



Contribution à la modélisation et à l'évaluation de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques

Karim Labadi

► To cite this version:

Karim Labadi. Contribution à la modélisation et à l'évaluation de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Technologie de Troyes, 2005. Français. NNT : . tel-00389432

HAL Id: tel-00389432

<https://theses.hal.science/tel-00389432>

Submitted on 28 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Karim Labadi

Contribution
à la modélisation et
à l'analyse de performances
des systèmes logistiques
à l'aide d'un nouveau modèle
de réseaux de Petri
stochastiques

Spécialité :
Optimisation et Sûreté des Systèmes



THESE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES Spécialité : OPTIMISATION ET SURETE DES SYSTEMES

présentée et soutenue par

Karim LABADI

le 29 novembre 2005

**Contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des
systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de
Petri stochastiques**

JURY

Mme N. SAUER	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Président
Mr L. AMODEO	ENSEIGNANT CHERCHEUR UTT	Directeur de thèse
Mr H. CHEN	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Directeur de thèse
Mr J.-L. FERRIER	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur
Mr N. ZERHOUNI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Rapporteur
Mr J. ZAYTOON	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Examineur

A mes très chers parents

A mes frères

A toute ma famille

A ma femme Nessia, pour sa patience et son implication ...

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements les plus sincères à mes deux directeurs de thèse, Monsieur Haoxun Chen et Monsieur Lionel Amodeo, pour la confiance qu'ils m'ont accordée et pour m'avoir guidé et suivi tout au long de ce travail. Je leur suis également reconnaissant pour leur proximité et leurs qualités humaines qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

Mes remerciements vont également à Monsieur Chengbin Chu en tant que directeur du Laboratoire d'Optimisation des Systèmes Industriels (LOSI) pour m'avoir permis de réaliser mes recherches doctorales au sein de son laboratoire ainsi que pour son attention constante aux bonnes conditions de travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux professeurs qui m'ont fait l'honneur de composer le jury de ma thèse :

Monsieur le professeur Jean-Louis Ferrier, directeur du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA) à l'université d'Angers et Monsieur Nouredine Zerhouni, Professeur à l'ENSM de Besançon au sein du Laboratoire d'Automatique de Besançon (LAB) qui m'ont fait le grand honneur d'avoir rapporté ma thèse.

Monsieur le Professeur Janan Zaytoon, directeur du Laboratoire d'Automatique et de Microélectronique (LAM) à l'université de Reims pour le grand honneur qu'il m'a fait d'avoir examiné ma thèse, Madame Nathalie Sauer, Professeur à l'université de Metz d'avoir pris la direction du jury et d'avoir bien voulu examiner ma thèse.

Que tous les membres du LOSI et toutes les personnes qui m'ont soutenu soient également remerciés.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERALE

1

Chapitre 1 État de l'art sur les réseaux de Petri et les chaînes logistiques

1. INTRODUCTION	8
2. LES RESEAUX DE PETRI	9
2.1. Extension des réseaux de Petri	10
2.1.1 Réseaux de Petri temporisés	11
2.1.2 Réseaux de Petri stochastiques (SPN)	11
2.1.3 Réseaux de Petri colorés	12
2.1.4 Réseaux de Petri continus et hybrides	13
2.2. Application des RdPs aux systèmes de production	13
2.2.1 Applications à l'évaluation de performances	13
2.2.2 Applications à des problématiques diverses	14
3. DESCRIPTION DES SYSTEMES LOGISTIQUES	14
3.1. Le concept de la logistique	15
3.2. Définition d'une chaîne logistique	15
3.3. Structure d'une chaîne logistique	16
3.4. Description et complexité des flux	17
3.5. Description des systèmes de stockage	18
3.5.1 Le système de gestion de stock	19
3.5.2 Politiques de gestion de stock	20
4. ETUDE DES CHAINES LOGISTIQUES	21
4.1. Revue de la littérature sur l'étude de la CL	22
4.1.1 Modèles utilisés	22
4.1.2 Évaluation de performances	23
4.1.3 Caractère des applications	24
4.1.4 Autres thématiques	25
4.1.5 Positionnement de la simulation	25
4.2. Applications des RdPs aux systèmes logistiques	26
4.2.1 Revue de la littérature CL / RdPs	27
4.3.2.1. Etudes utilisant les RdPs stochastiques	27
4.3.2.2. Etudes utilisant les RdPs colorés	28
4.3.2.3. Etudes utilisant d'autres modèles RdPs	29
4.2.2 Analyse des études CL / RdPs	30
5. CONCLUSION	32

Chapitre 2

Les réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques

1. INTRODUCTION	36
2. DESCRIPTION DES BDSPNS	36
2.1. Intérêts de l'introduction des BDSPNs	36
2.2. Définition générale	38
2.3. Marquage d'un BDSPN	39
3. DYNAMIQUE D'UN BDSPN	40
3.1. Opérations arithmétiques sur les jetons lots	41
3.2. Règles de fonctionnement discret	41
3.2.1 Validation d'une transition discrète	41
3.2.2 Franchissement d'une transition discrète	42
3.2.3 Interprétation du fonctionnement discret	42
3.3. Règles de fonctionnement lot	43
3.3.1 Validation d'une transition lot	43
3.3.2 Franchissement d'une transition lot	43
3.3.3 Interprétation du fonctionnement lot	44
3.4. Relations entre les deux types de fonctionnement	45
3.5. Illustrations pratiques du fonctionnement	46
3.5.1 Synchronisation de flux de produits et de commandes lots	46
3.5.2 Assemblage de deux types de produits sur commande lot	47
3.5.3 Comportement d'un BDSPN par rapport à un RdP classique	48
4. MATRICE D'INCIDENCE ET EQUATION D'ETAT	50
4.1. Matrice d'incidence	51
4.2. Equation de franchissement d'une seule transition	51
4.3. Equation d'une séquence de franchissements	52
4.4. Illustration de l'équation d'état	52
5. POLITIQUES DE FRANCHISSEMENT	53
5.1. Politiques associées aux places lots	54
5.1.1 politique par ordre d'arrivée	55
5.1.2 politique à choix aléatoire	55
5.1.3 politique avec fonction tri	55
5.2. Politiques associées aux transitions	56
5.2.1 politique de service	56
5.2.2 politique d'exécution	56
5.3. Délai de franchissement d'une transition lot	57
6. SITUATIONS DE CONFLITS ET RESOLUTION	58
6.1. Conflit de franchissement discret (<i>DFC</i>)	58
6.1.1 Définition d'un <i>DFC</i>	58
6.1.2 Résolution d'un <i>DFC</i>	59
6.2. Conflit de franchissement lot (<i>BFC</i>)	60
6.2.1 Définition d'un <i>BFC</i>	60
6.2.2 Résolution d'un <i>BFC</i>	60
6.3. Conflit de franchissement lot généralisé (<i>GBFC</i>)	63
6.3.1 Définition d'un <i>GBFC</i>	63
6.3.2 Résolution d'un <i>GBFC</i>	63
6.4. Conflit de franchissements discret / lot (<i>DBFC</i>)	66
6.4.1 Définition d'un <i>DBFC</i>	66
6.4.2 Résolution d'un <i>DBFC</i>	66
6.4.3 Cas particulier du <i>DBFC</i>	66
7. PROPRIETES ESSENTIELLES D'UN BDSPN	68
7.1. La bornitude	68
7.2. La vivacité	69
7.3. Le blocage lot	70
7.4. L'état d'accueil et réversibilité	74
8. CONCLUSION	75

Chapitre 3

Techniques d'analyse des réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques

1. INTRODUCTION	79
2. TECHNIQUES D'ANALYSE QUALITATIVE	79
2.1. Technique d'analyse par énumération	81
2.1.1 Graphe des μ -marquages	81
2.1.2 Arborescence et graphe de couverture	82
2.1.2.1 Couverture d'un μ -marquage	82
2.1.2.2 Constructions d'un graphe de couverture	84
2.1.2.3 Illustration du graphe de couverture	86
2.1.2.4 Analyse de propriétés	87
2.2. Technique d'analyse par les invariants	88
2.2.1 Analyse des P-invariants et T-invariants	88
2.2.2 Illustration de l'analyse des invariants	89
2.2.2.1 Etudes des p-invariants du système	89
2.2.2.2 Etude des t-invariants du système	91
2.3. Technique d'analyse par réduction	92
2.3.1 Réductions classiques	92
2.3.2 Réductions spécifiques	93
2.3.2.1 Suppression d'une place lot	93
2.3.2.2 Suppression d'une place implicite	96
2.4. Technique d'analyse par le RdP discret associé	97
2.4.1 RdP discret associé ($RdP\mathcal{A}$)	97
2.4.2 Notion de q-validation d'une transition	99
2.4.3 Propriétés BDSPN / RdP discret associé	101
2.4.4 Autres propriétés et remarques	103
2.5. Technique d'analyse par transformation	105
2.5.1 Passage d'un BDSPN à un RdP classique : cas particulier.	106
2.5.2 Passage d'un BDSPN à un RdP classique : cas général	108
2.5.3 Applications de la technique de transformation	110
2.5.4 Nécessité absolue des BDSPNs	112
3. TECHNIQUES D'EVALUATION DE PERFORMANCES	115
3.1. Approche analytique	115
3.1.1 Procédure générale	116
3.1.2 Indicateurs de performances d'un BDSPN	117
3.1.2.1 Indices relatifs aux composants lots	117
3.1.2.2 Indices relatifs aux composants discrets	119
3.1.3 Exemple d'application	119
3.2. Approche basée sur la simulation	122
4. CONCLUSION	125

Chapitre 4

Modélisation et analyse de performances des systèmes logistiques à l'aide des BDSPNs

1. INTRODUCTION	129
2. MODELISATION DES SYSTEMES DE GESTION DE STOCK	129
2.1. Modélisation par un RdP classique	130
2.2. Modélisation par les BDSPNs	131
2.2.1 Modèles des politiques avec révision continue	132
2.2.2 Modèles des politiques avec révision périodique	133
2.2.3 Extension des modèles développés	135
2.2.4 Autres politiques de gestion de stock	137
2.3. Dynamique des modèles développés	138

2.3.1 Politique (s, S) avec révision continue	138
2.3.2 Politique (s, Q) avec révision continue	140
2.3.3 Politique (s, S) avec révision périodique	140
3. EVALUATION ET ANALYSE DE PERFORMANCES	141
3.1. Evaluation d'une politique de gestion	141
3.1.1 Les coûts d'une politique de gestion de stock	141
3.1.2 Le taux de couverture et le taux de rotation	143
3.1.3 La qualité de service	144
4. ETUDE ANALYTIQUE D'UN SYSTEME DE STOCKAGE	144
4.1. Description du système	145
4.2. Modélisation du système	145
4.2.1 Les paramètres du modèle	146
4.2.2 Génération de la demande client	146
4.3. Evolution du système modélisé	147
4.4. Résolution du processus stochastique associé	149
4.5. Evaluation de performances du système	151
4.5.1 Stock moyen	151
4.5.2 Coût moyen de stockage	152
4.5.3 Probabilité d'un stock vide	152
4.5.4 Fréquence moyenne d'approvisionnement	152
4.5.5 Coût moyen de passation de commande	153
4.5.6 Coût moyen d'achat	153
4.5.7 Taux de couverture	154
4.6. Analyse de performances du système	155
5. ETUDE D'UN SYSTEME DE STOCKAGE PAR SIMULATION	157
5.1. Description et modélisation du système	157
5.2. Analyse de l'influence des paramètres	158
5.2.1 Variation du seuil de re-complètement	158
5.2.2 Variation du délai d'approvisionnement	160
5.2.3 Variation du taux de la demande	161
6. APPLICATION A L'ETUDE D'UNE CHAINE LOGISTIQUE	161
6.1. Description du système d'étude	162
6.2. Modélisation du système considéré	162
6.3. Evaluation et analyse de performances	164
6.3.1 Évaluation des performances du système	164
6.3.2 analyse du comportement du système	166
7. CONCLUSION	169
 CONCLUSION GENERALE	 172
ANNEXE A	178
BIBLIOGRAPHIE	189



Introduction Générale

Avec la mondialisation de l'économie et le développement de nouveaux outils de communication, les flux entre les entreprises ont augmenté considérablement ces dernières années. Maintenant que l'offre est supérieure à la demande, les entreprises se doivent de séduire des clients toujours plus exigeants sur les délais de livraison, une meilleure qualité des produits et des prix attractifs. L'évolution rapide des marchés, des technologies et des formes de concurrence impose un progrès permanent. Outil de transformation des matières premières en produits consommables, le système de production est au centre des entreprises manufacturières, de leur recherche de productivité et de compétitivité. Les systèmes de production ont longtemps été le centre de travaux de recherche. Cependant, la prise de conscience des exigences actuelles des entreprises organisées en réseaux (chaînes) a favorisé une remise en cause des habitudes de production et d'organisation. Dans ce contexte, il est maintenant nécessaire d'orienter d'avantage cette recherche aux processus qui influent en amont et en aval la production. Il faut donc s'intéresser à l'étude de la chaîne logistique qui intègre les fournisseurs, les producteurs, les distributeurs, les transporteurs et les clients. Cette nécessité se traduit par une demande croissante des industriels mais se trouve confrontée à un manque de modèles complets et de méthodes d'analyse convaincantes pouvant prendre tous les aspects d'une chaîne logistique.

Depuis déjà plus d'une quarantaine d'années, les réseaux de Petri (RdPs) ont été reconnus comme des outils puissants de modélisation, d'analyse et d'évaluation des systèmes à événements discrets (SED) dont font partie les chaînes logistiques et les systèmes de stockage. Le succès des RdPs se doit en particulier à leur support à la fois graphique et mathématique performant aussi bien pour l'analyse et l'évaluation analytique que pour la simulation du système étudié. Les RdPs ont été très largement exploités pour l'étude des systèmes flexibles de production. Cependant, très peu de travaux de recherche concernent leur utilisation en logistique. Toutefois, de récentes études souvent préliminaires et exploratrices ont montré le potentiel du choix des RdPs pour l'étude de cette classe de systèmes. En revanche, l'analyse des résultats de la littérature révèle que les modèles utilisés ignorent des aspects très importants dans le fonctionnement des systèmes étudiés. Il s'agit très particulièrement des phénomènes lots omniprésents dans différentes locations d'une chaîne logistique. Dans un système de stockage par exemple, le niveau de chaque stock est inspecté suivant la politique de gestion suivie. D'une manière générale, dès que le stock atteint un certain seuil prédéterminé, une commande lot d'une quantité de produits est passée pour réapprovisionner le stock et le ramener à un niveau fixé. La commande lot engendre à son tour des opérations de transport ou de livraison en mode lot pour accomplir le réapprovisionnement du stock. Dans une chaîne logistique, l'aspect lot s'impose dans la gestion de

nombreuses zones de stockage qui la compose et dans l'exécution des commandes des différents clients qui se font fréquemment en mode lot. Cette caractéristique se propage alors dans tous les différents maillons de la chaîne logistique pour affecter les détaillants, les distributeurs, les transporteurs, les unités de production et les fournisseurs. Ceci se traduit dans le fonctionnement du système par diverses activités faisant évoluer le flux de matières et de produits, le flux de commandes et d'ordres et le flux d'information sous formes de quantités discrètes de différentes tailles (lots). La prise en compte de cet aspect est indispensable dans les différentes phases d'une étude de conception ou de configuration pour espérer une évaluation correcte du système à étudier. Il faut donc un modèle et des méthodes d'analyse pouvant supporter correctement les conséquences des phénomènes lots sur la dynamique des chaînes logistiques et des systèmes à événements discrets en général.

La modélisation et l'étude des chaînes logistiques complètes nécessitent de mettre au point un modèle pouvant intégrer tous leurs aspects notamment l'aspect lot qui n'est pas sans importance dans leur comportement et leur analyse. Malgré tous les avantages que peuvent apporter les différentes classes de RdPs existantes, il faut sans doute un modèle mieux adapté pour les chaînes logistiques. Le modèle RdP à utiliser doit pouvoir décrire et gérer la dynamique des lots évoluant en quantités discrètes et de tailles variables. Il faut que le modèle puisse distinguer à tout instant les différentes tailles des lots caractérisant les différents flux du système. Il faut que le modèle prenne en compte que le traitement d'un lot de taille x et un lot de taille y par une même transition ne nécessite pas forcément un même nombre de ressources ou un même délai opératoire. Il faut que le mécanisme de franchissement du modèle RdP puisse permettre qu'une transition puisse être franchie par des quantités de jetons regroupés en lots de différentes tailles lors de l'évolution du réseau. Il faut que le modèle puisse permettre le contrôle de son propre état (marquage) instantanément pour déclencher des activités (franchissement de transitions) spécifiques pour des états critiques. C'est le cas par exemple de déclencher l'approvisionnement d'un stock d'une quantité de taille égale au niveau de l'inventaire du stock actuel plus la demande client en cours lorsque son niveau d'inventaire est en dessous d'un certain seuil. Toutes ces questions et autres qui ont un sens pratique dans le fonctionnement et la dynamique des chaînes logistiques et les systèmes de stockage trouvent des solutions dans nos travaux récemment effectués [CHE 05]- [CHE 03]-[CHE 02]-[CHE 01]-[LAB 05a]-[LAB 05b]-[LAB 05c]-[LAB 04a]-[LAB 04b] et qui font l'objet de ce rapport de thèse. Ces travaux portent sur le développement d'un nouveau modèle RdP dit « Réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques (BDSPNs) » adapté pour décrire efficacement et simplement des flux évoluant en quantités discrètes (lots) et ils permettent de prendre en compte des activités plus spécifiques (commandes, approvisionnement, production en mode lot). Nos travaux sont issus d'une

problématique industrielle soulevée lors d'une étude d'une chaîne logistique au niveau de la société AMP- SIMEL à Gevrey Chambertin (21). Une étude préliminaire du sujet a révélé que l'aspect lot est partout dans le système et en particulier autour des systèmes de stockage qui le compose. Ainsi, l'utilisation des RdPs classiques ne permettait pas de couvrir correctement cet aspect.

Ce rapport s'articulera autour de quatre chapitres. La plupart des résultats et des applications présentés dans ce rapport ont fait l'objet de plusieurs publications dont celles citées dans le paragraphe précédant.

Dans le premier chapitre, les problématiques et le cadre général de nos travaux est exposé au travers d'un état de l'art sur les réseaux de Petri et les chaînes logistiques. L'objectif sera double puisque nous allons axer la rédaction de ce chapitre sur deux aspects. Nous réalisons une étude bibliographique, mais aussi notre but est d'accumuler des renseignements sur les caractéristiques et les problématiques des systèmes logistiques au travers des travaux réalisés par de nombreux auteurs. Ainsi, nous examinons très particulièrement le rôle joué par les réseaux de Petri en logistique jusqu'à ce jour afin de situer et de montrer l'intérêt de nos travaux.

Dans le deuxième chapitre, les BDSPNs sont introduits comme un nouveau modèle de réseaux de Petri. Nous apportons dans le modèle de nouveaux types de places, de jetons et de transitions qualifiés de composants lots. Ces derniers sont intégrés dans le formalisme classique des réseaux de Petri afin de pouvoir modéliser correctement la dynamique des flux évoluant en quantités discrètes qui caractérise de nombreux systèmes à événements discrets. Ainsi, une nouvelle sémantique discrète de fonctionnement est formulée de façon à pouvoir synchroniser, coordonner et traiter simultanément deux types de flux : le flux des jetons lots et le flux des jetons discrets. L'essentiel du chapitre porte sur la description du modèle, de son fonctionnement et de ses propriétés essentielles. L'intérêt et les premières idées sur l'utilisation de ce nouveau modèle sont montrés au travers de nombreux exemples.

Le troisième chapitre est consacré aux techniques d'analyse des BDSPNs. Dans la première partie nous développons cinq différentes techniques d'analyse qui permettent la vérification ou la recherche des propriétés qualitatives. A l'aide de relations formelles - liant un BDSPN à un RdP classique - établies dans deux des techniques d'analyse développées, nous montrons clairement la nécessité de l'introduction de ce nouveau modèle. La deuxième partie du chapitre porte sur les techniques d'évaluation de performances. Dans ce cadre, nous développons des

techniques analytiques basées sur le graphe d'évolution des états du système modélisé par un BDSPN utilisé conjointement avec le processus stochastique associé au modèle. Un ensemble d'indicateurs de performances pouvant capturer à la fois des mesures sur les composants lots et discrets du modèle sont formulés à base des probabilités des états, solutions du processus stochastique associé. Enfin, une deuxième approche basée sur la simulation est discutée puisque nous avons réalisé un outil de simulation. Cette technique qui bénéficie de toute la richesse du modèle est particulièrement intéressante dans le cas où le système de grande dimension pour permettre une étude analytique.

Le quatrième chapitre porte sur la modélisation et l'analyse de performances des systèmes logistiques afin de montrer l'intérêt et l'efficacité de notre modèle pour cette classe de systèmes. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'étude des systèmes de gestion de stocks qui jouent un rôle majeur dans les entreprises organisées en chaînes logistiques. Après la classification d'un ensemble de politiques de gestion de stocks les plus utilisées dans la pratique, nous développons un ensemble de modèles BDSPNs qui les représentent. Par la suite, nous nous intéressons à l'évaluation et l'analyse de performances de cette classe de systèmes. Deux applications distinctes sont réalisées à base de deux approches différentes à savoir une approche analytique et une approche par simulation. Les deux études constituent à la fois une démonstration de l'efficacité de notre méthodologie et également un support pouvant servir pour d'autres applications sur les systèmes de gestion de stocks. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous allons s'intéresser à l'étude des chaînes logistiques au travers d'une application. L'objectif est de montrer l'intérêt des BDSPNs à modéliser et à étudier efficacement cette classe de systèmes au travers d'une étude d'un système qui rassemble les caractéristiques essentielles des chaînes logistiques.

Enfin, la conclusion présente une synthèse des travaux que nous avons réalisés et propose quelques perspectives de recherches futures.

Chapitre 1

Etat de l'art sur les Réseaux de Petri et les Chaînes Logistiques

1. Introduction

La modélisation, l'évaluation et l'analyse de performances des systèmes à événements discrets notamment les systèmes de production, les systèmes de stockage et plus particulièrement les chaînes logistiques reste une préoccupation principale des différentes communautés scientifiques et en particulier la productique. Les progrès techniques et économiques et par conséquent la complexité croissante de ces systèmes soulèvent de plus en plus de nouveaux défis et de nouvelles problématiques. Ceci nécessite l'utilisation de méthodes bien adaptées pouvant guider le concepteur dans les choix qu'il est amené à faire dans les phases de conception, où elles permettent l'évaluation a priori des performances d'un système hypothétique que l'on veut dimensionner, et dans les phases d'exploitation où elles permettent, par exemple, l'évaluation de règles de pilotage du système.

Historiquement, les recherches en modélisation et évaluation de performances ont toujours été deux sujets très liés. Bien que dans la pratique nous pouvons clairement identifier une association de méthodes d'évaluation de performance à certains formalismes de modélisation. Les premiers travaux sont basés sur l'analyse directe des processus stochastiques et plus généralement des chaînes de Markov [FEL 68], [TAK 64], [KAR 69], [BAI 70]. Les travaux de Jackson [JAC 57] ont conduit, vers la fin des années 50, à une nouvelle approche basée sur les réseaux de files d'attente. Durant plusieurs années, cette approche a connu un développement considérable avec notamment les travaux de Little [LIT 61]. Dès les années 70, de nombreuses extensions du formalisme des réseaux de files d'attente [BRU 00], [BUC 94] ont été proposées afin de pouvoir étudier des cas relativement complexes. L'ensemble de ces travaux a fourni des outils puissants pour une classe relativement restreinte de systèmes d'attente. D'autres approches ont abandonné le formalisme des réseaux de files d'attente et adoptent un nouveau formalisme plus puissant introduit au début des années 60. Il s'agit des réseaux de Petri [BRA 83], [REI 85], [MUR 89], [DAV 92] comme formalisme de base en ajoutant des extensions qui vont de simples temporisations constantes [WAN 98] jusqu'à des mécanismes beaucoup plus sophistiqués comme par exemple : les réseaux de Petri stochastiques [FLO 85]; les réseaux de Petri stochastiques généralisés [AJM 84], [AJM 95]; les réseaux de Petri colorés [HAD 87], [JEN 91]; les réseaux de Petri continus [ALL 87]. Ces travaux ont permis l'intégration d'outils d'évaluation de performance à l'ensemble des outils d'analyse structurelle développés pour les réseaux de Petri [MUR 89], [PRO 95], [AJM 95], [LIN 98], [ZHO 99], [HAA 02]. Le grand intérêt scientifique porté aux systèmes à événements discrets, a mené également à d'autres approches à savoir : des outils algébriques tels que l'algèbre max+ [BAC 96], [GAU

95]; des algèbres des processus stochastiques [GOT 95]; des réseaux d'automates stochastiques [ATI 93], [PLA 91]. Ces approches n'ont pas la notion d'entités et de flot (respectivement clients et routage dans les réseaux de files d'attente ou jetons et arcs dans les réseaux de Petri).

A ce jour, il n'existe pas de cadre théorique ou une méthodologie standard pour permettre une résolution exhaustive des différents problèmes posés par les systèmes à événements discrets. Plusieurs modèles sont développés et il n'existe aucune réponse toute faite pour choisir un modèle le mieux adapté. En revanche, la littérature sur les réseaux de Petri est fort riche et comprend de nombreux résultats théoriques et pratiques. Ils constituent un support à la fois graphique et mathématique performant aussi bien pour l'analyse et l'évaluation analytique que pour la simulation du système étudié. Ils sont d'une aide précieuse pour le concepteur dans les différentes phases d'analyse.

2. Les Réseaux de Petri

Historiquement, le concept de réseau de Pétri a été développé pour la première fois par Carl Adam Petri, un mathématicien Allemand. Ce concept date de 1960-1962. L'auteur a défini un outil graphique et mathématique permettant de décrire les relations existant entre des conditions et des événements. Ils permettent de modéliser le comportement de systèmes à événements discrets et de capturer divers phénomènes qui les caractérisent à savoir le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources, la concurrence, etc. Il est à l'origine du Grafcet (ce dernier étant spécialisé dans la description de la commande de systèmes automatisés) [DAV 92].

Concrètement, un réseau de Petri (RdP) est composé de deux types de nœuds : les places et les transitions. Graphiquement les places sont représentées par des cercles et les transitions par des traits. Les places et les transitions sont reliées par des arcs. Chaque place contient un nombre entier (≥ 0) de jetons. L'état du système modélisé par un RdP est représenté par le marquage du réseau qui est un vecteur qui donne la distribution des jetons dans les places du réseau. L'évolution de l'état du réseau de Petri, et donc du système qu'il représente, correspond à une évolution de son marquage. Les jetons, qui matérialisent l'état du réseau, peuvent passer d'une place à l'autre par franchissement d'une transition.

Nous orientons ceux qui ne connaissent pas les réseaux de Petri à consulter l'ouvrage de David et Alla [DAV 92] et l'article de synthèse de Murata [MUR 89] qui donnent l'essentiel sur le formalisme des réseaux de Petri et les différentes techniques d'analyse associées.

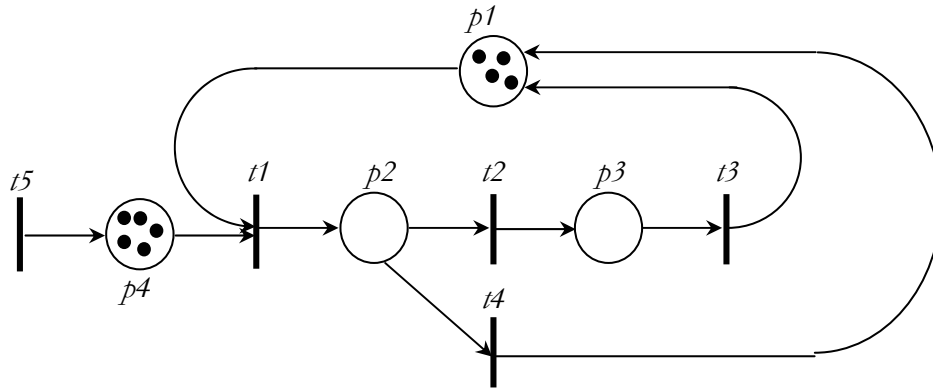


Figure 1.1. Modèle RdP d'un système de production géré avec la méthode Kanban

A titre d'illustration, le RdP de la figure 1.1 est le modèle d'un système de production avec contrôle Kanban. Les jetons situés dans la place $p1$ représentent les Kanban libres. La place $p4$ et ses jetons représentent un stock d'entrée du système. L'entrée du stock est représentée par la transition $t5$. S'il y a au moins un produit brut dans le stock d'entrée du système représenté et s'il y a au moins un kanban libre dans la place $p1$, la transition $t1$ est franchie. Un jeton apparaît alors dans la place $p2$, ce qui implique qu'un Kanban libre est attaché à ce produit brut et que sa fabrication peut commencer. C'est-à-dire, le franchissement de $t1$ consiste à soustraire un jeton de $p1$ et de $p4$ et de rajouter un jeton dans $p2$. Après la fabrication de ce produit, représentée par le franchissement de la transition $t2$, un jeton apparaît dans la place $p3$. La transition $t3$ est alors franchie : le produit sort du système et le Kanban qui lui est attaché est restitué dans $p1$. Un contrôle de qualité est effectué à l'entrée du système. Si la qualité d'un produit brut n'est pas satisfaisante, la transition $t4$ est franchie (rejet du produit). Le Kanban attaché à un produit de mauvaise qualité est restitué lors du franchissement de la transition $t4$.

2.1. Extension des Réseaux de Petri

A la différence des autres formalismes de modélisation notamment les réseaux de files d'attente, les premiers résultats fournis par les réseaux de Petri vont être de nature qualitative. Depuis les années 70, le concept RdP a été largement développé par de nombreux auteurs dans le monde entier en intégrant particulièrement l'aspect temporel et stochastique dans le modèle initial. La théorie des graphes et la théorie des processus stochastiques sont ainsi exploitées pour l'évaluation de performances. Citons les ouvrages de Brams [BRA 83], de Murata [MUR 89], de David et Alla [DAV 92], de Zhou [ZHO 93], de Ajmone et al. [AJM 95], de Wang [WAN 98], de Lindemann [LIN 98], de Diaz [DIA 01], ainsi que de Haas [HAA 02], qui traitent essentiellement de la théorie, de la pratique et des applications des réseaux de Petri. Des papiers et des ouvrages tels que [MUR 89], [DIA 91] et [DAV 92] donnent une

image d'ensemble sur les mutations subies par les réseaux de Petri depuis leur apparition. Les paragraphes suivants sont consacrés à la présentation de quelques extensions à la définition initiale des réseaux de Petri.

2.1.1 Réseaux de Petri temporisés

Les réseaux de Petri temporisés introduisent la notion de temps dans le parcours du réseau qui permettent de décrire un système à événements discrets dont le fonctionnement dépend du temps [WAN 98]. Il existe deux principales familles d'extension temporelle des réseaux de Petri : les réseaux de Petri temporisés introduits par Ramchandani [RAM 74] et les réseaux de Petri temporels introduits par Merlin [MER 74]. Pour les réseaux de Petri temporisés, les temporisations ont d'abord été associées aux transitions (T-temporisés), puis aux places (P-temporisés). La temporisation représente alors la durée minimale de franchissement ou le temps de séjour minimum d'un jeton dans une place. Les réseaux de Petri T-temporisés fonctionnent de la manière suivante: lorsqu'un jeton franchit une transition, celui-ci est réservé pendant un certain temps. C'est seulement après ce temps d'attente que le jeton franchira effectivement la transition. Les RdP T-temporisés et P-temporisés sont équivalents. Concernant les réseaux de Petri temporels, l'extension temporelle s'exprime sous la forme d'un intervalle associé principalement aux transitions (T-temporel) [MER 74], ou aux places (P-temporel). Contrairement aux RdPs P-temporisés et T-temporisés, l'expressivité des RdPs T-temporels et P-temporels n'est pas équivalente.

2.1.2 Réseaux de Petri stochastiques (SPN)

Les réseaux de Petri stochastiques ont été introduits par Florin dès 1978 pour répondre à certains problèmes d'évaluation liés à la sûreté de fonctionnement de systèmes informatiques. Ces problèmes faisant intervenir des phénomènes aléatoires, les transitions du réseau de Petri ont comporté des temps de franchissement aléatoires, distribués par une loi exponentielle. Cette distribution exponentielle permet d'exploiter les propriétés mathématiques d'un processus de Markov. Bien entendu, ce concept a largement été développé dès le début des années 80 [NAT 80], [MOL 82], [FLO 85] pour répondre aux exigences de la modélisation de plus en plus complexes comme par exemple la modélisation des systèmes de production. Les notions de base ainsi que les principales propriétés se retrouvent dans de nombreux ouvrages [HAA 02], [AJM 95], [LIN 98] et [DIA 01]. De nombreuses classes de réseaux de Petri stochastiques sont proposées pour l'analyse des performances des systèmes de production. Les caractéristiques des différentes classes de réseaux de Petri stochastiques se situent essentiellement dans la nature des transitions utilisées. Initialement un réseau de Petri stochastique a

toutes ses transitions temporisées avec un temps aléatoire qui est distribué avec une loi exponentielle, mais nous retrouvons d'autres types de transitions.

2.1.2.1. Réseaux de Petri stochastiques généralisés (GSPN)

Cette classe est introduite par Ajmone Marsan [AJM 84], [AJM 95]. Le réseau se compose de transitions avec une temporisation nulle dites transitions immédiates et de transitions avec une temporisation aléatoire distribuée exponentiellement dites transitions stochastiques. Le processus stochastique sous-jacent au graphe des marquages est un processus de Markov à temps continu.

2.1.2.2. Réseaux de Petri stochastiques et déterministes (DSPN)

Cette classe est également introduite par Ajmone Marsan [AJM 86], [AJM 87]. C'est une extension des réseaux de Petri stochastiques généralisés. Le réseau contient des transitions immédiates, des transitions à temporisations déterministes et des transitions à temporisations stochastiques distribuées suivant des lois exponentielles. Cette classe de réseau est développée et analysée par de nombreux auteurs [CHO 93c], [CHO 93d], [LIN 98], [HAA 89a], [HAA 89b], [CIA 93], etc.

2.1.2.3. Réseaux de Petri stochastiques étendus (ESPN)

Le réseau se compose uniquement de transitions temporisées aléatoires. Le temps est distribué avec une loi quelconque. Le processus stochastique sous-jacent au graphe des marquages est avec quelques restrictions un processus semi-markovien. Si les conditions ne sont pas remplies, le réseau de Petri stochastique étendu est résolu par des simulations à événements discrets [DUG 84].

2.1.3 Réseaux de Petri colorés

Les réseaux de Petri colorés sont des réseaux de Petri dans lesquels les jetons portent des couleurs. Une couleur est une information attachée à un jeton. Cette information permet de distinguer des jetons entre eux et peut être de type quelconque [HAD 87], [JEN 91]. Malgré leur forte utilisation, les réseaux colorés n'apportent pas de puissance de description supplémentaire par rapport aux réseaux de Petri classiques, ils permettent juste une condensation de l'information. A tout réseau de Petri coloré marqué correspond un réseau de Petri qui lui est isomorphe. Des extensions du type stochastique sont développées par de nombreux auteurs : les RdPs Stochastiques Colorés [CHI 96] et les RdPs stochastiques généralisés colorés [DUT 89], [HAS 93]. Ce type de réseau de Petri est exploité essentiellement comme

un outil de simulation. Certains outils de simulation sont gratuits et peuvent être téléchargés via un site internet de la communauté scientifique des réseaux de Petri : [http://www.daimi.aau.dk /PetriNets/](http://www.daimi.aau.dk/PetriNets/).

2.1.4 Réseaux de Petri continus et hybrides

Dans le cas des systèmes où le nombre de ressources est important et/ou les durées opératoires sont variables dans le temps, une approximation continue des phénomènes et des variables est intéressante. Une modélisation continue considère les transferts d'entités comme des flux et remplace donc les variables discrètes par des variables continues. En ce sens, les réseaux de Petri continus (RdPC) ont été introduits par David et Alla [DAV 90] à partir des RdPs discrets. Un RdPC est composé de places continues et transitions continues et son fonctionnement est lié à la notion de vitesses, liées aux transitions, pouvant être constantes ou variables. Cette classe de réseaux de Petri a conduit à une autre classe dite « les réseaux de Petri Hybrides » [LEB 92]. Un RdP hybride est une combinaison de la sémantique d'un RdPC et celle d'un RdP ordinaire (discret). Ils sont adaptés pour la modélisation des systèmes dynamiques hybrides (SDH) [ZAY 01]. Les réseaux de Petri Lots [DEM 94], [DEM 01] étendent les réseaux de Petri hybrides [DAV 01] par la définition d'un nouveau type de nœud, le nœud lot. Ils sont spécialement dédiés pour la modélisation et la simulation des systèmes de production à haute cadence ayant des éléments de transfert avec possibilité d'accumulation des entités (convoyeurs).

2.2. Application des RdPs aux systèmes de production

Les réseaux de Petri ont eu un très grand succès pour l'étude des systèmes à événements discrets et plus particulièrement les systèmes de production. Sur l'application des réseaux de Petri à l'étude des systèmes de production, on peut citer tout d'abord les références de synthèse de Silva et al. [SIL 89], [SIL 97], de Proth et Xie [PRO 95], de Zhou [ZHO 95], [ZHO 99], de Zurawski et Zhou [ZUR 94] et ainsi de Zimmermann [ZIM 99], [ZIM 01].

2.2.1 Applications à l'évaluation de Performances

Les réseaux de Petri stochastiques sont souvent utilisés pour la modélisation et l'évaluation de performances des systèmes de production. Un des premiers travaux a été publié par Bruno [BRU 85]. Il s'agissait de la modélisation et de l'évaluation de performances d'un atelier flexible. Ce travail s'est soldé par la vérification des propriétés qualitatives du système, l'analyse de performances, et l'optimisation du

taux d'occupation des machines. Balbo et al. [BAL 87] a clairement illustré la supériorité des réseaux de Petri stochastiques généralisés par rapport aux réseaux de files d'attente pour la modélisation et l'analyse de performances des ateliers flexibles. Ils sont employés le plus souvent pour l'évaluation de performances des systèmes automatisés [ALJ 90], des systèmes parallèles [GRA 92], avec un ou plusieurs types de pièces [VIS 88] et [VIS 95]. Ils sont utilisés avec succès pour modéliser et évaluer les systèmes Kanban [DIM 90].

2.2.2 Applications à des problématiques diverses

Hormis l'évaluation de performances, les réseaux de Petri stochastiques sont également exploités pour des problèmes plus spécifiques. Ils sont utilisés pour l'ordonnancement des lignes flexibles de production [HAT 91], pour manager un partage flexible d'outils [BAR 93], un partage de ressource [DEA 93], pour analyser une stratégie de chargement dynamique [SUN 93], ou bien alors pour optimiser les performances des systèmes manufacturiers cycliques [SAU 96]. L'étude de maintenance d'un atelier de production a fait l'objet d'une application industrielle dans les travaux de Amodeo [AMO 01] basée sur une technique de simplification et de commande proposée dans [AMO 99]. La commande optimale d'un atelier d'assemblage, cas industriel, est traitée dans [BRI 03]. Dans un contexte plus particulier, les réseaux de Petri stochastiques sont également utilisés pour l'étude des systèmes temps réel distribués, comme les réseaux industriels de communication [JUA 94] et [BER 95] et qui permettent l'automatisation des systèmes de production.

Tous ces cas étudiés ne sont qu'un petit échantillon de travaux qui montrent l'intérêt porté à l'outil réseau de Petri stochastique pour la modélisation, l'analyse et la gestion des systèmes de production.

3. Description des systèmes logistiques

L'organisation de la production a toujours existé, mais elle s'est améliorée au fil des années et notamment très rapidement en cette fin du siècle dernier. Jusque dans les années 60, le rôle de la production était de produire pour vendre. L'important était de produire vite en grande quantité car la demande était importante, et les marges confortables. Par la suite l'offre s'est accrue, il a fallu envisager de ne produire que ce qui sera vendu. On commence à parler alors de maîtrise de la production, de détermination des besoins, de synchronisation des stocks et de contrôle de l'activité. La notion du service client est très vite apparue. Dans ce contexte, il faut produire et vendre en cohérence car les exigences des clients se sont accrues. Depuis quelques années, la globalisation des marchés, donc la

mondialisation de la concurrence a engendré une logique de prix de marché. Les entreprises voient leurs marchés s'ouvrir à de nouveaux concurrents, ce qui se traduit par une offre de produits à des prix de plus en plus bas. La conjoncture actuelle du monde industriel impose à l'entreprise d'évoluer dans un milieu très complexe et très concurrentiel qui nécessite une meilleure organisation et une meilleure gestion... En ce sens, la logistique industrielle a pris une importance considérable.

3.1. Le concept de la logistique

Les origines militaires du concept de la logistique lui ont conféré une certaine valeur stratégique et tactique. Elle s'est fortement focalisée du côté des transports ou mieux, des mouvements physiques. La logistique industrielle est apparue après la fin de la seconde guerre mondiale, notamment avec la reconversion dans les entreprises des spécialistes militaires en logistique. Aujourd'hui, la logistique devient une fonction stratégique majeure dans la plupart des industries. Cependant, cette fonction recouvre des interprétations très diverses dans la littérature [TAY 99], [TAN 01], [CRO 00]. Cela va du simple « transport » jusqu'à une science interdisciplinaire combinant ingénierie, micro économie et théories d'organisation. En effet, comme l'explique Croom et al. [CRO 00], la littérature sur la logistique nous provient de plusieurs communautés scientifiques différentes comme l'économie, les sciences sociales ou encore la productique. Cela impliquera non seulement la diversité des sujets traités mais également le manque d'uniformité dans la terminologie. Des études menées récemment donnent lieu à quelques états de l'art notamment les travaux [TAY 99], [TAN 01], [CRO 00] et [CHE 03a] qui clarifient et classifient les différentes interprétations et les différents thèmes associés à la gestion de la chaîne logistique.

D'une manière générale, la fonction logistique est l'ensemble des activités de « soutien » à la production et se préoccupe de la gestion des flux physiques des approvisionnements en matières premières jusqu'à la mise à disposition des produits finis aux clients sur le lieu d'achat ou de consommation.

3.2. Définition d'une chaîne logistique

La littérature sur la logistique recouvre de nombreuses définitions de la chaîne logistique [MEN 01]. Dans [THI 02], on distingue les approches définissant les chaînes logistiques pour des produits des approches définissant les chaînes logistiques des entreprises. Nous pouvons aussi distinguer les définitions orientées relation client - fournisseur des définitions orientées fonction. Tayur et al. [TAY 99] présentent la chaîne logistique comme une succession de relations client-

fournisseur. Une autre définition centrée sur une entreprise est donnée par Poi [POI 01] telle que « Une chaîne logistique est le système grâce auquel les entreprises amènent leurs produits et leurs services jusqu'à leurs clients ». Dans cette même optique, Rota définit la chaîne logistique comme l'ensemble des entreprises qui interviennent dans les processus de fabrication, de distribution et de vente du produit, du premier des fournisseurs au client ultime [ROT 99]. Avec une vision plus opérationnelle, Lee et Billington [LEE 95] définissent la chaîne logistique comme « un réseau d'installations qui assure les fonctions d'approvisionnement en matières premières, le transport de ces matières premières, la transformation de ces matières premières en composants puis en produits finis, la distribution du produit fini chez le client ».

Dans notre travail, une chaîne logistique (CL) est considérée comme un réseau de sites, indépendants ou pas, participants aux activités d'approvisionnement, de fabrication, d'assemblage, de stockage et de livraison de produits aux clients.

3.3. Structure d'une chaîne logistique

La chaîne logistique la plus élémentaire est constituée d'un seul site assurant aussi bien la production que le stockage et la distribution. Des réseaux plus complexes peuvent coordonner plusieurs dizaines de sites répartis dans différentes locations. Le terme site peut correspondre à une unité de stockage, une unité de production, une usine, un fournisseur, un centre de distribution, un entrepôt ou un client. Suivant le trajet du flux des matières dans une chaîne logistique, on distingue quatre configurations de base [BEA 01], [LIN 98a] à savoir :

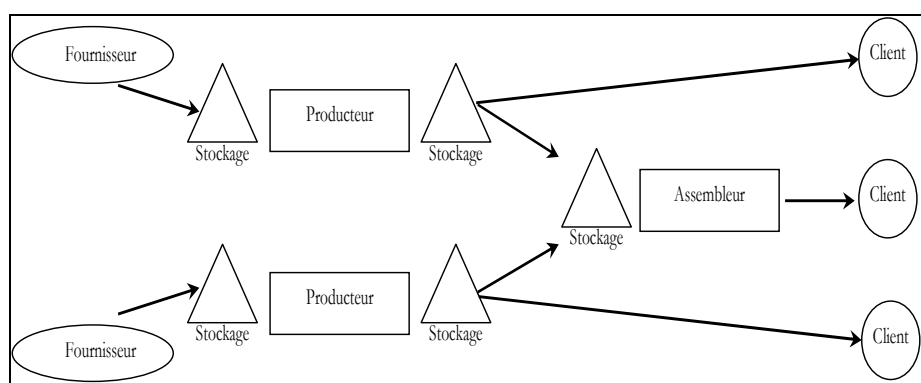


Figure 1.2. Structure générale d'une chaîne logistique

- *Chaîne convergente* (ou assemblage): dans ce cas, la matière qui circule entre les différents sites de la chaîne converge vers un site qui représente généralement un site d'assemblage.

- *Chaîne divergente* (ou arborescence): contrairement à la structure précédente, la matière part d'un même site et se distribue à travers la chaîne.
- *Chaîne conjointe* : c'est une juxtaposition d'une chaîne convergente et d'une chaîne divergente.
- *Chaîne mixte* (ou générale): c'est un cas où la structure de la chaîne n'est ni totalement convergente ni totalement divergente.

La figure 1.2 illustre la représentation d'une chaîne logistique à l'aide d'un ensemble de nœuds et d'arcs. Les nœuds du réseau correspondent aux sites et aux installations où les articles sont créés, fabriqués, stockés et consommés (fournisseurs, usines, centres de distribution, entrepôts, clients). Les arcs reliant les différents nœuds représentent les flux de matières. On distingue ainsi trois principaux sous réseaux : un réseau d'approvisionnement, un réseau de production, et un réseau de distribution. Une chaîne logistique fait donc apparaître plusieurs relations de type client/fournisseur ainsi que les fonctions d'approvisionnement, de production et de stockage et de distribution.

3.4. Description et complexité des flux

L'objectif de toute entreprise est de livrer des produits à ses clients, lorsqu'ils les demandent. Ainsi, celui de tous les participants au processus logistique est d'avoir la bonne quantité au bon endroit, au bon moment, et au moindre coût. Il est donc clair que le bon fonctionnement d'une entreprise repose essentiellement sur la maîtrise des flux.

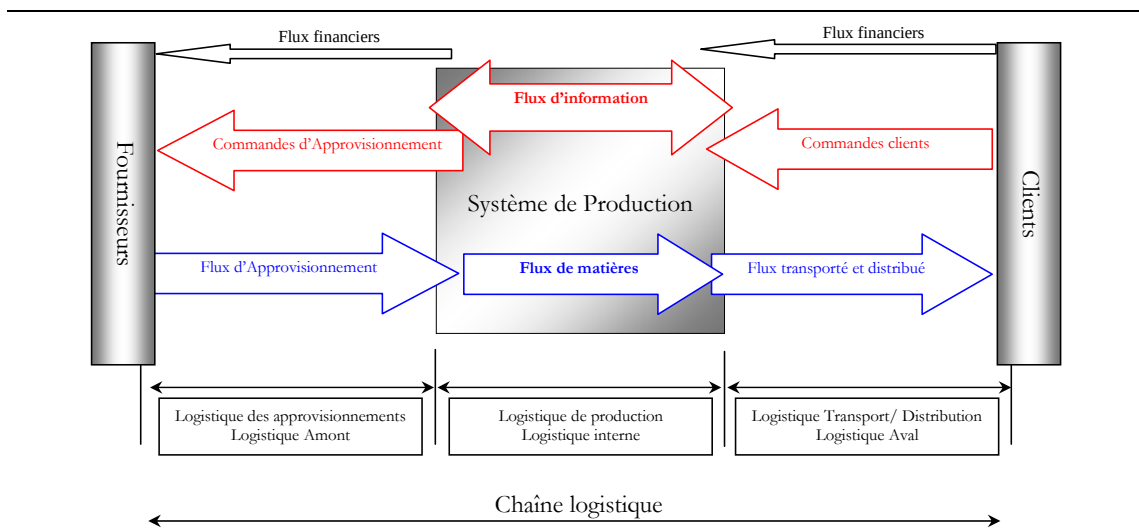


Figure 1.3. Segmentation d'une chaîne logistique et description des flux

Comme le montre la figure 1.3, une chaîne logistique est caractérisée par trois flux distincts mais dépendants. Les flux de matières, les flux d'informations et les flux monétaires sont en interaction complexe entre eux et la bonne coordination de ces flux est décisive pour un bon fonctionnement. En prenant en référence le système de production dans la chaîne logistique, nous avons une logistique amont dite d'approvisionnement et une logistique aval dite de distribution.

Comme l'expliquent si bien Baglin et al. dans leur ouvrage [BAG 96], « l'écoulement des flux de matières, depuis les fournisseurs de matières premières jusqu'à la livraison des produits finis, en passant par les différentes opérations de fabrication, a bien peu en commun avec l'écoulement d'un fleuve tranquille. On se trouverait plutôt en présence d'un cours d'eau rencontrant de nombreux barrages, écluses et cascades tumultueuses ». La complexité des flux s'explique par les points suivants :

- De nombreux phénomènes provoquent une désynchronisation entre le flux amont et les flux aval lors de l'évolution dynamique de la chaîne logistique. Une telle désynchronisation rend alors les caractéristiques de la circulation des flux beaucoup plus difficiles à prévoir intuitivement.
- La complexité des flux physiques (matières premières, produits finis ...) dans une chaîne logistique s'explique également par leur forte variation et fluctuations dans les différentes locations de la chaîne logistique. En effet, le partage d'un équipement ou la nécessité de transport par grandes quantités pour des raisons de coûts génère des interruptions dans la circulation des flux de matières et de produits. Certaines opérations nécessitent plusieurs produits simultanément, c'est le cas notamment de l'assemblage. L'ajustement du débit devient alors complexe à assurer entre les différents flux entrants dans l'unité d'assemblage.
- La présence des aléas et les dysfonctionnements perturbe la régularité de la circulation des flux. Le stock, qui peut être défini comme l'accumulation d'une différence de flux, est l'un des éléments d'organisation du système de flux. La suite de cette section est consacrée à la description des systèmes de stockage.

3.5. Description des systèmes de stockage

Quelle que soit l'activité de l'entreprise, sa taille et son organisation, les stocks existent [WAT 92]. Une production sans stock est quasi inconcevable vu les nombreuses fonctions que remplissent les stocks. La compétitivité de l'entreprise peut être particulièrement affectée par sa gestion de stocks, raison suffisante pour y porter une grande attention. En effet, la constitution de stocks est nécessaire pour de nombreuses raisons stratégiques et opérationnelles.

- *Equilibrer la relation production/ consommation* : les stocks jouent un rôle incontournable pour faire face à une différence entre la cadence de consommation et la cadence de production. En effet, il n'est pas toujours possible de produire là et quand la demande se manifeste. En d'autres mots, la production et la consommation ne coïncident pas souvent dans le temps et l'espace.
- *Protection aux risques de problèmes en chaîne* : sans la présence de stocks, un dysfonctionnement au niveau d'un seul site dans une chaîne logistique peut se propager tout au long de la chaîne. Un retard d'exécution dans un poste de travail ou un problème de transport n'arrêtera pas immédiatement l'ensemble d'un processus de production s'il y a des stocks prévus dans ce processus.
- *Protection aux incertitudes de la demande et des prix* : la demande et les prix sont souvent liés à la notion d'incertitude (aléas). Constituer des stocks de sécurité permet de palier l'incertitude sur la quantité demandée. Constituer un stock de spéculation permet à des entreprises de bénéficier de la chute des prix de certains produits sur le marché.

Le découplage des opérations, un meilleur pilotage des flux et la minimisation des coûts de lancement de la production sont aussi des avantages que la bonne gestion des stocks peut apporter pour les entreprises. Cependant, la gestion de stocks pose de multiples problèmes notamment l'immobilisation de moyens financiers importants (ils peuvent représenter 25 % à 30 % du capital immobilisé) ; l'utilisation d'espace, occultation d'insuffisances graves en matière de prévision et de gestion, tenue d'inventaire et disponibilité satisfaisante du stock, etc.

3.5.1 Le système de gestion de stock

Le schéma synoptique d'un système de gestion de stock est représenté par la figure 1.4. On observe que la gestion du stock repose sur des informations internes et externes au système. Le gestionnaire doit connaître les caractéristiques du fournisseur, de la demande, les choix politiques de son entreprise et les variables de décision qui sont à sa disposition. L'information pour la gestion des approvisionnements se situe à deux niveaux : *le système de gestion du stock* et *le système de tenue du stock* définis comme suit :

- *Le système de gestion du stock* est l'ensemble des informations et des règles de décisions permettant de déclencher les approvisionnements et éventuellement des livraisons (cas de pénurie) qui satisfont au mieux les objectifs adoptés par l'entreprise.
- *Le système de tenue de stock* inspecte continuellement ou périodiquement les composantes de l'approvisionnement : le niveau du stock physique, les encours

ou attendus (produits commandés mais non encore réceptionnés) disponibles à terme, les dus (partie du stock physique faisant l'objet d'engagement vis-à-vis du client) non disponibles. Le système de tenue de stock permet de mettre à jour la relation fondamentale suivante : $Stock\ physique = Stock\ Théorique - Encours + Dus$.

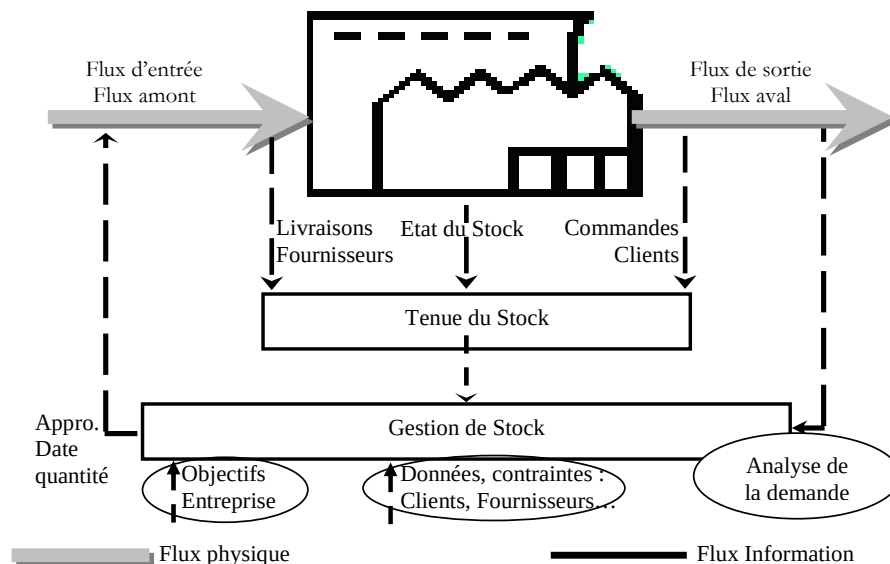


Figure 1.4. Le schéma synoptique d'un système de tenue et de gestion de stock

3.5.2 Politiques de gestion de stock

La gestion des stocks est une fonction très importante pour les entreprises industrielles. Les entreprises organisées en chaîne logistique, ou les ateliers de la même entreprise, communiquent en permanence à travers cette fonction. Une mauvaise politique de réapprovisionnement soit crée des stocks inutiles, soit perturbe, voire arrête la production. Un stock très important génère un coût de stockage et un éventuel coût d'obsolescence. Un stock faible génère des ruptures et des retards. Une politique de gestion a pour objectifs principaux de définir le niveau de stock indispensable pour faire face à la consommation, de définir les tailles des quantités à commander et les délais entre deux réapprovisionnements pour maintenir le niveau de stock souhaité. Elle peut se définir par les réponses qu'elle apporte aux deux questions de base suivantes :

- **Quand** déclencher l'approvisionnement ? ou bien à quelle fréquence doit on passer la commande pour approvisionner le stock ? Il existe trois méthodes de base pour répondre à cette question :

- ✓ *En gestion de stock par le point de commande*, l'approvisionnement du stock est déclenché lorsqu'on observe que le stock descend au-dessous d'un niveau fixé appelé *point de commande*.
- ✓ *En gestion calendaire*, l'approvisionnement du stock est déclenché à des intervalles réguliers, par exemple, chaque semaine ou chaque mois.
- ✓ *En gestion calendaire conditionnelle*, l'approvisionnement du stock est déclenché à des intervalles réguliers, mais uniquement lorsqu'on observe que le stock descend en-dessous d'un certain seuil, le point de commande.
- **Combien** faut-il commander ? ou bien quelle quantité doit on commander pour approvisionner le stock ? Il existe deux méthodes de base qui permettent de répondre à cette question :
 - ✓ *Approvisionnement par quantité fixe* : chaque commande porte sur la même quantité fixe. C'est le cas notamment lorsqu'il y a des contraintes de conditionnement ou de transport (palette complète, conteneur, camion complet...) ou des seuils tarifaires qui impliquent un achat minimum.
 - ✓ *Approvisionnement par quantité variable* : lors de chaque commande, le stock théorique est mesuré pour commander une quantité qui permet de re-compléter ce stock (tenter de le ramener à son niveau initial).

4. Etude des chaînes logistiques

La complexité croissante des processus logistiques, le désir d'une meilleure configuration des différents processus d'une chaîne logistique et la poursuite d'objectifs multiples (minimisation des coûts et des délais, maximisation du niveau de service et du profit...) rendent l'étude des chaînes logistiques une tâche complexe, celle-ci ne peut se résumer à l'application de quelques recettes empiriques de métier. De fait elles rendent nécessaire l'utilisation de méthodes et d'outils efficaces de modélisation et d'analyse de ces systèmes.

- La phase de modélisation est une étape très difficile, c'est celle qui fait le plus appel à la connaissance profonde du fonctionnement et des caractéristiques de la chaîne logistique. Elle suppose que l'on ait préalablement fourni une réponse claire aux questions : - que veut-on représenter ? - avec quel objectif ? Le choix du modèle en dépend complètement. Il faut de plus s'assurer que la complexité du modèle obtenu sera compatible avec une analyse conduisant aux résultats attendus.

- La phase d'évaluation et d'analyse de performances est une étude qui permet de connaître a priori le comportement de la chaîne logistique pour une configuration donnée. Le comportement d'une chaîne logistique est défini par des mesures de performances telles que le niveau de service, les coûts liés au stockage, à la rupture et à l'approvisionnement du stock ; aux délais de livraison ... Ces performances sont calculées pour une configuration donnée par des caractéristiques sur les politiques de gestion de stocks et de production, sur le mode du transport utilisé, sur la localisation et le nombre des fournisseurs choisi, ou encore sur les paramètres internes liés à chaque service notamment au système de production.

4.1. Revue de la littérature sur l'étude de la CL

Dans cette section, nous ne cherchons pas à établir un nouvel état de l'art sur l'étude des chaînes logistiques puisque plusieurs études bibliographiques ont été récemment effectuées. Les travaux de Beamon [BEA 98], de Min et Zhou [MIN 02], de Tan [TAN 01], ainsi que de Croom [CRO 00] en sont des exemples où les auteurs dressent des états de l'art classés suivant différents critères à savoir les différentes thématiques et problématiques abordées ; les approches ou le type des modèles utilisés ; les critères et les indicateurs de performances considérés, la complexité ou la structure de la chaîne logistique étudiée ; etc. Très récemment encore, une étude bibliographique similaire à celle présentée par Croom [CRO 00] est présentée par Cheyroux [CHE 03a].

Tous les auteurs s'accordent sur un certain nombre de points à savoir le manque d'uniformité dans la terminologie et les interprétations que recouvre la logistique et la diversité des problématiques soulevées. Ils citent plusieurs secteurs de la littérature qui ont dérivé vers ce domaine comme l'approvisionnement et le stockage, les systèmes de production, les transports, le marketing, l'organisation industrielle ou encore la management stratégique. La gestion de la chaîne logistique d'une entreprise est un processus global faisant intervenir une multitude de processus qui influencent en amont et aval le processus de la production.

4.1.1 Modèles utilisés

Les études dont les thèmes sont axés sur la modélisation portent souvent sur l'outil avec lequel on va modéliser le système ou alors la manière dont doit être modélisée une chaîne logistique particulière. Différents outils et approches de modélisation sont utilisés pour la modélisation des chaînes logistiques. Les études suivantes sont classées par le type des modèles utilisés. Elles seront citées au cours de cette étude bibliographique.

- Les réseaux de file d'attente : [CHE 03a], [SRI 01], [ETT 00], [DIM 95], [COH 88];
- Les réseaux de Petri : [CHE 05], [MEV 04], [ARN 02], [DON 01], [VIS 00], [VAN 92], [LAN 02];
- Les systèmes multi agents : [FOX 00], [PAR 98], [SWA 98], [TEI 97], [NIS 00], [GAR 02] ;
- Les modèles mathématiques : il s'agit notamment de la programmation linéaire et des méthodes heuristiques [NEW 93], [WIL 83], [VOU 96], [ARN 95];
- Et enfin le recours assez ponctuel à la simulation [ING 98], [UME 98], [ARC 99], [BAU 01], [JAN 01].

Certains auteurs ont proposé des approches en combinant différents modèles. Dans [VIS 00], les auteurs utilisent à la fois les réseaux de Petri stochastiques et les réseaux de files d'attente. C'est le cas également d'une étude présentée dans [ARN 02]. On peut également citer l'utilisation des systèmes multi agents et des réseaux de Petri colorés dans [CHE 99]. Ou encore le couplage entre la simulation et les techniques d'optimisation pour optimiser la performance d'une chaîne logistique. C'est le cas d'une application industrielle présentée dans [CHE 03] où une approche basée sur les réseaux de Petri et les algorithmes génétiques est proposée.

4.1.2 Evaluation de performances

Les méthodes d'évaluation de performance reposent sur deux approches : les méthodes analytiques [TAY 99] ou le recours à la simulation [ING 98]. Les demandes industrielles les plus fréquentes portent sur :

- La recherche d'une configuration et/ou des paramètres qui minimise les coûts [CAM 97] ;
- L'étude des performances de la configuration actuelle de la chaîne logistique par rapport à une configuration optimale [POO 94] ;
- Le changement des politiques d'approvisionnement d'une chaîne logistique pour voir les effets en termes de coûts et de délais [LEE 93b] ;
- La recherche de la configuration du réseau la plus rapide et établir un rapport vitesse /coût [ARN 95] ou bien trouver celle qui donne le meilleur taux de service [RAO 98] ;
- Analyse expérimentale sur l'organisation au sein de la chaîne comme dans [ZIL 99a] où on optimise les lieux de stockage.

Les indicateurs de performances des chaînes logistiques sont à la fois multiples et critiquables. Le but est toujours de mesurer l'amélioration de la compétitivité. Dans la littérature, cette idée donne lieu à des interprétations diverses, voire

divergentes. L'objectif de la mise en place de processus logistiques est de délivrer les produits ad hoc, pour les quantités adéquates, dans les délais requis et aux prix corrects [CLI 96]. La mesure des performances soulève particulièrement le problème de la comparabilité des critères retenus sachant que les organisations ont des stratégies et des objectifs différents. S'agissant des ventes, une firme peut utiliser le critère du profit, une autre celui de l'augmentation du chiffre d'affaires, une troisième préférera l'indice de satisfaction des clients. Chacune aura pu être efficace en fonction du critère qu'elle aura retenu, pour autant, les degrés de performance ne pourront pas être mis en parallèle [CHO 94b].

4.1.3 Caractère des applications

De nombreuses études sont effectuées comme des analyses de paramètres. Ces études permettent de quantifier l'effet de la variation des paramètres de la chaîne logistique sur sa performance. Dans [DAV 02], les auteurs effectuent une étude empirique sur l'effet de la politique de gestion du produit sur les performances financières d'une entreprise. Dans [CAC 01], l'étude de l'influence du paramètre lié à la gestion des stocks est considérée et dans [RID 02] on s'intéresse sur les effets dynamiques des paramètres sur l'amplification de la demande dans une chaîne linéaire. Des études similaires sont entreprises dans de nombreux autres travaux notamment [CHE 03a], [BEA 01] et [ZIL 99b]. Les études de paramètres peuvent être empiriques comme, par exemple, dans [DAV 02] ou analytiques comme dans [ZIL 99b].

Certains auteurs proposent des approches d'évaluation de performances et d'optimisation de manière académique, à base de simples exemples classiques comme la minimisation des coûts de stockage sous contrainte d'un taux de service minimal. Dans [SRI 01] on montre l'intérêt d'une optimisation globale plutôt que locale alors que dans [COH 88] et [ETT 00] on joue sur l'équilibre entre le niveau de stocks et le taux de service pour obtenir un bon taux de service avec des stocks peu élevés. Un certain nombre d'études se démarquent aux autres par le caractère industriel des chaînes logistiques étudiées. C'est le cas des travaux de [CHE 05], [NIS 00b], [ZIL 99a], [RAO 98], [CAM 97], [LEE 95], [ARN 95], [POO 94], [LEE 93a], [LEE 93b]. D'autres se démarquent par le type de la chaîne logistique qu'elles évaluent comme Vidal et Goetschalckx qui dans [VID 01] étudient un réseau international. Leur étude se focalise sur le problème des taxes aux frontières. Dans les travaux [VEE 00], [BEA 00] et [CAR 98], les auteurs étudient des problématiques liées aux chaînes logistiques inverses.

4.1.4 Autres thématiques

Hormis les thématiques de la modélisation et de l'analyse de performances des chaînes logistiques, qui est sans doute le coeur de toute étude quelque soit son objectif, d'autres auteurs s'intéressent à de nombreuses autres problématiques à savoir la coopération, le pilotage des flux et/ou la gestion de stocks ou encore la planification.

- La coopération ou la coordination est, en gros, la mise en œuvre de décisions entre plusieurs participants dans une chaîne logistique. Thomas [THO 96] répertorie les travaux de la littérature ayant pour objectif de coordonner différents stades logistiques à savoir la coordination entre : acheteur et vendeur ; production et distribution ; stockage et distribution. La coopération recouvre plusieurs notions, comme par exemple l'accord sur une gestion de stocks comme dans [AXS 01] et [AXS 03] ou le partage des prévisions de vente comme étudié dans [AVI 01]. Vidal [VID 97] présente différentes méthodes mathématiques pour traiter diverses problématiques de coordination de production et de distribution.
- Le pilotage de la chaîne logistique porte essentiellement sur le mode de gestion des flux [WAT 92], [GRA 93]. Cette thématique se focalise en particulier sur la gestion de stocks. La politique de gestion dite (s, S) semble la plus utilisée en particulier dans des études à caractère industriel [LEE 93a], [RAO 98]. La gestion par kanban est utilisée dans [DIM 95], [THI 02], [ZIL 99a] et [ZIL 99b]. Certains auteurs s'intéressent aux politiques de gestion la production, notamment les politiques dites « produire pour stocker » et « produire sur commande ». A titre d'exemple, ces deux politiques sont comparées dans [VIS 00] dans le cadre de la performance d'une chaîne logistique modélisée par les réseaux de Petri.
- La planification, également appelée programmation, est traitée par de nombreux auteurs comme dans les travaux de [PAR 99], [GRA 98], [GAR 02], [BER 02]. Cette thématique recouvre l'ensemble des décisions prises définissant des objectifs chiffrés dans tous les domaines relevant du fonctionnement de l'entreprise : production, vente, etc.

4.1.5 Positionnement de la simulation

Depuis des années, la simulation est utilisée pour résoudre des problèmes opérationnels, relatifs aux temps de production ou à des études de sûreté de fonctionnement dans le cas de systèmes industriels. Aujourd'hui le besoin se situe au niveau managérial, pour la gestion de la chaîne logistique. De nombreux auteurs considèrent la simulation un outil privilégié pour l'étude des systèmes logistiques

dans la mesure elle permet de prendre en compte leur complexité et leurs incertitudes. La simulation permet d'observer le comportement et d'analyser la performance du système selon des métriques et des données différentes (temps, coûts, niveau de service, quantité). Arena est utilisé dans [JAN 01], HIT dans [BAU 01] et l'IBM Supply Chain Analyser dans [ARC 99] alors qu'un outil spécifique est développé dans [UME 98]. L'objectif de ces études consiste à apporter des informations au décideur au moment où il doit modifier un aspect de sa chaîne logistique. Ainsi dans [ARC 99], les auteurs testent plusieurs configurations de leur réseau pour choisir celle qui offre les meilleurs résultats financiers. Ces configurations varient en fonction de la quantité transportée lors des liaisons entre les sites, des changements dans la gestion des stocks ou encore du partage d'information entre les acteurs. Dans [UME 98], l'objectif est de réduire les temps de fabrication et d'optimiser l'utilisation des ressources.

Les outils de simulation dédiés à la logistique s'appuient sur des bibliothèques de composants représentant un certain nombre de processus standard présents dans la plupart des systèmes. Parmi les outils qu'on peut trouver dans le commerce, nous citons l'outil SDI de Simulation Dynamics [PHE 00], l'outil CSCAT (Supply Chain Analysis Tool) de Compaq [ING 98] qui est une extension de l'outil ARENA dédié à l'origine pour les systèmes de production. Un des défauts récurrents de ces outils est leur complexité pour la prise en main. Un outil comme CSCAT nécessite plus d'une cinquantaine de tables pour renseigner les paramètres du système et plus d'une centaine en sortie. De plus, ces outils sont souvent développés dans des contextes différents et personnalisés. CSCATV, par exemple, est développé par Compaq pour ces propres besoins. De plus les outils de simulation commerciaux, sont une boîte noire pour l'utilisateur. Par conséquent, ce dernier ne peut pas sortir du cadre des applications cadrées par ces logiciels pour pouvoir intégrer de nouvelles idées ou approches plus efficaces.

4.2. Applications des RdPs aux systèmes logistiques

Comme nous l'avons vu, les réseaux de Petri sont des outils de modélisation et d'évaluation de performances les plus étudiés et pour lesquels il existe un grand nombre de résultats théoriques ainsi que des outils de simulation. Ils sont beaucoup exploités pour l'étude des systèmes flexibles de production. Cette classe de systèmes est évidemment le centre de la logistique industrielle puisque cette dernière est apparue pour le soutien au niveau tactique, stratégique et opérationnel de la fonction production. Cependant, peu de travaux se sont intéressés à la modélisation de la chaîne logistique complète, en prenant en compte tous les aspects d'une chaîne, tels que les processus qui influent en amont et en aval sur la production. Etudier le positionnement des réseaux de Petri en logistique est l'objectif de cette section.

4.2.1 Revue de la littérature CL /RdPs

Les paragraphes suivants sont une revue de la littérature sur les travaux qui utilisent les réseaux de Petri comme un outil de modélisation et d'évaluation de performances des systèmes logistiques.

4.3.2.1. Etudes utilisant les RdPs stochastiques

Viswanadham et Srinivasa [VIS 00] proposent une approche de modélisation et d'analyse de performances d'une chaîne logistique à base des réseaux de Petri stochastiques généralisés. La chaîne logistique étudiée, considérée comme un système discret, est composée de : deux fournisseurs qui produisent chacun un type de produit, deux transporteurs amont associés à chacun des fournisseurs (processus d'obtention), un système d'assemblage (production) entre les deux types de produits, une logistique aval (processus de livraison) associée au système de production et deux entrepôts de stockage. Le système est modélisé par un GSPN. Le processus d'arrivées des commandes des clients est considéré de type de Poisson et le processus de service des différents équipements de la chaîne logistique est considéré exponentiel. Le modèle a permis de comparer la performance de deux types de politiques de production « fabriquer pour stocker » ou « assembler sur commande », ceci, en terme de coût lié à la rupture de stock et des retards de livraison. Les auteurs considèrent en particulier le problème de la localisation du point de couplage de la chaîne logistique comme un problème de minimisation du coût. Ce problème est résolu en utilisant les réseaux de files d'attente.

Van der Vost [VAN 00] étudie un cas réel d'une chaîne logistique d'un système agroalimentaire à l'aide de la simulation du modèle réseau de Petri qui représente ce système. Cette étude s'est soldée par une analyse de différents scénarios possibles par rapport à la configuration initiale de la chaîne logistique. L'analyse est basée sur 3 indicateurs de performances liés aux coûts et 5 indicateurs liés au service. Une étude similaire d'une chaîne logistique d'un système industriel dans l'agroalimentaire est étudiée par Bhushan et Gummaraju [BHU 02]. L'approche est également basée sur la simulation du réseau de Petri stochastique généralisé modélisant le système étudié.

Une analyse analytique de paramètres d'un système logistique composé d'un fournisseur et de plusieurs vendeurs de deux types de produits est présentée par Nakashima et Gupta [NAK 03]. Le système est modélisé par un réseau de Petri stochastique généralisé. L'analyse numérique du modèle a permis l'étude de l'influence de la variation de paramètres tels que les temps de service, les délais de livraison et de la demande sur les performances du système concernant les délais moyens de satisfaction de la demande et du niveau de stockage des deux produits.

Les réseaux de Petri stochastiques généralisés sont également utilisés par Kemper [KEM 00] pour étudier une chaîne logistique simple composée d'un fabricant et de ses fournisseurs et d'une compagnie de transport. L'objectif de l'auteur consiste à montrer l'efficacité des réseaux de Petri à modéliser et à étudier les systèmes logistiques.

Arns et al. [ARN 02] proposent une approche similaire à celle présentée par [SRI 00] pour la modélisation et l'évaluation des chaînes logistiques. Elle est basée sur les réseaux de Petri stochastiques généralisés (GSPNs) et les réseaux de files d'attente (QNs). Dans la phase de la modélisation du système, les auteurs utilisent un formalisme dit ProC/B (process chain notation) spécifique pour la description et la notation des processus logistiques. Le ProC/B permet de modéliser un système logistique sous forme d'un ensemble de blocs d'activités. Dans [ARN 02], le modèle initialement construit en utilisant le ProC/B est ensuite translaté en un modèle hybride combinant les réseaux de Petri stochastiques généralisés et les réseaux de files d'attente dans le but d'analyser qualitativement et quantitativement le système considéré.

4.3.2.2. Etudes utilisant les RdPs colorés

Les réseaux de Petri colorés temporisés sont utilisés par Van der Aalst et Waltmans [VAN 90], [VAN 92] pour la modélisation des activités logistiques. Les auteurs ont développé une librairie hiérarchiques de composants représentant des processus de production et logistiques standards à savoir des composants représentant des fonctions logistiques liées à la demande, à l'approvisionnement, à la production, au transport et au stockage. La librairie des composants est implémentée dans un outil de simulation nommé ExPect [VAN 90].

En utilisant un outil de simulation des réseaux de Petri colorés temporisés dit CPN Tools (www.wiki.daimi.au.dk/cpntools), Dragana et al. [DRA 04] s'intéressent à l'étude de l'effet Bullwhip (coup de fouet) dans une chaîne logistique. Ce problème est relatif à l'augmentation de la variance de la demande en remontant dans la chaîne logistique (fluctuations de la demande). Les auteurs considèrent un système particulier appelé « Beer Game » crée dans les années 60 à Sloan School of Management. Il est utilisé par plusieurs chercheurs comme montrer l'efficacité de nouvelles approches [STE 92].

Les réseaux de Petri colorés sont également combinés avec les systèmes multi agents dans le travail de Chen et al. [CHE 99]. Les auteurs axent leur étude sur les protocoles de négociation dans une chaîne logistique.

4.3.2.3. Etudes utilisant d'autres modèles RdPs

Une classe de réseau de Petri, appelée réseau de Petri hybride de premier ordre a été développée par Balduzzi [BAL 00]. Ce type de réseaux de Petri a été utilisé pour modéliser des systèmes de stockage avec une demande indépendante par Furcas [FUR 01]. La dynamique discrète de la variation du niveau du stock est approximée en une dynamique continue. Le choix de ce type de réseaux de Petri est motivé par la volonté de réduire l'espace d'état que génère l'évolution de ces systèmes.

Lenz et Oberweis [LEN 01] proposent une classe particulière de réseaux de Petri de haut niveau dit : XML-Nets qui combinent le formalisme des réseaux de Petri de haut niveau et un langage dit XML. L'outil de simulation *XML-Nets modeler* de ce type de réseau est utilisé par Mevius et Pibernik [MEV 04] pour l'étude d'un cas industriel d'une chaîne logistique d'un fabricant d'imprimantes laser. Une approche similaire est présentée dans [CHO 03a] et plus récemment encore dans [LEN 05] où les auteurs montrent l'application de leur approche respectivement pour une classe de systèmes dite « *Integrated process management* » et « *Process-Oriented Business* ». Cette classe de systèmes est également le centre d'intérêt de deux études effectuées à l'aide de réseaux de Petri dans [BOS 00] et [DIE 00]. Dans ces deux études, on note également la combinaison des réseaux de Petri avec des diagrammes dits « IDF Diagrams » dans [BOS 00] et avec une approche de modélisation dite DEMO (Dynamic Essential Modeling of Organizations) dans [DIE 00].

Une méthodologie systémique basée sur une approche appelée « Computer Integrated Manufacturing Open System Architecture (CIMOSA) » et les réseaux de Petri du type « Object- Oriented predicate/transition nets (OPTNs) » est introduite par Dong et Chen. [DON 01]. L'approche est illustrée en utilisant un cas d'une chaîne logistique typique de structure simple. L'auteur a opté pour une modélisation et une analyse modulaire du système. Une procédure qui détermine le système des P- invariants du modèle réseau de Petri est utilisée pour déterminer les propriétés structurelles du système. L'auteur montre que l'analyse séquentielle des opérations du système logistique est possible puisque le modèle global est modulaire. Ceci a facilité également l'adaptation du modèle aux changements que peut subir le système. Les lecteurs intéressés par cette approche peuvent consulter les références [ESP 93] et [WAN 96] sur l'approche CIMOSA et le type des réseaux de Petri utilisés.

Daniel Riera Miquel, Piera Antoni Guasch [RIE 02] introduit une approche pour l'analyse et l'optimisation des performances des systèmes manufacturiers en considérant leurs logistiques de production. Ils combinent les réseaux de Petri avec la programmation par contraintes (CP). Ce choix le justifie par la pertinence et la

richesse en informations d'un modèle RdP et par l'efficacité de la CP pour la résolution de divers problèmes particulièrement dans le champ de la planification. Une approche par contraintes peut être définie comme un ensemble de techniques permettant de résoudre un problème mathématique en le formalisant sous forme d'un ensemble de variables reliées par un réseau de contraintes [JEG 91]. Dans l'étude de [RIE 02], la formalisation du réseau de contraintes est faite à l'aide d'un réseau de Petri en exploitant leur formalisme qui permet de décrire les relations entre les conditions et les événements. L'approche est illustrée sur un exemple scolaire et les auteurs affirment que cette approche reste encore à développer et nécessite une connaissance profonde des systèmes à étudier.

4.2.2 Analyse des études CL /RdPs

L'analyse des résultats de la littérature concernant l'utilisation des réseaux de Petri pour l'étude des chaînes logistiques révèle les principales constations suivantes :

- **Peu de travaux sur la chaîne logistique**

La première constatation porte sur le nombre de travaux de la littérature utilisant les réseaux de Petri pour la chaîne logistique. Ce nombre de travaux est négligeable devant l'effervescence de la littérature sur les nombreux résultats théoriques et sur l'application des réseaux de Petri aux systèmes de production. Nous constatons également que tous ces travaux sont très récents puisque la majorité date que de l'an 2000 et plus. La plupart de ces études sont souvent préliminaires et exploratrices.

Ce point s'explique par le très jeune âge de la chaîne logistique dans le milieu industriel. En effet, c'est seulement au cours de ces dernières années que la gestion de la chaîne logistique a pénétré ce milieu comme une fonction stratégique pour la compétitivité de toute entreprise. Le sujet de recherche est donc d'actualité et beaucoup de chercheurs orientent leurs recherches de plus en plus vers les problématiques que soulèvent les chaînes logistiques.

- **RdPs stochastiques et la simulation dominant**

L'utilisation des réseaux de Petri du type stochastique et discret domine dans les travaux effectués. De plus, on remarque que des études à l'aide des outils de simulation des réseaux de Petri de haut niveau sont particulièrement citées. L'utilisation de ce type de réseaux de Petri affirme deux aspects importants à savoir que les chaînes logistiques sont bien considérées comme une classe particulière des systèmes à événements discrets et que l'aspect stochastique est sans doute une caractéristique imposante dans leur fonctionnement. Il s'agit notamment des aléas

concernant la demande des clients, les délais d'approvisionnement, etc. Le recours assez ponctuel à la simulation du modèle RdP du système qu'il représente se manifeste par la complexité de cette classe de systèmes. La simulation est particulièrement privilégiée lorsqu'il est question d'étudier des cas industriels souvent complexes et nécessitant des études avec une multitude de paramètres.

- **Combinaison des RdPs avec d'autres modèles**

De nombreux auteurs ont opté pour combiner le formalisme des réseaux de Petri avec d'autres formalismes ou modèles dans leurs applications notamment avec les réseaux de files d'attente, les systèmes multi agents, la programmation par contraintes ou encore avec des techniques d'optimisation. Faire appel à d'autres formalismes ou modèles pour être associés au réseaux de Petri est significatif d'une recherche délibérée d'un modèle ou d'une approche pouvant supporter aux mieux les caractéristiques et la complexité des systèmes logistiques étudiés.

- **Problématiques liées à l'aspect lot et aux stocks**

Deux problématiques qui influent sur le fonctionnement et l'analyse des chaînes logistiques s'ajoutent à toutes les constations que nous venons d'examiner :

Les stocks sont souvent modélisés comme de simples dépôts ou réserves de produits alors qu'ils sont loin d'être ainsi concrètement. Ce sont des outils logistiques qui nécessitent des politiques de gestion adéquates qu'il faut exprimer dans le modèle RdP du système qu'il représente. En effet, représenter un stock à l'aide d'une seule place reliée à une transition d'entrée et une transition de sortie ne couvre sûrement pas toute la dimension d'un stock sensé jouer un rôle de régulation du flux dans une chaîne logistique.

L'aspect lot est ignoré dans les modèles utilisés alors qu'il est omniprésent dans différentes locations des systèmes logistiques. Les différents flux caractérisant ces systèmes évoluent en quantités discrètes (lots) de tailles variables et les différentes activités telles l'approvisionnement des stocks, le transport ou encore les demandes des clients s'effectuent par lots. Le mécanisme de fonctionnement des modèles RdPs utilisés dans tous ces travaux n'a pas le pouvoir d'exprimer correctement de nombreux phénomènes lots qui caractérisent ces systèmes.

- **Points communs avec les systèmes de production**

Nous pouvons conclure que malgré leurs différences et leur complexité, les chaînes logistiques ont de nombreux points communs avec les systèmes de production. En effet, un système de production est déjà au cœur de toute chaîne logistique. La plupart des caractéristiques et des phénomènes qui caractérisent les systèmes de production caractérisent également les systèmes logistiques. Ainsi, avec

quelques considérations spécifiques, la riche expérience des réseaux de Petri sur les systèmes de production servira sans doute pour évoluer les recherches sur les systèmes logistiques.

- ✓ D'une manière générale, du point de vue modélisation, représenter la demande d'un client, l'opération de livraison d'un produit au client, l'opération d'approvisionnement d'un stock, l'opération de transport ... est similaire à la modélisation d'une opération quelconque en utilisant une transition. A chaque franchissement d'une transition, l'opération qu'elle représente est exécutée. Modéliser l'état d'un stock d'un fournisseur ou l'état d'une flotte de chariots peut se faire à l'aide d'une place est des jetons qu'elle contient. Le marquage à un moment, d'une place modélisant, par exemple, un stock représente le niveau du stock physique qu'elle modélise. Modéliser des phénomènes spécifiques tels que le partage de ressources, le parallélisme, la synchronisation, l'assemblage, ... qui apparaissent dans les différents processus logistiques peut se faire à l'aide de structures graphiques usuelles qu'on connaît dans les réseaux de Petri.
- ✓ Du point de vue mesure de performances, de nouveaux indicateurs liés notamment au service client, au coût de rupture des stocks, à la rotation des stocks, aux délais de livraison, au stock moyen, aux coûts de stockage, au retards de livraison, aux fréquences d'approvisionnement, ... s'ajoutent aux indicateurs traditionnels qu'on connaît pour les systèmes de production à savoir le taux d'occupation d'une machine ou d'une ressource, le temps de cycle, la fréquence de la production, etc. Le but d'une étude de performance de toute entreprise est toujours de mesurer l'amélioration de la compétitivité. Le principe d'évaluation de ces performances reste le même. En effet, les mesures s'effectuent au travers les indicateurs de base du RdP marquages des places, les fréquences de franchissement des transitions, les temps de séjours des jetons ...

5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé une étude bibliographique liée à la thématique de nos travaux. Nous avons particulièrement étudié le rôle joué par les réseaux de Petri en logistique jusqu'à ce jour.

Nous avons introduit ce chapitre par un historique sur les recherches en modélisation et en évaluation de performances dans le cadre des systèmes à événements discrets dont font partie les systèmes de production et les chaînes logistiques. A ce jour, il n'existe pas de cadre théorique standard dans le sens de permettre une résolution exhaustive des différents problèmes posés par cette classe de systèmes. Plusieurs approches et modèles sont développés notamment les réseaux de Petri, les réseaux de files d'attente, la simulation discrète ... Cette

diversité peut s'expliquer par le grand intérêt scientifique porté pour ces systèmes, par la diversité des problèmes qu'ils soulèvent ou encore par leur complexité et les défis qu'ils ne cessent de soulever.

Nous avons ensuite isolé les réseaux de Petri parmi tous ces modèles. Une description de cet outil et des extensions les plus utilisées est effectuée. Ils constituent un support à la fois graphique et mathématique performant aussi bien pour l'analyse et l'évaluation analytique que pour la simulation du système étudié. Ce sont parmi les outils les plus utilisés pour l'étude des SED et plus particulièrement les systèmes flexibles de production comme nous l'avons montré par une synthèse de quelques travaux dans ce contexte. Tous ces facteurs de succès sont des raisons convaincantes pour les choisir parmi tous les modèles existants.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à la logistique en s'appuyant sur de nombreuses études de la littérature. Dans un premier temps, nous avons étudié l'essentiel sur les chaînes logistiques et les systèmes de stockage. Une étude bibliographique mettant en avant la modélisation et l'analyse de performances des chaînes logistiques est effectuée dans l'objectif d'acquérir des renseignements sur les modèles et/ou les outils utilisés, les indicateurs de performances retenus et les applications traitées. D'autres thématiques notamment le pilotage des flux et la gestion des stocks sont également abordées. Nous avons ensuite analysé le rôle de la simulation en logistique puisqu'elle est ponctuellement citée comme un recours privilégiée dans le cas des applications industrielles.

Da la dernière partie de ce chapitre, nous avons dressé un état de l'art sur les travaux utilisant les réseaux de Petri comme un outil de modélisation et d'analyse de performances des chaînes logistiques. L'analyse des résultats de la littérature révèle particulièrement qu'il y a très peu de travaux effectués dans ce contexte malgré la richesse de la littérature dans le cadre des systèmes de production. La plupart des études effectuées, ignorent des aspects très importants dans le fonctionnement de cette classe de systèmes. Il s'agit en particulier des phénomènes lots omniprésents dans différentes locations d'une chaîne logistique.

A présent, nous disposons des caractéristiques essentielles des systèmes logistiques. Nous savons que malgré leur puissance pour la modélisation et l'analyse de performances des systèmes de production, les réseaux de Petri ont joué, jusqu'à présent, un rôle mineur en logistique. Le chapitre qui suivra porte sur un nouveau modèle de réseaux de Petri mieux adapté pour étudier les systèmes logistiques.

Chapitre 2

Les Réseaux de Petri Lots Déterministes et Stochastiques

1. Introduction

Ce chapitre introduit un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques dits « réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques (BDSPNs) ». Ce modèle est une extension des réseaux de Petri déterministes et stochastiques (DSPNs) en introduisant de nouveaux composants (places, jetons et transitions) de type lot ; une nouvelle sémantique discrète de fonctionnement et par conséquent de nouvelles techniques d'analyse adaptées au modèle.

L'essentiel de ce chapitre est consacré aux concepts de base du formalisme d'un BDSPN. Après la définition formelle du modèle, ses règles de fonctionnement sont formulées, interprétées et illustrées. Plusieurs exemples significatifs sont donnés afin de favoriser la compréhension du fonctionnement et de voir l'utilité d'un BDSPN par rapport à un RdP classique. Les règles de fonctionnement sont ensuite suivies par une équation d'état qui gouverne l'évolution de l'état du modèle. Le fonctionnement d'un BDSPN est complété par l'introduction de politiques nécessaires pour la gestion des lots et des délais de franchissement des transitions. Une analyse des situations de conflits est ensuite menée et des techniques de résolution sont proposées. La dernière section du chapitre introduit un ensemble de propriétés essentielles qui permettent de caractériser la structure et la dynamique d'un système modélisé par un BDSPN.

2. Description des BDSPNs

Cette section est consacrée à la description du modèle BDSPN du point de vue formalisme, définitions et notations. Dans un premier temps, nous abordons l'intérêt de l'introduction de ce nouveau modèle.

2.1. Intérêts de l'introduction des BDSPNs

Les BDSPNs sont développés pour la modélisation et l'analyse de performances des systèmes logistiques et plus généralement des systèmes stochastiques à événements discrets avec un comportement lot. Ils sont particulièrement dédiés pour la modélisation de flux évoluant en quantités discrètes (lots de différentes tailles et variables) et ils permettent de prendre en compte des activités plus spécifiques telles que les commandes des clients, l'approvisionnement des stocks, la production et la livraison en mode lot. Les BDSPNs permettent par leur formalisme et leur dynamique de représenter pertinemment et simplement cet aspect lot qui s'implique très considérablement dans le comportement dynamique et dans l'analyse de ces systèmes.

L'introduction des BDSPNs est motivée par l'étude de la littérature sur le rôle joué par les RdPs en logistique mais aussi par l'analyse d'une chaîne logistique industrielle caractérisée par de nombreux phénomènes lots. L'aspect lot se propage dans le système à partir des commandes de clients jusqu'à la livraison des fournisseurs en passant par plusieurs zones de stockage où les approvisionnements des stocks s'effectuent également en lots. Cette étude a révélé que l'utilisation des RdPs classiques ne permet pas de couvrir correctement l'effet de ces phénomènes sur la dynamique des différents flux de cette classe de systèmes. En effet, la problématique soulevée nécessite un modèle adapté à :

- Décrire correctement la dynamique qu'impose l'omniprésence des phénomènes lots ;
- Représenter la dynamique des lots évoluant en quantités discrètes et de tailles variables ;
- Distinguer à tout instant les différentes tailles des lots représentant les flux du système ;
- Pouvoir franchir une même transition par des quantités lots de différentes tailles ;
- Pouvoir contrôler le marquage et le poids des arcs du modèle pour déclencher des activités (franchissement de transitions) spécifiques pour des états critiques.
- Prendre en compte que le traitement des lots par une même transition ne nécessite pas forcément un même nombre de ressources ou un même délai opératoire ;
- Pouvoir traiter simultanément, coordonner et synchroniser différents types de flux ...

Ces questions et autres qui ont un sens très considérable dans le fonctionnement des systèmes logistiques et des systèmes discrets trouvent des solutions dans le nouveau modèle que nous avons développé.

- Les BDSPNs sont une extension des réseaux de Petri déterministes et stochastiques (DSPNs) [LIN 98]. Ils introduisent de nouveaux composants : *places lots*, *jetons lots* et *transitions lots* et une nouvelle formulation mathématique pouvant traiter simultanément, synchroniser et coordonner le flux des deux types de jetons. En absence des places lots, le modèle se réduit automatiquement en un cas de RdP discret classique.
- Un BDSPN n'est pas introduit dans la même logique de fonctionnement et non plus dans la même optique d'application du RdP lot, extension du RdP *hybride*, introduit dans [DEM 92]. L'évolution de ce type de réseau est régie par la formulation mathématique d'évolution d'un lot sur un convoyeur et par les règles propres du réseau de Petri hybride [ALL 87]. Il est développé spécialement pour le cas de systèmes de production à haute cadence, avec éléments de transfert (convoyeurs). La seule ressemblance du BDSPN par rapport à ce type de réseau réside uniquement dans la même représentation graphique d'une place lot.
- L'utilisation de « couleurs » dans les RdPs colorés [ALL 87] pour distinguer entre les jetons d'une même place, ne jouent pas le même rôle que peut jouer les jetons lots dans un BDSPN. Les tailles des lots dans un BDSPN sont des attributs quantitatifs et non pas qualitatifs comme la notion de couleur servant pratiquement pour réduire la

taille de la modélisation qui peut être faite par un RdP classique.

2.2. Définition générale

Définition 2.1. Le réseau de Petri lot déterministe et stochastique, noté BDSPN, est un 10-uplets :

$$BDSPN = (P, T, I, O, V, W, \Pi, D, \omega, \mu_0)$$

où:

-
- $P = P_d \cup P_b = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: Ensemble des places composé de l'ensemble des places discrètes P_d et de l'ensemble des places lots P_b .

 - $T = T_i \cup T_d \cup T_e = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$: ensemble des transitions. T_i : ensemble des transitions immédiates ; T_d : ensemble des transitions déterministes ; T_e : ensemble des transitions exponentielles.

 - $I; V \subseteq (P \times T)$; $O \subseteq (T \times P)$ tels que : I : ensemble des arcs d'entrée des transitions, O : ensemble des arcs de sortie des transitions ; V : ensemble des arcs inhibiteurs du réseau.

 - W : Fonction définissant le poids des arcs pouvant être constants ou variables en fonction du marquage actuel M du réseau.

 - $\Pi: T \rightarrow \Pi$: Fonction de priorité entre les transitions telle que $\Pi(t) = 0$ si $t \in T_d \cup T_e$ et $\Pi(t) \geq 0$ si $t \in T_i$. Elle est utilisée dans le cas de conflits entre transitions immédiates.

 - $D: (T_i \times T_d \times T_e) \times \mathbb{N}^n \rightarrow (0, \infty)$: Fonction qui spécifie le délai de franchissement des transitions telle que : $D(t) = 0$ si $t \in T_i$, $D(t) \in \mathbb{R}^+$ si $t \in T_d$, et $D(t)$ est généré aléatoirement suivant une loi exponentielle si $t \in T_e$.

 - ω : poids associées aux transitions immédiates à utiliser pour la résolution de conflits d'une façon probabiliste

 - μ_0 : μ -marquage initial du réseau tel que : $\mu_0: P \rightarrow \mathbb{N}^* \cup 2^{\mathbb{N}^*}$; $\mu_0 \in \mathbb{N}^*$, si $p \in P_d$; $\mu_0 \in 2^{\mathbb{N}^*}$, si $p \in P_b$.

Avec : $\mathbb{N}^*$ (resp. $\mathbb{R}^+$) représente l'ensemble des nombre entiers non nuls (resp. ensemble des réels positifs).

Du point de vue graphique, un BDSPN est un graphe orienté biparti dont les nœuds sont :

- des places pouvant être de deux types - *places discrètes* susceptibles de contenir des *jetons discrets* et des *places lots* susceptibles de contenir des *jetons lots* de différentes tailles. Les places discrètes sont représentées par des cercles et les places lots sont représentées par des cercles encadrés. Les jetons discrets et les jetons lots sont représentées respectivement par des petits ronds noirs (marques) et par des entiers naturels positifs non nuls.
- des transitions pouvant être de trois types - transitions *immédiates*, transitions *déterministes* et transitions *exponentielles*.

Les arcs qui relient les places aux transitions et les transitions aux places sont des arcs orientés. Un autre type d'arcs dit arcs inhibiteurs, permettant le *test* du marquage d'une place, est utilisé pour connecter entre les places et les transitions immédiates uniquement.

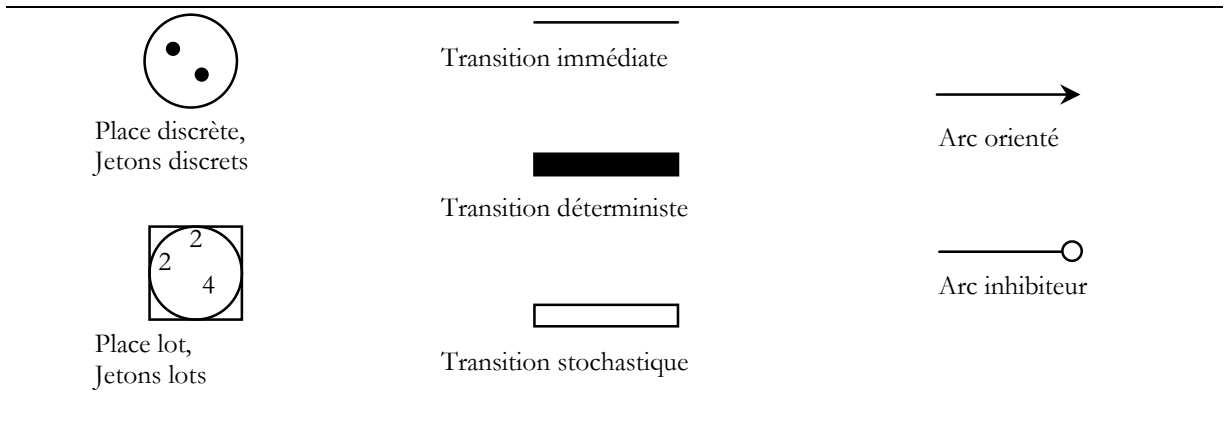


Figure 2.1. Représentation graphique des composants d'un BDSPN

2.3. Marquage d'un BDSPN

L'état d'un système modélisé par un BDSPN est décrit par son « μ - Marquage ». Le μ -marquage d'une place discrète est le nombre (entier positif ou nul) de jetons qu'elle contient à un instant donné (similaire à un réseau de Petri classique). Le μ - marquage d'une place lot est un multi ensemble de nombres entiers positifs ou vide représentant les tailles des jetons lots disponibles dans cette place. L'ensemble peut contenir des lots identiques. Pour la formulation du fonctionnement d'un BDSPN, un deuxième type de marquage appelé « M - Marquage » est introduit. Le M -marquage d'une place lot est la somme des tailles de tous les lots qu'elle contient à un instant donné. Le M - marquage d'une place discrète est égal à son μ -marquage. Formellement, nous avons les définitions suivantes :

Définition 2.2. Le μ -marquage $\mu(p)$ d'une place discrète $p \in P_d$ à un instant donné est un *nombre entier (positif ou nul)* de jetons discrets disponibles dans p . Le μ -marquage $\mu(p)$

d'une place lot $p \in P_b$ à un instant donné est un *ensemble (pouvant être vide) de nombres entiers positifs* correspondants aux tailles des jetons lots disponibles dans p . Formellement, le μ -marquage d'une place p est comme suit :

$$\mu(p) = \begin{cases} m, & m \in \mathbb{N} & \text{si } p \in P_d \\ \{b, & b \in \mathbb{N}^*\} & \text{si } p \in P_b \end{cases} \quad (2.1)$$

Définition 2.3. Le M- marquage d'une place discrète $p \in P_d$ à un instant donné est un *nombre entier (positif ou nul)* de jetons discrets disponibles dans p . Le M-marquage d'une place lot $p \in P_b$ est un nombre entier (*positif ou nul*) correspondant à la somme des tailles de tous les lots disponibles dans p . Formellement, le M- marquage d'une place p est comme suit :

$$M(p) = \begin{cases} \mu(p) & \text{si } p \in P_d \\ \sum_{b \in \mu(p)} b & \text{si } p \in P_b \end{cases} \quad (2.2)$$

3. Dynamique d'un BDSPN

La dynamique d'un BDSPN est animée par le déplacement de jetons lots et de jetons discrets de places en places par franchissement des transitions (discrètes ou lots). Le franchissement d'une transition provoque le changement des μ -marquages des places qui précèdent ou qui suivent cette transition. La formulation mathématique des règles d'évolution d'un BDSPN est faite de manière à pouvoir traiter simultanément, synchroniser et coordonner le flux des deux types de jetons (jetons lots et jetons discrets). De plus, en absence des places lots dans un BDSPN, le modèle et son évolution se dégénèrent automatiquement en un cas de réseau de Petri discret classique (DSPN, GSPN, SPN, PN) suivant le type des transitions utilisées.

La dynamique d'un BDSPN est caractérisée par deux types de fonctionnement dits « *fonctionnement lot* » et « *fonctionnement discret* » dont les règles de validation et de franchissement dépendent du type de la transition considérée suivant la classification suivante :

Définition 2.4. Une transition t est dite *transition lot* si et seulement si elle a au moins une place lot à son entrée. L'ensemble des transitions lots du réseau est noté par TB . Une transition t est dite *transition discrète* si et seulement si elle ne présente aucune place lot dans l'ensemble de ses places d'entrée noté par $\bullet t$. L'ensemble des transitions discrètes est noté par TD .

$$TB = \{t \in T \mid \bullet t \cap P_b \neq \emptyset\}, TD = \{t \in T \mid \bullet t \cap P_b = \emptyset\} \quad (2.3)$$

3.1. Opérations arithmétiques sur les jetons lots

Avant l'introduction des règles de fonctionnement d'un BDSPN, nous introduisons deux opérateurs spécifiques « addition lot » et « soustraction lot » à utiliser dans les équations mathématiques qui déterminent le nouveau μ -marquage du réseau lors de son évolution (changement d'état).

Définition 2.5. L'opérateur d'addition “+” utilisé pour la détermination du nouveau μ -marquage des places lots joue un rôle d'une « *Addition Lot* ». Elle consiste à rajouter dans une place lot un jeton lot de taille donnée. Par exemple : $\mu(p) = \{2, 4, 3\} + 4 = \{2, 4, 3, 4\}$; $\mu(p) = \{3, 2\} + 2 = \{3, 2, 2\}$; $\mu(p) = \{2, 2\} + 0 = \{2, 2\}$.

Définition 2.6. L'opérateur de soustraction “-” utilisé pour la détermination du nouveau μ -marquage des places lots joue un rôle d'une « *Soustraction Lot* » qui consiste à soustraire un lot de taille donnée dans une place lot. Par exemple, $\mu(p) = \{2, 4, 3\} - 4 = \{2, 3\}$; $\mu(p) = \{2, 2, 4\} - 2 = \{2, 4\}$, $\mu(p) = \{4\} - 4 = \emptyset$.

Notons que $\mu(p) + 0 = \mu(p) - 0 = \mu(p)$ puisqu'un jeton de taille zéro n'est pas significatif dans le fonctionnement d'un BDSPN. Autrement dit, les tailles des jetons lots sont toujours positives non nulles. Notons également que $\mu(p) - b$ est non faisable si $b \notin \mu(p)$.

Notons par $\bullet t$ (resp. $t^\bullet$) l'ensemble des places d'entrée de la transition t , (resp. l'ensemble des places de sortie de la transition t) et par ${}^\circ t$ par l'ensemble des places d'entrée reliées à t par des arcs inhibiteurs. $W(x, y)$ est le poids de l'arc reliant x à y correspond au μ -marquage courant μ du réseau. Les règles d'évolution du modèle BDSPN sont formulées, interprétées et illustrées dans les sections suivantes.

3.2. Règles de fonctionnement discret

Soit t une transition discrète, c'est-à-dire, $\bullet t \cap P_b = \emptyset$. Le fonctionnement discret obéit aux règles de validation et de franchissement suivantes.

3.2.1 Validation d'une transition discrète

Une transition discrète t est validée pour un μ -marquage μ (M est son M-marquage correspondant) si et seulement si :

$$\forall p \in \bullet t, \quad M(p) \geq W(p, t) \quad (2.4)$$

$$\forall p \in {}^\circ t, \quad M(p) < W(p, t) \quad (2.5)$$

$$\forall t' \in TD, \text{ qui satisfait les 2 équations ci-dessus, } \Pi(t) \geq \Pi(t') \quad (2.6)$$

3.2.2 Franchissement d'une transition discrète

Après le franchissement d'une transition discrète t validée, l'état du réseau ou bien son μ -marquage μ évolue à un nouveau μ -marquage μ' suivant les règles suivantes :

$$\forall p \in {}^\bullet t, \quad \mu'(p) = \mu(p) - W(p, t) \quad (2.7)$$

$$\forall p \in t^\bullet \cap P_d, \quad \mu'(p) = \mu(p) + W(t, p) \quad (2.8)$$

$$\forall p \in t^\bullet \cap P_b, \quad \mu'(p) = \mu(p) + W(t, p) \quad (2.9)$$

3.2.3 Interprétation du fonctionnement discret

Les règles de validation d'une transition discrète t sont similaires à celles d'un réseau de Petri classique. La transition t est dite validée si (i) chacune des places discrètes en amont de cette transition contient un nombre de jetons discrets supérieur ou égal au poids de l'arc correspondant ; (ii) le nombre de jetons discrets de chacune des places discrètes (resp. le M-marquage (taille total des jetons lots) de chacune des places lots) reliée par un arc inhibiteur à cette transition est strictement inférieur au poids de l'arc inhibiteur correspondant ; (iii) la priorité de la transition t est supérieure ou égale à celles de toutes les transitions qui satisfont les deux conditions précédentes (i) et (ii). Le franchissement discret d'une transition discrète t validée consiste à :

- Retirer $W(p, t)$ jetons discrets dans toute place discrète p d'entrée de la transition t
- Ajouter $W(t, p)$ jetons discrets dans toute place discrète de sortie de la transition t
- Ajouter un jeton lot de taille $W(t, p)$ dans toute place lot de sortie de la transition t

La figure 2.2 illustre l'évolution du μ -marquage d'un BDSPN après un franchissement d'une transition discrète. La transition $t1$ est une transition discrète puisqu'elle ne contient aucune place lot à son entrée. Au μ -marquage actuel du réseau $\mu = (1, 3, 0, \{2, 4\})^T$, la transition discrète $t1$ est validée puisque $M(p1) = 1 < W(p1, t1) = 2$ et $M(p2) = 3 \geq W(p2, t1) = 1$. Le franchissement discret de $t1$ consiste à soustraire $W(p2, t1) = 1$ jeton discret de la place discrète $p2$; à rajouter $W(t1, p3) = 3$ jetons discrets dans la place discrète $p3$; et à rajouter un jeton lot de taille égale à $W(t1, p4) = 4$ dans la place lot $p4$.

La notation $\mu [t > \mu'$ ou $\mu [t \rightarrow \mu'$ est utilisée par la suite pour signifier que le μ -marquage μ' est atteignable (accessible) à partir du μ -marquage μ en effectuant le

franchissement de la transition discrète t . Pour l'exemple de la figure 2.2, on peut noter après le franchissement discret de $t1$: $\mu = (1, 3, 0, \{2, 4\})^T \llbracket t1 \rightarrow \mu' = (1, 2, 3, \{2, 4, 4\})^T$.

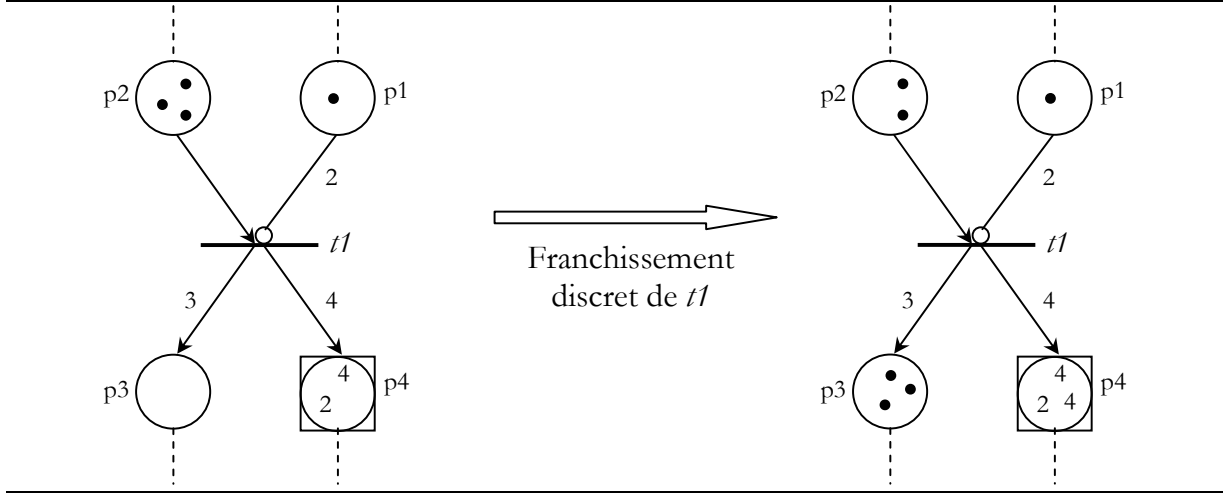


Figure 2.2. Exemple de franchissement discret

3.3. Règles de fonctionnement lot

Soit t une transition lot, c'est-à-dire, $\bullet t \cap P_b \neq \emptyset$. Le fonctionnement lot obéit aux règles de validation et de franchissement suivantes.

3.3.1 Validation d'une transition lot

Une transition lot t est validée pour un μ -marquage μ (M son M -marquage correspondant) si et seulement si il existe un « indice de franchissement lot » $q \in \mathbb{IN}^*$ (entier positif non nul) tel que :

$$\forall p \in \bullet t \cap P_b, \quad \exists b \in \mu(p) : \quad q = b/W(p, t) \quad (2.10)$$

$$\forall p \in \bullet t \cap P_d, \quad M(p) \geq q \times W(p, t) \quad (2.11)$$

$$\forall p \in {}^\circ t, \quad M(p) < W(p, t) \quad (2.12)$$

$$\forall t' \in TB, \text{ qui satisfait les 3 équations ci-dessus, } \Pi(t) \geq \Pi(t') \quad (2.13)$$

3.3.2 Franchissement d'une transition lot

Après le franchissement d'une transition lot t validée, l'état du réseau ou bien son μ -marquage μ évolue à un nouveau μ -marquage μ' suivant les règles suivantes :

$$\forall p \in \bullet t \cap P_d, \quad \mu'(p) = \mu(p) - q \times W(p, t) \quad (2.14)$$

$$\forall p \in {}^\bullet t \cap P_b, \quad \mu'(p) = \mu(p) - q \times W(p, t) \quad (2.15)$$

$$\forall p \in t^\bullet \cap P_d, \quad \mu'(p) = \mu(p) + q \times W(t, p) \quad (2.16)$$

$$\forall p \in t^\bullet \cap P_b, \quad \mu'(p) = \mu(p) + q \times W(t, p) \quad (2.17)$$

3.3.3 Interprétation du fonctionnement lot

Les conditions de validation d'une transition lot données par les équations (2.11) et (2.12) sont « analogues » aux règles de *q-validation* d'une transition donnée dans un réseau de Petri classique dans le cas où ses transitions fonctionnent en mode multi serveurs (mode infinite server). Dans ce cas de fonctionnement, une transition *q*-validée peut être franchie *q* fois simultanément (franchissement multiple).

Dans un BDSPN, l'indice *q* qu'on appelle « *indice de franchissement lot* », se détermine par l'équation (2.10) à chaque μ -marquage μ en fonction des tailles des lots disponibles dans les places lots en amont de la transition lot et des poids des arcs correspondant. L'indice de franchissement *q* d'une transition lot *t* s'obtient en divisant la taille d'un jeton lot *b* d'une place lot *p* en amont de cette transition par le poids de l'arc correspondant $W(p, t)$. L'existence d'un indice de franchissement lot *q* réalisable est vérifiée lorsque cet indice est (i) un entier naturel strictement positif (non nul) et que (ii) pour chaque place lot *p* il existe au moins un jeton lot *b* divisible sur le poids de l'arc liant *p* à *t* et que le résultat de cette division est un indice *q* qu'on peut obtenir également en utilisant les autres places lots en amont de *t*.

La transition lot *t* est dite validée si (a) il existe un indice de franchissement lot *q* réalisable, (b) chacune des places discrètes en amont de cette transition contient un nombre de jetons discrets supérieur ou égal au produit de *q* par le poids de l'arc correspondant ; i.e., $M(p) \geq q \times W(p, t)$; (c) le nombre de jetons discrets de chacune des places discrètes (resp. le M-marquage (taille total des jetons lots) de chacune des places lots) reliée par un arc inhibiteur à cette transition est strictement inférieur au poids de l'arc inhibiteur correspondant ; i.e., $M(p) \geq W_0(p, t)$; (d) la priorité de la transition *t* est supérieure ou égale à toutes les transitions qui satisfont les deux conditions précédentes (b) et (c). Le franchissement d'une transition lot consiste à :

- Retirer $q \times W(p, t)$ jetons discrets dans toute place discrète *p* d'entrée de la transition *t*.
- Retirer le jeton lot *b* correspondant à l'indice de franchissement *q*, (dans toute place lot *p* d'entrée de la transition *t*. Rappelons que $q = b / W(t, p)$).
- Ajouter $q \times W(t, p)$ jetons discrets dans toute place discrète *p* de sortie de la transition *t*.
- Ajouter un jeton lot de taille $q \times W(t, p)$ dans toute place lot *p* de sortie de la transition *t*.

La figure 2.3 illustre l'évolution du μ -marquage d'un BDSPN après un franchissement d'une transition lot. La transition $t1$ est une transition lot puisqu'elle contient à son entrée une place lot $p2$. Au μ -marquage actuel du réseau $\mu = (5, \{2, 3\}, 0, \emptyset)^T$, la transition lot $t1$ est validée puisqu'il existe $q = b/W(p2, t1) = 2/1 = 2$ pour lequel on a : $M(p1) = 5 \geq q \times W(p1, t1) = 4$. Le franchissement lot de $t1$ consiste à soustraire $q \times W(p1, t1) = 4$ jetons discrets de la place discrète $p1$; à soustraire le jeton lot de taille $b = 2$ de la place lot $p2$ ($b = 2$ est le jeton lot correspondant à l'indice $q = b/W(p2, t1)$) ; à rajouter $q \times W(t1, p3) = 2 \times 3 = 6$ jetons discrets dans la place discrète $p3$; et à rajouter un jeton lot de taille égale à $q \times W(t1, p4) = 2 \times 3 = 6$ dans la place lot $p4$.

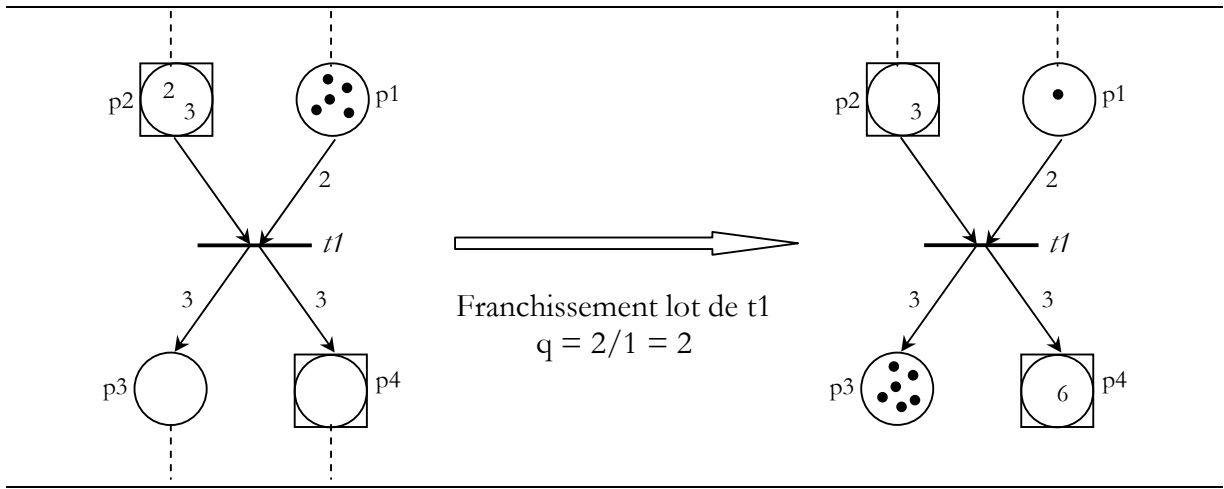


Figure 2.3. Exemple de franchissement lot

La notation $\mu [t]_q > \mu'$ ou $\mu [t]_q \rightarrow \mu'$ est utilisée par la suite pour signifier que le μ -marquage μ' est atteignable à partir du μ -marquage μ en effectuant le franchissement de la transition lot t par un indice de franchissement q . Pour l'exemple de la figure 2.3, on peut noter après le franchissement lot de $t1$: $\mu = (5, \{2, 3\}, 0, \emptyset)^T [t1]_2 \rightarrow \mu' = (1, \{3\}, 6, \{6\})^T$.

3.4. Relations entre les deux types de fonctionnement

La formulation des équations de validation et de franchissement d'une transition discrète est un cas particulier de celle d'une transition lot. Du point de vue formulation, le lien entre les deux cas de fonctionnement se trouve dans le paramètre q . Pour $q = 1$, les équations du fonctionnement lot impliquent celles du fonctionnement discret. Ce lien établi nous permet par la suite, de fusionner les deux fonctionnements dans une même équation dite « équation d'état » qui gouverne la dynamique du modèle et qui est utile pour l'analyse du modèle.

Du point de vue fonctionnement, contrairement au franchissement discret, le franchissement lot n'est pas seulement contrôlé par les poids des arcs mais également par l'indice de franchissement lot q . A chaque franchissement d'une transition lot, le nombre de jetons discrets à soustraire dans les places discrètes en amont et le nombre de jetons discrets à rajouter dans des places discrètes en aval de cette transition est pondéré par l'indice de franchissement q . Comme ce dernier se détermine en fonction des tailles des jetons lots, ceci signifie que le flux des jetons discrets suit le comportement lot que lui impose le flux des jetons lots.

Hormis la possibilité de création de jetons lots dans une place lot pouvant se trouver en sortie d'une transition discrète (équation 2.9), les règles de *fonctionnement discret* d'un BDSPN correspondent bien à celles d'un RdP classique. Ceci implique, qu'en absence de places lots dans un BDSPN, le modèle se dégenère en un cas de réseau de Petri discret classique de type (DSPN, GSPN, SPN, RdP classique) suivant la nature des temporisations utilisées pour les délais de franchissement des transitions. Autrement dit, le modèle BDSPN inclut dans son formalisme toutes les classes de réseaux de Petri à sémantiques discrètes que nous avons citées. Ainsi, la pertinence de ces modèles en termes de modélisation et d'analyse reste soigneusement préservée et s'ajoute ainsi à tous les avantages qu'apporte le modèle BDSPN pour la modélisation et l'études des systèmes de gestion de stocks, des chaînes logistiques et plus généralement des systèmes à événements discrets ayant des phénomènes lots.

3.5. Illustrations pratiques du fonctionnement

Dans cette section le principe de fonctionnement d'un BDSPN est illustré au travers de simples exemples significatifs. Ils sont choisis d'une manière à prédire, dans un premier temps, les premières idées sur l'utilisation des BDSPNs en modélisation et de pouvoir illustrer certains avantages du modèle et de ses règles de fonctionnement par rapport aux RdPs discrets classiques.

3.5.1 Synchronisation de flux de produits et de commandes lots

Dans le BDSPN de la figure 2.4, la transition $t1$ modélise une opération d'assemblage de produits en lots suivant les commandes des clients (différentes tailles) enregistrées dans la place lot $p2$. La place lot $p3$ représente le dépôt des lots assemblés correspondant aux commandes des clients prêtes pour la livraison. L'opération de livraison est modélisée par la transition lot $t3$. Les poids des arcs $(p1, t1)$ et $(p2, t1)$ fixés dans le réseau signifient que l'assemblage d'un lot de produits de taille b , nécessite $2 \times b$ matières premières du stock $p1$.

Pour le μ -marquage actuel du réseau $\mu = (5, \{2, 3, 3, 4\}, \emptyset)^T$, la transition lot $t1$ est validée pour le jeton lot de taille $b = 2$ (i.e. avec un indice de franchissement : $q = 2/W(p2, t1) = 2$). Le franchissement de la transition lot $t1$ validée avec cet indice consiste à soustraire $q \times W(p2, t1) = b \times 2$ jetons discrets dans $p1$ et à soustraire un jeton lot de taille $q \times W(p2, t1) = b$ dans la place lot $p2$ et à rajouter un jeton lot de taille $q \times W(t1, p3) = b$ dans la place $p3$. Le nouveau μ -marquage du réseau est $\mu' = (1, \{3, 3, 4\}, \{2\})^T$. Ce nouveau μ -marquage du réseau, signifie que le nouvel état du système modélisé est le suivant : il reste un seul produit dans le stock, il y a deux commandes de taille 3 et une commande de taille 4 enregistrées en attente de traitement et une commande de taille 2 est prête dans le dépôt pour la livraison à son client. Ceci est une première idée sur l'évolution d'un BDSPN. Il faut remarquer déjà le pouvoir du modèle à coordonner et à synchroniser entre le flux des commandes des clients représentées par des jetons lots de différentes tailles et le flux des matières premières ou des produits représentés par les jetons discrets.

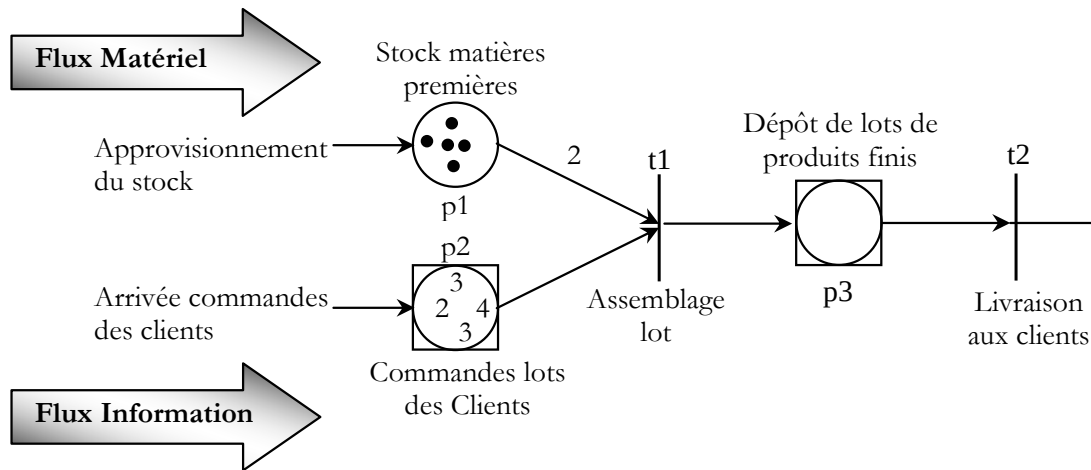


Figure 2.4. Synchronisation d'un flux matériel et d'un flux d'information

3.5.2 Assemblage de deux types de produits sur commande lot

Le BDSPN de la figure 2.5 modélise un système d'assemblage par lots de deux types de produits. La transition lot $t1$ modélise le début de l'opération d'assemblage d'un lot de produits suivant des commandes lots arrivant dans la place lot $p4$. La transition $t2$ modélise la fin de l'assemblage d'un lot de produits. Suivant les poids des arcs affectés au modèle, exécuter une commande lot de taille b , nécessite $2b$ produits de type A et b produits de type B . Assembler un lot de produits de taille b nécessite donc $3b$ produits au total que peut recevoir la place discrète $p5$ lors d'un lancement d'une opération d'assemblage (franchissement lot de $t1$). A l'état actuel du réseau $\mu1 = (4, 3, \{4, 2, 2\}, \emptyset, 0)^T$, la transition lot $t1$ est validée pour la commande lot de taille $b = 2$.

Le franchissement lot de la transition lot $t1$ avec l'indice de franchissement correspondant $q = b / W(p3, t1) = 2$ consiste à :

- Soustraire $q \times W(p1, t1) = 4$ produits de type A de la place discrète $p1$,
- Soustraire $q \times W(p2, t1) = 2$ produits de type B de la place discrète $p2$,
- Soustraire le jeton lot $b = 2$ de la place lot $p3$,
- Rajouter un jeton lot de taille égale à $q \times W(t1, p4) = 2$ dans la place lot $p4$,
- Rajouter $q \times W(t1, p5) = 6$ jetons discrets dans la place discrète $p4$.

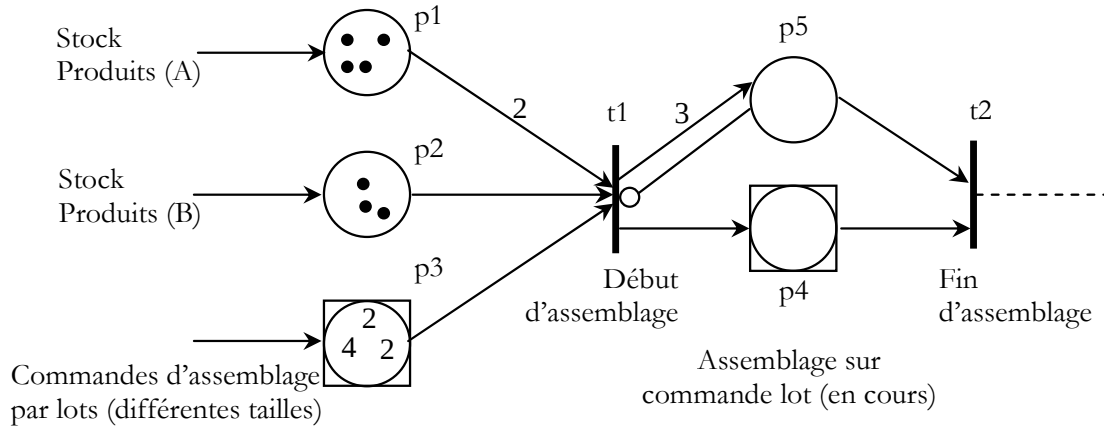


Figure 2.5. Assemblage de deux produits par lots

Le nouveau μ -marquage du BDSPN après le franchissement lot de $t1$ est donc $\mu_2 = (0, 1, \{4, 2\}, \{2\}, 6)^T$. On voit une nouvelle fois, la finesse dans la reproduction du comportement lot du système d'assemblage par son modèle BDSPN. L'ensemble des places discrètes $p1, p2, p3$ et les arcs correspondant constitue le support du flux matériel (flux des jetons discrets) et l'ensemble des places lots $p3, p4$ et les arcs correspondant constituent le support du flux information (flux des jetons lots). Le flux des jetons lots joue le rôle d'un guide dans la dynamique du flux des jetons discrets en imposant un comportement lot à la dynamique du système suivant des quantités discrètes de tailles différentes. La suppression, ou bien le remplacement des places lots par des places simples dans ce modèle, pour revenir à un cas classique de RdP, ne conduira sûrement pas au fonctionnement voulu. Ceci est discuté et illustré dans le paragraphe suivant.

3.5.3 Comportement d'un BDSPN par rapport à un RdP classique

A l'aide de l'exemple de la figure 2.6, nous allons faire une analyse du comportement d'un système modélisé à la fois par un BDSPN représenté sur la figure 2.6.(a) et par un réseau de Petri standard représenté sur la figure 2.6.(b). Dans les deux modèles, nous avons les mêmes transitions et les mêmes arcs. Contrairement au modèle RdP classique,

les places $p2$ et $p3$ sont de type lots dans le BDSPN. Nous allons étudier l'effet des composants lots (places, jetons et transitions lots) sur la dynamique du système.

Dans le BDSPN, des commandes lots de clients arrivent et sont enregistrées dans la place lot $p2$ où elles se mettent en attente de traitement. Dans l'exemple, nous avons trois commandes enregistrées dans la place lot $p2$: une commande de taille 4 et deux autres de taille 2 ($\mu(p2) = \{2, 4, 2\}$). Ces commandes vont être satisfaites, suivant leurs ordres d'arrivée, à partir d'un stock de produits finis, représenté par la place discrète $p1$, si le stock disponible est suffisant. A l'instant initial t_0 (dans l'état actuel du μ -marquage du modèle), il y a qu'un seul produit fini disponible dans le stock (i.e., $\mu(p1) = 1$). La transition $t2$ qui modélise le traitement des commandes est non validée. Dans ce cas, il faut attendre l'approvisionnement du stock. Contrairement au fonctionnement du BDSPN, le modèle standard de la figure 2.6.(b), les commandes sont enregistrées dans la place discrète $p2$. On a aucune information sur leurs tailles hormis la taille totale des commandes enregistrées $M(p2) = 8$ correspondant au M-marquage de cette place dans le modèle BDSPN. Dans ce cas, le traitement des commandes peut commencer puisque la transition $t2$ est validée pour le marquage actuel du modèle standard.

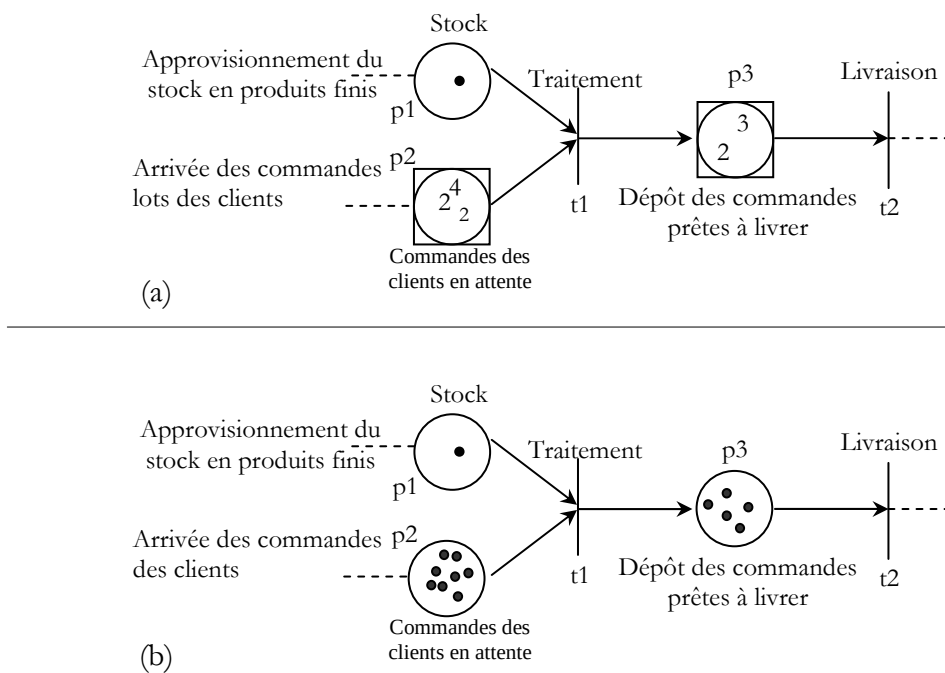


Figure 2.6. Comportement d'un BDSPN par rapport à un RdP classique

La place $p3$ dans les deux modèles correspond aux commandes des clients prêtes pour la livraison. La livraison s'effectue par le franchissement de la transition déterministe $t2$. La livraison dans le BDSPN, va s'effectuer par lot. Le client recevra sa commande en une fois telle qu'elle est commandée. Ceci n'est pas le cas dans le modèle standard où les

livraisons s'effectuent franchissement par franchissement de t_3 . Ainsi, la commande de chaque client n'est pas livrée en une seule fois alors qu'en pratique une commande d'un lot de produits est emballée comme un paquet et il est nécessaire de le livrer comme un seul produit. En conclusion, les deux modèles se comportent différemment et par conséquent n'auront pas les mêmes performances. Le modèle BDSPN a permis de modéliser le flux lot et les opérations lots correctement. Autrement dit, le BDSPN a pu respecter le comportement lot du flux du système que imposent les commandes lots des clients.

Le modèle RdP classique ne donne pas le comportement recherché. Les règles de fonctionnement (validation et franchissement des transitions) d'un RdP classique ne sont pas adaptées à respecter le comportement lot du système que peut imposer des entités lots de différentes tailles (commandes lots, lots de produits, demande clients en mode lot...) qui évoluent dans le système en passant sur de mêmes opérateurs, mêmes machines, etc. Autrement dit, le mécanisme de validation et de franchissement d'un RdP classique n'est pas adapté pour qu'une même transition puisse être franchie par des entités de différentes tailles. Le modèle BDSPN est menu mathématiquement et graphiquement de ce pouvoir d'expression. La formulation des règles d'évolution du modèle, dans le cas d'un fonctionnement lot, est faite d'une manière à ce qu'une même transition puisse être franchie par des quantités discrètes de différentes tailles à l'aide d'un indice de franchissement lot q qui a le pouvoir d'ajuster automatiquement les poids des arcs afin de respecter les tailles des lots à chaque franchissement. Ainsi, le comportement du système global respecte finement l'évolution des ces quantités dans les différentes locations du système. Cet avantage expressif n'est pas seulement utile pour la phase de la modélisation du système, mais nous verrons par la suite l'importance de toutes les informations concernant le comportement lot que peut capturer un modèle BDSPN dans les phases d'analyse.

Nous verrons formellement dans le chapitre prochain dans quels cas un BDSPN peut-il se ramener ou non à un modèle RdP classique pouvant reproduire un même comportement. Nous montrerons ainsi, que les BDSPNs ne sont pas introduits dans le simple but de proposer un nouveau modèle mais qu'ils répondent à une nécessité bien réelle.

4. Matrice d'incidence et équation d'état

Dans cette section, l'équation d'état qui gouverne simultanément le comportement dynamique du flux des jetons discrets et des jetons lots dans un BDSPN est développée. Comme dans les réseaux de Petri classiques, l'équation d'état constitue un des supports mathématiques pour l'analyse basée sur l'algèbre linéaire.

4.1. Matrice d'incidence

La matrice d'incidence $W = [w_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, d'un BDSPN est définie de manière similaire à un RdP classique [PRO 95] comme suit :

$$w_{ij} = \begin{cases} W(t_j, p_i) & \text{si } (t_j \in \bullet p_i) \text{ et } (\bullet p_i \cap p_i^\bullet = \emptyset) \\ -W(p_i, t_j) & \text{si } (t_j \in p_i^\bullet) \text{ et } (\bullet p_i \cap p_i^\bullet = \emptyset) \\ W(t_j, p_i) - W(p_i, t_j) & \text{si } t_j \in \bullet p_i \cap p_i^\bullet \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec n est le nombre de places et m le nombre de transitions du BDSPN considéré. $W(x,y)$ représente le poids de l'arc (x,y) .

4.2. Equation de franchissement d'une seule transition

Les équations de franchissement d'une transition t_j validée à partir d'un μ -marquage μ_k à un nouveau μ -marquage μ_{k+1} (voir section 2) pour les deux cas de fonctionnement - discret et lot - peuvent être fusionnées comme suit :

$$\forall p \in \bullet t_j, \quad \mu_{k+1}(p) = \mu_k(p) - q_j^k \times W(p, t_j) \quad (2.19)$$

$$\forall p \in t_j^\bullet, \quad \mu_{k+1}(p) = \mu_k(p) + q_j^k \times W(t_j, p) \quad (2.20)$$

$$\forall p \notin \bullet t_j \cup t_j^\bullet, \quad \mu_{k+1}(p) = \mu_k(p) \quad (2.21)$$

q_j^k est l'indice de franchissement de la transition t_j à partir d'un marquage μ_k défini comme suit :

$$q_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \bullet t_j \cap P_b = \emptyset \\ b/W(p, t_j), \quad b \in \mu_k(p) & \text{si } \bullet t_j \cap P_b \neq \emptyset \end{cases} \quad (2.22)$$

La mise sous forme matricielle des trois équations de franchissement (2.19), (2.20) et (2.21) conduit à une seule équation de franchissement (21) dite *équation d'état* :

$$\mu_{k+1} = \mu_k + W \times F \quad (2.23)$$

Avec W est matrice d'incidence du BDSPN similaire à un réseau de Petri classique. μ_{k+1} est le nouveau marquage du réseau atteint en franchissant la transition t_j à partir du

marquage μ_k . F est le *vecteur caractéristique de franchissement*, de dimension m (m est le nombre de transitions du réseau), relatif au franchissement de la transition t_j . Les composantes $F[j]$ du vecteur F sont définies comme suit :

$$F[j]_{i=1 \text{ à } m} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ q_j^k & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.24)$$

4.3. Equation d'une séquence de franchissements

Soit S une séquence de franchissement faisable, définie comme une suite de transitions pouvant être discrètes ou lots telles que le franchissement de chacune d'elle conduit à un μ -marquage qui valide la suivante. Le franchissement de la séquence de franchissement S à partir d'un μ -marquage μ_k (M_k son M-marquage correspondant) à un nouveau μ -marquage μ_z (M_z son M-marquage correspondant), qu'on note par $\mu_k [S \rightarrow \mu_z$, peut être formulé à l'aide de l'équation suivante :

$$M_z = M_k + W \times F \quad (2.25)$$

Dans ce cas les composantes $F[j]$ du vecteur caractéristique de franchissement sont définies comme suit :

$$F[j]_{i=1 \text{ à } m} = \begin{cases} \text{Nombre de franchissements de } t_j \text{ dans } S, & \text{si } t_j \in T_D \\ \text{Somme des indices de franchissement de } t_j \text{ dans } S, & \text{si } t_j \in T_B \end{cases} \quad (2.26)$$

Contrairement à l'équation d'état (2.23) caractérisant le changement d'état par le franchissement d'une seule transition, l'équation (2.25) caractérisant le franchissement d'une séquence de franchissement S est donnée en fonction du M-marquage du BDSPN et pas de son μ -marquage. Ceci est dû au fait que franchir d'un seul coup un ensemble de transitions ne permet pas de garder l'information sur les tailles des jetons lots issus de chaque franchissement d'une transition lot de la séquence S . Cette équation n'est pas aussi applicable dans le cas où on a des arcs à poids variables, car la matrice d'incidence W est constante dans l'équation.

4.4. Illustration de l'équation d'état

Considérons le BDSPN représenté sur la figure 2.4 pour le μ -marquage actuel suivant : $\mu_1 = (4, \{4, 2, 2\}, \{4\})^T$. Le franchissement de la transition lot t_1 par l'indice de franchissement $q = 2$ (correspondant au jeton lot $b = 2$) conduit le réseau en un nouveau

μ -marquage $\mu 2$ qui peut être déterminé par l'équation d'état (2.23) comme suit :

$$\mu 2 = \begin{bmatrix} 4 \\ \{4, 2, 2\} \\ \{4\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \{4, 2\} \\ \{4, 2\} \end{bmatrix}$$

Pour le même exemple, à partir du μ -marquage actuel $\mu 1 = (4, \{4, 2, 2\}, \{4\})^T$ correspondant à son M-marquage $M 1 = (0, 8, 4)^T$, le franchissement de la séquence de franchissement $S = t1_{[2]}t2_{[4]}t2_{[2]}$ conduit le réseau à un nouveau état qu'on peut déterminer par l'équation (2.23) comme suit :

$$M_s = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'application de l'équation (2.25) trois fois successives en franchissant les transitions $t1_{[2]}$, $t2_{[4]}$, et $t2_{[2]}$ dans cet ordre permet de déterminer le nouveau μ -marquage $\mu_s = (0, 1, \{4, 2\}, \emptyset)^T$ correspondant au M-marquage M_s obtenu précédemment.

$$\mu_s = \left[\left[\left[\begin{bmatrix} 4 \\ \{4, 2, 2\} \\ \{4\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \{4, 2\} \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

FRANCHISSEMENT DE $t1_{[2]}$

FRANCHISSEMENT DE $t1_{[2]}t2_{[4]}$

FRANCHISSEMENT DE $t1_{[2]}t2_{[4]}t2_{[2]}$

5. Politiques de franchissement

Le fonctionnement d'un BDSPN doit obéir, en plus des règles de validation et de franchissement définies dans la section 3, à un ensemble de politiques qui servent à gérer :

- Le choix de jetons lots qui vont franchir une transition lot lorsque cette transition est validée pour plusieurs jetons lots dont il est nécessaire de faire un choix;
- La sélection de la transition à franchir dans un μ -marquage donné lorsque plusieurs

transitions sont validées dans le même μ -marquage et ;

- La prise en compte de la mémoire temporelle des transitions validées après franchissement d'une autre transition sélectionnée parmi ces transitions validées mais non franchies.

5.1. Politiques associées aux places lots

Dans les réseaux de Petri classiques, le problème de choix des jetons qui franchissent une transition validée ne se pose pas puisque tous les jetons sont semblables. Dans un BDSPN et précisément dans ses places lots, les jetons lots se distinguent par leurs tailles. Dans chaque place lot, un ensemble de jetons lots, est vu par les transitions de sortie comme différents candidats pour un éventuel franchissement lot. Il est donc nécessaire de définir des stratégies qui permettent de gérer ces candidatures. En d'autres termes, une transition lot peut avoir plusieurs indices de franchissement à un instant donné (équation 2.10) dont il faut choisir, d'une façon déterministe ou aléatoire, un indice pour effectuer son franchissement.

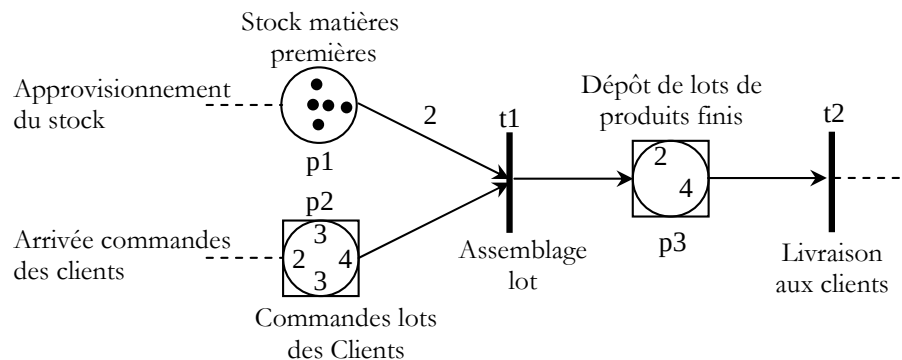


Figure 2.7. Exemple d'illustration du choix du jeton lot

Supposons que dans le réseau de la figure 2.7, la place lot $p3$ contient deux jetons lots de tailles 4 et 2 qui correspondent à deux commandes prêtes pour la livraison. A cet état, la transition $t2$ est validée pour les deux jetons lots. Deux indices de franchissement de $t2$ sont alors possibles : $q1 = 4/1 = 4$ et $q2 = 2/1 = 2$. Le franchissement de $t1$ par l'indice $q1$ (resp. $q2$) signifie que la livraison de la commande de taille 4 (resp. 2) a eu lieu. La question qui se pose dans des situations semblables, quel indice de franchissement faut-il choisir à cet instant précis ? Ou bien qu'elle commande doit-on traiter ou livrer en premier ? Cette question conduit à associer pour chaque place lot d'un BDSPN une politique de gestion du choix d'un jeton lot dans le cas où plusieurs jetons satisfont les conditions de validation requises : (2.10) ; (2.11) et (2.12). Les politiques principales qui

s'offrent à nous sont :

5.1.1 Politique par ordre d'arrivée

La politique la plus envisagée dans la pratique consiste à classer les jetons lots dans chaque place lot par leur ordre d'arrivée. Le premier jeton lot arrivé dans une place lot donnée est considéré comme le premier jeton lot candidat pour la validation et le franchissement de la transition de sortie correspondante. Quand un jeton lot candidat valide la transition de sortie, cette dernière est franchie après un délai (temporisation) qui lui est associé, sinon il garde toujours son classement pour un prochain test de validation et le deuxième candidat du classement courant est testé pour la validation et ainsi de suite. Dans ce cas, une place lot joue exactement le rôle d'une file d'attente.

5.1.2 Politique à choix aléatoire

La deuxième politique proposée ignore l'ordre d'arrivée des jetons lots dans la place lot. Dans ce cas, tous les jetons lots de cette place sont tous candidats pour le franchissement d'une transition de sortie. Chaque jeton lot validant la transition peut franchir la transition de sortie avec une probabilité donnée avec la restriction que si deux jetons lots ont une même taille, un seul des deux pourra effectuer le franchissement.

5.1.3 Politique avec fonction tri

Avec cette politique les candidatures des jetons lots pour le franchissement d'une transition ne sont pas classées pas par leurs ordres d'arrivée mais suivant une fonction donnée telle qu'un ordre croissant suivant la taille des jetons lots disponibles dans la place lot. Le test de validation retient pour le franchissement le premier jeton lot suivant la fonction associée qui valide la transition en question.

D'autres politiques peuvent être définies par l'utilisateur en fonction du système qu'il souhaite modéliser ou bien de la gestion spécifique qu'il souhaite associer à certaines places lots du modèle. On peut penser à des politiques basées sur des priorités par exemple, etc.

Avec ces politiques, le formalisme des BDSPNs intègre un aspect très important dans la dynamique des systèmes à événements discrets. En effet, ces politiques jouent un rôle similaire à celui des politiques de « routage des clients » (FIFO, RANDOM, FCFS,...) concernant le formalisme des réseaux de file d'attente [BRU 00]. Ceci donne aux BDSPNs plus de puissance dans l'expressivité et la description des systèmes à étudier.

5.2. Politiques associées aux transitions

Le fonctionnement d'un BDSPN, comme tout autre réseau de Petri stochastique, s'appuie sur deux types de politiques à associer à ses transitions. Il s'agit de la « *politique de service* » et de la « *politique d'exécution* ».

5.2.1 Politique de service

L'évolution d'un BDSPN se fait à limitation implicite [DAV 92], c'est-à-dire le franchissement d'une transition validée se fait en *mono serveur* (mode *single server*). En d'autres termes, la transition n'effectue qu'un service à la fois. En dehors de notre travail, l'utilisateur peut également appliquer la politique dite multi serveur (mode *infinite server*) si les événements que modélisent certaines transitions du modèle du système représenté nécessitent ce mode de fonctionnement.

5.2.2 Politique d'exécution

Une politique, dite d'exécution, comprend deux volets :

✓ **La sélection de la transition à franchir :** étant donné un μ -marquage μ , il s'agit de sélectionner la transition à franchir lorsque plusieurs transitions sont validées pour ce même μ -marquage. Les transitions immédiates sont prioritaires par rapport aux transitions temporisées. En cas de conflit entre un ensemble de transitions immédiates, la transition qui a la plus grande priorité est franchie. Quand la plus grande priorité est partagée entre plusieurs transitions immédiates, le choix se fait aléatoirement à l'aide de poids ω_j attribués aux transitions à partir desquels on peut calculer des probabilités de franchissement. Il s'agit de la politique dite de « *présélection* » [CHI 93]. Quand un ensemble de transitions temporisées sont validées pour un μ -marquage donné, la transition à franchir est celle qui présente le plus petit délai de franchissement à cet instant. Il s'agit de la politique dite de « *compétition* » [FLO 79] qui consiste à franchir la transition dont la variable temporelle est statiquement la plus petite. Du point de vue délai de franchissement, une transition immédiate validée est franchie après un délai nul. Une transition temporisée validée est franchie après un délai déterministe constant si elle est déterministe ou après un délai aléatoire généré suivant la loi de distribution qui lui est associée.

✓ **La mémoire temporelle :** Une fois qu'une transition t est franchie à partir d'un μ -marquage μ , comment le délai de franchissement d'une transition déjà validée à partir de μ et non franchie va-t-il être considéré pour ses franchissements futurs? Trois principales politiques peuvent être utilisées [AJM 89], [CIA 93], [JUA 97].

- **La réinitialisation** (*resampling memory*): Dès qu'une transition est franchie, les

horloges de toutes les transitions sont réinitialisées (remise à zéro), c'est-à-dire les valeurs actuelles sont perdues et de nouvelles valeurs sont générées si nécessaire. Cette politique ne tient pas compte du passé.

- **La mémoire de la dernière période de validation** (*enabling age memory*): Chaque fois qu'une transition est franchie, les horloges de toutes les transitions qui ne sont pas plus franchissables gardent leur valeur actuelle. La mémoire du passé est enregistrée dans une variable appelée *enabling memory variable* associée à chaque transition.
- **La mémoire de toutes les périodes de validation** (*age memory*): Après le franchissement d'une transition, les horloges de toutes les transitions gardent leur valeur actuelle et continueront de décroître dès qu'elles seront à nouveau franchissables. La mémoire du passé est enregistrée dans une variable appelée *age memory variable* associée à chaque transition. (considère que la mémoire temporelle d'une transition commence dès qu'elle est validée pour la première fois et se maintient (même lorsqu'elle n'est pas validée) jusqu'à ce qu'elle soit effectivement franchie.

Nous reviendrons sur l'effet de ces politiques pour la caractérisation de la nature du processus stochastique que génère l'évolution des μ -marquages d'un BDSPN dans le prochain chapitre.

5.3. Délai de franchissement d'une transition lot

Dans la pratique, le temps d'exécution d'une opération lot peut dépendre de la taille du lot correspondant. Par exemple, le temps nécessaire pour usiner un lot de b pièces sur une machine dépend de b . En général, ce temps d'exécution est proportionnel à la taille du lot. En d'autres termes, si le temps nécessaire pour usiner une pièce est de d , alors le temps nécessaire pour usiner un lot de b pièces est le produit $b \times d$. On rencontre également des opérations lots dont les différentes tailles des lots à traiter n'ont pas d'effet sur les délais d'exécution de ces opérations. Par exemple, l'opération de demande de réapprovisionnement d'un stock ne dépend pas de la taille de la commande lot à passer. Cette question implique que dans un BDSPN, il est nécessaire d'indiquer pour chaque transition lot, si le délai de son franchissement dépend ou pas de la taille des jetons lots.

Soient :

- $T^* \subseteq T \cap T_b$ l'ensemble des transitions lots dont le délai de franchissement dépend de la taille des jetons lots lors des franchissements.
- $D(t, b)$ le délai de franchissement d'une transition lot t correspondant au franchissement de cette transition par un jeton lot de taille b .
- $\lambda(t, b)$ est le paramètre de la loi de distribution d'une transition lot exponentielle t correspondant au jeton lot de taille b .

Nous retiendrons systématiquement par la suite lors de l'évolution d'un BDSPN que :

$$\forall t \in T_i, b \in \mathbb{N}^*, D(t, b) = D(t) = 0 \quad (2.27)$$

$$\forall t \in T_d, b \in \mathbb{N}^*, D(t, b) = \begin{cases} D(t), & \text{si } t \notin T^* \\ b \times D(t), & \text{si } t \in T^* \end{cases} \quad (2.28)$$

$\forall t \in T_e, b \in \mathbb{N}^*, D(t, b)$ est généré suivant une loi exponentielle de paramètre :

$$\forall t \in T_d, b \in \mathbb{N}^*, \lambda(t, b) = \begin{cases} 1 / D(t) & \text{si } t \notin T^* \\ 1 / (b \times D(t)) & \text{si } t \in T^* \end{cases} \quad (2.29)$$

6. Situations de conflits et résolution

Dans un BDSPN, les situations de conflits peuvent apparaître dans deux cas typiques. Le premier cas correspond aux situations où un ensemble de transitions discrètes et immédiates sont validées pour un même μ -marquage donné. Le deuxième cas est spécifique aux places lots. Il s'agit d'un ensemble de jetons lots dans une même place lot pouvant valider au même moment une même transition lot. Ces deux cas peuvent se généraliser à d'autres situations de conflits classées et analysées dans cette section. Dans tous les cas, une situation de conflit correspond à une ambiguïté dans le modèle qu'il faudra lever (prise de décision). La résolution peut se faire d'une manière déterministe (utilisation des priorités pour le choix des transitions, affectation de stratégies déterministes pour le choix des jetons lots dans les places lots ...), ou d'une manière aléatoire où il faudra savoir calculer les probabilités de franchissement qui sont utiles pour l'analyse et particulièrement pour l'évaluation de performance.

6.1. Conflit de franchissement discret (DFC)

6.1.1 Définition d'un DFC

On dit qu'il y a un conflit de franchissement discret, à partir d'un μ -marquage μ_i , entre un ensemble, noté DFC , d'au moins deux transitions immédiates discrètes lorsque toutes les transitions de cet ensemble sont validées en même moment pour le même μ -marquage μ_i et que le franchissement de l'une des transitions désactive l'autre. Ce conflit est désigné par $DFC(\mu_i)$ qui indique l'ensemble des transitions en conflit DFC et le μ -marquage μ_i pour lequel le conflit s'est produit. Le nombre de transitions qui sont en conflit est le cardinal de cet ensemble qu'on note par $|DFC(\mu_i)|$.

6.1.2 Résolution d'un DFC

Le choix d'une transition ou de transitions t_j à franchir parmi l'ensemble des transitions en conflit $DFC(\mu_i)$ peut s'effectuer de manière déterministe ou aléatoire suivant le système considéré et son modèle construit par l'utilisateur. Trois politiques de résolution du conflit de franchissement discret peuvent être utilisées.

- **Politique avec priorités.** La transition à franchir est sélectionnée d'une manière déterministe à l'aide des priorités associées aux transitions concernées par le conflit. La transition ayant la plus grande priorité est sélectionnée pour le franchissement.

En cas de conflits entre transitions immédiates ayant la même priorité (ou aucune priorité n'est leur est associée), le conflit peut être résolu aléatoirement suivant les deux politiques suivantes.

- **Politique avec probabilités égales.** Toutes les transitions concernées par le conflit $DFC(\mu_i)$ sont franchies aléatoirement avec une même probabilité telle que :

$$P(\text{franchir } t_j | \mu_i) = 1/|DFC(\mu_i)| \quad (2.30)$$

- **Politique avec poids de sélection.** Dans ce cas, la résolution du conflit $DFC(\mu_i)$ s'effectue à l'aide de poids normalisés associés, lors de la modélisation, à chacune des transitions concernée par le conflit. Ainsi, chaque transition t_j est associée à un poids qu'on note par ω_j servant à déterminer la probabilité de franchissement de chaque transition $t_j \in DFC(\mu_i)$ à partir du μ -marquage μ_i générant ce conflit lors de l'évolution du réseau. Cette probabilité est donnée par :

$$P(\text{franchir } t_j | \mu_i) = \omega_j / \sum_{k|t_k \in DFC(\mu_i)} \omega_k \quad (2.31)$$

Dans le cas où les poids associés aux transitions concernées par le conflit sont égaux, on se retrouve dans un cas similaire à la politique avec probabilités égales.

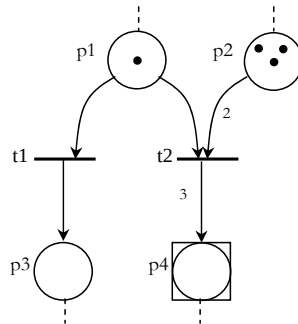


Figure 2.8. Illustration de la notion de conflit de franchissement discret

Pour illustration, considérons le réseau de la figure 2.8, où les transitions discrètes et immédiates $t1$, $t2$ sont associées respectivement aux poids $\omega1$, $\omega2$. Pour le μ -marquage actuel $\mu = (1, 3, 0, \emptyset)^T$, les deux transitions sont validées. Les probabilités de franchissement pour chacune de ces deux transitions sont données par :

$$P(\text{franchir } t_j | \mu) = \omega_j / (\omega_1 + \omega_2)$$

Dans le cas où les poids associés à ces transitions sont égaux, on aura la même probabilité de franchir une de ces transitions à partir de ce μ -marquage : $P(\text{franchir } t_j | \mu) = 1/2$.

6.2. Conflit de franchissement lot (BFC)

6.2.1 Définition d'un BFC

On dit qu'il y a un conflit de franchissement lot lorsqu'une même transition lot t_j est validée avec différents indices de franchissement lot $q \in \mathbb{N}^*$ pour un μ -marquage μ_i . Ceci se produit dans le cas où il y a deux ou plusieurs jetons lots (au moins deux de différentes tailles permettant de générer deux indices différents) qui valident au même moment la transition t_j . $BFC(\mu_i, t_j)$ le conflit que génère une même transition lot t_j à partir d'un μ -marquage μ_i . Il correspond pour l'ensemble des transitions q -indexées $t_{j|q}$ générées par la même transition lot t_j pour lesquelles t_j peut être franchie à partir du μ -marquage μ_i . La figure 2.9 représente les structures usuelles qui peuvent générer des conflits de franchissements lots.

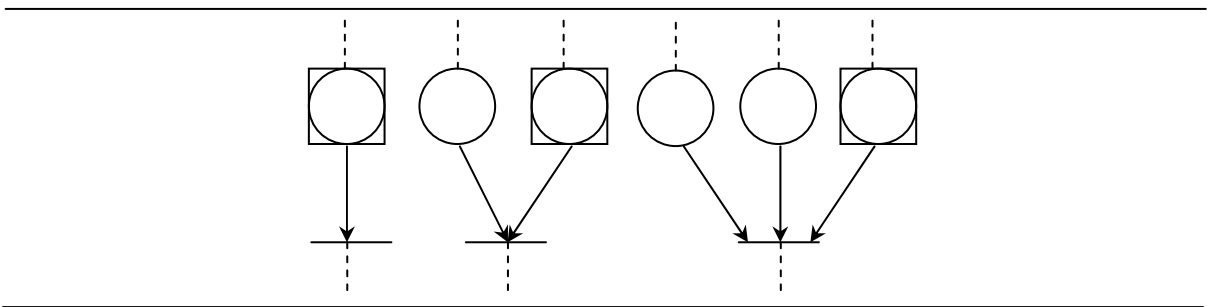


Figure 2.9. Illustration d'un conflit lot généré par une même transition lot t_j

6.2.2 Résolution d'un BFC

D'une façon générale, le choix de la transition q -indexée $t_{j|q}$ parmi l'ensemble $BFC(t_j, \mu_i)$ à franchir correspondant au choix du jeton lot avec lequel la transition lot t_j va être franchie peut se faire soit d'une manière déterministe (sélection) ou d'une manière

aléatoire. Ceci dépend de la stratégie que l'utilisateur adopte pour le système qu'il modélise. Le réseau de la figure 2.10(a) utilisé pour illustrer les techniques de résolution et le calcul des probabilités des franchissements lots possibles dans le cas de ce genre de conflit.

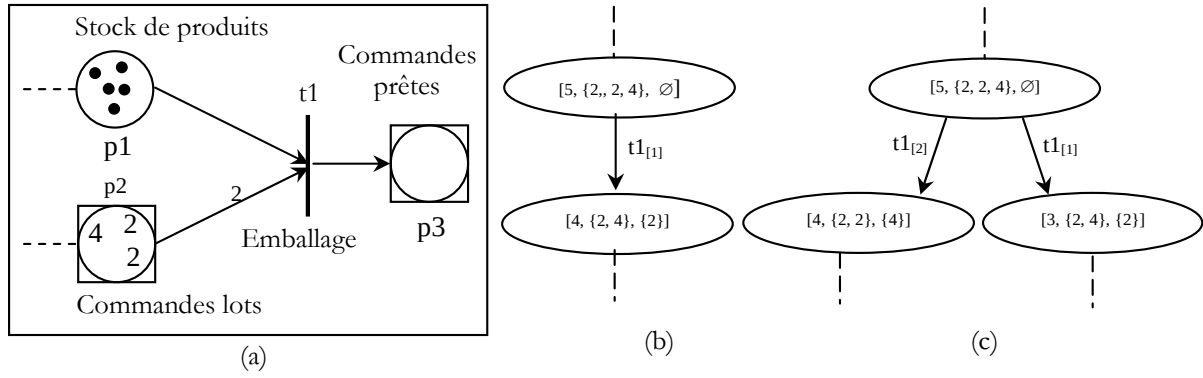


Figure 2.10. Illustration de la notion de franchissement lot

- **Politique de sélection.** Cette politique est déterministe. La transition t_j est franchie avec un seul indice de franchissement choisi. Ce choix déterministe peut se faire par exemple par ordre d'arrivée des jetons lots (FIFO) dans la place lot correspondante.

Dans le BDSPN de la figure 2.10(a), la transition lot $t1$ est validée par deux indices différents de franchissements lots pour le μ -marquage actuel $\mu = (5, \{2, 2, 4\})^T$. Si la politique de gestion des lots associée à place lot $p2$ est du type « sélection par ordre d'arrivée » et si on suppose, par exemple, que le jeton lot $b = 2$ est le premier arrivé dans $p1$ alors la transition $t1$ est franchie par l'indice de franchissement correspondant à ce jeton lot tel que : $q = b/W(p2, t1) = 1$. Par conséquent, dans la figure 2.10(b), une seule branche déterministe est créée dans le graphe d'évolution des μ -marquages correspondant au franchissement $\mu[t1_{[1]} >]$.

Dans le cas où la politique associée pour la gestion des jetons lots est du type aléatoire ou dans le cas où deux ou plusieurs jetons lots (au moins deux de différentes tailles) arrivent au même moment, le franchissement lot s'effectue aléatoirement. Ainsi, franchir la transition t_j avec un indice de franchissement lot faisable q s'effectue avec une probabilité à déterminer. Dans le graphe d'évolution des μ -marquages, des branches des franchissements lots $\mu[t_{j[q]} >]$ sont créés pour chaque indice de franchissement q . Chaque franchissement peut se réaliser avec une probabilité qu'on détermine suivant les politiques suivantes.

- **Politique avec probabilités égales.** Le franchissement de la transition t_j se fait pour ses différents indices de franchissement faisables q avec une même probabilité.

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = 1 / |BFC(\mu_i, t_j)| \quad (2.32)$$

En utilisant cette politique pour l'exemple de la figure 2.10, le franchissement de la transition $t1_{[1]}$ et $t1_{[2]}$ correspondant aux deux franchissements possibles de la transition lot $t1$ avec ses deux différents indices s'effectuent avec une même probabilité égale à $1/2$.

- **Politique avec probabilités pondérées.** Le franchissement de la transition tj se fait pour ses différents indices de franchissement faisables avec une probabilité qui se calcule en considérant pour chaque indice de franchissement q le nombre de jetons lots qu'on note N_q donnant lieu à cet indice.

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = N_q / \sum_{q' | t_{j[q']} \in BFC(t_j, \mu_i)} N_{q'} \quad (2.33)$$

Cette politique est illustrée avec l'exemple de la figure 2.10 où la transition $t1$ peut être franchie avec deux indices de franchissements lots différents. Pour le μ -marquage actuel $\mu = (5, \{2, 2, 4\})$, $BFC(t1, \mu) = \{t1_{[1]}, t1_{[2]}\}$. On constate bien que dans μ , il y a 2 jetons lots de taille 2 qui provoquent le franchissement lot avec $t1_{[1]}$ et un seul jeton lot de taille 4 qui provoque le franchissement lot avec $t1_{[2]}$ ce qui implique que $N_1 = 2$ et $N_2 = 1$. De ce fait, la probabilité de franchir $t1_{[1]}$ est égale à $2/3$ et la probabilité de franchir $t1_{[2]}$ est égale à $1/3$.

- **Politique avec poids de sélection.** cette politique consiste à utiliser la taille de chaque jeton lot, noté b_q , validant la transition tj avec l'indice de franchissement q à partir de μ_i comme un poids servant à calculer la probabilité de franchissement pour chaque indice de franchissement possible q correspondant à ce jeton lot.

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = b_q / \sum_{q' | t_{j[q']} \in E(\mu_i, t_j)} b_{q'} \quad (2.34)$$

Dans l'exemple de la figure 2.10 où la transition $t1$ est validée pour deux indices de franchissements différents correspondant au franchissement de $t1_{[1]}$ ou de $t1_{[2]}$. Autrement dit, la transition $t1$ peut être franchie soit avec un jeton lot de taille 2 ou par un jeton lot de taille 4. La probabilité de franchir $t1_{[1]}$ est égale à $2/(2+4) = 1/3$. La probabilité de franchir $t1_{[2]}$ est égale à $4/(2+4) = 2/3$.

- **Politique avec poids de sélection pondéré.** Contrairement à la politique ci-dessus (d), cette nouvelle politique utilise la taille du jeton lot comme un poids permettant de calculer la probabilité de franchissement avec ce jeton lot (avec l'indice correspondant) tout en prenant en compte le nombre de jetons lots N_q donnant lieu à ce franchissement avec l'indice de franchissement q .

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = N_q \times b_q / \sum_{q' | t_{j[q]} \in E(\mu_i, t_{j'})} N_{q'} \times b_{q'} \quad (2.35)$$

L'utilisation de cette politique pour l'exemple de la figure 2.10 où la transition lot $t1$ est franchissable avec deux indices de franchissement conduit aux probabilités suivantes. La probabilité de franchir $t1_{[1]}$ est égale à $2 \times 2 / [(2 \times 2) + (1 \times 4)] = 1/2$. La probabilité de franchir $t1_{[2]}$ est égale à $[1 \times 4] / [(2 \times 2) + (1 \times 4)] = 1/2$.

6.3. Conflit de franchissement lot généralisé (GBFC)

6.3.1 Définition d'un GBFC

Un conflit de franchissement lot généralisé (*GBFC*) est un cas de conflit lot qui implique, contrairement au *BFC*, plusieurs transitions lots. Les structures usuelles pouvant mener à ce genre de conflits sont représentés dans la figure 2.11. De plus, cette figure montre également que ce genre de conflit peut se voir comme un ensemble de *BFC* correspondant pour chaque transition lot.

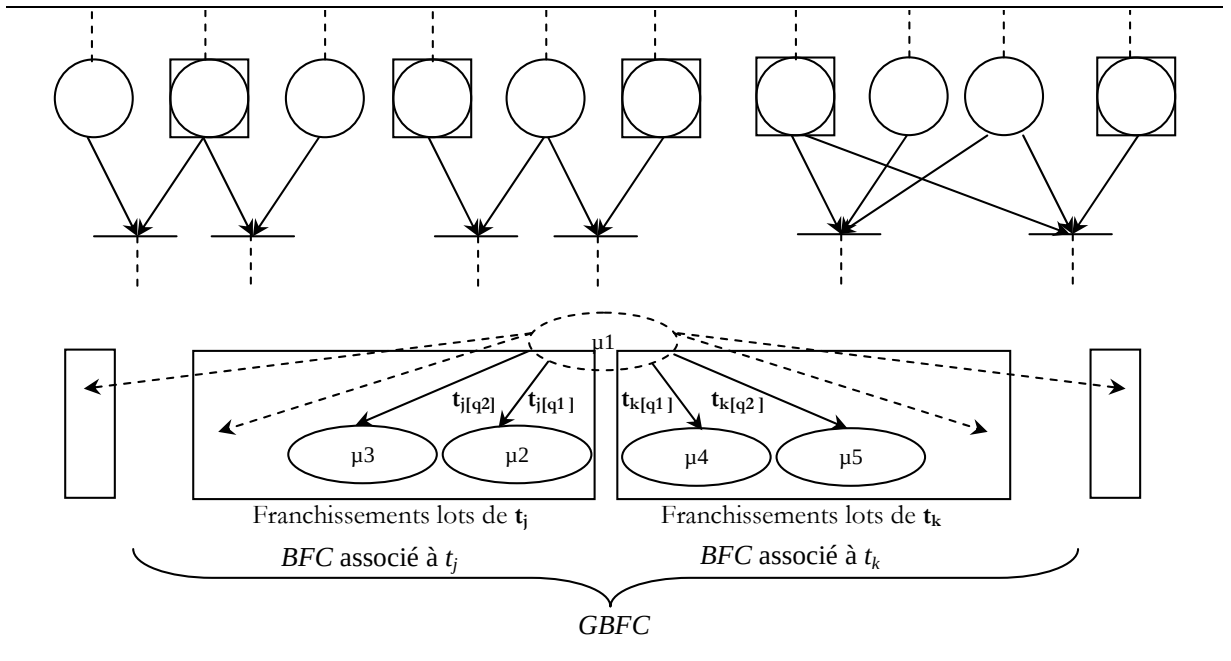


Figure 2.11. Illustration d'un conflit lot généré par plusieurs transitions lots (t_j , t_k , ...)

6.3.2 Résolution d'un GBFC

Les techniques de résolution des conflits et du calcul des probabilités des franchissements possibles que génèrent plusieurs transitions lots sont illustrés à l'aide de l'exemple du réseau de la figure 2.12. Les ordres lots de clients arrivant dans la place lot $p2$

peuvent être exécutés à partir de deux stocks différents représentés par les places discrètes $p1$ et $p3$.

Pour le μ -marquage actuel $\mu = (5, \{2, 2, 4\}, 4)^T$ du BDSPN de cet exemple, il y a un conflit de franchissement lot pour chacune des transitions $t1$ et $t2$ tels que $BFC(t1, \mu) = \{t1_{[2]}, t1_{[4]}\}$ et $BFC(t2, \mu) = \{t2_{[2]}, t2_{[4]}\}$. De plus, les deux transitions $t1$ et $t2$ formant un ensemble de transitions, qu'on note par $TC(\mu) = \{t1, t2\}$, qui sont en conflit de franchissement qu'on note par $TC(t1, t2, \mu)$ indépendamment des conflits lots. D'une manière générale, les questions qui se posent sont : (i) *Dans le cas déterministe* : quelle transition t_j à choisir dans l'ensemble $TC(\mu)$ et quelle transition $t_{j[q]}$ à choisir dans l'ensemble $BFC(\mu, t_j)$? (ii) *Dans le cas aléatoire*, la question consiste à déterminer les probabilités de tous les franchissements possibles par les transitions de l'ensemble $\bigcup_{t_j \in TC(\mu)} BFC(t_j, \mu)$. Répondre à ces questions dépend des politiques associées

aux transitions de l'ensemble $TC(\mu)$ et aux politiques de gestion des jetons lots associées aux places lots générant les conflits lot du type $BFC(\mu)$.

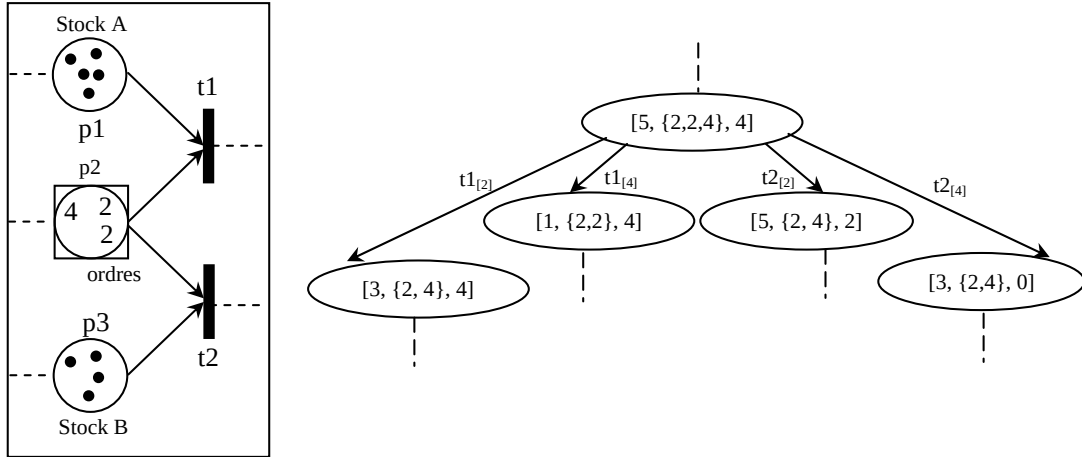


Figure 2.12. Illustration d'un conflit lot généré par plusieurs transitions lots ($t_j, t_k, \dots$)

- **Politique déterministe.** Si la politique associée à la place lot $p2$ est du type déterministe comme « sélection par ordre d'arrivée » par exemple et que le choix entre les deux transitions lots ($t1$ et $t2$ dans cet exemple) est également déterministe par utilisation des priorités alors une seule possibilité de franchissement lot est effectuée avec une probabilité égale à 1. Supposons que la priorité associée à la transition $t1$ est supérieure à celle associée à la transition $t2$ et que le jeton lot de taille $b = 4$ est le premier arrivé dans la place lot $p2$ alors le franchissement lot va s'effectuer avec la transition $t1$ avec un indice de franchissement $q = b / W(p2, t1) = 4$. Dans ce cas, une seule branche de franchissement (déterministe) $\mu[t1_{[4]} >$ est créée dans le graphe d'évolution des μ -marquages.

- **Politique aléatoire.** La gestion aléatoire de ce cas de configuration peut se faire à l'aide de plusieurs stratégies de sélection et de calcul des probabilités des différents franchissements lots possibles. Ceci dépend des politiques à associer pour la gestion des conflits lots $BFC(t1, \mu)$ et $BFC(t2, \mu)$ et des politiques de gestion du conflit entre les transitions lots $t1$ et $t2$ qu'on note par $TC(t1, t2, \mu)$.
- ✓ Si les transitions de l'ensemble $TC(\mu)$ sont associées à des priorités donc la transition t_j ayant la plus grande priorité est choisie et puis on se retrouve dans un conflit de franchissement lot $BFC(\mu, t_j)$ qu'on sait résoudre dans la section précédente.
- ✓ Si les transitions de l'ensemble $TC(\mu)$ sont associées à des poids de sélection qu'on note par ω_j pour chaque $t_j \in TC(\mu)$. La probabilité qu'une transition soit sélectionnée dans l'ensemble est donnée par :

$$P(\text{sélectionner } t_j \in TC(\mu)) = \omega_j / \sum_{k | t_k \in TC(\mu)} \omega_k \quad (2.36)$$

La probabilité de franchissement lot d'une transition $t_{j[q]}$ se calcule comme suit :

- Si le choix aléatoire dans $BFC(\mu, t_j)$ se fait avec des probabilités égales :

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = [P(\text{sélectionner } t_j \in TC(\mu))] / |BFC(\mu_i, t_j)| \quad (2.37)$$

- Si le choix aléatoire dans $BFC(\mu, t_j)$ se fait avec des probabilités pondérées :

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = N_q \times [P(\text{sélectionner } t_j \in TC(\mu))] / \sum_{q' | t_{j[q']} \in BFC(t_j, \mu_i)} N_{q'} \quad (2.38)$$

- Si le choix aléatoire dans $BFC(\mu, t_j)$ se fait avec des poids de sélection :

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = b_q \times [P(\text{sélectionner } t_j \in TC(\mu))] / \sum_{q' | t_{j[q']} \in E(\mu_i, t_j)} b_{q'} \quad (2.39)$$

- Si le choix aléatoire dans $BFC(\mu, t_j)$ se fait avec des poids de sélection pondéré :

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = N_q \times b_q \times [P(\text{sélectionner } t_j \in TC(\mu))] / \sum_{q' | t_{j[q']} \in E(\mu_i, t_j)} N_{q'} \times b_{q'} \quad (2.40)$$

Une autre technique de résolution consiste à considérer $\bigcup_{t_j \in TC(\mu)} BFC(t_j, \mu)$ comme un seul ensemble de transitions en conflits ou en d'autres termes, il constitue un conflit lot de type BFC qui peut être résolu de la même manière présentée dans le cas d'une seule transition lot.

6.4. Conflit de franchissements discret / lot (DBFC)

6.4.1 Définition d'un DBFC

On dit qu'il y a un conflit de franchissement discret / lot (DBFC) lorsqu'il y a un conflit entre un ensemble de transitions immédiates de type lots et discrètes.

6.4.2 Résolution d'un DBFC

La résolution de ce genre de conflit s'effectue de la même manière que l'ensemble des configurations déjà présentées. Il suffit de respecter les stratégies fixées lors de la modélisation du système. On peut constater qu'il s'agit bien d'un cas particulier du cas de conflits générés par plusieurs transitions lots.

Considérons par exemple le cas du réseau de la figure 2.13 où la transition lot $t1$ est en conflit avec la transition discrète $t2$ à partir d'un μ -marquage donné μ . La résolution va se faire en résolvant le conflit entre $t1$ et $t2$ qu'on note par $TC(\mu)$ d'une manière déterministe ou aléatoire et puis résoudre le conflit lot que peut générer la transition lot $t1$ toute seule qu'on note $BFC(\mu, t1)$.

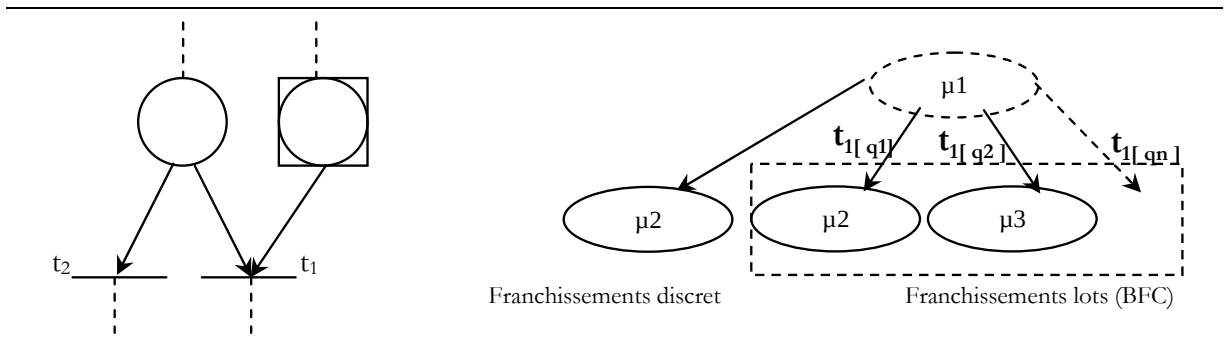


Figure 2.13. Illustration d'un conflit lot / discret

La généralisation de ce type de conflit à un cas à plusieurs transitions lots et à plusieurs transitions discrètes peut être analysé de la même manière en suivant l'étude effectuée dans les autres cas.

6.4.3 Cas particulier du BFC

Soit $BFC(\mu, t_j)$ un conflit de franchissement lot généré par une même transition lot t_j de type exponentielle et de paramètre λ_j à partir d'un μ -marquage μ donné. La probabilité de franchir t_j avec un indice de franchissement q faisable s'obtient en utilisant les relations obtenues dans les différents cas de conflits lots étudiés dans les sections

précédentes et qui doit être multiplié par le paramètre $\lambda_{j[q]}$ associée à la transition exponentielle q -indicée $t_{j[q]}$. C'est-à-dire:

$$P(\text{franchir } t_{j[q]} | \mu_i) = \lambda_{j[q]} \times P(\text{sélectionner } t_{j[q]} \in BFC(\mu_i, t_j) | \mu_i) \quad (2.41)$$

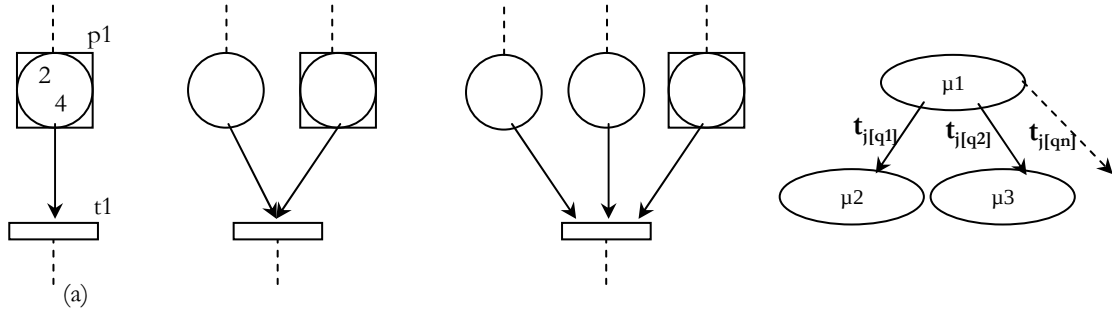


Figure 2.14. Illustration d'un conflit lot généré par une transition lot t_j de type exponentielle

Pour illustration considérons le réseau noté (a) de la figure 2.14 où la transition lot et exponentielle $t1$ peut être franchie par deux indices de franchissement différents dans le cas où la gestion des lots dans la place lot $p1$ se fait aléatoirement.

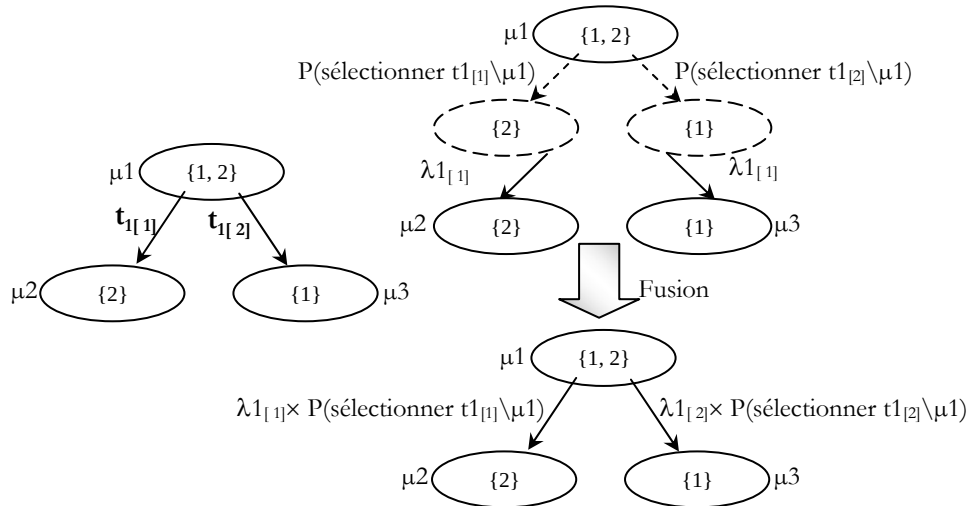


Figure 2.15. Effet d'un BCF sur le taux de franchissement d'une transition lot stochastique

7. Propriétés essentielles d'un BDSPN

L'analyse d'une fonction ou d'un système passe par l'étude des propriétés du réseau de Petri qui les représente. Parmi ces propriétés, nous citons celles qui permettent d'affirmer que les spécifications incluses dans le modèle réseau de Petri sont correctes. C'est ainsi que nous pouvons démontrer qu'un réseau (donc le système représenté) est sans blocage ou que le nombre d'états pouvant être atteints est fini ou encore pour savoir si une partie ou l'ensemble du réseau peut ou non évoluer. Cette section est dédiée à la définition et à la description des propriétés essentielles qui caractérisent un BDSPN. Il s'agit en particulier de propriétés également utiles pour l'étude de performances notamment la *bornitude*, la *vivacité*, la *réversibilité* et de quelques autres propriétés spécifiques qui caractérisent spécialement le comportement lot d'un BDSPN. D'autres propriétés peuvent être définies d'une façon similaire aux RdPs classiques [DAV 92] moyennant parfois quelques adaptations aux composants lots comme nous le verrons dans celles que nous étudierons dans les paragraphes qui suivent.

7.1. La bornitude

Un système physique présente en général un nombre d'états fini (borné) ; il en est ainsi, par exemple d'un stock dont la capacité est limitée. La propriété de bornitude d'un BDSPN définit et caractérise la possibilité qu'une place lot (resp. une place discrète) d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons lots (resp. de jetons discrets) lors de son évolution. La quantité de jetons lots dans une place lot est définie comme la somme des tailles des jetons lots que contient cette place. La quantité de jetons discrets dans une place discrète est le nombre de jetons discrets qu'elle contient.

Définition 2.7. Une place lot $p_i \in P_b$ (resp. une place discrète $p_i \in P_d$) est dite bornée pour un μ -marquage initial μ_0 si pour tout μ -marquage accessible μ à partir de μ_0 : il existe un entier naturel $k \in \mathbb{N}$, tel que la somme des tailles de jetons lots (resp. le nombre de jetons discrets) contenus dans p_i est inférieur ou égal à k (on dit que la place p_i est k -bornée).

$$p_i \in P_d \text{ est bornée ssi} : \forall \mu \in \mu_0^*, \exists k \in \mathbb{N}, M(p_i) = \mu(p_i) \leq k \quad (2.42)$$

$$p_i \in P_b \text{ est bornée ssi} : \forall \mu \in \mu_0^*, \exists k \in \mathbb{N}, M(p_i) = \sum_{b \in \mu(p_i)} b \leq k \quad (2.43)$$

Définition 2.8. Un BDSPN est borné pour un μ -marquage initial μ_0 donné si et seulement si toutes ses places lots et discrètes sont bornées pour ce même μ -marquage initial.

$$\begin{aligned}
 \text{Un BDSPN est borné ssi : } & \forall \mu \in \mu_0^*, \forall p_i \in P, \exists k \in \mathbb{N}, M(p_i) \leq k \\
 \text{Avec: } & M(p_i) = \mu(p_i) \text{ pour } p_i \in P_d \text{ et } M(p_i) = \sum_{b \in \mu(p_i)} b \text{ pour } p_i \in P_b
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

7.2. La vivacité

La *vivacité* et le *blocage* sont deux propriétés qui caractérisent l'activité des transitions individuellement et l'activité globale du réseau. Le μ -marquage d'un BDSPN évolue par franchissement de transitions. Lorsque certaines transitions ne sont plus franchissables, lorsque tout ou une partie du réseau ne « fonctionne » plus, il y a probablement un problème dans la conception du système décrit ou bien dans le modèle représentant ce système.

Définition 2.9. Un BDSPN est vivant si, quelle que soit l'évolution du réseau, il est toujours possible de franchir chaque transition. C'est ainsi que pour tout μ -marquage accessible à partir de μ_0 , pour chaque transition t_j , il existe une séquence de franchissement S qui contiennent cette transition. Par opposition, on appelle *blocage* ou *état puits* un μ -marquage où aucune transition n'est validée.

$$\forall \mu \in \mu_0^*, \forall t_j \in T, \exists S, \mu[S \rightarrow \mu' \text{ tel que } t_j \in S \tag{2.45}$$

Avec $\mu [S \rightarrow \mu_S$. symbolise le franchissement d'une séquence de franchissement S à partir d'un μ -marquage μ .

Cependant, cette définition ne caractérise pas complètement l'activité des transitions lots dans un BDSPN. En effet, au cours de l'évolution du réseau chaque transition lot t_j génère un ensemble de transitions *q-indicées*. L'ensemble de ces transitions, $B(t_j) = \{t_{j[q]} \setminus q \text{ indice de franchissement lot réalisé par } t_j\}$, correspond à l'ensemble des tailles des jetons lots que traite cette transition au cours de l'évolution du réseau. Supposons $t_{j[q1]} \in B(t_j)$ est franchie à partir d'un μ -marquage donné. Si à partir d'un μ -marquage accessible quelconque, il n'existe pas de séquence de franchissement qui permet de retrouver $t_{j[q1]}$ à nouveau, ceci signifie que la transition lot t_j n'est pas vivante par rapport à l'indice $q1$ ou bien au jeton lot correspondant. Par conséquent, une nouvelle propriété permettant de caractériser la vivacité d'une transition lot par rapport à l'ensemble des indices de franchissements qu'elle réalise dans le réseau est donné ci-dessous.

Définition 2.10. Une transition lot t_j est dite *fortement vivante* si et seulement :

$$\forall \mu \in \mu_0^*, \forall t_{j[q]} \in B(t_j), \exists S, \mu[S \rightarrow \mu' \text{ tel que } t_{j[q]} \in S \tag{2.46}$$

Un BDSPN est dit *fortement vivant* si toutes ses transitions discrètes sont vivantes et ses transitions lots sont fortement vivantes.

Sachant que chaque indice de franchissement q de chaque transition lot t_j correspond à la taille du jeton lot qu'elle traite lorsque t_j est franchie comme étant $t_{j[q]}$, le caractère fortement vivant de toutes les transitions lots du réseau caractérise la circulation, sans interruption, du flux de tous les jetons lots dans le réseau.

7.3. Le blocage lot

Définition 2.11. Une place lot $p_i \in P_b$ est dite avec blocage lot pour un μ -marquage initial μ_0 , s'il existe au moins dans un de ses μ -marquages accessibles un lot de taille b appartenant à cette place pour lequel aucune transition de sortie de cette place ne peut être franchissable avec ce même jeton lot. En d'autres termes, aucun indice de franchissement n'est faisable avec ce jeton lot lors de l'évolution du réseau. Un BDSPN est sans blocage lot si toutes ses places lots sont sans blocage lot.

$$\begin{aligned} \text{Une place lot } p_i \in P_b \text{ est sans blocage lot} &\Leftrightarrow \\ \forall \mu \in \mu_0^*, \forall b \in \mu(p_i), \exists \mu', \mu'' \in \mu_0^*, \exists t \in \bullet p_i, \mu'[t_{q_b}] \rightarrow \mu'' &\quad (2.47) \end{aligned}$$

Cette relation signifie que pour n'importe quel jeton lot b de la place lot p_i , il existe toujours un μ -marquage pour lequel il existe une transition de sortie t de la place lot p_i qui va être franchie par le jeton lot b . L'indice de franchissement de t est noté par q_b pour souligner l'implication du jeton lot b dans ce franchissement.

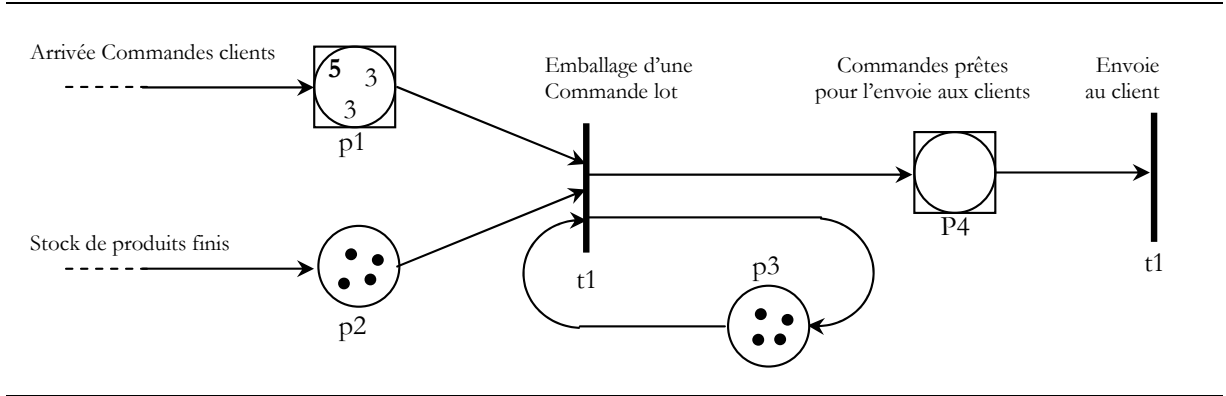


Figure 2.16. Exemple d'illustration du blocage lot

Dans le réseau de la figure 2.16, la place lot $p1$ reçoit des jetons lots de différentes tailles correspondant aux commandes de clients. Le traitement des commandes se fait par la transition $t1$ qui permet d'emballer des lots de produits finis disponibles dans le stock modélisé par la place discrète $p2$. La place $p3$ de μ -marquage fixe (puisqu'on a une boucle) $\mu(p3) = 4$ limite la taille des lots pouvant être composés par le franchissement de la transition $t1$ à une taille n'excédant pas 4. Tous les jetons lots de taille $b = q/w(p1, t1)$

supérieure à 4 ne pourront jamais franchir la transition $t1$. C'est le cas du jeton lot $b = 5$ actuellement disponible dans la place lot $p1$. La place $p1$ est donc avec blocage lot. Dans ce cas, la question qui se pose est : pourquoi enregistrer une commande qui ne pas être traitée par ce système ? La réponse se trouve dans la partie non représenté dans ce réseau, que nous avons symboliser en traits pointillé qui conduit au dépôt de jetons lots de tailles supérieures à 4.

La présence d'un blocage lot dans un réseau de Petri lot ne signifie pas forcément que le réseau n'est pas vivant comme le montre l'exemple illustratif de la figure 2.17. Par définition, ce réseau est vivant puisque toutes ses transitions sont vivantes, comme on peut le vérifier sur le graphe qui représente les μ -marquages accessibles du réseau en franchissant ses transitions validées à chaque μ -marquage atteint. D'un autre coté, on constate que la place lot $p3$ est avec blocage lot. Le jeton lot $b = 3$ reste bloqué définitivement dans la place lot $p3$ puisque la transition de sortie $t2$ de la place $p3$ ne peut pas être franchie à aucun moment par ce jeton lot. En effet, comme nous venons de le voir, l'indice $q = 3/2 \notin \mathbb{N}^*$ correspondant à ce jeton lot n'est pas réalisable, de plus ce jeton lot n'a pas d'autres issues (autres transitions de sortie) pour qu'il bouge de $p4$ et participe à l'activité du réseau.

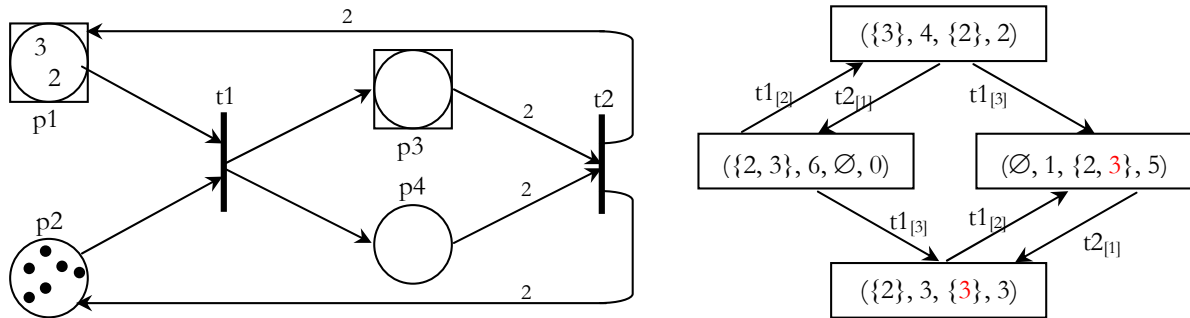


Figure 2.17. Illustration blocage lot/vivacité du réseau

Propriétés structurelles du blocage lot

Nous allons montrer dans ce qui suit que la situation la plus susceptible à conduire un BDSPN dans des situations de blocages lots est fortement liée aux poids des arcs associés aux places lots lors de la modélisation d'un système donné. La taille d'un jeton lot pouvant entrer dans une place lot est toujours multiple du poids de l'arc associé à la transition d'entrée franchie. De même, la taille d'un jeton lot pouvant sortir de cette place lot doit être multiple du poids de l'arc de la transition de sortie à franchir. Ceci est pour satisfaire la première condition de validation d'une transition lot : existence d'un indice de franchissement lot.

Propriété 2.1. Une place lot $p_i \in P_b$ telle que : $\exists t \in \bullet p_i : W(p_i, t) = 1$ est *structurellement* sans blocage lot.

Preuve : Cette propriété est évidente puisque, lorsqu'il existe au moins un arc de sortie de la place lot $p_i \in P_b$ de poids égal à 1, alors la transition de sortie t qui correspond à cet arc peut être franchie par des jetons lots de tailles quelconques pouvant se trouver dans cette place lot. En effet, l'indice de franchissement q de la transition t par un jeton lot de taille b quelconque est toujours réalisable. Autrement dit : $\forall \mu, \forall b \in \mu(p_i) : \exists q = \frac{b}{W(p_i, t)} = b \in \mathbb{N}^*$.

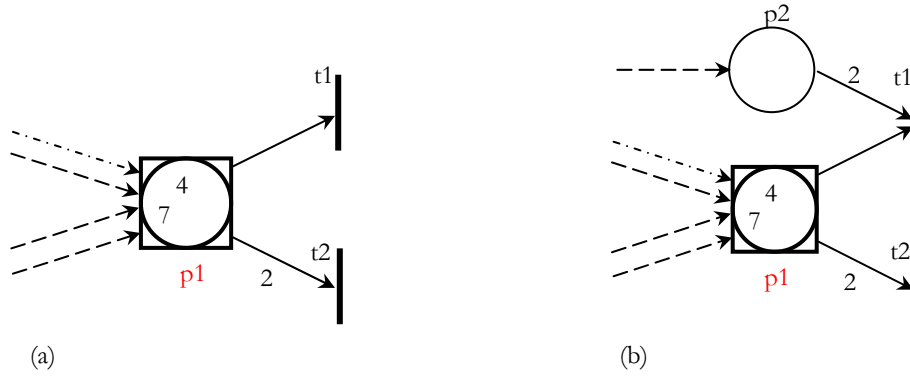


Figure 2.18. Illustration de la propriété 1

La structure du réseau de la figure 2.18(a) illustre la propriété 2.1. Quelque soit la taille du jeton lot pouvant se trouver dans la place lot $p1$ à un moment donné, il peut au moins franchir la transition $t1$ puisque le poids de l'arc $(p1, t1) = 1$. C'est le cas du jeton lot $b = 7$ qui peut franchir que la transition $t1$ avec un indice de franchissement réalisable $q = 7/1 = 7$. En revanche, s'il n'y avait pas la transition $t1$, ce jeton va être un blocage lot pour la place $p1$. L'exemple de la figure 2.18(b) est donné pour montrer que la propriété 1 assure le non blocage lot du point de vue *structurel* indépendamment du marquage initial du réseau dans le cas où une ou plusieurs transitions de sortie de la place lot $p1$ ont des places discrètes à leurs entrées. C'est le cas de la transition $t1$ ayant une place discrète $p2$. En effet, dans ce cas précis, les poids des arcs assurent toujours la faisabilité des indices de franchissement des transitions de sortie pour tout jeton lot pouvant arriver dans la place lot $p1$, mais chaque franchissement doit évidemment satisfaire les conditions de validation liées au μ -marquage du réseau. Le jeton lot $b = 7$ peut franchir la transition $t1$ si et seulement si il y a à un moment donné 14 jetons discrets dans la place discrète $p2$.

Propriété 2.2. Une place lot $p_i \in P_b$, dont le poids de chacun de ses arcs d'entrée est multiple d'un poids d'un de ses arcs de sortie est structurellement sans blocage lot.

Preuve : Prouver cette propriété consiste à montrer sous l'hypothèse que :

$$\forall t \in \bullet p_i, \exists t' \in p_i^\bullet, \text{ tel que : } W(t, p_i) = k \times W(p_i, t'), \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (2.48)$$

Quelque soit la taille des jetons lots pouvant arriver dans la place lot p_i , il existe au moins une transition de sortie qui peut être franchie pour chacun de ces jetons lots. C'est-à-dire montrer que :

$$\forall \mu, \forall b \in \mu(p_i), \exists t' \in p_i^\bullet, \exists q' = b / W(p_i, t') \in \mathbb{N}^* \text{ (i.e., } q' \text{ est réalisable)} \quad (2.49)$$

En effet, nous savons que la taille b de chaque jeton lot pouvant arriver dans la place lot p_i par franchissement d'une transition d'entrée $t \in \bullet p_i$ de cette place s'écrit $b = q \times W(t, p_i) \in \mathbb{N}^*$ avec q est l'indice de franchissement de la transition franchie t ($q = 1$ si la transition franchie est discrète). Nous avons donc :

$$\forall \mu, \forall b \in \mu(p_i) \text{ on a } b = q \times W(t, p_i) \in \mathbb{N}^* \text{ avec } t \in \bullet p_i \quad (2.50)$$

Comme par hypothèse, le poids de l'arc reliant chaque transition d'entrée t à la place lot p_i est multiple de l'un des arcs de sortie de cette transition, il existe donc une transition $t' \in p_i^\bullet$ tel que $W(t, p_i) = k \times W(p_i, t')$, $k \in \mathbb{N}^*$ que nous remplaçons dans la relation (2.50) et nous aurons :

$$\forall \mu, \forall b \in \mu(p_i), \quad b = q \times W(t, p_i) = q \times k \times W(p_i, t') = k' \times W(p_i, t') \in \mathbb{N}^* \quad (2.51)$$

Enfin, la transition $t' \in p_i^\bullet$ peut être franchie par le jeton lot de taille $b \in \mu(p)$. En effet, l'indice de franchement lot $q' = b / W(p_i, t')$ de la transition t' est réalisable puisque avec (2.51) on obtient :

$$q' = k' \times W(p_i, t') / W(p_i, t') = k' \in \mathbb{N}^* \quad (2.52)$$

D'où l'existence de q' réalisable qui satisfait la relation (3.7). La propriété 2.2 est ainsi montrée.

La structure du réseau de la figure 2.19(a) illustre la propriété 2.2. En effet, le poids de chacun des arcs d'entrée de la place lot $p1$ est multiple d'un poids d'un des arcs de sa sortie. Ceci assure structurellement un non blocage lot dans la place $p1$. En effet, les jetons lots qui puissent arriver dans cette place par le franchissement de la transition lot $t1$

sont de tailles multiples du poids $W(t1, p1) = 9$ et donc multiple du poids $W(p1, t3) = 3$. Ceci assure la faisabilité d'un indice de franchissement de la transition $t3$ pour chaque jeton lot arrivant via la transition $t1$. D'autres jetons lots peuvent arriver dans la place lot $p1$ par le franchissement de la transition discrète $t2$. La taille de ces jetons est fixée à 4 par le poids $W(t2, p1)$. Il n'y a pas de problème également pour ce type de jetons puisque dans la structure du réseau il y a un arc de poids multiple de 4 qui est $W(p1, t4)$. Ainsi la transition $t4$ assure la circulation de ces jetons lots. Le réseau de la figure 2.19(b) est donné pour souligner la même remarque faite pour l'exemple de la figure 2.18(b).

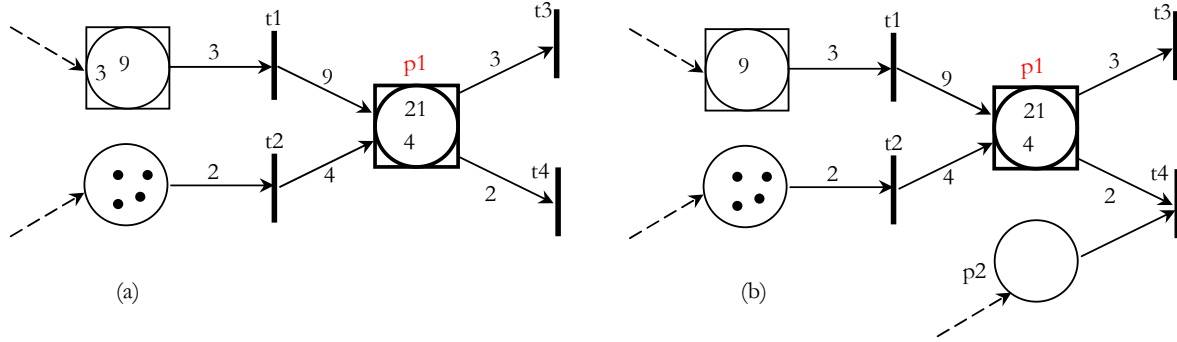


Figure 2.19. Illustration de la propriété 2.2

Propriété 2.3. Un réseau de Petri lot est structurellement sans blocage lot si chacune de ses places lots $p_i \in P_b$ sont sans blocage lot.

Preuve : La propriété 2.3 est une généralisation de la propriété 2.2.

7.4. L'état d'accueil et réversibilité

La plupart des processus industriels ont un fonctionnement répétitif. Il est donc important de vérifier si les réseaux qui les représentent sont réinitialisable (réversible).

Définition 2.10. Un BDSPN possède un état d'accueil μ_A pour un μ -marquage initial μ_0 si pour tout μ -marquage accessible μ il existe une séquence de franchissement S telle que $\mu_i [S > \mu_A$. Autrement dit :

$$\forall \mu \in \mu_0^*, \exists S, \mu [S \rightarrow \mu_A \quad (2.53)$$

Un BDSPN est réinitialisable (ou réversible) pour un μ -marquage initial μ_0 si μ_0 est un état d'accueil.

$$\forall \mu \in \mu_0^*, \exists S, \mu [S \rightarrow \mu_0 \quad (2.54)$$

D'autres propriétés qui caractérisent les RdPs classiques qu'on retrouve dans de nombreux ouvrages, notamment dans [DAV 92] et [MUR 89], peuvent s'appliquer aux BDSPNs moyennant parfois quelques adaptations dû à l'aspect lot du modèle.

8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques dit « Réseaux de Petri Lots Déterministes et Stochastiques (BDSPNs) » qui est une extension des autres classes de réseaux de Petri discrets notamment les DSPNs.

Après une définition formelle du modèle, nous avons formulé et interprété ses règles de fonctionnement. Les règles d'évolution sont formulées en deux cas distincts. Il s'agit d'un fonctionnement discret et d'un fonctionnement lot. Le fonctionnement discret concerne le cas de transitions discrètes. L'interprétation de ce fonctionnement nous a conduit à étudier la similarité des règles d'évolution de ce cas avec les RdPs classiques. Le fonctionnement lot concerne le cas de transitions lots. La formulation de la dynamique de ce fonctionnement repose sur la notion d'un indice de franchissement permettant d'ajuster les poids des arcs correspondant aux places discrètes en fonction des tailles des jetons lots à traiter pour permettre aux transitions lots d'être franchies par des jetons lots et des quantités de jetons discrets de tailles différentes. A base d'une interprétation formelle, nous avons établi le lien existant entre les deux types de fonctionnements. Le fonctionnement discret n'est qu'un cas particulier du fonctionnement lot. Nous avons également montré que le modèle développé préserve toute la pertinence des autres classes de RdP classiques (discrets) en termes d'expressivité pour les raisons suivantes et voulues : - du point de vue graphique, le BDSPN garde tous les composants graphique d'un RdP classique ; du point de vue fonctionnement, les règles d'évolution d'un RdP classique sont intégrées avec cohérence dans celles d'un BDSPN. Ainsi, les BDSPNs permettent de gérer simultanément, de synchroniser et de coordonner les flux des jetons lots et le flux des jetons discrets.

Les règles de fonctionnement du modèle sont suivies par une équation d'état qui gouverne l'évolution des μ -marquages du modèle. Cette équation servira ultérieurement pour développer des méthodes d'analyse basées sur les techniques d'algèbre linéaire. L'équation est illustrée pour le cas de franchissement d'une seule transition et pour le cas de franchissement d'une séquence de transitions.

Pour compléter les règles de fonctionnement, nous avons introduit des politiques nécessaires pour l'évolution du modèle. Il s'agit des politiques associées aux places lots servant à gérer les candidatures des jetons lots aux franchissements et des politiques associés aux transitions pour gérer leurs délais de franchissements. Nous avons ensuite dressé une analyse des situations de conflits et nous avons proposé des techniques de

résolution permettant le calcul des probabilités de franchissement lorsque la résolution se fait aléatoirement.

Dans la dernière section du chapitre, un ensemble de propriétés essentielles qui permettent d'affirmer que le modèle et donc du système modélisé est correcte et qu'il possède des propriétés désirées est introduit. Il s'agit des propriétés classiques telles que la vivacité, la bornitude, la réversibilité ... que nous avons adaptées au nouveau modèle et d'un ensemble de propriétés spécifiques introduites pour mettre en évidence les caractéristiques du comportement lot du modèle.

A l'issue de ce chapitre, nous disposons maintenant d'un outil formel et graphique pour la modélisation. Avant de penser aux applications du modèle, logiquement, nous pensons d'abord aux méthodes d'analyse qualitatives et aux méthodes d'évaluation de performances. C'est l'objectif du chapitre suivant.

Chapitre 3

Techniques d'analyse des Réseaux de Petri Lots Déterministes et Stochastiques

1. Introduction

Dans le chapitre précédant, nous avons introduit le formalisme, les règles de fonctionnement et les propriétés essentielles d'un BDSPN. Ce nouveau chapitre porte sur l'analyse et l'évaluation de performances du modèle. Malgré leurs différences, les techniques d'analyse des BDSPNs gardent le même esprit général que celles des réseaux de Petri classiques. En effet, la théorie des graphes, l'algèbre linéaire et la théorie des processus stochastiques sont les principales théories qui interviennent dans ces techniques. La différence réside essentiellement dans l'expressivité des BDSPNs à pouvoir décrire graphiquement et formellement la dynamique qu'impose la présence des comportements lots dans le système à étudier. Ainsi, la description explicite de l'aspect lot par le modèle s'implique également dans la formulation des techniques d'analyse et plus particulièrement dans l'évaluation de performances du système.

Ce chapitre s'organise autour de deux grandes parties dédiées pour deux types d'analyses à savoir l'analyse qualitative et l'analyse quantitative (évaluation de performances). Dans la première partie, cinq techniques différentes d'analyse sont développées et illustrées. Elles permettent la vérification ou la recherche de certaines propriétés essentielles du modèle. En particulier, à l'aide de la dernière technique, nous discutons formellement de la possibilité de transformer, dans certains cas, un BDSPN en un RdP classique. L'objectif essentiel est de montrer plus formellement l'intérêt de l'introduction des BDSPNs. Nous allons voir que ce modèle est nécessaire même dans le cas où il est possible de le transformer.

La deuxième partie est consacrée aux techniques d'évaluation de performances qui sont de deux types. Il s'agit, en premier, d'une approche analytique basée sur le graphe des μ -marquages utilisé conjointement avec le processus stochastique associé. Ainsi, la caractérisation du processus stochastique du modèle est discutée et un ensemble d'indicateurs de performances pouvant exprimer à la fois des mesures sur les composants discrets et lots du modèle sont formalisés. Enfin, une deuxième approche basée sur la simulation à événements discrets est discutée. Dans ce contexte, nous avons réalisé un outil de simulation. Ce dernier est déjà utilisé pour l'étude des chaînes logistiques notamment dans [CHE 05]-[LAB 05a] ou encore pour l'étude des systèmes de gestion de stocks dans [LAB 05b], [LAB 05c].

2. Techniques d'analyse qualitative

Après avoir défini les propriétés essentielles que peuvent avoir certains réseaux dans le chapitre précédant, cette section est dédiée aux principales méthodes d'analyse de ces

propriétés. A noter que dans toute cette partie, l'aspect temporel du modèle est ignoré. En effet, l'analyse qualitative d'un RdP s'effectue sur le modèle non temporisé qui reproduit le fonctionnement du modèle au niveau logique (conditions/événements). Comme dans la plupart des différentes classes de RdP, les méthodes d'analyse peuvent être classées en trois groupes : les méthodes basées sur l'énumération de tous les états accessibles : graphes des marquages, graphe de couverture - les méthodes basées sur l'algèbre linéaire - et les méthodes de réduction. Nous étudions ces techniques dans le cas des BDSPNs et deux autres techniques basées sur des transformations spécifiques sont développées. Ces deux techniques, basées sur des relations formelles liant la dynamique d'un BDSPN avec les RdPs classiques, sont introduites essentiellement pour mieux comprendre le comportement d'un BDSPN par rapport à un RdP classique et surtout pour montrer la nécessité de l'introduction des BDSPNs. Ce dernier point fait l'objet de la dernière technique développée dans cette partie.

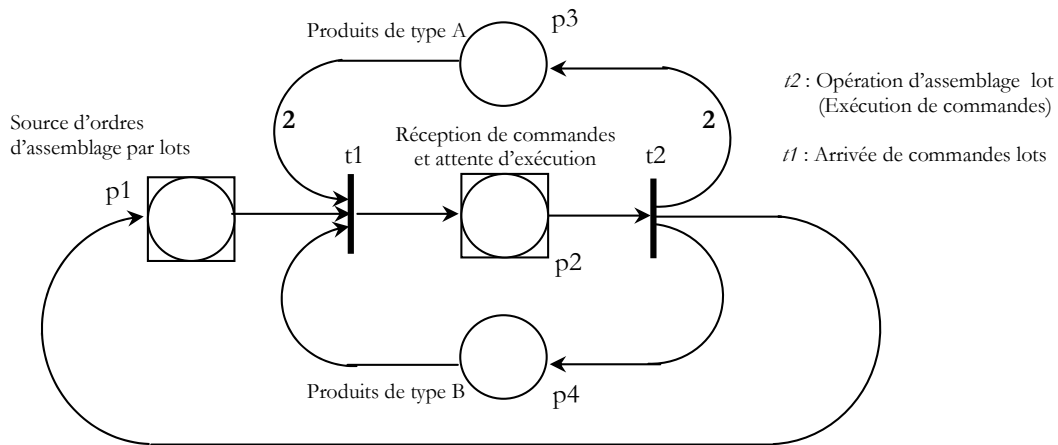


Figure 3.1. Modèle BDSPN d'un système d'assemblage par lots

Le réseau de la figure 3.1 sera utilisé tout au long de cette section pour illustrer les techniques d'analyse des BDSPNs. Le réseau représente un système d'assemblage de lots de produits sur commande lots. L'assemblage d'un lot de produits de taille b nécessite $2b$ produits de type A disponibles dans la place discrète $p3$ et b produits de type B disponibles dans la place discrète $p4$. L'assemblage se fait sur ordres lots que génère la place lot $p1$ par franchissement de la transition lot $t1$. Les transitions $t1$ et $t2$ représentent respectivement l'accès d'une commande lot au système d'assemblage et l'opération d'assemblage d'un lot de produits suivant la commande enregistrée. La dynamique du système est comme suit : franchir la transition $t1$ par un jeton lot de taille b (génération d'un ordre d'assemblage d'un lot de taille b et début de l'opération) consiste à soustraire le jeton lot de taille b de $p1$, soustraire $2b$ jetons discrets de $p3$, soustraire b jetons discrets de $p4$ et ajouter un jeton lot de taille b dans $p2$ désignant ainsi qu'un lot de produits de taille b est en cours d'assemblage. Franchir la transition $t2$ signifie la fin d'une opération

d'assemblage d'un lot de produits de taille b . Le franchissement consiste à soustraire le jeton lot de taille b dans $p2$, ajouter $2b$ jetons discrets dans $p3$, ajouter b jetons discret dans $p4$ et ajouter un jeton lot de taille b dans $p1$. Le μ -marquage du réseau sera indiqué et choisi pour chaque illustration où nous utilisons cet exemple.

2.1. Technique d'analyse par énumération

Pour étudier les propriétés d'un BDSPN, la technique de base consiste à construire son *graphe des μ -marquages accessibles* à partir de son μ -marquage initial μ_0 . Deux situations peuvent alors se présenter :

- Le graphe est fini : C'est la situation la plus favorable car dans ce cas toutes les propriétés du réseau peuvent être déduites simplement par inspection de celui-ci.
- Le graphe est infini : Dans ce cas, on construit un autre graphe appelé « *graphe de couverture* » permettant de déduire certaines propriétés du réseau.

2.1.1 Graphe des μ -marquages

Le graphe des μ -marquages accessibles d'un BDSPN, qui se construit par le franchissement de toutes ses transitions validées, est composé de :

- Nœuds qui correspondent aux μ -marquages accessibles à partir du μ -marquage initial μ_0 par franchissements de transitions lots et de transitions discrètes.
- Arcs orientés correspondant aux franchissements de transitions faisant passer d'un μ -marquage à autre μ -marquage successeur.
- Chaque arc est étiqueté par la transition franchie. Contrairement aux transitions discrètes, chaque transition lot doit porter son indice de franchissement à chacun de ses franchissements dans le graphe.

Les indices de franchissement que portent les transitions lots constituent une information importante dans l'analyse du réseau aussi bien pour l'analyse de propriétés que pour l'évaluation de performances.

La figure 3.2 représente le graphe des μ -marquages accessibles du réseau de la figure 3.1. Il est construit à partir d'un μ -marquage initial $\mu_0 = (\{1, 2\}, \emptyset, 6, 3)^T$. A partir de μ_0 , la transition lot $t1$ est validée par deux différents indices de franchissement correspondant aux deux jetons lots disponibles dans la place lot $p1$. On atteint alors le μ -marquage $\mu1 = (\{2\}, \{1\}, 4, 2)^T$ par le franchissement de $t1_{[1]}$ et $\mu2 = (\{1\}, \{2\}, 2, 1)^T$ par le franchissement de $t1_{[2]}$. A partir de chaque nouveau μ -marquage atteint, on franchit chaque transition validée et ainsi de suite. Ceci est le principe de construction d'un graphe

des μ -marquages accessibles. En connaissant l'indice de franchissement q d'une transition lot t à partir d'un μ -marquage μ_k à un nouveau μ -marquage μ_{k+1} tel que $\mu_k[t_q] > \mu_{k+1}$, on a, sur le graphe, l'information complète sur les tailles des jetons lots et le nombre de jetons discrets qui sont rajoutés ou éliminés dans les places du réseau suite à chaque franchissement lot. Toutes les propriétés du réseau définies dans la dernière partie du chapitre précédant peuvent être vérifiées à partir de ce graphe. On voit notamment que le réseau est fortement vivant, réinitialisable, borné et qu'il est sans blocage lot.

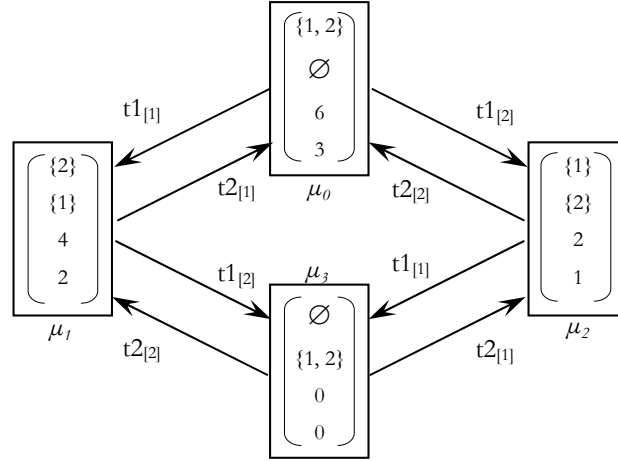


Figure 3.2. Graphe des μ -marquages du réseau de la figure 3.1.

La procédure de construction du graphe des μ -marquages accessibles d'un réseau possédant des arcs inhibiteurs, des priorités ou encore des poids d'arcs variables est identique à celle que nous venons d'illustrer. Il suffit de respecter l'effet de ces éléments sur l'évolution du réseau notamment lors de la validation et/ou de la sélection de la transition à franchir, ou encore du choix de l'indice de franchissement d'une transition lot si une politique de choix est imposée.

2.1.2 Arborescence et graphe de couverture

Dans le cas d'un réseau de Petri non borné, la construction de son graphe des μ -marquages est impossible à cause du nombre infini de μ -marquages accessibles qu'il génère. On parle plutôt de l'arborescence de couverture et du graphe de couverture. Avant de développer un algorithme permettant la construction de ces derniers pour un BDSPN, nous présentons ci-dessous la notion de couverture des μ -marquages.

3.1.2.1 Couverture d'un μ -marquage

Définition 3.1. On dit qu'un μ -marquage μ_1 est égal à μ -marquage μ_2 si et seulement si la relation suivante est satisfaite :

$$\forall p \in P, \quad \mu_1(p) = \mu_2(p) \quad (3.1)$$

Définition 3.2. On dit qu'un μ -marquage μ_1 couvre un μ -marquage μ_2 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \forall p \in P_d, \quad & \mu_1(p) \geq \mu_2(p) \\ \forall p \in P_b, \quad & \mu_1(p) \supseteq \mu_2(p) \text{ et } \forall b \in (\mu_1(p) - \mu_2(p)), b \in \mu_2(p) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Définition 3.3. On dit qu'un μ -marquage μ_1 couvre strictement un μ -marquage μ_2 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. μ_1 couvre μ_2
2. $\exists p \in P : \text{si } p \in P_d, \mu_1(p) > \mu_2(p); \quad \text{ou}$ (3.3)
 $\text{si } p \in P_b, \mu_1(p) \supset \mu_2(p) \text{ et } \forall b \in (\mu_1(p) - \mu_2(p)), b \in \mu_2(p)$

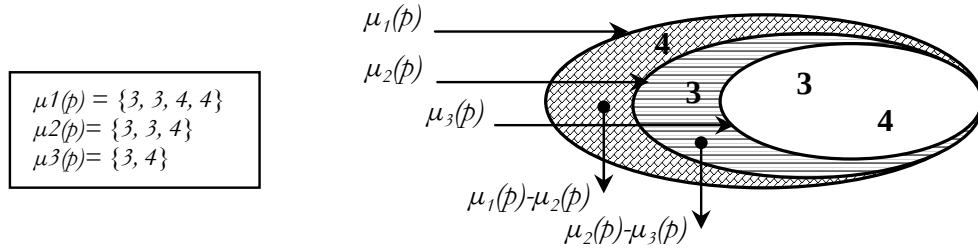


Figure 3.3. Illustration de la propriété 3.1.

Propriété 3.1. (transitivité) Si μ_1 couvre μ_2 et μ_2 couvre μ_3 alors μ_1 couvre μ_3 .

La figure 3.3, où $\mu_1 = \{3, 3, 4, 4\}$; $\mu_2 = \{3, 3, 4\}$; $\mu_3 = \{3, 4\}$ vérifient que μ_1 couvre μ_2 , μ_2 couvre μ_3 et μ_1 couvre μ_3 , peut aider le lecteur à mieux suivre la démonstration de la propriété 3.1.

Preuve.

μ_1 couvre μ_2 et μ_2 couvre μ_3 alors en utilisant la relation (3.10), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p \in P_d, \mu_1(p) \geq \mu_2(p) \text{ et } \mu_2(p) \geq \mu_3(p) \\ \forall p \in P_b, \left\{ \begin{array}{l} \mu_1(p) \supseteq \mu_2(p) \text{ et } \forall b \in (\mu_1(p) - \mu_2(p)), b \in \mu_2(p) \\ \mu_2(p) \supseteq \mu_3(p) \text{ et } \forall b \in (\mu_2(p) - \mu_3(p)), b \in \mu_3(p) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

A partir des relations individuelles contenues dans (3.4) nous obtenons les

implications suivantes :

$$\forall p \in P_a, \mu 1(p) \geq \mu 2(p) \text{ et } \mu 2(p) \geq \mu 3(p) \Rightarrow \forall p \in P_a, \mu 1(p) \geq \mu 3(p) \quad (3.5)$$

$$\forall p \in P_b, \mu 1(p) \supseteq \mu 2(p) \text{ et } \mu 2(p) \supseteq \mu 3(p) \Rightarrow \forall p \in P_a, \mu 1(p) \supseteq \mu 3(p) \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu 3(p) \subseteq \mu 2(p) \\ \forall b \in (\mu 2(p) - \mu 3(p)), b \in \mu 3(p) \\ \mu 2(p) = \mu 3(p) \cup (\mu 2(p) - \mu 3(p)) \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall b \in \mu 2(p) \Rightarrow b \in \mu 3(p)) \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu 2(p) \subseteq \mu 1(p) \\ \forall b \in (\mu 1(p) - \mu 2(p)), b \in \mu 2(p) \\ \mu 1(p) = \mu 2(p) \cup (\mu 1(p) - \mu 2(p)) \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall b \in \mu 1(p) \Rightarrow b \in \mu 2(p)) \quad (3.8)$$

Or :

$$\left. \begin{array}{l} \forall b \in \mu 2(p) \Rightarrow b \in \mu 3(p) \\ \forall b \in \mu 1(p) \Rightarrow b \in \mu 2(p) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall b \in \mu 1(p) \Rightarrow b \in \mu 3(p) \quad (3.9)$$

Et donc :

$$\forall b \in (\mu 1(p) - \mu 3(p)) \Rightarrow b \in \mu 3(p) \quad (3.10)$$

Par la définition (3.2), les relations (3.5), (3.6) et (3.10) sont les conditions à satisfaire pour que $\mu 1$ couvre $\mu 3$. D'où la preuve de la propriété 3.1.

3.1.2.2 Construction d'un graphe de couverture

La construction de l'arborescence de couverture et du graphe de couverture repose sur les définitions précédentes et sur deux symboles b^∞ et ω qui permettent de rendre le graphe des μ -marquages fini pour pouvoir vérifier certaines propriétés du réseau.

- **Le symbole b^∞ :** Ce symbole est utilisé pour représenter un nombre infini de jetons lots de tailles identiques $b \in \mathbb{N}^*$ dans une place lot donnée tel que $b^\infty = \{b, b, b, \dots\}$. Ce symbole a les propriétés suivantes :

$$b^\infty \cup \{b\} = \{b\} \cup b^\infty = b^\infty; \quad b^\infty - \{b\} = b^\infty; \quad b^\infty \cup \{b'\} = \{b^\infty, b'\} \quad \text{si } b \neq b'$$

- **Le symbole ω :** Ce symbole est similaire à celui utilisé dans l'algorithme de *Karp et Miller* [KAR 69], [DAV 92] pour la construction d'un graphe de couverture d'un réseau de Petri classique dont le graphe des marquages est infini. Il sera utilisé de façon

identique pour les μ -marquages des places discrètes. Le symbole ω peut être considéré comme représentant une quantité arbitrairement grande de jetons discrets. Ce symbole a les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n < \omega, n + \omega = \omega + n = \omega, \omega - n = \omega, (n - \omega \text{ n'est pas défini})$$

Algorithme 3.1. *Construction de l'arborescence couverture*

Pas 1. A partir du μ -marquage initial μ_0 qui est la racine de l'arborescence, on indique toutes les transitions validées, sur des arcs allant de μ_0 aux μ -marquages successeurs correspondants au franchissement de chacune des ces transitions. Pour chaque μ -marquage successeur, μ_s , qui couvre strictement μ_0 alors :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } p_i \in P_d, \text{ si } \mu_s(p_i) > \mu_0(p_i) \Rightarrow \mu_s(p_i) = \omega \\ &\text{Pour } p_i \in P_b, \text{ si } \left(\begin{array}{l} \mu_s(p_i) \supset \mu_0(p_i) \text{ et} \\ \forall b \in (\mu_s(p_i) - \mu_0(p_i)), b \in \mu_0(p_i) \end{array} \right) \Rightarrow b = b^\infty \end{aligned}$$

Pas 2. Pour chaque nouveau μ -marquage μ_i de l'arborescence, on exécute soit le pas 2.1 soit le pas 2.2.

Pas 2.1. S'il existe sur le chemin allant de μ_0 à μ_i (ce dernier exclu) un marquage $\mu_j = \mu_i$ alors μ_i n'a pas de successeur.

Pas 2.2. S'il n'existe pas de μ -marquage $\mu_j = \mu_i$ sur le chemin allant de μ_0 à μ_i alors on prolonge l'arborescence en ajoutant tous les successeurs de μ_i suivant le pas 3.

Pas 3. Pour chaque successeur μ_k de μ_i faire :

Pas 3.1. Une composante ω de chaque place discrète de μ_i reste une composante ω pour μ_k . - Une composante lot b^ω dans chaque place lot de μ_i reste une composante lot b^ω pour μ_k .

Pas 3.2. S'il existe un μ -marquage μ_j sur le chemin de μ_0 à μ_k tel que μ_k couvre strictement μ_j alors :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } p_i \in P_d, \text{ si } \mu_k(p_i) > \mu_j(p_i) \Rightarrow \mu_k(p_i) = \omega \\ &\text{Pour } p_i \in P_b, \text{ si } \left(\begin{array}{l} \mu_k(p_i) \subset \mu_j(p_i) \text{ et} \\ \forall b \in (\mu_k(p_i) - \mu_j(p_i)), b \in \mu_j(p_i) \end{array} \right) \Rightarrow b = b^\infty \end{aligned}$$

Pas 4. Le graphe de couverture des μ -marquages accessibles s'obtient en fusionnant les μ -marquages identiques dans l'arborescence de couverture obtenue.

- L'algorithme proposé est inspiré de celui des réseaux de Petri classiques qui figure dans de nombreux ouvrages notamment dans celui de David et Alla [DAV 92]. Cet algorithme n'est donc pas adapté lorsque le réseau possède des *arcs inhibiteurs* et des *arcs à poids variables*.
- Un autre détail que nous assumons dans tous les systèmes que nous modélisons, est la bornitude de *l'ensemble des différentes tailles pouvant circuler dans le réseau (ensemble est fini)*. Dans le cas contraire l'algorithme ne converge pas.

En effet, le symbole b^∞ est introduit dans le but de limiter l'arrivée infinie de jetons de tailles identiques b tel que $b \in \mathbb{N}^*$ dans chaque place lot. La limitation se fait pour chaque jeton lot arrivant indéfiniment dans une place lot et pas pour limiter le nombre de jetons lots ou d'éléments b^∞ que peut contenir cette place. En effet, tous les systèmes pratiques que nous modélisons assurent naturellement l'hypothèse que « *l'ensemble des différentes tailles des lots pouvant circuler dans le réseau est fini* ».

3.1.2.3 Illustration du graphe de couverture

L'application de l'algorithme obtenu est illustrée par le réseau représenté sur la figure 3.4(a). Le réseau est choisi à titre illustratif. Comme le montre le graphe de la figure 3.4(b), tenter de construire un graphe des μ -marquages accessibles mène vers une arborescence infinie à cause de la non bornitude de la place lot $p1$.

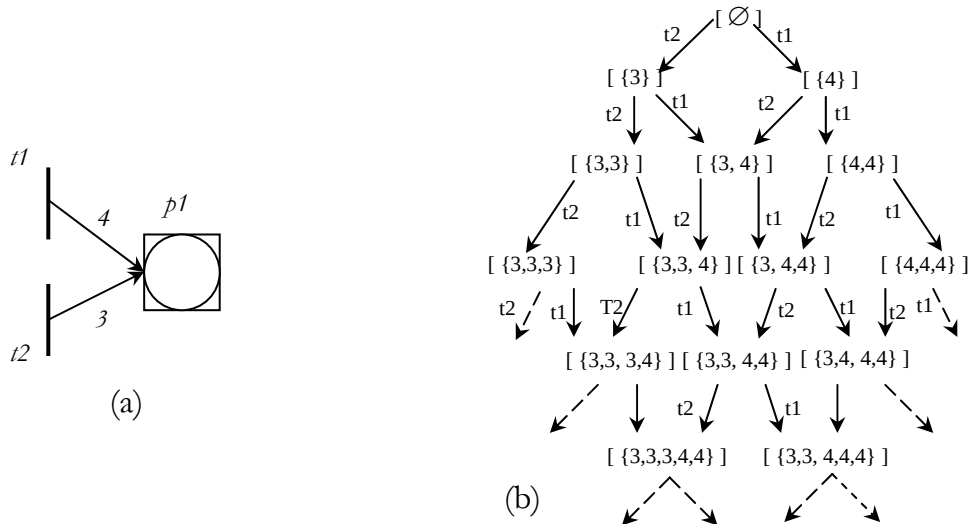


Figure 3.4. (a) Réseau non borné, (b) graphe des μ -marquages infini

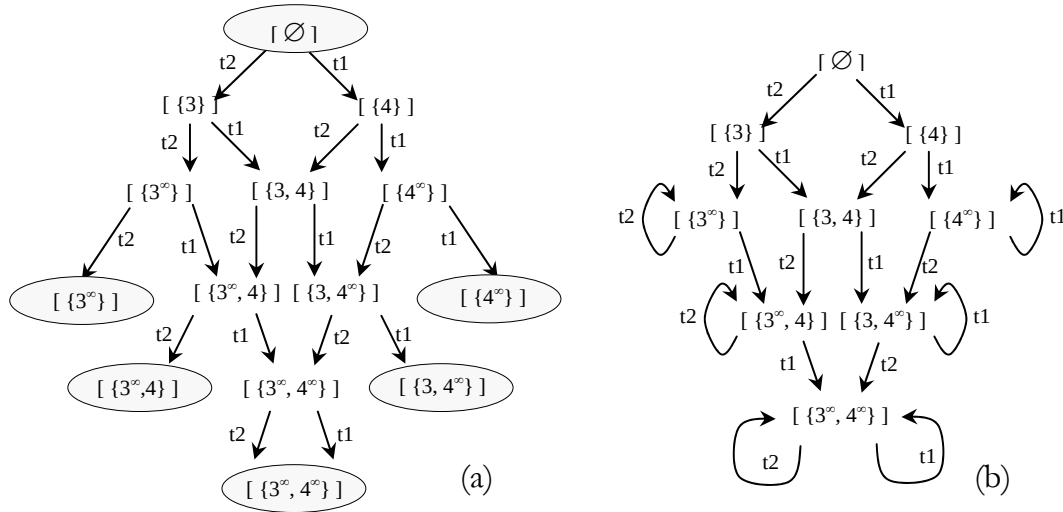


Figure 3.5. (a) Arborecence de couverture, (d) Graphe de couverture du réseau de la figure 3.4(a).

Les graphes des figures 3.5(a) et 3.5(b) sont respectivement l'arborescence de couverture et le graphe de couverture du réseau considéré. On observe que les franchissements des transitions t_1 et t_2 conduisent à une accumulation infinie de jetons lots de tailles égales à 3 et à 4 dans la place lot p_1 .

3.1.2.4 Analyse de propriétés

Le graphe de couverture peut nous renseigner sur quelques propriétés du réseau notamment les suivantes :

- Une place lot est bornée si le symbole b^∞ n'apparaît dans aucun μ -marquage de cette place dans le graphe.
- Si un des μ -marquages du graphe est un état où aucune transition ne peut être franchie (état de blocage) et que ce μ -marquage contient au moins un des symboles b^∞ , ω , alors le réseau a une infinité de blocages.
- Une place discrète est bornée si le symbole ω n'apparaît pas dans aucun μ -marquage de cette place dans le graphe.
- Si dans le graphe, il existe au moins deux μ -marquages accessibles sans les symboles b^∞ , ω et qu'il existe une séquence de franchissement contenant toutes les transitions du réseau alors le réseau est vivant. Une transition qui n'apparaît pas dans le graphe de couverture n'est pas vivante ; ...

2.2. Technique d'analyse par les invariants

L'analyse structurelle d'un RdP s'effectue indépendamment du marquage initial du réseau et évite la construction du graphe. Elle est basée sur l'algèbre linéaire (matrice d'incidence, équation d'état...) efficace pour l'analyse structurelle du système modélisé. Elle s'intéresse en particulier à l'étude des invariants de marquages et de franchissements permettant de caractériser certaines propriétés quelque soit le marquage initial du réseau.

Notre objectif consiste à montrer comment étudier les invariants d'un BDSPN. Contrairement aux RdPs classiques, nous verrons que les invariants de marquages d'un BDSPN s'expriment en fonction de son M-marquage et que les invariants de franchissements font intervenir les indices de franchissements des transitions lots pour la caractérisation des séquences de franchissements correspondantes.

2.2.1 Analyse des P-invariants et T-invariants

Nous avons vu, dans le chapitre 2, qu'un μ -marquage μ_Z déduit de μ_K après une séquence de franchissement S , est relié à μ_K par l'équation d'état donnée en fonction des *M-marquages* correspondants (M_Z et M_K) :

$$M_Z = M_K + W \times F \quad (3.11)$$

Où W , matrice d'incidence, représente la structure du réseau qui est définie d'une façon similaire à celle d'un réseau de Petri classique ; F est le vecteur caractéristique associé à la séquence de franchissement S conduisant le M-marquage de M_K à M_Z . A rappeler que les composantes du vecteur caractéristique F associé à la séquence de franchissement S sont définies comme suit :

$$F[j]_{i=1 \text{ à } m} = \begin{cases} \text{Nombre de franchissements de } t_j \text{ dans } S, & \text{si } t_j \in T_D \\ \text{Somme des indices de franchissement de } t_j \text{ dans } S, & \text{si } t_j \in T_B \end{cases} \quad (3.12)$$

Considérons le système d'équations : $Y^T \times W = 0$

Avec Y^T vecteur transposé d'entiers relatifs de dimension égale à $m = |P|$ nombre de places du réseau, W matrice d'incidence du réseau.

D'après l'équation d'état (3.11) on déduit que : $Y^T \times M_Z = Y^T \times M_K + Y^T \times W \times F$.

Donc si $Y^T \times W = 0$, on alors $Y^T \times M_Z = Y^T \times M_K$ quelque soit F , autrement dit quelle que soit la séquence de franchissement S , c'est-à-dire pour tout μ -marquage accessible du réseau.

Lorsque $Y \geq 0$, qui est solution du système d'équations $Y^T \times W = 0$ alors :

$Y^T \times M_Z = \sum_{i=1}^m y_i \times M(p_i)$ est appelé un invariant de M-marquage et Y est appelé un P-invariant dont la définition se résume à la suivante :

Définition 3.4. Un vecteur Y non nul et non négatif de dimension n tel que $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{N}^n$ est appelé un *P-invariant* si :

$$Y^T \times W = 0 \quad (3.13)$$

De la même manière, un vecteur $X \geq 0$ qui est solution du système d'équations $W \times X = 0$ est dit T-invariant. Ce dernier caractérise un invariant de franchissement du réseau. Autrement dit, un T-invariant correspond à un vecteur caractéristique d'une séquence de franchissement. Pour une transition lot t_j , la composante x_j du vecteur X correspond à la somme des indices de franchissements de cette transition et pour une transition discrète t_k , la composante x_k du vecteur X correspond au nombre de franchissements de cette transition dans la séquence de franchissement que représente le T-invariant X . De la même manière qu'un P-invariant, la définition d'un T-invariant se résume à la suivante :

Définition 3.5. Un vecteur X non nul et non négatif de dimension m tel que $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m$ est appelé *T-invariant* si :

$$W \times X = 0 \quad (3.14)$$

2.2.2 Illustration de l'analyse des invariants

Pour illustrer l'analyse des invariants d'un système modélisé par un BDSPN, nous considérons le réseau de la figure 3.1. Le réseau est reproduit ci-dessous avec sa matrice d'incidence W qui caractérise sa structure. Pour plus de clarté nous avons également importé le graphe des μ -marquages accessibles de la figure 3.2 que nous avons déjà obtenu pour un μ -marquage initial du réseau $\mu_0 = (\{1, 2\}, \emptyset, 6, 3)^T$. Il sera utilisé pour mieux illustrer les résultats de l'analyse des invariants. Autrement cette dernière, comme nous l'avons dit, elle est basée uniquement sur l'étude algébrique de la structure du réseau et non pas du graphe des μ -marquages.

2.2.2.1 Etude des P-invariants du système

La résolution du système d'équations $Y^T \times W = 0$ donne une infinité de solutions. En effet tout vecteur Y de dimension 4 non nul et ayant des composantes positives telles que $y_1 = y_2 - 2y_3 - y_4$ est un P-invariant du réseau.

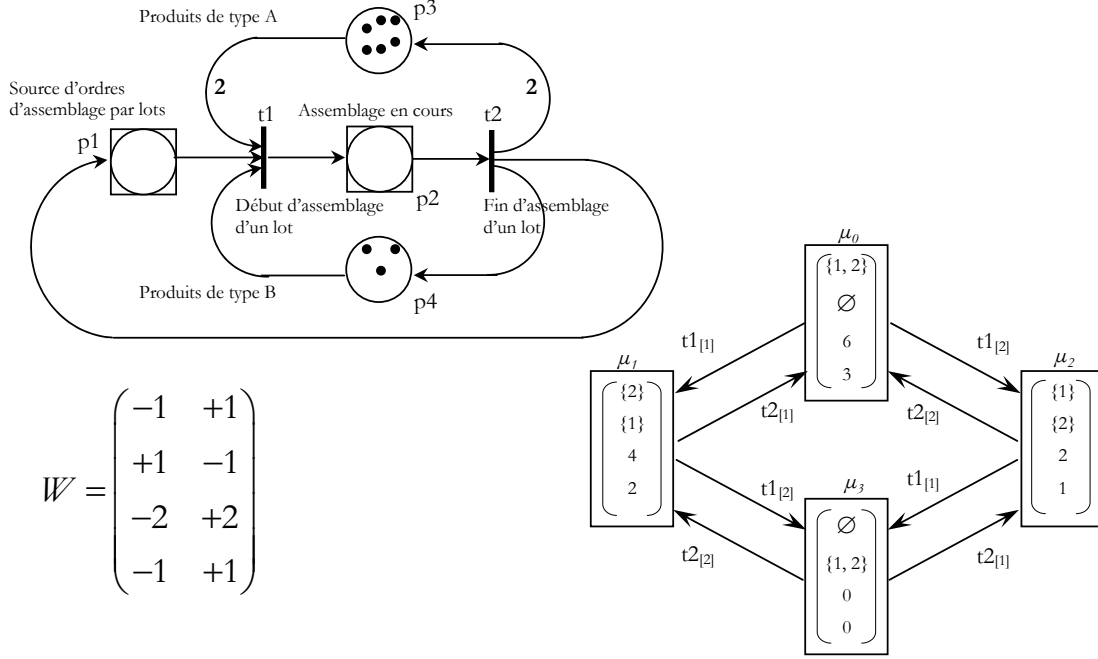


Figure 3.6. Illustration de l'analyse des P-invariants et des T-invariants

- Prenons par exemple $Y1 = (0, 3, 1, 1)$ qui est une solution du système d'équations. L'ensemble des places, $P(Y1) = \{p2, p3, p4\}$, que caractérise le P-invariant $Y1$ est dite *composante conservative*. Avec le μ -marquage initial du réseau $\mu_0 = (\{1, 2\}, \emptyset, 6, 3)^T$, on a l'invariant de M-marquage : $3M(p2) + M(p3) + M(p4) = 9$. En effet, comme le montre le graphe des μ -marquages accessibles, quelque soit le μ -marquage accessible $\mu_i \in \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, cet invariant de marquage est toujours vérifiée.
- $Y2 = (1, 1, 0, 0)$ est également un P-invariant. La composante conservative $P(Y2) = \{p1, p2\}$ correspondant à $Y2$ caractérise en particulier la conservation du flux d'information (ordres d'assemblage de lots de produits) représenté par les jetons lots circulant dans les deux places lots $p1$ et $p2$. En effet, pour tout μ -marquage accessible, $M(p1) + M(p2)$ est toujours constant. Pour $\mu_0 = (\{1, 2\}, \emptyset, 6, 3)^T$, on a toujours $M(p1) + M(p2) = 3$.
- Enfin, nous pouvons également noter $Y3 = (1, 4, 1, 1)$ qui est une autre solution du système d'équations $Y^T \times W = 0$. Avec le μ -marquage initial $\mu_0 = (\{1, 2\}, \emptyset, 6, 3)^T$, l'invariant est $M(p1) + 4M(p2) + M(p3) + M(p4) = 12$. Ceci peut également être vérifié sur le graphe des μ -marquages accessibles. $Y3$ présente une composante conservative $P(Y3) = \{p1, p2, p3, p4\}$ qui implique toutes les places du réseau. Ceci affirme que toutes les places sont bornées et donc le réseau est borné.

2.2.2.2 Etude des T-invariants du système

De la même manière, la résolution du système d'équations $W \times X = 0$ permet de retrouver les invariants de franchissements (séquences de franchissement réalisables) du réseau qui donnent une idée du comportement cyclique du réseau. En effet, tout vecteur X de dimension 2 non nul et ayant des composantes positives telles que $x_1 = x_2$ est une solution du système d'équations.

- Prenons par exemple $X_1 = (1, 1)$. Ce T-invariant correspond au vecteur caractéristique d'une séquence de franchissement réalisable. Comme t_1 et t_2 sont des transitions lots, les composantes de X_1 nous renseignent sur la somme des indices de franchissement de chaque transition dans la séquence de franchissement que caractérise ce T-invariant. Comme le montre le graphe des μ -marquage accessible cette séquence correspond à $S = t_{1[1]}t_{2[1]}$ ou $S = t_{2[1]}t_{1[1]}$ dont le vecteur caractéristique est X_1 .
- Prenons un autre T-invariant $X_2 = (3, 3)$ qui est également une solution de $W \times X = 0$. X_2 indique qu'il existe une séquence de franchissement dont le vecteur caractéristique est $(3, 3)$. Le graphe des μ -marquages accessibles affirme l'existence de cette séquence de franchissement dont le vecteur caractéristique est X_2 qui est : $S = t_{1[1]} t_{1[2]} t_{2[1]} t_{2[2]}$ ou $S = t_{1[2]} t_{1[1]} t_{2[2]} t_{2[1]}$. En effet, la somme des indices de franchissement de chaque transition dans S est égale à 3.
- On constate également que tous les T-invariants du réseau considéré correspondent à des *séquences de franchissement répétitives*, c'est-à-dire celles qui vérifient $\mu_0 [S \rightarrow \mu_0$. En effet, quelque soit le T-invariant $X = (x_1 \ x_2)$ sachant que $x_1 = x_2$, solution du système d'équations $W \times X = 0$, on vérifie par l'équation d'état que $M_0 + W \times X = M_0$ (M_0 est le M-marquage initial du réseau correspondant à son μ -marquage initial μ_0). Cette propriété, ou bien l'existence d'une séquence de franchissement répétitive, est une condition suffisante pour conclure que le réseau est *réinitialisable* (répétitif). Cette propriété, peut également être vérifiée sur le graphe des μ -marquages du réseau où on observe bien que le μ -marquage initial du réseau μ_0 représente l'état d'accueil du réseau d'où le comportement réinitialisable du système modélisé quelque soit son μ -marquage initial.

Pour terminer cette étude sur les invariants d'un BDSPN, nous notons que lorsque le réseau à étudier présente des arcs à poids variables en fonction du marquage du réseau, la matrice d'incidence W du réseau devient aussi variable. Dans ce cas, l'application de la technique de recherche des invariants telle qu'elle est présentée n'est pas possible puisqu'elle fait intervenir W comme une matrice constante dans la résolution du système d'équations. En revanche, la recherche peut tout de même se faire par le biais du graphe des μ -marquages du réseau. De plus, les invariants peuvent se reconnaître au travers de la structure elle-même du réseau puisque, d'une façon générale, ils correspondent aux cycles

que présente le graphe d'évolution et le réseau également.

2.3. Technique d'analyse par réduction

Un RdP peut être réduit de façon à simplifier la construction du graphe des marquages. Les techniques de réduction ont été développées dans le but de simplifier un réseau de Petri vis à vis d'un certain nombre de structures redondantes par rapport à diverses propriétés fréquemment recherchées notamment la vivacité, la bornitude et les invariants. L'application des règles de réduction ne conserve pas, en général, la signification physique du réseau. L'objectif est de construire un graphe des marquages accessibles plus petit mais permettant la vérification des mêmes propriétés visées. Les règles de réduction sont en général basées sur la suppression de places et la fusion de transitions.

Notre objectif dans cette section, consiste à montrer comment un BDSPN peut également bénéficier de cette technique.

2.3.1 Réductions classiques

En premier, les BDSPNs peuvent exploiter toutes les techniques de réduction développées pour des RdPs classiques. En effet, par définition, les BDSPNs incluent dans leur formalisme graphique et mathématique celui des RdPs classiques. De ce fait, toute partie d'un BDSPN composée de places et de transitions de type discret peut être simplifiée de la même façon et pour les mêmes conditions que celle d'un RdP classique.

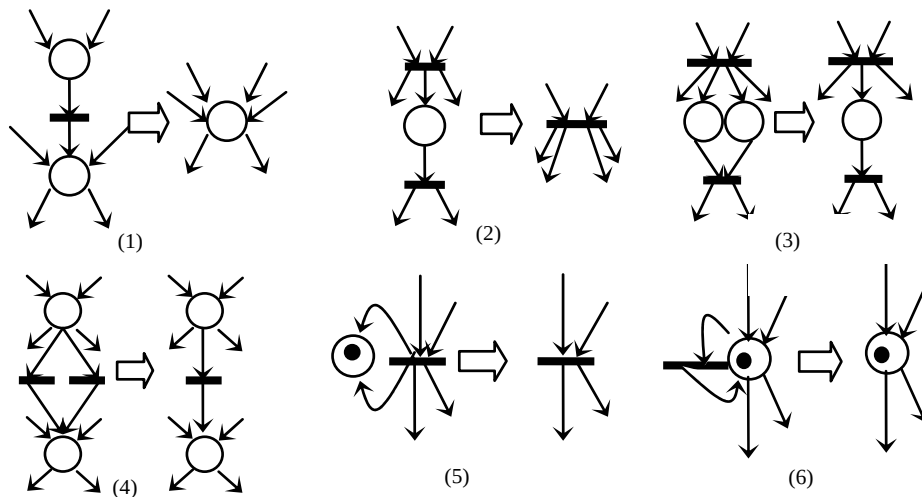


Figure 3.7. Règles de réductions des RdPs classiques pouvant être utilisées pour le cas des BDSPNs

Une image de synthèse des principales règles de réduction qui préservent en particulier la vivacité et la bornitude du réseau initial est donnée dans la figure 3.7. L'essentiel sur ces règles de réduction peut être trouvé dans de nombreux ouvrages sur les réseaux de Petri notamment dans [DAV 92] et [PRO 95].

2.3.2 Réductions spécifiques

L'objectif de cette section ne consiste pas à établir toutes les règles de réduction possibles des structures typiques ayant des places lots et des transitions lots. Notre objectif consiste à donner au travers de quelques exemples la possibilité de développer des règles de réduction spécifiques aux BDSPNs. Les principes s'inspirent de ceux des réductions des RdPs classiques, notamment celles présentées dans [DAV 92].

L'illustration sera faite sur le cas de substitution d'une place lot et le cas de suppression d'une place implicite. On verra en particulier, la réduction nécessite la détermination des poids des arcs du réseau réduit qui assure la circulation des jetons lots et des jetons discrets tel qu'il se faisait dans le réseau original.

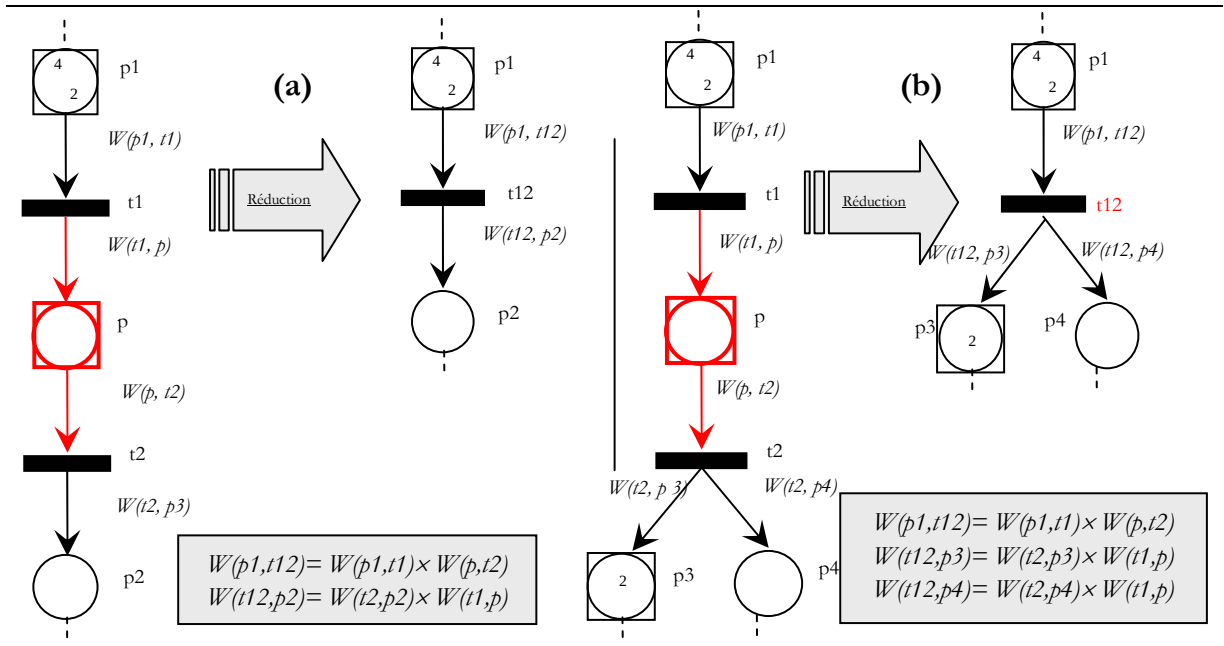


Figure 3.8. Suppression d'une place lot ayant une entrée et une sortie

3.3.2.1 Suppression d'une place lot

On considère une place lot p telle que :

- p est sans blocage lot ;
- Les transitions de sortie de p n'ont pas d'autres places d'entrée que p (c'est-à-dire tout

franchissement d'une transition d'entrée de p implique tôt ou tard, le franchissement d'une transition de sortie de p) ;

- Il n'existe pas de transition t qui soit à la fois transition d'entrée et transition de sortie de p ;
- Au moins une transition de sortie de p n'est pas une transition puits (transition sans aucune place aval).

Sur le réseau de la figure 3.8(a), on voit que si la transition lot $t1$ est franchie, alors la transition $t2$ le sera tôt ou tard parce qu'il n'y a aucun autre arc arrivant sur la transition $t2$ que celui qui vient de la place lot p . On peut alors substituer à la place lot p et aux deux transitions $t1$ et $t2$ (d'entrée et de sortie de p) une seule transition appelée $t12$. Quel doit être les poids des arcs $W(p1, t12)$ et $W(t12, p3)$ du réseau réduit pour que la circulation du flux des jetons lots et des jetons discrets préserve le même comportement du réseau original ? En d'autres termes, si dans le réseau original franchir $t1$ puis $t2$ permet de déposer un nombre x de jetons discrets dans la place discrète $p3$, alors dans le réseau réduit, le franchissement de la transition $t12$ doit reproduire le même effet. Sachant que le franchissement de la transition $t12$ dans le modèle réduit correspond au franchissement de la séquence $t1t2$ dans le réseau original. Analysons les différents franchissements qui peuvent s'effectuer dans les deux réseaux.

• **Réseau initial :**

Le franchissement de la transition lot $t1$ par un jeton lot de taille $b \in \mu(p1)$ le transforme en un nouveau jeton lot de taille b' qui sera déposé dans la place lot $p2$. Notons par $q_{(t1)}$ l'indice de franchissement de $t1$ par le jeton lot b , la taille du jeton lot b' est donné par :

$$b' = q_{(t1)} \times W(t1, p) = \left\lfloor b/W(p1, t1) \right\rfloor \times W(t1, p) = b \times \frac{W(t1, p)}{W(p1, t1)} \quad (3.15)$$

Le déplacement et la transformation du jeton lot continue en franchissant la transition $t2$ avec un indice de franchissement noté $q_{(t2)}$. Le franchissement de $t2$ transforme le jeton lot b' en b'' jetons discrets dans la place $p3$. Le nombre de jetons discrets à déposer dans $p3$ est donc :

$$b'' = q_{(t2)} \times W(t2, p2) = \left\lfloor b'/W(p, t2) \right\rfloor \times W(t2, p2) \quad (3.16)$$

En remplaçant b' donné par la relation (3.16), nous obtenons :

$$b'' = \left\lfloor b \times \frac{W(t1, p)}{W(p1, t1)} / W(p, t2) \right\rfloor \times W(t2, p2) = b \times \frac{W(t1, p) \times W(t2, p2)}{W(p1, t1) \times W(p, t2)} \quad (3.17)$$

- **Réseau réduit :**

Le franchissement de la transition $t12$ dans le modèle réduit (représentant $t1$ et $t2$ du réseau initial) par un jeton lot de taille $b \in \mu(p1)$ dépose un nombre de jetons discrets b'' dans $p3$ tel que :

$$b'' = q_{(t12)} \times W(t12, p2) = \left\lfloor b/W(p1, t12) \right\rfloor \times W(t12, p2) = b \times \frac{W(t12, p2)}{W(p1, t12)} \quad (3.18)$$

Finalement, par identification des deux relations (3.17) et (3.18) nous obtenons :

$$\begin{aligned} W(p1, t12) &= W(p1, t1) \times W(p, t2) \\ W(t12, p2) &= W(t2, p2) \times W(t1, p) \end{aligned} \quad (3.19)$$

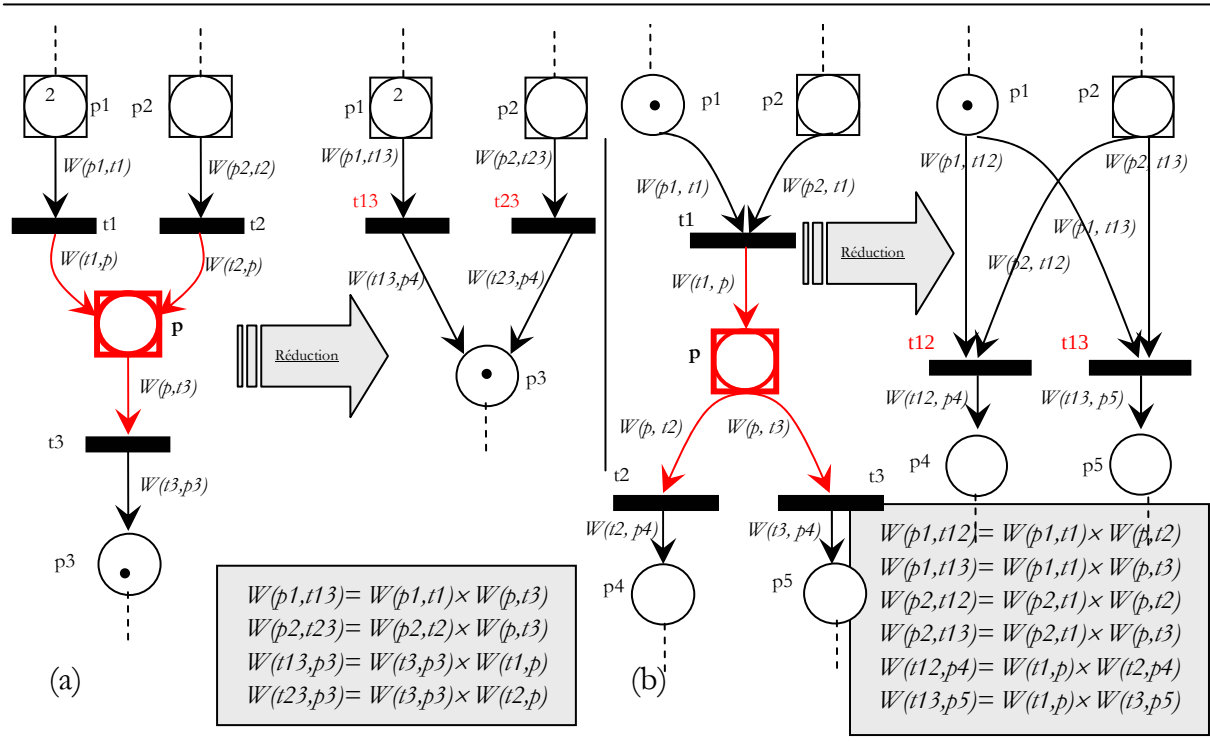


Figure 3.9. Suppression d'une place lot avec plusieurs entrées et plusieurs sorties

Les autres cas de réductions présentés dans les figures (3.8) et (3.9) sont similaires au cas que nous venons d'étudier, mais avec plusieurs entrées et sorties de la place lot p à supprimer. Pour la détermination des poids des arcs, nous avons procédé de la même manière pour chaque structure en considérant l'effet de tous les franchissements possibles sur l'évolution du réseau.

Concernant le μ -marquage du réseau réduit par rapport au réseau initial, il faut penser à préserver le flux initial des jetons lots et des jetons discrets. En effet, les places d'entrée de p , doivent être μ -marquées comme elles étaient dans le réseau initial.

- Si la place lot à supprimer n'est pas μ -marquée dans le réseau initial alors, toutes les places de sortie de p préservent leur μ -marquage initial.
- Si la place lot p à supprimer est μ -marquée initialement, alors le μ -marquage de p s'ajoute au μ -marquage de ses places de sortie dans le réseau réduit.

Comme exemple, supposons que dans le réseau initial de la figure 3.9(a), la place p à supprimer présente un jeton lot de taille quelconque égale à b . Dans ce cas, la place discrète $p3$ du réseau réduit doit contenir un nombre de jetons discrets égal à la somme de jetons discrets contenus initialement et de ceux qui proviennent du franchissement de la transition $t3$ par le jeton lot de taille b (i.e., $[b/W(p, t3)] \times W(t3, p3)$).

3.3.2.2 Suppression d'une place implicite

Une place lot p (discrète ou lot) est dite implicite, si elle satisfait les conditions suivantes. (i) le μ -marquage de cette place n'est jamais un obstacle au franchissement de ses transitions de sortie, (ii) son M-marquage peut se déduire du μ -marquage des autres places. Dans ce cas, la place p peut être supprimée avec ses arcs correspondants.

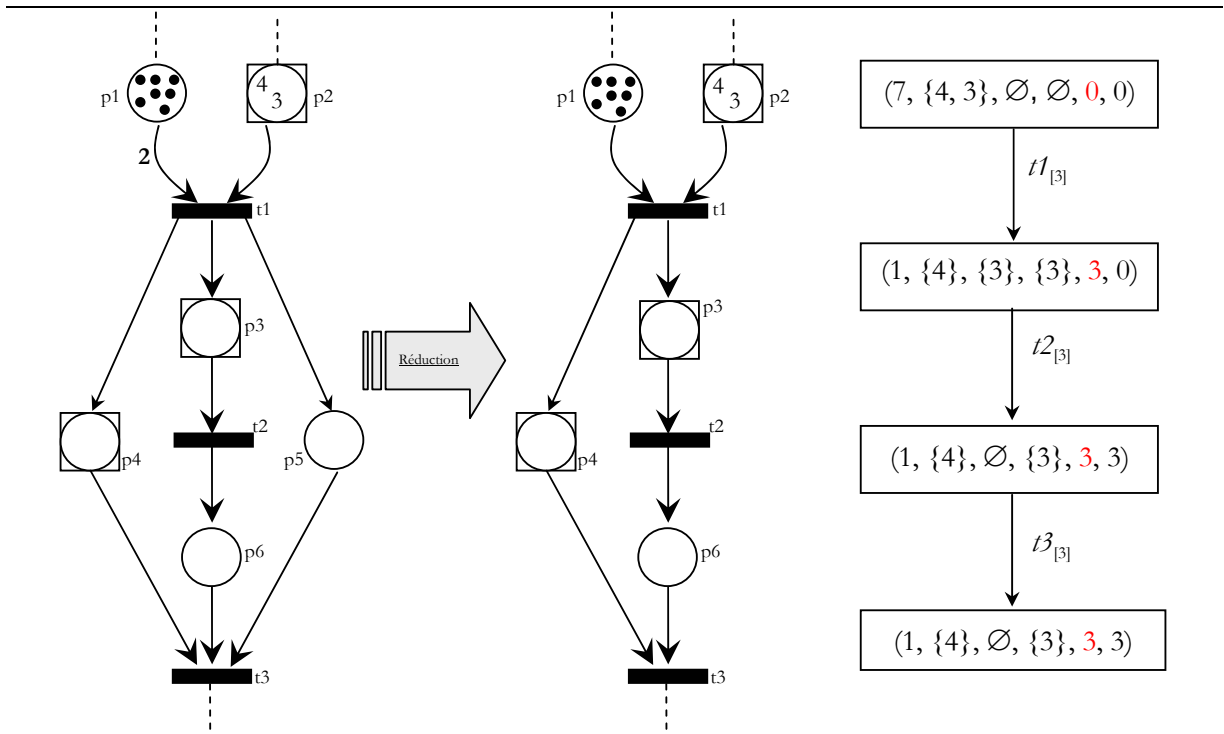


Figure 3.10. Suppression d'une place implicite

Dans le réseau de la figure 3.10, la place discrète $p5$ est une place implicite car sa suppression n'influe pas sur le fonctionnement du réseau en particulier le franchissement de la transition lot $t3$ et le M-marquage de $p5$ est toujours connu puisqu'il peut être

obtenu par l'invariant de M-marquage suivant : $M(p5) = M(p3) + M(p6)$. La place $p5$ peut donc être supprimée sans aucune influence sur le réseau initial.

En revanche, malgré qu'elle possède les mêmes transitions d'entrée et de sortie que la place implicite $p5$, la place lot $p4$ n'est pas une place implicite puisqu'elle satisfait juste une seule condition de la définition d'une place implicite. Il s'agit de son M-marquage pouvant être déduit par l'invariant de M-marquage suivant : $M(p4) = M(p3) + M(p6)$. Par contre, du point de vue fonctionnement, c'est la place $p4$ qui impose que le franchissement de la transition $t3$ est du type lot. A chaque franchissement de $t3$, le nombre de jetons discrets à soustraire de la place $p6$ est décidé par la taille du jeton lot de la place lot $p4$ qui va franchir $t3$. La suppression de la place lot $p4$ conduit la transition $t3$ à fonctionner en mode discret ce qui affecte tout le comportement du réseau initial, elle ne pas donc pas être supprimée. L'analyse de la suppression de la place implicite $p5$, est illustré par une séquence de l'évolution du réseau pour un μ -marquage $\mu(7, \{3, 4\}, \emptyset, \emptyset, 0, 0)^T$. Le graphe des μ -marquages accessibles pour cet état, représenté sur la figure 3.10, permet d'observer que quel que soit le μ -marquage atteint, $M(p5) = M(p3) + M(p6)$ est vérifiée et que faire évoluer le réseau initial ou le réseau réduit on aboutit à un même graphe d'évolution du réseau.

2.4. Technique d'analyse par le RdP discret associé

Dans cette section, nous définissons un RdP discret associé à un BDSPN noté *RdPA*. L'objectif est d'examiner de plus près l'évolution d'un BDSPN par rapport à un RdP classique. Malgré leur différence du point de vue de leur évolution dynamique, à l'aide d'un certain nombre de relations entre les deux réseaux, nous montrons que la transformation préserve quelques propriétés qualitatives en commun.

2.4.1 RdP discret associé (*RdPA*)

Définition 3.6. Un BDSPN peut être associé à un réseau de *Petri discret*, noté *RdPA*, qui s'obtient :

- en transformant toutes ses places lots en places discrètes M- marquées, c'est-à-dire $\forall p_i \in P_b, M_0(p_i) = \sum_{b \in \mu_0(p_i)} b$.
- Les transitions et les arcs correspondants restent inchangés.

Les relations que nous allons établir entre un BDSPN et son *RdPA* seront exprimées en fonction du M-marquage du BDSPN. Par conséquent, nous définissons un nouveau type de graphe d'évolution d'un BDSPN appelé *graphe des M-marquages accessibles* qui s'obtient directement à partir de son graphe des μ -marquages accessibles.

Définition 3.7. Le *graphe des M-marquages accessibles* d'un BDSPN s'obtient directement à partir de son graphe des μ -marquages accessibles en convertissant tous les μ -marquages accessibles en M-marquages. L'ensemble des μ -marquages accessibles à partir du μ -marquage initial μ_0 est noté μ_0^* .

- Les arcs reliant les μ -marquages entre eux restent inchangés.
- Pour tout $\mu \in \mu_0^*$ faire {Pour tout $p_i \in P_b : \mu(p_i) \xrightarrow{\text{transformer}} M(p_i) = \sum_{b \in \mu(p_i)} b$ }

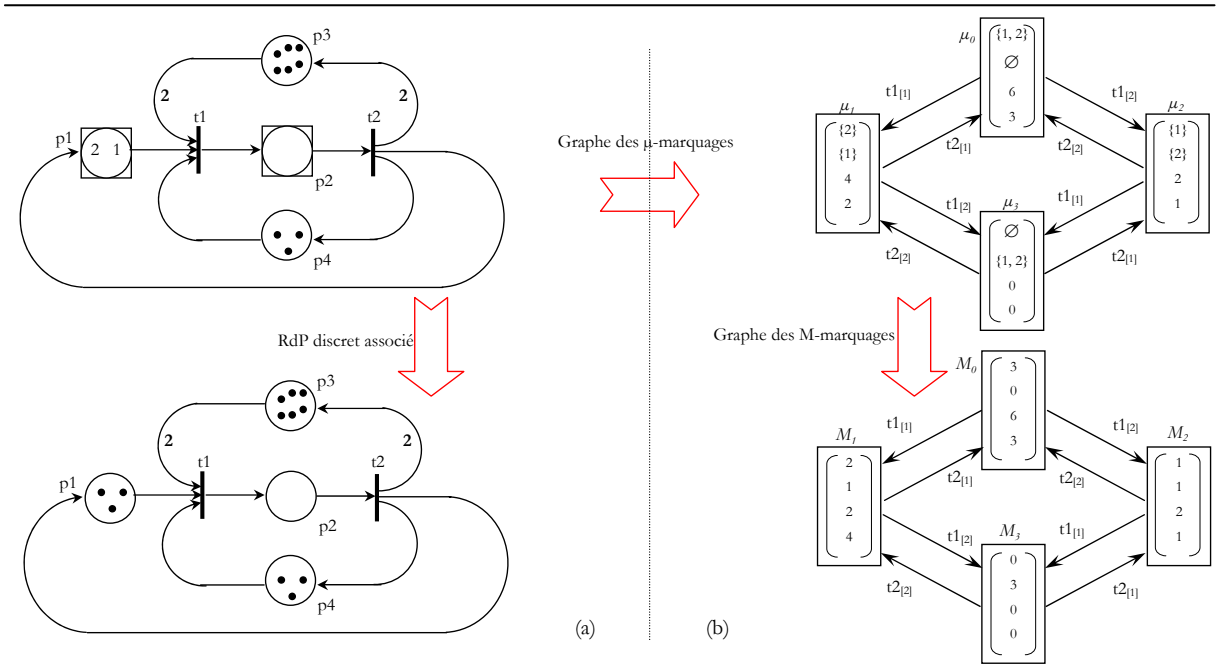


Figure 3.11. (a) Passage d'un BDSPN à son réseau discret associé (b) Passage d'un graphe des μ -marquages accessibles au M-marquages accessibles

La figure 3.11, illustre les deux définitions précédentes. La partie gauche de la figure illustre le passage d'un BDSPN à son réseau discret associé. La partie droite illustre le passage du graphe des μ -marquages accessibles au graphe des M-marquages accessibles du BDSPN. Bien entendu, pour l'instant rien ne lie les deux réseaux de Petri hormis le passage du BDSPN au RdP discret comme le montre la figure 3.11.

Notre objectif consiste à établir des liens entre l'évolution du RdPA, c'est-à-dire son graphe des marquages accessibles, avec le graphe des M-marquages accessibles du BDSPN. Pour ce faire, nous décrivons la notion de *q-validation* et de *q-franchissement* d'une transition d'un RdP classique et nous faisons un lien formel avec les règles de fonctionnement d'un BDSPN notamment au travers de son équation d'état.

2.4.2 Notion de q-validation d'une transition

Définition 3.8. Une transition t_j est dite *q-validée* à partir d'un marquage M si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \forall p_i \in \bullet t_j, \quad M(p_i) &\geq q \times W(p_i, t_j) \\ \forall p_i \in t_j^\bullet, \quad M(p_i) &< W(p_i, t_j) \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Le *q-franchissement* d'une transition t_j *q-validée* consiste à franchir q fois simultanément la transition t_j . Le nombre de jetons à soustraire et rajouter respectivement dans les places d'entrée et de sortie de la transition est le poids de l'arc associé multiplié par q .

$$\begin{aligned} \forall p_i \in \bullet t_j, \quad M'(p_i) &= M(p_i) - q \times W(p_i, t_j) \\ \forall p_i \in t_j^\bullet, \quad M(p_i) &= M(p_i) + q \times W(t_j, p_i) \end{aligned} \quad (3.21)$$

En observant ces relations, on constate bien qu'elles font partie des règles de fonctionnement lot d'un BDSPN exprimées en termes de son M-marquage.

- Le *franchissement* d'une transition t_j validée à partir d'un marquage M_k à M_{k+1} dans un RdP classique peut être formulé par une équation dite fondamentale ou d'état comme suit :

$$M_{k+1} = M_k + W \times U, \text{ avec } U[i]_{i=1 \text{ à } m} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.22)$$

- Le *q-franchissement* d'une transition t_j *q-validée* à partir d'un marquage M_k à M_{k+1} dans un RdP classique donne l'équation suivante :

$$M_{k+1} = M_k + W \times U \times q \quad (3.23)$$

En remplaçant $U \times q = F$, on obtient une équation d'état semblable à celle d'un franchissement d'une transition lot avec un indice de franchissement q .

$$M_{k+1} = M_k + W \times F \text{ avec } F[i]_{i=1 \text{ à } m} = \begin{cases} q & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.24)$$

Maintenant, analysons la figure 3.12 qui est une illustration des concepts introduits. La figure synthétise un ensemble d'informations sur le comportement des deux réseaux (a) et (b) qui nous conduit à établir un ensemble de propriétés formelles sur la dynamique du BDSPN par rapport au RdPA et vice versa.

- On observe sur le graphe des M-marquages accessibles du BDSPN et du graphe des marquages du *RdPA* ont un même marquage initial.
- On constate que tous les M-marquages accessibles du BDSPN figurent sur le graphe des marquages accessibles du *RdPA*.
- Sachant qu'une transition $t_{[q]}$ franchie dans le BDSPN correspond à q franchissements de t dans le *RdPA*, on observe que toutes les séquences de franchissements du BDSPN sont également réalisées par le *RdPA*.
- En effet, les deux séquences de franchissement réalisables dans le BDSPN sont : $t1_{[1]}t1_{[2]}$ et $t1_{[2]}t1_{[1]}$. Toutes les deux conduisent le M-marquage de M_0 à M_3 . Dans le *RdPA*, ces deux séquences correspondent à la séquence $t1t1t1$ qui mène le réseau de M_0 à M_3 également.
- En réalité, comme la somme des indices de franchissements lots des deux séquences de franchissements dans le BDSPN est égale à 3, un dépliage de ces séquences s'est réalisé par la dynamique du réseau de Petri discret associé pour donner une séquence équivalente à 3 fois le franchissement de $t1$.

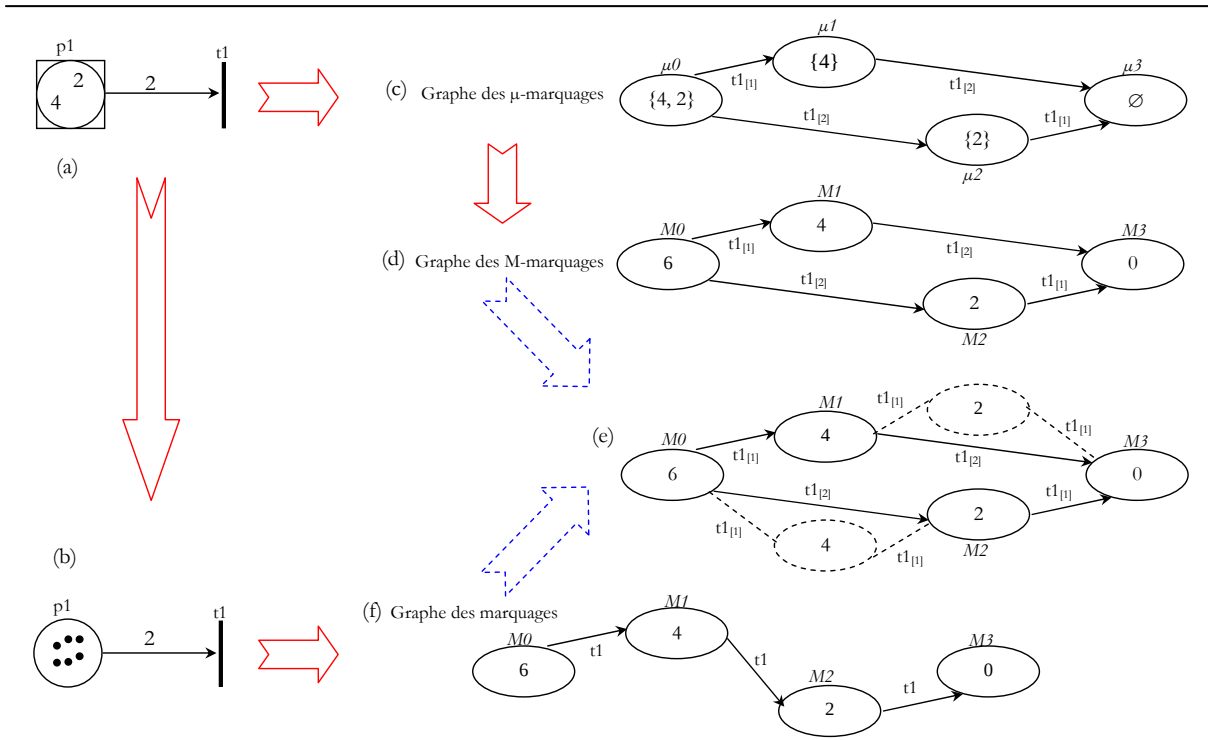


Figure 3.12. Relations comportementales entre un BDSPN et son RdPA

2.4.3 Propriétés BDSPN / RdP discret associé

Dans ce qui suit, nous donnons les propriétés essentielles obtenues de l'analyse précédente. Pour la formalisation et la démonstration de ces propriétés, nous notons par $G_{\mu A}(BDSPN, \mu_0)$, $G_{MA}(BDSPN, M_0)$ et $G_{MA}(RdPA, M_0)$ respectivement le graphe des μ -marquages accessibles du réseau initial $BDSPN$ à partir du μ -marquage initial μ_0 ; le graphe des M -marquages accessibles correspondant au $G_{\mu A}(BDSPN, \mu_0)$ et le graphe des marquages accessibles du $RdPA$.

Propriété 3.2. Le M -marquage initial M_0 , et la matrice d'incidence W du $BDSPN$ représentent également le marquage initial et la matrice d'incidence du $RdPA$.

Preuve.

Cette propriété découle directement de la définition du passage d'un $BDSPN$ à un $RdPA$ associé.

Propriété 3.3. L'ensemble des M -marquages accessibles, M_{BDSPN}^* , du $BDSPN$ est inclus (ou identique) dans l'ensemble des marquages accessibles, M_{RdPA}^* , du $RdPA$:

$$M_{BDSPN}^* \subseteq M_{RdPA}^* \Leftrightarrow \forall M \in M_{BDSPN}^* \Rightarrow M \in M_{RdPA}^* \quad (3.25)$$

Preuve.

- La propriété 3.2 implique que : $M_0 \in M_{BDSPN}^* \Rightarrow M_0 \in M_{RdPA}^*$.
- Soit t_j une transition validée à partir de μ_0 (M_0 le M -marquage correspondant) dans le $BDSPN$.

- Si la transition t_j est discrète, dans ce cas le franchissement de cette transition également validée dans le $RdPA$ (même matrice d'incidence, même marquage) conduit à un même marquage, M_1 . Ce marquage va donc figurer dans les deux graphes $G_{MA}(BDSPN, M_0)$ et $G_{MA}(RdPA, M_0)$. On a alors : $M_1 \in M_{BDSPN}^* \Rightarrow M_1 \in M_{RdPA}^*$.

- Si la transition validée est lot dans le $BDSPN$, elle est donc validée avec un indice de franchissement q . Avec les relations de q -validation et q -franchissement établies précédemment, une transition lot validée avec un indice de franchissement q est q -validée dans le $RdPA$.

Le franchissement lot de la transition t_j dans le $BDSPN$ conduit le réseau, du M -marquage M_0 à un autre M -marquage noté M_k . Ce franchissement lot correspond à q franchissements successifs de la transition t_j du $RdPA$, c'est-à-dire :

$$M_0[t_{j[q]} \rightarrow M_k \Leftrightarrow M_0[\underbrace{t_j t_j \dots t_j}_{q \text{ fois}} \rightarrow M_k. \text{ On a alors : } M_k \in M_{BDSPN}^* \Rightarrow M_k \in M_{RdPA}^*.$$

De la même manière pour chaque nouveau M-marquage accessible du *BDSPN*, il est systématiquement accessible dans le *RdPA*.

- A noter que chaque q-franchissement d'une transition dans le *RdPA* peut générer des états intermédiaires (voir la figure 3.13) entre l'état de départ et l'état d'arrivée, dans le $G_M A(RdPA, M_0)$ qui ne figurent pas forcément dans le $G_M A(BDSPN, M_0)$ d'où le sens de l'inclusion ($\subseteq$) dans la propriété $M_{BDSPN}^* \subseteq M_{RdPA}^*$.

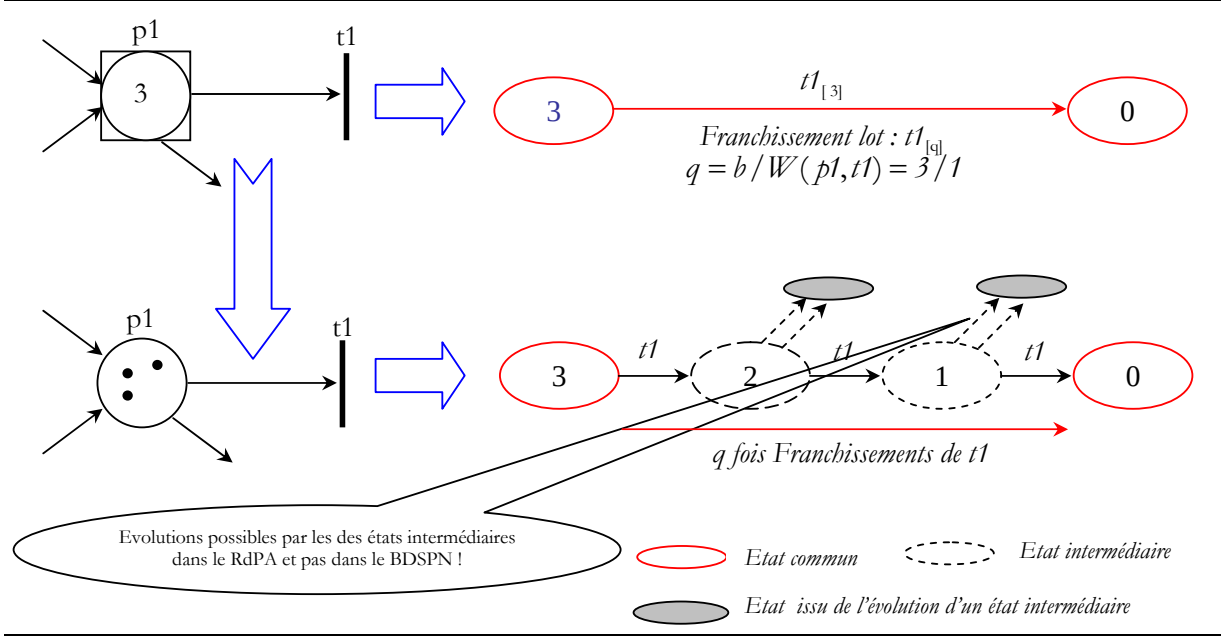


Figure 3.13. Lien dynamique entre un *BDSPN* et son *RdPA*

Propriété 3.4. Toutes les séquences de franchissements réalisables dans le *BDSPN* sont également réalisables dans le réseau discret associé.

$$\forall S \in G_M A(BDSPN, M_0) \Rightarrow S \in G_M A(RdPA, M_0) \quad (3.26)$$

Preuve.

Cette propriété et une conséquence directe de la propriété 3.3 indiquant que tous les M-marquages accessibles du *BDSPN* sont inclus dans ceux de son réseau discret associé et de la notion du franchissement lot dans le *BDSPN* correspondant aux franchissements multiples dans le réseau discret associé. Par exemple, prenons une séquence type $S = t_3 t_2 t_1 t_2 t_4$, contenant à la fois des franchissements discrets et lots qui conduit un *BDSPN* d'un M-marquage de M à M' , nous aurons :

$$M[t_3 t_2 t_1 t_2 t_4] \rightarrow M' \in G_M A(BDSPN, M_0) \Rightarrow M[\underbrace{t_3 t_3}_{[2] \text{ fois } t_3} \underbrace{t_1 t_2 t_2 t_2}_{[4] \text{ fois } t_2}] \rightarrow M' \in G_M A(RdPA, M_0)$$

Propriété 3.5. Si le réseau de Petri discret associé à un *BDSPN* est borné alors ce dernier est également borné.

Si le $RdPA$ est borné $\Rightarrow$ le $BDSPN$ est borné (3.27)

Preuve.

Par définition, si le *RdPA* est borné alors toutes ses places sont bornées, c'est-à-dire $\forall p \in P, \forall M \in G_M A(RdPA, M_0) \Rightarrow M(p) \leq k$. Or, tous les M-marquages accessibles du *BDSPN* sont également des marquages accessibles dans le *RdPA* alors :

$\forall p \in P, \forall M \in G_M A(BDSPN, M_0) \Rightarrow M(p) \leq k$, d'où la bornitude du *BDSPN*.

Propriété 3.6. L'ensemble des P-invariants et l'ensemble des T-invariants du réseau de Petri discret associé à un *BDSPN* sont respectivement l'ensemble des P-invariants et l'ensemble des T-invariants du *BDSPN*.

Preuve.

Par définition, rappelons que les P-invariants, (resp. les T-invariants) correspondent aux solutions du système d'équations $Y^T \times W = 0$ (resp. $W \times X = 0$). Or, le *BDSPN* et le réseau discret qui lui est associé ont une même matrice d'incidence W , par définition, et les mêmes systèmes de résolution pour la recherche des P-invariants et des T-invariants.

2.4.4 Autres propriétés et remarques

Nous avons montré qu'un *BDSPN* est borné dans le cas où le réseau discret qui lui est associé est borné. Par contre, il est clair que la non bornitude du *RdPA* ne permet pas toujours de conclure sur la bornitude ou la non bornitude du *BDSPN*. En effet, Comme le montre la figure 3.13, les états intermédiaires que cachent chaque franchissement lot dans le *BDSPN* et qui apparaissent dans l'évolution du *RdPA* *peuvent évoluer vers d'autres marquages par des franchissements n'ayant pas forcément leurs équivalences dans le $BDSPN$* . En clair, si la non bornitude du *RdPA* est dû à *un des marquages issus de l'évolution de ces marquages intermédiaires*, M , alors la bornitude du *BDSPN* n'est pas mise en jeu si M n'appartient pas à ses M-marquages accessibles et aux marquages intermédiaires.

La vivacité et la réversibilité d'un *BDSPN* ne peuvent pas être décidées avec son *RdPA*. Malgré que le graphe des M-marquages du *BDSPN* est inclus et que ses séquences de franchissements se réalisent dans son *RdPA*, les états intermédiaires (voir figure 3.13), peuvent tisser d'autres évolutions possibles du *RdPA* pouvant être la source de la non vérification de ces propriétés. Ainsi, pour la réversibilité, il se peut que le retour du *RdPA* à l'état initial M_0 à partir d'un marquage M commun avec le *BDSPN*, se fait par une séquence de franchissement que ne réalise pas forcément le *BDSPN*.

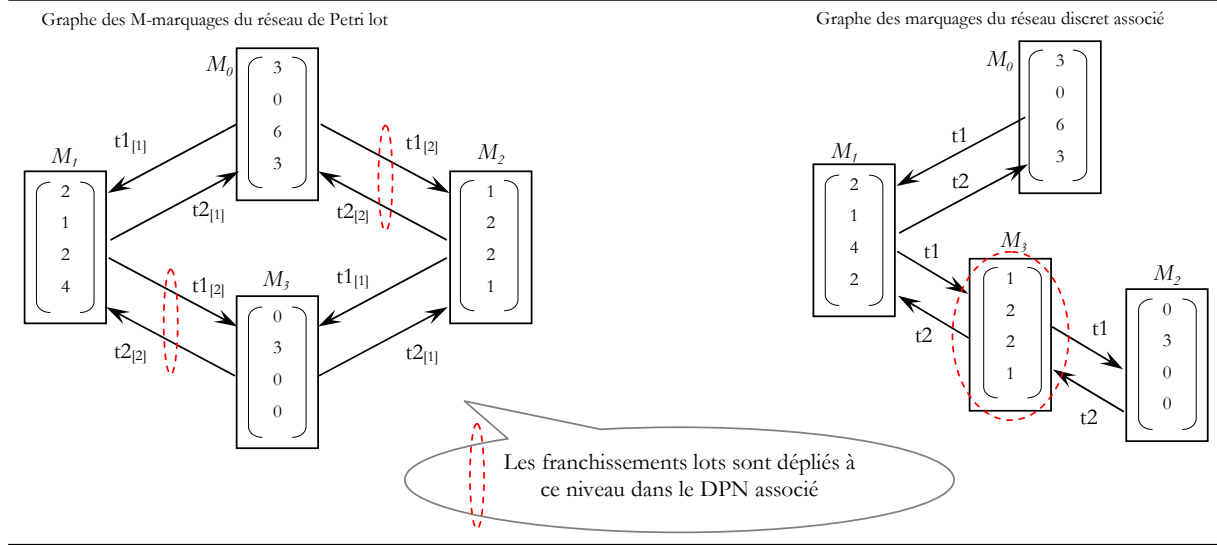


Figure 3.14. Suite de l'analyse du réseau de la figure 3.11.

En fixant certaines hypothèses, il est possible d'établir d'autres propriétés. Il s'agit notamment d'un cas de configuration où les états intermédiaires n'évoluent pas dans le *RdPA* (voir la figure 3.13) ou mieux encore lorsque l'ensemble des marquages accessibles du *RdPA* est le même que l'ensemble des M-marquages accessibles du BDSPN. C'est le cas du réseau de la figure 3.11 dont les graphes d'accessibilité des deux réseaux sont représentés et illustrés sur la figure 3.14.

En effet dans ce cas, le dépliage des franchissements lots par le *RdPA* donne un seul marquage intermédiaire (1, 2, 2, 1) qui correspond à un des M-marquage du BDSPN. Par conséquent, l'ensemble des marquages accessibles des deux réseaux est identique. Avec cette hypothèse ($M_{BDSPN}^* = M_{RdPA}^*$), on peut bien montrer que si le *RdPA* est réversible alors le BDSPN est également réversible. De même pour la vivacité puisque cette hypothèse assure que toutes les séquences de franchissements réalisables par le *RdPA* sont également réalisables par le BDSPN. En effet, si on observe bien les deux graphes d'accessibilité (figure 3.14) et si on essaye de déplier nous même les franchissements lots en plaçant le marquage intermédiaire (1, 2, 2, 1) entre ces franchissements, c'est à dire à la place des petites ellipses pointillée, on s'aperçoit qu'une partie du graphe est doublée. En enlevant, la partie gauche par exemple, on obtient exactement ce que donne le *RdPA*. D'où la propriété suivante.

Propriété 3.7. Sachant que $M_{BDSPN}^* = M_{RdPA}^*$, un BDSPN est réversible si le réseau de Petri discret associé est réversible.

Preuve.

Par définition, le *RdPA* est réversible si et seulement si :

$\forall M \in M_{RdPA}^*, M_0 = M \times W$ or le *RdPA* a la même matrice d'incidence W et par hypothèse, le même ensemble de marquages accessibles, alors le BDSPN est également

réversible.

Propriété 3.8. Lorsque le BDSPN, présente des arcs inhibiteurs, la propriété de base, $M^*_{BDSPN} \subseteq M^*_{RdPA}$ (propriété 3.3), établie avec son réseau de Petri discret n'est pas toujours vérifiée.

Preuve. Il suffit de donner un exemple qui vérifie cette propriété. Il s'agit de l'exemple de la figure 3.15 où les M-marquages du BDSPNs ne sont pas tous reproduits par le réseau de Petri discret associé. En effet, c'est tout simplement dû à l'effet différent de l'arc inhibiteur sur le comportement des deux réseaux. Contrairement au BDSPN, dans le réseau discret associé, l'arc inhibiteur empêche de réaliser à partir du marquage $M_0 = (5, 0)$ des franchissements multiples de la transition $t1$ qui correspondent aux franchissements lots de cette transition dans le BDSPN. Il s'agit notamment des séquences $t1t1$ et de $t1t1t1$ qui correspondent respectivement au franchissement de $t1_{[2]}$ et de $t1_{[3]}$ dans le BDSPN. Ceci conduit, à la non apparition de tous les M-marquages par le réseau discret qui lui est associé.

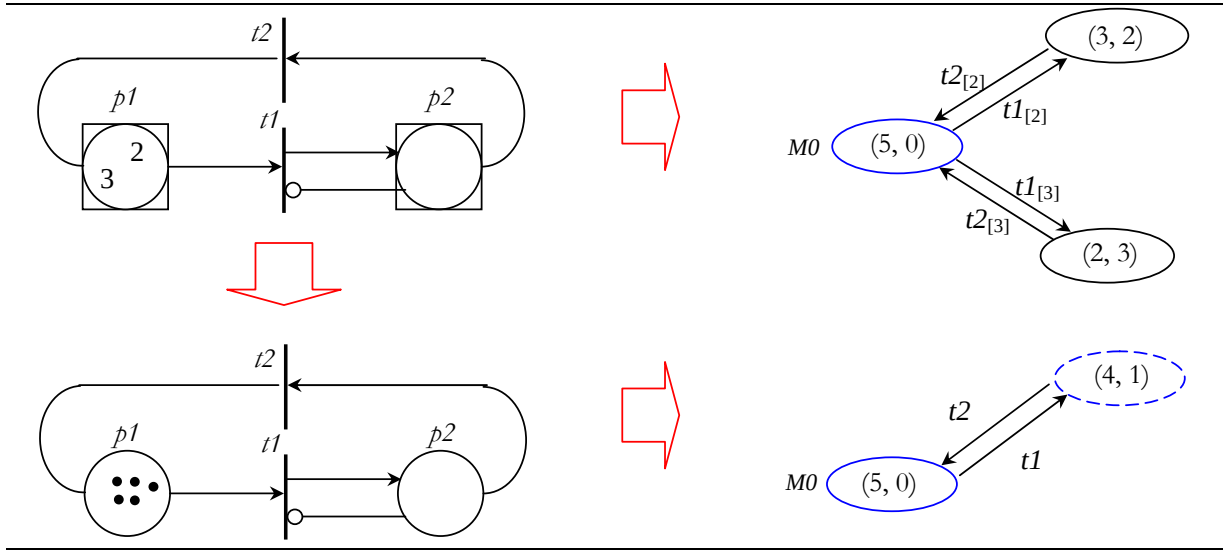


Figure 3.15. Illustration de la propriété 3.8.

2.5. Technique d'analyse par transformation

Dans l'analyse effectuée précédemment, la transformation d'un BDSPN est directe, c'est-à-dire que les places lot sont converties en places discrètes pour relâcher complètement le fonctionnement lot. De nombreuses propriétés liant ces deux réseaux sont ainsi établies et illustrées. Bien entendu, le *RdPA* ne reproduit pas le même comportement du BDSPN.

Contrairement à cette technique, notre objectif dans cette section est de montrer, au travers d'une autre analyse de transformation qu'il est possible dans certains cas d'aboutir à une transformation pouvant reproduire un même comportement. Cette nouvelle technique est basée sur la dynamique même des lots dans le BDSPN. Le but de cette analyse est surtout de montrer une nouvelle fois l'intérêt des BDSPNs par rapport aux RdPs classiques. Ainsi, nous verrons qu'un BDSPN est nécessaire même dans le cas où il est peut être transformé.

2.5.1 Passage d'un BDSPN à un RdP classique : cas particulier

Le développement de cette technique est basée, dans un premier temps, sur un cas de configuration simple où les jetons lots sont toujours identiques dans chaque place lot. La généralisation de la technique, sera ensuite discutée.

Définition 3.9. Une place lot $p_i \in P_b$ est dite *mono lot* si et seulement si :

$$\forall \mu \in \mu_0^*, \forall b \in \mu(p), b = \text{constante} \quad (3.28)$$

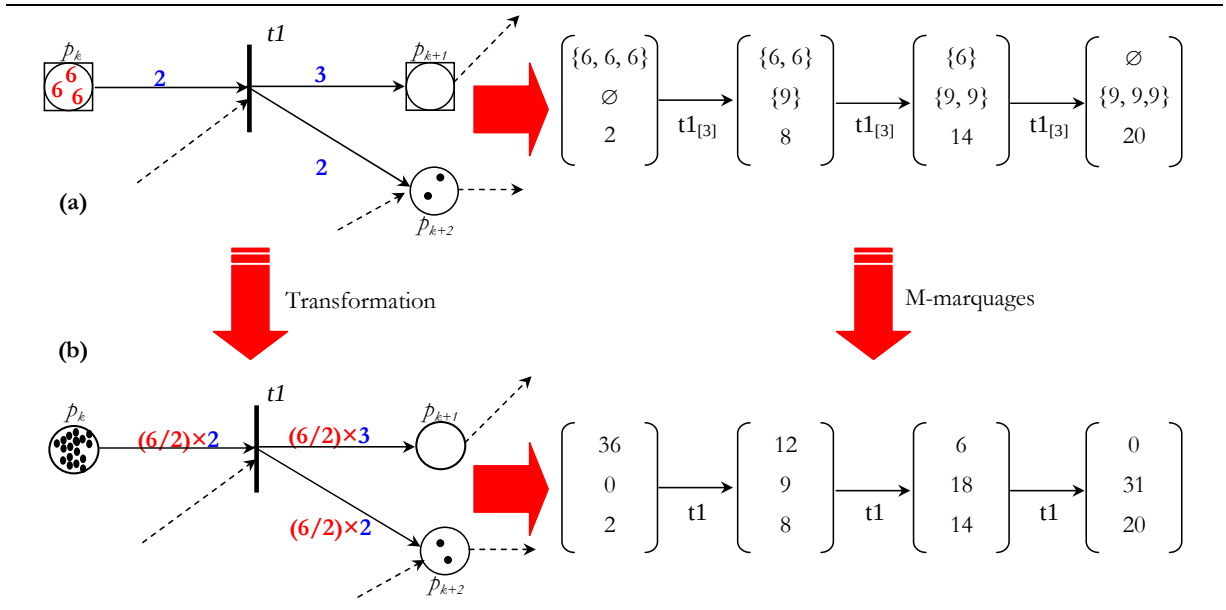


Figure 3.16. Exemple de transformation d'un BDSPN (cas particulier)

Comme le montre l'exemple de la figure 3.16, lorsque toutes les places lots d'un BDSPN sont mono lots, ces dernières peuvent être converties en places discrètes sans influence sur sa dynamique.

- En effet, cette propriété assure que tous les indices de franchissement des transitions lots du BDSPN sont toujours constants lors de son évolution.

- Le principe consiste à convertir chaque place lot du BDSPN en une place discrète et intégrer son indice de franchissement dans les poids de ses arcs.
- Le RdP classique obtenu a un comportement identique comme le montre les graphes d'évolution des deux réseaux. L'équivalence est du point de vue du M-marquage du BDSPN. On observe sur le graphe que franchir $t1_{[3]}$ dans le BDSPN correspond à franchir $t1$ dans le RdP classique.

Ainsi, cette analyse nous conduit aisément à l'algorithme suivant qui permet de convertir tout BDSPN ayant toutes ses places lots *mono lots* et les arcs à poids non variables avec son M-marquage en un réseau de Petri classique.

Algorithme 3.2. Transformation d'un BDSPN à un RdP classique (cas particulier)

Tout $BDSPN = (P, T, W, \mu_0)$ ayant toutes ses places *mono lots* et sans arcs à poids variables peut être transformé en un RdP classique, $RdP = (P^*, T, W^*, M_0)$ tel que :

Etape 1. L'ensemble des places discrètes du $BDSPN$ et leur marquage restent inchangés dans le RdP .

$$\forall p_i \in P_d, M_0(p_i) = \mu_0(p_i)$$

Etape 2. Chaque place lot du $BDSPN$ est convertie en une place discrète M-marquée dans le RdP .

$$\forall p_i \in P_b, M_0(p_i) = \sum_{b \in \mu(p_i)} b$$

Etape 3. L'ensemble des transitions T du $BDSPN$ reste inchangé dans le RdP . A noter, que toutes les transitions lots deviennent systématiquement des transitions classiques en absence des places lots puisque par définition une transition est dite lot si elle a à son entrée au moins une place lot.

Etape 4. Le poids des arcs de sortie de chaque place p_i , qui est initialement une place lot dans le $BDSPN$, est égal à la taille constante de ses jetons lots qu'on note b_i .

$$\forall p_i \in P_b, \forall t_j \in p_i^\bullet, W^*(p_i, t_j) = W(p_i, t_j) \times \frac{b_i}{W(p_i, t_j)} = b_i$$

Etape 5. Le poids de chaque arc de sortie d'une transition lot t_j est égal à son poids initial multiplié par son indice de franchissement q_j .

$$\forall p_i \in P_b, \forall t_j \in p_i^\bullet, W^*(t_j, p_i) = W(t_j, p_i) \times q_j = W(t_j, p_i) \times \frac{b_i}{W(p_i, t_j)}$$

Etape 6. Les autres poids des arcs restent inchangés puisque le franchissement lot concerne que les transitions ayant des places lots en entrée (transitions lots).

2.5.2 Passage d'un BDSPN à un RdP classique : cas général

Dans cette section nous étudions la possibilité de transformer un BDSPN en un RdP classique dans un cas général. Ceci va permettre, par la suite, de justifier une nouvelle fois la nécessité de l'introduction des BDSPNs. En effet, la procédure que nous développons pour la transformation est fondée à la base sur non seulement la structure du BDSPN mais également sur la nécessité d'exécuter celui-ci qui nous permettra de connaître complètement le comportement lot du système qu'il représente. Nous verrons que dans le cas où le BDSPN est transformable en un réseau de Petri classique, ce dernier dépend du μ -marquage initial du BDSPN. La structure du BDSPN ne permet pas de connaître toutes les caractéristiques et les composantes du RdP classique sensé reproduire la même dynamique que le BDSPN. Il faut en effet, à partir du μ -marquage initial du BDSPN,

- Connaître à l'avance tout ce que peut réaliser chaque transition lot comme franchissements dans le BDSPN. C'est-à-dire, connaître pour chaque transition lot, l'ensemble des transitions *q-indicées* générées lors de l'évolution du réseau. Cet ensemble est noté :

$$B(t_j) = \{t_{j[q]} \mid \exists \mu \in \mu_0^*, \mu[t_{j[q]} \rightarrow\} \quad (3.29)$$

- Connaître à l'avance, tout ce que peut recevoir chaque place lot comme jetons lots lors de l'évolution du BDSPN. Autrement dit, toutes les tailles qui caractérisent chaque place lot. Cet ensemble est noté :

$$B(p_i) = \{b \mid \exists \mu \in \mu_0^*, b \in \mu(p_i)\} \quad (3.30)$$

Connaissant donc, les deux ensembles $B(t_j)$ et $B(p_i)$ et contrairement à la procédure de transformation du cas particulier, le cas général nécessite de convertir chaque place p_i lot en un ensemble de places discrètes pour représenter l'ensemble des possibilités des tailles des jetons lots de chaque place lot dans le réseau classique à obtenir. De même, chaque transition lot doit être convertie en un ensemble de transitions discrètes pour représenter l'ensemble des transitions *q-indicées* que cette transition lot génère lors de l'évolution du BDSPN. En se basant sur le principe de la procédure du cas particulier, l'algorithme suivant donne la procédure de transformation dans le cas général.

Algorithme 3.3. Transformation d'un BDSPN à un RdP classique (cas général)

Etape 1. L'ensemble des places discrètes du BDSPN et leur marquage restent inchangés dans le RdP.

$$p_i \in P_d, \quad M_0(p_i) = \mu_0(p_i) \quad (3.31)$$

Etape 2. Chaque place lot p_i du $BDSPN$ est convertie en un ensemble de places discrètes M-marquées, noté $D(p_i)$, tel que :

$$D(p_i) = \{p_{i[b]} \mid b \in B(p_i)\} \text{ et } \forall p_{i[b]} \in D(p_i), M_0(p_{i[b]}) = \sum_{l \in \mu(p_i) \text{ et } l=b} l \quad (3.32)$$

Etape 3. Chaque transition lot t_j est convertie en un ensemble de transitions discrètes, noté $D(t_j)$, tel que :

$$D(t_j) = \{t_{j[q]} \mid t_{j[q]} \in B(t_j)\} \quad (3.33)$$

Les transitions discrètes restent inchangées.

Etape 4. Chaque place $p_{i[b]} \in D(p_i)$ est reliée à un ensemble de transitions de sortie $(p_{i[b]})^\bullet$ tel que :

$$\forall p_{i[b]} \in D(p_i), (p_{i[b]})^\bullet = \{t_{j[q]} \mid t_j \in p_i^\bullet \text{ et } q = b / W(p_i, t_j)\} \quad (3.34)$$

$$\forall p_{i[b]} \in D(p_i), \forall t_{j[q]} \in (p_{i[b]})^\bullet, W(p_{i[b]}, t_{j[q]}) = W(p_i, t_j) \times b \quad (3.35)$$

Etape 5. Chaque transition $t_{j[q]} \in D(t_j)$ est reliée à un ensemble de places de sortie $(t_{j[q]})^\bullet$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall t_{j[q]} \in D(t_j), (t_{j[q]})^\bullet = & \{p_{i[b]} \mid (p_{i[b]} \in D(p_i)), (p_i \in t_j^\bullet \cap P_d) \text{ et } (q = b / W(p_i, t_j))\} \\ & \cup \{p_i \mid p_i \in t_j^\bullet \cap P_d\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pour chaque $t_{j[q]}$, il s'agit de toutes des places discrètes de sortie de t_j et des places que génèrent les places lots de sortie de t_j . Le poids de chaque arc est donné par :

$$\forall t_{j[q]} \in D(t_j), \forall (p_i \vee p_{i[b]}) \in (t_{j[q]})^\bullet, W(t_{j[q]}, p_{i[b]}) = q \times W(t_j, p_i) \quad (3.37)$$

Etape 6. Chaque place $p_{i[b]} \in D(p_i)$ est reliée à un ensemble de transitions d'entrée ${}^\bullet(p_{i[b]})$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall p_{i[b]} \in D(p_i), {}^\bullet(p_{i[b]}) = & \{t_{j[q]} \mid t_j \in {}^\bullet p_i \text{ et } q = b / W(t_j, p_i)\} \\ & \cup \{t_j \in ({}^\bullet p_i \cap P_d)\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pour chaque $p_{i[b]}$, il s'agit de toutes les transitions discrètes d'entrée de t_j et des transitions que génèrent les transitions lots de sortie de t_j . Le poids de chaque arc est donné par :

$$\forall p_{i[b]} \in D(p_i), \forall (t_j \vee t_{j[q]}) \in \bullet(p_{i[b]}), W(t_{j[q]}, p_{i[b]}) = q \times W(t_j, p_i) \quad (3.39)$$

Etape 7. Chaque transition $t_{j[q]} \in D(t_j)$ est reliée à un ensemble de places d'entrée $\bullet(t_{j[q]})$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall t_{j[q]} \in D(t_j), \bullet(t_{j[q]}) = \{p_{i[b]} \mid (p_i \in \bullet t_j \cap P_d) \text{ et } (q = b / W(p_i, t_j))\} \\ \cup \{p_i \mid p_i \in \bullet t_j \cap P_d\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pour chaque $t_{j[q]}$, il s'agit de toutes des places discrètes d'entrée de t_j et des places que génèrent les places lots d'entrée de t_j . Le poids de chaque arc est donné par :

$$\forall t_{j[q]} \in D(t_j), \forall (p_i \vee p_{i[b]}) \in \bullet(t_{j[q]}), W(p_{i[b]}, t_{j[q]}) = q \times W(p_i, t_{j[q]}) \quad (3.41)$$

Etape 8. Les arcs et les poids des arcs reliant une place discrète à une transition discrète et vice versa restent inchangés.

2.5.3 Applications de la technique de transformation

Avant d'analyser la nécessité des BDSPNs, nous discutons au travers de quelques exemples l'application de cet algorithme.

Dans l'exemple de la figure 3.17, le RdP classique est obtenu en connaissant l'évolution du BDSPN notamment toutes les transitions q-indicées que génèrent chaque transition lot et tous les jetons lots que peut héberger chaque place lot. On observe que les graphes d'évolution correspondants aux deux réseaux montrent que le comportement dynamique des deux réseaux est identique. Le M-marquage de chaque place lot p_i est exprimé dans le graphe des marquages du réseau de Petri classique par le marquage des places $p_{i[b]}$ qui la représente après transformation.

La technique de transformation élaborée peut s'appliquer aux réseaux de Petri ayant des arcs inhibiteurs. Dans le cas où l'arc inhibiteur relie une transition lot à une place discrète, comme c'est le cas du réseau de la figure 3.18, cet arc inhibiteur doit se reproduire dans le réseau de Petri classique pour toutes les transitions q-indicées que génère la transition lot à l'origine. Précisément, la transition lot $t1$ génère lors de l'évolution du BDSPN trois transitions q-indicées. On voit apparaître, sur le réseau de Petri discret, trois arcs inhibiteurs reliant les transitions q-indicées avec la place discrète à l'origine $p2$. La raison de cette duplication des arcs inhibiteurs est simple. Franchir la transition $t1$ avec n'importe quel indice de franchissement nécessite la même condition relative à l'arc inhibiteur, $M(p2) < W_o(t1, p2)$, et on voit bien qu'elle est reproduite dans le réseau de Petri classique. Bien entendu, si l'arc inhibiteur est pondéré, il garde le même poids $W_o(t1, p2)$.

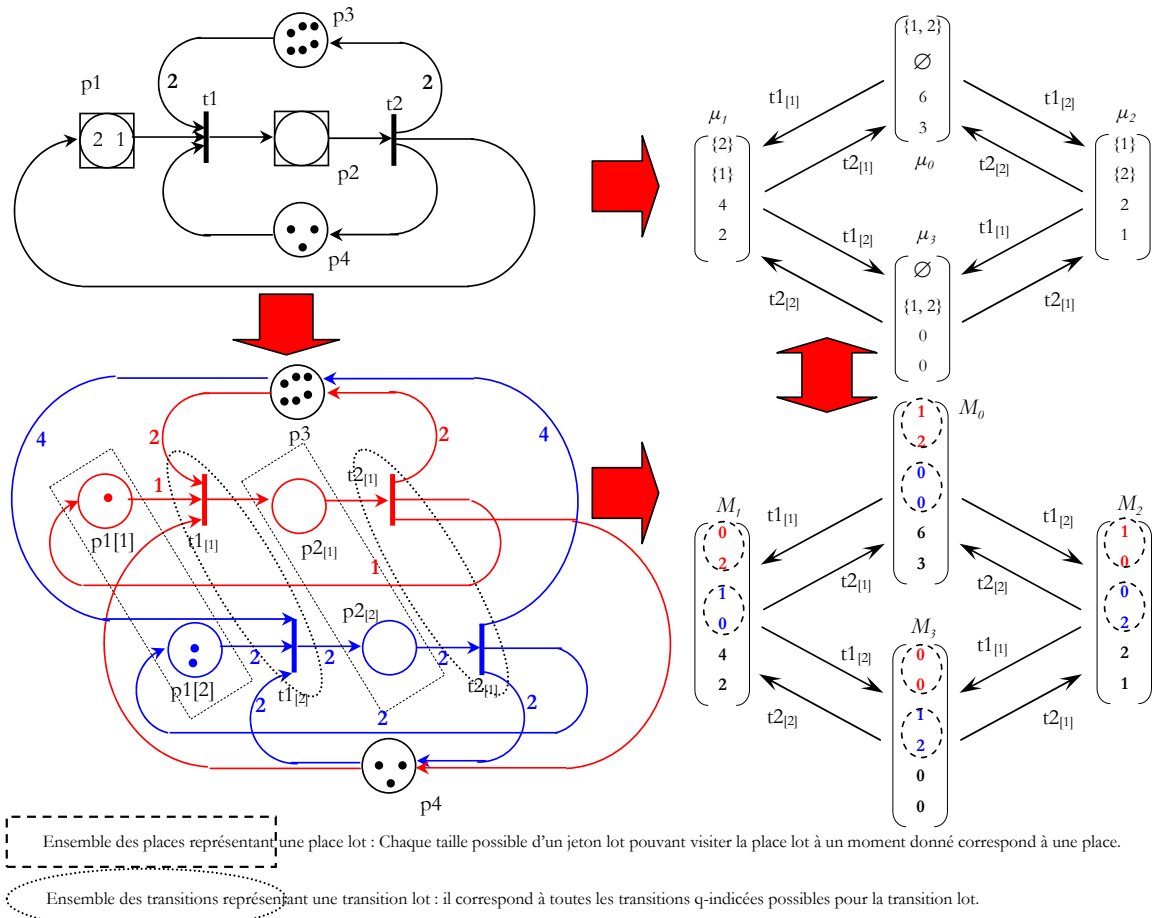


Figure 3.17. Technique de transformation généralisée

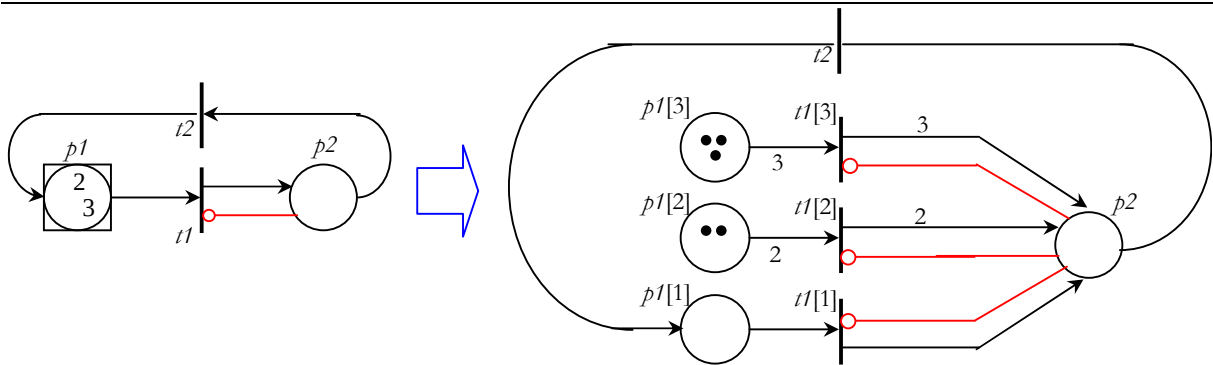


Figure 3.18. Exemple de transformation avec arcs inhibiteurs reliés aux places discrètes

Le deuxième cas se présente lorsque l'arc inhibiteur est relié à une place lot p_i . C'est le cas de l'exemple de la figure 3.19. Pour franchir la transition lot $t1$ avec un indice de franchissement lot q , il faut s'assurer que la somme totale des jetons lots disponibles dans la place lot $p2$ reliée à l'arc inhibiteur est inférieure au poids de l'arc inhibiteur. Contrairement au premier cas, la place lot $p2$ est transformée en un ensemble de places

discrètes $p2_{[b]} \in B(p2)$ dans le réseau de Petri classique. Pour garder la condition relative à l'arc inhibiteur dans ce dernier telle qu'elle est dans le BDSPN $p2_{[b]} \in B(p2)$, il faut donc s'arranger à capturer le marquage total de toutes les places discrètes générées tel que nous l'avons fait dans notre exemple à l'aide d'une place supplémentaire P_1 utilisé comme la référence pour le test des arcs inhibiteurs.

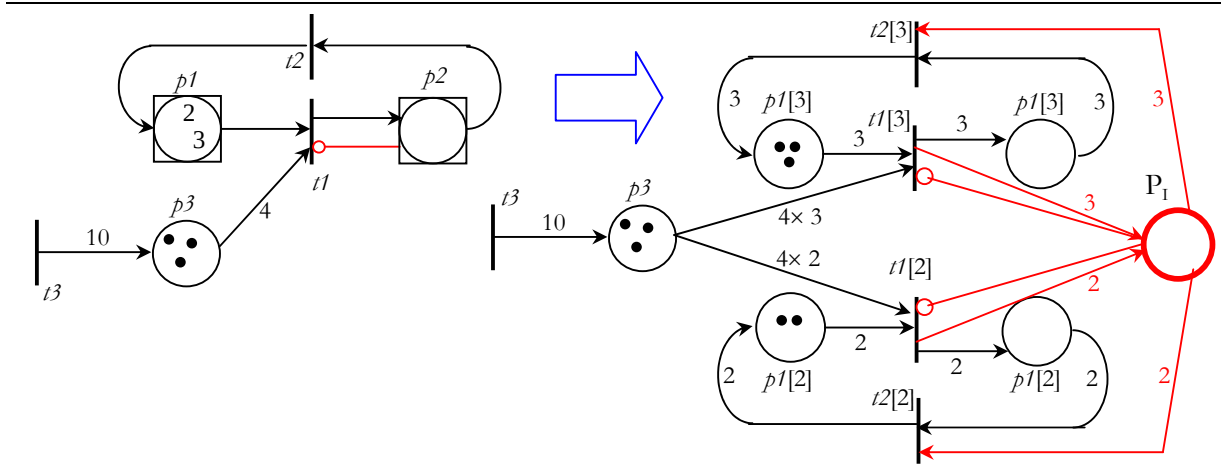


Figure 3.19. Exemple de transformation avec arcs inhibiteurs reliés aux places lots

La technique développée peut s'adapter lorsque le réseau considéré possède des transitions temporisées déterministes et/ou stochastiques. En effet, chaque transition discrète du BDSPN garde son type (immédiate, déterministe, stochastique) dans le réseau de Petri classique correspondant. Les transitions q-indices issues de chaque transition lot prennent également la même nature que la transition lot qui les génère. Du point de vue paramètres, les transitions discrètes gardent les mêmes paramètres et les mêmes politiques de service et d'exécution. Les transitions q-indices doivent être paramétrées en respectant si la temporisation de la transition lot à l'origine dépend ou pas des tailles des lots qu'elle traite. Un autre point à prendre en considération, c'est le cas où une politique de gestion des lots est associée à une place lot. Dans ce cas, cette politique sera exprimée dans les transitions de sorties de cette place lot dans le réseau classique correspondant. En clair, supposons que dans la place lot $p1$ du réseau de la figure 3.19 se fait aléatoirement avec une même probabilité pour tous les jetons lots pouvant valider en même temps la transition lot $t1$. Par conséquent, dans le réseau de Petri classique correspondant une même probabilité de franchissement est associée aux transitions q-indices $t1_{[q]}$.

2.5.4 Nécessité absolue des BDSPNs

Cette section porte sur l'analyse de la technique de transformation établie dans le but de montrer une nouvelle fois la nécessité de l'introduction des BDSPNs comme un nouveau modèle mieux adapté à décrire et à étudier efficacement les systèmes à

événements discrets comportant des phénomènes lots. L'analyse porte sur deux cas de configuration : le cas où un BDSPN peut être transformé en un réseau de Petri classique et le cas où la transformation n'est pas réalisable.

Cas 1. Le BDSPN est transformable

Dans ce cas de configuration, la nécessité des BDSPNs se justifie par les points suivants :

- Le réseau de Petri classique correspondant à un BDSPN dépend du μ -marquage initial du BDSPN. Pour un même système modélisé à la fois par les deux réseaux de Petri, le changement de l'état initial de ce système, conduit systématiquement à modifier toute la structure du réseau de Petri classique du point de vue du nombre de ses places, de ses transitions, du nombre et des poids des arcs associés, alors que le BDSPN reste le même. En effet, les places lots et les transitions lots ne génèrent pas systématiquement les mêmes ensembles $B(t_j)$, $B(p_i)$ lorsque le BDSPN évolue à partir d'un autre μ -marquage initial. Dans le BDSPN de la figure 3.17, il suffit, d'un jeton lot d'une taille différente supplémentaire dans l'une des places lots du réseau, pour que la structure du RdP classique correspondant soit totalement affectée.
- Représenter un BDSPN avec un μ -marquage initial μ_0 par un réseau de Petri classique conduit à un réseau de très grande taille. A titre indicatif, considérons un BDSPN composé de $|P_b|$ places lots, $|P_d|$ places discrètes, $|T_b|$ transitions lots et $|T_d|$ transitions discrètes et soit $|I(p_i)|$ le nombre d'arcs inhibiteurs reliée à une place p_i . On suppose que l'exécution du BDSPN, révèle que chaque transition lot $t_j \in T_b$ génère un ensemble de transitions q -indexées qu'on note $B(t_j) = \{t_{[q]} \mid \exists \mu \in \mu^*, q \text{ est réalisé}\}$ et que chaque place lot $p_i \in T_b$ peut être visitée par un ensemble de jetons lots de tailles différentes qu'on note $B(p_i) = \{b \mid \exists \mu \in \mu^*, b \in \mu(p_i)\}$. Le nombre de places $|P^*|$ et de transitions $|T^*|$ nécessaires pour le réseau de Petri classique pour qu'il puisse reproduire la même dynamique que le BDSPN est donnés par :

$$|P^*| = |P_d| + \sum_{i=1}^{|P_b|} |B(p_i)| + \sum_{i=1}^{|P_b|} |I(p_i)| \quad (3.42)$$

$$|T^*| = |T_d| + \sum_{j=1}^{|T_b|} |B(t_j)| \quad (3.43)$$

A titre d'exemple, pour un BDSPN composé de 10 places lots, 10 transitions lots, et que son évolution conduit à 10 différents tailles possibles pour chaque place lot, 10 indices de franchissements lots possibles pour chaque transition lot : il faut au moins **100** places et **100** transitions dans le réseau de Petri classique pour reproduire le même comportement que le BDSPN. Sans compter le nombre d'arcs qui se multiplient

considérablement et des places supplémentaires dû aux arcs inhibiteurs (figure 3.19), on voit sans doute la complexité considérable du réseau de Petri classique par rapport à un BDSPN. De plus, pour un changement du μ -marquage initial du BDSPN, il faut à nouveau un autre modèle classique.

Cas 2. Le BDSPN n'est pas transformable

La modélisation des systèmes auxquels on s'intéresse particulièrement, notamment les chaînes logistiques et les systèmes de stockage, nécessite l'utilisation des arcs à poids variables en fonction du M-marquage courant du réseau et éventuellement des paramètres de décision de ses systèmes. En effet, déclencher certaines opérations dans de tels systèmes dépend de leurs états courants. C'est le cas des systèmes de stockage par exemple, la quantité de produits qu'il faut commander pour approvisionner un stock dépend du niveau de stock actuel (inventaire), des commandes d'approvisionnement en cours et éventuellement des commandes des clients en cours. La modélisation d'un tel système se fait en utilisant des arcs à poids variables qui permettent d'inspecter l'état du système et de générer des lots de différentes tailles suivant chaque état.

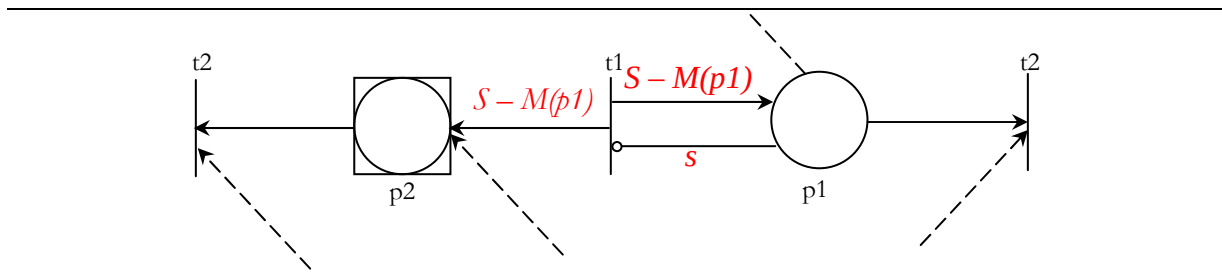


Figure 3.20. Cas où la transformation d'un BDSPN n'est pas réalisable

Supposons que la structure du BDSPN de la figure 3.20 est un sous réseau d'un système quelconque que nous souhaitons évaluer par rapport à ses paramètres de décisions S et s et que les jetons lots se trouvant dans la place lot $p2$, représentant par exemple des commandes lots, doivent être traités individuellement et suivant leur ordre d'arrivée. On observe le poids de l'arc entrant dans $p2$ est variable à la fois par le paramètre du système S et par le M-marquage du réseau. Dans de telles conditions, ce réseau n'est pas transformable avec la technique établie. De plus, faire varier un des paramètres de décision du système ou le μ -marquage initial du réseau conduit à un autre comportement lot en termes de quantités des lots (de produits, commandes d'approvisionnement...) qui circulent dans le système globale. Avec les réseaux de Petri classiques, un changement d'un paramètre ou bien de l'état initial du système nécessite une nouvelle modélisation alors qu'avec les BDSPNs, on ne se soucie pas des tailles que peut recevoir une place lot qui modélise par exemple la réception des demandes de clients, ou bien les commandes d'approvisionnement d'un stock ... La structure du

modèle est prête à conduire correctement l'évolution du flux lot quel que soit l'état initial ou bien les paramètres du système modélisé. Un réseau de Petri classique n'est pas adapté pour que ses transitions puissent être franchies avec des quantités lots de tailles variables, ou pour que ses places puissent distinguer entre les jetons et pouvoir réaliser des traitements lots et individualisés. C'est là l'intérêt des BDSPNs qui exploitent, le formalisme classique des réseaux de Petri intégré efficacement dans un nouveau formalisme développé spécialement pour la maîtrise des phénomènes lots.

3. Techniques d'évaluation de performances

Cette partie est dédiée aux techniques d'évaluation de performances des BDSPNs. L'évaluation de performances est basée sur l'évolution temporelle du processus des μ -marquages du modèle. A l'instar des réseaux de Petri stochastiques à sémantique discrète de fonctionnement comme les SPNs, les GSPNs et les DSPNs, deux grandes approches peuvent être envisageables pour le cas des BDSPNs :

- Une approche analytique basée sur le graphe des μ -marquages utilisé conjointement avec les processus stochastiques afin de pouvoir bénéficier des méthodes d'évaluation des processus stochastiques notamment les processus de Markov. Cette approche est particulièrement applicable dans le cas où le réseau engendre un nombre fini d'états (μ -marquages);
- Une approche basée sur la simulation à événements discrets [HAA 02]-[BAN 01] où ces derniers correspondent aux franchissements des transitions qui se produisent à des instants précis dans le temps et qui conduisent aux changements des états du réseau. Cette technique est particulièrement intéressante dans le cas où le système est trop complexe pour permettre une étude analytique ou lorsque le nombre d'états généré par le modèle est infini.

3.1. Approche analytique

Dans cette technique, on considère le cas des BDSPNs bornés qui génèrent un nombre d'états fini. Le graphe des μ -marquages d'un BDSPN, noté $G_{\mu A}(BDSPN, \mu_0)$, contient deux types d'états : des *états instables* dans lesquels au moins une transition immédiate est franchissable et des *états tangibles* dans lesquels seules des transitions temporisées déterministes ou stochastiques sont franchissables. Dans un état instable, les transitions immédiates sont franchies en un temps nul. En conséquence, ces états ne présentent pas d'intérêt pour l'étude du système. Ils peuvent donc être éliminés pour réduire le graphe des μ -marquages.

3.1.1 Procédure générale

Les technique d'analyse du processus des μ -marquages d'un BDSPN afin d'évaluer ses performances gardent le même esprit général que celles des réseaux de Petri stochastiques notamment les DSPNs, les GSPNs et les SPNs. En effet, la procédure générale est donnée par l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 3.4. *Procédure générale d'analyse pour l'évaluation de performances*

- Etape 1.** Construire le *graphe des μ -marquages*. L'ensemble des nœuds (états) du graphe est l'ensemble des μ -marquages accessibles du BDSPN. Chaque état est relié à ses états successeurs par des arcs orientés. Chaque arc est étiqueté par la transition franchie. Les transitions lots sont marquées par leurs indices de franchissement lots ($t_{|q|}$).
 - Etape 2.** Eliminer les états instables, les arcs et les transitions immédiates correspondants dans le graphe des μ -marquages obtenu. Cette étape génère le graphe des μ -marquages dit réduit.
 - Etape 3.** Le processus stochastique noté par $\{\mu(t), t \geq 0\}$ correspond au graphe des μ -marquages réduit. L'espace d'état $S = \{s_i\}$ du processus stochastique obtenu correspond à l'ensemble des μ -marquages accessibles du BDSPN ($\mu_i = s_i$). Les taux de transitions entre les états du processus stochastique correspondent à celui des transitions franchies.
 - Etape 4.** Caractérisation et étude du processus stochastique associé. Détermination de la distribution stationnaire des probabilités d'états du processus en utilisant les méthodes de résolution des processus stochastique selon sa nature.
 - Etape 5.** Connaissant la distribution stationnaire des probabilités des états du processus, il est possible d'évaluer des indices de performances quantitatives du BDSPN qui caractérisent le système modélisé.
-

Comme nous l'avons étudié dans [CHE 05], la caractérisation du processus stochastique correspondant au graphe des μ -marquages accessibles d'un BDSPN se fait de la même manière que les RdPs stochastiques classiques (DSPNs [LIN 98], GSPNs [AJM 95], SPNs [HAA 02]). Le processus stochastique [CIA 94] est lié aux : (i) lois de distributions associées aux transitions et (ii) aux politiques d'exécution des délais de franchissements [AJM 89]. Une méthode permettant l'obtention du processus stochastique d'un réseau pouvant contenir des transitions exponentielles, générales, déterministes et immédiates est donnée dans Choi [CHO 93b] (voir annexe A). Différentes techniques d'analyse, pouvant être exploitées dans le cas des BDSPNs, sont

développées par de nombreux auteurs [LIN 93], [LIN 96], [AJM 86], [CHO 93b]...

Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, la principale différence réside dans l'expressivité d'un BDSPN à capturer des mesures de performances concernant le comportement lot du système qu'il représente. Contrairement aux autres classes de réseaux de Petri stochastiques, les états et les transitions du processus des μ -marquages préservent toute l'information concernant la dynamique de deux types de flux que représentent les jetons lots et les jetons discrets.

3.1.2 Indicateurs de performances d'un BDSPN

Pour calculer les indices de performances d'un BDSPN, il faut nécessairement calculer les probabilités d'état en régime permanent, c'est-à-dire les probabilités de se situer dans un μ -marquage bien précis. Pour effectuer ce calcul, le BDSPN doit être borné, ainsi son graphe des μ -marquages possède un espace d'état fini. Le type du processus stochastique résultant doit être identifié pour être résolu suivant une méthode appropriée à la nature de ce processus. Ainsi, la résolution de ce dernier détermine la distribution stationnaire des probabilités π_i des états s_i qui permet d'évaluer des indices de performance du système modélisé.

D'une façon générale, si $r(\mu)$ représente une fonction « indice » alors l'« indice » moyen est :

$$P_{Moy} = \sum_{i \mid \mu_i \in G\mu A(BDSPN, \mu 0)} r(\mu_i) \times \pi_i \quad (3.44)$$

A la différence des autres classes de réseaux de Petri stochastiques, les BDSPNs permettent de capturer des mesures de performances qui caractérisent ses deux types de composants : composants lots et composants discrets.

3.1.2.1 Indices relatifs aux composants lots

- Le nombre moyen $NL(p)$ de jetons lots dans une place lot $p \in P_b$ est donné par :

$$NL(p)_{Moy} = \sum_{i \mid \mu_i \in G\mu A(BDSPN, \mu 0)} \text{Card}(\mu_i(p)) \times \pi_i \quad (3.45)$$

Avec $\text{Card}(\mu_i(p))$ est le nombre de jetons lots disponibles dans p à l'état μ_i .

- Le nombre moyen $NL(b, p)$ de jetons lots de taille égale à b dans une place lot $p \in P_b$ est donné par :

$$NL(b, p)_{Moy} = \sum_{i \mid \mu_i \in G\mu A(BDSPN, \mu_0) \wedge \mu_i(p) = b} \text{Card}_b(\mu_i(p)) \times \pi_i \quad (3.46)$$

Avec $\text{Card}_b(\mu_i(p))$ est le nombre de jetons lots de taille égale à b disponibles dans p à l'état μ_i .

- La somme moyenne des tailles des jetons lots d'une place lot $p \in P_b$ correspondant au M-marquage moyen $M(p)_{moy}$ de cette place est donné par :

$$M(p)_{moy} = \sum_{i \mid \mu_i \in G\mu A(BDSPN, \mu_0)} \left(\sum_{b \in \mu_i(p)} b \right) \times \pi_i \quad (3.47)$$

- Soit $S(t_{j[q]})$ l'ensemble des μ -marquages dans le graphe $G\mu A(BDSPN, \mu_0)$ où la transition lot t_j est franchie par un indice de franchissement lot q . La fréquence moyenne de franchissement de $t_{j[q]}$ est donnée par :

$$F(t_{j[q]})_{Moy} = \sum_{\mu_i \in S(t_{j[q]})} \lambda_{j[q]} \times \pi_i \quad (3.48)$$

- Soit $B(t_j)$ l'ensemble de transitions q -indicées que génère la transition lot dans le graphe $G\mu A(BDSPN, \mu_0)$ lors de l'évolution du réseau. La fréquence moyenne de franchissement de la transition lot t_j est donnée par :

$$F(t_j)_{Moy} = \sum_{t_{j[q]} \in B(t_j)} F(t_{j[q]})_{Moy} = \sum_{t_{j[q]} \in B(t_j)} \left(\sum_{\mu_i \in S(t_{j[q]})} \lambda_{j[q]} \times \pi_i \right) \quad (3.49)$$

- Le temps de séjour moyen des jetons lots de taille égale à b dans une place lot $p_i \in P_b$ noté par $TS(b, p_i)$ est donné ci-dessous (formule de Little [LIT 61]).

$$TS(b, p_i)_{Moy} = \frac{NL(b, p_i)}{W^+_{[w(p_i, t_j)]} \cdot F_{[F(t_{j[q]})]}} \quad (3.50)$$

Avec $W^+_{[w(p_i, t_j)]}$ est la i -ième ligne de la matrice d'incidence arrière W^+ et $F_{[F(t_{j[q]})]}$ est le vecteur des fréquences moyennes des transitions franchises avec un indice de franchissement lot égal à q correspondant au jeton lot b .

- Le temps de séjour moyen des jetons lots (toutes tailles confondues) dans une place lot $p_i \in P_b$ noté par $TS(p_i)$ est donné ci-dessous.

$$TS(p_i)_{Moy} = \frac{NL(p_i)}{W^+_{[w(p_i, t_j)]} \cdot F_{[F(t_j)]}} \quad (3.51)$$

Avec $W^+_{[w(p_i, t_j)]}$ est la i -ième ligne de la matrice d'incidence arrière W^+ et $F_{[F(t_j)]}$ est le vecteur des fréquences moyennes des transitions.

3.1.2.2 Indices relatifs aux composants discrets

D'autres indices de performances relatifs aux éléments discrets du BDSPN, peuvent être définis de façon identique aux cas des réseaux de Petri stochastiques classiques [DAV 92].

- Le M-marquage moyen $M(p)_{\text{moy}}$ d'une place discrète $p \in P_d$ correspondant au nombre de jetons discrets dans cette place est donné par :

$$M(p)_{\text{moy}} = \sum_{i | \mu_i \in G\mu A(BDSPN, \mu_0)} \mu(p) \times \pi_i \quad (3.52)$$

- Soit $S(t_j)$ l'ensemble des μ -marquages dans le graphe $G\mu A(BDSPN, \mu_0)$ où la transition discrète t_j est franchie. La fréquence moyenne de franchissement de t_j est donnée par :

$$F(t_j)_{\text{Moy}} = \sum_{\mu_i \in S(t_j)} \lambda_j \times \pi_i \quad (3.53)$$

- Le temps de séjour moyen des jetons discrets dans une place discrète $p_i \in P_d$, noté par $TS(p_i)$ est donné ci-dessous.

$$TS(p_i)_{\text{Moy}} = \frac{M(p_i)}{W^+_{[w(p_i, t_j)]} \cdot F_{[F(t_j)]}} \quad (3.54)$$

Avec $W^+_{[w(p_i, t_j)]}$ est la i -ième ligne de la matrice d'incidence arrière W^+ et $F_{[F(t_j)]}$ est le vecteur des fréquences moyennes des transitions franchises avec un indice de franchissement lot égal à q correspondant au jeton lot b .

3.1.3 Exemple d'application

A titre illustratif, nous présentons dans cette section une application pour évaluer analytiquement les performances d'un BDSPN. Il s'agit d'un cas où le processus stochastique associé est Markovien. Nous considérons le réseau de la figure 3.21 représentant un exemple d'un système de production sur commandes kanban et lots.

Les jetons lots que peut contenir la place lot $p1$ représente des kanbans libres du système de production. Ils permettent de déclencher des commandes de production de lots de produits de différentes tailles, notées b_i . Le franchissement de la transition lot $t1$ représente une commande de production d'un lot de produits de taille b_i . Ainsi, la taille du lot commandé est fixé par le Kanban qui accompagne cette commande. La place lot $p2$ représente l'attente des commandes avant leur traitement. Le poste de travail traitant les commandes lots est modélisé par le bloc $t2$ $p3$ $t3$. Une fois qu'une commande de production est traitée, elle est livrée par le franchissement de la transition lot $t3$. Au même

instant, le kanban associé à cette commande est libéré et retourne dans la place lot $p1$ et ainsi de suite. L'arc inhibiteur reliant $t2$ à $p4$ assure que le poste de production ne traite qu'une seule commande à la fois. Les transitions $t1$ et $t3$ sont distribuées exponentielles dont les paramètres sont respectivement $\lambda1$ et $\#\lambda2$. Le symbole $\#$ indique que le paramètre $\lambda2$ de la transition $t3$ dépend de la taille du lot qui franchit cette transition.

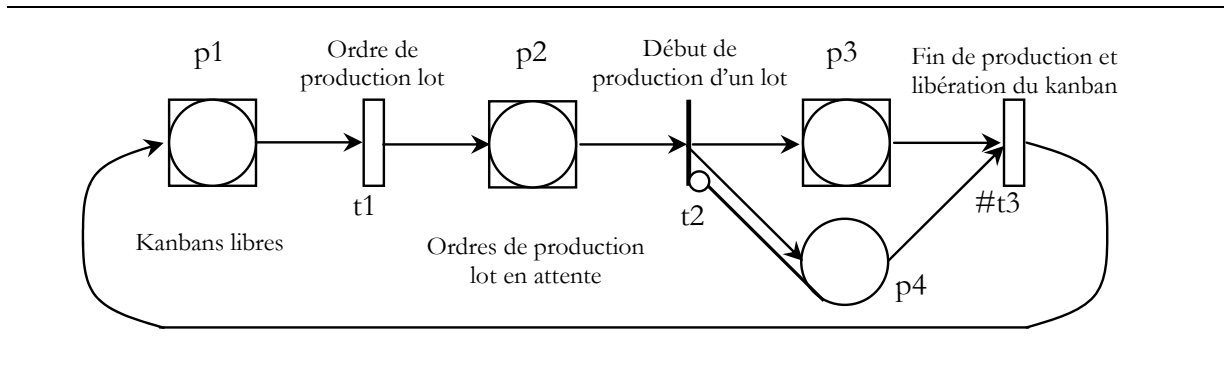


Figure 3.21. Modèle d'un système de production sur commandes kanban et lots

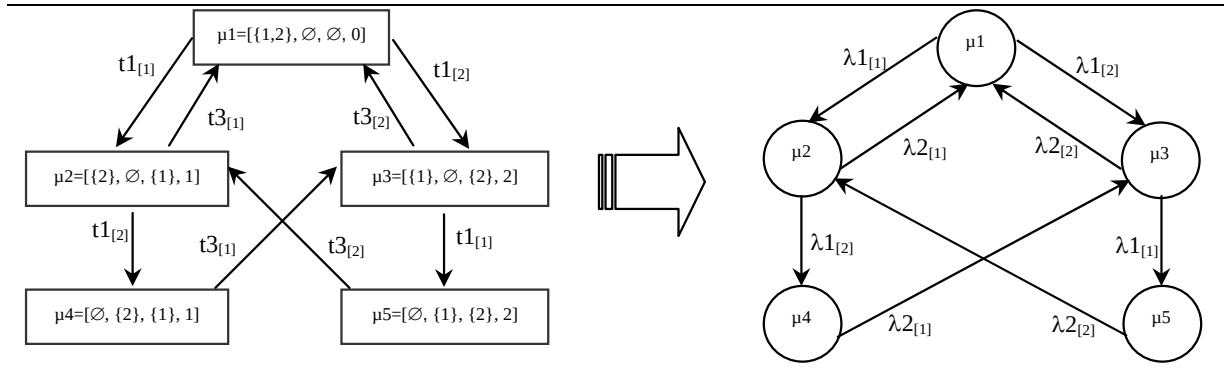


Figure 3.22. Graphe des μ -marquages accessible et sa chaîne de Markov associée

Nous considérons dans l'étude du système que le μ -marquage initial du réseau est $\mu_0 = (\{1, 2\}, \emptyset, \emptyset, 0)^T$. Le μ -marquage initial de $p1$ indique que le système présente que deux types de kanban $b_i = 1$ ou 2 . Ainsi, le graphe des μ -marquages du BDSPN (après suppression de ses états instables) et son processus de Markov associé sont représentés dans la figure 3.22.

Le générateur du processus Markovien est donné par :

$$A = \begin{bmatrix} -(\lambda 1_{(1)} + \lambda 1_{(2)}) & \lambda 1_{(1)} & \lambda 1_{(2)} & 0 & 0 \\ \lambda 2_{(1)} & -(\lambda 1_{(2)} + \lambda 2_{(1)}) & 0 & \lambda 1_{(2)} & 0 \\ \lambda 2_{(2)} & 0 & -(\lambda 1_{(1)} + \lambda 2_{(2)}) & 0 & \lambda 1_{(1)} \\ 0 & 0 & \lambda 2_{(1)} & -\lambda 2_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda 2_{(2)} & 0 & 0 & -\lambda 2_{(2)} \end{bmatrix}$$

La distribution de probabilité des états en régime permanent est déterminée par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \left[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4 \quad \pi_5 \right] \times A = 0 \\ \sum_{i=1}^5 \pi_i = 1 \end{cases}$$

Supposons que le paramètre de la transition $t1$ est $\lambda 1_{[1]} = \lambda 1_{[2]} = \lambda 1 = 0.5$. Le paramètre de la transition dépend de la taille du lot du franchissement. Soit : $\lambda 2_{[1]} = 1.0$, $\lambda 2_{[2]} = 0.5$. La distribution de probabilité des états $(\mu 1, \mu 2, \mu 3, \mu 4, \mu 5)$ est le vecteur :

$$\left[\pi 1 \quad \pi 2 \quad \pi 3 \quad \pi 4 \quad \pi 5 \right] = \left[0.28571 \quad 0.17143 \quad 0.22857 \quad 0.08571 \quad 0.22857 \right]$$

Connaissant la distribution des probabilités des états (μ -marquages), il est possible d'évaluer plusieurs performances du système modélisé en utilisant les indices formalisés dans la section précédente tels que :

- Le tableau 3.1 donne le nombre moyen de jetons lots de tailles b_i , noté $NL(b_i, p)$, de chaque place lot p du BDSPN.
- Le tableau 3.2 donne la fréquence moyenne de franchissement de chaque transition par un jeton lot de taille b_i , notée par $F(t1_{bi})$.

$NL(1, p2) =$	$NL(2, p2) =$	$NL(1, p3) =$	$NL(2, p3) =$
$1 \times \pi_5 =$	$1 \times \pi_4 =$	$1 \times \pi_2 + 1 \times \pi_4 =$	$1 \times \pi_3 + 1 \times \pi_5 =$
0.22857	0.08571	0.25714	0.45714

Tableau 3.1. Nombre moyen de jetons lots

$F(t1_{[1]}) =$	$F(t1_{[2]}) =$	$F(t3_{[1]}) =$	$F(t3_{[2]}) =$
$\lambda_{1(1)} (\pi_1 + \pi_3) =$	$\lambda_{1(2)} (\pi_1 + \pi_2) =$	$\lambda_{2(1)} (\pi_2 + \pi_4) =$	$\lambda_{2(2)} (\pi_3 + \pi_5) =$
0.25714	0.22857	0.25714	0.22857

Tableau 3.2. Fréquences moyennes de franchissements lots

Lot de taille	$F(b_i)$	$NL(b_i)$	$TA(b_i)$	$TP(b_i)$
$b_1 = 1$	0.25714	0.22857	0.8889	1.8889
$b_2 = 2$	0.22857	0.08571	0.3750	2.3750

Tableau 3.3. Indices de performances du système

- La fréquence moyenne de la passation des ordres de production d'un lot de produits de taille b_i , notée par $F(b_i)$ dans le tableau 3.3. Elle correspond à la fréquence moyenne de franchissement de la transition $t1$ avec le lot de taille b_i .
- Le nombre moyen de commandes de production d'un lot de taille b_i , noté par $NL(b_i)$ dans le tableau 3.3. Il correspond au nombre moyen de jetons lot de taille b_i contenus dans la place lot $p2$.
- Le temps moyen d'attente des commandes lots de taille b_i , noté par $TA(b_i)$ dans le tableau 3.3. Il correspond au temps de séjour moyen des jetons lots de taille b_i dans la place lot $p2$.
- Le temps moyen réel (avec attentes) de production d'un lot de taille b_i , noté par $TP(b_i)$ dans le tableau 3.3. Il correspond au temps de séjour moyen des jetons lots de taille b_i dans la place lot $p3$ et dans la place lot $p2$ (temps d'attente moyenne).

Nous distinguons dans le BDSPN deux types de lots : lots de taille 1 et lots de taille 2 constituant deux flux également distinguables. Les flux des lots de produits ont un même circuit fermé dont l'entrée est représentée par $t1$ et la sortie est représentée par $t3$. Le flux fermé, justifie les résultats que nous obtenons dans le calcul des fréquences moyennes des transitions lots (tableau 3.2) où nous avons la fréquence moyenne de franchissement de $t1$ par des lots de taille b_i est égale à la fréquence moyenne de franchissement de $t3$ par des lots de taille b_i (i.e., $F(t1_{[1]}) = F(t3_{[1]})$ et $F(t1_{[2]}) = F(t3_{[2]})$).

Le temps d'attente moyen des lots de taille 1 est plus grand que le temps d'attente moyen des lots de taille 2 dans la place lot $p2$. Ceci s'interprète, dans le cas du système considéré, par le fait que le temps de la production d'un lot de taille 2 (resp. 1) provoquant l'attente d'un lot de taille 1 (resp. 2) est supérieur (resp. inférieur) au temps de la production d'un lot de taille 1 (resp. 2) provoquant l'attente d'un lot de taille 2 (resp. 1).

3.2. Approche basée sur la simulation

Lorsque le système à étudier est complexe (grande taille, nombre d'états infini, processus stochastique complexe à résoudre, ...) pour permettre une étude analytique, les BDSPNs se prêtent à la simulation [BAN 01]-[HAA 02]. La sémantique mathématique du modèle (règles de validation et de franchissement, équation d'état, politiques de gestion des délais de franchissements, ...) a permis de développer un outil de simulation à événements discrets. Ces derniers représentent les événements de franchissements qui se

produisent à des moments bien précis dans le temps et qui conduisent aux changements des états (μ -marquages) du réseau. Ainsi, l'étude du modèle, repose sur l'ensemble de ces événements et des états résultants qui constitue la trace de la trajectoire du comportement du système.

L'outil de simulation est réalisé à base de Delphi. Nous l'avons déjà utilisé pour l'étude des chaînes logistiques [CHE 05]-[LAB 05a] et des systèmes de gestion de stocks [LAB 05c]. Le modèle de simulation bénéficie (i) de la richesse du modèle BDSPN et de tous les avantages qu'il apporte pour une modélisation fine et correcte du système et (ii) de la sémantique mathématique du modèle qui a permis de développer une approche numérique pour l'évaluation de performances d'un système.

Algorithme 3.5. *Algorithme général d'exécution d'un BDSPN par simulation*

Pas 1. Saisir le BDSPN (matrices d'incidences, matrice des arcs inhibiteurs, μ -marquage initial μ_0 , politiques d'exécution des transitions, paramètres des transitions, politiques associées aux places lots, ...)
Initialement, le compteur de l'échéancier est à zéro ($TF = 0$).

Pas 2. Pour un μ -marquage μ_k déterminer l'ensemble des transitions validées qu'on note : $TV = \{t_j \mid t_j \in TD \cap TB\}$.

✓ Pour chaque transition lot $t_j \in TB$

Faire

Si

$$\forall p \in \bullet t \cap P_b, \quad \exists b \in \mu_k(p) : q_j^k = b/W(p, t)$$

$$\forall p \in \bullet t \cap P_d, \quad M(p) \geq q_j^k \times W(p, t) \text{ et } \forall p \in {}^\circ t, M(p) < W(p, t)$$

Alors mettre t_j dans l'ensemble TV

✓ Si t_j est validée par plusieurs indices de franchissements, choisir aléatoirement ou d'une manière déterministe (suivant la politique associée) un seul indice de franchissement, noté q_j^k .

✓ Pour chaque transition discrète $t_j \in TD$

Faire

Si

$$\forall p \in \bullet t_j, \quad M(p) \geq W(p, t_j) \text{ et } \forall p \in {}^\circ t_j, \quad M(p) < W(p, t_j)$$

Alors mettre t_j dans l'ensemble TV

Si $TV \neq \emptyset$, Aller au Pas 3 sinon Aller à FIN

Pas 3.

Si $TV \cap T_i \neq \emptyset$ Alors

Faire

- ✓ Eliminer toutes les transitions temporisées (déterministes et stochastiques) dans l'ensemble TV . On garde que les transitions immédiates (Priorité aux transitions immédiates)
- ✓ Faire une analyse de conflits entre les transitions de l'ensemble TV et calculer les probabilités de franchissement - si nécessaire - pour chaque transition.
- ✓ Sélectionner, suivant les priorités associées ou aléatoirement en utilisant les probabilités de franchissement déterminées, une transition immédiate, notée $TF \in TV$, à franchir.
- ✓ $DF(TF) = 0$, (délai de franchissement d'une transition immédiate est nulle)
- ✓ Aller au Pas 5.

Pas 3.

Si $TV \cap T_i = \emptyset$ Alors

Faire

Pour chaque transition $t_j \in TV$ faire :

- ✓ Suivant la politique d'exécution associée à cette transition déterminer son délai de franchissement $DF(t_j)$ ou
- ✓ Générer un nouveau délai de franchissement $DF(t_j)$ (aléatoire ou déterministe) si nécessaire. (Respecter, dans le cas d'une transition lot, si le délai de franchissement dépend ou pas de la taille du lot).

Pas 4.

Soit $DF_{min} = \text{Min} \{DF(t1), DF(t2), \dots, DF(t_j)\}, t_j \in TV$.

- ✓ Déterminer la transition TF à franchir, ayant un délais de franchissement le plus petit : $DF(TF) = DF_{min}$

Pas 5.

A l'instant $TF = TF + DF(TF)$;

- ✓ Franchir la transition TF et déterminer le nouveau μ -marquage μ_{k+1} en utilisant l'équation d'état :

$$\mu_{k+1} = \mu_k + W \times F \text{ tel que : } F[i]_{i=1 \text{ à } m} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ q_f^k & \text{si } i = j \end{cases}$$

Avec

q_f^k indice de franchissement lot si TF est lot, $q_f^k = 1$ si TF est discrète.

✓ Aller au pas 2, avec le nouveau μ -marquage μ_{k+1}

Fin

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les techniques d'analyse et d'évaluation de performances des BDSPNs. Malgré leurs différences, ces techniques gardent le même esprit général que celles des réseaux de Petri classiques. La théorie des graphes, l'algèbre linéaire et la théorie des processus stochastiques sont les principales théories qui interviennent dans ces techniques. La différence réside particulièrement dans l'expressivité des BDSPNs à pouvoir capturer graphiquement et décrire formellement la dynamique qu'impose la présence des comportements lots dans le système à étudier. Ainsi, la prise en compte explicite de l'aspect lot dans le modèle permet d'analyser et d'évaluer correctement le comportement dynamique imposé par cet aspect.

Dans la première partie, différentes techniques qui permettent l'analyse et la recherche des propriétés d'un BDSPN sont étudiées. Dans un premier temps, nous avons examiné l'application des trois types de techniques standard qu'on connaît dans la théorie des RdPs classiques (graphes des marquages, invariants de marquages et de franchissements, techniques de réduction). À l'aide de deux autres techniques basées sur des transformations spécifiques des BDSPNs, nous avons étudié formellement le comportement de ces derniers par rapport aux RdPs classiques. En particulier, nous avons pu voir d'une manière plus formelle la nécessité de l'introduction des BDSPNs.

La deuxième partie du chapitre a porté sur les techniques d'évaluation de performances. Dans ce cadre, deux approches s'offrent pour l'étude d'un BDSPN. Une approche analytique basée sur le graphe des μ -marquages utilisé conjointement avec le processus stochastique associé au modèle. Le principe général de la technique reste semblable aux cas des DSPNs, GSPNs et SPNs suivant le type des transitions que comporte le BDSPN. Contrairement aux autres classes de réseaux de Petri stochastiques,

les BDSPNs disposent d'un ensemble d'indicateurs de performances pouvant capturer à la fois des mesures sur les composants discrets et lots du modèle. Enfin, une deuxième approche basée sur la simulation est discutée. Elle est particulièrement utilisée dans le cas où le système est trop complexe pour permettre une étude analytique. A cet effet, nous avons réalisé un outil de simulation à base de Delphi, déjà utilisé pour l'étude des chaînes logistiques [LAB 05a]- [CHE 05] et des systèmes de gestion de stocks [LAB 05c].

A ce stade de notre travail, nous disposons d'un nouvel outil de modélisation, d'analyse et d'évaluation de performances particulièrement dédiés aux systèmes à événements discrets avec comportements lots. Le chapitre qui suit porte sur l'application de notre méthodologie sur deux grandes classes de systèmes à événements discrets. Il s'agit des systèmes de gestion de stocks et des chaînes logistiques dont les problématiques sont au cœur des préoccupations actuelles des entreprises.

Chapitre 4

Modélisation et Analyse de Performances des Systèmes Logistiques par les BDSPNs

1. Introduction

Les industriels peuvent travailler sur l'amélioration de leur chaîne logistique dans deux cas : soit ils cherchent à améliorer les performances de leur système actuel (amélioration des politiques de gestion des stocks et de production ...), soit ils veulent développer une nouvelle configuration de leur chaîne logistique (restructuration, élargissement ...). Dans les deux cas, des études préliminaires et des analyses de paramètres doivent être effectuées pour évaluer et analyser les performances du système actuel ou de celui en projet. Pour cela, les BDSPNs se proposent comme un outil de modélisation et d'analyse pour jouer ce rôle efficacement et simplement.

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment les BDSPNs peuvent aider à modéliser et analyser les performances des systèmes logistiques et à apporter des informations sur leur comportement et les effets de leurs paramètres. Les études présentées dans ce chapitre ont déjà fait l'objet de quelques publications notamment [LAB 05a], [LAB 05b] et [LAB 05c]. A noter également qu'une étude à caractère industriel portant sur l'optimisation des performances d'une chaîne logistique est également présentée dans [CHE 05].

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux systèmes de gestion de stocks. A l'aide des BDSPNs, nous proposons une méthodologie de modélisation et d'analyse de cette classe de systèmes. Des modèles BDSPNs de plusieurs politiques de gestion de stocks les plus utilisées dans les entreprises industrielles sont développés et analysés. Les modèles développés représentent des composants logistiques pouvant servir comme des modules pour construire des modèles représentant des systèmes multi échelons ou des chaînes logistiques. Après la technique de modélisation de ces systèmes, deux approches pour l'analyse de performances, à savoir une approche analytique et une approche par simulation, sont proposées et illustrées au travers de deux applications distinctes. Il s'agit de l'étude de deux systèmes de stockage gérés par le politique dite (s, S) avec révision continue, les demandes des clients sont stochastiques et lots [LAB 05a]-[LAB 05b]-[LAB 05c]. Dans la dernière partie de ce chapitre nous montrons l'intérêt des BDSPNs pour la modélisation et l'étude des chaînes logistiques. Nous étudions un modèle typique d'un système qui assemble les caractéristiques essentielles d'une chaîne logistique [LAB 05a].

2. Modélisation des systèmes de gestion de stock

Cette section est dédiée à la modélisation des systèmes de gestion de stocks par les BDSPNs. Dans un premier temps, une modélisation simple d'un stock à base des réseaux de Petri classiques est présentée. Ensuite, des modèles BDSPNs de différentes politiques de gestion de stocks sont développés et analysés.

2.1. Modélisation par un RdP classique

Traditionnellement, dans la littérature des réseaux de Petri, un stock est généralement considéré comme un simple emplacement de produits et il est modélisé d'une manière très simple. La représentation classique d'un stock dans un système de production modélisé par un RdP classique se fait par un des modèles représentés dans la figure 4.1. Le RdP (a) modélise un stock à capacité illimitée. Les modèles (b) et (c) représentent un stock à capacité limitée.

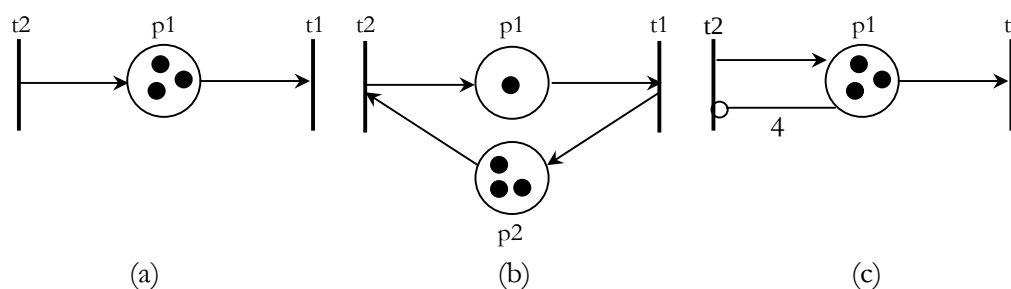


Figure 4.1. Représentation traditionnelle d'un stock par les réseaux de Petri classiques

Le stock est modélisé dans les trois représentations par la place $p1$. L'entrée et la sortie du stock sont modélisées respectivement par la transition $t2$ et la transition $t1$. Dans le modèle (b), le contrôle de la capacité du stock est faite à l'aide de la place $p2$ et de ses arcs associés. Le marquage de la place $p2$ indique à l'entrée du stock le nombre d'emplacements disponibles dans le stock $p1$ pour pouvoir accueillir d'autres produits. La transition $t2$ ne peut pas être franchie si aucun jeton n'est disponible dans la place $p2$. Dans le modèle (c), le contrôle du niveau du stock se fait à l'aide de l'arc inhibiteur reliant $p1$ à $t2$. La transition $t2$, ne peut pas être franchie si dans le stock, il y a un nombre de jetons supérieur ou égal au poids de l'arc inhibiteur.

Ces trois représentations peuvent être utiles malgré leur simplicité. Elles peuvent servir à modéliser de simples stocks utilisés, par exemple, entre deux machines dans un système de production qui ne nécessitent aucune gestion complexe hormis le contrôle de la capacité. Ils sont dits « stocks d'en-cours » servant à créer un découplage des divers stades de la production qui peut faciliter le transfert de main - d'oeuvres d'un stade à un autre, ou pour se protéger des arrêts de production et les défaillances. En revanche, dans le contexte de la chaîne logistique, les stocks ne sont pas de simples emplacements ou de simples réserves de produits mais ils sont des systèmes de gestion basés sur des politiques adéquates qui contrôlent leur approvisionnement comme nous l'avons discuté dans le premier chapitre.

2.2. Modélisation par les BDSPNs

Dans cette section, nous modélisons et nous analysons les différentes politiques de gestion de stocks les plus utilisés en pratique. Elles sont décrites dans le tableau ci-dessous.

<i>Politique</i>	<i>Description</i>
(s, S)	Dans cette politique, dès que le niveau du stock descend en dessous d'un seuil fixé s , une commande d'approvisionnement du stock est passée immédiatement pour tenter de ramener le niveau du stock à son niveau initial S .
(R, S)	Dans cette politique, à chaque R unités de temps, une commande d'approvisionnement du stock est passée pour tenter de ramener le niveau du stock à son niveau initial S .
(R, s, S)	Dans cette politique, à chaque R unités de temps, le niveau du stock est contrôlé et si il est en dessous d'un seuil fixé s , une commande d'approvisionnement du stock est passée pour tenter de ramener le niveau du stock à son niveau initial S .
(s, Q)	Dans cette politique, dès que le niveau du stock est en dessous d'un seuil fixé s , une commande d'approvisionnement d'une quantité fixe Q est passée.
(R, s, Q)	Dans cette politique, à chaque R unités de temps, le niveau du stock est contrôlé et si il est en dessous d'un seuil fixé s , une commande d'approvisionnement d'une quantité fixe Q est passée.
$(S-1, S)$	C'est un cas particulier de la politique (s, S) avec $s = S-1$ et un contrôle continu du niveau du stock.

Pour des raisons de clarté dans la description des modèles BDSPNs à développer, nous adoptons la classification suivante :

- *Politiques avec révision continue* : il s'agit des politiques (s, S) , (s, Q) et $(S-1, S)$ où l'état du stock est inspecté continuellement.
- *Politiques avec révision périodique* : il s'agit des politiques (R, s, S) , (R, S) et (R, Q) où l'état du stock est inspecté continuellement.

2.2.1 Modèles des politiques avec révision continue

Les modèles (a), (b) et (c) de la figure 4.2 modélisent un stock géré respectivement par : la politique (s, S) , la politique (s, Q) et la politique $(S-1, S)$ avec révision continue.

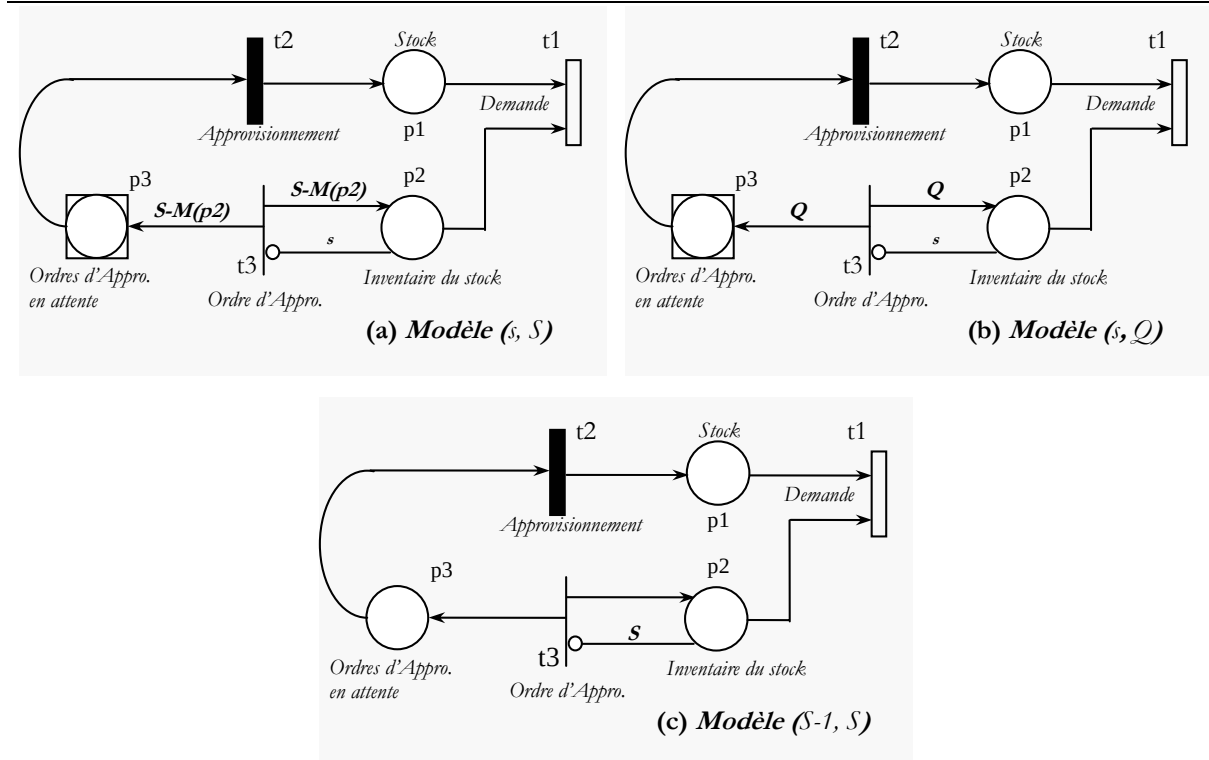


Figure 4.2. Modèles BDSPNs des politiques de gestion (s, S) ; (s, Q) et $(S-1, S)$ avec révision continue

2.3.1.1. Description des modèles

Dans les trois modèles, le stock est modélisé par la place $p1$ et son niveau du stock $p1, M(p1)$, plus les commandes d'approvisionnement en cours, $M(p3)$, est modélisé par la place $p2$. La sortie du stock est modélisée par la transition $t1$ que nous avons considérée exponentielle dans ces représentations. Elle décrit la demande des clients qui suit un processus de Poisson. La transition $t3$ modélise l'opération de passation des commandes d'approvisionnement du stock et la transition $t2$ modélise l'opération d'approvisionnement du stock. La transition $t3$ est immédiate (délai de franchissement est nul) qui spécifie que la révision du stock est continue. Autrement dit, la passation des commandes d'approvisionnement se fait immédiatement dès que l'état du stock est jugé critique. La tenue du stock est assurée grâce aux éléments suivants :

- La place $p2$ photographie à l'aide de son M-marquage $M(p2)$, le niveau du stock $M(p1)$ et les commandes d'approvisionnement en cours $M(p3)$.
- L'arc inhibiteur associé à la place $p2$ dont le poids correspond au seuil de

déclenchement d'une commande d'approvisionnement. Il contrôle ainsi le niveau de l'inventaire, $M(p2)$, du stock $p1$.

- La transition $t3$ et ses arcs correspondant modélisant le déclenchement d'une commande d'approvisionnement. Le poids associé à ces arcs correspond à la quantité de la commande à effectuer qui dépend de la politique modélisée.

A noter que dans les trois modèles, nous n'avons pas considéré l'attente de la demande des clients puisque la demande est représentée simplement par la transition $t1$ (sortie du stock). Pour cette raison, la tenue du stock ne prend pas en compte la demande en cours (les dus). Ce qui n'apparaît également pas dans les poids des arcs de la transition $t3$. Nous reviendrons sur ce point, pour voir la possibilité d'intégrer, si nécessaire, cet aspect.

2.3.1.2. Fonctionnement des modèles

Dans les trois modèles, quand le stock est disponible ($M(p1) > 0$), la transition $t1$ est franchie (exécution d'une demande client), à des intervalles de temps distribués exponentiellement. L'exécution d'une demande diminuera l'état du stock $p1$ et de son inventaire $p2$ (diminution du M-marquage de la place $p1$ et de la place $p2$).

- Dans le modèle (s, S) , si la position du stock est inférieure à s (i.e., $M(p2) < s$), l'ordre de quantité variable (lot) $S - M(p2)$ est placé par le franchissement immédiat de la transition $t3$ pour essayer de ramener le niveau du stock à S . La commande d'approvisionnement (lot) est enregistrée dans la place lot $p3$ après le franchissement de la transition $t3$.
- Dans le modèle (s, Q) , dès que la position du stock descend en dessous du niveau s (appelé point de commande), une commande d'approvisionnement du stock d'une quantité fixe (lot) Q est placée par le franchissement de la transition $t3$.
- Dans le modèle $(S-1, S)$, dès que le niveau du stock descend en dessous de S i.e., $M(p2) < S$ une commande d'approvisionnement de quantité égale à une unité est passée par le franchissement de la transition $t3$. Dans ce cas, la commande d'approvisionnement se fait après chaque franchissement de $t1$ (exécution d'une demande client).

Lorsqu'une commande d'approvisionnement du stock est enregistrée dans la place $p3$, elle est exécutée par le franchissement de la transition $t2$ après un délai (délai de livraison par un fournisseur et/ ou de fabrication) fixé par la temporisation associée à cette transition.

2.2.2 Modèles des politiques avec révision périodique

Les modèles (a) et (b) de la figure 4.3 modélisent les systèmes de stockage (R, s, S) et (R, Q) avec révision périodique de l'état du stock. Dans les deux cas, nous avons rajouté aux modèles (a) et (b) de la figure 4.2 un module composé de $(t4, p4, t5, p5)$ et de ses arcs associés. La période de révision, R , de l'état du stock est fixée par la temporisation

déterministe associée à la transition $t5$. A chaque période, la transition $t5$ est franchie et un jeton est déposé dans la place $p5$ qui signifie qu'une inspection du stock est en cours. A cet instant, soit la transition $t3$ est franchie, soit la transition $t4$ est franchie sachant que la transition $t3$ est prioritaire par rapport à la transition $t4$ dans le modèle ($\Pi(t3) > \Pi(t4)$). Franchir $t3$ signifie qu'une commande lot pour re-compléter le stock est passée à cette période et dans le cas contraire, franchir la transition $t4$ signifie que le niveau du stock est jugé suffisant. Dans les deux cas, après le franchissement de la transition $t3$ ou de la transition $t4$, un jeton est déposé dans la place $p4$ pour générer une nouvelle période de révision de l'état du stock.

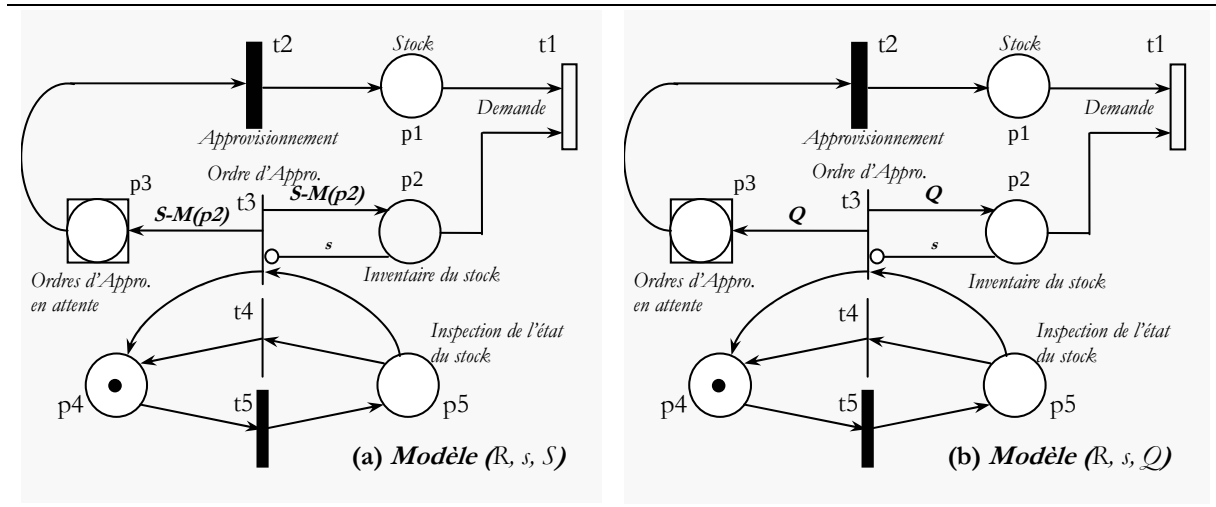


Figure 4.3. Modèles BDSPNs des politiques (R, s, S) ; (R, s, Q) , avec révision périodique du stock

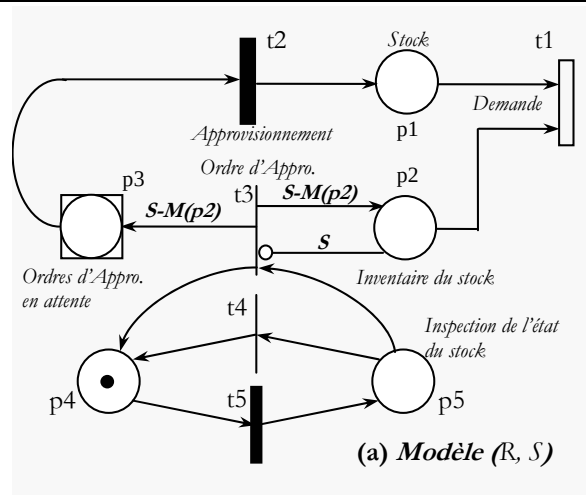


Figure 4.4. Modèle BDSPN de la politique (R, S) avec révision périodique du stock

Le modèle de la figure 4.4, modélise un stock géré par la politique (R, S) définie dans la section précédente. Dans ce cas, R correspondant à la période de passation d'ordre d'approvisionnement est spécifié par la temporisation associée à la transition

déterministe $t5$. Contrairement à la politique (R, s, S) de la figure 4.3(a), dans le modèle (R, S) , à chaque période une commande d'approvisionnement de taille variable égale à $S - M(p2)$ est déclenchée pour essayer de ramener le stock à son niveau initial fixé à S . Dans ce cas, la commande est passée sans se référer à un seuil. L'arc inhibiteur reliant $t3$ à $p2$ de poids égal à S est mis pour éviter de passer des commandes de taille 0. Elles peuvent survenir dans le cas où l'inspection du stock, à une certaine période, révèle que $M(p2) = S$ (cas où aucune demande n'est exécutée depuis la dernière révision du stock).

2.2.3 Extension des modèles développés

D'une manière plus générale, les transitions $t1$ et $t2$ représentent, respectivement, la sortie et l'entrée du stock modélisé par la place $p1$ dans les six modèles présentés dans les deux précédentes sous sections. Ces transitions peuvent être connectées à d'autres composants servant à modéliser d'autres processus associés au stock modélisé. La transition $t2$ modélisant l'opération d'approvisionnement du stock $p1$ peut être reliée à un stock d'un fournisseur, par exemple, où le stock $p1$ s'approvisionne suivant les commandes d'approvisionnement enregistrées dans la place lot $p3$. Dans ce cas, lorsqu'une commande lot est enregistrée dans cette place, la transition lot $t2$ est franchissable que lorsque le nombre de jetons disponibles dans la place $p5$ (le nombre de produits disponibles dans le stock du fournisseur) est supérieur ou égale à la taille du lot d'approvisionnement commandé. La transition $t1$ modélisant la sortie du stock, peut être à son tour reliée, par exemple, à un système de production exploitant les produits du stock $p1$; ou encore à un système de transport des produits de ce stock vers un autre site quelconque, etc.

Dans la figure 4.5, deux autres BDSPNs modélisant la politique (s, S) avec révision continue sont représentés. Contrairement aux modèles précédents, « *les dus* » (partie du stock physique faisant l'objet d'engagement vis-à-vis du client) sont considérés dans la tenue du stock. Dans ce cas, les demandes des clients sont traitées sur commandes enregistrées. Ces dernières ne sont pas perdues quel que soit l'état du stock. La tenue du stock est assurée par $S + M(p4) - M(p2)$ figurant sur les poids des arcs associés à la place $p2$ où « *les dus* », $M(p4)$ sont pris en compte.

- Dans le modèle (a), la place $p4$ est discrète. Elle permet d'enregistrer les demandes de clients qui arrivent par unité via la transition $t4$ que nous avons considérée exponentielle dans notre cas (processus d'arrivée des demandes est un processus de Poisson).
- Contrairement au modèle (a), la place $p4$ du BDSPN (b) est de type lot. En effet, les demandes de clients dans ce cas sont lots et de tailles différentes. Elles sont générées aléatoirement par la transition $t4$ via une source de jetons lots modélisée par la place lot $p5$.

Dans les deux modèles, la transition $t1$ modélise l'opération de livraison des demandes aux clients. Contrairement au modèle (a), lors de l'évolution du BDSPN (b), la transition lot $t1$ est franchie par des jetons lots de tailles variables correspondant à la taille de la demande de chaque client. La temporisation associée à cette transition représente le délai de livraison de la commande. Elle peut dépendre de la taille des lots dans le cas du modèle (b).

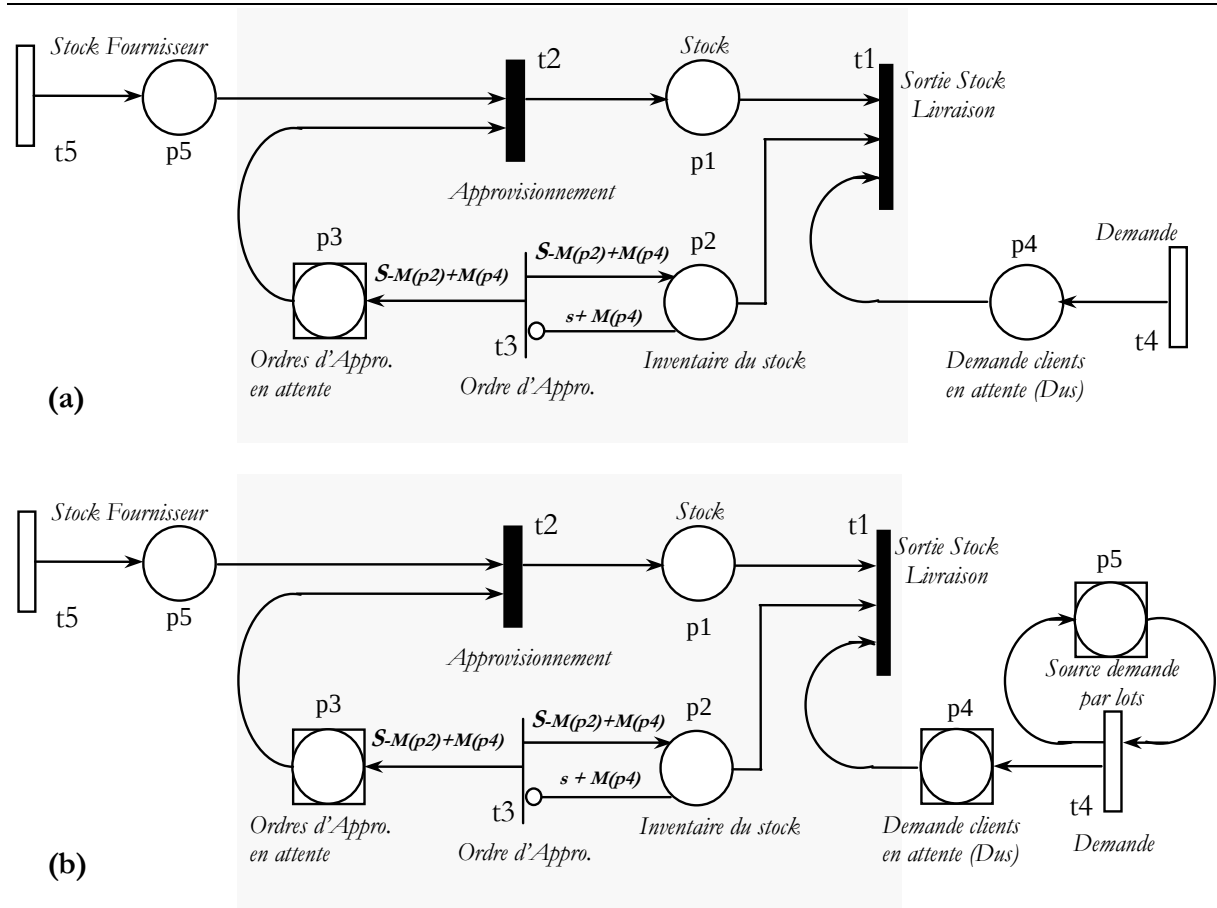


Figure 4.5. Modèles BDSPNs de la politique (s,S) avec révision continue et avec enregistrement des demandes des clients (a) arrivée et livraison à l'unité ; (b) arrivée et livraison par lots de différentes tailles

Notons que dans ce cas de configurations, pour une forte demande de clients enregistrée dans $p4$, le niveau du stock peut dépasser le niveau S au moment de recevoir ses commandes d'approvisionnement puisque la taille d'une commande $S - M(p2) + M(p4)$ peut être supérieure à S ou le cumul de commandes d'approvisionnement que peut avoir la place lot $p3$ est supérieur à S et du coup la transition $t2$ peut générer un nombre de produits dépassant S . L'utilisateur doit alors faire attention en cas d'un stock limitée à S à éviter de prendre $M(p4)$ dans les poids des arcs ou, dans la pratique, le gestionnaire doit augmenter l'espace alloué à la zone de stockage pour éviter ce risque. Notons également que contrairement aux six modèles précédents, ici la place lot $p3$ peut contenir à un

moment donné de multiples ordres d'approvisionnement (différentes tailles) puisque les demandes des clients enregistrées dans la place $p4$ (les dus) s'impliquent dans le déclenchement des ordres d'approvisionnement. Autrement dit, on peut effectuer des commandes d'approvisionnement (franchissement de $t3$) rien que déjà pour les engagements pris vis-à-vis des clients en enregistrant leurs demandes dans la place $p4$.

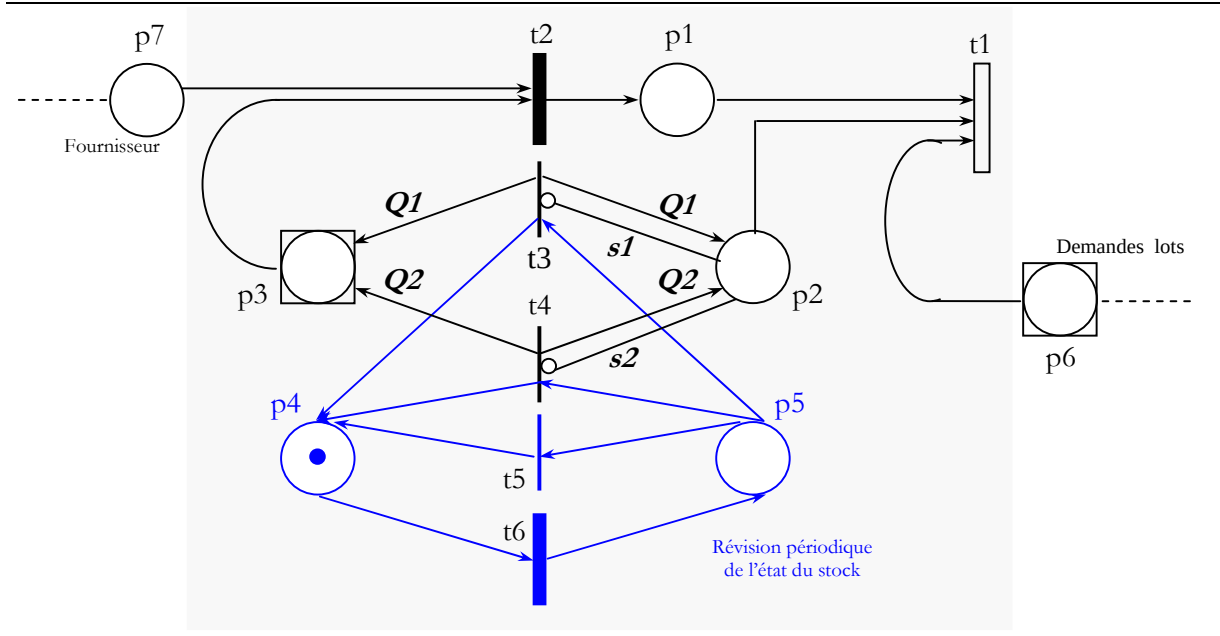


Figure 4.6. Modèle BDSPN de la politique (R, s_1, Q_1, s_2, Q_2)

2.2.4 Autres politiques de gestion de stock

Nous proposons une nouvelle politique qu'on note (R, s_i, Q_i) . Elle dérive de la politique (R, s, Q) présentée et modélisée dans la section (2.3). Cette politique, permet au gestionnaire de contrôler l'état du stock sur plusieurs niveaux d'alerte s_i pour déclencher des commandes lots de tailles fixées Q_i différentes suivant ces différents niveaux. Elle a le pouvoir de mieux protéger l'état du stock dans le cas d'une demande imprévisible. En effet, une forte variation de la demande engendre des fluctuations du niveau du stock. Tantôt c'est bas, tantôt c'est trop bas..., d'où le rôle que peut jouer l'approvisionnement du stock par des lots fixés suivant les différents niveaux d'alerte.

Dans le modèle BDSPN développés dans la figure 4.6, la politique considérée pour la gestion du stock est (R, s_1, Q_1, s_2, Q_2) avec $s_1 < s_2$ et $Q_1 > Q_2$. Deux niveaux d'alertes s_1 et s_2 sont considérés et les deux tailles des lots d'approvisionnement sont fixées à Q_1 et Q_2 suivant les deux niveaux d'alerte. Le fonctionnement du modèle est semblable au modèle (R, s, Q) . Notons d'abord que les priorités entre les transitions immédiates $t3$, $t4$ et $t5$ sont fixées de telle façon que $\Pi(t3) > \Pi(t4) > \Pi(t5)$. Le contrôle de l'état du stock se fait périodiquement à l'aide du jeton discret qui se déplace de la place $p4$ à $p5$. La période

de la révision du stock correspond à la temporisation associée à la transition $t6$. A chaque période, un jeton se retrouve dans la place $p5$ après le franchissement de la transition $t6$ qui lance la révision du stock. Suivant le niveau des priorités associées aux transitions $t3$, $t4$ et $t5$: si le M-marquage de la place $p2$ est inférieur ou égale à $s1$ alors une commande lot de taille $Q1$ est passée dans la place lot $p3$ par le franchissement de la transition $t3$; sinon si le M-marquage de la place $p2$ est inférieur ou égale à $s2$ alors une commande lot de taille $Q2$ est passée dans la place lot $p3$ par le franchissement de la transition $t4$; sinon la transition $t5$ est franchie sans qu'elle déclenche une commande d'approvisionnement. Le franchissement de l'une des trois transitions déplace toujours le jeton de la place $p5$ à la place $p4$ pour attendre encore une autre période avant de lancer une nouvelle révision du stock et ainsi de suite. Le modèle présenté peut être généralisé en définissant plusieurs autres niveaux de commandes d'approvisionnement.

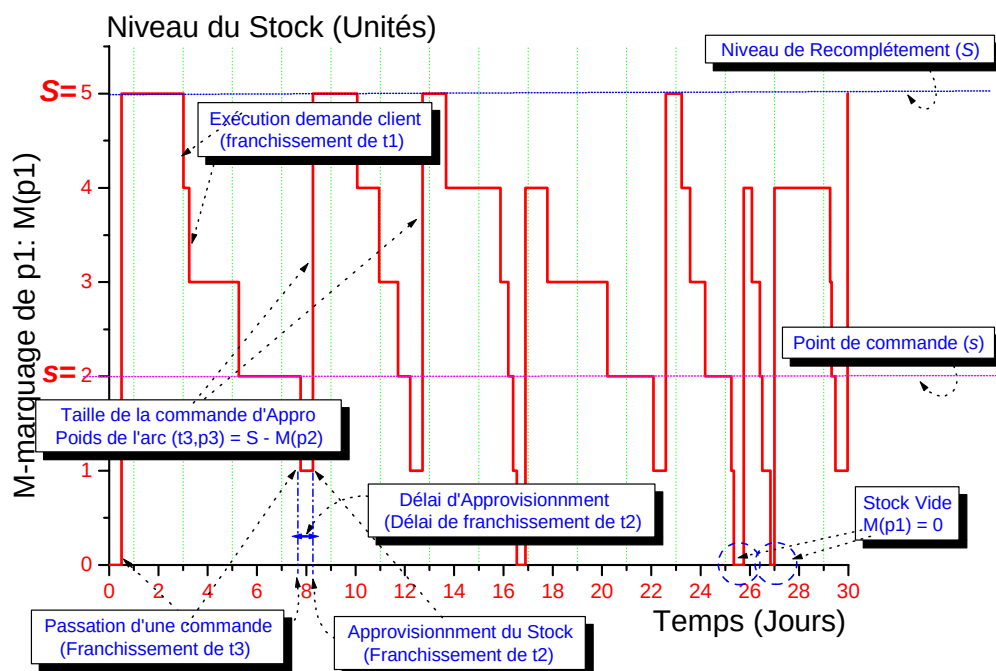
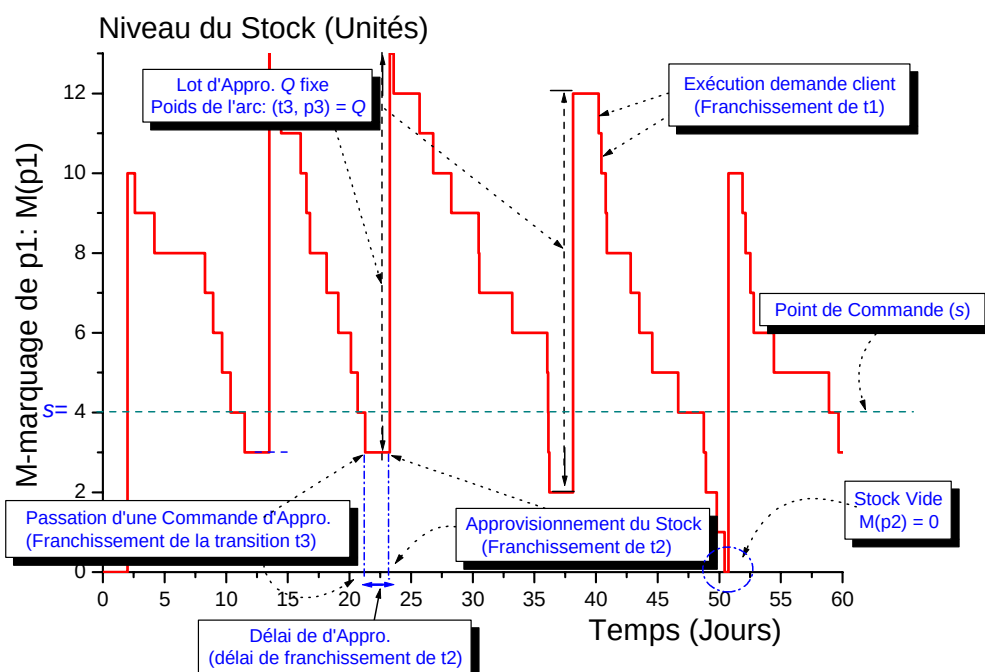
2.3. Dynamique des modèles développés

Dans cette section, la dynamique des modèles BDSPNs développés est examinée au travers de l'évolution du M-marquage de la place $p1$ représentant l'évolution du niveau du stock du système modélisé. L'objectif étant de montrer la validité de nos modèles à reproduire correctement le fonctionnement de chaque politique telle qu'elle est décrite dans les précédentes sections. On s'attachera plus particulièrement aux deux modèles (s, S) et (s, Q) . Les paramètres des ces modèles (délai moyen d'approvisionnement, point de commande s , niveau de re-complètement S , taux de la demande client, lot d'approvisionnement Q) seront choisis à titre illustratif.

2.3.1 Politique (s, S) avec révision continue

La figure 4.7 illustre l'évolution du niveau du stock, $M(p1)$, dans le cas du BDSPN modélisant le système de gestion de stock (s, S) , avec révision continue, délai d'approvisionnement déterministe et demandes aléatoires, représenté par la figure 4.2(a). Les paramètres que nous avons choisis sont : $S = 5$, $s = 2$, $t1$ est exponentielle de moyenne $1/\lambda_1 = 1$ Jour, $t2$ est déterministe de durée 0.5 Jours, $t3$ est immédiate.

On voit apparaître dans ce graphique les deux paramètres de décision du modèle à savoir le point de commande « s » et le niveau du re-complètement du stock « S ». Les principaux événements (franchissements de transitions du BDSPN) qui se produisent dans le temps et qui font évoluer le niveau du stock, $M(p1)$ sont également illustrés pour quelques instants où ils se produisent. Ainsi, le lecteur peut aisément voir que le modèle reproduit correctement le fonctionnement du système de gestion telle que la politique considérée est décrite en termes de son modèle BDSPN.


 Figure 4.7. Graphique d'évolution du BDSPN modélisant la politique (s, S) avec révision continue

 Figure 4.8. Evolution du BDSPN modélisant la politique (s, Q) avec révision continue

2.3.2 Politique (s, Q) avec révision continue

De la même manière, la figure 4.8, illustre l'évolution du niveau stock dans le cas du BDSPN modélisant le système de gestion de stock (s, Q) , avec révision continue, délai d'approvisionnement déterministe et demandes aléatoires, représenté par la figure 4.2(b). Les paramètres que nous avons choisis sont : $Q = 10$, $s = 4$, $t1$ est exponentielle de moyenne $1/\lambda1 = 1$ Jour, $t2$ est déterministe de durée 2 Jours, $t3$ est immédiate.

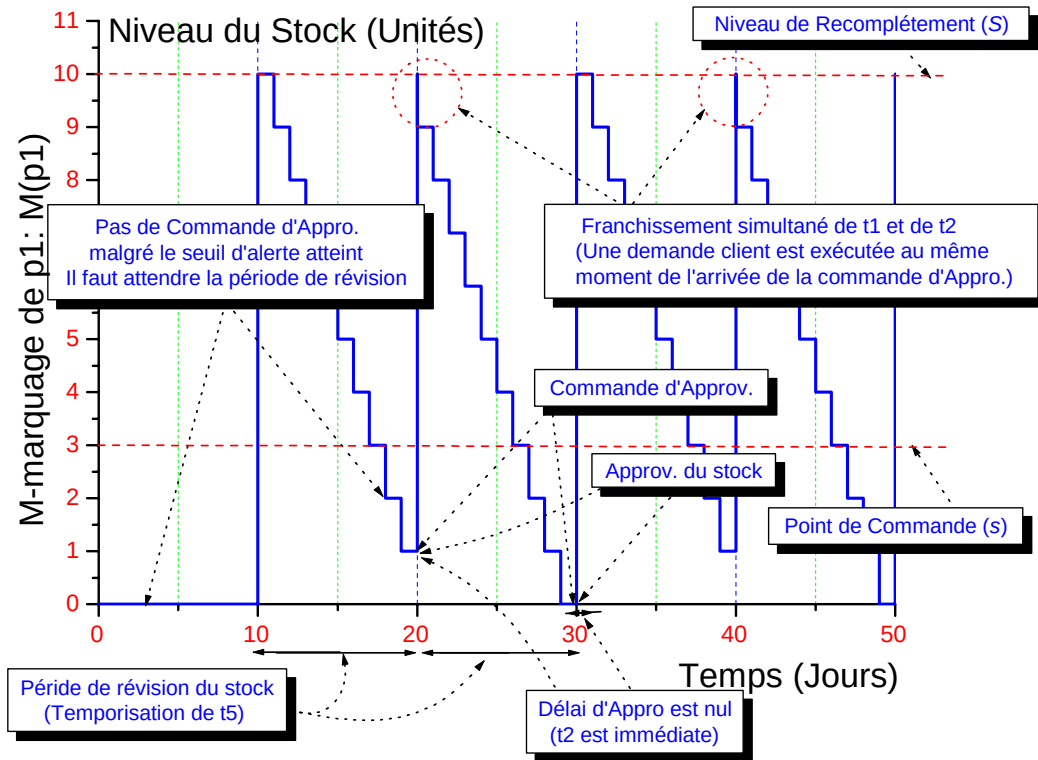


Figure 4.9. Evolution d'un BDSPN modélisant la politique (s, S) avec révision périodique et délai d'approvisionnement nul

2.3.3 Politique (s, S) avec révision périodique

Dans la figure 4.9, nous représentons l'évolution du niveau stock dans le cas du modèle BDSPN modélisant le système de gestion de stock (R, s, S) avec *révision périodique* représenté par la figure 4.4(a). Les paramètres que nous avons choisis pour illustrer l'évolution de ce modèle sont : $R = 10$ (délai de franchissement de $t5$) ; $s = 3$; $S = 10$; la transition $t1$ (demande) est déterministe telle que le délai de franchissement de $t1$ est $D(t1) = 1$ Jour ; $t2$ est immédiate (délai d'approvisionnement est nul) ; et rappelons que $t3$ et $t4$ sont immédiates avec $\Pi(t3) > \Pi(t4)$.

Nous avons considéré dans ce modèle que le *délai d'approvisionnement* est *nul* (la transition $t3$ est donc immédiate). Contrairement aux deux modèles précédents, dans ce cas, on voit apparaître dans le graphique de l'évolution du niveau du stock, $M(p1)$, les périodes de révision du stock. Les déclenchements des commandes d'approvisionnement (franchissements de $t3$) peuvent s'effectuer qu'à des moments bien précis de période R correspondant à la temporisation associée à la transition $t5$.

3. Evaluation et analyse de performances

A ce stade de ce chapitre, nous avons montré le pouvoir des BDSPNs à modéliser les systèmes de gestion de stocks. Ils permettent d'exprimer tous les aspects de cette classe de systèmes et de reproduire finement et correctement leur comportement dynamique suivant des politiques de gestion diverses. Cette nouvelle section est consacrée à l'évaluation et à l'analyse de performances de cette classe de systèmes à l'aide des BDSPNs et des méthodes associées à savoir les méthodes analytiques et les méthodes de simulation. Dans un premier temps, l'essentiel sur l'évaluation d'une politique de gestion de stock est présenté. Ensuite, à l'aide de deux études distinctes, présentées dans [LAB 05a], [LAB 05b] et [LAB 05c], deux méthodologies d'évaluation et d'analyse de performances d'un système de gestion de stock à partir de son modèle BDSPN sont présentées.

3.1. Evaluation d'une politique de gestion

La performance d'un système de gestion de stock se juge suivant un ensemble de critères que le gestionnaire doit pouvoir évaluer et analyser suivant les paramètres de décision qu'il dispose afin de proposer une meilleure politique de gestion suivant des objectifs souhaités. Parmi les principaux critères d'évaluation d'un système de gestion ; on cite : *les coûts*, *la rotation du stock*, et *la qualité de service*.

3.1.1 Les coûts d'une politique de gestion de stock

Une politique de gestion de stock induit trois types de coût : *le coût de stockage*, *le coût de passation de commande* et *le coût de rupture de stock*.

- **Le coût de stockage (C_s) :** Il est généré par plusieurs composantes notamment par les charges liées au stockage physique (logistique, conservation de stock, entretien...). Ce coût est considéré comme étant proportionnel à la valeur du stock moyen et à la durée de stockage. Nous notons par C_s , le coût unitaire de stockage correspondant au coût de stockage d'une unité stockée pendant une unité de temps. Il s'exprime en unité monétaire par unité de temps.

En termes de modèles BDSPNs développés dans la section précédente où le niveau du stock est modélisé par la place discrète $p1$, le coût moyen de stockage par unité de temps, $C_s(Moyen)$, se calcule par la relation suivante : $C_s(Moyen) = M(p1)_{Moy} \times C_s$ avec $M(p1)_{moy}$ est le M-marquage moyen de la place $p1$.

- **Le coût de passation commande (C_c) :** Avant de passer une commande d'approvisionnement, il faut surveiller l'état du stock, déterminer la taille de la commande, contacter un fournisseur, assurer la réception de la commande, contrôler et payer la facture du fournisseur... L'ensemble de ces opérations liées à l'opération d'approvisionnement génèrent un coût total dit coût de passation d'une commande. Ce coût se répète à chaque fois qu'une nouvelle commande est passée. Le coût unitaire de passation d'une commande, noté par C_c , s'exprime en unité monétaire par commande. Il est donc proportionnel à la fréquence d'approvisionnement (le nombre d'approvisionnements par unité de temps).

En termes de modèles BDSPNs développés où l'approvisionnement du stock se fait par le franchissement de la transition $t2$, le coût moyen de passation de commande par unité de temps se calcule par la relation suivante : $C_c(Moyen) = F(t2)_{Moy} \times C_c$ avec $F(t2)_{Moy}$ est la fréquence moyenne de franchissement de la transition lot $t2$.

- **Le coût de rupture de stock :** La définition de la notion de rupture de stock dépend du modèle à étudier. En effet, du point de vue modélisation, nous distinguons deux cas de base. La demande non satisfaite peut être perdue ou reportée. Le coût unitaire de rupture de stock, C_r , s'exprime en unité monétaire par commande non satisfaite. D'une manière générale :

Dans le cas de demandes perdues, le coût de rupture est le manque à gagner de la non satisfaction d'une demande, généralement la marge bénéficiaire sur cette demande, notée par C_r . Ce cas de figure correspond aux modèles BDSPNs des figures (4.2), (4.3) et (4.4) où la demande des clients est modélisée par la transition $t1$. Contrairement aux modèles de la figure 4.5, où il y a un moyen de différer la demande client dans la place $p4$, la transition $t1$ (exécution d'une demande) se fait seulement si le stock est disponible. En d'autres mots, supposons que le stock est toujours disponible (pas de rupture), dans ce cas la fréquence moyenne de franchissement de la transition $t1$ est égale $1/D(t1)$ où $D(t1)$ est le délai moyen de franchissement de $t1$. Cette fréquence correspond à une génération totale de la demande. Le manque à gagner dû aux ruptures possibles de stock (stock vide dans ce cas) ou bien le coût moyen de rupture par unité de temps, peut être déduit comme suit : $C_r(Moyen) = C_r \times ([1/D(t1)] - F(t1)_{Moy})$. En effet, l'écart entre les deux mesures de la fréquence de la transition $t1$ correspond en réalité, au nombre de franchissements manqués de la transition $t1$ ou bien à la demande perdue.

En cas de demande reportée, le retard de livraison dû à la rupture du stock intervient dans l'évaluation du coût de rupture. Ce cas correspond aux modèles BDSPNs de la figure 4.5, où la demande des clients se fait sur commandes enregistrées dans la place $p4$. Connaissant le délai moyen toléré pour la satisfaction d'une demande client notée DL et connaissant le coût d'un retard exprimé en unité monétaire par unité de temps, noté C_r , il est facile d'exprimer le coût moyen de rupture par unité de temps. Il suffit de calculer le temps de séjour moyen des jetons dans la place $p4$ (combien une demande client reste en attente dans la place $p4$, avant d'être traitée), noté TS . L'écart entre TS et DL correspond au retard moyen sur l'exécution d'une demande. Le coût moyen de rupture par unité de temps est donné par : $C_r(Moyen) = C_r \times (TS - DL)$.

- **Le coût moyen de gestion par unité de temps :** Ce critère mesure le coût moyen de gestion par unité de temps. Il est donné par la relation suivante :

$$C_{moy} = S_{Moy} C_s + C_{Moy} C_c + R_{Moy} C_r \quad (4.1)$$

avec :

C_s , C_c , et C_r sont respectivement le coût moyen de stockage par unité de temps, le coût moyen de passation de commande d'approvisionnement et le coût moyen de rupture.

S_{Moy} , le stock moyen possédé par unité de temps, auquel est associé un *coût unitaire de stockage*, noté C_s .

R_{Moy} , la rupture moyenne, c'est-à-dire le nombre moyen de demandes non satisfaites par unité de temps, auquel est associé un *coût unitaire de rupture*, noté C_r .

C_{Moy} , le nombre moyen de commandes passées par unité de temps, auquel est associé un *coût unitaire de commande*, noté C_c .

3.1.2 Le taux de couverture et le taux de rotation

Le *taux de couverture* (ou son inverse le *taux de rotation*) est très utilisé dans l'évaluation d'une politique de gestion. Cet indicateur, noté TC , correspond au rapport de la *valeur moyenne du stock* sur la *valeur moyenne de la demande* par unité de temps. Un taux de couverture peut être interprété comme le temps moyen que mettrait le stock pour s'annuler à partir d'un instant quelconque de son évolution en absence de réapprovisionnement.

$$TC = \frac{\text{Stock Moyen par unité de temps}}{\text{Demande Moyenne par unité de temps}} \quad (4.2)$$

En termes de modèles BDSPNs développés, cet indicateur de performance correspond au rapport du marquage moyen de la place modélisant le stock sur la fréquence moyenne de la transition modélisant l'arrivée de la demande client. En effet, le

marquage moyen de la place $p1$ modélisant le stock dans les modèles des figures (4.3) et (4.4) correspond au stock moyen. La fréquence moyenne de franchissement de la transition $t1$ (nombre de franchissements de $t1$ par unité de temps) correspond à la demande moyenne des clients puisque chaque franchissement correspond à une arrivée d'une demande client.

3.1.3 La qualité de service

La qualité de service est un indicateur qui mesure l'adéquation du système de gestion à la satisfaction de la demande exprimée par le client. Cette adéquation peut s'exprimer en termes quantitatifs (volume de la demande non satisfaite, retard de livraison). Elle peut être exprimée par diverses mesures à savoir : la probabilité de rupture du stock par cycle (entre deux approvisionnements), la probabilité de rupture par unités de temps, le taux de livraison hors délais, le taux de demandes non satisfaites, ... Cependant, les gestionnaires préfèrent utiliser comme indicateur de qualité de service le rapport, QS , traduisant le taux de demandes satisfaites :

$$QS = \frac{\text{Nombre de demandes satisfaites}}{\text{Nombre total de demandes}} \quad (4.3)$$

Cet indicateur peut également être exprimé par la relation suivante :

$$QS = 1 - \frac{\text{Nombre Moyen de demandes en rupture par unité de temps}}{\text{Nombre Moyen de demandes par unité de temps}} \quad (4.4)$$

A l'aide de deux applications distinctes, nous reviendrons dans la section suivante sur le calcul de ces indicateurs de performances au travers le modèle BDSPN du système de gestion qu'il représente.

4. Etude analytique d'un système de stockage

Dans cette section, nous présentons une étude analytique effectuée sur un système de gestion de stock modélisé par un BDSPN. Cette étude est déjà présentée dans [LAB 05a] et [LAB 05b]. Elle est basée sur le graphe des μ -marquages du BDSPN utilisé conjointement avec le processus stochastique associé. La résolution du processus stochastique permet de déterminer les probabilités des différents états et l'utilisation de ces probabilités permet d'évaluer les performances moyennes du système.

La démarche suivie dans cette étude constitue un support méthodologique pour l'analyse de cette classe de système. Il s'agit du cas où le modèle BDSPN du système de stockage qu'il représente est borné (nombre d'états fini) et ne présente pas de contraintes mathématiques pour la caractérisation et l'étude du processus stochastique associé.

4.1. Description du système

Le système de stockage considéré dans cette étude est représenté dans la figure 4.10 et présente les caractéristiques suivantes :

- Le stock est géré par la politique (s, S) avec révision continue ;
- La demande est stochastique. Le processus d'arrivée de la demande client est un processus de Poisson ;
- La demande est lot. Elle est générée suivant des tailles différentes ;
- La demande est perdue lorsqu'il y a rupture du stock ;
- Le délai d'approvisionnement du stock est stochastique. Il suit une loi exponentielle.

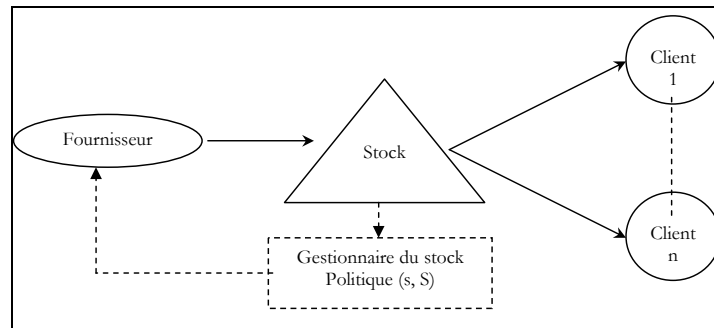


Figure 4.10. Description du système de stockage à étudier

4.2. Modélisation du système

Le système de stockage à étudier est modélisé par le BDSPN de la figure 4.11. L'entrée et la sortie du stock modélisé par la place $p1$ sont représentées respectivement par les transitions $t2$ et $t1$. Le stock est géré par la politique (s, S) avec révision continue. Rappelons, qu'il s'agit d'inspecter le niveau du stock continuellement et dès qu'il descend à un niveau prédéterminé s (poids de l'arc inhibiteur reliant $p2$ à $t3$), une commande d'approvisionnement du stock est lancée pour tenter de re-compléter le stock à un niveau fixé à S . La taille de la commande d'approvisionnement se détermine par le poids variable, $S - M(p2)$, de l'arc reliant $t3$ à $p3$. Le stock, $p1$, est soumis à des demandes aléatoires de clients et de tailles différentes (lots). Les demandes sont générées aléatoirement par la transition lot $t1$ suivant un processus de Poisson de taux $\lambda1$. La transition $t1$ est donc exponentielle puisque dans un processus de Poisson, les dates d'inter-arrivée sont distribuées exponentiellement.

Si le stock est disponible, l'exécution d'une commande d'un client s'effectue par le franchissement de la transition lot $t1$. Le franchissement de $t1$ à un instant donné fait diminuer le M-marquage de la place $p1$ (stock) et celui de la place $p2$ (représentant la position du stock, $M(p2) = M(p1) + M(p3)$) d'une quantité lot de taille égale à la taille de la

commande à livrer que génère la place lot $p3$ (source de demandes lots) et la transition $t1$. Une fois que le niveau du stock (M-marquage de $p2$) descend en dessous du seuil fixé s (i.e., $M(p2) < s$) qui est surveillé par l'arc inhibiteur reliant la transition $t3$ à la place $p2$, un ordre d'approvisionnement est immédiatement passé par le franchissement de la transition immédiate $t3$ (inspection continue du stock). Le franchissement de $t3$ place un ordre d'une quantité (lot) $S - M(p2)$ dans la place lot $p3$. Cette place lot représente les ordres d'approvisionnement en attente d'exécution pour tenter de ramener le niveau du stock à S . L'opération d'approvisionnement du stock s'effectue par le franchissement de la transition $t2$ dont les délais de franchissement sont distribués exponentiellement.

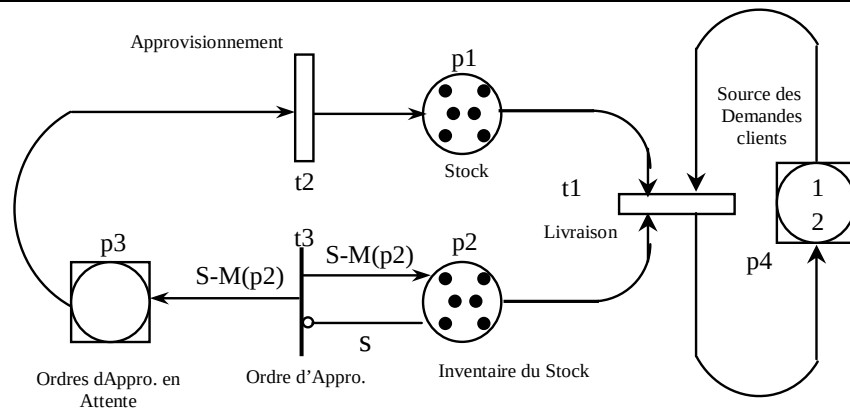


Figure 4.11. Modèle BDSPN du système de stockage à étudier

4.2.1 Les paramètres du modèle

Les paramètres de la politique de gestion du stock (s, S) sont fixés à (4, 6). Nous considérons qu'il y a que deux tailles (1 ou 2) possibles concernant les demandes des clients d'où le μ -marquage de place lot $p4$, modélisant la source de la demande, est $\mu(p4) = \{1, 2\}$. Le μ -marquage initial est $\mu_0 = (6, 6, \emptyset, \{1, 2\})^T$ qui signifie que le système se trouve initialement dans un état où le stock est plein ($S = 6$). Le μ -marquage initial des places $p1, p2$ et $p3$, avec $M(p2) = M(p1) + M(p3)$ et $(s, S) = (4, 6)$, n'influe pas sur cette étude, puisque comme nous le verrons par la suite que le réseau est *réinitialisable* (le μ -marquage initial μ_0 est un état d'accueil). Seul le μ -marquage initial de la place lot $p4$ influe sur l'étude que nous présentons.

4.2.2 Génération de la demande client

Une précision concernant la génération de la demande des clients (modélisée par la boucle composée de la place lot $p4$ et la transition lot $t1$) s'impose. La transition lot $t1$ peut être validée par différents lots disponibles dans la place lot $p4$ au même moment. De ce point de vue, le modèle nous offre différentes possibilités pour l'étude du système modélisé suivant la manière dont nous traitons la demande des clients. Parmi ces

possibilités, nous considérons dans notre étude le cas suivant :

Les transitions q -indicées, $t1_{[1]}$ et $t1_{[2]}$, que génère la transition lot $t1$ lors de l'évolution du système sont vues comme deux transitions exponentielles indépendantes. Chacune modélise la génération d'une demande d'un type bien particulier de client : $t1_{[1]}$ génère la demande d'un type de client qui demande des lots de taille 1 et $t1_{[2]}$ génère la demande d'un type de client qui demande des lots de taille 2. Dans ce cas, lors de l'évolution du BDSPN, lorsque la transition $t1$ est franchissable à la fois par un jeton lot de taille 1 et un jeton lot de taille 2 disponibles dans la place lot $p4$, les transitions $t1_{[1]}$ et $t1_{[2]}$ sont franchies toutes les deux comme deux transitions temporisées indépendantes.

4.3. Evolution du système modélisé

L'évolution du système, peut être exprimée au moyen du graphe des μ -marquages du modèle BDSPN qui le représente. Chaque μ -marquage du graphe représente l'état du système et chaque franchissement effectué entre deux μ -marquages dans le graphe représente l'exécution d'une opération pouvant être l'exécution d'une demande (franchissement de $t1$), passation d'une commande d'approvisionnement (franchissement de $t3$), approvisionnement du stock (franchissement de $t2$).

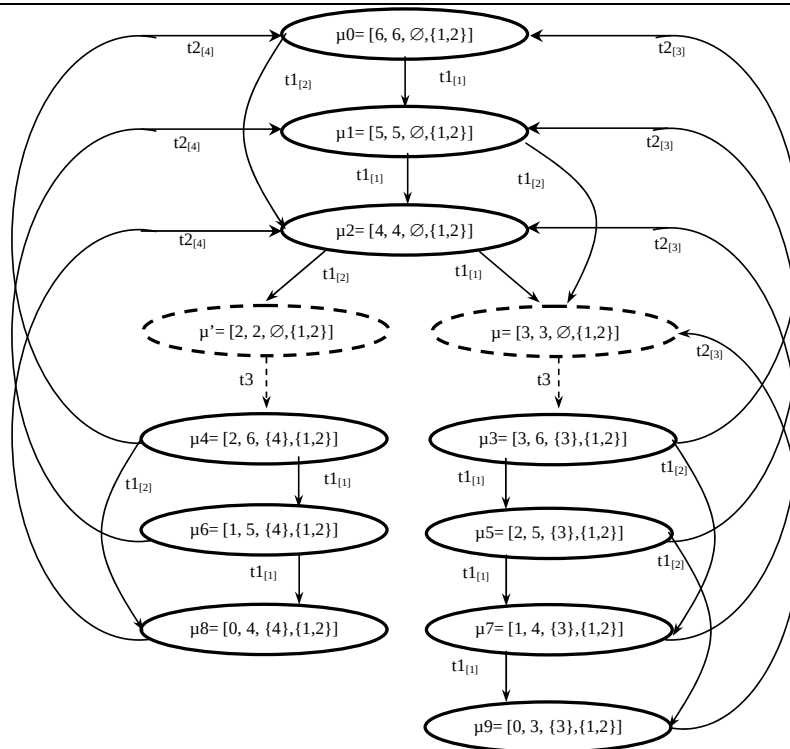


Figure 4.12. Graphe des μ -marquages du modèle

Le graphe des μ -marquages du BDSPN est représenté par la figure 4.12. Ce graphe est construit à partir du μ -marquage initial μ_0 en considérant tous les franchissements possibles d'un μ -marquage à un autre. A rappeler que les transitions immédiates sont prioritaires par rapport aux transitions temporisées. Le graphe obtenu contient 10 états tangibles, numérotés de 0 à 9, à partir desquels aucune transition immédiate n'est franchissable et 2 états instables μ et μ' encadrés dans le graphe en traits pointillés à partir desquels seules des transitions immédiates sont franchissables (t_3 est la transition immédiate dans notre modèle). Le délai de franchissement dans les états instables est nul (délai de passage aux états successeurs). En conséquence, ils ne présentent pas d'intérêt pour l'étude du système. Pour alléger le graphe et la méthode de résolution, ces deux états instables sont donc éliminés avec les franchissements immédiats correspondant. L'élimination des deux états instables se fait en fusionnant les états tangibles qui constituent les prédécesseurs directs de ces états éliminés (μ_1 et μ_2) avec les états tangibles qui constituent les successeurs directs de ces états éliminés (μ_3 et μ_4). Le graphe des μ -marquages réduit est représenté par la figure 4.13.

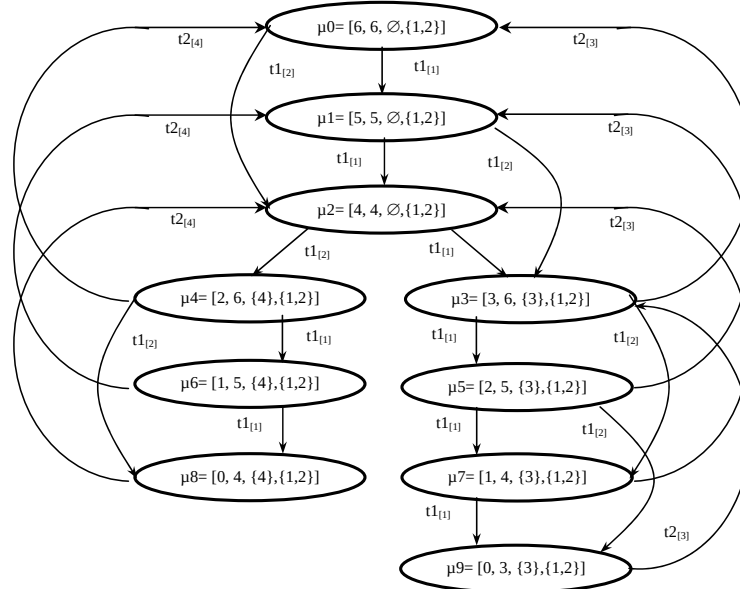


Figure 4.13. Graphe des μ -marquages réduit du modèle

Le graphe des μ -marquages (réduit) engendré par le BDSPN du système modélisé est isomorphe à une Chaîne de Markov à temps continu représentée par la figure 4.14. La nature du processus stochastique engendré est vérifiée par la nature des lois de distribution associées aux transitions utilisées (loi sans mémoire). Autrement dit, lors de l'évolution du modèle, seul le nouveau μ -marquage détermine le comportement futur du processus stochastique.

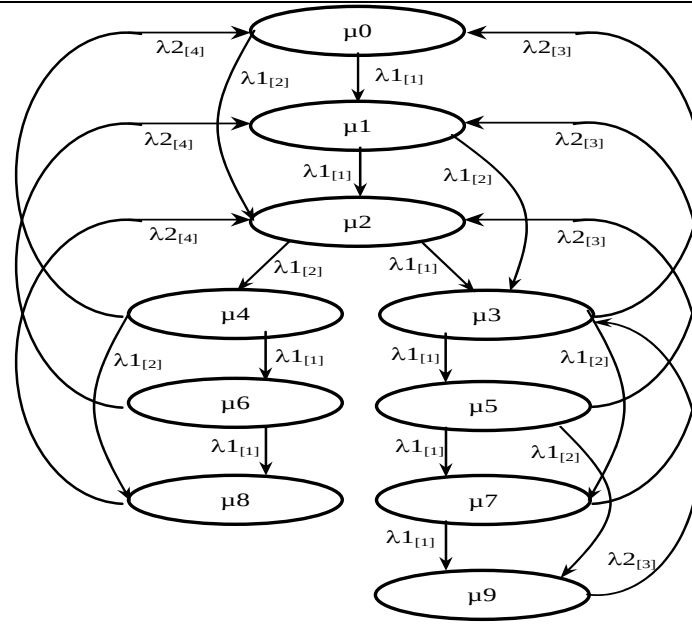


Figure 4.14. La Chaîne de Markov associée

4.4. Résolution du processus stochastique associé

Le générateur du processus markovien Q (*matrice de transition*) associé au processus stochastique des μ -marquages est donné ci-dessous :

	$\mu0$	$\mu1$	$\mu2$	$\mu3$	$\mu4$	$\mu5$	$\mu6$	$\mu7$	$\mu8$	$\mu9$
Q	$\mu0$	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{1[2]}$	$\lambda_{1[1]}$	$\lambda_{1[2]}$	0	0	0	0	0	0
	$\mu1$	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{1[2]}$	$\lambda_{1[1]}$	$\lambda_{1[2]}$	0	0	0	0	0
	$\mu2$	0	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{1[2]}$	$\lambda_{1[1]}$	$\lambda_{1[2]}$	0	0	0	0
	$\mu3$	$\lambda_{2[3]}$	0	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{1[2]}-\lambda_{2[3]}$	0	$\lambda_{1[1]}$	0	$\lambda_{1[2]}$	0
	$\mu4$	$\lambda_{2[4]}$	0	0	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{1[2]}-\lambda_{2[4]}$	0	$\lambda_{1[1]}$	0	$\lambda_{1[2]}$
	$\mu5$	0	$\lambda_{2[3]}$	0	0	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{1[2]}-\lambda_{2[3]}$	0	$\lambda_{1[1]}$	0
	$\mu6$	0	$\lambda_{2[4]}$	0	0	0	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{2[4]}$	0	$\lambda_{1[1]}$
	$\mu7$	0	0	$\lambda_{2[3]}$	0	0	0	0	$-\lambda_{1[1]}-\lambda_{2[3]}$	0
	$\mu8$	0	0	$\lambda_{2[4]}$	0	0	0	0	0	$-\lambda_{2[4]}$
	$\mu9$	0	0	0	$\lambda_{2[3]}$	0	0	0	0	$-\lambda_{2[3]}$

Pour la suite de l'étude de ce système, on se limitera aux cas suivant : $\lambda_{1[1]} = \lambda_{1[2]} = \lambda_1$ et $\lambda_{2[3]} = \lambda_{2[4]} = \lambda_2$.

- $\lambda_{1[1]} = \lambda_{1[2]} = \lambda_1$: signifie que les demandes des deux types de clients suivent deux

lois exponentielle de paramètres identiques.

- $\lambda_{2[3]} = \lambda_{2[4]} = \lambda_2$: signifie que les délais d'approvisionnement ne dépendent pas de la taille des commandes d'approvisionnement.

Dans ce cas, le générateur markovien de la chaîne de Markov associée au processus stochastique des μ -marquages se simplifie comme suit :

		$\mu 0$	$\mu 1$	$\mu 2$	$\mu 3$	$\mu 4$	$\mu 5$	$\mu 6$	$\mu 7$	$\mu 8$	$\mu 9$
$Q =$	$\mu 0$	$-2\lambda_1$	λ_1	λ_1	0	0	0	0	0	0	0
	$\mu 1$	0	$-2\lambda_1$	λ_1	λ_1	0	0	0	0	0	0
	$\mu 2$	0	0	$-2\lambda_1$	λ_1	λ_1	0	0	0	0	0
	$\mu 3$	λ_2	0	0	$-2\lambda_1 - \lambda_2$	0	λ_1	0	λ_1	0	0
	$\mu 4$	λ_2	0	0	0	$-2\lambda_1 - \lambda_2$	0	λ_1	0	λ_1	0
	$\mu 5$	0	λ_2	0	0	0	$-2\lambda_1 - \lambda_2$	0	λ_1	0	λ_1
	$\mu 6$	0	λ_2	0	0	0	0	$-\lambda_1 - \lambda_2$	0	λ_1	0
	$\mu 7$	0	0	λ_2	0	0	0	0	$-\lambda_1 - \lambda_2$	0	λ_1
	$\mu 8$	0	0	λ_2	0	0	0	0	0	$-\lambda_2$	0
	$\mu 9$	0	0	0	λ_2	0	0	0	0	0	$-\lambda_2$

La distribution de probabilité des états (μ -marquages), en fonction des paramètres λ_1 (taux de la demande) et λ_2 (taux d'approvisionnement), du système en régime permanent est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \Pi \cdot Q = 0 \\ \sum_{i=0}^9 \pi_i = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Avec : $\Pi = [\pi_0, \dots, \pi_i, \dots, \pi_9]$: est un vecteur ligne correspondant à la distribution de probabilité des états du processus stochastique des μ -marquage. Q est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov.

π_0	$(\lambda_2)^2 [37.(\lambda_1)^3.\lambda_2 + 49(\lambda_1)^2.(\lambda_2)^2 + 24(\lambda_2)^3.\lambda_1 + 8(\lambda_1)^4 + 4(\lambda_2)^4] \div$ $[164.(\lambda_1)^5.\lambda_2 + 326.(\lambda_1)^4.(\lambda_2)^2 + 361.(\lambda_1)^3.(\lambda_2)^3 + 32.(\lambda_1)^6 + 226.(\lambda_2)^4.(\lambda_1)^2 + 72.(\lambda_2)^5.\lambda_1 + 9.(\lambda_2)^6]$
π_1	$2(\lambda_2)^2 [8(\lambda_2)^3.\lambda_1 + 20(\lambda_1)^3.(\lambda_2) + 21(\lambda_2)^2.(\lambda_1)^2 + 4(\lambda_1)^4 + (\lambda_2)^4] \div$ $[164.(\lambda_1)^5.\lambda_2 + 326.(\lambda_1)^4.(\lambda_2)^2 + 361.(\lambda_1)^3.(\lambda_2)^3 + 32.(\lambda_1)^6 + 226.(\lambda_2)^4.(\lambda_1)^2 + 72.(\lambda_2)^5.\lambda_1 + 9.(\lambda_2)^6]$
π_2	$(2\lambda_1 + \lambda_2).(\lambda_1 + \lambda_2).(\lambda_2)^2 [3(\lambda_2)^2 + 20(\lambda_1)^2 + 15\lambda_1\lambda_2] \div$ $[164.(\lambda_1)^5.\lambda_2 + 326.(\lambda_1)^4.(\lambda_2)^2 + 361.(\lambda_1)^3.(\lambda_2)^3 + 32.(\lambda_1)^6 + 226.(\lambda_2)^4.(\lambda_1)^2 + 72.(\lambda_2)^5.\lambda_1 + 9.(\lambda_2)^6]$

π_3	$\lambda_1 \lambda_2 [30(\lambda_2)^3 \lambda_1 + 54(\lambda_1)^3 (\lambda_2) + 63(\lambda_2)^2 (\lambda_1)^2 + 5(\lambda_2)^4 + 16(\lambda_1)^4] \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$
π_4	$(\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2)^2 \lambda_1 [3(\lambda_2)^2 + 20(\lambda_1)^2 + 15\lambda_1 \lambda_2] \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$
π_5	$\lambda_2 (\lambda_1)^2 [5(\lambda_2)^3 + 23\lambda_2 (\lambda_1)^2 + 20(\lambda_2)^2 (\lambda_1) + 8(\lambda_1)^3] \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 32(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$
π_6	$(\lambda_2)^2 (\lambda_1)^2 [3(\lambda_2)^2 + 20(\lambda_1)^2 + 15\lambda_1 \lambda_2] \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$
π_7	$[24(\lambda_1)^3 + 53(\lambda_2)(\lambda_1)^2 + 30(\lambda_2)^2 (\lambda_1) + 5(\lambda_2)^3] (\lambda_1)^2 \lambda_2 \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$
π_8	$(\lambda_1)^2 \lambda_2 [3(\lambda_2)^2 + 20(\lambda_1)^2 + 15\lambda_2 \lambda_1] (2\lambda_1 + \lambda_2) \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$
π_9	$2(\lambda_1)^3 [38\lambda_2 (\lambda_1)^2 + 25(\lambda_2)^2 (\lambda_1) + 5(\lambda_2)^3 + 16(\lambda_1)^3] \div$ $[164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_1)^3 (\lambda_2)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]$

4.5. Evaluation de performances du système

Connaissant la distribution de probabilité des états (μ -marquages), il est possible d'évaluer plusieurs performances du système modélisé en utilisant les indices de performances associé au modèle BDSPN formalisés dans le chapitre précédent. Dans ce qui suit, les performances du système sont données comme des fonctions qui dépendent des deux paramètres λ_1 (paramètre lié à la demande) et λ_2 (paramètre lié à l'approvisionnement). Ceci permettra d'analyser l'effet de ces paramètres sur la variation des performances du système.

4.5.1 Stock moyen

La fonction donnant le stock moyen S_{moy} en fonction des paramètres λ_1 et λ_2 est donnée par le M-marquage moyen de la place $p1$ et se calcule par la formule suivante :

$$S_{moy}(\lambda_1, \lambda_2) = M(p1)_{moy} = \sum_{i=0}^9 \pi_i \times \mu(p1) \quad (4.6)$$

$$S_{moy}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2 \times [1126(\lambda_2)^2 (\lambda_1)^3 + 569(\lambda_1)^4 \lambda_2 + 88(\lambda_1)^5 + 932(\lambda_2)^3 (\lambda_1)^2 + 341(\lambda_2)^4 \lambda_1 + 46(\lambda_2)^5]}{164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_2)^3 (\lambda_1)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6}$$

4.5.2 Coût moyen de stockage

Connaissant le prix unitaire de stockage C_s (prix de stocker une unité de produit une unité de temps dans le stock), la fonction du coût de stockage moyen CS_{moy} en fonction des paramètres $\lambda 1$ et $\lambda 2$ est donnée par la multiplication de la fonction du stock moyen par le coût unitaire :

$$CS_{moy} = C_s \times S_{moy} = C_s \times M(p1)_{moy} = C_s \times \sum_{i=0}^9 \pi_i \times \mu(p1) \quad (4.7)$$

$$CS_{moy}(\lambda 1, \lambda 2) = C_s \times \frac{\lambda_2 \times [1126(\lambda_2)^2(\lambda_1)^3 + 569(\lambda_1)^4\lambda_2 + 88(\lambda_1)^5 + 932(\lambda_2)^3(\lambda_1)^2 + 341(\lambda_2)^4\lambda_1 + 46(\lambda_2)^5]}{164(\lambda_1)^5\lambda_2 + 326(\lambda_1)^4(\lambda_2)^2 + 361(\lambda_2)^3(\lambda_1)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4(\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5\lambda_1 + 9(\lambda_2)^6}$$

4.5.3 Probabilité d'un stock vide

Sur le graphe des μ -marquages du BDSPN, le μ -marquage de la place $p1$ est égal à zéro ($\mu(p1) = 0$) dans les deux μ -marquages $\mu 8$ et $\mu 9$. Ainsi la fonction donnant la probabilité de la rupture du stock est donnée par :

$$Prob_{s=0}(\lambda 1, \lambda 2) = 0 = Prob[\mu(p1) = 0] = \pi_8 + \pi_9 \quad (4.8)$$

$$Prob_{s=0}(\lambda 1, \lambda 2) = \frac{(\lambda_1)^2 \times [31(\lambda_2)^3(\lambda_1) + 100(\lambda_2)^2(\lambda_1)^2 + 116(\lambda_1)^3(\lambda_2) + 32(\lambda_1)^4 + 3(\lambda_2)^4]}{72(\lambda_2)^5(\lambda_1) + 9(\lambda_2)^6 + 226(\lambda_2)^4(\lambda_1)^2 + 361(\lambda_2)^3(\lambda_1)^3 + 326(\lambda_1)^4(\lambda_2)^2 + 164(\lambda_1)^5(\lambda_2) + 32(\lambda_1)^6}$$

4.5.4 Fréquence moyenne d'approvisionnement

Comme l'approvisionnement du stock se fait à l'aide du franchissement de la transition $t2$, on observe sur le graphe des μ -marquages que cette transition est franchie dans les μ -marquages :

- $\mu 3, \mu 5, \mu 7$ et $\mu 9$ avec un lot de taille égale à 3 (franchissement de $t2_{[3]}$) correspondant à la taille d'une commande d'approvisionnement.
- $\mu 4, \mu 6$ et $\mu 8$ avec un lot de taille égale à 4 (franchissement de $t2_{[3]}$) correspondant à la taille d'une commande d'approvisionnement.

La fréquence moyenne d'approvisionnement du stock en fonction des paramètres $\lambda 1, \lambda 2$, qu'on note $FA_{moy}(\lambda 1, \lambda 2)$, correspond à la fréquence moyenne de franchissement de la transition $t2$ et donc à la somme des fréquences moyennes de franchissement, $F(t2_{[3]})$ et $F(t2_{[4]})$, des transitions respectives $t2_{[3]}$ et $t2_{[4]}$ générées par la transition lot $t2$ lors de l'évolution du système. Le calcul se fait comme suit :

$$FA_{moy}(\lambda 1, \lambda 2) = F(t2_{[3]}) + F(t2_{[4]}) = \sum_{i|\mu_i \in S(t2_{[3]})} \lambda 2_{[3]} \times \pi_i + \sum_{i|\mu_i \in S(t2_{[4]})} \lambda 2_{[4]} \times \pi_i \quad (4.9)$$

avec

- $S(t2_{[3]}) = \{\mu3, \mu5, \mu7, \mu9\}$ est l'ensemble des états où la transition lot $t2$ est franchie avec l'indice de franchissement 3 (franchissement de $t2_{[3]}$).
- $S(t2_{[4]}) = \{\mu4, \mu6, \mu8\}$ est l'ensemble des états où la transition lot $t2$ est franchie avec l'indice de franchissement 4 (franchissement de $t2_{[4]}$).

Comme nous avons supposé dans l'énoncé de cette étude que les délais d'approvisionnement ne dépendent pas de la taille du lot approvisionné en fixant $\lambda2_{[3]} = \lambda2_{[4]} = \lambda2$, nous obtenons :

$$FA_{moy}(\lambda1, \lambda2) = F(t2_{[3]}) + F(t2_{[4]}) = \sum_{i | \mu_i \in S(t2_{[3]}) \cap S(t2_{[4]})} \lambda2 \times \pi_i \quad (4.10)$$

$$= \lambda2 \times (\pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8 + \pi_9)$$

$$FA_{moy}(\lambda1, \lambda2) = \frac{2\lambda1 \times [4(\lambda2)^5 + 97(\lambda1)^2(\lambda2)^3 + 135(\lambda1)^3(\lambda2)^2 + 82(\lambda1)^4(\lambda2) + 32(\lambda2)^4(\lambda1) + 16(\lambda1)^5]}{164(\lambda1)^5\lambda2 + 326(\lambda1)^4(\lambda2)^2 + 361(\lambda2)^3(\lambda1)^3 + 32(\lambda1)^6 + 226(\lambda2)^4(\lambda1)^2 + 72(\lambda2)^5\lambda1 + 9(\lambda2)^6}$$

4.5.5 Coût moyen de passation de commande

Les commandes d'approvisionnement sont passées par le franchissement de la transition immédiate $t3$. Comme pour chaque franchissement de $t3$, il y a un franchissement correspondant de la transition lot $t2$ donc, la fréquence moyenne de passation des commandes (fréquence moyenne de $t3$, $F(t3)$) est égale à la fréquence moyenne d'approvisionnement du stock (fréquence moyenne de $t2$, $F(t2)$) que nous venons de calculer.

Connaissant le prix unitaire de passation d'une commande d'approvisionnement, noté par C_c , la fonction du coût moyen (par unité de temps) de passation d'une commande, qu'on note $CC_{moy}(\lambda1, \lambda2)$ est donnée par :

$$CC_{moy}(\lambda1, \lambda2) = C_c \times F(t3) = C_c \times F(t2) \quad (4.11)$$

$$CC_{moy}(\lambda1, \lambda2) = C_c \times \frac{2\lambda1 \times [4(\lambda2)^5 + 97(\lambda1)^2(\lambda2)^3 + 135(\lambda1)^3(\lambda2)^2 + 82(\lambda1)^4(\lambda2) + 32(\lambda2)^4(\lambda1) + 16(\lambda1)^5]}{164(\lambda1)^5\lambda2 + 326(\lambda1)^4(\lambda2)^2 + 361(\lambda2)^3(\lambda1)^3 + 32(\lambda1)^6 + 226(\lambda2)^4(\lambda1)^2 + 72(\lambda2)^5\lambda1 + 9(\lambda2)^6}$$

4.5.6 Coût moyen d'achat

L'approvisionnement du stock se fait de l'extérieur via un fournisseur en franchissant la transition lot $t2$. Ce type d'approvisionnement se fait par achat. Connaissant le coût unitaire d'achat d'une unité de produit, qu'on note C_a , nous pouvons connaître aisément le coût moyen d'achat par unité de temps, qu'on note $CA_{moy}(\lambda1, \lambda2)$. Il

s'obtient par la relation suivante :

$$\begin{aligned} CA_{moy}(\lambda 1, \lambda 2) &= \left[3 \times C_c \times F(t2_{[3]}) \right] + \left[4 \times C_c \times F(t2_{[4]}) \right] \\ &= 3 \times \left(\sum_{i: \mu_i \in S(t2_{[3]})} \lambda 2_{[3]} \times \pi_i \right) + 4 \times \left(\sum_{i: \mu_i \in S(t2_{[4]})} \lambda 2_{[4]} \times \pi_i \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

On observe bien, que dans cette relation, la taille des lots d'approvisionnement intervient puisque le coût unitaire est donné pour une unité de produit. Lorsque $t2_{[3]}$ (resp. $t2_{[4]}$) est franchie, le stock est approvisionné d'une quantité égale à 3 (resp. 4). L'utilisation de la fréquence moyenne de franchissement de des transitions $t3_{[3]}$ et $t3_{[4]}$ générées par la transition lot $t3$, est du fait que la fréquence moyenne d'achat correspond à la fréquence moyenne d'approvisionnement du stock.

Comme nous l'avons supposé dans l'énoncé de cette étude, les délais d'approvisionnement ne dépendent pas de la taille du lot approvisionné en fixant $\lambda 2_{[3]} = \lambda 2_{[4]} = \lambda 2$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} CA_{moy}(\lambda 1, \lambda 2) &= 3 \times \left(\sum_{i: \mu_i \in S(t2_{[3]})} \lambda 2_{[3]} \times \pi_i \right) + 4 \times \left(\sum_{i: \mu_i \in S(t2_{[4]})} \lambda 2_{[4]} \times \pi_i \right) \\ &= 7 \times C_a \times \left(\sum_{i: \mu_i \in S(t2_{[3]}) \cap S(t2_{[4]})} \lambda 2 \times \pi_i \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$CA_{moy}(\lambda 1, \lambda 2) = 7 \times C_a \times \frac{2\lambda_1 \times [4(\lambda_2)^5 + 97(\lambda_1)^2(\lambda_2)^3 + 135(\lambda_1)^3(\lambda_2)^2 + 82(\lambda_1)^4(\lambda_2) + 32(\lambda_2)^4(\lambda_1) + 16(\lambda_1)^5]}{164(\lambda_1)^5\lambda_2 + 326(\lambda_1)^4(\lambda_2)^2 + 361(\lambda_2)^3(\lambda_1)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4(\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5\lambda_1 + 9(\lambda_2)^6}$$

4.5.7 Taux de couverture

Le taux de couverture d'un stock, tel qu'il est défini dans la section précédente, est le rapport du stock moyen sur la demande moyenne. Le stock moyen est déjà calculé et il correspond au M-marquage moyen de la place $p1$, $M_{moy}(p1)$. Il reste à déterminer la demande moyenne sachant que la demande client est modélisée par la transition $t1$.

Lorsque le stock est disponible, la demande client est exécutée en franchissant les deux transitions $t1_{[1]}$ et $t1_{[2]}$ à la fois. Ainsi, le niveau du stock va diminuer de 3 unités, puisque franchir $t1_{[1]}$ enlève un jeton dans $p1$ et franchir $t1_{[2]}$ enlève 2 jetons dans $p1$. La demande moyenne est égale à $1/\lambda 1_{[1]} + 2/\lambda 1_{[2]}$. La fonction du taux de couverture du stock en fonction des paramètres $\lambda 1, \lambda 2$, noté $TC(\lambda 1, \lambda 2)$, est donc :

$$TC(\lambda 1, \lambda 2) = \frac{M_{moy}(p1)}{(1/\lambda 1_{[1]}) + (2/\lambda 1_{[2]})} \quad (4.14)$$

Comme nous avons considéré que $\lambda_{1[1]} = \lambda_{1[2]} = \lambda_1$ et en remplaçant $M_{\text{moy}}(p1)$, nous obtenons la fonction suivante :

$$TC(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \times \lambda_2 \times [1126(\lambda_2)^2 (\lambda_1)^3 + 569(\lambda_1)^4 \lambda_2 + 88(\lambda_1)^5 + 932(\lambda_2)^3 (\lambda_1)^2 + 341(\lambda_2)^4 \lambda_1 + 46(\lambda_2)^5]}{3 \times [164(\lambda_1)^5 \lambda_2 + 326(\lambda_1)^4 (\lambda_2)^2 + 361(\lambda_2)^3 (\lambda_1)^3 + 32(\lambda_1)^6 + 226(\lambda_2)^4 (\lambda_1)^2 + 72(\lambda_2)^5 \lambda_1 + 9(\lambda_2)^6]}$$

4.6. Analyse de performances du système

Nous terminons cette étude analytique, par les tracés représentant quelques mesures de performances en fonction des deux paramètres λ_1 , λ_2 . C'est un moyen efficace pour visualiser et analyser la variation des performances du système en fonction de ces paramètres liés au taux de la demande client et au délai d'approvisionnement.

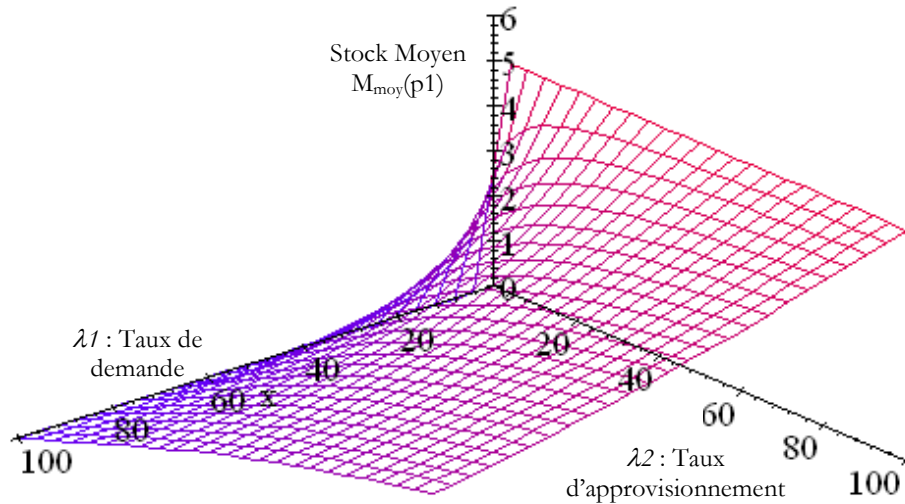


Figure 4.15. Variation du stock moyen en fonction de λ_1 et λ_2

Sur la figure 4.15, on observe logiquement que le stock moyen augmente lorsque le délai moyen d'approvisionnement diminue (λ_2 augmente) et il diminue lorsque le taux de la demande augmente.

L'allure de la variation du coût de stockage moyen en fonction des paramètres λ_1 et λ_2 reste identique puisqu'il suffit de multiplier le stock moyen par un scalaire (le prix unitaire de stockage) pour l'obtention du coût moyen de stockage.

De la même manière, on observe sur la figure 4.16 que la probabilité que le stock soit vide augmente lorsque le taux de demande client, λ_1 , augmente et/ou lorsque le délai moyen d'approvisionnement diminue (i.e., λ_1 augmente).

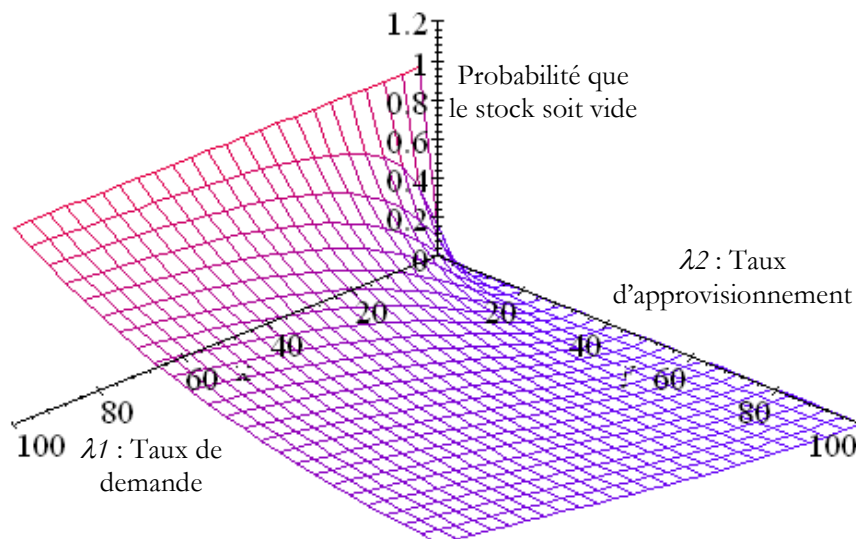


Figure 4.16. Variation de la probabilité que le stock soit vide en fonction de λ_1 et λ_2

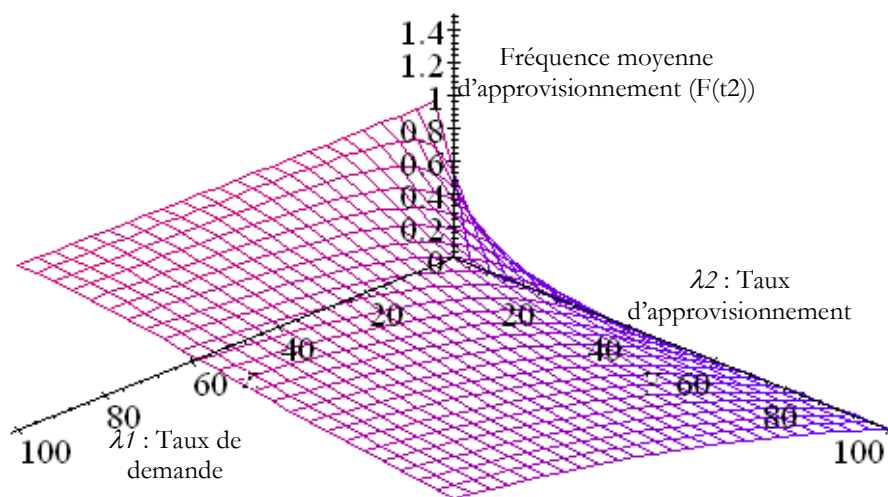


Figure 4.17. Variation de la fréquence moyenne d'approvisionnement en fonction de λ_1 et λ_2

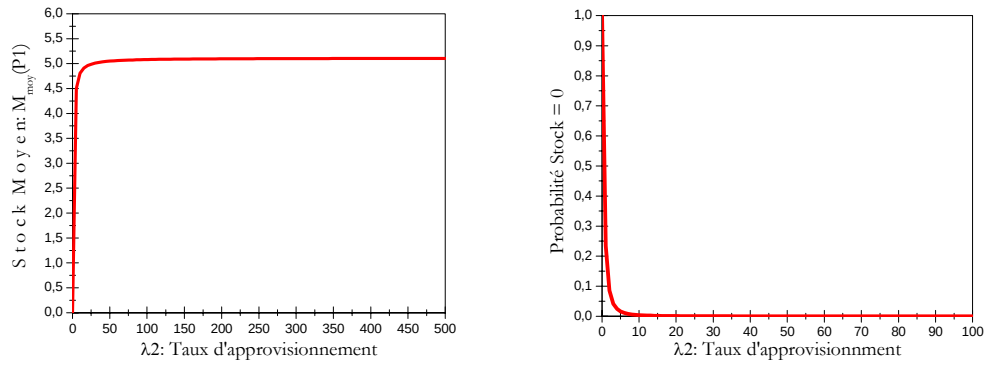


Figure 4.18. Variation du stock moyen et la probabilité d'un stock vide en fonction de λ_2 . ($\lambda_1 = 1$)

5. Etude d'un système de stockage par simulation

Dans cette section, nous présentons une étude d'un système de gestion de stock à basée sur la simulation à événements discrets du modèle BDSPN qui le représente. Cette étude déjà présentée dans [LAB 05c], montre que les BDSPNs se prêtent avec succès à la simulation pour l'étude des systèmes complexes qui ne permettent pas une étude analytique. L'apport d'un BDSPN comme un modèle de simulation reste évidemment justifié puisque la fiabilité des résultats de la simulation repose toujours sur la qualité du modèle utilisé. Le modèle de simulation bénéficie à la fois du support graphique naturel du BDSPN qui est d'une aide précieuse dans l'analyse, et du formalisme mathématique permettant le développement d'un outil de simulation et de méthodes numériques efficaces.

5.1. Description et modélisation du système

Le système de stockage considéré est modélisé par le BDSPN de la figure 4.19. Le stock (place $p1$) est géré par la politique (s, S) avec révision continue. Hormis l'opération de passation de commandes d'approvisionnement (transition immédiate $t3$), les autres opérations du système sont stochastiques. Le stock est soumis à deux types de demandes indépendants : demandes de tailles 1 et demandes de tailles 2. Elles arrivent via les transitions exponentielles (processus de Poisson) $t4$ et $t5$. Les demandes reçues par le franchissement des transitions $t4$ et $t5$ sont exécutées par leur ordre d'arrivée dans $p4$. Les multiples commandes d'approvisionnement pouvant se trouver dans $p3$, sont également traitées par leurs ordres d'arrivée. Nous considérons que les délais de livraison des clients et les délais d'approvisionnement du stock ne dépendent pas de la taille des lots demandés par les clients ou commandés par le gestionnaire du stock. Autrement dit, les délais de

franchissement des transitions lots $t1$ et $t2$ modélisant, respectivement, l'opération de livraison aux clients et l'opération d'approvisionnement du stock ne dépendent pas des tailles des jetons lots qui les franchissent.

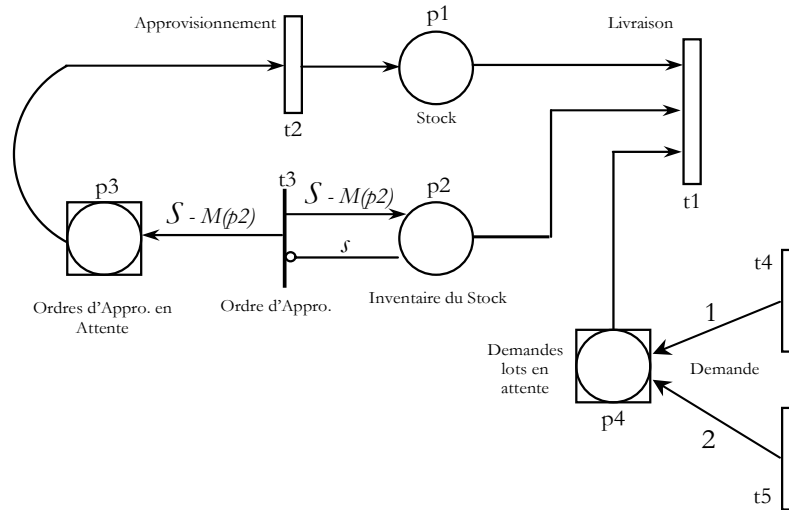


Figure 4.19. Modèle BDSPN du système de stockage à étudier

Contrairement au modèle (figure 4.11) de l'étude précédente, le modèle BDSPN du système considéré pour cette étude est non borné. En effet, il présente deux transitions sources, $t4$ et $t5$, qui sont toujours franchissables. La construction de graphe des μ -marquages va conduire à un graphe infini. La non bornitude du modèle dans ce cas ne nous permet pas d'effectuer une étude analytique. Une analyse de paramètres basée sur la simulation à événements discrets du modèle BDSPN fait l'objet de la suite de cette application.

5.2. Analyse de l'influence des paramètres

L'étude des paramètres des systèmes logistiques représente une des études les plus privilégiées en simulation dans la mesure où elle permet de mieux comprendre le comportement du système et de quantifier l'influence de ses paramètres sur sa performance. Les résultats que nous présentons dans la suite de cette étude, portent sur l'analyse de l'effet de la variation des différents paramètres du système sur ses différentes performances et sur son comportement.

5.2.1 Variation du seuil de re-complètement

Les différentes courbes de la figure ci-dessous représentent les résultats obtenus sur les effets de la variation du seuil de re-complètement, s , du stock sur les performances du système. Les paramètres considérés sont : $S = 10$; $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_5 = 0.5$;

et le point de reapprovisionnement, s , varie entre 1 et 10.

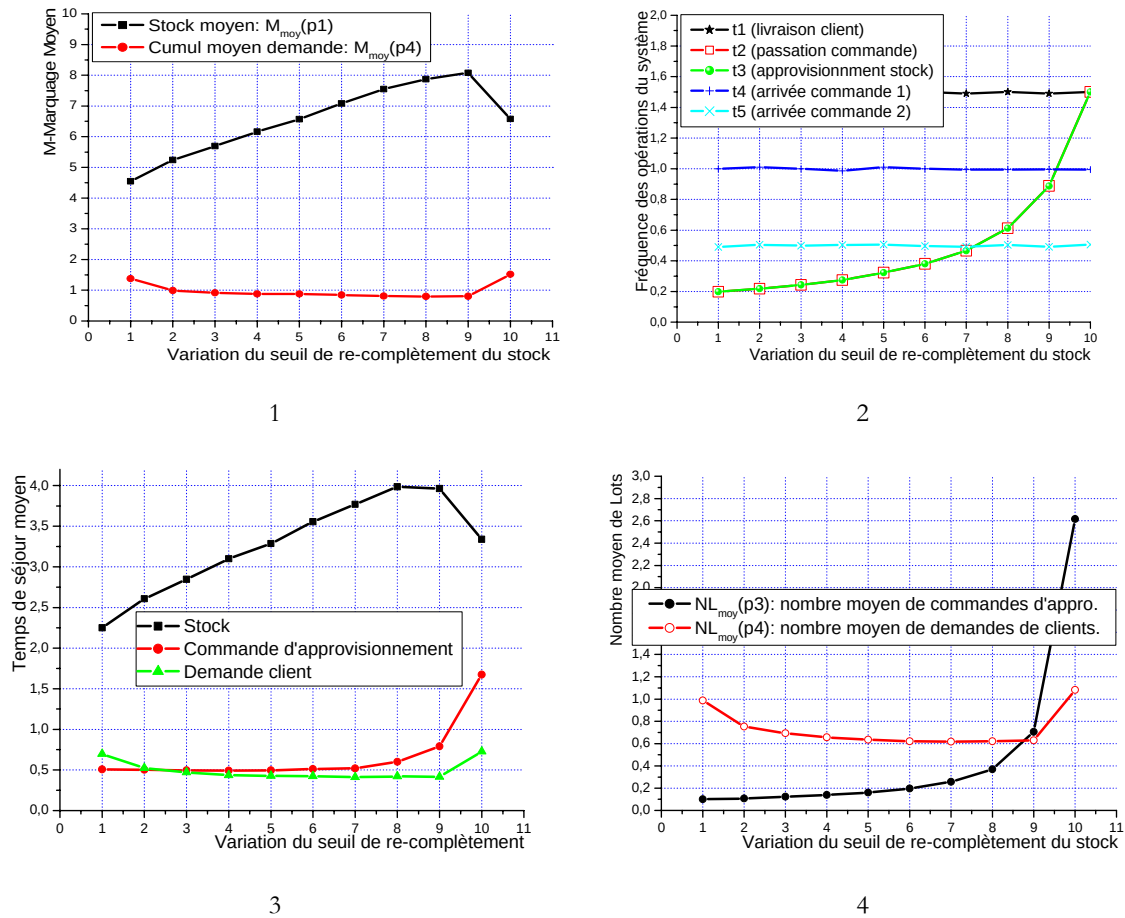


Figure 4.20. Effets de la variation du seuil de re-complètement s du stock

Les différentes courbes montrent que la variation du point de re-complètement s affecte pratiquement toutes les performances du système notamment le stock moyen ; le temps de séjour moyen : des produits dans le stock, des demandes des clients... ; le nombre moyen de la demande en attente ; etc. Pour les paramètres choisis, on peut constater sur la courbe donnant l'effet sur le stock moyen, qu'à partir du point $s = 1$ jusqu'au point $s = 9$, le stock moyen augmente et la demande moyenne diminue. Cependant, le stock moyen pour $s = 10$ est inférieur au stock moyen donné pour des valeurs inférieures de s . Ceci est dû au nombre moyen de commandes d'approvisionnement relativement supérieur (courbe donnant l'effet sur les fréquences moyenne) qui génère du retard pour l'arrivée des commandes au stock. De plus pour $s = 10$, les commandes qui arrivent sont relativement de tailles petites (1 ou 2). Logiquement, on constate sur la courbe (b) l'augmentation de la fréquence moyenne de l'approvisionnement quand s augmente.

5.2.2 Variation du délai d'approvisionnement

Les différentes courbes de la figure ci-dessous représentent les résultats obtenus sur les effets de la variation du délai d'approvisionnement du stock sur le comportement et les performances du système. Les paramètres considérés sont : $S = 10$, $s = 5$; $\lambda_1 = 4$; $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_5 = 0.5$; le délai moyen d'exécution d'une commande d'approvisionnement ($1/\lambda_2$) varie entre 0 et 2.5j. La figure (a), illustre l'évolution du niveau du stock et de la demande des clients quand le temps d'exécution des commandes d'approvisionnement est faible (délai d'approvisionnement faible). Dans ce cas, on constate bien que le stock est dépassé par le flux de la demande des clients contrairement au cas de la figure (b) où le délai d'approvisionnement est plus élevé. Sur les figures (c) et (d), on voit bien à partir de quel point (délai d'approvisionnement moyen) le stock est dépassé par la demande des clients.

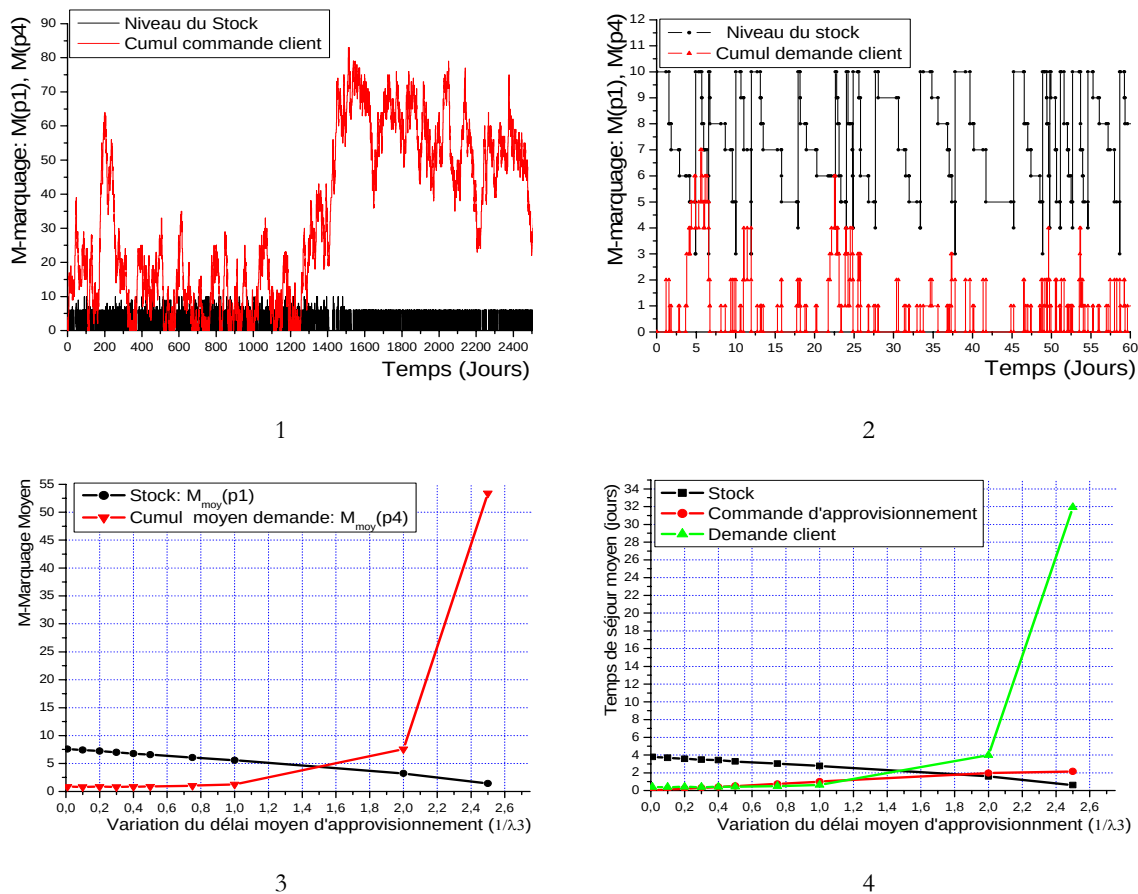


Figure 4.21. Effets de la variation du délai moyen d'approvisionnement

5.2.3 Variation du taux de la demande

Les différentes courbes de la figure ci-dessous illustrent les effets de la variation du taux de la demande des clients sur les performances du système. Les paramètres considérés sont : $S = 10$, $s = 5$; $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_4 = 1$; le délai moyen d'arrivée d'une commande lot de taille 2 ($1/\lambda_5$) varie entre 0.75j et 4 j.

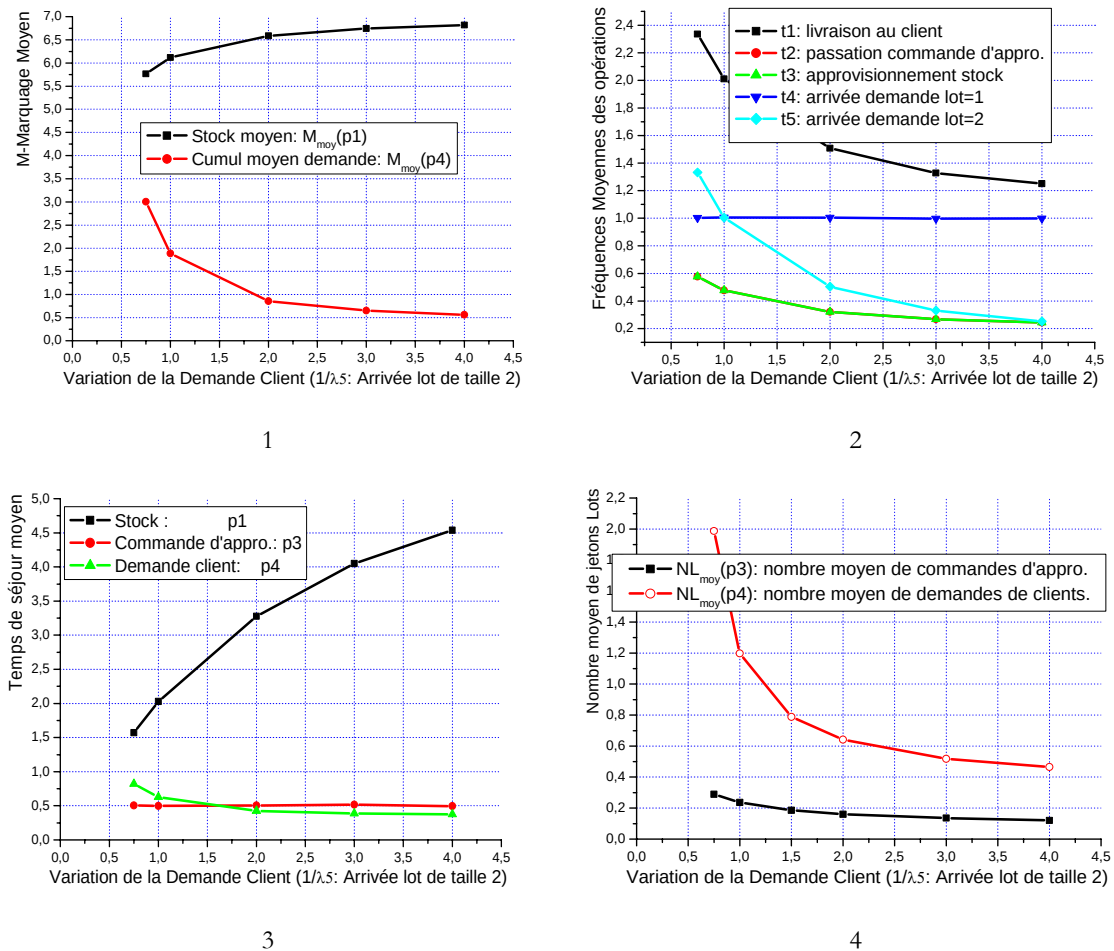


Figure 4.22. Effets de la variation du taux de la demande client

6. Application à l'étude d'une chaîne logistique

Dans cette section nous montrons comment les BDSPNs peuvent aider efficacement à modéliser et à étudier les performances d'une chaîne logistique. Nous nous proposons de reprendre une étude d'un modèle typique que nous avons déjà présentée dans [LAB 05a].

6.1. Description du système d'étude

La chaîne logistique considérée est schématisée par la figure 4.23. Il s'agit d'un système logistique composé de : (a) 4 types de clients qui effectuent des demandes lots aléatoirement (b) Deux stocks de deux types de produits qu'on note A et B . Les deux stocks sont associés à des politiques de gestion ($s1, S1$) et ($s2, S2$) semblables à celle que nous avons traité dans l'application analytique sur les systèmes de gestion de stocks. (c) Deux fournisseurs où les deux stocks s'approvisionnent. Les fournisseurs agissent sur ordres (lots) donnés par les deux stocks. (d) Un atelier d'assemblage par lots lié au stock A et au stock B et aux demandes des clients. L'assemblage se fait sur ordres lots des clients. (e) 3 logistiques de transports qui lient respectivement le fournisseur 1 au stock A , le fournisseur 2 au stock B et le dépôt de la sortie du système d'assemblage aux clients. Notons que les commandes des clients sont de différentes tailles variant de 1 à 4 suivant différentes lois de Poisson pour chaque type de clients. Le but de cette application est de montrer l'efficacité des BDSPNs à modéliser et à évaluer les performances des systèmes logistiques.

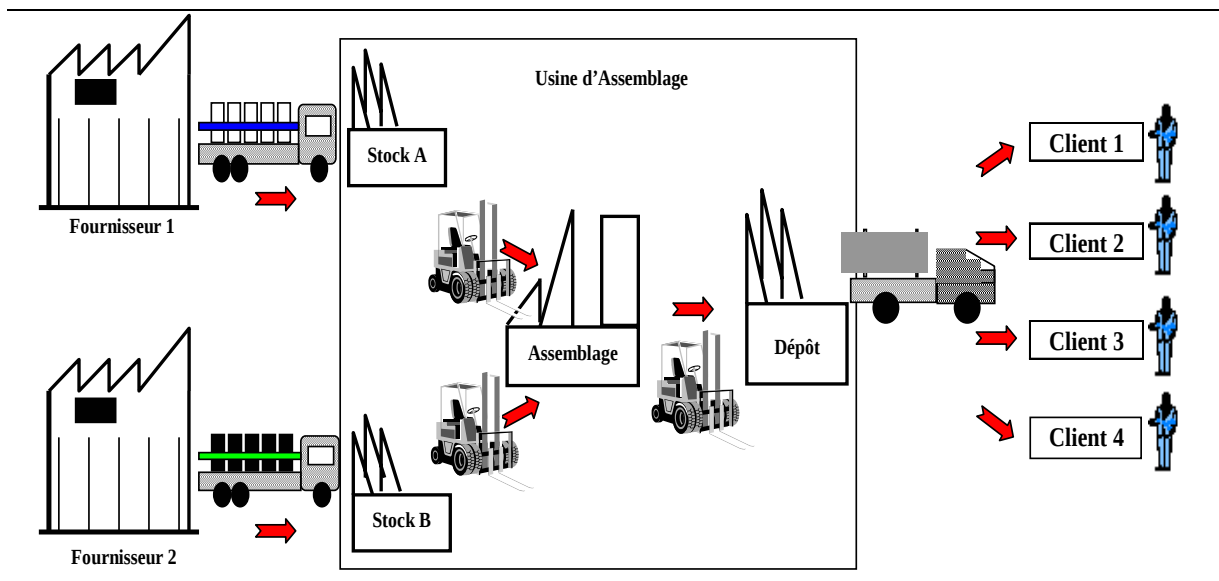


Figure 4.23. Structure de la chaîne logistique considérée

6.2. Modélisation du système considérée

Le modèle BDSPN de la chaîne logistique est représenté sur la figure 4.24.

- Les commandes (lots) des clients arrivent via les transitions stochastiques $t10, t11, t12$ et $t13$ et se mettent en attente dans la place lot $p12$. Les deux stocks A et B sont modélisés respectivement par les places $p1$ et $p4$.
- Les politiques de gestion de ces deux stocks sont modélisées par l'ensemble constitué

par ($p2$ -inventaire du stock A- ; $t3$ -opération de passation des ordres d'approvisionnement- ; $p7$ -réception des ordres d'approvisionnement- ; $t2$ -opération d'approvisionnement du fournisseur 1- ; et l'ensemble des arcs associés) pour le stock A et par l'ensemble ($p4$ -inventaire du stock B- ; $t4$ -opération de passation des ordres d'approvisionnement- ; $p8$ -réception des ordres d'approvisionnement- ; $t5$ -opération d'approvisionnement du fournisseur 2- ; et l'ensemble des arcs associés) pour le stock B.

- Les fournisseurs 1 et 2 sont modélisés par les ensembles suivants : ($t8$ -réception et enregistrement des ordres d'approvisionnement- ; $p10$ -attente de préparation des commandes-, $t6$ -préparation des commandes- ; $p6$ -transport des commandes en cours- ; et les arcs associés) pour le fournisseur 1 et par ($t9$ -réception et enregistrement des commandes d'approvisionnement- ; $p11$ -attente de préparation des commandes ; $t7$ -préparation des commandes- ; $p9$ -transport de la commande en cours-, et les arcs associés).

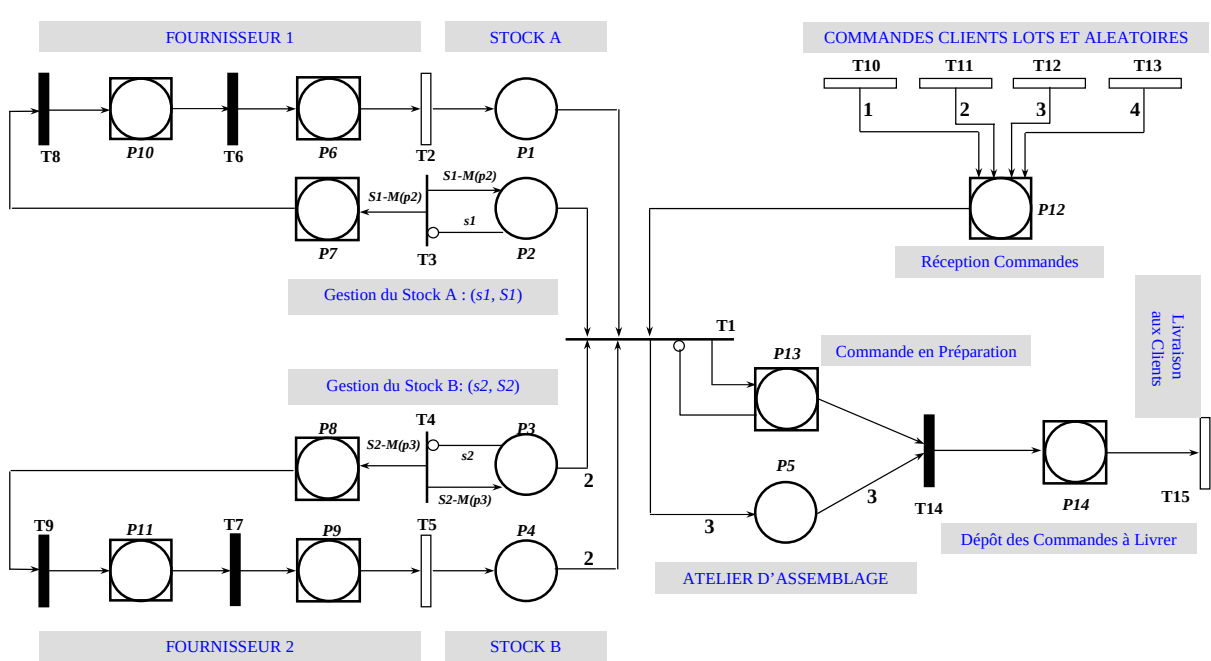


Figure 4.24. Modèle BDSPN de la chaîne logistique considérée

- Le système d'assemblage est modélisé par l'ensemble composé de : $t1$ -début de l'opération d'assemblage- ; $p13$ - commande client en cours d'assemblage- ; $p5$ - produits A et B nécessaires pour assembler un lot suivant la taille de la commande du client - ; $t14$ -opération d'assemblage-, et les arcs associés. Et enfin, la place $p14$ modélise le dépôt des commandes des clients prêtes à livrer via la transition $t15$ représentant l'opération de transport aux clients et donc l'opération de livraison.
- Notons que les poids des arcs ($p3, t1$) et ($p4, t1$) est égale à 2 du fait que l'assemblage

d'un lot de produit de taille b nécessite un nombre égale à b produits de type A et $2b$ produits de type B . L'assemblage génère au total $3b$ produits dans la place $p5$.

Les temporisations associées aux transitions sont les délais des activités de la chaîne pouvant dépendre ou non des tailles des lots traités comme nous l'avons expliqué dans les sections précédentes.

6.3. Evaluation et analyse de performances

La simulation à événements discrets du modèle BDSPN de la chaîne logistique considérée par l'outil de simulation que nous avons réalisé, nous permet aisément d'évaluer ses performances et d'analyser son comportement au niveau de ses différentes locations. Les résultats de l'étude de la chaîne logistique sont donnés pour les paramètres et les caractéristiques suivants :

- Les politiques de gestion des deux stocks sont de type (s, S) avec révision continue ($t3$ et $t4$ sont immédiates). Les paramètres de gestion du stock A et du stock B sont fixés respectivement à $(s1, S1) = (20, 50)$ et $(s2, S2) = (50, 100)$.
- Les demandes des clients arrivent dans le système suivant un processus de Poisson spécifié pour les différentes tailles des lots. Les transitions associées $t10, t11, t12, t13$ sont exponentielles. Les délais moyens d'inter-arrivées entre deux demandes de clients sont : $D_{moy}(t10) = 2j$, $D_{moy}(t11) = 2j$, $D_{moy}(t12) = 4j$ et $D_{moy}(t13) = 4j$. Les demandes sont traitées par leur ordre d'arrivée (les places lots $p12$ et $p14$ sont gérées en FIFO).
- Les opérations de livraison des commandes aux clients ($t15$) et les opérations d'approvisionnement des stocks ($t2, t5$) ont des délais distribués exponentiellement. Les délais moyens de ces opérations associés aux transitions dans le BDSPN sont : $D_{moy}(t15) = 0.5j$, $D_{moy}(t2) = D_{moy}(t5) = 1$.
- Les délais des opérations suivantes : réception et traitement des commandes d'approvisionnement ($t8, t9$), préparation des commandes pour l'approvisionnement ($t6, t7$) et assemblage des lots ($t14$) sont considérés déterministes : $D(t6) = D(t7) = D(t8) = D(t9) = 1j$, $D(t14) = 0.1j$.

6.3.1 Evaluation des performances du système

La richesse du modèle BDSPN, nous permet d'évaluer aisément d'importants indices de performances de la chaîne qu'il représente à n'importe quel niveau. Le tableau 4.1 donne quelques mesures de performances du système pour les paramètres et les caractéristiques que nous avons fixés.

L'évaluation des performances de la chaîne logistique via son modèle BDSPN est effectué comme suit.

- Le niveau moyen du stock A (resp. du stock B) correspond au M-marquage moyen de la place $p1$ (resp. $p4$). Le temps de séjour moyen d'un produit A dans le stock A (resp. d'un produit B dans le stock B) correspond au temps de séjour d'un jeton discret dans la place $p2$ (resp. $p4$).
- Le nombre moyen de commandes de clients en attente de service (resp. en attente de livraison) correspond au nombre moyen de jetons lots (toutes tailles confondues) dans la place lot $p12$ (resp. $p14$).
- La fréquence moyenne d'approvisionnement du stock A (resp. du stock B) correspond à la fréquence moyenne de franchissement de la transition $t2$ (resp. $t5$).
- Le délai moyen d'approvisionnement du stock A (resp. B) correspond au temps de séjour moyen total d'un jeton lot dans les places lots $p6$, $p10$ et $p7$ (resp. $p8$, $p11$ et $p9$).
- Le temps d'attente moyen généré par la possibilité de recevoir de multiples demandes de clients partageant un même système d'assemblage qui traitent les demandes une à une se calcule par le temps de séjour moyen d'un jeton lot dans la place lot $p12$.
- Le délai d'assemblage d'un lot suivant la taille commandée correspond au temps de séjour d'un jeton lot dans la place lot $p13$. Ce délai correspond également à la temporisation de la transition $t14$ du fait que $p13$ reçoit qu'un lot à la fois.
- Le temps moyen de livraison d'un client après l'assemblage de sa commande correspond au temps de séjour moyen d'un lot dans la place lot $p14$. Enfin, le temps moyen de service d'un client correspond à la somme des temps de séjour d'un lot dans les places lots $p12$, $p13$ et $p14$.

Stock moyen [unités]		Temps de séjour moyen [jours] d'un		Nombre moyen de commandes clients [commandes]		Fréquence moyenne d'approvisionnement [Nbre appro/ jour]	
Stock A	Stock B	produit dans le stock A	produit dans le stock B	en attente de service	en attente de livraison	du stock A	du stock B
25,73	56,11	7,936	8,656	0,048	2,942	0,102	0,121
Délai moyen d'approvisionnement [jours]		Temps d'attente moyen d'une demande client avant début de service [jours]		Temps moyen [jours] d'(e)		Temps de service moyen d'un client [jours]	
Stock A	Stock B			Assemblage d'un lot	Livraison d'un client		
3,000	3,000	0,034		0,100	1,975	2,109	

Tableau 4.1. Table de performances de la chaîne logistique

Connaissant les M-marquages moyens des places, les fréquences moyennes de franchissement des transitions et les temps de séjour moyens dans les places du BDSPN, d'autres indicateurs de performances de la chaîne logistique peuvent être évalués aisément. Il s'agit notamment des coûts de stockage, des coûts d'approvisionnement, des taux de ruptures des stocks et du niveau de service client. Ceci se fait de la même manière que dans les applications faites sur les systèmes de gestion de stocks de la section précédente.

6.3.2 Analyse du comportement du système

Les différentes représentations des figures 4.25, 4.26, 4.27 et 4.28 illustrent l'évolution de la chaîne logistique au niveau de ses différentes locations.

- L'évolution du M-marquage des places $p1$ et $p4$, notés par $M(p1)$ et $M(p4)$, représente l'évolution respectives du stock A et du stock B .
- L'évolution du nombre de jetons lots dans les places lots $p12$ et $p14$, notés par $N(p12)$ et $N(p14)$, représente respectivement l'évolution du nombre de demandes des clients en attente de traitement et l'évolution du nombre des demandes des clients en attente de livraison.
- L'évolution des commandes d'approvisionnement des deux stocks est représentée par l'évolution du M-marquage des places lots $p7$ et $p8$ donnant les quantités commandées à chaque demande d'approvisionnement.
- Le M-marquage de la place lot $p13$, noté par $M(p13)$ représente l'évolution du système de livraison de la chaîne logistique.

Comme nous le constatons, le modèle BDSPN de la chaîne logistique est très riche en informations sur la dynamique de la chaîne logistique. L'évolution du M-marquage et du μ -marquage des différentes places du modèle traduit l'évolution des stocks, de la demande des clients, du système d'assemblage, du système d'approvisionnement, etc. Les franchissements des différentes transitions du BDSPN traduit les différentes activités qui s'effectuent lors de l'évolution de la chaîne logistique.

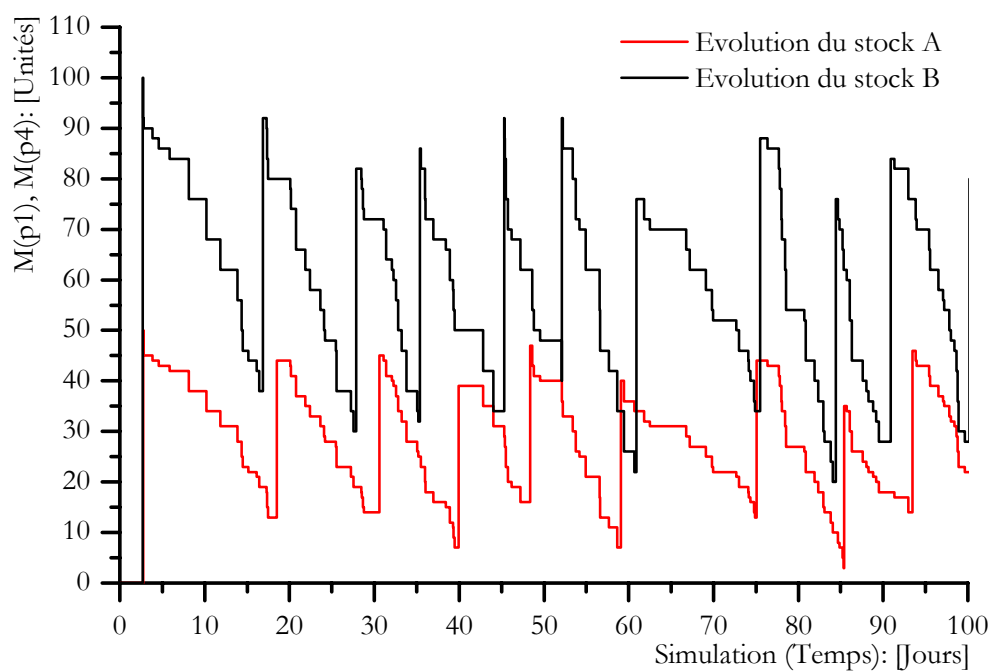


Figure 4.25. Comportement des deux systèmes de stockage

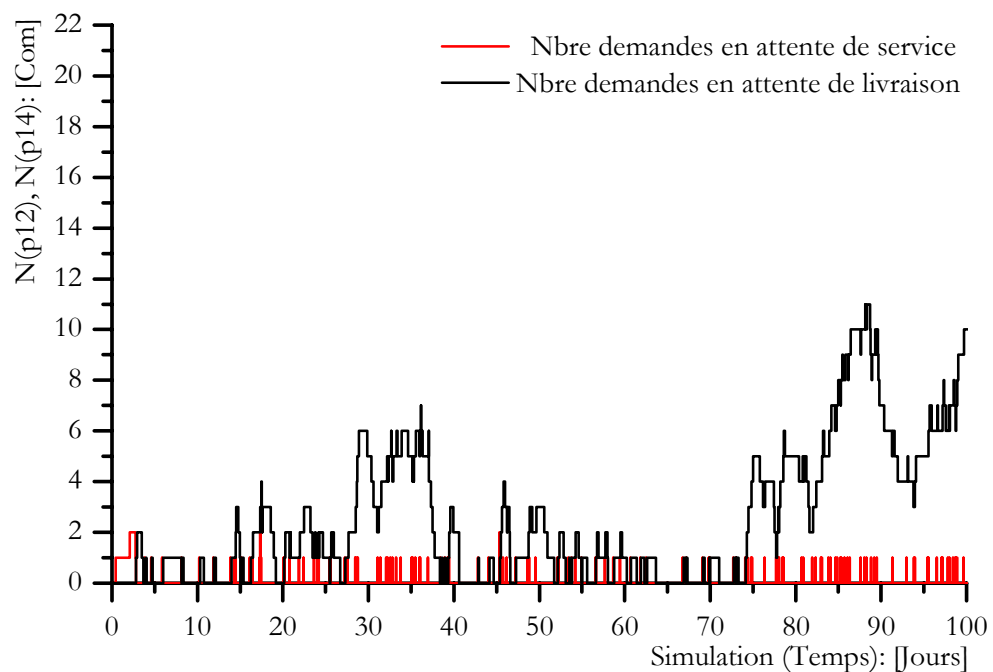


Figure 4.26. Comportement de la demande des clients à l'arrivée et à la sortie du système

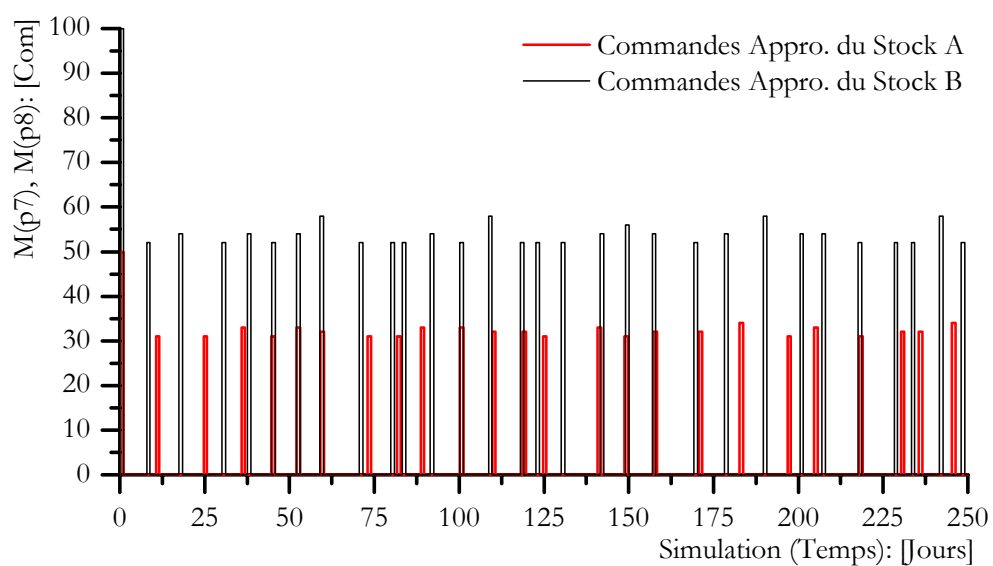


Figure 4.27. Passation et exécution des commandes d'approvisionnement des stocks

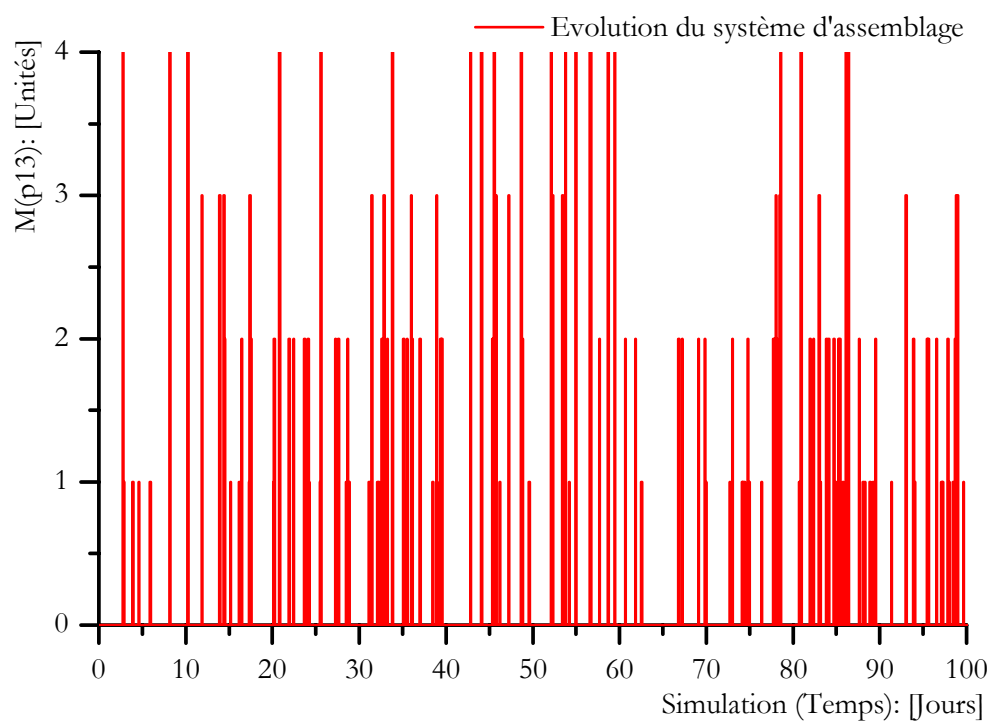


Figure 4.28. Encours du système d'assemblage

7. Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de montrer comment les BDSPNs peuvent aider à modéliser et analyser les performances des systèmes logistiques et à apporter des informations sur leur comportement et les effets de leurs paramètres. L'efficacité et l'intérêt des BDSPNs sont montrés au travers des études que nous avons déjà présentées dans plusieurs publications notamment [LAB 05a], [LAB 05b], [LAB 05c], [LAB 04a], [LAB 04b], [CHE 05], [CHE 03], [CHE 02], [CHE 01].

Au début de ce chapitre, on s'est intéressé aux systèmes de gestion de stocks qui occupent une part importante dans la chaîne logistique. Après la classification et la description d'un ensemble de politiques de gestion de stocks les plus utilisées dans la pratique, nous avons opté pour une modélisation modulaire de ces différentes politiques de gestion. Nous avons proposé des modèles représentant des politiques de gestion par le point de commande, des politiques de gestion calendaire et des politiques combinant les deux à la fois. La description et l'analyse des modèles développés ont montré l'efficacité des BDSPNs à décrire correctement et finement le comportement de cette classe de système. Nous avons vu que les modèles proposés peuvent constituer des sous réseaux pouvant être utilisés pour la modélisation de systèmes de stockage multi échelons ou pour être intégrés dans un modèle représentant une chaîne logistique. La généralisation et l'extension de ces modèles pour modéliser d'autres politiques plus spécifiques sont également discutées.

Après la phase de modélisation, nous nous sommes intéressé à l'étude de performances de ces systèmes. Dans un premier temps, nous avons présenté l'essentiel sur l'évaluation d'une politique de gestion de stock. Ensuite, nous avons proposé deux approches distinctes pour l'analyse et l'évaluation de performances d'un système de stockage. Il s'agit d'une approche analytique basée sur le graphe des μ -marquages du BDSPN, représentant l'évolution dynamique de l'état du système modélisé, utilisé conjointement avec le processus stochastique associé. La résolution du processus permet de déterminer la distribution de probabilité des états du système. Ainsi, l'évaluation des différentes performances du système est alors possible. La deuxième technique est basée sur la simulation à événements discrets du modèle BDSPN. Cette technique est particulièrement riche pour l'analyse du comportement puisque la simulation repose sur un modèle correcte et fidèle au comportement du système. Les deux études présentées à titre d'application, constituent à la fois une démonstration de l'efficacité de notre méthodologie et également un support méthodologique pour d'autres applications sur les systèmes de gestion de stocks.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons montré l'intérêt des BDSPNs pour modéliser et étudier une chaîne logistique. Nous avons opté pour une étude d'un modèle typique afin de voir clairement et efficacement comment un BDSPN

peut reproduire finement le comportement d'une chaîne logistique au niveau de ses différentes locations et ainsi d'analyser son comportement. Toutefois, une étude plus élaborée portant sur un cas industriel d'une chaîne logistique est déjà présentée dans [CHE 05], [CHE 02], [CHE 01]. Le couplage du modèle BDSPN et d'un algorithme génétique a permis d'optimiser les paramètres des politiques de stockage afin de minimiser une fonction objectif concernant les coûts de stockage avec contrainte d'un niveau de service supérieure à 95%. Ainsi, nous avons pu montrer que les BDSPNs ne sont pas développés dans le simple but de proposer un nouveau modèle de réseaux de Petri mais qu'ils apportent beaucoup d'intérêts et d'efficacité pour l'étude des systèmes logistiques, des systèmes de gestion de stocks et plus généralement des systèmes à événements discrets où l'aspect lot s'impose dans leur fonctionnement.

Nous allons maintenant conclure ce rapport de thèse en donnant un bilan et en étudiant les perspectives.

Conclusion Générale

Ce travail de thèse s'intéresse à la modélisation et à l'analyse de performances des chaînes logistiques et des systèmes de gestion de stocks à l'aide des réseaux de Petri.

Dans ce contexte, nous avons développé un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques dits réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques (BDSPNs) capable de supporter les caractéristiques essentielles de cette classe de systèmes (aspect lot, aléas, politiques de gestion, multicités des flux, synchronisation de différents flux, ...). Leur formalisme graphique et mathématique est particulièrement adapté pour la modélisation de flux évoluant en quantités discrètes (lots de différentes tailles et variables) et ils permettent de prendre en compte des activités plus spécifiques telles que les commandes des clients, l'approvisionnement des stocks, la production et le transport en mode lot. Leur dynamique permet de représenter correctement cet aspect lot qui n'est pas sans importance dans le comportement (exécution des activités, évolution des flux) et dans l'évaluation des systèmes logistiques et plus généralement des systèmes à événements discrets. Ainsi, les BDSPNs constituent un support performant aussi bien pour l'analyse mathématique que pour la simulation du système étudié.

Nos travaux, réalisés dans ce contexte, peuvent être synthétisés par les résultats suivants :

- ◆ *Etat de l'art sur la contribution des réseaux de Petri en logistique à l'heure actuelle*
- ◆ *Développement d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques (BDSPNs)*
- ◆ *Développement de techniques et d'outils d'analyse et d'évaluation de performances*
- ◆ *Développement d'un outil de simulation sous Delphi (interface graphique en perspective)*
- ◆ *Applications aux systèmes de gestion de stocks et aux chaînes logistiques*

La plupart de ces résultats et particulièrement l'intérêt du nouveau modèle et de la méthodologie qui lui est associée sont approuvés par différents comités de lecture de nos articles publiés. De plus, nos travaux sont issus d'une problématique industrielle soulevée lors d'une étude d'une chaîne logistique au niveau de la société AMP-SIMEL à Gevrey Chambertin (21). Une étude préliminaire du sujet, réalisée au sein de notre laboratoire, a montré la pertinence du choix des réseaux de Petri comme outil de modélisation et d'évaluation de performances. En revanche, la même étude a révélé que l'aspect lot est partout dans le système et en particulier autour des zones de stockage qui le compose. Ainsi, l'utilisation des RdPs classiques ne permettait pas de couvrir correctement cet aspect. C'est dans ce contexte, que le sujet de la thèse a été proposé et financé par le ministère de la recherche (MENRT).

Partant d'une étude de la littérature, nous constatons que les systèmes de production ont longtemps été le centre des travaux de recherche et que les réseaux de Petri constituent l'un des outils les plus développés et les plus utilisés pour leur modélisation et leur analyse de performances. Mais la prise de conscience des exigences actuelles des entreprises organisées en chaînes logistiques (réseaux) a favorisé une remise en cause des habitudes de production et d'organisation. Dans ce contexte, l'étude des problématiques que soulèvent les systèmes logistiques est au centre des préoccupations actuelles des entreprises. Le travail abordé dans cette thèse s'inscrit dans cette problématique relativement récente et très peu abordée par la communauté des réseaux de Petri.

L'état de l'art sur le positionnement des réseaux de Petri en logistique, réalisé dans le premier chapitre de ce rapport, est notre première contribution dans ce travail. Malgré la pertinence du choix de l'outil RdP pour la modélisation et l'analyse de performances de cette classe de systèmes, les quelques récentes études exploratoires réalisées dans ce contexte révèlent que les modèles utilisés ne couvrent pas toutes les caractéristiques de la plupart des chaînes logistiques et ils ne permettent pas de capturer et d'évaluer correctement les comportements lots omniprésents dans la dynamique de ces systèmes. Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit les BDSPNs comme un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques capable de supporter aux mieux les caractéristiques essentielles des systèmes logistiques et plus généralement des systèmes à événements discrets. Les techniques d'analyse du modèle ont fait l'objet du troisième chapitre. Malgré leur spécificité à la nouvelle sémantique de fonctionnement, l'analyse des BDSPNs garde le même esprit général que l'analyse des autres classes de réseaux Petri à sémantiques de fonctionnement discrète. Ainsi, la théorie des graphes et la théorie des processus stochastiques s'invitent dans leur méthodologie d'analyse et d'évaluation de performances. La différence majeure réside dans l'expressivité des BDSPNs capable de capturer graphiquement et analytiquement la dynamique du système étudié telle qu'elle est imposée par l'omniprésence des activités et des flux évoluant en mode lot. Enfin, le dernier chapitre de notre rapport, dédié aux applications aux systèmes de gestion de stocks et des chaînes logistiques, montre l'efficacité des BDSPNs à reproduire correctement et finement la dynamique de ces systèmes. Ainsi, leur étude repose sur un modèle efficace et fiable aussi bien pour l'analyse analytique que pour la simulation. En conclusion, les BDSPNs ne sont pas introduits dans le simple but de proposer un nouveau modèle mais ils répondent à une nécessité bien réelle.

Pour terminer ce rapport, nous émettons une certaine modération sur nos travaux aux travers d'un ensemble de perspectives qui visent à améliorer

d'avantage le potentiel de notre modèle et de la méthodologie d'analyse qui lui est associée. Nos principales perspectives sont de trois types. Nous les exposons dans les paragraphes qui suivent et nous discutons de sérieuses pistes envisagées.

- **Développer des techniques numériques**

Sachant qu'un des défauts des réseaux de Petri est le grand nombre de marquages (états) qu'ils peuvent générer pour certaines applications. Construire le graphe des marquages accessibles, afin d'étudier le système qu'il représente, peut s'avérer une tâche difficile à réaliser à la main. Il est donc plus agréable de développer des méthodes numériques qui permettent à la fois de générer le graphe d'évolution du modèle et de résoudre le processus stochastique associé afin d'évaluer les performances du système qu'il représente. Dans le cas des BDSPNs, cette perspective peut s'inspirer des méthodes et des algorithmes numériques réalisés particulièrement pour le cas des DSPNs notamment par Lindemann dans son ouvrage [LIN 98]. Bien entendu, nous ne parlons pas ici des techniques de simulation mais de la programmation de méthodes analytiques. Cette perspective, concerne donc le cas des BDSPNs bornés (nombre d'états finis).

- **Réaliser une interface graphique**

A présent le principe de dialogue avec l'outil de simulation que nous avons réalisé pour l'étude des BDSPNs via la simulation est basé sur des fichiers entrée/sortie de type [.text]. Il s'agit d'éditer textuellement le modèle à simuler afin de renseigner le programme de simulation sur ses données nécessaires pour son exécution. Il s'agit d'une table contenant des matrices et des vecteurs qui représentent la structure, les paramètres et les politiques spécifiques du réseau. Une fois le réseau exécuté, nous recevons en sortie une table d'un ensemble de mesures de performances. Ce principe d'édition du modèle est provisoire puisque nous envisageons de réaliser une interface graphique et de faire de l'outil de simulation un logiciel complet. Dans le cadre de cette perspective, nous pensons à exploiter la source d'une interface graphique très conviviale d'un logiciel d'analyse des RdPs classiques (*RdPWIN 32*) dont nous faisons partie des auteurs [LAB 98]. Ce logiciel, également développé à base de Delphi, nous facilitera cette tâche. En termes de la programmation orientée objet, l'extension de cette interface consiste à créer de nouvelles classes d'objets qui permettront de reconnaître et saisir les nouveaux composants d'un BDSPN par rapport à un RdP classique.

Dans le même cadre lié à la simulation, nous envisageons d'intégrer au modèle la possibilité d'avoir des lois de distribution quelconques. Contrairement aux méthodes analytiques où on privilégie les lois exponentielles, la simulation ne cause pas de problèmes d'ordre mathématique pour travailler également avec d'autres lois.

En effet, il s'agit tout simplement de générer des variables aléatoires (délais de franchissement des transitions) suivant des lois quelconques pouvant être associées aux transitions. Ceci permettra de mieux couvrir l'aspect aléatoire des systèmes.

- **Développer des techniques d'optimisation**

A présent, les applications que nous avons développées se focalisent sur la modélisation et l'évaluation de performances. Nous envisageons de travailler sur des techniques d'optimisation. Toutefois, dans l'application industrielle présentée dans [CHE 05], un algorithme génétique développé dans le sens à optimiser les paramètres des politiques de gestion de stocks [CHE 03] est couplé avec succès au modèle BDSPN représentant la chaîne logistique étudiée. Cependant, nous souhaitons explorer d'autres techniques d'optimisation les moins gourmandes en nombre de simulations. Nous pensons plus particulièrement à la technique de l'analyse de perturbations dont nous avons eu une expérience assez positive [LAB 02]-[LAB 03]-[MEB 03]. Contrairement aux approches classiques de la simulation/optimisation où le processus est itératif, l'analyse de perturbations présente l'avantage d'utiliser une seule simulation et repose sur l'analyse formelle de la trajectoire du modèle perturbé par rapport à celle du modèle nominal pour exprimer le gradient de la performance recherchée.

Dans ce même contexte, il est également envisageable de travailler sur des méthodes analytiques propres au modèle sans couplage avec d'autres techniques. Il s'agit d'étendre aux cas des BDPNs la méthode analytique d'analyse de sensibilité des DSPNs proposée dans [CHO 93b]. Cette technique repose sur l'analyse de sensibilité directement à partir du processus stochastique associé au graphe d'évolution du réseau. Là encore, on parle du cas d'un réseau borné.

Enfin, à long terme, nous envisageons d'étendre nos recherches à d'autres thématiques liées aux systèmes logistiques.

Annexe A

Les Processus stochastiques

1. Processus Stochastiques

Un **processus stochastique** (ou processus aléatoire) est défini par une suite d'expériences ayant comme résultats une famille de variables aléatoires ξ indexés par le temps et prenant des valeurs dans un espace de valeur E (espace d'état) auquel est associé un espace de probabilité (application des éléments E dans l'ensemble $[0, 1]$).

Lorsque l'intervalle d'observation T , auquel appartient la variable temps, est continu, les variables aléatoires ξ forment un processus stochastique continu. Lorsque l'intervalle d'observation T est un ensemble discret, les variables aléatoires ξ forment un processus stochastique récurrent, appelé également chaîne.

Un **processus stochastique, dans le cas continu**, est représenté par :

$$\{\xi(t) | t \in T, T = [a, b] \subset [0, \infty[\} \quad (\text{A.1})$$

Un **processus stochastique, dans le cas discret**, est représenté par :

$$\{\xi_n | n \in T, T \in \mathbb{N}\} \quad (\text{A.2})$$

1.1. Processus Markovien

1) Un **processus stochastique est markovien** si la seule connaissance de son état présent suffit pour déterminer son évolution future. Un processus markovien s'appelle chaîne de Markov discrète, lorsque l'intervalle T d'observation est un ensemble discret, et il s'appelle chaîne de Markov continue, lorsque l'intervalle d'observation T est un ensemble continu. Considérons un ensemble discret et fini d'états d'un système (ensemble d'observations successives): $\{e_1, e_2, \dots, e_i, e_j, \dots, e_n\}$. **La propriété de Markov s'écrit :**

♦ *Chaîne de Markov discrète :*

$$\text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j | \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j | \xi_k) \forall k \in T, T \in \mathbb{N} \quad (\text{A.3})$$

♦ *Chaîne de Markov Continue :*

$$\begin{aligned} & \text{Prob}(\xi(t_n + dt) = e_j | \xi(t_0), \xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)) \\ &= \text{Prob}(\xi(t_n + dt) = e_j | \xi(t_n)) \forall t \in T, T \subset [0, \infty[\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

2) Un **processus markovien est dit homogène** dans le temps si ses probabilités de transitions entre deux états e_i et e_j sont indépendantes de l'instant considéré. Cette

propriété s'écrit :

- ♦ *Chaîne de Markov discrète :*

$$\text{Prob}(\xi_{m+n} = e_j | \xi_m = e_i) = \text{Prob}(\xi_n = e_j | \xi_0 = e_i) \quad (\text{A.5})$$

- ♦ *Chaîne de Markov Continue :*

$$\text{Prob}(\xi(t+s) = e_j | \xi(s) = e_i) = \text{Prob}(\xi(t) = e_j | \xi(0) = e_i) \quad (\text{A.6})$$

3) Le vecteur des probabilités d'état ou la distribution des états, est le vecteur contenant les probabilités que le système se trouve dans chacun de ses états à un instant donné :

- ♦ *Chaîne de Markov discrète :*

$$P(k) = [p_1(k) \ p_2(k) \ p_3(k) \dots p_n(k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

où $p_i(k)$ est la probabilité que le système se trouve dans l'état e_i à l'instant k :

$$p_i(k) = \text{Prob}(\xi_k = e_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ et } i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.8})$$

- ♦ *Chaîne de Markov continue :*

$$\forall t \in T, \quad P(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ p_3(t) \dots p_n(t)] \quad (\text{A.9})$$

où $p_i(t)$ est la probabilité que le système se trouve dans l'état e_i à l'instant t :

$$\forall t \in T, \quad p_i(t) = \text{Prob}(\xi(t) = e_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.10})$$

Le vecteur des probabilités d'état est un vecteur stochastique :

$$\begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

4) Matrice des probabilités de transitions : (cas d'une CM discrète)

Dans le cas d'une chaîne de Markov discrète homogène, *la matrice des probabilités de transitions* est $M = [p_{ij}]$, tel que :

$$\begin{aligned} &\forall i, j = 1, 2, \dots, n \\ &p_{ij} = \text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j | \xi_k = e_i) = \text{Prob}(\xi_1 = e_j | \xi_0 = e_i) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

La matrice des probabilités de transition M est une matrice stochastique :

$$\begin{cases} 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Le vecteur des probabilités d'état d'une chaîne de Markov discrète est donné par la relation suivante : $P(k+1) = P(k) \times M$. Cette relation s'appelle l'équation fondamentale d'une chaîne de Markov discrète et permet de déterminer le vecteur des probabilités d'état, quel que soit l'instant k en connaissant le vecteur initial des probabilités d'état $P(0)$: $P(k) = P(0) \times M^k$.

5) Générateur infinitésimal (cas d'une CM continue)

Dans le cas d'une chaîne de Markov continue homogène, le *générateur infinitésimal* est donné par la *matrice des taux de transition* $A = [\lambda_{ij}]$, avec λ_{ij} le taux de transition de l'état e_i vers l'état e_j .

Le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov continue possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_{ij} > 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Le vecteur des probabilités d'état d'une chaîne de Markov continue est donné par la relation suivante :

$$\frac{d[P(t)]}{dt} = P(t) \times A \quad (\text{A.15})$$

Cette relation s'appelle l'équation fondamentale d'une chaîne de Markov continue et permet de déterminer le vecteur des probabilités d'état, quel que soit l'instant t en connaissant le vecteur initial des probabilités d'état $P(0)$: $P(t) = P(0) \times e^{At}$.

6) Un processus markovien est ergodique si dans son comportement asymptotique le système tend vers une distribution limite unique, indépendante des conditions initiales.

♦ *Chaîne de Markov discrète :*

$$\pi = P(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) \quad (\text{A.16})$$

♦ *Chaîne de Markov Continue :*

$$\pi = P(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) \quad (\text{A.17})$$

Le vecteur représente la distribution de probabilités d'états en régime permanent est appelé *distribution stationnaire des probabilités*. En régime stationnaire ($t \rightarrow \infty$), les relations (A.16) et (A.17) deviennent :

- ♦ *Chaîne de Markov discrète :*

$$\pi = \pi \times M \quad (\text{A.18})$$

- ♦ *Chaîne de Markov Continue :*

$$0 = \pi \times A \quad (\text{A.19})$$

Ainsi, la distribution stationnaire $\pi = [\pi_i]$ est déterminée en tenant compte que :

$$\sum \pi_i = 1 \quad (\text{A.20})$$

1.2. Processus Semi-Markoviens et Semi-Régénératifs

Les processus semi-Markoviens et semi-régénératifs sont une généralisation des processus markoviens dans lesquels les temps de passage d'un état à l'autre (temps de séjour dans un état) sont des variables aléatoires suivant des distributions générales.

Une séquence de deux variables aléatoires $\{(\xi_k, T_k), k \geq 0\}$ est appelée **processus de renouvellement markovien** si :

$(T_k)_{k \geq 0}$ est une suite croissante de variables aléatoires positives :

$$T_0 = 0, \forall k > 0, T_{k+1} > T_k \quad (\text{A.21})$$

$$\forall e_i, e_j : \text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j, T_{k+1} - T_k \leq t \mid \xi_k = e_i, T_k, \xi_{k-1}, T_{k-1}, \dots, \xi_0, T_0)$$

$$= \text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j, T_{k+1} - T_k \leq t \mid \xi_k = e_i) \quad \text{Propriété de Markov} \quad (\text{A.22})$$

$$= \text{Prob}(\xi_1 = e_j, T_1 \leq t \mid \xi_0 = e_i) \quad \text{Propriété d'homogénéité}$$

La probabilité conditionnelle de l'équation (A.22) est notée $Q_{ij}(t)$ et représente la probabilité de passer en une transition de l'état e_i vers l'état e_j dans l'intervalle de temps $[0, t]$. La matrice $Q(t) = [Q_{ij}(t)]$ est appelée **noyau**.

1) Processus semi-Markovien : Soient : $\{(\xi_k, T_k), k \geq 0\}$ un processus de renouvellement markovien et $N(t) = \text{SUP}(k > 0 \mid T_k \leq t)$.

Le processus $\{(\xi(t), t \geq 0)\}$ tel que $\xi_k(t) = \xi_{N(t)}$, $t > 0$ est un processus de **semi markovien** de noyau $Q(t)$.

2) Processus semi-régénératif : Soient : $\{(\xi_k, T_k), k \geq 0\}$ un processus de renouvellement markovien. Le processus $\{(\xi(t), t \geq 0)\}$ tel que :

$$P(\xi(T_k + t) = e_j | \xi(u), 0 \leq u \leq T_k, \xi_k = e_i) = P(\xi(t) = e_j | \xi_0 = e_i) \quad (\text{A.23})$$

est un processus de **semi-régénératif** de noyau $Q(t)$.

Les instants $\{T_k, k \geq 0\}$ sont appelés les instants de régénérations, car le comportement du processus $\{(\xi(t), t \geq 0)\}$ est statiquement identique entre deux instants T_k et T_{k+1} , quelque soit $k > 0$, si à l'instant T_k le processus débute dans le même état :

$$\{\xi(T_k + 1), t \geq 0 | \xi(T_k) = e_i\} = \{\xi(t), t \geq 0 | \xi(0) = e_i\} \quad (\text{A.24})$$

- ♦ **Dans le cas d'un processus semi-markovien**, tous les instants de changement d'état T_k sont des instants de régénération et le processus reste dans l'état ξ_k sur tout l'intervalle $[T_k, T_{k+1}[$.
- ♦ **Dans le cas d'un processus semi-régénératif**, entre les instants de régénération T_k , il y a des instants de changement d'état de non régénération.

1.3. Chaîne de Markov immergée

L'équation A.22 devient pour $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j, T_{k+1} - T_k \leq t | \xi_k = e_i, T_k, \xi_{k-1}, T_{k-1}, \dots, \xi_0, T_0) \\ &= \text{Prob}(\xi_{k+1} = e_j | \xi_k = e_i) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Le processus $\{(\xi_k, k \geq 0)\}$ est donc une chaîne de Markov discrète, appelée **Chaîne de Markov immergée** du processus semi-markovien ou semi-régénératif $\{(\xi(t), t \geq 0)\}$.

1) La matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov immergée est :

$$P = [p_{ij}] \text{ avec: } p_{ij} = Q_{ij}(\infty) \quad (\text{A.26})$$

2) La fonction de répartition du temps de passage du processus de l'état e_i vers l'état

e_j est :

$$F_{ij}(t) = \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}} \quad (\text{A.27})$$

3) La durée moyenne conditionnelle de passage de l'état e_i vers l'état e_j est :

$$\eta_{ij} = \int_0^{\infty} t \cdot dF_{ij}(t) \quad (\text{A.28})$$

4) La durée moyenne de séjour dans l'état e_i d'un processus semi-markovien est :

$$\eta_i = \int_0^{\infty} t \cdot d \left(\sum_j Q_{ij}(t) \right) = \sum_j p_{ij} \cdot \int_0^{\infty} t \cdot dF_{ij}(t) \quad (\text{A.29})$$

5) La durée moyenne de séjour dans l'état e_i d'un processus semi-régénératif sur l'intervalle $[0, T_1[$ si à l'instant de régénération le processus était dans l'état $\zeta_0 = e_j$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \alpha_{ji} &= \int_0^{\infty} P(\zeta(t) = e_i, T_1 > t | \zeta_0 = e_j) dt \\ &= \int_0^{\infty} P(\zeta(t) = e_i | \zeta_0 = e_j) \cdot P(T_1 > t | \zeta_0 = e_j) dt \\ &= \int_0^{\infty} P(\zeta(t) = e_i | \zeta_0 = e_j) \cdot (1 - F_{ji}(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

- ♦ Si le processus semi-régénératif se comporte, entre les instants de régénération, comme une chaîne de Markov continue de générateur $A(e_j)$, alors A.29 devient :

$$\alpha_{ji} = \int_0^{\infty} \left[e^{A(e_j)t} \right]_{ji} \cdot (1 - F_{ji}(t)) dt \quad (\text{A.31})$$

- ♦ Si le processus $\{\zeta(t), t \geq 0\}$ est ergodique alors il admet une distribution stationnaire des probabilités d'états donnée par :

a) Processus semi-markovien :

$$\pi_i = \frac{\pi_{im_i} \cdot \eta_i}{\sum_{j=1}^n \pi_{im_j} \cdot \eta_j} \quad (\text{A.32})$$

où π_{im_i} sont les probabilités d'état de la chaîne de Markov immergée ;

b) Processus semi-régénératif :

$$\pi_i = \sum_{j=1}^n \pi_{sm_j} \cdot \frac{\alpha_{ji}}{\eta_j} \quad (\text{A.33})$$

où π_{sm_j} sont les probabilités d'état du processus semi-markovien associé données par la relation A.32.

2. Processus stochastique associé aux réseaux de Petri stochastiques [CHO 93]

2.1. Méthode d'obtention

La méthode d'obtention du processus stochastique associé à un réseau de Petri stochastique contenant des transitions déterministes (et/ou générales) est donnée par Choi dans [CHO93].

On note par Ω l'ensemble des états tangibles et soit M_i un état dans Ω . On note par $G(M_i)$ l'ensemble des transitions déterministes et par $E(M_i)$ l'ensemble des transitions exponentielles franchissables à partir de M_i .

Dans chaque état M_i , on peut avoir l'une des situations suivantes :

1) Il n'y a pas de transition déterministe franchissable à partir de M_i , $G(M_i) = \emptyset$ et on peut définir ce cas :

$$\Lambda_i = \sum_{M_j \in \Omega} \lambda_{ij} \quad (\text{A.34})$$

λ_{ij} étant le taux de franchissement de la transition exponentielle qui permet le passage de M_i à l'état M_j .

2) Il y a une transition déterministe franchissable à partir de M_i , $G(M_i) = \{t_{det}\}$.

Dans ce cas, on définit l'ensemble des états $\Omega(M_i)$ dans lequel le processus stochastique peut se trouver avant qu'aucun changement d'état de sa chaîne de Markov immergée ne se produise. Le changement d'état de la chaîne de Markov immergée se produit soit si la transition déterministe t_{det} est franchie, soit si une transition exponentielle compétitive est franchie. Le processus stochastique dans $\Omega(M_i)$ est une chaîne de Markov subordonnée ayant un générateur $\mathcal{A}(M_i)$ défini de la façon suivante :

- Si $M_j \in \Omega(M_i)$ le taux de franchissement de M_j vers $M_{j'}$ est donnée par $\lambda_{jj'}$;
- Si $M_j \notin \Omega(M_i)$ alors $\lambda_{jj'} = 0$, $\forall M_{j'} \in \Omega$.

Soit $\Omega_\varepsilon(M_i)$ l'ensemble des états atteignables à partir de M_i (pas nécessairement en

mode direct) par le franchissement d'une transition exponentielle et $\Omega_g(M_i)$ l'ensemble des états atteignables à partir de M_i (pas nécessairement en mode direct) par le franchissement d'une transition générale.

Le noyau du processus stochastique associé à un réseau de Petri stochastique ayant des transitions déterministes, est donné par le théorème suivant [CHO93].

Théorème A.1 [CHO93]. Le noyau $Q(t) = [Q_{ij}(t)]$ du processus stochastique d'un réseau de Petri stochastique et déterministe (DSPN) est donné par :

1) pour un état M_i , tel que $G(M_i) = \emptyset$

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \Lambda_i = 0 \\ \frac{\lambda_{ij}}{\Lambda_i} (1 - e^{-\Lambda_i t}) & \Lambda_i > 0 \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

2) pour un état M_i , tel que $G(M_i) = \{t_{det}\}$, avec le temps de franchissement δ de la transition t_{det} .

▪ si $M_j \in \Omega_e(M_i)$ et $M_j \notin \Omega_g(M_i)$:

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} [e^{A(M_i)t}]_{ij}, t < \delta \\ [e^{A(M_i)\delta}]_{ij}, t \geq \delta \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

▪ si $M_j \notin \Omega_e(M_i)$ et $M_j \in \Omega_g(M_i)$:

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} 0, t < \delta \\ \sum_{M' \in \Omega(M_i)} [e^{A(M_i)\delta}]_{ij} \cdot P(M', M_j), t \geq \delta \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

▪ si $M_j \in \Omega_e(M_i)$ et $M_j \in \Omega_g(M_i)$:

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} [e^{A(M_i)t}]_{ij}, t < \delta \\ [e^{A(M_i)\delta}]_{ij} + \sum_{M' \in \Omega(M_i)} [e^{A(M_i)\delta}]_{ij} \cdot P(M', M_j), t \geq \delta \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

▪ si $M_j \notin \Omega_e(M_i)$ et $M_j \notin \Omega_g(M_i)$:

$$Q_{ij}(t) = 0, t \geq 0 \quad (\text{A.39})$$

Le théorème A.1 permet de déterminer le noyau du processus stochastique associé à un réseau de Petri stochastique en connaissant les fonctions de répartition du temps de

franchissement des transitions $F_{ij}(t)$. Le comportement aléatoire d'un réseau de Petri stochastique est alors identique à celui du processus stochastique associé. En régime permanent l'étude du processus stochastique passe par la chaîne de Markov immergée. La matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov immergée s'obtient à partir du noyau donné par le théorème A.1.

2.2. Chaîne de Markov immergée

Corollaire A.2. La matrice des probabilités de transition $P = [p_{ij}]$ de la chaîne de Markov immergée du processus stochastique d'un réseau de Petri stochastique et déterministe est donnée par :

1) pour un état M_i , tel que : $G(M_i) = \emptyset$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & \Lambda_i = 0 \\ \frac{\lambda_{ij}}{\Lambda_i}, & \Lambda_i > 0 \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

2) pour un état M_i , tel que $G(M_i) = \{t_{det}\}$, avec le temps de franchissement δ de la transition t_{det} .

▪ si $M_j \in \Omega_e(M_i)$ et $M_j \notin \Omega_g(M_i)$:

$$P_{ij} = \left[e^{A(M_i)\delta} \right]_{ij} \quad (\text{A.41})$$

▪ si $M_j \notin \Omega_e(M_i)$ et $M_j \in \Omega_g(M_i)$:

$$P_{ij} = \sum_{M' \in \Omega(M_i)} \left[e^{A(M_i)\delta} \right]_{MM'} \cdot P(M', M_j) \quad (\text{A.42})$$

▪ si $M_j \in \Omega_e(M_i)$ et $M_j \in \Omega_g(M_i)$:

$$P_{ij} = \left[e^{A(M_i)\delta} \right]_{ij} + \sum_{M' \in \Omega(M_i)} \left[e^{A(M_i)\delta} \right]_{MM'} \cdot P(M', M_j) \quad (\text{A.43})$$

▪ si $M_j \notin \Omega_e(M_i)$ et $M_j \notin \Omega_g(M_i)$:

$$P_{ij} = 0 \quad (\text{A.44})$$

Le corollaire est obtenu à partir des théorèmes A.1 en utilisant la relation $p_{ij} = Q_{ij}(\infty)$.

$E[T] = \int_0^\infty \tau dF_d(\tau)$ est l'espérance mathématique du temps moyen de séjour.

Bibliographie

- [AJM 84] Ajmone Marsan M., Balbo G., and Conte G., "A Class of Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Analysis of Multiprocessor Systems", *ACM Transaction Computer, Systems*, 2(2), pp. 93-122, 1984.
- [AJM 86] Ajmone Marsan M and Chiola G., "On Petri Nets with Deterministic and Exponential Transition Firing times", in: 7th European Workshop on application and theory of Petri Nets, Oxford, june 1986.
- [AJM 87] Ajmone Marsan M., and Chiola G., "On Petri Nets with Deterministic and Exponentially Distributed Firing Times", in G. Rozenberg (Ed.) *Advances in Petri Nets 1986*, *Lecture Notes in Computer Science* 266, pp. 132-145, Springer 1987.
- [AJM 89] Ajmone Marsan M., Balbo G., Bobbio A., Chiola G., Conte G., and Cumani A., "The effects of the execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets", *IEEE Transactions on Software Engineering*, 15(7), pp. 832-845, 1989.
- [AJM 95] Ajmone Marsan M., Balbo G., Conte G., Donatelli, S., and Franceschinis G., « Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets » John Wiley and Sons, 1995.
- [ALJ 90] Al Jaar Y. and Desrochers A., "Performance evaluation of automated manufacturing systems using generalized stochastic Petri nets", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(6), 1990.
- [ALL 87] ALLA. H, "Réseaux de Petri colorés et réseaux de Petri continus : application à l'étude des systèmes à événements discrets", Thèse de Doctorat, INPG Grenoble, France, Juin 1987.
- [AMO 01] Amodeo L., El Moudni A., and Zerhouni S., "Modélisation et simplification d'un atelier de production d'Ailettes" *Journal Europeen des Systèmes Automatisés (APII-JESA)*, 35(5), pp. 577-600, 2001.
- [AMO 99] Amodeo L., "Contribution à la simplification et à la commande des réseaux de Petri stochastiques: Application aux systèmes de production", Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, France, janvier 1999.
- [ARC 99] Archibald G., Karabakal N., and Karlsson P., « Supply chain vs supply chain : Using simulation to compete beyond the four walls », 99 Winter Simulation Conference pp. 1207-1214, 1999.
- [ARN 02] Arns M, Fischer M, Kemper P, and Tepper C., "Supply chain modeling and its analytical evaluation", *Journal of Operational Research Society*, 53, pp. 885-894, 2002.
- [ARN 95] Arntzen B.C., Brown G.G., Harrison T.P., Trafton L.L., « Global Supply Chain Management at Digital Equipment Corporation », *Interfaces*, 25(1), pp. 69-93, 1995.
- [ATI 93] Atif K., "Modélisation du parallélisme et de la synchronisation". Thèse de doctorat, INPG Grenoble, 1993.
- [AVI 01] Aviv Y., "The effect of collaborative forecasting on supply chain performance", *Management Science*, 47(10), pp. 1326-1343, 2001.
- [AXS 01] Axsäter S., "A framework for decentralized multi-echelon inventory control", *IIE Transactions*, 33, pp. 91-97, 2001.

- [AXS 03] Axsäter S., “Optimal policies for serial inventory systems under fill rate constraints”, *Management Science*, 49(2), pp. 247-253, 2003.
- [BAG 96] Baglin G., Bruel O., Alain Garreau, Michel Greif M. and Christian Van Delft C. « *Management industriel et logistique* » collection gestion, Economica 3^{ème} édition, 1996.
- [BAG 96] Baglin G., Bruel O., Garreau A., Greif M., and Delft C. V., “*Management Industriel et Logistique*”, Edition Economica, 1996.
- [BAI 70] Bailey N., “*The Element of Stochastic Processes*”, John Wiley, 1970.
- [BAL 00] Balduzzi F, Giua A, and Menga G., “First-order hybrid Petri net: A model for optimization and control”, *IEEE Transaction On Robotics and Automation*, 16(4), 2000.
- [BAL 87] Balbo G., Chiola G., Franceschinis G., and Molinar Roet G., “Generalized Stochastic Petri Nets for the performance Evaluation of FMS”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2, pp. 1013-1018, 1987
- [BAN 01] Banks J., Carson J. S., Nelson B. L., and Nicol D. M., “*Discrete-Event System Simulation*”, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [BAS 75] Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R, ad Palacios F.G., “Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers”. *Journal of the ACM*, 22(2), pp. 248-260, 1975.
- [BAU 01] Bause F., Fisher M., Kemper P., and Volker M., “Performance and Cost Analysis of Supply Chain Models”, *Seoul Sim 2001 Conference*, Seoul, pp. 425-434, 2001.
- [BEA 00] Beaulieu M., « Définir et maîtriser la complexité des réseaux de logistique à rebours ». *Proceedings Les Troisièmes Rencontres Internationales de la Recherche en Logistique*, 20 p., Trois-Rivières, Canada, mai 2000.
- [BEA 01] Beamon B.M., and Chen V.C.P., “Performance Analysis of Conjoined Supply Chain”, *International Journal of Production Research*, 39(14), pp. 3195-3218, 2001.
- [BEA 98] Beamon B.M., “Supply chain design and analysis: Models and methods”, *International Journal of Production Economics*, 55, 281-294, 1998.
- [BER 02] Berning G., Brandenburg M., Gürsoy K., Mehta V., and Tölle F.J., “An integrated system solution for supply chain optimization in the chemical process industry”, *OR Spectrum* 24, pp. 371-401, 2002.
- [BER 95] Berge N., Juanolle G. et Samaan M., “Using stochastic timed Petri nets for modeling and analysing and industrial application based on FIP fielbus”, *Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation*, Paris - France, ETFA 95 - INRIA-IEEE, 1995.
- [BHU 02] Bhushan N., and Gummaraju K., “A Petri Net Based Simulation Approach for Evaluating Benefits of Time Temperature Indicator and Wireless Technologies in Perishable Goods Retail Management”, *FOODSIM'2002, The Second International Conference on Simulation and Modeling in the Food and Bio-Industry*, June 17-18, 2002.

- [**BOS 03**] Bosilj-Vuksic V, Giaglis G.M. and Hlupic V., "Idef Diagrams and Petri Nets For Business Process Modeling: Suitability, Efficacy, and Complementary Use", ICEIS 2000, 5th International Conference on Enterprise Information Systems, Angers, France, 23-26, April 2003
- [**BRA 83**] Brams, G., "Réseau de Petri, Théorie et pratique " Tome 1 : théorie et analyse - Tome 2 : modélisation et applications, Masson, 1983.
- [**BRU 00**] Bruno B., "Théorie des files d'attente : Des chaînes de Markov aux réseaux à forme produits", Edition Hermes Science 2000.
- [**BRU 85**] Bruno G., and Biglia P., "Performance evaluation and validation Tool handling in FMS using PN's", IEEE Int. Workshop Timed Petri Nets., Torino Italy, July 1-3, pp. 64-71, 1985.
- [**BUC 94**] Buchholtz P., "A class of hierarchical queueing networks and their analysis". Queueing Systems, 15, pp. 59-80, 1994.
- [**CAC 01**] Cachon G.P., "Exact Evaluation of Batch-Ordering Inventory Policies in Two-Echelon Supply Chains with Periodic Review", *Operations research*, 49(1), pp. 79- 98, 2001.
- [**CAM 97**] Camm J.D., Chorman T.E., Dill F.A., Evans J.R., Sweeney D.J., and Wegryn G.W., "Blending OR/MS, Judgment and GIS : Restructuring P&G's Supply Chain", *Interfaces*, 27(1), pp. 128-142, 1997.
- [**CAR 98**] Carter, C.R., Ellram, L.M. "Reverse logistics : a review of the litterature and framework for future investigation", *Journal of Business Logistics*, 19(1), 85-102, 1998.
- [**CHE 01**] Chen H, Amodeo L and Chu F. "Modeling and performance evaluation of supply chain with batch deterministic and stochastic Petri nets", 13th Annual European simulation Symposium "Simulation in Industry", Marseille, pp 415-419, October 2001.
- [**CHE 02**] Chen H, Amodeo L and Chu F., "Batch deterministic and stochastic Petri nets: A tool for modeling and performance evaluation of supply chain, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Washington D. C., 1, pp. 78-83, May 2002.
- [**CHE 03**] Chen H., Amodeo L., and Boudjeloud L., "Supply chain optimization with Petri Nets and genetic Algorithms", In Proceedings for the International conference on Industrial Engineering and Production Management, Porto, 2, pp. 49-58, May 26-28, June 2003.
- [**CHE 03a**] Cheyroux L., "Sur l'évaluation de performances des chaînes logistiques", Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble, France, 2003.
- [**CHE 05**] Chen H., Amodeo L., Chu F., and Labadi K., "Performance Evaluation and Optimization of Supply Chains modelled by Batch Deterministic and Stochastic Petri", IEEE transactions on Automation Science and Engineering, pp. 132-144, 2005.
- [**CHE 99**] Chen Y., Peng Y., Finin T., Labrou Y., Cost S., Chu B., Yao J., Sun R, and Wilhelm B., "A negotiation-based multi-agent system for supply chain management," Proceedings of the Agents'99 Workshop: Agent-Based Decision-Support for Managing

the Internet-Enabled Supply Chain, Seattle, WA, 15-20, 1999.

- [CHI 93] Chiola G., Ajmone Marsan M., Balbo G., and Conte G., "Generalized Stochastic Petri Net Models: A Definition on the net Level and its Implications, IEEE Transactions Software Engineering, 19, pp 89-107, 1993.
- [CHI 96] Chincholbar K., and Krishnaiah Chetty O., "Stochastic coloured Petri nets for modelling and evaluation, and heuristic rule base for scheduling of fms" International Journal Advanced Manufacturing Technology, 12, pp. 339-348, 1996
- [CHO 03a] Choi I, Song M, Park C, and Park N, "An XML-based process definition language for integrated process management", Computers in Industry, 50, pp. 85-102, 2003.
- [CHO 93b] Choi H., "Performance and reliability modelling using Markov regenerative stochastic Petri nets", Phd thesis, Graduate school of Duke University, 1993.
- [CHO 93c] Choi H., Kullarni V. and Trivedi K. "Transient analysis of deterministic and stochastic Petri nets", 14th International Conference, Chicago-IL, Application and theory of Petri Nets, 1993.
- [CHO 93d] Choi H., Mainkar V., and Trivedi K., "Sensitivity analysis of deterministic and stochastic Petri nets", Proc of Mascott'93th International Workshop on Modelling Analysis and simulation, San Diego - CA. 1993.
- [CHO 94a] Choi H., Kulkarni V.G., Trivedi K., "Markov regenerative stochastic Petri nets", Performance Evaluation 20, pp. 337-357, 1994.
- [CHO 94b] Chow, G., D. H. Heaver et L. E. Enriksson, "Logistics Performance : Definition and Measurement", International Journal of Physical Distribution & Logistics Management, 24 (1), pp. 17-27. 1994.
- [CHR 97] Christensen S., Jorgensen J.B., and Kristensen L.M.. Design/CPN – A Computer Tool for Coloured Petri Nets. In E. Brinksma, editor, Proceedings of TACAS'97, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, pp. 209-223, , 1997.
- [CIA 93] Ciardo G., and Lindemann C., "Analysis of deterministic and stochastic Petri nets". In Proc. 5th International Workshop on Petri Nets and Performance Models (PNPM'93), Toulouse, France, IEEE Comp. Soc. Press., pp. 160-169, Oct. 1993.
- [CIA 94] Ciardo G., German R., and Lindemann C., "A characterization of the stochastic process underlying a stochastic Petri net. IEEE Trans. Soft. Eng., 20(7), pp. 506-515, July 1994.
- [CLI 96] Clinton, S.R., et S. E. Fawcett "Enhancing logistics performance to improve the competitiveness of manufacturing organizations", Production and Inventory Management Journal, 37(1), pp. 40-46., 1996.
- [COH 88] Cohen M.A., and Lee H.L., "Strategic Analysis of Integrated Production Distribution Systems: Models and Methods", *Operations Research*, 36(2), pp. 216-228, 1988.
- [CRO 00] Croom S., Romano P., and Giannakis M., "Supply chain management: an

analytical framework for critical literature review", *European Journal of Purchasing & Supply Management* 6, pp. 67-83, 2000.

[DAV 01] David R., Alla H., "Réseaux de Petri Hybrides", Chapitre 6 de [ZAY, 01], pp. 119-154, 2001.

[DAV 02] David J.S., Hwang Y., Pei B.K.W. et Reneau J.H., "The performance effects of congruence between product competitive strategies and purchasing management design", *Management Science*, 48(7), pp. 866-885, 2002.

[DAV 90] David R., and Alla H., "Autonomous and Timed Continuous Petri Nets", 11th International Conference on Application and Theory of Petri Nets Paris, France pp. 367-386, June, 1990.

[DAV 92] David R. and Alla H., "Du Graftet aux réseaux de Petri", Editions Hermès, Paris, 1992.

[DEA 93] De Araujo S., Bouhchouch A., Di Mascolo M., and Frein Y., "On the analysis of a stochastic petri nets modeling a resource sharing situation", IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1, 1993.

[DEM 01] Demongodin I., "Generalized Batches Petri Net: Hybrid Model for High Speed Systems with Variable Delays", *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, 11(1), pp.137-162, 2001.

[DEM 94] Demongodin I., "Les réseaux de Petri Lots: modélisation des systèmes de production à haute cadence en régime transitoire", Thèse de Doctorat, Université de Montpellier, France, 1994.

[DIA 01] Diaz M., "Les réseaux de Petri : Modèles fondamentaux", Editions Hermès, Paris, 2001.

[DIE 03] Dietz Jan L. G. and Barjis Joseph "Petri Net Expressions of Demo Process Models As A Rigid Foundation For Requirements Engineering", ICEIS 2000, 5th International Conference on Enterprise Information Systems , Angers France, 23-26, April 2003.

[DIM 90] Maria Di Mascolo, "Modélisation et évaluation de performance de systèmes de production géré en Kanban", Thèse de Doctorat, LAG Grenoble, Février 1990.

[DIM 95] Di Mascolo M., Furmans K., and Kunze O., "Modeling a Kanban Controlled Supply Relation: A Case Study", *I.A.R. Annual Meeting*, Grenoble, Novembre 1995.

[DON 01] Dong M., and Chen F.F., "Process modeling and analysis of manufacturing supply chain networks using object-oriented Petri nets", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 17 (1-2), pp.121-129, February 2001.

[DRA 04] Dragana Makajić-Nikolić, Biljana Panić, Mirko Vujošević, Bullwhip Effect and Supply Chain Modelling and Analysis Using CPN Tools, Fifth Workshop and Tutorial on Practical Use of Coloured Petri Nets and the CPN Tools, Aarhus, Denmark, October 8-11, pp.219-234, 2004.

[DUG 84] Dugan J., Trivedi K., Geist R. et Nicola V., "Extended stochastic petri nets:

Applications and analysis” Proceeding Performance'84, Paris – France, 1984

- [DUP 98] Dupont L., “La gestion industrielle”, Edition Hermes, Paris, 1998.
- [DUT 89] Dutheillet C., Et Haddad S., “Aggregation of states in colored stochastic Petri nets : Application to a multiprocessor architecture”, Proceeding 3rd International Workshop on Petri nets and performance models, Los Alamos - CA, IEEE Computer society Press, 1989.
- [ESP 93] ESPRIT Consortium AMICE. CIMOSA : open system architecture for CIM. 2nd Ed. Berlin : Springer, 1993.
- [ETT 00] Ettl M., Feigin G.E., Lin G.Y., Yao D.D., “A Supply Network Model with Base- Stock Control and Service Requirements”, *Operations Research*, 48(2), pp. 216-232, 2000.
- [FEL 68] Feller W., “An introduction to Probability Theory and its Applications” 3eme Edition John Willey, 1968.
- [FLO 85] Florin G., “Réseaux de Petri stochastiques, théorie et techniques de calcul” Thèse d'état de l'Université de Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1985.
- [FOX 00] Fox M.S., Barbuceanu M. et Teigen R. « Agent-oriented supply chain management », *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 12, pp. 165-188, 2000.
- [FUR 01] Furcas R, Giua A, Piccaluga A, and Seatzu C., “Hybrid Petri net modeling of inventory management systems”, *APII-JESA*, 35, pp. 417-434, 2001.
- [GAR 02] Garcia-Flores R. et Wang X.Z. « A multi agent system for chemical supply chain simulation and management support », *OR Spectrum*, 24, pp. 343-370, 2002.
- [GAU 95] Gaubert S., “Performance evaluation of (max,+) automata”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(12), pp. 656-663, 1995.
- [GOT 95] Götz N., Hermanns H., Herzog U., Mertsiotakis V., Rettelbach M., “Constructive specification techniques - integrating functional performance and dependability aspects”. In: *Quantitative Methods in Parallel Systems*. Springer, 1995.
- [GRA 92] Granda M., Drake J. et Gregorio J., “Performance evaluation of parallel systems by using unbounded generalized stochastic Petri nets”, *IEEE Transaction on Software Engineering*, 18(1), 1992.
- [GRA 93] Graves S. C., Rinnooy Kan A.H. G., Zipkin P.H., “Logistics of Production and Inventory”, Elsevier Science Publisher, 1993.
- [GRA 98] Graves S.C., Kletter D.B., Hetzel W.B., “A Dynamic Model for Requirements Planning with Application to Supply Chain Optimization”, *Operations Research*, 46(3), pp 35-49, 1998.
- [HAA 02] Haas P. J., “Stochastic Petri Nets: Modeling, Stability, Simulation”, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [HAA 89a] Haas P., et Shedler G., “Stochastic petri net representation of discrete event

- simulations” IEEE Transaction on software engineering, 5(4), 1989.
- [HAA 89b] Haas P., et Shedler G., “Stochastic petri nets with timed and immediate transitions”, *Communication in Statistic*, 5(4), 1989.
- [HAD 87] Haddad S., “Une catégorie régulière de réseaux de Petri de haut niveau: définition, propriétés et réduction”, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1987.
- [HAT 91] Hatono I., Yamagata K. and Amura H., “Modeling and on-line scheduling of flexible manufacturing systems using stochastic petri nets”, *IEEE Transactions on Software Engineering*, 17(2), 1991.
- [ING 98] Ingalls, R.G., “The value of simulation in modelling supply chain” *Proc. Of the 1998 Winter Simulation conference*, D.J. Medeiros and al. (eds), pp. 900-906, 1998.
- [JAC 57] Jackson J.R., “Networks of waiting lines”. *Operations Research*, 5, pp. 518- 521, 1957.
- [JAN 01] Jansen D.R., van Weert A., Beulens A.J.M. et Huirne R.B.M. « Simulation model of multi-compartment distribution in the catering supply chain », *European Journal of Operational Research*, 133, pp. 210-224, 2001.
- [JEG 91] Jegou, “Contribution à l’étude des problèmes de satisfaction de contraintes : algorithmes de propagation et de résolution. Propagation de contraintes dans les réseaux dynamique”, Thèse Université de Montpellier II, France, 1991.
- [JEN 91] Jensen K., “Coloured Petri nets. In: *High-Level Petri Nets: Theory and Application*”, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [JUA 94] Juanolle G. et Atamna Y., “Le réseau de terrain FIP et sa Modélisation avec les réseaux de Petri temporisés stochastiques”, *RAIRO APII*, 28(5), 573-583. 1994.
- [JUA 97] Juanole G., “Réseaux de Petri Stochastiques”, 2-ème Ecole d’Informatique des Systèmes Parallèles et Répartis, Toulouse, 1997.
- [KAR 69] Karlin S., “Initiation aux processus aléatoires”, Dunod, 1969.
- [KAR 69] Karp R.M., Miller R. E., “Parallel program schemata”, *Journal of Computer and System Sciences*, 3(2), pp. 147-195, 1969.
- [KEM 00] Kemper P., “Logistic Process go Petri nets”. Phillipi, S. (Hrsg.): 7. Workshop Algorithmen und Werkzeuge für Petri Netze, Koblenz: Universität Koblenz-Landau, pp. 69-74, June 2000.
- [LAB 02] Labadi K., “Simulation et Optimisation des Systèmes de Production par L’analyse de Perturbations”, Ecole Centrale de Nantes, France, Rapport de DEA (AIA), 75 p., Sep. 2002.
- [LAB 03] Labadi K., Mebarki N., et Castagna P., “Dimensionnement d’un système de production flexible par l’analyse de perturbations”, *Actes de la 4eme conférence francophone de Modélisation et Simulation (MOSIM’03)*, Toulouse (France) pp. 373-378, Avril 2003.
- [LAB 04a] Labadi K., Chen H., Amodeo L., “Batch deterministic and stochastic Petri

- nets: Modelling, Analysis and its Application to Supply Chain”, IEEE SMC 2004, International Conference on Systems, Man and Cybernetics, The Hague, The Netherlands, pp. 4515-4520., October 10-13, 2004.
- [LAB 04b] Labadi K., Chen H., Amodeo L., “Nouvelles propriétés comportementales pour les Réseaux de Petri Lots Déterministes et Stochastiques”, Actes de la 2eme conférence de MajecStic’2004. Manifestation des JEunes Chercheurs STIC, Calais France. 13-15, octobre 2004.
- [LAB 05a] Labadi K., Chen H., Amodeo L., “Application des BDSPNs à la Modélisation et à l’Evaluation de Performance des Chaînes Logistiques”, JESA - Journal Européen des Systèmes Automatisés, A paraître, 22 pages, Juin 2005.
- [LAB 05b] Labadi K., Chen H., Amodeo L., “Batch Deterministic and Stochastic Petri Nets: Modelling, Analysis and its Application to Inventory Systems”, In Proceedings of the 16th IFAC World Congress in Prague, 6 p., Prague, Czech Republic, 4-8 July 2005.
- [LAB 05c] Labadi K., Chen H., Amodeo L., “Modélisation et évaluation des performances des systèmes de stockage à l’aide des BDSPNs”, Actes du 6eme Congrès International de Génie Industriel, Besançon (France), 10p, 7-10 juin 2005.
- [LAB 98] Labadi K., Amari S., et Saheb H., “Conception et Réalisation d’un Logiciel de Recherche des Verrous et des Trappes dans un Réseau de Petri”, Institut d’Electronique, Université de Tizi-Ouzou, mémoire d’ingénieur, 80p, 1998.
- [LAN 02] Landeghem R.V., Bobeanu C. V., “Formal modelling of Supply Chain: An Incremental Approach Using Petri Nets”, Proceedings 14th European Simulation Symposium A. Verbraeck, W Krug, eds. (c) SCS Europe BVBA, 2002.
- [LEE 93a] Lee H.L. et Billington C., « Material Management in Decentralized Supply Chains », Operations Research, 41(5), pp. 835-847, 1993.
- [LEE 93b] Lee H.L., Billington C., Carter B., “Hewlett-Packard Gains Control of Inventory and Service through Design for Localization”, *Interfaces*, 23(4), pp. 1-11, 1993.
- [LEE 95] Lee H.L., et Billington C., “The Evolution of Supply-Chain Management Models and Practice at Hewlett-Packard”, *Interfaces*, 25(5), pp. 42-63, 1995.
- [LEN 01] Lenz K.; Oberweis A., “Modeling Interorganizational Workflows with XML-nets”, in: Proceeding of 34th HICSS, Hawaii, 2001.
- [LEN 05] Kirsten Lenz, Marco Mevius, Andreas Oberweis, “Process-Oriented Business Performance Management with Petri Nets”, 2005 IEEE International Conference on e-Technology, e-Commerce and e-Service (EEE'05) pp. 89-92, 2005.
- [LIN 93] Lindemann C., “An Improved Numerical Algorithm for Calculating steady-state Solutions of Deterministic and Stochastic Petri Nets Models”, *Performance Evaluation*, 18, pp. 79-95, 1993.
- [LIN 96] Lindemann C., Shedler G. S., “Numerical Analysis of Deterministic and Stochastic Petri Nets with Concurrent Deterministic Transitions”, *Performance Evaluation*, 27, pp. 565-582, 1996.

- [**LIN 98**] Lindemann C., "Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets", John Wiley and Sons, 1998.
- [**LIN 98a**] Lin F.R. et Shaw M.J., "Reengineering the Order Fulfillment Process in Supply Chain Networks", *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 10, pp. 197-229, 1998.
- [**LIT 61**] Little J.D.C., "A proof of the queueing formula $L = \lambda \times W$ " *Operations Research*, 9, pp. 383-387, 1961.
- [**MEB 03**] Mebarki N., **Labadi K.**, "Perturbation analysis to set the number of automated guided vehicles in a flexible manufacturing system", *IEEE-ICCA'2003*, 4th International Conference on Control and Automation, Montreal Quebec, 2003.
- [**MEN 01**] Mentzer J.T, Dewitt W., Keebler J.S., Min S., Nix N.W., Smith C.D., Zacharia Z.G., "Defining the supply chain management", *Journal of Business logistics*, 22(2), 2001
- [**MER 74**] Merlin P. M., "A study of the recoverability of computing systems", PhD thesis, Department of Information and Computer Science, University of California, Irvine, CA, 1974.
- [**MEV 04**] Mevius M. V., Pibernik. R., "Process Management in Supply Chains- A New Petri-Net based Approach". *Proceedings of the 37th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'O4)* Big Island, Hawaii, January 05-08, 2004.
- [**MIN 02**] Min H., and Zhou G. "Supply Chain modeling : past, présent and future". *Computers and industrial engineering*, 43, 2002.
- [**MOL 82**] Molloy M.K., "Performance analysis using Stochastic Petri Nets" *IEEE Transactions on Computers*, C-31(9), pp. 913-917, September 1982.
- [**MUR 89**] Murata T., "Petri nets: Properties, analysis and applications", *Proceedings of the IEEE*, 77(4), pp. 541-580, 1989.
- [**NAK 03**] Nakashima Knichi, Gupta Surendra M., "Performance evaluation of a supplier management system with stochastic variability", *International Journal Manufacturing Technology and Management*, 5(1/2), 2003
- [**NAT 80**] Natkin S., "Les réseaux de Petri stochastiques", *Thèse de Doctorat*, CNAM, Paris 1980.
- [**NEW 93**] Newhart D.D., Stott K.L, Vasko F.J., "Consolidating product sizes to minimize inventory levels for a multi-stage production and distribution systems", *Journal of the Operational Research Society*, 44(7), pp. 637-644, 1993.
- [**NIS 00**] Nissen M. "Agent-based supply chain disintermediation versus re-intermediation : economic and technological perspectives", *International Journal of intelligent systems in accounting, finance and management*, 9, pp. 237-256, 2000.
- [**PAR 98**] Parunak H.V.D. "The DASCh experience: How to model a supply chain", *Actes de la Second International Conference on Complex systems*, 1998.

- [PAR 99] Parija G.R., Sarker B.R., "Operations Planning in a Supply Chain System with Fixed-Interval Deliveries of Finished Goods to Multiple Customers", *IIIE Transactions*, 31, pp. 1075-1082, 1999.
- [PHE 00] Phelps, R.A., Parsons, D.J. and A.J. Spirelle, "The SI industry Productt suite : Simulation from the production line to the supply chain", Proc. Of the 2000 Winter Simulation conference, J.A. Joines et al. (eds), pp. 208-214, 2000.
- [PLA 91] Plateau B., Fourneau J. M., "A methodology for solving Markov models of parallel systems". *Journal of parallel and distributed computing*, 12, pp. 370-387, 1991.
- [POI 01] Poirier C., et Reiter S.E., "La Supply Chain", Dunod, 2001.
- [PON 96] Pons J., Chevalier P., "La logistique intégrée", pp. 34-35, Hermes, 1996.
- [POO 94] Pooley J., "Integrated Production and Distribution Facility Planning at Ault Foods", *Interfaces*, 24 (4), pp. 113-121, 1994.
- [PRO 95] Proth J.M. et Xie X., "Les RdP pour la conception et la gestion des systèmes de production", Edition Masson, 1995.
- [RAM 74] Ramchandani C., "Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets", PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Project MAC Report MAC-TR-120. 1974.
- [RAO 98] Rao U., Scheller-Wolf A., Tayur S., "Development of a Rapid Response Supply Chain at Caterpillar", *Operations Research*, 48(2), 1998.
- [REI 85] Reisig W., "Petri nets: an introduction". Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [RID 02] Riddalls C.E., Bennett S., "The stability of supply chains", *International Journal of Production Research*, 40(2), pp. 459-475, 2002.
- [RIE 02] Riera D., Piera. Miquel A., and Guasch A., "CSP generation from Petri Nets Models", 15th Terminal World Congress, Barcelona, Spain, 2002.
- [ROT 99] Rota K., Bel G., Thierry C., "Relations clients-fournisseurs et planification de la production pour une entreprise impliquée dans plusieurs chaînes logistiques", 3^{ème} congrès international de génie industriel, Montréal, Canada, Mai 1999.
- [SAU 96] Sauer N., "Optimization of cyclic manufacturing systems with stochastic manufacturing times using event graphs", *International Journal of Production Economics*, 46-47, pp. 387-399, 1996.
- [SIL 89] Silva M., Valette R., "Petri nets and flexible manufacturing", *Advances in Petri Nets*, Lecture notes in Computer science, 424, pp. 374-417, 1989.
- [SIL 97] Silva M., Teruel E., "Petri nets for the design and operation of manufacturing systems". *European Journal of Control*, 3(3), 182-199, 1997
- [SRI 01] Srinivasa Raghavan N.R, and Viswanadham N., "Generalized queueing network analysis of integrated supply chains", *International Journal of Production Research Society*, 39(2), pp. 205-224, 2001.
- [STE 92] Sterman J.D., "Teaching Takes Off: Flight Simulators for Management

- Education”., OR/MS Today, 40-44, 1992.
- [SUN 93] Sundaram C. et Narahari Y., “Analysis of dynamic load balancing strategies using a combination of stochastic petri nets and queuing networks”, 14th International Conference - Application and theory of Petri Nets, Chicago Illinois, 1993.
- [SWA 98] Swaminathan J.M., Smith S.F. et Sadeh N.M., “Modeling Supply Chain Dynamics : A Multiagent Approach”, *Decision Sciences*, 29(3), pp. 607-632, 1998.
- [TAK 64] Takas L., “Processus stochastiques : problèmes et solutions”, Dunod, 1964.
- [TAN 01] Tan K.C., “A framework of supply chain management literature”, *European Journal of Purchasing & Supply Management*, 7, pp. 39-48, 2001.
- [TAY 99] Tayur S., Ganeshan R., M. Magazine, “Quantitative Models for Supply Chain Management”, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [TEI 97] Teigen R., “Information Flow in a Supply Chain Management System”, Thèse de l'Université de Toronto, 1997.
- [THI 02] Thierry C., et Bel G., “Gestion de chaînes logistiques dans le domaine aéronautique : outils d'aide a la décision pour l'amélioration du partenariat”, *Revue Française de Gestion Industrielle*, 2002.
- [THO 96] Thomas D. J., Griffin P. M., “Cordinated supply chain management”, *European Jornal of Operation Research*, 94, pp. 1-15, 1996.
- [UME 98] Umeda S., Jones A., “A Simulation-Based BPR Support System for Supply Chain Management”, Extrait de *Re-Engineering in Action: The Quest for World Class Excellence*, Chan Meng Khoong (ed), Imperial College Press, 1998.
- [VAN 00] van der Vorst, Jack G.A.J., Beulens J.M, van Beek P., “Modelling and simulating Multi-echelon Food Systems”, *European Journal of Operational Research*, 122, pp. 354-366, 2000.
- [VAN 90] van der Aalst, W. M. P.; Waltmans, A. W.: “Modelling Flexible Manufacturing Systems with EXSPECT”, *Proceedings of the 1990 European Simulation Multiconference*, Nürnberg, B. Schmidt (ed.), simulation Councils Inc., pp. 330-338. June 1990.
- [VAN 92] Van der Aalst W. M. P., “Timed Coloured Petri Nets and Their Application to Logistics”, PhD thesis, Technical University of Eindhoven, 1992.
- [VEE 00] Veerakamolmal P., Gupta S.M., “Optimizing the supply chain in reverse logistics”, *Actes de SPIE International Conference on Environmentally Conscious Manufacturing*, 4193, pp.157-166, 2000.
- [VID 01] Vidal C.J. et Goetschalckx M. “A global supply chain model with transfer pricing and transportation cost allocation”, *European Journal of Operational Research*, 129, pp. 134-158, 2001.
- [VID 97] C. J. Vidal, Goetschalckx M., Strategic production-distribution models : a critical review whit emphasis on global supply chain models, *European Journal of Operation*

research, 98, pp. 1-18, 1997.

- [VIS 00] Viswanadham N., Srinivasa Raghavan N. R., "Performance Analysis and Design of Supply Chains: A Petri Net Approach", *Journal of the Operational Research Society*, 51(10), pp. 1158-1169, 2000.
- [VIS 88] Viswanadham N. et Narahari Y., "Stochastic Petri net models for performance evaluation of automated manufacturing systems", *Information and Decision Technologies*, 1, pp. 125-142, 1988.
- [VIS 95] Viswanadham N., Pattipati K. et Gopalakrishna V., "Performability studies of automated manufacturing systems with multiple part types", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(5), 1995.
- [VOU 96] Voudouris V.T., "Mathematical programming techniques to debottleneck the supply chain of the chemical industries", *Computer and Chemical Engineering* 20, S1269-S1274, 1996.
- [WAN 96] Wang L. "Object-oriented Petri nets for modelling and analysis of automated manufacturing systems", *Comput. Integrated Manuf. Systems* 26, pp. 111-25, 1996.
- [WAN 98] Wang Jiacun, "Timed Petri Nets: Theory and Application", Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [WAT 92] Waters C. D. J., "Inventory Control and Management", Ed. John Wiley and Sons, 1992.
- [WIL 83] Williams J.F., "A hybrid algorithm for simultaneous scheduling of production and distribution in multi-echelon structures", *Management Science* 29(1), pp. 77-92, 1983.
- [ZAY 01] Zaytoon J., "Systèmes dynamiques hybrides" *Traité IC2 Systèmes Automatisés*, Ed. Hermès, ISBN 2-7462-0247-6, 378 pages, 2001.
- [ZHO 93] Zhou MengChu, and DiCesare Frank., "Petri Net Synthesis for Discrete Control of Manufacturing Systems", Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [ZHO 95] Zhou Mengchu, "Petri nets in flexible and agile automation", Kluwer Academic Publishers, 1995
- [ZHO 99] Zhou Mengchu and Kurapati Venkatesh., "Modeling, Simulation, and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach", vol 6 of *Series in Intelligent Control and Intelligent Automation*. World Scientific, 1999
- [ZIL 99a] Zillus A., and Di Mascolo M., « Logistics Control in a Supply System. Model and Analysis », *Actes de ECC'99, Karlsruhe, Allemagne*, 1999.
- [ZIL 99b] Zillus A., and Di Mascolo M., "Effects of Parameter Variation on a Supply Line", *I.A.R. annual meeting 99, Strasbourg, France*, 1999.
- [ZIM 01] Zimmermann, A., Freiheit, J., Huck, A., "A Petri net based design engine for manufacturing systems", *International Journal of Production Research*, 39(2), pp. 225-253, 2001.

- [ZIM 99] Zimmermann, A.; Hommel, G.: “Modelling and evaluation of manufacturing systems using dedicated Petri nets”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 15, pp. 132-137, 1999.
- [ZUR 94] Zurawski R., and Zhou Mengchu., “Petri Nets and Industrial Applications: A tutorial” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 41(6), pp. 567-583, December 1994.

Thèse de doctorat de K. LABADI

Contribution à la modélisation et à l'évaluation de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques

Laboratoire d'optimisation des Systèmes Industriels (LOSI) - Université de Technologie de Troyes (UTT) –
12 Rue Marie Curie – BP 2060 – 10010 Troyes Cedex – France

RÉSUMÉ

Le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques. Il s'agit d'une problématique au centre des préoccupations actuelles des entreprises industrielles mais très peu abordée par la communauté des réseaux de Petri. Dans ce travail, nous développons un nouveau modèle de réseaux de Petri dits réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques (BDSPNs) capable de supporter les caractéristiques essentielles des systèmes logistiques et plus généralement des systèmes à événements discrets. Ils sont particulièrement adaptés pour la modélisation de flux évoluant en quantités discrètes (lots de différentes tailles et variables) et ils permettent de prendre en compte des activités plus spécifiques telles que les commandes des clients, l'approvisionnement des stocks, la production et la livraison en mode lot. Les BDSPNs permettent par leur formalisme graphique et mathématique de capturer pertinemment et simplement cet aspect lot omniprésent dans différentes locations de ces systèmes et qui s'implique très considérablement dans leur comportement et par conséquent dans leur analyse. Nos travaux portent à la fois sur la théorie du nouveau modèle, sur ses techniques d'analyse et sur ses applications aux systèmes logistiques. Ainsi, les résultats obtenus et les applications effectuées font des BDSPNs un outil de modélisation performant aussi bien pour l'analyse que pour la simulation.

MOTS CLES : Chaîne logistique, système de gestion de stocks, réseaux de Petri stochastique, modélisation, analyse, évaluation de performances

ABSTRACT

This work presented in this thesis constitutes a contribution to modelling and performances analysis of logistic systems by using a new stochastic Petri nets model. It addresses issues considerably concerned by industrial companies but having received very little attention by the Petri nets community in spite of an important role of Petri nets played in the study of discrete events systems. In this work, we develop a new Petri nets model called batch deterministic and stochastic Petri nets (BDSPNs) able to describe essential characteristics of logistical systems (batch behaviours, randomness, operational policies, synchronization of various flows) and more generally of discrete events systems. The model is particularly adapted for the modelling of flow evolution in discrete quantities (variable batches of different sizes) and makes it possible to describe more specific activities such as customer order processing, replenishment of stocks, production and delivery in a batch mode. With their powerful graphical and mathematical formalism, BDSPNs can capture pertinently and precisely this batch behaviour presented in various stages of these systems, which has a very important impact on their behaviour and consequently on their analysis. The work of this thesis contributes to the theory of the new model both on its analysis techniques and on its applications to logistical systems. The results obtained in this thesis make BDSPNs a powerful modelling tool for both analysis and simulation. The capability of the new model to meet real needs is shown through applications dedicated to logistical systems.

KEYWORDS: Supply chain, inventory control system, stochastic Petri nets, modelling, analysis, performance evaluation

Contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques

Le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution à la modélisation et à l'analyse de performances des systèmes logistiques à l'aide d'un nouveau modèle de réseaux de Petri stochastiques. Il s'agit d'une problématique au centre des préoccupations actuelles des entreprises industrielles mais très peu abordée par la communauté des réseaux de Petri. Dans ce travail, nous développons un nouveau modèle de réseaux de Petri dits réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques (BDSPNs) capable de supporter les caractéristiques essentielles des systèmes logistiques et plus généralement des systèmes à événements discrets. Ils sont particulièrement adaptés pour la modélisation de flux évoluant en quantités discrètes (lots de différentes tailles et variables) et ils permettent de prendre en compte des activités plus spécifiques telles que les commandes des clients, l'approvisionnement des stocks, la production et la livraison en mode lot. Les BDSPNs permettent par leur formalisme graphique et mathématique de capturer pertinemment et simplement cet aspect lot omniprésent dans différentes locations de ces systèmes et qui s'implique très considérablement dans leur comportement et par conséquent dans leur analyse. Nos travaux portent à la fois sur la théorie du nouveau modèle, sur ses techniques d'analyse et sur ses applications aux systèmes logistiques. Ainsi, les résultats obtenus et les applications effectuées font des BDSPNs un outil de modélisation performant aussi bien pour l'analyse que pour la simulation.

Mots clés : logistique (organisation) – gestion de stocks – Petri, réseaux de – systèmes, analyse de – performances – évaluation.

Contribution to Modelling and Performance Analysis of Logistic Systems by Using a New Stochastic Petri Net Model

This work presented in this thesis constitutes a contribution to modelling and performances analysis of logistical systems by using a new stochastic Petri nets model. It addresses issues considerably concerned by industrial companies but having received very little attention by the Petri nets community. In this work, we develop a new Petri nets model called batch deterministic and stochastic Petri nets (BDSPNs) able to describe essential characteristics of logistical systems (batch behaviours, randomness, operational policies, synchronization of various flows) and more generally of discrete events systems. The model is particularly adapted for the modelling of flow evolution in discrete quantities (variable batches of different sizes) and makes it possible to describe more specific activities such as customer order processing, replenishment of stocks, production and delivery in a batch mode. With their powerful graphical and mathematical formalism, BDSPNs can capture pertinently and precisely this batch behaviour presented in various stages of these systems, which has a very important impact on their behaviour and consequently on their analysis. The work of this thesis contributes to the theory of the new model both on its analysis techniques and on its applications to logistical systems. The results obtained in this thesis make BDSPNs a powerful modelling tool for both analysis and simulation. The capability of the new model to meet real needs is shown through applications dedicated to logistical systems.

Keywords: supply chain, inventory control system, stochastic Petri nets, modelling, analysis, performance evaluation