des paramètres géométriques, une analyse dimensionnelle a été réalisée afin de réduire le nombre de paramètres à faire intervenir et préciser sous quelle forme ces paramètres interviennent. On effectue l'analyse dimensionnelle pour chacun des 4 termes du tenseur. On cherche une relation entre 6 variables de la forme

$$M_{xx} = f\left(L_x, l_x, L_y, l_y, \theta\right) \tag{7.13}$$

Les pentes $S_{0,x}$ et $S_{0,y}$ n'apparaissent pas dans cette relation puisqu'on s'intéresse aux valeurs des termes du tenseur dans une zone où l'écoulement est uniforme d'un point de vue macroscopique.

Il n'y a dans la relation (7.13) qu'une seule dimension indépendante : L_x, l_x, L_y, l_y sont des longueurs, θ est un nombre sans dimension et M_{xx} est homogène à l'inverse d'une longueur. D'après le théorème de Vaschy-Buckingam, il existe une relation entre $6 - 1 = 5$ nombres sans dimensions. Il faut former cinq nombres adimensionnels indépendants les uns des autres. θ est le plus évident de ces nombres sans dimension, on peut former ensuite les trois nombres suivants

$$l'_x = \frac{l_x}{L_x + l_x}, \quad l'_y = \frac{l_y}{L_y + l_y}, \quad L_{xy} = \frac{L_x + l_x}{L_y + l_y} \tag{7.14}$$

Le cinquième nombre adimensionnel est formé à partir de chacun des termes du tenseur. Un coefficient du tenseur de perte de charge est proportionnel au nombre de carrefours présents le long d'un segment orienté selon l'axe correspondant (plus il y a de carrefours par unité de longueur, plus la perte de charge est importante). Ainsi, plus L_x et l_x sont faibles, plus le nombre de carrefours présents le long d'un segment de longueur Δ_x orienté selon l'axe x est élevé (Figure 7.2). M_{xx} et M_{xy} sont donc inversement proportionnels à $(L_x + l_x)$. Le raisonnement est le même pour un segment de longueur Δ_y orienté selon l'axe y : plus L_y et l_y sont faibles, plus le nombre de carrefours présents le long de ce segment Δ_y est élevé. Mais il y a également une influence de l'angle θ. Si tous les paramètres L_x, l_x, L_y, l_y restent constants et θ diminue, alors le nombre de carrefours présents le long du segment Δ_y augmente. Au final, M_{yx} et M_{yy} sont inversement proportionnels à $(L_y + l_y)\sin\theta$.

On peut donc former un nombre adimensionnel à partir de chacun des termes du tenseur de la manière suivante

$$\left.\begin{aligned} M'_{xx} &= (L_x + l_x)\, M_{xx} \\ M'_{xy} &= (L_x + l_x)\, M_{xy} \\ M'_{yx} &= (L_y + l_y)\sin(\theta) M_{yx} \\ M'_{yy} &= (L_y + l_y)\sin(\theta) M_{yy} \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Les 4 relations que l'on cherche à expliciter sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} M'_{xx} &= f_1\left(l'_x, l'_y, L_{xy}, \theta\right) \\ M'_{xy} &= f_2\left(l'_x, l'_y, L_{xy}, \theta\right) \\ M'_{yx} &= f_3\left(l'_x, l'_y, L_{xy}, \theta\right) \\ M'_{yy} &= f_4\left(l'_x, l'_y, L_{xy}, \theta\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

7.2.3 Formulation polynomiale

On va exprimer les fonctions f_1 à f_4 par l'intermédiaire d'un développement en série de Taylor. Pour simplifier l'écriture, on pose

$$x_1 = l'_x, \quad x_2 = l'_y, \quad x_3 = L_{xy}, \quad x_4 = \theta \tag{7.17}$$

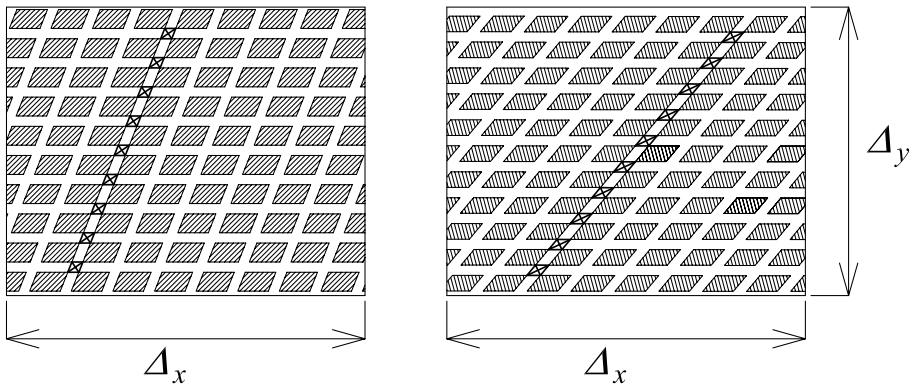


Figure 7.2 – Variation du nombre de carrefours selon l'axe de la branche y avec l'angle θ (à gauche, angle θ élevé, 9 carrefours ; à droite, angle θ faible, 10 carrefours).

Pour minimiser le nombre de coefficients à déterminer (et ainsi avoir des fonctions faciles à utiliser), on a d'abord utilisé un développement en série du premier ordre. Des difficultés à représenter correctement les variations des termes du tenseur en fonction de l'angle θ ont conduit à ajouter les termes d'ordre 2. On écrit le développement de Taylor par rapport à une configuration de référence (Tableau 7.1, Figure 7.3) notée $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$, ce qui donne pour f_1 par exemple

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} (x_i - \overline{x}_i) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} (x_i - \overline{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{i<j\leq 4} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) \end{aligned} \tag{7.18}$$

Pour mieux prendre en compte les variations du tenseur dans le cas où :

- l'angle θ varie en même temps que l'_x, l'_y, L_{xy} (variation non-linéaire),
- les trois variables l'_x, l'_y, L_{xy} diffèrent simultanément de leur valeur de référence,

les termes suivants d'ordre 3 ont été insérés dans la relation (7.18)

$$\left.\begin{aligned} & \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_4^3} (x_4 - \overline{x}_4)^3 \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_4^2 \partial x_i} (x_4 - \overline{x}_4)^2 (x_i - \overline{x}_i) \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_4 \partial x_i^2} (x_4 - \overline{x}_4)(x_i - \overline{x}_i)^2 \\ & \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} (x_1 - \overline{x}_1)(x_2 - \overline{x}_2)(x_3 - \overline{x}_3) \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

Tableau 7.1 – Caractéristiques géométriques de la configuration de référence.

Symbole	Signification	Valeur
l_x	largeur des rues dans la 1re direction principale	10 m
l_y	largeur des rues dans la 2e direction principale	10 m
L_x	largeur des bâtiments dans la 1re direction principale	90 m
L_y	largeur des bâtiments dans la 2e direction principale	90 m
$S_{0,x}$	pente du fond selon l'axe x	0,01 m/m
$S_{0,y}$	pente du fond selon l'axe y	0,01 m/m
θ	angle entre la 2e et la 1re direction principale	$\pi/2$

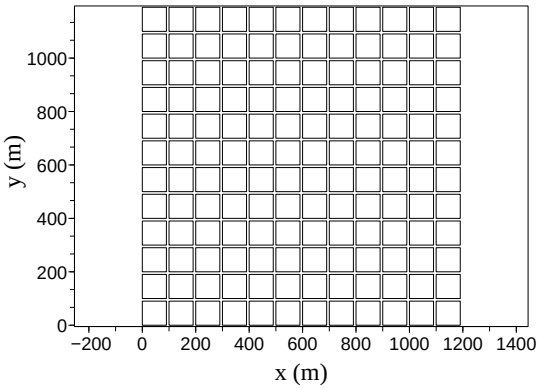


Figure 7.3 – Vue en plan du réseau de rues dans la configuration de référence.

7.2.4 Détermination des coefficients du polynôme

Il faut identifier 23 coefficients pour chacun des 4 termes du tenseur adimensionnel. On présente ici la formulation pour M'_{xx}

$$\begin{aligned} M'_{xx} = k_0 &+ \sum_{i=1}^{4} k_i \left(x_i - \overline{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{4} k_{ii} \left(x_i - \overline{x}_i\right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{i<j\leq 4} k_{ij} \left(x_i - \overline{x}_i\right)\left(x_j - \overline{x}_j\right) \\ &+ k_{444} \left(x_4 - \overline{x}_4\right)^3 + k_{123} \left(x_1 - \overline{x}_1\right)\left(x_2 - \overline{x}_2\right)\left(x_3 - \overline{x}_3\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{3} k_{ii4} \left(x_i - \overline{x}_i\right)^2 \left(x_4 - \overline{x}_4\right) + \sum_{i=1}^{3} k_{i44} \left(x_i - \overline{x}_i\right)\left(x_4 - \overline{x}_4\right)^2 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Les coefficients du polynôme (c'est-à-dire les dérivées) sont estimés par la méthode

Tableau 7.2 – Valeurs des δx_i dans le calcul des dérivées.

x_i	δx_i
x_1	0,05
x_2	0,05
x_3	0,50
x_4	$\pi/6$

des différences finies centrées

$$k_i \approx \frac{1}{2\delta x_i}\left[M'_\alpha\left(\overline{x}_i+\delta x_i\right)-M'_\alpha\left(\overline{x}_i-\delta x_i\right)\right] \quad \forall i \in [1;4] \tag{7.21a}$$

$$k_{ii} \approx \frac{1}{\delta x_i^2}\left[M'_\alpha\left(\overline{x}_i+\delta x_i\right)-2M'_\alpha\left(\overline{x}_i\right)+M'_\alpha\left(\overline{x}_i-\delta x_i\right)\right] \quad \forall i \in [1;4] \tag{7.21b}$$

$$\begin{aligned} k_{ij} \approx \frac{1}{4\delta x_i \delta x_j}&\left[\left[M'_\alpha\left(\overline{x}_i+\delta x_i,\overline{x}_j+\delta x_j\right)-M'_\alpha\left(\overline{x}_i-\delta x_i,\overline{x}_j+\delta x_j\right)\right]\right. \\ &\left.-\left[M'_\alpha\left(\overline{x}_i+\delta x_i,\overline{x}_j-\delta x_j\right)-M'_\alpha\left(\overline{x}_i-\delta x_i,\overline{x}_j-\delta x_j\right)\right]\right] \\ &\forall i,j \in [1;4] \text{ et } j \neq i \end{aligned} \tag{7.21c}$$

$$\begin{aligned} k_{444} \approx \frac{1}{2\times 15^3}&\left[M'_\alpha(x_4=2\pi/3)-2M'_\alpha(x_4=7\pi/12)\right. \\ &\left.+2M'_\alpha(x_4=5\pi/12)-M'_\alpha(x_4=\pi/3)\right] \end{aligned} \tag{7.21d}$$

$$\begin{aligned} k_{iij} \approx \frac{1}{2\delta x_i^2 \delta x_j}&\left[M'_\alpha(\overline{x}_i+\delta x_i,\overline{x}_j+\delta x_j)-2M'_\alpha(\overline{x}_i,\overline{x}_j+\delta x_j)\right. \\ &+M'_\alpha(\overline{x}_i-\delta x_i,\overline{x}_j+\delta x_j)-M'_\alpha(\overline{x}_i+\delta x_i,\overline{x}_j-\delta x_j) \\ &\left.+2M'_\alpha(\overline{x}_i,\overline{x}_j-\delta x_j)-M'_\alpha(\overline{x}_i-\delta x_i,\overline{x}_j-\delta x_j)\right] \\ &\forall i,j \in [1;4] \text{ et } j \neq i \end{aligned} \tag{7.21e}$$

$$\begin{aligned} k_{123} \approx \frac{1}{2\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}&\left[M'_\alpha(\overline{x}_1+\delta x_1,\overline{x}_2+\delta x_2,\overline{x}_3+\delta x_3)\right. \\ &-M'_\alpha(\overline{x}_1-\delta x_1,\overline{x}_2+\delta x_2,\overline{x}_3+\delta x_3)-M'_\alpha(\overline{x}_1+\delta x_1,\overline{x}_2-\delta x_2,\overline{x}_3+\delta x_3) \\ &+M'_\alpha(\overline{x}_1-\delta x_1,\overline{x}_2-\delta x_2,\overline{x}_3+\delta x_3)-M'_\alpha(\overline{x}_1+\delta x_1,\overline{x}_2+\delta x_2,\overline{x}_3-\delta x_3) \\ &+M'_\alpha(\overline{x}_1-\delta x_1,\overline{x}_2+\delta x_2,\overline{x}_3-\delta x_3)+M'_\alpha(\overline{x}_1+\delta x_1,\overline{x}_2-\delta x_2,\overline{x}_3-\delta x_3) \\ &\left.-M'_\alpha(\overline{x}_1-\delta x_1,\overline{x}_2-\delta x_2,\overline{x}_3-\delta x_3)\right] \end{aligned} \tag{7.21f}$$

où α désigne l'un des indices "xx", "xy", "yx" ou "yy". Les valeurs des différents δx_i apparaissent au Tableau 7.2. L'ensemble des dérivées de la relation (7.20) pour les quatre composants du tenseur adimensionnel peuvent être évaluées en utilisant 33 configurations de réseaux synthétiques. Les caractéristiques de ces 33 configurations sont reportées au Tableau 7.3.

Remarque : La notation $M'_\alpha\left(\overline{x}_i+\delta x_i\right)$ ou $M'_\alpha(\overline{x}_i+\delta x_i,\overline{x}_j+\delta x_j)$ est utilisée en sous-entendant que les autres variables x_w (qui n'apparaissent pas comme argument de M'_α) sont toutes égales à $\overline{x}_w$.

7.2.5 Méthodologie

Les configurations du Tableau (7.3) sont simulées avec le code de calcul SW2D décrit à l'annexe A. Le maillage du réseau de rues est construit de telle sorte qu'il y ait au minimum 5 mailles dans la largeur de chaque rue, ceci dans les deux directions

Tableau 7.3 – Caractéristiques géométriques des configurations de calage.

n°	θ	L_x	l_x	L_y	l_y	S_0	l'_x	l'_y	L_{xy}
12	90	90	10	90	10	0,01	0,100	0,100	1,000
436	60	90	10	90	10	0,01	0,100	0,100	1,000
442	120	90	10	90	10	0,01	0,100	0,100	1,000
488	90	135	15	90	10	0,01	0,100	0,100	1,500
494	90	90	10	180	20	0,01	0,100	0,100	0,500
500	90	85	15	90	10	0,01	0,150	0,100	1,000
502	90	95	5	90	10	0,01	0,050	0,100	1,000
506	90	90	10	85	15	0,01	0,100	0,150	1,000
508	90	90	10	95	5	0,01	0,100	0,050	1,000
512	60	95	5	90	10	0,01	0,050	0,100	1,000
544	60	85	15	90	10	0,01	0,150	0,100	1,000
516	120	95	5	90	10	0,01	0,050	0,100	1,000
546	120	85	15	90	10	0,01	0,150	0,100	1,000
520	60	90	10	95	5	0,01	0,100	0,050	1,000
548	60	90	10	85	15	0,01	0,100	0,150	1,000
524	120	90	10	95	5	0,01	0,100	0,050	1,000
550	120	90	10	85	15	0,01	0,100	0,150	1,000
534	60	90	10	180	20	0,01	0,100	0,100	0,500
528	60	135	15	90	10	0,01	0,100	0,100	1,500
542	120	90	10	180	20	0,01	0,100	0,100	0,500
536	120	135	15	90	10	0,01	0,100	0,100	1,500
556	90	95	5	95	5	0,01	0,050	0,050	1,000
558	90	85	15	85	15	0,01	0,150	0,150	1,000
560	90	95	5	85	15	0,01	0,050	0,150	1,000
562	90	85	15	95	5	0,01	0,150	0,050	1,000
564	90	51	9	36	4	0,01	0,150	0,100	1,500
566	90	114	6	72	8	0,01	0,050	0,100	1,500
568	90	34	6	72	8	0,01	0,150	0,100	0,500
570	90	95	5	180	20	0,01	0,050	0,100	0,500
572	90	135	15	85	15	0,01	0,100	0,150	1,500
574	90	135	15	95	5	0,01	0,100	0,050	1,500
576	90	45	5	85	15	0,01	0,100	0,150	0,500
578	90	45	5	95	5	0,01	0,100	0,050	0,500

du réseau de rues (afin d'assurer une bonne représentation de l'écoulement dans le carrefour). Le nombre de mailles entre deux carrefours est imposé par cette condition des 5 mailles en largeur. Le domaine est dimensionné de façon à contenir 10×10 blocs (cf. Figure 7.3). Une hauteur constante est imposée aux limites du domaine ($h = 1$ m). La simulation est effectuée sur une durée suffisamment longue pour atteindre le régime permanent (3 000 s).

Le réseau de rues synthétique est de taille suffisamment grande pour avoir dans la zone centrale (approximativement 4×4 blocs) un écoulement de caractéristiques périodiques, ce qui est l'équivalent sur le plan macroscopique du régime uniforme. Dans cette zone, l'influence des conditions aux limites est réduite au minimum et la ligne de charge est globalement parallèle à la pente du fond. Pour chaque configuration,

on a donc

$$\left.\begin{array}{l} S_{f,x} = S_{0,x} \\ S_{f,y} = S_{0,y} \end{array}\right\} \tag{7.22}$$

On affecte à l'ensemble du réseau de rues un coefficient de Strickler isotrope. On récrit la relation (7.2)

$$\begin{bmatrix} S_{f,x} \\ \\ S_{f,y} \end{bmatrix} = \frac{|Q|}{h^{10/3}} \left(\frac{1}{K^2} + \frac{h^{4/3}}{2g} \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q \\ \\ r \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

Ce système de 2 équations contient 4 inconnues, M_{xx}, M_{xy}, M_{yx} et M_{yy}, puisque $S_{f,x}$ et $S_{f,y}$ sont connus et h, q, r sont déduits des résultats de la simulation numérique. Pour identifier les 4 inconnues, on est obligé de "dédoubler" ce système. Chaque configuration est simulée avec les jeux de pentes suivants :

$$\left.\begin{array}{ll} S_{0,x(1)} = 0{,}01 & S_{0,y(1)} = 0 \\ \text{et} & \\ S_{0,x(2)} = 0 & S_{0,y(2)} = 0{,}01 \end{array}\right\} \tag{7.24}$$

On obtient le système suivant

$$\left.\begin{array}{l} S_{0,x(1)} = \dfrac{1}{h_{(1)}^{10/3}} \sqrt{q_{(1)}^2 + r_{(1)}^2} \left[\dfrac{q_{(1)}}{K^2} + \dfrac{h_{(1)}^{4/3}}{2g} \left(q_{(1)} M_{xx} + r_{(1)} M_{xy} \right) \right] \\ S_{0,x(2)} = \dfrac{1}{h_{(2)}^{10/3}} \sqrt{q_{(2)}^2 + r_{(2)}^2} \left[\dfrac{q_{(2)}}{K^2} + \dfrac{h_{(2)}^{4/3}}{2g} \left(q_{(2)} M_{xx} + r_{(2)} M_{xy} \right) \right] \\ S_{0,y(1)} = \dfrac{1}{h_{(1)}^{10/3}} \sqrt{q_{(1)}^2 + r_{(1)}^2} \left[\dfrac{r_{(1)}}{K^2} + \dfrac{h_{(1)}^{4/3}}{2g} \left(q_{(1)} M_{yx} + r_{(1)} M_{yy} \right) \right] \\ S_{0,y(2)} = \dfrac{1}{h_{(2)}^{10/3}} \sqrt{q_{(2)}^2 + r_{(2)}^2} \left[\dfrac{r_{(2)}}{K^2} + \dfrac{h_{(2)}^{4/3}}{2g} \left(q_{(2)} M_{yx} + r_{(2)} M_{yy} \right) \right] \end{array}\right\} \tag{7.25}$$

Ce système admet la solution suivante

$$\left.\begin{array}{l} M_{xx} = \dfrac{r_{(2)}}{q_{(1)} r_{(2)} - q_{(2)} r_{(1)}} \left[\dfrac{2g h_{(1)}^2 S_{0,x}^{(1)}}{\sqrt{q_{(1)}^2 + r_{(1)}^2}} + \dfrac{2g}{K^2} \left(\dfrac{q_{(2)}}{h_{(2)}^{4/3}} \dfrac{r_{(1)}}{r_{(2)}} - \dfrac{q_{(1)}}{h_{(1)}^{4/3}} \right) \right] \\ M_{xy} = -\dfrac{q_{(2)}}{r_{(2)}} M_{xx} - \dfrac{2g}{K^2} \dfrac{q_{(2)}}{r_{(2)} h_{(2)}^{4/3}} \\ M_{yx} = -\dfrac{q_{(1)}}{r_{(1)}} M_{yy} - \dfrac{2g}{K^2} \dfrac{q_{(1)}}{r_{(1)} h_{(1)}^{4/3}} \\ M_{yy} = \dfrac{q_{(1)}}{q_{(1)} r_{(2)} - q_{(2)} r_{(1)}} \left[\dfrac{2g h_{(2)}^2 S_{0,y}^{(2)}}{\sqrt{q_{(2)}^2 + r_{(2)}^2}} + \dfrac{2g}{K^2} \left(\dfrac{r_{(1)}}{h_{(1)}^{4/3}} \dfrac{q_{(2)}}{q_{(1)}} - \dfrac{r_{(2)}}{h_{(2)}^{4/3}} \right) \right] \end{array}\right\} \tag{7.26}$$

Pour chaque configuration, en utilisant les équations (7.26) et (7.15), on peut calculer toutes les dérivées recherchées avec les relations (7.21a) à (7.21f). Les valeurs obtenues sont reportées dans le Tableau 7.4.

Tableau 7.4 – Valeurs des coefficients de la relation (7.20).

	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}
k_0	2,448	0,000	0,000	2,448
k_1	28,031	0,005	–0,006	–74,477
k_2	–74,477	–0,006	0,005	28,031
k_3	0,772	0,001	–0,001	–1,745
k_4	0,010	14,537	12,581	0,010
k_{11}	–4,874	0,082	0,027	2141,876
k_{22}	2141,874	0,027	0,082	–4,864
k_{33}	3,355	–0,001	0,000	7,350
k_{44}	45,721	0,038	0,040	67,989
k_{14}	0,062	61,172	–16,891	–0,014
k_{24}	0,080	–92,413	–77,213	0,075
k_{34}	0,004	5,886	–9,364	–0,019
k_{12}	–1327,815	0,082	0,058	–1514,483
k_{13}	22,846	0,002	–0,017	75,745
k_{23}	–57,127	–0,004	–0,003	–11,543
k_{444}	0,418	192,977	210,411	–0,378
k_{123}	–1334,840	–0,308	1,069	494,808
k_{144}	347,341	0,083	0,063	–1000,110
k_{244}	–72,280	0,330	0,376	–135,227
k_{344}	42,477	–0,018	–0,027	–102,282
k_{114}	–4,955	–4001,362	–2923,666	–6,477
k_{224}	–12,520	903,168	–117,170	–16,609
k_{334}	–0,078	–31,792	3,282	–0,119

7.2.6 Mise en œuvre de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge

Étant donné un réseau régulier de rues, on calcule d'abord les variables x_1 à x_4. Puis en utilisant l'équation (7.20) et les coefficients du Tableau (7.4), on calcule le tenseur adimensionnel. Enfin, le tenseur de perte de charge est calculé par la relation suivante

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{M'_{xx}}{L_x + l_x} & \dfrac{M'_{xy}}{L_x + l_x} \\ \dfrac{M'_{yx}}{(L_y + l_y)\sin(\theta)} & \dfrac{M'_{yy}}{(L_y + l_y)\sin(\theta)} \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

7.3 Validation numérique de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge

7.3.1 Simplification de la relation

Le choix des coefficients de la relation (7.20) a été fait à priori, sans savoir lesquels sont indispensables pour l'estimation du tenseur de pertes de charges singulières, et lesquels n'apportent que très peu de précision supplémentaire. On a comparé le tenseur adimensionnel issu des simulations numériques et le tenseur adimensionnel issu de la

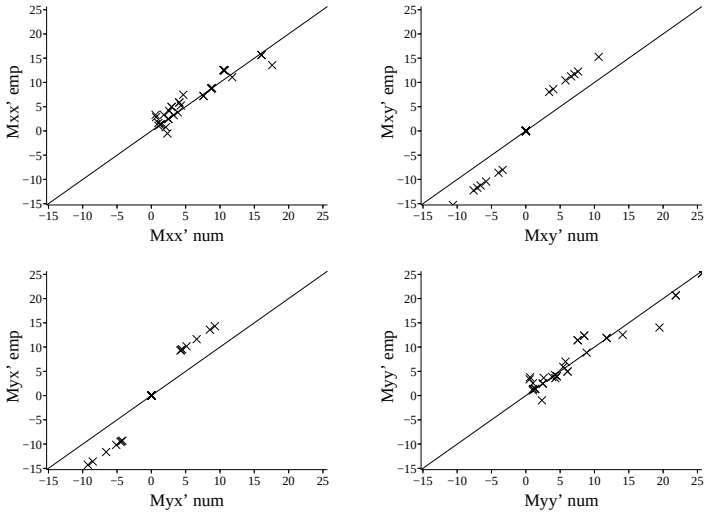


Figure 7.4 – Formulation 1, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, configurations de calage.

Tableau 7.5 – Somme des résidus et résidu moyen du nuage de points, configurations de calage.

	Somme des résidus				Résidu moyen			
	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}
Formulation 1	38	65	71	44	1,156	1,970	2,144	1,331
Formulation 2	38	21	9	44	1,156	0,643	0,270	1,331
Formulation 3	44	21	9	93	1,347	0,643	0,270	2,812
Formulation 4	47	21	9	98	1,418	0,643	0,270	2,974
Formulation 5	125	29	26	180	3,780	0,866	0,777	5,457

relation (7.20) pour l'ensemble des configurations de calage (configurations utilisées pour calculer les coefficients k_{mnp} du Tableau 7.4).

La relation (7.20) a été utilisée sous plusieurs formes :

- formulation 1 : tous les termes sont utilisés ;
- formulation 2 : on néglige les termes k_{444}, k_{114}, k_{224} et k_{334} ;
- formulation 3 : on utilise seulement les termes d'ordre 1 et 2 ;
- formulation 4 : on utilise seulement les termes d'ordre 1 et 2 sauf k_{12}, k_{13} et k_{23} ;
- formulation 5 : on utilise seulement les termes d'ordre 1.

Dans chaque cas, on a représenté graphiquement les termes issus de la relation (7.20) en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques (Figures 7.4 à 7.8). On a également calculé la somme des résidus du nuage de points obtenus par rapport à la première bissectrice (Tableau 7.5).

En comparant les formulations (1) et (2), on constate que les termes k_{444}, k_{114}, k_{224}, k_{334} entraînent une dégradation du calcul des termes de la seconde diagonale (M'_{xy} et M'_{yx}). Si on néglige tous les termes d'ordre 3, le calcul du tenseur adimensionné est moins bon (formulation 3). Par contre, les coefficients k_{12}, k_{13}, k_{23} n'entraînent pas d'amélioration notable pour le calcul du tenseur (formulation 4). Enfin, le calcul du tenseur est très médiocre si on n'utilise que les termes d'ordre 1 (formulation 5). Globalement, l'ordre de grandeur du résidu moyen est de 1.

Il apparaît finalement que les versions les plus intéressantes de la relation (7.20) sont

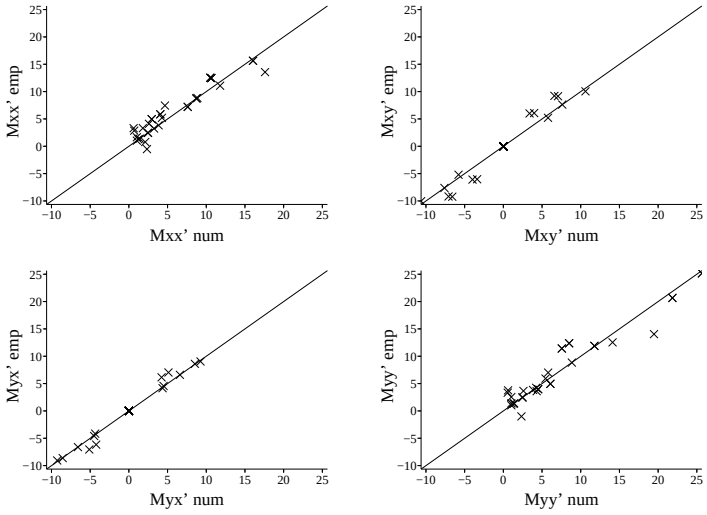


Figure 7.5 – Formulation 2, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, configurations de calage.

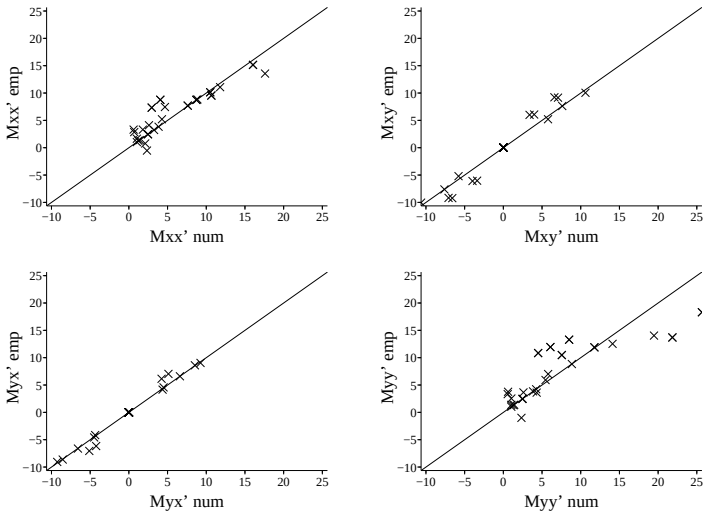


Figure 7.6 – Formulation 3, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, configurations de calage.

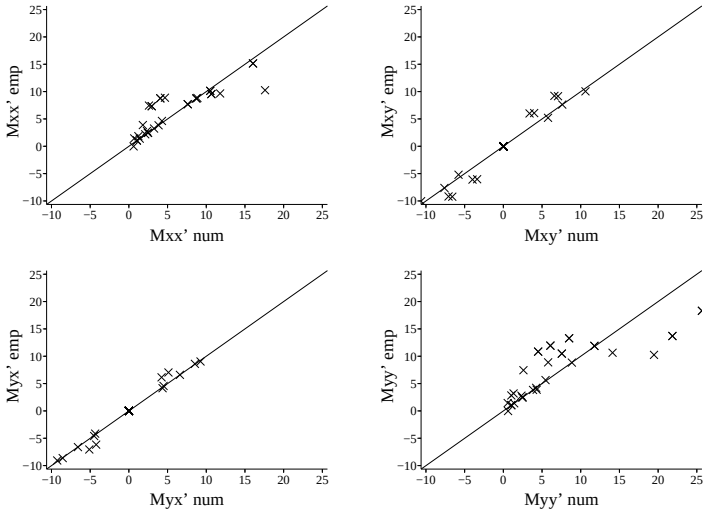


Figure 7.7 – Formulation 4, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, configurations de calage.

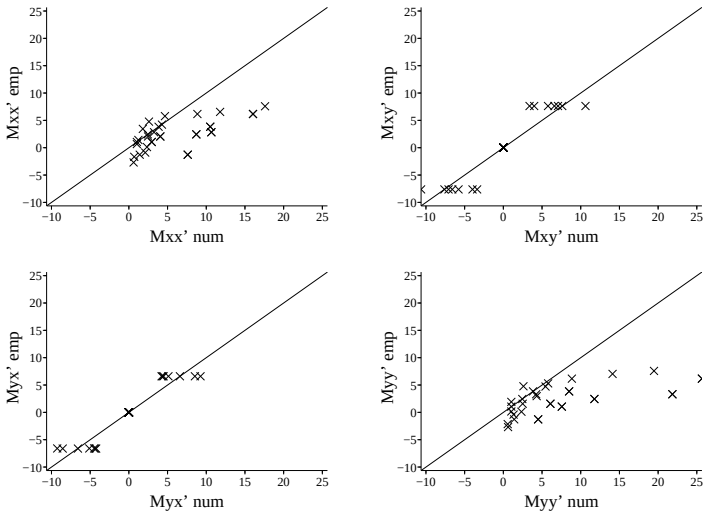


Figure 7.8 – Formulation 5, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, configurations de calage.

celles correspondant aux formulations 2 et 4, ce qui nous permet d'écrire respectivement les équations (7.28) et (7.29).

$$\begin{aligned} M'_\alpha = k_0 &+ \sum_{i=1}^{4} k_i \left(x_i - \overline{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{4} k_{ii} \left(x_i - \overline{x}_i\right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{i<j\leq 4} k_{ij} \left(x_i - \overline{x}_i\right)\left(x_j - \overline{x}_j\right) \\ &+ k_{123} \left(x_1 - \overline{x}_1\right)\left(x_2 - \overline{x}_2\right)\left(x_3 - \overline{x}_3\right) + \sum_{i=1}^{3} k_{i44} \left(x_i - \overline{x}_i\right)\left(x_4 - \overline{x}_4\right)^2 \end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned} M'_\alpha = k_0 &+ \sum_{i=1}^{4} k_i \left(x_i - \overline{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{4} k_{ii} \left(x_i - \overline{x}_i\right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{3} k_{i4} \left(x_i - \overline{x}_i\right)\left(x_4 - \overline{x}_4\right) \end{aligned} \tag{7.29}$$

On peut envisager deux utilisations possibles de la relation empirique de prédétermination du tenseur de pertes de charge :

- la relation (7.28), un peu lourde à manipuler (nombreux termes), mais un peu plus proche des valeurs issues des simulations numériques,
- la relation (7.29), plus concise mais un peu moins proche des valeurs issues des simulations numériques.

7.3.2 Validation numérique

On cherche à valider la relation empirique précédente en comparant le tenseur issu des simulations numériques avec le tenseur calculé par la relation empirique, sur des configurations non utilisées pour la détermination des coefficients du tenseur. Comme au paragraphe précédent, on compare le tenseur issu des simulations numériques et le tenseur issu de la relation empirique pour les différentes versions de la relation empirique. On calcule la somme des résidus du nuage de points obtenus par rapport à la première bissectrice.

Premier jeu de configurations. On constitue un jeu de 18 configurations où les variables l'_x, l'_y, L_{xy} prennent des valeurs différentes de celles utilisées pour les configurations de calage (Tableau 7.6). Pour chaque configuration, 2 ou 3 des variables l'_x, l'_y, L_{xy} ont une valeur différente de la valeur de référence. L'angle θ reste égal à la valeur de référence ($\pi/2$). Les résidus ont été calculés pour les 5 cas définis au paragraphe précédent, leurs valeurs apparaissent au Tableau 7.7.

On n'a représenté graphiquement les nuages de points que pour les formulations 2 et 4. Pour la formulation 2 (Figure 7.9), les deux croix qui s'éloignent de la première bissectrice sont les configurations A2 et A3. On remarque que l'_x et l'_y prennent des valeurs élevées (0,17 et 0,20), situées en dehors de l'intervalle utilisé pour évaluer la dérivée. Le marqueur "+" éloigné de la première bissectrice correspond à la simulation D1. On remarque là aussi que la valeur de l'_y et L_{xy} (0,333 et 3,000) sont situées largement en dehors de l'intervalle utilisé pour évaluer la dérivée.
Pour la formulation 4 (Figure 7.10), c'est encore le point D1 (coordonnées 0,5 ; 50) qui s'éloigne beaucoup de la première bissectrice. Si l'on écarte le point D1, le graphique peut être recentré sur les autres points (Figure 7.11) et on constate que ce sont à nouveau les deux points A2 et A3 qui sont très éloignés de la première bissectrice. Si

Tableau 7.6 – Caractéristiques du 1er jeu de configurations de validation.

Config.	θ	L_x	l_x	L_y	l_y	S_0	l'_x	l'_y	L_{xy}
A1	90	60	10	60	10	0,01	0,143	0,143	1,000
A2	90	40	10	40	10	0,01	0,200	0,200	1,000
A3	90	50	10	50	10	0,01	0,167	0,167	1,000
B1	90	110	10	90	10	0,01	0,083	0,100	1,200
B2	90	70	10	90	10	0,01	0,125	0,100	0,800
B3	90	130	10	90	10	0,01	0,071	0,100	1,400
B4	90	50	10	90	10	0,01	0,167	0,100	0,600
B5	90	90	15	90	10	0,01	0,143	0,100	1,050
B6	90	90	5	90	10	0,01	0,053	0,100	0,950
C1	90	90	10	110	10	0,01	0,100	0,083	0,833
C2	90	90	10	70	10	0,01	0,100	0,125	1,250
C3	90	90	10	130	10	0,01	0,100	0,071	0,714
C4	90	90	10	50	10	0,01	0,100	0,167	1,667
C5	90	90	10	90	15	0,01	0,100	0,143	0,952
C6	90	90	10	90	5	0,01	0,100	0,053	1,053
D1	90	80	10	20	10	0,01	0,111	0,333	3,000
D2	90	50	10	80	10	0,01	0,167	0,111	0,667
D3	90	80	10	50	10	0,01	0,111	0,167	1,500

Tableau 7.7 – Somme des résidus et résidu moyen du nuage de points, 1er jeu de configurations de validation.

	Somme des résidus				Résidu moyen			
	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}
Formulation 1	37	0	0	34	2,065	0	0	1,911
Formulation 2	37	0	0	34	2,065	0	0	1,911
Formulation 3	44	0	0	32	2,438	0	0	1,751
Formulation 4	73	0	0	37	4,055	0	0	2,066
Formulation 5	41	0	0	25	2,277	0	0	1,377

on écarte ces 3 points, le résidu moyen devient (sur 15 configurations) de l'ordre de 0,6 pour M'_{xx} et M'_{yy}.

On constate que pour un angle $\theta = \pi/2$, en restant dans la gamme utilisée pour le calcul des dérivées, la relation empirique se comporte bien en phase de validation. Si on sort trop largement de la gamme [0,05 ; 0,15] pour l'_x et l'_y ou [0,5 ; 1,5] pour L_{xy}, l'écart sur la valeur des termes diagonaux du tenseur peut devenir très important.

Deuxième jeu de configurations. Ce deuxième jeu est constitué de 15 configurations où l'angle θ est différent de $\pi/2$ (Tableau 7.8). De plus, mis à part les configurations E1 à E3, E11 et E12, les 3 variables l'_x, l'_y, L_{xy} ont une valeur différente de la valeur de référence. On constate que pour ces configurations, les résidus sont assez importants pour les formulations 2 et 4 (Tableau 7.9 et Figure 7.12). Ceci peut s'expliquer par le fait que les dérivées faisant intervenir l'angle θ dans la relation (7.20) sont $\partial M'_\alpha/\partial\theta$, $\partial^2 M'_\alpha/\partial\theta\partial x_i$, $\partial^3 M'_\alpha/\partial\theta^2\partial x_i$, $\partial^3 M'_\alpha/\partial\theta\partial x_i^2$. Le cas où 2, voire 3, des variables l'_x, l'_y, L_{xy} prennent des valeurs différentes de la valeur de référence en même temps que θ est différent de $\pi/2$ ne pourrait être correctement représenté que si la relation (7.20) comportait les 3 dérivées $\partial^3 M'_\alpha/\partial\theta\partial x_i\partial x_j$, plus la dérivée au 4e ordre $\partial^4 M'_\alpha/\partial\theta\partial x_1\partial x_2\partial x_3$.

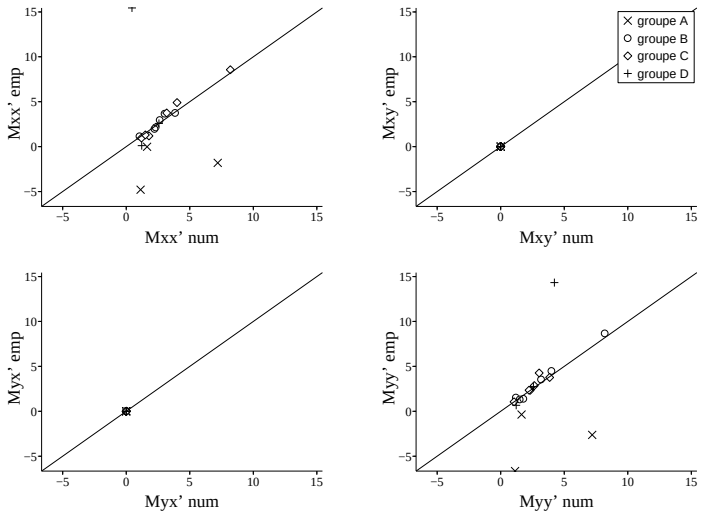


Figure 7.9 – Formulation 2, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, 1er jeu de configurations de validation.

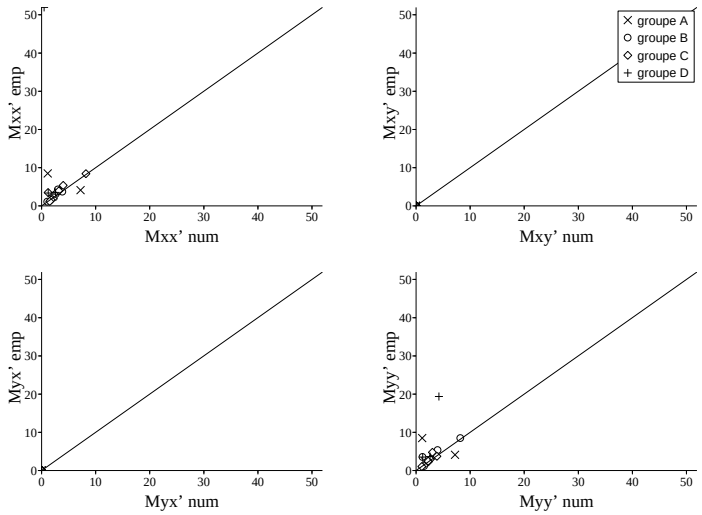


Figure 7.10 – Formulation 4, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, 1er jeu de configurations de validation.

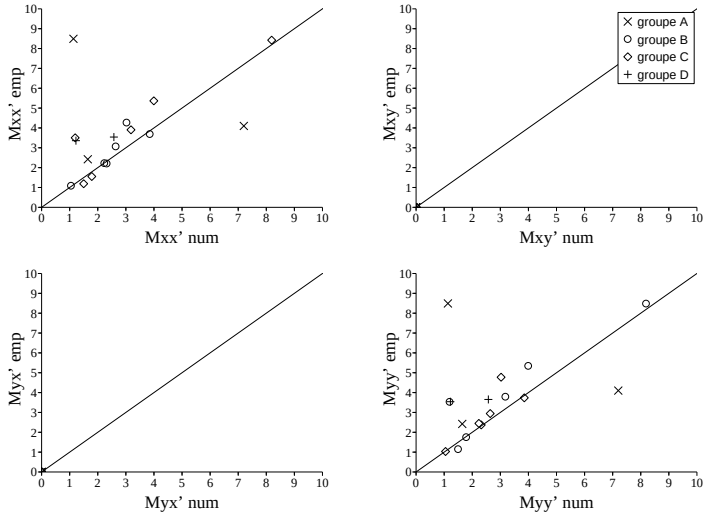


Figure 7.11 – Formulation 4, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, 1er jeu de configurations de validation sans le point D1.

Tableau 7.8 – Caractéristiques du 2e jeu de configurations de validation.

Config.	θ	L_x	l_x	L_y	l_y	S_0	l'_x	l'_y	L_{xy}
E1	60	90	10	80	10	0,01	0,100	0,111	1,111
E2	60	60	10	60	10	0,01	0,143	0,143	1,000
E3	60	40	10	40	10	0,01	0,200	0,200	1,000
E4	60	60	10	50	10	0,01	0,143	0,167	1,167
E5	60	80	10	50	10	0,01	0,111	0,167	1,500
E6	60	50	10	20	10	0,01	0,167	0,333	2,000
E7	60	20	10	40	10	0,01	0,333	0,200	0,600
E8	60	60	30	60	20	0,01	0,333	0,250	1,125
E9	60	50	40	60	20	0,01	0,444	0,250	1,125
E10	60	96	24	80	20	0,01	0,200	0,200	1,200
E11	70	50	10	50	10	0,01	0,167	0,167	1,000
E12	110	50	10	50	10	0,01	0,167	0,167	1,000
E13	120	80	10	50	10	0,01	0,111	0,167	1,500
E14	120	50	10	60	10	0,01	0,167	0,143	0,857
E15	120	60	10	50	10	0,01	0,143	0,167	1,167

Tableau 7.9 – Somme des résidus et résidu moyen du nuage de points, 2e jeu de configurations de validation.

	Somme des résidus				Résidu moyen			
	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}	M'_{xx}	M'_{xy}	M'_{yx}	M'_{yy}
Formulation 1	109	249	237	203	7,279	16,616	15,831	13,560
Formulation 2	109	29	48	204	7,284	1,954	3,187	13,628
Formulation 4	152	29	48	280	10,133	1,955	3,184	18,684

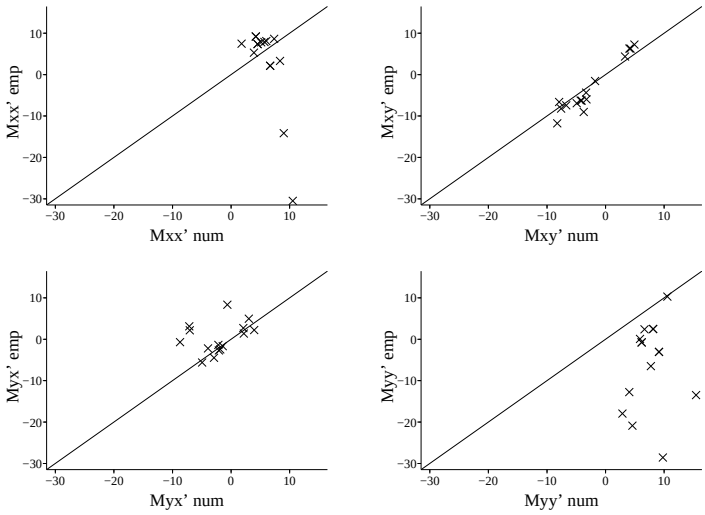


Figure 7.12 – Formulation 2, termes du tenseur empirique en fonction des termes du tenseur issu des simulations numériques, 2e jeu de configurations de validation.

Tableau 7.10 – Caractéristiques géométriques de la configuration E5 pour l'étude de sensibilité.

Symbole	Signification	Valeur
l_x	largeur des rues dans la 1re direction principale	10 m
l_y	largeur des rues dans la 2e direction principale	10 m
L_x	largeur des bâtiments dans la 1re direction principale	80 m
L_y	largeur des bâtiments dans la 2e direction principale	50 m
$S_{0,x}$	pente du fond selon l'axe x	0,01 m/m
$S_{0,y}$	pente du fond selon l'axe y	0 m/m
θ	angle entre la 2e et la 1re direction principale	60°

7.3.3 Étude de sensibilité de la modélisation macroscopique aux valeurs du tenseur de perte de charge

On compare les résultats de la modélisation 2D macroscopique sur un réseau de rues pour différentes méthodes d'estimation du tenseur de perte de charge. Le réseau de rues est celui de la configuration E5 utilisée au paragraphe précédent (Figure 7.13), ses caractéristiques sont rappelées au Tableau 7.10.

Simulations avec le même tenseur. Dans un premier temps, on utilise les résultats de la modélisation 2D classique appliquée à la configuration E5. Le tenseur de perte de charge calculé à partir des variables de l'écoulement dans la zone centrale du domaine est le suivant

$$\begin{bmatrix} 0{,}047 & -0{,}047 \\ -0{,}042 & 0{,}156 \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

Ce tenseur permet théoriquement à la modélisation 2D macroscopique d'être équivalente à la modélisation 2D classique sur la configuration E5.

Dans un deuxième temps, on simule l'écoulement à travers le réseau de rues avec la modélisation 2D macroscopique. On utilise un domaine carré de 500 m de large,

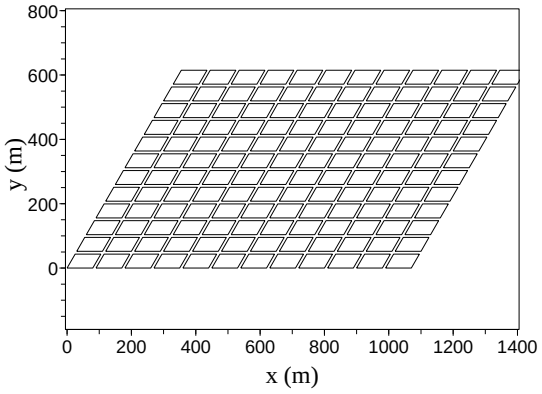


Figure 7.13 – Vue en plan du réseau de rues dans la configuration E5.

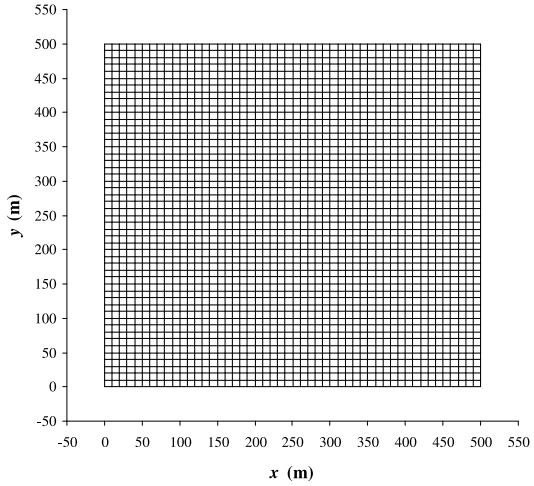


Figure 7.14 – Vue en plan du maillage utilisé avec la modélisation 2D macroscopique.

avec des mailles carrées de 10 m de large (Figure 7.14). Les conditions aux limites sont identiques à celles définies au §7.2.5 : une hauteur d'eau $h = 1$ m est imposée aux quatres cotés du domaine. La porosité est calculée comme le ratio de la surface de la voirie sur la surface totale du domaine, elle est égale à 0,74. Le tenseur de perte de charge est celui donné par la relation (7.30).

Les caractéristiques moyennes de l'écoulement obtenues par les deux modélisations, au centre du domaine, sont reportées au Tableau 7.11. On constate que la modélisation 2D macroscopique donne un écoulement très proche de celui obtenu avec la modélisation 2D classique avec le tenseur déduit de la modélisation 2D classique.

Sensibilité aux variations du tenseur. Lors de la validation de la relation de prédétermination du tenseur adimensionné, on a constaté que l'écart sur les termes du tenseur adimensionné est de l'ordre de 5 si θ est égal à $\pi/2$ (Tableau 7.7), et de 15 si θ est différent de $\pi/2$ (Tableau 7.9). On simule à nouveau l'écoulement à travers le réseau de rues avec la modélisation 2D macroscopique, mais on ajoute ou on retranche 5, puis 15,

Tableau 7.11 – Caractéristiques moyennes de l'écoulement pour la configuration E5.

	modélisation 2D classique	modélisation macroscopique	écart (%)
profondeur h (m)	0,898	0,906	0,8
débit unitaire q (m^2/s)	–1,929	–2,044	5,9
débit unitaire r (m^2/s)	–0,495	–0,548	10,7

Tableau 7.12 – Variation des caractéristiques de l'écoulement suivant les modifications du tenseur avec la modélisation 2D classique. Q est la norme du débit unitaire.

	tenseur de référence	$M'_\alpha + 5$	$M'_\alpha - 5$	$M'_\alpha \pm 5$	$M'_\alpha + 15$	$M'_\alpha - 15$	$M'_\alpha \pm 15$
M'_{xx}	4,232	9,232	–0,768	9,232	19,232	–10,768	19,232
M'_{xy}	–4,262	0,738	–9,262	–9,262	10,738	–19,262	–19,262
M'_{yx}	–2,167	2,833	–7,167	–7,167	12,833	–17,167	–17,167
M'_{yy}	8,116	13,116	3,116	13,116	23,116	–6,884	23,116
M_{xx}	0,047	0,103	–0,009	0,103	0,214	–0,120	0,214
M_{xy}	–0,047	0,008	–0,103	–0,103	0,119	–0,214	–0,214
M_{yx}	–0,042	0,055	–0,138	–0,138	0,247	–0,330	–0,330
M_{yy}	0,156	0,252	0,060	0,252	0,445	–0,133	0,445
h	0,906	0,969	0,220	0,894	0,959	0,529	0,874
q	–2,044	–1,283	–3,329	–1,663	–0,991	–3,185	–1,430
r	–0,548	0,284	–2,890	–0,907	0,561	0,000	–1,058
Q	2,116	1,314	4,408	1,894	1,139	3,185	1,779

aux composantes M'_α du tenseur adimensionné. On compare ensuite les caractéristiques moyennes de l'écoulement obtenues avec ces différents tenseurs (Tableau 7.12). Dans la colonne ± 5, on a ajouté 5 aux termes positifs du tenseur adimensionné, et on a retranché 5 aux termes négatifs du tenseur (idem pour ± 15).

On constate que h varie peu sauf pour le cas -5 et le cas -15. Or ces deux cas correspondent à un changement de signe des composantes M_{xx} et M_{yy}. En revanche, un changement de signe des composantes M_{xy} et M_{yx} semble avoir peu d'influence sur h. Ainsi, le cas ± 5 entraîne une variation relativement faible des caractéristiques de l'écoulement puisque aucune composante du tenseur ne change de signe.
Les débits unitaires q et r sont par contre beaucoup plus sensibles aux variations du tenseur. En particulier, un changement de signe des composantes M_{xy} et M_{yx} entraîne un changement de signe de r. Les cas ± 5 et ± 15 correspondent aux plus faibles variations de la norme Q du débit unitaire.

Examen des configurations de validation. Sur les Figures 7.9 à 7.11 (premier jeu de configurations de validation), on constate que pour la majorité des points, le tenseur issu des simulations numériques et le tenseur donné par la relation empirique ont des composantes de même signe. Les écarts sur l'estimation des composantes du tenseur ne devraient donc pas donner des écarts très importants sur les variables de l'écoulement.

En revanche, pour le deuxième jeu de configurations de validation (Figure 7.12), il y a beaucoup plus de points pour lesquels les composantes du tenseur issu des simulations numériques et du tenseur donné par la relation empirique ne sont pas de même signe. Les écarts sur l'estimation des composantes du tenseur devraient donc donner des écarts assez importants sur les variables de l'écoulement.

7.4 Conclusions

On a développé une relation de prédétermination du tenseur de perte de charge pour pouvoir utiliser la modélisation 2D macroscopique sans avoir à caler ce tenseur. La relation de prédétermination est exprimée sous la forme d'un polynôme de degré 3 fonction des caractéristiques géométriques du réseau de rues. Les coefficients de ce polynôme ont été déterminés à partir de simulations numériques sur des réseaux de rues synthétiques avec la modélisation 2D classique.

Une validation numérique de cette relation de prédétermination a montré que les composantes du tenseur adimensionné données par le polynôme sont proches des valeurs issues de la simulation numérique quand les paramètres du polynôme restent dans la gamme de valeurs utilisées pour le calage.

Le nombre limité de termes dans ce polynôme implique que certaines variations des composantes du tenseur sont mal reproduites, en particulier quand plusieurs paramètres géométriques sont simultanément différents de leurs valeurs de référence. La sensibilité de la modélisation 2D macroscopique aux variations du tenseur de perte de charge est relativement faible quand les composantes du tenseur de perte de charge ne changent pas de signe, ce qui est majoritairement le cas quand les paramètres du polynôme restent dans la gamme de valeurs utilisées pour le calage.

La Partie IV ci-après est consacrée à la mise en œuvre de la modélisation 2D macroscopique sur des modèles réduits. Celle-ci est comparée d'une part à la modélisation 2D classique, d'autre part à des mesures expérimentales. L'importance du terme de pertes de charge singulières est mise en évidence.

Quatrième partie

Validation de la modélisation macroscopique sur modèles réduits

Présentation de la Partie IV

Cette partie est consacrée à la validation expérimentale de la modélisation macroscopique sur des modèles réduits.
Le Chapitre 8 présente la campagne de mesures expérimentales réalisées sur un modèle réduit de zone urbaine situé à l'Université Catholique de Louvain (Belgique). Des mesures de profondeurs et de vitesses de surface ont été réalisées, et sont comparées aux résultats des simulations numériques. Deux configurations de zone urbaine sont expérimentées puis comparées. Pour l'une de ces configurations, les écoulements en régime permanent et en régime transitoire sont comparés. Les champs de vitesses calculés par la modélisation macroscopique et la modélisation classique sont comparés à une échelle d'espace pertinente pour faire apparaître des similitudes.
Le Chapitre 9 présente une étude similaire réalisée sur le modèle réduit de la plaine du Toce (Italie). Deux configurations de zone urbaine sont expérimentées en régime transitoire. Seules des mesures de profondeurs sont disponibles, elles sont comparées aux résultats des simulations numériques. Différentes représentations de la zone urbaine dans la modélisation 2D sont comparées.

Chapitre 8

Validation expérimentale avec le modèle réduit de l'UCL

Sommaire

8.1 La campagne de mesures expérimentales 134
8.1.1 Le dispositif expérimental de l'UCL 134
8.1.2 Configurations d'écoulements et configurations de la zone urbaine 134
8.1.3 Le matériel de mesure 136
8.2 Méthodologie et objectifs de la validation 138
8.3 Écoulement permanent – configuration "ville en quinconce" 138
8.3.1 Influence de la densité du maillage 139
8.3.2 Apport du terme de perte de charge 139
8.3.3 Modification du coefficient de rugosité pour représenter la zone urbaine 142
8.3.4 Comparaison des vitesses expérimentales et numériques : l'imagerie digitale 144
8.3.5 Comparaison des vitesses expérimentales et numériques : le vélocimètre Doppler 144
8.3.6 Comparaison des champs de vitesse simulés 148
8.4 Écoulement transitoire – configuration "ville en quinconce" 154
8.4.1 Comparaison des profondeurs expérimentales et simulées . . 154
8.4.2 Comparaison des simulations CR, PC, CRC et PRC. 156
8.4.3 Comparaison des champs de vitesse expérimentaux et numériques. 159
8.4.4 Comparaison du régime permanent et du régime transitoire 161
8.5 Écoulement transitoire – configuration "ville droite" . . 164
8.5.1 Profils en long de surface libre 164
8.5.2 Champs de vitesse 166
8.6 Comparaison des différentes configurations de la zone urbaine 166
8.7 Utilisation de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge 168
8.8 Conclusions 171

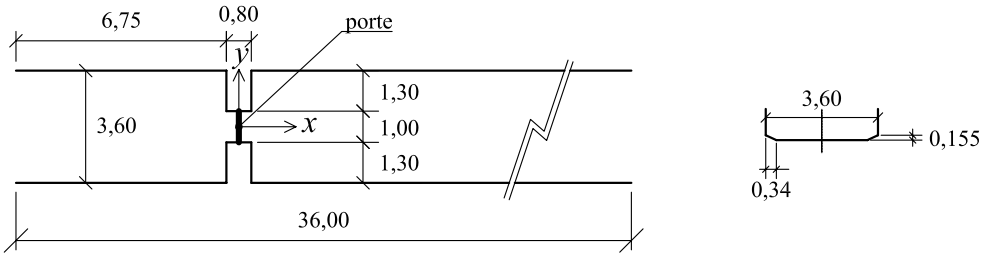


Figure 8.1 – Schéma du dispositif expérimental de l'UCL et dimensions du canal (m), vue en plan et section du canal.

J'ai effectué au cours de mon travail de thèse trois séjours scientifiques (pour une durée totale de cinq semaines) à l'Université Catholique de Louvain (UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique), au sein du Département Génie Civil et Environnemental (GCE). Ces séjours ont été financés par une Bourse de Séjour Scientifique du Fond National de le Recherche Scientifique (FNRS, équivalent belge du CNRS), et par un financement Projets Internes du Laboratoire HydroSciences.

Le but de ces séjours était de réaliser une campagne de mesures expérimentales sur un modèle réduit de zone urbaine soumis à différents types d'écoulements. Ces données ont ensuite été utilisées pour réaliser la validation de la modélisation 2D macroscopique. Ce travail a été réalisé en partenariat avec Sandra Soares-Frazão et Yves Zech de l'Université Catholique de Louvain. Il s'inscrit dans l'optique d'une collaboration à long terme entre l'UMR HydroSciences et le Département GCE de l'UCL pour le développement de techniques numériques pour la modélisation hydrodynamique.

8.1 La campagne de mesures expérimentales

8.1.1 Le dispositif expérimental de l'UCL

Le dispositif expérimental se situe au Laboratoire de Génie Civil de l'UCL. Il s'agit d'un grand canal à fond horizontal de 36 m de long et de 3,6 m de large, de section trapézoïdale (Figure 8.1).

L'eau circule en circuit fermé dans le canal, une pompe de forte puissance prélève l'eau à une extrémité du canal pour l'amener à l'autre extrémité. Un dispositif constitué d'une porte mobile et de deux blocs imperméables permet de créer une retenue d'eau dans la partie amont du canal.

Un modèle réduit de zone urbaine a été disposé dans la partie aval du canal. Les îlots urbains sont représentés par des blocs de base carrée d'une largeur de 30 cm. Ces blocs ont été construits par des étudiants de l'UCL au cours de leur Travail de Fin d'Études pour représenter des immeubles (Deswijsen et Duthoit, 2005). Ces blocs ont été construits à partir de plaques de bois aggloméré et recouverts de peinture. Un jeu de 25 blocs permet de créer différentes configurations de la zone urbaine (cf. §8.1.2). Les blocs sont lestés pour ne pas être emportés par l'écoulement.

8.1.2 Configurations d'écoulements et configurations de la zone urbaine

Deux types d'écoulements ont été étudiés : le régime permanent et le régime transitoire. Le régime permanent est obtenu en maintenant la porte ouverte et en actionnant

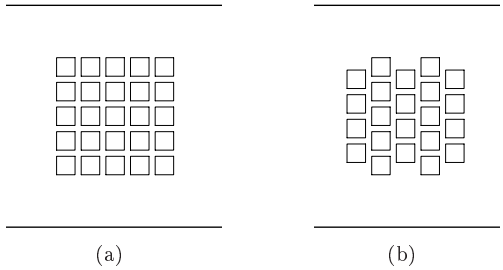


Figure 8.2 – Schéma des trois configurations de la zone urbaine, (a) ville droite, (b) ville en quinconce.

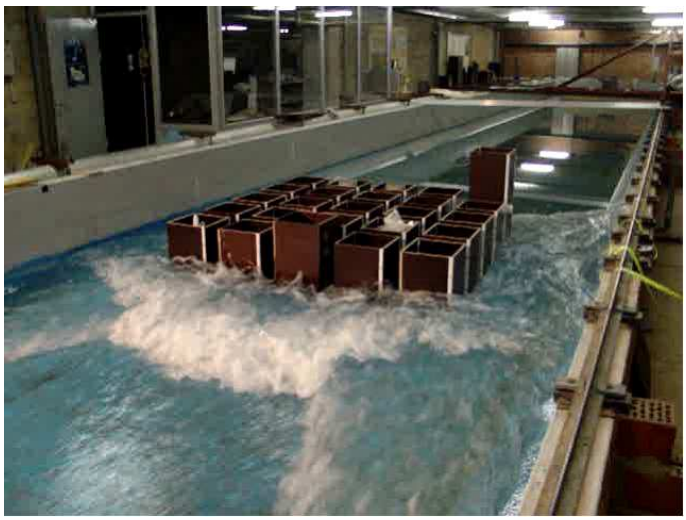


Figure 8.3 – Photographie de la partie aval du canal avec la zone urbaine (configuration ville droite et écoulement transitoire).

la pompe de manière continue. Un débitmètre électromagnétique installé sur la conduite d'amenée permet de connaître le débit circulant et de vérifier sa stabilité. Le régime transitoire est obtenu en ouvrant la porte après avoir retenu l'eau pompée dans la partie amont du canal. La partie aval du canal est quasiment à sec avant l'ouverture de la porte, ce test expérimental permet de reproduire un écoulement consécutif à une rupture de barrage.

Deux configurations de la zone urbaine ont été retenues (Figure 8.2) :

- la configuration dite *ville droite*, les blocs sont disposés en réseau régulier 5×5,
- la configuration dite *ville en quinconce*, obtenue à partir de la configuration *ville droite* en enlevant un bloc aux rangées n° 1, 3 et 5 et en les décalant dans la direction perpendiculaire à l'axe du canal.

Dans ces deux dispositions de la zone urbaine, les rues ont toutes une largeur de 10 cm. Pour les configurations *ville droite* et *ville en quinconce*, il y a une distance de 5 m entre la porte et le bord de la première rangée de blocs.

Une vue d'ensemble de la partie aval du canal et de la zone urbaine avec un écoulement transitoire est présentée à la Figure 8.3.

8.1.3 Le matériel de mesure

Deux types de mesures ont été réalisées sur l'écoulement durant cette campagne : mesures de profondeurs et mesures de vitesses.

Les mesures de profondeurs. La profondeur de l'écoulement a été faite par deux moyens :
- avec des sonde résistives,
- avec des sonde à ultrasons.

Une sonde résistive est constituée de deux tiges métalliques (électrodes) placées dans l'écoulement, la base des électrodes est posée sur le fond du canal. La résistance du "circuit" électrique « électrode-eau-électrode » est mesurée, cette résistance est proportionnelle à la hauteur d'eau. Un étalonnage de la sonde permet par la suite de déduire directement la profondeur à partir de la mesure de résistance. La sonde est reliée à un boîtier d'acquisition, lui-même connecté à un ordinateur, la fréquence d'acquisition est paramétrable et de l'ordre de 100 mesures par seconde. La sonde résistive a été utilisé pour le régime transitoire.

Une sonde à ultrasons calcule la distance entre la sonde et l'écoulement en mesurant le temps mis par une onde électromagnétique pour parcourir cette distance (aller-retour). On en déduit la profondeur d'eau en connaissant la hauteur de la sonde par rapport au fond du canal. La sonde à ultrasons a été utilisé uniquement en régime permanent.

Les mesures de vitesse. La vitesse de l'écoulement a été faite par deux moyens :
- avec un vélocimètre Doppler,
- par la technique de l'imagerie digitale.

Un vélocimètre à effet Doppler permet de mesurer localement les valeurs des trois composantes du vecteur vitesse. L'appareil est constitué d'un émetteur et de trois récepteurs fixés au bout d'une tige (Figure 8.4). La sonde mesure le changement de fréquence subi par une onde électromagnétique entre l'émission, la réflexion sur une particule transportée par l'écoulement et la réception. Ce changement de fréquence est relié à la vitesse de la particule, laquelle est considérée comme se déplaçant à la même vitesse que l'écoulement. Les trois récepteurs de l'appareil étant situés dans trois directions différentes par rapport à l'émetteur central, les trois coordonnées (x, y, z) du vecteur vitesse peuvent être mesurées. Le vélocimètre à effet Doppler a été utilisé uniquement en régime permanent.

La technique de l'imagerie digitale est un peu lourde à mettre en place mais permet d'accéder au champ des vitesses de surface. L'imagerie digitale a été utilisée avec les deux régimes d'écoulement. Des traceurs (billes de polystyrène) sont dispersés à la surface de l'écoulement (Figure 8.5), on considère qu'ils se déplacent à la même vitesse que la couche supérieure de l'écoulement. Une caméra numérique à haute fréquence d'acquisition est placée au dessus de l'écoulement et filme la surface de l'eau. Une attention particulière est portée à l'éclairage du modèle réduit pour que les traceurs soient bien visibles sur les images tout en évitant la présence de reflets à la surface de l'eau (les reflets peuvent être assimilés à des traceurs). Plusieurs programmes mis au point à l'UCL par Benoît Spinewine permettent de réaliser les traitements numériques pour exploiter les images (Spinewine *et al.*, 2003). Les traceurs sont repérés sur chaque image puis la méthode des diagrammes de Voronoï permet de mettre en correspondance un même traceur sur une série d'images successives. Les trajectoires des traceurs sont ainsi reconstituées, puis les vecteurs vitesses sont calculés en connaissant la fréquence d'acquisition de la caméra.

En pratique, on filme plusieurs essais d'écoulement avec la caméra pour une position

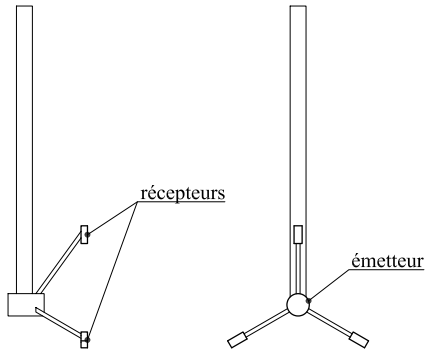


Figure 8.4 – Schéma du vélocimètre à effet Doppler, vue de profil et vue de face.

Figure 8.5 – Photographie de l'écoulement et des traceurs prise par la caméra numérique, les points blancs sont les traceurs.

donnée. En considérant que les essais sont reproductibles à l'identique, ceci permet d'augmenter le nombre de traceurs filmés pour le secteur considéré (on cumule les traceurs de chaque essai). On déplace la caméra pour filmer un autre secteur de la zone urbaine, et on refait plusieurs essais. La fenêtre d'acquisition de la caméra étant relativement petite, on élargit la zone traitée en filmant plusieurs secteurs. Un changement de système de coordonnées permet ensuite de comparer le champ de vitesse expérimental avec les résultats des simulations numériques.

Calage temporel des mesures. Pour les deux appareils utilisés en régime transitoire, il est nécessaire de pouvoir situer temporellement l'ouverture de la porte par rapport à la mesure effectuée. Ceci est nécessaire pour pouvoir comparer les résultats expérimentaux et les résultats numériques dans le même repère temporel. Ainsi, un interrupteur est actionné par la porte lors de son ouverture.

Dans le cas des sondes résistives, cet interrupteur commande un circuit électrique alimenté par une pile 9 V et relié au boîtier d'acquisition de l'ordinateur. L'ouverture de la porte est ainsi repérée par un changement de tension dans la voie d'acquisition de la pile.

Dans le cas de l'imagerie digitale, l'interrupteur commande un circuit électrique alimenté par une pile 9 V et relié à une petite lampe placée dans la fenêtre d'acquisition de la caméra. Ainsi l'ouverture de la porte est repérée sur les images par l'extinction de la lampe.

8.2 Méthodologie et objectifs de la validation

Pour chaque configuration (zone urbaine et écoulement), les mesures expérimentales ont été comparées avec les résultats issus de deux types de simulations numériques. Chaque simulation numérique utilise une représentation différente de la zone urbaine :

1. représentation de chaque bloc comme une frontière imperméable (utilisation avec la modélisation 2D classique),
2. représentation globale de la zone urbaine avec le concept de porosité (utilisation avec la modélisation 2D macroscopique),

Les objectifs de la validation expérimentale sont les suivants :
- vérifier que la modélisation 2D classique permet d'obtenir une représentation très juste de l'écoulement,
- montrer l'intérêt du concept de porosité pour représenter la zone urbaine comme obstacle à l'écoulement,
- montrer la nécessité d'utiliser le tenseur de pertes de charge singulières pour représenter correctement l'écoulement à l'intérieur de la zone urbaine,
- caractériser la dégradation éventuelle de la représentation de l'écoulement avec la modélisation 2D macroscopique,
- vérifier la pertinence de la modélisation 2D macroscopique quel que soit le régime d'écoulement,
- comparer le tenseur de perte de charge ajusté par calage et le tenseur calculé avec la relation (7.20).

8.3 Écoulement permanent – configuration "ville en quinconce"

Les mesures expérimentales en régime permanent ont été effectuées uniquement sur la configuration *ville en quinconce*. Les numéros utilisés pour désigner les différentes représentations de la zone urbaine font référence au §8.2. Les simulations numériques sont désignées dans la suite par des acronymes (Lhomme *et al.*, 2006a) :
- la modélisation 2D classique utilisée avec la représentation n° 1 de la zone urbaine et avec un maillage fin est désignée par simulation CR (pour *Classical Refined*),
- la modélisation 2D macroscopique utilisée avec la représentation n° 2 de la zone urbaine et avec un maillage fin est désignée par simulation PR (pour *Porosity Refined*),
- la modélisation 2D macroscopique utilisée avec la représentation n° 2 de la zone urbaine et avec un maillage grossier est désignée par simulation PC (pour *Porosity Coarse*),

Le maillage du canal est réalisé en distinguant trois zones, le canal amont, le canal aval hors zone urbaine, la zone urbaine. Les caractéristiques du maillage dans chaque zone et les temps de calcul résultants pour chaque simulation figurent dans le Tableau 8.1.

Tableau 8.1 – Longueurs caractéristiques du maillage, nombre de mailles et temps de calcul pour les différentes simulations numériques.

		CR	PR	PC
longueur	– canal amont (m)	0,40	0,40	0,40
caractéristique	– canal aval hors zone urbaine (m)	0,20	0,20	0,20
du maillage	– zone urbaine (m)	0,03	0,03	0,14
nombre total de mailles		10 335	15 299	5 549
temps de calcul pour 400 s simulées (mn)		132	200	63

La porosité de la zone urbaine a été estimée en calculant le rapport de la surface en plan libre sur la surface totale de la zone urbaine

$$\phi = 1 - \frac{A_{\text{blocs}}}{A_{\text{totale}}} \approx 0{,}45 \tag{8.1}$$

On considère que la limite de la zone urbaine en configuration *ville en quinconce* est la même qu'en configuration *ville droite*, c'est-à-dire le carré qui englobe tous les blocs.

8.3.1 Influence de la densité du maillage

Dans un premier temps, on compare la simulation CR et les simulations PR et PC utilisées sans pertes de charge singulières. Les profils de surface libre obtenus avec les simulations sont comparés avec les profondeurs mesurées (Figure 8.6) le long de l'axe longitudinal $y = 0$ m.

La simulation CR donne un profil de surface libre très proche des profondeurs expérimentales. On constate que les différences sont minimes entre les simulations PR et PC, alors que la simulation PC permet de diviser par 3 le temps de calcul par rapport à la simulation PR. Le temps de calcul avec la simulation PR est plus long qu'avec la simulation CR parce que le nombre de mailles est plus grand (l'intérieur des blocs est maillé).

Cependant, les profils de surface libre sont assez différents de celui obtenu avec la simulation CR. L'élévation de la surface libre à l'amont de la zone urbaine n'est pas assez marquée, l'absence de pertes de charge singulières dans la simulation PC fait que la surface libre remonte à l'intérieur de la zone urbaine au lieu de baisser. Ceci illustre la nécessité d'introduire des pertes de charge singulières dans la modélisation à porosité pour représenter les perturbations de l'écoulement qui se produisent à l'intérieur de la ville.

8.3.2 Apport du terme de perte de charge

Seule la simulation PC est comparée à la simulation CR et aux mesures expérimentales. Différentes valeurs de pertes de charge singulières sont testées avec la simulation PC. Puisque le réseau de rues de la zone urbaine est aligné sur le système de coordonnées (x, y) du canal, la formulation (7.3) du tenseur de pertes de charge singulières est utilisée.

Dans la suite les différentes simulations PC avec pertes de charge singulières seront notées « PC_s_x–s_y » où s_x et s_y sont les valeurs des composantes diagonales du tenseur de pertes de charge singulières. Le temps de calcul avec les simulations PC_s_x–s_y est approximativement le même qu'avec la simulation PC du paragraphe précédent (cf. Tableau 8.1) Les paires suivantes de coefficients s_x–s_y ont été testées : (10–5), (7–4), (5–3) et (2–1). Le coefficient s_x est pris plus grand que s_y parce que les rues orientées dans la direction y sont continues, contrairement aux rues orientées dans la direction x.

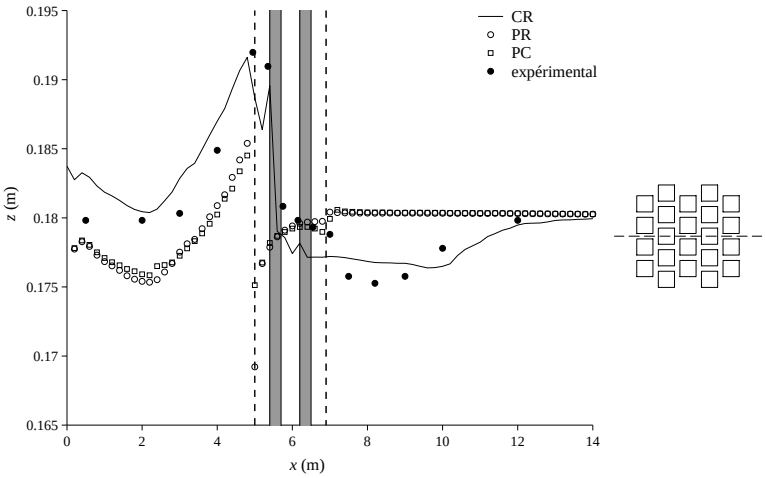


Figure 8.6 – Profils en long de la surface libre pour les simulations CR, PR et PC (sans pertes de charge singulières) avec les profondeurs expérimentales le long de l'axe $y = 0$ m. La ligne pointillée représente les limites de la zone urbaine, les rectangles grisés représentent la position des blocs sur l'axe $y = 0$ m.

Axe longitudinal $y = 0$ m. Les profils de surface libre obtenus sont tous très proches de celui donné par la simulation CR et des profondeurs mesurées sur l'axe longitudinal $y = 0$ m (Figure 8.7), mais la simulation PC_5–3 semble donner le meilleur profil. L'élévation de la surface libre à l'amont de la zone urbaine (due à la réduction de section de passage) est bien reproduite, mais la dépression de surface libre à l'aval de la zone urbaine est sous-estimé. La perte de charge totale à l'intérieur de la ville est légèrement sous-estimée.

Axe longitudinal $y = 0{,}6$ m. Les profils de surface libre simulés sont situés sous les points expérimentaux le long de l'axe $y = 0{,}6$ m à l'amont de la zone urbaine, y compris le profil donné par la simulation CR (Figure 8.8). Pour les simulations PC, ceci s'explique par le fait que l'axe $y = 0$ m ne comporte pas de bloc appartenant à la première rangée, contrairement à l'axe $y = 0{,}6$ m. La perte de charge est donc plus importante le long de l'axe $y = 0{,}6$ m que le long de l'axe $y = 0$ m, or avec les simulations PC la perte de charge est la même le long de ces deux axes. Pour la simulation CR, cela peut s'expliquer par l'implication de phénomènes fortement tridimensionnels à proximité du bloc, ces phénomènes ne peuvent pas être reproduits par la modélisation 2D macroscopique.

Axe longitudinal $y = 1{,}15$ m. L'élévation de la surface libre est moins importante le long de cet axe puisqu'il est situé en dehors de la zone urbaine (Figure 8.9). On constate que l'élévation du profil de surface libre est trop importante pour l'ensemble des simulations PC et CR.

L'utilisation du tenseur de perte de charge permet d'obtenir une nette amélioration des profondeurs simulées. Par rapport à la simulation CR, la simulation PC avec pertes de charge singulières permet de diviser le temps de calcul par 2. Globalement, les écarts entre profondeurs simulées et profondeurs mesurées sont inférieurs au centimètre pour une profondeur de l'ordre de 18 cm, soit un écart de l'ordre de 6 %. Les trois simulations

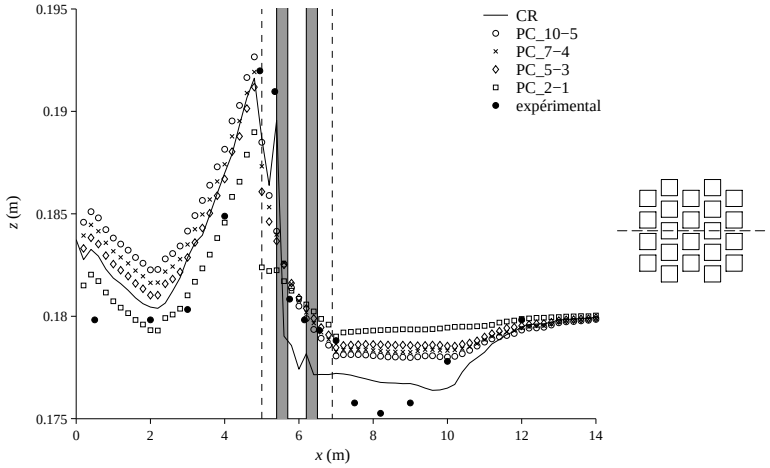


Figure 8.7 – Profils en long de la surface libre pour les simulations CR et PC avec différentes valeurs de pertes de charge singulières, profondeurs expérimentales le long de l'axe $y = 0$ m. La ligne pointillée représente les limites de la zone urbaine, les rectangles grisés représentent la position des blocs sur l'axe $y = 0$ m. La vignette à droite indique la position de l'axe $y = 0$ m.

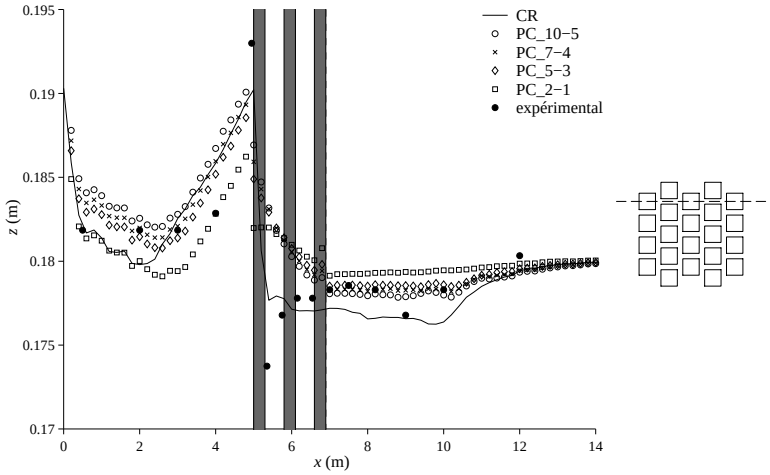


Figure 8.8 – Profils en long de la surface libre pour les simulations CR et PC avec différentes valeurs de pertes de charge singulières, profondeurs expérimentales le long de l'axe $y = 0{,}6$ m. Les rectangles grisés représentent la position des blocs sur l'axe $y = 0{,}6$ m. La vignette à droite indique la position de l'axe $y = 0{,}6$ m.

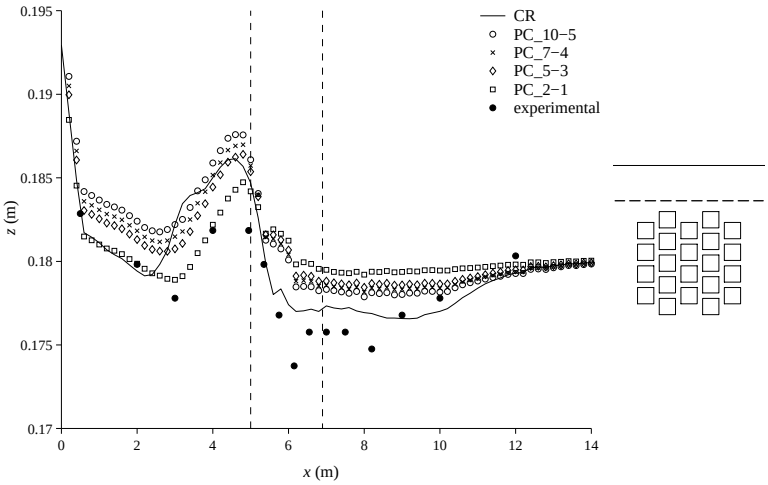


Figure 8.9 – Profils en long de la surface libre pour les simulations CR et PC avec différentes valeurs de pertes de charge singulières, profondeurs expérimentales le long de l'axe $y = 1{,}15$ m. La vignette à droite indique la position de l'axe $y = 1{,}15$ m.

PC_10–5, PC_7–4, PC_5–3 donnant des profils très proches, on en déduit que la sensibilité de la modélisation 2D macroscopique aux composantes du tenseur de perte de charge n'est pas très forte.

8.3.3 Modification du coefficient de rugosité pour représenter la zone urbaine

On compare les simulations CR et PC_5–3 avec une autre approche de modélisation qui consiste à représenter les pertes de charge créées par la zone urbaine par une réduction du coefficient de frottement de Strickler. Deux variantes ont été utilisées (avec un maillage grossier de la zone urbaine) :

- représentation des effets de la zone urbaine (réduction de section et pertes de charge singulières) uniquement par une réduction du coefficient de Strickler (modélisation 2D classique), désignée par simulation CRC (pour *Classical Roughness Coarse*),
- représentation de la zone urbaine par le concept de porosité pour la réduction de section et par la réduction du coefficient de Strickler pour représenter les pertes de charge singulières (modélisation 2D macroscopique), désignée par simulation PRC (pour *Porosity–Roughness Coarse*).

Les caractéristiques du maillage dans chaque zone et les temps de calcul résultants pour ces deux simulations figurent dans le Tableau 8.2.

On compare les profils de surface libre obtenus par les simulations CRC et PRC avec ceux donnés par les simulations CR et PC_5–3 (Figures 8.10 et 8.11). La réduction du coefficient de Strickler K permet de représenter correctement l'influence de la zone urbaine sur l'écoulement en régime permanent mais il faut utiliser des valeurs très faibles de K. L'utilisation de la porosité et la réduction du coefficient de Strickler permet d'utiliser des valeurs de K un peu plus élevées.

Cependant, cette approche ne semble pas appropriée d'un point de vue physique, car la relation de frottement de Manning–Strickler décrit une perte de charge s'exerçant au niveau des parois, alors que les pertes de charge singulières qui se produisent aux carrefours concernent la totalité de la section d'écoulement (Guinot et Soares-Frazão,

Tableau 8.2 – Longueurs caractéristiques du maillage, nombre de mailles et temps de calcul pour les différentes simulations numériques.

		CRC	PRC
longueur	– canal amont (m)	0,40	0,40
caractéristique	– canal aval hors zone urbaine (m)	0,20	0,20
du maillage	– zone urbaine (m)	0,14	0,14
coefficient de Strickler du canal ($m^{1/3}s^{-1}$)		100	100
coefficient de Strickler de la zone urbaine ($m^{1/3}s^{-1}$)		3	8
porosité de la zone urbaine		1,00	0,45
nombre total de mailles		5 549	5 549
temps de calcul pour 400 s simulées (mn)		64	62

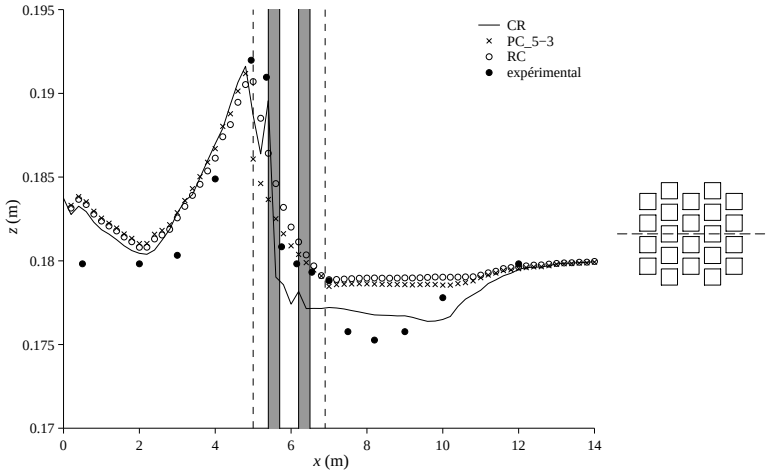


Figure 8.10 – Profils en long de la surface libre pour les simulations CR et PC_5–3 et CRC, profondeurs expérimentales le long de l'axe $y = 0$ m.

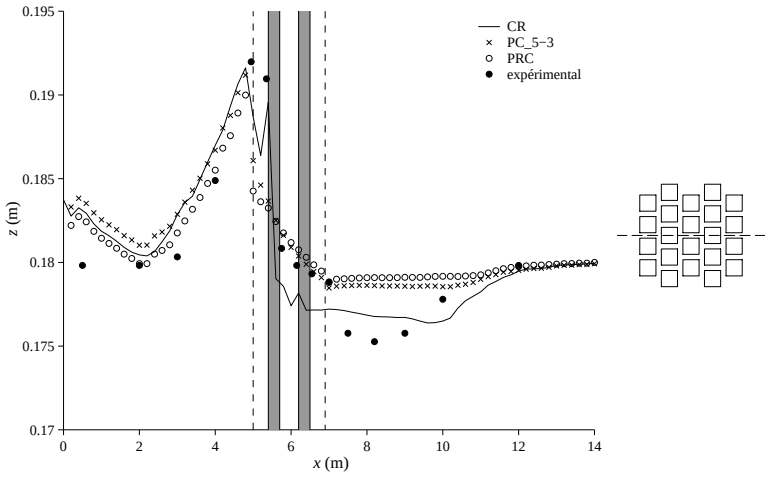


Figure 8.11 – Profils en long de la surface libre pour les simulations CR et PC_5–3 et PRC, profondeurs expérimentales le long de l'axe $y = 0$ m.

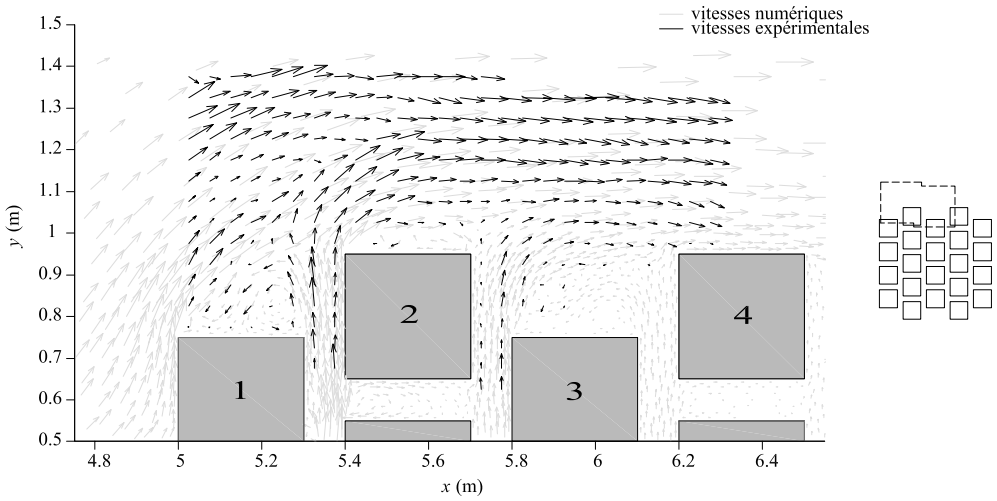


Figure 8.12 – Champ des vitesses expérimentales et numériques (simulation CR) pour la simulation à porosité. La vignette à droite indique les limites de la fenêtre d'acquisition de la caméra.

2006). L'étude des simulations RC et PRC en régime transitoire (voir §8.4.2) montre que cette approche n'est pas satisfaisante.

8.3.4 Comparaison des vitesses expérimentales et numériques : l'imagerie digitale

La comparaison du champ des vitesses mesuré et du champ des vitesses obtenu avec la modélisation 2D classique montre une très bonne concordance sur la fenêtre d'acquisition (Figure 8.12), aussi bien pour les normes que pour les directions. L'écoulement principal évitant la zone urbaine, de même que les zones de recirculation situées au dessus des blocs n° 1 et 2 sur la Figure 8.12 sont bien reproduits. Les écoulements secondaires sortants de la zone urbaine par les rues transversales sont également bien reproduits par la simulation CR. Par contre, l'extension de la zone de recirculation située entre les blocs n° 2 et 4 semble sous-estimée.

Le champ de vitesses obtenu avec la simulation PC est évidemment très différent des vitesses expérimentales et du champ de vitesses obtenu avec la simulation CR, puisque les blocs ne sont pas représentés (Figure 8.13). Néanmoins, l'évitement de la zone urbaine par l'écoulement principal et le ralentissement de l'écoulement secondaire au travers de celle-ci sont bien reproduits.

Il semble donc possible de valider la modélisation 2D macroscopique par comparaison avec la modélisation 2D classique, plutôt que d'utiliser l'imagerie digitale sur toute la surface du canal (ce qui serait assez lourd à réaliser).

8.3.5 Comparaison des vitesses expérimentales et numériques : le vélocimètre Doppler

On compare les mesures expérimentales de vitesses réalisées avec le vélocimètre Doppler et les vitesses issues de la simulation CR. Puisqu'on s'intéresse à des caractéristiques locales du champ des vitesses, la simulation PC n'est pas comparée aux mesures expérimentales. Le vélocimètre Doppler a été placé en neuf points dans le ca-

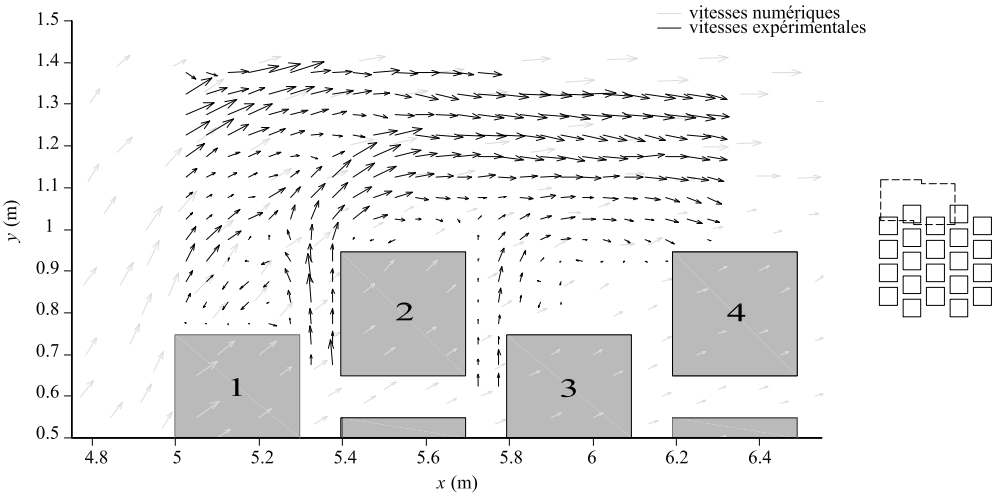


Figure 8.13 – Champ des vitesses expérimentales et numériques (simulation PC) pour la simulation à porosité. La vignette à droite indique les limites de la fenêtre d'acquisition de la caméra.

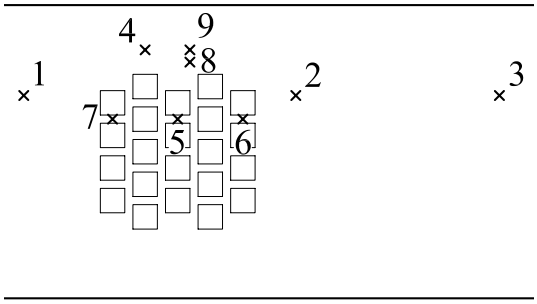


Figure 8.14 – Positions des points de mesure avec le vélocimètre Doppler.

nal (Figure 8.14) et plusieurs mesures par verticale ont été réalisées. Plus le point de mesure est proche de la zone urbaine, plus l'influence de celle-ci est forte et les écarts entre la mesure et la simulation seront plus importants.

Remarque : Les figures auxquelles il est fait référence dans la suite de ce paragraphe utilisent quatre types de moyennes effectuées sur les vitesses mesurées (chaque figure contient cinq graphiques) :

- une *moyenne sur la verticale* des vitesses mesurées avec une pondération liée à l'espacement entre les cotes de mesure (moyenne spatiale)
- une *moyenne mobile* de la *moyenne sur la verticale* sur un intervalle de temps de 2 s (moyenne spatiale et temporelle, graphiques en haut, au milieu gauche et droite)
- une moyenne de la *moyenne sur la verticale* sur toute la période de mesure (moyenne spatiale et temporelle, graphiques au milieu gauche, milieu droit),
- une *moyenne sur toute la période de mesure* des vitesses à chaque cote de mesure (moyenne temporelle, graphiques en bas droite et gauche).

Ces figures se trouvent à l'Annexe B à la page 258.

Tableau 8.3 – Valeurs mesurées (moyenne sur la période de mesure) et simulées moyennes du vecteur vitesse aux points 1, 4 et 9.

	Caractéristique	Valeur expérimentale	Valeur simulée
point n° 1	angle (°)	-17,198	-22,243
	composante v_x (m/s)	0,279	0,225
	composante v_y (m/s)	-0,086	-0,092
	norme $\|\mathbf{v}\|$ (m/s)	0,292	0,243
point n° 4	angle (°)	-8,726	-10,549
	composante v_x (m/s)	0,483	0,394
	composante v_y (m/s)	-0,074	-0,073
	norme $\|\mathbf{v}\|$ (m/s)	0,489	0,401
point n° 9	angle (°)	-0,892	-0,922
	composante v_x (m/s)	0,326	0,410
	composante v_y (m/s)	-0,005	-0,007
	norme $\|\mathbf{v}\|$ (m/s)	0,326	0,410

Points peu influencés par la zone urbaine. Les points de mesure n° 1, 4 et 9 sont les moins influencés par la zone urbaine. Les vecteurs vitesse sont proches de ceux que l'on peut observer sans la zone urbaine. Au point n° 1 (Figure B.1), l'angle du vecteur vitesse expérimental est quasiment constant et très proche de l'angle du vecteur vitesse simulé. La composante $v_{x,\text{sim}}$ du vecteur vitesse simulé est légèrement inférieure à $v_{x,\text{expe}}$, la composante $v_{y,\text{sim}}$ est bien estimée.
Les points de mesure n° 4 et 9 se situent dans une zone d'écoulement préférentiel. Les caractéristiques de l'écoulement dévié sur les côtés du canal par la zone urbaine sont bien reproduites. Au point n° 4 (Figure B.2), l'écoulement est presque aligné sur l'axe des x, ce que l'on retrouve avec la simulation CR, bien que la composante $v_{x,\text{sim}}$ soit un peu sous-estimée. La composante $v_{y,\text{expe}}$ est beaucoup plus variable dans le temps que la composante $v_{x,\text{expe}}$ mais sa norme est beaucoup plus faible. Le profil vertical des vitesses est très régulier. Les mesures au point n° 9 (Figure B.3) sont semblables à celles du point n° 4, mis à part que le profil vertical des vitesses est un peu perturbé, puisque la composante $v_{x,\text{expe}}$ augmente en descendant vers le fond. On peut penser qu'il s'agit de l'influence de la recirculation qui se produit entre la 2e et la 4e rangée de blocs.

Les valeurs mesurées et simulées moyennes aux points 1, 4 et 9 sont reportées au Tableau 8.3.

Points fortement influencés par la zone urbaine. Le point de mesure n° 2 se trouve dans la zone de recirculation située dans le "sillage" de la ville. On distingue sur la Figure B.4 deux rotations complètes du vecteur vitesse (entre les date 24 s et 74 s, soit une période moyenne de 25 s par tour) alors que le vecteur vitesse simulé a un angle constant. Ceci montre qu'il est possible de reproduire avec la modélisation 2D classique les grandes structures de recirculation de l'écoulement (par diffusion numérique, puisqu'il n'y a pas de terme de diffusion de quantité de mouvement dans l'équation (6.82)), mais les recirculations très localisées (tourbillons mobiles liés à la turbulence) ne peuvent pas être représentées. La moyenne de la composante mesurée $v_{x,\text{expe}}$ est très proche de zéro (ce qui est normal puisque le vecteur est en rotation), comme la composante simulée $v_{x,\text{sim}}$. La composante $v_{y,\text{sim}}$ est légèrement sous-estimée par rapport à $v_{y,\text{expe}}$. Le profil vertical des vitesses montre que la composante $v_{x,\text{expe}}$ n'a pas le même signe aux deux profondeurs de mesure. Le profil de la composante

Tableau 8.4 – Valeurs mesurées (moyenne sur la période de mesure) et simulées moyennes du vecteur vitesse aux points 2, 3 et 8.

	Caractéristique	Valeur expérimentale	Valeur simulée
point n° 2	angle (°)	-82,783	-88,025
	composante v_x (m/s)	0,005	0,001
	composante v_y (m/s)	-0,037	-0,025
	norme $\|\mathbf{v}\|$ (m/s)	0,037	0,025
point n° 3	angle (°)	25,559	15,127
	composante v_x (m/s)	0,060	0,116
	composante v_y (m/s)	0,029	0,031
	norme $\|\mathbf{v}\|$ (m/s)	0,066	0,120
point n° 8	angle (°)	-6,710	-2,201
	composante v_x (m/s)	0,113	0,322
	composante v_y (m/s)	-0,013	-0,012
	norme $\|\mathbf{v}\|$ (m/s)	0,113	0,322

$v_{y,\mathrm{expe}}$ est plus régulier.

Le point de mesure n° 3 est situé 3 m derrière la zone urbaine. On n'observe pas de rotation complète du vecteur vitesse (mis à part autour de la date $t = 55$ s) mais plutôt une oscillation globalement comprise entre $-90°$ et $90°$ (Figure B.5). La composante $v_{x,\mathrm{sim}}$ est fortement surestimée par rapport à $v_{x,\mathrm{expe}}$, mais la composante $v_{y,\mathrm{sim}}$ est bien estimée. Le profil vertical des vitesses est un peu moins irrégulier qu'au point précédent, mais on observe quand même une augmentation de la composante v_y en se rapprochant du fond.

Le point de mesure n° 8 est situé sur la même section en travers que le point n° 9, mais il est un peu plus proche de la zone urbaine. L'influence de la recirculation latérale (qui se produit entre la 2e et la 4e rangée de blocs) se fait plus forte (Figure B.6). La direction du vecteur vitesse simulé est très proche de celle du vecteur mesuré. La composante $v_{x,\mathrm{sim}}$ est fortement surestimée, alors que la composante $v_{y,\mathrm{sim}}$ est bien estimée. On retrouve ici des profils de vitesse assez perturbés. La composante $v_{x,\mathrm{expe}}$ augmente en se rapprochant du fond, on observe une inversion du sens de la composante $v_{y,\mathrm{expe}}$ à la plus basse profondeur de mesure. Les points 8 et 9 ne sont pourtant séparés que de 15 cm.

Les valeurs mesurées et simulées moyennes aux points 2, 3 et 8 sont reportées au Tableau 8.4.

Points situés à l'intérieur de la zone urbaine. Le point de mesure n° 7 est situé dans la 1re rangée de blocs. Avec la simulation CR, l'écoulement rentre dans la rue où se trouve le point n° 7 de façon continue avec une vitesse de 0,3 m/s. Mais d'après les mesures expérimentales, l'écoulement change de sens et les composantes $v_{x,\mathrm{expe}}$ et $v_{y,\mathrm{expe}}$ mesurées sont quasiment nulles (Figure B.7). Il est possible que la mesure ne soit pas correcte, la largeur de la rue est peut-être trop faible pour que la sonde dispose d'un volume d'échantillonnage suffisant (les paramètres de la sonde ont pourtant été modifiés pour réduire le volume d'échantillonnage du vélocimètre). Le constat est le même pour le points de mesure n° 5 (Figure B.8).

Aux points de mesure n° 5 et 7, la vitesse simulée est très faible et proche de la vitesse mesurée. Mais les mesures indiquent là aussi des variations du sens de l'écoulement, ce que l'on n'a pas avec la simulation CR.

On constate donc que les vitesses issues de la simulation CR sont très proches

des vitesses mesurées avec le vélocimètre Doppler pour des points de mesure situés à distance de la zone urbaine. À proximité de la zone urbaine, des écarts apparaissent entre la mesure et la simulation, mais ceux-ci proviennent certainement du caractère non hydrostatique de l'écoulement dans cette zone. À l'intérieur de la zone urbaine, la mesure et la simulation donnent des valeurs de vitesses très différentes. En plus de l'explication précédente, on peut penser que le vélocimètre n'est pas adapté pour faire des mesures dans un espace aussi réduit que les rues de la zone urbaine.

8.3.6 Comparaison des champs de vitesse simulés

Simulation CR et simulation PR. On compare les champs de débit unitaire obtenus par les deux simulations :

- la simulation CR (maillage fin),
- la simulation PR (également maillage fin) avec activation des pertes de charge singulières (contrairement au §8.3.1).

On cherche ici à caractériser les différences dans les champs de débit unitaire simulés entre deux modélisations en évitant d'introduire des biais par un maillage différent. La simulation PR est utilisée avec les coefficients de perte de charge (5 ; 3) comme au §8.3.4. On s'intéresse au vecteur débit unitaire plutôt qu'au vecteur vitesse pour tenir compte des écarts à la fois sur la vitesse et sur la hauteur.

La Figure 8.15 présente les champs de débit unitaire simulés sur deux zones différentes : (i) l'amont de la zone urbaine, (ii) l'aval de la zone urbaine. On constate visuellement que les écarts entre les deux champs simulés ne sont pas très importants. On remarque la présence des blocs sur les Figures 8.15 a–c (l'intérieur des blocs n'est pas maillé), alors que sur les Figures 8.15 b–d la totalité du canal et de la zone urbaine est maillée.

Pour analyser plus finement les écarts entre les deux champs simulés, on représente graphiquement

- la valeur de l'écart angulaire entre le vecteur débit unitaire CR et le vecteur débit unitaire PR,
- la valeur du rapport de la norme du vecteur débit unitaire CR sur la norme du vecteur débit unitaire PR.

Pour représenter de façon symétrique les valeurs supérieures et inférieures à 1, on représente le logarithme (base 10) du rapport des normes. Les valeurs obtenues ont été bornées par l'intervalle $[\log(1/3) ; \log(3)]$. On précise que $\log(3) = 0{,}477$ et $\log(2) = 0{,}301$. Le champ de débit unitaire CR est également représenté sur les figures pour mieux localiser les écarts dans le canal (avec un facteur d'échelle de 2).

À l'amont de la zone urbaine, les différences entre les champs de débit unitaire CR et PR sont minimes, aussi bien au niveau des angles que des normes des vecteurs (Figure 8.16 a–b). On constate que les différences sont localisées à la frontière entre l'écoulement principal (qui s'élargit à cause de la zone urbaine) et les zones de contre-courant (dues à l'élargissement brutal de la porte). De plus, les écarts les plus importants concernent des vecteurs de faible norme, donc qui contribuent peu à l'écoulement.

À l'aval de la zone urbaine, les écarts entre les champs de débit unitaire CR et PR sont plus importants. Ils sont localisés dans le sillage de la zone urbaine, au niveau de la zone de recirculation (Figure 8.16 c–d). La zone qui s'étend sur 1 m à l'aval de la ville concentre les plus forts écarts sur les angles des vecteurs débit unitaire. Ceci s'explique par le fait que les vecteurs débit unitaire sont alignés approximativement selon l'axe du canal avec la simulation PR, puisque l'écoulement a traversé la zone urbaine, alors que ces vecteurs débit unitaire sont plutôt perpendiculaires à l'axe du canal dans la simulation CR puisque la recirculation est limitée par les blocs. On note que la

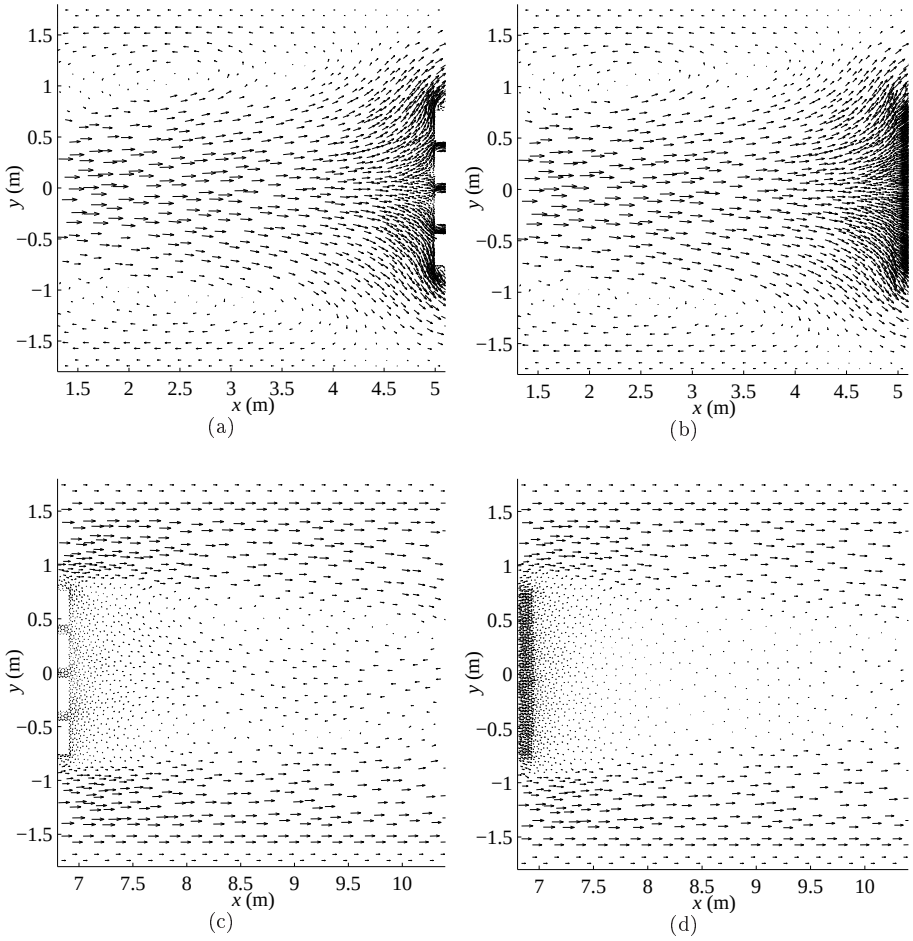


Figure 8.15 – Comparaison des champs de débit unitaire simulés sur maillage fin identique, amont de la zone urbaine, (a) simulation CR, (b) simulation PR ; aval de la zone urbaine, (c) simulation CR, (d) simulation PR.

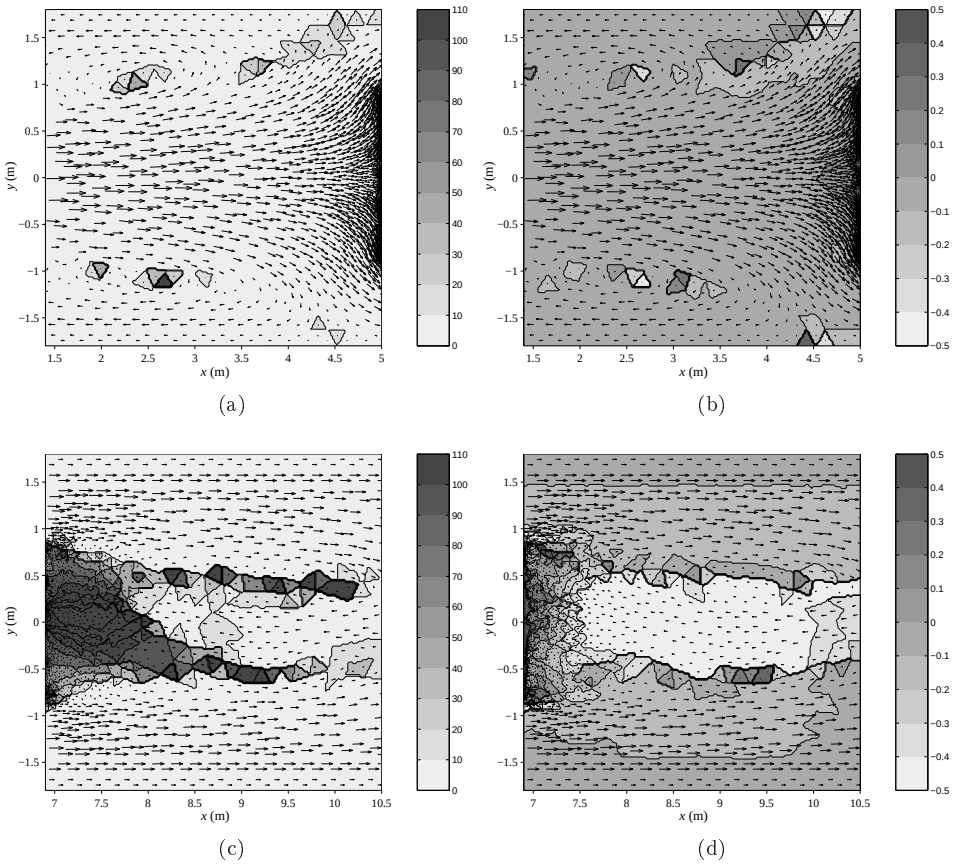


Figure 8.16 – Représentation des écarts entre les champs de débit unitaire CR et PR. Amont de la zone urbaine : (a) écart angulaire, (b) écart sur la norme. Aval de la zone urbaine : (c) écart angulaire, (d) écart sur la norme.

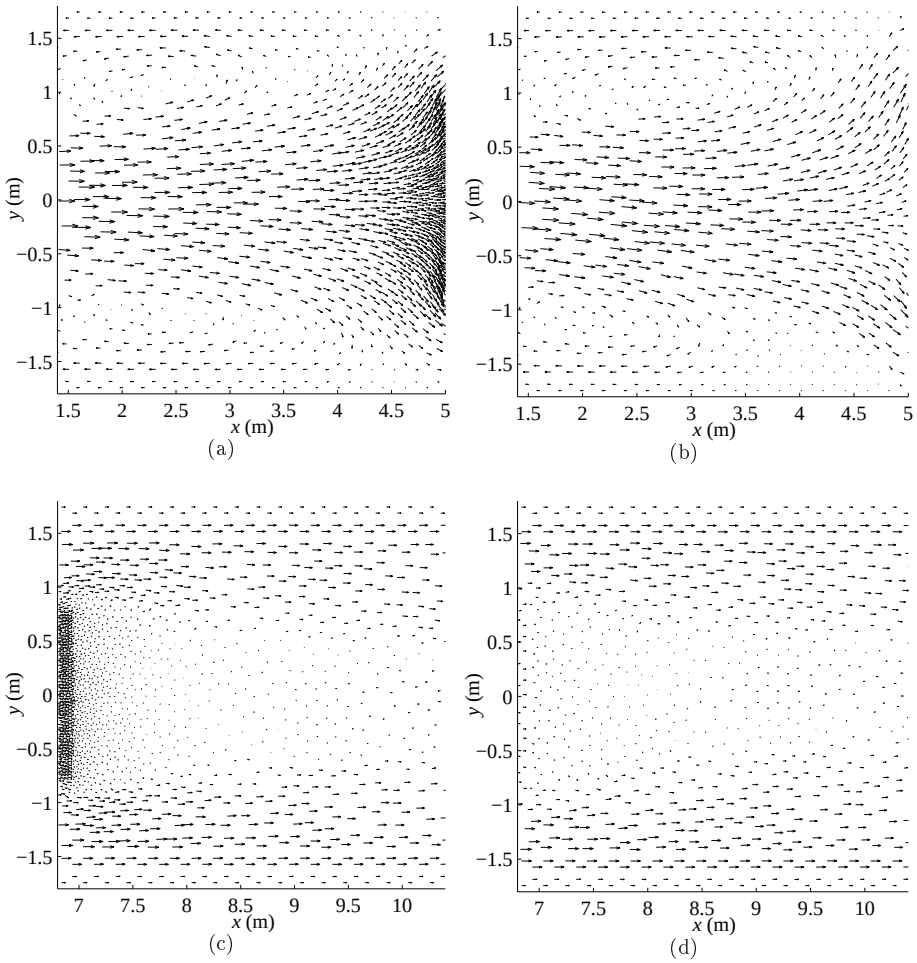


Figure 8.17 – Comparaison des champs de débit unitaire simulés sur maillage différent, amont de la zone urbaine, (a) simulation PR, (b) simulation PC ; aval de la zone urbaine, (c) simulation PR, (d) simulation PC.

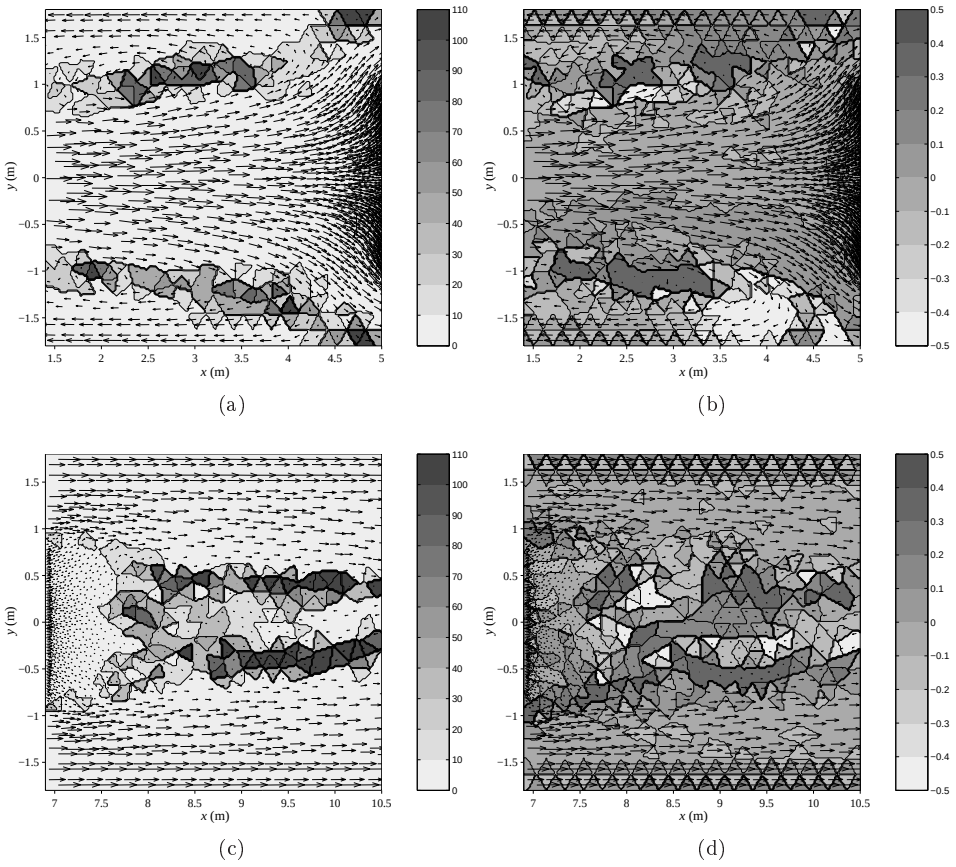


Figure 8.18 – Représentation des écarts entre les champs de débit unitaire PR et PC. Amont de la zone urbaine : (a) écart angulaire, (b) écart sur la norme. Aval de la zone urbaine : (c) écart angulaire, (d) écart sur la norme.

simulation PR donne également une zone de recirculation à l'aval de la zone urbaine, mais cette zone de recirculation n'est pas identique à celle obtenue avec la simulation CR. De plus, comme à l'amont de la zone urbaine, on retrouve des écarts importants entre les angles des vecteurs débit unitaire à la frontière entre l'écoulement principal qui est passé sur les bords du canal et l'écoulement dans la zone de recirculation.
Dans toute la zone de recirculation, les vecteurs débit unitaire PR ont une norme plus faible que les vecteurs débit unitaire CR (nuage clair). Avec la simulation PR, les vitesses sont faibles à l'aval de la zone urbaine à cause de l'effet conjoint de la porosité et des pertes de charge singulières, mais restent plus élevées qu'avec la simulation CR où les vitesses sont quasi-nulles derrière les blocs. Les normes des vecteurs débit unitaire sont très proches dans la bande de 80 cm située entre le bord du canal et la zone urbaine.

Simulation PR et simulation PC. On compare les simulations PR et PC, c'est-à-dire la modélisation 2D macroscopique utilisée sur deux maillages différents. Ceci nous permet de caractériser la convergence spatiale de la modélisation 2D macroscopique : si les hauteurs et vitesses simulées diffèrent beaucoup entre ces deux simulations (quand la taille du maillage Δx diminue), alors la convergence de la simulation sur maillage grossier n'est pas satisfaisante.

Comme au paragraphe précédent, on représente les champs de débit unitaire simulés sur l'amont et l'aval de la zone urbaine (Figure 8.17). À nouveau, les écarts entre les deux champs simulés ne sont pas très importants visuellement. On représente graphiquement (Figure 8.18) :

- la valeur de l'écart angulaire entre le vecteur débit unitaire PR et le vecteur débit unitaire PC,
- le logarithme du rapport de la norme du vecteur débit unitaire PR sur la norme du vecteur débit unitaire PC.

À l'amont de la zone urbaine, les écarts sont localisés à la frontière entre l'écoulement principal qui s'élargit et les zones de recirculation latérales. À l'aval de la zone urbaine, les écarts sont presque nuls dans les 60 cm qui suivent la zone urbaine, puisque l'écoulement traverse la zone urbaine de la même façon dans les deux simulations. Comme à l'amont, les écarts sont localisés à la frontière entre l'écoulement principal qui a contourné la zone urbaine et la zone de recirculation située dans le sillage de la zone urbaine. Malgré tout, ces écarts sont situés dans des zones où les vecteurs débit unitaire sont faibles.

On en conclut que la convergence de la modélisation 2D macroscopique n'est pas satisfaisante pour le maillage grossier utilisé. Pour aller plus loin, il serait nécessaire de faire une simulation avec un maillage encore plus fin que le maillage de la simulation PR.

Remarque : Un calage des coefficients de perte de charge basé sur les profondeurs dans la zone urbaine n'est pas suffisant pour le modèle 2D macroscopique. Le calage doit être fait en considérant également soit d'autres points situés en dehors de la zone urbaine, soit les vecteurs vitesse.

Pour conclure cette section sur la comparaison expérimental/numérique en régime permanent avec la configuration "ville en quinconce", on peut utiliser la modélisation 2D classique comme simulation de référence pour valider la modélisation 2D macroscopique. On compare à la Figure 8.19 le champ de vitesse donné par les simulations CR et PC. On constate que mis à part à l'intérieur de la zone urbaine, les grandes caractéristiques de l'écoulement dans tout le canal sont bien reproduites.

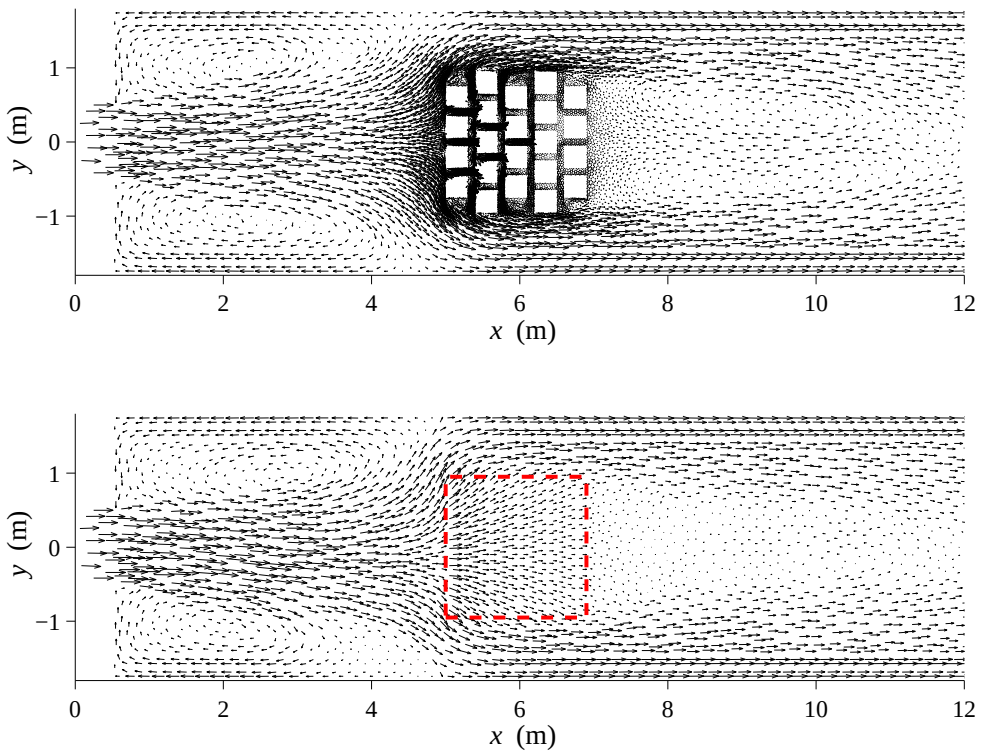


Figure 8.19 – Comparaison des champs de vitesse simulés en régime permanent, simulation CR (haut) et simulation PC (bas). Les vecteurs vitesses sont multipliés par un facteur 0,2.

Cette validation illustre les utilisations possibles de la modélisation 2D macroscopique : dans le cas d'une zone d'étude de grande superficie, dont une partie est urbanisée,

- fournir des conditions aux limites pour ensuite faire une simulation détaillée de la zone urbaine,
- modéliser correctement l'inondation de la zone d'étude alors que la zone urbaine influence l'écoulement, sans que l'on ne s'intéresse en détail à l'inondation de la zone urbaine.

8.4 Écoulement transitoire – configuration "ville en quinconce"

On compare dans cette section les résultats des simulations CR et PC_5–3 aux mesures expérimentales de profondeur et de vitesse en régime transitoire. Les mesures de profondeurs ont été réalisées en 80 points répartis dans la zone urbaine et autour de celle-ci (Figure 8.20).

8.4.1 Comparaison des profondeurs expérimentales et simulées

Les graphiques suivants sont situés à l'annexe B à partir de la page 263 (Figures B.9 à B.29).

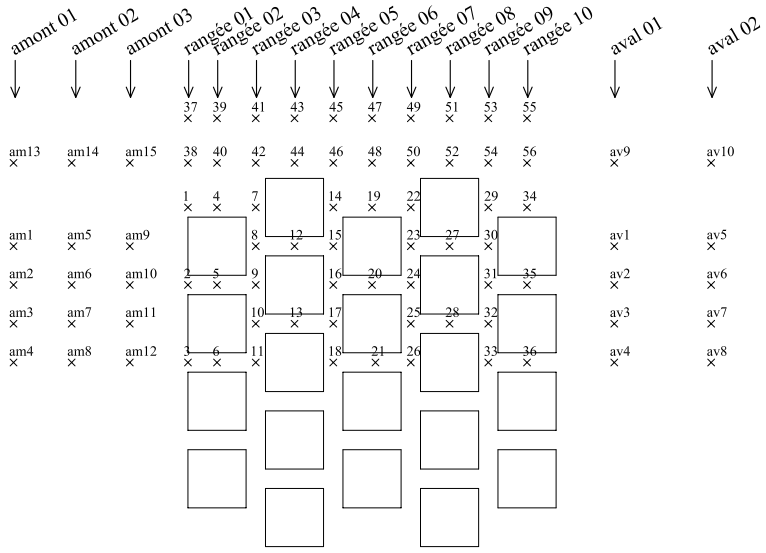


Figure 8.20 – Positions des bifils pour la configuration ville en quinconce en régime transitoire.

Points de mesures situés dans la zone urbaine et sur le côté. Globalement, les profondeurs sont très bien simulées par la simulation CR. La simulation PC s'écarte un peu plus des mesures expérimentales. Seuls les points situés dans les rues longitudinales aux rangées 09 et 10 sont mal représentés par les deux simulations (Figures B.19 et B.21). La symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe longitudinal du canal est bien respectée par les mesures et les simulations. Aux rangées 04 et 08, pour les points situés dans la zone urbaine (point n° 12, 27, 28), les profondeurs données par la simulation PC sont trop grandes (Figures B.13 et B.18).

On trace les profils en travers de la profondeur, du débit unitaire et de la vitesse dans la direction x au niveau des rangées 04, 06 et 08 (Figures B.22 à B.24). On constate que le débit $q_{x,\mathrm{CR}}$ dans les rues est supérieur au débit à travers la zone urbaine $q_{x,\mathrm{PC}}$ dans les rangées 04 et 08.

Points de mesures situés à l'amont de la zone urbaine. Pour les trois rangées de points situés en amont de la zone urbaine, les profondeurs simulées sont très proches des mesures (Figures B.25 à B.27). La simulation PC donne même une profondeur plus proche des mesures expérimentales que la simulation CR. On note sur les Figures B.25 et B.26, pour les deux simulations, que l'arrivée du front donne une première augmentation de la profondeur, puis le ressaut réfléchi par la zone urbaine entraîne la deuxième augmentation de la profondeur. Ce phénomène n'apparaît pratiquement pas pour la profondeur mesurée.

Points de mesures situés à l'aval de la zone urbaine. À l'aval, les profondeurs sont bien simulées par la simulation CR, alors que les profondeurs données par la simulation PC sont surestimées (Figures B.28 et B.29). Les vitesses données par la simulation CR sont plus grandes que celles données par la simulation PC.

Profils en long de surface libre. On trace les profils en long de surface libre expérimental et numériques le long de l'axe longitudinal $y = 0$.

À $t = 3$ s (Figure 8.21), on constate qu'il y a un petit décalage temporel au niveau la progression du front à l'intérieur de la zone urbaine entre les mesures expérimentales et les deux simulations. Le front simulé est en retard par rapport au front mesuré.

À $t = 5$ s (Figure 8.22), les profils simulés sont très proches des profondeurs expérimentales, mais le front réfléchi simulé est en retard sur le front réfléchi expérimental.

À $t = 10$ s (Figure 8.23), on a globalement un bon accord entre le profil expérimental et les profils simulés.

Globalement, les profondeurs simulées sont satisfaisantes. Les profondeurs obtenues avec la simulation CR sont très proches de celles mesurées. Les profondeurs données par la simulation PC sont un peu moins proches, surtout dans les rues de la moitié aval de la ville, et à l'aval de celle-ci. Les 2 simulations sont toujours très proches pour les points situés entre la zone urbaine et le muret latéral, en particulier pour le point le plus éloigné de la zone urbaine. Ceci montre que la simulation PC reproduit bien l'effet de la zone urbaine sur la totalité de l'écoulement. Les coefficients de pertes de charge calés en régime permanent donnent de bons résultats avec le régime transitoire.

8.4.2 Comparaison des simulations CR, PC, CRC et PRC.

Mesures locales de profondeur. On trace l'évolution de la profondeur aux points de la Figure 8.20 avec les données expérimentales et avec les résultats des simulations CR, PC, CRC et PRC. La simulation CRC donne des profondeurs très proches de celles données par les deux autres simulations dans la zone urbaine (Figure B.30), mais à l'amont de la zone urbaine (Figure B.31), l'augmentation de la profondeur est plus tardive avec la simulation RC. Avec la simulation PRC, la profondeur simulée est quasiment confondue avec celle donnée par la simulation PC (Figures B.32 et B.33). Le ressaut donné par la simulation PRC se déplace à la même vitesse que celui donné par la simulation PC.

On remarque que le ressaut donné par la simulation CR est un peu plus proche du ressaut expérimental que celui donné par les deux simulations PC et PRC (notamment aux points n° 101, 102 et 103).

Profils en long de surface libre. On trace ensuite les profils en long de surface libre donnés par les simulations CR, PC, CRC et PRC.

À $t = 3$ s, les profils PC, CRC et PRC sont nettement en dessous du profil CR à l'entrée de la zone urbaine (Figure 8.24). Le front donné par la simulation CRC est en retard par rapport aux autres simulations à l'intérieur de la zone urbaine.

À $t = 5$ s (Figure 8.25), on constate que les profils PC et PRC sont quasiment confondus. Le ressaut à l'amont de la zone urbaine n'a pas assez remonté vers la porte avec la simulation CRC (écart de 30 cm par rapport à la simulation CR). L'écart sur la position du ressaut n'est que de 10 cm de retard avec les simulations PC et PRC.

À $t = 10$ s (Figure 8.26), les quatre profils simulés sont très proches à l'intérieur de la zone urbaine. Les positions relatives du ressaut à l'amont de la zone urbaine sont identiques à celle de $t = 5$ s mais les écarts se sont resserrés.

Il apparaît donc que le ressaut qui remonte vers l'amont se déplace moins vite avec la simulation CRC que avec les simulations CR et PC. La simulation PRC est quasi-équivalente à la simulation PC.

La porosité permet de reproduire correctement la réduction de la section sur l'écoulement amont, ce que ne permet pas aussi bien la réduction du coefficient de Strickler. L'effet du terme de pertes de charge singulières peut être représenté par la réduction

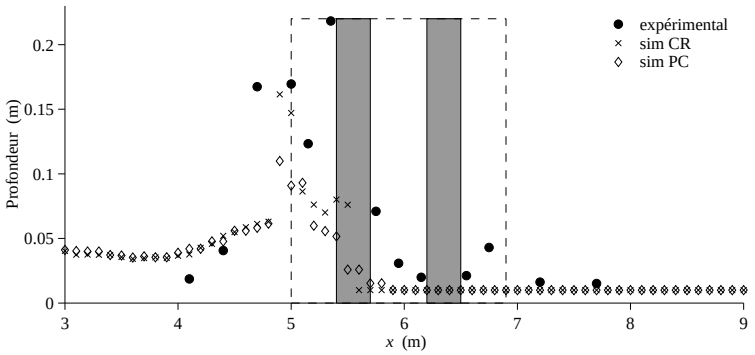


Figure 8.21 – Profils en long expérimental et numériques à $t = 3$ s.

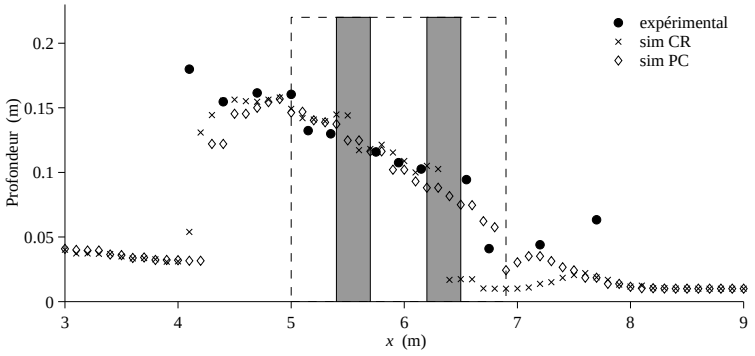


Figure 8.22 – Profils en long expérimental et numériques à $t = 5$ s.

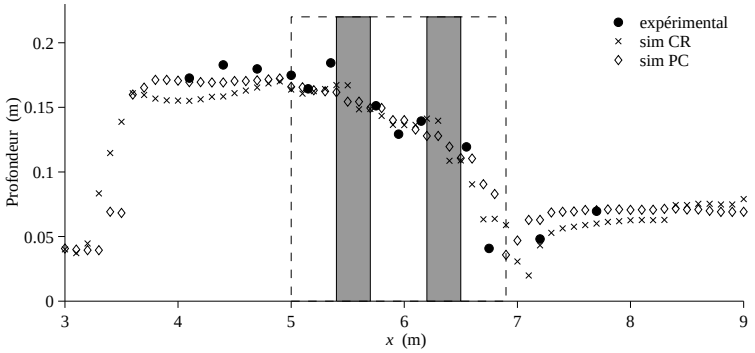


Figure 8.23 – Profils en long expérimental et numériques à $t = 10$ s.

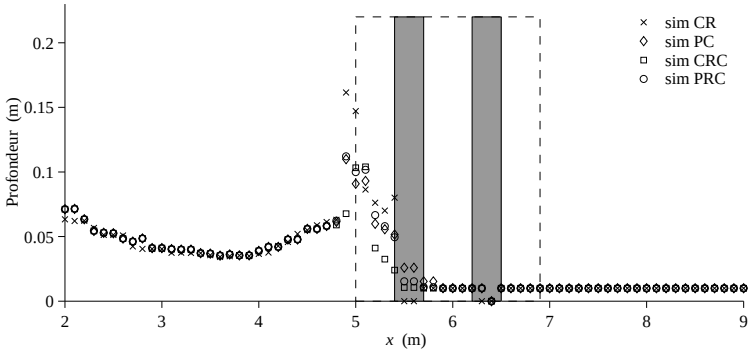


Figure 8.24 – Comparaison des profils en long simulés à $t = 3$ s avec les simulations CR, PC, CRC et PRC.

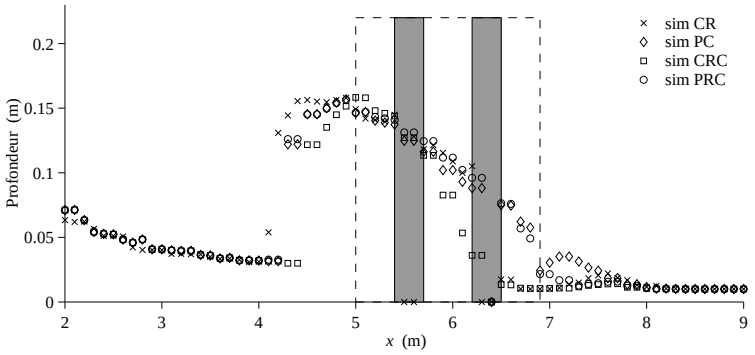


Figure 8.25 – Comparaison des profils en long simulés à $t = 5$ s avec les simulations CR, PC, CRC et PRC.

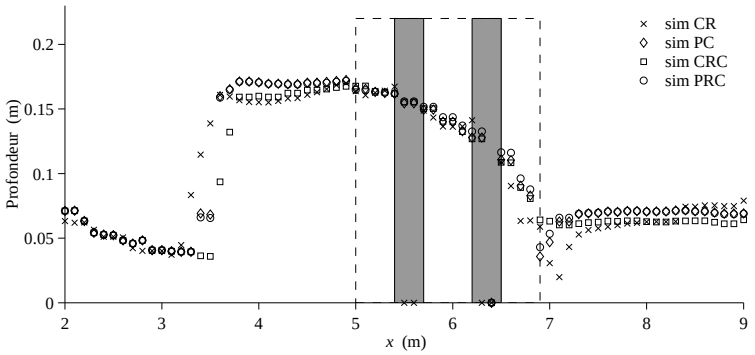


Figure 8.26 – Comparaison des profils en long simulés à $t = 10$ s avec les simulations CR, PC, CRC et PRC.

du coefficient de Strickler, pour une configuration donnée, comme le montre la simulation PRC. La perte de charge générée par la zone urbaine est approximativement proportionnelle au nombre de carrefours présents dans celle-ci, ce qui est correctement pris en compte par la relation de pré-détermination établie au Chapitre 7.2 (puisque le nombre de carrefours est lié à la géométrie du réseau de rues). Il semble difficile de relier l'augmentation du nombre de carrefours et la diminution du coefficient de Strickler.

8.4.3 Comparaison des champs de vitesse expérimentaux et numériques.

On utilise le champ de vitesse obtenu avec l'imagerie digitale.

Comparaison expérimental/simulation CR. On compare dans un premier temps le champ de vitesse obtenu par la simulation CR avec le champ de vitesse obtenu par l'imagerie digitale.

À $t = 2{,}2$ s (Figure B.34), on remarque que l'arrivée du front avec la simulation CR est en retard par rapport aux mesures expérimentales. Le front CR a à peine atteint la limite de la zone filmée. Ceci est confirmé par l'examen des images brutes : l'instant où le front frappe les blocs est en moyenne $t = 2,28$ s. Avec la simulation CR, le front frappe les blocs à $t = 2{,}70$ s. Ce décalage ne peut pas s'expliquer par l'incertitude sur la détermination de l'instant d'ouverture de la porte avec l'extinction de la lampe. L'erreur sur le choix de l'image où on considère que la lampe est éteinte (l'extinction est progressive à la fréquence d'acquisition considérée) est de 3 images au maximum. Cela donne une incertitude égale à $3/40 = 0{,}075$.

À $t = 2{,}5$ s (Figure B.35), le front n'a pas encore percuté la zone urbaine avec la simulation CR, alors que l'écoulement a déjà commencé à contourner la ville d'après l'imagerie digitale.

À $t = 3{,}0$ s (Figure B.36), avec la simulation CR, il y a un ralentissement de l'écoulement devant la zone urbaine, mais sans inversion de sens d'écoulement. Or on observe des vitesses expérimentales vers les x négatifs. Ces vitesses négatives sont générées par des traceurs emportés dans les remous qui apparaissent après le choc du front contre les blocs ("déferlement arrière"). Il s'agit de phénomènes purement 3D, qui ne peuvent pas être représentés avec un modèle 2D. On remarque un retard de la simulation CR par rapport aux mouvements des traceurs. En effet, au niveau des carrefours internes en T (carrefour entouré d'un cercle gras sur la Figure B.36), on observe des traceurs en mouvement alors que les cellules correspondantes ont une vitesse nulle avec la simulation CR.

À $t = 4{,}0$ s (Figure B.37), on observe que le champ de vitesse expérimentale est très perturbé à l'amont de la zone urbaine avec des directions de vecteurs vitesses extrêmement variables. La variation brutale du champ des vitesses CR indique que le ressaut s'est formé et que la recirculation est en train de s'installer entre ce ressaut et la zone urbaine. Les vecteurs vitesses situés entre la ville et le muret latéral sont bien simulés.

À $t = 5{,}0$ s (Figure B.38), on voit ici nettement la recirculation avec les vitesses expérimentales. Au centre du canal, devant la ville ($y = 0$ m), il y a un bon accord entre les vitesses simulées et les vitesses expérimentales au niveau du contact entre les deux zones de recirculation. Par contre, légèrement au dessus sur la figure ($y = 0{,}5$ m), on voit que l'extension de la zone de recirculation est plus faible avec l'imagerie digitale qu'avec la simulation CR.

À $t = 6{,}0$ s (Figure B.39), on remarque que la recirculation expérimentale a disparue. La recirculation située au dessus du bloc n° 1 (cf. numérotation sur la figure) est bien reproduite par la simulation CR, ainsi que l'écoulement rentrant dans la zone urbaine entre les blocs n° 1 et 2.

À $t = 8{,}0$ s (Figure B.40), on voit que la petite zone de recirculation au dessus du bloc n° 1 est un peu plus étendue avec l'imagerie digitale qu'avec la simulation CR. La zone de recirculation située devant la zone urbaine a disparue d'après l'imagerie digitale, alors qu'elle existe toujours dans le champ simulé.

À $t = 9{,}0$ s (Figure B.41), les vitesses expérimentales devant la zone urbaine sont plus faibles en norme que les vitesses simulées.

La comparaison du champ de vitesse donné par la simulation PC avec les vitesses expérimentales ne semble pas pertinente étant donné que la caméra a été placée au dessus et à proximité de la zone urbaine, là où les écarts sont les plus importants (cf. §8.3.4). On évalue donc le champ de vitesse donné par la simulation PC à une plus grande échelle par comparaison avec le champ de vitesse donné par la simulation CR.

Comparaison simulation CR/simulation PC. Malgré quelques différences (retard du front, extension des zones de recirculation), on constate que le champ de vitesse CR est proche du champ de vitesse expérimental. On compare les deux champs de débit unitaire simulés sur une zone plus grande qu'au paragraphe précédent.

À $t = 2{,}0$ s (Figure B.42), les champs de débit unitaire donné par les deux simulations sont identiques, ce qui est normal étant donné que l'écoulement n'a pas encore rencontré la zone urbaine.

À $t = 3{,}0$ s (Figure B.43), l'écoulement a rencontré la zone urbaine et les différences entre les deux simulations apparaissent dans la zone urbaine. Le front des vecteurs débit unitaire PC est plus avancé que le front des vecteurs débit unitaire CR.

À $t = 4{,}0$ s (Figure B.44), le front calculé par la simulation PC à l'amont de la ville a quasiment la même position que celui donné par la simulation CR. À l'intérieur de la ville, le front PC a une avance de 60 cm sur le front CR. Avec la simulation CR, on remarque que l'écoulement envahit la zone urbaine en passant par les rues transversales puisque la progression dans le sens longitudinal est beaucoup moins aisée.

À $t = 5{,}0$ s (Figure B.45), la simulation PC donne une zone de recirculation devant la ville d'extension très proche de celle obtenue avec la simulation CR, mais le champ de débit unitaire est très différent à l'intérieur de cette zone (2 cellules en forme de 8 avec la simulation CR, pas de structure apparente avec la simulation PC). À l'aval de la zone urbaine, les deux parties de l'écoulement qui ont contourné la zone urbaine se rejoignent moins rapidement avec la simulation PC qu'avec la simulation CR.

À $t = 8{,}0$ s (Figure B.46), la position du ressaut à l'amont de la zone urbaine est très proche avec les deux modélisations, mais on distingue un écart de 10 cm environ (ressaut PC en retard sur le ressaut CR). La forme de la zone de recirculation a évolué depuis la date $t = 5{,}0$ s. La structure de la circulation à l'intérieur de cette zone est proche dans les deux modélisations (en forme de S retourné).

En comparant les champs de vitesses à l'échelle du canal à la date $t = 10$ s, on voit que la simulation PC est très proche de la simulation CR quand on se situe à plus de 50 cm des limites de la zone urbaine (Figure 8.27).

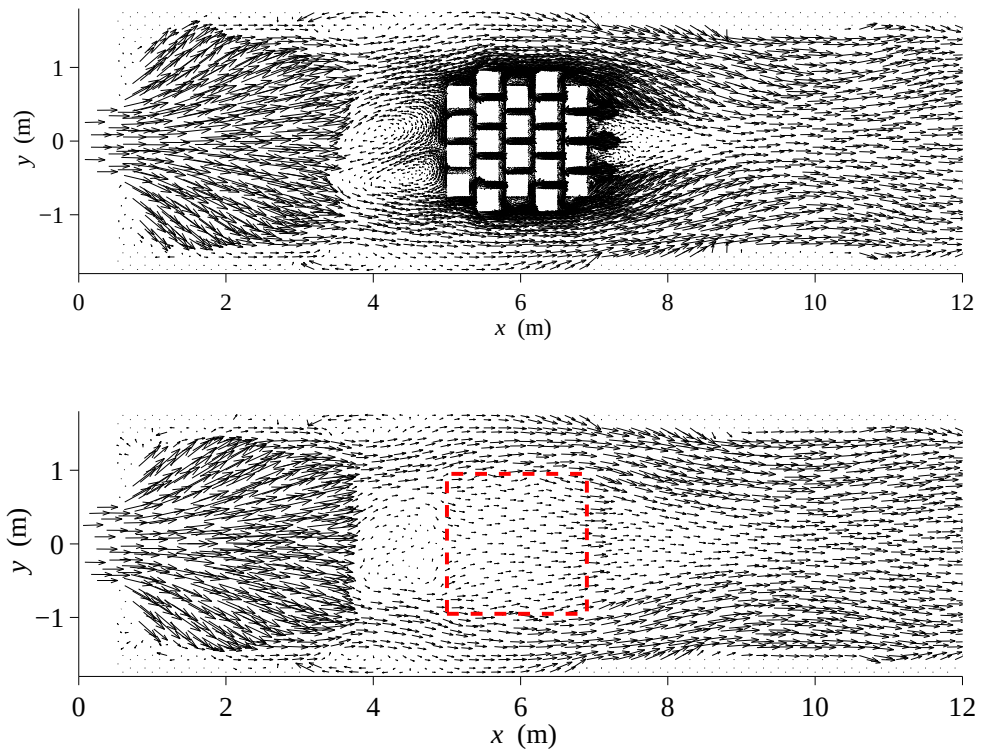


Figure 8.27 – Comparaison des champs de vitesse simulés en régime transitoire à $t = 10$ s, haut simulation CR, bas simulation PC. Les vecteurs vitesses sont multipliés par un facteur 0,2.

8.4.4 Comparaison du régime permanent et du régime transitoire

On veut vérifier s'il existe des similitudes entre le régime permanent et le régime transitoire concernant les variables de l'écoulement.

Comparaison des champs de vitesse On compare les champs de vitesse mesurés par imagerie digitale (i) en régime permanent, (ii) en régime transitoire à $t = 9$ s (Figure 8.28). Le matériel d'acquisition utilisé permet de filmer l'écoulement pendant une dizaine de secondes. Il est nécessaire de commencer l'acquisition avant l'ouverture de la porte pour détecter la variation du signal dans le canal auquel est branché la lampe, ce qui réduit d'environ une seconde la durée utile d'acquisition.
Sur le côté de la zone urbaine, les vitesses sont beaucoup plus grandes en régime transitoire. La recirculation au dessus du bloc n° 1 n'est pas encore établie à cet instant du régime transitoire. De plus, le sens d'écoulement est différent dans la rue située entre les blocs n° 1 et 2.

Comparaison des profils de surface libre On compare les profils de surface libre obtenus en régime permanent et en régime transitoire le long de l'axe longitudinal $y = 0$ m. Avec les sondes résistives, la durée d'acquisition est plus grande et on peut comparer les mesures réalisées 50 s après l'ouverture de la porte avec les mesures en régime permanent (Figure 8.29 a). On compare également les profils de surface libre simulés en régime permanent et en régime transitoire avec la simulation CR à $t = 50$ s

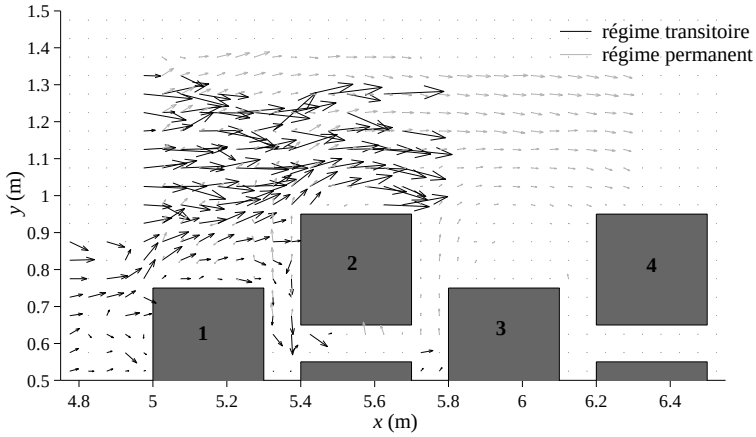


Figure 8.28 – Comparaison des champs de vitesse mesurés en régime permanent et en régime transitoire ($t = 9$ s).

(Figure 8.29 b).
On constate que à $t = 50$ s, les profondeurs h_{perm} en régime permanent sont plus élevées et plus homogènes que les profondeurs h_{trans} en régime transitoire. Les écarts entre les profondeurs h_{perm} et h_{trans} sont les plus importants à l'aval de la zone urbaine.
Ceci peut s'expliquer par la capacité limitée de la retenue d'eau constituée dans la partie amont du canal. Le débit traversant la porte diminue donc assez rapidement et n'est pas suffisant pour se rapprocher du régime permanent quand le temps écoulé depuis l'ouverture de la porte augmente.

On fait également cette comparaison pour des dates plus proches de l'instant d'ouverture de la porte (les graphiques correspondants sont placés dans l'Annexe B à partir de la page 285).

À $t = 3$ s (Figure B.47), juste après l'impact du front sur les blocs, la profondeur h_{trans} à l'entrée de la zone urbaine est légèrement inférieure à la profondeur h_{perm}. Au contact du premier bloc situé sur l'axe $y = 0$ m (à $x = 5{,}40$), la profondeur h_{trans} est même supérieure à h_{perm}.

À $t = 10$ s (Figure B.48), la profondeur h_{trans} à l'aval de la zone urbaine a augmenté, elle est légèrement inférieure à h_{perm} à l'amont de la zone urbaine.

À $t = 30$ s (Figure B.49), le profil de surface libre en régime transitoire atteint les valeurs les plus élevées. La profondeur h_{trans} à l'aval de la zone urbaine a peu varié par rapport à la date $t = 10$ s. La profondeur h_{trans} à l'amont de la zone urbaine est alors légèrement supérieure à h_{perm}.

Comparaison des champs de profondeur La comparaison des champs de profondeur simulés (Figure 8.30) conduit au même constat que celui issu du paragraphe précédent. Mis à part à l'amont immédiat de la zone urbaine où les profondeurs sont comparables, le champ de profondeur du régime permanent est nettement supérieur à celui du régime transitoire. On note que le champ de profondeur du régime permanent est très uniforme.

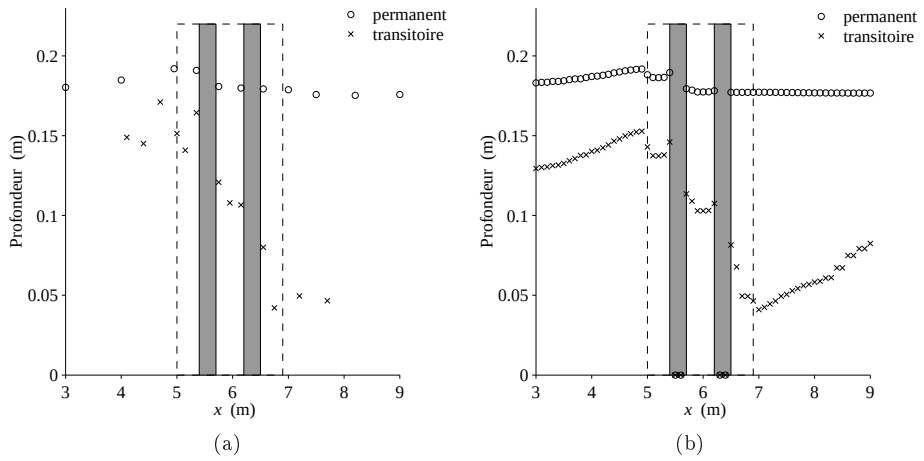


Figure 8.29 – Comparaison des profondeurs à proximité et dans la zone urbaine en régime permanent et en régime transitoire ($t = 50$ s), (a) profondeurs mesurées, (b) profondeurs simulées le long de l'axe $y = 0$ m.

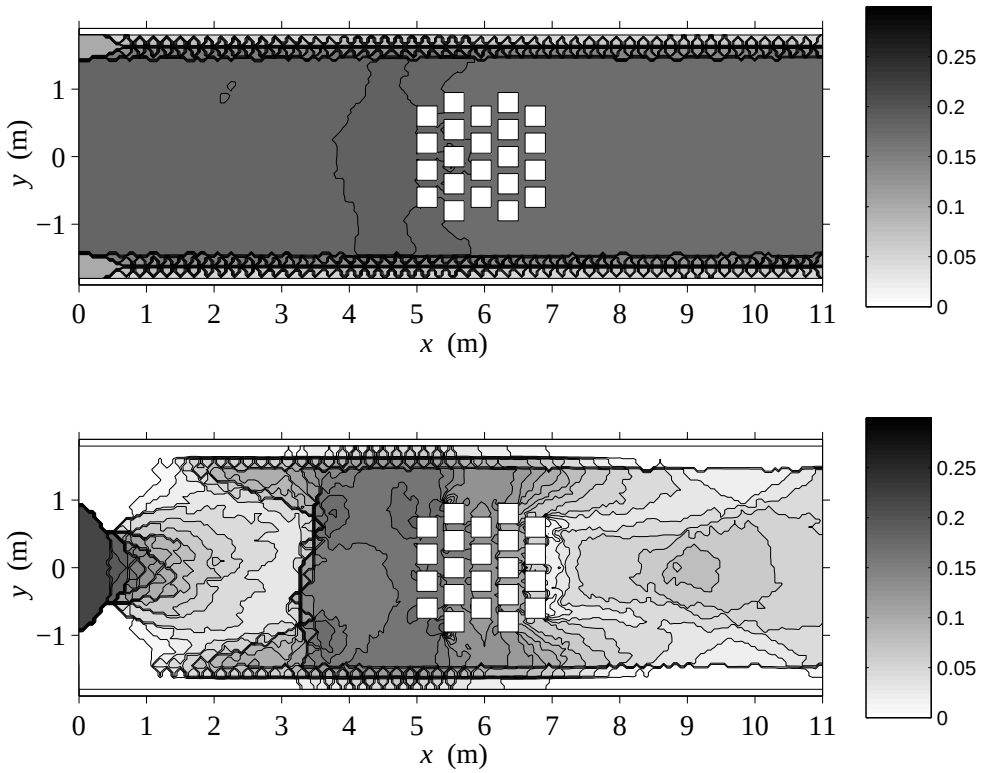


Figure 8.30 – Comparaison des champs de profondeur simulés en régime permanent (haut) et en régime transitoire (bas) à la date $t = 10$ s.

8.5 Écoulement transitoire – configuration "ville droite"

Pour cette configuration de la zone urbaine, seules des mesures de profondeur avec les sondes résistives sont disponibles. On compare le profil en long de surface libre constitué à partir des mesures expérimentales avec le profil de surface libre issu de deux simulations numériques :

- une simulation avec maillage fin de la zone urbaine et avec la modélisation 2D classique (simulation CR),
- une simulation avec maillage grossier de la zone urbaine et avec la modélisation 2D macroscopique (simulation PC).

La simulation PC est utilisée avec une porosité calculée de la même façon qu'à la section 8.3

$$\phi = 1 - \frac{A_{\text{blocs}}}{A_{\text{totale}}} \approx 0{,}38 \tag{8.2}$$

Les composantes du tenseur de perte de charge sont estimées à partir du tenseur de la configuration *ville en quinconce*. La composante s_y est égale dans les configurations *ville en quinconce* et *ville droite* puisque les rues sont ininterrompues dans la direction y. De plus, pour la ville droite, de par la symétrie de la configuration, on a $s_x = s_y$. En reprenant la notation « PC_s_x–s_y », on s'intéresse donc à la simulation PC_3–3.

8.5.1 Profils en long de surface libre

On compare les profils en long de surface libre obtenus avec les simulations CR et PC et les profondeurs expérimentales le long de l'axe longitudinal $y = 0{,}2$ m. Le dispositif d'enregistrement de l'instant d'ouverture de la porte n'a pas été utilisé sur ces essais. Le recalage temporel est fait de manière visuelle avec un bifil placé pour toutes les mesures à l'entrée d'une rue de la zone urbaine (position $x = 5$ m, $y = 0{,}2$ m). On décale dans le temps toutes les mesures réalisées dans une rangée de sorte que l'arrivée de l'eau observée sur le bifil de référence coïncide avec le temps d'arrivée de l'eau au contact de la zone urbaine dans le modèle numérique. Compte tenu des écarts observés au §8.4.3 sur l'arrivée du front au contact de la zone urbaine, la comparaison des profondeurs n'est pas faite pour des dates assez faibles.

À $t = 6$ s (Figure 8.31), les profondeurs simulées à l'amont de la zone urbaine sont bien estimées, mais la position du front simulé est trop avancée de 20 cm avec la simulation CR, alors que le front est mieux positionné avec la simulation PC. À l'intérieur de la zone urbaine, les profondeurs calculées par la simulation PC sont très surestimées.

À $t = 10$ s (Figure 8.32), les profils de surface libre simulés sont plus réguliers que le profil expérimental au passage de la limite de la zone urbaine. En particulier, la profondeur mesurée dans la première rue longitudinale à l'entrée de la zone urbaine est fortement surestimée par les simulations numériques. Ceci peut s'expliquer par un maillage malgré tout un peu trop grossier pour la simulation CR. Bien qu'il y ait cinq mailles dans la largeur d'une rue, la densité du maillage ne permet pas de bien représenter le resserrement des lignes de courant et l'accélération de l'écoulement dans les rues à l'entrée de la ville (Figure 8.33). Donc la profondeur est surestimée par la simulation CR. Avec la simulation PC, la diminution de la section de passage est répartie sur toute la largeur de la zone urbaine, donc à l'entrée d'une rue longitudinale, le resserrement est localement moins important que dans la réalité, l'accélération de l'écoulement est sous-estimée et la profondeur est surestimée.

À $t = 17$ s (Figure 8.34), les profils de surface libre simulés sont très proches des profondeurs mesurées. On note tout de même que (i) la dépression de surface libre à l'entrée de la zone urbaine est mal reproduite par les simulations numériques, et

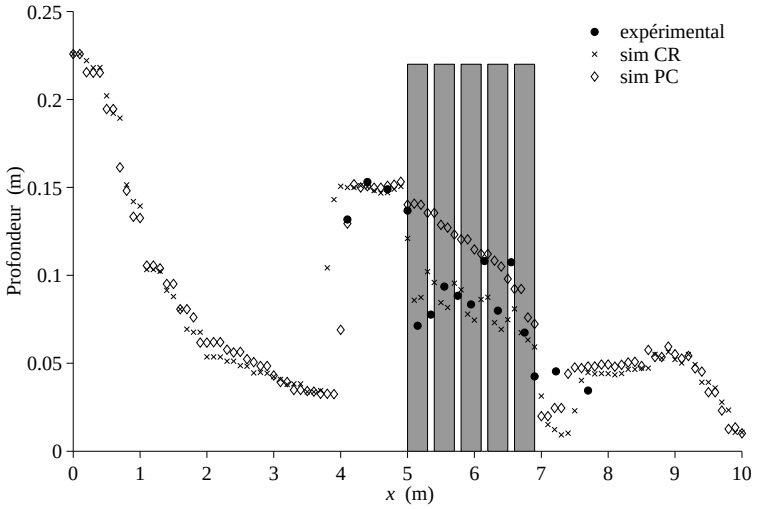


Figure 8.31 – Profil en long des profondeurs mesurées et simulées sur la configuration *ville droite* à la date $t = 06$ s le long de l'axe $y = 0{,}2$ m.

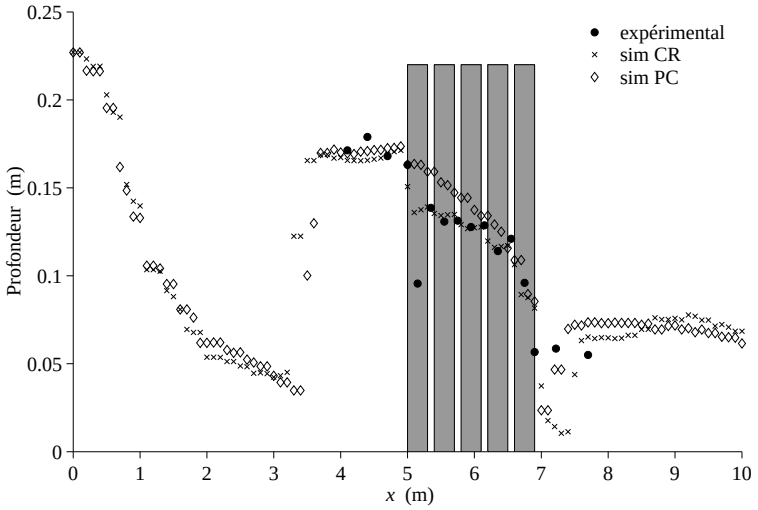


Figure 8.32 – Profil en long des profondeurs mesurées et simulées sur la configuration *ville droite* à la date $t = 10$ s le long de l'axe $y = 0{,}2$ m.

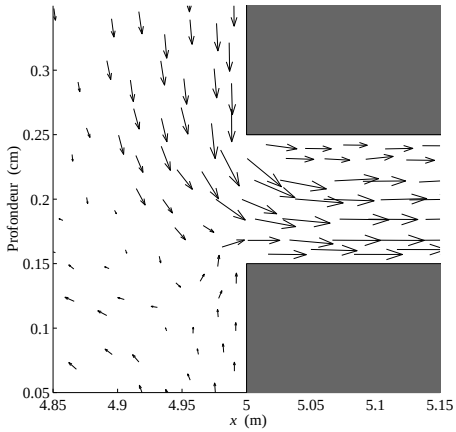


Figure 8.33 – Vue en plan des vitesses simulées par la simulation CR pour la configuration *ville droite* à la date $t = 10$ s.

(ii) la dépression de surface libre à l'aval de la zone urbaine est trop marquée avec les simulations numériques. Le long de l'axe longitudinal $y = 0{,}6$ m, les profils tracés à la date $t = 17$ s (Figure B.50) sont très similaires à ceux de l'axe $y = 0{,}2$ m.
Le profil en travers de surface libre obtenu avec les simulations est très proche des profondeurs expérimentales à la date $t = 17$ s (Figure 8.35).

8.5.2 Champs de vitesse

Comme pour la configuration *ville en quinconce*, on compare les champs de vitesse simulés à l'échelle de la partie aval du canal (Figure 8.36). Comme constaté sur la Figure 8.32, la remontée du ressaut mobile vers l'amont est moins rapide avec la simulation PC qu'avec la simulation CR. À l'aval de la zone urbaine, les deux parties de l'écoulement qui ont contourné la zone urbaine se réunissent de façon similaire dans les deux modélisations. Globalement, les deux écoulements sont très proches à l'échelle considérée.

8.6 Comparaison des différentes configurations de la zone urbaine

On compare les champs de profondeur simulés en régime transitoire (à la date $t = 10$ s) avec la modélisation 2D classique pour les deux configurations de la zone urbaine : ville en quinconce et ville droite (Figure 8.37).

On remarque que le ressaut à l'amont de la zone urbaine est légèrement plus avancé dans la configuration ville droite. Ceci est dû à une réduction plus brutale de la section d'écoulement comparativement à la configuration ville en quinconce. Dans la configuration ville droite, le champ de profondeur est un peu plus uniforme sur une distance de 1,5 m à l'amont de la zone urbaine comparativement à la configuration ville en quinconce. À l'aval immédiat de la zone urbaine, les profondeurs sont plus faibles dans la configuration ville droite que dans la configuration ville en quinconce, du fait des vitesses plus importantes dans les rues longitudinales ininterrompues. Mis à part ces observations, les profondeurs sont très proches dans les deux configurations (Figure 8.38).

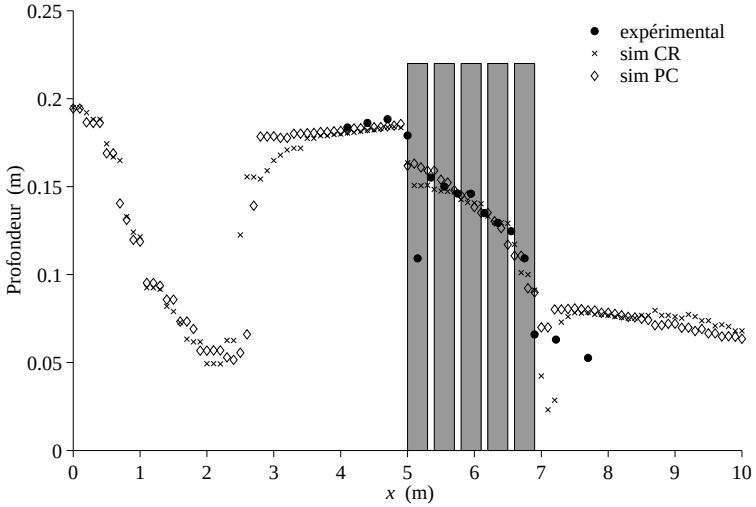


Figure 8.34 – Profil en long des profondeurs mesurées et simulées sur la configuration *ville droite* à la date $t = 17$ s le long de l'axe $y = 0{,}2$ m.

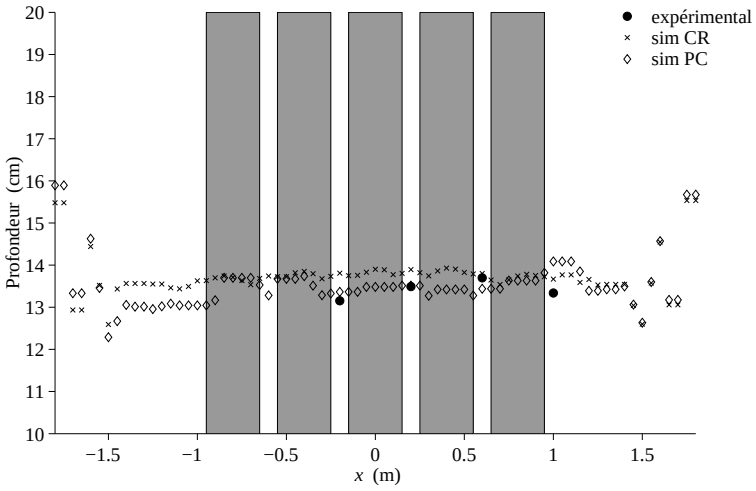


Figure 8.35 – Profil en travers des profondeurs mesurées et simulées sur la configuration *ville droite* à la date $t = 17$ s le long de l'axe $x = 6{,}15$ m.

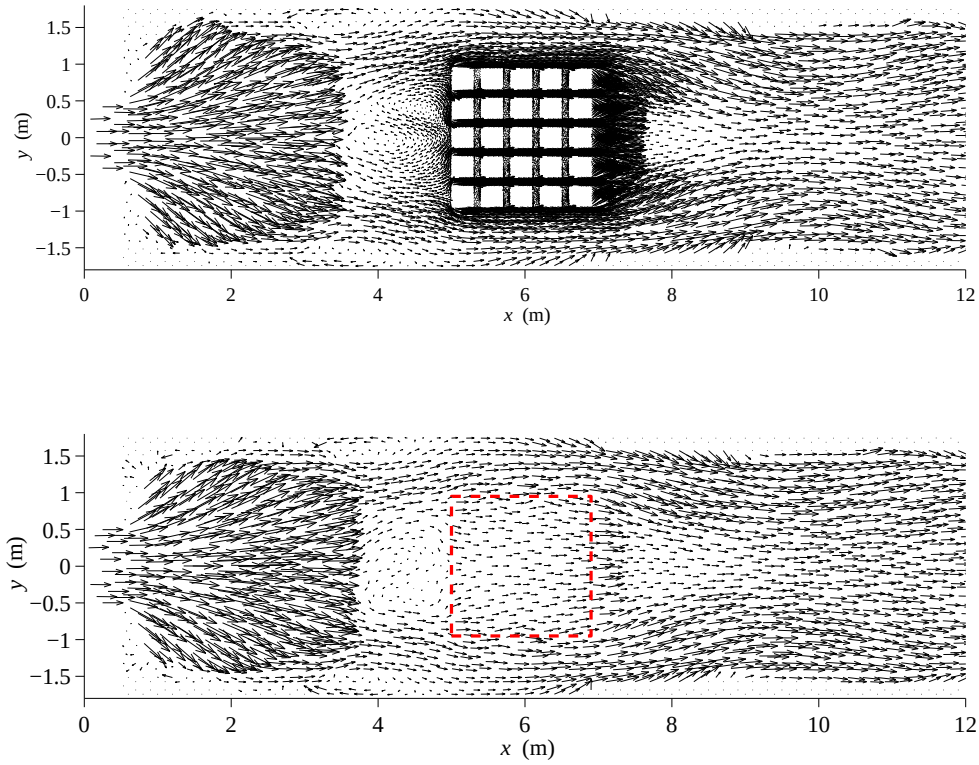


Figure 8.36 – Comparaison des champs de vitesse simulés en régime transitoire à la date $t = 10$ s, simulation CR (haut) et simulation PC (bas). Les vecteurs vitesses sont multipliés par un facteur 0,2.

La comparaison des champs de vitesse simulés en régime transitoire (à la date $t = 10$ s) avec la modélisation 2D classique permet de constater que les vitesses (à l'extérieur de la zone urbaine) sont assez proches entre les deux configurations (Figure 8.39). On peut faire le même constat concernant les vitesses à l'aval immédiat de la zone urbaine. On remarque également que la réunion des deux écoulements principaux qui avaient contourné la zone urbaine se fait à une distance plus courte dans la configuration ville en quinconce, grâce au fait que la dernière rangée de blocs est moins large que l'avant-dernière rangée.

8.7 Utilisation de la relation de prédétermination du tenseur de perte de charge

On compare le tenseur de perte de charge choisi par calage visuel du profil de surface libre sur la configuration ville droite avec le tenseur calculé par les relations (7.28) et (7.29).

Les caractéristiques géométriques de la configuration ville droite nécessaires pour utiliser la relation polynomiale de prédétermination du tenseur de perte de charge sont rappelées dans le Tableau 8.5. À partir de ces valeurs, le tenseur de perte de charge calculé est reporté au Tableau 8.6. Le tenseur obtenu par calage est également rappelé dans le Tableau 8.6. On constate que les coefficients du tenseur obtenus par les deux méthodes sont très différentes. Ceci peut s'expliquer par les valeurs des trois variables

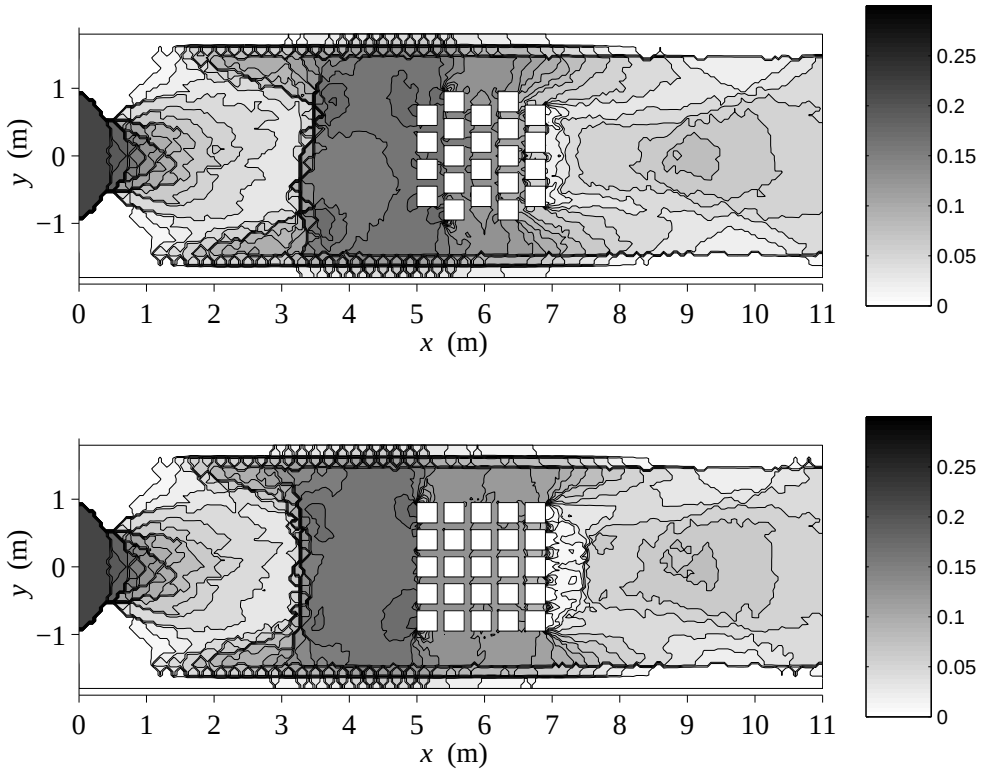


Figure 8.37 – Comparaison des champs de profondeur simulés en régime transitoire, ville en quinconce (haut) et ville droite (bas) à la date $t = 10$ s.

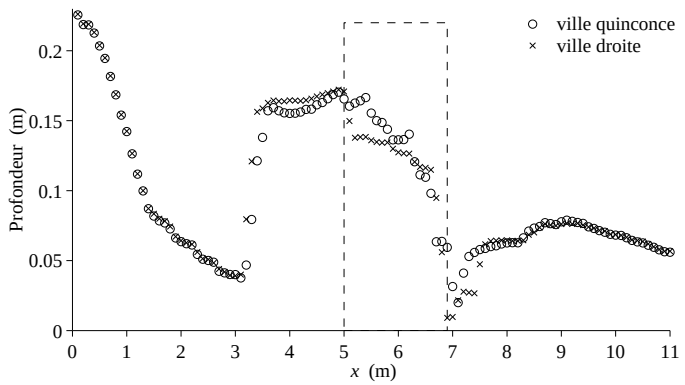


Figure 8.38 – Comparaison des profils en long de surface libre simulés en régime transitoire, ville en quinconce (haut) et ville droite (bas) à la date $t = 10$ s.

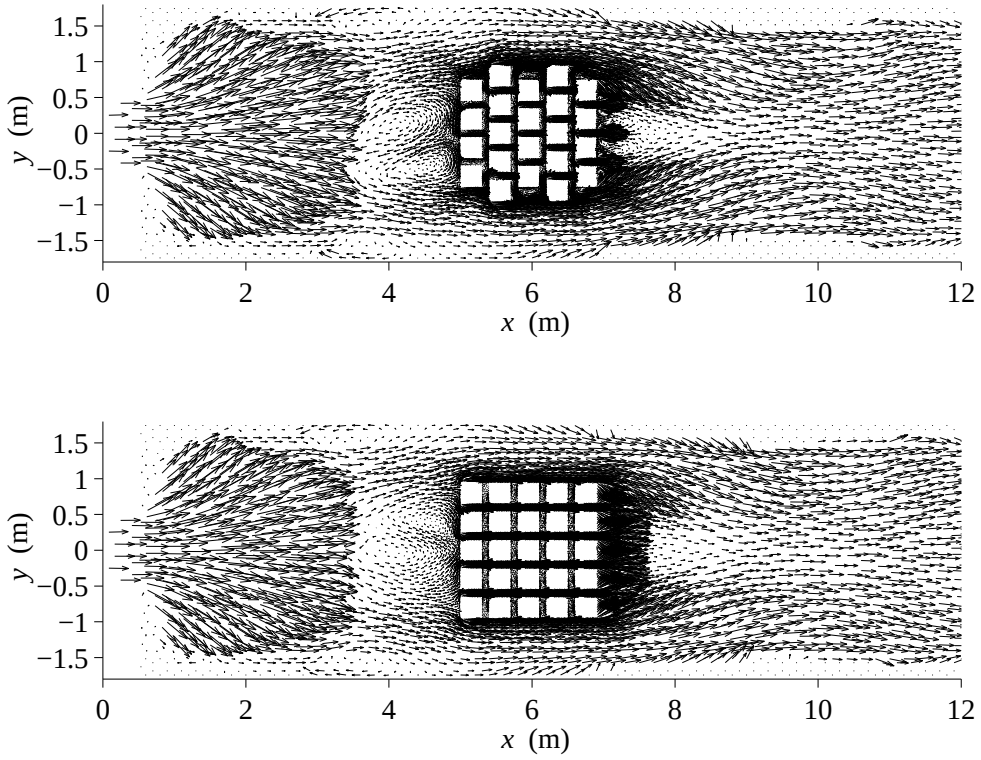


Figure 8.39 – Comparaison des champs de vitesse simulés en régime transitoire, ville en quinconce (haut) et ville droite (bas) à la date $t = 10$ s.

Tableau 8.5 – Caractéristiques de la configuration expérimentale « ville droite ».

θ	L_x	l_x	L_y	l_y	S_0	l'_x	l'_y	L_{xy}
90	0.30	0.10	0.30	0.10	0.01	0.250	0.250	1.000

Tableau 8.6 – Composantes du tenseur de perte de charge pour la configuration « ville droite ».

	M_{xx}	M_{xy}	M_{yx}	M_{yy}
calage	3	0	0	3
relation (7.28)	-25	0	0	-36
relation (7.29)	48	0	0	48

l'_x, l'_y, L_{xy} : pour la configuration expérimentale, ces variables ont des valeurs situées en dehors de l'intervalle de calage de la relation expérimentale.

8.8 Conclusions

La campagne de mesures expérimentales a permis de constituer un important jeu de données de profondeurs et de vitesses de surface. Ces données ont été utilisées pour valider la modélisation 2D classique et la modélisation 2D macroscopique. Deux configurations de la zone urbaine ont été testées : ville en quinconce et ville droite. On a observé que les écoulements sont assez proches pour ces deux configurations.

Sur la configuration ville en quinconce, deux types d'écoulements ont été comparés : régime permanent et régime transitoire. Des différences importantes entre les deux régimes d'écoulement sont apparues. L'écoulement transitoire ne se rapproche pas de l'écoulement permanent, même pour des dates élevées, principalement à cause de la capacité limitée de la retenue qui alimente l'écoulement en régime permanent.

Sur l'ensemble des configurations simulées, la modélisation 2D classique fournit des résultats très proches des mesures expérimentales, aussi bien pour les profondeurs que pour les vitesses, quelle que soit l'échelle considérée. La modélisation 2D macroscopique permet de reproduire les principales caractéristiques de l'écoulement : pente moyenne de la surface libre à travers la zone urbaine, forme du champ de vitesse à l'extérieur de la zone urbaine.

Ce travail pourrait être complété par l'étude de configurations supplémentaires de la zone urbaine. Des mesures ont été réalisées sur une configuration où la ville droite a subi une rotation d'un angle de 22,5°. Il serait intéressant d'étudier une configuration dans laquelle les rues transversales et les rues longitudinales n'auraient pas la même largeur, ainsi qu'une configuration dans laquelle la disposition des blocs serait moins régulière que dans les configurations ville en quinconce ou ville droite.

Chapitre 9

Validation sur le modèle réduit de la plaine du Toce

Sommaire

9.1 Description du dispositif expérimental 173
9.2 Présentation des simulations numériques 175
9.3 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques 176
9.3.1 Configuration alignée 176
9.3.2 Configuration en quinconce 176
9.4 Conclusions 177

La modélisation macroscopique a également été utilisée pour représenter une inondation sévère dans un modèle réduit à grande échelle de la vallée italienne du Toce. Ce cas-test expérimental a été réalisé au cours du projet européen IMPACT (2001–2004) auquel participait l'Université Catholique de Louvain (Alcrudo *et al.*, 2002). Le travail de validation présenté dans ce chapitre a été réalisé en collaboration entre l'UCL et l'UMR HydroSciences (Soares-Frazão *et al.*, 2006).

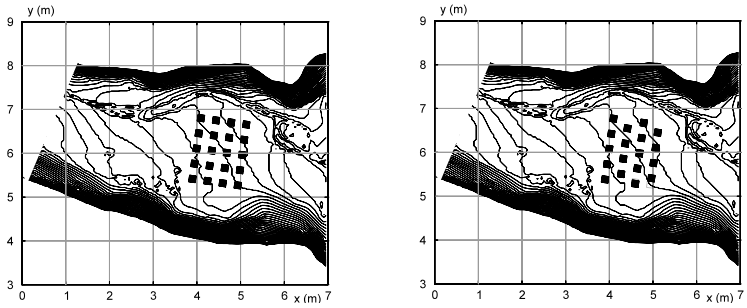
9.1 Description du dispositif expérimental

Le modèle réduit mesure 50 m de long et représente la vallée du Toce à l'échelle 1 :50 (Figure 9.1), il a été mis en place par le CESI (Centro Elettrotecnico Sperimentale Italiano, équivalent italien d'EDF). Une partie seulement de cette vallée est urbanisée et a été représentée de façon simplifiée en utilisant quatre rangées de blocs en béton régulièrement espacés, de dimensions 15 × 15 cm. Deux configurations ont été utilisées : configuration alignée ou configuration en quinconce (Figure 9.2). L'eau est injectée brutalement à l'extrémité amont du modèle réduit pour représenter un écoulement transitoire violent sur fond sec, avec un hydrogramme présenté à la Figure (Figure 9.3). Plusieurs capteurs de pression sont situés à l'intérieur de la zone urbaine (Figure 9.4), ce qui permet de mesurer les profondeurs avec un pas de temps de 0,2 s.

La vallée est entièrement inondée après l'injection de l'hydrogramme, l'onde de crue formée se réfléchit sur la zone urbaine et entraîne la formation d'un ressaut mobile qui remonte vers l'amont. Testa *et al.* (2006) présentent de façon détaillée les données expérimentales de ce cas-test.

(a) (b)

Figure 9.1 – (a) Vue générale de la zone urbaine dans le modèle réduit de la plaine du Toce (Alcrudo *et al.*, 2002), (b) partie amont du modèle réduit avec les blocs disposés en configuration alignée.



(a) (b)

Figure 9.2 – Topographie de la vallée, disposition des blocs en configuration alignée (a) et en disposition en quinconce (b).

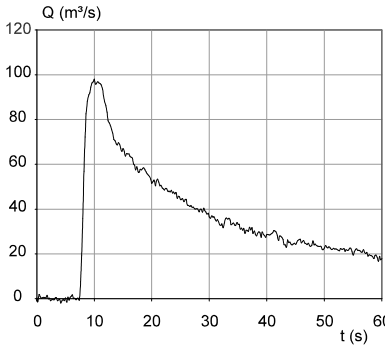


Figure 9.3 – Hydrogramme injecté à l'amont du modèle réduit.

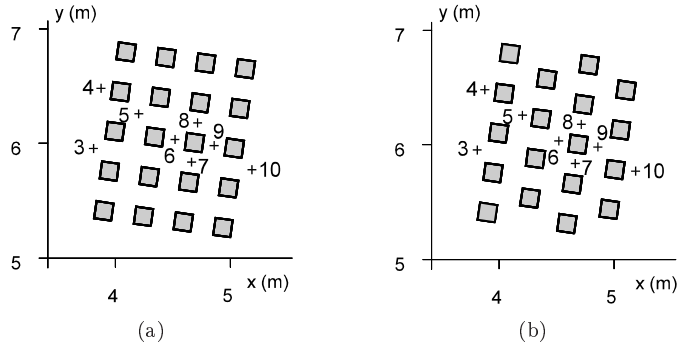


Figure 9.4 – Localisation des capteurs de pression pour la configuration alignée (a) et la configuration en quinconce (b).

Tableau 9.1 – Acronymes utilisés et caractéristiques des différentes simulations.

Acronyme	Configuration de la zone urbaine	Équations	Type de Maillage	Nombre de mailles
ACR	alignée	Shallow Water classique	raffiné	11 732
APC	alignée	Shallow Water avec porosité	grossier	3 226
SCR	quinconce	Shallow Water classique	raffiné	12 304
SPC	quinconce	Shallow Water avec porosité	grossier	3 226

9.2 Présentation des simulations numériques

Comme au chapitre précédent, l'objectif de cette validation est de montrer que la modélisation 2D macroscopique peut fournir une représentation satisfaisante de l'écoulement avec un gain important en temps de calcul par rapport à la modélisation 2D classique.

Les profondeurs expérimentales sont comparées aux résultats de simulations numériques. Pour chaque configuration de la zone urbaine (alignée ou en quinconce), deux maillages sont définis :

- un maillage raffiné à l'intérieur de la zone urbaine, où les blocs sont représentés comme des limites imperméables, les équations classqiues de propagation sont utilisées ;
- un maillage grossier à l'intérieur de la zone urbaine, où l'intérieur des blocs est également maillé, les équations de propagation avec porosité sont utilisées.

De façon similaire au chapitre précédent, on utilise des acronymes de trois lettres pour désigner les différentes simulations numériques (Tableau 9.1). La première lettre indique la configuration de la zone urbaine, alignée (*aligned*) ou en quinconce (*staggered*). La seconde lettre indique le type d'équations utilisées (équations « shallow water » avec ou sans porosité). La troisième lettre indique le degré de raffinement du maillage.

Les paramètres hydrauliques utilisés pour les simulations avec porosité sont indiqués dans le Tableau 9.2. La porosité ϕ est prise égale à la fraction de l'espace occupé par les rues dans la zone urbaine. Dans ce travail, le tenseur de perte de charge a été pris diagonal et les deux coefficients diagonaux sont égaux.
Contrairement aux paragraphes 8.3 à 8.5 où les composantes du tenseur de perte de charge ont été choisies par calage visuel, les coefficients de perte de charge sont calculés en utilisant les formules analytiques de perte de charge à la Borda dans un rétrécissement et un élargissement — voir Annexe A de Soares-Frazão *et al.* (2006). Cette

Tableau 9.2 – Paramètres hydrauliques pour les simulations avec porosité.

Simulation	porosité ϕ	coefficient de Strickler K	coefficient de perte de charge
APC	0,68	61	5
SPC	0,75	61	6,5

Tableau 9.3 – Temps de calcul pour les simulations numériques.

Simulation	Temps de calcul CPU normalisé
ACR	9,8
APC	1,0
SCR	11,2
SPC	1,0

approche évite d'avoir à faire plusieurs simulations numériques pour trouver une valeur satisfaisante du coefficient de perte de charge mais n'est pas applicable à un réseau de rues quelconque, d'où l'intérêt de l'approche développée au Chapitre 7.

$$\begin{bmatrix} S_{f,x} \\ S_{f,y} \end{bmatrix} = \frac{|Q|}{h^{10/3}} \left(\frac{1}{K^2} + \frac{h^{4/3}}{2g} \begin{bmatrix} M_{xx} & 0 \\ 0 & M_{xx} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

9.3 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques

9.3.1 Configuration alignée

Les champs de profondeurs et de débits unitaires obtenus respectivement avec les simulation ACR et APC sont présentés à la Figure 9.5. On constate que les profondeurs et les débits unitaires calculés par la simulation APC sont très proches de ceux donnés par la simulation ACR. La Figure 9.6 présente une comparaison des profils en long de surface libre simulés à l'intérieur de la zone urbaine avec les profondeurs mesurées. Le profil 1 passe dans une rue longitudinale, le profil 2 traverse une rangée de blocs. On constate que la perte de charge globale à travers la zone urbaine est bien reproduite par la simulation à porosité. À cause du maillage grossier utilisé, le ressaut mobile obtenu avec la simulation APC à l'amont de la zone urbaine se déplace légèrement plus vite que celui obtenu avec la simulation ACR. Ceci disparaît quand le maillage utilisé avec la simulation à porosité est plus fin (Soares-Frazão *et al.*, 2006).

La simulation APC est 10 fois plus rapide que la simulation ACR étant donné que le maillage utilisé est nettement moins fin (Tableau 9.3), alors que les résultats obtenus sont très proches.

9.3.2 Configuration en quinconce

Dans cette configuration, il n'y a pas de chemin d'écoulement préférentiel. Les champs de profondeurs et de débits unitaires obtenus respectivement avec les simulation SCR et SPC sont présentés à la Figure 9.7. Comme au paragraphe précédent, on constate que les profondeurs et les débits unitaires calculés par la simulation SPC sont

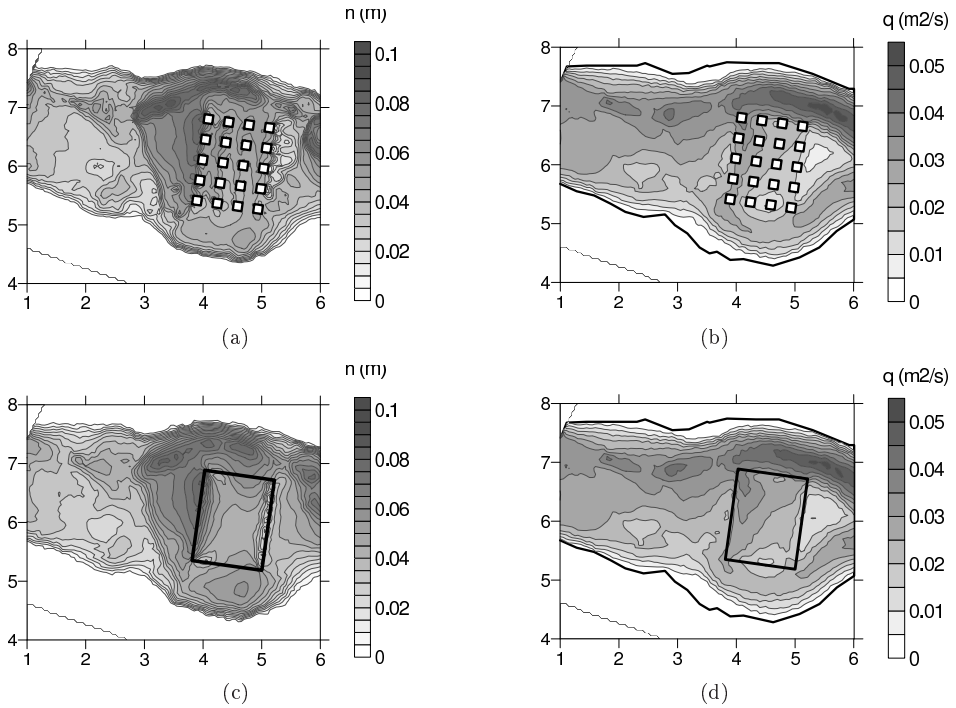


Figure 9.5 – Simulation ACR, (a) cote de la surface libre et (b) norme du débit unitaire à la date $t = 20$ s. Simulation APC, (c) cote de la surface libre et (d) norme du débit unitaire à la date $t = 20$ s.

très proches de ceux de la simulation SCR. La Figure 9.8 présente une comparaison des profils en long de surface libre simulés à l'intérieur de la zone urbaine avec les profondeurs mesurées. Les deux profils étudiés sont les mêmes qu'au paragraphe précédent, mais ici chacun traverse une rangée de blocs. Il y a un très bon accord entre les profils en long de surface libre donnés par les simulations SCR et SPC. La position du ressaut mobile à l'amont de la zone urbaine est légèrement différente entre les deux simulations numériques, mais l'écart est moins important que dans la configuration alignée. Ces différences entre la simulation SPC et la simulation SCR restent minimes compte tenu du gain en temps de calcul (Tableau 9.3).

9.4 Conclusions

Les conclusions de cette validation expérimentale sont très similaires à celles du chapitre précédent. La modélisation 2D classique donne des résultats très proches des mesures expérimentales sur ce cas-test de la vallée du Toce. La modélisation 2D macroscopique permet d'obtenir des résultats très proches de ceux donnés par la modélisation 2D classique : les caractéristiques principales de l'écoulement sont bien reproduites alors que le temps de calcul est fortement réduit.

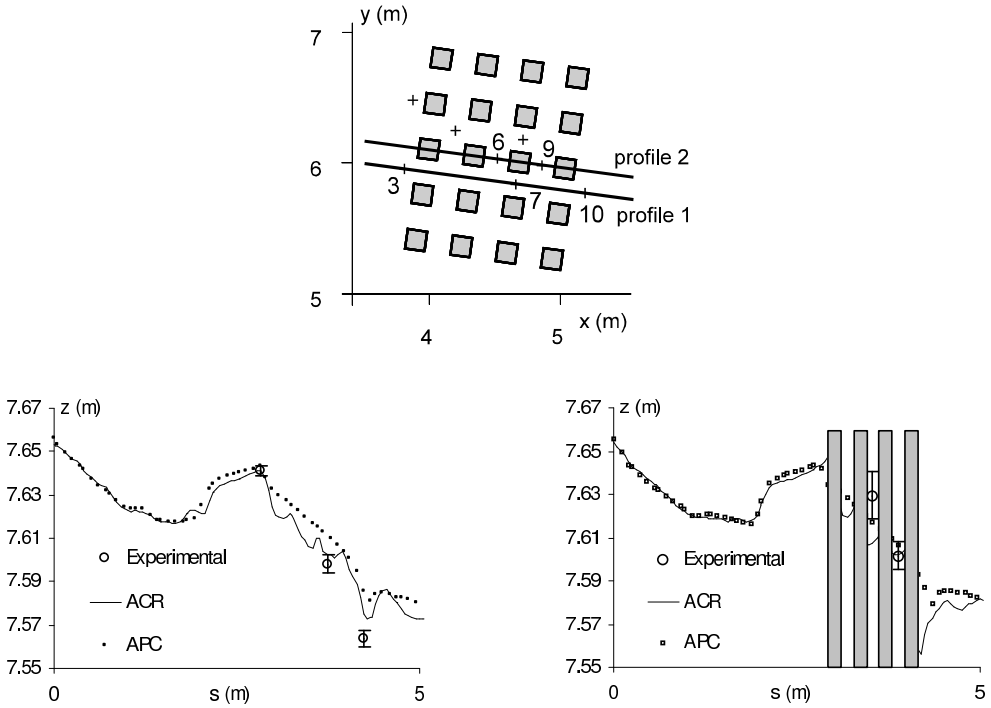


Figure 9.6 – Simulations ACR et APC, profil en long de la surface libre à l'intérieur de la zone urbaine. Position des profils (haut), surface libre le long du profil 1 (bas gauche), surface libre le long du profil 2 (bas droite).

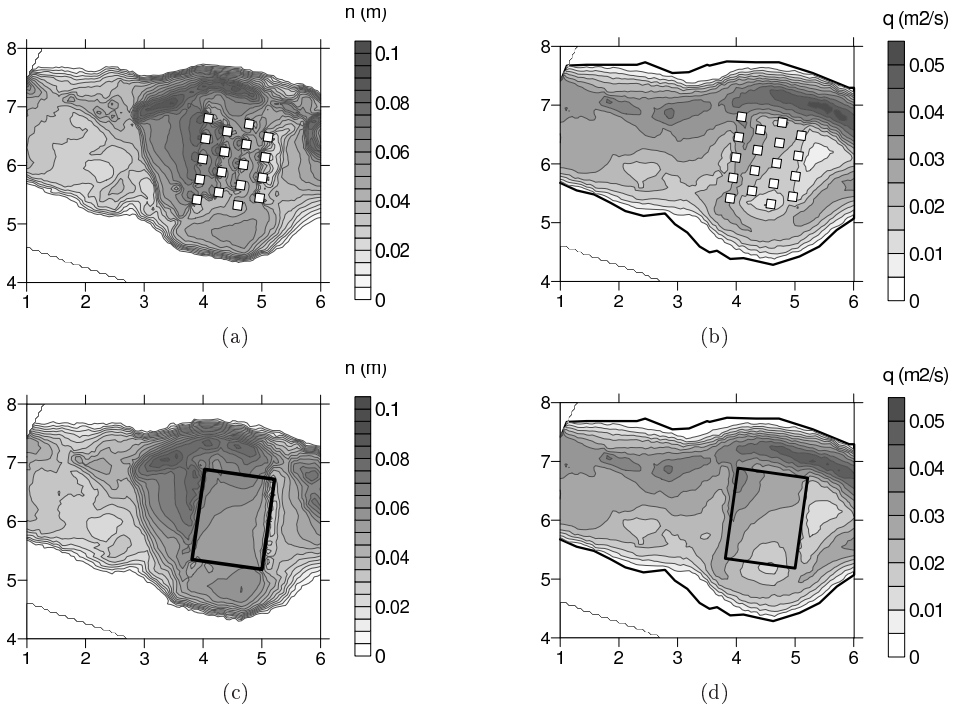


Figure 9.7 – Simulation SCR, (a) cote de la surface libre et (b) norme du débit unitaire à la date $t = 20$ s. Simulation SPC, (c) cote de la surface libre et (d) norme du débit unitaire à la date $t = 20$ s.

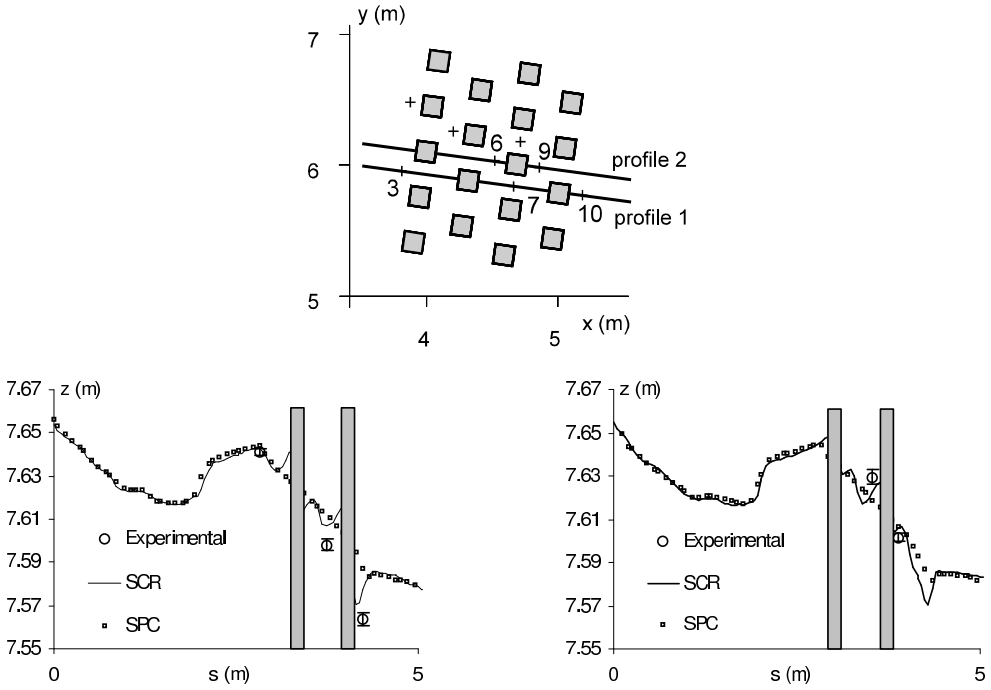


Figure 9.8 – Simulations SCR et SPC, profil en long de la surface libre à l'intérieur de la zone urbaine. Position des profils (haut), surface libre le long du profil 1 (bas gauche), surface libre le long du profil 2 (bas droite).

Cinquième partie

Développement de techniques numériques pour les écoulements à surface libre

Présentation de la Partie V

Cette partie est consacrée à la présentation du travail effectué sur le développement de techniques numériques pour les écoulements à surface libre. L'amélioration des schémas numériques de résolution des équations de propagation permet une meilleure représentation de l'écoulement, en particulier au niveau des singularités. Les singularités hydrauliques sont les caractéristiques de l'écoulement les plus difficiles à simuler pour les modèles numériques, parce que l'écoulement est discontinu ou présente de fortes variations à ces endroits.

Dans les schémas numériques de type Godunov, les flux aux interfaces des cellules permettent de calculer l'évolution des variables de l'écoulement. Ces flux sont calculés en résolvant un problème de Riemann (cf. §A.2).

Le Chapitre 10 présente un nouveau solveur de Riemann pour les équations de propagation classiques. Ce solveur présente deux caractéristiques, (i) les invariants de Riemann sont exprimés en fonction des termes de flux, ce qui permet de calculer directement le flux à l'interface, et (ii) le terme source est pris en compte dans le calcul des invariants de Riemann, ce qui conduit à un meilleur calcul des flux au niveau des variations de topographie. Des cas-test numériques montrent une nette amélioration de la simulation par rapport à l'utilisation d'un solveur de Riemann classique.

Le Chapitre 11 présente un solveur de Riemann utilisant la même approche pour les équations de propagation avec porosité.

Chapitre 10

Un solveur de Riemann approché pour les équations de propagation classiques

Sommaire

10.1 Introduction **185**
10.2 Principe du solveur **187**
10.2.1 Forme caractéristique 187
10.2.2 Intégration le long des caractéristiques 188
10.2.3 Estimation du terme source intégré 189
10.3 Calcul des flux à l'interface **190**
10.3.1 Résolution du système 190
10.3.2 Équation de continuité 190
10.3.3 Equation de quantité de mouvement 191
10.3.4 Implantation du solveur 193
10.3.5 Comparaison avec le solveur HLL 194
10.4 Tests numériques **195**
10.4.1 Rupture de barrage sur fond horizontal 195
10.4.2 Ressaut hydraulique à l'aval d'un changement de pente . . 197
10.4.3 Bosse sur le fond d'un canal horizontal 198
10.5 Conclusions **199**

Un nouveau solveur de Riemann a été développé dans le cadre de cette thèse pour mieux prendre en compte les termes source lors du calcul des flux. Ce solveur a été appliqué dans un premier temps aux équations de propagation sans porosité.

10.1 Introduction

Deux méthodes utilisées pour prendre en compte les termes source ont été présentées au §A.5.5. Toutefois, on a vu que ces méthodes nécessitent une re-formulation du vecteur des variables conservées et des termes de flux (cf. §A.7) puisqu'elles ne permettent pas de respecter les conditions d'équilibre.
D'autres méthodes existent pour la prise en compte des termes source. Les schémas dits

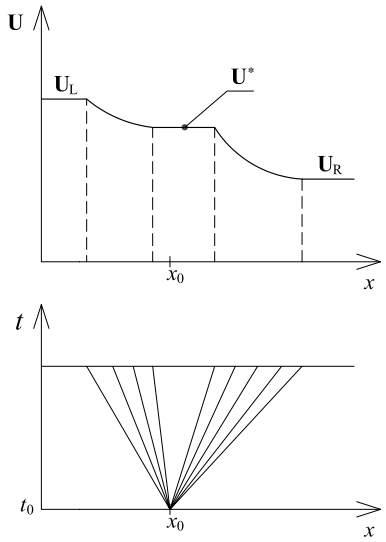


Figure 10.1 – Structure de la solution pour le solveur d'état approché développé.

"équilibre" (*Well–Balanced*) incorporent la topographie non uniforme dans le problème de Riemann par l'intermédiaire d'une équation différentielle par rapport au temps (Greenberg et Le Roux, 1996). Le terme de pente de fond est intégré dans le vecteur des variables conservées. Le problème de Riemann ainsi obtenu a été initialement résolu de façon exacte (Greenberg et Le Roux, 1996; Alcrudo et Benkhaldoun, 2001). Une variante utilisant un solveur de Riemann approché a été proposée par la suite (Gallouët *et al.*, 2003).
LeVeque (1998) a proposé de scinder le vecteur des variables d'une cellule en deux vecteurs avec une discontinuité au centre de la cellule. La solution est calculée en utilisant les flux aux interfaces de la cellule, les flux au centre de la cellule et la contribution des termes source. Le schéma obtenu (*quasi-steady wave-propagation algorithm*) est performant lorsque la solution est proche d'un état d'équilibre.

Le solveur développé est un solveur approché reposant sur l'hypothèse d'une structure à deux ondes de raréfaction (Figure 10.1). Sa principale particularité est que les invariants de Riemann sont exprimés en fonction des composantes du vecteur flux (Figure 10.2), ce qui permet de calculer directement les flux dans la zone d'état constant intermédiaire (Lhomme et Guinot, 2006b,a). Il n'est pas nécessaire de reformuler le vecteur des variables conservées dans cette approche puisque les termes source sont pris en compte dans le calcul des flux. Bien que les relations de saut diffèrent très peu des invariants de Riemann, l'hypothèse d'une structure à deux ondes de raréfaction (utilisant les invariants de Riemann) permet de traiter plus facilement les termes source. En effet, la relation de Rankine–Hugoniot utilisée pour les discontinuités ne fait pas intervenir les termes source. Le calcul direct de la valeur de $\mathbf{F}^*$ dans la zone intermédiaire (plutôt que de calculer $\mathbf{F}^*$ à partir de la valeur de $\mathbf{U}^*$) est intéressant dans le cas où la cote du fond est différente dans deux cellules ayant un interface en commun. Si l'interface (et donc la discontinuité du fond) se trouve dans la zone intermédiaire, le calcul de $\mathbf{F}_{i+1/2}$ à partir de $\mathbf{U}_{i+1/2}$ nécessite une valeur de la cote du fond à l'interface. L'estimation de cette valeur qui n'a pas de réalité physique est délicate. Ce problème ne se pose pas quand on calcule directement $\mathbf{F}^*$.

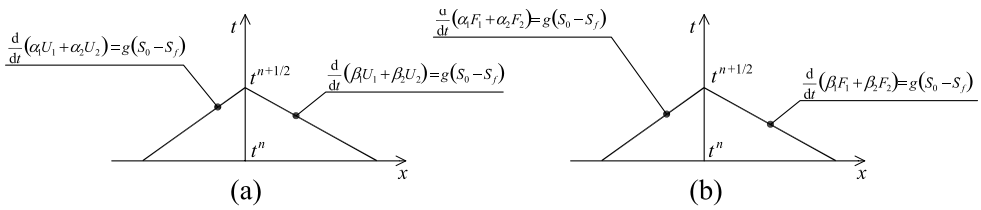


Figure 10.2 – Schéma de principe du calcul du flux à l'interface, (a) utilisation des invariants de Riemann exprimés à partir des composantes de $\mathbf{U}$, (b) utilisation des invariants de Riemann exprimés à partir des composantes de $\mathbf{F}$.

10.2 Principe du solveur

On utilise la forme unidimensionnelle de l'équation de propagation (6.82) (dans un repère local orienté dans la direction normale à l'interface) avec une porosité uniforme égale à 1.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}) = \mathbf{S} \tag{10.1a}$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + g\dfrac{h^2}{2} \\ uvh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{0,x} - S_{f,x}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.1b}$$

10.2.1 Forme caractéristique

La solution $\mathbf{U}$ et le flux $\mathbf{F}$ sont supposés continus et dérivables pour pouvoir utiliser les invariants de Riemann. Si ces deux vecteurs ne sont pas continus, les relations caractéristiques constituent néanmoins de bonnes approximations des relations de saut (Lax, 1957).

On considère l'équation (10.1a) et on multiplie à gauche par la matrice Jacobienne $\mathbf{A} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$

$$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{AS} \tag{10.2}$$

ce que l'on peut récrire

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{AS} \tag{10.3}$$

Il s'agit d'une forme caractéristique comme l'équation (A.39) mais écrite ici avec le vecteur flux. Soit $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{K}$ la matrice des valeurs propres et la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{A}$. On multiplie l'équation précédente à gauche par $\mathbf{K}^{-1}$ comme au §A.5.3.

$$\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{AKK}^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{AS} \tag{10.4}$$

On définit la forme différentielle $\mathrm{d}\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathrm{d}\mathbf{F}$ ce qui nous permet de récrire l'équation précédente

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{\Lambda S}' \tag{10.5}$$

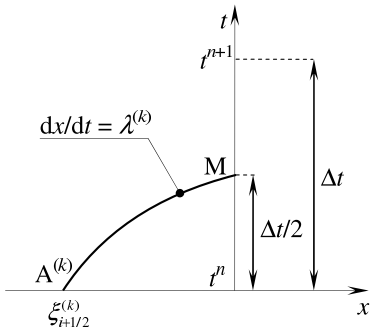


Figure 10.3 – Schéma de l'intégration le long des caractéristiques.

où $\mathbf{S}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{S}$. Cette équation vectorielle est équivalente au système de 3 équations différentielles indépendantes

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial x} = \lambda_k S'_k \ , \quad k = 1, 2, 3 \tag{10.6}$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}W_k}{\mathrm{d}t} = \lambda_k S'_k \quad \text{le long de } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_k \ , \quad k = 1, 2, 3 \tag{10.7}$$

D'autre part, on peut écrire par définition de d$\mathbf{W}$

$$\mathrm{d}W_k = \sum_{i=1}^{3} K^{-1}_{i,k} \mathrm{d}F_i \tag{10.8}$$

où $\mathbf{K}^{-1}_{i,k}$ est l'élément situé sur la k-ème ligne et la i-ème colonne de $\mathbf{K}^{-1}$ et F_i est le i-ème élément du vecteur $\mathbf{F}$. Si le vecteur différentiel d$\mathbf{W}$ peut être intégré, alors les éléments W_k sont les invariants de Riemann du système.

10.2.2 Intégration le long des caractéristiques

L'étape suivante consiste à intégrer les relations (10.7) le long des caractéristiques $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_k$ entre le point $\mathrm{M}(x_{i+1/2}, t^{n-1/2})$ situé à l'interface et le point $A^{(k)}(x_{\mathrm{A}^{(k)}}, t^n)$ situé au pied de la k-ème caractéristique qui passe par M (Figure 10.3). La valeur du flux calculée en M est utilisée comme valeur de $\mathbf{F}^{n+1/2}_{i+1/2}$.

$$\int_{\mathrm{A}^{(k)}}^{\mathrm{M}} \mathrm{d}W_k = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} \tag{10.9}$$

où $\overline{S'_k}$ désigne la valeur moyenne de S'_k le long du chemin d'intégration. On substitue (10.8) dans l'équation précédente pour obtenir

$$\int_{\mathrm{A}^{(k)}}^{\mathrm{M}} \sum_{i=1}^{3} K^{-1}_{i,k} \mathrm{d}F_i = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} \tag{10.10}$$

Les éléments de la matrice $\mathbf{K}^{-1}$ sont estimés en utilisant la matrice (constante) du côté L ou R dont provient la caractéristique.

$$K^{-1}_{i,k} = \begin{cases} \left(K^{-1}_{\mathrm{L}}\right)_{i,k} & \text{si } \lambda_k > 0 \\ \left(K^{-1}_{\mathrm{R}}\right)_{i,k} & \text{si } \lambda_k < 0 \end{cases} \tag{10.11}$$

On peut donc récrire l'équation (10.10) en sortant les coefficients $K_{i,k}^{-1}$ de l'intégrale

$$\sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} \int_{\mathrm{A}^{(k)}}^{\mathrm{M}} \mathrm{d}F_i = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} \tag{10.12}$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} \left(F_{i,\mathrm{M}} - F_{i,k}\right) = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} \tag{10.13}$$

où $F_{i,k}$ et $F_{i,\mathrm{M}}$ sont la i-ème composante de $\mathbf{F}$ respectivement aux points $\mathrm{A}^{(k)}$ et M. On obtient donc un système d'équations 3×3 que l'on peut résoudre pour trouver les composantes $F_{i,\mathrm{M}}$

$$\sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} F_{i,\mathrm{M}} = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} + \sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} F_{i,k} \ , \quad k = 1, 2, 3 \tag{10.14}$$

10.2.3 Estimation du terme source intégré

On reprend l'équation (A.42) pour exprimer la matrice $\mathbf{K}^{-1}$

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} \lambda^{(3)} & -1 & 0 \\ -2cv & 0 & 2c \\ -\lambda^{(1)} & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.15}$$

où les célérités d'ondes sont estimées par

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \min\left(u_{\mathrm{L}} - c_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} - c_{\mathrm{R}}\right) \\ \lambda^{(3)} &= \max\left(u_{\mathrm{L}} + c_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} + c_{\mathrm{R}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

À noter que, contrairement à l'équation (A.75) du solveur HLLC, les opérateurs min et max de l'équation (10.16) ne contiennent pas zéro comme argument.
On peut récrire le vecteur $\mathbf{S}'$ comme suit

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} gh\dfrac{\partial z_b}{\partial x} \\ 0 \\ -gh\dfrac{\partial z_b}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{10.17}$$

Les composantes $\overline{S'_k}$ sont approchées par $S'_k\left(h_{\mathrm{LR}}, \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)_{\mathrm{LR}}\right)$ avec

$$\left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)_{\mathrm{LR}} \approx \frac{z_{b,\mathrm{R}} - z_{b,\mathrm{L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \frac{2}{\Delta t} \tag{10.18}$$

Le terme h_{LR} peut être estimé de différentes manières, mais les conditions de consistance et d'équilibre doivent être respectées. Les conditions de consistance sont

$$\left.\begin{aligned} h_{\mathrm{LR}} &= h_{\mathrm{LR}}\left(h_{\mathrm{L}}, h_{\mathrm{R}}\right) \\ h_{\mathrm{LR}}\left(h, h\right) &= h \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

La condition d'équilibre s'énonce ainsi : une combinaison de deux états L et R constituant un état d'équilibre doivent donner un flux à l'interface compatible avec cet équilibre. L'estimation de h_{LR} est traitée à la section suivante.

10.3 Calcul des flux à l'interface

10.3.1 Résolution du système

En substituant (10.15) dans (10.14), on obtient

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(3)}(F_1^* - F_{1,\mathrm{R}}) - (F_2^* - F_{2,\mathrm{R}}) &= -\lambda^{(1)}\overline{S_1'}\frac{\Delta t}{2} \\ -v(F_1^* - F_{1,\mathrm{A}}) + (F_3^* - F_{3,\mathrm{A}}) &= 0 \\ -\lambda^{(1)}(F_1^* - F_{1,\mathrm{L}}) + (F_2^* - F_{2,\mathrm{L}}) &= \lambda^{(3)}\overline{S_2'}\frac{\Delta t}{2} \end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

avec

$$F_{i,\mathrm{A}} = \begin{cases} F_{i,\mathrm{L}} & \text{si } \lambda^{(2)} > 0 \\ F_{i,\mathrm{R}} & \text{si } \lambda^{(2)} < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{10.21}$$

et où le terme source est calculé avec les équations (10.17) et (10.18)

$$\overline{S_k'} = -gh_{\mathrm{LR}}^{(k)}\frac{z_{b,\mathrm{R}} - z_{b,\mathrm{L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\frac{2}{\Delta t} \tag{10.22}$$

Les flux F_i^* sont les composantes du flux $\mathbf{F}^*$ dans la zone intermédiaire. Les estimations $h_{\mathrm{LR}}^{(1)}$ et $h_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ de h_{LR} à l'interface sont à priori différentes dans (10.20). Le système (10.20) est résolu pour donner les flux F_i^*

$$F_1^* = \frac{F_{2,\mathrm{L}} - F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)}F_{1,\mathrm{L}} + \lambda^{(3)}F_{1,\mathrm{R}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} - gh_{\mathrm{LR}}^{(1)}\frac{z_{\mathrm{b,R}} - z_{\mathrm{b,L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \tag{10.23}$$

$$\begin{aligned} F_2^* = {} & \frac{\lambda^{(3)}F_{2,\mathrm{L}} - \lambda^{(1)}F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)}\lambda^{(3)}\left(F_{1,\mathrm{L}} - F_{1,\mathrm{R}}\right)}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ & - gh_{\mathrm{LR}}^{(2)}\frac{z_{\mathrm{b,R}} - z_{\mathrm{b,L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\left(\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}\right) \end{aligned} \tag{10.24}$$

$$F_3^* = \begin{cases} v_{\mathrm{L}}F_1 \text{ si } \lambda^{(2)} > 0 \\ v_{\mathrm{R}}F_1 \text{ si } \lambda^{(2)} < 0 \end{cases} \tag{10.25}$$

10.3.2 Équation de continuité

Le terme h_{LR} doit être estimé de façon à respecter les conditions d'équilibre : en considérant un plan d'eau au repos sur un fond non plat, le débit à l'interface doit rester nul. Une première estimation possible est

$$h_{\mathrm{LR}}^{(1)} = \frac{h_{\mathrm{L}} + h_{\mathrm{R}}}{2} \tag{10.26}$$

Une autre expression peut être proposée en utilisant une pondération par les célérités $\lambda^{(k)}$ (la hauteur de chaque côté est pondérée par la célérité de l'onde qui provient de ce côté)

$$h_{\mathrm{LR}}^{(1)} = \frac{\lambda^{(3)}h_{\mathrm{L}} - \lambda^{(1)}h_{\mathrm{R}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \tag{10.27}$$

Les deux équations précédentes sont équivalentes dans le cas de l'équilibre statique (la vitesse est nulle et on a $\lambda^{(3)} = -\lambda^{(1)} = c$) et on obtient bien un débit nul à l'interface

$$F_1^* = \frac{gh_{\mathrm{L}}^2/2 - gh_{\mathrm{R}}^2/2}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} - g\frac{h_{\mathrm{L}} + h_{\mathrm{R}}}{2}\frac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} = 0 \tag{10.28}$$

L'estimation (10.27) a été retenue pour l'implémentation du solveur dans le code SW2D.

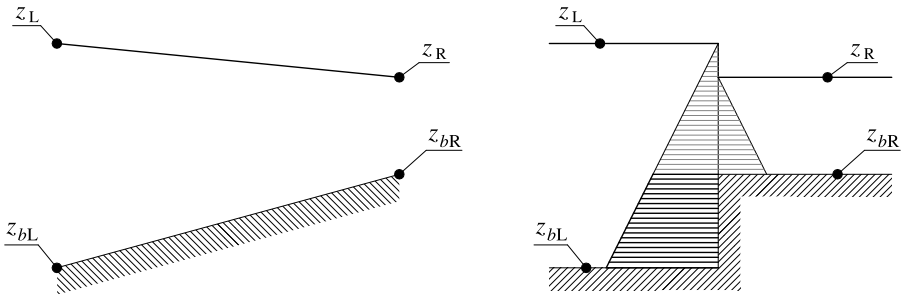


Figure 10.4 – Analogie entre la pente de fond et une marche.

10.3.3 Equation de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement sur une cellule donnée s'écrit

$$\begin{aligned}(uh)_i^{n+1} - (uh)_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left[(F_2^*)_{i-1/2}^{n+1/2} - (F_2^*)_{i+1/2}^{n+1/2}\right] \\ + \Delta t\left[(S_0^{(3)})_{i-1/2,i}^{n+1/2} + (S_0^{(3)})_{i+1/2,i}^{n+1/2}\right]\end{aligned} \tag{10.29}$$

Le terme source de pente de fond intervient deux fois dans l'équation de quantité de mouvement :

- une première fois dans le flux F_2^*, avec une profondeur à l'interface $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ à estimer ;
- une deuxième fois avec le terme $S_0^{(3)}$ (le terme source habituel qui apparaît dans l'équation discrétisée (A.2)) avec une profondeur à l'interface $h_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ à estimer (comme cela avait été fait au §A.7.2).

En pratique, les estimations suivantes de h_{LR} ont été retenues

$$h_{\mathrm{LR}}^{(2)} = 0 \tag{10.30}$$

$$h_{\mathrm{LR}}^{(3)} = \begin{cases} h_{\mathrm{L}} - \Delta z_b/2 & \text{si } \Delta z_b > 0 \\ h_{\mathrm{R}} + \Delta z_b/2 & \text{si } \Delta z_b < 0 \end{cases} \tag{10.31}$$

avec $\Delta z_b = z_{b,\mathrm{R}} - z_{b,\mathrm{L}}$

Justification de l'estimation de $h_{\mathrm{LR}}^{(3)}$. On considère que le terme source dû à la pente de fond est égal à la force exercée par une marche (Figure 10.4). On écrit donc l'égalité suivante

$$gh_{\mathrm{LR}}^{(3)}\Delta z_b = \begin{cases} -\displaystyle\int_{z_{b,\mathrm{L}}}^{z_{b,\mathrm{R}}} g(z_{\mathrm{L}} - z)\mathrm{d}z & \text{si } \Delta z_b > 0 \\ \displaystyle\int_{z_{b,\mathrm{R}}}^{z_{b,\mathrm{L}}} g(z_{\mathrm{R}} - z)\mathrm{d}z & \text{si } \Delta z_b < 0 \end{cases} \tag{10.32}$$

ce qui donne l'équation (10.31). Si on se place à l'équilibre statique, on peut remplacer Δz_b par $(h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}})$ puisque la surface libre est horizontale, ce qui donne

$$h_{\mathrm{LR}}^{(3)} = \begin{cases} h_{\mathrm{L}} - \dfrac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{2} & \text{si } \Delta z_b > 0 \\ h_{\mathrm{R}} + \dfrac{h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}}{2} & \text{si } \Delta z_b < 0 \end{cases} \tag{10.33}$$

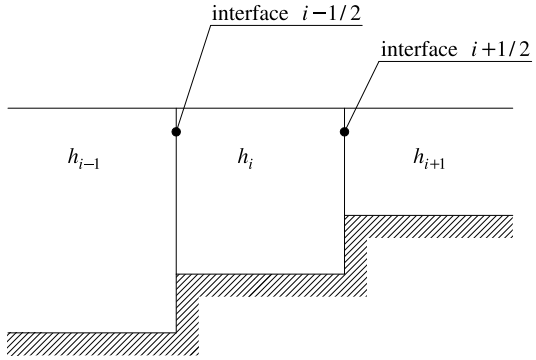


Figure 10.5 – Equilibre statique, trois cellules de même taille mais de cotes de fond différentes.

Dans les deux cas, l'équation précédente s'écrit

$$h_{\mathrm{LR}}^{(3)} = \frac{h_{\mathrm{L}} + h_{\mathrm{R}}}{2} \tag{10.34}$$

Justification de l'estimation de $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$. La valeur nulle prise comme estimation de $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ nul découle du constat suivant : la condition d'équilibre statique est satisfaite quelle que soit l'expression de $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ à condition que $h_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ soit égal à $(h_{\mathrm{L}} + h_{\mathrm{R}})/2$ dans le cas de l'équilibre statique. Pour le montrer, on considère trois cellules carrées de même taille mais de cotes de fond différentes et un plan d'eau au repos (Figure 10.5). Les 3 cellules ont une cote de fond croissante, mais on pourrait considérer des cotes de fond quelconques. Les célérités d'ondes sont données par

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{i-1/2}^{(3)} &= \max(c_{i-1}, c_i) = c_{i-1} \\
\lambda_{i-1/2}^{(1)} &= \min(-c_{i-1}, -c_i) = -c_{i-1} \\
\lambda_{i+1/2}^{(3)} &= \max(c_i, c_{i+1}) = c_i \\
\lambda_{i+1/2}^{(1)} &= \min(-c_i, -c_{i+1}) = -c_i
\end{aligned}\right\} \tag{10.35}$$

La somme $\lambda^{(3)}+\lambda^{(1)}$ s'annule dans l'équation (10.24) et l'expression du flux à l'interface $i-1/2$ se réduit à

$$(F_2^*)_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{c_{i-1}F_{2,\mathrm{L}} + c_{i-1}F_{2,\mathrm{R}}}{2c_{i-1}} = \frac{g}{4}\left((h_{i-1}^n)^2 + (h_i^n)^2\right) \tag{10.36}$$

De même, l'expression du flux à l'interface $i+1/2$ est

$$(F_2^*)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{c_i F_{2,\mathrm{L}} + c_i F_{2,\mathrm{R}}}{2c_i} = \frac{g}{4}\left((h_i^n)^2 + (h_{i+1}^n)^2\right) \tag{10.37}$$

On utilise la technique du décentrage amont (*upwinding*) pour répartir le terme source de frottement traditionnel de part et d'autre de l'interface. On écrit donc

$$\left.\begin{aligned}
(S_0^{(3)})_{i-1/2,i}^{n+1/2} &= \frac{\lambda_{i-1/2}^{(3)}}{\lambda_{i-1/2}^{(3)} - \lambda_{i-1/2}^{(1)}} \frac{1}{\Delta x_i}\left[-gh_{i-1/2}^{(3)}\left(z_{b,i} - z_{b,i-1}\right)\right] \\
(S_0^{(3)})_{i+1/2,i}^{n+1/2} &= \frac{-\lambda_{i+1/2}^{(1)}}{\lambda_{i+1/2}^{(3)} - \lambda_{i+1/2}^{(1)}} \frac{1}{\Delta x_i}\left[-gh_{i+1/2}^{(3)}\left(z_{b,i+1} - z_{b,i}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{10.38}$$

On récrit l'équation (10.29) en injectant les équations (10.36) à (10.38). Puisqu'on est en équilibre statique, on peut utiliser l'équation (10.34) et on remplace la différence $(z_{b,\mathrm{R}} - z_{b,\mathrm{L}})$ par $(h_\mathrm{L} - h_\mathrm{R})$

$$\begin{aligned}
(uh)_i^{n+1} - (uh)_i^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\frac{g}{4}\left[(h_{i-1}^n)^2 - (h_{i+1}^n)^2\right] \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\frac{g}{2}\left[-\frac{h_{i-1}+h_i}{2}(h_{i-1}-h_i) - \frac{h_i+h_{i+1}}{2}(h_i - h_{i+1})\right] \\
&= \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\frac{g}{4}\left[(h_{i-1}^n)^2 - (h_{i+1}^n)^2 - \left((h_{i-1}^n)^2 - (h_i^n)^2\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left((h_i^n)^2 - (h_{i+1}^n)^2\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10.39}$$

À l'équilibre statique, la valeur de $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ n'a pas d'importance puisque $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ est multiplié par la somme $\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}$ égale à 0, à condition que (10.34) soit respectée.

De plus, des test numériques ont montré qu'une autre expression de $h_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ donnait systématiquement de moins bons résultats sur les cas-tests présentés au §10.4.

10.3.4 Implantation du solveur

Les composantes de $\mathbf{F}$ obtenues avec les équations (10.23), (10.24) et (10.25) sont les valeurs correspondant à la région intermédiaire d'état constant. La valeur recherchée est la valeur de $\mathbf{F}$ à l'emplacement de la discontinuité initiale (l'interface). Dans le cas d'un écoulement subcritique, l'interface sera bien contenue dans la région intermédiaire. En revanche, ce ne sera pas vrai pour un écoulement critique ou supercritique. Il faut donc en tenir compte dans l'algorithme du solveur.

On commence par calculer les variables u^* et c^* relatives à la région intermédiaire. En utilisant les invariants de Riemann classique, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}
u^* + 2c^* &= u_\mathrm{L} + 2c_\mathrm{L} \\
u^* - 2c^* &= u_\mathrm{R} - 2c_\mathrm{R}
\end{aligned}\right\} \tag{10.40}$$

On en déduit les valeurs de u^* et c^*

$$\left.\begin{aligned}
u^* &= \frac{u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R}}{2} + c_\mathrm{L} - c_\mathrm{R} \\
c^* &= \frac{u_\mathrm{L} - u_\mathrm{R}}{4} + \frac{c_\mathrm{L} + c_\mathrm{R}}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{10.41}$$

On calcule ensuite les célérités dans la région intermédiaire

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_*^{(1)} &= u^* - c^* \\
\lambda_*^{(3)} &= u^* + c^*
\end{aligned}\right\} \tag{10.42}$$

La comparaison de ces deux célérités avec les célérités des états constants L et R nous

permettent d'identifier la configuration d'onde

$$\begin{cases} F_1 = F_{1,\mathrm{L}} \\ F_2 = F_{2,\mathrm{L}} \end{cases} \qquad \text{si } \lambda_{\mathrm{L}}^{(1)} > 0 \tag{10.43a}$$

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{(u_{\mathrm{L}} + 2c_{\mathrm{L}})^3}{27g} \\ F_2 = \dfrac{(u_{\mathrm{L}} + 2c_{\mathrm{L}})^4}{54g} \end{cases} \qquad \text{si } \lambda_{\mathrm{L}}^{(1)} < 0 \text{ et } \lambda_*^{(1)} > 0 \tag{10.43b}$$

$$\begin{cases} F_1 = F_1^* \\ F_2 = F_2^* \end{cases} \qquad \text{si } \lambda_*^{(1)} < 0 \text{ et } \lambda_*^{(3)} > 0 \tag{10.43c}$$

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{(u_{\mathrm{L}} - 2c_{\mathrm{L}})^3}{27g} \\ F_2 = \dfrac{(u_{\mathrm{L}} - 2c_{\mathrm{L}})^4}{54g} \end{cases} \qquad \text{si } \lambda_*^{(3)} < 0 \text{ et } \lambda_{\mathrm{R}}^{(3)} > 0 \tag{10.43d}$$

$$\begin{cases} F_1 = F_{1,\mathrm{R}} \\ F_2 = F_{2,\mathrm{R}} \end{cases} \qquad \text{si } \lambda_{\mathrm{R}}^{(3)} < 0 \tag{10.43e}$$

Ces cinq configurations correspondent aux différents régimes d'écoulement :
- (10.43c) : écoulement subcritique,
- (10.43b–10.43d) : écoulement critique,
- (10.43a–10.43e) : écoulement supercritique.

L'équation (10.43b) correspondant à un régime critique s'écoulant vers la droite a été obtenue en combinant la première équation de (10.40) et la condition $u^* = c^*$ puis en utilisant l'expression classique des flux. L'équation (10.43d) correspondant à un régime critique s'écoulant vers la gauche a été obtenue en combinant la deuxième équation de (10.40) et la condition $u^* = -c^*$ puis en utilisant l'expression classique des flux.

10.3.5 Comparaison avec le solveur HLL

On rappelle les équations du solveur HLL et celles du solveur proposé pour faciliter la comparaison. Le solveur proposé sera appelé solveur Apstat (pour *Approximate State*) dans la suite.

Le solveur HLL

$$\left.\begin{aligned} F_1^* &= \frac{\lambda^{(3)} F_{1,\mathrm{L}} - \lambda^{(1)} F_{1,\mathrm{R}} + \lambda^{(3)}\lambda^{(1)}(U_{1,\mathrm{R}} - U_{1,\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ F_2^* &= \frac{\lambda^{(3)} F_{2,\mathrm{L}} - \lambda^{(1)} F_{2,\mathrm{R}} + \lambda^{(3)}\lambda^{(1)}(U_{2,\mathrm{R}} - U_{2,\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ U_2^* &= \frac{F_{2,\mathrm{L}} - F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)} U_{2,\mathrm{L}} + \lambda^{(3)} U_{2,\mathrm{R}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

Le solveur Apstat

$$\left.\begin{aligned} F_1^* &= \frac{F_{2,\mathrm{L}} - F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)} F_{1,\mathrm{L}} + \lambda^{(3)} F_{1,\mathrm{R}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} - g h_{\mathrm{LR}}^{(1)} \frac{z_{\mathrm{b,R}} - z_{\mathrm{b,L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ F_2^* &= \frac{\lambda^{(3)} F_{2,\mathrm{L}} - \lambda^{(1)} F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)}\lambda^{(3)} \left(F_{1,\mathrm{L}} - F_{1,\mathrm{R}}\right)}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ &\quad - g h_{\mathrm{LR}}^{(3)} \left(\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}\right) \frac{z_{\mathrm{b,R}} - z_{\mathrm{b,L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \end{aligned}\right\} \tag{10.45}$$

Plusieurs remarques découlent de la comparaison des expressions des solutions données par les deux solveurs :

- le solveur HLL utilise une seule relation vectorielle pour le calcul de F_1^* et F_2^*, alors que le solveur Apstat utilise deux relations différentes ;
- le flux de masse F_1^* calculé par le solveur Apstat est similaire à la variable U_2^* calculée par le solveur HLL, alors que le flux de quantité de mouvement F_2^* calculé par le solveur Apstat est similaire aux flux F_1^* et F_2^* calculés par le solveur HLL ;
- la relation (10.44 b) du solveur HLL est très proche de la relation (10.45 b) du solveur Apstat, mais la relation (10.45 b) fait intervenir le terme source.

Cette troisième remarque permet au solveur Apstat de respecter la condition d'équilibre statique, alors qu'il est nécessaire de modifier le vecteur des variables conservées pour le solveur HLL (cf. §A.7). La troisième composante du flux est identique dans les deux solveurs.
Ces deux solveurs ont des expressions très proches parce que (i) la première composante du flux (*i.e.* le débit unitaire) coïncide avec la deuxième composante des variables conservées, et (ii) les deuxièmes composantes des vecteurs propres sont égales aux valeurs propres. Cette ressemblance nous amène à comparer les résultats donnés par ces deux solveurs sur quelques cas-test numériques.

10.4 Tests numériques

Trois types de cas-tests ont été mis en œuvre, (i) ruptures de barrage, (ii) ressaut hydraulique, (iii) bosse sur le fond d'un canal horizontal. Il s'agit de cas-tests unidimensionnels. Pour chaque cas-test, les solutions calculées par le solveur Apstat et par le solveur HLL ont été comparées entre-elles et avec la solution analytique.

10.4.1 Rupture de barrage sur fond horizontal

Le but de ce cas-test est de vérifier la capacité du solveur Apstat à représenter correctement le déplacement d'une onde et la stabilité d'un point critique en écoulement transitoire. Les frottements sont négligés.

Rupture de barrage sur fond horizontal en eau. La solution analytique calculée selon la méthode décrite dans (Stoker, 1957) est caractérisée par une zone d'état constant séparée des états initiaux par une onde de raréfaction (à gauche) et un choc mobile (à droite). Les paramètres de ce cas-test sont regroupés dans le Tableau 10.1. Les profils de surface libre donnés par les deux solveurs à la date $t = 10$ s, ainsi que le profil analytique, sont présentés à la Figure 10.6.
Les profils donnés par les deux solveurs sont très proches l'un de l'autre et sont également proches du profil analytique. Néanmoins, la position du choc donnée par le solveur Apstat est légèrement plus proche de la position analytique que celle donnée par le solveur HLL.

Rupture de barrage sur fond horizontal sec. La solution analytique est également calculée selon la méthode décrite dans (Stoker, 1957), mais dans ce cas le choc a une amplitude nulle, la zone d'état constant a une largeur nulle et l'onde de raréfaction connecte directement l'état amont à l'état aval. Les paramètres de ce cas-test sont regroupés dans le Tableau 10.2. Les profils de surface libre donnés par les deux solveurs à la date $t = 10$ s, ainsi que le profil analytique, sont présentés à la Figure 10.7.
Comme pour le cas-test précédent, les profils donnés par les deux solveurs sont très proches l'un de l'autre et sont également proches du profil analytique. De même, la

Tableau 10.1 – Paramètres du cas-test « Rupture de barrage sur fond horizontal mouillé ».

Symbole	Signification et unité	Valeur
g	accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	9,81
h_{L}	profondeur initiale du côté gauche du barrage (m)	30
h_{R}	profondeur initiale du côté droit du barrage (m)	1
Δt	pas de temps de calcul (s)	5×10^{-2}
Δx	dimension des cellules (m)	10^{-1}

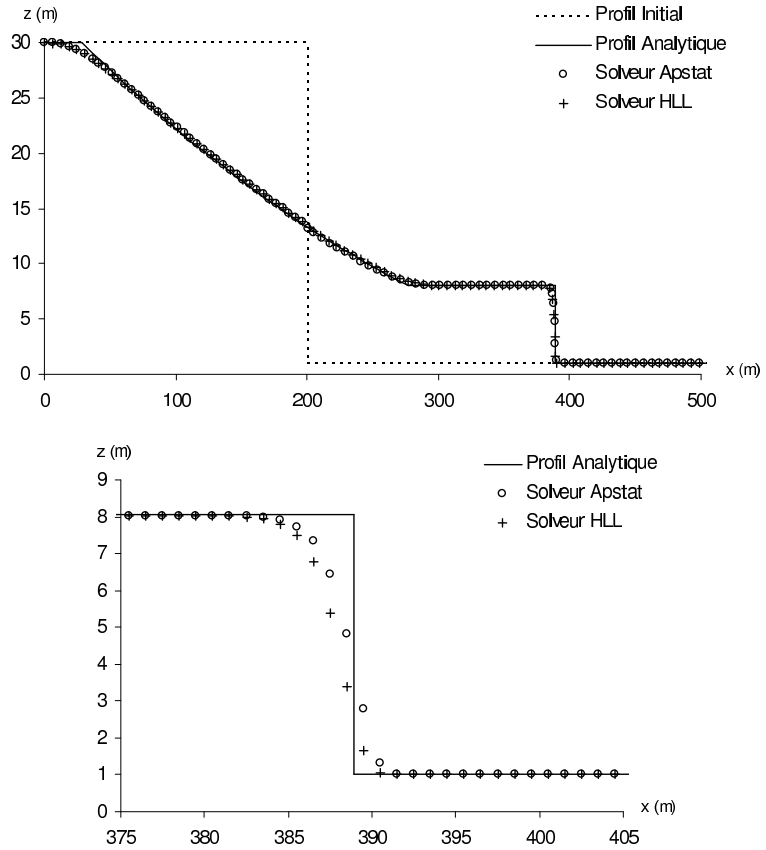


Figure 10.6 – Profil en long de la surface libre pour la rupture de barrage sur fond mouillé à $t = 10$ s (haut) et zoom sur le front avant (bas).

Tableau 10.2 – Paramètres du cas-test « Rupture de barrage sur fond horizontal sec ».

Symbole	Signification et unité	Valeur
g	accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	9,81
h_0	profondeur initiale dans le barrage (m)	30
Δt	pas de temps de calcul (s)	5×10^{-2}
Δx	dimension des cellules (m)	10^{-1}

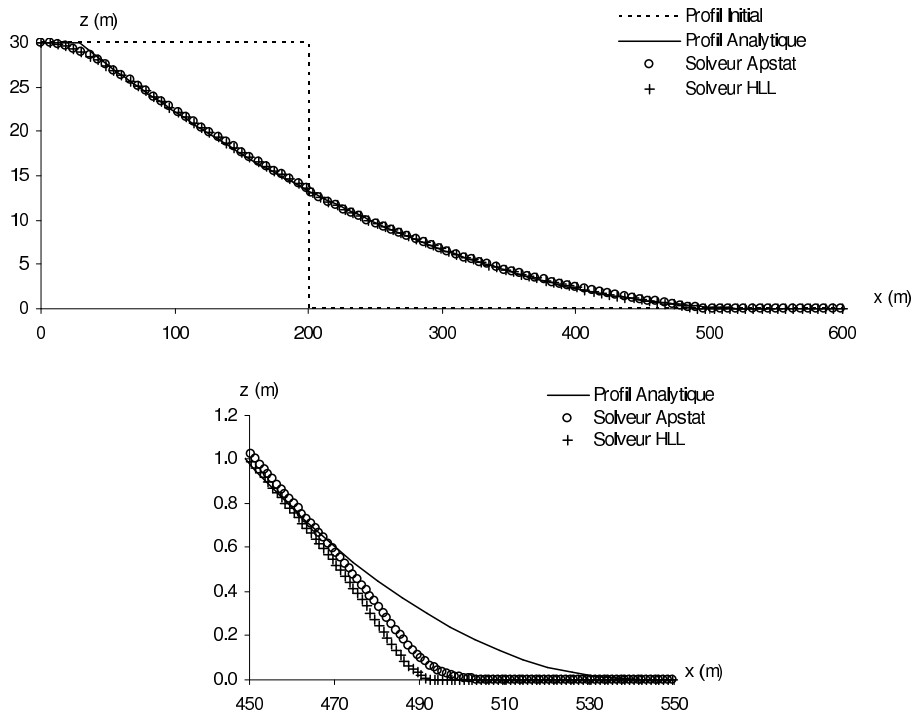


Figure 10.7 – Profil en long de la surface libre pour la rupture de barrage sur fond sec à $t = 10$ s (haut) et zoom sur le front avant (bas).

position du choc donnée par le solveur Apstat est légèrement plus proche de la position analytique que celle donnée par le solveur HLL.

10.4.2 Ressaut hydraulique à l'aval d'un changement de pente

Le but de ce cas-test est vérifier la capacité du solveur Apstat à représenter correctement un écoulement transcritique stationnaire. La pente du fond est constante par morceaux, avec une partie centrale à forte pente et une pente faible dans les parties amont et aval (Tableau 10.3 et Figure 10.8 haut). Les profils de surface libre donnés par les deux solveurs, ainsi que le profil semi-analytique (calculé avec les courbes de remous), sont présentés à la Figure 10.8. Un passage du régime subcritique au régime supercritique se produit au premier changement de pente sous la forme d'une section critique (Figure 10.8 milieu). Un ressaut apparaît à l'aval du deuxième changement de pente (Figure 10.8 bas).
Le solveur Apstat permet d'obtenir un ressaut beaucoup plus raide que le solveur HLL, puisque la transition entre les deux régimes occupe une seule cellule, contre trois pour le solveur HLL. Cette différence de comportement des deux solveurs n'est pas due à

Tableau 10.3 – Paramètres du cas-test « Ressaut hydraulique à l'aval d'un changement de pente ».

Symbole	Signification et unité	Valeur
g	accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	9,81
h	profondeur imposée à la limite aval du domaine (m)	1
K	coefficient de frottement de Strickler ($\mathrm{m^{1/3}s^{-1}}$)	60
q	débit unitaire imposé à la limite amont du domaine ($\mathrm{m^2s^{-1}}$)	1
S_1	pente du fond dans les parties amont et aval du domaine	$3 \cdot 10^{-3}$
S_2	pente du fond dans la partie centrale du domaine	$5 \cdot 10^{-2}$
Δt	pas de temps de calcul (s)	$5 \cdot 10^{-2}$
Δx	dimension des cellules (m)	10^{-1}

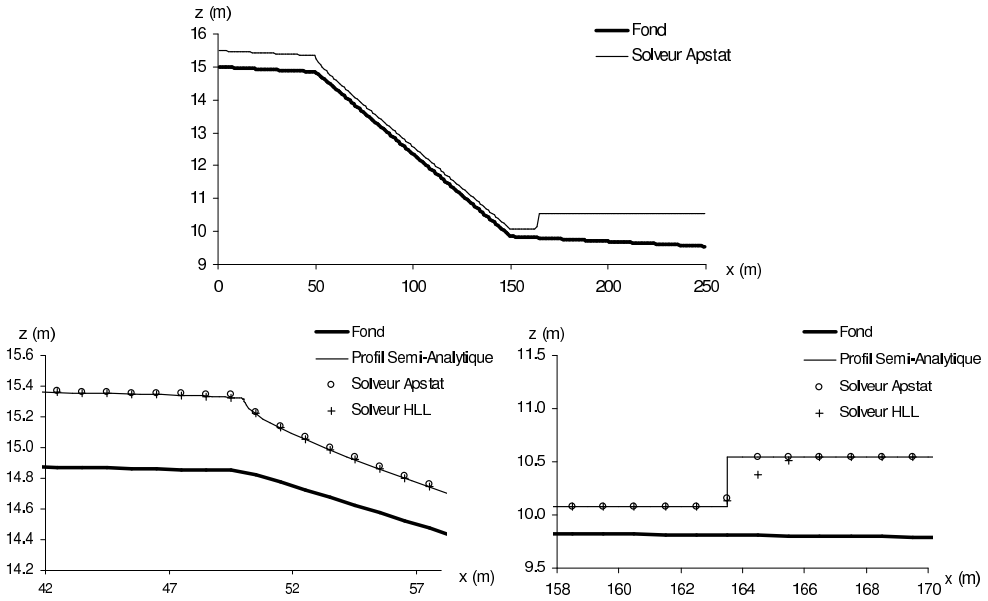


Figure 10.8 – Profil en long de la topographie et de la surface libre (haut), zoom sur le point critique (bas gauche), zoom sur le ressaut hydraulique (bas droite).

une différence d'ordre des solveurs — voir l'analyse de consistance dans l'annexe de (Lhomme et Guinot, 2006b) — mais au traitement de l'équation de continuité qui diffère entre les deux solveurs.

10.4.3 Bosse sur le fond d'un canal horizontal

On simule dans ce cas-test un écoulement permanent dans un canal horizontal où le fond présente localement une bosse. On cherche ici à vérifier la capacité du solveur Apstat à simuler correctement un écoulement dans le cas où le terme source varie dans l'espace. Deux écoulements ont été simulés, un écoulement subcritique et un écoulement transcritique (Tableaux 10.4 et 10.5). La bosse a une forme parabolique. La simulation commence à partir d'un état initial immobile, avec des conditions aux limites imposée, jusqu'à ce que l'état permanent soit atteint. Deux jeux de conditions aux limites différentes permettent d'obtenir les deux écoulements simulés. La solution analytique a été calculée en utilisant l'équation de Bernoulli.
Les profils de surface libre donnés par les deux solveurs ainsi que le profil analytique

Tableau 10.4 – Paramètres du cas-test « Bosse sur le fond d'un canal horizontal, écoulement subcritique ».

Symbole	Signification et unité	Valeur
g	accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	9,81
h_b	hauteur de la bosse (m)	0,2
l_b	largeur de la bosse (m)	4
q	débit unitaire imposé à la limite amont du domaine ($\mathrm{m^2 s^{-1}}$)	4,42
z_0	cote initiale de la surface libre (m)	2
z_d	cote imposée à la limite aval du domaine (m)	2
Δt	pas de temps de calcul (s)	$5 \cdot 10^{-2}$
Δx	dimension des cellules (m)	10^{-1}

sont présentés à la Figure 10.9 pour l'écoulement subcritique et à la Figure 10.10 pour l'écoulement transcritique. Dans les deux cas, les deux solveurs donnent un profil de surface libre correct, mais le solveur Apstat calcule un débit constant au passage de la bosse (ce qui est correct puisque l'écoulement est permanent) alors que le solveur HLL calcule une légère variation de débit.

Pour comprendre l'origine de ces écarts sur les profils de débit unitaire, il faut déterminer

- si le solveur HLL n'arrive pas à calculer correctement le régime permanent à partir d'un état initial "aléatoire", ou
- si le solveur HLL n'est pas capable de calculer correctement un état stationnaire même si la condition initiale est satisfaisante.

Pour répondre, on a procédé à deux simulations supplémentaires avec l'écoulement subcritique. D'une part, on a fait une simulation avec le solveur Apstat en utilisant comme état initial le régime permanent donné par le solveur HLL (Figure 10.11 a). Et inversement, on a fait une simulation avec le solveur HLL en utilisant comme état initial le régime permanent donné par le solveur Apstat (Figure 10.11 b).
Le solveur Apstat retrouve le bon profil de débit unitaire à partir d'un profil initial incorrect, alors que le solveur HLL donne un profil incorrect à partir d'un profil initial correct. Dans les deux cas, le profil de débit unitaire est quasiment stable à partir de $t = 10$ s.

Remarque : Le débit unitaire non uniforme donné par le solveur HLL ne correspond pas à une perte de continuité, puisque le schéma numérique basé sur une formulation en volumes finis ne le permet pas. Quand le régime permanent est atteint, les débits unitaires sont nécessairement égaux à toutes les interfaces du domaine. Cependant, les profils de débit unitaire ont été constitués en utilisant les valeurs de débit des cellules (qui sont les valeurs moyennes du débit unitaire sur chaque cellule) et non pas les débits aux interfaces. Le débit non uniforme donné par le solveur HLL traduit une mauvaise estimation de certains termes dans le bilan de quantité de mouvement plutôt que dans le bilan de masse.

10.5 Conclusions

Un solveur de Riemann a été développé pour le calcul des flux aux interfaces des cellules. Ce solveur d'état approché utilise une structure à deux ondes de raréfaction pour le calcul de la solution. Le flux à l'interface est calculé directement sans calculer la valeur de la variable conservée à l'interface. De plus, l'expression du flux fait intervenir

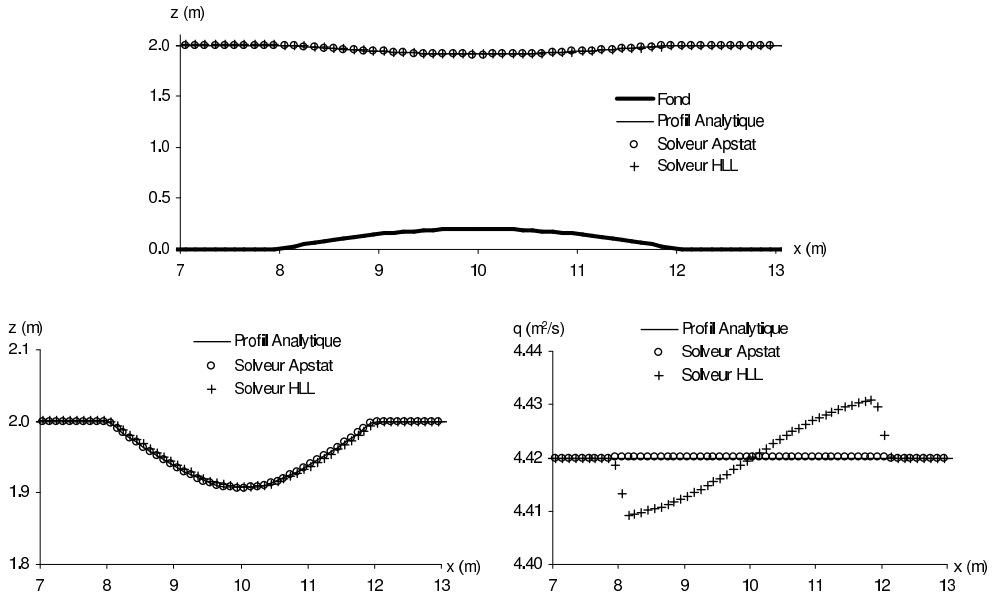


Figure 10.9 – Profil en long de la topographie et de la surface libre (haut), zoom sur la surface libre (bas gauche), zoom sur le profil en long du débit (bas droite).

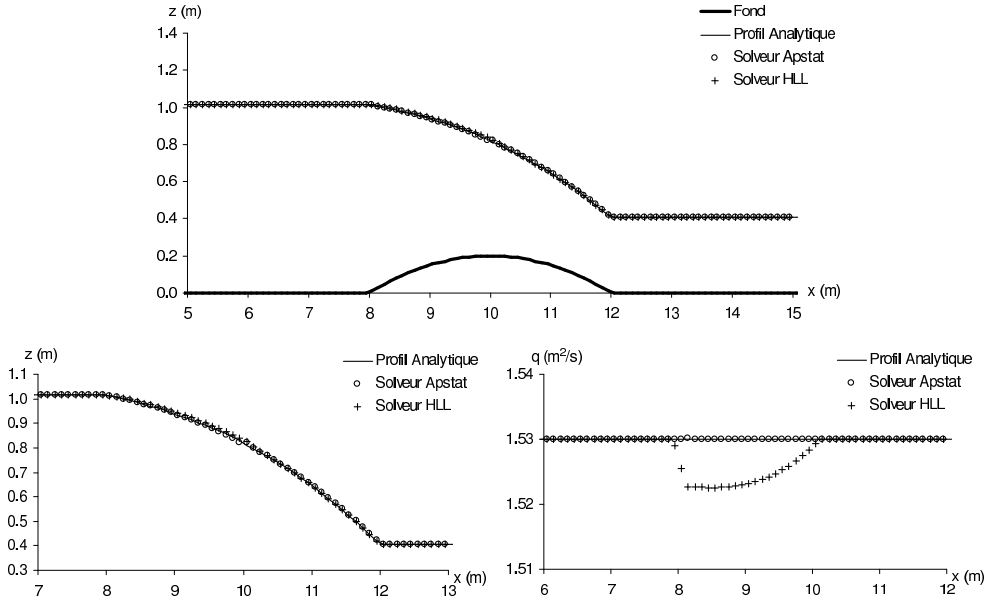


Figure 10.10 – Profil en long de la topographie et de la surface libre (haut), zoom sur la surface libre (bas gauche), zoom sur le profil en long du débit (bas droite).

Tableau 10.5 – Paramètres du cas-test « Bosse sur le fond d'un canal horizontal, écoulement transcritique ».

Symbole	Signification et unité	Valeur
g	accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	9,81
h_b	hauteur de la bosse (m)	0,2
l_b	largeur de la bosse (m)	4
q	débit unitaire imposé à la limite amont du domaine ($\mathrm{m^2s^{-1}}$)	1,53
z_0	cote initiale de la surface libre (m)	0,66
z_d	cote imposée à la limite aval du domaine	aucune
Δt	pas de temps de calcul (s)	$5 \cdot 10^{-2}$
Δx	dimension des cellules (m)	10^{-1}

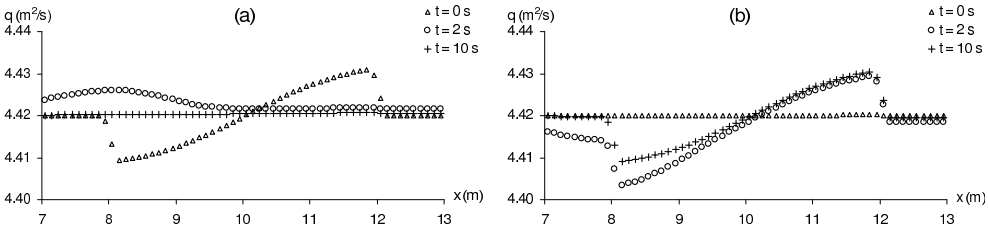


Figure 10.11 – Profil en long du débit obtenu avec le solveur Apstat à partir de l'état stationnaire donné par le solveur HLL (gauche), profil en long du débit obtenu avec le solveur HLL à partir de l'état stationnaire donné par le solveur Apstat (droite).

le terme source géométrique. Ce solveur permet une amélioration du calcul de la ligne d'eau et du débit, en particulier dans le cas de variations brutales de géométrie. Une comparaison avec l'expression du flux calculé par le solveur HLL a montré une similitude partielle entre les deux solveurs. Des applications du solveur à plusieurs situations d'écoulement sont présentées : ressaut hydraulique, rupture de barrage et écoulement au dessus d'une bosse. Ces cas-tests mettent en évidence l'amélioration du calcul de la solution obtenue avec le solveur proposé.

Ce travail peut être poursuivi par l'utilisation du solveur proposé sur des cas-tests bidimensionnels, sur lesquels il serait comparé aux solveurs HLL et HLLC.

Chapitre 11

Un solveur de Riemann approché pour les équations de propagation avec porosité

Sommaire

11.1 Principe du solveur **203**
11.1.1 Forme caractéristique 204
11.1.2 Intégration le long des caractéristiques 204
11.1.3 Estimation du terme source intégré 205
11.2 Calcul des flux à l'interface **205**
11.2.1 Résolution du système 205
11.2.2 Équation de continuité 206
11.2.3 Équation de quantité de mouvement 207

Le solveur d'état approché présenté au Chapitre précédent (solveur Apstat) peut être adapté aux équations « shallow water » avec porosité. Le développement de ce deuxième solveur (appellé solveur Apstat2) est similaire à celui du solveur Apstat mis à part quelques différences dans l'estimation des terme source pour le calcul des flux.

11.1 Principe du solveur

On s'intéresse à la forme unidimensionnelle des équations de propagation (6.82) avec la formulation (7.2) du terme source de perte de charge

$$\frac{\partial\left(\phi\mathbf{U}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\phi\mathbf{F}\right)}{\partial x}=\mathbf{S} \tag{11.1a}$$

avec

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}h\\ uh\\ vh\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}uh\\ u^2h+g\dfrac{h^2}{2}\\ uvh\end{bmatrix}, \tag{11.1b}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\phi h \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{2} g \dfrac{\partial \left(\phi h^2\right)}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.1c}$$

Le terme source de perte de charge $S_{f,x}$ n'apparaît pas puisque l'on se place dans le cas d'un traitement par *time splitting*.

11.1.1 Forme caractéristique

On définit la matrice Jacobienne $\mathbf{A}$ ainsi que ses matrices de valeurs propres $\mathbf{\Lambda}$ et de vecteurs propres $\mathbf{K}$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \left(\phi \mathbf{F}\right)}{\partial \left(\phi \mathbf{U}\right)} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \tag{11.2a}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u-c & 0 & u+c \\ v & 1 & v \end{bmatrix} \tag{11.2b}$$

avec

$$\lambda^{(1)} = u - c, \quad \lambda^{(2)} = u, \quad \lambda^{(3)} = u + c \tag{11.2c}$$

L'expression des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}^{-1}$ est identique à celles du chapitre précédent. On définit la forme différentielle $\mathrm{d}\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathrm{d}\mathbf{F}$ et en procédant comme au §10.2.1, on peut écrire

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}' \tag{11.3}$$

avec $\mathbf{S}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{S}$. Cette équation vectorielle est équivalente au système de 3 équations différentielles indépendantes

$$\frac{\mathrm{d}W_k}{\mathrm{d}t} = \lambda_k S'_k \quad \text{le long de } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda_k \ , \quad k = 1, 2, 3 \tag{11.4}$$

avec

$$\mathrm{d}W_k = \sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} \mathrm{d}F_i \tag{11.5}$$

11.1.2 Intégration le long des caractéristiques

Comme au §10.2.2, on intégre les relations (11.4) le long des caractéristiques entre le point $\mathrm{M}(x_{i+1/2}, t^{n-1/2})$ situé à l'interface et le point $A^{(k)}(x_{\mathrm{A}^{(k)}}, t^n)$ situé au pied de la k-ième caractéristique qui passe par M

$$\int_{\mathrm{A}^{(k)}}^{\mathrm{M}} \sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} \mathrm{d}F_i = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} \tag{11.6}$$

Cette équation peut être récrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} F_{i,\mathrm{M}} = \frac{\Delta t}{2} \lambda_k \overline{S'_k} + \sum_{i=1}^{3} K_{i,k}^{-1} F_{i,k} \ , \quad k = 1, 2, 3 \tag{11.7}$$

11.1.3 Estimation du terme source intégré

Les composantes $\overline{S'_k}$ sont approchées par

$$\overline{S'_k} = -g(\phi h)^{(k)}_{\mathrm{LR}} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\mathrm{LR}} + \frac{g}{2}\left(\frac{\partial\left(\phi h^2\right)}{\partial x}\right)_{\mathrm{LR}} \tag{11.8}$$

avec

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\mathrm{LR}} \approx \frac{z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\frac{2}{\Delta t} \tag{11.9a}$$

$$\left(\frac{\partial\left(\phi h^2\right)}{\partial x}\right)_{\mathrm{LR}} \approx \frac{\left(\phi h^2\right)_{\mathrm{R}} - \left(\phi h^2\right)_{\mathrm{L}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\frac{2}{\Delta t} \tag{11.9b}$$

Le terme $(\phi h)^{(k)}_{\mathrm{LR}}$ sera estimé au §11.2. C'est l'équivalent de la profondeur à l'interface $h^{(k)}_{\mathrm{LR}}$ du solveur Apstat présenté au chapitre précédent.
Les célérités d'ondes $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(3)}$ sont estimées avec les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned}\lambda^{(1)} &= \min\left(u_{\mathrm{L}} - c_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} - c_{\mathrm{R}}\right)\\ \lambda^{(3)} &= \max\left(u_{\mathrm{L}} + c_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} + c_{\mathrm{R}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

11.2 Calcul des flux à l'interface

11.2.1 Résolution du système

En substituant (10.15) dans (11.7), on obtient

$$\left.\begin{aligned}\lambda^{(3)}(F_1^* - F_{1,\mathrm{R}}) - (F_2^* - F_{2,\mathrm{R}}) &= -\lambda^{(1)}\overline{S'_1}\frac{\Delta t}{2}\\ -v(F_1^* - F_{1,\mathrm{A}}) + (F_3^* - F_{3,\mathrm{A}}) &= 0\\ -\lambda^{(1)}(F_1^* - F_{1,\mathrm{L}}) + (F_2^* - F_{2,\mathrm{L}}) &= \lambda^{(3)}\overline{S'_2}\frac{\Delta t}{2}\end{aligned}\right\} \tag{11.11}$$

avec

$$F_{i,\mathrm{A}} = \begin{cases} F_{i,\mathrm{L}} & \text{si } \lambda^{(2)} > 0\\ F_{i,\mathrm{R}} & \text{si } \lambda^{(2)} < 0\end{cases}, \quad i = 1,2,3 \tag{11.12}$$

Les flux F_i^* sont les composantes du flux $\mathbf{F}^*$ dans la zone intermédiaire. Les estimations $(\phi h)^{(1)}_{\mathrm{LR}}$ et $(\phi h)^{(2)}_{\mathrm{LR}}$ sont à priori différentes. Le système (11.11) est résolu pour donner les flux F_i^*

$$\begin{aligned}F_1^* = &\frac{F_{2,\mathrm{L}} - F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)}F_{1,\mathrm{L}} + \lambda^{(3)}F_{1,\mathrm{R}}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\\ &+ \frac{1}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\left[-g(\phi h)^{(1)}_{\mathrm{LR}}\left(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}\right) + \frac{1}{2}g\left((\phi h^2)_{\mathrm{R}} - (\phi h^2)_{\mathrm{L}}\right)\right]\end{aligned} \tag{11.13}$$

$$\begin{aligned}F_2^* = &\frac{\lambda^{(3)}F_{2,\mathrm{L}} - \lambda^{(1)}F_{2,\mathrm{R}} - \lambda^{(1)}\lambda^{(3)}\left(F_{1,\mathrm{L}} - F_{1,\mathrm{R}}\right)}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\\ &+ \frac{\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\left[-g(\phi h)^{(2)}_{\mathrm{LR}}\left(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}\right) + \frac{1}{2}g\left((\phi h^2)_{\mathrm{R}} - (\phi h^2)_{\mathrm{L}}\right)\right]\end{aligned} \tag{11.14}$$

$$F_3^* = \begin{cases} v_{\mathrm{L}}F_1 \text{ si } \lambda^{(2)} > 0\\ v_{\mathrm{R}}F_1 \text{ si } \lambda^{(2)} < 0\end{cases} \tag{11.15}$$

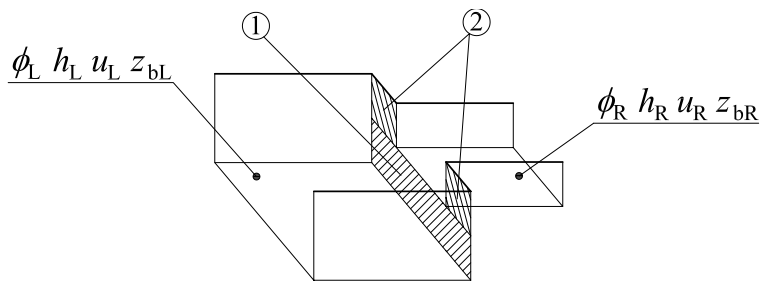


Figure 11.1 – Schéma de l'interface entre deux cellules de cote de fond et de porosité différentes. Ici, $\phi_L > \phi_R$ et $z_{bL} < z_{bR}$.

11.2.2 Équation de continuité

Le terme $(\phi h)^{(1)}_{LR}$ doit être estimé de façon à respecter les conditions d'équilibre. On considère une discontinuité de fond et de porosité, et un écoulement permanent. Le calcul du débit à l'interface doit donner une valeur constante, égale à la valeur imposée aux limites. L'équation (11.13) est récrite

$$F_1^* = \frac{(\phi u^2 h)_L - (\phi u^2 h)_R - \lambda^{(1)}(\phi uh)_L + \lambda^{(3)}(\phi uh)_R - g(\phi h)^{(1)}_{LR}(z_R - z_L)}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \quad (11.16)$$

On considère un volume de contrôle formé de deux cellules L et R (Figure 11.1). Il faut distinguer quatre cas suivant les valeurs respectives de ϕ_L et ϕ_R, et de z_{bL} et z_{bR}, pour écrire le bilan de quantité de mouvement sur ce volume de contrôle. Dans tous les cas, le bilan de masse s'écrit

$$(\phi uh)_L = (\phi uh)_R = q \quad (11.17)$$

Si $z_{bL} < z_{bR}$ et $\phi_L > \phi_R$, la force exercée par la surface n° 1 (cf. Figure 11.1) est égale à

$$-\phi_L g \int_{z_{bL}}^{z_{bR}} (z_L - z)\mathrm{d}z = -\phi_L g\,(z_{bR} - z_{bL})\left[z_L - \frac{z_{bR} + z_{bL}}{2}\right] \quad (11.18)$$

et la force exercée par la surface n° 2 est égale à

$$-(\phi_L - \phi_R)\,g \int_{z_{bR}}^{z_L} (z_L - z)\mathrm{d}z = -g\,(\phi_L - \phi_R)\,\frac{1}{2}\,(z_L - z_{bR})^2 \quad (11.19)$$

On peut donc écrire le bilan de quantité de mouvement sur ce volume de contrôle

$$q(u_L - u_R) + g\left(\phi\frac{h^2}{2}\right)_L - g\left(\phi\frac{h^2}{2}\right)_R - \phi_L g\,(z_{bR} - z_{bL})\left[z_L - \frac{z_{bR} + z_{bL}}{2}\right] - g\,(\phi_L - \phi_R)\,\frac{1}{2}\,(z_L - z_{bR})^2 = 0 \quad (11.20)$$

En raisonnant de la même manière pour les autres cas, on peut écrire trois bilans de quantité de mouvement similaires à (11.20). Les quatre relations de conservation de la quantité de mouvement peuvent être synthétisées en une seule relation

$$q(u_L - u_R) + g\left(\phi\frac{h^2}{2}\right)_L - g\left(\phi\frac{h^2}{2}\right)_R - \phi_A g\,(z_{bL} - z_{bR})\left[z_A - \frac{z_{bR} + z_{bL}}{2}\right] + g\,(\phi_R - \phi_L)\,\frac{1}{2}\,(z_B - \max(z_{bR}, z_{bL}))^2 = 0 \quad (11.21)$$

avec

$$\phi_{\mathrm{A}} = \begin{cases} \phi_{\mathrm{L}} & \text{si } z_{\mathrm{bL}} < z_{\mathrm{bR}} \\ \phi_{\mathrm{R}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{11.22a}$$

$$z_{\mathrm{A}} = \begin{cases} z_{\mathrm{L}} & \text{si } z_{\mathrm{bL}} < z_{\mathrm{bR}} \\ z_{\mathrm{R}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{11.22b}$$

$$z_{\mathrm{B}} = \begin{cases} z_{\mathrm{L}} & \text{si } \phi_{\mathrm{L}} > \phi_{\mathrm{R}} \\ z_{\mathrm{R}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{11.22c}$$

On injecte ensuite (11.17) dans (11.16)

$$F_1^* = q + \frac{q(u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{R}}) - g(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \tag{11.23}$$

Puisque le débit à l'interface doit être égal à q, on doit vérifier la relation suivante

$$g(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}) = q(u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{R}}) \tag{11.24}$$

Cette relation est récrite en utilisant (11.21)

$$\begin{aligned} g(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}) = -g\left(\phi\frac{h^2}{2}\right)_{\mathrm{L}} + g\left(\phi\frac{h^2}{2}\right)_{\mathrm{R}} + \phi_{\mathrm{A}} g\left(z_{\mathrm{bL}} - z_{\mathrm{bR}}\right)\left(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{b,LR}}\right) \\ - g\left(\phi_{\mathrm{R}} - \phi_{\mathrm{L}}\right)\frac{1}{2}\left(z_{\mathrm{B}} - \max\left(z_{\mathrm{bR}}, z_{\mathrm{bL}}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{11.25}$$

où $z_{\mathrm{b,LR}} = (z_{\mathrm{b,R}} + z_{\mathrm{b,L}})/2$ L'équation (11.25) ne permet pas de calculer $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}$ dans le cas où $z_{\mathrm{R}} = z_{\mathrm{L}}$. Ceci n'est pas problématique dans la mesure où c'est le produit $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}})$ qui intervient dans l'équation (11.16), et non pas le terme $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}$ isolé.

En pratique, le flux F_1^* est estimé avec les relations (11.16), (11.25) et (11.22 a–c).

11.2.3 Équation de quantité de mouvement

On écrit le bilan de quantité de mouvement pour une cellule i

$$\begin{aligned} (\phi uh)_i^{n+1} - (\phi uh)_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(F_2)_{i-1/2}^{n+1/2} - (F_2)_{i+1/2}^{n+1/2}\right] \\ + \Delta t\left[(S_i)_{i-1/2}^{n+1/2} + (S_i)_{i+1/2}^{n+1/2}\right] \end{aligned} \tag{11.26}$$

où les termes source S_i sont estimés avec la technique du décentrage amont

$$\left.\begin{aligned} (S_i)_{i-1/2}^{n+1/2} &= \left(\frac{\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\right)_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{1}{\Delta x_i}\left(\Delta S_0\right)_{i-1/2}^{n+1/2} \\ (S_i)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \left(\frac{-\lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{1}{\Delta x_i}\left(\Delta S_0\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

ΔS_0 est la forme intégrale du terme source (11.8)

$$(\Delta S_0)_{i+1/2}^{n+1/2} = -g(\phi h)_{i+1/2}^{(3)}(z_{i+1} - z_i) + \frac{1}{2}g\left[(\phi h^2)_{i+1} - (\phi h^2)_i\right] \tag{11.28}$$

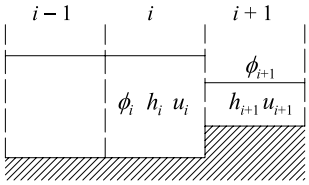


Figure 11.2 – Schéma du volume de contrôleconstitué de trois cellules.

Le terme $(\phi h)_{\mathrm{LR}}$ intervient deux fois dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement :
- $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ dans le calcul de S_i,
- $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ dans le calcul de F_2.

Les estimations $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(2)}$ et $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ sont à priori différentes.

Dans un premier temps, le terme $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ est estimé en considérant deux cellules avec une cote de fond et une porosité différentes. On écrit le bilan de quantité de mouvement sur ces deux cellules.

$$\left(\phi u^2 h + \phi g \frac{h^2}{2}\right)_{\mathrm{L}} - \left(\phi u^2 h + g\phi \frac{h^2}{2}\right)_{\mathrm{R}} + (\Delta S_0)_{\mathrm{LR}} = 0 \tag{11.29}$$

On injecte (11.17) et (11.28) dans (11.29), ce qui permet d'écrire

$$q(u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{R}}) - g(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(3)}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}) = 0 \tag{11.30}$$

On en déduit que $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(3)}$ est égal à $(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(1)}$ et on peut écrire la relation suivante

$$\begin{aligned} g(\phi h)_{\mathrm{LR}}^{(3)}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}) = -g\left(\phi \frac{h^2}{2}\right)_{\mathrm{L}} + g\left(\phi \frac{h^2}{2}\right)_{\mathrm{R}} + \phi_{\mathrm{A}} g\left(z_{\mathrm{bL}} - z_{\mathrm{bR}}\right)\left(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{b,LR}}\right) \\ - g\left(\phi_{\mathrm{R}} - \phi_{\mathrm{L}}\right)\frac{1}{2}\left(z_{\mathrm{B}} - \max\left(z_{\mathrm{bR}}, z_{\mathrm{bL}}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{11.31}$$

Dans un deuxième temps, on considère trois cellules avec une discontinuité de porosité et de fond seulement à un interface (Figure 11.2), et un écoulement en régime permanent. L'équation (11.26) peut être récrite

$$\begin{aligned} (\phi u h)_i^{n+1} - (\phi u h)_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left[F_2 + \frac{\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\Delta S_0\right]_{i-1/2}^{n+1/2} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left[F_2 + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}\Delta S_0\right]_{i+1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \tag{11.32}$$

On calcule séparément chacun des deux termes du membre de droite de l'équation (11.32). L'expression détaillée du premier terme de (11.32) relatif à l'interface $i - 1/2$ est la

suivante

$$\left[F_2 + \frac{\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \Delta S_0\right]_{i-1/2}^{n+1/2} =$$
$$\frac{1}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[\lambda^{(3)} \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_{i-1} - \lambda^{(1)} \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_i\right]$$
$$- \frac{\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[(\phi h u)_{i-1} - (\phi h u)_i\right]$$
$$+ \frac{\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[-g(\phi h)^{(2)}_{i-1/2}(z_i - z_{i-1}) + g\frac{(\phi h^2)_i}{2} - g\frac{(\phi h^2)_{i-1}}{2}\right]$$
$$+ \frac{\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[-g(\phi h)^{(3)}_{i-1/2}(z_i - z_{i-1}) + g\frac{(\phi h^2)_i}{2} - g\frac{(\phi h^2)_{i-1}}{2}\right] \quad (11.33)$$

Seul le terme situé sur la deuxième ligne de l'équation (11.33) est non nul et on peut simplifier cette équation

$$\left[F_2 + \frac{\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \Delta S_0\right]_{i-1/2}^{n+1/2} = \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_i \quad (11.34)$$

L'écriture complète du deuxième terme de (11.32) relatif à l'interface $i+1/2$ est similaire à (11.33) mais les variables de la cellule i ne sont pas égales à celles de la cellule $i+1$.

$$\left[F_2 + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \Delta S_0\right]_{i+1/2}^{n+1/2} =$$
$$\frac{1}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[\lambda^{(3)} \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_i - \lambda^{(1)} \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_{i+1}\right]$$
$$+ \frac{\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[-g(\phi h)^{(2)}_{i+1/2}(z_{i+1} - z_i) + g\frac{(\phi h^2)_{i+1}}{2} - g\frac{(\phi h^2)_i}{2}\right]$$
$$+ \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \left[-g(\phi h)^{(3)}_{i+1/2}(z_{i+1} - z_i) + g\frac{(\phi h^2)_{i+1}}{2} - g\frac{(\phi h^2)_i}{2}\right] \quad (11.35)$$

Pour respecter la condition de régime permanent, le premier membre de l'équation (11.32) doit être nul et donc les relations (11.34) et (11.35) doivent être équivalentes. On en déduit la relation suivante

$$g(\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)})(\phi h)^{(2)}_{i+1/2}(z_{i+1} - z_i) =$$
$$\lambda^{(1)} \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_i - \lambda^{(1)} \left(\phi h u^2 + g\frac{\phi h^2}{2}\right)_{i+1}$$
$$+ \left(\lambda^{(3)} + 2\lambda^{(1)}\right) \left[g\frac{(\phi h^2)_{i+1}}{2} - g\frac{(\phi h^2)_i}{2}\right] - \lambda^{(1)} g(\phi h)^{(3)}_{i+1/2}(z_{i+1} - z_i) \quad (11.36)$$

On injecte (11.30) dans (11.36), ce qui donne

$$g(\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)})(\phi h)^{(2)}_{i+1/2}(z_{i+1} - z_i) = \lambda^{(1)} \left[\left(g\frac{\phi h^2}{2}\right)_i - \left(g\frac{\phi h^2}{2}\right)_{i+1}\right]$$
$$+ \left(\lambda^{(3)} + 2\lambda^{(1)}\right) \left[g\frac{(\phi h^2)_{i+1}}{2} - g\frac{(\phi h^2)_i}{2}\right] \quad (11.37)$$

On simplifie cette équation pour obtenir finalement

$$(z_{i+1} - z_i)(\phi h)^{(2)}_{i+1/2} = \frac{(\phi h^2)_{i+1} - (\phi h^2)_i}{2} \tag{11.38}$$

Comme pour les précédentes estimations de $(\phi h)_{\mathrm{LR}}$, la relation (11.38) ne permet pas de calculer $(\phi h)^{(2)}_{i+1/2}$ à l'équilibre statique mais ceci est sans conséquence puisque c'est le produit $(\phi h)^{(2)}_{\mathrm{LR}}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}})$ qui intervient dans l'équation (11.14).

Remarque : Les tests numériques n'ont pas été réalisés à temps pour figurer dans ce mémoire.

Conclusion générale

Conclusion générale

A partir du constat que la modélisation 2D classique reste à l'heure actuelle difficilement utilisable en pratique pour simuler l'inondation d'un secteur urbain de grande superficie, ce travail de doctorat a été consacré à l'étude de formulations alternatives à la modélisation 2D.

Le premier axe de travail a consisté à étudier des modèles de répartition des débits aux carrefours pour réaliser un couplage avec une modélisation 1D. Cette approche est intéressante car elle permet d'ajuster l'effort de modélisation aux phénomènes observés. La modélisation 1D est adaptée pour représenter l'écoulement dans les rues, qui est essentiellement à caractère 1D, et une modélisation spécifique du carrefour doit permettre de prendre en compte le comportement particulier de cette singularité.

Deux modèles de répartition des débits ont été étudiés. Un modèle conceptuel de carrefour a été développé à partir d'un modèle existant et a été couplé avec un modèle de propagation 1D. La mise en œuvre de cette modélisation sur le quartier Richelieu a donné des résultats intéressants : l'inondation peut être cartographiée et le temps de simulation est beaucoup plus court que celui d'une modélisation 2D. Cependant, l'utilisation de l'onde cinématique pour le transfert ne permet pas à cette modélisation 1D de prendre en compte les influences aval. Celle-ci sera souvent inadaptée pour modéliser l'inondation d'un secteur urbain réel.

Dans le but d'améliorer la représentation des carrefours à quatre branches, une relation empirique de répartition des débits a été développée sous la forme d'un polynôme. Cette relation a été obtenue en utilisant les résultats de simulations 2D d'écoulement sur un certain nombre de carrefours. L'utilisation de cette relation polynomiale sur une série de configurations expérimentales donne des résultats acceptables et montre une amélioration par rapport au modèle conceptuel de carrefour. Une comparaison avec des configurations expérimentales d'angle différent de 90° serait nécessaire pour compléter la validation de cette relation polynomiale. Cette relation a été construite à partir de simulations de carrefours non influencés par l'aval, elle est donc limitée à ce type de situation. Elle n'est pas adaptée au cas de zones urbaines à faible pente et au cas de carrefours successifs rapprochés. Ce travail devrait être complété par une étude équivalente consacrée aux carrefours à trois branches pour pouvoir être utilisé dans le cadre d'une modélisation d'un réseau de rues. De même, il faudrait s'intéresser à un carrefour à 4 branches avec 1 entrée et 3 sorties (voire à un carrefour à 5 branches) pour pouvoir traiter tous les cas possibles. Le rôle des influences aval sur la répartition des débits pourrait être étudié en suivant la même démarche, mais le nombre de configurations à traiter serait considérable.

Cette approche couplée entre modèle de répartition et modèle de propagation semble donc limitée au cas de réseaux de voirie présentant une géométrie simple.

Le deuxième axe de travail a été consacré à l'étude de la modélisation 2D macroscopique. L'approche 2D permet une meilleur prise en compte des variations spatiales de l'écoulement par rapport à l'approche 1D, mais le système d'équations « shallow wa-

ter » est modifié dans le but de prendre en compte les caractéristiques du milieu urbain, sans devoir décrire finement la géométrie. Une porosité est introduite dans les équations de propagation pour représenter la réduction de l'espace disponible pour l'écoulement. Les équations de propagation avec porosité de stockage et porosité de passage ont été présentées, mais l'implantation informatique de cette approche macroscopique est pour l'instant limitée aux équations de propagation avec porosité unique. L'implantation des équations de propagation avec porosité de stockage et porosité de passage constitue une importante perspective pour la poursuite du travail sur la modélisation macroscopique.

En plus de la porosité, il est nécessaire d'introduire dans les équations de propagation un terme de perte de charge supplémentaire pour représenter les pertes de charge singulières qui se produisent au niveau des carrefours. Ce terme de perte de charge a été relié aux caractéristiques géométriques du réseau de rues et une relation de prédétermination du tenseur de perte de charge est proposée sous la forme d'un polynôme. Ceci permet d'utiliser la modélisation macroscopique sans calage préalable. Le nombre limité de termes dans le polynôme implique que certaines variations des composantes du tenseur sont mal reproduites, en particulier quand plusieurs paramètres géométriques sont simultanément différents de leurs valeurs de référence. La recherche de fonctions non polynomiales pour l'expression des termes du tenseur peut constituer une piste de recherche pour améliorer la prédétermination du tenseur de perte de charge.

La modélisation macroscopique a été mise en œuvre sur des cas-tests expérimentaux faisant appel à des modèles réduits, de même que le modélisation 2D classique. Une campagne de mesures de profondeur et de vitesses de surface a été réalisée en partenariat avec l'UCL pour constituer un important jeu de données de validation. Sur l'ensemble des configurations simulées, la modélisation 2D classique fournit des résultats très proches des mesures expérimentales, aussi bien pour les profondeurs que pour les vitesses, quelle que soit l'échelle considérée. La modélisation 2D macroscopique permet de reproduire les principales caractéristiques de l'écoulement : pente moyenne de la surface libre à travers la zone urbaine, forme du champ de vitesse à l'extérieur de la zone urbaine. Cette validation illustre les utilisations possibles de la modélisation 2D macroscopique : dans le cas d'une zone d'étude de grande superficie, dont une partie est urbanisée,

- fournir des conditions aux limites pour ensuite faire une simulation détaillée de la zone urbaine,
- modéliser correctement l'inondation de la zone d'étude alors que la zone urbaine influence l'écoulement, sans que l'on ne s'intéresse en détail à l'inondation de la zone urbaine.

Les configurations expérimentales de zone urbaine présentaient des directions principales alignées sur les axes du repère local. La validation de la modélisation macroscopique devra être complétée par l'étude d'un réseau de blocs non alignés sur le repère local.

Une perspective de recherche concernant la modélisation 2D macroscopique consisterait à améliorer le post-traitement des résultats de simulation, afin d'éviter de faire appel à une modélisation 2D classique avec maillage fin pour obtenir des résultats locaux, dans le cas de réseaux de rues simples. Une autre perspective est l'étude de réseaux de rues non homogènes, où une des rues aurait une capacité de transit beaucoup plus importante que les autres rues, ce qui est souvent le cas dans les zones urbaines.

Le troisième axe de travail a été consacré au développement de techniques numériques pour la résolution des équations de propagation avec termes source. Un solveur de Riemann d'état approché a été développé pour les équations bidimensionnelles classiques, en utilisant l'hypothèse d'une structure de la solution à deux ondes de raréfaction. Les invariants de Riemann sont exprimés en fonction des flux et le flux à l'interface

est calculé directement, en tenant compte des termes source. Les résultats de simulations montrent une nette amélioration par rapport à un solveur classique. La principale perspective de travail sur ce solveur consiste à vérifier son bon fonctionnement sur des cas-test numériques de type 2D.

Une deuxième version de ce solveur de Riemann a été développée selon la même approche pour les équations de propagation avec porosité. La mise en œuvre de ce solveur sur des cas-test numériques n'a pas été réalisée et constitue une autre perspective de recherche.

Bibliographie

Al Mikdad, O. (2000). *Modélisation des écoulements à surface libre en réseaux maillés et ramifiés.* Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne.

Alcrudo, F. et Benkhaldoun, F. (2001). Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step. *Computers and Fluids*, **30**, 643–671.

Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P., Brufau, P., Murillo, J., Garcia, D., Mulet, J., Testa, G. et Zuccala, D. (2002). The model city flooding experiment. *In : 2nd Project Workshop, Mo i Rana, Norway.* EC Contract EVG1-CT-2001-00037 Impact investigation of extreme flood processes and uncertainty.

Ambroise, B. (1998). *La dynamique du cycle de l'eau dans un bassin versant – Processus, Facteurs, Modèles.* HGA, Bucarest.

Bates, P.-D. et De Roo, A.-P.-J. (2000). A simple raster-based model for flood inundation simulation. *Journal of Hydrology*, **236**, 54–77.

BCEOM, Météo France et CS-SI. (2004). *Espada, Evaluation et suivi des pluies en Agglomération pour devancer l'alerte.*

Bentura, P.-L.-F. et Michel, C. (1997). Flood routing in a wide channel with a quadratic lag-and-route method. *Hydrological Sciences*, **42(2)**, 169–185.

Bermudez, A. et Vasquez-Cendron, E. (1994). Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers and Fluids*, **23**, 1049–1071.

Bertrand, O., Walther, R., David, E., Hamm, L. et Guilbaud, C. (2006). Management of the Loire Estuary - 3D Versus 2D Hydrodynamic Modelling. *In : Proceedings 7th International Conference on Hydroinformatics.* Nice, France.

Bouvier, C. et Delclaux, F. (1996). ATHYS : a hydrological environment for spatial modelling and coupling with a GIS. *In : Proceedings HydroGIS '96, IAHS publication n 235.* Vienna, Austria.

Bouvier, C. et Hingray, B. (2001). Modélisation des flux inondants dans les voiries d'un secteur urbain de Ouagadougou, Burkina-Faso. *In : Proceedings Novatech 2001.* Lyon, France.

Bouvier, C., Fuentes Mariles, G. et Dominguez Mora, R. (1994). MERCEDES, un modèle hydrologique d'analyse et de prévision de crues en milieu hétérogène. *In : 23è Journées de l'Hydraulique - Congrès de la SHF.* Nîmes, France.

Cappelaere, B., Vieux, B., Peugeot, C., Maia-Bresson, A. et Seguis, L. (2003). Hydrologic process simulation of a semiarid, endoreic catchment in Sahelian West Niger. 2. Model calibration and uncertainty characterization. *Journal of Hydrology*, **279**, 244–261.

Caquot, A. (1941). Ecoulement des eaux pluviales. *In : Compte-rendu à l'Académie des Sciences de Paris.*

Chocat, B. (1997). *Encyclopédie de l'hydrologie urbaine et de l'assainissement.* Lavoisier. Ouvrage collectif coordonné par B. Chocat, Association Eurydice 92.

Chocat, B. et Cabane, P. (1999). Hydrologie urbaine : modélisation et effet d'échelle. *In : Crues de la normale à l'extrème, 160e session du Comité Scientifique et Technique de la SHF.*

Cogez, C., Perez, I et Chaumeau, F. (1994). Le risque inondation en ville lors de fortes pluies : le situer, le quantifier, le faire connaître. *In : Crues et Inondations, 23e Journées de l'Hydraulique, Congrès de la Société Hydrotechnique de France.*

Cunge, J.-A., Holly, F.-M. et Verwey, A. (1980). *Practicals aspects of computational hydraulics.* Pitman.

Daubert, A. et Graffe, O. (1967). Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non-permanents. Applications aux estuaires. *La Houille Blanche*, **8**, 847–860.

Davis, S.-F. (1988). Simplified second-order Godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **9**, 445–473.

Defina, A., D'Alpaos, L. et Mattichio, B. (1994). A new set of equations for very shallow water and partially dry areas suitable to 2D numerical domains. *In : Proceedings Specialty conference 'Modelling of Flood Propagation over Initially Dry Areas'.* Milano, Italy.

Desbordes, M. (1974). *Réflexion sur les méthodes de calcul des réseaux urbains d'assainissement.* Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc.

Desbordes, M. (1987). *Contribution à l'analyse et à la modélisation des mécanismes hydrologiques en milieu urbain.* Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc. (Thèse d'Etat).

Desbordes, M., Durepaire, P., Gilly, J.-C., Masson, J.-M. et Maurin, Y. (1989). *3 Octobre 1988, inondations sur Nîmes et sa région.* Editions Lacour.

Deswijsen, J.-F. et Duthoit, A. (2005). *Écoulement consécutif à une rupture de barrage en milieu urbain idéalisé : étude expérimentale et numérique.* Travail de Fin d'Études, Université Catholique de Louvain.

Diskin, M.-H. (1994). A rational routing element for watershed cell models. *Journal of Hydrology*, **155**, 93–101.

Dooge, J.-C.-I. (1959). A general theory of the Unit Hydrograph. *Journal of Geophysical Research*, **64(2)**, 241–256.

Dukowicz, J.-K. (1985). A general, non-iterative Riemann solver for Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, **61**, 119–137.

Einfeldt, B. (1988). On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **25(2)**, 294–318.

Erduran, K.-S., Kutija, V. et Hewett, J.-M. (2002). Performance of finite volume solutions to the shallow water equations with shock-capturing schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **40**, 1237–1273.

Gallouët, T., Herard, J.-M. et Seguin, N. (2003). Some approximate Godunov schemes to compute shallow water equations with topography. *Computers and Fluids*, **32**, 479–513.

Gaume, E. (2005). *Hydrologie de versants et de bassins versants et modélisation pluie-débit.* Notes de cours, ENPC.

Godunov, S.-K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamic equations (en russe). *Matematicheskii Sbornik*, **47**, 271–300.

Greenberg, J.-M. et Le Roux, A.-Y. (1996). A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **33(1)**, 1–16.

Guinot, V. (2000). Riemann solvers for water hammer simulations by Godunov method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**, 851–870.

Guinot, V. (2003). *Godunov-type schemes, an introduction for engineers.* Elsevier.

Guinot, V. (2006). *SW2D (v2.2) User manual, module and data structure, formulation and algorithms, verification manual.* Rapport technique. Laboratoire HydroSciences Montpellier.

Guinot, V. et Cappelaere, B. (2005). *Méthodes Numériques Appliquées, Résolution numérique des équations différentielles de l'ingénieur.* Notes de cours Polytech'Montpellier STE2.

Guinot, V. et Soares-Frazão, S. (2006). Flux and source term discretization in two-dimensional shallow water models with porosity on unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**, 309–345.

Guiton, M. (1994). Inondations, destructions et protections : ruissellement et risque majeur – Cas d'application : Nîmes et Vaison-la-Romaine. *In : Crues et Inondations, 23e Journées de l'Hydraulique, Congrès de la Société Hydrotechnique de France.*

Haider, S., Paquier, A., Morel, R. et Champagne, J.-Y. (2003). Urban flood modelling using computational fluid dynamics. *Water and Maritime Engineering*, **156**, 1–8.

Harten, A. et Hyman, P. (1983). Self-adjusting grid methods for one-dimensionnal hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, **50**, 235 – 269.

Harten, A., Lax, P.-D. et Van Leer, B. (1983). On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, **50**, 235–269.

Hervouet, J.-M., Samie, R. et Moreau, B. (2000). Modelling urban areas in dam-break flood-wave numerical simulations. *In : Proceedings International seminar and workshop on rescue actions based on dambreak flow analysis.* Seinâjoki, Finland.

Hsu, C.-C, Tang, C.-J., Lee, W.-J. et Shieh, M.-Y. (2002). Subcritical 90° Equal-Width Open-Channel Dividing Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, **128(7)**, 716–720.

Hsu, M.-H., Chen, S.-H. et Chang, T.-J. (2000). Inundation simulation for urban drainage basin with storm sewer system. *Journal of Hydrology*, **234**, 21–37.

Hu, H., Guo, J. et Shen, Y. (1999). An urban flood dynamic simulation model with GIS. *In : Proceedings XXVII IAHR Congress.* Graz, Austria.

James, C.S. (1994). Evaluation of methods for predicting bend loss in meandering channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, **120**, 245–253.

Jeffrey, A. et Taniuti, T. (1964). *Non-linear wave propagation.* Academic Press.

Khan, A.-A., Cadavid, R. et Wang, S.-S.-Y. (2000). Simulation of channel confluence and bifurcation using the CCHE2D model. *Water and Maritime Engineering*, **142**, 97–102.

Kim, G. et Barros, A.-P. (2001). Quantitative flood forecasting using multisensor data and neural network. *Journal of Hydrology*, **246**, 45–62.

Lakshmana Rao, N.S. et Sridharan, K. (1967). Division of flow in open channels. *Journal of the Central Board of Irrigation and Power*, 393–407. (India).

Lax, P.-D. (1957). Hyperbolic systems of conservation laws II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **10**, 537–566.

Lee, D.-H. (2006). Research on Flow Characteristics of Side Weirs using Flow-3D. *In : Proceedings 7th International Conference on Hydroinformatics.* Nice, France.

LeVeque, R.-J. (1992). *Numerical methods for conservation laws.* Birkhäuser Verlag.

LeVeque, R.-J. (1998). Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods. *Journal of Computational Physics*, **146**, 346–365.

LeVeque, R.-J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems.* Cambridge University Press.

Lhomme, J. et Guinot, V. (2006a). An Approximate-State Riemann Solver for the Shallow Water equations. *Proceedings 7th International Conference on Hydroinformatics (Nice, France)*, **1**, 417–424.

Lhomme, J. et Guinot, V. (2006b). A General Approximate-State Riemann Solver for Hyperbolic Systems of Conservation Laws with Source Terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* A paraître.

Lhomme, J., Bouvier, C. et Perrin, J.-L. (2004). Applying a GIS–based geomorphological routing model in urban catchments. *Journal of Hydrology*, **299**, 203–216.

Lhomme, J., Soares-Frazão, S., Guinot, V. et Zech, Y. (2006a). Large-scale urban floods modelling and two-dimensional shallow water models with porosity. *Proceedings 7th International Conference on Hydroinformatics (Nice, France)*, **1**, 385–392.

Lhomme, J., Bouvier, C., Mignot, E. et Paquier, A. (2006b). One-dimensional GIS-based model compared to two-dimensional model in urban floods simulation. *Water Science & Technology*, **54(6-7)**, 83–91.

Linde, T. (2002). A practical, general-purpose, two-state HLL Riemann solver for hyperbolic conservation laws. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **40**, 391–402.

Maidment, D.-R. (1993). *Handbook of Hydrology.* McGraw-Hill.

Makhanov, S.-S., Vannakrairojn, S. et Vanderperre, E.-J. (1999). 2D numerical model of flooding in East Bangkok. *Journal of Hydraulic Engineering*, **125(4)**, 407–414.

Mark, O., Weesakul, S., Apirumanekul, C., Aroonnet, S.-B. et Djordjevic, S. (2004). Potential and limitations of 1D modelling of urban flooding. *Journal of Hydrology*, **299**, 284–299.

Mignot, E. (2005). *Etude expérimentale et numérique de l'inondation d'une zone urbanisée : cas des écoulement dans les carrefours en croix.* Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon - Cemagref.

Mignot, E., Rivière, N., Perkins, R. et Paquier, A. (2005). Flow structure at the junction of four supercritical channel flows. *In : Proceedings of the 10th International Conference on Urban Drainage.* Copenhagen, Denmark.

Mignot, E., Paquier, A. et Haider, S. (2006). Modeling floods in a dense urban area using 2D shallow water equations. *Journal of Hydrology*, **327**, 186–199.

Moniot, F. (1983). Deux paramètres pour caractériser le réseau hydrographique. *Cahiers de l'ORSTOM, série Hydrologie*, **20**, 191–204.

Morena, F. (2004). *Modélisation hydrologique distribuée en milieu urbanisé – Représentation des processus de production et développement du modèle URBS.* Thèse de Doctorat, INPG.

Motiee, H., Chocat, B. et Blanpain, O. (1996). A storage model for the simulation of the hydraulic behaviour of drainage networks. *In : Proceedings of the 7th International Conference on Urban Strom Drainage.* Hannover, Germany.

Mulvaney, T.-J. (1851). On the use of self-registering rain and flood gauges in making observations of the relation of rainfall and floods discharges in a given catchment. *In : Proceedings of the Civil Engineers of Ireland.*

Nania, L.-S., Gomez, M. et Dolz, J. (2004). Experimental study of the dividing flow in steep street crossings. *Journal of Hydraulic Research*, **42(4)**, 406–412.

Nash, J.-E. (1957). The Form of the Instantaneous Unit Hydrograph. *International Association of Scientific Hydrologists Publication*, **42(3)**, 114–118.

Neary, V.-S., Sotiropoulos, F. et Odgaard, A.J. (1999). Three-dimensional numerical model of lateral-intake inflows. *Journal of Hydraulic Engineering*, **125(2)**, 126–140.

Nougaro, J. et Boyer, P. (1974). Sur la séparation des eaux dans les dérivations de canaux à sections rectangulaire. *La Houille Blanche*, **3**, 199–203.

Nujic, M. (1995). Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research*, **33(1)**, 101–111.

Oliveira, F. et Maidment, D.-R. (1999). Geographic information systems (GIS)–based spatially distributed model for runoff routing. *Water Resources Research*, **35(4)**, 1155–1164.

Osher, S. et Solomon, F. (1982). Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Mathematics of Computation*, **38**, 339–374.

Paquier, A., Tanguy, J.-M., Haider, S. et Zhang, B. (2003). Estimation des niveaux d'inondation pour une crue éclair en milieu urbain : comparaison de deux modèles hydrodynamiques sur la crue de Nîmes d'octobre 1988. *Revue des Sciences de l'Eau*, **16**, 79–102.

Pereira Filho, A.-J. et Dos Santos, C.-C. (2006). Modeling a densely urbanized watershed with an artificial neural network, weather radar and telemetric data. *Journal of Hydrology*, **317**, 31–48.

Ramamurthy, A.S. et Satish, M.G. (1974). Division of flow in short open channel branches. *Journal of Hydraulic Engineering*, **114(4)**, 428–438.

Ramamurthy, A.S., Tran, D.C. et Carballada, L.B. (1990). Dividing flow in open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, **116(3)**, 449–455.

Ramamurthy, A.S., Zhu, W. et L.B., Carballada. (1996). Dividing rectangular closed conduit flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, **122(12)**, 687–691.

Rivière, N. et Perkins, R. (2004). Supercritical flow in channel intersections. *In : Proceedings of the 2nd International Conference on Fluvial Hydraulics, River Flow 2004*. Napoli, Italy.

Rivière, N., Perkins, R. et Mignot, E. (2005). Flow in a four branch channel intersection – A comparative study of subcritical and supercritical regimes. *In : Proceedings of the XXXI IAHR Congress*. Seoul, Korea.

Rodriguez, F., Andrieu, H. et Zech, Y. (2000). Evaluation of a distributed model for urban catchments using a 7–year continuous data series. *Hydrological Processes*, **14**, 899–914.

Roe, P.-L. (1981). Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference scheme. *Journal of Computational Physics*, **43**, 357–372.

Schmitt, T.-G., Thomas, M. et Ettrich, N. (2004). Analysis and modeling of flooding in urban drainage systems. *Journal of Hydrology*, **299**, 300–311.

Sherman, L.-K. (1932). Stream flow from rainfall by the unit graph method. *Engineering News Records*, **108**, 501–505.

Shettar, A.-S. et Murthy, K.-K. (1996). A numerical study of division of flow in open channels. *Journal of Hydraulic Research*, **34(5)**, 651–675.

Soares-Frazão, S., Lhomme, J., Guinot, V. et Zech, Y. (2006). Two-dimensional shallow water model with porosity for urban flood modelling. *Soumis à Journal of Hydraulic Research*.

Spinewine, B., Capart, H., Larcher, M. et Zech, Y. (2003). Three-dimensional Voronoï imaging methods for the measurement of near-wall particulate flows. *Experiments in Fluids*, **34**, 227–241.

Sridharan, K. et Lakshmana Rao, N.S. (1966). Division and combination of flow in open channels. *Journal of the Institution of Engineers*, **46(7)**, 337–356. (Journal indien).

Stoker, J.-J. (1957). *Water waves*. Interscience.

Testa, G., Zuccalà, D., Alcrudo, F. et Mulet, J. (2006). Dam-break flow experiment in a simplified urban district. *Soumis à Journal of Hydraulic Research*.

Toro, E.-F. (1991). A linearised Riemann solver for the time-dependent Euler equations of gas dynamics. *Proceedings of the Royal Society London*, **A-434**, 683–693.

Toro, E.-F. (1997). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics.* Springer.

Toro, E.-F., Spruce, M. et Speares, W. (1994). Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, **4**, 25–34.

Vieux, B. et Gauer, N. (1994). Finite-element modeling of storm water runoff using GRASS GIS. *Microcomputers in Civil Engineering*, **9**, 263–270.

Whitham, G.-B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley.

Zech, Y., Sillen, X., Djeufa, S. et Pahaut, T. (1993). Rainfall–runoff modelling of partly urbanised watersheds. Comparison between a distributed model using GIS and other models. *In : Proceedings of the 6th International Conference on Urban Strom Drainage*, Vol. 2.

Zoppou, C. et Roberts, S. (1999). Catastrophic collapse of water supply reservoirs in urban areas. *Journal of Hydraulic Engineering*, **125(7)**, 686–695.

Sixième partie

Annexes

Annexe A

Schémas numériques de type Godunov

Sommaire

A.1 Discrétisation en volumes finis 228
A.2 Présentation de l'algorithme type 229
A.3 Propriétés des équations de conservation scalaires . . . 230
A.3.1 La forme caractéristique. 230
A.3.2 Construction de la solution avec la forme caractéristique. . 231
A.3.3 Choc, onde de raréfaction et discontinuité de contact. . . . 231
A.3.4 Méthode de l'égalité des aires pour les solutions discontinues. 232
A.3.5 Relation de saut au travers d'une discontinuité. 233
A.4 Propriétés des systèmes hyperboliques de conservation 233
A.4.1 Forme caractéristique 234
A.4.2 Invariants de Riemann 235
A.5 Le problème de Riemann 236
A.5.1 Les différents types de problèmes de Riemann 236
A.5.2 Résolution du problème de Riemann pour une équation scalaire 237
A.5.3 Résolution du problème de Riemann pour les équations de propagation en eau peu profonde avec porosité 239
A.5.4 Solveurs exacts et solveurs approchés 244
A.5.5 Solveurs de Riemann et termes source 245
A.6 Le solveur de Riemann HLL/HLLC 245
A.6.1 Le solveur HLL 245
A.6.2 Le solveur HLLC 246
A.6.3 Estimation des célérités d'onde 248
A.7 Utilisation des flux du solveur HLLC 249
A.7.1 Équation de continuité 249
A.7.2 Bilan de quantité de mouvement 250
A.8 Traitement du terme source de frottement 252
A.9 Conditions de stabilité et conditions aux limites 253
A.9.1 Conditions de stabilité 253
A.9.2 Conditions aux limites 254

De façon générale, un algorithme de type Godunov est une méthode conservative de résolution de systèmes hyperboliques (Godunov, 1959), permettant de représenter les chocs de façon satisfaisante. Le domaine considéré est découpé en un certain nombre de volumes de contrôle et un problème de Riemann est calculé à chaque interface entre deux volumes de contrôle, ce qui permet ensuite de calculer les flux de masse et de quantité de mouvement (Toro, 1997; LeVeque, 2002; Guinot, 2003). Cette méthode de discrétisation sera appelée « méthode des volumes finis » plusieurs années après la publication de Godunov (1959).

Le code de calcul utilisé durant cette thèse pour mener les simulations numériques, nommé SW2D (pour *Shallow Water* 2D) résout les équations de propagation d'ondes en eaux peu profondes en deux dimensions avec porosité au moyen d'un algorithme de type Godunov (Guinot, 2006).

Cette annexe est consacrée à la présentation des différentes caractéristiques d'un algorithme de type Godunov à travers la présentation du code de calcul SW2D.

A.1 Discrétisation en volumes finis

Une caractéristique fondamentale des schémas numériques de type Godunov est de discrétiser la forme conservative des équations « shallow water » avec une méthode aux volumes finis. Ceci permet d'avoir un algorithme traitant correctement des solutions continues et discontinues, sans nécessiter de traitement spécifique des discontinuités (il n'y a pas besoin de faire appel à une méthode de capture de chocs).

L'équation (6.82) est discrétisée en utilisant la méthode des volumes finis. Dans cette méthode, on intègre l'équation aux dérivées partielles sur un domaine subdivisé en un certain nombre de surfaces. Ces surfaces sont des polygones de forme quelconque et forment un maillage non structuré (Figure A.1). Suite à l'intégration des variables de l'écoulement sur les surfaces, on dispose d'un ensemble de valeurs moyennes affectées aux surfaces ou cellules. Ceci différencie la méthode des volumes finis des méthodes aux différences finies ou aux éléments finis où les variables de l'écoulement sont calculées sur un réseau de points.

On récrit la forme intégrale (6.34) des équations de propagation avec une porosité unique, en considérant que les variables de l'écoulement sont constantes à l'intérieur de chaque cellule

$$A_i\phi_i\left(\mathbf{U}_i^{n+1}-\mathbf{U}_i^n\right)+\Delta t\sum_{j\in N(i)}\mathbf{P}_{i,j}\left(\phi\mathbf{F}\right)_{i,j}^{n+1/2}w_{i,j}=\Delta t A_i\mathbf{S}_i^{n+1/2} \tag{A.1}$$

où $\mathbf{U}_i^n$ est la valeur moyenne de $\mathbf{U}$ sur la cellule i au temps n, $(\phi\mathbf{F})_{i,j}^{n+1/2}$ est la valeur moyenne du flux dans la direction perpendiculaire à l'interface (i,j) entre les instants n et $n+1$, A_i est la surface de la cellule i, h_i est la hauteur d'eau moyenne dans la cellule i, ϕ_i est la porosité de la cellule i, $N(i)$ est le nombre d'interfaces de la cellule i, $\mathbf{P}_{i,j}$ est la matrice de passage du système de coordonnées attaché à l'interface (ξ,ψ) vers le système de coordonnées global (x,y) (Figure A.2), $w_{i,j}$ est la largeur de l'interface (i,j), $\mathbf{S}_i^{n+1/2}$ est la valeur moyenne du terme source $\mathbf{S}$ sur la cellule i entre les instants n et $n+1$, Δt est le pas de temps de calcul. Cette équation est récrite pour calculer la solution au temps $n+1$

$$\mathbf{U}_i^{n+1}=\mathbf{U}_i^n-\frac{\Delta t}{\phi_i A_i}\sum_{j\in N(i)}\left(\mathbf{P}_{i,j}\left(\phi\mathbf{F}\right)_{i,j}^{n+1/2}w_{i,j}\right)+\frac{\Delta t}{\phi_i}\mathbf{S}_i^{n+1/2} \tag{A.2}$$

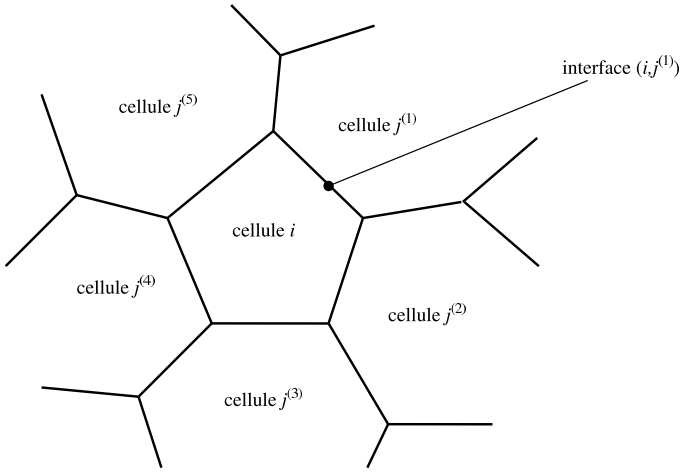


Figure A.1 – Schéma du maillage.

La matrice de passage $\mathbf{P}_{i,j}$ s'exprime

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{i,j}^{(x)} & -n_{i,j}^{(y)} \\ 0 & n_{i,j}^{(y)} & n_{i,j}^{(x)} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

où $n_{i,j}^{(x)}$ et $n_{i,j}^{(y)}$ sont respectivement les composantes selon x et y du vecteur normal à l'interface (i,j) (orienté positivement de i vers j).

Remarque : La forme unidimensionnelle de l'équation de propagation (6.82) s'écrit (dans la direction normale à l'interface)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi \mathbf{F}) = \mathbf{S} \tag{A.4}$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + g\dfrac{h^2}{2} \\ uvh \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

et

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\phi h \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{g}{2}\dfrac{\partial\left(\phi h^2\right)}{\partial x} - g\phi h S_{f,x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

A.2 Présentation de l'algorithme type

La résolution de l'équation (6.82) est basée sur la méthode des pas fractionnaires ou *time splitting*, c'est-à-dire que la partie conservative plus les termes source géomé-

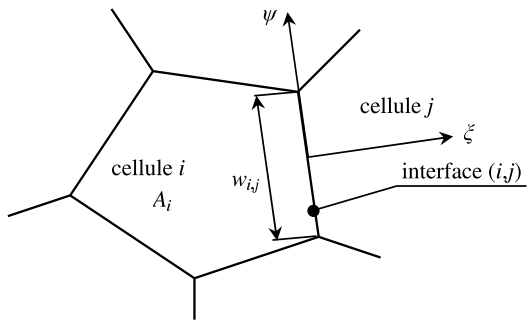


Figure A.2 – Schéma de l'interface entre deux cellule et repère attaché à l'interface.

triques (pente de fond et porosité) sont traités dans un premier temps, puis les termes sources de frottements sont pris en compte dans un deuxième temps. Le calcul des flux aux interfaces est réalisé en résolvant un problème de Riemann à chaque interface (le problème de Riemann sera défini à la section suivante).
À chaque pas de temps et pour chaque cellule, l'algorithme réalise les étapes suivantes :

1. pour chaque interface avec une cellule voisine, caractérisation du problème de Riemann dans le système local de coordonnées (axe tangent et axe perpendiculaire à l'interface),
2. résolution du problème de Riemann, on obtient la valeur du flux à l'interface $(\phi\mathbf{F})_{i,j}^{n+1/2}$,
3. on répète les étapes 1 et 2 pour tous les interfaces de la cellule considérée,
4. actualisation des valeurs des variables de l'écoulement avec (A.2), avec la prise en compte des flux de chaque interface et des termes source géométriques,
5. actualisation des valeurs des variables de l'écoulement avec la prise en compte des termes source de frottement.

A.3 Propriétés des équations de conservation scalaires

Cette section est consacrée aux équations de conservation hyperboliques scalaires et à leurs principales propriétés. Ces propriétés sont utilisées lors de la résolution des équations de conservation scalaires.

A.3.1 La forme caractéristique.

On considère une équation de conservation scalaire

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{A.7}$$

Si U et F sont continues en x et en t, et si F ne dépend que de U, on peut récrire l'équation précédente

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{A.8}$$

Cette équation (A.8) est appelée forme caractéristique de l'équation (A.7). On peut récrire l'équation (A.8) sous une autre forme

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{le long de la trajectoire} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}U} \tag{A.9}$$

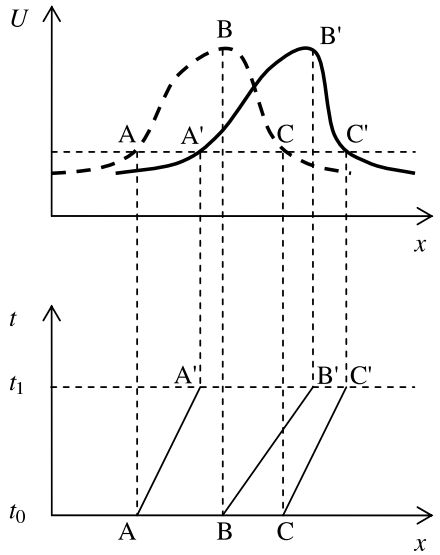


Figure A.3 – Construction de la solution. Profil initial (ligne pointillée) et profil final (ligne pleine). D'après Guinot (2003).

La trajectoire $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}F/\mathrm{d}U$ est appelée une courbe caractéristique et $\mathrm{d}F/\mathrm{d}U$ est une célérité d'onde. L'équation (A.9) signifie que la variable U est conservée le long de la trajectoire $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}F/\mathrm{d}U$. U est appelé un *invariant de Riemann*.

A.3.2 Construction de la solution avec la forme caractéristique.

Si l'expression de F n'est pas trop complexe, il est possible de déterminer graphiquement la solution de l'équation (A.7). On suppose que le profil initial $U_0(x)$ à $t = t_0$ est tel que U restera continu pendant un certain temps. On utilise la représentation de la courbe caractéristique dans l'espace des phase (abscisse : x, ordonnée : t). Puisque F ne dépend que de U, la pente $\lambda = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}F/\mathrm{d}U$ de la caractéristique est aussi fonction de U seulement et restera constante le long de la caractéristique. Celle-ci est donc une droite dans l'espace des phases. Si on considère un point A donné de $U_0(x)$, on peut calculer le déplacement de ce point le long de la courbe caractéristique $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \lambda$ pendant le laps de temps $\Delta t = t_1 - t_0$: c'est $\lambda_\mathrm{A}\Delta t$. Connaissant $U_0(x_\mathrm{A})$ et $\lambda_\mathrm{A}\Delta t$, on peut écrire

$$\mathbf{U}(x = x_\mathrm{A} + \lambda_\mathrm{A}\Delta t, t = t_1) = U_0(x_\mathrm{A}) \tag{A.10}$$

Si on fait ce raisonnement pour un nombre suffisamment grand de points de $U_0(x)$, on pourra tracer le profil de U au temps t_1 (Figure A.3). De plus, l'invariance de U le long de la caractéristique implique que les extremums de $U_0(x)$ seront conservés. Cependant, si F est une fonction non linéaire de U, on peut obtenir un profil discontinu.

A.3.3 Choc, onde de raréfaction et discontinuité de contact.

Si F est une fonction non linéaire de U, la pente λ de la caractéristique varie en fonction de U et les différentes parties du profil $U_0(x)$ ne se déplacent pas à la même

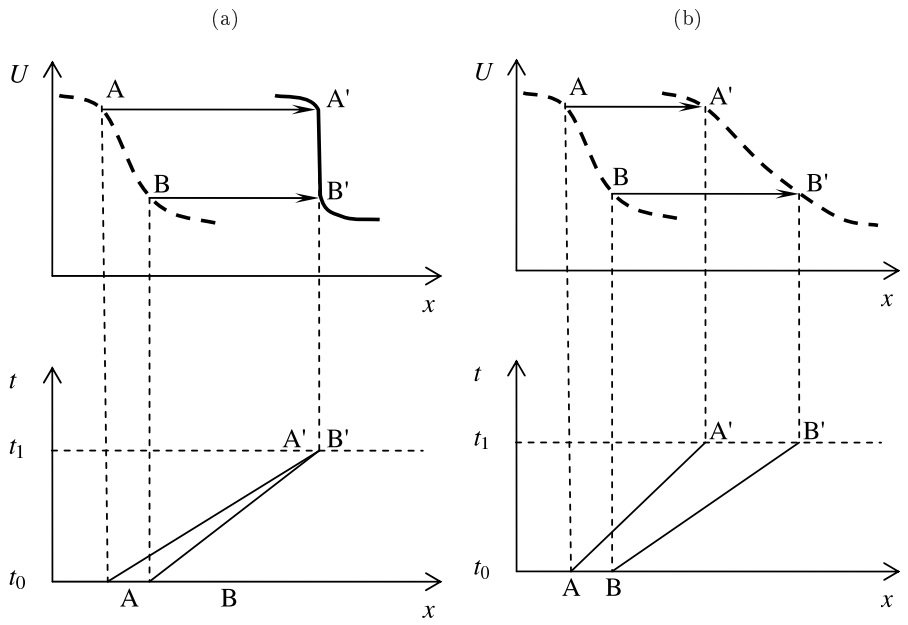


Figure A.4 – Formation d'un choc (a) et d'une onde de raréfaction (b). Profil initial (ligne pointillée) et profil final (ligne pleine). D'après Guinot (2003).

vitesse. Différents phénomènes peuvent alors se produire :

- un choc apparaît quand un point A de $U_0(x)$ se déplace plus vite qu'un point B situé devant lui : $\lambda_A > \lambda_B$ avec $x_B > x_A$ (Figure A.4 a),
- à l'inverse une onde de raréfaction apparaît lorsque un point A de $U_0(x)$ se déplace moins vite qu'un point B situé devant lui : $\lambda_A < \lambda_B$ avec $x_B > x_A$ (Figure A.4 b),
- une discontinuité de contact correspond à un profil discontinu qui ne sera pas altéré au cours du temps (Figure A.5). Ce cas particulier ne peut se produire que si F est une fonction linéaire de U mais une discontinuité doit exister dans l'état initial.

A.3.4 Méthode de l'égalité des aires pour les solutions discontinues.

La méthode des caractéristiques repose sur l'hypothèse de la continuité et de la dérivabilité de U, puisqu'elle découle de la forme caractéristique (A.8). Donc elle ne devrait pas être utilisée pour calculer l'évolution d'une solution discontinue ou qui devient discontinue. Ceci est malgré tout possible en procédant à des modifications du profil selon la méthode de l'égalité des aires (Whitham, 1974; LeVeque, 1992). On peut décrire cette méthode en deux étapes :

- d'abord on applique la méthode des caractéristiques, on obtient un profil qui n'est plus une fonction univoque de l'abscisse x (Figure A.6 a),
- ensuite on transforme cette fonction continue non univoque en une fonction discontinue, de sorte que l'aire totale contenue sous la courbe reste la même (Figure A.6 b).

En effet, l'aire totale sous la courbe est égale à la quantité totale de U contenue dans le domaine, elle doit rester la même après la correction. Le principe de l'égalité des aires peut s'énoncer autrement : la surface de la région 1 doit être égale à la surface de la

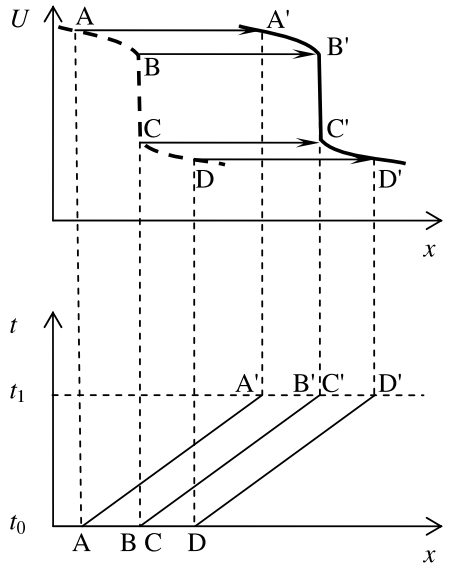


Figure A.5 – Propagation d'une discontinuité de contact. Profil initial (ligne pointillée) et profil final (ligne pleine). D'après Guinot (2003).

région 2 (Figure A.6 b).

A.3.5 Relation de saut au travers d'une discontinuité.

La méthode de l'égalité des aires peut être remplacée par une expression mathématique plus générale qui relie la vitesse d'une discontinuité aux valeurs de U à l'amont et à l'aval du choc : la relation de Rankine-Hugoniot. On considère une discontinuité se déplaçant à la vitesse c_s, un intervalle de temps $\delta t = t_1 - t_0$ et un volume de contrôle contenant le choc aux instants t_0 et t_1. Pendant le temps δt, la quantité totale de U contenue dans le volume de contrôle a augmenté de la quantité

$$\delta U = (U_1 - U_2) c_s \delta t \tag{A.11}$$

Cette augmentation est liée au bilan des flux de U entrants et sortants

$$\delta U = [F(U_1) - F(U_2)]\, \delta t \tag{A.12}$$

On obtient donc la relation suivante

$$[F(U_1) - F(U_2)] = (U_1 - U_2) c_s \tag{A.13}$$

A.4 Propriétés des systèmes hyperboliques de conservation

Un système hyperbolique de conservation est l'extension d'une relation de conservation quand au moins deux variables sont conservées. Un système hyperbolique en deux dimensions prend la forme suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \tag{A.14}$$

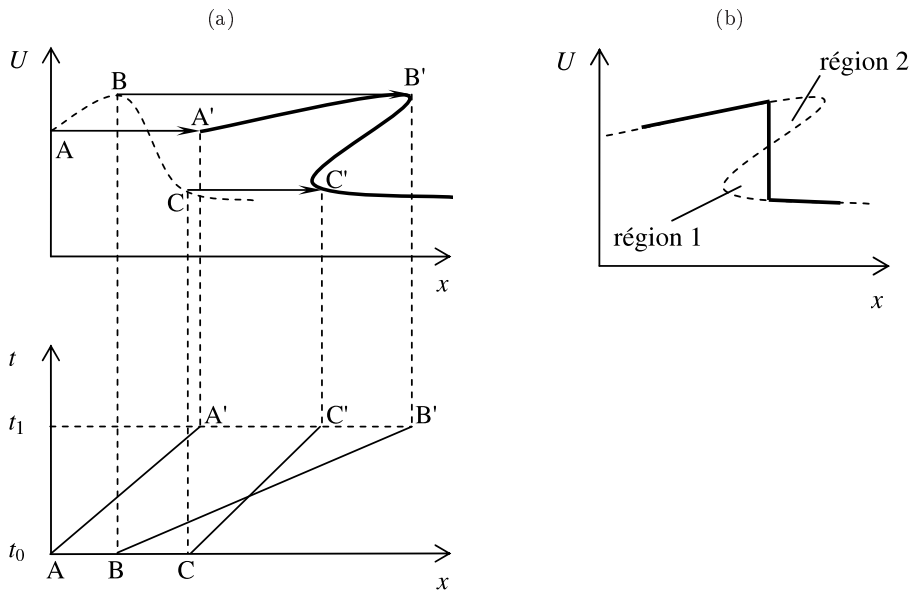


Figure A.6 – Étape 1, méthode des caractéristiques (a). Étape 2, méthode de l'égalité des aires (b). Profil initial (ligne pointillée) et profil final (ligne pleine). D'après Guinot (2003).

où $\mathbf{U}$ est le vecteur des variables conservées (de dimension m), $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont les flux dans les directions x et y et $\mathbf{S}$ est le vecteur des termes source. Ce système est équivalent à m équations scalaires du type

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x} + \frac{\partial G_k}{\partial y} = S_k \tag{A.15}$$

A.4.1 Forme caractéristique

On s'intéresse à la forme unidimensionnelle de (A.14) et on considère dans cette section que $\mathbf{S}$ est un vecteur nul.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \tag{A.16}$$

En faisant l'hypothèse que $\mathbf{U}$ est une fonction continue et dérivable, et que $\mathbf{F}$ n'est fonction que de $\mathbf{U}$, on peut écrire la forme caractéristique suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{A.17}$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice Jacobienne de $\mathbf{F}$ par rapport à $\mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial U_m} \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

Le système (A.16) est hyperbolique si $\mathbf{A}$ a exactement m valeurs propres réelles et distinctes.

La plupart du temps, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonale. Cependant, l'équation A.16 peut être récrite dans un système de coordonnées où $\mathbf{A}$ est diagonale en utilisant la base des vecteurs propres de $\mathbf{A}$. On désigne par $\lambda^{(p)}$ la p-ème valeur propre de $\mathbf{A}$. $\mathbf{K}^{(p)}$ est le vecteur propre correspondant à $\lambda^{(p)}$. $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$ est la matrice formée des vecteurs propres

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \left[\mathbf{K}^{(1)}, \ldots, \mathbf{K}^{(m)}\right] \tag{A.19}$$

$\mathbf{A}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont reliés par la relation suivante

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} \tag{A.20}$$

A.4.2 Invariants de Riemann

Comme pour les équations scalaires, on peut récrire l'équation (A.17) sous une forme qui exprime l'invariance d'un vecteur le long des courbes caractéristiques. On multiplie l'équation (A.17) à gauche par la matrice $\mathbf{K}^{-1}$

$$\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{A.21}$$

Puisque $\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}$ est égal à la matrice identité, on peut remplacer $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}$

$$\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{A.22}$$

Par définition, $\mathbf{\Lambda}$ est égal à $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}$, on peut donc récrire l'équation précédente en introduisant la forme différentielle $\mathrm{d}\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathrm{d}\mathbf{U}$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \tag{A.23}$$

Puisque la matrice $\mathbf{\Lambda}$ est diagonale, le système est découplé. L'équation précédente est équivalente à

$$\frac{\partial W^{(p)}}{\partial t} + \lambda^{(p)}\frac{\partial W^{(p)}}{\partial x} = 0, \quad p = 1, \ldots, m \tag{A.24}$$

ce qui peut être récrit en utilisant la dérivée totale

$$\frac{\mathrm{D}W^{(p)}}{\mathrm{D}t} = 0 \quad \text{le long de la trajectoire} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(p)} \tag{A.25}$$

La quantité $W^{(p)}$ reste constante le long de la courbe caractéristique définie par $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \lambda^{(p)}$. On définit $W^{(p)}$ comme étant le p-ième invariant de Riemann, $\mathbf{W}$ est le vecteur des invariants de Riemann. Puisque les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont différentes, les invariants de Riemann sont indépendants. La solution du problème de Riemann sera formée de m ondes séparant $m-1$ états intermédiaires des états initiaux gauche et droite.

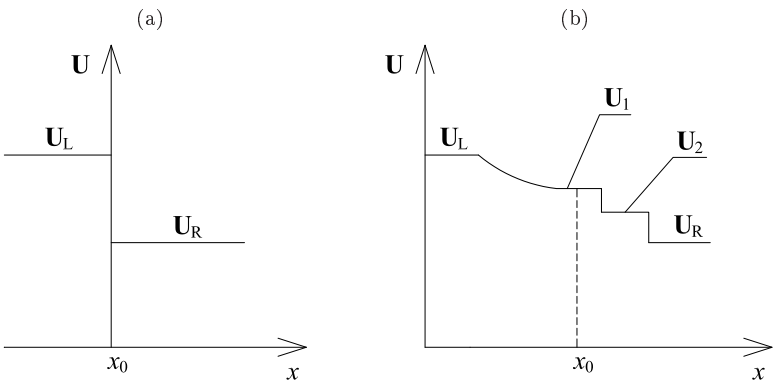


Figure A.7 – Le problème de Riemann (a) et un exemple de solution recherchée avec 3 ondes (b). D'après Guinot (2003).

A.5 Le problème de Riemann

Pour calculer l'évolution des variables $\mathbf{U}$ avec l'équation (A.2), il est nécessaire de calculer le flux $(\phi\mathbf{F})_{i,j}^{n+1/2}$ dans la direction normale à chaque interface. Ceci est fait en résolvant un problème de Riemann.

A.5.1 Les différents types de problèmes de Riemann

Le problème de Riemann standard. Il s'agit d'un problème de conditions initiales (Figure A.7 a) du type

$$\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_\mathrm{L} & \text{pour } x \leq x_0 \\ \mathbf{U}_\mathrm{R} & \text{pour } x > x_0 \end{cases} \tag{A.26}$$

où x_0 est l'abscisse de l'interface, $\mathbf{U}_\mathrm{L}$ et $\mathbf{U}_\mathrm{R}$ sont respectivement les états gauche et droit du problème de Riemann. Cette situation de non-équilibre (sauf si $\mathbf{U}_\mathrm{L} = \mathbf{U}_\mathrm{R}$) va évoluer dans le temps et des ondes apparaissent et se propagent. La solution au temps $t = 0$ est constituée d'une région perturbée (où se propagent les ondes) séparant deux états $\mathbf{U}_\mathrm{L}$ et $\mathbf{U}_\mathrm{R}$ (Figure A.7 b). Résoudre le problème de Riemann signifie calculer la fonction $\mathbf{U}(x, t)$ pour $t > 0$ et pour x quelconque, en fonction des deux états $\mathbf{U}_\mathrm{L}$ et $\mathbf{U}_\mathrm{R}$. On résout un problème de Riemann pour chaque interface de la cellule considérée, dans la direction normale à l'interface.

En plus du problème de Riemann standard (PR), on définit deux autres types de problèmes de Riemann :
- le problème de Riemann généralisé (PRG),
- le problème de Riemann équivalent (PRE).

Le problème de Riemann généralisé. Le PRG se différencie du PR par le fait que les états initiaux des deux côtés de l'interface ne sont pas constants (Figure A.8).

$$\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_\mathrm{L}(x) & \text{pour } x \leq x_0 \\ \mathbf{U}_\mathrm{R}(x) & \text{pour } x > x_0 \end{cases} \tag{A.27}$$

En général, la résolution directe d'un PRG par la méthode des caractéristiques est trop complexe et il est nécessaire de transformer le PRG en un problème de Riemann équivalent (PRE).

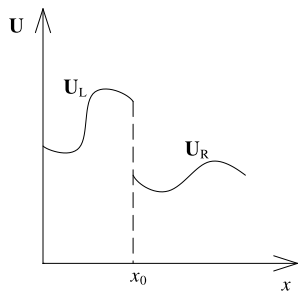


Figure A.8 – Le problème de Riemann généralisé. D'après Guinot (2003).

Le problème de Riemann équivalent. Les deux états initiaux d'un PRE sont constants. Un PRE est un PR dont la solution à l'emplacement de la discontinuité initiale est égale "en moyenne" à la solution du PRG. La transformation du PRG en PRE permet d'utiliser le même solveur que celui utilisé pour le PR standard.

Intérêt du PRG et du PRE. Le PRG et le PRE sont utilisés dans le cadre des schémas de Godunov d'ordre élevé. Le schéma de Godunov original est un schéma d'ordre 1, c'est-à-dire que l'équation discrétisée est consistante avec l'équation réelle avec une erreur de troncature à l'ordre 2.

Pour obtenir un schéma de Godunov d'ordre supérieur à 1, on procède à une reconstruction de la variable à l'intérieur de la cellule (sous forme de polynôme du premier ou du second ordre). La valeur constante connue de la variable à l'intérieur de la cellule est remplacée par une droite ou une parabole dont les caractéristiques sont calculées à partir des valeurs de **U** dans la cellule considérée et dans ses voisines. Ceci donne un PRG, convertit ensuite en PRE. Cette reconstruction permet d'augmenter l'ordre du schéma numérique (diminution de l'erreur de troncature) et d'améliorer la qualité de la solution (en réduisant le phénomène de diffusion numérique).

Cependant, l'atténuation de la diffusion numérique fait ressortir les effets de la dispersion numérique (oscillations au niveau des forts gradients) qui peuvent parfois rendre le schéma numérique instable. Il est donc nécessaire d'utiliser un traitement numérique supplémentaire : on corrige localement les valeurs de la reconstruction pour forcer le caractère monotone de la solution à l'intérieur de la cellule (*limiting method*).

A.5.2 Résolution du problème de Riemann pour une équation scalaire

Bien que cela n'ait pas directement d'intérêt pour la résolution des équations de propagation en eaux peu profondes, il est utile de présenter la méthode de résolution du problème de Riemann dans le cas d'une équation scalaire. En effet, le principe est plus facile à présenter pour une équation scalaire, mais il sera le même pour les systèmes d'équations hyperboliques au paragraphe suivant.

Dans le cas d'une équation scalaire, la solution du problème de Riemann consiste en deux états constants séparés par une onde. Cette onde peut être une onde de raréfaction, un choc ou une discontinuité de contact (on peut aussi rencontrer une onde mixte, *i.e.* une combinaison d'un choc et d'une onde de raréfaction). Puisque les caractéristiques sont des droites (F ne dépend que de U et U est invariant le long des caractéristiques), la solution est nécessairement auto-similaire (*self-similar*), c'est-à-dire que U est une fonction de $(x - x_0)/t$ seulement.

On a donc trois solutions possibles au problème de Riemann, suivant le signe de $\lambda_{\mathrm{L}} - \lambda_{\mathrm{R}}$.

Premier cas. Si $\lambda_{\mathrm{L}} > \lambda_{\mathrm{R}}$, on a un choc. Les caractéristiques convergent vers la caractéristique intermédiaire issue de x_0 (Figure A.9a). On peut calculer la vitesse c_s du choc avec l'équation (A.13).

$$c_s = \frac{F(U_1) - F(U_2)}{U_1 - U_2} \tag{A.28}$$

On en déduit la valeur de U en tout point x suivant la position relative de x et du choc :

$$U(x, t_1) = \begin{cases} U_{\mathrm{L}} & \text{si } x \leq x_0 + c_s(t_1 - t_0) \\ U_{\mathrm{R}} & \text{si } x > x_0 + c_s(t_1 - t_0) \end{cases} \tag{A.29}$$

La valeur de U en x_0 sera d'un intérêt particulier pour calculer le flux à l'interface

$$U(x_0, t_1) = \begin{cases} U_{\mathrm{L}} & \text{si } c_s \geq 0 \\ U_{\mathrm{R}} & \text{si } c_s < 0 \end{cases} \tag{A.30}$$

Deuxième cas. Si $\lambda_{\mathrm{L}} < \lambda_{\mathrm{R}}$, on a une onde de raréfaction. Les caractéristiques divergent depuis la position initiale x_0 de la discontinuité. La solution aura la structure suivante

$$U(x, t_1) = \begin{cases} U_{\mathrm{L}} & \text{si } x \leq x_0 + \lambda_{\mathrm{L}}(t_1 - t_0) \\ U_{\mathrm{R}} & \text{si } x \geq x_0 + \lambda_{\mathrm{R}}(t_1 - t_0) \\ U^*(x, t_1) & \text{sinon} \end{cases} \tag{A.31}$$

$U^*(x, t_1)$ se connecte de façon continue aux deux états constants. La pente λ_{M} de la caractéristique qui passe par un point $\mathrm{M}(x)$ de la zone intermédiaire est égale à $(x - x_0)/t$ puisque toutes les caractéristiques de cette zone sont issues du point x_0. Ceci nous permet d'écrire l'équation qui donnera $U^*(x, t_1)$

$$\frac{\mathrm{d}F(U^*)}{\mathrm{d}U^*}(x, t) = \lambda_{\mathrm{M}}(x, t) = \frac{x - x_0}{t} \tag{A.32}$$

Troisième cas. Si $\lambda_{\mathrm{L}} = \lambda_{\mathrm{R}}$, on a une discontinuité de contact. Cette discontinuité se déplace à la vitesse c_d égale à λ_{L} et λ_{R}. On en déduit la valeur de U en tout point x suivant la position relative de x et de la discontinuité de contact

$$U(x, t_1) = \begin{cases} U_{\mathrm{L}} & \text{si } x \leq x_0 + c_d(t_1 - t_0) \\ U_{\mathrm{R}} & \text{si } x > x_0 + c_d(t_1 - t_0) \end{cases} \tag{A.33}$$

Comme pour le choc, la valeur de U en x_0 est

$$U(x_0, t_1) = \begin{cases} U_{\mathrm{L}} & \text{si } c_d \geq 0 \\ U_{\mathrm{R}} & \text{si } c_d < 0 \end{cases} \tag{A.34}$$

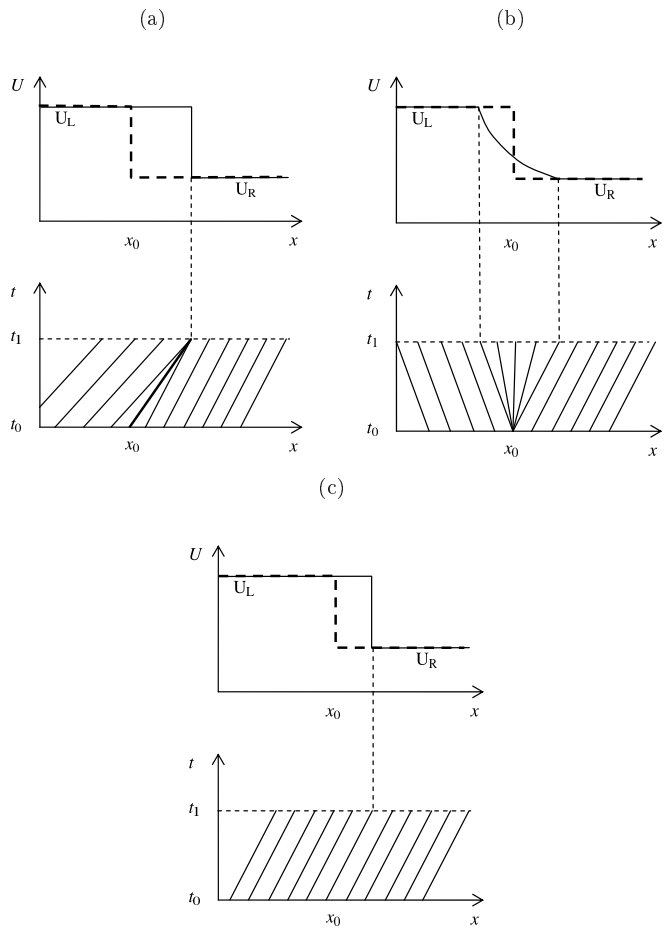


Figure A.9 – Les trois structures possibles de la solution du problème de Riemann pour une équation scalaire, (a) choc, (b) onde de raréfaction, (c) discontinuité de contact. Profil initial (ligne pointillée) et profil final (ligne pleine). D'après Guinot (2003).

A.5.3 Résolution du problème de Riemann pour les équations de propagation en eau peu profonde avec porosité

La forme caractéristique. On reprend l'équation (6.82) sans les termes source pour obtenir l'écriture du système sous forme bidimensionnelle et conservative

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi\mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi\mathbf{G}) = 0 \tag{A.35}$$

La forme caractéristique est obtenue en introduisant les matrices Jacobiennes de $\phi\mathbf{F}$ et de $\phi\mathbf{G}$.

$$\frac{\partial(\phi\mathbf{U})}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial(\phi\mathbf{U})}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial(\phi\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \tag{A.36}$$

avec

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\phi\mathbf{F})}{\partial(\phi\mathbf{U})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{U}} \tag{A.37}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial(\phi\mathbf{G})}{\partial(\phi\mathbf{U})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix} = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{U}} \tag{A.38}$$

On constate que les matrices Jacobiennes ne sont pas modifiées par l'introduction de la porosité dans les équations de propagation.
Puisqu'on cherche à calculer le flux dans la direction normale à l'interface, on se limite à la forme unidimensionnelle de (A.36).

$$\phi\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial(\phi\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{A.39}$$

Invariants de Riemann et invariants généralisés. La matrice des valeurs propres et la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ sont respectivement

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - c & 0 & u + c \\ v & 1 & v \end{bmatrix} \tag{A.40}$$

avec

$$\lambda^{(1)} = u - c, \quad \lambda^{(2)} = u, \quad \lambda^{(3)} = u + c \tag{A.41}$$

Les trois valeurs propres de A sont réelles et distinctes, le système est hyperbolique. La matrice $\mathbf{K}^{-1}$ est égale à

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} u + c & -1 & 0 \\ -2cv & 0 & 2c \\ -u + c & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

On reprend l'équation (A.25)

$$\frac{\mathrm{D}W^{(p)}}{\mathrm{D}t} = 0 \quad \text{le long de la trajectoire} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(p)} \tag{A.43}$$

avec

$$\mathrm{d}\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathrm{d}(\phi\mathbf{U}) = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} (u + c)\mathrm{d}(\phi h) - \mathrm{d}(\phi q) \\ 2c(-v\mathrm{d}(\phi h) + \mathrm{d}(\phi r)) \\ (-u + c)\mathrm{d}(\phi h) + \mathrm{d}(\phi q) \end{bmatrix} \tag{A.44}$$

On élimine ϕh en le remplaçant par c^2/g

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}W^{(1)} &= \frac{c}{2g}(2\mathrm{d}c - \mathrm{d}u) \\ \mathrm{d}W^{(2)} &= h\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}W^{(3)} &= \frac{c}{2g}(2\mathrm{d}c + \mathrm{d}u) \end{aligned}\right\} \tag{A.45}$$

On peut finalement écrire les invariants de Riemann

$$\left.\begin{aligned} W^{(1)} &= u - 2c && \text{le long de } \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u - c \\ W^{(2)} &= v && \text{le long de } \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u \\ W^{(3)} &= u + 2c && \text{le long de } \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u + c \end{aligned}\right\} \tag{A.46}$$

Jeffrey et Taniuti (1964) ont montré que les invariants de Riemann $W^{(p)}$ ne peuvent pas être intégrés en une combinaison des U_k à partir de l'équation $\mathrm{d}\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathrm{d}(\phi\mathbf{U})$ pour des matrices $\mathbf{A}$ de taille supérieure ou égale à 3×3 (sauf cas particuliers). Bien que l'équation (A.43) soit toujours valable, on ne pourra pas trouver d'expression pour les invariants de Riemann. On est amené à utiliser une formulation alternative constituée de relations différentielles valables *à travers* les courbes caractéristiques : les invariants de Riemann généralisés (Jeffrey et Taniuti, 1964). On aura 2 relations valables à travers chacune des 3 ondes

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{K_1^{(p)}} = \frac{\mathrm{d}U_2}{K_2^{(p)}} = \frac{\mathrm{d}U_3}{K_3^{(p)}} = \mathrm{Cst} \quad \text{à travers} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(p)}, \quad p = 1,2,3 \tag{A.47}$$

où $K_i^{(p)}$ est la i-ième composante du vecteur $\mathbf{K}^{(p)}$, lui-même égal à la p-ième colonne de la matrice $\mathbf{K}$. On récrit la relation précédente pour chacune des ondes en utilisant les composantes de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{K}$.

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi h) = \frac{\mathrm{d}(\phi q)}{u-c} = \frac{\mathrm{d}(\phi r)}{v} \quad &\text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - c \\
\frac{\mathrm{d}(\phi h)}{0} = \frac{\mathrm{d}(\phi q)}{0} = \mathrm{d}(\phi r) \quad &\text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \\
\mathrm{d}(\phi h) = \frac{\mathrm{d}(\phi q)}{u+c} = \frac{\mathrm{d}(\phi r)}{v} \quad &\text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + c
\end{aligned}\right\} \tag{A.48}$$

Solution du problème de Riemann. On commence par montrer que la deuxième onde est nécessairement une discontinuité de contact. En effet, la deuxième équation de (A.48) implique que $\mathrm{d}(\phi h) = \mathrm{d}(\phi q) = 0$, ce que l'on peut reformuler

$$\left.\begin{aligned}
\phi h &= \mathrm{Cst} \\
\phi q &= \mathrm{Cst}
\end{aligned}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(2)} \tag{A.49}$$

Donc $u = \phi q/\phi h = \lambda^{(2)}$ est constant à travers cette onde, qui est alors une discontinuité de contact. On peut ainsi relier les deux états intermédiaires

$$\left.\begin{aligned}
\phi_1 h_1 &= \phi_2 h_2 \\
u_1 &= u_2 \\
\phi_1 q_1 &= \phi_2 q_2
\end{aligned}\right\} \tag{A.50}$$

La première onde peut être soit une onde de raréfaction, soit un choc (Figure A.10).

- si la première onde est une onde de raréfaction, la solution sera continue à travers cette onde et on peut utiliser les invariants généralisés. La première équation de (A.48) implique que

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi q) &= (u-c)\mathrm{d}(\phi h) \\
\mathrm{d}(\phi r) &= v\mathrm{d}(\phi h)
\end{aligned}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(1)} \tag{A.51}$$

D'autre part, on développe $\mathrm{d}(\phi q)$ et $\mathrm{d}(\phi r)$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi q) &= u\mathrm{d}(\phi h) + \phi h \mathrm{d}u \\
\mathrm{d}(\phi r) &= v\mathrm{d}(\phi h) + \phi h \mathrm{d}v
\end{aligned}\right\} \tag{A.52}$$

On injecte ces deux relations dans (A.51), on obtient

$$\left.\begin{aligned}
\phi h \mathrm{d}u + c\mathrm{d}(\phi h) &= 0 \\
\phi h \mathrm{d}v &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(1)} \tag{A.53}$$

On élimine ϕh de la première relation en le remplaçant par c^2/g

$$c^2 \mathrm{d}u + c\mathrm{d}(c^2) = 0 \tag{A.54}$$

ce qui donne après factorisation

$$c^2\left(\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}c\right) = 0 \tag{A.55}$$

Finalement, (A.51) est équivalent à

$$\left.\begin{array}{l} u + 2c = \mathrm{Cst} \\ v = \mathrm{Cst} \end{array}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(1)} \tag{A.56}$$

On peut ainsi relier l'état gauche $\mathbf{U}_\mathrm{L}$ au premier état intermédiaire $\mathbf{U}_1$.

$$\left.\begin{array}{l} u_\mathrm{L} + 2c_\mathrm{L} = u_1 + 2c_1 \\ v_\mathrm{L} = v_1 \end{array}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(1)} \tag{A.57}$$

– si la première onde est un choc, il faut utiliser l'équation (A.13). On peut donc écrire

$$\left.\begin{array}{l} (\phi_1 h_1 - \phi_\mathrm{L} h_\mathrm{L})c_\mathrm{L} = \phi_1 q_1 - \phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L} \\ (\phi_1 q_1 - \phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L})c_\mathrm{L} = \phi_1 q_1^2/h_1 - \phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L}^2/h_\mathrm{L} + \phi_1 g h_1^2/2 - \phi_\mathrm{L} g h_\mathrm{L}^2/2 \\ (\phi_1 r_1 - \phi_\mathrm{L} r_\mathrm{L})c_\mathrm{L} = \phi_1 q_1 r_1/h_1 - \phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L} r_\mathrm{L}/h_\mathrm{L} \end{array}\right\} \tag{A.58}$$

La troisième onde peut être soit une onde de raréfaction, soit un choc.

– si la troisième onde est une onde de raréfaction, en raisonnant comme pour la première onde, on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} u - 2c = \mathrm{Cst} \\ v = \mathrm{Cst} \end{array}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(3)} \tag{A.59}$$

On peut ainsi relier l'état droit $\mathbf{U}_\mathrm{R}$ au deuxième état intermédiaire $\mathbf{U}_2$.

$$\left.\begin{array}{l} u_\mathrm{R} - 2c_\mathrm{R} = u_2 - 2c_2 \\ v_\mathrm{R} = v_2 \end{array}\right\} \tag{A.60}$$

– si la troisième onde est un choc, on obtient en utilisant l'équation (A.13)

$$\left.\begin{array}{l} (\phi_\mathrm{R} h_\mathrm{R} - \phi_2 h_2)c_\mathrm{R} = \phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} - \phi_2 q_2 \\ (\phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} - \phi_2 q_2)c_\mathrm{R} = \phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R}^2/h_\mathrm{R} - \phi_2 q_2^2/h_2 + \phi_\mathrm{R} g h_\mathrm{R}^2/2 - \phi_2 g h_2^2/2 \\ (\phi_\mathrm{R} r_\mathrm{R} - \phi_2 r_2)c_\mathrm{R} = \phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} r_\mathrm{R}/h_\mathrm{R} - \phi_2 q_2 r_2/h_2 \end{array}\right\} \tag{A.61}$$

Remarque : On vérifie qu'on a autant d'équations que d'inconnues. Il y a 2 états intermédiaires avec chacun 3 inconnues (h, q, r). On ne considère pas ϕ_1 et ϕ_2 comme des inconnues, leur valeur sera fixée d'après les valeurs de Il peut y avoir n choc(s), donc n vitesse(s) c_s à déterminer, avec $n = 1$ ou 2. Il y a donc en tout $6+n$ inconnues. D'autre part, pour chaque choc, on aura 3 équations. Pour chaque onde de raréfaction ou discontinuité de contact, on aura 2 équations. Cela fait en tout $(3-n)\times 2+3n = 6+n$ équations. On pourra donc calculer les caractéristiques des deux états intermédiaires quelque soit la répartition des ondes.

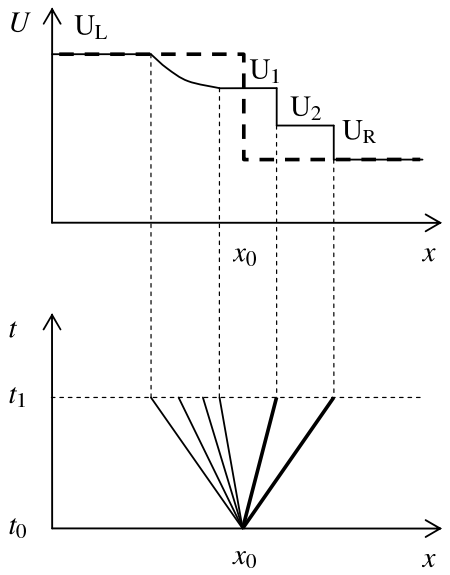


Figure A.10 – Solution du problème de Riemann pour les équations de propagation. Ici la première onde (à gauche) est une onde de raréfaction, la troisième onde (à droite) est un choc. D'après Guinot (2003).

La solution du problème de Riemann se présente finalement sous la forme

$$\mathbf{U}(x,t_1) \approx \begin{cases} \mathbf{U}_\mathrm{L} & \text{si } x \leq x_0 + \lambda^{(1)}(t_1 - t_0) \\ \mathbf{U}_1 & \text{si } x_0 + \lambda^{(1)}(t_1 - t_0) < x \leq x_0 + \lambda^{(2)}(t_1 - t_0) \\ \mathbf{U}_2 & \text{si } x_0 + \lambda^{(2)}(t_1 - t_0) < x \leq x_0 + \lambda^{(3)}(t_1 - t_0) \\ \mathbf{U}_\mathrm{R} & \text{si } x > x_0 + \lambda^{(3)}(t_1 - t_0) \end{cases} \tag{A.62}$$

Le flux à l'interface sera calculé en utilisant $\mathbf{U}(x_0,t_1)$

$$\mathbf{U}(x_0,t_1) \approx \begin{cases} \mathbf{U}_\mathrm{L} & \text{si } \lambda^{(1)} \geq 0 \\ \mathbf{U}_1 & \text{si } \lambda^{(1)} < 0 \text{ et } \lambda^{(2)} \geq 0 \\ \mathbf{U}_2 & \text{si } \lambda^{(2)} < 0 \text{ et } \lambda^{(3)} \geq 0 \\ \mathbf{U}_\mathrm{R} & \text{si } \lambda^{(3)} < 0 \end{cases} \tag{A.63}$$

Procédure itérative de résolution. On ne connaît pas à priori la nature des ondes (mis à part la deuxième) quand on résout le problème de Riemann. On est obligé de faire une hypothèse sur la nature des ondes pour pouvoir calculer les caractéristiques des deux états intermédiaires, il faut ensuite s'assurer que cette hypothèse est bien vérifiée en comparant les paires de célérités d'onde $\left(\lambda_\mathrm{L}^{(1)}, \lambda_1^{(1)}\right)$ et $\left(\lambda_\mathrm{R}^{(3)}, \lambda_2^{(3)}\right)$. Si l'hypothèse initiale n'est pas vérifiée, il faut recommencer avec une autre structure d'onde. Cette procédure itérative doit être répétée jusqu'à ce que l'hypothèse sur la nature des ondes soit vérifiée.

A.5.4 Solveurs exacts et solveurs approchés

À cause de la procédure itérative décrite au dessus, la résolution du problème de Riemann de façon exacte peut être très coûteuse en temps de calcul. Pour cette raison, le problème de Riemann est souvent résolu de façon approchée dans les algorithmes de résolution des équations de propagation. Les solveurs approchés permettent d'obtenir des solutions satisfaisantes avec des algorithmes beaucoup plus rapides que les solveurs exacts (Toro, 1997; Guinot, 2003).
On peut distinguer deux grandes familles de solveurs approchés.

- les solveurs qui résolvent de façon exacte un problème de Riemann simplifié,
- les solveurs qui résolvent de façon approchée le problème de Riemann exact.

La première famille de solveurs approchés. Le très répandu solveur de Roe calcule le flux à l'emplacement de la discontinuité initiale en considérant que la matrice Jacobienne est constante (Roe, 1981). L'approximation de la matrice Jacobienne respecte cependant les conditions de consistance et de conservation. Une correction (*entropy fix*) est nécessaire quand une onde de raréfaction s'étend à l'emplacement de la discontinuité initiale (Harten et Hyman, 1983; Toro, 1997), ce qui permet de vérifier la condition d'entropie. Celle-ci s'énonce de la façon suivante : un choc existe seulement si le sommet du choc se déplace plus vite que le pied du choc, sinon la solution est une onde de raréfaction.
Le solveur « Primitive Variable Riemann Solver »(Toro, 1997) utilise également une matrice Jacobienne constante pour linéariser le système hyperbolique, mais les ondes sont traitées en utilisant la relation de saut de Rankine-Hugoniot. Une variante de ce solveur utilise les invariants de Riemann généralisés pour traiter chaque onde.
Une approche hybride a été proposée par Toro (1991). Un solveur de Riemann approché est utilisé dans les régions où la solution varie peu alors qu'un solveur exact est utilisé dans les régions de fort gradients.

La deuxième famille de solveurs approchés. Le solveur HLL résout les systèmes hyperboliques de taille 2×2 (Harten *et al.*, 1983) en considérant que la solution est composée de deux ondes séparant trois états constants (ce qui convient pour le système « shallow water » en 1D), et les célérités des ondes sont estimées à priori (Davis, 1988; Einfeldt, 1988). Ce solveur a ensuite été modifié en lui ajoutant une troisième onde pour donner le solveur HLLC (Toro *et al.*, 1994), ce qui permet de traiter correctement une discontinuité de contact pour les systèmes hyperboliques de taille 3×3 (le système « shallow water » en 2D par exemple). La structure des deux solveurs HLL/HLLC est détaillée dans la section suivante.
Le solveur de Osher réalise une décomposition du chemin d'intégration en segments colinéaires aux vecteurs propres de la matrice Jacobienne (Osher et Solomon, 1982).
Linde utilise la structure du solveur HLLC avec deux états intermédiaires liés par une relation heuristique pour calculer le flux à l'interface (Linde, 2002). Ce solveur s'adapte à tous les systèmes hyperboliques puisqu'il n'utilise que des relations générales de conservation.

On peut trouver dans (Erduran *et al.*, 2002) une comparaison des performances de tous les solveurs précédemment cités sur de nombreux cas-tests.

Dans les solveurs d'états approchés, les mêmes relations sont utilisées pour traiter les chocs et les ondes de raréfaction (Dukowicz, 1985; Guinot, 2000). En effet, les relations de choc et les relations des ondes de raréfaction ne diffèrent que par un terme de troisième ordre par rapport à la variable conservée. Ceci revient à considérer soit que toutes les ondes sont des chocs (et on n'utilise que la relation de Rankine-Hugoniot),

soit que toutes les ondes sont des ondes de raréfaction (et on n'utilise que les invariants de Riemann généralisés).

A.5.5 Solveurs de Riemann et termes source

La plupart des solveurs présentés au paragraphe précédent sont conçus pour des systèmes d'équations de conservation sans terme source. Des problèmes de stabilité peuvent apparaître quand ces solveurs sont utilisés avec des termes source. C'est ce qui peut se produire avec les équations « shallow water » dans le cas de pentes non négligeables.

Quand le système hyperbolique comporte des termes source, on peut utiliser la méthode du *time splitting*, ce qui donne un algorithme en deux étapes :

– la partie conservative du système est résolue
– on résout ensuite une équation différentielle du type $\partial \mathbf{U}/\partial t = \mathbf{S}$

Cette méthode est généralement efficace sauf quand la solution est proche d'un état d'équilibre (LeVeque, 1998). Le paragraphe A.8 présente l'application de cette méthode pour le système « shallow water ».

La méthode *upwinding* est souvent utilisée pour le traitement du terme source de pente de fond (Bermudez et Vasquez-Cendron, 1994). Elle consiste pour chaque interface à séparer le terme source en deux parties affectées aux deux cellules de part et d'autre de l'interface. La répartition entre les deux cellules se fait en fonction des célérités d'ondes. Cette méthode est utilisée au §A.7.2.

Dans le cadre de cette thèse, un solveur d'état approché a été développé et comparé avec succès au solveur HLL (Lhomme et Guinot, 2006b). Ce solveur utilise les invariants de Riemann exprimés en fonction des composantes du vecteur flux en incluant les termes source dans le calcul des flux, il fait l'objet du Chapitre 10.

A.6 Le solveur de Riemann HLL/HLLC

Le solveur de Riemann HLL/HLLC (Toro *et al.*, 1994) est l'un des solveurs les plus répandus avec le solveur de Roe. C'est aussi le solveur utilisé par défaut dans le code de calcul SW2D. Cette section est consacrée à la présentation de l'algorithme de ce solveur.

A.6.1 Le solveur HLL

Le solveur HLL est bâti sur l'hypothèse d'une structure d'onde constituée de deux ondes séparant trois états constants (Harten *et al.*, 1983). On applique la relation de Rankine-Hugoniot à chaque onde en considérant qu'il s'agit d'un choc, avec un seul état intermédiaire $(\mathbf{U}^*, \mathbf{F}^*)$ (Figure A.11)

$$\left.\begin{aligned} \phi_{\mathrm{L}}\mathbf{F}_{\mathrm{L}} - \phi_*\mathbf{F}^* &= \lambda^{(1)}(\phi_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}} - \phi_*\mathbf{U}^*) \\ \phi_*\mathbf{F}^* - \phi_{\mathrm{R}}\mathbf{F}_{\mathrm{R}} &= \lambda^{(2)}(\phi_*\mathbf{U}^* - \phi_{\mathrm{R}}\mathbf{U}_{\mathrm{R}}) \end{aligned}\right\} \tag{A.64}$$

On résoud ce système pour obtenir $\phi_*\mathbf{U}^*$ et $\phi_*\mathbf{F}^*$ (on calcule $\phi_*\mathbf{F}^*$ directement, et non pas comme $\phi_*\mathbf{F}(\phi_*\mathbf{U}^*)$)

$$\left.\begin{aligned} \phi_*\mathbf{F}^* &= \frac{\lambda^{(2)}\phi_{\mathrm{L}}\mathbf{F}_{\mathrm{L}} - \lambda^{(1)}\phi_{\mathrm{R}}\mathbf{F}_{\mathrm{R}} + \lambda^{(2)}\lambda^{(1)}(\phi_{\mathrm{R}}\mathbf{U}_{\mathrm{R}} - \phi_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}})}{\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}} \\ \phi_*\mathbf{U}^* &= \frac{\phi_{\mathrm{L}}\mathbf{F}_{\mathrm{L}} - \phi_{\mathrm{R}}\mathbf{F}_{\mathrm{R}} - \lambda^{(1)}\phi_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}} + \lambda^{(2)}\phi_{\mathrm{R}}\mathbf{U}_{\mathrm{R}}}{\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}} \end{aligned}\right\} \tag{A.65}$$

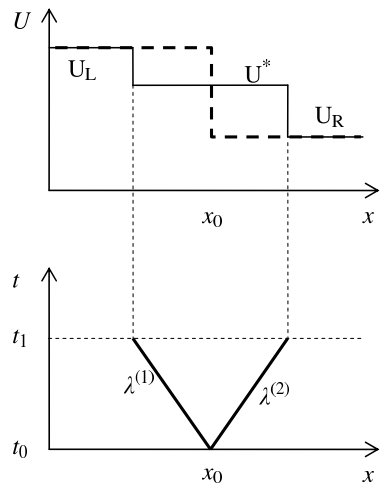


Figure A.11 – Structure de la solution du problème de Riemann avec le solveur HLL.

On obtient le même résultat en intégrant l'équation (A.39) sur un volume de contrôle englobant les 3 ondes.

Le solveur HLL est reconnu pour son efficacité et sa robustesse, mais l'hypothèse de deux ondes limite son application à des systèmes hyperboliques de taille 2×2. La résolution du problème de Riemann nécessite l'estimation des célérités $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ pour être complète (cf. §A.6.3).

A.6.2 Le solveur HLLC

Le solveur HLL a été modifié en incluant une troisième onde dans la structure de la solution pour donner le solveur HLLC (Toro *et al.*, 1994), ce qui permet de traiter correctement une discontinuité de contact pour les systèmes hyperboliques de taille 3×3.

La structure de la solution est définie à priori, avec trois ondes séparant deux états intermédiaires des deux états initiaux gauche et droite (Figure A.12). On applique la relation de Rankine-Hugoniot à chaque onde en considérant qu'il s'agit d'un choc, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \phi_{\mathrm{L}}\mathbf{F}_{\mathrm{L}} - \phi_1\mathbf{F}_1 &= \lambda^{(1)}(\phi_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}} - \phi_1\mathbf{U}_1) \\ \phi_1\mathbf{F}_1 - \phi_2\mathbf{F}_2 &= \lambda^{(2)}(\phi_1\mathbf{U}_1 - \phi_2\mathbf{U}_2) \\ \phi_2\mathbf{F}_2 - \phi_{\mathrm{R}}\mathbf{F}_{\mathrm{R}} &= \lambda^{(3)}(\phi_2\mathbf{U}_2 - \phi_{\mathrm{R}}\mathbf{U}_{\mathrm{R}}) \end{aligned}\right\} \tag{A.66}$$

Même si on peut écrire la relation de Rankine-Hugoniot à travers la deuxième onde, il reste que l'on a vu au §A.5.3 que c'est une discontinuité de contact avec les propriétés suivantes

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 h_1 &= \phi_2 h_2 \\ \phi_1 q_1 &= \phi_2 q_2 \\ \phi_1 r_1 &\neq \phi_2 r_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{à travers } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda^{(2)} = u_1 = u_2 \tag{A.67}$$

On en déduit que pour les deux premières composantes de $\mathbf{U}$, la solution sera analogue

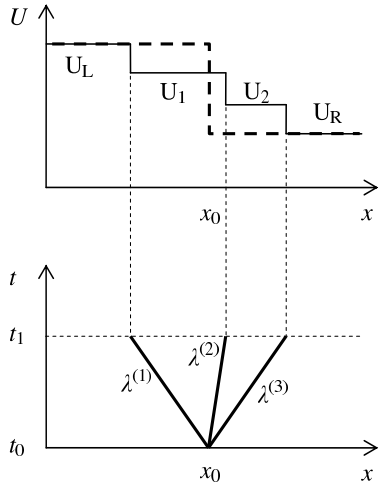


Figure A.12 – Structure de la solution du problème de Riemann avec le solveur HLLC.

à celle du solveur HLL (sauf que $\lambda^{(3)}$ remplace $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$ désignant ici l'onde centrale)

$$\left.\begin{aligned}
\phi_1 h_1 = \phi_2 h_2 &= \frac{\phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L} - \phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} - \lambda^{(1)}\phi_\mathrm{L} h_\mathrm{L} + \lambda^{(3)}\phi_\mathrm{R} h_\mathrm{R}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\
\phi_1 q_1 = \phi_2 q_2 &= \frac{\phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L}^2/h_\mathrm{L} + \phi_\mathrm{L} g h_\mathrm{L}^2/2 - \phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R}^2/h_\mathrm{R} - \phi_\mathrm{R} g h_\mathrm{R}^2/2}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\
&\quad + \frac{\lambda^{(3)}\phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} - \lambda^{(1)}\phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}
\end{aligned}\right\} \tag{A.68}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_{1,1} = F_{2,1} &= \frac{\lambda^{(3)}\phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L} - \lambda^{(1)}\phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} + \lambda^{(1)}\lambda^{(3)}(\phi_\mathrm{R} h_\mathrm{R} - \phi_\mathrm{L} h_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\
F_{1,2} = F_{2,2} &= \frac{\lambda^{(3)}(\phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L}^2/h_\mathrm{L} + \phi_\mathrm{L} g h_\mathrm{L}^2/2) - \lambda^{(1)}(\phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R}^2/h_\mathrm{R} + \phi_\mathrm{R} g h_\mathrm{R}^2/2)}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\
&\quad + \frac{\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}(\phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} - \phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}}
\end{aligned}\right\} \tag{A.69}$$

où $F_{1,1}$ et $F_{1,2}$ sont les deux premières composantes de $\mathbf{F}_1$ et $F_{2,1}$ et $F_{2,2}$ les deux premières composantes de $\mathbf{F}_2$. Pour la dernière composante, on considère que la première et la troisième onde sont des ondes de raréfaction. En utilisant (A.57) et (A.60), on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}
v_\mathrm{L} &= v_1 \\
v_\mathrm{R} &= v_2
\end{aligned}\right\} \tag{A.70}$$

On en déduit que la troisième composante du flux sera égale à

$$F_3(x,t_1) \approx \begin{cases} F_{1,3}(x,t_1) = F_{1,1}(x,t_1) v_\mathrm{L} & \text{si } \lambda^{(1)} < \dfrac{x - x_0}{t_1 - t_0} < \lambda^{(2)} \\ F_{2,3}(x,t_1) = F_{1,1}(x,t_1) v_\mathrm{R} & \text{si } \lambda^{(2)} < \dfrac{x - x_0}{t_1 - t_0} < \lambda^{(3)} \end{cases} \tag{A.71}$$

En résumé, on obtient comme solution du problème de Riemann

$$\phi\mathbf{U}(x,t_1) \approx \begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{L}} h_{\mathrm{L}} \\ \phi_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{L}} \\ \phi_{\mathrm{L}} r_{\mathrm{L}} \end{bmatrix} & \text{si } \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} \leq \lambda^{(1)} \\ \begin{bmatrix} \phi_1 h_1 \\ \phi_1 q_1 \\ v_{\mathrm{L}} \phi_1 h_1 \end{bmatrix} & \text{si } \lambda^{(1)} < \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} < \lambda^{(2)} \\ \begin{bmatrix} \phi_1 h_1 \\ \phi_1 q_1 \\ v_{\mathrm{R}} \phi_1 h_1 \end{bmatrix} & \text{si } \lambda^{(2)} < \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} < \lambda^{(3)} \\ \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{R}} h_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{R}} \\ \phi_{\mathrm{R}} r_{\mathrm{R}} \end{bmatrix} & \text{si } \lambda^{(3)} \leq \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} \end{cases} \tag{A.72}$$

$$\phi\mathbf{F}(x,t_1) \approx \begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{L}} F_{\mathrm{L},1} \\ \phi_{\mathrm{L}} F_{\mathrm{L},2} \\ \phi_{\mathrm{L}} F_{\mathrm{L},3} \end{bmatrix} & \text{si } \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} \leq \lambda^{(1)} \\ \begin{bmatrix} \phi_1 F_{1,1} \\ \phi_1 F_{1,2} \\ v_{\mathrm{L}} \phi_1 F_{1,1} \end{bmatrix} & \text{si } \lambda^{(1)} < \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} < \lambda^{(2)} \\ \begin{bmatrix} \phi_1 F_{1,1} \\ \phi_1 F_{1,2} \\ v_{\mathrm{R}} \phi_1 F_{1,1} \end{bmatrix} & \text{si } \lambda^{(2)} < \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} < \lambda^{(3)} \\ \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{R}} F_{\mathrm{R},1} \\ \phi_{\mathrm{R}} F_{\mathrm{R},2} \\ \phi_{\mathrm{R}} F_{\mathrm{R},3} \end{bmatrix} & \text{si } \lambda^{(3)} \leq \dfrac{x-x_0}{t_1-t_0} \end{cases} \tag{A.73}$$

avec

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \phi_{\mathrm{L}} & \text{si } x < x_0 \\ \phi_{\mathrm{R}} & \text{si } x > x_0 \end{cases} \tag{A.74}$$

Comme pour le solveur HLL, la résolution du problème de Riemann nécessite l'estimation des célérités $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ et $\lambda^{(3)}$ pour être complète (cf. §A.6.3).

A.6.3 Estimation des célérités d'onde

Il reste à estimer les célérités d'ondes $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ pour pouvoir utiliser les équations (A.65) ou (A.68–A.71). En suivant la méthode décrite dans (Davis, 1988), on estime $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(3)}$ par

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \min\left(u_{\mathrm{L}} - c_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} - c_{\mathrm{R}}, 0\right) \\ \lambda^{(3)} &= \max\left(u_{\mathrm{L}} + c_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{R}} + c_{\mathrm{R}}, 0\right) \end{aligned}\right\} \tag{A.75}$$

La présence du zéro dans les opérateurs min et max permet de traiter correctement les cas critique et supercritique. En effet, si $u_{\mathrm{L}} > c_{\mathrm{L}}$ et $u_{\mathrm{R}} > c_{\mathrm{R}}$, alors $\lambda^{(1)} = 0$, $\lambda^{(3)} > 0$ et on obtient $\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{\mathrm{L}}$ en utilisant (A.65). Ceci est correct pour cette situation d'écoulement supercritique vers les x positifs, où l'état initial droit ne peut pas influencer l'interface. S'il n'y avait pas le zéro dans l'opérateur min, on aurait

obtenu $\lambda^{(3)} > \lambda^{(1)} > 0$ et $\mathbf{F}(x_0) \neq \mathbf{F}_\mathrm{L}$, ce qui n'est pas physiquement acceptable. Le raisonnement est le même pour un écoulement supercritique vers les x négatifs et l'opérateur max.
Pour $\lambda^{(2)}$, on a la relation

$$\lambda^{(1)} = u_1 = u_2 \tag{A.76}$$

A.7 Utilisation des flux du solveur HLLC

A.7.1 Équation de continuité

L'équation de continuité discrétisée est

$$\phi_i h_i^{n+1} = \phi_i h_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j \in N(i)} \left((\phi u h)_{i,j}^{n+1/2} w_{i,j} \right) \tag{A.77}$$

Le flux de masse est calculé avec la première ligne de l'équation (A.69)

$$(\phi u h)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\lambda^{(3)} \phi_\mathrm{L} q_\mathrm{L} - \lambda^{(1)} \phi_\mathrm{R} q_\mathrm{R} + \lambda^{(1)} \lambda^{(3)} (\phi_\mathrm{R} h_\mathrm{R} - \phi_\mathrm{L} h_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \tag{A.78}$$

Il est nécessaire de s'assurer que les équations de propagation modifiées avec l'introduction de la porosité et discrétisée respectent bien les conditions d'équilibre.
On se place d'abord dans le cas d'un équilibre statique avec une discontinuité du fond entre deux cellules, sans discontinuité de porosité. Le flux de masse est égal à

$$(\phi q)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{\lambda^{(1)} \lambda^{(3)} \phi (h_\mathrm{R} - h_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \tag{A.79}$$

or $h_\mathrm{R} \neq h_\mathrm{L}$ puisque $z_\mathrm{R} = z_\mathrm{L}$ et $z_{b,\mathrm{R}} \neq z_{b,\mathrm{L}}$. Cette relation donne donc un débit à l'interface non nul, ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse de l'équilibre statique.
En suivant la démarche présentée dans (Nujic, 1995; Guinot et Soares-Frazão, 2006), on redéfinit le vecteur des variables $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \phi z \\ \phi h u \\ \phi h v \end{bmatrix} \tag{A.80}$$

L'équation (A.79) devient alors

$$\phi_1 q_1 = \frac{\lambda^{(1)} \lambda^{(3)} \phi (z_\mathrm{R} - z_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} = 0 \tag{A.81}$$

et l'équilibre statique est vérifié. La modification (A.80) permet d'éviter l'apparition d'oscillations autour de l'interface en question, alors que ces perturbations pourraient se propager ensuite dans tout le domaine.
Si on se place maintenant dans le cas d'une discontinuité de fond et de porosité, on a à nouveau un débit non nul à l'interface

$$\phi_1 q_1 = \frac{\lambda^{(1)} \lambda^{(3)} (\phi_\mathrm{R} z_\mathrm{R} - \phi_\mathrm{L} z_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \neq 0 \tag{A.82}$$

On modifie cette expression en introduisant une porosité moyenne ϕ_LR de façon à retrouver un débit nul

$$\phi_1 q_1 = \frac{\lambda^{(1)} \lambda^{(3)} \phi_\mathrm{LR} (z_\mathrm{R} - z_\mathrm{L})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} = 0 \tag{A.83}$$

On se place maintenant dans le cas d'un écoulement en régime permanent (équilibre dynamique) avec une discontinuité de porosité : $\phi_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{L}} = \phi_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{R}} = \mathrm{Q}$ et $\phi_{\mathrm{L}} \neq \phi_{\mathrm{R}}$. On a

$$\begin{aligned} \phi_1 q_1 &= \frac{\lambda^{(3)}\phi_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{L}} - \lambda^{(1)}\phi_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{R}} + \lambda^{(1)}\lambda^{(3)}\phi_{\mathrm{LR}}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ &= \mathrm{Q} + \frac{\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}\phi_{\mathrm{LR}}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \end{aligned} \tag{A.84}$$

L'hypothèse de régime permanent impose de trouver $\phi_1 q_1 = \mathrm{Q}$, d'où par conséquent $z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}$, ce qui n'est pas physiquement acceptable (incompatible avec le respect de la conservation de la quantité de mouvement vu que $\phi_{\mathrm{L}} \neq \phi_{\mathrm{R}}$). On est obligé de modifier encore l'expression du flux de masse

$$\phi_1 q_1 = \frac{\phi_{\mathrm{LR}}\left(\lambda^{(3)} q_{\mathrm{L}} - \lambda^{(1)} q_{\mathrm{R}}\right) + \lambda^{(1)}\lambda^{(3)}\phi_{\mathrm{LR}}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \tag{A.85}$$

ce qui permet de vérifier à la fois $\phi_1 q_1 = \mathrm{Q}$ et $z_{\mathrm{R}} \neq z_{\mathrm{L}}$. On définit ϕ_{LR} de la façon suivante (Guinot et Soares-Frazão, 2006)

$$\phi_{\mathrm{LR}} = \min\left(\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{R}}\right) \tag{A.86}$$

Cette estimation repose sur la considération suivante : le flux de masse entre les deux cellules est limité par la plus faible porosité (par exemple $\phi_{\mathrm{L}} = 1$ avec un débit important et $\phi_{\mathrm{R}} = 0,1$, le débit qui peut rentrer dans la cellule R est réduit). De plus, cette expression permet de ne pas avoir d'écoulement vers les cellules de porosité nulle.

A.7.2 Bilan de quantité de mouvement

Direction normale à l'interface. L'équation discrétisée de conservation de la quantité de mouvement selon la normale à l'interface est

$$\begin{aligned} \phi_i (uh)_i^{n+1} = \phi_i (uh)_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j \in N(i)} \Big(& n_{i,j}^{(x)} \left(\phi u^2 h + g h^2/2\right)_{i,j}^{n+1/2} \\ & - n_{i,j}^{(y)} \left(\phi u v h\right)_{i,j}^{n+1/2} \Big) w_{i,j} + \Delta t \; S_{i,j}^{n+1/2} \end{aligned} \tag{A.87}$$

Le flux de quantité de mouvement longitudinal est calculé avec (A.69)

$$\begin{aligned} \left(\phi u^2 h + g h^2/2\right)_{i,j}^{n+1/2} = & \frac{\lambda^{(3)}(\phi_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{L}}^2/h_{\mathrm{L}} + \phi_{\mathrm{L}} g h_{\mathrm{L}}^2/2) - \lambda^{(1)}(\phi_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{R}}^2/h_{\mathrm{R}} + \phi_{\mathrm{R}} g h_{\mathrm{R}}^2/2)}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \\ & + \frac{\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}(\phi_{\mathrm{R}} q_{\mathrm{R}} - \phi_{\mathrm{L}} q_{\mathrm{L}})}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \end{aligned} \tag{A.88}$$

Le flux de quantité de mouvement transversal est calculé avec (A.71)

$$\begin{aligned} (\phi u v h)_{i,j}^{n+1/2} = & \frac{(\phi u h)_{i,j}^{n+1/2} + \left|(\phi u h)_{i,j}^{n+1/2}\right|}{2} \, v_{\mathrm{L}} \\ & + \frac{(\phi u h)_{i,j}^{n+1/2} - \left|(\phi u h)_{i,j}^{n+1/2}\right|}{2} \, v_{\mathrm{R}} \end{aligned} \tag{A.89}$$

Le terme source $S_i^{n+1/2}$ est la forme discrétisée de la deuxième composante de (A.6) sans le terme de frottement

$$S_{i,j}^{n+1/2} = -g(\phi h)_{i,j}^{n+1/2}(z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{L}}) + \frac{g}{2}\left((\phi h^2)_{\mathrm{R}} - (\phi h^2)_{\mathrm{L}}\right) \tag{A.90}$$

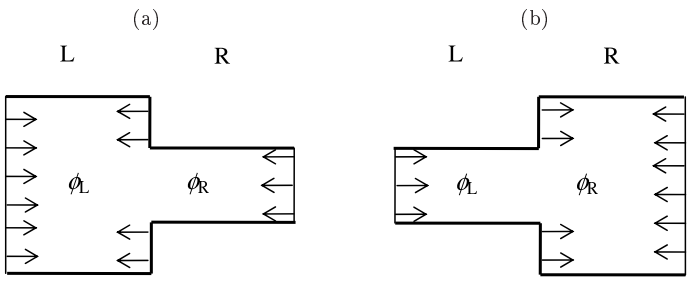


Figure A.13 – Variation de la section d'écoulement et analogie avec une variation de porosité (les flèches représentent les forces de pression exercées par les parois).

où $(\phi h)_{i,j}^{n+1/2}$ doit être estimé de sorte que l'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée respecte bien les conditions d'équilibre.

On considère deux cellules de porosité différente mais de même cote de fond, avec un écoulement en régime permanent. On fait un bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle formé par ces deux cellules, en calculant le terme source de deux façons différentes (Guinot et Soares-Frazão, 2006)

– en utilisant l'équation (A.90),
– en raisonnant de façon analytique.

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\phi_L q_L^2/h_L + \phi_L g h_L^2/2 - \phi_R q_R^2/h_R - \phi_R g h_R^2/2 + S_{i,j}^{n+1/2} = 0 \tag{A.91}$$

On injecte (A.90) dans (A.91) en remplaçant la différence $(z_R - z_L)$ par $(h_R - h_L)$ puisque le fond est horizontal.

$$\phi_L q_L^2/h_L - \phi_R q_R^2/h_R - g(\phi h)_{i,j}^{n+1/2}(h_R - h_L) = 0 \tag{A.92}$$

En utilisant la notation $\phi_L q_L = \phi_R q_R = Q$, on peut écrire

$$(q_L - q_R)Q - g(\phi h)_{i,j}^{n+1/2}(h_R - h_L) = 0 \tag{A.93}$$

Le terme source dû aux variations de porosité peut également être calculé en faisant une analogie avec un changement de section d'écoulement (on assimile la porosité à la largeur d'écoulement). Dans le cas d'un rétrécissement (Figure A.13a), le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\phi_L u_L^2 h_L + \phi_L g h_L^2/2 - \phi_R u_R^2 h_R - \phi_R g h_R^2/2 - (\phi_L - \phi_R) g h_L^2/2 = 0 \tag{A.94}$$

Dans le cas d'un rétrécissement (Figure A.13b), le bilan de quantité de mouvement s'écrit

$$\phi_L u_L^2 h_L + \phi_L g h_L^2/2 - \phi_R u_R^2 h_R - \phi_R g h_R^2/2 + (\phi_R - \phi_L) g h_R^2/2 = 0 \tag{A.95}$$

Les équations (A.94) et (A.95) peuvent être récrites

$$\left.\begin{array}{ll} \phi_L u_L^2 h_L - \phi_R u_R^2 h_R - \phi_R g h_R^2/2 + \phi_R g h_L^2/2 = 0 & \text{si } \phi_L > \phi_R \\ \phi_L u_L^2 h_L - \phi_R u_R^2 h_R + \phi_L g h_L^2/2 - \phi_L g h_R^2/2 = 0 & \text{si } \phi_L < \phi_R \end{array}\right\} \tag{A.96}$$

On peut condenser ces deux équations en une seule en utilisant un opérateur min

$$\phi_L u_L^2 h_L - \phi_R u_R^2 h_R + \min(\phi_L, \phi_R) g (h_L^2/2 - h_R^2/2) = 0 \tag{A.97}$$

On cherche à avoir une équivalence entre les équations (A.93) et (A.97), il faut donc que $(\phi h)_{i,j}^{n+1/2}$ vérifie

$$g(\phi h)_{i,j}^{n+1/2}(h_{\mathrm{L}} - h_{\mathrm{R}}) = \min(\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{R}}) g(h_{\mathrm{L}}^2/2 - h_{\mathrm{R}}^2/2) \tag{A.98}$$

ce qui nous donne

$$(\phi h)_{i,j}^{n+1/2} = \min(\phi_{\mathrm{L}}, \phi_{\mathrm{R}}) \frac{h_{\mathrm{L}} + h_{\mathrm{R}}}{2} \tag{A.99}$$

Direction tangente à l'interface. L'équation discrétisée de conservation de la quantité de mouvement selon la tangente à l'interface est

$$\begin{aligned} \phi_i (vh)_i^{n+1} = \phi_i (vh)_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j \in N(i)} \Big(& n_{i,j}^{(x)} \left(\phi u v h\right)_{i,j}^{n+1/2} \\ & + n_{i,j}^{(y)} \left(\phi u^2 h + g h^2/2\right)_{i,j}^{n+1/2} \Big) w_{i,j} \end{aligned} \tag{A.100}$$

Affectation du terme source géométrique. Dans l'équation (A.87), le terme source est écrit avec la notation $S_i^{n+1/2}$, alors que l'on a vu par la suite qu'il concerne les deux cellules de part et d'autre de l'interface considéré. Pour des questions de stabilité du schéma numérique, le terme source lié à un interface est réparti entre les deux cellules (Bermudez et Vasquez-Cendron, 1994).

$$\left.\begin{aligned} \phi_i \mathbf{U}_i^{n+1} &= \phi_i \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \left(\mathbf{P}_{i,j} \left(\phi \mathbf{F}\right)_{i,j}^{n+1/2} w_{i,j} \right) + \Delta t (\mathbf{S}_i)_{i,j}^{n+1/2} \\ \phi_j \mathbf{U}_j^{n+1} &= \phi_j \mathbf{U}_j^n + \frac{\Delta t}{A_j} \left(\mathbf{P}_{i,j} \left(\phi \mathbf{F}\right)_{i,j}^{n+1/2} w_{i,j} \right) + \Delta t (\mathbf{S}_j)_{i,j}^{n+1/2} \end{aligned}\right\} \tag{A.101}$$

où

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{S}_i)_{i,j}^{n+1/2} &= \frac{-\lambda^{(1)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \frac{w_{i,j}}{A_i} S_{i,j}^{n+1/2} \\ (\mathbf{S}_j)_{i,j}^{n+1/2} &= \frac{\lambda^{(3)}}{\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}} \frac{w_{i,j}}{A_j} S_{i,j}^{n+1/2} \end{aligned}\right\} \tag{A.102}$$

A.8 Traitement du terme source de frottement

Avec la méthode du *time splitting*, le terme source de frottement est traité de façon isolée. Après avoir résolu l'équation (A.2), on utilise la solution trouvée comme état initial pour l'équation suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S}_f \tag{A.103}$$

de façon à obtenir une solution de l'équation complète (6.82). Pour chaque cellule du domaine de calcul, on doit résoudre le système d'équations différentielles suivant dans le repère global (x, y)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \phi h \\ \phi q \\ \phi r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\phi h \dfrac{\sqrt{q^2 + r^2}}{K^2 h^{10/3}}\, q \\ -g\phi h \dfrac{\sqrt{q^2 + r^2}}{K^2 h^{10/3}}\, r \end{bmatrix} \tag{A.104}$$

où les valeurs initiales de h, q, r sont les valeurs obtenues après le traitement des flux et du terme source géométrique. On ne garde que les deux dernières lignes de ce système, et on élimine ϕ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -g\frac{\sqrt{q^2+r^2}}{K^2h^{7/3}}\ q\\ \frac{\partial r}{\partial t} &= -g\frac{\sqrt{q^2+r^2}}{K^2h^{7/3}}\ r\end{aligned}\right\} \tag{A.105}$$

On effectue une semi-discrétisation explicite de ce système pour découpler les deux équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -g\frac{\sqrt{(q_i^n)^2+(r_i^n)^2}}{K^2(h_i^n)^{7/3}}\ q\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g\frac{\sqrt{(q_i^n)^2+(r_i^n)^2}}{K^2(h_i^n)^{7/3}}\ r\end{aligned}\right\} \tag{A.106}$$

et on peut ensuite résoudre ces deux équations en utilisant une solution analytique

$$\left.\begin{aligned}q_i^{n+1} &= q_i^n \exp\left(-g\frac{\sqrt{(q_i^n)^2+(r_i^n)^2}}{K^2(h_i^n)^{7/3}}\Delta t\right)\\ r_i^{n+1} &= r_i^n \exp\left(-g\frac{\sqrt{(q_i^n)^2+(r_i^n)^2}}{K^2(h_i^n)^{7/3}}\Delta t\right)\end{aligned}\right\} \tag{A.107}$$

A.9 Conditions de stabilité et conditions aux limites

A.9.1 Conditions de stabilité

Un schéma numérique de type Godunov est un schéma explicite, il est soumis à des contraintes de stabilité. Le pas de temps de calcul est déterminé par la condition de Courant, qui s'énonce de façon générale pour un maillage 1D

$$c\Delta t < \Delta x \tag{A.108}$$

De façon simplifiée, cette relation revient à dire qu'en un pas de temps, une onde ne doit pas parcourir une distance supérieure à la taille d'une maille. Pour un maillage 2D non structuré, la relation précédente devient

$$\sum_p \lambda_p w_{n,p}\Delta t < A_n \tag{A.109}$$

où A_n est l'aire de la cellule n, $w_{n,p}$ est la largeur de la $p^{\text{ième}}$ interface de la cellule n et λ_p est la célérité maximale dans la direction normale à cette interface (Guinot et Soares-Frazão, 2006). On en déduit la condition portant sur le pas de temps maximal admissible

$$\Delta t_{\max} = \min_n\left(\frac{A_n}{\sum_p \lambda_p w_{n,p}}\right) \tag{A.110}$$

Une conséquence pratique : sur un domaine de calcul comportant des mailles de tailles très différentes, le pas de temps sera souvent conditionné par les mailles de petite taille où la condition de Courant sera plus restrictive (valeur de A_n faible).

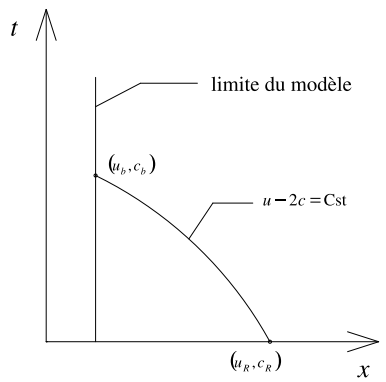


Figure A.14 – Condition à la limite et invariant de Riemann.

A.9.2 Conditions aux limites

On peut définir cinq types de conditions aux limites pour les mailles situées au bord du domaine considéré :
- hauteur imposée,
- vitesse imposée,
- débit imposé,
- section critique.
- sortie libre.

Dans chaque cas, la variable manquante au niveau de la limite est calculée en utilisant un invariant de Riemann. Si on se place dans un repère bien choisi, on peut se ramener systématiquement à une configuration où la cellule intérieure est à droite de l'interface. Il y a conservation de la quantité $u-2c$ le long de la caractéristique C^- (Figure A.14). On a donc l'équation suivante

$$u_b - 2c_b = u_R - 2c_R \tag{A.111}$$

où l'indice b désigne la valeur de la variable à la frontière et l'indice R désigne la valeur de la variable à droite de la frontière (*i.e.* dans le domaine).

Hauteur imposée. Si on impose une hauteur h_b à la frontière, l'équation (A.111) peut être récrite de la sorte

$$u_b = u_R + 2(c_b - c_R) \tag{A.112}$$

D'autre part, $c = \sqrt{gh}$ et $u = q/h$, donc on a finalement

$$\left.\begin{aligned} u_b &= \frac{q_R}{h_R} + 2g^{1/2}(\sqrt{h_b} - \sqrt{h_R}) \\ q_b &= u_b h_b \end{aligned}\right\} \tag{A.113}$$

Vitesse imposée. Si on impose une vitesse entrante u_b à la frontière, l'équation (A.111) peut être récrite de la sorte

$$c_b = \frac{u_b - u_R}{2} + c_R \tag{A.114}$$

et on peut alors calculer les autres variables

$$\left.\begin{aligned} h_b &= \frac{1}{g}\left[\frac{u_b - u_R}{2} + c_R\right]^2 \\ q_b &= u_b h_b \end{aligned}\right\} \tag{A.115}$$

Débit imposé. Si on impose un débit entrant q_b à la frontière, l'équation (A.111) est multipliée par h_b pour obtenir

$$2g^{1/2}h_b^{3/2} + (u_R - 2c_R)h_b - qb = 0 \tag{A.116}$$

Cette équation d'inconnue h_b peut être résolue par une méthode itérative du type Newton. On calcule u_b avec

$$u_b = q_b/h_b \tag{A.117}$$

Section critique. Si on impose le passage par le régime critique au niveau de la frontière pour un écoulement sortant du domaine, l'équation suivante doit être vérifiée

$$u_b + c_b = 0 \tag{A.118}$$

On combine cette équation avec (A.111) pour obtenir

$$u_b = -c_b = \frac{u_R - 2c_R}{3} \tag{A.119}$$

Les variables h_b et q_b sont calculées en utilisant (A.115).

Sortie libre. On considère qu'il n'y pas d'influence de la condition à la limite aval (sortie en régime supercritique ou condition à la limite très éloignée). Le flux à l'interface $(\phi\mathbf{F})_{i+1/2}^{n+1/2}$ est estimé en utilisant la valeur de la cellule i.

$$(\phi\mathbf{F})_{i+1/2}^{n+1/2} = \left(\phi\mathbf{F}\right)\left(\mathbf{U}_i^n\right) \tag{A.120}$$

Annexe B

Graphiques du Chapitre 8

B.1 Graphiques du §8.3.5

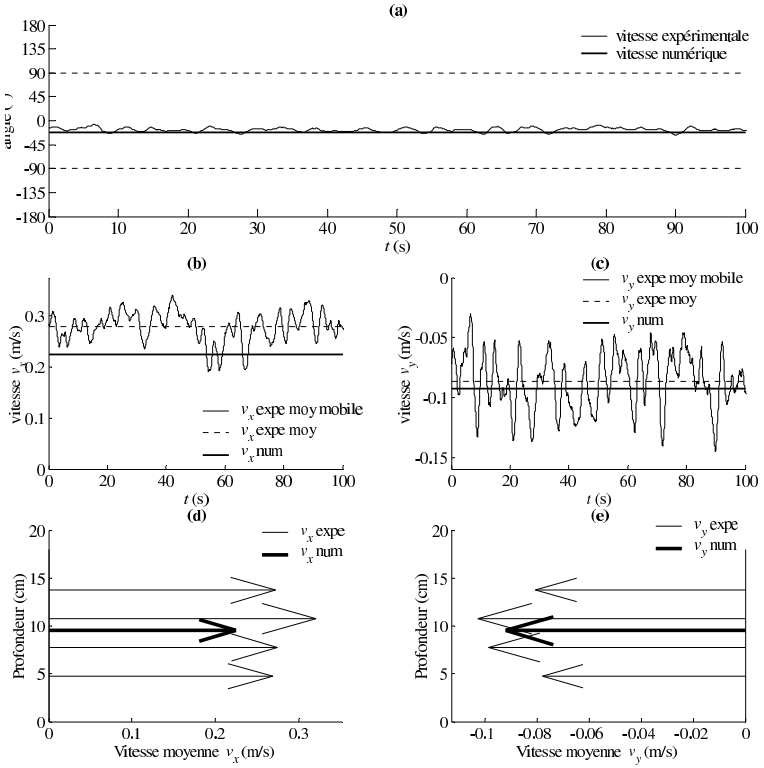


Figure B.1 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 1, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

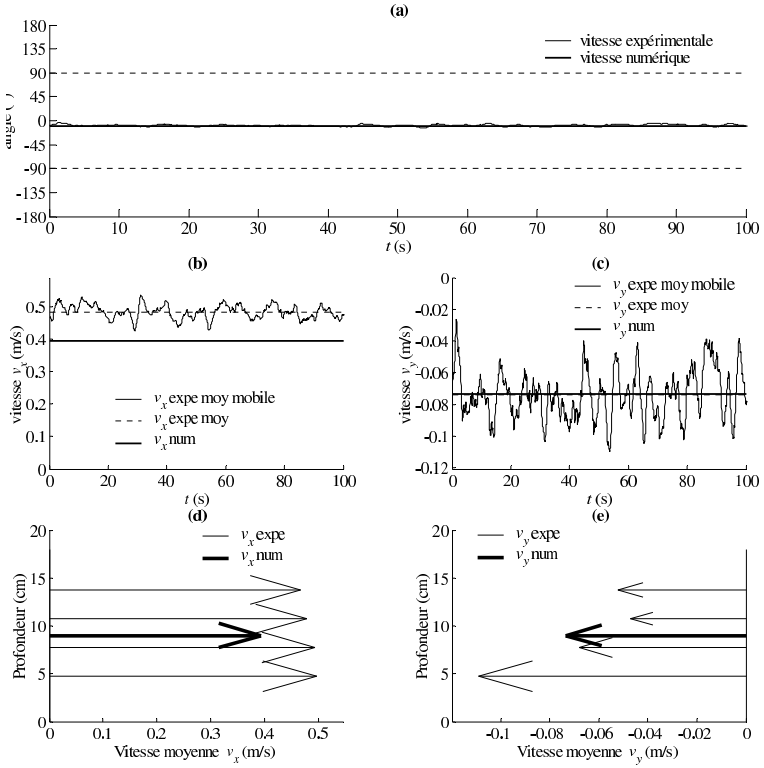


Figure B.2 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 4, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

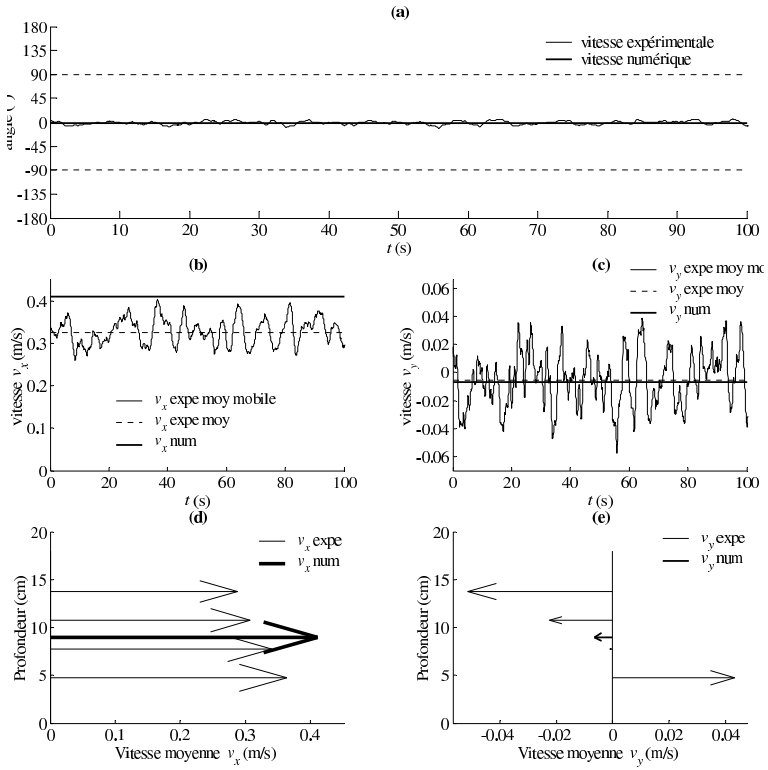


Figure B.3 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 9, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

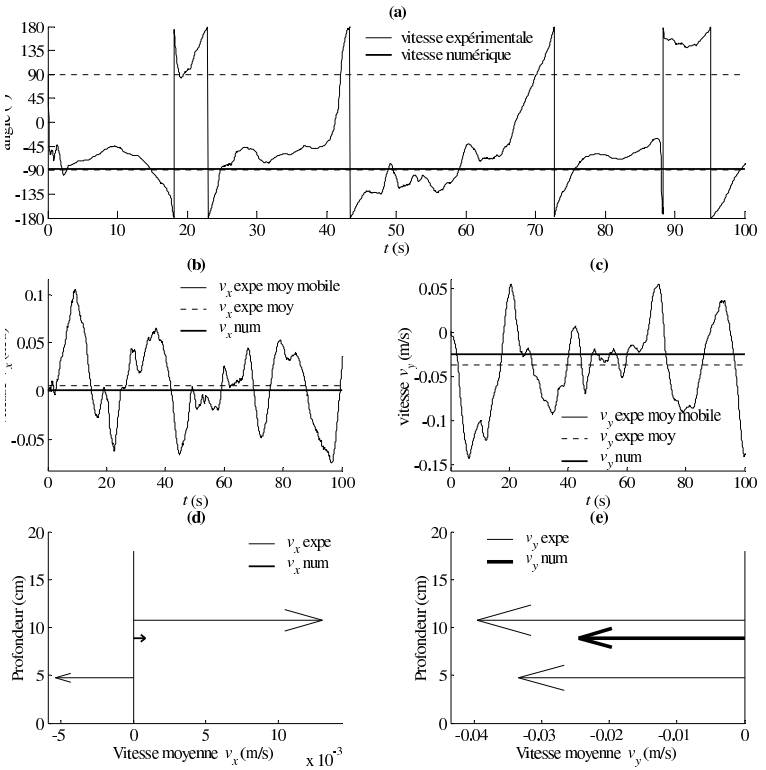


Figure B.4 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 2, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

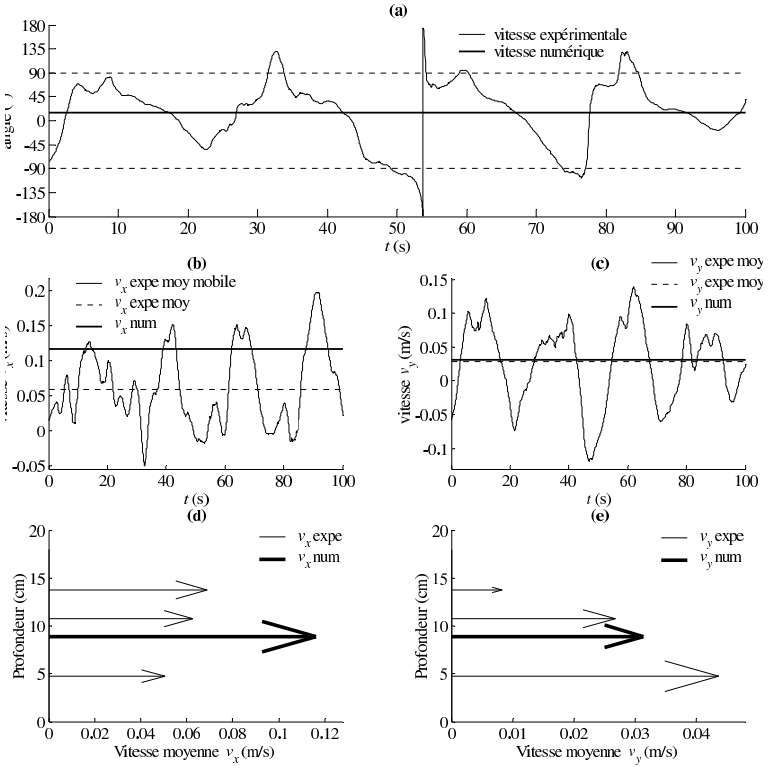


Figure B.5 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 3, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

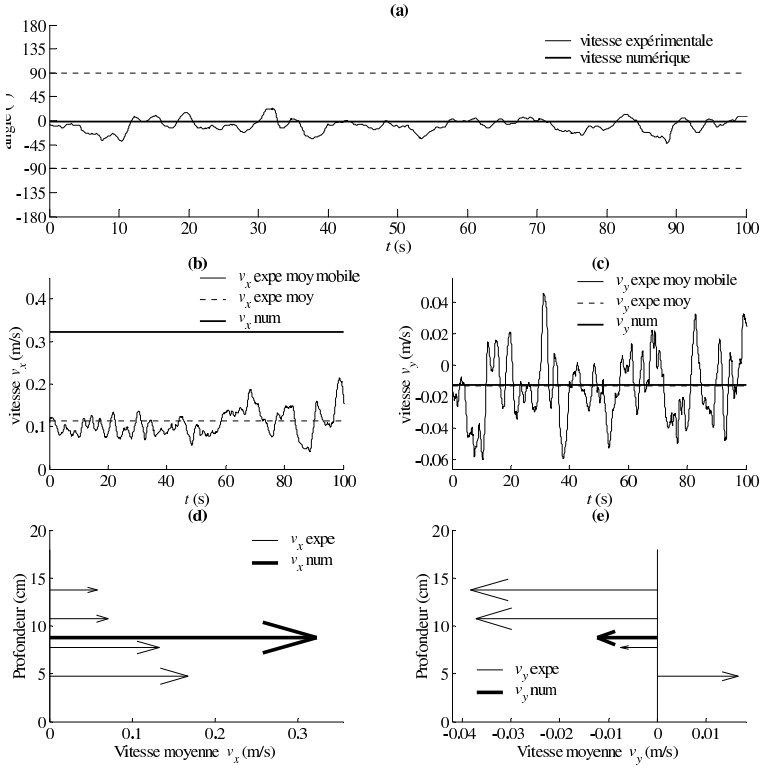


Figure B.6 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 8, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

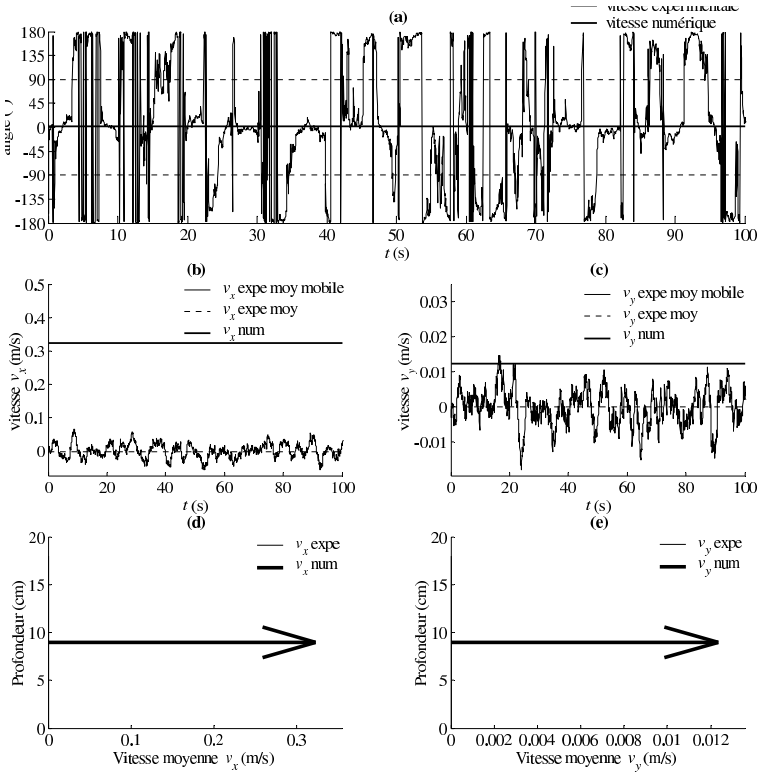


Figure B.7 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 7, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

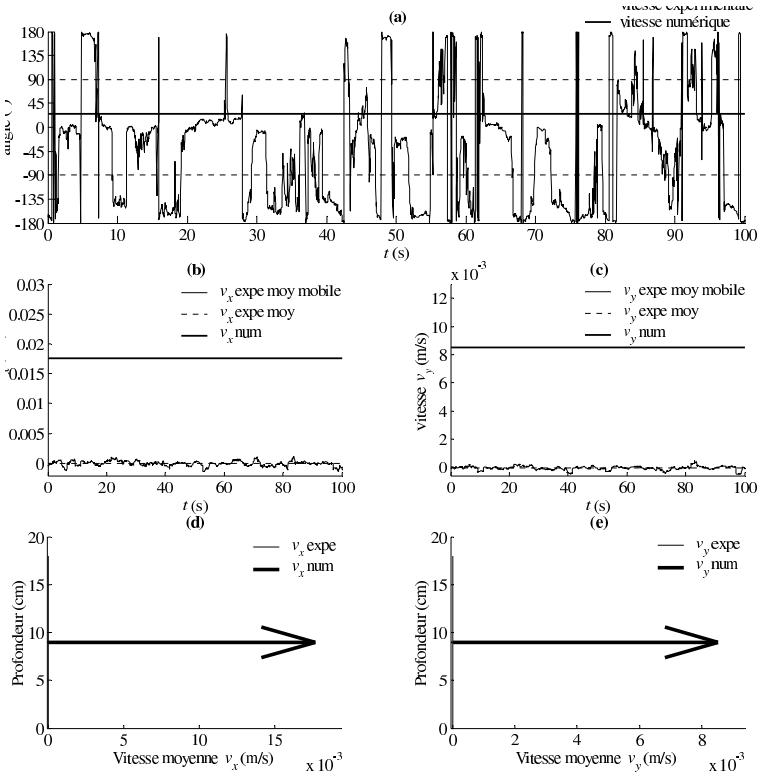


Figure B.8 – Comparaison des vitesses expérimentale Dopplers et numériques au point de mesure n° 5, variation de l'angle du vecteur moyen sur la verticale en fonction du temps (a), variation de la composante x de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (b), variation de la composante y de la vitesse moyenne sur la verticale en fonction du temps (c), moyennes temporelles des composantes x de la vitesse selon la profondeur (d), moyennes temporelles des composantes y de la vitesse selon la profondeur (e).

B.2 Graphiques du §8.4.1

Au niveau de la Rangée 01, l'arrivée du front est quasi-concomitante entre les mesures et les simulations (Figure B.9). Les points n° 1, 37 et 38 sont très bien reproduits par les deux simulations CR et PC_5–3, mis à part un creux entre le temps 28 s et 42 s. Pour les points n° 2 et 3 situés au milieu de la face avant de la ville, les profondeurs sont légèrement sous-estimées par les deux simulations. On peut penser que les phénomènes tridimensionnels sont plus importants que sur les bords de la ville et expliquent l'écart obtenu avec les simulations 2D. Au niveau de la Rangée 02, les profondeurs simulées sont très proches de celles mesurées (Figure B.10). Les mesures effectuées à la Rangée 02 pour deux essais différents sont présentées à la Figure B.11, on constate que la reproductibilité des essais est très bonne. Au niveau de la Rangée 03, les profondeurs sont bien simulées (Figure B.12). On note seulement que la simulation CR surestime légèrement le pic de profondeur à l'arrivée du front. Au niveau de la Rangée 04, on remarque que la simulation PC surestime la profondeur aux point n° 44 et 12 (Figure B.13). La simulation CR est très proches des mesures expérimentales. Au niveau de la Rangée 05, la simulation PC surestime la profondeur aux point n° 46 et 14 (Figure B.14). Ces deux points sont situés de part et d'autre de la limite de la zone urbaine. La Figure B.15 présente des points complémentaires situés dans les rangées 03 et 05, la profondeur est bien simulée. On note la présence de deux point symétriques par rapport à l'axe longitudinal du canal (points n° 15 et 915). La profondeur expérimentale est quasi-identique pour ces deux points, alors que les profondeurs simulées diffèrent légèrement. Au niveau de la Rangée 06, la simulation PC sous-estime la profondeur aux point n° 48 (Figure B.16). Au niveau de la Rangée 07, les deux simulations donnent de bons résultats (Figure B.17). Au niveau de la Rangée 08, la simulation PC surestime la profondeur aux point n° 27 (Figure B.18). Même constat à la Rangée 09 avec les points n° 54 et 29 (Figure B.19). Au niveau de la Rangée 10, les écarts entre les deux modélisations sont importants (Figure B.21). La Figure B.20 présente des points complémentaires situés dans les rangées 07 et 09, la profondeur est bien simulée. Il y a à nouveau deux points symétriques (points n° 30 et 930), les profondeurs expérimentales sont quasi-identiques en ces deux points, de même que les profondeurs simulées. La simulation CR est toujours proche des mesures mais la simulation PC surestime nettement la profondeur.

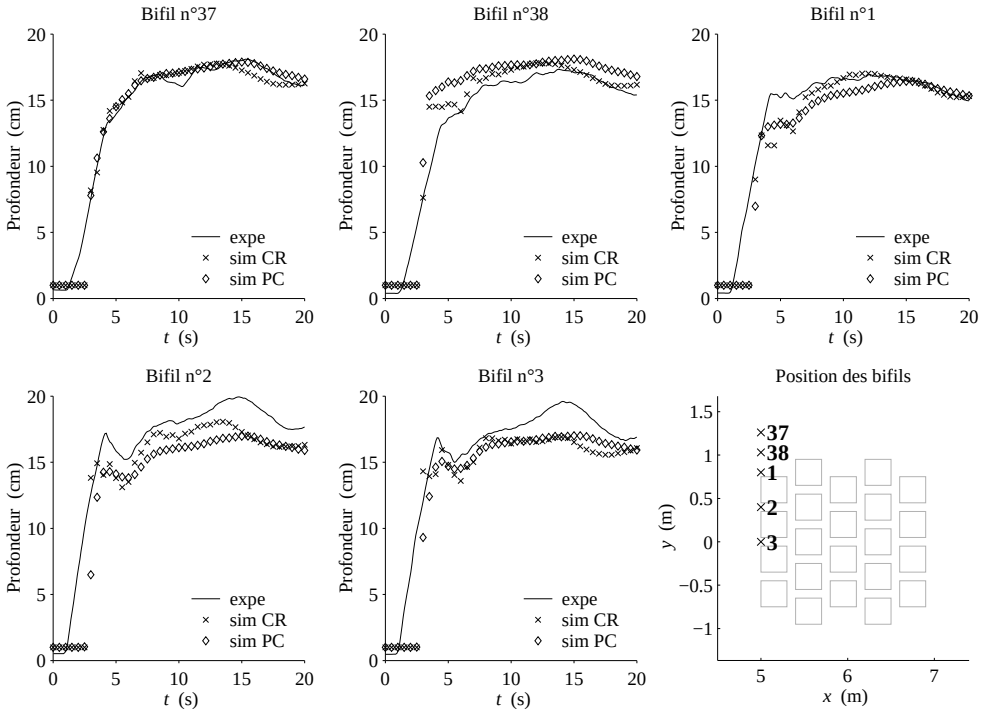


Figure B.9 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 01 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

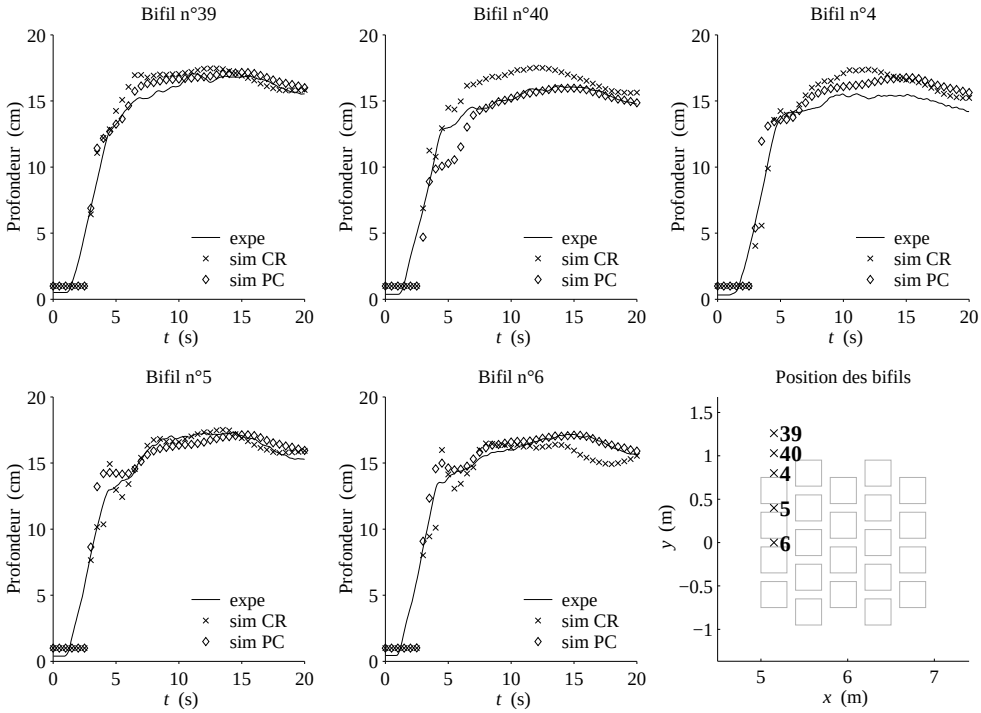


Figure B.10 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 02 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

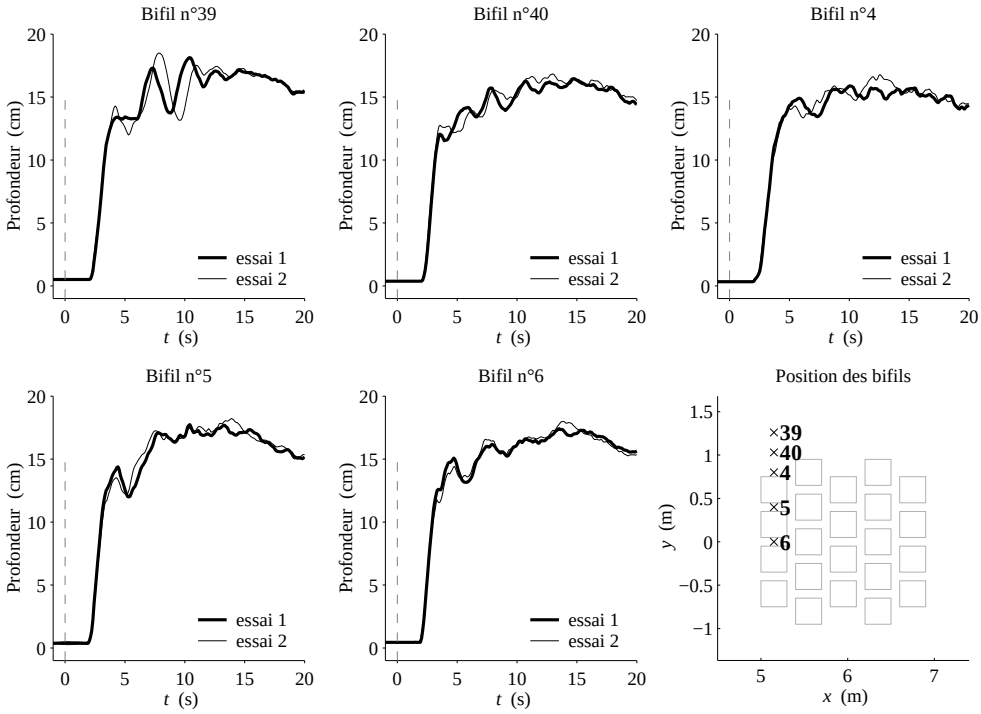


Figure B.11 – Profondeurs mesurées à la rangée 02 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire, Comparaison de deux essais pour vérifier la reproductibilité.

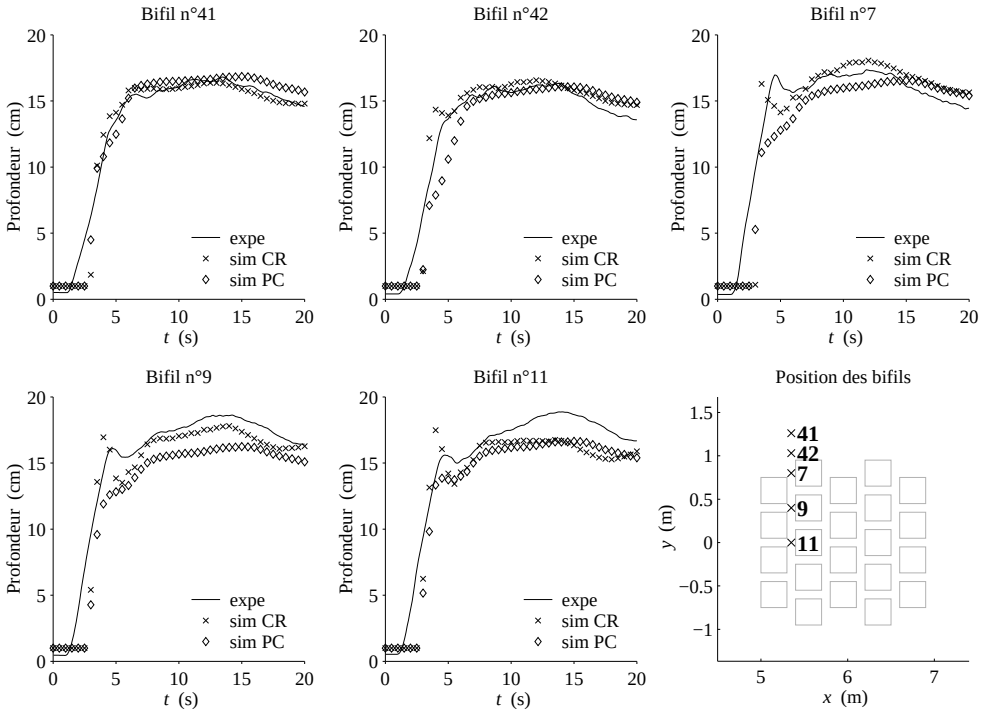


Figure B.12 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 03 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

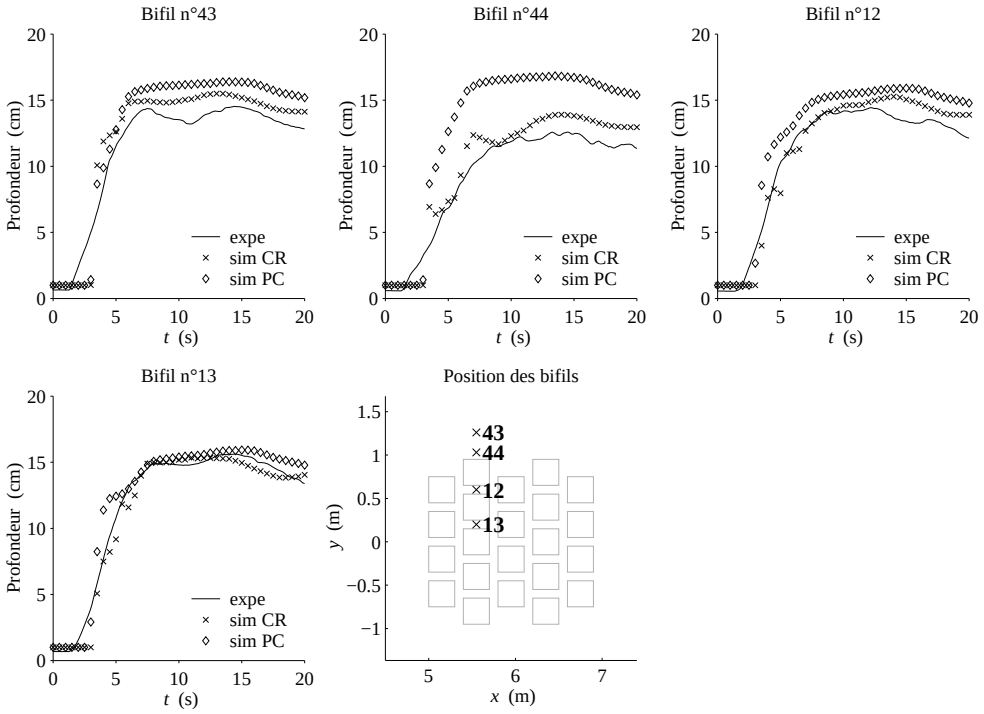


Figure B.13 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 04 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

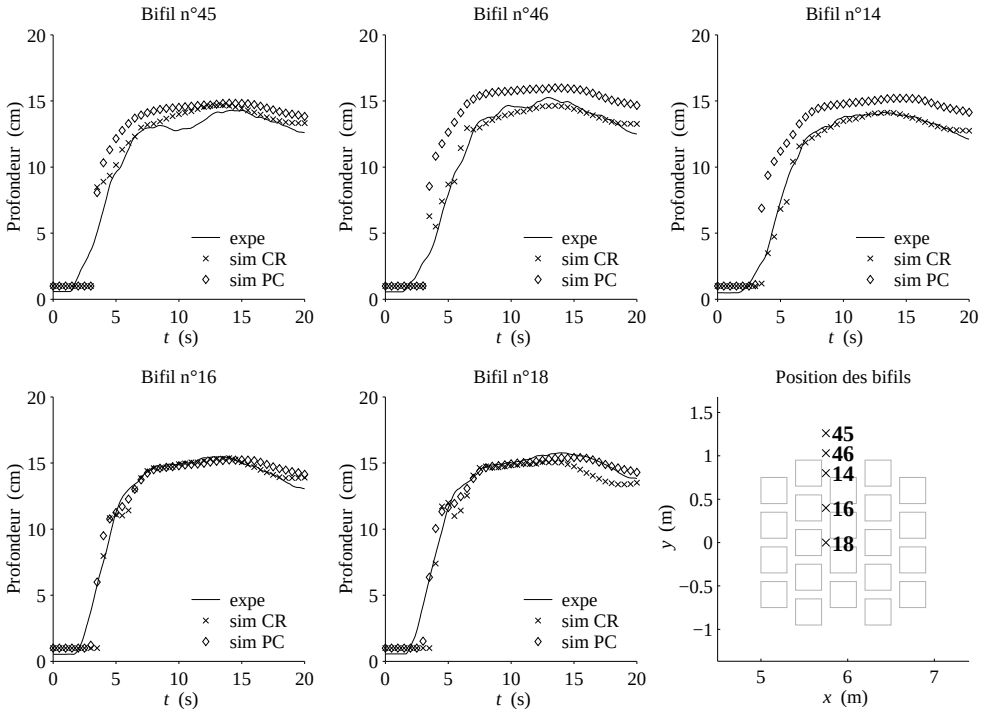


Figure B.14 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 05 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

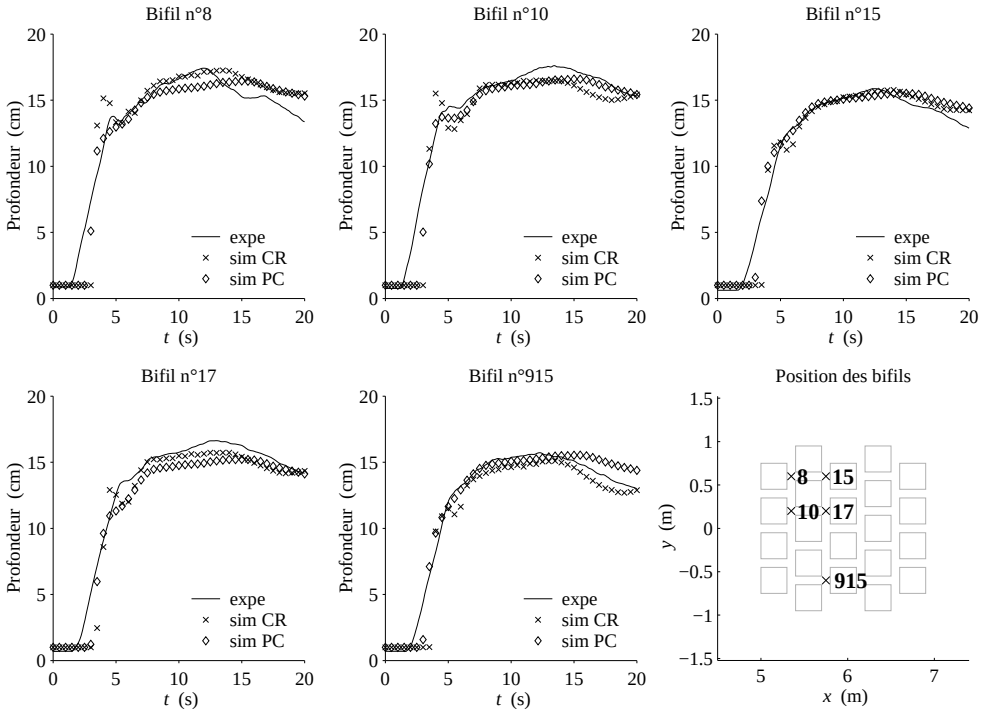


Figure B.15 – Profondeurs mesurées et simulées pour des points complémentaires des rangées 03 et 05, pour la configuration ville quinconce en régime transitoire (le point n° 915 est le symétrique du point n° 15).

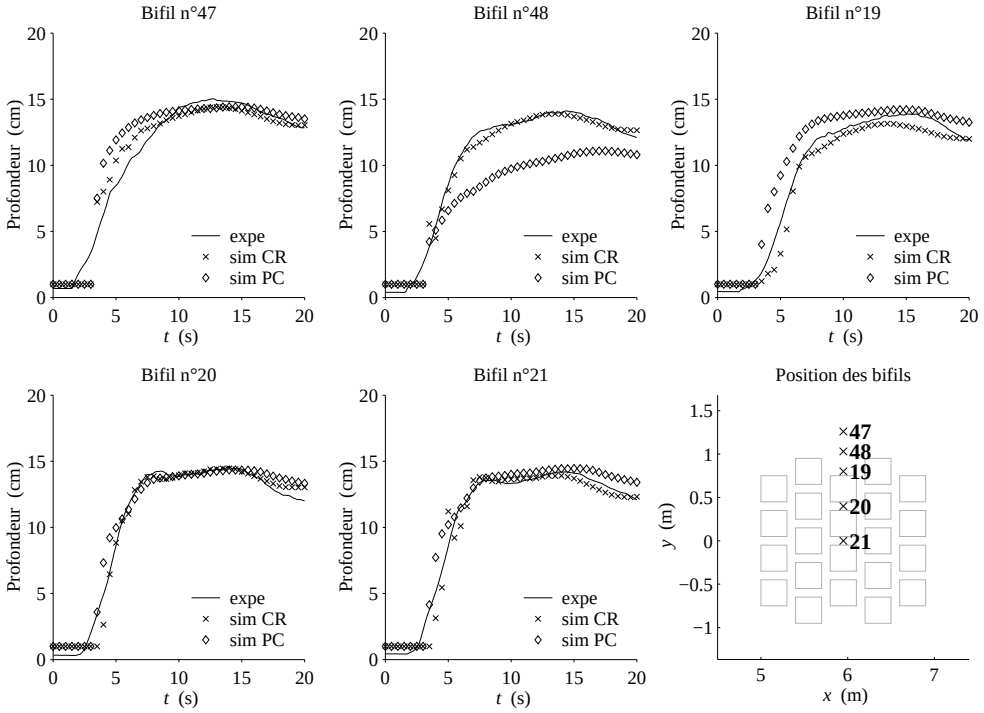


Figure B.16 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 06 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

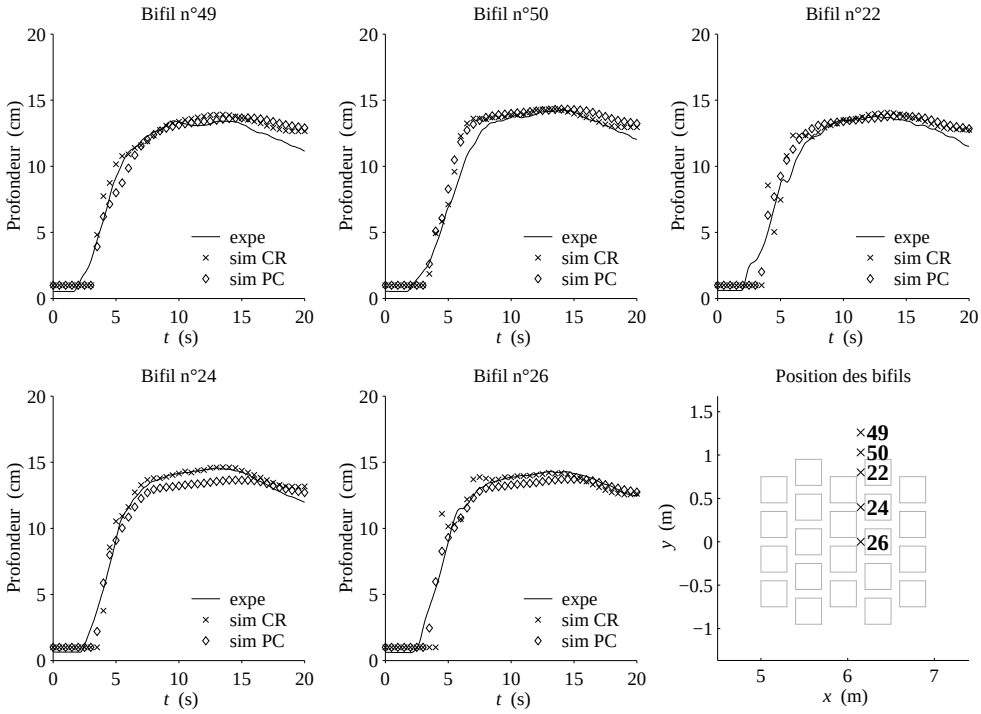


Figure B.17 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 07 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

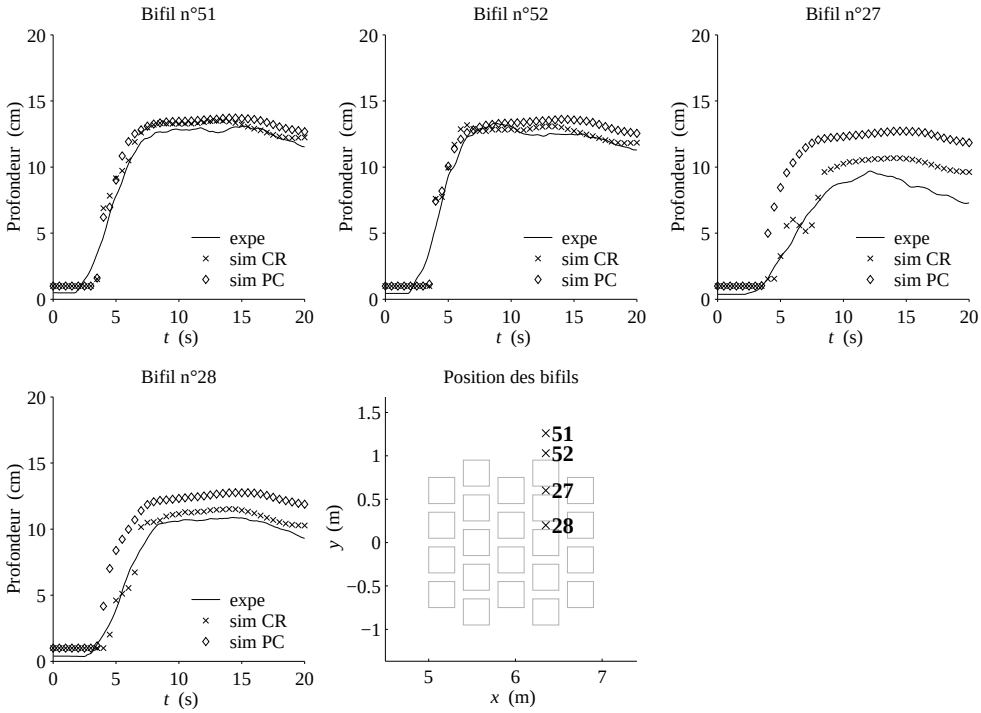


Figure B.18 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 08 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

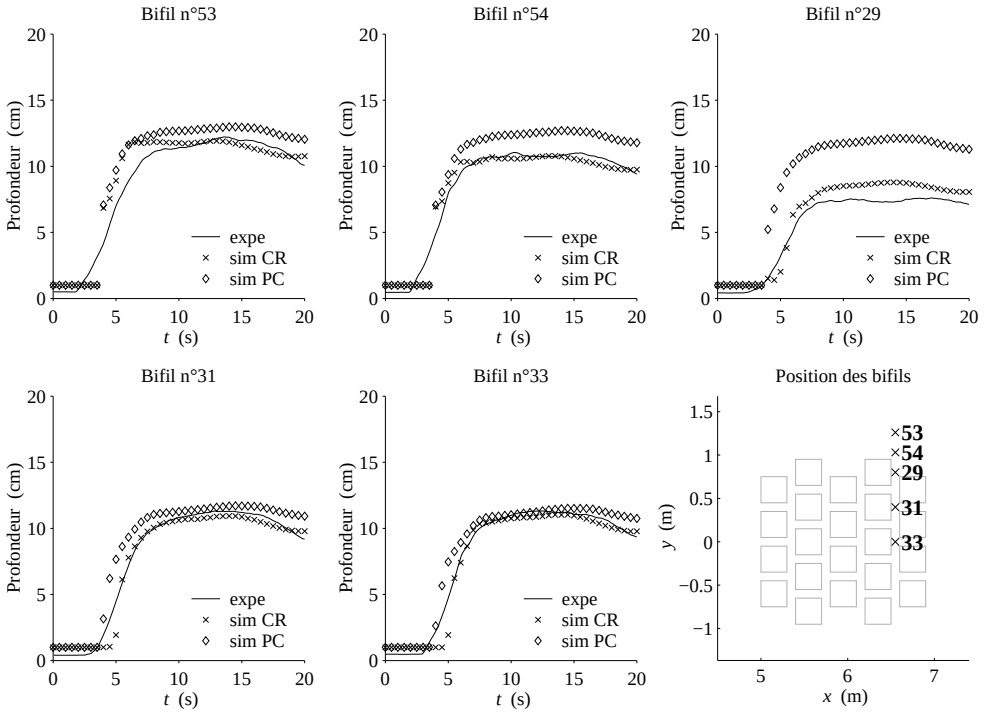


Figure B.19 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 09 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

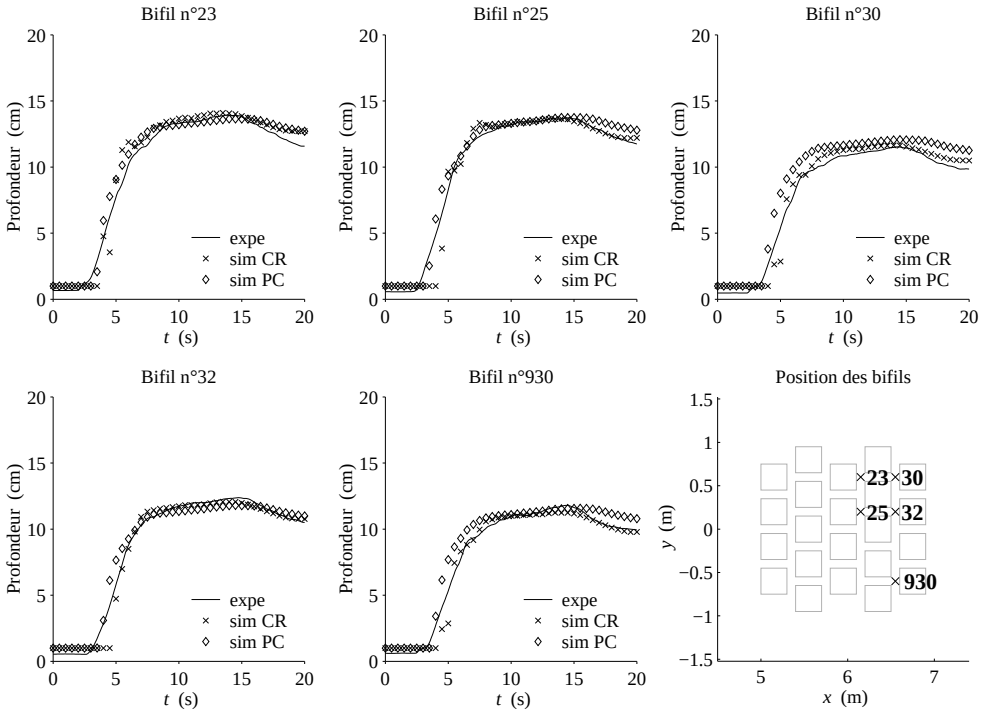


Figure B.20 – Profondeurs mesurées et simulées pour des points complémentaires des rangées 07 et 09, pour la configuration ville quinconce en régime transitoire (le point n° 930 est le symétrique du point n° 30).

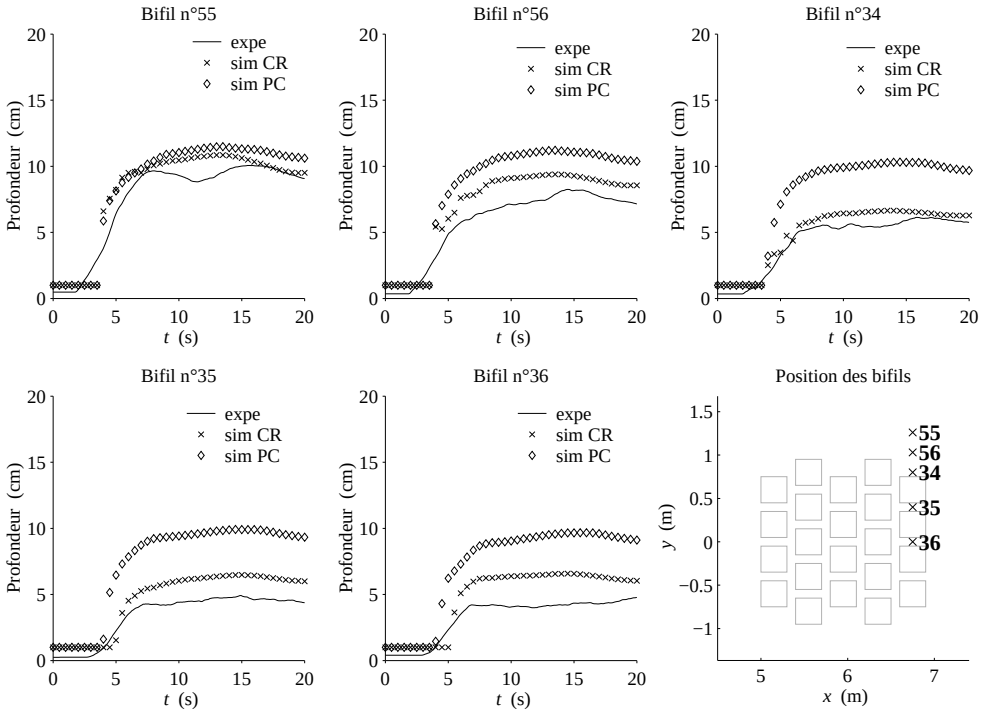


Figure B.21 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 10 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

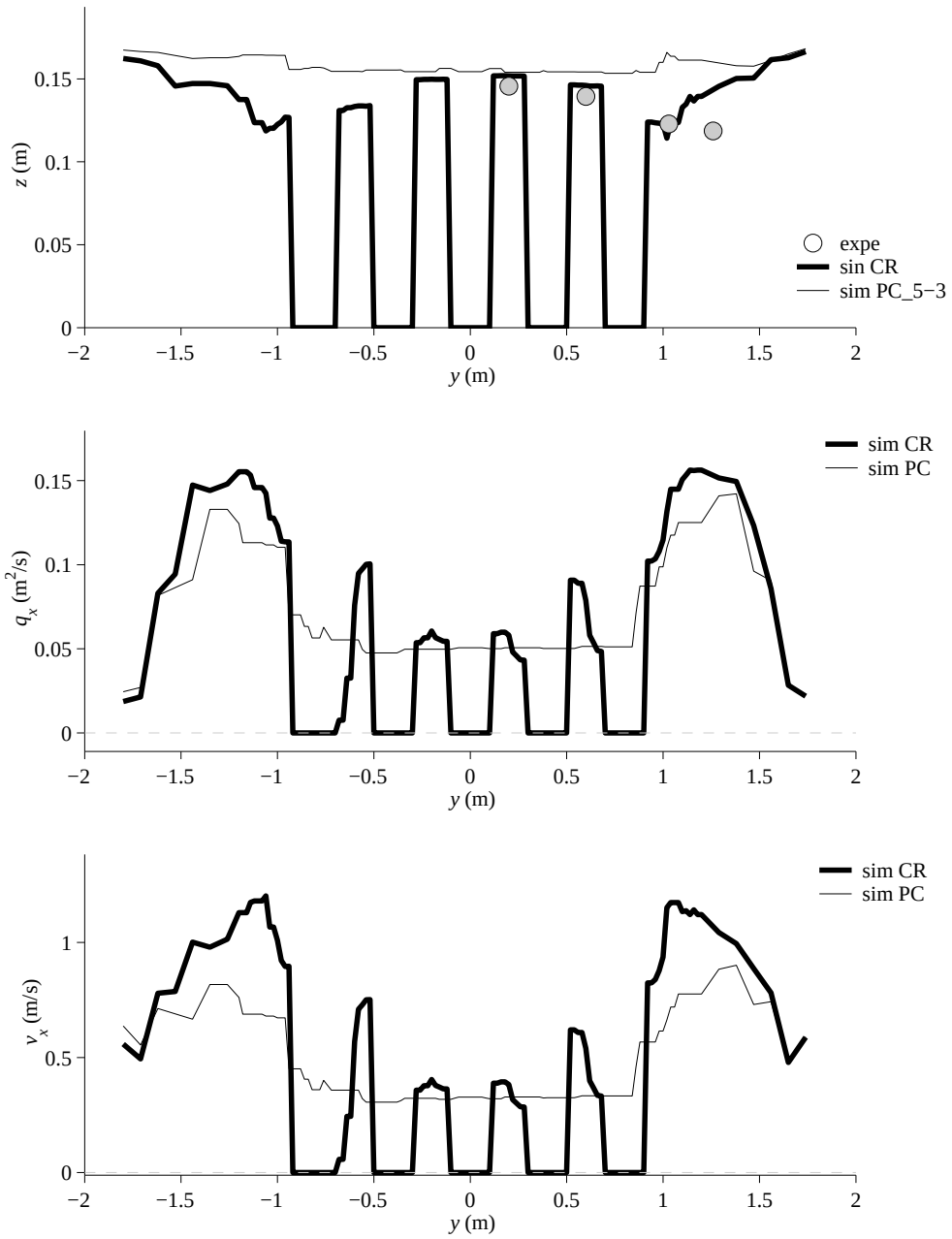


Figure B.22 – Profils en travers de la profondeur (haut), du débit unitaire (milieu), de la vitesse (bas) dans la direction x pour les simulations CR et PC avec les profondeurs expérimentales, au niveau de la rangée 04 et au temps $t = 10$ s.

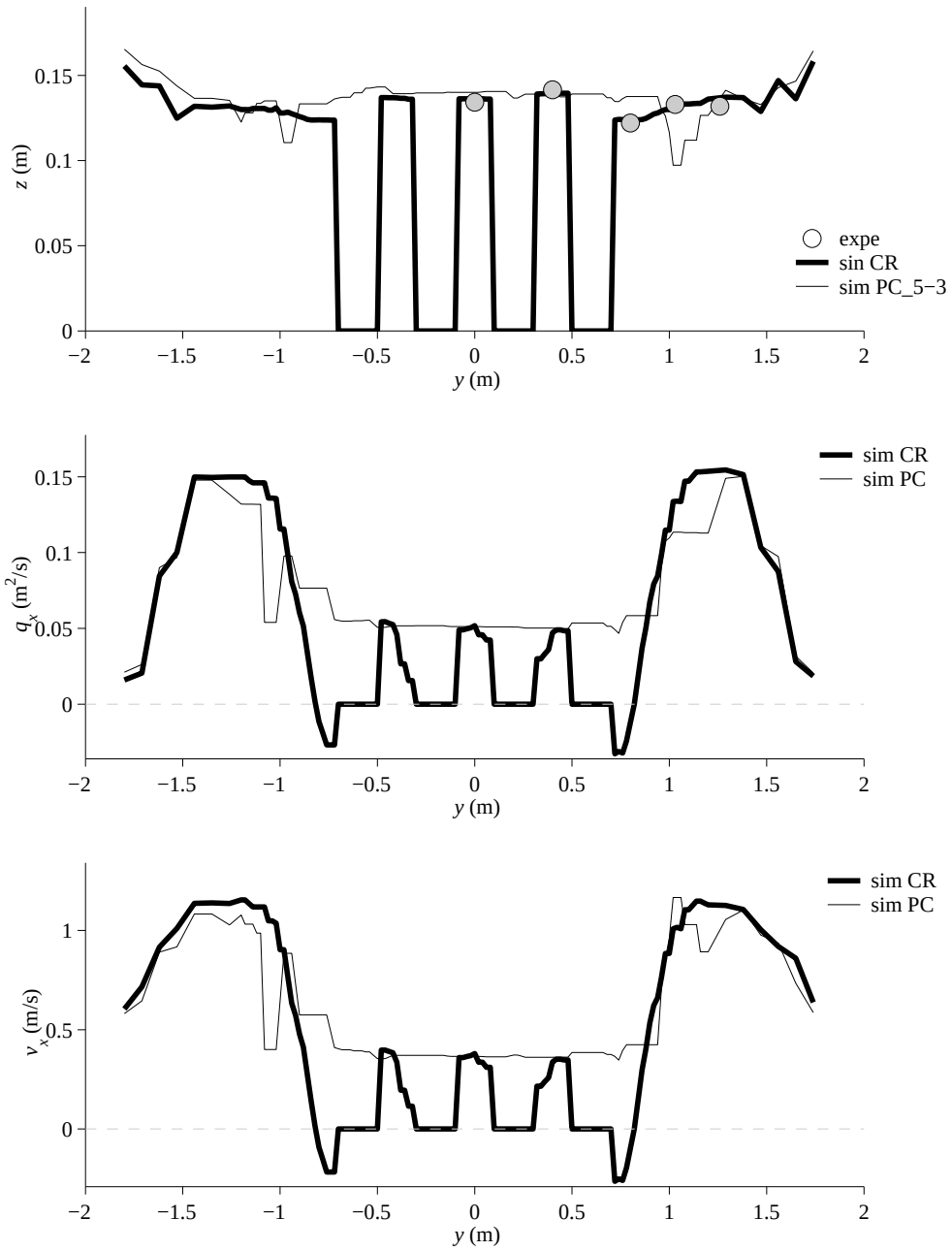


Figure B.23 – Profils en travers de la profondeur (haut), du débit unitaire (milieu), de la vitesse (bas) dans la direction x pour les simulations CR et PC avec les profondeurs expérimentales, au niveau de la rangée 06 et au temps $t = 10$ s.

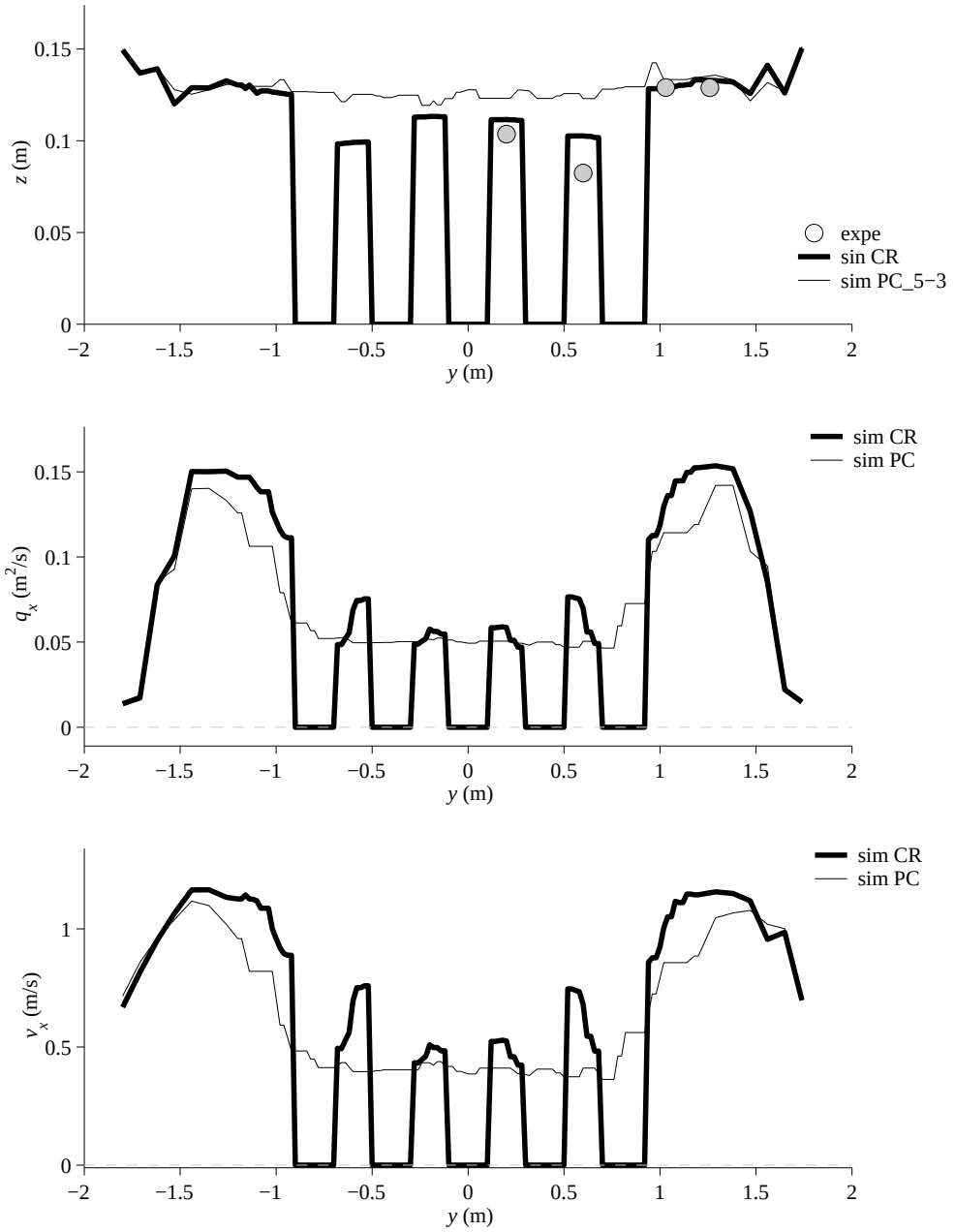


Figure B.24 – Profils en travers de la profondeur (haut), du débit unitaire (milieu), de la vitesse (bas) dans la direction x pour les simulations CR et PC avec les profondeurs expérimentales, au niveau de la rangée 08 et au temps $t = 10$ s.

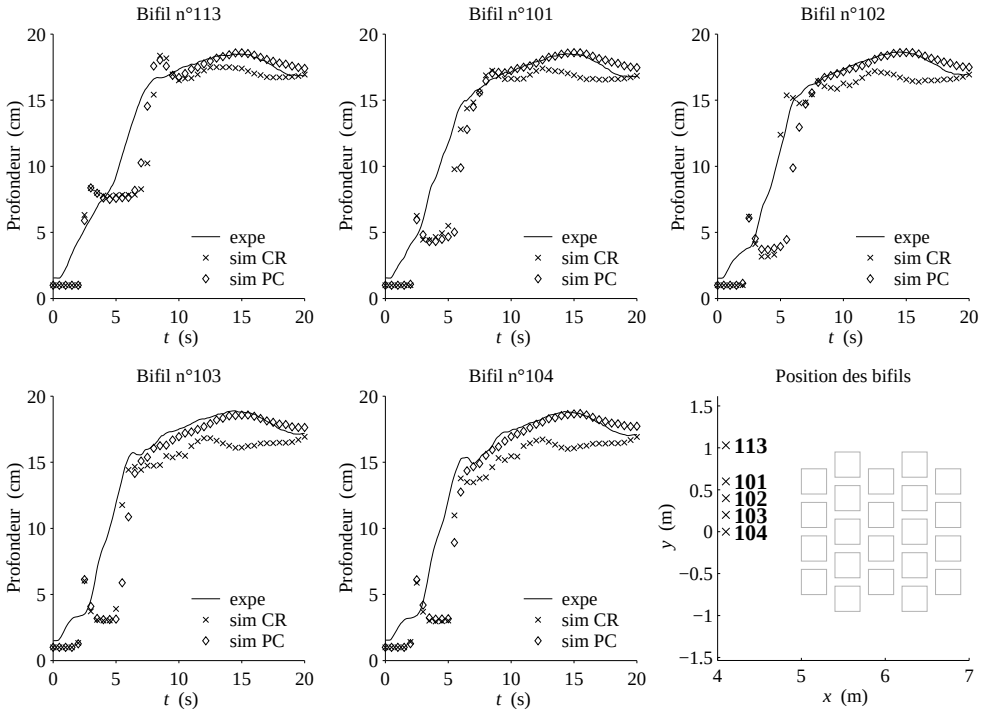


Figure B.25 – Profondeurs mesurées et simulées à l'amont de la zone urbaine (1re ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

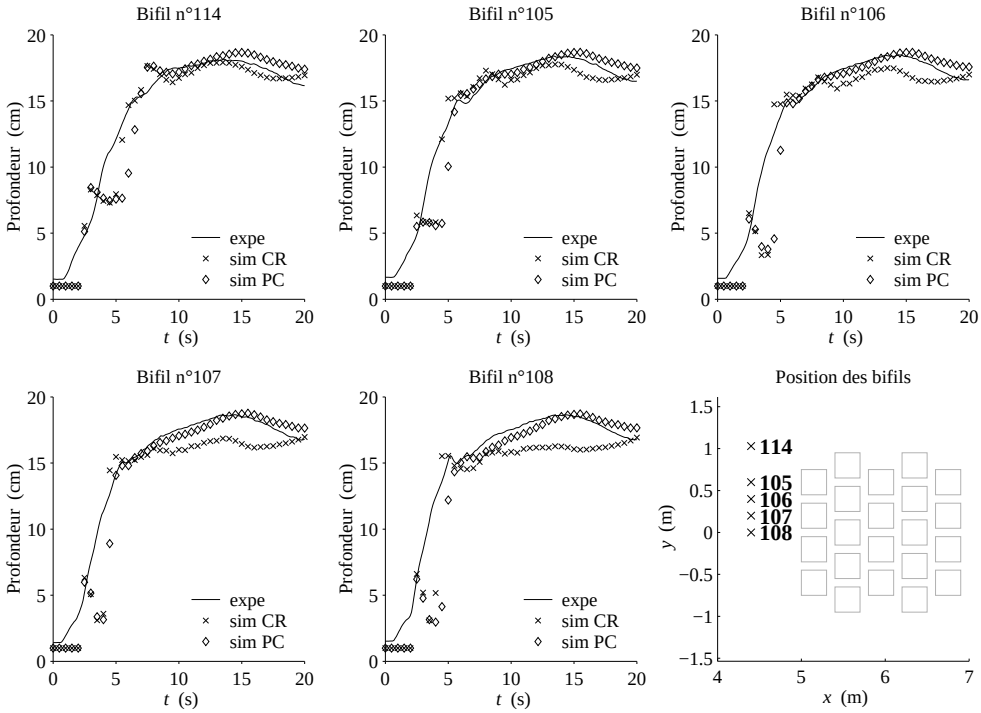


Figure B.26 – Profondeurs mesurées et simulées à l'amont de la zone urbaine (2e ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

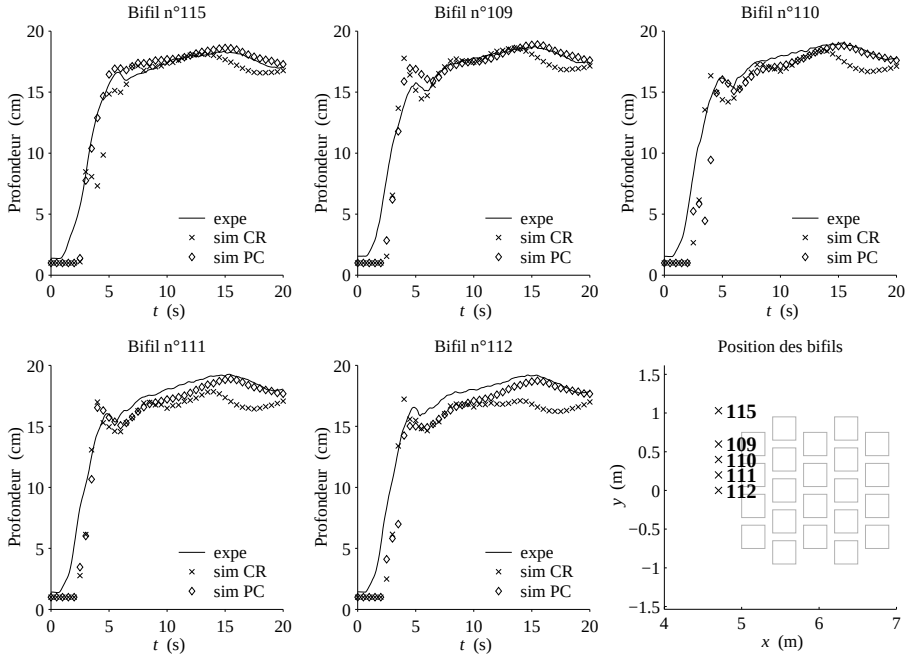


Figure B.27 – Profondeurs mesurées et simulées à l'amont de la zone urbaine (3e ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

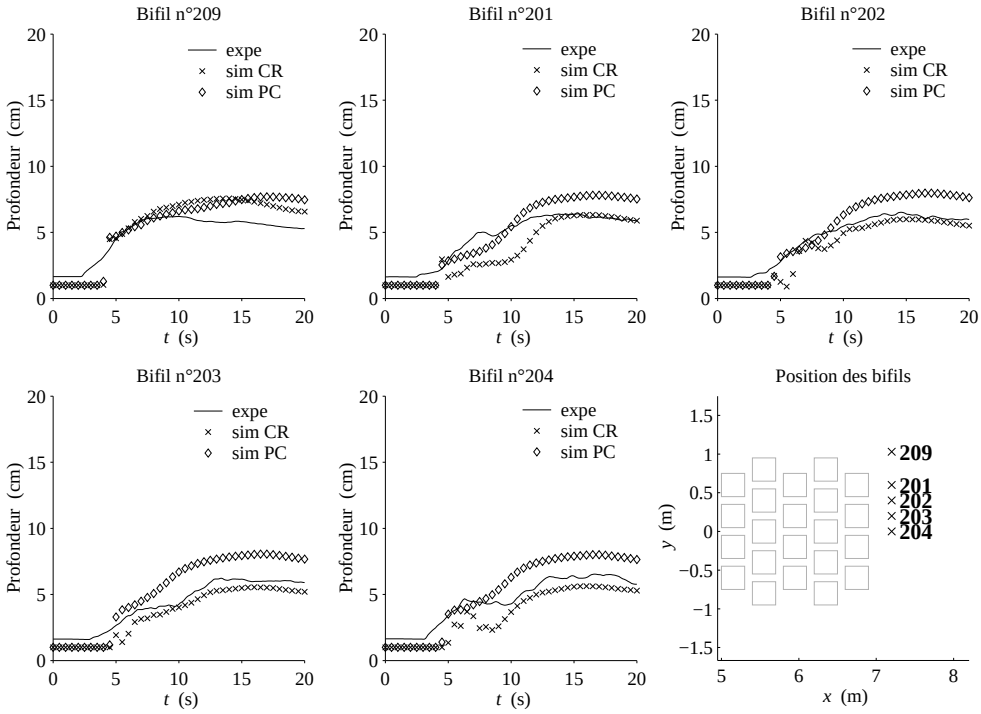


Figure B.28 – Profondeurs mesurées et simulées à l'aval de la zone urbaine (1re ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

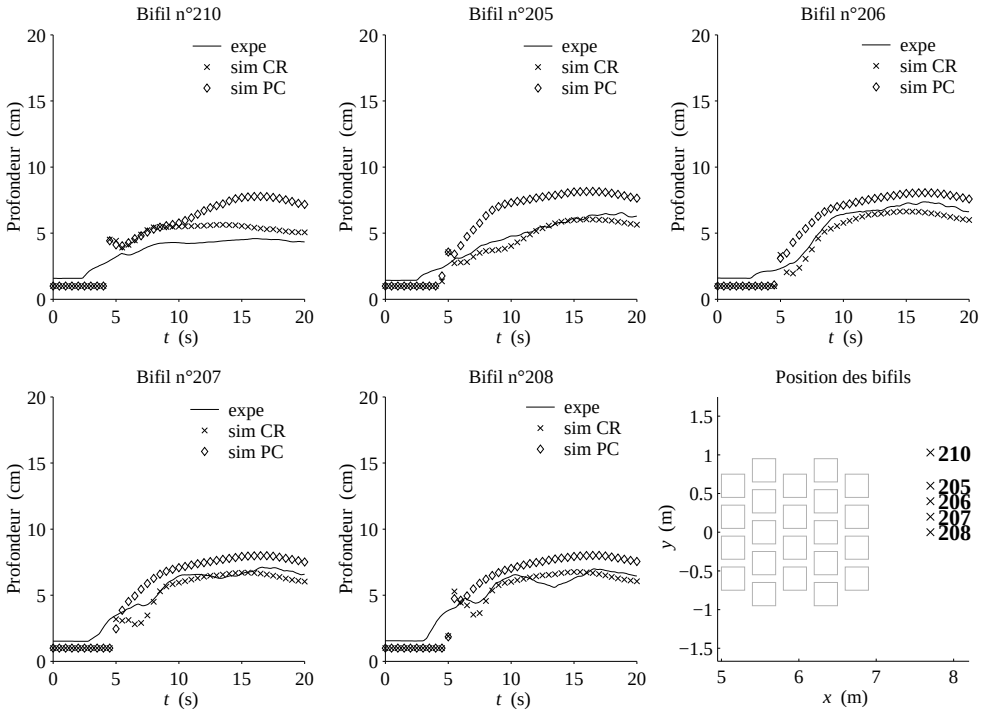


Figure B.29 – Profondeurs mesurées et simulées à l'aval de la zone urbaine (2e ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire.

B.3 Graphiques du §8.4.2

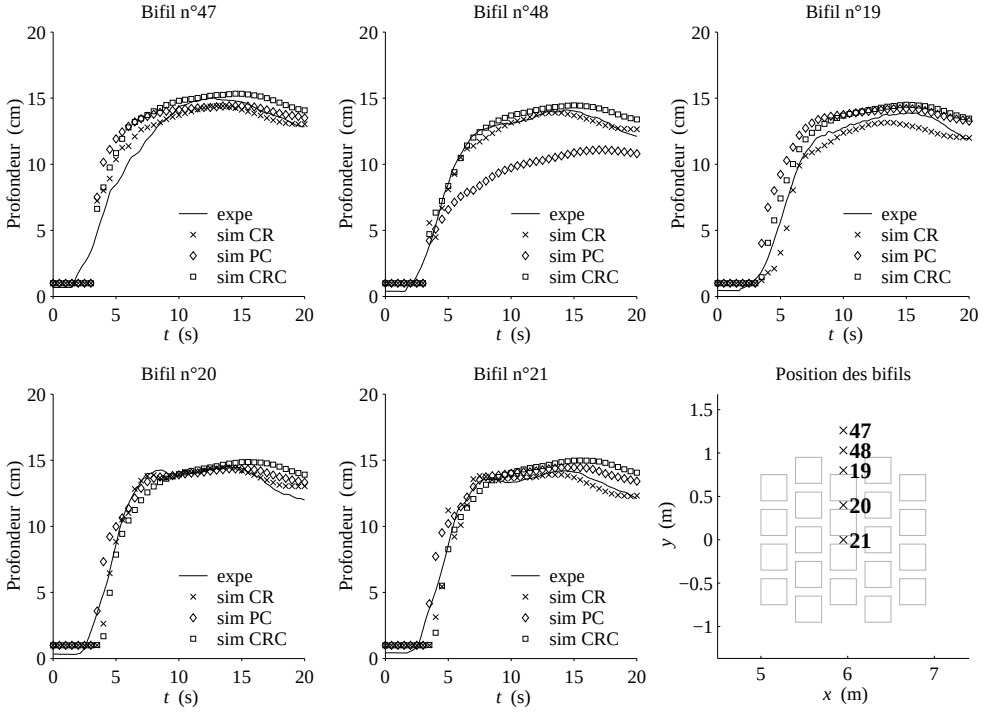


Figure B.30 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 06 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire, comparaison de la simulation CRC avec les mesures expérimentales et les simulations CR et PC.

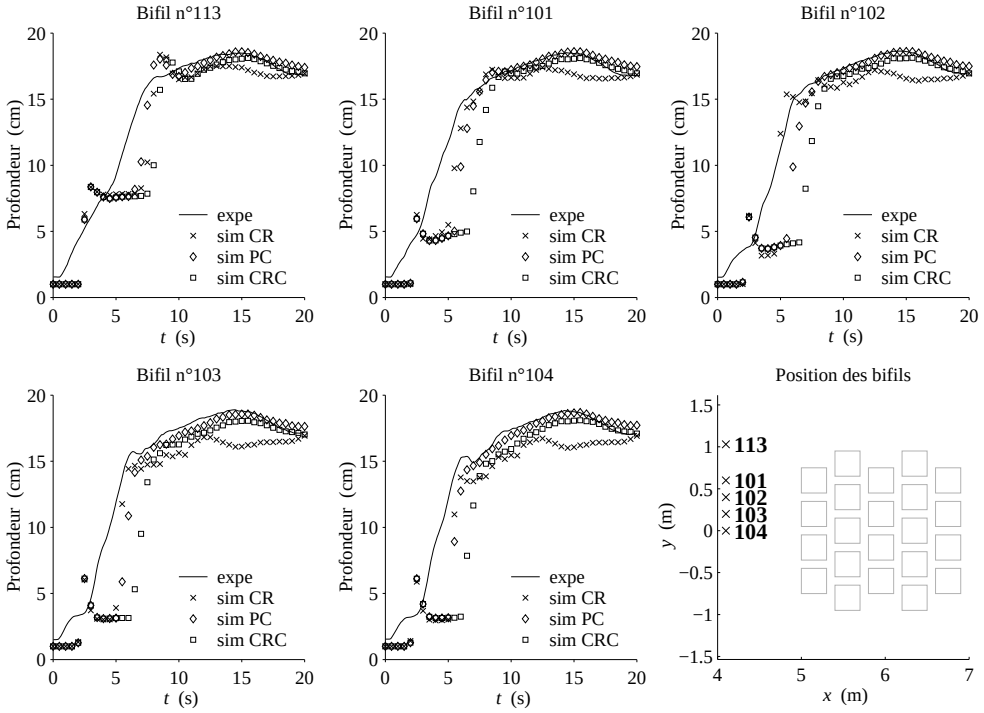


Figure B.31 – Profondeurs mesurées et simulées à l'amont de la zone urbaine (1re ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire, comparaison de la simulation CRC avec les mesures expérimentales et les simulations CR et PC.

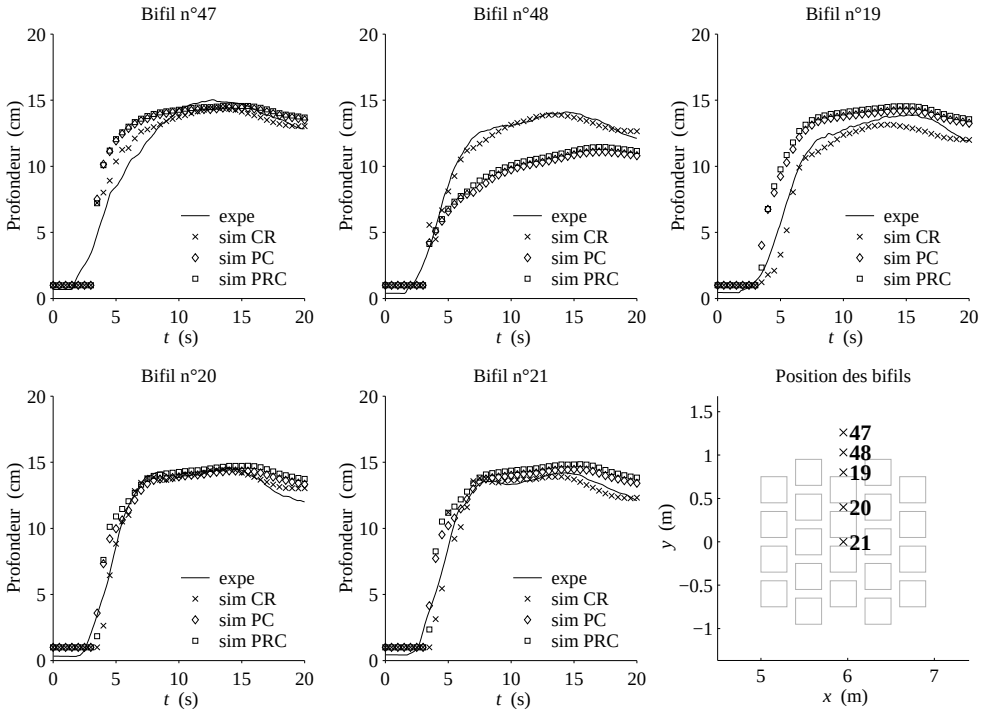


Figure B.32 – Profondeurs mesurées et simulées à la rangée 06 pour la configuration ville quinconce en régime transitoire, comparaison de la simulation PRC avec les mesures expérimentales et les simulations CR et PC.

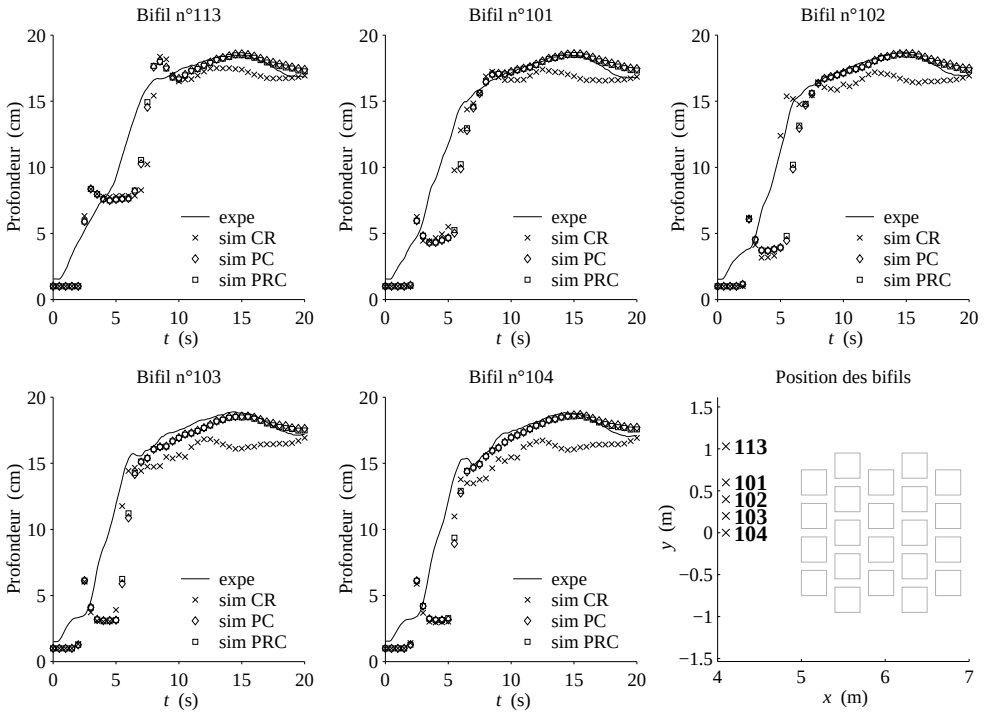


Figure B.33 – Profondeurs mesurées et simulées à l'amont de la zone urbaine (1re ligne) pour la configuration ville quinconce en régime transitoire, comparaison de la simulation PRC avec les mesures expérimentales et les simulations CR et PC.

B.4 Graphiques du §8.4.3

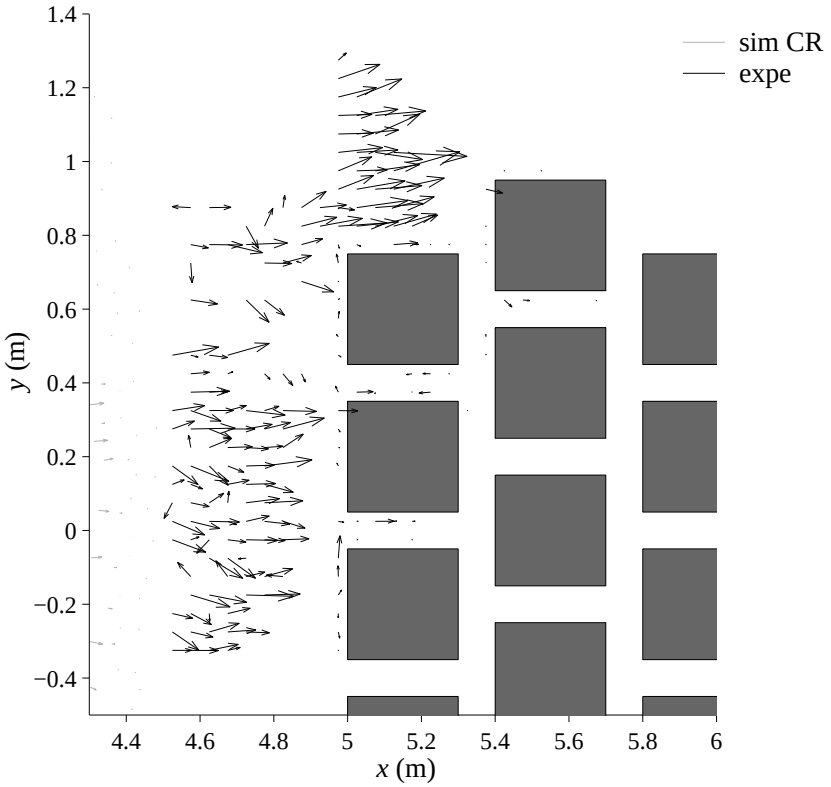


Figure B.34 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 2{,}2$ s.

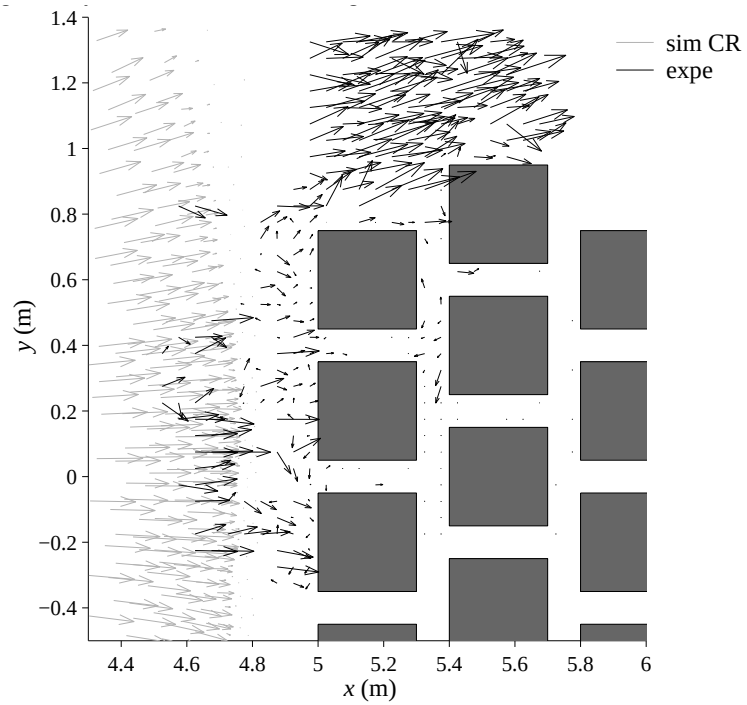


Figure B.35 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 2{,}5$ s.

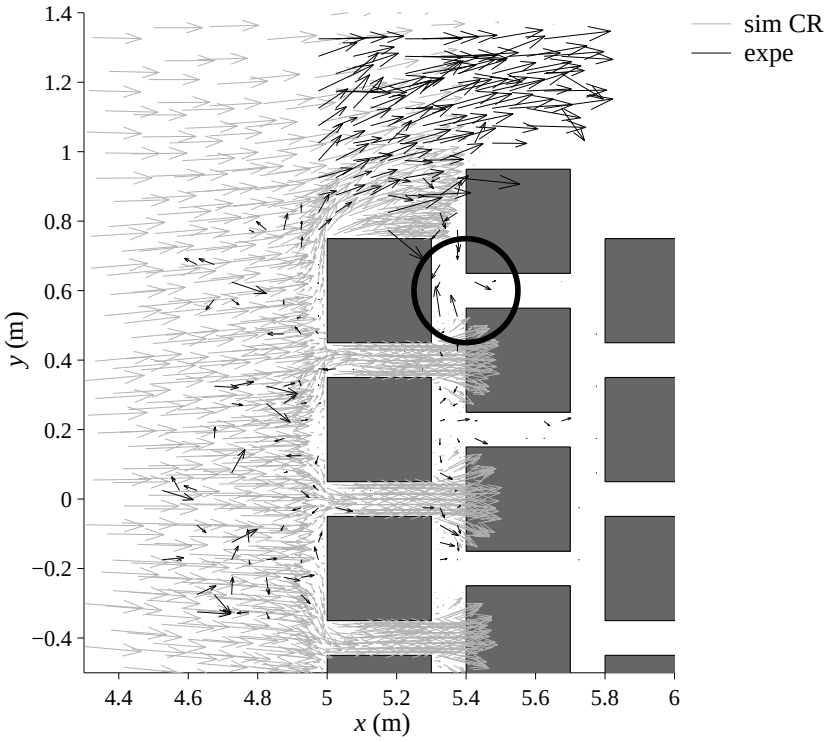


Figure B.36 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 3$ s.

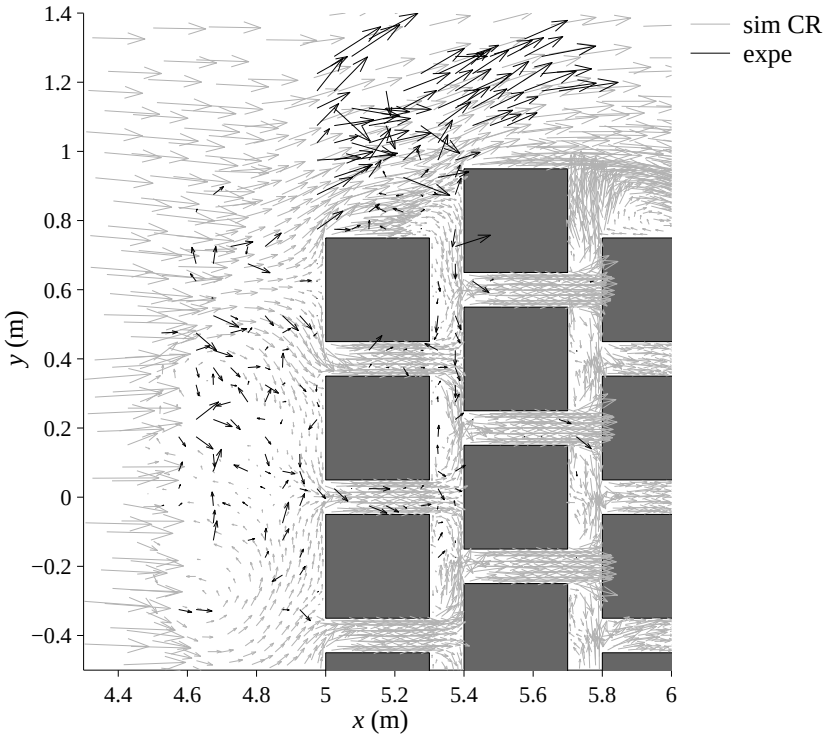


Figure B.37 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 4$ s.

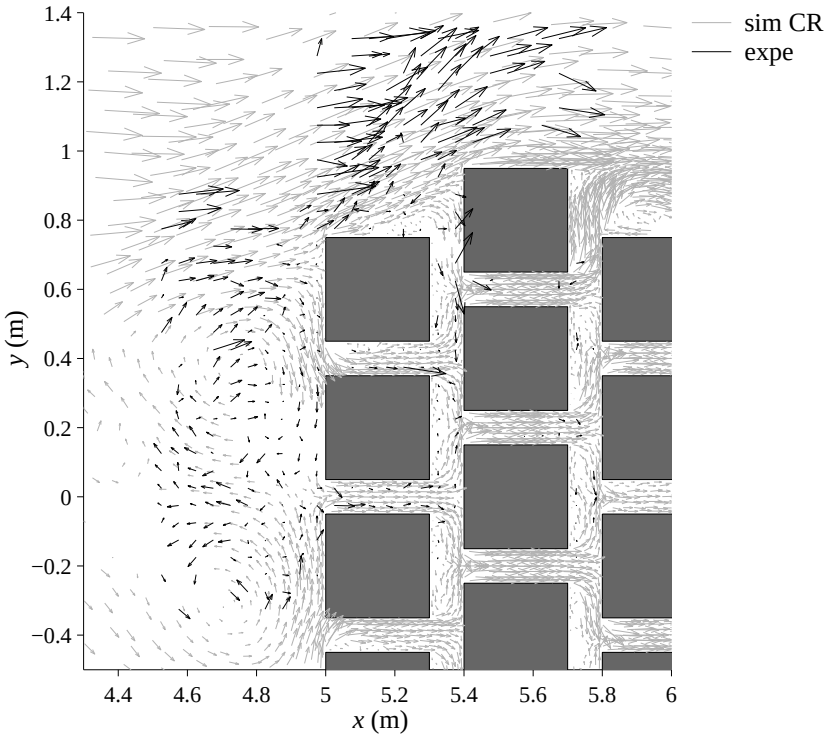


Figure B.38 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 5$ s.

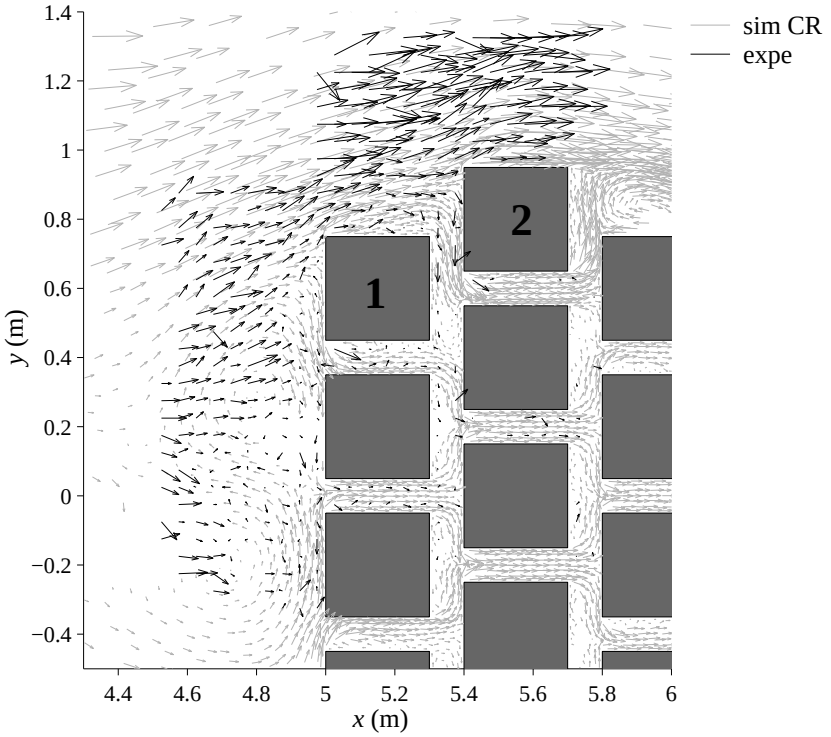


Figure B.39 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 6$ s.

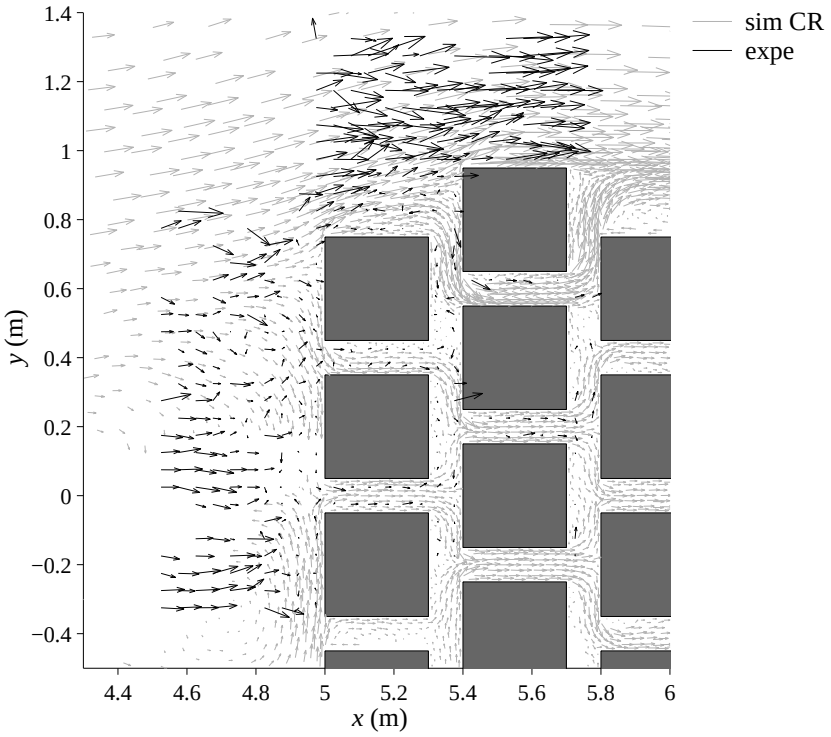


Figure B.40 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 8$ s.

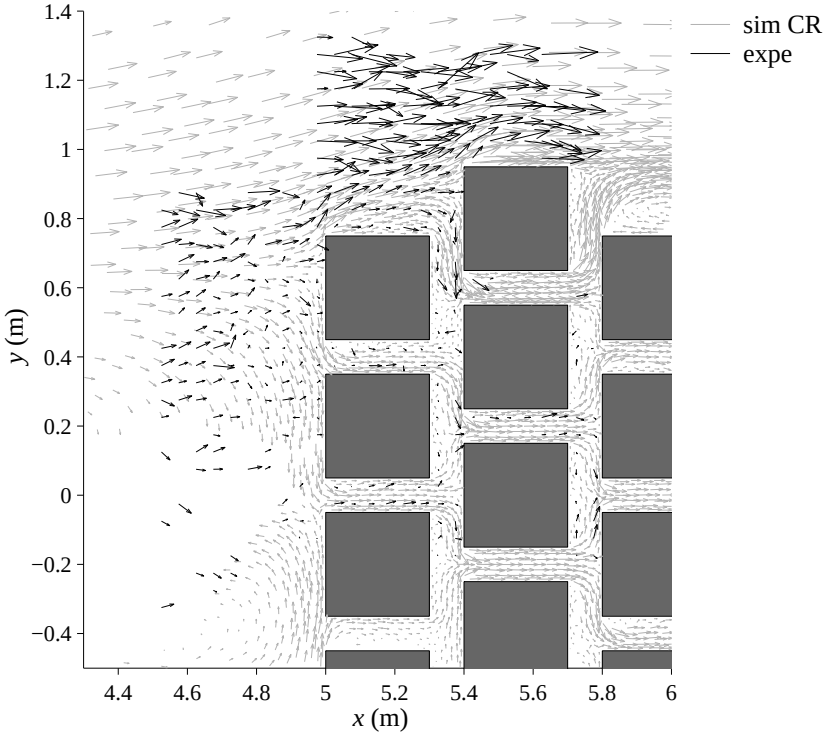


Figure B.41 – Champs de vitesse obtenus par l'imagerie digitale et par la simulation CR au temps $t = 9$ s.

B.5 Graphiques du §8.4.3 (2)

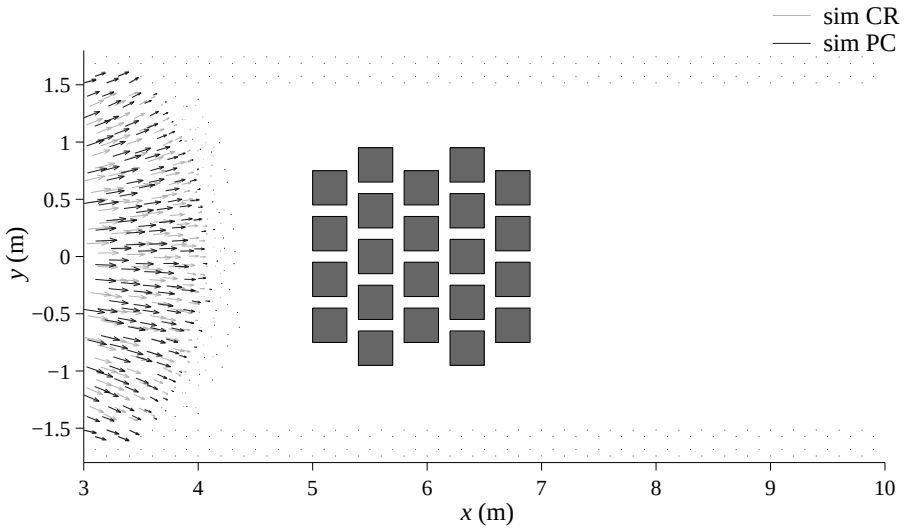


Figure B.42 – Comparaison des champs de débit unitaire obtenus par les simulations CR et PC au temps $t = 2$ s.

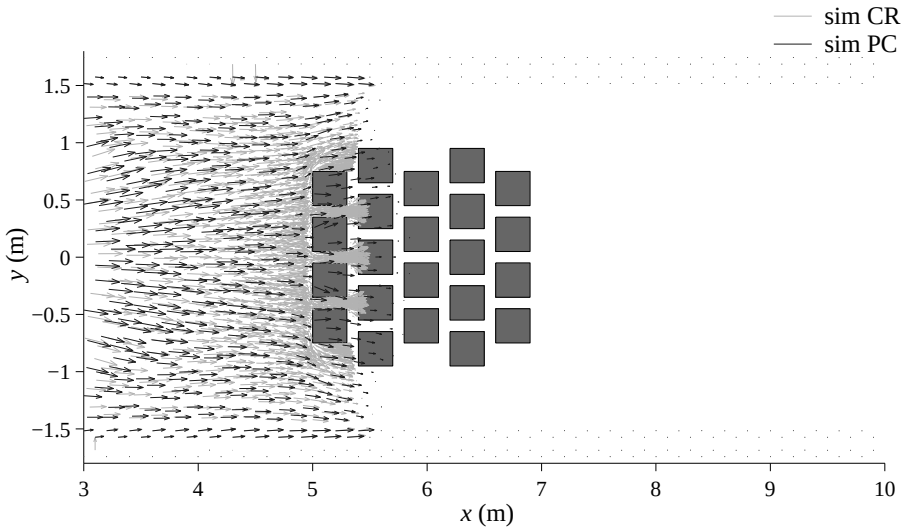


Figure B.43 – Comparaison des champs de débit unitaire obtenus par les simulations CR et PC au temps $t = 3$ s.

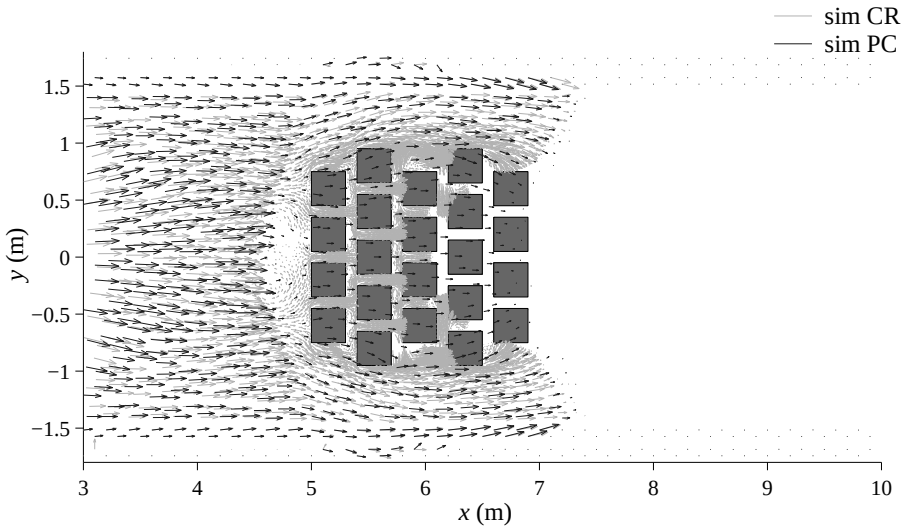


Figure B.44 – Comparaison des champs de débit unitaire obtenus par les simulations CR et PC au temps $t = 4$ s.

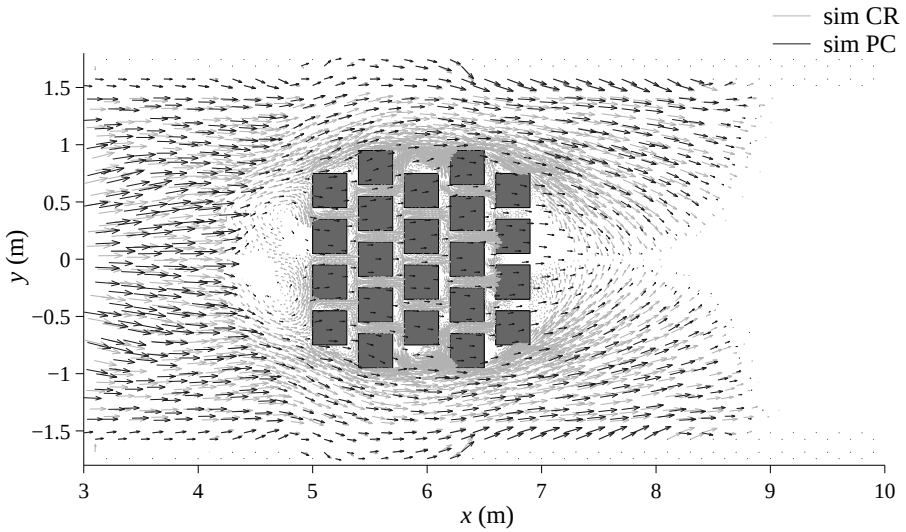


Figure B.45 – Comparaison des champs de débit unitaire obtenus par les simulations CR et PC au temps $t = 5$ s.

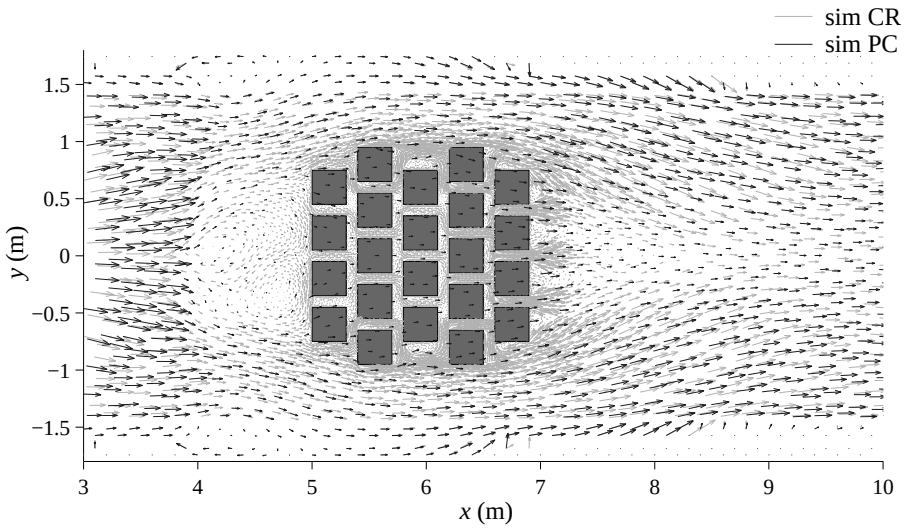


Figure B.46 – Comparaison des champs de débit unitaire obtenus par les simulations CR et PC au temps $t = 8$ s.

B.6 Graphiques du §8.4.4

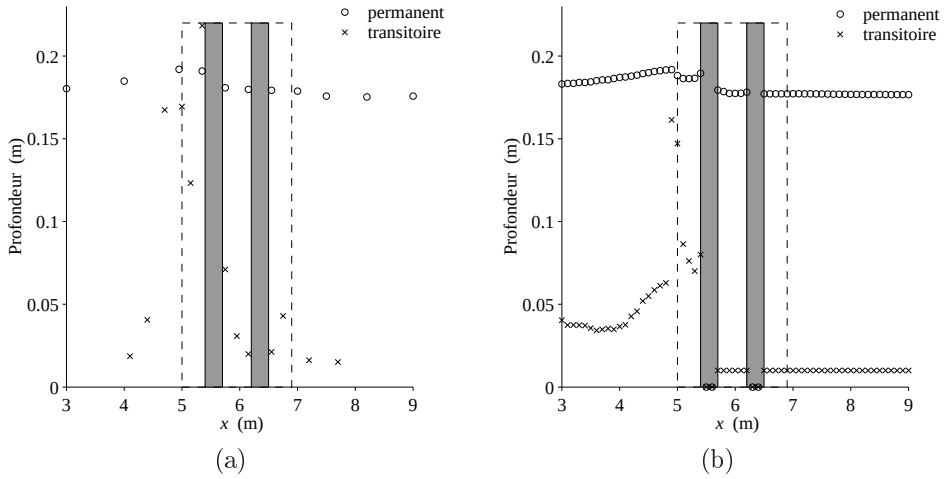


Figure B.47 – Comparaison des profondeurs à proximité et dans la zone urbaine en régime permanent et en régime transitoire ($t = 3$ s), (a) profondeurs mesurées, (b) profondeurs simulées.

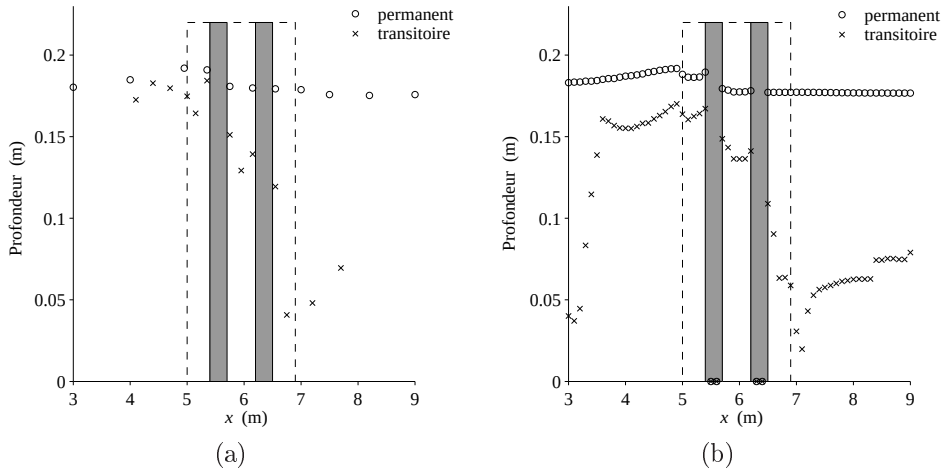


Figure B.48 – Comparaison des profondeurs à proximité et dans la zone urbaine en régime permanent et en régime transitoire ($t = 10$ s), (a) profondeurs mesurées, (b) profondeurs simulées.

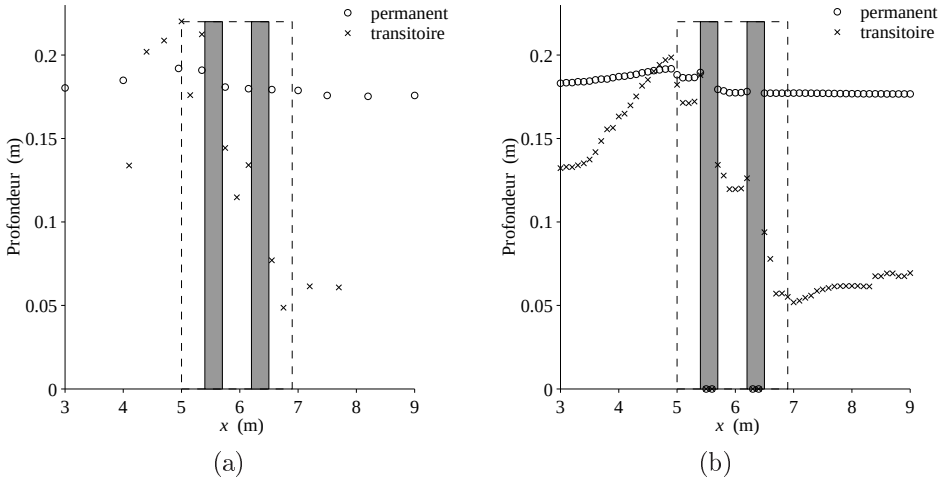


Figure B.49 – Comparaison des profondeurs à proximité et dans la zone urbaine en régime permanent et en régime transitoire ($t = 30$ s), (a) profondeurs mesurées, (b) profondeurs simulées.

B.7 Graphiques du §8.5.1

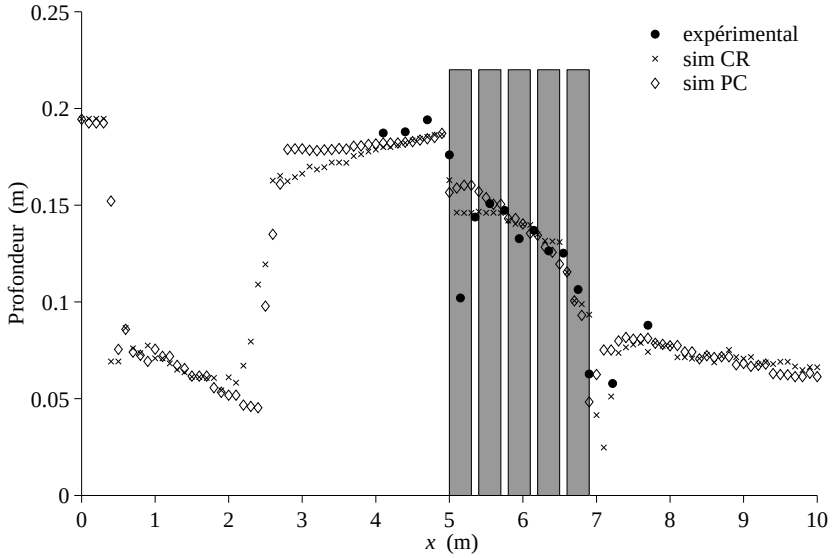


Figure B.50 – Profil en long des profondeurs mesurées et simulées sur la configuration *ville droite* au temps $t = 17$ s le long de l'axe $y = 0{,}6$.