



HAL
open science

Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves: paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2 - 6ème

Annette Braconne Michoux

► **To cite this version:**

Annette Braconne Michoux. Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves: paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2 - 6ème. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. NNT: . tel-00389633v2

HAL Id: tel-00389633

<https://theses.hal.science/tel-00389633v2>

Submitted on 4 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE :Savoirs scientifiques : Didactique des disciplines

DOCTORAT

Didactiques des Mathématiques

BRACONNE MICHOUX ANNETTE

EVOLUTION DES CONCEPTIONS ET DE L'ARGUMENTATION EN GEOMETRIE CHEZ LES
ELEVES : PARADIGMES ET NIVEAUX DE VAN HIELE A L'ARTICULATION CM2 – 6^{ème}

SUTDENTS'EVOLUTION OF CONCEPTIONS AND ARGUMENTATION IN GEOMETRY :
PARADIGMS AND VAN HIELE LEVELS BETWEEN GRADE 5 (CM2) AND GRADE 6 (6^{ème})

Thèse dirigée par M. Bernard PARZYSZ

Soutenue le 26 septembre 2008

JURY

M. Bernard PARZYSZ : Professeur émérite à l'IUFM d'Orléans-Tours (directeur)
M. Jean DIONNE : Professeur associé à l'Université Laval de Québec (rapporteur)
Mme Teresa ASSUDE : Professeure à l'IUFM d'Aix-Marseille (rapporteur)
M. François COLMEZ : Maître de conférence honoraire à l'Université Paris-Diderot (Paris 7)
M. Christophe HACHE : Maître de conférence à l'Université Paris-Diderot (Paris 7)

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais été mené à son terme si je n'avais eu l'entourage qui fut le mien pendant toutes ces années.

Tout d'abord, c'est à la fois avec grand plaisir et une émotion certaine que je me remercie Monsieur Bernard PARZYSZ qui a accepté de diriger mon travail, alors qu'il n'en manquait pas par ailleurs ! Il a su être à la fois un guide et un analyste, pertinent et très fin dans ses remarques, avec toujours le mot, l'idée qui convenait pour relancer la dynamique de recherche quand celle-ci s'essouffait un peu.

La présence de Monsieur François COLMEZ aux côtés de Monsieur Bernard PARZYSZ a été elle aussi déterminante. Il a accepté, avec une générosité quasi sans limite, de m'accompagner tout au long de cette étude. Avec la gentillesse, la générosité et la disponibilité qui sont les siennes, il a su me faire profiter à la fois de son expérience incommensurable de chercheur en didactique mais aussi de son inventivité, de ses connaissances sans doute illimitées dans tellement de domaines, tout en respectant la rigueur nécessaire au travail de recherche. La richesse de ce travail, si elle est reconnue, est due à la présence de Monsieur François Colmez depuis le premier jour de mon engagement dans cette démarche. Qu'il trouve ici l'expression de ma très sincère reconnaissance.

Je voudrais remercier aussi Madame Teresa ASSUDE qui, pendant ses vacances, a accepté d'être rapporteur auprès du jury et donc de relire et corriger ce texte.

Monsieur Jean DIONNE a lui aussi, relevé le défi de relire et corriger en période estivale à Québec.

La précision de ces deux rapports, les suggestions de corrections m'ont permis de comprendre combien et comment je pouvais améliorer mon travail, en particulier au niveau rédactionnel. Merci à eux.

Enfin la présence de Monsieur Christophe HACHE sur le jury me touche particulièrement. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je ne saurais oublier les personnes qui directement ou indirectement ont contribué à l'élaboration de ce travail : en particulier Monsieur Serge CHAPON, Principal du collège Louis Lumière de Marly le Roi, Madame Chantal COURTAUX, IEN de Saint-Germain en Laye 2, les enseignants du secteur scolaire de Marly le Roi qu'ils soient en charge d'une classe de CM2 ou de 6^{ème} ainsi que leurs élèves. Tous ont très gentiment collaboré à l'expérimentation de cette recherche.

A toutes et à tous, MERCI.

Table des matières

INTRODUCTION	7
INTRODUCTION	9
Chapitre I	13
CADRE THEORIQUE	13
1. Apprentissage et développement selon Lev Vygotski	14
2. Les niveaux de pensée en géométrie selon P.M. van Hiele	20
NIVEAU 1 : IDENTIFICATION-VISUALISATION	25
NIVEAU 2 : ANALYSE	27
NIVEAU 3 : DEDUCTION INFORMELLE	29
NIVEAU 4 : DEDUCTION FORMELLE	31
NIVEAU 5 : RIGUEUR	33
Verbales	37
Associe le nom correct à une figure donnée	37
Décrit correctement les diverses propriétés d'une figure	37
Définis les mots correctement et avec concision	37
Formule des phrases indiquant les interrelations entre les figures	37
Comprend les distinctions entre définitions, postulats et théorèmes	37
Reconnaît ce qui est donné dans un problème et ce qu'il faut trouver ou faire	37
Formules des généralisations de résultats connus	37
Décrit différents systèmes déductifs (axiomatiques)	37
3. La théorie des paradigmes géométriques	42
3.1. Les paradigmes géométriques définis par Houdement et Kuzniak.	42
3.2. Les paradigmes géométriques selon Parzysz	44
3.3. Paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele	50
4. La typologie des preuves de Balacheff	52
5. Cadre théorique	57
6. Objectifs de la recherche	62
6.1. A propos des paradigmes géométriques :	62
6.2. A propos des niveaux de van Hiele :	63
6.3. A propos du cadre théorique :	63
Chapitre II	65
PROBLEMATIQUE	65
1. Analyse de l'INRP	66
2. Ce que les recherches ont montré dans différents cadres théoriques	68
.La théorie des niveaux de van Hiele	69
2.2. « Realistic Mathematics Education » aux Pays-Bas	71
2.3. Une recherche sur la conception du cercle à la fin de l'école primaire.	73
2.4. Les travaux des chercheurs italiens sur l'entrée dans le monde des théorèmes (Boero et Mariotti)	74
2.5. Une recherche importante en France au passage de l'école primaire au collège.	76
2.6. Le « su » et le « perçu »	77
2.7. Des recherches basées sur les paradigmes	78
2.8. The figural concept de Fischbein	83
2.9. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. (Duval)	88
3. Rappels sur les programmes	91
3.1. Programmes du Primaire (cycle 3)	92
3.2. Programme de 6^{ème}	95
4. Evaluation nationale à l'entrée en 6 ^{ème}	99
5. Analyse de quelques manuels de CM2 et de 6ème	111
5.1. Manuels de CM2	111
5.2. Manuels de 6^{ème}	118
6. Conclusion	124
7. Questions de recherche	126
7.1. A propos des paradigmes géométriques	126
7.2. A propos des niveaux de van Hiele	126
7.3. A propos du cadre théorique	127
Chapitre III	129
METHODOLOGIE	129

1. Population étudiée : les élèves des écoles primaires (CM2) et du collège (6 ^{ème}) du secteur de Marly le Roi (78160).....	130
2. Construction de l'outil	131
2.1. Organisation matérielle	131
2.2. Choix des « exercices »	131
2.3. Construction des questionnaires.	145
3. Déroulement de l'expérimentation :	147
Chapitre IV.....	151
ANALYSE A PRIORI	151
1. Exercice 1.1.	153
2. Exercice 1.2	155
3. Exercice 1.3.	158
4. Exercice 1.4.	161
5. Exercice 1.5.	165
6. Exercice 1.6.	167
7. Exercice 1.7.	171
8. Exercice 1.8	175
9. Exercice 2.1.	178
10. Exercice 2.2	182
11. Exercice 2.3.	186
12. Exercice 2.4.	190
13. Exercice 2.5.	193
14. Exercice 2.6.	196
15. Exercice 2.7.	200
16. Exercice 2.8.	203
17. Exercice 2.9	206
18. Conclusion	208
Chapitre V	211
RESULTATS	211
Codages des paradigmes et des niveaux de van Hiele mal identifiés.....	212
1. Recto des questionnaires : informations sur les activités.....	213
1.1. Exercice 1.1.	213
1.2. Codage des exercices 1.2.et 1.3.:	217
1.3. Exercice 1.2.	219
1.4. Exercice 1.3.	224
1.5. Comparaison des résultats des exercices 1.2. et 1.3.	228
1.6. Exercices 1.4.et 1.5.	231
1.7. Exercice 1.4.	235
1.8. Exercice 1.5.	238
1.9. Comparaison entre 1.4.et 1.5.	242
1.10. Conclusion à propos des triangles isocèles.	248
1.11. Exercice 1.7.	256
1.12. Exercices 1.6. et 1.8.	261
1.13. Exercices 1.8 (questionnaire T) et 1.8. (questionnaire B)	274
1.14. Bilan des activités menées sur le recto des feuilles	286
2. Verso des questionnaires : informations sur les activités.....	293
2.1. Exercices 2.1. à 2.3.	293
2.2. Exercice 2.1.	295
2.3. Exercice 2.2.	301
2.4. Exercice 2.3.	305
2.5. Bilan des exercices 2.1. à 2.3.	311
2.6. Exercices 2.4. et 2.5.	322
2.7. Exercice 2.4.	324
2.8. Exercice 2.5.	328
2.9. Comparaison entre les exercices 2.4. et 2.5.	333
2.10. Codage des exercices 2.6 à 2.9.	340
2.11. Exercice 2.6.	343
2.12. Exercice 2.7.	346
2.13. Exercice 2.8.	351
2.14. Comparaison entre 2.7. et 2.8.	355

2.15.	Exercice 2.9.....	360
2.16.	Comparaison entre 2.7. et 2.9.....	364
2.17.	Comparaison de 2.6. à 2.9.....	369
2.18.	Bilan des activités menée aux versos des questionnaires.....	380
3.	Résultats à propos des paradigmes géométriques.....	390
3.1.	Dans les activités.....	391
3.2.	Paradigmes utilisés par chaque élève.....	394
3.3.	Abandon du paradigme G2 pour un élève.....	399
3.4.	Accès au paradigme G2 pour un élève.....	405
3.5.	Recto et verso dans le même paradigme.....	411
3.6.	Conclusion à propos des paradigmes.....	414
4.	Résultats à propos des niveaux de van Hiele.....	415
4.1.	Dans les activités.....	415
4.2.	Niveau de van Hiele attribué à chaque élève.....	418
4.3.	Activités du verso dans lesquelles les élèves ont témoigné d'un niveau de van Hiele inférieur. 422	
4.4.	Activités du verso dans lesquelles les élèves ont témoigné d'un niveau de van Hiele supérieur. 435	
4.5.	Activités du verso dans lesquelles les élèves ont témoigné du même niveau de van Hiele.....	443
4.6.	Conclusion à propos des niveaux de van Hiele.....	449
5.	Croisement des résultats à propos des paradigmes et des niveaux de van Hiele au travers des activités 451	
5.1.	Croisement dans les activités.....	451
5.2.	Croisement entre paradigmes et niveaux de van Hiele pour chaque élève.....	453
5.3.	Conclusion.....	472
6.	Lien entre paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele à propos d'un élève au travers des exercices.....	473
6.1.	Valeur du niveau de van Hiele moyen dans chaque paradigme.....	473
6.2.	Une « note » pour chaque élève.....	481
6.3.	Conséquences à propos des élèves.....	485
6.4.	Caractérisation d'un « groupe étalon ».....	490
6.5.	Conséquences à propos des activités.....	494
7.	Quels paradigmes pour le niveau 2 d'analyse de van Hiele ?.....	501
7.1.	Du point de vue des tâches.....	501
7.2.	Du point de vue des élèves.....	509
8.	Conclusion.....	513
	Chapitre VI.....	515
	CONCLUSION.....	515
1.	Objet de la recherche.....	516
2.	Rappel des questions de recherche.....	517
2.1.	A propos des paradigmes géométriques.....	518
2.2.	A propos des niveaux de van Hiele.....	518
2.3.	A propos du cadre théorique.....	519
3.	A propos des paradigmes géométriques :.....	519
3.1.	Peut-on au travers d'une activité déterminer le paradigme dans lequel un élève de CM2 ou de 6ème fonctionne ?.....	520
3.2.	Ce paradigme dépend-il de l'activité ou du niveau de scolarité ?.....	520
3.3.	Les élèves de CM2 ou de 6ème fonctionnent-ils dans un paradigme particulier tel que G1 ou G2 ? 521	
4.	A propos des niveaux de van Hiele :.....	522
4.1.	La théorie des niveaux de pensée en géométrie telle que définie par P.M. van Hiele s'applique- t-elle aux élèves à la charnière entre l'école primaire et le collège ? La théorie des niveaux de van Hiele est-elle fonctionnelle pour des élèves de CM2 et de 6ème ?.....	522
4.2.	Pour une tâche donnée, les élèves de CM2 et de 6ème témoignent-ils tous du même niveau de van Hiele ? Le niveau de développement selon la théorie de van Hiele est-il lié au niveau de scolarité ?.....	523
4.3.	Un même élève de CM2 ou de 6ème peut-il maîtriser des niveaux de van Hiele différents selon la tâche qui lui est proposée ?.....	524
5.	A propos du cadre théorique.....	525

5.1. Peut-on associer les paradigmes géométriques et les niveaux de van Hiele ? Y a-t-il un lien de dépendance entre les deux géométries G1 et G2 et les niveaux de van Hiele ?	525
5.2. Le niveau d'analyse de van Hiele peut-il être considéré comme la zone de « tuilage » entre les géométries spatio-graphique (G1) et proto-axiomatique (G2) ? Quelles sont les caractéristiques de ce « tuilage » ?	526
6. Limites de la recherche	528
7. Implications dans la recherche.....	529
7.1. Une étude qualitative liée au modèle	529
7.2. Tester de nouvelles activités	529
BIBLIOGRAPHIE	533
Annexes.....	541
Annexe 1	542
1. Manuels de CM2.....	543
2. Manuels de 6ème	544
Annexe 2	548
Exercice 1.1.....	549
Exercice 1.2.....	550
Exercice 1.3.....	551
Exercice 1.4.....	552
Exercice 1.5.....	553
Exercice 1.6. : « Portrait de nombres »	554
Exercice 1.6. : « Portrait de figures »	554
Exercice 1.7.....	555
Exercice 1.8. : « Portrait de nombres »	556
Exercice 1.8. : « Portrait de nombres »	557
Exercice 2.1.....	558
Exercice 2.2.....	559
Exercice 2.3.....	560
Exercice 2.4.....	561
Exercice 2.5.....	562
Exercice 2.6.....	563
Exercice 2.7.....	564
Exercice 2.8.....	565
Exercice 2.9.....	566
Annexe 3	567
1. CM2	567
2. 6 ^{ème}	572
Annexe 4	579
1. Passage à un niveau de van Hiele inférieur entre le recto et le verso.....	580
1.1. Niveau 3 au recto et niveau inférieur au verso	580
1.2. De N2 au recto vers N1 au verso	583
1.3. N0 au verso	584
2. Passage à un niveau de van Hiele supérieur entre le recto et le verso	585
2.1. N0 au recto et un niveau supérieur au verso.....	585
2.2.....	587
2.3. N1 au recto et un niveau supérieur au verso.....	588
2.4. N2 au recto et N3 au verso.....	590
3. Maintien au même niveau de van Hiele.....	591
3.1. Maintien en N0 ou N1	591
3.2. Maintien en N2	592
3.3. Maintien en N3	593

INTRODUCTION

Citons Platon dans cet extrait de *La République, livre VI* :

« Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple, c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres ou produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'était aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée. » (cité par Dhombres et al., 1987, p. 10)

Mais que comprend un élève de primaire de ce qu'est une figure ? Qu'en est-il de son camarade de 6^{ème} ? Ont-ils la même compréhension ? En font-ils le même usage ? Sont-ils déjà des experts en géométrie comme le décrit Platon ou au contraire ont-ils une approche de la figure et des situations géométriques en général qui ne leur permet pas de « voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée » ?

INTRODUCTION

Ce travail trouve son origine dans notre pratique quotidienne de l'enseignement de la géométrie au collège et s'inscrit dans la suite de notre recherche personnelle. Nous avons montré (Braconne ; 1988) que ce que les élèves de 3^{ème} et leurs enseignants entendaient par preuve n'était pas la même chose. Les élèves et les professeurs n'accordaient pas le même sens aux mêmes mots et n'avaient pas la même conception ni la même perception de la situation de preuve en géométrie. En revanche il semblait y avoir un consensus sur ce qu'est la démonstration, les élèves s'avouant souvent incapables d'en produire une qui satisfasse leur enseignant. Nous avons constaté par ailleurs (Braconne Michoux ; 2001) comme Hoyles et Healy (1998) que le transfert de compétences en termes de compréhension et de production de preuves, du domaine de l'algèbre au domaine de la géométrie, ne pouvait se faire spontanément. Un apprentissage spécifique est donc nécessaire à la production d'une preuve et a fortiori d'une démonstration dans un domaine ou dans l'autre.

Les programmes de géométrie du secondaire prévoient « le passage d'une géométrie de description à une géométrie de déduction ». Que faut-il entendre par ces mots ? Les élèves de CM2 sont-ils prêts à ce changement dans leur pratique de la géométrie en passant d'une expérience concrète vers les considérations plus théoriques de la géométrie euclidienne ?

Nous savons par expérience personnelle et par les lectures que nous avons pu déjà faire, que la théorie des niveaux de pensée en géométrie développée par P.M. van Hiele (1957) est un outil assez facile à utiliser pour la construction d'un enseignement cohérent de la géométrie à des niveaux plus avancés de la scolarité en particulier à partir de la classe de 5^{ème}. Elle permet d'associer un niveau de pensée à un élève face à une tâche donnée. Qu'en est-il plus tôt ? Est-ce que les élèves de CM2 ou de 6^{ème} peuvent satisfaire aux critères d'attribution des niveaux de van Hiele ? Cette théorie des niveaux de pensée en géométrie est-elle adaptée aux élèves à la fin de l'école primaire ? Si oui, en l'appliquant, peut-on mieux définir les compétences maîtrisées par les élèves, les activités qui les révèlent ou les font évoluer ?

De la même façon, nous savons que la théorie des paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak (1998-1999) ; Parzysz (2001) permet de décrire différents univers dans lesquels un individu peut fonctionner en géométrie. Cette théorie décrit un mode de fonctionnement en

géométrie, mode de fonctionnement qui va varier selon les compétences de l'individu, mais qui pourrait être stable chez une même personne quelle que soit la tâche proposée. Elle a, jusqu'à maintenant, permis de préciser les modes de fonctionnement en géométrie des futurs professeurs des écoles. Une telle théorie peut-elle aussi s'appliquer à des élèves au passage CM2-6^{ème} quand leurs connaissances de la géométrie sont encore en évolution ? Cette théorie peut-elle aider l'enseignant à mieux contrôler les objectifs dans travail qu'il propose à ses élèves ?

Le but de cette recherche est donc d'essayer de répondre à ces questions d'une part et de chercher à associer ces deux approches théoriques de l'enseignement de la géométrie, l'une donnant des repères dans les acquisitions et les compétences successives d'un élève, l'autre définissant divers modes de fonctionnement en géométrie. Peut-on trouver une certaine cohérence entre ces deux théories : la théorie des niveaux de van Hiele et la théorie des paradigmes géométriques ? Quelles informations nous donne chacune de ces théories sur les compétences des élèves au passage CM2-6^{ème}, sur la nature des activités proposées à ce stade de la scolarité ? Dans quelle mesure peut-on orienter favorablement l'évolution de l'élève vers une géométrie plus abstraite qui ait du sens pour lui ?

Nous allons donc revisiter la définition de la théorie des niveaux de van Hiele et celle des paradigmes géométriques et tenter de les organiser l'une par rapport à l'autre. Ce sera là notre cadre théorique.

Dans un second chapitre, nous ferons un inventaire aussi précis que possible des apports fournis par la recherche dans le cadre de ces différentes théories. Nous essaierons de montrer en quoi elles peuvent être intéressantes pour l'enseignant dans sa classe de CM2 ou de 6^{ème} et en quoi elles ne sont pas suffisantes pour répondre à la question centrale de notre recherche : peut-on décrire puis accompagner un élève de 6^{ème} dans son apprentissage d'une géométrie théorique quand il ne possède qu'une géométrie spatio-graphique à la fin du CM2 ?

Pour mettre à l'épreuve notre cadre théorique, nous proposerons à des élèves de CM2 et de 6^{ème} deux activités de géométrie plane, activités ciblées selon chacune des théories. Les réponses des élèves seront ensuite analysées de plusieurs manières. Dans un premier temps nous essaierons d'associer chaque réponse à un niveau de pensée en géométrie tel que défini par P.M. van Hiele. A quels signes reconnaît-on qu'une réponse témoigne de la maîtrise d'un

niveau de van Hiele plutôt que d'un autre ? Les élèves de CM2 et de 6^{ème} témoignent-ils tous des mêmes niveaux de van Hiele face à une même tâche ? A chaque fois que cela sera possible nous déterminerons aussi dans quel paradigme géométrique l'élève a pu fonctionner pour donner sa réponse. A quoi reconnaît-on qu'une activité demande à l'élève de fonctionner dans un certain paradigme et la réponse qu'il a donnée se situe-t-elle dans ce paradigme? Les élèves des deux niveaux de scolarité fonctionnent-ils dans les mêmes paradigmes pour les mêmes tâches ? Enfin nous étudierons s'il peut y avoir cohérence entre ces deux théories. Si la réponse est positive, nous devrions pouvoir définir quelques caractéristiques des activités relativement à cette cohérence. En particulier pour une activité donnée, y a-t-il une association unique entre le paradigme et le niveau de van Hiele ? Existe-t-il des réponses qui témoignent du même niveau de van Hiele mais relèvent de paradigmes différents ou au contraire, qui ayant été établies dans le contexte du même paradigme, témoignent de niveaux de van Hiele différents ?

Les réponses à ces diverses questions devront nous permettre de proposer et d'analyser a priori différentes tâches et activités en fonction de l'apprentissage envisagé par l'enseignant dans sa classe.

Chapitre I

CADRE THEORIQUE

Dans ce chapitre nous présentons les éléments du cadre théorique dans lequel s'inscrit notre recherche. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, celui-ci s'appuie d'une part sur les niveaux de pensée en géométrie définis par P.M. van Hiele au début des années cinquante et les paradigmes géométriques présentés par Houdement et Kuzniak, puis redéfinis par Parzysz à la fin des années quatre-vingts. Mais nos références théoriques trouvent aussi leur source dans les théories de l'apprentissage et du développement élaborées dans les années trente par Vygotski. Enfin, on ne saurait initier une recherche en géométrie centrée sur la compréhension que les élèves peuvent avoir de la situation géométrique qui leur est proposée et de l'analyse qu'ils en font sans oublier le travail sur la preuve menée par Balacheff dans les années quatre-vingts.

Les références que nous utiliserons sont donc :

- les notions de concepts et de développement chez l'enfant conçues par Vygotski ;
- les niveaux de pensée en géométrie tels que définis par Pierre et Dina van Hiele ;
- les paradigmes géométriques définis par Houdement et Kuzniak ;
- les paradigmes géométriques revus par Parzysz ;
- les différentes preuves en géométrie proposées par Balacheff.

1. Apprentissage et développement selon Lev Vygotski¹

Vygotski² partage avec Piaget, l'idée que la pensée de l'enfant évolue et que

nous devons non pas nous concentrer sur le résultat du développement mais sur le processus même selon lequel des formes supérieures sont établies ... Appréhender complètement en recherche le processus de développement d'un objet donné au travers de toutes ses phases et de tous ses changements – de la naissance jusqu'à la mort – signifie fondamentalement découvrir sa nature, son essence, car c'est seulement dans le mouvement qu'un corps montre ce qu'il est. (Vygotsky, 1978 ; p. 64 ; notre traduction)

¹ Cette première partie est centrée sur l'apprentissage de l'élève. Les écrits auxquels nous nous reportons sont principalement *Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps* par Vergnaud et *Vygotski aujourd'hui* sous la direction de Schneuwly et Bronckart où nous trouverons non seulement des extraits de *Pensée et langage* mais aussi des traductions d'autres écrits de Vygotski publiés ultérieurement comme *Mind in Society* (1978).

² La version originale est :

“We need to concentrate not on the product of development but on the very process by which higher forms are established ... To encompass in research the process of a given thing's development in all its phases and changes – from birth to death – fundamentally means to discover its nature, its essence, for “it is only in movement that a body shows what it is.”

Notre intention ici est de préciser la notion de zone de plus proche développement³ que nous appellerons zone de développement proximal. Dans *Mind in Society* (p. 86)⁴, Vygotski définit ainsi cette zone de développement proximal comme :

la distance entre le niveau de développement actuel déterminé grâce à l'ensemble des problèmes que l'enfant arrive à résoudre sans aide et le niveau de développement potentiel déterminé par les problèmes qu'il peut résoudre avec l'aide de l'adulte ou en collaboration avec des camarades plus avancés que lui. (*notre traduction*)

Comme le rapporte Vergnaud dans *Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps*

Vygotski considère que développement et apprentissage ne coïncident pas et ne doivent pas être confondus. Il rejette la thèse maturationniste selon laquelle le développement résulterait de la maturation du système nerveux et précéderait l'apprentissage. Il n'écarte pas pour autant l'idée que les apprentissages scolaires sont précédés d'un développement de l'enfant, qui peut être très important. (p. 21)

Dans leur publication *Vygotski aujourd'hui* sous la direction de Schneuwly et Bronckart, Bronckart et al. reprennent un texte écrit par Vygotski lui-même en 1937 à propos de du problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire.

L'apprentissage de l'enfant commence, dans ses phases initiales, bien avant l'apprentissage scolaire. L'apprentissage scolaire ne commence jamais sur une table rase. Tout apprentissage de l'enfant à l'école a une préhistoire. L'enfant commence par exemple à étudier l'arithmétique à l'école, mais bien avant d'entrer à l'école il a déjà acquis une certaine expérience concernant les quantités. [...] (p. 104)

C'est une constatation empirique, souvent vérifiée et indiscutable, que l'apprentissage est en relation avec le niveau de développement de l'enfant. Il n'est pas du tout nécessaire de fournir une preuve pour démontrer qu'on

³ La traduction du terme « zone de développement proximal » pose quelques problèmes. En russe « zona blizhaishego razvitiya » signifie littéralement « zone du développement le plus proche ». ... En anglais, le terme est pour la première fois traduit dans L.S. Vygostky (1978), *Mind in Society* (traduction M. Cole) par « zone of proximal development ». Ce terme a été utilisé par Bruner et Hickman dans un article paru in : J.S. Bruner (1983), *Savoir faire savoir dire*, Paris PUF, et a été traduit par Deleau « zone proximale de développement » (p.283). A notre connaissance, c'est ici que le terme vygotksyen est pour la première fois utilisé de manière systématique en français. Nous choisirons dans notre travail de l'appeler zone de développement proximal afin de rester au plus près de l'expression en russe. Toutefois dans les citations en Français, nous garderons l'expression utilisée par l'auteur.

⁴ La version originale est :

“(it is) the distance between the actual developmental level as determined through independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers.”

ne peut commencer à enseigner la lecture et l'écriture qu'à un âge déterminé, que l'enfant n'est en mesure d'apprendre l'algèbre qu'à un certain âge aussi. Nous pouvons donc tranquillement prendre comme point de départ le fait fondamental et incontestable qu'il existe une relation entre un niveau donné de développement et la capacité potentielle d'apprentissage.

On a récemment centré l'attention sur le fait que pour définir le rapport effectif entre développement et apprentissage il n'est pas suffisant de définir seulement le degré de développement. Il est nécessaire de déterminer au moins *deux niveaux de développement*, sinon on ne réussit pas à trouver la relation entre développement et possibilité d'apprentissage. Nous appelons le premier de ces niveaux *développement actuel de l'enfant*. Il correspond au degré de développement atteint par les fonctions psychiques de l'enfant. (pp. 106 – 107)

Il nous semble nécessaire de souligner ici que l' « âge déterminé » à partir duquel un enfant peut apprendre à lire et à écrire, ou à comprendre l'algèbre n'est pas à considérer de manière absolue. En effet, cet « âge déterminé » n'est pas le même d'un enfant à un autre, et dépend de nombreux facteurs tels que les sollicitations dont il a été l'objet de la part de son milieu familial et social.

Vergnaud précise alors :

Le second niveau est évidemment un niveau de développement potentiel. Entre les deux se situe la zone de proche développement (ou encore « *zone proximale de développement* ») que Vygotski définit comme ce que l'enfant sait faire avec l'aide d'autrui et qu'il ne sait pas faire tout seul. (p. 22)

On peut alors reprendre le texte de Vygotski tel qu'il est traduit dans *Vygotski aujourd'hui* et dans lequel il évoque le fait que les possibilités d'imitation des animaux ne dépassent pas les limites de leur capacité potentielle d'action :

La différence fondamentale par rapport à l'enfant tient à ce que celui-ci peut imiter de nombreuses actions qui dépassent de loin les limites de ses capacités. Grâce à l'imitation, dans une activité collective, sous la direction d'adultes, l'enfant est en mesure de réaliser beaucoup plus que ce qu'il réussit à faire de façon autonome. **La différence entre le niveau de résolution de problèmes sous la direction et avec l'aide d'adultes et celui atteint seul définit la zone proximale de développement.** (*c'est nous qui soulignons et non pas Schneuwly et Bronckart*)

Souvenons-nous de l'exemple que nous venons de donner : deux enfants ont le même âge mental de sept ans ; cependant l'un des deux résout

avec un minimum d'aide des tâches pour des enfants de neuf ans, alors que l'autre ne réussit que des tâches adaptées à des enfants de sept ans et demi. Le développement mental de ces deux enfants est-il le même ? Du point de vue de leur activité autonome, oui ; mais du point de vue de leur capacité potentielle de développement ils sont très différents. Ce que l'enfant est capable de réaliser avec l'aide de l'adulte délimite sa zone proximale de développement. Avec cette méthode nous pouvons tenir compte non seulement du processus de développement déjà réalisé et des processus de maturation qui ont déjà eu lieu, mais aussi de ceux qui sont en devenir, qui sont en train de se développer et de mûrir.

Ce que l'enfant est en mesure de faire aujourd'hui à l'aide d'adultes, il pourra l'accomplir seul demain. La zone proximale de développement nous aide ainsi à connaître les pas futurs de l'enfant et la dynamique de son développement en prenant en considération non seulement les résultats obtenus, mais aussi ceux en voie d'acquisition. L'état de développement mental de l'enfant peut ainsi être déterminé sur la base d'au moins deux facteurs : celui du développement actuel et celui de la zone proximale de développement. (pp. 108-109)

Vergnaud continue par ces mots (p. 23) :

Les conséquences pratiques sont très importantes, en particulier pour les enfants handicapés mentaux, puisqu'ils sont réputés peu enclins à la pensée abstraite. Si on ne sollicite pas ces enfants, si on se contente d'utiliser les moyens usuels faisant peu appel à l'abstraction, les enfants handicapés voient leur retard consolidé. D'une manière voisine, dans l'école ordinaire, l'enseignement orienté vers un stade déjà acquis par les enfants n'est guère productif. D'où la fameuse formule de Vygotski : « *Le seul bon enseignement est celui qui précède le développement.* » (Vygotsky aujourd'hui p. 110).

A ce stade de l'inventaire des hypothèses émises par Vygotski, il nous paraît pertinent d'évoquer la position de P.M. van Hiele : si le professeur utilise des concepts et surtout un langage auquel l'enfant donne un sens différent, s'ensuit une incompréhension mutuelle qui est tout à fait dommageable à l'apprentissage. Dans la conférence qu'il a prononcée à Sèvres en 1957, après avoir analysé un cours « classique⁵ » de géométrie sur la symétrie axiale, P.M. van Hiele s'exprimait ainsi :

... le professeur raisonne au moyen d'un réseau de relations que lui seul possède. En partant de ce réseau, il fait voir des relations

⁵ L'adjectif « classique » doit être compris ici au sens de « conforme à la tradition, aux habitudes, courant ». Ce que P.M. van Hiele veut mettre en avant c'est que l'enseignant ne suit pas les principes éducatifs qu'il va être amené à montrer.

mathématiques que les élèves finissent par manipuler par habitude. Ou bien l'élève apprend, par habitude, à opérer avec des relations [...] dont il n'a jamais vu la naissance.

En apparence, la chose est tout à fait en règle : les élèves finiront par disposer du même réseau que le professeur. La possession d'un réseau de relations, identique pour tous ceux qui s'en servent, propre à exprimer les raisonnements, un réseau dans lequel les relations sont liées d'une façon logique et déductive, n'est-elle pas le but propre de l'enseignement des Mathématiques ?

Ne soyons pas trop optimiste. D'abord un réseau de relations ainsi constitué n'est pas fondé sur les expériences sensorielles de l'étudiant. Quoiqu'il soit possible que le réseau de relations lui-même a inspiré des expériences chez l'élève, les expériences mathématiques que l'élève a bien pu avoir se basent justement sur ce réseau imposé par le professeur. Ce réseau imposé, et non pas compris, forme la base de ses raisonnements. Un réseau de relations, qui n'est pas fondé sur des expériences précédentes, risque, on le sait, d'être oublié en peu de temps.

Ensuite le réseau de relations est une construction autonome ; il n'a pas de rapport avec les autres expériences de l'enfant. Cela signifie que précisément, l'élève ne sait que ce qu'on lui a enseigné et ce qui y est lié déductivement. Il n'a pas appris à établir les rapports entre le réseau de relations et le monde sensible. Il ne saura pas appliquer ce qu'il a appris dans des situations nouvelles.

Enfin, l'enfant a appris à appliquer un réseau de relations qu'on lui a offert tout prêt, il a appris à l'appliquer dans certaines situations spécialement désignées pour lui. Mais il n'a pas appris à se construire un tel réseau lui-même dans un domaine encore inexploité. **Si, au contraire, nous réussissions à obtenir comme résultat de notre enseignement que les élèves soient capables de se construire un tel réseau relationnel déductif dans un domaine nouveau, nous aurions obtenu une formation mathématique optimale.** (p. 200)

Cette dernière phrase nous semble suffisamment importante pour être soulignée. En effet ici P.M. van Hiele suggère que l'enfant contribue à son apprentissage grâce à l'intervention de l'enseignant. Mais, dans le même temps l'enseignant doit utiliser les connaissances et les compétences de l'élève telles qu'elles existent avant l'apprentissage. C'est donc dans un contexte plus général de communication à l'intérieur de la classe que l'élève acquiert des connaissances et des compétences nouvelles. L'évolution d'un enfant, en Mathématiques en particulier n'a rien de spontané et un enseignement magistral n'est peut-être pas le plus efficace que l'on puisse concevoir.

Il nous semble que l'on peut rapprocher ce point de vue de celui de Vergnaud

Pour l'instant, contentons-nous de préciser, en paraphrasant Vygotski, que l'apprentissage avec autrui crée les conditions chez l'enfant de toute une série de processus de développement, lesquels ne se produisent que dans le

cadre de la communication et de la collaboration avec des adultes ou avec des pairs, mais qui deviennent après coup une conquête propre de l'enfant.

L'apprentissage ne coïncide donc pas avec le développement. La zone de proche développement est l'intermédiaire obligé entre les deux concepts.

Pour préciser son point de vue, Vygotski considère qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre l'apprentissage de l'adulte et l'apprentissage de l'enfant. C'est seulement pour certains apprentissages fondamentaux, qui modifient la configuration mentale humaine, que se fait sentir la différence : le langage chez le bébé et chez les enfants d'âge scolaire, la lecture, l'arithmétique, les sciences naturelles, etc. (p. 23)

Vergnaud, reprenant le texte de Schneuwly et Bronckart, cite alors Vygotski

Notre hypothèse suppose l'unité, mais non l'identité des processus d'enseignement et des processus internes de développement. Elle présuppose le passage des uns aux autres. Le véritable objet de l'analyse pédologique consiste à montrer comment la signification externe et l'habileté de l'enfant deviennent internes. L'analyse pédologique n'est pas la psychotechnique de l'école. Le travail scolaire de l'enfant n'est pas un métier. Il n'est pas analogue à l'activité professionnelle des adultes. Découvrir réellement les processus qui s'accomplissent chez l'enfant au cours de l'enseignement signifie donc ouvrir des portes à l'analyse pédologique scientifique du processus pédagogique.

Toute recherche aborde un domaine déterminé de la réalité. On se demandera quel est le type de réalité qui s'exprime dans l'analyse pédologique. Cette réalité se trouve dans les liens internes réels des processus de développement qui apparaissent dans la vie de l'enseignement scolaire. En ce sens, l'analyse pédologique se tournera toujours vers l'intérieur et ressemblera aux recherches avec les rayons Röntgen. Elle doit permettre à l'enseignant de comprendre comment les processus, mis en lumière au cours de l'enseignement scolaire, se déroulent dans la tête de chaque enfant particulier. La tâche immédiate de l'analyse pédologique consiste à découvrir ce réseau interne, sous-terrain, génétique, des sujets scolaires.

La deuxième affirmation fondamentale issue de notre hypothèse est que, bien que l'enseignement soit étroitement lié au développement de l'enfant, les deux processus ne sont pas parallèles. Le développement de l'enfant ne suit pas comme une ombre l'activité didactique développée à l'école. C'est pour cela que les tests sur les résultats obtenus à l'école par l'enfant ne reflètent jamais le cours effectif de son développement. De fait, des rapports dynamiques d'interdépendance s'instaurent entre développement et apprentissage, rapports qu'on ne peut exprimer en une formule théorique artificielle, aprioriste, donnée une fois pour toutes.

Toute discipline a un rapport particulier et concret avec le cours du développement de l'enfant. Ce rapport change lorsque l'enfant réalise un passage d'une étape de développement à une autre. Ces conclusions nous amènent à une révision du problème de la discipline formelle et donc de l'importance et de la signification de chaque matière particulière d'enseignement pour le développement intellectuel de l'enfant. Nous nous

trouvons donc face à un problème qui est loin d'être résolu par une formule simple, unique, mais qui constitue le point de départ pour des recherches nombreuses concrètes et variées. (*Vygotsky aujourd'hui* ; pp. 115 – 116)

Vergnaud continue avec ces mots :

On voit que les conceptions de Vygotski sont complexes et nuancées. Il se trouve que, à l'époque où il écrit⁶ l'enseignement des disciplines formelles fait l'objet d'un débat idéologique et politique. Vygotski se trouve pris dans cette bataille, et est accusé d'éclectisme. De même sa conception de zone de proche développement est interprétée par certains membres de l'appareil politique comme une forme d'attentisme pédagogique et comme l'effet d'une tentation biologisante. C'est un grand paradoxe évidemment, et on a du mal, soixante-cinq ans plus tard, à comprendre les ressorts des débats qui agitaient le monde universitaire de l'URSS, et qui ont abouti à marginaliser durablement les travaux de Vygotski et de nombreux autres psychologues. (pp. 25-26)

2. Les niveaux de pensée en géométrie selon P.M. van Hiele

Or la théorie des niveaux de van Hiele, développée par Dina et P.M. van Hiele en 1957 – 1958 fut à l'origine des programmes soviétiques de géométrie dans les années 60 (Gutiérrez ; 1992). On peut facilement imaginer que les van Hiele n'ont pas eu connaissance des travaux de Vygotski au moment du développement de leur théorie puisque les écrits de ce dernier n'ont été traduits que bien après sa disparition. Pourtant, par bien des aspects on serait tenter de considérer celle-ci comme étant une application des idées de Vygotski à l'enseignement de la géométrie. En effet en 1958, ils écrivaient à propos des discontinuités qu'ils avaient notées dans le processus d'apprentissage :

« Les discontinuités sont ... des sauts dans la courbe d'apprentissage, [et] ces sauts révèlent la présence de niveaux. Le processus d'apprentissage s'est arrêté ; il reprendra plus tard de lui-même. Dans l'intervalle, l'élève semble avoir « mûri ». Le professeur ne réussit pas à donner davantage d'explication du sujet. Lui et ... les autres étudiants qui ont atteint le nouveau niveau semblent parler un langage qui ne peut être compris par les élèves qui n'ont pas encore atteint ce nouveau niveau. Ils pourraient accepter l'explication du professeur, mais l'objet d'enseignement ne restera pas dans leur esprit. L'élève lui-même se sent désarmé ; il peut sans doute imiter certaines actions, mais il n'a pas de recul par rapport à sa propre activité tant qu'il n'a pas atteint le niveau supérieur. A ce moment-là le processus d'apprentissage prendra un caractère plus continu. Des routines se

⁶ Vygotski a publié *Pensée et langage* et est décédé en 1934)

mettront en place et une habileté algorithmique sera acquise comme autant de pré-requis à un nouveau saut vers un niveau encore plus élevé. (*notre traduction de l'anglais de Wirszup, 197 ; pp.75-76*)⁷

Wirszup (1976) continue ainsi⁸ :

Ces niveaux sont inhérents au développement du processus de pensée. Van Hiele a énoncé et la recherche soviétique a montré que le passage d'un niveau à un autre n'est pas un processus spontané concomitant avec le développement biologique de l'élève et dépendant seulement de son âge. Le développement qui conduit à un niveau supérieur de géométrie se fait avant tout sous l'influence de l'apprentissage et dépend donc du contenu et des méthodes d'enseignement. Toutefois, aucune méthode même une méthode parfaite, ne permet de sauter des niveaux. Le passage d'un niveau à un autre demande un certain temps ; mais diverses méthodes permettent de réguler ce laps de temps. (*notre traduction ; p. 79*)

On retrouve là les termes de Vygotski selon lesquels l'élève ne peut atteindre un niveau de développement supérieur qu'après un apprentissage guidé par l'enseignant. Il n'y a pas de développement qui soit spontané chez l'élève ou qui se fasse strictement par « maturation ».

Van Hiele lui-même disait en 1959 :

Ces niveaux sont inhérents au développement des processus de la pensée ; ils sont indépendants de la méthode d'enseignement suivie. Il se peut cependant que certaines méthodes d'enseignement ne permettent pas d'atteindre des niveaux supérieurs, de sorte que les façons de penser employées à ces niveaux restent inaccessibles aux élèves. Les points suivants peuvent contribuer à préciser les niveaux de pensée :

a) A chaque niveau apparaît de façon extrinsèque ce qui était intrinsèque au niveau précédent. Au niveau de base (identification - visualisation) les

⁷ La version originale est :

“The discontinuities are ... jumps in the learning curve, [and] these jumps reveal the presence of levels. The learning process has stopped; later on it will start itself once again. In the meantime the pupil seems to have “matured”. The teacher does not succeed in further explanation of the subject. He ... and the other students who have reached the new level seem to speak a language which cannot be understood by the pupils who have not yet reached the new level. They might accept the explanation of the teacher, but the subject taught will not sink into their minds. The pupil himself feels helpless; perhaps he can imitate certain actions, but he has no view of his own activity until he has reached the new level. At that time the learning process will take on a more continuous character. Routines will be formed and an algorithmic skill will be acquired as the prerequisites to a new jump which may lead to a still higher level.”

⁸ La version originale est :

“These levels are inherent in the development of the thought processes. Van Hiele stated and Soviet research has shown that the passage from one level to another is not a spontaneous process concomitant with the student's biological growth and dependant only on his age. The development which leads to a higher geometric level proceeds basically under the influence of learning and therefore depends on the content and methods of instruction. However, no method not even a perfect one, allows the skipping of levels. The passage from one level to the next requires a certain amount of time; but various methods allow the regulation of this period of time.”

figures étaient en fait aussi déterminées par leurs propriétés, mais celui qui pense à ce niveau ne prend pas conscience de ces propriétés.

b) Chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces signes. Une relation « exacte » à un niveau peut se révéler inexacte à un autre. Qu'on songe, par exemple, à la relation entre le rectangle et le carré. De nombreux symboles linguistiques apparaissent à deux niveaux successifs : ils établissent d'ailleurs la liaison entre les divers niveaux et assument la continuité de la pensée dans ce domaine discontinu. Mais leur signification est différente : elle se manifeste par d'autres relations entre ces symboles.

c) Deux personnes qui raisonnent à deux niveaux différents ne peuvent se comprendre. C'est ce qui arrive souvent pour le professeur et l'élève. Aucun d'eux ne parvient à saisir le cheminement de la pensée de l'autre et leur dialogue ne peut se poursuivre que parce que le professeur essaye de se faire une idée des pensées de l'élève et s'y conforme. Certains professeurs font un exposé à leur propre niveau tout en invitant les élèves à répondre à leurs questions. Il ne s'agit là que d'un monologue, car le professeur est amené à considérer toutes les réponses qui n'appartiennent pas à son réseau de relations comme stupides ou déplacées. Le véritable dialogue doit s'établir au niveau des élèves. Dans ce cas, le professeur devra souvent, après la classe, s'interroger sur les intentions de ses élèves et s'efforcer de les comprendre.

d) La maturation qui mène à un niveau supérieur se déroule d'une façon particulière. On peut y déceler plusieurs phases (cette maturation doit être considérée surtout comme un processus d'apprentissage et non comme un mûrissement d'ordre biologique). Il est donc possible et souhaitable que le professeur la favorise et l'accélère. C'est précisément le but de la didactique de poser la question de savoir comment ces phases sont parcourues et comment une aide effective peut être fournie à l'élève. (pp.201-202)

Plus loin, van Hiele décrit ainsi :

...les phases qui, dans le processus d'apprentissage, mènent à un niveau supérieur de pensée.

La *première phase* est celle de *l'information* : l'élève apprend à connaître le champ d'investigation au moyen du matériel qui lui est présenté. Ce matériel lui fait découvrir une nouvelle structure. On pourrait dire que la base de la connaissance humaine consiste en ceci : l'homme paraît en mesure de déceler une structure dans tout matériel, aussi désordonné soit-il, et cette structure est ressentie de la même façon par plusieurs personnes, ce qui résulte de la conversation qu'elles peuvent engager à ce sujet.

Dans la *deuxième phase*, celle de *l'orientation dirigée*, l'élève explore le champ d'investigation au moyen du matériel. Il sait donc déjà dans quelle direction l'étude est dirigée, le matériel est choisi de telle sorte que les structures caractéristiques lui apparaissent au fur et à mesure.

Au cours de la *troisième phase*, l'*explication* a lieu. Les expériences acquises sont liées aux symboles linguistiques exacts et les élèves apprennent à se prononcer sur les structures observées au cours d'échanges de vue qui ont lieu en classe. Le professeur veille à ce que ces derniers aient lieu en employant les termes habituels. C'est au cours de cette troisième phase que se forme partiellement le réseau de relations.

La *quatrième phase* est celle de l'*orientation libre*. Le champ d'investigation est en grande partie connu, mais l'élève doit encore y trouver rapidement son chemin. Cela se réalise en donnant des tâches qui peuvent être exécutées de différentes façons. Toutes sortes de signaux sont placés dans le champ d'investigation : ils montrent la voie à suivre vers les symboles.

La *cinquième phase* est celle de l'*intégration* : l'élève s'est orienté, mais il doit encore acquérir une vue d'ensemble des moyens qui sont à sa disposition. Il essaye donc de condenser en un tout le domaine que sa pensée a exploré. A ce moment, le professeur peut favoriser le travail en fournissant des aperçus globaux. Il importe que ces aperçus n'apportent rien de nouveau à l'élève : ils doivent être uniquement un résumé de ce que l'élève sait déjà.

A l'issue de cette cinquième phase le nouveau niveau de pensée est atteint. L'élève dispose d'un réseau de relations qui se rapportent à la totalité du domaine exploré. Ce nouveau domaine de pensée, qui a acquis sa propre intuition, s'est substitué au domaine de pensée antérieur qui possédait une toute autre intuition. »

L'objectivité des Mathématiques repose sur le fait que les nouveaux réseaux de relations se correspondent chez des personnes différentes. Les nouveaux symboles sont liés par les mêmes relations chez plusieurs personnes. Si l'on fixait comme but de l'éducation l'unicité du réseau relationnel, on pourrait se borner à faire apprendre celui-ci. Et l'élève semblerait comprendre parfaitement les raisonnements, car il aboutirait à des conclusions exactes en se basant sur son réseau relationnel. Mais cela ne voudrait pas dire qu'il y attache la même signification que son interlocuteur. Cette signification ne peut être dégagée uniquement du langage employé, elle dépend aussi des expériences qui ont conduit à la formation du réseau relationnel, c'est-à-dire qu'elle dépend de ce qui s'est déroulé au niveau de pensée inférieur.

Si l'on ne prend pas le contenu des symboles en considération, mais uniquement leurs relations, on peut dire que, du point de vue mathématique, tout est parfait. L'élève est capable de manier le réseau relationnel de la déduction sans se tromper. Mais au point de vue pédagogique et didactique, au point de vue social, on a lésé l'élève ! On a commis une faute pédagogique, car on a enlevé à l'élève l'occasion de prendre conscience de son pouvoir créateur. Au point de vue didactique, on a négligé de laisser découvrir par l'élève, comment s'explorent de nouveaux domaines de la pensée. On a, enfin, lésé la société parce qu'on a mis entre les mains de l'élève un outil qu'il ne peut manier que dans les cas qu'il a étudiés.

Ayant décrit de manière aussi précise les modalités de passage d'un niveau de pensée au niveau de pensée immédiatement supérieur, et alors que van Hiele n'a sans doute pas été informé des travaux de Vygotski, on peut considérer que sa description du processus d'apprentissage est assimilable à la mise en œuvre d'une évolution par zone de développement proximal. En effet, non seulement le professeur a un rôle clairement défini dans les deux premières phases puisque c'est lui qui donne l'information à l'élève et dirige l'orientation de son étude mais ensuite l'élève reprend son autonomie : dans la quatrième et la cinquième phases l'élève oriente librement sa réflexion puis l'intègre de façon à acquérir une nouvelle intuition qui sera inhérente au niveau de pensée supérieur.

En fait de nombreuses études ont été menées sur les niveaux de van Hiele, en particulier aux Etats Unis. Elles ont confirmé que les niveaux ont les propriétés suivantes (Gutiérrez, 1992) :

Ils sont **ordonnés** et **séquentiels** : chaque niveau correspond à une amélioration des habiletés de raisonner au niveau précédent. Un élève peut ainsi atteindre le niveau n ($n \geq 2$) seulement s'il a déjà atteint le niveau $n-1$.

Chaque niveau a **son propre langage** : il existe une relation étroite entre niveau et langage ; par exemple, on peut donner trois sens différents au mot « preuve » : vérification (au niveau 2), déduction informelle (au niveau 3), et déduction formelle (au niveau 4). Ainsi deux personnes parlant (donc raisonnant) à des niveaux différents ne pourront pas se comprendre.

Les niveaux sont **continus** : quoiqu'à l'origine l'affirmation de van Hiele était en faveur d'une certaine discrétion des niveaux, des résultats de recherche postérieurs ont mené la plupart des chercheurs à considérer que le passage d'un niveau au suivant se fait d'une façon continue, étant donné que l'acquisition d'un niveau de pensée par un élève se fait graduellement et peut être observée à travers le temps. (pp.32-33)

P.M. van Hiele et D. van Hiele – Geldof ont identifié cinq niveaux qui ont reçus depuis, les appellations suivantes : identification-visualisation ou niveau de base, analyse ou premier niveau, déduction informelle ou deuxième niveau, déduction formelle ou troisième niveau et rigueur ou quatrième niveau⁹.

⁹ Les écrits auxquels nous faisons référence ici sont les suivants :

- la conférence que P.M. van Hiele a tenu à Sèvres en 1957 ;
- le texte des thèses de P.M van Hiele et Dina van Hiele – Geldof ;
- les différents écrits ou communications de P.M. van Hiele avec des chercheurs américains ;
- les recherches et les articles de plusieurs didacticiens qui, pour certaines d'entre eux, ont pu communiquer avec P.M. van Hiele lui-même.

Afin d'illustrer chacun des niveaux, nous reprendrons certains items utilisés par l'équipe de Usiskin en 1982. Ce test composé de 25 questions a été conçu pour identifier le niveau de van Hiele maîtrisé par des élèves américains avant et après avoir suivi un cours de géométrie à l'université. A chaque niveau correspondent cinq questions. Il a été considéré qu'un étudiant donnant trois réponses bonnes sur les cinq attendues maîtrisait le niveau de van Hiele correspondant. A ces exemples nous ajouterons les éléments du protocole d'entrevues d'élèves élaboré par Burger & Shaughnessy en 1986

Lors de la présentation de sa théorie, van Hiele avait numéroté les niveaux de 0 à 4 , 0 étant réservé au niveau de base qui, comme nous le verrons, correspond déjà à un certain niveau de compétences. Notre travail de recherche s'adressant à des élèves de Primaire et de début de collège, il est possible que certains d'entre eux ne maîtrisent pas encore ce premier niveau, niveau de base. Comme certains chercheurs l'ont fait par ailleurs nous choisirons donc de numéroté les cinq niveaux de 1 à 5, ce qui nous a amenée à ajouter des parenthèses personnelles dans les citations qui suivent.

NIVEAU 1 : IDENTIFICATION-VISUALISATION

Van Hiele (1959) présentait ainsi les différents niveaux de pensée, commençant par le niveau de base qui sera désigné sous le nom de « niveau d'identification-visualisation » par la communauté des didacticiens :

Au niveau de base (niveau zéro mais premier niveau pour nous) de la géométrie, les figures sont jugées d'après leur apparence. Un enfant reconnaît un rectangle à sa forme et un rectangle lui semble différent d'un carré. Quand on a montré à un enfant de six ans ce qu'est un losange, un rectangle, un carré, un parallélogramme, il est capable de reproduire ces figures sans erreur sur un géoplan de Gattegno, même dans des dispositions difficiles. [...] Au niveau de base, un enfant ne reconnaît pas un parallélogramme en un losange. A ce niveau le losange n'est pas un parallélogramme : le losange lui apparaît comme quelque chose de bien différent. (p. 201)

En d'autres occasions van Hiele précise sa pensée :

- Quand on dit à un élève que ce que l'on appelle losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur, cela ne sera pas suffisant pour le convaincre que les quadrilatères qu'il appelle des carrés font partie de l'ensemble des losanges (j'en déduis qu'il est au niveau de base). *D'après van Hiele 1968 « Quelques aspects didactiques dans le développement de la pensée des enfants dans les mathématiques et la physique » ; conférence prononcée au congrès sur l'intégration des enseignements scientifiques, Varna, Bulgarie, 11- 19 septembre 1968*
- A propos de la reconnaissance d'un carré légèrement tourné comme étant un carré : « niveau de base parce que ça se voit » (*van Hiele 1979, réponses écrites à des questions que lui avait posées Joanne Mayberry*)

Pour Burger et Shaughnessy (1986)¹⁰, ce niveau se caractérise aussi par :

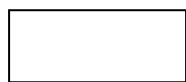
- l'usage de propriétés (ou de qualités) imprécises pour comparer les dessins et pour identifier, caractériser et trier les formes ;
- la référence à des prototypes visuels pour caractériser les formes ;
- l'inclusion d'attributs non pertinents pour identifier ou décrire les formes comme l'orientation de la figure dans la page ;
- l'incapacité à concevoir une variété infinie de types de formes ;
- des tris incohérents, c'est-à-dire des tris selon certaines propriétés qui ne sont pas celles des formes sélectionnées ;
- l'incapacité à utiliser les propriétés comme des conditions nécessaires pour déterminer une forme, par exemple deviner une forme cachée à partir d'indices largement insuffisants, comme si ces indices suggéraient une image visuelle. (*notre traduction*)

Une des cinq questions permettant d'identifier ce premier niveau de van Hiele se trouvant dans le test élaboré par l'équipe d'Usiskin (1982) est :

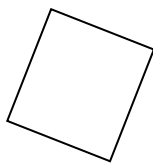
¹⁰ La version originale est :

- Use of imprecise properties (qualities) to compare drawings and to identify, characterize, and sort shapes.
- References to visual prototypes to characterize shapes.
- Inclusion of irrelevant attributes when identifying and describing shapes, such as orientation of the figure on the page.
- Inability to conceive of an infinite variety of types of shapes.
- Inconsistent sortings; that is, sortings by properties not shared by the sorted shapes.
- Inability to use properties as necessary conditions to determine a shape; for example, guessing the shape in the mystery shape task after far too few clues, as if the clues triggered a visual image.

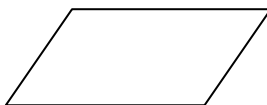
4. Parmi les figures suivantes, lesquelles sont des carrés ?



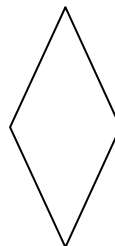
F



G



H



I

- (A) Aucune de ces figures n'est un carré
- (B) G seulement
- (C) F et G seulement
- (D) G et I seulement
- (E) Toutes ces figures sont des carrés.

NIVEAU 2 : ANALYSE

Van Hiele (1959) présente le niveau suivant c'est-à-dire le niveau d'analyse en ces termes :

Au *premier niveau* (qui sera le deuxième niveau pour nous) de la géométrie, les figures sont porteuses de leurs propriétés. Qu'une figure est un rectangle signifie qu'elle a quatre angles droits, que les diagonales sont égales et que les côtés opposés sont égaux. Les figures se reconnaissent à leurs propriétés. Si l'on nous dit que la figure tracée au tableau possède quatre angles droits, c'est un rectangle, même si la figure n'est pas tracée avec soin. Mais, à ce niveau, les propriétés ne sont pas encore ordonnées de sorte qu'un carré n'est pas nécessairement identifié comme étant un rectangle.

Nous rapportons ici les précisions que P.M. van Hiele a apportées à la description de ce niveau à diverses occasions.

- L'élève peut associer l'expression « triangle isocèle » à un triangle particulier, sachant que deux de ses côtés ont la même longueur et en tirer la conclusion qui s'en suit, que les deux angles correspondant sont égaux. (*van Hiele 1957*)
- L'élève apprend à voir le losange comme un quadrilatère qui a ses côtés de même longueur, avec des angles opposés égaux, et des diagonales perpendiculaires qui se coupent en leurs milieux et sont bissectrices des angles. (*van Hiele 1959*)
- (à mi-chemin entre ce niveau et le suivant) Dès que l'enfant arrive au stade où il connaît le losange et reconnaît le triangle isocèle comme un demi losange, il pourra aussi déterminer spontanément un certain nombre des propriétés du triangle équilatéral. (*van Hiele 1959*)

- Quand il a été décidé qu'une structure est un « triangle isocèle », l'enfant saura qu'un certain nombre de propriétés caractéristiques sont présentes, sans avoir besoin de les mémoriser pour ce cas particulier. (*van Hiele 1959*)

Pour Burger et Shaughnessy (1986)¹¹, ce niveau d'analyse se caractérise par :

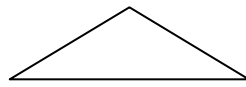
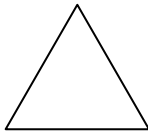
- la comparaison des formes au moyen des propriétés de leurs composantes ;
- le refus de l'inclusion des classes à l'intérieur de formes de types plus généraux comme les quadrilatères ;
- le tri par un seul des critères comme les propriétés des côtés, tout en négligeant les angles, les symétries ou autres ;
- l'application d'une litanie de propriétés nécessaires au lieu de déterminer des propriétés suffisantes pour identifier une forme, expliquer des identifications et décider à propos d'une forme cachée ;
- la description des types de formes par l'usage explicite de leurs propriétés, plutôt que par le nom des formes elles-mêmes, même s'il est connu. Par exemple, l'élève parle d'un rectangle en disant qu'il s'agit d'une figure ayant quatre côtés et quatre angles droits ;
- le rejet explicite des définitions des formes telles que présentées dans les manuels pour garder ses propres caractérisations.
- Traiter la géométrie comme la physique au moment de mettre à l'épreuve la validité d'une proposition : par exemple, s'appuyer sur un grand nombre de dessins et faire des observations à leur propos.
- Une absence explicite de la compréhension de la preuve en mathématique (démonstration). (*notre traduction*)

A titre d'exemple de questions identifiant le niveau d'analyse, nous reprendrons la question n°9 du test d'Usiskin (1982) :

¹¹ La version originale est :

- Comparing shapes by means of properties of their components;
- Prohibiting class inclusions among general types of shapes, such as quadrilaterals.
- Sorting by single attributes, such as properties of sides, while neglecting angles, symmetry, and so forth.
- Application of a litany of necessary properties instead of determining sufficient properties when identifying shapes, explaining identifications, and deciding on a mystery shape.
- Descriptions of types of shapes by explicit use of their properties, rather than by type names, even if known. For example, instead of rectangle, the shape would be referred to as a four-sided figure with all right angles.
- Explicit rejection of textbook definitions of shapes on favour of personal characterizations.
- Treating geometry as physics when testing the validity of a proposition; for example, relying on a variety of drawings and making observations about them.
- Explicit lack of understanding of mathematical proof.

9. Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont la même longueur.
En voici trois exemples.



Parmi les réponses A à D, laquelle est vraie pour tous les triangles isocèles ?

- (A) Les trois côtés doivent avoir la même longueur
- (B) Un côté doit être deux fois plus long qu'un autre
- (C) Il doit y avoir au moins deux angles qui ont la même mesure

NIVEAU 3 : DEDUCTION INFORMELLE

Le niveau suivant de déduction informelle est présenté ainsi dans le texte de 1957.

Au *deuxième niveau* (le troisième en ce qui nous concerne), les propriétés s'ordonnent. Elles se déduisent les unes des autres : une propriété précède ou suit une autre propriété. A ce niveau, la signification intrinsèque de la déduction n'est pas comprise par les élèves. Le carré est reconnu comme étant un rectangle, parce qu'à ce niveau les définitions des figures entrent en jeu.

Dina van Hiele – Geldof a elle aussi contribué à la description de ce niveau.

- Les élèves [...] peuvent comprendre ce que l'on veut dire par « preuve » en géométrie. Ils ont atteint le second niveau de pensée. (*Dina 1957*)
- Il (l'élève) est en mesure de comprendre les relations entre les éléments caractéristiques des figures géométriques
 - Par exemple ; en s'appuyant sur les théorèmes des cas d'égalités des triangles, il peut déduire, à propos de figures particulières (spécifiques) que des angles sont égaux ou des segments ont la même longueur. (*P.M. 1957*)
- L'enfant reconnaîtra le losange grâce à certaines de ses propriétés... par exemple, c'est un quadrilatère dont les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre.)
 - Il ne peut pas étudier la géométrie au sens strict du mot.

- L'enfant sait raisonner selon un système de logique déductive mais ceci n'est pas dans le respect de la logique formelle. (*P.M. 1959*)
- La compréhension de l'implication, de l'équivalence, de la négation d'une implication appartient à ce niveau de pensée (*P.M. 1976*)
- Ils peuvent comprendre des structures de pensée plus élaborées comme : « le parallélisme des droites implique (selon le codage) la présence d'une sécante, et par conséquent (selon leur caractère symbolique) l'égalité des angles alternes internes.
- « Je (l'étudiant) peux apprendre une définition par cœur » : pas de niveau. « Je peux comprendre que cette définition puisse être nécessaire » : second niveau.
- « ...tu sais ce que l'on veut dire par « des » « tous ».... » : second niveau. (*P.M. 1978*)

Burger et Shaughnessy (1986)¹², ont complété la description de ce niveau de déduction informelle par :

- la formation de définitions complètes des types de formes ;
- la capacité à modifier des définitions et à accepter et à utiliser aussitôt les définitions de nouveaux concepts ;
- la capacité à accepter des expressions équivalentes des définitions ;
- l'acceptation d'un classement logique partiel des types de formes, incluant l'inclusion des classes ;
- la capacité à trier les formes selon une variété de critères mathématiquement précis ;
- l'usage explicite d'énoncés de forme « Si...., alors ... » ;
- la capacité à exprimer correctement des arguments déductifs informels, utilisant implicitement des formes logiques telles que la transitivité (si p implique q et q implique r alors p implique r) ou la loi de coupure (modus ponens) ;
- la confusion entre les rôles d'un axiome et d'un théorème. (*notre traduction*)

Pour illustrer le niveau de déduction informelle de van Hiele nous reprenons la question 12 du test élaboré par Usiskin (1982).

¹² La version originale est :

- Formation of complete definitions of types of shapes.
- Ability to modify definitions and immediately accept and use definitions of new concepts.
- Ability to accept equivalent forms of definitions.
- Acceptance of logical partial ordering among types of shapes, including class inclusions.
- Ability to sort shapes according to a variety of mathematically precise attributes;
- Explicit use of "If, then" statements.
- Ability to form correct informal deductive arguments, implicitly using such logical forms as the chain rule (if p implies q and q implies r , then p implies r) or the law of detachment (modus ponens).
- Confusion between the roles of axiom and theorem.

12. Voici deux énoncés :

Énoncé S : Le triangle ABC a trois côtés de la même longueur.

Énoncé T : Dans le triangle ABC, les angles B et C ont la même mesure.

Qu'est-ce qui est correct ?

- (A) Les énoncés S et T ne peuvent être vrais en même temps
- (B) Si S est vrai alors T est vrai
- (C) Si T est vrai alors S est vrai
- (D) Si S est faux alors T est faux
- (E) Aucune des phrases A à D n'est correcte.

Nous pouvons facilement rapprocher cet item de la remarque entendue en classe de 5^{ème} à propos du calcul des angles du triangle isocèle et où une élève, répétait avec force enthousiasme à son camarade, la découverte qu'elle venait de faire :

-« Mais si c'est forcément toujours vrai : Si tu as un triangle isocèle et un angle de 60° n'importe où dans le triangle, tous les angles vaudront 60° donc c'est toujours un triangle équilatéral. Ce n'est plus la peine de refaire le calcul à chaque fois ; ça marchera tout le temps !!! »

Ici l'élève se réfère aux propriétés ou aux définitions des triangles sans les distinguer les unes des autres mais en les utilisant comme autant de faits connus à propos de ces figures. L'axiomatisation n'est pas envisagée à ce stade même si le déroulement d'un raisonnement hypothético-déductif peut trouver sa place.

NIVEAU 4 : DEDUCTION FORMELLE

Van Hiele (1959) termine sa présentation par ces mots :

Au troisième niveau (le quatrième pour nous), la pensée s'occupe de la signification de la déduction, de la réciproque d'un théorème, d'un axiome, de la condition nécessaire et suffisante.

On peut probablement distinguer cinq niveaux de pensée en géométrie. Ce nombre est d'ailleurs de moindre importance pour la compréhension de ce qu'est un niveau de pensée. (*P.M.* ; 1959)

- Il (l'élève) atteint le troisième niveau de pensée quand il commence à manipuler les caractéristiques intrinsèques des relations. Par exemple, il peut faire la différence entre une proposition et sa réciproque.
- Nous pouvons commencer à étudier un système déductif de propositions c'est-à-dire comment l'interdépendance des relations est réalisée. Les définitions et les propriétés sont maintenant dans l'horizon intellectuel des élèves.
- Le parallélisme des droites implique l'égalité des angles correspondants et réciproquement. (*Dina, 1957*)
- L'élève peut faire la différence entre une proposition et sa réciproque.
- Il est possible de développer un système axiomatique de géométrie. (*P.M. et Dina 1958*)
- On pourrait lui dire (à l'étudiant) que dans une preuve, il est réellement question de savoir si ces thèses sont vraies ou non, ou plutôt de la relation entre la vérité de ces thèses et celle d'autres thèses. Sans la compréhension de ces relations, nous ne pouvons pas expliquer à l'étudiant qu'il faut avoir recours à des axiomes. (*P.M. 1968*)

Même s'il est de moindre intérêt pour notre recherche, on peut trouver dans la littérature quelques éléments décrivant le niveau supérieur de pensée en géométrie.

Les caractérisations de ce niveau envisagées par Burger et Shaughnessy (1986), sont les suivantes¹³ :

- la clarification des questions ambiguës et la reformulation des tâches dans un langage précis ;
- une habitude à conjecturer et des essais de vérifications des conjectures par raisonnement déductif plus fréquents ;
- l'appui sur la démonstration comme autorité ultime pour décider de la vérité d'une proposition mathématique ;
- la compréhension du rôle des différentes composantes d'un discours mathématique comme les axiomes, définitions, théorèmes et démonstration ;

¹³ La version originale est :

- Clarification of ambiguous questions and rephrasing of problem tasks into precise language.
- Frequent conjecturing and attempts to verify conjectures deductively.
- Reliance on proof as the final authority in deciding the truth of a mathematical proposition.
- Understanding of the roles of the components in a mathematical discourse, such as axioms, definitions, theorems, proof.
- Implicit acceptance of the postulates of Euclidean geometry.

- l'acceptation implicite des postulats de la géométrie euclidienne. (*noter traduction*)

La question n° 17 du test utilisé par l'équipe de Z. Usiskin confirme bien qu'au niveau de déduction formelle, les propriétés sont organisées les unes par rapport aux autres, la distinction entre une propriété directe et sa réciproque ayant maintenant toute sa place.

17. Voici trois propriétés d'une figure :
Propriété D : Ses diagonales ont la même longueur.
Propriété S : C'est un carré.
Propriété R : C'est un rectangle.

Qu'est-ce qui est vrai ?

- (A) D implique S qui implique R
- (B) D implique R qui implique S
- (C) S implique R qui implique D
- (D) R implique D qui implique S
- (E) R implique S qui implique D.

NIVEAU 5 : RIGUEUR

Van Hiele (1959) parlait de ce dernier niveau en en disant qu'il était de moindre intérêt puisqu'il ne s'adresse plus aux élèves apprenant la géométrie mais aux étudiants qui en maîtrisent déjà largement les bases. D'ailleurs les van Hiele ont eux-mêmes douté de l'existence d'un tel niveau.

Les quelques écrits qu'ils en ont laissés peuvent se résumer à :

- Une étude comparative de divers systèmes déductifs à l'intérieur du champ des relations géométriques est réservée à ceux qui ont atteint le quatrième niveau. (*Dina 1957*)
- Finalement, au quatrième niveau (difficilement atteint au secondaire) la pensée logique elle-même devient un sujet d'étude.
- Les différentes axiomatiques appartiennent au quatrième niveau. (*P.M. et Dina 1958*)

On ne pose plus de questions comme : « Que sont les points, les droites, les surfaces, etc.? » Les figures sont définies seulement à l'aide de symboles et sont reliées par des relations. Pour trouver le sens particulier des symboles, il faut se tourner vers les niveaux inférieurs où l'on peut voir le sens précis de ces symboles. (*P.M. et Dina 1958-1959*)

Comme on le voit dans l'item 23 du test élaboré par Usiskin (1982), le niveau de « Rigueur » imaginé par les van Hiele, s'il existe, ne relève nullement de la scolarité obligatoire en France.

23. Il existe une géométrie inventée par un mathématicien J. dans laquelle ce qui suit est vrai :
« La somme des mesures des angles d'un triangle est inférieure à 180° . »

Qu'est-ce qui est correct ?

- (A) J. a fait une erreur en mesurant les angles du triangle
- (B) J. a fait une erreur de raisonnement logique
- (C) J. a une idée fautive de ce que l'on entend par « vrai »
- (D) J. s'est appuyé sur des hypothèses différentes de la géométrie actuelle
- (E) Aucune des propositions A à D n'est correcte.

Il est bien évident que notre expérience d'enseignant de collège ne nous a jamais donné l'occasion de rencontrer une situation de ce niveau. Burger et Shaughnessy ne donnent pas davantage de piste d'entretien avec élèves qui permettrait de repérer ce niveau.

A ce stade de notre relation des différents niveaux tels qu'ils ont été décrits par Dina et P.M. van Hiele, il est sans doute intéressant de donner une traduction de l'interprétation que Hoffer a pu en faire en 1981 (*notre traduction*). Dans le premier des deux tableaux, Hoffer propose une interprétation des diverses « compétences de base » (« *basic skills* ») en géométrie selon chacun des cinq niveaux de pensée. Le second tableau est une illustration du précédent à propos du rectangle. Dans le même article où Hoffer faisait ces propositions, il suggérait qu'elles puissent être discutées. Pour autant elles nous semblent cohérentes avec les descriptions des différents niveaux de van Hiele et nous n'avons pas rencontré de démenti

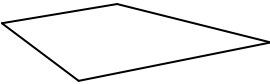

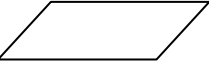

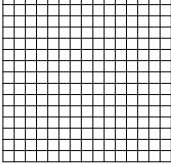
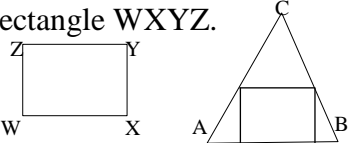
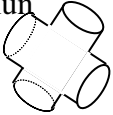
formel dans la littérature. Cette illustration nous intéresse d'autant plus que le rectangle sera l'une des figures de géométrie utilisée pour notre recherche

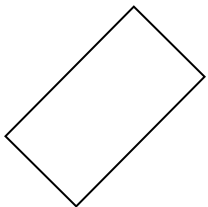
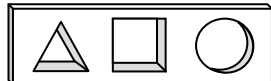
Compétences de base en géométrie (Hoffer 1981 *Mathematics Teacher January 1981* d'après van Hiele)

	Niveau 1 : Identification	Niveau 2 : Analyse	Niveau 3 : Déduction informelle (classement)	Niveau 4 : Déduction formelle	Niveau 5 : Rigueur
Visuelles	Reconnaît les différentes figures à partir d'une image	Remarque les propriétés d'une figure Identifie une figure comme une partie d'une figure plus grande (reconnaît les sous – figures)	Reconnaît les interrelations entre différents types de figures Reconnaît des propriétés communes à différents types de figures	Utilise des informations à propos d'une figure pour en déduire d'autres informations	Reconnaît des affirmations non justifiées par l'usage de figures (la figure ne suffit plus à prouver) Conçoit que des figures soient reliées dans différents systèmes déductifs (axiomatiques ?)
Verbales	Associe le nom correct à une figure donnée	Décrit correctement les diverses propriétés d'une figure	Définit les mots correctement et avec concision Formule des phrases indiquant les interrelations entre les figures	Comprend les distinctions entre définitions, postulats et théorèmes. Reconnaît ce qui est donné dans un problème et ce qu'il faut trouver ou faire.	Formules des généralisations de résultats connus Décrit différents systèmes déductifs (axiomatiques)
Graphiques	Fait des schémas des figures, les éléments donnés étant correctement étiquetés	Traduit une information verbale en une image Utilise des propriétés données des figures pour dessiner ou construire les figures	Certaines figures étant données, est capable de construire d'autres figures liées aux précédentes	Reconnaît quand et comment il faut utiliser des éléments auxiliaires dans une figure Déduit des informations données comment dessiner ou construire une figure particulière	Comprend les limites et les possibilités des différents outils de dessin Donne une image des concepts non standards dans différents systèmes déductifs
Logiques	Conçoit qu'il existe des différences et des ressemblances dans	Comprend que les figures peuvent être classées en différents	Comprend les qualités d'une bonne définition Utilise les propriétés	Utilise les règles de logique pur développer des	Comprend les limites et les possibilités des affirmations et des

	différents types de figures Comprend la conservation de la forme des figures dans diverses positions	types Conçoit que les propriétés peuvent être utilisées pour distinguer les figures	des figures pour déterminer s'une classe de figures est contenue dans une autre classe	preuves Peut déduire des conséquences à partir d'informations données	postulats Sait quand un système de postulats est indépendant, cohérent et auto suffisant.
Appliquées (techniques)	Reconnaît les formes géométriques dans différents objets	Reconnaît les propriétés géométriques des objets physiques Peut représenter un phénomène physique sur papier ou le modéliser	Comprend le concept d'un modèle mathématique qui représente les relations entre les objets	Peut déduire des propriétés d'objets à partir d'informations données ou obtenues Peut résoudre des problèmes qui mettent des objets en relation	Utilise des modèles mathématiques pour représenter des systèmes abstraits Développe des modèles mathématiques pour décrire des phénomènes physiques sociaux ou naturels.

Les exemples de Hoffer à propos du rectangle

Compétences	Niveau 1 : Identification	Niveau 2 : Analyse	Niveau 3 : Déduction informelle (classement)	Niveau 4 : Déduction formelle	Niveau 5 : Rigueur
Visuelles	<p>Laquelle des figures ci-dessous est un rectangle ?</p> <ol style="list-style-type: none">     	<p>Quel est le nombre d'axes de symétrie d'un rectangle ?</p>	<p>Peut-on trouver une section d'un tétraèdre qui ait la forme d'un rectangle</p>	<p>On peut rouler une feuille de papier rectangulaire pour former la surface latérale d'un cylindre de révolution droit. Quelle forme la feuille de papier doit-elle avoir pour faire un cylindre de révolution oblique ?</p>	<p>Existe-t-il un rectangle en géométrie de la tortue, dont les diagonales n'aient pas la même longueur ?</p>
Graphiques	<p>Utilise une grille comme ci-dessous pour dessiner un rectangle WXYZ dont les côtés mesurent 4 et 7 unités</p> 	<p>Construis un rectangle dont on connaît un côté et une diagonale.</p>	<p>Etant donné un triangle ABC et un rectangle WXYZ. A l'aide d'un compas et d'une équerre, inscrire dans le triangle ABC, un rectangle semblable au rectangle WXYZ.</p> 	<p>Deux cylindres ont de la même taille et la même forme. Dessine une image de la région que ces deux cylindres ont en commun</p> 	<p>Etant donné un cercle, est-il possible de construire à la règle et au compas un rectangle d'aire égale à celle du cercle.</p>
Verbales	<p>Dans le rectangle ABCD</p> <ol style="list-style-type: none"> comment s'appellent les segments [AC] et [BD] ? quel est l'angle opposé à l'angle ABC ? quels sont les côtés adjacents au côté [BC] ? 	<p>Donne autant de propriétés du rectangle que tu peux.</p>	<p>Rédige une définition soignée(circonspecte) et précise du mot <i>rectangle</i></p>	<p>Laquelle de ces phrases est une définition ? Laquelle est un axiome ? Laquelle est un théorème ?</p> <ol style="list-style-type: none"> Un rectangle est un parallélogramme 	<p>Explique pourquoi des rectangles n'existent pas en géométrie non-euclidienne.</p>

				<p>avec un angle droit.</p> <p>2. L'aire d'un rectangle est égale au produit des longueurs de deux côtés adjacents.</p> <p>3. Un rectangle avec des diagonales perpendiculaires est un carré.</p>	
Logiques	<p>Si un rectangle est tourné ainsi, est-ce que la nouvelle figure est encore un rectangle ?</p> 	<p>Est-ce que l'aire d'un rectangle est déterminée par son périmètre ?</p> <p>Si deux rectangles ont le même périmètre, ont-ils aussi la même aire ?</p>	<p>Qu'est-ce qui est vrai ? Qu'est-ce qui est faux ?</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Chaque rectangle est un carré 2. Chaque carré est un rectangle 3. Si les diagonales d'un parallélogramme ont la même longueur, la figure est un rectangle. 	<p>Prouve ou infirme que :</p> <p>Si les diagonales d'un quadrilatère ont la même longueur, la figure est un rectangle.</p>	<p>Puisque les rectangles n'existent pas en géométrie non-euclidienne, comment sont déterminées les aires des figures ?</p>
Appliquées (techniques)	<p>Décris les formes rectangulaires qui existent dans la salle de classe et sur le terrain de sport</p>	<p>Si un champ rectangulaire a 100 m de long, quelle est la plus petite taille de feuille de papier dont tu as besoin pour dessiner ce champ à l'échelle 1/1000 ?</p>	<p>Quelle est l'aire du plus grand rectangle inscrit dans un triangle donné ?</p>	<p>Fais la maquette d'une prise que l'on peut enfoncer complètement dans les trois trous sans laisser aucun vide.</p> 	<p>Quelle est la forme véritable sur la terre, d'une région qui est rectangulaire sur une carte de la terre ?</p>

L'ensemble des recherches basées sur les niveaux de van Hiele (Burger & Shaughnessy, 1986 ; Gutiérrez, 1991 ; Pusey, 2003) confirme que ces niveaux existent mais qu'ils ne sont sans doute pas aussi distincts les uns des autres que la description que nous venons de donner le laisse entendre. En effet le passage d'un niveau à l'autre est vraisemblablement graduel et s'inscrit dans la durée alors que van Hiele suggère que celui-ci puisse se faire par bonds. De plus il semble bien qu'un élève ne saurait être identifié par un seul niveau de van Hiele ; il peut utiliser différents niveaux de van Hiele selon la tâche qui lui est prescrite. De plus il a été montré que près d'un élève sur deux pouvait se situer entre deux niveaux ou encore ne maîtriser un niveau qu'à moitié, c'est-à-dire maîtriser certaines facettes de celui-ci mais pas d'autres comme les caractéristiques figurales ou verbales d'un même niveau.

On peut aussi penser que les idées développées par van Hiele ne sont pas contraires à celles de Vygotski dans la mesure où l'un comme l'autre considèrent que l'apprentissage ne peut se faire qu'à partir du niveau actuel de développement de l'enfant et avec l'aide d'une personne plus avancée que ce soit un camarade de classe ou l'enseignant. Compte tenu de ces principes pédagogiques, saurait-on imaginer des activités qui amènent les élèves d'un niveau à l'autre, en particulier du niveau d'identification-visualisation au niveau d'analyse et de ce dernier au niveau de déduction informelle ?

Mais à notre connaissance cette théorie a été testée auprès d'étudiants de niveau secondaire ou universitaire et jamais encore au niveau primaire ou au début du collège. De plus au niveau d'identification-visualisation, le statut du dessin n'est pas complètement explicité. En effet, si un élève reconnaît qu'un dessin est celui d'un rectangle simplement « parce que ça se voit », on peut penser qu'il assimile ce dessin à celui d'une porte ou de tout autre objet qu'il qualifie de rectangulaire. Il identifie alors le dessin de l'objet et l'appellation géométrique « rectangle ». En revanche quand, au niveau d'analyse, l'élève connaît les propriétés des figures comme celles du rectangle, on peut penser que le dessin devient alors le représentant d'une catégorie d'objets plus théoriques qu'on appelle encore rectangle; l'élève utilise alors ce que Fischbein appelle le concept figural du rectangle. Y a-t-il eu un apprentissage spécifique favorisant l'émergence de ce niveau théorique ? On peut en douter. Cela peut-il se confirmer dans la réalité de la classe ? Peut-on trouver des élèves qui, en fin de primaire, soient en mesure de nommer des quadrilatères en les ayant reconnus par identification-visualisation et d'autres qui puissent déjà en repérer les propriétés c'est-à-dire maîtrisent déjà le niveau d'analyse voire davantage ? Est-ce que ce passage vers un niveau plus abstrait est accessible à tous les élèves ou doit-il être l'objet d'un apprentissage dirigé par l'enseignant ?

3. La théorie des paradigmes géométriques

Nous allons maintenant présenter la théorie des paradigmes géométriques selon laquelle il existe différents types de géométrie à l'intérieur desquelles un élève ou un mathématicien peuvent fonctionner pour résoudre le problème qui se pose à eux. En particulier nous allons préciser si ces différentes géométries peuvent être évoquées dans le cadre de la scolarité obligatoire et envisager dans quelle mesure elles peuvent être associées aux niveaux de van Hiele.

3.1. Les paradigmes géométriques définis par Houdement et Kuzniak.

Sur la base de l'exemple de la cloche de Rouen, sujet de concours d'entrée au professorat des écoles, Houdement et Kuzniak (1998) ont été amenés à définir des « paradigmes géométriques » sur lesquels nous reviendrons à la section 7.1. du chapitre suivant, consacré à la problématique de cette recherche.

Ce cadre théorique a été élaboré à partir de travaux d'étudiants ayant suivi des études au niveau universitaire, mais majoritairement dans un domaine littéraire ou de sciences humaines ; rares étaient donc ceux qui avaient un bagage scientifique. Ce cadre vise à mieux comprendre l'évolution des rapports entre géométrie et réalité, la géométrie étant vue comme modèle de l'espace. S'appuyant sur les écrits de Gonseth (1945), il existerait trois modes de connaissance de l'espace, modes que Houdement et Kuzniak (1998-1999) ont quelque peu aménagés : intuition, expérience et déduction.

« **L'intuition** [peut être considérée] comme forme a priori de la connaissance de l'espace. [Elle] peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète. » (p. 9)

On peut ici s'interroger sur la pertinence de l'expression d'une « forme a priori de la connaissance ». En effet l'intuition ne peut précéder quelle que forme de connaissance que ce soit, elle-même étant au départ le fruit de l'expérience. Sans doute Houdement et Kuzniak veulent-ils parler ici de forme primitive de la connaissance dans la mesure où celle-ci n'est pas encore structurée. Cette idée est confirmée par les propos de « Fischbein qui a

spécifiquement étudié le rôle que joue l'intuition dans les mathématiques » et que Houdement et Kuzniak ont eux-mêmes traduit dans le présent article.

L'intuition résume l'expérience ; elle propose une représentation compacte et globale d'une série de données et permet de pallier l'insuffisance des informations ; elle introduit des interprétations de type comportemental dans un processus de raisonnement (...). Mais simultanément, l'intuition reste une source possible d'erreurs parce qu'elle n'est pas une simple copie des conditions pratiquement données. Son rôle est d'offrir une représentation de type comportemental, structurée de l'intérieur, intrinsèquement crédible, même si en fait, ces qualités font défaut à la situation de départ ». (*leur traduction de « Intuition in Science and Mathematics . An Educational Approach 1987) (p. 9)*

En 2002, Houdement et Kuzniak résument ainsi les définitions de l'expérience et de la déduction :

« **L'expérience** n'est pas immédiate, elle nécessite action physique et mentale. Par exemple, on pourrait dire que la propriété « par deux points il passe une seule droite » est plutôt intuitive, alors que celle « la somme des trois angles d'un triangle est un angle plat » ne peut résulter que d'une expérience préalable. A l'école, les résultats obtenus par pliages et découpages relèvent de ce champ, de même que l'utilisation de logiciels dynamiques tels que Cabri. L'expérience nourrit l'intuition, l'intuition structure l'expérience : elles sont parfois difficilement séparables, il existe un double mouvement de l'une vers l'autre.

La déduction consiste à tirer des informations comme conséquences d'autres, sans nouvelle expérience. Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. La déduction, au sens où nous l'entendons, est plus proche du raisonnement dans son ensemble. En aucun cas, elle ne se limite à la démonstration fondée sur une axiomatique de base. (*p. 71*)

Le tableau suivant résume les trois types de Géométrie qui découlent de ces trois axes. Ici les différents paradigmes géométriques sont repérés par des chiffres romains. Les appellations sont celles de Gonseth et reprises par Houdement et Kuzniak. D'une manière très générale, on peut dire que pour l'élève qui fonctionne en GI, il y a confusion de la géométrie et de la réalité ; c'est la géométrie de l'école primaire. Dans la géométrie GII, les objets d'étude sont une schématisation de la réalité. GII est la géométrie du Collège voire du Lycée. Enfin, GIII est une géométrie dans laquelle la réalité et la géométrie sont indépendantes ; c'est la géométrie de l'Université.

	GEOMETRIE NATURELLE G I	GEOMETRIE AXIOMATIQUE NATURELLE G II	GEOMETRIE AXIOMATIQUE FORMALISTE G III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à un schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur un système complet d'axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et « figural concept »	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriété et démonstration	Démonstration et liens entre les objets.

3.2. Les paradigmes géométriques selon Parzysz

Dans son article « Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1 », Parzysz (2003) reprend les niveaux de van Hiele ainsi que le modèle de Houdement et Kuzniak. Il complète aussi la présentation de son cadre théorique en s'appuyant sur le parallèle que fait Henry (1999) dans son article consacré à l'introduction des probabilités au lycée e et dans lequel Henry opère un parallèle entre probabilité et géométrie et où il distingue trois types de rapport à l'espace dans l'enseignement / apprentissage de la géométrie. Le résumé que Parzysz fait des propos d'Henry est le suivant :

- (i) la situation concrète ;
- (ii) une première modélisation, consistant en « *l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. (...) La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent dans cette situation vis-à-vis du problème étudié* » (loc. cit. p.28)
- (iii) une mathématisation, qui s'opère à partir du modèle précédent. (p. 109)

Parzysz (2003) continue par ces mots :

A première vue, ce modèle présente de fortes analogies avec celui développé par Houdement et Kuzniak. Cependant l'expression « géométrie axiomatique naturelle » (c'est Parzysz qui souligne) que ceux-ci utilisent les distingue, puisque chez Henry la présence d'une axiomatique sous-jacente n'est pas indispensable dans la première modélisation, même si parfois « (la) description peut être pilotée par ce que l'on peut appeler un « regard théorique », c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux pré-construits » (ibid.). Cette « première modélisation » se placerait donc entre G1 et G2, et constituerait une étape intermédiaire précédant la construction de l'axiomatisation (correspondant *grosso modo* au niveau 2 de van Hiele qui est alors le niveau de déduction informelle). (p. 100)

Dans la mesure où Henry (1999) parle d'observation et de description, de protocole expérimental et qu'il poursuit en ces termes :

Puis il s'agit de traduire cette description en un système simplifié et structuré : c'est le niveau ... de la *figure géométrique*, donnée par des hypothèses interprétant les objets idéalisés de la réalité. Cela se traduit par l'appel à des modèles généraux dont les conditions de transfert doivent être réalisées. (p. 28)

En confrontant les idées de ces deux didacticiens on peut dire que la première modélisation imaginée par Henry relève davantage de G1 que de G2 dans la mesure où l'élève reste dans une géométrie concrète où l'on s'occupe toujours d'objets physiques dont on ne retiendra que certaines caractéristiques « idéalisées » (au sens de Platon) sans pour autant être dans un mode de fonctionnement abstrait basé sur des axiomes propres à G2 puisque les validations ne sont pas encore basées sur un corpus de propriétés. Comme van Hiele le dit à propos du niveau d'analyse, Henry parle de description et de simplification de la réalité. A ce niveau de développement, il n'est pas encore question de déduction basée sur des axiomes ou des théorèmes et les propriétés ne sont appréhendées qu'en termes descriptifs et non pas dans une structure plus ou moins axiomatisée de nature essentiellement hypothético-déductive. Quand Henry évoque une « traduction de cette description en un système simplifié et structuré » on peut facilement interpréter cette expression comme étant une autre approche du niveau de déduction informelle de van Hiele en termes de zone de développement proximal.

Parzysz (2003) continue par ces mots

D'autre part, la terminologie de Houdement et Kuzniak semble établir une sorte de tuilage – donc de continuité – entre les trois « géométries » ainsi définies : G1 et G2 ont en commun d'être « naturelles », tandis que G2

et G3 sont toutes deux « axiomatiques ». G2 apparaît alors comme une géométrie intermédiaire entre G1 et G3. Il semble cependant que l'articulation entre G1 et G2 – de nature épistémique – est plus fondamentale que celle qui sépare G2 et G3 ; en fait elle correspond en quelque sorte au niveau 2 de van Hiele, lequel se situe au cœur de la question de la modélisation géométrique. En effet, dans G1 les objets de la géométrie sont encore des éléments physiques idéalisant plus ou moins des situations de la « réalité » (...), et la validation reste d'ordre perceptif (instrumenté ou non). Au contraire, dans G2 comme dans G3, les objets en jeu sont des éléments situés hors de toute réalité (mais *représentés*¹⁴ par des objets physiques), la validation des affirmations étant d'ordre déductif : « *l'élève est invité à abandonner un contrôle empirique de ses déclarations au profit d'un contrôle par le moyen de raisonnements* » [Berthelot & Salin 1992, p. 32]. La distinction de G2 par rapport à G1 et à G3 tient alors essentiellement à deux aspects :

1° G2 est une « *modélisation de l'espace « physique »* » (c'est-à-dire de G1), alors que G3 ne fait plus référence à aucune « réalité » ;

2° G2 est en quelque sorte une G3 *incomplètement axiomatisée*, ou plutôt une géométrie dont les « axiomes » (canoniques ou non) sont partiellement implicite (que ce soit de façon inconsciente ou non). Plus précisément G2 s'appuie sur des raisonnements déductifs opérant à partir d'un certain nombre de faits donnés comme « évidents » ; en cela elle est analogue à G3 (version « euclidienne »). *Grosso modo*, à certains endroits, là où G3 comporterait un axiome, et éventuellement des définitions et des théorèmes qui en découlent, G2 est encore présente, mais elle est censée servir uniquement à construire une théorie de l'espace perçu, et on plus – tout au moins en principe – à appuyer une argumentation (même si les « on constate que » contredisent *de facto* cette remarque). (p. 100)

En conclusion de cette analyse, Parzys propose un modèle légèrement différent de celui de Houdement et Kuzniak, avec les arguments suivants :

Les éléments sur lesquels repose ce modèle sont, d'une part la nature des objets en jeu (physiques vs théoriques), d'autre part les modes de validation (perceptif vs logico – déductif). Partant de la « réalité », ou encore du « concret » (G0), qui n'est pas géométrique, nous opposerons d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes qui sont idéalisées pour constituer le « spatio-graphique » (G1) et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3) ou non (G2), et la référence au « réel » étant facultative pour G2 (mais pas pour G1) ; dans ce dernier cas, nous parlerons de géométrie *proto-axiomatique*. La situation peut alors être schématisée par le diagramme ci-après :

¹⁴ C'est Parzys qui souligne cette différence fondamentale

	GEOMETRIES NON AXIOMATIQUES		GEOMETRIES AXIOMATIQUES		
<i>Type de géométrie</i>	Géométrie concrète (G0)	Géométrie spatio-graphique (G1)	Géométrie proto-axiomatique (G2)	Géométrie axiomatique (G3)	
<i>Objets</i>	Physiques		Théoriques		
<i>Validations</i>	Perceptives		Déductives		
<i>Niveaux de van Hiele¹⁵</i>	Niveau 1 Identification-visualisation	Niveau 2 Analyse	Niveau 3 Dédution informelle	Niveau 4 Dédution formelle	Niveau 5 Rigueur

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément :

- passage de G0 à G1 : matérialité des objets en jeu
- passage de G1 à G2 : épaisseur des traits, des points ; justification par le perçu
- passage de G2 à G3 : propriétés jugées « évidentes. (p. 101)

Enfin Parzys s'interroge :

En ce qui concerne les institutions dans lesquelles vivent ces différentes géométries, on peut dire que, de façon très grossière, G1 correspond à l'école élémentaire, tandis que G2 correspond au lycée et G3 à l'université. Mais qu'en est-il pour le collège ? En fait, ce sont essentiellement les « figures », objets communs à G1 et à G2 qui mettent ces deux géométries *en concurrence* chez des non – experts comme le sont les élèves de collège.

Pour préciser ce qui précède, plaçons-nous maintenant au niveau de l'activité géométrique. Dans G1 les objets en jeu sont *matériels* (maquettes, dessins, ...), et les propriétés de ces objets sont des propriétés *physiques*, qui sont validées (déterminées, vérifiées et éventuellement contredites) par des techniques spécifiques (méthodes de comparaison, mesures, etc.), et par exemple un dessin sera accepté comme triangle si ses « côtés » (= traits) sont « droits ». De même, ce triangle sera accepté comme isocèle si, à l'aide d'un compas dont la pointe sèche est piquée en l'un des sommets (bien choisi), on peut tracer un cercle passant par les deux autres sommets ; ou

¹⁵ Ici Parzys avait utilisé la numérotation proposée initialement par P.M. van Hiele allant de 0 à 4. Mais par souci de cohérence dans notre texte nous avons repris la numérotation utilisée dans le paragraphe de rappel sur les niveaux de van Hiele.

bien si la mesure de deux des côtés fournit le même résultat. Au contraire, on pourra lui refuser la propriété si l'on constate un écart, éventuellement minime. On se situe donc ici dans *une problématique de la précision*. Une telle remarque nous place du point de vue des niveaux de van Hiele entre le niveau d'identification – visualisation et le niveau d'analyse. L'élève maîtrise la reconnaissance du triangle isocèle mais pour s'en convaincre il utilise déjà des techniques qui dépassent ce niveau sans pour autant être celles dont on parle dans le niveau d'analyse.

Par contre, dans G2 les objets en jeu sont des concepts *abstrait*s, qui peuvent être représentés par des objets physiques *mais ne se réduisent pas à ces objets*. Ce qui était objet dans G1 devient donc, dans G2 ou G3, simple *représentation* d'un objet, c'est-à-dire qu'il s'intègre à un concept d'ordre supérieur. (pp. 102-103)

Ici la note de bas de page est importante dans la mesure où elle précise un peu plus la distinction entre G1 et G2 :

On pourrait ici parler, comme pour l'interprétation d'un texte, parler de « premier degré » et de « second degré » : un dessin peut être considéré au premier degré (G1) ou au second degré (G2) c'est-à-dire comme ne représentant que lui-même (en tant qu'objet physique localisé dans l'espace, et alors « un carré posé sur sa pointe » n'est pas un carré mais un losange là on est exactement au niveau d'identification) ou comme représentant un objet géométrique (abstrait), comme par exemple l'objet « triangle équilatéral. (p. 103)

Parzysz continue par ces mots :

Par exemple, un dessin de triangle sera considéré comme une représentation de l'objet « triangle » de G2 dans le registre figural de Duval [Duval 1996], de même que la phrase « Soit un triangle ABC » en constituera une représentation dans le registre langagier. On se situe donc ici dans une *problématique de la déduction*.

Considérons maintenant un utilisateur « expert » de géométrie : pour résoudre un problème dans G2, il se place dans le registre de représentation qui lui semble le mieux adapté et en change aussi souvent qu'il en ressent le besoin, tout en conservant en permanence à l'esprit que *l'objet sur lequel il travaille reste le même* à travers les formes sous lesquelles il se (re)présente, et ceci même s'il n'en est pas toujours conscient.

Par contre pour un non-expert, le changement de registre s'accompagnera d'un changement d'objet ; c'est ainsi que la « figure » (= dessin) réalisée à partir de l'énoncé d'un problème de géométrie deviendra pour lui l'objet même à propos duquel sont posées les questions du problème (il passe ainsi, sans même s'en rendre compte, de G2 à G1). Et, inversement, une propriété contingente du dessin réalisé, une qu'il aura constatée, pourra être comprise – annoncée – comme une propriété de la configuration (= objet géométrique) définie par l'énoncé (il passe cette fois,

toujours sans s'en rendre compte, de G1 à G2 ; c'est ce que nous appelons « la contamination du su par le perçu » (CSP)). Bien entendu ; cette distinction G1/G2 n'est pas perçue par l'apprenti géomètre, pas plus que les passages de l'une à l'autre. (p. 103)

Là encore la note de bas de page apporte une certaine précision à propos de « la contamination du su par le perçu » :

Il ne s'agit pas d'un simple passage du particulier au général mais bien d'une confusion de deux types d'objets (et partant de deux types de géométries). (p. 103)

Nous terminons ainsi la reprise du texte de Parzysz

Ce caractère permanent de l'objet d'étude, ainsi que la versatilité des registres de travail susceptibles d'être mis en œuvre de façon consciente lors de son étude, constituent en fait deux aspects fondamentaux de l'expertise, et l'acquisition par l'élève de ces deux capacités en quelque sorte antagonistes est l'une des finalités que doit à mon avis viser l'enseignement de la géométrie. (p. 103)

On peut effectivement considérer que les capacités à travailler dans l'un ou l'autre des paradigmes puissent être antagonistes dans la mesure où elles sont associées à des modes de fonctionnement tout à fait différents : G1 ou G2, dans un monde spatio-graphique ou au contraire dans un monde au moins proto-axiomatique, pour autant que ces mondes soient assez clairement disjoints. Mais, comme le dit Parzysz, on peut aussi prendre en compte le fait que même le mathématicien expert peut faire usage des propriétés graphiques de l'objet d'étude, c'est-à-dire fonctionner dans G1, afin d'élaborer une preuve qui, elle, se situera dans G2 voire dans G3. On arrive alors à la conclusion que les capacités à fonctionner dans un paradigme ou dans un autre ne sont pas antagonistes mais complémentaires. En passant d'un univers à l'autre on pourrait dire que les capacités de fonctionnement dans un paradigme et dans l'autre se complètent mutuellement et c'est la maîtrise des deux qui détermine l'expertise du sujet. Cette remarque permet alors de considérer l'apprentissage non pas comme une juxtaposition de connaissances et de compétences mais comme leur réorganisation vers des niveaux plus abstraits ou théoriques.

Dans la conférence qu'il a prononcée à Melun (2005) Parzysz précise :

En se plaçant du seul point de vue des validations, on peut distinguer, dans G0 et dans G1, les validations purement *perceptives* (qui ne font appel qu'à la vision) et les validations *instrumentées* (où la vision porte sur des constatations résultant de l'utilisation d'instruments). Mais je n'irai pas jusqu'à dire qu'elles sont associées à deux géométries différentes, car les validations sont, dans les deux cas, fondées sur la perception : on peut constater de visu la rectitude de l'arête d'une boîte ou de l'alignement de trois points, ou les contrôler (visuellement) grâce à une règle ou à un fil tendu.

Les objets de G2 et de G3 sont des objets théoriques n'ayant pas d'existence physique ; ils sont **définis par un texte** (définition, énoncé) et peuvent être seulement représentés : dessin, maquette, description à l'aide du langage spécifique) à la théorie Les **validations** sont de nature théorique : un résultat sera validé par une « démonstration », c'est-à-dire un raisonnement hypothético-déductif s'appuyant d'une part sur les données, d'autre part sur des résultats internes à la théorie (définitions, théorèmes).

...

Parzysz précise aussi la distinction entre G2 et G3 :

G3 est une théorie axiomatique, tandis que G2 n'est qu'incomplètement axiomatisée : certains résultats, qui seraient nécessairement démontrés dans G3, sont admis pour de raison de difficultés théoriques ou de gestion du temps.

Dans la théorie des paradigmes géométriques, les validations telles que décrites par Parzysz, sont de deux natures distinctes : perceptives (ou instrumentées) et déductives. Les premières sont caractéristiques des paradigmes dans lesquels la géométrie est concrète ou spatio-graphique, les secondes qualifient les validations des deux autres géométries : géométrie proto-axiomatique et axiomatique.

3.3. Paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele

A ce stade notre étude, il nous paraît important de revenir sur le rapprochement que Parzysz et Kuzniak (2004) proposent entre les niveaux de van Hiele et les paradigmes géométriques et qui ont été présentés sous forme de tableaux dans les paragraphes précédents (3.1. et 3.2.). Par exemple, le « carré posé sur sa pointe » reconnu comme un losange, relève tout autant du

niveau d'identification-visualisation de van Hiele que de G1 ; cet exemple est d'ailleurs donné par chacun des didacticiens. De la même façon, si le dessin d'un triangle équilatéral est compris par l'élève comme étant le représentant d'un objet géométrique c'est-à-dire le représentant du concept géométrique d'un triangle isocèle particulier, on est tout autant dans G2 qu'au niveau de déduction informelle de van Hiele. Plus précisément, si l'on se place du point de vue de van Hiele où, à ce niveau 3, les propriétés des figures sont ordonnées, l'élève est ici en mesure de faire des inférences même si elles ne sont pas inscrites dans un système complètement axiomatisé ; si l'on considère la théorie des paradigmes géométriques, on est bien dans une géométrie au moins proto-axiomatique puisque le dessin est le représentant d'un concept géométrique : le dessin est la traduction d'un concept figural et la validation ne dépend pas de la précision du dessin. L'acceptation inclusive des définitions des triangles particuliers peut alors être interprétée de deux manières : du point de vue des paradigmes géométriques, on est dans G2 et du point de vue des niveaux de van Hiele, on est au niveau de déduction informelle. Que dire alors d'un élève qui dit d'un schéma fait à main levée convenablement codé qu'il s'agit d'un triangle équilatéral et que ce n'est pas pour autant un triangle isocèle ? Pour lui il y a alors exclusion des définitions des triangles particuliers les uns par rapport aux autres ; les concepts sont encore exclusifs les uns des autres. Pour autant dans un tel cas, le dessin ne peut pas être considéré comme le représentant d'un triangle concret particulier mais comme celui d'un objet géométrique « triangle équilatéral » auquel sont associées un certain nombre de propriétés. L'élève qui suit un tel raisonnement fonctionne-t-il plutôt en G1 ou en G2 ? On peut pratiquement affirmer qu'un tel élève ne fonctionne plus tout à fait dans une géométrie spatio-graphique (G1) : le dessin sur lequel il travaille ne présente aucun caractère de représentant d'un triangle réel et on n'est plus dans une géométrie de la précision. Mais la validation n'est pas encore de type déductif au sens où pour se faire, il faut que les propriétés s'enchaînent les uns aux autres selon des pas de déduction ; l'élève n'est donc pas vraiment en G2 non plus. Dans une telle démarche, la dualité associée au concept figural tel que décrit par Fischbein n'est pas encore totalement établie : l'aspect figural est plus important que l'aspect conceptuel. Nous aurons tendance à dire qu'une telle réponse relève plus de G1 que de G2.

Le cas du triangle isocèle-rectangle est intéressant dans la mesure où, nous savons par expérience qu'il est assez facile pour un élève de reconnaître en ce triangle un triangle isocèle particulier : le langage français est lui-même très suggestif. Ce faisant, l'élève est amené à considérer la relation d'inclusion entre les différents cas de triangles particuliers et à fonctionner dans une géométrie plus axiomatisée que celle qu'il pouvait utiliser

précédemment. Les figures commencent alors à s'organiser de manière hiérarchique les unes par rapport aux autres et l'élève fait son apprentissage d'un fonctionnement en G2. Mais nous ne pourrions être certain d'un fonctionnement en G2 que si l'élève reconnaît à la fois le triangle équilatéral et le triangle isocèle-rectangle comme étant des triangles isocèles particuliers.

Du point de vue des niveaux de van Hiele, l'interprétation nous semble plus facile. A partir du moment où l'élève identifie sur un schéma codé un triangle équilatéral ou un triangle isocèle-rectangle, il est au moins au niveau d'analyse. S'il n'est pas en mesure de considérer que ce sont aussi des triangles isocèles particuliers, il n'a pas atteint le niveau de déduction informelle : il connaît les propriétés des figures, sait les repérer sur un dessin codé, mais n'a pas un raisonnement tel que les propriétés puissent se déduire les unes des autres. Sans doute une étude plus précise des propriétés du triangle isocèle-rectangle lui permettra-t-elle de passer du niveau d'analyse au niveau supérieur. L'intervention de l'enseignant est alors primordiale.

Les niveaux de van Hiele fournissent une description du développement possible des compétences de l'élève quand la théorie des paradigmes géométriques constitue un cadre dans lequel s'inscrivent les rapports entre la géométrie et la réalité de l'enfant ou de l'expert en mathématiques. Or l'enseignement doit faire passer l'élève du statut d'apprenti à celui d'expert, d'une géométrie ancrée dans la réalité vers une géométrie axiomatique. Pour cela il doit accompagner l'élève dans le développement de ses compétences en respectant les zones de développement proximal de l'enfant et l'amener à fonctionner de manière cohérente dans un nouveau paradigme géométrique. Existe-t-il des activités qui permettent clairement d'identifier le paradigme de fonctionnement d'un élève ? Peut-on imaginer des tâches qui amènent progressivement l'élève à travailler dans un paradigme proto-axiomatique quand il n'a au départ qu'une connaissance spatio-graphique de la géométrie ?

4. La typologie des preuves de Balacheff

Dans son article intitulé « Processus de preuve et situations de validation », Balacheff (1987) définit ce qu'il appelle une preuve :

Nous appelons **preuve** une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs. (p. 148)

Nous considérerons que les communautés auxquelles Balacheff fait ici référence correspondent aux « institutions » au sens de Chevallard à savoir la classe dans laquelle se trouve l'élève qui établit la preuve, l'école élémentaire, le collège, le lycée, la vie quotidienne Dans ces institutions vivent différentes géométries : G0 et G1 à l'école élémentaire, G1 et G2 au collège, G3 à l'université.

Si d'un côté Parzysz associait à chaque paradigme géométrique un type de validation propre, Balacheff écrivait dans le même article :

Il existe plusieurs formes et niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en œuvre sont provoquées par **les exigences de la situation** dans laquelle on peut se trouver. (p. 151)

Il donne ensuite deux exemples de situations qu'il qualifie de situation de validation et de situation de décision :

- reprenons le cas de « la course à 20 ». Dans la dernière phase du jeu, appelée « jeu de la découverte », la consigne demande à des équipes qui jouent, d'élaborer des propositions qui permettent de « gagner à coup sûr » (Brousseau, 1975). Un système de marques sanctionne la production *d'énoncés vrais* (« acceptés » (*ibid.*)) et *d'énoncés faux* (« prouvés faux » (*ibid.*)). Les élèves se trouvent alors dans **une situation de validation** au sens de Brousseau (1975). L'objectif est la production d'une preuve (de la vérité ou de la fausseté) d'un énoncé. Cette situation contient organiquement la contrainte de mise en œuvre de processus de preuve.
- dans le cas de séquences didactiques décrites par Gras (1983) à propos de l'apprentissage de la symétrie orthogonale, après des situations consacrées à la familiarisation avec le symétriseur, les élèves sont invités à *anticiper*, à *prédire*, ce que sera l'image d'une figure donnée. On se trouve alors dans ce que nous appellerons une **situation de décision** ; elle demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de *preuves*. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite. (pp. 152-153)

Quand Balacheff parle des « exigences de la situation » comme étant déterminantes pour la validation d'une preuve, il nous semble qu'il fasse ici allusion au fait que la validation se fera

au sein même de la communauté ou de l'institution et que c'est cette même communauté qui acceptera ou rejettera la validation.

Donc dans les deux situations décrites précédemment, l'élève se retrouve à élaborer une validation de sa réponse qui peut passer par l'élaboration d'une preuve. Avec un léger glissement de sens du terme « situation », celui-ci n'étant plus pris au sens de Brousseau, Balacheff poursuit par ces mots :

Nous distinguerons trois types de situations qui appellent des processus de validation, voire la production de preuves. Ces situations peuvent être caractérisées par la fonction des preuves dans chacune d'elles :

Preuves pour décider

Preuves pour convaincre

Preuves pour savoir.

Il est clair qu'il ne s'agit pas là d'une partition. « Savoir » peut être compris comme décider de la valeur de vérité d'une proposition et « décider » peut être la source d'un savoir nouveau. Ce qui, pour nous, sépare effectivement ces deux fonctions (« décider », « savoir ») c'est que la première s'insère dans l'action, dans le fonctionnement du praticien, alors que la seconde est un fonctionnement de théoricien. Du point de vue des situations didactiques, il correspondra à ces deux fonctions, deux types de contrat didactique.

Dans le premier cas la dévolution du problème passe par l'entrée des élèves dans une fiction ou dans un jeu dont ils acceptent d'être les protagonistes. Ce type de situation paraît particulièrement bien adaptée à l'Ecole Elémentaire, car le jeu est à part entière une *pratique* des enfants à l'extérieur même de l'école.

Dans le second cas la dévolution du problème passe par l'adhésion des élèves à une position théorique. On peut chercher à nouer un tel contrat à l'Université, et appeler sur le désir de certitude la mise en œuvre de processus de validation (l'étudiant reconnaissant l'Université comme lieu où est pris en charge la construction de ses connaissances).

[...] le processus de validation, qu'il s'accomplisse ou non dans l'explicitation d'une preuve, est fondé sur une analyse du pour et du contre, sur une prise en charge de contradictions potentielles. Par là ce processus est essentiellement *dialectique*. Ce fait est encore plus évident dans un contexte de débat dans le jeu des preuves et des réfutations. Hors du contexte social l'élaboration d'une preuve passe par une analyse critique et donc relève de la même dialectique : une preuve rigoureuse et définitive est une preuve qui ne sera pas réfutée. Voire, pour certains, une preuve qui ne serait pas réfutable.

L'accès possible ou non à l'expérience constitue une caractéristique de la situation qui va jouer un rôle central dans le fonctionnement de cette **dialectique de la validation**. La mise à exécution d'une décision, ou la réalisation du contenu d'une affirmation, permet ce que nous appellerons

des validations pragmatiques de la décision, ou des **preuves pragmatiques** lorsqu'elles sont effectuées par l'élève lui-même pour établir la vérité d'une proposition. Lorsque cet accès à la réalisation n'est pas possible alors les validations sont nécessairement intellectuelles. La production de ces **preuves intellectuelles** requiert notamment l'expression langagière des objets sur lesquels elles portent et leurs relations.

La nature même de la dialectique associée à ces deux types de preuves est fondamentalement différente. En particulier la contradiction apportée par les *faits* n'a pas le même statut que celle apportée par le *discours*, même si celui-ci consiste à invoquer les faits. Quant aux preuves elles-mêmes, elle n'établissent pas de la même façon les propositions qu'elles soutiennent :

- la preuve pragmatique est hypothéquée par la singularité de l'événement qui la constitue, il faut en accepter le caractère générique. Elle est de plus, tributaire d'un contingent matériel : outil imprécis, défaut de fonctionnement ;
- la preuve intellectuelle mobilise une signification contre une autre, une pertinence contre une autre, une rationalité contre une autre. (pp. 155-157)

Plus loin Balacheff précise à propos des preuves pragmatiques qu'elles sont l'œuvre du praticien, du sujet agissant.

Elles s'ancrent dans les faits, dans l'action. Elles se fondent sur des théorèmes-en-acte qui n'ont pas été prouvés mais *éprouvés* dans la pratique. La communication de ces preuves se fait par **ostension**. Les opérations et les concepts qu'elles mobilisent sont agis : « la preuve ? .ça marche ! »
[...] L'élève s'exprimera dans le langage de la **familiarité**. (pp. 157-158)

Parmi les preuves pragmatiques, Balacheff considère les trois types de preuve suivants :

- **L'empirisme naïf** est dans cette hiérarchie le premier type de preuve que nous rencontrons. Il consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion. [...] Nous rattachons à ce type (de preuve) les démarches marquées par l'absence d'indices d'un processus de validation. Les conjectures sont tirées de l'examen de peu de cas, le problème de validité n'est pas abordé. En revanche les élèves montrent dans les faits ou par leurs propos leur confiance en ces assertions. [...]
- **L'expérience cruciale** est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible. [...] Ainsi l'expérience cruciale consiste à provoquer un événement sur lequel « on ne se fait pas de cadeau » en affirmant que « si cela marche alors cela marchera toujours ». Cette démarche qui reste fondamentalement empirique se distingue de l'empirisme naïf en ce que le problème de la généralisation est effectivement posé et que l'élève se donne un moyen de décider autrement que péremptoirement. [...]
- **L'exemple générique** consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. La formulation dégage les

propriétés caractéristiques et les structures d'une famille en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. (pp. 163-165)

Plus loin Balacheff envisage que l'exemple générique puisse être associé à un mode de validation qui ne soit plus tout à fait pragmatique sans pour autant être complètement intellectuel.

On se trouve à la frontière des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles, le passage pouvant se faire par la prise de conscience du caractère **générique** de la situation envisagée. (p. 158)

Parmi les preuves intellectuelles possibles, Balacheff a identifié essentiellement l'expérience mentale et la démonstration.

Le développement sur le terrain des preuves intellectuelles exige un changement de position ; le locuteur doit prendre une position de théoricien dans laquelle la connaissance (jusque là agie) devient l'objet de réflexions, de discours, voire de débats. (p. 158)

[...]

L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre ; ce qui était le cas pour l'exemple générique. (p. 165)

[...]

Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons **démonstrations** ces preuves. (p.148)

[...]

Pour parvenir à ce que nous reconnâtrions pour une démonstration, le langage de la familiarité est insuffisant. Il faut que l'élève accède à un langage fonctionnel qui ne soit plus seulement un moyen de description des actions ou des opérations, mais un véritable outil de calcul intellectuel.

Le passage du langage de la familiarité au langage fonctionnel requiert en particulier :

- une décontextualisation
- une dépersonnalisation
- une dé-temporalisation dégageant les opérations de leur date et de leur durée anecdotique ; ce processus est celui fondamental du passage de l'univers des actions à celui des relations et des opérations. (pp. 158-159)

Les termes utilisés par Balacheff d'une part et Parzysz d'autre part sont comparables. On peut donc rapprocher sinon identifier les preuves pragmatiques aux validations relevant de G1 et les preuves intellectuelles aux validations dans G2. De plus, comme l'a montré la recherche menée par Arsac *et al* (1992), si tous les types de preuve identifiés par Balacheff ont été retrouvés, il a pu arriver que certaines preuves soient difficilement identifiables à l'un ou l'autre type de preuve. Mais, et ceci nous conforte dans l'idée de rapprocher les validations associées aux paradigmes et la typologie de Balacheff : en situation de classe, un élève ne saurait être associé à un type de preuve particulier et un type de preuve ne caractérise pas un élève, souvent parce que la preuve produite essaie de « coller au plus près » à l'attente du professeur. Autrement dit la preuve donnée par un élève ne dépend pas complètement de ses compétences. Arsac *et al.* (1992) résumant ainsi la situation :

- Le type de preuve dépend de la lecture que l'élève fait de la situation dans laquelle il est et de l'enjeu qu'il perçoit dans la situation de validation.
- Le type de preuve dépend du niveau de conceptualisation auquel est parvenu l'élève par rapport aux notions en jeu dans le problème.
- Il y a enfin une corrélation étroite entre le type de preuves produites par les élèves et la nature du problème proposé : certains problèmes peuvent difficilement donner lieu à des expériences mentales, tandis que d'autres peuvent difficilement inciter l'élève à produire des preuves du type « expérience cruciale ». (*p.* 153)

5. Cadre théorique

Quand on regroupe les différentes approches théoriques évoquées précédemment, on obtient un nouveau cadre théorique, basé sur la théorie des paradigmes géométriques tels que décrits par Parzysz à laquelle la théorie des niveaux de van Hiele apporte une précision centrée sur l'élève, et dans laquelle les validations rédigées par un élève sont reprises de la typologie de Balacheff.

Centrée sur l'activité de l'élève, la théorie de l'apprentissage selon Vygotski demande à l'enseignant de procéder par zones de développement proximal de façon à accompagner l'enfant de manière qu'il puisse agir au final en toute autonomie. L'enfant construit sa connaissance et acquiert des compétences par apprentissages successifs, guidé dans cette démarche par l'enseignant. Les niveaux de van Hiele témoignent de ce que l'élève sait faire

seul dans un domaine donné de la géométrie. Ces niveaux témoignent du niveau de développement de l'élève dans ce domaine. P.M. et Dina van Hiele ont eux-mêmes décrits les modalités d'enseignement, les conditions d'apprentissage les plus favorables au passage d'un niveau à l'autre, cette description étant, en de nombreux points, apparentée aux conditions évoquées par Vygotski. Or les différents paradigmes géométriques caractérisent les différentes géométries dans lesquelles un élève peut fonctionner. A chacun de ces paradigmes on peut associer un type de validations, pragmatiques dans G1 et intellectuelles dans G2 en particulier. Mais nous avons vu aussi que les différents types de preuve pouvaient eux aussi être rapprochés des niveaux de van Hiele par le mode de fonctionnement sous-jacent à la preuve. La contradiction selon laquelle un type de preuve ne saurait caractériser un élève et le fait qu'un même élève puisse produire différents types de preuves alors que les niveaux de van Hiele sont hiérarchisés et qu'un élève doit passer successivement d'un niveau au niveau suivant sans en sauter un seul pour arriver à une bonne maîtrise de la démonstration, est une contradiction facilement levée. En effet, un élève ne peut être « réduit » ou caractérisé par un seul niveau de van Hiele ni à un seul type de preuve. Selon les différents domaines de la géométrie, il maîtrise différents niveaux et c'est à l'intérieur de chacun de ceux-ci qu'il doit évoluer en respectant la hiérarchie des niveaux. Il est donc assez facile d'imaginer que l'on puisse rapprocher certains types de preuves à des niveaux de van Hiele. Pour donner un exemple sans doute un peu caricatural, on voit mal comment un élève maîtrisant l'identification-visualisation des triangles particuliers pourrait rédiger une preuve intellectuelle à une question relative l'étude de sous-figures comme les diagonales du rectangle dans une figure plus complexe. A l'opposé, un élève sachant rédiger une démonstration ne ressentira pas le besoin de le faire si on lui demande de repérer des triangles isocèles parmi des dessins en vraie grandeur de polygones et de justifier ses choix : il racontera comment il a utilisé son compas ou sa règle, adaptant ainsi sa réponse au contrat didactique. Comme l'a dit Balacheff, la situation elle-même ainsi que la représentation que s'en fait l'élève, sont des éléments importants dans la détermination du type de preuve qui sera produit.

Mais les paradigmes géométriques ont été utilisés pour étudier des travaux d'étudiants de PE1 et sont une description de la relation entre la géométrie, construction abstraite, et la réalité. L'élève de l'école primaire ou au début du collège est en situation d'apprentissage de cette abstraction donc il ne maîtrise pas encore toutes les composantes de G2 et a fortiori les validations de type intellectuel. Donc même si le type de preuve donnée par un élève ne

saurait caractériser ce dernier, il est bien évident qu'un élève de CM2 ne peut donner une démonstration dans la forme où on l'attend d'un élève de Seconde. Donc le type de preuve donnée par un élève évolue aussi avec le développement de celui-ci et avec les exigences des institutions dans lesquelles il vit sa vie d'élève.

Si l'on reprend la description des niveaux de van Hiele, le premier niveau est celui de l'identification-visualisation. A ce stade de développement, l'élève reconnaît la figure à son aspect général. Les validations associées à ce niveau sont des validations perceptives ou instrumentées, ou encore pragmatiques. On peut même aller jusqu'à préciser qu'un élève qui ne maîtrise que le niveau d'identification-visualisation fournira des preuves de type « empirisme naïf » puisqu'à ce niveau, le problème de la généralisation ne se pose pas : les dessins sont des représentations d'objets physiques et donc singuliers.

Comme nous l'avons déjà signalé le niveau suivant de van Hiele, dit niveau d'analyse, peut, selon les situations, être associé à l'un ou l'autre des paradigmes. En effet les objets représentés ne sont plus nécessairement des objets physiques, ils sont porteurs de leurs propriétés géométriques et deviennent des représentants mais pour autant la validation associée à ce niveau n'est pas de type déductif. A ce niveau, il n'est pas question de déduction mais plutôt de description, de connaissances factuelles des propriétés des figures ; on peut donc intégrer le niveau d'analyse à G1 ou considérer qu'il constitue à lui seul le passage de G1 à G2 en terme de zone de développement proximal. De plus ce niveau est caractérisé par la capacité à décoder les propriétés d'un schéma qui peut être un schéma fait à la main. Nous somme donc là dans une prise en compte plus théorique que physique de l'objet géométrique. Il faut toutefois être prudent parce que les objets relevant du niveau d'analyse ne sont plus tout à fait des objets physiques dans la mesure où l'élève à ce niveau est capable d'accepter qu'« un dessin soit celui d'un rectangle pour peu qu'on le lui dise même si le dessin est mal fait » (*notre traduction d'après Usiskin, 1982 ; 10*). En revanche à ce même niveau, il n'est jamais fait mention de déduction ou d'organisation nouvelle des informations utilisant les connaissances de l'élève. Nous considérons comme une illustration de cette situation le cas où l'élève est capable de construire un parallélogramme en « vraie grandeur » à partir d'un schéma codé fait à main levée mais où on ne lui demande pas d'expliquer comment il s'organise pour faire sa construction. L'expérience a montré que l'élève n'est pas toujours en mesure d'explicitement spontanément sa démarche ; il faut le solliciter pour qu'il commence à prendre conscience qu'il a **organisé** sa construction à partir des connaissances qu'il avait des

propriétés du parallélogramme et l'amener graduellement au niveau de déduction informelle. Un autre exemple est que, selon van Hiele, au niveau d'analyse, un carré n'est pas un rectangle particulier alors que dans G2, la validation est de type déductif. Donc il semble que l'on ne puisse considérer que le niveau d'analyse relève complètement du paradigme G2 alors qu'il n'est plus du paradigme G1 puisque que les objets sur lequel il s'appuie ne sont pas nécessairement des objets physiques. Le niveau d'analyse pourrait être une caractéristique du tuilage entre G1 et G2, tuilage rencontré dans les recherches menées par Parzys. L'élève au niveau d'analyse est en mesure de considérer que le dessin qu'il étudie n'est pas celui d'un cas particulier puisqu'il est capable de le décoder quand il s'agit d'un schéma fait à main levée mais dans le même temps, il ne fait pas la différence entre la récitation de la liste des propriétés de la figure ou de la situation géométrique et l'apport d'informations nouvelles liées à la déduction. Il n'y a pas d'organisation explicite d'un raisonnement et la perception de la généralisation est balbutiante. Les validations sont encore des validations pragmatiques de type « expérience cruciale ».

Pour appréhender et passer de G1 à G2 il faut de toute façon que l'élève ou l'étudiant aient des connaissances de plus en plus théoriques, qu'elles soient intuitives, ou construites et organisées. Or on peut construire ces connaissances et les contrôler par les niveaux de van Hiele. L'élève passe d'un niveau à l'autre avec l'aide du professeur et ce d'autant mieux que cette progression est organisée par zones de développement proximal. Ce n'est pas étonnant que les étudiants de PE1 utilisent sans distinction G1 et G2 dans la mesure où ils peuvent avoir des connaissances parcellaires qui relèvent de chacun des paradigmes (voir Jore 2006). Mais un élève de primaire n'a sans doute pas accès spontanément à G2, à moins qu'il ne soit très intuitif ou très doué en généralisant les propriétés qu'il identifie à propos des situations géométriques. Donc c'est par l'apprentissage qu'il acquerra un fonctionnement en G2 et cela se passera d'autant mieux que l'enseignant respectera un processus d'apprentissage progressif qui peut être balisé par les niveaux de van Hiele et organisé autour d'activités liées les unes aux autres par zone de développement proximal. En particulier le niveau d'analyse devient crucial dans la mesure où il peut être un moyen de passage de G1 à G2 et qu'il peut être abordé tant avec les outils de l'un ou l'autre des deux paradigmes. Ce niveau de van Hiele pourrait constituer à lui seul une zone de développement proximal pour l'enseignant en proposant des activités de niveau d'analyse fonctionnant dans G1 où le relevé des propriétés des figures est fait à partir de figures en vraie grandeur puis des activités avec le même contrat

didactique mais le support graphique est un schéma codé où l'élève n'est plus dans un espace mesurable donc dans G2, enfin des activités à support verbal et sans illustration.

Ceci ne est pas en contradiction avec le fait que G1 et G2 se contrôlent mutuellement ni avec la relation G1/G2 dans l'activité géométrique telle que Parzysz (2003 ; *pp. 113-114*) la décrit. Soit on considère que le tuilage entre G1 et G2 se fait à la condition que l'élève maîtrise le niveau d'analyse de van Hiele soit on considère que ce même niveau est à lui seul une zone de développement proximal qui permet à un élève de CM2 ou de 6^{ème} d'accéder au paradigme G2, paradigme jusqu'alors inconnu pour lui.

Le niveau de déduction informelle relève complètement du paradigme G2 puisqu'à ce niveau, les propriétés s'ordonnent, elles se déduisent les unes des autres. Les validations sont donc de nature déductive mais la distinction entre définition et propriété n'étant pas encore en place, l'élève ne produit pas de démonstrations. Les preuves qu'il rédige sont donc de type « expérience mentale ».

Notre cadre théorique peut se résumer ainsi :

- Les différentes géométries dans lesquelles un élève peut travailler, sont qualifiées selon les propositions de Parzysz : nous partageons avec lui l'idée qu'une géométrie ne saurait être à la fois axiomatique et naturelle pour un élève. Avec lui nous choisissons donc d'appeler géométrie proto-axiomatique, le niveau de développement où le rôle des axiomes, définitions et théorèmes est encore mal perçu par les élèves alors que les relations d'inclusion entre les figures sont reconnues. Cette géométrie correspond à la réalité de l'enseignement en collège.
- Le statut du dessin est repris selon les termes de Houdement et Kuzniak.
- Les objets et les validations sont telles que définies par Parzysz.
- La typologie de Balacheff est reprise et placée selon les critères définis plus haut.
- Enfin les niveaux de van Hiele sont associés aux caractéristiques précédentes en respectant les arguments que nous avons développés, nous différenciant ainsi

quelque peu du tableau récapitulatif proposé par Parzysz. La position des niveaux de van Hiele par rapport aux différentes géométries a donc été modifiée.

Le tableau ci-dessous présente l'organisation que nous proposons pour les différents éléments qui composent notre cadre théorique.

	Géométries non axiomatiques			Géométries axiomatiques		
Paradigmes	Géométrie concrète G0	Géométrie spatio-graphique G1		Géométrie proto-axiomatique G2	Géométrie axiomatique G3	
Statut du dessin		Objet d'étude et de validation		Support du raisonnement et « figural concept »	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique	
Objets	Physiques			Théoriques		
Validations	Perceptives			Déductives		
Typologie des preuves de Balacheff		Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Démonstration
Niveaux de van Hiele		Identification-visualisation N1	Analyse N2		Déduction informelle N3	Déduction formelle N4

6. Objectifs de la recherche

Cette recherche a donc pour objectifs de répondre aux questions suivantes :

6.1. A propos des paradigmes géométriques :

- a) La théorie des paradigmes géométriques peut-elle s'appliquer aux élèves de niveau CM2-6^{ème} ? Peut-on au travers d'une activité, déterminer le paradigme dans lequel un élève de CM2 ou de 6^{ème} fonctionne ?
- b) Si oui, le paradigme dans lequel un élève fonctionne dépend-il de son niveau de scolarité ? Autrement dit, pour une tâche donnée, les élèves d'une même classe fonctionnent-ils dans le même paradigme géométrique ?
- c) Au contraire, le paradigme dans lequel un élève de CM2 ou de 6^{ème} fonctionne, dépend-il de la tâche qui lui est prescrite ? Un même élève peut-il alors changer de paradigme géométrique en fonction de la tâche ?

6.2. A propos des niveaux de van Hiele :

- a) La théorie des niveaux de pensée en géométrie définie par P. M. van Hiele peut-elle s'appliquer à des élèves de CM2 ou de 6^{ème} ? Peut-on identifier le niveau de van Hiele maîtrisé par un élève de CM2 ou de 6^{ème} au travers d'une tâche écrite ?
- b) Si cette théorie est applicable, pour une tâche donnée, les élèves de CM2 et de 6^{ème} témoignent-ils tous du même niveau de van Hiele ? Autrement dit, le niveau de développement des élèves, tel qu'établi au moyen de la théorie de van Hiele, est-il lié au niveau de scolarité ?
- c) Ou, au contraire, un même élève qu'il soit de CM2 ou de 6^{ème} peut-il témoigner de la maîtrise de différents niveaux de van Hiele selon la tâche qui lui est prescrite ?

6.3. A propos du cadre théorique :

- a) Mise à l'épreuve de ce cadre théorique : Peut-on associer à la fois paradigmes géométriques et niveaux de pensée en géométrie tels que définis par P. M. van Hiele ? En particulier peut-on établir une corrélation entre les deux géométries G1 et G2 et les différents niveaux de van Hiele ?

- b) Le niveau d'analyse de van Hiele peut-il être considéré comme une zone de « tuilage » entre les géométries G1 et G2 ?

- c) Si oui, quelles sont les caractéristiques de ce « tuilage » ? Peut-on trouver des activités à proposer aux élèves qui le mettent en évidence ?

PROBLEMATIQUE

Dans ce chapitre nous ferons une recension des recherches centrées sur les différentes composantes de notre cadre théorique, à savoir la théorie des niveaux de pensée en géométrie, la théorie des paradigmes géométriques, les diverses recherches sur l'enseignement de la géométrie et de la preuve en particulier.

Barbin (2001) résume en quelques mots la situation de la géométrie et de son enseignement en France :

dans l'enseignement, du primaire au secondaire, l'élève passe sans beaucoup de transitions de figures dessinées sur une feuille à la démonstration logique de propositions sur des figures représentant des objets idéaux.

[...]

Avant d'avoir le statut de représentation d'un objet idéal d'une théorie mathématique, elles (les figures géométriques) ont eu pour fonction de représenter des éléments d'une réalité simplifiée, construite à partir d'un « réel » complexe. Le statut de schéma est négligé dans l'enseignement et nous y voyons là l'une des principales sources de difficultés dans le primaire. (p. 60)

1. Analyse de l'INRP.

En 1983 et en 2003, une équipe de l'INRP a enquêté sur l'articulation CM2-6^{ème} en Mathématiques proposant « un état des lieux comparatif de l'enseignement des droites perpendiculaires et des droites parallèles à l'école et au début du collège en pointant les ruptures et les continuités aussi bien du point de vue des mathématiques enseignées que du point de vue des moyens didactiques employés par les professeurs. »

Cette recherche qui s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique est organisée autour des différents types de tâches proposés à l'école et au début du collège. Ainsi à propos de la tâche « Déterminer si deux droites sont parallèles en géométrie instrumentée », les curriculums réels observés dans des classes de CM2 et de 6^{ème} amènent les auteurs à ces remarques :

Le recours aux instruments en vue d'une reconnaissance du parallélisme est pris en charge à l'école élémentaire (manuels et pratiques de classe).

Le collège ne semble accorder aucun crédit à ce type de reconnaissance.

[...]

A l'école, la technologie qui va justifier la reconnaissance instrumentée du parallélisme repose sur la notion d'écart constant, or la notion de « distance » n'est abordée qu'en classe de 4^{ème}. Le collègue va occulter cette technique – basée sur une argumentation instrumentée – pour proposer une justification à l'aide de propriétés (niveau de la géométrie théorique).

D'une activité centrée sur une technique ayant une certaine matérialité, l'élève va devoir, pour une même tâche, se situer au niveau théorique de la géométrie, mobiliser des propriétés (objets mathématiques « immatériels ») et convoquer une technologie différente.

Le manque d'articulation entre les niveaux perceptif, instrumenté et théorique, l'opacité du niveau de géométrie dans lequel la justification doit être conduite vont être des lieux de rupture importants pour certains élèves et vont s'ériger en obstacle dans les exigences de justification. [...]

La raison d'être d'une justification à l'aide de propriétés n'apparaît pas toujours pertinente au collégien convaincu par l'évidence perceptive ou instrumentée. »

L'enseignant du premier degré – polyvalent – s'autorise à faire vivre l'aspect « outil » d'une notion avant d'en aborder son aspect « objet » (au sens de la dialectique outil/objet de R. Douady).

Le professeur de collège – spécialiste de sa discipline – ne s'autorise pas à bouleverser l'ordre dans lequel une notion « doit » être présentée : aspect « objet » (énoncé formel de la connaissance) puis aspect « outil » (utilisation de la connaissance précédemment définie). Pour lui, il n'est pas concevable de justifier le parallélisme en 6^{ème} en convoquant une notion qui ne sera étudiée que plus tard dans le cursus de l'élève.

Bien plus qu'une simple rupture dans les types de tâches, l'abandon de cette technique de reconnaissance instrumentée est révélateur d'une « fracture didactique » importante. (p. 25 du fichier n°4)

L'une des premières phrases du paragraphe de conclusion générale est :

comme en 1983, en 2003 les élèves ressentent la rupture entre CM2 et 6^{ème} pour ce qui est de la difficulté des notions abordées, de la quantité de travail demandée et de la place plus importante de l'écrit. (p. 38 du fichier n°4)

Pour autant les auteurs concluent à propos de l'enseignement de la géométrie que

sur un même thème mathématique, d'un niveau d'enseignement à l'autre, il n'y a pas vraiment de reprise de l'étude mais une juxtaposition de deux organisations mathématiques autonomes. Ces dernières sont mises en place par des organisations didactiques construites selon des logiques d'enseignement qui, tout en s'ignorant l'une l'autre, délaissent toutes les deux certains aspects de l'organisation des connaissances, aspects qui sont donc entièrement à la charge des élèves, ce qui condamne les plus fragiles d'entre eux, mais gêne également les élèves moyens. (p. 37 du fichier n°4)

La recherche ayant été ciblée sur les concepts de perpendicularité et de parallélisme, l'étude peut conclure :

le sens à donner [à ces] concepts n'est questionné ni à l'école ni au collège ; la finalité de l'enseignement de ce domaine semble s'être perdue. Cette finalité est réaffirmée dans les textes des programmes de mathématiques de l'école : « *la résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances, dans tous les domaines mathématiques ; elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens* » (Document d'application Cycle 3, 2002) (p. 37 du fichier n°4)

On peut donc reformuler ce constat en disant que si les mêmes domaines de la géométrie sont abordés en Primaire et au Secondaire, ils le sont dans des conditions telles que l'élève a de grands risques de se perdre en ne trouvant que peu de continuité ou de cohérence entre les mathématiques qui lui sont successivement proposées.

2. Ce que les recherches ont montré dans différents cadres théoriques

Si l'on essaie maintenant de retracer l'historique des recherches et des diverses expériences qui ont eu lieu à propos de l'enseignement de la géométrie et en particulier du passage d'une géométrie représentant le monde réel où le dessin est alors une schématisation d'un objet réel à la géométrie euclidienne dont l'enseignement relève du collège, on trouvera successivement :

- La théorie des niveaux de van Hiele proposée en 1956 ;
- Les travaux des équipes hollandaises autour de Freudenthal, qui ont lancé le mouvement RME visant à un enseignement des mathématiques réalistes à partir des années 1970 ;
- Les recherches menées au début des années 1990 par différentes équipes italiennes autour de Boero à propos de l'établissement de conjectures et de démonstrations dans des situations inspirées de la vie courante;

En parallèle la publication des résultats de Berthelot et Salin concernant l'enseignement de la géométrie à l'école primaire ;

- L'idée de Parzysz et de Colmez sur la distinction et/ou la contamination du su par le perçu en 1988 ;
- Le rôle du concept figural dans le raisonnement géométrique tels que proposé par Fischbein et ses collaborateurs à partir de 1993 ;
- Les diverses fonctions d'une figure géométrique et le rôle des sous-figures décrits par Duval à la même époque ;
- La théorie des paradigmes géométriques amenée par Houdement et Kuzniak en 1998 puis remaniée par Parzysz à partir de 2000.

.La théorie des niveaux de van Hiele

Nous précisons ici les apports de la théorie élaborée dans les années cinquante par Dina van Hiele – Geldof et son époux Pierre-Marie van Hiele dans l'enseignement de la géométrie. Nous avons déjà vu qu'elle comprend cinq niveaux hiérarchisés (identification-visualisation ; analyse ; déduction informelle ; déduction formelle et rigueur) et qu'elle préconise l'existence de conditions d'enseignement pour que l'enfant passe successivement par ces différents niveaux de développement, afin que son apprentissage de la géométrie lui permette d'atteindre une maîtrise véritable de la démonstration. Plus précisément, l'élève doit explorer les figures avant de pouvoir les décrire et en énoncer les propriétés, pour ensuite être en mesure de structurer hiérarchiquement ces propriétés et enfin les inclure dans un système axiomatique, la géométrie euclidienne pour ce qui nous concerne ici. Da Purificação (2000) résume en ces mots les grandes lignes de la théorie de van Hiele :

En ce qui concerne la hiérarchie, on remarque une séquence des niveaux : il faut des niveaux construits antérieurement pour atteindre un niveau plus élevé. Quant à la linguistique, un concept géométrique est exprimé dans un langage propre avec des symboles et des relations. Relativement au rapport extrinsèque/intrinsèque, les niveaux établissent une intersection, c'est-à-dire que ce qui est implicite dans un niveau devient explicite dans le niveau supérieur. En ce qui concerne le progrès, la théorie de van Hiele explicite que les niveaux dépendent de l'instruction pour être atteints, plus que de l'âge ou de la maturité de l'élève. Quant aux dénivellations, il faut un raisonnement de même niveau entre les partenaires de l'apprentissage géométrique, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas d'élévation de niveau si l'activité développée se situe dans un niveau plus avancé que celui de l'élève.(p.3)

Les résultats donnés par diverses recherches fondées sur cette théorie peuvent se résumer ainsi. Fuys, Geddes et Tischler (1985) d'une part, Mayberry (1983) d'autre part ont confirmé que les niveaux étaient hiérarchisés. Burger et Shaughnessy (1986) ont constaté que tous les élèves d'un même âge ne maîtrisaient pas un même niveau et que certains élèves pouvaient, sur une tâche donnée, osciller entre deux niveaux consécutifs. Ceci a été confirmé par Burton et Detheux-Jehin (1999) et Gutiérrez, Jaime et Fortuny (1991).

Les recherches de Gutiérrez et al. (1991 ; 1992) ont eu pour support la géométrie dans l'espace, elles ont montré que le passage d'un niveau au niveau supérieur ne se faisait pas par bonds mais s'installait dans la durée et pouvait prendre plusieurs mois, voire des années. Il est tout à fait vraisemblable qu'un même élève progresse simultanément à l'intérieur de deux niveaux consécutifs de van Hiele, la maîtrise du niveau inférieur étant plus grande que celle du niveau supérieur. Il est tout à fait possible aussi que le niveau de van Hiele utilisé par un élève dépende, dans la mesure de ses compétences, de la difficulté de la tâche qui lui est proposée : l'élève utilisera un niveau d'autant plus bas que la tâche lui semble difficile.

En utilisant Cabri Géomètre comme ressource d'apprentissage auprès d'élèves de dernière année du niveau collégial au Brésil, Da Purificação (2000) a constaté comme Gutiérrez que si l'on propose à l'élève une activité d'une difficulté plus grande que celles que ses expériences lui ont offerte, celui-ci a tendance à baisser de niveau. Les recherches américaines et espagnoles que nous venons de rapporter (Burger & Shaughnessy ; 1986 ; Gutiérrez ; 1991 ; Da Purificação ; 2000), ont aussi montré qu'un même élève ne saurait être identifié par un seul niveau de van Hiele : on peut trouver des élèves qui utilisent des niveaux différents selon les activités. Mais plus importante sans doute est la conclusion selon laquelle, « la seule utilisation du logiciel Cabri Géomètre ne garantit pas de progrès « complets » de la pensée géométrique » pour les sujets diagnostiqués au niveau d'identification-visualisation soit le premier niveau de van Hiele. Da Purificação suggère que cette difficulté est liée au langage qui, au niveau de base de van Hiele n'est pas le « langage conventionnel de la géométrie ».

Travaillant avec des élèves de collège et de lycée en Afrique du Sud, de Villiers (1994) a constaté que ceux-ci pouvaient comprendre les définitions et les propriétés des quadrilatères et les utiliser correctement de façon déductive. Pour autant en interviewant ceux-ci il est apparu que la classification inclusive des quadrilatères ne leur convenait pas, ne leur plaisait pas ; ils préféraient une classification exclusive résultant en une partition des quadrilatères, les carrés étant distincts des rectangles eux-mêmes distincts des parallélogrammes etc.. De Villiers interprète cette difficulté comme étant une indication de la difficulté du passage du

niveau d'analyse (deuxième niveau) de van Hiele au niveau de déduction formelle (troisième niveau). Pour ce faire, comme Mariotti (1996), il préconise que les élèves travaillent en groupes à l'élaboration de définitions afin que se mette en place une certaine négociation sur le langage utilisé. Il donne comme exemple la phrase « Un carré est un rectangle ». Pour bon nombre d'élèves, cette phrase signifie que carré est synonyme de rectangle, ce qu'ils réfutent. Si au contraire, on leur précise qu'un carré est un rectangle particulier, la classification des quadrilatères par inclusion prend du sens.

Nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, en complément aux descriptions de chacun des niveaux, P.M van Hiele a défini un processus d'apprentissage pour qu'un élève passe d'un niveau de pensée au niveau supérieur. Ce processus qui comprend cinq phases n'est pas sans rappeler la théorie des situations élaborée par Brousseau :

- l'information c'est-à-dire la présentation du problème à l'élève ;
- l'orientation dirigée au cours de laquelle l'élève explore seul ou en groupe les diverses solutions au problème ;
- l'explication qui permet aux élèves de mettre en commun leurs ébauches de solution sous le contrôle de l'enseignant quant à la correction du langage et aux relations entre les différents arguments ;
- l'orientation libre qui voit l'élève rédiger sa propre solution au problème en utilisant éventuellement un langage nouveau ;
- l'intégration au cours de laquelle l'élève reprend et synthétise ce qu'il vient de découvrir sous la conduite de l'enseignant.

2.2. « Realistic Mathematics Education » aux Pays-Bas

Cette description du processus d'apprentissage a été reprise par les défenseurs du mouvement RME. Au début des années 1970, une réponse à la nécessité de réforme de l'enseignement des mathématiques a été apportée par l'équipe regroupée autour de Freudenthal dans le cadre du mouvement RME : « Realistic Mathematics Education ». L'idée directrice est que les mathématiques doivent être reliées à la réalité, rester accessibles aux enfants, être pertinentes dans le monde où nous vivons. Les préoccupations du mouvement RME sont donc avant tout centrées sur les apprentissages propres à l'école primaire. Freudenthal considérait que les

mathématiques doivent être une activité humaine et à ce titre, l'enseignement doit être pour les élèves une « opportunité guidée de réinvention » des mathématiques en les faisant. Ceci signifie que l'enseignement ne peut se focaliser sur des mathématiques comme un système fermé mais sur l'activité et le processus de mathématisation. Faire les mathématiques plutôt que les voir. Ce courant de pensée s'apparente au courant socio-constructiviste dans lequel s'inscrit dorénavant l'enseignement des mathématiques. En 1978 puis en 1987, Treffers (*Dekker ; 1987 ; p. 322*) a précisé que, dans le cadre de l'enseignement, on devait être attentif à deux types de mathématisation, l'une étant « horizontale », l'autre « verticale ». Par « mathématisation horizontale », il faut comprendre l'ensemble des outils que l'élève utilise pour résoudre localement le problème qui lui est proposé et qui est issu de la vie courante. Au contraire la « mathématisation verticale » est le procédé de réorganisation des connaissances et de compétences à l'intérieur des mathématiques, comme la mise en place de raccourcis, la relation entre les concepts et les stratégies et l'application de ces découvertes. Mitchelmore et White (2004) préféreront le terme de « formalisation » à l'expression « mathématisation verticale ». Freudenthal a résumé cette conception par ces mots¹⁶ :

la mathématisation horizontale comprend le passage du monde réel au monde des symboles quand la mathématisation verticale renvoie aux déplacements à l'intérieur du monde des symboles. (*notre traduction*)

Freudenthal a aussi précisé que, en dépit des apparences, la distinction entre ces deux types de mathématisation n'est pas toujours très nette, et que ces deux formes étaient d'importances égales pour l'apprentissage. De plus, reprenant ainsi les idées des van Hiele, la mathématisation se fait par le passage selon différents niveaux de compréhension. van den Heuvel-Panhuizen¹⁷ (2001) décrit le passage vers un niveau de connaissances mathématiques plus formelles :

Quand les élèves travaillent sur des problèmes contextualisés, ils peuvent développer des outils mathématiques et une certaine compréhension. Dans un premier temps ils développent des stratégies étroitement liées au contexte. Puis certains aspects liés à la situation du contexte peuvent prendre un caractère plus général, ce qui signifie

¹⁶ Le texte original est:

“Horizontal mathematization involves going from the world of life into the world of symbols, while vertical mathematization means moving within the world of symbols”

¹⁷ Le texte original est:

“While working on context problems the students can develop mathematical tools and understanding. First, they develop strategies closely connected to the context. Later on, certain aspects of the context situation can become more general which means that the context can get more or less the character of a model, and as such give support for solving other but related problems. Eventually the models give the students access to more formal mathematical knowledge. In order to fulfill the bridging function between the informal and the formal level, models have to shift from a “model of” to a “model for”.

que le contexte prend alors plus ou moins un caractère de modèle et, en tant que tel il devient une aide pour la résolution d'autres problèmes qui lui sont apparentés. Finalement les différents modèles donnent aux étudiants accès à des connaissances mathématiques plus formelles. Pour assurer le franchissement d'un niveau informel à un niveau plus formel, les modèles doivent basculer de « modèles de » à « modèles pour ». (*notre traduction ; p.4*)

Si l'on reprend les idées de van Hiele¹⁸ (2002), il existerait « dans la plupart des disciplines différents niveaux de pensée : le niveau visuel, le niveau descriptif et le niveau théorique. Chaque niveau a son propre réseau de relations et son propre système de validations. Le passage d'un niveau à l'autre ne peut se faire par simple raisonnement ou réflexion de la part de l'élève. » (*p. 46*)

Au contraire celui-ci doit être accompagné dans son évolution par l'enseignant qui a la responsabilité de proposer des activités qui soient à la fois motivantes, accessibles c'est-à-dire issue du monde dans lequel vit l'élève, sources de discussion entre enseignant et élèves (« guided orientation »). Enfin ces activités doivent être suffisamment riches pour amener l'élève à un niveau supérieur de maîtrise des Mathématiques.

2.3. Une recherche sur la conception du cercle à la fin de l'école primaire.

Une expérience menée en 1982 par Artigue et Robinet, portait sur les élèves de deux classes de CE2 et de CM1 (7 à 10 ans) à propos des diverses conceptions du cercle qui pouvaient émerger selon les activités proposées. Les élèves n'ont pas fourni spontanément de preuves à ce qu'ils avançaient. Leurs convictions étaient faites très souvent au niveau du perçu et non pas du su. Il apparaît clairement que la conception globale du cercle par rapport à une conception ponctuelle reste prédominante même après l'expérimentation. A l'issue des diverses activités, il apparaît que, « confrontés à des situations adéquates, les enfants de cet âge sont capables de mettre en œuvre de façon opératoire diverses conceptions du cercle. [...] Mais, conceptions, éléments géométriques associés, relations et invariants sont étroitement dépendants des situations proposées. Il n'est pas question d'en parler dans l'absolu. » (*pp. 58-59*) Dans cet article les auteures précisent aussi : « Nous voulons souligner que la perception qui constitue une aide précieuse peut aussi, à certains moments, se révéler un obstacle à

¹⁸ “in most disciplines there are different levels of thinking: the visual level, the descriptive level and the theoretical level. Each level has its own network of relations and its own judgments of truth. The transition from one level to the next can not be realised by reasoning or reflecting.”

l'apprentissage visé, que c'est un facteur dont il importe de tenir compte dans la construction de séquences d'enseignement. » (p. 61) En effet l'enquête a eu lieu sur des enfants de 7 à 10 ans qui, pour certains d'entre eux, sont encore assez maladroits avec les outils comme le compas. Dans certains cas, en dépit d'une méthode que l'expert qualifierait d'exacte l'élève arrive à une conclusion erronée parce que sa perception se trouve en contradiction avec ce qu'il attend de sa démarche, quand un autre élève arrive à la bonne conclusion avec une démarche « incorrecte » mais des tracés suffisamment approximatifs pour en être satisfait.

2.4. Les travaux des chercheurs italiens sur l'entrée dans le monde des théorèmes (Boero et Mariotti)

De leur côté des équipes italiennes (Boero ; Mariotti ; Garuti ; Lemut ; 1996) ont montré que, face à certaines situations, des élèves de 8^{ème} année pouvaient produire des théorèmes (conjecture puis preuve), à savoir¹⁹

- Au cours de la production de la conjecture, l'élève travaille sur son énoncé au travers d'une intense activité d'argumentation qui peut se mêler à la justification du caractère plausible de ses choix ;
- Au cours de l'étape de l'établissement de la preuve de l'énoncé, l'élève reprend les idées ou les arguments qu'il a eus au cours de la phase précédente et les organise en un enchaînement logique qui constitue la preuve. (*notre traduction, p. 113*)

Diverses situations didactiques ont été l'objet d'analyses approfondies, en particulier le cas des ombres portées parallèlement par les rayons du soleil de plusieurs bâtons plantés dans le sol. Résoudre ce problème ouvert consiste à formuler une conjecture et à la prouver. L'hypothèse de recherche était que l'exploration dynamique de la situation-problème avait un rôle crucial à la fois dans l'élaboration des conjectures et de la preuve. Le déroulement des expériences s'est fait selon un protocole qui n'est pas étranger aux principes méthodologiques du mouvement RME :

¹⁹ La version originale est:

'- during the production of the conjecture, the student progressively works out his/her statement through an intensive argumentative activity functionally intermingling with the justification or the plausibility of his/her choices;

- during the subsequent statement proving stage, the student links up with this process in a coherent way, organising some of the justifications ("arguments") produced during the construction of the statement according to a logical chain."

- présentation du problème concret à l'aide de bâtons assez longs et fins plantés dans des planches de polystyrène et énoncé de la question : « On sait que deux bâtons verticaux plantés sur le sol horizontal ont des ombres qui sont toujours parallèles. On s'intéresse maintenant au parallélisme des ombres dans le cas d'un bâton vertical et d'un bâton oblique. Ces ombres peuvent-elles être parallèles ? Parfois ? Quand ? Pourquoi ? » ;
- production de conjectures par les élèves en individuel : les élèves ont commencé par manipuler les bâtons proposés ou ont utilisé leurs stylos, leurs règles, etc. et ont rédigé leur conjectures ;
- discussion des conjectures entre élèves et avec intervention de l'enseignant jusqu'à ce que des énoncés de conjectures correctes soient établies et reflètent les différentes approches du problèmes imaginées par les élèves ;
- réécriture des énoncés après discussion entre élèves et avec intervention de l'enseignant pour une présentation plus limpide et plus précise d'un point de vue linguistique ;
- préparation des preuves avec l'aide de l'enseignant : il s'agit en fait de faire le rapprochement entre la conjecture proposée par l'élève et l'un des énoncés définitifs, puis d'envisager un mode de production de preuve, l'expérience ou une accumulation d'expériences ne pouvant être acceptées comme des preuves satisfaisantes ;
- élaboration des preuves par groupes de deux élèves puis rédaction du texte de preuve.

Les chercheurs italiens ont constaté que le nombre d'élèves qui acceptaient de relever le défi était bien supérieur à l'habitude. Présenté de cette façon, plus de la moitié des élèves se sont appropriés le problème de géométrie projective par des moyens variés et ont commencé d'élaborer des conjectures en termes de conditions « si ..., alors ... » considérant ainsi que la conjecture n'était qu'une hypothèse concernant le phénomène des ombres, la preuve devant être établie à partir de faits dont on est certain. Nombreux sont les élèves qui ont utilisé un raisonnement déductif pour valider leurs résultats. Boreo reconnaît que si les preuves données par les élèves ne sont pas des démonstrations formelles de géométrie, la démarche qu'ils ont eue en a cependant toutes les caractéristiques et l'expérience est, à ce titre, riche d'enseignement.

Autrement dit un problème bien choisi peut amener, dans certaines conditions, les élèves à élaborer des preuves qui soient convaincantes et qui utilisent un raisonnement déductif. Les conditions étant d'une part que le contexte du problème accessible aux élèves, qu'il soit pris dans la vie courante ou simplement réaliste et que l'enseignant intervienne à des moments précis pour permettre à l'élève d'avancer dans sa démarche et dans son raisonnement.

2.5. Une recherche importante en France au passage de l'école primaire au collège.

Les expériences rapportées plus haut ont été menées sur des élèves à des niveaux de scolarité tels que le collège ou le lycée (excepté le cercle). Qu'en serait-il à l'école primaire ? C'est précisément à ce niveau que se sont portées les recherches de R. Berthelot et M.H. Salin dès 1992. En étudiant les démarches utilisées à la fois au collège et à l'école primaire, il est apparu que les conceptions de la géométrie et de son apprentissage à chacun des niveaux de scolarité pouvaient être tout à fait divergentes. En 2000 Berthelot et Salin considèrent que « l'enseignement de la géométrie nécessite l'organisation de [trois] problématiques associées à des rapports à l'espace très différents » identifiés ainsi :

Nous avons désigné par problématique de la géométrie les problèmes qui font spécifiquement appel aux connaissances permettant de maîtriser les questions de consistance théorique du discours sur l'espace, questions qui caractérisent l'émergence historique d'une géométrie de la démonstration chez les Grecs. (*p. 11*)

... par problématique de modélisation un type de rapport avec l'espace, finalisé en partie par l'efficacité dans l'espace sensible ou objectif, mais aussi par la recherche d'une solution dépassant le problème immédiat, qui soit communicable à d'autres, s'appuyant sur un modèle explicite dont la fonction doit pouvoir être éprouvée. [...] Cette modélisation d'un espace s'accompagne souvent la plupart du temps de représentations de cet espace dans l'espace d'une feuille de papier, représentations qui conservent une partie plus ou moins importante des propriétés de l'espace représenté (schéma, croquis, dessins, etc.) [...] cette géométrie est un outil de production d'actions et de déclarations validées par leur efficacité spatiale. (*pp. 11-12*)

... par « problématique pratique » le type de rapport caractéristique d'une famille de problèmes spatiaux non didactiques, particulièrement importants dans la vie de tous les jours, dans lesquels l'individu contrôle ses rapports spatiaux de manière immédiate, empirique et contingente. Les situations correspondantes sont essentiellement des situations d'action. Nous décrivons les solutions retenues par des modèles spontanés, comme si elles avaient été empruntées pour la plupart à la culture, et avaient été confortées par l'expérience. [...] Les

communications s'effectuent sur le même mode, résolues par les moyens les plus économiques en conceptualisation. La vérification du résultat obtenu se fait sous le mode de l'évidence et de l'instant. (p. 14)

Les diverses analyses menées par Berthelot et Salin conduisent aux propositions suivantes :

Différencier nettement auprès des élèves les problématiques spatio-géométrique et géométrique d'une part, la problématique pratique d'autre part, en mettant en valeur ce qui fait la spécificité de chacune d'entre elles.

[...]

Introduire dès l'école primaire les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux ;

Articuler la problématique de modélisation avec la problématique géométrique. (p.28)

En 2006, Salin distingue les enjeux des apprentissages de l'école élémentaire et du collège. Elle considère qu'en primaire, l'objectif de l'enseignement est de « fournir aux élèves les premiers outils nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux, en allant au-delà du « bricolage ». Ce qui me paraît visé, c'est qu'à l'issue de l'école primaire, les élèves aient compris que les connaissances géométriques ne servent pas seulement à répondre à des tests papier/crayon, mais aussi à pouvoir agir sur leur environnement. » Au collège, l'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie est la démonstration. Pour cela, les connaissances géométriques des élèves doivent évoluer d'une « géométrie perceptive » à une « géométrie instrumentée » (cf. Perrin ; 2004) et « les travaux conduits doivent viser d'une part à stabiliser les connaissances des élèves et d'autre part à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser » (extrait des instructions officielles). Les expériences menées par Salin ont toutes montré que l'enseignement dès le début de la 6^{ème} des comportements relatifs aux figures, spécifiques de la démonstration en géométrie, est contre-productif. Comme nous le verrons plus en détails dans le paragraphe 2.7., Salin décrit en d'autres termes le fait que si l'on change de paradigme géométrique en passant de l'école primaire au collège sans précaution particulière, sans préciser quelles sont les nouvelles règles du jeu en géométrie, les élèves courent le risque de ne pas faire le lien entre ce qu'ils ont compris de la géométrie à l'école primaire et ce que l'on attend d'eux au collège.

2.6. Le « su » et le « perçu »

Parzysz (1998) s'est intéressé à montrer le conflit qu'il peut y avoir chez un élève entre le « perçu » et le « su ». Le « perçu » est l'ensemble des informations qu'il organise à partir de ce qu'il lui est donné à voir alors que le « su » étant l'ensemble des connaissances qu'il évoque ou met en œuvre à la présentation de la situation géométrique et en lesquelles il a confiance. Pour cela Parzysz a mené une enquête auprès d'élèves de 1^{ère} à propos de la représentation qu'ils proposaient d'une pyramide régulière à base carrée. 37% des élèves ont donné un dessin dans lequel la base est dessinée à l'aide d'un parallélogramme ou éventuellement d'un losange, et le sommet se situe sur une droite « verticale » passant par le centre de la base. De cette enquête Parzysz tire plusieurs conclusions. Bien qu'il y ait une perte d'informations au passage de l'objet géométrique à son dessin, les élèves ont souvent l'illusion qu'ils peuvent en donner une représentation dans laquelle il n'y a aucune ambiguïté, grâce à un dessin suffisamment élaboré et proche de l'objet. En particulier, sur les 88 élèves ayant participé à la recherche, seulement 18 ont codé leurs dessins de manière à indiquer les angles droits ou les égalités de longueur. En fait seulement deux élèves l'ont fait de manière suffisamment précise pour pouvoir reconstruire la pyramide. Dans le même temps quand on propose à ces élèves de « lire » un dessin, ils ont tendance à considérer que les propriétés du dessin sont aussi les propriétés de l'objet lui-même. Il y a donc un écart sensible entre la lecture d'un dessin et son écriture c'est-à-dire sa réalisation par l'élève. En conséquence de quoi l'enseignant doit prendre en charge l'apprentissage des règles de dessin des figures de géométrie dans l'espace, ces règles n'étant pas des conventions plus ou moins « floues » mais des propriétés de géométrie projective.

De cette enquête on peut déduire que, faute d'un enseignement spécifique, les élèves peuvent accorder aux dessins des propriétés géométriques qu'ils ne représentent pas et imaginer donner à leurs dessins des caractéristiques géométriques qu'ils n'ont pas. La réalité de l'objet « pyramide », le dessin de l'objet, la figure géométrique de l'objet géométrique désigné par le même nom de pyramide affecté de ses propriétés, sont trois entités que l'élève ne peut maîtriser que par l'enseignement.

2.7. Des recherches basées sur les paradigmes

Nous reprenons ici plus en détails la théorie des paradigmes géométriques mentionnée dans notre cadre théorique.

En 1998, à partir des idées que Gonseth (1945) a développées dans *La géométrie et le problème de l'espace*, Houdement et Kuzniak ont défini trois types de géométrie pour lesquelles ils ont repris la terminologie de Gonseth : *géométrie naturelle* (GI), *géométrie axiomatique naturelle* (GII) et *géométrie axiomatique formaliste* (GIII). Grosso modo, GI est une géométrie concrète où il y a confusion de la géométrie et de la réalité ; c'est la géométrie de l'école primaire. GII est une géométrie donnant une schématisation de la réalité ; c'est sans doute celle du Collège. Enfin GIII est une géométrie dans laquelle la réalité et la géométrie sont indépendantes : c'est la géométrie de l'Université. Chacune de ces géométries est caractérisée par les rapports existant entre l'intuition, l'expérience et la déduction. Ces types de géométrie sont aussi appelés paradigmes dans le sens où reprenant les mots de Kuhn, Kuzniak rappelle qu' « un paradigme est composé d'une théorie qui guide l'observation, de méthodes et de critères de jugement qui permettent la production de nouvelles connaissances. Un paradigme est ainsi lié à une communauté : le travail du scientifique est guidé par le paradigme dans lequel il travaille, le paradigme est « ce que partagent ses membres [un groupe particulier de spécialistes] qui explique la relative unanimité des jugements professionnels » (Kuhn 1970 ; p. 248) ». Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur ce cadre théorique dans lequel l'enseignement de la géométrie peut s'inscrire.

De l'étude des manuels de l'école primaire menée par Houdement et Kuzniak, il ressort que la plupart des activités proposées relèvent de l'expérience quand l'intuition et la déduction ne sont que peu sollicitées. Le paradigme GI n'est donc pas exploité dans sa globalité dès l'école primaire. Certaines activités, très rares au demeurant, permettraient aux élèves d'approcher GII.

L'inventaire qu'Houdement et Kuzniak ont fait des sujets de concours à l'entrée à l'IUFM (2000) montre que les exercices peuvent se situer dans des paradigmes différents ou que l'on attend des étudiants une réponse relevant d'un paradigme particulier sans que cela soit dit au préalable.

Le cadre géométrique n'est donc pas clair. Le candidat est parfois orienté vers la géométrie I par les objets décrits, l'absence d'hypothèses écrites (on doit les lire sur le dessin) ou par le vocabulaire employé (« *Montrer que l'on peut mettre la pyramide dans le coin du cube.* »). Mais simultanément (ou dans d'autres sujets), l'insistance mise sur la démonstration oriente le candidat plutôt vers la géométrie II. Parfois, comme en géométrie dans l'espace, il lui serait bien utile de se placer en géométrie III, les démonstrations en géométrie II étant hors d'atteinte, faute d'une pratique de ce type de géométrie dans l'enseignement classique ; sa

seule ressource est alors de se placer dans le cadre de la géométrie
I. (p. 109)

Les recherches s'appuyant sur les paradigmes géométriques ont essentiellement été menées auprès d'étudiants de PE1 qui, s'ils ont tous suivi un cursus de niveau universitaire, arrivent à l'IUFM avec des connaissances mathématiques souvent très fragiles ou parcellaires.

Ainsi Parzysz (2003) a enquêté auprès d'étudiants de PE1, et utilisant une numérotation différente des trois paradigmes géométriques, il est arrivé aux conclusions suivantes : nombre d'entre eux ne distinguent pas clairement G1 et G2 et qu'en particulier « ils ne font pas de distinction entre les validations théoriques associées à G2 et les validations perceptives de G1. » (Parzysz et Jore ; 2008 ; p.12) De plus, même « chez un PE1 qui a conscience de travailler en G2, l'évidence de la figure peut provoquer une contamination du su par le perçu. » (Parzysz et Jore ; 2008 ; pp.12-13)

Jore (2006) a étudié de plus près les paradigmes dans lesquels les étudiants pouvaient fonctionner. Elle a constaté que le même étudiant pouvait fonctionner dans deux paradigmes différents en même temps ou dans des situations distinctes liées par exemple au contrat didactique.

« [Le] tableau [*croisant les paradigmes dans lesquels les étudiants pensent fonctionner et les paradigmes dans lesquels ils fonctionnent réellement*] met en évidence la lucidité de certains étudiants. Ceux qui pensent se situer dans G1 ont en général raison (à 90%), tandis que ceux qui se sont situés dans G2 en sont en général conscients (à 93%). De même, ceux qui pensent se situer dans G1 et G2 se situent effectivement dans G1 et G2. Par contre, 38% de ceux qui sont persuadés de se situer dans G2 se situent en fait dans G1 : ils ont bien pris en compte le contrat, mais leurs connaissances et compétences ne leur permettent pas de rester dans G2. Ils passent dans G1, mais ne s'en rendent pas compte ! »

Ce constat a conduit Jore à parler de « pseudo paradigme » local et personnel, qui relève à la fois de G1 et de G2 dans les cas où les étudiants changent de paradigme à l'intérieur d'une même tâche. L' "évidence de la figure", le manque de connaissances et de compétences dans G2, l'automatisation de procédures de construction qui les vide de sens, restent autant d'éléments déterminants dans le fait qu'ils ne sont pas à même de travailler dans G2 lorsque la situation l'exige (en particulier dans la préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles)

Au cours de cette même recherche, Jore a montré que le travail sur dessin à main levée était une situation favorisant le passage en G2 : le dessin à main levée ne peut être un objet réel sur lequel on peut travailler, il n'en est qu'un représentant.

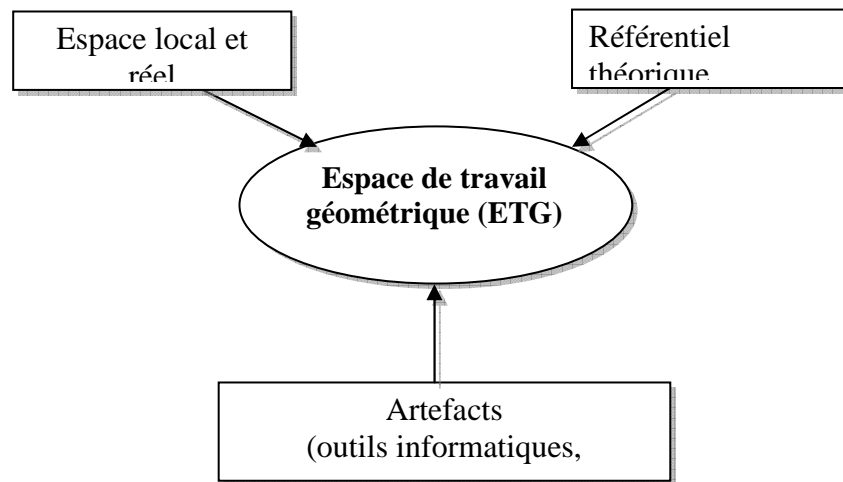
Dans une enquête menée auprès de quelques élèves de 3^{ème} et des étudiants de PE1, Kuzniak et Rauscher ont découvert que « tant pour certains étudiants que pour certains élèves de 3^{ème}, un socle solide d'expérience de Géométrie I reste à construire. » (Kuzniak & Rauscher ; 2004 ; p. 239) Les réponses aux exercices donnés par les sujets traduisent les connaissances qu'ils ont acquises mais les propriétés des figures ne sont pas ordonnées ni organisées en un corpus de propriétés cohérentes. Très souvent ils utilisent leurs connaissances, relevant de Géométrie II, pour fonctionner en Géométrie I. « Il faut revenir sur un « vernis » de connaissances de Géométrie II. Il faut alors reconstruire un corpus de connaissances et d'expériences de Géométrie I pour entrer ensuite dans une Géométrie II avec un bagage assuré » (p. 242). Kuzniak et Rauscher (2004) s'interrogent alors

sur la réussite du passage d'une Géométrie I à une Géométrie II dans le cadre des efforts d'enseignement au collège et au lycée. En effet pour ces étudiants, « que reste-t-il quand ils ont tout oublié » ? Le dessin en géométrie semble finalement plus ou moins considéré comme l'objet réel de leurs investigations et questionnements ! Cela semble paradoxal, quand on sait la « rigueur » que les enseignants de collège et de lycée déclarent essayer de transmettre à leurs élèves. (p. 242)

Les relations que les élèves et les étudiants entretiennent avec les diverses géométries, les différents supports graphiques et l'espace réel ont conduit Kuzniak (2004) à considérer que l'activité géométrique se déploie dans un espace particulier : l'espace de travail géométrique. Plus précisément Kuzniak (2005) définit l'espace de travail géométrique en ces termes :

... nous avons appelé espace de travail géométrique, le lieu organisé par le géomètre pour mettre en réseau les trois pôles que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique qui dépendra de la géométrie choisie. L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et donner du sens aux trois pôles que nous venons de dégager. (p. 221)

Le schéma ci-dessous résume les relations entre les trois composantes de l'espace de travail géométrique.



Cette organisation dépend de la géométrie de référence mais aussi de l'utilisateur. On peut ainsi considérer que le géomètre expert dispose d'un espace de travail géométrique « idoine » alors que l'élève ou l'étudiant fonctionnent dans un espace de travail géométrique « personnel » qui peut lui-même être inadapté à l'attente du professeur. On ne saurait non plus négliger l'espace de travail géométrique « institutionnel » (Houdement ; 2007) lié aux programmes et visé par le professeur.

Le concept d'espace de travail géométrique permet de prendre en compte non seulement les référentiels théoriques que sont les paradigmes géométriques mais aussi les objets sur lesquels l'individu travaille ainsi que les outils ou artefacts mis en œuvre.

Dans le contexte de notre recherche il serait sans doute trop ambitieux de prendre en considération les trois pôles de l'espace de travail et leur relation éventuelle avec les niveaux de van Hiele. Nous nous concentrerons dans un premier temps sur les paradigmes dans lesquels les élèves de CM2 ou de 6^{ème} peuvent fonctionner en liaison avec le niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent, en gardant présente à l'esprit que les objets ou les artefacts utilisés peuvent dépendre eux aussi du niveau de van Hiele atteint.

Mais les enseignants ont-ils conscience qu'ils demandent aux élèves des changements de paradigmes ? Nous avons vu que les futurs professeurs d'école avaient une notion très floue du paradigme dans lequel ils fonctionnent eux-mêmes donc on peut penser que leur enseignement reflètera cette ambiguïté. A l'opposé, les enseignants de collège et de lycée ont

une formation mathématique plus solide et on peut penser qu'ils fonctionnent dans le paradigme le plus adapté à la tâche qui leur est proposée, imaginant sans doute un peu trop naïvement que les élèves feront de même. Mais comment un élève de CM2 qui n'a rencontré que des activités de Géométrie 1 limitées pour la plupart à l'expérience dans ce paradigme peut-il tout à coup passer à la déduction en Géométrie 2 s'il n'est pas accompagné par son enseignant ?

2.8. The figural concept de Fischbein

Dans son article « The Theory of Figural Concept » publié en 1993 et dont nous donnons ici une traduction, Fischbein propose cinq aspects d'une figure géométrique²⁰.

Les objets matériels, qu'ils soient des solides ou des dessins, ne sont que des modèles matérialisés des entités mentales que gère le mathématicien.

Deuxièmement c'est seulement de manière conceptuelle que l'on peut considérer que des entités géométriques sont dotées d'une perfection absolue : droites, cercles, carrés, cubes, etc..

Troisièmement, ces mêmes entités géométriques n'ont pas d'authentiques correspondants matériels. Les points, les droites, les plans n'existent pas, ne peuvent exister dans la réalité. [...] Ce ne sont que des constructions mentales qui ne doivent avoir aucune réalité substantielle quelconque.

Quatrièmement, comme tout concept, toutes ces constructions sont des représentations *générales*, et ne sont jamais des copies mentales d'objets particuliers ou concrets. [...] L'idéalité, l'abstraction, la perfection absolue, l'universalité sont des propriétés qui ont du sens dans le domaine des concepts.

²⁰ The material objects – solids or drawings – are only materialized models of the mental entities with which the mathematician deals.

Secondly, only in a conceptual sense one may consider the absolute perfection of geometrical entities: straight lines, circles, squares, cubes, etc.

Thirdly, these geometrical entities do not have genuine material correspondents. Points, lines, planes do not exist, cannot exist in reality. [...] These also are mere mental constructs which are not supposed to possess any substantial reality whatsoever.

Fourth, all these constructs are *general* representations like every concept, and never mental copies of particular, concrete objects. [...] Ideality, abstractness, absolute perfection, universality are properties which make sense in the domain of concepts.

But there is a fifth property which characterizes the geometrical figures and which, also, is related to their conceptual nature. The properties of geometrical figures are imposed by, or derived from definitions in the realm of a certain axiomatic system. From this point of view, also, a geometrical figure has a conceptual nature. A square is not an image drawn on a sheet of paper. It is a shape controlled by its definition (though it may be inspired by a real object). A square is a rectangle having equal sides.

[...]

A geometrical figure may, then, be described as having *intrinsically* conceptual properties. Nevertheless, a geometrical figure is *not* a mere concept. It is an image, a visual image.

Mais il y a une cinquième propriété qui caractérise les figures géométriques et qui est aussi liée à leur nature conceptuelle. Les propriétés des figures géométriques sont imposées pour des définitions ou en découlent à l'intérieur d'un système axiomatique. De ce point de vue aussi, une figure géométrique a une nature conceptuelle. Un carré n'est pas une image dessinée sur une feuille de papier. C'est une forme gérée par sa définition (même si elle a été inspirée par un objet réel). Un carré est un rectangle qui a ses côtés de la même longueur.

[...]

On peut alors décrire une figure géométrique en disant qu'elle a *intrinsèquement* des propriétés conceptuelles. Néanmoins, une figure géométrique n'est *pas* qu'un simple concept. C'est une image, une image visuelle. (*notre traduction, p. 141*)

A propos d'un exemple Fischbein évoque le vieil adage « raisonner juste sur des figures fausses » en ces mots²¹,

Nous n'avons pas d'effort à faire pour « polir » la figure, pour la purifier – mentalement – de ses irrégularités pour qu'elle devienne une composante active et intégrante d'un raisonnement purement logique.

[...]

Le fait que l'on saute directement à la conclusion (...) conforte l'idée que la figure considérée n'est pas *depuis le début*, une image ordinaire mais une structure déjà logiquement contrôlée. *La fusion entre concept et figure tend à être, dans ce cas, complète.*

Les objets de recherche et de manipulation dans le raisonnement géométrique sont alors des entités mentales que nous appelons *concepts figuraux*, qui reflètent les propriétés spatiales (forme, position, grandeur) et, en même temps, possèdent les qualités conceptuelles comme l'idéalité, l'abstraction, la généralité, la perfection. (*notre traduction, pp. 142-143*)

Plus loin, Fischbein reprend l'idée « souvent reprise dans la littérature, qui veut qu'un raisonnement productif, qu'il soit dans la vie courante ou dans un contexte scientifique, inclut

²¹ Suite du texte original:

We do not have to make any effort in order to “polish” the figure The process of idealizing the figure takes place automatically so as to become an integral, active component of a strict logical reasoning.

The fact that we jump to the conclusion suddenly (...) supports the idea that the considered figure is, *from the beginning*, not an ordinary image but an already logically controlled structure. *The fusion between concept and figure tends to be, in this case, complete.*

The object of investigation and manipulation in geometrical reasoning are then mental entities, called by us *figural concepts*, which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities – like ideality, abstractness, generality, perfection.

une interaction permanente entre des dynamiques conceptuelles et imaginées²² (p. 144). Mais il continue par ces mots^{23 24} :

Nous nous donnons comme postulat que, dans le cas particulier du raisonnement géométrique, on a affaire à un troisième type d'objets mentaux qui possèdent simultanément des propriétés conceptuelles et figurales.

La raison de cette symbiose profonde entre les contraintes symboliques, analytiques et les propriétés figurales dans le raisonnement géométrique est qu'en fait nous fonctionnons dans *des systèmes axiomatiques*. Nous devons alors faire la distinction entre une validité formelle, mathématique et une validité empirique. Dans la mesure où une figure géométrique est considérée à l'intérieur d'une certaine structure axiomatique, ses propriétés et les théorèmes correspondants sont dictés directement ou indirectement par des définitions implicites ou explicites. La recherche de ces propriétés se limite à un effort intellectuel dans le cadre d'une validité de type formel. Si nous nous intéressons à la validité empirique des propriétés ou des théorèmes, les choses changent radicalement et nous devons confronter respectivement les affirmations mathématiques et les faits empiriques.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la conceptualisation globale des images spatiales dans le raisonnement géométrique représente, en fait, un phénomène idéal. La composante figurale est généralement influencée par des « forces gestaltiques figurales », et les composantes conceptuelles peuvent être assorties de raisonnements fallacieux. Avec l'âge et à cause de l'apprentissage [...], la fusion entre les deux facettes figurale et conceptuelle tend à s'améliorer.

[...]

²² The essential idea, repeatedly mentioned in the recent literature, is, then, that productive reasoning in both, every day life and scientific situations includes a permanent interplay between conceptual and imaginative dynamics.

²³ *What we assume is that, in the special case of geometrical reasoning, one has to do with a third type of mental objects which simultaneously possess both conceptual and figural properties*

²⁴ The reason for this profound symbiosis between symbolic, analytical constraints and figural properties in geometrical reasoning is that we deal in fact with *axiomatic systems*. We have then, to distinguish between formal, mathematical validity and empirical validity. As far as a geometrical figure is considered in the realm of a certain axiomatic structure, its properties and the corresponding theorems are dictated directly or indirectly by implicit or explicit definitions. The investigation of these properties is confined only to an intellectual endeavour, and we deal with a formal type of validity. If we are interested in the empirical validity of the properties or theorems, things change fundamentally and one has to confront the respective mathematical assertions with the empirical facts.

As we have already mentioned, the total conceptualization of spatial images in geometrical reasoning represents, in fact, an ideal phenomenon. The figural component is usually influenced by figural-Gestalt forces and the conceptual components may be affected by logical fallacies. With age, and as an effect of instruction – as we will see – the fusion between the figural and the conceptual facets tend to improve.”

« Il faut alors considérer trois entités mentales quand on parle de figures géométriques : la définition, l'image (basée sur l'expérience sensorielle perceptive, comme l'image d'un dessin) et le concept figural. Le concept figural est une réalité mentale, construite par le raisonnement mathématique dans le domaine de la géométrie. Il est dénué de toute propriété sensorielle concrète (comme la couleur, le poids, la densité etc.) mais témoigne des propriétés figurales.²⁵ (*notre traduction ; p. 144-145*)

Fischbein définit donc le rôle de la figure géométrique en ce qu'elle est la représentation d'un concept qui n'existe que dans le cadre d'un système axiomatique. Mais on ne saurait négliger que, pour un élève de l'école primaire, le dessin d'une figure géométrique a un tout autre sens puisqu'à ce stade de sa scolarité, il ne fonctionne pas encore dans un système axiomatique clairement défini.

D'ailleurs, à titre d'exemple, Fischbein a enquêté auprès d'élèves sur la « taille » et le « poids » du point d'intersection de deux droites et de quatre droites concourantes. Il faut attendre la 6^{ème} année de scolarité pour qu'apparaisse le concept figural en précisant que le point d'intersection des droites, peu importe leur nombre, n'a ni taille ni poids. Auparavant les élèves répondent que le point d'intersection des quatre droites est plus gros, plus lourd que le point d'intersection de deux droites mais qu'ils peuvent avoir la même forme, être rond. Ce n'est pas avant l'âge de 11 ans qu'un enfant est en mesure de comprendre que les deux points d'intersection représentent deux entités géométriques sans dimension. Mais le même enfant peut se contredire si on lui propose les mêmes questions à propos de points d'intersection de droites dessinées à la craie sur un tableau et d'autres tracées à la règle sur une feuille de papier. Les points d'intersection du tableau peuvent devenir plus gros, plus lourds et d'une forme différente. A ce stade de la scolarité le concept figural est donc seulement émergent et reste encore très fragile. L'élève de primaire a une conception figurale de la géométrie (le dessin étant l'objet d'étude) et il devra passer à une conception abstraite axiomatisée en entrant au collège.

²⁵ One has, then, to consider three categories of mental entities when referring to geometrical figures: the definition, the image (based on the perceptive-sensorial experience, like the image of a drawing) and the figural concept. The figural concept is a mental reality, it is the construct handled by mathematical reasoning in the domain of geometry. It is devoid of any concrete-sensorial properties (like colour, weight, density, etc.) but displays figural properties.”

Les concepts géométriques ont une nature duelle, à la fois figurale et conceptuelle. Dans leur aspect figural, ils renvoient à l'espace. Leur aspect conceptuel traduit le fait qu'ils sont de nature abstraite et théorique et sont définis à l'intérieur d'un système axiomatique. A partir d'une telle interprétation, le raisonnement en géométrie peut être caractérisé par une relation dialectique entre ces deux aspects. En principe ils devraient interagir en totale harmonie. Très souvent il n'en est rien et des expériences l'ont montré dans le cadre de l'école. Ainsi M.A. Mariotti (1997) a montré que des élèves de 7^{ème} année n'étaient pas capables d'arriver à une classification inclusive des prismes droits, en particulier le parallélépipède rectangle et le cube sans l'intervention de l'enseignante. Les différences spatiales entre les différents solides restent déterminantes dans la description que les élèves peuvent donner même si, par ailleurs, ils acceptent qu'un cube soit un solide ayant six faces parallèles deux à deux, superposables et de forme rectangulaire. Cette harmonisation entre les aspects figuraux et conceptuels des objets géométriques est rarement atteinte « spontanément ». Mais elle n'apparaît, chez certains élèves, qu'après apprentissage et intervention de l'enseignant.

Fischbein reprend Inhelder et Piaget (1966) comme si les deux pédagogues suisses avaient eu aussi l'intuition de la fusion totale entre les aspects conceptuels et figuraux dans le cas particulier de la pensée en géométrie.

dans le cas spécial des opérations géométriques dont la fonction est précisément de décrire les figures de l'espace et leur transformations, il y a alors homogénéité entre le symbolisé constitué par ces opérations spatiales et le symbolisant imagé et de ce fait lui aussi spatial : d'où la situation privilégiée de l'intuition géométrique, dont la double nature, à la fois opératoire et imagée, aboutit à une synthèse plus intime qu'en tout autre domaine. [...] L'intuition géométrique ne parvient à cette synthèse adéquate que par subordination de ses éléments imagés à son noyau opératoire et cette subordination suppose un développement. (pp. 394 – 395)

Autrement dit les caractéristiques visuelles des images mentales que l'on met en évidence par observation de la figure sont contrôlées par les propriétés mathématiques connues par ailleurs, que ce soit dans le cadre d'une théorie axiomatisée ou non ;

Une des conclusions de Fischbein est que

Tout ceci amène à la conclusion suivante : *l'évolution dans la construction des concepts figuraux dans l'esprit d'un élève ne doit pas être considérée comme un effet spontané des cours traditionnels de géométrie. Elle devrait être une préoccupation principale, systématique et continue de la part du professeur.*²⁶ (notre traduction ; p. 156)

La notion de concept figural telle que défini par Fischbein ne nous semble pas en contradiction avec les propos rapportés précédemment : la géométrie dans laquelle l'élève doit fonctionner en fin de scolarité obligatoire est une géométrie axiomatique mais l'évolution dans les différents concepts ou la connaissance de la géométrie ne se fait pas spontanément chez l'enfant. Le rôle de l'enseignant est donc déterminant et l'on peut imaginer que selon les activités proposées cette évolution soit très variable. Elles peuvent tout aussi bien maintenir un élève à son niveau de compétences déjà acquises ou tout au contraire l'amener à fonctionner par théorèmes-élèves ou théorèmes en acte qui sont autant de comportements assez difficiles à corriger.

2.9. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. (Duval)

Sans jamais se référer à Fischbein, Duval aborde, à la même période (1994), le fonctionnement d'une figure dans une démarche géométrique en termes d'appréhensions d'une de celle-ci. C'est ainsi qu'il identifie quatre type d'appréhensions : l'appréhension perceptive, l'appréhension séquentielle, l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive.

Nous n'avons pas trouvé une définition explicite du mot « figure » dans les écrits de Duval. La seule phrase dans laquelle il s'exprime à ce sujet est la suivante :

à quoi sert une figure dans une démarche géométrique ? Pour justifier cet emploi on explique qu'une figure donne une représentation d'une situation plus facile à appréhender que sa présentation dans un énoncé

26

Le texte original est:

“All this leads to the conclusion that *the process of building figural concepts in the student's mind should not be considered a spontaneous effect of usual geometry courses.*” “It should constitute a continuous, systematic and main preoccupation of the teacher.”.

verbal : elle fait « *apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal* (Bessot 1983, p. 35)

La figure est donc le dessin d'une situation ; elle représente des objets théoriques. Il semble que Duval n'envisage pas la figure comme un élève de Primaire peut le faire c'est-à-dire en tant que dessin-objet. Mais comme nous allons le voir, la situation n'est pas aussi tranchée.

En effet, Duval (1994) considère que la première des appréhensions d'une figure est « **l'appréhension perceptive** qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan soit dans l'espace. » (p. 123) Duval précise sa description par ces mots : « Ce que montre une figure au premier coup d'œil. Nous pouvons ensuite y discriminer des sous-figures qui ne coïncident pas avec nécessairement avec les unités figurales prises en compte dans la construction de la figure. » (p. 125) Donc on peut considérer que les élèves qui reconnaissent un rectangle en disant « parce que ça se voit » ont une appréhension perceptive de la figure. On est alors au niveau d'identification-visualisation de van Hiele.

Duval considère ensuite une « **appréhension séquentielle** » dans laquelle, « il y a un ordre de prise en compte des unités figurales qui entrent dans la construction d'une figure. Cet ordre dépend des propriétés mathématiques à représenter et des contraintes techniques des instruments utilisés (logiciels, règle et compas ...). » (p. 125) Dans le cadre d'une telle appréhension, « les actions sur le représentant et les résultats constatés correspondent à la situation mathématique représentée. » (p. 125) Ici, le dessin n'est pas un objet idéal mais le représentant d'une situation géométriques donc il est porteur d'un certain nombre de propriétés. La figure devient alors la représentation de concepts même si on se limite ici à expliciter l'ordre dans lequel elle peut être construite. On est entre la description et la déduction ; des inférences peuvent être faites entre les différents éléments de la figure. Duval, citant Bresson (1987, p. 936), précise par ailleurs que « *la fonction de l'appréhension séquentielle d'une figure est celle de modèle et cette fonction apparaît nettement avec certains logiciels de construction : les actions que l'on fait sur le représentant permettent par leur résultat « de modifier la connaissance que l'on a de l'objet représenté. » » (p.126). En termes de paradigmes géométriques on peut dire que l'élève qui a une appréhension séquentielle d'une figure fonctionne dans une géométrie au moins proto-axiomatique.*

Dans le cadre de l' « **appréhension opératoire**, une figure peut être modifiée de différentes manières, matériellement ou mentalement » (p. 125). Les modifications que l'on peut alors faire sur cette figure montrent l'idée d'une solution ou d'une démonstration mais ne se sont pas suffisantes pour le mathématicien expert, en particulier. Selon Duval, on distingue trois grands types de modification : « les modifications méréologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombinaison en une autre figure, les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle. » (p. 126) Ici vraisemblablement la figure peut, selon le niveau de compétences de l'élève, être tout autant un dessin-objet qu'un dessin-représentant.

Enfin dans l' « **appréhension discursive** » les propriétés mathématiques ne peuvent pas être déterminées par une simple constatation visuelle : certaines doivent être données par une indication discursive : dénomination (« Soit un ... »), hypothèse « L'appréhension discursive d'une figure correspond à une explicitation des autres propriétés [de celle-ci] que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. La fonction épistémologique de cette appréhension est la démonstration. » (p. 124-126)

Rejoignant l'idée du concept figural de Fischbein, Duval considère que « *la manière mathématique de regarder une figure fait intervenir simultanément ou alternativement, deux ou trois de ces quatre appréhensions possibles.* » (Duval ; 1994 ; p. 122) et que seul un apprentissage spécifique de chacune de ces appréhensions permet d'accéder à « *la manière mathématique de regarder une figure* ». Selon Duval, la figure doit être appréhendée de plusieurs manières et ce sont ces différentes appréhensions qui rendront l'élève capable d'élaborer la démonstration qui correspond à la réponse attendue par l'enseignant. On peut regretter que Duval n'ait pas communiqué avec Fischbein pour éclaircir le caractère conceptuel de la figure dans les diverses appréhensions qu'il propose. On peut imaginer qu'il est émergent dans le cadre des appréhensions séquentielle ou opératoires. Mais on peut tout à fait imaginer un élève en train de découper un parallélogramme pour le transformer en un rectangle de même aire. Une telle démarche sera-t-elle suffisante pour amener l'élève au concept d'aire du parallélogramme ? On peut se poser la question.

Dans son livre « Sémiosis et pensée humaine », Duval (1995) précise dans le chapitre IV « Figures géométriques et discours mathématique » la relation entre la figure représentant la situation géométrique à étudier et le texte de démonstration qui traduit la résolution du problème et que l'élève devra fournir.

Pour cela Duval fait la distinction entre unité figurale et sous-figure :

Les **unités figurales élémentaires** sont les formes de base dans lesquelles toutes les figures peuvent être analysées. Les *sous-figures* sont le résultat d'un partage de la figure qui dépend des nécessités d'un problème posé ; elles peuvent consister en une unité figurale ou en une combinaison d'unités.

Il est également important de ne pas confondre la **figure de départ** et la **transformation de cette figure** par l'application de traitements figuraux relevant d'un des trois types de modification (méréologique, optique, positionnel) à des fins heuristiques. La figure de départ est la figure que l'on peut construire en s'en tenant aux seules données de l'énoncé d'un problème soit à celles de la formulation d'une proposition à démontrer. Parfois dans la présentation de la démonstration, c'est la figure transformée qui est donnée comme figure accompagnant le texte. (*chapitre V ; note de bas de page ; 185*)

Duval donne la liste exhaustive des unités figurales en précisant qu'elles sont

- de dimension 0 : le point
- de dimension 1 : droite ou partie de droite ; arc, courbe
- de dimension 2 angle, croix ; triangle, carré rectangle ; courbe avec point double, point de rebroussement ; rond, ovale.

De plus « une figure géométrique est toujours une configuration d'au moins deux unités figurales. » *p. 178*) L'expérience a montré que les élèves avaient plus facilité à résoudre un problème quand il y avait congruence entre les unités figurales présentées dans l'énoncé et celles qui sont nécessaires au traitement de la situation.

3. Rappels sur les programmes

Les programmes officiels sur lesquels s'appuie notre recherche sont ceux de 2002 pour le Primaire (Cycle 3) et de 1995 pour le Collège. Compte tenu de l'objet de cette étude nous nous limiterons ici à rappeler les éléments des programmes concernant la géométrie et en particulier la géométrie plane.

3.1. Programmes du Primaire (cycle 3)

Relations et propriétés ; alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale

Compétences :	Commentaires :
- Vérifier, à l'aide de la règle, que des points sont alignés.	<i>Les relations et propriétés évoquées dans cette rubrique doivent être utilisées dans des activités de résolution de problèmes, situées dans différents espaces : espace ordinaire, feuille de papier, écran d'ordinateur. La perception d'un alignement de plusieurs points dans une figure complexe permet de tracer la droite correspondante et de mettre en évidence une propriété de cette figure.</i>
- Vérifier, à l'aide du compas ou d'un instrument de mesure, que des segments ont la même longueur.	<i>La perception d'un alignement de plusieurs points dans une figure complexe permet de tracer la droite correspondante et de mettre en évidence une propriété de cette figure.</i>
- Vérifier, à l'aide de l'équerre, que deux droites sont perpendiculaires.	<i>Le compas doit être un instrument privilégié pour comparer ou reporter des longueurs, chaque fois qu'un mesurage n'est pas indispensable.</i>
- Vérifier, à l'aide de l'équerre et de la règle, que deux droites sont parallèles.	<i>Les expressions « droites perpendiculaires » et « droites se coupant à angle droit » sont considérées comme synonymes.</i>
- Tracer, avec une règle et un compas, un segment de même longueur qu'un segment donné.	...
- Tracer, à main levée, une droite perpendiculaire ou parallèle à une droite donnée.	<i>Ces relations ne doivent pas être figées dans des représentations stéréotypées liées aux positions verticales et horizontales ou parallèles aux bords de la feuille de papier. Par ailleurs les élèves sont confrontés à des cas où, pour décider, il est nécessaire de prolonger les traits qui représentent les droites.</i>
- Tracer, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné (sur la droite ou hors de la droite).	<i>Le travail sur droites perpendiculaires et droites parallèles donne lieu à une synthèse, à partir d'une réflexion sur les positions relatives de deux droites : droites non sécantes (parallèles), droites sécantes en prenant en considération leur inclinaison relative</i>

<p>- Tracer à l'aide de l'équerre et de la règle une parallèle à une droite donnée.</p>	<p>(notion d'angle) et notamment cas des droites qui se coupent en faisant quatre angles égaux (perpendiculaires).</p> <p>Pour les droites parallèles, la propriété d'écart constant entre ces droites sera mise en évidence et utilisée pour les activités de reconnaissance ou de construction.</p> <p>L'utilisation de tracés à main levée joue un rôle important dans la mise en place d'images mentales relatives au parallélisme et à la perpendicularité, de même que la recherche de procédés pour obtenir des droites perpendiculaires ou parallèles par pliage d'une feuille de papier.</p>
---	---

Figures planes : triangle, triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral ou régulier, carré, rectangle, losange, cercle.

Compétences :	Commentaire :
<p>- Reconnaître de manière perceptive une figure plane, en donner le nom.</p>	<p>Les compétences décrites dans cette rubrique sont relative à une liste limitée de figures, mais les activités qui permettent de les construire concernent d'autres figures, notamment d'autres quadrilatères particuliers tels que le trapèze, le « cerf-volant », le parallélogramme.</p> <p>Les représentations fréquentes de certaines figures peuvent être un obstacle à leur reconnaissance dans d'autres configurations : carré ou rectangle dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille, losange « posé sur une pointe », etc. Il est donc important de ne pas les privilégier.</p>
<p>- Identifier, de manière perceptive, une figure simple dans une configuration plus complexe.</p> <p>- Vérifier l'existence d'une figure simple dans une configuration complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments</p> <p>- Décomposer une figure en figures plus simples.</p>	<p>L'identification d'une figure peut être faite :</p> <ul style="list-style-type: none"> - globalement (« à l'œil, il me semble que c'est un carré ») ; - par un repérage perceptif de certaines propriétés : parallélisme, présence d'angles droits, égalité de longueur de segments. <p>Le recours aux instruments vient valider les hypothèses faites sur des propriétés supposées.</p> <p>Les triangles et quadrilatères particuliers figurant au programme sont reconnus à partir de propriétés relatives aux longueurs des côtés, au parallélisme ou à la perpendicularité. Des propriétés relatives aux diagonales des quadrilatères particuliers peuvent être découvertes lors de la résolution de problèmes mais aucune exigence de compétence ne saurait en découler.</p> <p>La capacité à isoler une figure dans une figure complexe</p>

<p>- Tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir de la donnée d'un modèle, soit à partir d'une description, d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée.</p> <p>- Décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque.</p> <p>- Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : triangle, triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, carré, rectangle, losange, cercle ; sommet, côté ; centre, rayon et diamètre pour le cercle.</p>	<p>joue un rôle important en géométrie, au collège. Les élèves y seront donc entraînés dès le cycle 3.</p> <p>Selon le problème posé, on peut préciser l'emploi d'instruments de dessin précis ou demander aux élèves de choisir l'instrument le mieux adapté : papier calque, papier quadrillé ou pointé, règle, équerre, compas, gabarit (notamment pour les angles). Pour le carré et le rectangle, les élèves sont confrontés à des exercices de construction à partir de la donnée d'un ou deux côtés tracés ou à partir de la seule donnée des longueurs des côtés. La construction d'un triangle à l'aide du compas, à partir de la donnée des longueurs des trois côtés, n'est pas une compétence exigible à la fin du cycle 3. Cependant un premier travail peut être conduit avec les élèves à ce sujet, par exemple en posant les problèmes suivants : placer le plus rapidement possible de points situés à une distance donnée d'un point donné, chercher à localiser des points dont les distances respectives à deux points donnés sont connues.</p> <p>...</p> <p>En fin de cycle, des tracés à main levée accompagnés de données codées (mesures, symboles d'égalités de segments, d'angles droits) peuvent être proposés par l'enseignant, en vue de faire construire une figure, à condition que les codes utilisés aient acquis une signification pour les élèves.</p> <p>La capacité à décrire une figure est vérifiée par l'élaboration d'un message contenant toutes les informations nécessaires à la reproduction de la figure. Selon l'activité proposée, deux types de description peuvent être utilisés :</p> <ul style="list-style-type: none"> - énoncé de propriétés que vérifie la figure choisie ; - énoncé de la suite des étapes qui permettent de construire la figure (programme de construction). <p>Dans certains cas, en fin de cycle 3, un schéma à main levée accompagné de codes peut également être utilisé par les élèves.</p> <p>Lors des activités de description de figures, les élèves ont l'occasion d'utiliser un vocabulaire plus important (polygone, quadrilatères, diagonale, côtés consécutifs ou côtés opposés pour les quadrilatères...), mais sa maîtrise complète n'est pas exigée.</p>
--	---

Dans le chapitre intitulé « Eléments d'aide à la programmation », on peut voir que les compétences relevant de la reconnaissance des figures de manière perceptive et de leur tracé sont prévues dès la première année du cycle 3 (CE2). Elles sont reprises les années suivantes. C'est en deuxième année de cycle 3 (CM1) que les triangles particuliers sont introduits ainsi que la décomposition d'une figure en figures plus simples et la description des figures. Par expérience nous savons que la plupart des figures données en Primaire sont des dessins en vraie grandeur ou des tracés à la règle et très rares sont les figures données sous forme de schémas codés. Donc les élèves arrivant en 6^{ème} devraient être en mesure d'identifier, de construire et de donner la liste des propriétés d'une figure, que celle-ci soit une figure simple ou une sous-figure d'une figure plus complexe. Dans le tracé des figures à partir d'un modèle, le programme ne précise pas si le modèle est en vraie grandeur ou réduit. Le codage des figures est abordé avec prudence dans la mesure où celui-ci ne peut se faire qu' « à condition que les codes utilisés aient acquis une signification pour les élèves ». (p. 33)

L'usage à bon escient du vocabulaire n'est préconisé qu' « en fonction des activités travaillées ».

Jamais la distinction n'est faite entre la définition et les propriétés d'une figure dans le cadre d'un système proto-axiomatique. L'idée même de déduction n'est pas non plus évoquée.

3.2. Programme de 6^{ème}

Comme l'écrit A. Kuzniak (2006) « l'étude des textes officiels fait clairement apparaître que l'apprentissage de la démonstration est un enjeu de l'enseignement des mathématiques au collège et que LE domaine qui est le cadre de cet apprentissage est la géométrie, du côté de l'enseignant (démonstration des théorèmes) comme du côté de l'élèves. Seuls quelques passages font fugitivement allusion à la dimension « Démonstration » des domaines numériques et algébriques dont les ressources sur ce plan ne sont pas mises en avant. ». (p. 28)

En préambule au programme de 6^{ème}, concernant l'ensemble du collège, on peut lire :

A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur

pertinence en fonction du problème étudié. (*Programme de la classe de 6^{ème} ; 1995 ; p. 15*)

Objectifs généraux :

L'enseignement des mathématiques en classe de sixième comporte deux aspects :

- Il apprend à relier des observations du réel à des représentations : schémas, tableaux, figures ;
- Il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématiques et à des concepts.

Cette démarche (...) accorde une grande place à l'activité de construction, de réalisation de dessins, de résolution de problèmes, d'organisation et de traitement de données, de calculs, etc. Cela permet aux élèves de mieux prendre en compte le caractère « d'outil » des mathématiques.

Elle concourt à la formation intellectuelle de l'élève, à la formation du citoyen, et doit notamment :

- Développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive ;
- ...

Ainsi, dès la sixième, l'enseignement des mathématiques développe les capacités de travail personnel de l'élève et son aptitude à chercher, à communiquer et à justifier ses affirmations.

EXPLICITATION DES CONTENUS : TRAVAUX GEOMETRIQUES

De l'école élémentaire, les élèves apportent une expérience des figures les plus usuelles. *L'objectif fondamental en sixième est encore la description et le tracé de figures simples.* Au terme d'un processus progressif, le champ des figures étudiées est enrichi, le vocabulaire est précisé et les connaissances sont réorganisées à l'aide de nouveaux outils, notamment la symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale).

Les travaux géométriques prennent appui sur *l'usage des instruments de dessin et de mesure y compris dans un environnement informatique.* Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Ils constituent en particulier le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures) ou de notions en cours d'acquisition (repérage, proportionnalité).

CONTENU	COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
1. <i>Reproduction de figures planes</i>	<i>Sur papier blanc et sans que la méthode soit imposée :</i> - reporter une longueur ; - reproduire un angle, un arc de cercle de centre donné ;	<i>En complétant aux instruments classiques de dessin, il est conseillé d'utiliser aussi du papier calque, du papier quadrillé ou pointé.</i>

	<p>- tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée.</p> <p>Utiliser correctement, dans une situation donnée, le vocabulaire suivant : droite, cercle, centre, rayon, diamètre, angle, droites perpendiculaires, droites parallèles, demi-droite, segment, milieu.</p> <p>Tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes : triangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, rectangle, losange, carré, cercle.</p> <p>Reconnaître ces figures dans un environnement plus complexe.</p>	<p>Il s'agit de développer les connaissances acquises à l'école élémentaire en vue de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure ou de dessin (règle graduée ou non, compas, équerre). Le rapporteur est un nouvel instrument de mesure qu'il convient d'introduire à l'occasion de la construction et de l'étude des figures ; - tirer partie des travaux pour préciser le vocabulaire, en particulier celui concernant les figures planes. <p>Les travaux de reproduction et de construction pourront consister en :</p> <ul style="list-style-type: none"> - la copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin, - un dessin à partir de données graphiques et numériques, - un dessin à partir d'un énoncé décrivant la figure. <p>Les travaux de construction conduiront à l'utilisation progressive et prudente de lettres pour désigner les points d'une figure. Cette utilisation est nouvelle et son apprentissage se fera à l'occasion d'activités de communication telles que figures « téléphonées » ou énoncés rédigés par des élèves.</p> <p>Les travaux de construction d'une figure, à l'aide d'instruments ou dans un environnement informatique, s'appuieront sur sa définition ou ses propriétés.</p> <p>Les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences</p>
--	--	---

		<i>déductives s'appuyant par exemple sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme. On prendra garde à ce sujet de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.</i>
--	--	---

Commentaires (document d'accompagnement du programme de 6^{ème})

Autour du raisonnement (déduction, argumentation ...)

Dès la classe de 6^{ème} un point de vue différent de celui de l'enseignement élémentaire est porté sur la géométrie.

« Les élèves commencent à se familiariser avec les propriétés d'une figure et c'est dans cette classe que se mettent en place un certain nombre d'éléments et de relations qui se développent ultérieurement dans des situations de validation et de preuve ». (APMEP 31 mai 1995)

Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction, il est nécessaire de développer des apprentissages qui initient l'élève à la démonstration. Dans une géométrie d'observation, les figures ne sont pas porteuses d'informations clairement annoncées et les observations résultent de la perception visuelle. Dans une géométrie déductive, c'est à partir d'informations explicitées (les hypothèses) et des propriétés apprises qu'il s'agit de prouver des conséquences qui n'étaient pas annoncées au départ. En classe de 6^{ème}, des activités géométriques appropriées peuvent préparer le raisonnement déductif, notamment en amenant les élèves à prendre en compte les mêmes informations sous diverses formes. Cette richesse est offerte par toutes les tâches combinant tracé, langage, mesure ou calcul.

Les travaux « géométrico-numériques » peuvent en particulier constituer un terrain privilégié pour aborder le raisonnement sur des îlots déductifs bien circonscrits, notamment à propos de comparaisons de longueurs et d'aires.

A l'issue de la lecture des deux programmes, on peut d'ores et déjà remarquer qu'en ce qui concerne l'étude des figures planes, la liste de vocabulaire est la même. Les élèves ne font pas de nouvelles acquisitions à ce niveau. Si dans le programme de 6^{ème}, on ne trouve pas l'expression « à main levée », dans la pratique, les figures seront proposées sous cette forme aux élèves ou sous la forme de dessins tracés à la règle et codés mais très rarement en vraie grandeur. En 6^{ème}, les figures peuvent être aussi présentées sous forme d'un texte, le rôle des lettres pour désigner les points étant alors indispensable. C'est dans l'approche et l'utilisation des figures et dans l'usage du vocabulaire et des propriétés que se fait la différence, c'est-à-

dire le passage vers l'abstraction. Les enseignants en 6^{ème} ayant une formation mathématique très souvent plus avancée que leurs collègues du primaire, on ne doit pas être surpris par le constat fait dans l'enquête de l'INRP relatée plus haut à savoir que les élèves sont confrontés successivement à une juxtaposition de deux types d'enseignement des mathématiques comme s'il s'agissait de deux mondes étrangers l'un à l'autre.

Si le programme stipule que « l'objectif fondamental en sixième est encore la description et le tracé de figures simples », l'élément marquant la différence entre celui-ci et le programme de CM2 réside sans doute, dans les documents d'accompagnement du programme de 6^{ème}, en la mention de deux géométries, « la géométrie d'observation » et « la géométrie de déduction », et l'approche de la démonstration. Les deux géométries y sont brièvement définies, et mais aucune activité illustrant chacune d'elles n'est vraiment proposée. En particulier, même si les travaux « géométrico-numériques » sont proposés en exemple, on ne donne pas d'exemple d'utilisation purement géométrique qui illustrerait une activité favorisant le passage d'une géométrie à l'autre. S'il est précisé qu'« en classe de 6^{ème}, des activités géométriques appropriées peuvent préparer le raisonnement déductif », on peut regretter qu'aucun exemple ne soit donné. En particulier le degré de formalisation du raisonnement hypothético-déductif est laissé à l'appréciation du professeur. Compte tenu de la formation des enseignants du secondaire, il n'est pas rare que le degré de formalisation attendu en 6^{ème} soit très avancé alors qu'il n'est pratiquement pas abordé en primaire. En d'autres termes, on peut considérer qu'au niveau primaire, on s'attend à ce que l'élève fonctionne en G1 et au niveau N1 d'identification-visualisation de van Hiele tandis qu'en 6^{ème} et plus généralement au collège, l'élève devra fonctionner en G2 au niveau N3 de la théorie de van Hiele de déduction informelle, voire même au niveau 4 (déduction formelle) en classe de 3^{ème}.

Comment les élèves peuvent-ils gérer cette rupture dans l'enseignement d'une même discipline ? Ne pourrait-on imaginer des activités qui, tout en respectant les exigences des programmes de chaque niveau de scolarité, permettent aux élèves de passer d'une géométrie spatio-graphique à une géométrie proto-axiomatique par zones de développement proximal ?

4. Evaluation nationale à l'entrée en 6^{ème}

Comme son nom l'indique, l'Evaluation Nationale à l'entrée en 6^{ème} permet de repérer les acquis et les manques des élèves au sortir de l'Ecole Primaire en Mathématiques et en Français. Cet outil prend la forme d'un cahier d'une trentaine d' « exercices » auxquels sont associés une centaine d'items. Tous les domaines du champ disciplinaire ne sont pas abordés au cours de cette épreuve et d'une année sur l'autre ce ne sont pas les mêmes compétences qui sont testées.

Le codage de tous les items se fait selon les principes suivants :

Code 1 : Réponse exacte attendue, réponse exhaustive, procédure induite par l'énoncé : l'objectif est atteint.

Code 2 : Réponse exacte : formulation moins attendue, réponse non exhaustive, mais on considère que l'objectif est atteint.

Code 3 : Réponse incomplète, sans élément erroné, mais on considère que l'objectif n'est pas atteint.

Code 4 : Réponse partiellement exacte, avec éléments erronés ;

Codes 5, 6, 7 et 8 : Ces codes permettent, dans certains cas, de spécifier par avance un erreur possible.

Code 9 : Toute autre réponse erronée.

Code 0 : Absence de réponse (l'élève est présent mais n'a pas répondu à la question ou à l'exercice).

Les exemples que nous donnons ici sont accompagnés des résultats obtenus au collège de Marly le Roi (78160) puisque notre recherche s'est effectuée à partir de ce collège qui accueille tous les ans environ 250 élèves scolarisés pour une très grande part l'année précédente dans les écoles primaires du secteur. Par ailleurs, il nous paraît pertinent de donner un aperçu des réponses des élèves à l'Evaluation Nationale pour mieux situer le niveau de compétences de ceux du secteur de Marly le Roi.

Les différents exemples que nous avons choisis sont classés selon un ordre de réussite décroissant. Ce sera pour nous l'occasion d'utiliser les éléments théoriques évoqués précédemment pour expliquer cette baisse dans les taux de réussite des élèves.

Ce premier exercice (exercice 10) extrait des épreuves de 2005 et 2006 relève complètement de l'école primaire puisque les réponses sont obtenues grâce aux instruments dont le maniement a été depuis longtemps mis en place. Un élève fonctionnant en G1 réussira parfaitement cet exercice : les validations instrumentées sont pertinentes ici.

Exercice 10

Réponds aux questions suivantes par « oui » ou « non ».

Les points I, D et E sont-ils alignés ? _____ | 1 4 9 0 |
 Les points E, G et H sont-ils alignés ? _____ | 31

Le triangle IGH a-t-il deux côtés de même longueur ? _____
 Le triangle IDG a-t-il deux côtés de même longueur ? _____ | 1 9 0 |
 Le triangle IEG a-t-il deux côtés de même longueur ? _____ | 32

Le triangle IGH a-t-il un angle droit ? _____ | 1 4 9 0 |
 Le triangle IDG a-t-il un angle droit ? _____ | 33
 Le triangle IEG a-t-il un angle droit ? _____

Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche
7

Dans l'item 31 le code 4 permet d'identifier les élèves qui ont répondu deux fois « oui » ou deux fois « non » aux deux premières questions. Soit ces élèves ont donné un sens à l'adjectif « alignés » qui n'est pas le bon, soit ils sont encore assez maladroits pour ne pas manipuler la règle avec la précision attendue en fin de CM2. Dans l'item 33, le code 4 est réservé aux réponses du type « oui-non-oui » c'est-à-dire aux élèves pour qui le triangle IDG n'est pas un triangle rectangle alors que le triangle IEG en est un. Ce sont là les élèves qui associent encore la notion d'angle droit avec les directions des bords de la feuille. De tels élèves sont

donc dans un processus de validation purement perceptive : ils ne maîtrisent vraisemblablement que le niveau 1 d'identification-visualisation de van Hiele.

En 2005, les résultats au collège de Marly le Roi ont été les suivants :

Code	1	4	9	0	Total
Item 31	95%	4%	0%	0%	100%
Item 32	72%		27%	0%	100%
Item 33	45%	2%	44%	9%	100%

Comme on le voit sur ce tableau, le taux de réussite des élèves baisse au fil des questions : depuis la réussite presque totale à propos de l'alignement des points jusqu'à la réussite d'un élève sur deux à propos du triangle rectangle. Le code 4 est intéressant dans cet exercice parce qu'il permet de voir que les élèves en difficultés sont plus nombreux à propos de l'alignement des points que sur l'usage de l'équerre et du repérage des angles droits. Dans le même temps où le taux de bonnes réponses baisse de 95% à 45%, le taux de réponses fausses qui n'ont pas pu être identifiées (code 9) passe de 0% à 44%. En fait ont été codés 9 tous les élèves qui ont affirmé que les trois triangles étaient des triangles rectangles. La plupart du temps les élèves ont utilisé leur équerre pour vérifier que l'angle de sommet D était un angle droit mais se sont prononcés à vue d'œil à propos du triangle IEG.

Les résultats obtenus à l'échelle nationale sont les suivants :

Code	1	4	9	0	Total
Item 31	89%	8%	2%	1%	100%
Item 32	67%		30%	3%	100%
Item 33	34%	7%	41%	17%	100%

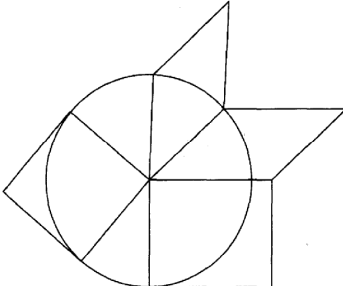
Les scores du collège de Marly-le Roi sont donc supérieurs à la moyenne nationale et l'écart est stable depuis que l'épreuve de l'Evaluation Nationale existe. Globalement les élèves répondent plus facilement que dans la moyenne nationale (code 0), les erreurs y compris les erreurs attendues et prévues par le codage (code 4 ici) sont plutôt moins nombreuses mais à l'intérieur d'un même exercice, l'évolution des scores de réussite est conforme au modèle

national : les résultats baissent au fil des questions et l'analyse proposée par le Ministère par le biais des « Notes d'information » est celle que nous faisons au plan local.

La réussite à cet exercice est liée à la précision dans la manipulation des outils que sont la règle et l'équerre. L'élève a pu éventuellement utiliser son compas pour répondre à la deuxième question. Un tel exercice se situe dans une géométrie où le perçu est très prégnant puisqu'il peut influencer les réponses à la dernière question. Une telle activité ne relève pas d'une géométrie axiomatique ni même proto-axiomatique, mais complètement spatio-graphique : la validation dépend de la précision de la mesure ou du dessin.

Dans l'épreuve de 2004 (exercice 25), les élèves pouvaient aussi utiliser leurs outils pour identifier un carré et un losange inclus dans une figure plus complexe tracée à la règle. Cette année-là, les deux questions ont été posées dans deux séquences différentes de l'épreuve alors que quelques années plus tôt elles étaient réunies en un seul et même exercice, les élèves n'ayant alors qu'une seule figure sur laquelle ils ont dû appliquer un code couleur pour répondre aux questions.

La figure était la suivante. Le carré faisait l'objet de l'item 55 et le losange de l'item 40.

Exercice 25	<i>Ne rien écrire dans cette colonne</i>
Observe attentivement la figure suivante.	
	
Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.	1 6 9 0 55

A propos du carré, le code 6 permet d'identifier les élèves qui ont repassé en couleur le rectangle de la figure.

A propos du losange, le code 1 est attribué aux élèves qui ont repassé le losange (non carré) ou le carré en couleur. Le code 2 correspond au fait que l'élève a repassé les deux losanges en couleur. Le code 6 traduit le fait que l'élève a repassé le parallélogramme (non rectangle et non losange) en couleur ; l'élève se trompe sur la définition du losange à moins qu'il n'associe une perception erronée et une mauvaise maîtrise de la définition du cercle..

Au collège de Marly le Roi, les résultats en pourcentages ont été les suivants.

Code	1	2	6	9	0	Total
Item 55 (carré)	67%		19%	14%	0	100%
Item 40 (losange)	65%	10%	9%	16%	0	100%

Les deux tiers des élèves ont su retrouver la sous-figure dans la figure plus complexe. On peut s'étonner que le taux de réussite à propos du carré ait été seulement de 67% dans la mesure où les élèves connaissent le carré depuis plus longtemps que le losange. Mais le carré n'était pas présenté dans une position prototypique alors que le rectangle l'était et de surcroît le rapport des longueurs des côtés du rectangle était voisin de 1. De la même manière les élèves à qui on a attribué le code 2 dans l'item réservé au losange soit 10% de l'effectif, ont sans doute été davantage influencés par la perception de la figure et en particulier sa position dans la feuille que par ses propriétés géométriques. Globalement, ces items indiquent que près d'un élève sur cinq qui entre en 6^{ème} au collège de Marly le Roi peut déterminer la nature d'une figure géométrique à partir de sa position dans la feuille (19% des élèves ont le code 6 dans l'item 55 et 19% ont soit le code 2 soit le code 6 dans l'item 40) ou de son aspect général.

Au plan national les résultats sont plus faibles en termes de réussite mais sont orientés de la même manière.

Code	1	2	6	9	0	Total
Item 55 (carré)	41%		29%	28%	2%	100%
Item 40 (losange)	53%	5%	9%	30%	3%	100%

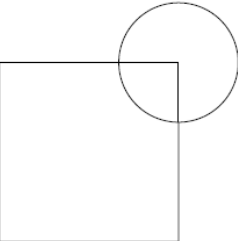
D'une manière générale, on retrouve là le phénomène évoqué par Duval à savoir que la perception d'une sous-figure dans le contexte d'une figure plus complexe est une activité qui

doit être amenée par l'enseignant ; cette compétence ne saurait émerger spontanément dans la tête des élèves. En termes de théorie des niveaux de van Hiele, elle relève du niveau d'analyse et doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique.

Une autre activité, en marge des programmes de l'école primaire et proposée de temps à autre dans l'Évaluation nationale peut amener des scores de réussite tout à fait comparables. Ainsi dans l'épreuve de 2004, c'est la description de la figure ci-dessous qui était demandée ; le côté du carré mesurant 6 cm et le rayon du cercle étant égal à 2 cm. Si les élèves connaissent depuis longtemps les mots « carré » et « cercle », en revanche, il est peu fréquent qu'ils les utilisent eux-mêmes dans le cadre de la description d'une figure, le cercle et le carré étant ici sous-figures de la figure globale. De plus il était attendu que les élèves précisent la relation entre les deux sous-figures.

Exercice 37

Ne rien écrire
dans cette colonne



Rédige un texte qui permet à quelqu'un, qui ne voit pas la figure, de la tracer en respectant les dimensions.

.....

.....

.....

.....

.....

1 2 6 7 9 0
86

1 9 0
87

Le codage de l'item 86 se faisait sans référence aucune aux mesures. Celles-ci étaient codées grâce à l'item 87. Les instructions de codage de l'item 86 étaient les suivantes :

Code 1 : En suivant les instructions, on peut réaliser un carré et un cercle dont le centre est un sommet du carré ; les mots « carré » et « cercle » figurent explicitement dans le texte.

Code 2 : En suivant les instructions, on peut réaliser un carré et un cercle dont le centre est un des sommets du carré ; mais l'un au moins des mots « carré » ou « cercle » ne figure pas explicitement dans le texte.

Code 6 : Le texte permet de réaliser un carré et un cercle, mais le lien entre les deux n'est pas précisé.

Code 7 : Le texte ne permet de construire que l'un des deux (cercle ou carré)

Code 9 : Autre réponse

Code 0 : Absence de réponse.

Les scores obtenus sont les suivants :

Code	1	2	6	7	9	0	Total
Item 86	56%	9%	16%	6%	12%	0	100%

Ce sont donc plus des deux tiers des élèves qui ont produit un texte dans lequel la relation entre le cercle et le carré était précisée, même si le vocabulaire n'était pas toujours d'une grande rigueur : le code 2 a été utilisé pour près d'un élève sur dix. Cette activité ne relève nullement de l'école primaire, mais pour autant un certain nombre d'élèves sont d'ores et déjà en mesure de la réussir. Il est vrai que le secteur scolaire sur lequel nous ferons notre enquête est un secteur tout à fait francophone et les élèves n'ont pas vraiment de difficultés d'expression en Français.

Les résultats nationaux sont les suivants :

Code	1	2	6	7	9	0	Total
Item 86	41%	5%	29%	10%	11%	4%	100%

Les pourcentages de réussite au niveau national sont plus faibles : 46% pour l'ensemble des codes 1 et 2. Ils sont cependant orientés dans le même sens que ceux du collège Louis Lumière. A peine un élève sur deux a su décrire la figure en prenant en compte le lien entre les deux éléments qui la composaient. Pour reprendre la terminologie de Duval, nous pourrions dire que la moitié des élèves à l'entrée en 6^{ème} n'ont pas une appréhension séquentielle et encore moins discursive de la figure. En particulier c'est la dépendance entre le

centre du cercle et le sommet du carré qui n'a pas été repéré : code 6 utilisé pour 16% des élèves de Marly-le Roi et 29% au plan national.

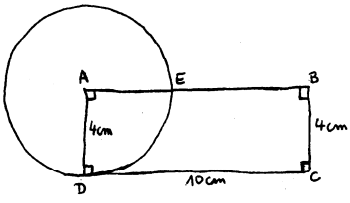
Mais à Marly le Roi comme dans le reste de la France, il y a plus d'un élève sur 10 pour qui on a utilisé le code 9 : de tels élèves ont produit des textes qui ne permettent pas de réaliser la figure et qui de plus n'utilisent pas les mots « carré » ou « cercle ». Il y a donc une proportion non négligeable d'élèves qui ont encore des difficultés à nommer et décrire les figures géométriques.

Au vu de ces résultats, on serait tenté de croire que la moitié des élèves sont en mesure de passer de l'analyse d'une figure en vraie grandeur à la description de celle-ci sans grande difficulté. On pourrait dire encore que la verbalisation n'est pas une activité particulièrement délicate à mener puisque spontanément les deux tiers des élèves y réussissent à la fin du CM2. Or comme le montre l'exemple suivant, la description des figures ne saurait être la seule étape vers l'abstraction et le raisonnement hypothético-déductif.

En septembre 1997 on a proposé aux élèves d'analyser une situation géométrique dessinée à main levée où les longueurs annoncées ne pouvaient être vérifiées à la règle. Cette situation a été légèrement modifiée dans l'épreuve de 1998 de la manière suivante : dans la première version, la longueur DC était annoncée comme étant égale à 7 cm et le dessin du rectangle ABCD était plus court que dans l'exercice proposé en 1998 où la distance annoncée entre D et C était de 10 cm.

Exercice 14

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Trouve la longueur du segment [EB].

Explique ta réponse :

Les différents codages étaient établis ainsi :

Code 1 : La réponse attendue est complète. L'élève a donné la bonne réponse (6 avec ou sans l'indication « cm ») et a expliqué correctement sa démarche en faisant allusion au rayon ou à la longueur du rectangle.

Code 2 : L'élève a trouvé 6 (avec ou sans l'indication « cm ») mais s'est limité à écrire la soustraction $10 - 4$ sans autre explication ;

Code 3 : L'élève a trouvé 6 (avec ou sans l'indication « cm ») mais n'a donné aucun élément de démarche.

Code 5 : L'élève a donné une réponse qui indique qu'il a mesuré sur le dessin la distance entre les points E et B.

Code 6 : L'élève a donné comme réponse une mesure faisant allusion à E comme milieu de $[AB]$ ²⁷

Code 9 : Autre réponse

Code 0 : Absence de réponse.

Au collège de Marly le Roi, les pourcentages obtenus sont les suivants :

Code	1	2	3	5	6	9	0	Total
1997	10%	0	0	12%	32%	31%	14%	100%
1998	28%	3%	2%	23%		32%	13%	100%

Dans la publication des résultats, le logiciel CASIMIR prend en compte comme réponses justes, toutes les réponses codées 1 ou 2. On est donc passé d'un taux de réussite de 10% en 1997 à plus de 30% en 1998. Si l'on considère que les élèves auxquels on a attribué le code 3

²⁷ Ce code était pertinent dans l'épreuve de 1997 dans la mesure où la longueur du rectangle était annoncée à 7 cm, le rayon à 4 cm et le dessin laissait la possibilité d'une telle interprétation.

ont aussi analysé correctement la situation géométrique, c'est un élève sur trois qui, en 1998, a réussi cet exercice. On peut imaginer un effet « bachotage » dans la mesure où chaque année les épreuves sont fournies aux enseignants du primaire au cours de la réunion de liaison CM2 – 6^{ème}. D'ailleurs les résultats nationaux de 1998 font état de 22% de réussite et de 44% de réponses erronées dues à des mesures sur le dessin. Mais il ne saurait expliquer à lui seul un tel écart dans les résultats : les longueurs étaient différentes et le dessin plus explicite. Même si les élèves ont bénéficié d'un certain entraînement, certains se sont probablement mieux adaptés à la situation : dans la mesure où les distances entre les points du dessin étaient très différentes des distances annoncées, il devenait plus facile pour les élèves de considérer ce dessin comme un support de l'information mais non plus comme un objet d'étude. Les élèves de CM2 ne sont pas habitués, c'est normal compte tenu des programmes, à étudier une figure faite à main levée ; la plupart des figures qui leur sont proposées sont tracées à la règle et en dimensions réelles. On peut donc facilement comprendre le désarroi de certains élèves face à ce dessin : près de la moitié d'entre eux ont donné des réponses codées 9 ou n'ont pas donné de réponse du tout. Nul doute pour autant qu'ils aient reconnu qu'il s'agissait d'un rectangle et d'un cercle mais ils n'ont pas toujours été capables de mettre en œuvre les propriétés de ces deux figures, propriétés qu'ils peuvent connaître par ailleurs. Ici nous avons bien la preuve que les élèves ne sont pas encore en mesure d'élaborer un raisonnement dont le support graphique n'est pas une figure en vraie grandeur. Les élèves ont donc besoin d'un apprentissage spécifique. Un tel exercice ne relève nullement des compétences exigibles en fin d'école primaire puisque, comme nous le verrons plus loin, le décodage d'un schéma à main levée est exclu du programme. Mais il est un indicateur pour les professeurs de collège de ce que les élèves entrant en 6^{ème} sont capables de faire ou non. Dans les deux épreuves, une proportion non négligeable d'entre eux s'est appuyée sur le dessin pour répondre soit en mesurant directement soit en se laissant influencer par l'apparence de celui-ci. En d'autres termes, on peut dire que les élèves à l'entrée en 6^{ème} ne sont pas en mesure de fonctionner spontanément dans une géométrie axiomatique ou même proto-axiomatique : ils ont compris que le dessin qui leur était proposé était celui d'un objet sur lequel on peut faire des mesures et non pas le représentant d'un objet théorique support d'un raisonnement. Or les exercices de cette nature ne sont pas rares en 6^{ème} ; les enseignants ont ainsi l'avertissement que la démarche d'analyse d'un schéma n'est pas spontanée et doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique.

Comme le montrent ces quelques exemples, les scores de réussite des élèves aux différents items ne sont pas toujours directement liés à l'exigence, dans les programmes d'une compétence ou d'une connaissance. Les scores de réussite ont chuté au fur et à mesure des items que nous avons présentés. Le premier d'entre eux relevait de compétences propres à l'école primaire et la validation était déterminée par la précision dans l'utilisation des instruments. Dans le deuxième, l'identification d'une sous-figure incluse dans une figure plus complexe est déjà source de difficultés pour environ un tiers des élèves. La description d'une figure n'est réussie que par la moitié des élèves ; le plus difficile étant de lier les différents éléments de la figure entre eux, notamment le fait que le centre du cercle est aussi un sommet du carré. Enfin l'analyse d'un schéma fait à main levée n'est réussie que par un quart des élèves : on est alors dans une géométrie au moins proto-axiomatique et les élèves entrant en 6^{ème} n'y sont pas préparés : les programmes ne l'exigent nullement.

Malgré ces remarques, certains items, bien que ne relevant pas du programme peuvent être réussis par une majorité d'élèves quand d'autres items directement associés au programme peuvent être source d'un certain échec : c'est le cas des items consacrés à l'application de la distributivité où les élèves sont particulièrement performants sans qu'aucun apprentissage y soit précisément associé.

Nous n'avons pas identifié dans les diverses épreuves de l'Evaluation nationale, d'exercices de difficulté intermédiaire dans lesquels, par exemple, les élèves auraient été amenés à prévoir l'appartenance d'un point à un cercle en application des propriétés d'égalité de longueur des côtés du carré ou du losange ou du triangle équilatéral. Nous n'avons pas rencontré non plus d'exercice où l'élève est amené à repérer et non pas utiliser certaines propriétés d'un quadrilatère particulier comme le rectangle. De tels exercices qui se situeraient alors dans une géométrie proto-axiomatique permettraient de savoir dans quelle proportion les élèves de Primaire sont capables de mettre en œuvre les propriétés des figures qu'ils connaissent, dans un raisonnement hypothético-déductif. La seule information que nous ayons jusqu'à maintenant est que dans leur majorité, les élèves en entrant en 6^{ème} ne sont pas en mesure d'élaborer un tel raisonnement et que faute d'apprentissage spécifique, ils peuvent se retrouver en situation très délicate en 5^{ème} ou 4^{ème}.

5. Analyse de quelques manuels de CM2 et de 6^{ème}.

Pour cette analyse nous nous limiterons à comparer ce qui est proposé dans quelques manuels de CM2 et de 6^{ème} à propos des triangles particuliers. Nous avons choisi ce thème dans la mesure où, non seulement il est abordé dans chacun des programmes mais, il sera repris lors de l'expérimentation auprès des élèves.

5.1. Manuels de CM2

La première remarque que l'on peut faire est la très grande différence de conceptions et de structures de ces manuels.

En effet dans un manuel de CM2, chaque double page est consacrée à deux sujets : calcul et géométrie. Pour le thème que nous avons choisi d'étudier, la partie calcul se présente sous la forme de réactivation de compétences acquises par ailleurs ou maîtrisées. Pour ce qui concerne la partie géométrique, le plus souvent la demi-page de gauche est réservée à une partie « Découverte », et le reste a pour titre « Chercher », « Applications », « Exercices », « Exercices et problèmes ». Au contraire un manuel de 6^{ème} est découpé en chapitres, les parties numérique et géométrique étant le plus souvent consécutives l'une à l'autre. Chaque chapitre est structuré de la même manière avec une introduction en termes d'activités de découverte, le cours proprement dit, découpé en divers paragraphes plus ou moins synthétiques, et des exercices le plus souvent classés par sujet et ordre de difficulté supposée par les auteurs.

D'une manière générale, dans un manuel de CM2 il y a une dizaine d'activités proposées sur le thème annoncé. Le cours ou la partie institutionnalisée de la double page se situent sur la page de droite, quand ils existent. Il n'est pas rare qu'il n'y en ait pas du tout ou que celui-ci soit annoncé par un renvoi vers une section du manuel intitulée « mémo », « Aide-mémoire », « Dico-maths » Il n'est fait alors aucune distinction entre les statuts des différentes phrases : définition ou propriété. Toutes sont des énoncés descriptifs et la présentation peut même varier à l'intérieur d'un même résumé. Ainsi dans « Euromaths » (Editions Hatier), on peut lire : « Un triangle équilatéral a ses trois côtés de la même longueur. Un triangle qui a deux côtés de la même longueur est un triangle isocèle. ». Dans cet exemple, la présentation

du triangle équilatéral a une organisation qui va de la dénomination vers la caractéristique quand la présentation du triangle isocèle va dans l'autre sens. Or une définition est une équivalence logique et doit contenir le verbe « être ». En utilisant de telles phrases (du moins la première) pour définitions, l'enseignant prend le risque de ne pas sensibiliser ses élèves au rôle des définitions même si en Primaire on ne saurait employer une telle terminologie.

Les enseignants des classes de CM2 auxquelles nous avons rendu visite nous ayant dit s'inspirer de plusieurs manuels à la fois, nous avons donc fait un choix arbitraire quant aux manuels étudiés. Plus précisément nous nous limiterons à l'étude de deux manuels dont nous avons pu obtenir non seulement le livre réservé à l'élève mais aussi le guide pédagogique et qui proposent des interprétations du programme différentes.

5.1.1. CAP MATHS CM2 (HATIER)

Le premier des deux et dont nous allons analyser la double page intitulée « Triangles » est « Capmaths CM2 » publié aux éditions Hatier, dans la collection dirigée par R. Charnay (2004). (pp : 88-89) (voir annexe 1). Chaque page est découpée en trois parties : « Revoir », « Chercher » et « Exercices ». La partie « Revoir » est ici consacrée à de l'entraînement au calcul mental ou au réinvestissement de compétences en calcul acquises par ailleurs.

Dans la partie « Chercher » de la page 88, activité 1, il est demandé à l'élève de reproduire un triangle ABC quelconque à l'aide d'un papier calque. Si la dévolution de cette activité est individuelle, la mise en commun des techniques et les propositions de solutions se font par échanges entre élèves sous le contrôle de l'enseignant. En particulier, à charge pour lui de suggérer dès la fin de l'activité 1 « et si ne disposait pas de papier calque ? » afin de lancer une discussion dans la classe pour faire émerger les démarches qui deviendront autant de solutions à l'activité 2. Dans celle-ci, la consigne est alors de reproduire le segment [AB] et, sans papier calque, de placer le sommet C du premier coup.

Dans la partie « Exercices », les 5 tâches proposées aux élèves sont des constructions à partir de la même consigne verbale. Parmi les cinq triangles l'un sera un triangle rectangle puisque les longueurs proposées sont 6 cm ; 8 cm et 10 cm et un autre sera un triangle équilatéral puisque tous les côtés mesurent 6,5 cm. Les longueurs des côtés du triangle isocèle qui est proposé sont données dans l'ordre suivant : 7,5 cm ; 6 cm ; 7,5 cm. L'élève qui respectera l'énoncé dans l'ordre de l'apparition des mesures ne dessinera pas un triangle isocèle dans la

position classique où la base est parallèle au bord inférieur de la feuille de papier. De plus aucune mention n'est faite du caractère particulier de ces triangles.

Sur la page de droite (p.89), la partie « Chercher » s'intitule : « Des triangles particuliers » et a pour support les triangles du fichier annexe (fiche 52) : on y trouve cinq triangles repérés par des lettres majuscules et présentés dans des positions telles qu'aucun des côtés n'est parallèle aux bords de la feuille (F est un triangle équilatéral, G un triangle rectangle, C situ au centre de la feuille est un triangle ni isocèle ni rectangle, D un triangle isocèle rectangle et E un triangle équilatéral). Dans un premier temps on demande aux élèves groupés par deux de décrire le triangle de leur choix de manière qu'un de leur camarade puisse le retrouver parmi les triangles proposés mais toutes les équipes n'ont pas le même matériel : les unes ont une équerre et du papier calque, les autres ont une équerre et un compas. La recherche à partir du message se fait avec le même matériel que celui utilisé lors de sa rédaction. Ce qui est attendu des élèves est donc une description en termes de longueurs de côtés ou de gabarit d'angles ; quelques élèves pourront évoquer la présence d'axes de symétrie. Dans un second temps, il est demandé aux élèves de construire un triangle qui a trois côtés de même longueur et de comparer les angles puis de faire la même chose avec un triangle qui a deux côtés de la même longueur.

En face du titre de la rubrique « Exercices », se trouve le renvoi vers le « Dico-maths p.32 : Triangles particuliers ». Il est donc implicite que les élèves savent déjà ce que sont les triangles particuliers, que ce n'est pas là une notion nouvelle, ou l'occasion de l'apprendre. Dans le « Dico-maths » la présentation des triangles particuliers est double, à la fois en langage français et sous la forme d'un dessin tracé à la règle, orienté de façon non-stéréotypique et codé.

Les cinq « exercices » qui sont ensuite proposés aux élèves consistent en la construction de triangles particuliers dont on donne soit les longueurs des côtés soit le modèle d'un gabarit d'angle pour les triangles isocèles.

Dans cette double page les longueurs des côtés sont soit des nombres entiers de cm soit des demi centimètres. Aucune reproduction de figure n'est proposée pas plus que la construction d'une figure à partir d'un dessin à main levée. Le seul cas où des lettres sont utilisées est dans la première activité de recherche puisque les élèves doivent reproduire le triangle ABC en commençant par le côté [AB]. Il nous paraît important de mentionner que le Dico-maths est un livret séparé du manuel de l'élève et que l'enseignant dispose en plus du guide des activités, d'un recueil de fiches photocopiables. Le guide des activités est en fait ce qui est plus traditionnellement appelé le livre du maître. Toutes les rubriques du manuel de l'élève y

sont analysées et les activités sont minutées (colonne de gauche de la page), organisées en termes de matériel et de répartition des rôles entre élèves ou entre l'enseignant et les élèves (colonne centrale de la page). Les réponses aux exercices se trouvent dans la colonne de droite et sont accompagnées de quelques commentaires d'ordre didactique. Ainsi il est supposé que la séance 6 consacrée aux triangles particuliers durera 60 minutes dont 55 minutes pour la géométrie. Il est sous-entendu que si l'enseignant suit le « guide des activités » et les élèves le « livre de l'élève », le programme sera entièrement couvert. On peut remarquer que dans le manuel réservé à l'enseignant il n'y a aucun rappel sur les contenus du programme ni sur les modalités de son institutionnalisation. Celle-ci est donc laissée à la libre appréciation de l'enseignant.

5.1.2. MATHS CM2 (BORDAS)

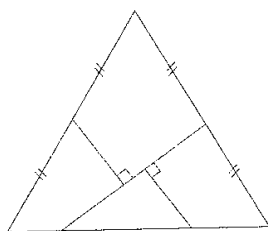
Une toute autre interprétation du programme se trouve dans le manuel publié aux éditions Bordas « Maths CM2 » dans la collection Thévenet. L'unité 60 intitulée « Triangle » est aux pages 134 et 135. (voir annexe 1)

La partie intitulée « Je découvre » occupe toute la page de gauche. La première activité consiste à identifier des triangles particuliers alors que le rappel de cours « Je retiens » se situe au bas de la page de droite et que les triangles y sont présentés dans la position stéréotypée. On peut remarquer que le même codage (double trait) est appliqué à tous les triangles où il est nécessaire d'indiquer que les longueurs sont égales alors que les longueurs sont différentes d'un triangle à l'autre. Il est intéressant pour notre étude de remarquer que l'un des triangles proposés est un triangle isocèle rectangle, autrement dit un triangle qui a deux particularités. Les triangles sont dessinés à la règle et codés. A l'exception du triangle isocèle, tous les autres sont présentés dans leur position stéréotypique c'est-à-dire dans la même position que dans la partie « Je retiens ». Il est suggéré à l'enseignant que les élèves travaillent deux par deux pour cette première activité que nous considérons davantage comme une activité de réactivation plutôt que de découverte. En effet n'y a-t-il pas une contradiction entre le titre « Je découvre », la première consigne de la première activité : « Indique, pour chaque triangle, s'il s'agit d'un triangle isocèle, équilatéral, rectangle et le contenu de la partie « Je retiens » où l'on retrouve les triangles particuliers avec les mêmes codages et dans les mêmes positions avec ce commentaire « triangle équilatéral : les 3 côtés ont la même longueur » ?

On est aussi en droit de s'interroger sur la pertinence des activités 2 et 3 : elles se situent à la marge du programme de cycle 3 et, plus précisément les propriétés d'orthocentre ne seront vues qu'au collège en classe de 4^{ème}. Le guide pédagogique suggère que l'activité 2 soit menée individuellement pas les élèves : ils doivent reproduire le triangle quelconque ABC, construire la hauteur [CH], donner la nature des triangles ACH et ABH, tracer les deux autres hauteurs et dénombrer alors le nombre total de triangles de la figure. Cette dernière question peut être traitée collectivement puisque les auteurs reconnaissent que l'organisation est déterminante pour mener à bien cette activité. De plus il faut introduire de nouvelles lettres pour repérer les pieds des hauteurs issues de A et de B. Enfin, la nature des triangles n'est jamais questionnée dans l'activité telle que proposée à l'élève ; seule la mention que tous les triangles sont des triangles rectangles apparaît à la fin de la réponse dans le livre du maître ; L'activité 3 amène l'élève à un changement de cadre puisqu'on lui demande le patron d'une pyramide régulière dont on précise qu'elle s'appelle aussi « tétraèdre régulier ». Là encore l'activité doit être menée individuellement et le guide pédagogique ne donne aucune justification quant à la pertinence de cette activité dans la page « Je découvre » consacrée aux triangles particuliers.

Dans la première tâche de la partie « Je m'entraîne » (n°4), l'élève va construire différents triangles qui ont tous un côté [AB] de 8 cm. En vérité il doit construire un triangle quelconque, un triangle isocèle qui ne sera sans doute pas dans la position classique proposée au bas de la page puisque le côté [AB] sera selon toute vraisemblance dessiné horizontalement dans la feuille, un triangle aplati et enfin un triangle impossible. La question qui est alors posée n'est pas comme on pourrait s'y attendre d'identifier des triangles particuliers mais de repérer les conditions dans lesquelles la construction d'un triangle est possible. Il nous paraît important de rappeler que la propriété de l'inégalité triangulaire fait partie des notions étudiées en classe de 5^{ème}.

La deuxième tâche (n°5) consiste à reproduire à l'identique un triangle codé comme étant isocèle mais qui est en fait un triangle équilatéral et où les milieux des deux côtés isométriques sont repérés par un codage.



De plus rien ne dit comment ces milieux doivent être utilisés pour terminer la construction de la figure ; l'élève est donc contraint de reporter les longueurs à la règle ou au compas. Le codage des angles droits est alors un guide pour la deuxième partie de l'exercice qui demande à l'élève de découper sa figure pour recomposer un carré. Cet exercice est intéressant en ce qu'il consiste en la reproduction d'une figure en vraie grandeur mais le codage des milieux et des angles droits sont des informations qui ne sont pas utilisables simultanément dans le déroulement de l'activité quand d'autres informations sont manquantes, en particulier la position des points d'intersection à la base du triangle isocèle.

D'un tout autre genre est l'exercice 6 puisque cette fois, l'élève doit réaliser une construction à partir d'un texte : « Trace un cercle de centre O et de diamètre $AB = 6$ cm. » L'usage des lettres pour la désignation des points est indispensable, en particulier pour la deuxième question où l'élève doit trouver un point D du cercle de diamètre $[AB]$ tel que $AD = DB$. A ce niveau de scolarité, l'élève ne dispose d'aucune connaissance de géométrie pour trouver ce point par raisonnement : on peut douter qu'un élève de CM2 fasse usage de ses connaissances sur la symétrie axiale pour construire un tel point. Il ne peut réussir que par essais et erreurs et risque de donner une réponse approximative qui ne lui permettra pas de répondre à la question « Que remarques-tu ? ». La dernière question est tout aussi déroutante : « Trace le diamètre DE. Que remarques-tu ? » A priori ces questions sont des questions ouvertes mais les possibilités de l'élève sont limitées : il n'a pas les connaissances géométriques théoriques nécessaires à la construction de la figure et à son exploitation. Ses remarques sont donc visuelles ou élaborées à partir de mesures plus ou moins fiables. En aucun cas il ne peut trouver des arguments qui justifient ses réponses. Il est clair qu'une telle activité déborde largement des objectifs du programme de CM2 puisque les propriétés géométriques sous-jacentes relèvent du programme de 4^{ème}.

L'activité suivante est mieux ciblée puisque l'élève est invité à construire deux triangles rectangles isométriques et à les utiliser pour construire des triangles et des quadrilatères

particuliers. On peut cependant regretter que l'on demande de retrouver un parallélogramme dans la mesure où ce quadrilatère n'est pas mentionné dans le programme.

L'activité 8 demande encore la reproduction d'une figure composée de l'intersection de deux triangles donnés en dimensions réelles. Seule est codée l'égalité des longueurs des segments qui sont déterminés par les intersections des deux triangles AEC et BDF. On peut alors envisager deux procédures tout à fait différentes pour la réalisation de la figure : soit on construit l'hexagone régulier qui n'a pas de nom et on termine la figure en prolongeant les côtés de manière à retrouver les triangles AEC et BDF, soit on repère sur le livre que les triangles AEC et BDF sont des triangles équilatéraux qui se coupent au tiers de la longueur de leurs côtés et la figure est construite par simple copie des mesures repérées sur le modèle. Une mise en commun des démarches suivies par les élèves doit avoir lieu à l'issue d'une telle activité.

Dans la dernière activité les élèves doivent tracer la médiatrice d'un segment [BC] de 10 cm de long puis placer un point A sur cette droite. La question est alors : « Que peux-tu dire de ce triangle ? ». Comme dans l'exercice 6, l'élève peut constater que le triangle est un triangle isocèle (ou peut-être même un triangle rectangle) mais il n'a pas les moyens de se convaincre que ce qu'il constate est vrai surtout si son tracé est suffisamment imprécis pour que le triangle n'apparaisse pas comme isocèle. De plus il y a une très forte probabilité pour que le segment [BC] soit tracé « horizontalement » sur la feuille de l'élève donc le triangle ABC apparaîtra en position stéréotypique.

Ainsi l'élève n'aura pas eu l'opportunité de rencontrer des triangles particuliers dans des positions quelconques sur sa feuille, et aucun rappel sur les égalités d'angle ne sera fait à cette occasion.

Comme le manuel précédent, celui-ci est accompagné d'un manuel du maître et d'un cahier d'exercices sur lequel l'élève peut travailler ou à partir duquel il travaillera sur un autre support. Mais nous avons déjà remarqué que le guide pédagogique se limite à des suggestions de fonctionnement dans la classe et donne les réponses aux exercices. Les choix pédagogiques ou didactiques ne sont pas explicités ou justifiés.

Ces deux manuels ne sont que deux exemples de toutes les productions actuellement sur le marché. Ils révèlent la diversité d'interprétation des programmes : dans CAP Maths, nous pouvons considérer que l'ensemble des activités proposées se situent dans G1 et que les niveaux de van Hiele mis en évidence sont les niveaux 1 d'identification-visualisation ou au

maximum 2 d'analyse ; dans MATHS CM2, les élèves peuvent être amenés à fonctionner dans l'un ou l'autre des deux paradigmes géométriques G1 ou G2 quand ce sont les mêmes niveaux de van Hiele qui sont mis en évidence (niveau 1 d'identification-visualisation et niveau 2 d'analyse). Les enseignants que nous avons rencontrés nous ont dit utiliser plusieurs de ces manuels pour construire eux-mêmes leurs séquences de mathématiques. Les élèves utilisent alors peu « le manuel de l'élève » et travaillent sur des feuilles à partir de photocopies ou de documents élaborés par l'enseignant lui-même. Dans aucune des classes qu'il nous a été donné de visiter les élèves n'avaient à leur disposition les fiches d'activité proposées par les éditeurs. Les achats relevant de la municipalité, les enseignants sont encouragés à ne commander que des manuels pouvant être utilisés pendant plusieurs années. C'est ainsi que, dans certaines classes, les élèves n'avaient pas de manuel à leur disposition ou s'ils en avaient un, il était peu utilisé en classe. Au cours des visites que nous avons pu faire dans les classes, les élèves ont toujours travaillé à partir de documents photocopiés fournis par l'enseignant.

5.2. Manuels de 6^{ème}

Au collège au contraire, le manuel, choisi par l'établissement, est très utilisé par les élèves, en particulier pour les exercices à la maison. D'une façon générale, les notions sont abordées tout à fait différemment. Le programme est déroulé en différents chapitres, organisés de la même manière tout au long du manuel. Tout d'abord nous trouvons la partie « Activités » consacrée à la découverte des diverses notions abordées dans le chapitre, puis « le cours » et enfin « les exercices » classés par sujet et par ordre de difficulté et éventuellement « les problèmes ». Le manuel peut être utilisé en classe pour les activités et pour certains exercices ; rarement pour le cours. Les exercices sont en nombre tel qu'il est hors de question qu'un élève les fasse tous au cours de l'année scolaire. C'est donc à l'enseignant que revient le choix de ceux-ci. Certains auteurs proposent aussi des pages « Bilan » dans lesquels l'élève peut revoir les diverses notions étudiées. Dans le cas où ces pages existent, leur corrigé est proposé à la fin du livre.

Les deux manuels sur lesquels nous allons nous attarder sont les suivants : « Maths 6^{ème} » dans la collection « Cinq sur cinq » aux éditions Hachette, et « Maths et clic 6^{ème} » publié par les éditions Bordas. Ce sont les deux manuels qui sont utilisés au collège Louis Lumière de

Marly-le Roi (78160) où une partie de notre recherche a été effectuée. Les professeurs ont fait le choix de ces éditions pour les raisons suivantes : le premier parce qu'il semble à la fois en accord avec le programme et accessible aux élèves du collège ; le second parce qu'il représente une interprétation simplifiée du programme et est utilisée dans les classes à petit effectif où les élèves sont notoirement en difficultés, en particulier en Mathématiques et en Français. De plus le manuel publié aux éditions Bordas présente l'intérêt d'avoir un livre du maître particulièrement étoffé avec non seulement la réponse aux différents exercices mais aussi des suggestions d'activités complémentaires, les justifications des choix pédagogiques du manuel de l'élève et d'une manière générale des informations issues de la recherche en Didactique, informations rarement évoquées dans les documents mis à la disposition des enseignants. Là encore nous nous limiterons à comparer ce qui est proposé dans le manuel de l'élève à propos des triangles particuliers.

5.2.1. CINQ SUR CINQ 6^{ème} (HACHETTE)

Dans le manuel « Cinq sur cinq » les triangles isocèle et équilatéral ne sont pas l'objet d'un chapitre entier mais sont évoqués à deux reprises. Une première fois, la définition de chacun est rappelée dans le chapitre sur les longueurs et une seconde fois dans le cadre de l'étude des figures avec axes de symétrie.

La définition du triangle isocèle et du triangle équilatéral et leur usage se trouvent dans le chapitre 9 intitulé « Avec un compas et une règle » (voir annexe 1). Tout d'abord une page entière des activités (p.131) est consacrée à l'identification d'un triangle isocèle et à la reconnaissance d'un triangle équilatéral comme un triangle isocèle particulier. Les élèves sont immédiatement confrontés aux dessins à main levée et codée. Ils doivent aussi argumenter leurs réponses. Dans la partie institutionnalisée « Retenir notions et méthodes », une page est consacrée à chaque triangle (pp.134-135) et il est clairement précisé qu'un triangle équilatéral est « trois fois » isocèle. Les exercices d'application ou d'approfondissement sont ensuite répartis dans plusieurs rubriques : « Appliquer le cours » ; « Evaluation » ; « Soutien » ; « Lire, comprendre et rédiger » et « S'exercer et approfondir ». Au total dans le chapitre 9, 35 exercices ou activités sont proposées. A ce stade du déroulement du programme, aucune propriété des angles n'est évoquée. L'intention des auteurs est, à l'évidence, de donner à l'enseignant un choix d'activités aussi large que possible où les élèves mettent en œuvre une conception de plus en plus abstraite de la définition et des propriétés de ces triangles

particuliers. On y trouve en effet des situations où les dessins sont faits avec des traits « droits », des tracés à main levée avec codages, des constructions à partir d'un texte ou d'un schéma, des analyses de sous-figures, quelques justifications à donner, etc. Il nous paraît important de noter ici que lorsque la démonstration de la réponse échappe à l'élève parce qu'il n'a pas les connaissances géométriques suffisantes, celle-ci n'est pas demandée et la question est alors posée avec prudence : « Les segments [BD], [CE] et [AF] semblent-ils de la même longueur ? (*Utilise un compas pour répondre*) » (n°66 p.143).

Les triangles particuliers sont aussi étudiés dans le chapitre 15 « Figures symétriques » pour leur propriétés de symétrie axiale et les égalités d'angle. Une activité (p.228) fait l'objet de la recherche des axes de symétrie des triangles. Une page de cours est consacrée aux deux triangles particuliers que sont le triangle isocèle et le triangle équilatéral. Sur l'ensemble des huit pages d'exercices à propos des figures avec axes de symétrie, on dénombre 32 exercices sur les triangles particuliers.

Dans le « Livret d'exploitation pédagogique », à propos du chapitre 9, on trouve tout d'abord le rappel du programme en termes de compétences exigibles et les commentaires qui les accompagnent. Puis des commentaires sont proposés, dont l'objet est de rappeler ce qui a pu être fait au cycle 3 et ce qui est donc à faire en 6^{ème}. Ici, l'accent est mis sur l'incitation « à coder sur les figures toutes les informations contenues dans un énoncé (et celles que l'on déduit au fur et à mesure de la résolution d'un problème) et sur « l'introduction des figures à main levée » dès le début de la classe de 6^{ème}. La correction de chaque exercice est précédée d'un commentaire qui précise les objectifs pédagogiques de celui-ci.

5.2.2. MATHS ET CLIC 6^{EME} (BORDAS)

Dans « Maths et Clic » le chapitre 11 a pour titre « Triangles ». La partie « Revoir et découvrir » (p.135) est entièrement consacrée à l'introduction de la mesure des angles et nullement au rappel des connaissances sur les triangles particuliers (voir annexe 1). Les triangles particuliers font l'objet du deuxième paragraphe de cours dont le titre est : « Savoir ». Il nous semble important de noter ici que les axes de symétrie des triangles isocèles et rectangles sont mentionnés alors que l'étude de la symétrie axiale sera l'objet du chapitre suivant. Lui faisant face, la partie « Savoir-faire », est essentiellement réservée à la construction d'angles et de triangles avec mesure d'angles. Les exercices sont ensuite répartis selon quatre rubriques qui suggèrent une progression dans la difficulté : « Appliquer » ;

« S'entraîner » ; « Rechercher » et « Lire et écrire en maths ». De plus deux séries de questions auto-corrigées sont proposées : « Ai-je bien compris ? » et « Maintenant je sais ». L'ensemble est complété par une courte rubrique intitulée « Soutien » dans laquelle l'élève doit décalquer et identifier des triangles particuliers (n°S2 p. 144). En tout 30 exercices portent sur la construction, l'identification de triangles particuliers, identification qui en général se fait dans le cadre d'une sous-figure. C'est le cas dans l'exercice n°23 p.139. Le seul cas où on attende une justification de la part de l'élève se situe dans l'exercice n°20 p.139 de la rubrique « Appliquer » dans la catégorie « Résolution de problèmes » où on lui demande : « c) Quelles sont les propriétés du triangle KOI ? Expliquer la réponse. » . Dans les autres exercices la question est posée sous la forme : « Que remarque-t-on ? » ; « Nommer tous les triangles isocèles. » ; « Peut-on voir d'autres triangles ? ».

La différence essentielle entre ce manuel et la plupart de ses concurrents réside en la richesse du « Livre du professeur ». En effet le découpage en chapitre reprend celui du manuel destiné à l'élève mais, chaque chapitre est alors divisé en quatre parties intitulées successivement : « I - Les textes officiels », « II - Extraits des évaluations nationales » ; « III - Eclairage didactique » et « IV - Dans nos classes ». Comme son titre l'indique, l'objet du chapitre II est de donner à titre illustratif du chapitre en cours des résultats obtenus soit lors des évaluations nationales à l'entrée en 6^{ème} soit des résultats obtenus en fin d'année de 6^{ème} dans le cadre des évaluations établies par l'APMEP. Les résultats aux items donnés en exemple sont accompagnés de commentaires qui sont autant d'informations sur les facilités ou les difficultés que les élèves peuvent rencontrer et d'avertissements pour les professeurs dans la gestion de leur classe au quotidien. La particularité du paragraphe III est d'apporter, comme son nom l'indique, un éclairage didactique sur le chapitre en question, ici sur les triangles. Une première information est donnée sur les figures prototypiques et leur rôle dans l'apprentissage des élèves. Une deuxième partie est consacrée au traitement de l'information en géométrie. Sont détaillés à cette occasion, la notion de sous-figure, le statut des propositions en géométrie et l'apprentissage du traitement de l'information selon les prescriptions de Rauscher. De plus des références bibliographiques sont données à chaque fois. Enfin dans le paragraphe IV « Dans nos classes », des activités, autres que celles proposées dans le manuel de l'élève sont présentées de manière très semblable à ce que nous avons rencontré dans les livres du maître de CM2 : objectifs, gestion de la classe, difficultés particulières, matériel nécessaire, durée. Chaque activité fait aussi l'objet d'une analyse

didactique et d'un bilan. C'est le seul « livre du professeur » apportant autant d'informations issues de la recherche en Didactique.

En 6^{ème} les manuels proposent donc des activités qui se situent tant en G1 qu'en G2 ; le passage d'un paradigme à l'autre étant souvent implicite, un effet de contrat didactique. Du point de vue des niveaux de van Hiele, il n'est pas rare que certains exercices relèvent du niveau 3 de déduction informelle.

Nous résumons ici le contenu des quatre manuels sur le sujet des triangles particuliers.

	<i>CM2</i>		<i>6^{ème}</i>	
	<i>CAPMATHS (HATIER)</i>	<i>Maths CM2 (BORDAS)</i>	<i>Cinq sur cinq (HACHETTE)*</i>	<i>Maths et Clic (BORDAS)*</i>
<i>Nombre de pages</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>15</i>	<i>9</i>

Activités d'introduction

<i>Nombre</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>1</i>
<i>Nature des activités</i>	<i>a) description puis identification b) constructions puis propriétés des angles</i>	<i>a) identification b) agrandissement c) dénombrement de triangles rectangles d) patron d'un tétraèdre régulier</i>	<i>a) identification b) construction c) construction + analyse de figure</i>	<i>a) construction</i>

<i>Cours ou mémo</i>	<i>Renvoi au « Dico-maths »</i>	<i>Paragraphe en fin de double page</i>	<i>2 pages + 1 page</i>	<i>1 paragraphe + Figures illustrant un paragraphe</i>
----------------------	---------------------------------	---	-------------------------	--

Exercices :

<i>Construction de figures</i>				
- à partir de figures en vraie grandeur		2	2 + 1	1 +0
- à partir d'un schéma			5 + 3	2 + 0
- à partir d'un texte	5	4	14 + 11	12 + 3
- mixte (texte et schéma)	2		2 + 1	
<i>Analyse de figures ou de situations géométriques</i>				
- à partir de figures réalisées par l'élève	2	5	12 + 9	1 + 0
- à partir d'un schéma			6 + 1	7 + 1
- mixte (texte et schéma)				1 + 0

* : nous avons distingué les contenus de chaque chapitre en les séparant par le signe +.

On retrouve dans ce tableau la diversité de l'interprétation du programme par les différents auteurs. Dans un manuel de 6^{ème} on trouve non seulement plus d'activités en termes d'exercices mais ceux-ci sont plus variés que dans un manuel de CM2. Toutefois, on peut déjà s'étonner que dans les manuels de CM2, la construction de figures soit demandée dans le cadre d'un énoncé verbal et non pas de la reproduction d'une figure en vraie grandeur. En 6^{ème} la plupart des exercices de construction sont complétés par des questions demandant une analyse de la situation ; une justification peut même être demandée, le contrat didactique plus ou moins tacite étant alors de réciter une propriété du cours. L'attitude de l'élève attendue par les auteurs de ces manuels de collège est donc celle d'un théoricien ou à tout le moins d'un apprenti en géométrie axiomatique. Dans une très grande majorité, les activités proposées se situent dans le cadre d'une telle géométrie alors que la situation est moins nette dans les manuels de CM2. On ne peut pas savoir si les dessins réalisés par les élèves sont des dessins-objets ou des dessins-représentants : la confusion existe et l'ambiguïté entre les intentions du

maître et la perception de l'élève n'est pas levée. Que les élèves retiennent-ils de ce genre d'activités ? Sont-ils dans une géométrie encore proche du concret où les dessins qu'ils réalisent et que l'on désigne par figures ne représentent que l'objet dont il est question dans l'énoncé et existent de manière singulière sur leur feuille. Dans quelle mesure l'enseignant est-il informé de cette ambiguïté ? D'après les livres du maître qu'il nous a été donné de consulter, la situation ne semble pas très claire. On pourrait penser qu'implicitement les auteurs se placent dans une géométrie axiomatique mais rien n'est certain : les expressions utilisées pour les définitions, par exemple, sont un exemple de l'ambiguïté de la situation. Dans quel paradigme se placent les auteurs ? Dans quel paradigme les auteurs s'attendent-ils à ce que les élèves de Primaire fonctionnent ?

Si d'après les instructions officielles on pouvait supposer que la géométrie de l'école primaire était plutôt de type G1 et celle du collège une géométrie de type G1 passant à G2, dans les manuels la situation est moins claire. Selon les auteurs, les activités proposées peuvent demander à l'élève de fonctionner en G2 dès le CM2. Dans les manuels de 6^{ème} les situations sont plus variées. Dans tous les cas, les passages d'une géométrie à l'autre, d'un niveau de van Hiele au niveau supérieur ne pourront se faire que si l'enseignant accompagne ses élèves dans cette démarche, les manuels n'étant pas particulièrement explicites à ce sujet.

6. Conclusion

Les programmes français de mathématiques de CM2 et de 6^{ème} semblent manquer de continuité ou, si elle existe, elle n'est pas mentionnée ouvertement en ce qui concerne le passage d'une géométrie concrète et descriptive, ancrée sur une représentation de la réalité, vers une géométrie plus abstraite où les dessins ne sont que des représentants d'objets théoriques sur lesquels on applique un raisonnement hypothético-déductif selon une théorie axiomatique précise. Cette ambiguïté se retrouve au niveau des manuels que nous avons analysés. Or les résultats à l'Evaluation Nationale à l'entrée en 6^{ème}, montre que certaines situations qui relèvent de l'école primaire sont plutôt mal maîtrisées par les élèves comme l'identification d'une sous-figure dans une figure plus complexe alors que le dessin est fait en vraie grandeur, la prégnance des figures stéréotypiques, ou la description de figures. La question se pose alors de savoir si la théorie des paradigmes géométriques ou celle des

niveaux de pensée en géométrie de van Hiele pourraient apporter un éclairage sur ces ruptures et permettre aux enseignants de mieux accompagner leurs élèves dans leurs apprentissages tant en CM2 qu'en 6^{ème}.

Les différents apports théoriques auxquels nous nous sommes référés (Fischbein, Duval) indiquent que le passage d'une géométrie à l'autre n'était ni spontané ni simple pour l'élève. L'intervention de l'enseignant semble donc être déterminante. Dans la mesure où les instructions officielles ne donnent pas de lignes directrices, il nous faut nous appuyer sur les recherches existantes.

Les diverses recherches s'appuyant sur les paradigmes géométriques ont été menées sur des étudiants de PE1. Il est apparu que ceux-ci n'avaient pas toujours une très grande maîtrise de ces paradigmes et qu'ils pouvaient passer d'un paradigme à l'autre à l'intérieur d'un même exercice. On peut alors se poser la question : comment un élève de Primaire arrivant en 6^{ème} va-t-il passer du fonctionnement dans une géométrie naturelle à une géométrie axiomatique naturelle puis axiomatique formaliste, c'est-à-dire changer de paradigme ? En effet, on pourrait imaginer que, si le passage d'un paradigme à l'autre est assuré dans de bonnes conditions à l'entrée au collège, le fonctionnement en géométrie sera plus cohérent les années suivantes.

La plupart des recherches sur les niveaux de van Hiele ont été menées sur des élèves de collège, de lycée voire d'université. Il a été constaté qu'un élève pouvait témoigner de différents niveaux de van Hiele selon les activités qui lui étaient proposées. Nous avons vu aussi qu'avec un certain apprentissage, il pouvait y avoir certaines améliorations pour quelques étudiants déjà « favorisés », c'est-à-dire ayant la maîtrise d'au moins le niveau d'analyse de van Hiele. Là encore les enquêtes menées sur des élèves de primaire ou de début de collège font défaut. On peut alors se poser la question de savoir si, à l'école primaire, un élève maîtrise de façon plus ou moins complète plusieurs niveaux de van Hiele selon les différentes tâches que l'on peut lui proposer.

Que ce soit les niveaux de van Hiele ou les paradigmes géométriques, ils ont, la plupart du temps, été déterminés par des tests papier-crayon. Donc selon l'analyse qu'on en fait, la même tâche peut être appréhendée selon l'une ou l'autre de ces théories et interprétée en termes d'acquisition d'un niveau particulier de van Hiele ou de fonctionnement dans un paradigme

donné. S'ensuit immédiatement la question : y a-t-il un lien quelconque entre les niveaux de van Hiele et les paradigmes géométriques ?

7. Questions de recherche

Après l'exposé de cette problématique, les questions de recherche que nous nous proposons d'étudier sont les suivantes :

7.1. A propos des paradigmes géométriques

- 7.1.1. Peut-on au travers d'une activité déterminer le paradigme dans lequel un élève de CM2 ou de 6^{ème} fonctionne ?
- 7.1.2. Le paradigme de fonctionnement dépend-il du niveau de scolarité ? Est-ce que tous les élèves de CM2 et de 6^{ème} fonctionnent dans le même paradigme pour une tâche donnée ?
- 7.1.3. Le paradigme de fonctionnement dépend-il de la tâche ? Un même élève de CM2 ou de 6^{ème} peut-il changer de paradigme en fonction de la tâche ?
- 7.1.4. Les élèves de CM2 ou de 6^{ème} peuvent-ils aussi fonctionner dans des pseudo-paradigmes ?

7.2. A propos des niveaux de van Hiele

- 7.2.1. Peut-on identifier le niveau de van Hiele maîtrisé par un élève de CM2 ou de 6^{ème} au travers d'une tâche écrite ?
- 7.2.2. Pour une tâche donnée, les élèves de CM2 et de 6^{ème} témoignent-ils tous du même niveau de van Hiele ?
- 7.2.3. Un même élève de CM2 ou de 6^{ème} peut-il maîtriser des niveaux de van Hiele différents selon la tâche qui lui est proposée ?

7.3. A propos du cadre théorique

- 7.3.1. Peut-on associer les paradigmes géométriques et les niveaux de van Hiele ? Y a-t-il un lien de dépendance entre les deux géométries G1 et G2 et les niveaux de van Hiele ?
- 7.3.2. Le niveau d'analyse de van Hiele peut-il être considéré comme la zone de « tuilage » entre les géométries spatio-graphique (G1) et proto-axiomatique (G2) ?
- 7.3.3. Peut-on caractériser les activités qui favorisent le passage de G1 à G2 et qui respecteraient la hiérarchie proposée par la théorie des niveaux de van Hiele ?

METHODOLOGIE

Dans ce chapitre nous exposerons l'ingénierie mise en œuvre pour répondre aux questions que nous nous sommes posées à savoir :

- La théorie des paradigmes géométriques est-elle applicable à des élèves de CM2 ou de 6^{ème} ? Si oui peut-on lier la « géométrie » dans laquelle un élève fonctionne à un paradigme déterminé ? S'il existe, ce paradigme dépend-il aussi de la tâche qui est proposée à l'élève ? Peut-on trouver en CM2 ou en 6^{ème} des élèves qui fonctionnent dans un pseudo-paradigme au sens défini par Jore ?
- La théorie des niveaux de pensée en géométrie de van Hiele est-elle applicable à ces niveaux de scolarité ? Si oui, peut-on caractériser un élève par le niveau de van Hiele qu'il maîtrise ? De plus, le niveau de van Hiele dont un élève témoignerait dépend-il de la tâche qui lui est prescrite ?
- Plus généralement, y a-t-il un lien entre les paradigmes géométriques et les niveaux de van Hiele quand on peut les identifier chez un élève ? dans un tel cas, le niveau d'analyse sera-t-il la zone de « tuilage » entre les deux géométries G1 et G2 ? Quelles en seraient alors les caractéristiques ?

Pour cela nous avons fait appel à deux groupes d'élèves de CM2 d'une part et de 6^{ème} d'autre part, auxquels nous avons proposé les mêmes tâches écrites. Chaque tâche doit pouvoir être révélatrice d'un niveau de van Hiele et demander à l'élève de fonctionner dans un paradigme précis. De plus, les élèves de ce niveau n'étant pas habitués aux narrations de recherche, les réponses doivent pouvoir être exprimées en quelques mots.

1. Population étudiée : les élèves des écoles primaires (CM2) et du collège (6^{ème}) du secteur de Marly le Roi (78160)

Comme nous l'avons signalé dans la Problématique, nous avons choisi de mener notre enquête sur ce secteur scolaire parce que depuis plusieurs années, les résultats obtenus à l'Evaluation nationale à l'entrée en 6^{ème} sont, très régulièrement, supérieurs d'environ 5% aux résultats nationaux. Nous pouvons donc considérer que la population est une représentation plutôt favorable d'un échantillon national. En particulier, les élèves non francophones sont très peu nombreux et la rédaction d'un court texte en français n'est pas une difficulté à prendre en compte. C'est pourquoi nous avons retenu ces élèves pour notre étude. Nous avons

là deux groupes de 250 élèves environ soit un effectif global proche de 500 sujets. Dans le cadre d'une étude comme celle-ci où l'objectif est de tester des outils théoriques, la taille de l'échantillon est suffisante pour nous permettre de mener une analyse statistique.

2. Construction de l'outil

2.1. Organisation matérielle

Compte tenu de la taille de cet échantillon, nous avons décidé de mener l'enquête sous la forme d'un questionnaire papier-crayon anonyme à distribuer aux élèves. Afin d'établir les comparaisons qui nous intéressent, c'est le même questionnaire qui a été distribué aux élèves, qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème}. Les diverses études sur lesquelles nous nous sommes appuyée ont montré qu'un même élève pouvait témoigner de divers niveaux de van Hiele et changer de paradigme selon la compréhension qu'il avait de la tâche qui lui était donnée. Mais, pour ne pas surcharger les élèves, le choix a donc été fait de donner deux tâches à chaque élève ; les deux tâches étant a priori de natures et de difficultés différentes afin de repérer les différences de comportements si elles existent. Nous avons pour cela imaginé un certain nombre d'activités dont les consignes sont brèves et qui peuvent être réalisées en un court laps de temps pour que l'ensemble des deux activités puisse être menées à terme en 20 minutes par un élève de CM2 ou de 6^{ème}. Ces tâches ont été désignées par « exercice » sur les questionnaires pour ne pas troubler les élèves dans leur approche de l'activité. Pour les mêmes raisons, nous avons gardé l'appellation « figure » pour tous les dessins que nous avons proposés quelle qu'en soit le rôle : dessin-objet ou dessin-représentant (cf : F. Jore ; 2006 ; p.35)

2.2. Choix des « exercices »

Nous devons concevoir des tâches de difficultés variables relevant très nettement d'un paradigme ou d'un autre, caractérisant un niveau de van Hiele précis mais permettant néanmoins à un élève de cet âge de fournir une réponse au moins partielle. Enfin la première tâche proposée à l'élève devait être plus accessible que la seconde afin de le mettre en confiance et lui permettre d'exprimer toutes ses compétences en géométrie.

Chaque tâche est associée à une composante particulière d'un paradigme et d'un niveau de van Hiele.

Dans une géométrie spatio-graphique (G1), l'élève doit pouvoir mesurer sur le dessin, la validation d'un résultat dépendant de la précision de la mesure. La perception est aussi un moyen de validation alors que dans une géométrie proto-axiomatique (G2), c'est par le raisonnement que toute réponse est validée. De plus l'élève qui fonctionne dans une géométrie plus théorique a une conception « inclusive »²⁸ des définitions des figures particulières, ce qui n'est pas le cas dans un paradigme spatio-graphique. Dans le même paradigme, la figure est un représentant de l'objet géométrique théorique et le rôle du codage est compris.

Dans le même temps, nous devons pouvoir identifier les divers niveaux de van Hiele. Le premier niveau d'identification-visualisation demande que l'on propose aux élèves de reconnaître les figures d'après leur apparence : la validation est essentiellement perceptive. Un élève au niveau d'analyse peut décoder un schéma, repérer les sous-figures à l'intérieur d'une figure plus complexe mais ne fait aucun lien entre les différents éléments qu'il a mis en évidence.

Les domaines de la géométrie que nous avons privilégiés sont les triangles particuliers, les quadrilatères particuliers et le cercle à la fois parce qu'ils sont objets d'étude dans les programmes de l'école primaire et du collège et parce que ce sont des figures notoirement connues des élèves.

Les présentations des situations sont faites soit sous la forme d'un dessin réalisé à la règle et en vraie grandeur, reproduit à l'échelle ou tracé à main levée. Il peut aussi s'agir d'une description littérale de la situation. L'usage complet de théorèmes ou de définitions ne saurait être déterminant au cours de l'épreuve.

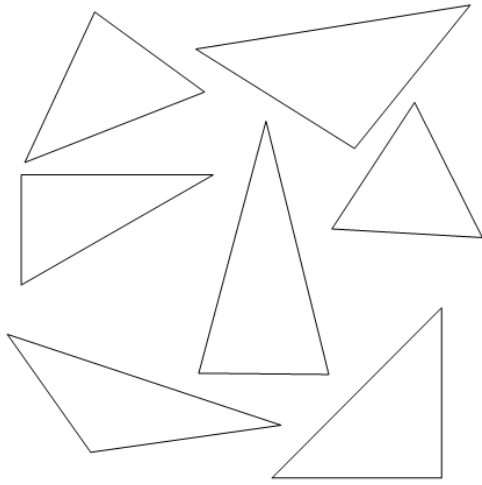
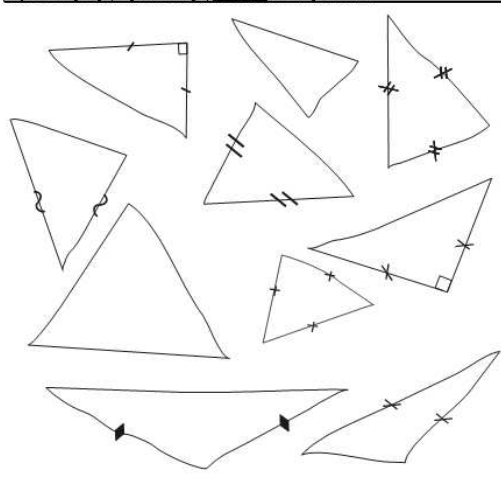
Les tâches proposées au recto portent sur l'identification de triangles isocèles (5 versions), ou de rectangles (3 versions). Les « exercices » sont numérotés de 1.1. à 1.8. (voir annexe 2).

²⁸ Nous entendons par conception « inclusive » des définitions des figures le fait que l'élève accepte qu'un triangle équilatéral ou un triangle isocèle-rectangle soient des triangles isocèles particuliers, tout comme le carré est un rectangle particulier, etc.

La caractéristique commune à tous ces exercices est que l'élève donne sa réponse en rayant des dessins ou des phrases. Il arrive qu'on lui demande un nom mais jamais il n'a une phrase complète à rédiger dans cette première partie.

Ainsi à propos des triangles isocèles, nous avons convenu que l'on devait demander aux élèves de reconnaître à vue ou en mesurant sur des dessins en vraie grandeur les triangles isocèles parmi plusieurs figures dont un triangle équilatéral. Un élève qui ne maîtrise que le niveau d'identification-visualisation de van Hiele peut répondre : s'il ne maîtrise la définition que dans la perception, il ne retrouvera pas facilement les triangles isocèles qui seront dessinés en biais dans la feuille et encore moins le triangle équilatéral. Les différentes appréhensions d'une figure telles que Duval les a décrites sont accessibles dans ces exercices.

Nous avons donc retenu les « exercices » suivants :

<p>Rappel: Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.</p> <p>Exercice 1.1</p> <p>Raye les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles. (Si tu n'y arrives pas à la règle, prends ton compas.)</p> 	<p>Exercice 1.2</p> <p>Rappel: Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.</p> <p>Observe bien les triangles qui ont été dessinés à main levée. Dans chaque triangle, quand des côtés doivent avoir la même longueur, on les a indiqués avec la même marque. Sinon, il n'y a aucune marque.</p> <p>Raye les triangles qui, d'après les codages, ne sont pas des triangles isocèles.</p> 
--	---

Exercice 1.3.
Rappel: Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les triangles qui ont été dessinés au hasard, soit à la règle soit à main levée. Dans chaque triangle, quand des côtés devraient avoir la même longueur, on les a indiqués avec la même marque. Sinon il n'y a aucune trace.

Rayer les triangles qui, d'après les codages, **ne sont pas** des triangles isocèles.

Pour bien mettre les élèves en confiance et ne pas tester des connaissances mémorisées, la définition du triangle isocèle telle qu'elle est donnée en 6^{ème} est rappelée dans tous les cas où elle est nécessaire ; celle du triangle équilatéral en revanche n'est jamais donnée. L'intention est de suggérer aux élèves qui seraient prêts à l'accepter et de rassurer ceux qui en auraient douté, que le triangle équilatéral est un triangle particulier. La consigne est la même dans les trois versions de cette tâche : « Rayer les triangles qui ne sont pas isocèles. » Nous avons retenu cette expression afin d'identifier les élèves qui considère que le triangle équilatéral n'est pas un triangle isocèle et qui ont alors une conception exclusive des définitions des triangles particuliers.

L'objectif du premier exercice tel qu'il est présenté ici est de proposer aux élèves une activité qui s'apparente à ce qu'ils ont l'habitude de rencontrer en CM2. Cette tâche devrait donc être particulièrement accessible aux élèves même les plus en difficultés. Les traits sont tracés à la règle et la validation peut se faire par la perception ou par la mesure. En particulier on a choisi de placer le triangle isocèle prototypique (acutangle et visiblement non équilatéral) au centre de la feuille pour permettre aux élèves d'amorcer leur recherche en confiance (niveau 1 de van Hiele d'identification-visualisation). Pour les mêmes raisons les côtés perpendiculaires des triangles rectangles ont été dessinés parallèles aux bords de la feuille. Le triangle équilatéral est lui aussi en position prototypique : sa reconnaissance comme un triangle isocèle sera un argument de fonctionnement en G2, son élimination, d'un fonctionnement en G1. Le niveau d'analyse se traduit par la vérification de la longueur de tous les côtés des

triangles dans toutes les positions. L'élève à ce niveau de van Hiele accepte qu'un triangle rectangle puisse être isocèle (les élèves de 6^{ème} connaissent l'expression) mais ne reconnaît pas le triangle équilatéral comme un triangle particulier.

La variable didactique utilisée dans la deuxième tâche est le tracé des triangles à main levée. Il est d'ailleurs précisé en caractère gras que seul le codage est à prendre en compte. Les codages ont été répartis sur l'ensemble des triangles de façon à ce qu'il y ait pour certains élèves « conflit entre le su et le perçu ». En particulier il a été décidé de coder comme équilatéral un triangle d'aspect isocèle (non équilatéral) de façon à repérer les élèves qui se déterminent à vue ou par la mesure c'est-à-dire qui fonctionnent en G1. Ces élèves pourraient accepter les triangles sans codage et qui ont l'aspect de triangle isocèle. Ceux qui ne maîtrisent que le niveau d'analyse de van Hiele, devraient donner sens au codage et rejeter les deux triangles équilatéraux.

Dans la troisième version de l'élimination des triangles qui ne sont pas isocèles, nous avons choisi de présenter les triangles en mélangeant les types de représentation : dessin à main levée, tracé à la règle. Il est encore rappelé que seul le codage doit être pris en compte. Nul doute pour autant que les élèves qui ne maîtrisent que l'identification-visualisation se détermineront de manière perceptive, confortés dans leur démarche par les dessins à la règle. Ceux qui maîtrisent le niveau d'analyse devraient faire les mêmes choix que dans la tâche précédente. Les élèves qui fonctionnent en G1 se déterminent après avoir mesuré et devraient faire des choix qui les amènent à rejeter les triangles isocèles particuliers.

Exercice 1.4.		Exercice 1.5.	
<p>Rappel: Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.</p> <p>Observe bien les descriptions des figures. Dans tous les cas tu dois t'intéresser au triangle ABC qui est contenu dans la figure. Raye les triangles qui, d'après les informations, ne sont pas des triangles isocèles.</p>		<p>Rappel: Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.</p> <p>Observe bien les descriptions des figures. Dans tous les cas tu dois t'intéresser seulement au triangle ABC qui est contenu dans la figure. Raye les triangles qui, d'après les informations, ne sont pas des triangles isocèles.</p>	
Triangle n°1	Les côtés [AB] et [BC] sont de la même longueur (4 cm).	Triangle n°1*	Les côtés [AB] et [BC] sont de la même longueur (4 cm).
Triangle n°2	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).	Triangle n°2*	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°3	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4 cm).	Triangle n°3*	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.
Triangle n°4	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.	Triangle n°4*	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.
Triangle n°5	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4 cm).	Triangle n°5*	Les segments [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD.
Triangle n°6	L'angle de sommet B est un angle droit.	Triangle n°6*	L'angle de sommet B est un angle droit.
Triangle n°7	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont trois longueurs différentes. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].	Triangle n°7*	Le quadrilatère ABEC est un losange.
Triangle n°8	Les segments [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD.	Triangle n°8*	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°9	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.	Triangle n°9*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°10	Le quadrilatère ABEC est un losange.	Triangle n°10*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont trois longueurs différentes. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].
<p><i>Si cela peut t'aider, tu peux faire des dessins. Mais n'oublie pas de numéroter les triangles que tu dessines et fais ensuite toutes les traces de ton travail (mesures à la règle, traces de compas, ...)</i></p>		<p><i>Si cela peut t'aider, tu peux faire des dessins. Mais n'oublie pas de numéroter les triangles que tu dessines et laisse ensuite toutes les traces de ton travail (mesures à la règle, traces de compas, ...)</i></p>	

Nous avons fait le choix de proposer aussi aux élèves deux versions de recherche de triangles isocèles dans le cadre d'une présentation verbale. Nous avons donc imaginé une série de dix présentations tout d'abord dans un ordre que nous supposons croissant de difficulté puis dans un ordre aléatoire. La possibilité est offerte à l'élève de dessiner les figures s'il le souhaite. Les sept premières phrases sont des descriptions de triangle. Dans les trois dernières présentations, le triangle ABC est isocèle en A mais il est une sous-figure de la situation décrite. Ici il n'est pas demandé à l'élève d'expliquer sa démarche, seul sa position compte. En effet selon qu'il accepte ou qu'il rejette les cas particuliers de triangles isocèles il fonctionne dans un paradigme ou dans l'autre. Par ailleurs l'élève au niveau d'identification-visualisation ne peut accepter que les triangles où deux et uniquement deux longueurs égales sont explicitement mentionnées. L'élève au niveau d'analyse pourra davantage accepter les triangles isocèles dont on précise une particularité mais rejettera lui aussi le triangle équilatéral. Dans les deux cas les élèves devraient avoir des difficultés à retrouver les triangles isocèles dans les sous-figures. Pour nous assurer que les trois cas de sous-figures n'ont pas été acceptés par les élèves ne maîtrisant que le niveau d'analyse ou le niveau d'identification-visualisation, nous avons donné une autre version de cette tâche dans laquelle les descriptions sont proposées dans un ordre aléatoire.

Nous avons ensuite imaginé des travaux sur les quadrilatères organisés eux aussi sur la reconnaissance des figures, l'inclusion des quadrilatères particuliers et le respect simultané des contraintes. Pour cela nous avons déjà imaginé le dessin à la règle de plusieurs polygones en demandant aux élèves de retrouver celles qui :

- sont des quadrilatères,
- ont leurs côtés de la même longueur deux à deux,
- ont au moins un angle droit.

Afin d'aider les élèves, nous avons dessiné la plupart des figures dans des positions prototypiques, les côtés des angles droits étant parallèles aux bords de la feuille, à l'exception du carré. Or l'expérience nous dit que dans le cadre numérique une telle recherche est souvent très bien réussie. Aussi toujours pour aider les élèves nous avons proposé en première partie de l'activité la recherche d'un nombre, pas trop grand ni trop petit, dans une table de multiplication connue des élèves, celle de 5, respectant deux autres critères : être impair et compris entre 29 et 43. Il a été montré par ailleurs (Hoyle et Healy, 1998 ; Braconne, 2001) que dans le domaine de la démonstration, il n'y avait pas de transfert de compétences entre l'algèbre et la géométrie. Ici, il n'est pas question de démonstration mais simplement de

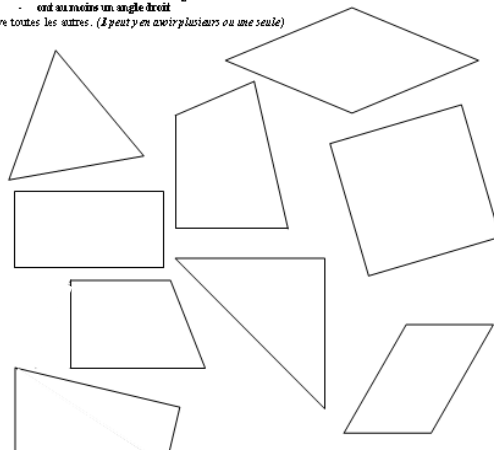
transfert de démarche : il s'agit d'éliminer successivement les nombres ou les figures qui ne conviennent pas au fur et à mesure de l'application des contraintes. Afin de mettre en évidence les démarches des élèves dans la partie numérique nous avons fait le choix d'établir deux versions de cette tâche : l'une avec grille de nombres, l'autre sans grille. Dans la partie géométrie, nous demandons aussi aux élèves de nommer les quadrilatères qui restent, à savoir le rectangle et le carré. Dans un deuxième temps nous avons ajouté le cerf-volant, figure moins connue des élèves, mais respectant les contraintes proposées.

Exercice 1.6 : « Portrait de nombres »
 Ces 11 nombres sont connus comme 1, 3, 5, 7...
 Ils ont la même parité.
 Il n'y a plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

Il n'y a plus aucun nombre dans le 100

Exercice 1.6 : « Portrait de figures »
 Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, a h fois :
 - sont des quadrilatères
 - ont leurs côtés de la même longueur deux à deux
 - ont au moins un angle droit
 Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)



Connais-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le

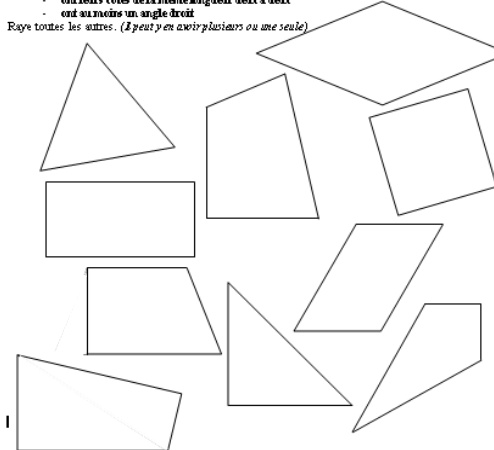
Exercice 1.8 : « Portrait de nombres »
 Ces 11 nombres sont connus comme 1, 3, 5, 7...
 Ils ont la même parité.
 Il n'y a plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

Il n'y a plus aucun nombre dans le 100

1	2	3								10
11										
21										
31										
41										50

Exercice 1.8 : « Portrait de figures »
 Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, a h fois :
 - sont des quadrilatères
 - ont leurs côtés de la même longueur deux à deux
 - ont au moins un angle droit
 Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)

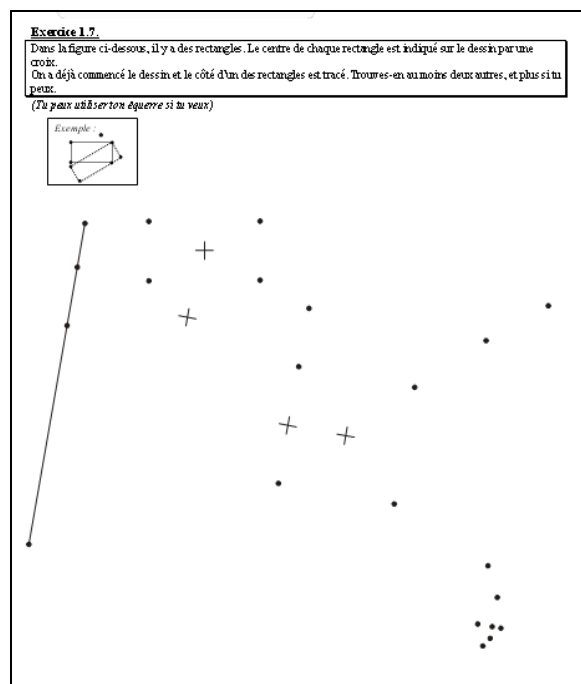


Connais-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le

Ces « exercices » peuvent être résolus dans G1 en mesurant et en respectant les contraintes indépendamment les unes des autres. Contrairement à la sélection des triangles isocèles, ici le choix a été de ne pas donner le nom des quadrilatères attendus mais de le demander. L'intérêt pour nous est donc dans le respect simultané des contraintes sur l'ensemble des figures proposées. L'interprétation de l'expression « au moins un angle droit » servira aussi d'indicateur pour un fonctionnement dans un paradigme ou dans l'autre. Dans une géométrie proto-axiomatique, les figures ayant plus d'un angle droit sont acceptables alors qu'elles ne le sont pas dans G1. A propos des niveaux de van Hiele, dans ces activités, nous devrions distinguer les élèves qui se situent au niveau d'analyse de ceux qui sont au niveau de déduction informelle en ce que ces derniers seront les seuls à accepter le carré comme une figure respectant toutes les contraintes requises : c'est un quadrilatère, il a au moins un angle droit et ses côtés ont la même longueur deux à deux même s'ils sont isométriques. En effet les

élèves qui ne maîtrisent que le niveau d'analyse devraient rejeter en même temps le losange et le carré.

Enfin nous voulions demander aux élèves un travail de dessins dans lequel ils pourraient tout autant être dans G1 que dans G2 et témoigner de divers niveaux de van Hiele. Nous avons choisi le rectangle en demandant de retrouver tous les rectangles dans un nuage de points. Même si cette tâche est nettement plus ardue que les précédentes dans la mesure où l'élève est acteur de sa réponse, il n'a pas encore à exprimer son raisonnement ni sa démarche.

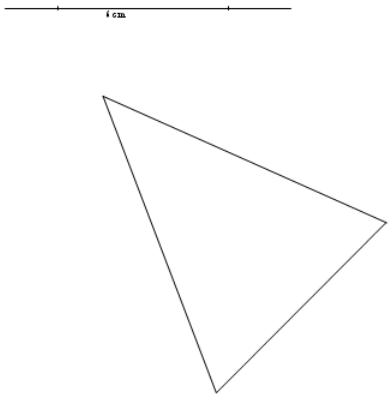
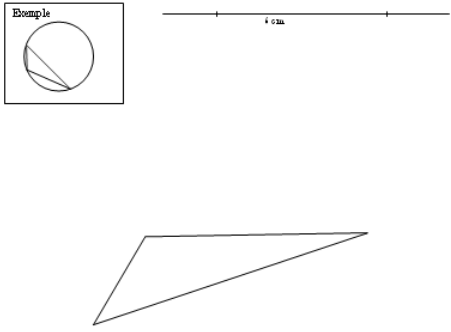


Pour nous assurer d'une bonne compréhension de la consigne, nous avons donné aux élèves un exemple dans une vignette. Parmi les rectangles le plus simple se trouve en haut à gauche et ses côtés sont parallèles aux bords de la feuille. Ce rectangle peut être retrouvé par un élève qui ne fonctionne qu'en G1 et ne maîtrise que le niveau d'identification-visualisation. Il y a aussi un très grand rectangle dont les dimensions sont à la limite du micro-espace et demandent une vérification qui amène l'élève à fonctionner en G2. Or, a priori, cette tâche se situe dans G1 puisque l'élève utilise les instruments, mais il convoque aussi des résultats de G2 (considérée alors comme une technologie de G1) pour effectuer ses vérifications (égalité des longueurs des côtés, angles droits) ; c'est pourquoi nous considérons que la recherche de ce très grand rectangle est rattachée à G2. On peut aussi résumer la situation en disant que l'utilisation des instruments n'a d'intérêt que si l'élève sait ce qu'il veut en faire, c'est-à-dire

convoquer des résultats de G2. Pour limiter les pertes de temps en recherche, nous avons fait le choix de donner l'un des côtés de ce rectangle. En revanche, un des sommets doit être déterminé avec grande précision c'est-à-dire en respectant avec soin toutes les propriétés du rectangle. Au centre de la feuille, et dans la même orientation nous avons placé un carré et un rectangle de taille moyenne. L'élève qui trouve le carré et le très grand rectangle fonctionne ici en G2 avec des allers-retours en G1 pour valider son raisonnement. Là encore, l'utilisation des instruments ne saurait être assimilée à un fonctionnement en G1 si elle a lieu dans une intention précise, c'est-à-dire pour faire des vérifications (G2) Nous avons fait le choix d'indiquer les centres des rectangles pour suggérer aux élèves le nombre de rectangles à trouver et les inciter à accepter le carré comme rectangle particulier. On peut s'attendre à ce que les élèves de CM2 en particulier ne tiennent pas compte de cette précision. Le nombre et la nature des rectangles trouvés par un élève devrait nous renseigner sur le niveau de van Hiele qu'il maîtrise ici depuis la reconnaissance du rectangle dont les côtés sont parallèles aux bords jusqu'à la construction des quatre rectangles, soit depuis le niveau d'identification-visualisation jusqu'au niveau de déduction informelle.

Les objectifs de notre recherche étant d'identifier si possible les paradigmes géométriques dans lesquels les élèves fonctionnent et les niveaux de van Hiele qu'ils ont atteints, nous avons imaginé une deuxième tâche pour chacun des élèves dans laquelle l'expression personnelle aurait une plus large part, sans toutefois qu'il soit question de demander une démonstration dans un langage formel. Cette seconde tâche se trouve au verso de la feuille de questionnaire.

Nous devons donc nous limiter à demander aux élèves comment ils avaient procédé ou comment ils comprenaient la situation géométrique qui leur était proposée. Le rôle du schéma à main levée et son interprétation devenaient essentiels pour mettre en évidence certaines incidences. Pour autant nous ne voulions pas nous limiter à proposer des activités où l'élève aurait à se prononcer sur la représentation qu'il se faisait de d'une situation géométrique. Nous voulions, comme dans la première série, mettre certains élèves en position d'acteur de leur raisonnement. C'est ainsi que nous avons imaginé le tracé du cercle circonscrit au triangle en donnant le rayon de celui-ci.

<p>Objet : ... Exercice 2.4. On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle. Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait 6 cm de rayon. À toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.</p>  <p>Raconte comment tu as fait.</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>Objet : ... Exercice 2.5. On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle. Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait 6 cm de rayon. À toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.</p> <p>Exemple</p>  <p>Raconte comment tu as fait.</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

Dans un tel travail, l'élève travaille dans G1 (selon la tâche prescrite) en utilisant les résultats de G2 (voir plus haut à propos de la recherche des rectangles, exercice 1.7.). C'est pourquoi nous classerons l'élève qui réussit dans G2. En effet, il doit non seulement changer de point de vue sur la définition du cercle en utilisant les sommets du triangle comme centre des arcs de cercle mais il doit le faire en n'utilisant que deux des trois sommets. Il agit avec son compas dans la précision de la mesure après avoir raisonné dans une géométrie plus théorique. L'élève qui recherche le centre du cercle circonscrit par essais-erreurs en piquant au hasard son compas ouvert à 6 cm fonctionne dans une géométrie spatio-graphique. Du point de vue des niveaux de van Hiele, l'élève qui réussit à tracer le cercle passant par les trois sommets par essais-erreurs est sans doute au niveau d'analyse. Il a réussi à respecter toutes les contraintes mais n'a pas été en mesure de les relier entre elles pour établir un raisonnement ; il n'a pas su non plus utiliser la définition du cercle en changeant de point de vue.

Au stade de la scolarité des élèves auxquels nous nous adressons, nous pouvons considérer que tous connaissent les définitions du cercle, du carré et du triangle équilatéral. Par expérience et les résultats à l'évaluation nationale à l'entrée en 6^{ème} le confirment, nous savons aussi que les élèves ont du mal à gérer simultanément ces trois définitions et les égalités de longueur qui y sont associées. Aussi nous avons imaginé une situation géométrique dans laquelle le rayon d'un cercle est aussi le côté d'un triangle équilatéral et

d'un carré. L'objectif est alors de savoir si les élèves sont sensibles aux incidences entre les points. Pour cela nous devons proposer trois situations dans lesquelles la variable didactique serait la représentation de cette situation : la situation est correctement illustrée, tel qu'il est dessiné le triangle ne peut pas être isocèle et tel qu'il est dessiné le carré est n'en est pas un.

Objet : ...
Exercice 2.1.
 Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

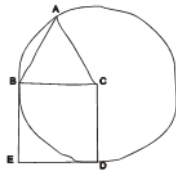
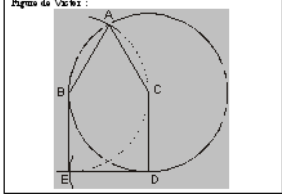


Figure de Victor :



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Pense-tu qu'elle est juste ?
 Donne tes explications.

.....

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

Objet : ...
Exercice 2.2
 Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

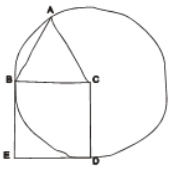
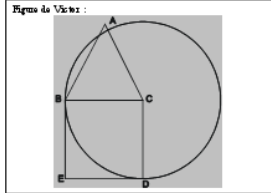


Figure de Victor :



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Pense-tu qu'elle est juste ?
 Donne tes explications.

.....

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

Objet : ...
Exercice 2.3.
 Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

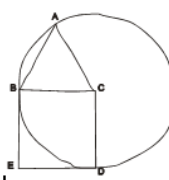
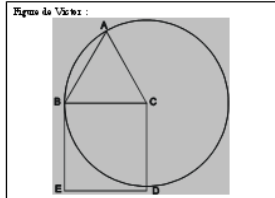


Figure de Victor :



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Pense-tu qu'elle est juste ?
 Donne tes explications.

.....

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

A chaque fois, la situation est décrite en français, illustrée par un schéma sans codage où les incidences entre les points sont respectées et la « reproduction réduite de la figure proposée par Victor ». La réduction est telle que les tracés inopportuns mesurent 3 cm c'est-à-dire leur longueur réelle. Pour ne pas surcharger les figures faites par Victor, il a été décidé de dessiner le carré en position prototypique et de ne pas coder ses angles droits. La possibilité est offerte

aux élèves de refaire leur propre figure. Face à de telles situations les élèves qui ne peuvent fonctionner qu'en G1 devraient comparer les schémas et les reproductions en mesurant avant de se déterminer. Les élèves qui utilisent G2 devraient identifier les sous-figures et peut-être même organiser une argumentation autour de la justesse ou de l'erreur dans la construction de Victor. Du point de vue des niveaux de van Hiele, l'élève au niveau d'identification-visualisation se prononcera après avoir comparé dans leur globalité le schéma et la figure, oubliant que celle-ci est une réduction et argumentant sur les mesures. L'élève qui maîtrise le niveau d'analyse pourra nommer les sous-figures et, après mesurage, préciser si elles sont justes ou non. Un tel élève ne fera pas de lien entre les définitions du carré et du cercle en évoquant les égalités de longueur ; il constatera des faits. L'élève au niveau de déduction informelle saura arguer du fait que les sommets sont ou ne sont pas sur le cercle et se déterminera en fonction de ce qu'il verra sur la reproduction sans avoir besoin de refaire la figure pour s'en convaincre. Le fait de refaire la figure n'aura pas nécessairement d'incidence sur la réponse que les élèves donneront. Ils pourront tout aussi bien reproduire la figure réduite et l'utiliser pour la comparaison avec le schéma ou la construire en vraie grandeur et conclure que la figure de Victor est fautive parce qu'elle n'a pas la bonne taille négligeant ainsi la donnée qu'il s'agissait d'une réduction.

Après avoir imaginé ces situations où le « schéma est juste » et la figure peut être fautive, nous avons imaginé une situation où le schéma ressemble à la figure, c'est-à-dire où la distance entre les points du schéma sont aussi les distances réelles. L'objet de l'étude est le triangle isocèle. En considérant deux triangles isocèles ABC et ACD accolés par un de leurs côtés isométriques, le triangle ABD est-il toujours équilatéral ?

Nous avons imaginé quatre versions de cette situation, les variables didactiques étant les longueurs BC et CD, illustrées du même schéma où les distances AB, AC, AD et BD sont de 5 cm.

Objet : ...
Exercice 2.6.
Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**
 Aide-la à répondre aux questions.

a) Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui - non. Pourquoi ?

b) Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui - non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

Objet : ...
Exercice 2.7.
Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**
 Elle a marqué les longueurs qu'elle aurait dû respecter sur la figure et dans le tableau.
 A toi de compléter le tableau puis de répondre aux questions.

	2 cm	3 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

a) Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui - non. Pourquoi ?

b) Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui - non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

Objet : ...
Exercice 2.8.
Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**
 Elle a marqué les longueurs qu'elle aurait dû respecter sur la figure et dans le tableau.
 A toi de compléter le tableau puis de répondre aux questions.

	3 cm	4 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

a) Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui - non. Pourquoi ?

b) Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui - non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

Objet : ...
Exercice 2.9.
Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**
 Elle a commencé à refaire la figure en vraie grandeur avec son compas.
 A toi de répondre aux questions.

Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui - non. Pourquoi ?

Est-ce certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui - non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux continuer la figure ou la refaire en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

Dans la première version, les longueurs BC et CD ne sont pas précisées. L'élève qui donne du sens à cette absence d'information fonctionne en G2 : il se concentre sur les longueurs égales en négligeant les longueurs pour lesquelles on n'a pas d'information. L'élève qui mesure les distances entre les points du schéma est en G1 : sa validation est instrumentée. Les réponses données par les élèves selon qu'ils considèrent le triangle équilatéral comme un triangle isocèle particulier ou non nous donnera aussi une information sur le paradigme dans lequel ils ont pu fonctionner. Dans la deuxième version, nous avons précisé que les longueurs BC et CD mesuraient 2 cm et 3 cm. L'objet était de mettre en conflit la gestion de l'inégalité triangulaire souvent mal maîtrisée à ce niveau de scolarité (d'après notre pratique de l'enseignement des mathématiques au collège) et la précision dans les distances entre les points du dessin. Dans la troisième version nous avons remplacé ces longueurs par 3 cm et 4 cm rendant ainsi le

schéma nettement faux du point de vue de la distance entre les points. De plus la somme $3 + 4$ étant différente de 5, refaire la figure devenait davantage nécessaire. Dans ces deux versions nous avons fait le choix de proposer un tableau à double entrée dans lequel l'élève pouvait cocher les cases qui convenaient à propos des longueurs des segments dessinés. Nous avons créé la colonne « c'est une autre longueur », en particulier pour les élèves qui considéreraient que la longueur BD mesure 7 cm quand on a $BC = 3$ cm et $CD = 4$ cm. La colonne « on ne sait pas » est là pour montrer aux élèves que certaines longueurs peuvent être totalement inconnues en dépit des informations qui sont données. C'est là, nous le savons, une situation tout à fait inconfortable pour des élèves de cet âge. Enfin dans la quatrième version, nous avons repris les longueurs 2 cm et 3 cm pour BC et CD en remplaçant le tableau de mesures par le début de la figure en vraie grandeur. L'objectif est alors d'insister sur le fait que les sommets B, C et D sont sur le cercle de centre A et que si les longueurs BC et CD mesurent respectivement 2 cm et 3 cm, alors le triangle ABD est isocèle mais ne peut être équilatéral. Toutefois, les élèves, surtout en CM2, sont peu enclins à tracer un triangle isocèle en utilisant le cercle dont le centre est le sommet principal et cette nouvelle présentation pourra être une source d'interrogation donc de meilleur fonctionnement du point de vue de la géométrie.

Des essais ont été menés sur quelques élèves de 6^{ème} avec d'autres configurations et d'autres figures. Ainsi il a été proposé aux élèves de retrouver les carrés dans un ensemble de figures dessinées à la règle et sans codage (cf. exercice 1.6. et 1.8.) et dans un ensemble de points (cf. exercice 1.7.) : nous n'avons alors aucune information sur la conception inclusive des quadrilatères particuliers. De plus la taille de la feuille ne nous permettait pas de proposer un carré suffisamment grand pour que l'élève ait l'opportunité de témoigner d'un fonctionnement en G2 tout en utilisant une technologie de G1. Nous avons aussi demandé aux élèves de décrire la figure faite par Victor, alors qu'elle était dessinée à la règle et à l'équerre mais sans codage. Nous nous sommes alors heurtés à des difficultés de correction des réponses et de leur codage : le vocabulaire des élèves étant trop limité et instable. Demander aux élèves de construire la figure telle qu'elle était demandée à Victor accompagné du programme de construction s'est révélé trop difficile à l'écrit pour des élèves de 6^{ème}. Nous nous sommes donc limités à demander quelques phrases de description ou d'explication.

2.3. Construction des questionnaires.

Dans toutes les tâches que nous avons imaginées, un élève peut fonctionner en G2 et montrer qu'il maîtrise le niveau de déduction informelle de van Hiele. Mais dans chaque cas, l'élève qui aurait une interprétation différente du contrat didactique et une compréhension autre de la tâche pourra aussi donner une réponse. Nous avons associé les tâches de manière à ce qu'un même élève n'ait pas deux activités de même nature au recto et au verso et que toutes les tâches supposées difficiles ne soient pas regroupées sur les mêmes questionnaires. En particulier nous avons associé les « exercices » 2.4. et 2.5. du verso dans lesquels aucune justification d'ordre théorique n'est demandée aux « exercices » les plus délicats du recto tels que le n°1.3 où les dessins sont faits à main levée ou le n°1.5. où les descriptions des figures sont proposées dans un ordre aléatoire etc.

L'association de ces 17 tâches en termes de rectos et de versos nous a donné 20 questionnaires repérés par les lettres A, B, C etc. jusqu'à T. Le tableau suivant donne la répartition des items à l'intérieur des questionnaires.

QUESTIONNAIRE	Recto		Verso	
	N°	Objet	N°	Objet
A	1.1.	Triangles isocèles (tracés à la règle)	2.6.	« Marie » (aucune indication)
B	1.8.	Nombre et quadrilatères (avec grille de nombres)	2.9.	« Marie » (début figure exacte)
C	1.7.	Rectangles (nuage de points)	2.7.	« Marie » (tableau avec 2 et 3 cm)
D	1.7.	Rectangles (nuage de points)	2.8.	« Marie » (tableau avec 3 et 4 cm)
E	1.2.	Triangles isocèles (tracés à main levée)	2.1.	« Victor » (figure juste)
F	1.3.	Triangles isocèles	2.5.	Cercle circonscrit

		(tracés mixtes)		(extérieur)
G	1.5.	Triangle isocèles (descriptions en aléatoire)	2.4.	Cercle circonscrit (intérieur)
H	1.5.	Triangle isocèles (descriptions en aléatoire)	2.5.	Cercle circonscrit (extérieur)
I	1.4.	Triangles isocèles (description verbale)	2.3.	« Victor » (carré faux)
J	1.4.	Triangles isocèles (description verbale)	2.1.	« Victor » (figure juste)
K	1.3.	Triangles isocèles (tracés mixtes)	2.7.	« Marie » (tableau avec 2 et 3 cm)
L	1.2.	Triangles isocèles (tracés à main levée)	2.8.	« Marie » (tableau avec 3 et 4 cm)
M	1.6.	Nombre et quadrilatères (sans grille de nombres)	2.2.	« Victor » (triangle faux)
N	1.2.	Triangles isocèles (tracés à main levée)	2.2.	« Victor » (triangle faux)
O	1.1.	Triangles isocèles (tracés à la règle)	2.3.	« Victor » (carré faux)
P	1.3.	Triangles isocèles (tracés mixtes)	2.4.	Cercle circonscrit (intérieur)
Q	1.7.	Rectangles (nuage de points)	2.5.	Cercle circonscrit* (extérieur)
R	1.2.	Triangles isocèles (tracés à main levée)	2.4.	Cercle circonscrit (intérieur)
S	1.6.	Nombre et quadrilatères (sans grille de nombres)	2.4.	Cercle circonscrit (intérieur)
T	1.8.	Nombre et quadrilatères (avec grille de nombres)	2.5.	Cercle circonscrit (extérieur)

3. Déroulement de l'expérimentation :

L'expérimentation a eu lieu dans toutes les classes en juin 2004 sans que les élèves en aient été particulièrement informés au préalable. A cette période de l'année, on peut considérer que les apprentissages concernant les rectangles, les triangles ou les cercles sont presque terminés : les élèves de CM2 ont terminé leur parcours à l'école primaire et les élèves de 6^{ème} ont travaillé pendant une année dans le contexte de la géométrie du collège. Les enseignants, acceptant notre visite, ont découvert les questionnaires en même temps que leurs élèves.

La distribution des différents questionnaires s'est faite ainsi.

QUESTIONNAIRE	CM2	6 ^{ème}	TOTAL
A	12	16	28
B	12	16	28
C	10	10	20
D	10	10	20
E	12	15	27
F	13	15	28
G	14	15	29
H	13	14	27
I	13	15	28
J	12	15	27
K	10	10	20
L	10	10	20
M	13	15	28
N	10	10	20
O	9	10	19
P	5	5	10
Q	9	12	21
R	10	9	19

S	13	14	27
T	13	14	27

La répartition des « exercices » est la suivante selon le niveau des élèves.

Exercice	CM2	6 ^{ème}	TOTAL
1.1.	21	26	47
1.2.	42	44	86
1.3.	28	30	58
1.4.	25	30	55
1.5.	27	29	56
1.6.	13	29	42
1.7.	29	32	61
1.8.B	12	16	28
1.8.T	13	14	27
2.1.	24	30	54
2.2.	23	25	48
2.3.	22	25	47
2.4.	42	43	85
2.5.	48	55	103
2.6.	12	16	28
2.7.	20	20	40
2.8.	20	20	40
2.9.	12	16	28

Les 20 minutes prévues pour la réalisation des deux tâches ont permis à tous les élèves d'aller au bout de leurs recherches. Nous avons signalé au bout de 10 minutes qu'ils devaient passer à la deuxième activité mais cela n'a, semble-t-il, pas perturbé les élèves dans leur travail : soit ils en ont tenu compte et sont passés à la tâche proposée au verso, soit ils ont continué leur recherche au recto. D'autres avaient déjà tourné leur feuille quand d'autres ont pris le temps de terminer leur première activité avant d'aborder la seconde. Aucun élève de CM2 ou de 6^{ème} n'a demandé d'aide au cours de l'épreuve ; nous n'avons pas donné d'autre consigne que celle

de bien lire les énoncés et rappeler la définition du triangle isocèle donnée en haut des questionnaires pour ceux qui en avaient besoin.

ANALYSE A PRIORI

Rappelons que l'objectif de ce travail est de mettre en évidence les différents niveaux de van Hiele que les élèves peuvent maîtriser au passage CM2-6^{ème}, les paradigmes géométriques dans lesquels ils peuvent fonctionner et l'articulation qui peut exister entre ces deux référents théoriques.

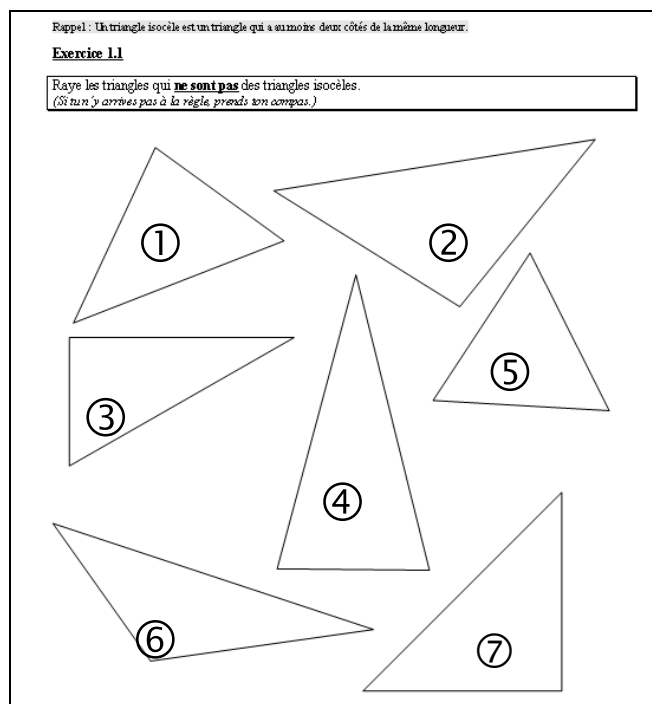
C'est ainsi que les analyses a priori des « exercices » présentés précédemment ont été faites après leur rédaction mais elles ont été ébauchées pendant la recherche des « exercices » pour servir alors de « cahier des charges » dans une démarche dialectique entre la construction des outils et les objectifs de la recherche.

Nous expliciterons ici les choix d'exercices que nous avons faits et les attentes que nous en avons en termes de paradigmes géométriques et de niveaux de van Hiele.

Pour chaque tâche nous rappellerons les raisons de son choix, puis nous envisagerons les différentes technologies ou procédures que les élèves pourront mettre en œuvre. Enfin nous tenterons une interprétation en termes de paradigmes géométriques et de niveaux de van Hiele les différentes réponses envisagées.

Les tâches ont été associées deux par deux en un recto et un verso des questionnaires écrits. Nous donnerons ici les raisons qui ont déterminées les associations entre les différentes tâches afin de composer l'ensemble des questionnaires.

1. Exercice 1.1.



Les numéros qui sont sur cette copie de l'exercice 1.1. n'existent pas dans le questionnaire remis aux élèves. Nous les avons ajouté afin de rendre notre analyse plus lisible.

- Consigne

Les élèves doivent éliminer les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles : les dessins sont faits avec des « traits droits » et respectent les critères d'identification connus. On ne leur demande pas de justifier les choix qu'ils font.

On pourra noter que tous les triangles « acceptables » sont situés dans la partie droite de la feuille. Les longueurs des côtés des triangles ne mesurent pas un nombre entier de centimètres et peuvent être soumises à des appréciations diverses en fonction de la précision dans l'utilisation des instruments.

Pour cela, on rappelle aux élèves la définition du triangle isocèle. Ils peuvent aussi la connaître en termes de deux côtés de la même longueur et seulement deux côtés excluant ainsi le triangle équilatéral.

- Quelles traces vont-ils laisser ?

Il est envisageable qu'ils ne relisent pas la définition et fonctionnent avec un concept de triangle isocèle où celui-ci a deux côtés de même longueur exactement.

Ils sont obligés de faire des mesures au compas ou à la règle. Il y aura des traces de compas ou des mesures en cm ou en mm.

Ils peuvent aussi répondre à vue d'œil. Dans ce cas, il n'y aura pas de trace sur la feuille.

- En termes de paradigmes géométriques

Les élèves doivent avant tout utiliser des outils de G1. Ils ne peuvent témoigner d'un fonctionnement dans G2 que s'ils maîtrisent une définition complète du triangle isocèle. De plus ils n'ont pas à justifier leur choix donc par effet de contrat, on peut dire que la tâche implique une réponse dans G1.

On peut prévoir que certains élèves rejeteront certains triangles isocèles parce qu'ils auront « mal » placé leurs outils et diront que certains côtés n'ont pas la même longueur par manque de précision ou excès dans la recherche de la précision. De tels élèves se déterminent donc en fonction de la précision de leurs mesures ou de leurs tracés et ne sont vraisemblablement pas encore en mesure d'idéaliser l'objet géométrique. Ces élèves fonctionnent très certainement dans G1. Ceci sera observé dans l'acceptation ou le rejet du triangle n°2 dont la longueur de deux côtés diffère de 1 mm. Si cette différence est déterminante, on est bien dans la précision de la mesure donc dans G1. Si au contraire cet écart de mesure est sans importance, et de plus l'élève n'a laissé aucune trace de mesure, on pourra considérer que le rôle de celle-ci est de moindre importance et l'élève fonctionne vraisemblablement en G2.

Les élèves qui rejettent le triangle équilatéral (n°5) sont résolument dans G1 : ils ne tiennent pas compte du rappel de définition proposé en tête de page ou ils ne l'ont pas comprise.

De même les élèves qui rejettent le triangle isocèle rectangle (n°7) sont dans G1 parce qu'ils ne sont pas en mesure de concevoir qu'un triangle puisse avoir deux caractéristiques simultanément. Le seul moyen de repérer qu'un élève est capable de fonctionner dans G2 dans la mesure où la réponse demande l'usage des outils de G1, réside dans le fait qu'il ne raye pas les triangles isocèles particuliers.

- Niveaux de van Hiele

S'il n'y a aucune trace qui accompagne le fait que tous les triangles sauf le triangle n°4 ont été rayés, on peut penser que l'élève est au niveau d'identification-visualisation. Il se décide en fonction de ce qu'il perçoit.

S'il a laissé des traces qui indiquent que la précision de la mesure est déterminante pour la réponse, que celle-ci soit juste ou fautive, l'élève a sans doute dépassé le niveau d'identification-visualisation. Ce sera le cas de l'élève qui a planté son compas à plusieurs reprises ou qui a mesuré plusieurs fois pour être « bien sûr » que sa mesure était suffisamment précise et se décider ensuite. Il est possible qu'un tel élève

soit au niveau d'analyse. Il lui faut vérifier chacune des propriétés qu'il connaît avant de pouvoir répondre. Il n'en est pas encore à idéaliser les propriétés des figures et de plus, le triangle équilatéral n'est pas encore un triangle isocèle particulier. Nous considérerons une telle démarche comme le témoignage du niveau d'analyse.

Tout élève qui accepte le triangle équilatéral et le triangle isocèle rectangle est vraisemblablement au-delà du niveau d'analyse, donc peut-être au niveau de déduction informelle. Toutefois l'exercice ainsi posé ne permet pas de repérer avec certitude les élèves qui maîtrisent un tel niveau. En effet, il faut de toute façon faire des mesures aussi peu nombreuses soient-elles pour faire le tri dans les triangles. A partir d'un tel support, le niveau de déduction informelle est le niveau le plus élevé qui puisse être détecté et seulement dans le cas où les triangles équilatéral et isocèle rectangle sont acceptés.

2. Exercice 1.2

Exercice 1.2
 Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les triangles qui ont été dessinés à main levée. Dans chaque triangle, quand des côtés doivent avoir la même longueur, on les a indiqués avec la même marque. Sinon, il n'y a aucune marque.

Raye les triangles qui, d'après les codages, **ne sont pas** des triangles isocèles.

The image shows ten triangles, each with a circled number from 1 to 10. Triangle 1 is a right-angled triangle with a square symbol at the top right and single tick marks on the two legs. Triangle 2 is a scalene triangle with no markings. Triangle 3 is a scalene triangle with double tick marks on the two shorter sides. Triangle 4 is a scalene triangle with curly braces on the two shorter sides. Triangle 5 is a scalene triangle with double tick marks on the two shorter sides. Triangle 6 is a scalene triangle with no markings. Triangle 7 is a scalene triangle with single tick marks on the two shorter sides. Triangle 8 is a right-angled triangle with a square symbol at the bottom right and single tick marks on the two legs. Triangle 9 is a scalene triangle with single tick marks on the two shorter sides. Triangle 10 is a scalene triangle with single tick marks on the two shorter sides.

Là encore nous avons ajouté un numéro sur chaque triangle par souci de clarté de notre analyse. Ces numéros n'apparaissent pas sur les feuilles de travail des élèves ;

- Consigne.

Cet exercice reprend l'exercice 1.1. dans la mesure où la définition du triangle isocèle est rappelée, la consigne est la même : rayer les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles. La différence est dans l'énoncé et dans la présentation des triangles : il est précisé que seul le codage est à prendre en compte et que les triangles ont été dessinés à main levée puis codés. De plus, et cela afin d'aider les élèves de CM2 qui a priori n'ont pas été confrontés au décodage des schémas, il est bien précisé que si les côtés ne sont pas codés de la même manière, ils doivent être considérés comme ayant des longueurs différentes. Les outils tels que la règle ou le compas sont donc inutiles. Les codages sont tantôt en accord avec le perçu tantôt en contradiction. L'intérêt de l'exercice sous cette forme réside donc dans l'analyse des codages et leur interprétation. Il y a un triangle qui semble être équilatéral dans la mesure où chaque sommet est équidistant des deux autres et qui n'a aucun codage : triangle n°6. Des deux triangles qui ont un codage de triangle équilatéral (n°3 et n°7), l'un d'entre eux (n°7) en a la forme générale mais dans les deux cas, chaque sommet n'est pas équidistant des deux autres. L'attitude des élèves sera particulièrement étudiée dans leur décision quant au triangle n°3 qui voit un de ses sommets équidistants des deux autres mais dont le codage est celui d'un triangle équilatéral. Tous les autres triangles, codés comme étant isocèles ou non, n'ont pas un de leurs sommets qui soit équidistant des deux autres. Le triangle n°2 a l'allure d'un triangle isocèle mais il n'en a pas le codage et de plus le sommet qui semble être le sommet principal n'est pas équidistant des deux autres.

- Comment vont-ils faire ?

Les élèves devraient analyser les codages et l'usage des instruments dans un tel exercice serait la preuve qu'ils sont dans l'impossibilité de respecter le contrat didactique.

On peut penser que les élèves de CM2 seront plus gênés que les élèves de 6^{ème} dans la mesure où ils ne sont pas encore habitués au codage des figures. Il est tout à fait envisageable qu'ils mesurent les distances entre les sommets d'un triangle pour savoir si celui-ci est isocèle ou non et cela sans prendre en compte le codage. Cela pourra se vérifier dans le cas des deux triangles isocèles rectangles (n°1 et n°8). De la même façon, on peut s'attendre à trouver des élèves qui ne rayeront pas le triangle qui a l'allure d'un triangle isocèle mais qui n'a aucun codage (n°2). Enfin. Les élèves qui élimineront les triangles n°3 et n°7 sont codés comme étant des triangles équilatéraux, surtout celui dont chaque sommet semble équidistant des deux autres (n°7), ne maîtrisent pas complètement la définition du triangle isocèle.

- En termes de paradigmes géométriques

Pour mener à bien cet exercice l'élève doit se placer dans G2 : il doit utiliser le concept abstrait de triangle isocèle comme le ferait un mathématicien professionnel. Un tel élève n'a pas besoin de faire de

mesure ou de laisser des trace de compas. La validation n'est pas de type pragmatique et on ne peut considérer qu'elle soit pour autant de type déductif : il suffit de connaître le sens du codage et de l'interpréter en l'associant à la définition du triangle isocèle. On est donc dans un type de validation intellectuelle proche de l'expérience mentale. De plus la réussite complète à l'exercice demande la maîtrise d'une conception inclusive des définitions des triangles particuliers : on est donc dans G2.

Cependant on doit envisager qu'un élève mesure la distance entre les sommets à la règle ou au compas en laissant les traces de ses gestes. Sa validation est alors instrumentée ; un tel élève fonctionne dans G1. Il ne sait pas encore donner du sens au codage des dessins. On peut dire aussi qu'un élève qui rejette les triangles équilatéraux codés ou non est aussi dans G1 (n°3 ; n°6 et n°7) : les concepts de triangles isocèles et équilatéraux sont pour lui exclusifs l'un de l'autre et il n'a pas su prendre en compte la définition que nous avons donnée au début de l'exercice

- Niveaux de van Hiele

Un tel exercice demande au moins la maîtrise du niveau d'analyse : les figures sont porteuses de leurs propriétés ; elle ne se réduisent pas à leur apparence. L'élève ne peut se fier à la perception qu'il a du dessin ; il doit observer les codages puis les organiser pour en déduire que le triangle est isocèle ou non. Il se peut qu'à ce niveau certains élèves ne soient pas encore capables de dire que les triangles équilatéraux sont des triangles isocèles particuliers. Dans ce cas les élèves accepteront les triangles n°1, °4, n°5, n°9 et n°10 et devraient rejeter les triangles n°2, n°3, n°6 et n°7.

L'élève qui respecte totalement la définition du triangle isocèle et l'applique de manière inclusive au codage des dessins qui lui sont proposés est très vraisemblablement au niveau de déduction informelle.

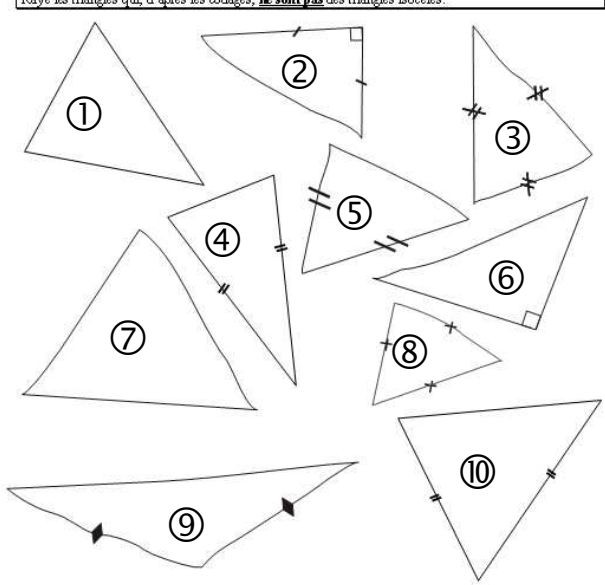
Les élèves qui sont au niveau d'identification-visualisation devraient éliminer les triangles en fonction non pas des codages mais des distances entre les sommets des triangles. Ceci devrait se manifester par des traces de compas ou des mesures de longueur écrites sur les feuilles. De plus, ces mêmes élèves élimineront sans doute les triangles qui semblent équilatéraux indépendamment du codage. Il est même envisageable que certains rejettent aussi les triangles isocèles rectangles n°1 et n°8 par respect de la conception exclusive des triangles qui est la leur à ce niveau. On peut s'attendre à ce que les élèves de CM2 soient plus nombreux que ceux de 6^{ème} à faire ce choix.

3. Exercice 1.3.

Exercice 1.3.
Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les triangles qui ont été dessinés au hasard, soit à la règle soit à main levée. Dans chaque triangle, quand des côtés devraient avoir la même longueur, on les a indiqués avec la même marque. Sinon il n'y a aucune trace.

Raye les triangles qui, d'après les codages, **ne sont pas** des triangles isocèles.



The image shows ten triangles labeled 1 through 10. Triangle 1 is a scalene triangle with no markings. Triangle 2 is a right-angled triangle with a square at the top vertex and single tick marks on the two legs. Triangle 3 is a scalene triangle with asterisk markings on two sides. Triangle 4 is a scalene triangle with double tick marks on two sides. Triangle 5 is a scalene triangle with double tick marks on two sides. Triangle 6 is a right-angled triangle with a square at the bottom-right vertex and asterisk markings on two sides. Triangle 7 is a scalene triangle with no markings. Triangle 8 is a scalene triangle with asterisk markings on two sides. Triangle 9 is a scalene triangle with arrow markings on two sides. Triangle 10 is a scalene triangle with double tick marks on two sides.

▪ Consigne

Cet exercice est un mélange des figures proposées dans l'exercice 1.1. où tous les dessins sont faits à l'ordinateur, avec des traits droits et des mesures précises sans codage et dans l'exercice 1.2. où les dessins sont fait à main levée et codés. Ici certains dessins sont codés, d'autres ne le sont pas. Les codages proposés peuvent être en contradiction avec ce que l'on perçoit du dessin. Il n'y a qu'un triangle dessiné avec des « traits droits », dont le codage soit en conformité avec le perçu et avec la vérification à la règle ou au compas. Tous les élèves devraient garder ce triangle isocèle situé, de plus, au centre de la feuille, même s'il n'est pas dans une position classique. L'objet de cette activité est de provoquer chez l'élève un certain conflit cognitif : que doit-il croire de ce qu'il voit ? Quel est dorénavant le rôle du codage des dessins ?

Dans cet exercice il y a donc un problème de contrat. Même s'il est précisé dans l'énoncé que seul le codage doit être pris en compte, on peut penser que les élèves, surtout les élèves de Primaire, vont étudier les triangles dessinés à la règle dans les mêmes conditions que dans l'exercice 1. 1, c'est-à-dire sans tenir compte du codage. Parmi les triangles dessinés à la règle, le triangle n°4 est à la fois codé et dessiné comme un triangle isocèle. Le triangle n°10 est codé comme un triangle isocèle mais les longueurs des côtés sont différentes. Enfin, le triangle n°1 est un triangle scalène et n'a aucun codage : sa nature est

cohérente avec la perception que l'on en a. Pour respecter la consigne l'élève doit donc rester vigilant et ne pas se laisser influencer par l'apparence des triangles dessinés à la règle qu'ils soient codés ou non.

Parmi les triangles dessinés à main levée, le triangle n°3 a un sommet équidistant des deux autres et est codé comme triangle équilatéral. Le triangle n°9 est codé comme étant isocèle mais aucun des sommets n'est équidistant des deux autres. Les deux triangles rectangles ont des « côtés » perpendiculaires de longueurs différentes tracés à la règle et un seul est codé comme isocèle.

- Comment vont-ils faire ?

D'après la consigne l'élève n'a pas à laisser de trace sur la feuille. On peut toutefois s'attendre à trouver des traces de compas ou des mesures, en particulier sur les triangles qui ne sont pas codés et qui sont tracés à la règle. Une telle démarche devrait être plus fréquente en CM2 qu'en 6^{ème}.

Le fait que certains triangles soient dessinés à la règle et d'autres à main levée pourra être une source d'interrogations chez les élèves. On peut alors imaginer que la démarche utilisée pour certains triangles soit généralisée à l'ensemble de l'exercice. Dans un tel cas, un élève qui commence par contrôler la nature des triangles dessinés à la règle et marque les longueurs obtenues ou laisse des traces de compas, peut poursuivre de la même manière pour les autres triangles et indiquer les distances entre les sommets ou laisser des traces de compas. Dans ce cas, il y aura des traces de mesure sur l'ensemble des triangles.

On peut aussi imaginer que certains élèves changeront de technique au cours de leur recherche : mesurant les côtés des triangles tracés à la règle et utilisant le codage pour les dessins à main levée. Dans ce cas il y aura des mesures sur les tracés à la règle et aucune trace à propos des triangles dessinés à main levée.

L'élève qui ne laisse aucune trace et qui se détermine à l'œil, en fonction de l'apparence du triangle, qu'il soit dessiné à la règle ou à main levée n'applique pas davantage la consigne : il ne garde que les triangles n°3 et n°4.

Les élèves de 6^{ème} devraient réagir plus facilement au codage et faire leurs choix à partir de ces indications et éliminer les triangles qui ne sont pas codés. Nous en aurons la preuve s'il n'y a aucune trace de crayon sur la feuille.

On peut s'attendre à trouver des élèves qui, décryptant les codages avec pertinence, choisissent d'éliminer les triangles équilatéraux parce qu'ils ne maîtrisent pas la définition du triangle isocèle.

- En termes de paradigmes géométriques

Comme le précédent, le contrat didactique place cet exercice dans G2. Même si les triangles dessinés à la règle suggèrent que l'on soit dans G1, la consigne demande que l'on ne tienne compte que du codage. Donc leur apparence ne doit pas être considérée. Les outils de G1 et les validations instrumentées ne sont

pas pertinents. La présence des triangles dessinés à la main et le codage de l'ensemble des dessins demande à l'élève de fonctionner dans G2. L'élève qui réussit complètement l'exercice est très certainement dans G2.

Les élèves qui rejettent les deux triangles n°3 et n°8 sont probablement dans G1. Ces deux triangles sont dessinés à la main et codés comme étant équilatéraux même si le triangle n°3 a l'allure d'un triangle isocèle. D'une part pour ces élèves il y a exclusion entre les triangles particuliers mais il y a aussi contamination du su par le perçu. On peut donc s'attendre à trouver des réponses différentes pour ces deux triangles chez les élèves qui fonctionnent en G1 : le perçu est déterminant, la validation est instrumentée. De tels élèves pourront accepter presque malgré eux que le triangle n°3 soit isocèle.

Fonctionnent aussi dans G1 les élèves qui rejettent le triangle n°8 qui semble équilatéral, codé comme tel alors que la distance entre les sommets est différente pour chacun des trois côtés. Ces élèves peuvent rejeter ce triangle pour deux raisons indépendantes l'une de l'autre : soit ils ne peuvent accepter qu'un triangle équilatéral soit aussi un triangle isocèle soit ils ont mesuré les distances entre les sommets et ils n'ont pas trouvé d'équidistance.

▪ Niveaux de van Hiele

Par contrat, un tel exercice est du niveau de déduction informelle puisque seuls les codages doivent être pris en compte, que les dessins soient faits avec soin (« des traits droits ») ou non. Il faut de plus maîtriser une conception inclusive des définitions des triangles particuliers. Utiliser la règle graduée ou le compas est inutile. L'élève qui ne laisse aucune trace est au niveau d'analyse et raye les triangles n°1, n°4, n°6 et n°7 maîtrise vraisemblablement au moins le niveau de déduction informelle.

Au contraire l'élève qui tout en ne laissant aucune autre trace, raye aussi les triangles n°2, n°3 et n°8 peut être considéré comme relevant du niveau d'analyse. Pour cet élève les propriétés des figures ne sont pas encore ordonnées et il les considère de manière disjointe les unes par rapport aux autres. Toutefois on peut s'attendre à ce que les élèves à ce niveau de van Hiele soient plus nombreux à rejeter les triangles n°3 et n°8 (triangles équilatéraux) que le triangle n°2 (triangle isocèle rectangle). Ces élèves ont sans doute le sentiment d'avoir appliqué scrupuleusement la consigne.

Enfin, tout élève qui laisse des traces de mesures ou de compas est probablement au niveau d'identification-visualisation. Il ne peut pas appliquer la consigne ni envisager que les codages des dessins proposés déterminent les propriétés des triangles. L'élève qui rejette les triangles codés comme équilatéraux ne tient pas compte du rappel de la définition du triangle isocèle et fonctionne avec des connaissances relevant de l'identification-visualisation. Pour un tel élève les propriétés ne sont pas ordonnées et le triangle équilatéral n'est pas un triangle isocèle particulier. De tels élèves devraient ne garder que le triangle n°4.

4. Exercice 1.4.

Exercice 1.4.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les descriptions des figures. Dans tous les cas tu dois t'intéresser au triangle ABC qui est contenu dans la figure.
Raye les triangles qui, d'après les informations, **ne sont pas** des triangles isocèles.

Triangle n°1	Les côtés [AB] et [BC] sont de la même longueur (4 cm).
Triangle n°2	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°3	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4cm)
Triangle n°4	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.
Triangle n°5	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4. cm)
Triangle n°6	L'angle de sommet B est un angle droit.
Triangle n°7	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont tous une longueur différente. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].
Triangle n°8	Les segments [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD.
Triangle n°9	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.
Triangle n°10	Le quadrilatère ABEC est un losange.

Si cela peut t'aider, tu peux faire des dessins. Mais n'oublie pas de numéroter les triangles que tu dessines et laisse ensuite toutes les traces de ton travail (mesures à la règle, traces de compas, ...)

▪ Consigne

Comme dans les exercices précédents, la consigne est toujours de rayer les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles mais cette fois les triangles sont présentés par un texte et l'élève peut, s'il le souhaite, les dessiner pour se décider (Il lui est même suggéré de faire des dessins ou des figures) . L'usage des lettres pour désigner les points n'a pas pu être évité. Ce choix a été fait dans le but d'identifier la nature des difficultés des élèves à appréhender une description de figure sans aucun support graphique Afin d'aider les élèves dans leurs constructions, des mesures compatibles avec l'espace disponible sur la feuille sont proposées. L'élève a la liberté de faire un schéma ou un dessin en vraie grandeur. Cet exercice est une version littérale de l'exercice 1.1. : la consigne est toujours d'éliminer les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles. Pour faire le lien entre les constructions de l'élève et son choix de réponse, il lui est demandé de numéroter ses dessins. Les situations ont été classées selon un ordre, qui selon notre connaissance, est un ordre croissant de difficulté depuis le triangle isocèle quelconque jusqu'au triangle isocèle inclus dans une figure plus complexe. Cette classification a été largement inspirée par les informations que nous avons rapportées dans les chapitres précédents et qui sont à l'origine de notre cadre théorique (différentes appréhensions d'une figure et rôle d'une sous-figure dans une figure selon Duval). Un tel exercice présente donc plusieurs niveaux de difficultés. Les triangles numérotés de 1 à 7 sont décrits complètement. Leur identification comme triangle isocèle ou non est directe : l'expression de

même longueur est explicite. Les triangles isocèles décrits implicitement dans les situations numérotées de 8 à 10 sont des sous-figures d'une figure plus complexe. L'élève doit alors analyser l'ensemble de la situation géométrique pour donner sa réponse. Dans aucun cas il n'est demandé de justification.

Nous devons interpréter séparément les réponses données par les élèves aux sept premières questions et aux trois dernières. En effet la première partie est une version littérale des exercices précédents quand dans la seconde, l'élève doit avoir une appréhension la situation qui ne soit pas simplement perceptive ; il doit l'analyser et tenir un certain raisonnement.

Nous avons là un exemple de proposition d'activité relevant de la zone de proche développement puisque la recherche est toujours celle d'un triangle isocèle mais cette activité est conduite selon un ordre de difficulté que nous jugeons croissant.

- Comment vont-ils faire ?

Puisqu'on le leur suggère, les élèves vont probablement dessiner un certain nombre de figures voire l'ensemble des dix figures, en respectant les dimensions proposées et se déterminer ensuite. Il se peut que quelques élèves de 6^{ème} se contentent de schéma à main levée mais vraisemblablement tous les élèves de CM2 feront des dessins à la règle et au compas. Il se peut aussi que certains élèves ne dessinent pas la totalité des sept premiers triangles dans la mesure où la mentions « côtés de même longueur » est soit explicite soit absente. Pour ceux qui dessineraient tous les cas évoqués, le problème se posera des mesures « manquantes » comme dans le cas n°1 où la longueur de la base du triangle isocèle n'est pas donnée. La possibilité (le risque ?) est alors que les élèves décident qu'elle vaut 4 cm comme les deux autres côtés. Dans la mesure où on ne demande pas de justification, on ne peut pas vraiment savoir si la décision est prise à partir des propriétés de la figure abstraite ou à partir de la perception du dessin. Il est également possible qu'un élève qui a fait un dessin s'en soit servi pour répondre.

- En termes de paradigmes géométriques

Présenté tel quel l'exercice se situe en G2 : l'élève doit gérer simultanément la définition du triangle isocèle qui est rappelée en haut de la feuille et la description de chaque figure. La réalisation d'un simple schéma peut suffire pour se déterminer. Toutefois plusieurs caractéristiques de ce paradigme sont mises en œuvre au cours d'une telle activité. En effet dans les sept premiers cas, l'élève qui retient comme isocèle tout triangle dont on dit qu'il a deux (ou trois) côtés de la même longueur a déjà une conception inclusive des triangles particuliers. Mais pour réussir les trois dernières questions l'élève doit décomposer la figure, identifier la sous-figure que constitue le triangle ABC pour analyser ensuite la situation et reconnaître le triangle isocèle. Il se peut donc que l'élève qui fonctionne en G2 aille assez vite et se

contente d'un schéma à main levée ou d'une figure approximative. Il est possible même qu'il ne dessine rien à propos des premiers triangles tant leurs descriptions sont évidentes.

Il est vraisemblable que l'élève qui a reconnu les triangles isocèles dans les sous-figures des situations 8, 9 et 10 est plus performant que celui qui n'en a rien dit ou qui les a rejetées.

Aussi les diverses erreurs que l'on pourra trouver dans l'identification des triangles isocèles particuliers suggèreront que le fonctionnement dans G2 de ces élèves n'est pas complètement maîtrisé. En particulier on pourra penser que si un élève se trompe dans les sept premiers choix et ne répond rien dans les trois derniers cas, c'est parce qu'il n'a pas eu le temps d'y réfléchir ou qu'il n'était pas sûr de sa réponse. Nous ne pourrions pas considérer qu'un tel élève ait fonctionné en G2.

Par contre un élève qui fait un schéma codé correctement l'un des trois derniers items est dans G2.

Un élève qui fonctionne en G1 va passer du temps à faire des figures soignées dont il vérifiera les dimensions à plusieurs reprises. S'il ne trouve pas deux côtés de la même longueur il dira que le triangle n'est pas isocèle : la précision de la mesure est déterminante. Il est possible que cet exercice ne soit pas terminé dans le temps prévu pour la passation du test.

De plus la réponse exacte aux items 8, 9 et 10 consiste à ne pas rayer les descriptions. Tout élève qui laissera ces descriptions en l'état bénéficiera d'un doute favorable à un fonctionnement en G2. Mais si l'élève raye l'une au moins de ces propositions, il est à peu près certain qu'il témoigne d'un fonctionnement en G1. Nous y voyons au moins deux explications possibles : soit la description est interprétée comme étant celle d'un dessin-objet au sens de F. Jore et les mots utilisés faisant référence à des quadrilatères, l'élève l'a rayée, soit l'élève n'a pas une appréhension opératoire de la figure et ne peut identifier le triangle ABC dans la configuration qui lui est proposée puisqu'il ne repère pas les sous-figures dans la figure globale.

- Niveaux de van Hiele

Cet exercice demande à l'élève de maîtriser le niveau de déduction informelle ou plus.

En effet, tout élève qui ne maîtrise que le niveau d'identification-visualisation doit faire des dessins soignés et précis pour se décider. De plus certains triangles sont donnés sans dimensions, ce qui est alors une situation tout à fait inconfortable. Enfin, il n'aura sans doute pas le temps de faire toutes les figures avec la précision nécessaire à sa réponse. On peut s'attendre à ce qu'un élève à ce niveau ne retienne que le triangle n°1 et rejette le n°7. Il ne répondra rien ou rayera les triangles au hasard, ce qui devra se repérer par un manque de cohérence dans ses choix.

L'élève qui est au niveau d'analyse devrait accepter les triangles n°1, n°3 et n°5 puisque la description se termine par « les côtés ... ont la même longueur ». Il devrait rejeter les triangles n°2 parce que tous les côtés ont la même longueur et les triangles n°6 et n°7 parce qu'aucune longueur n'est donnée. La réaction des élèves à la description n° 4 pourra être variable. Il se peut que certains d'entre eux extrapolent en considérant que les angles de sommet B et C sont égaux puisqu'ils sont tous les deux plus grands que l'angle A. Ces élèves accepteront ce triangle comme étant isocèle. D'autres respectant le manque d'informations rejeteront ce triangle. Nous considérerons que ces derniers ont une plus grande maîtrise du niveau d'analyse que les précédents. Dans tous les cas c'est le rejet du triangle n°2 qui est déterminant.

Aussi les élèves qui ne rejettent que les triangles n°4, n°6 et n°7 sont au moins au niveau de déduction informelle. Ils ont une conception inclusive des définitions des triangles particuliers. Le doute sera aussi favorable à ceux qui ne rayeront aucune des descriptions n° 8 à 10 puisque le triangle n'est pas isolé mais ses propriétés découlent des propriétés du carré, du rectangle ou du losange. L'élève n'a pas besoin de savoir s'il s'agit d'une définition ou d'une propriété pour organiser son raisonnement. Cependant il doit apporter une information nouvelle dans la mesure où la figure ne se limite pas à un seul triangle. Donc si un élève rayait l'une ou l'autre de ces trois dernières descriptions, on pourrait dire qu'il n'a pas encore atteint une maîtrise complète du niveau de déduction informelle. On peut dire que les situations présentées en n°8, n°9 et n°10 sont des activités mettant en œuvre une zone de développement proximal par rapport aux autres descriptions dans le cadre d'un apprentissage amenant la maîtrise du niveau de déduction informelle.

5. Exercice 1.5.

Exercice 1.5.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les descriptions des figures. Dans tous les cas tu dois t'intéresser seulement au triangle ABC qui est contenu dans la figure.

Raye les triangles qui, d'après les informations, ne sont pas des triangles isocèles.

Triangle n°1*	Les côtés [AB] et [BC] sont de la même longueur (4 cm).
Triangle n°2*	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4 cm)
Triangle n°3*	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.
Triangle n°4*	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.
Triangle n°5*	Les segments [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD.
Triangle n°6*	L'angle de sommet B est un angle droit.
Triangle n°7*	Le quadrilatère ABEC est un losange.
Triangle n°8*	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4cm)
Triangle n°9*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°10*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont tous une longueur différente. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].

Si cela peut t'aider, tu peux faire des dessins. Mais n'oublie pas de numéroter les triangles que tu dessines et laisse ensuite toutes les traces de ton travail (mesures à la règle, traces de compas,....)

Dans cet exercice les descriptions de triangles proposées sont les mêmes que celles de l'exercice 1.4 mais elles ont été classées dans un ordre différent. Ainsi nous devrions savoir si les élèves qui n'ont rien rayé à la fin de l'exercice 1.4. l'ont fait par reconnaissance des triangles isocèles (réponses justes), par abandon devant des situations trop difficiles ou par manque de temps.

Dans cette nouvelle version nous devrions aussi percevoir si le classement précédent était pertinent ou non. En effet si, ici, les élèves font des dessins dans un ordre différent de l'ordre dans lequel les descriptions apparaissent pour utiliser un ordre personnel qui serait assez proche de ce que nous avons proposé en exercice 1.4., nous aurons la preuve que l'exercice a une difficulté croissante dans ses questions. Si au contraire, les élèves respectent dans cet exercice l'ordre des questions, nous devrions rencontrer davantage de dessins illustrant les situations de sous-figures et le fait que les élèves aient accepté ou reconnu que dans ces cas le triangle ABC soit isocèle. Il est vrai que le fait de ne pas rayer une description laissera un doute quant au raisonnement tenu par l'élève. En revanche quand l'élève rejette l'une des situations n°3*, n°5* ou n°7*, nous pouvons dire que son fonctionnement en G2 n'est pas très assuré et que le niveau de déduction informelle n'est pas totalement maîtrisé.

Le tableau de correspondance est le suivant. On pourra remarquer que par souci de confort des élèves nous avons maintenu en première position le cas de triangle isocèle défini avec au moins une longueur.

Répartition des énoncés dans les exercices 1.4. et 1.5.

Exercice 1.4.	Exercice 1.5	Enoncé
Triangle 1	Triangle 1*	Les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle 2	Triangle 9*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle 3	Triangle 8*	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4cm).
Triangle 4	Triangle 4*	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.
Triangle 5	Triangle 2*	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4 cm).
Triangle 6	Triangle 6*	L'angle de sommet B est un angle droit.
Triangle 7	Triangle 10*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont tous une longueur différente. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].
Triangle 8	Triangle 5*	Les segments [AB] et [AC] sont deux côtés du carré ABCD.
Triangle 9	Triangle 3*	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.
Triangle 10	Triangle 7*	Le quadrilatère ABEC est un losange.

6. Exercice 1.6.

Exercice 1.6. : « Portrait de nombres ».
 C'est un nombre impair comme 1, 3, 5, 7...
 Il est dans la table des 5.
 Il est plus grand que 29 mais plus petit que 43.
 De quel nombre s'agit-il ?

S'il y a plusieurs nombres donne-les tous.

Exercice 1.6. : « Portrait de figures ».
 Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, **à la fois**, :

- sont des quadrilatères
- ont leurs côtés de la même longueur deux à deux
- ont au moins un angle droit

Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)

Connais-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le.

▪ Consigne

Cette activité est composée de deux parties : la première dans laquelle les élèves doivent retrouver le nombre 35 d'après son portrait en prenant en compte successivement plusieurs contraintes ; la seconde partie basée aussi sur le respect de contraintes multiples doit conduire à la découverte de quadrilatères particuliers comme le rectangle. Le contrat didactique est le même pour les deux parties de l'exercice, mais il s'applique dans le champ numérique d'une part et dans le champ géométrique d'autre part. A chaque fois c'est l'application de contraintes successives qui est en jeu.

1^{ère} partie :

Les élèves s'exercent sur le principe du jeu du portrait en cherchant un nombre qui est à la fois impair, multiple de 5 et compris entre 29 et 43. Le but de ce premier exercice est de repérer les élèves qui savent et ceux qui ont du mal à respecter plusieurs contraintes simultanément. Nous avons choisi de poser la première question au singulier pour orienter même légèrement l'élève vers une réponse unique, lui laissant la possibilité d'en donner d'autres sur la deuxième ligne de réponses. Nous avons fait le choix de ne pas donner de grille de nombres, les élèves étant libres alors d'écrire ce dont ils ont besoin pour établir leur sélection.

2^{ème} partie :

Le principe du jeu du portrait est repris : l'élève doit rayer les figures au fur et à mesure des contraintes qui lui sont proposées. Mais les contraintes à propos des figures sont sans doute plus délicates à respecter que celles qui sont imposées sur les nombres. Les côtés des quadrilatères doivent avoir la même longueur deux à deux : il n'est pas certain que les élèves soient à l'aise face à une telle expression. On peut prévoir que certains vont considérer que l'expression « deux à deux » sous-entend que les deux paires de côtés ont des longueurs différentes. De plus ces quadrilatères doivent avoir au moins un angle droit : cette expression est plus difficile à appréhender. Les élèves la confondent souvent avec « les quadrilatères ont un seul angle droit ». C'est pourquoi il est proposé des triangles isocèle rectangle (n°8) et équilatéral (n°1), et des quadrilatères qui ne respectent que l'une des deux contraintes : parallélogramme, losange, trapèze rectangle ou encore un quadrilatère comme le n°9 qui a deux angles droits mais pas deux côtés de même longueur.

En conclusion à la partie géométrique, il est demandé à l'élève de donner le nom des quadrilatères qui lui restent : soit le rectangle et le carré. Un quadrilatère particulier est identifié par son nom et non pas à l'aide d'un adjectif qualificatif. On peut alors penser que les relations d'inclusion dans l'ensemble des quadrilatères sont plus difficiles à appréhender pour les élèves à ce niveau de scolarité qu'elles ne le sont pour les triangles.

Mais il a été montré par ailleurs que les élèves ne sont pas toujours capables de transférer leurs compétences dans un domaine vers un autre domaine que ce soit de l'algèbre vers la géométrie (Healy ; 1998) ou de la géométrie vers l'algèbre (Braconne ; 2001), en particulier à propos de la preuve et de la démonstration. On peut donc s'attendre, même si le contrat didactique reste le même dans les deux parties, à ce que la partie numérique soit mieux réussie que la partie géométrique. Le champ d'application du domaine des contraintes dans la partie numérique est plus restreint que dans la partie géométrique. La réponse attendue dans la 1^{ère} partie est un seul nombre quand dans la partie géométrique, l'étude des figures se termine par des mots de vocabulaire.

- Comment vont-ils faire ?

1^{ère} partie :

Ils peuvent écrire quelques nombres et les rayer au fur et à mesure de l'application des contraintes ou au contraire répondre directement. On peut aussi s'attendre à ce qu'ils proposent plusieurs nombres parce qu'ils ne respecteront pas les trois contraintes simultanément.

2^{ème} partie :

Cette fois, les élèves doivent faire visuellement des allers et retours entre la lecture de l'énoncé de chaque contrainte et son application sur l'ensemble des dessins sans revenir sur les choix antérieurs. Ce qui risque de les troubler, c'est de retrouver des figures acceptables selon une contrainte mais inacceptables par ailleurs. La difficulté est alors de ne pas remettre en cause les choix précédents. On verra qu'un élève est revenu sur sa décision aux traces de gomme qu'il aura laissé sur sa feuille. On peut penser qu'il y aura davantage de remise en cause des choix précédents dans cette partie géométrique que dans la partie arithmétique, les activités à mener étant ici plus complexes. C'est pourquoi nous avons choisi de donner comme première consigne le tri le plus simple entre les quadrilatères et les autres cas de figures. A ce propos nous nous sommes limités à deux triangles particuliers et nous n'avons pas proposé de pentagone ou hexagone plus ou moins réguliers pour ne pas alourdir la charge de travail des élèves. Cette première étape franchie, ils élèves doivent ensuite mesurer les côtés soit à la règle soit au compas, inventorier les cas où il y a deux longueurs égales puis rayer les dessins qui ne conviennent pas. Enfin la plupart des angles droits « sont bien placés » dans la feuille : leurs côtés sont parallèles aux bords de celle-ci. On peut penser qu'ils seront vérifiés à l'œil sinon à l'équerre. Dans un cas comme dans l'autre ceci ne fera l'objet d'aucune trace sur la feuille de papier sauf pour certains élèves de 6^{ème} plus habitués à coder les figures de géométrie. On peut s'attendre à trouver des élèves qui ont rayé les quadrilatères ayant plus d'un angle droit parce qu'ils ont interprété la consigne de manière restrictive. L'élève qui garde le triangle isocèle rectangle oublie la première contrainte et interprète les deux dernières consignes de façon restrictive : à propos des côtés, il confond l'expression « deux à deux » avec le cardinal « deux » et cette erreur entraîne une interprétation de la contrainte sur les angles droits puisqu'il n'y a qu'un angle droit dans le triangle. On ne peut alors pas savoir vraiment comment un tel élève comprend l'expression « au moins ». On peut imaginer une certaine différence entre les réponses des 6^{èmes} et celles des CM2, dans la mesure où les 6^{èmes} ont été confrontés à plusieurs reprises à l'expression « au moins ».

- En termes de paradigmes géométriques

Les dessins étant réalisés à la règle, l'approche de l'activité se fait obligatoirement avec les outils de G1 : mesure, perception, validation instrumentée.

L'élève qui réussit à garder les figures adéquates (rectangle, carré) est très vraisemblablement dans G2. En effet un tel élève arrive à combiner simultanément les diverses contraintes qui lui sont imposées mais dans le même temps, les dessins qui sont proposés sont « en vraie grandeur » et le perçu peut être déterminant. Toutefois on peut considérer qu'un élève qui est en mesure de gérer plusieurs informations à la fois de manière inclusive les unes par rapport aux autres fonctionne en G2. Aussi nous pourrions considérer comme fonctionnant dans G2, tout élève qui sera capable de ne retenir ne serait-ce qu'un des deux quadrilatères satisfaisants aux trois contraintes. Le fait qu'il accepte tous les quadrilatères attendus sera une assurance d'un meilleur fonctionnement dans G2. Avec davantage de dessins nous aborderions sans doute là une activité qui relève de zone de développement proximal et de la part de l'élève, une connaissance plus approfondie de ce paradigme G2.

L'élève qui échoue est-il pour autant dans G1 ? Oui sans doute parce qu'il n'arrive pas à combiner simultanément les multiples propriétés des figures qui lui sont proposées ou n'a pas acquis une organisation inclusive des quadrilatères particuliers. On doit alors rencontrer deux cas : l'élève qui laisse des figures qui ne conviennent pas comme un triangle sous prétexte qu'il a un angle droit ou des côtés de même longueur et l'élève qui raye certaines figures comme le carré parce qu'elles plus de propriétés que ce que demande la consigne, comme 4 angles droits alors que l'on disait « au moins un angle droit ». Un tel élève considère probablement les propriétés comme exclusives les unes des autres et ne sait certainement pas gérer l'inclusion d'une catégorie de figures dans une autre.

- Niveaux de van Hiele

L'élève qui a gardé les quadrilatères satisfaisants aux trois contraintes est au moins au niveau de déduction informelle même s'il ne s'agit pas ici d'apporter une nouvelle information. Du moins cet élève est-il capable de respecter l'enchaînement des contraintes sans les exclure les unes des autres. On ne peut pas savoir par quel cheminement il arrive à la bonne conclusion mais il est probable qu'il sait qu'un carré est un quadrilatère très particulier. Pour être certain qu'un tel élève maîtrise effectivement le niveau de déduction informelle, il aurait fallu proposer davantage de dessins de quadrilatères ayant certaines ou toutes les propriétés proposées.

Toutefois, les élèves peuvent être arrivés à la bonne conclusion selon deux démarches distinctes. Premièrement l'élève a étudié chaque dessin pour vérifier s'il respectait l'ensemble des trois contraintes, il a eu un comportement plutôt caractéristique du niveau d'analyse. Deuxièmement, l'élève a rayé les dessins au fur et à mesure de sa lecture et du respect des contraintes, il a alors eu un comportement que

l'on peut assimiler à une démarche relevant de la déduction informelle. Un tel changement de démarche peut être évoqué en classe et relèverait alors d'une activité de zone de développement proximal.

L'élève qui accepte des figures ne respectant qu'une ou deux des trois contraintes, ou qui raye une figure acceptable comme le carré est sans doute au niveau d'analyse puisqu'il ne met pas en corrélation la figure et l'ensemble des contraintes. Un tel élève est encore dans une gestion exclusive des contraintes ou des figures.

Enfin, l'élève qui revient sur ses choix, ne respecte de manière cohérente sur l'ensemble des dessins qu'une ou deux contraintes, est sans doute au niveau d'identification-visualisation. On pourra rencontrer des élèves qui associent une figure à une seule contrainte et éliminent celles qui en vérifient plusieurs. Ces élèves associent directement une phrase de Français à une organisation spatiale et le cumul des propriétés n'est pas encore conceptualisé.

7. Exercice 1.7.

Exercice 1.7.
Dans la figure ci-dessous, il y a des rectangles. Le centre de chaque rectangle est indiqué sur le dessin par une croix.
On a déjà commencé le dessin et le côté d'un des rectangles est tracé. Trouves-en au moins deux autres, et plus si tu peux.
(Tu peux utiliser ton équerre si tu veux)

Exemple :

The diagram shows a set of points arranged in a roughly rectangular shape. A solid line traces the top and right sides of a rectangle, with a cross marking its center. Four other rectangles are shown with dashed lines and numbered 1, 2, 3, and 4, each with a cross marking its center. Rectangle 1 is at the top, rectangle 2 is on the left, rectangle 3 is in the middle, and rectangle 4 is on the right. The points are distributed such that these four rectangles are the only ones whose centers are marked with crosses.

- Consigne

Dans cette activité l'élève doit retrouver avec l'aide de ses instruments autant de rectangles que possible. Nous avons ajouté ici des numéros afin de faciliter l'analyse de la tâche. En tout il y a 4 rectangles à trouver dont 1 carré (n°4) et un très grand rectangle (n°3). Les centres des rectangles sont donnés pour favoriser sinon le repérage de la position du moins, nous l'espérons, le nombre de rectangles à trouver. Seul le rectangle qui est situé en haut à gauche de la figure (n° 1) est « bien placé » : ses côtés sont parallèles aux bords de la feuille et c'est celui qui a les plus petites dimensions et qui peut être repéré à l'œil. Les autres rectangles ont tous la même orientation dans la feuille. Nous avons fait ce choix pour ne pas surcharger la feuille de points visuellement difficiles à associer les uns aux autres. Aussi une fois trouvée l'orientation d'un rectangle, les autres rectangles ont leurs côtés parallèles entre eux, y compris le carré. Visuellement, il ne devrait pas y avoir d'obstacle majeur. Dans le cas du très grand rectangle (n°4), l'élève doit faire le choix entre plusieurs possibilités pour le sommet situé en bas à droite de la feuille. Les autres rectangles sont de taille moyenne et en biais pour que les recherches soient en dehors de l'évidence visuelle.

Dans le cas du plus grand des rectangles (n°4), l'élève est amené à utiliser des propriétés connues du rectangle : côtés opposés de même longueur, côtés consécutifs perpendiculaires, centre de symétrie. Même si le centre est donné afin de permettre justement l'usage des propriétés des diagonales ou de la symétrie, il est peu probable que les élèves le fassent, en particulier les élèves de CM2. On peut donc s'attendre à une différence de démarches entre les élèves de CM2 et ceux de 6^{ème}. Enfin nous avons donné à ce dernier rectangle des dimensions suffisamment grandes pour que l'ouverture d'un compas ne soit pas suffisante et l'usage de la règle uniquement soit quelque peu hasardeux. Pour trouver le 4^{ème} sommet de ce rectangle, l'élève doit faire un usage simultané de plusieurs propriétés du rectangle.

Le carré, de taille moyenne, est en biais dans la feuille, son centre est donné : sera-t-il alors considéré comme un rectangle particulier ?

- Que vont-ils faire ?

On peut prévoir que les élèves de CM2 utiliseront peu les centres des rectangles puisque cette propriété est hors programme à ce niveau. Ils peuvent savoir que les diagonales ont la même longueur sans pour autant associer cette propriété au fait qu'elles ont le même milieu. Ils seront donc contraints d'utiliser les propriétés des côtés pour construire les rectangles à l'aide de l'équerre, du compas ou de la règle graduée. Il se peut toutefois que les centres soient utilisés non pas pour leurs propriétés géométriques, mais pour identifier le nombre de rectangles à trouver. Si aucune diagonale n'est dessinée, l'élève n'aura pas fait usage des propriétés du centre du rectangle.

Tous les élèves vont sans doute commencer par repérer le petit rectangle (n°1) dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille. Ce travail peut se faire sans l'usage de l'équerre ou du compas. Cette première activité est menée de manière perceptive.

L'usage de l'équerre devrait les amener à retrouver les autres sommets du rectangle n°2 et du carré (n°3). Il est peu probable qu'ils utilisent le compas dans ce genre de situations. La règle graduée et l'équerre s'imposeront naturellement. Vont-ils s'apercevoir que le quadrilatère n°3 est un carré et le garder ? On peut s'attendre à trouver des traces de gomme à propos du carré : il a été repéré comme un rectangle possible à cause des angles droits puis il a été rejeté parce que tous ses côtés sont isométriques.

Pour la recherche du grand rectangle, les élèves ont besoin de l'équerre et de la règle graduée. Ce rectangle mesure 16 cm de long et 11,2 cm de large. Ils ne peuvent faire l'économie de l'utilisation simultanée des propriétés géométriques du rectangle telles qu'ils les connaissent (longueur des côtes opposés et angles droits) et leur application dans le cadre d'un dessin non conventionnel puisque « trop grand ». Ils doivent aussi être très précis pour trouver le « bon » sommet.

- En termes de paradigmes géométriques

Les élèves qui ne trouvent que les deux petits rectangles quelconques (n°1 et n°2) sont dans G1. Ils ont eu une intuition qui est liée à la perception de la figure. Les outils et les actions nécessaires à la vérification sont eux aussi dans G1. L'expérience se situe dans l'espace mesurable. La déduction (ici le choix) est liée à l'expérience par la vue.

Les élèves qui rejettent le carré sont aussi dans G1 : il n'y a pas alors de décollement de la figure, d'analyse de celle-ci en terme de schéma de la réalité. De plus ces élèves n'ont pas une conception inclusive des quadrilatères particuliers.

Les élèves qui choisissent le carré sont peut-être dans G2, à condition qu'ils aient identifié ce rectangle comme un carré. S'ils n'ont pas repéré que ce quadrilatère était aussi un carré, (ils n'ont pas mesuré les côtés ou ne se sont pas arrêtés au fait qu'ils étaient isométriques), G1 est sans doute leur paradigme de fonctionnement habituel, mais une telle activité provoque un premier passage en G2.

Ceux qui trouvent le très grand rectangle sont dans G2, avec des procédures qui relèvent nécessairement de G1. Ils doivent avoir respecté simultanément deux propriétés du rectangle (angles droits et/ou côtés de même longueur) pour agir. Le statut du dessin pourrait être conforme à la définition de « figural concept » telle que présentée par Fischbein (1993) et reprise par Houdement-Kuzniak (1998).

- Niveaux de van Hiele

Le tracé du seul rectangle n°1 dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille relève du niveau d'identification-visualisation. Les élèves peuvent aussi identifier le rectangle n°2 à l'œil dans la mesure où ses dimensions restent dans l'empan visuel de l'élève et que tous CM2 et 6^{ème}, ont rencontré des rectangles dans des positions diverses.

Le reste de l'exercice est globalement au moins au niveau d'analyse. Il n'y a aucune figure qui puisse être reconnue d'emblée. Toutes doivent être reconstruites en respectant une ou des propriétés des rectangles, à commencer par le rectangle n°3 dont les côtés ne sont pas parallèles aux bords de la feuille et dont les dimensions dépassent celles de l'équerre ou du compas. Le soin mis à retrouver le quatrième sommet de ce rectangle sera une « preuve » que l'élève est au niveau d'analyse. On peut s'attendre à ce qu'il écrive les distances entre les différents points proposés pour faire son choix ensuite. L'élimination du carré est un élément pour confirmer le niveau d'analyse n'est pas dépassé. Même pour les élèves qui reconnaissent le carré, cet exercice ne se situe pas forcément au niveau de déduction informelle. Il n'y a aucun élément nouveau qui apparaisse dans la réalisation de cet exercice, simplement le réinvestissement de choses connues. En particulier, il n'y a pas de construction à partir de figures déjà données, ni de reconnaissance de relations entre figures. Mais il y a peut-être une approche d'une conception inclusive des propriétés des quadrilatères. On est donc en zone de développement proximal vers la maîtrise de la déduction informelle.

L'élève qui a retrouvé les quatre rectangles est très vraisemblablement au niveau de déduction informelle. Non seulement il est capable de considérer qu'un carré est un rectangle particulier mais de plus il sait à un autre moment utiliser plusieurs propriétés connues.

8. Exercice 1.8

Exercice 1.8. : « Portrait de nombres »
 C'est un nombre impair comme 1, 3, 5, 7...
 Il est dans la table des 5.
 Il est plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

S'il y a plusieurs nombres donne-les tous :

1	2	3								10
11										
21										
31										
41										50

Exercice 1.8. : « Portrait de figures »
 Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, à la fois :
 - sont des quadrilatères
 - ont leurs côtés de la même longueur deux à deux
 - ont au moins un angle droit

Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)

Connais-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le :

Exercice 1.8. : « Portrait de nombres »
 C'est un nombre impair comme 1, 3, 5, 7...
 Il est dans la table des 5.
 Il est plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

S'il y a plusieurs nombres donne-les tous :

1	2	3								10
11										
21										
31										
41										50

Exercice 1.8. : « Portrait de figures »
 Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, à la fois :
 - sont des quadrilatères
 - ont leurs côtés de la même longueur deux à deux
 - ont au moins un angle droit

Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)

Connais-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le :

▪ Consigne

L'exercice 1.8. est une reprise de l'exercice 1.6. dans lequel nous avons introduit une grille de nombres pour éventuellement aider les élèves dans leur recherche dans la 1^{ère} partie. Mais cet exercice a été distribué en deux versions : le changement de variable didactique se trouve alors dans la partie géométrique. Dans la première version (questionnaire T), qui se révélera être dans le dernier questionnaire, la partie géométrique est identique à celle de l'exercice 1.6.. Dans la seconde version (questionnaire B), nous avons introduit une dixième figure qui est un cerf-volant satisfaisant toutes les conditions demandées. Pour des raisons de mise en page, nous avons réduit la taille du carré n°4 et du triangle isocèle rectangle n°8 en changeant son orientation. L'angle droit du cerf-volant (n°10) a ses côtés parallèles aux bords de la feuille afin de le rendre facilement identifiable. Ce cerf-volant a été ajouté et utilisé de manière exploratoire pour repérer si les élèves allaient étudier ce dessin avec le même soin que les autres dans la mesure où il correspond à une solution acceptable dans une configuration inconnue de la plupart des élèves. Afin de ne pas dérouter un trop grand nombre d'élèves ce questionnaire n'a été proposé qu'à quelques uns (entre 12 et 15 élèves de chaque niveau).

▪ Comment vont-ils faire ?

1^{ère} partie :

Ils peuvent ne pas utiliser la grille et répondre directement. On peut s'attendre à ce qu'ils proposent plusieurs nombres parce qu'ils ne respecteront pas les trois contraintes simultanément. Notre intention est de comparer l'usage qui sera fait de cette grille ou non et la production d'une bonne réponse à la question.

2^{ème} partie :

On devrait retrouver à propos de cet exercice, l'ensembles des démarches utilisées pour l'exercice 1.6.. C'est évidemment la présence du cerf-volant n°10 qui risque d'amener des résultats différents. On peut s'attendre à ce que certains élèves rayent ce quadrilatère tout simplement parce qu'ils ne reconnaissent pas là une forme connue et, en fin d'activité, il est demandé de donner le nom des figures qui restent. L'ajout de ce quadrilatère satisfaisant à tous les critères rend l'exercice d'autant plus difficile. Sa réussite sera donc le fait d'élèves particulièrement performants.

▪ En termes de paradigmes géométriques

Les critères déterminant le paradigme dans lequel l'élève a fonctionné sont les mêmes que ceux que nous avons décrits précédemment. Deux différences doivent être faites.

La présence de la grille de nombres dans la première partie pourra être une aide à la réussite. Mais, quoi qu'il en soit, seuls les élèves qui auront géré simultanément l'ensemble des contraintes arriveront à donner la bonne réponse.

Dans la deuxième partie, la présence ou non du cerf-volant rend l'exercice plus difficile même si elle ne change pas les conditions de travail des élèves. Nous l'avons dit à propos de l'exercice 1.6., l'activité doit être menée dans G1 pour une validation dans G2. Nous appliquerons donc les mêmes critères pour déterminer le paradigme dans lequel l'élève a pu fonctionner. Toutefois le fait que ce quadrilatère soit accepté ou rejeté par un élève peut être interprété de plusieurs manières. L'élève se méprend sur le sens de l'expression « au moins » ; il accepte donc le cerf-volant parce qu'il satisfait à tous les critères de sélection, en particulier il n'y a qu'un seul angle droit et il rejette les figures n°4, n°5 et n°7 où il y en a plusieurs. Un tel élève est encore dans G1. Une autre erreur peut venir du fait que l'élève se méprenne sur le sens de l'expression « deux à deux », expression qu'il connaît dans le contexte du rectangle et qu'il assimile à côtés opposés et longueurs différentes. Dans le cas du cerf-volant, les côtés de même longueur sont consécutifs donc il y a pour un tel élève une contradiction qui l'amène à rayer cette figure. Il est tout à fait vraisemblable que le même élève aura rejeté le carré parce que tous ses côtés sont isométriques. Cet élève est aussi encore en G1.

Aussi l'élève qui réussit à ne garder que les trois figures satisfaisant aux trois contraintes (rectangle, carré et éventuellement cerf-volant) est très vraisemblablement dans G2 sans qu'on n'en soit tout à fait certain. Il est quand même en mesure de combiner simultanément les diverses contraintes qui lui sont imposées.

Mais comme dans l'exercice 1.6., les dessins qui sont proposés sont « en vraie grandeur » et le perçu peut être déterminant. Ainsi nous pourrions considérer comme fonctionnant dans G2, tout élève qui sera capable de ne retenir ne serait-ce qu'un des trois quadrilatères satisfaisants aux trois contraintes. Nous devons appliquer ici le même critère d'attribution du paradigme de fonctionnement que dans l'exercice 1.6. même si la réussite totale est plus difficile à atteindre. Le fait qu'un élève accepte les trois quadrilatères attendus sera une assurance d'un meilleur fonctionnement dans G2. Nous abordons sans doute-là une activité qui relève de zone de développement proximal.

- Niveaux de van Hiele

L'attribution des niveaux de van Hiele se fera dans les conditions décrites à propos de l'exercice 1.6..

Nous considérerons que l'élève qui a gardé l'un des quadrilatères satisfaisants aux trois contraintes est au moins au niveau de déduction informelle : il a été capable de respecter la liste des propriétés d'un nombre ou d'une figure.

La présence du cerf-volant devrait nous permettre de préciser qu'un élève est bien au niveau d'analyse plutôt qu'au niveau de déduction informelle. En effet, les diverses contraintes ne sont pas respectées dans les mêmes conditions à propos du cerf-volant ou à propos du rectangle : le cerf-volant n'a qu'un angle droit et ses côtés sont de même longueur deux à deux et les deux paires ont des longueurs différentes. De plus cette figure n'a pas de nom connu pour un bon nombre d'élèves. Donc ils peuvent accepter le rectangle n°5 et le cerf-volant n°10 pour des raisons assez distinctes, sans qu'il y ait de leur part une conception inclusive des quadrilatères ou une approche organisée de leurs propriétés. C'est le rejet du carré qui reste déterminant pour l'interprétation et le codage des réponses.

Comme dans l'exercice 1.6., nous considérerons que l'élève qui accepte des figures ne respectant qu'une ou deux des trois contraintes, ou qui raye des figures acceptables comme le rectangle est sans doute au niveau d'identification-visualisation : il ne met pas en corrélation la figure et l'ensemble des contraintes.

Les élèves ne devraient pas être mis en grande difficulté par les activités proposées au recto des questionnaires. Qu'ils fonctionnent dans un paradigme ou dans un autre, quelque soit le niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent, ils devraient donner des réponses que nous pourrions analyser.

Au verso en revanche, ils devront, dans la plupart des cas, donner une explication de ce qu'ils ont compris ou de la démarche qu'ils ont suivie pour arriver à leur solution. Certains élèves, en particulier ceux du

Primaire, pourraient être davantage surpris par de telles consignes. Toutefois, nous devons être prudente dans nos analyses : il nous faudra éviter le piège de l'inférence négative, c'est-à-dire ne pas conclure qu'un élève ne peut réussir telle tâche indiquant l'atteinte de tel niveau ou un fonctionnement dans tel type de géométrie simplement parce que sa réponse spontanée ne donne aucune indication en ce sens. Ignorant tout de nos attentes et répondant à nos questions comme elles sont posées, il se peut qu'un tel élève n'ait pas senti le besoin d'aller plus loin et du même coup de donner une réponse relevant d'un niveau de van Hiele supérieur ou située dans un paradigme plus théorique.

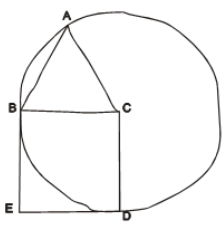
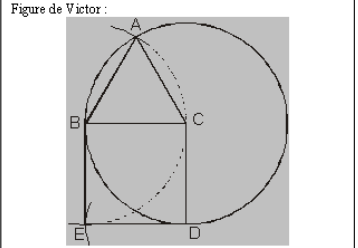
A la fin de l'analyse de chaque « exercice » nous décrirons les associations qui ont été choisie avec les tâches proposées au recto des feuilles de questionnaires. C'est aussi dans le but d'éviter les inférences négatives que nous avons élaboré les diverses associations entre les exercices du recto et du verso

9. Exercice 2.1.

Cette activité est la première des quatre données sur le même thème : l'utilisation simultanées des définitions du cercle, du carré et du triangle équilatéral.

Exercice 2.1.

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Penses-tu qu'elle était juste ?
Donne tes explications.

.....
.....
.....
.....

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

▪ Consigne

Dans cette première version de l'activité, les élèves ont confrontés à une situation géométrique exposée en trois parties : un texte en Français, un schéma sans codage particulier et la reproduction diminuée de la figure faite par Victor. C'est la gestion simultanée de ces trois modes de présentation qui rend la tâche complexe pour les élèves et intéressante pour nous. Si les élèves n'arrivent pas à prendre en compte les trois modes en même temps, quelle est la présentation qu'ils vont privilégier : verbale, schématique, figurale ? Les élèves n'ont pas à faire mais à juger de ce qui a été fait et faire le lien entre le brouillon et la figure faite par Victor. Pour autant nous avons laissé aux élèves la possibilité de faire leur propre figure pour leur permettre une meilleure appréhension de la situation. Nous avons laissé les traits de construction, tant pour aider les élèves dans leur analyse de la situation afin de répondre à la question que de leur permettre de créer leur propre dessin. La figure proposée n'est pas aux bonnes dimensions puisqu'elle présentée comme étant une photocopie réduite. Le rayon utilisé ne mesure pas 3 cm. Les élèves ne peuvent pas rester au stade du perçu. Ils doivent analyser les incidences entre les différents tracés pour se prononcer. Leur expérience ne peut reposer sur l'espace mesurable ; le dessin fait par Victor est, de part sa présentation même, un schéma de la réalité. La déduction peut être liée à l'expérience par la vue : la figure proposée ayant toutes les propriétés géométriques requises, elle peut être considérée comme juste.

C est le centre du cercle ; B est un point de ce cercle ; A est à l'intersection du cercle avec un arc de cercle de centre B passant par C donc ABC est un triangle équilatéral. En supposant que le rayon est partout le même, on a les égalités : $BC = BD = BE = DE$. Même si l'angle droit n'est pas indiqué, la figure réalisée par Victor est juste. Rappelons que nous avons fait le choix de ne pas coder les angles droits afin de ne pas surcharger la situation géométrique en codage, laissant à cette occasion une part d'implicite dans les informations données par le dessin.

L'intérêt de suggérer aux élèves de dessiner eux-mêmes la figure dans ses dimensions réside dans le fait que l'on pourra comparer leurs productions graphiques et leurs raisonnements et vérifier la cohérence de cet ensemble avec la « figure faite par Victor ».

▪ Que vont-ils faire ?

Ils peuvent observer la figure proposée et confirmer que tout est juste. Au contraire, on peut s'attendre à trouver des élèves qui écrivent que la figure faite par Victor est fautive parce qu'elle ne respecte pas les dimensions prescrites. De tels élèves ne tiennent pas compte de la réduction du dessin à la photocopie. Ils peuvent aussi donner un commentaire sur les trois sous-figures de la figure (cercle, triangle équilatéral, carré) prises séparément, sans les articuler les unes par rapport aux autres. En particulier dire que le

triangle est « bien équilatéral », le carré est « bien carré », et le cercle « bien rond » sans évoquer les incidences sur la position des points A, B et D sur le cercle.

Parmi ceux qui vont refaire la figure, il y a sans doute ceux qui feront une figure juste et soignée, qui concluront que celle de Victor est fautive parce qu'elle n'a pas les bonnes dimensions. D'autres diront qu'elle est juste parce que les deux figures sont pareilles, avec comme sous entendu qu'elles sont semblables entre elles. On peut penser que de tels élèves ne sont pas en mesure d'explicitier un raisonnement mais ils en ont une certaine intuition. Une est porteuse de propriétés ordonnées.

Parmi les élèves qui vont refaire une figure fautive ou maladroite, on pourra trouver deux groupes : ceux qui essaient de respecter les indications données par le texte et le schéma et ceux qui essaient de reproduire les gestes de Victor. Nous pourrions avoir alors diverses réactions. D'une part certains élèves comparent leur dessin et la reproduction diminuée et concluent que la figure de Victor est trop petite sans analyse aucune des incidences, et d'autre part ceux qui, ayant conscience que leur dessin est faux ou imprécis, font un commentaire sur la différence d'aspect entre les deux dessins. Si nous avons des commentaires du genre « j'aurais dû avoir..... » concernant les positions des points A ou B ou D ou l'angle de sommet E, on pourra dire que ces élèves ont quitté la géométrie d'observation pour une géométrie de traitement et de déduction.

- En termes de paradigmes géométriques

La figure « faite par Victor » est vraisemblablement juste, puisque les incidences entre les points A, B, C, D et E semblent respectées ; seules les dimensions ont été changées. Pour accéder à une réponse exacte, l'expérience ne peut se fonder sur l'espace mesurable. L'élève doit se placer en G2. Il doit articuler non seulement la description des trois sous-figures mais aussi l'appartenance des trois points au cercle. Même si la déduction est motivée uniquement par l'expérience par la vue, on est bien dans G2 puisque l'on a quitté l'espace mesurable. Toutefois, les élèves n'étant pas habitués à rédiger des démonstrations, on peut s'attendre à des commentaires descriptifs sans relation de causalité les uns par rapport aux autres. Il faudra donc considérer qu'un élève qui écrit que la figure faite par Victor est juste comme fonctionnant dans G2. Un tel élève a non seulement identifié les sous-figures dans la figure mais il est en mesure de considérer que la reproduction qui lui est proposée est le dessin d'un représentant de la situation géométrique et non pas l'objet décrit dans le texte en Français.

Au contraire, l'élève qui affirme que la figure de Victor est fautive parce qu'elle ne respecte pas les bonnes dimensions, fonctionne très certainement dans G1. La reproduction est alors considérée comme le dessin-objet illustrant la situation géométrique. On est dans l'espace mesurable et la validation a été instrumentée. Nous pourrions considérer que les élèves qui dessinent des figures fautes et expliquent que celle de Victor l'est aussi ont fonctionné aussi dans G1. Vraisemblablement, ces élèves n'ont pas réussi à

gérer les incidences entre les sous-figures et la figure et les validations instrumentées qui sont les leurs les ont amenés à une conclusion erronée.

- Niveaux de van Hiele

Nous pourrions considérer que l'élève qui répond que la figure de Victor est fausse parce qu'elle n'a pas les bonnes dimensions ou parce que les traits du schéma ne sont pas droits, ne maîtrise que le niveau d'identification-visualisation. En effet, une telle remarque laisse entendre qu'il ne perçoit la situation que dans sa globalité, qu'il ne fait encore aucune analyse des différentes propriétés ou des sous-figures de la figure.

L'élève qui fait une description des trois éléments sans incidence les uns sur les autres est peut-être au niveau d'analyse, en particulier s'il ne donne pas une réponse globale à la question. On peut imaginer que les élèves à ce niveau se contenteront d'écrire que le point C est le centre du cercle, que le triangle ABC est un triangle équilatéral et que le quadrilatère BCDE est un carré, sans en tirer aucune conclusion. L'élève à ce niveau décrit les éléments de la figure, fait la liste de ses propriétés mais n'établit pas explicitement de lien entre elles. Toutefois, l'élève qui écrit que la figure de Victor est juste sans évoquer les relations entre les sous-figures est aussi au niveau d'analyse. Il a sans doute fait le lien entre les différents éléments de la situation géométrique mais n'a pas explicité son raisonnement.

L'élève qui articule et motive sa description est au niveau de déduction informelle : non seulement il peut extraire des sous-figures dans une figure mais il peut aussi les relier les unes aux autres. Les élèves qui sont capables de dire que les points A, B et D doivent être sur le cercle ont parfaitement lié les définitions du cercle, du carré et du triangle équilatéral sans peut-être avoir conscience que ce sont là des définitions. Au moins ont-ils ordonné les différentes propriétés des sous-figures constituant la figure qui leur est proposée en version réduite. De tels élèves n'auront pas forcément besoin de créer leur propre dessin.

- Associations

Cette tâche est associée d'une part à l'« exercice » 1.2. composant ainsi le questionnaire E et d'autre part à l'« exercice 1.4. » pour former le questionnaire J.

Dans l'exercice 1.2., il s'agit de rayer les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles alors que les dessins proposés sont faits à main levée. L'élève n'a pas besoin de faire de dessin ni d'écrire quoi que ce soit. Il n'a aucun moyen de vérifier ses choix ; il n'a pas à les expliquer non plus. Dans ce questionnaire E le niveau de difficulté entre les deux tâches est donc très différent : l'activité du recto est nettement plus

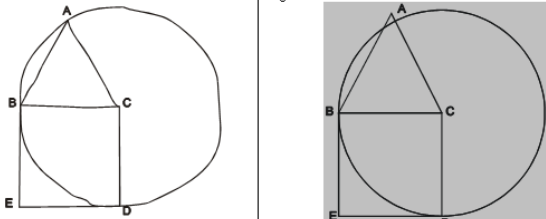
facile que celle du recto. Ce sera pour nous l'occasion de repérer comment les élèves passent d'une tâche très simple à une autre nettement plus complexe : fonctionnent-ils toujours dans le même paradigme ? Témoignent-ils toujours du même niveau de van Hiele ?

Dans l' « exercice » 1.4., il faut rayer les descriptions qui ne correspondent pas à celles d'un triangle isocèle. Les descriptions ont été classées dans un ordre que nous considérons comme un ordre croissant de difficultés. Dans les trois dernières situations le triangle ABC est une sous-figure de la figure décrite. L'élève a la possibilité de dessiner ce qu'il comprend de chaque situation et de se déterminer ensuite. Il n'a pas à expliquer ou justifier son choix. Nous l'avons dit cette tâche est sans doute moins facile pour les élèves de CM2 en particulier puisque les triangles ne sont pas dessinés. Du coup l'association de cet exercice avec le n°2.1. que nous venons d'analyser constitue un questionnaire dans lequel, les deux tâches sont distinctes puisque l'une demande une rédaction quand l'autre n'en demande pas mais sont assez complexes. Dans ce cas les élèves devraient être plus nombreux à fonctionner dans le même paradigme et témoigner du même niveau de van Hiele sur l'ensemble des deux tâches.

10. Exercice 2.2

Exercice 2.2

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Penses-tu qu'elle était juste ?
Donne tes explications.

.....
.....
.....
.....

Si ce la peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

▪ Consigne

Il y a un changement de variable didactique entre cette activité et la précédente. Si dans l'exercice 2.1 la figure faite par Victor était juste, cette fois elle est manifestement fautive : considérant que le point C est le centre du cercle, le triangle ABC ne peut pas être un triangle équilatéral puisque le point A n'est pas sur

le cercle, même s'il n'y a aucune trace de construction. La consigne reste la même et les élèves doivent faire usage des mêmes outils que dans l'exercice 2.1. Les élèves doivent analyser cette reproduction diminuée de la figure ; on n'est donc pas dans l'espace mesurable. Avec sa réponse négative, sous cette forme la tâche est peut-être plus facile : le point A n'étant pas sur le cercle, les longueurs AB, AC et BC ne peuvent être égales. La définition même du triangle équilatéral n'est pas respectée. La raison invoquée s'exprime en quelques mots. De plus dans cette activité, il suffit de trouver l'unique raison qui rend fausse la figure de Victor alors que dans l'exercice 2.1., il fallait vérifier les relations entre tous les différents éléments de la figure. On peut s'attendre à trouver des élèves qui parleront de triangle isocèle pour le triangle ABC dans la mesure où celui-ci est dessiné comme tel mais n'est pas codé ainsi. Le perçu aura donc une part importante dans la rédaction la réponse.

- Comment vont-ils faire ?

L'intérêt de cette version réside dans le fait de savoir si les élèves seront plus nombreux à refaire une figure ou non que dans l'exercice 2.1.. A priori ils n'en ont pas besoin. Mais s'ils ne maîtrisent pas les incidences entre les différentes sous-figures, ils vont sans doute créer leur propre dessin pour mieux s'approprier la situation géométrique et de l'exactitude celui-ci dépendra la justesse de leur réponse.

On pourra sans doute rencontrer des élèves qui ont réussi à concilier l'inconciliable en dessinant le triangle équilatéral ABC de telle sorte que le point A n'appartienne pas au cercle ou en jouant sur la longueur du rayon après avoir construit le triangle. De tels élèves pourront dire que la figure de Victor est juste : ils ont refait la même ! Pour nous ces élèves sont dans une géométrie instrumentée dans laquelle la précision a encore un enjeu d'importance.

A l'opposé, l'élève qui maîtrise la définition du triangle équilatéral et sa relation avec la définition du cercle, n'a pas besoin de refaire une figure : il peut directement expliquer en quoi la figure de Victor est fausse. Il se peut toutefois que certains de ces élèves fassent leur propre figure pour s'assurer de l'incidence entre les points.

- En termes de paradigmes géométriques

La présence du point A en dehors du cercle sur la figure de Victor devrait faciliter l'expression d'un fonctionnement en G2. En effet tout élève qui évoque la position de ce point pour dire que la figure de

Victor est fausse, a fait le lien entre les définitions du cercle et du triangle équilatéral. Il témoigne d'un concept figural de ces deux figures et de l'incidence de l'une sur l'autre dans la situation géométrique proposée. Un tel élève n'est plus dans l'espace mesurable et sa validation est d'ordre théorique ; elle s'inscrit dans une géométrie proto-axiomatique même si le raisonnement n'est pas explicité ni verbalisé.

On pourra aussi considérer que les élèves qui vérifient, en utilisant leur compas sur la reproduction, que le triangle ABC n'est pas équilatéral sont aussi dans G2 même s'ils utilisent pour cela des outils de G1. Dans la mesure où ils ne tiennent pas compte des longueurs des segments tels qu'ils apparaissent sur la feuille, ils ne sont pas dans une géométrie de dessin-objet mais dans une géométrie où la figure donne à voir un représentant. De tels élèves ont testé la définition du triangle équilatéral dans une géométrie où les incidences ont pris le pas sur les mesures exactes. Ici on est dans l'anticipation du résultat. Le dessin doit vérifier les relations entre les objets et non pas le contraire, ce qui serait caractéristique d'un fonctionnement en G1.

Un doute pourra subsister dans le cas d'un élève qui, ayant dessiné une figure en vraie grandeur, très soignée et précise, constate que son point A est sur le cercle quand celui de Victor n'y est pas. Selon la réponse de l'élève, celui-ci pourra être considéré comme ayant fonctionné dans un paradigme ou dans l'autre. En effet, s'il écrit que la figure de Victor et la sienne sont différentes sans donner d'autre argument, il témoigne sans doute d'un fonctionnement en G1. Un tel élève a une approche globale de la figure et n'analyse pas les sous-figures qui la composent. Si au contraire, l'élève écrit que la figure de Victor est fausse parce que les longueurs AB et AC ne sont pas égales à BC, on pourra considérer qu'il a fonctionné dans G2 en utilisant les définitions du cercle et du triangle équilatéral sans les citer.

Comme à propos de l'exercice 2.1., les élèves qui n'utilisent pas la figure de Victor et refont la leur pour répondre sont vraisemblablement dans G1, surtout si la figure qu'ils proposent est fausse, qu'ils ne concluent pas ou qu'ils concluent que la figure de Victor est juste.

Les élèves qui mesurent sont aussi dans G1.

On peut imaginer que certains élèves écriront que le triangle ABC est isocèle et que pour cette raison ce n'est pas un triangle équilatéral. Pour arriver à cette conclusion ils pourront avoir apprécié les longueurs à vue d'œil ou les avoir vérifiées au compas. Dans un tel cas nous pourrions dire qu'il y a eu non seulement contamination du su par le perçu mais que de tels élèves ont une conception exclusive des triangles particuliers. Nous considérerons aussi qu'ils ont fonctionné en G1.

- Niveaux de van Hiele

Cette nouvelle version de l'exercice devrait permettre de préciser les niveaux de van Hiele en utilisant d'autres caractéristiques de ceux-ci.

Par exemple, l'élève qui écrit que Victor s'est trompé parce que sa figure n'est pas comme le schéma : « le point A dépasse du cercle » ou « il n'a pas utilisé la bonne mesure », est au moins au niveau d'identification-visualisation. Un tel élève a une perception tout à fait globale de la situation, il compare les différentes présentations sans distinguer les sous-figures. Il se peut aussi que, tout en maîtrisant un niveau de van Hiele supérieur, l'élève ne ressente pas le besoin de l'exprimer, et qu'en restant au niveau d'identification-visualisation, il donne une réponse satisfaisante à l'exercice.

Comme dans l'exercice 2.1., tout élève qui évoque la taille de la reproduction est aussi au niveau d'identification-visualisation.

Un élève qui écrit que le triangle ABC n'est pas équilatéral parce qu'il est isocèle est au maximum au niveau d'analyse. Il témoigne d'une conception exclusive des triangles particuliers. Cet élève a identifié les sous-figures de la figure, il connaît les propriétés de chacune et les vérifie une à une sans les lier de manière hypothético-déductive. Nous considérerons comme étant au niveau d'analyse tout élève qui, ayant fait une figure juste, précise et soignée, en déduit que celle de Victor est fausse parce que le point A n'est pas sur le cercle. On peut penser que là l'élève a comparé ce qu'il a dessiné avec la reproduction qui lui était proposée et qu'il a constaté les différences.

L'élève qui maîtrise le niveau de déduction informelle est capable de donner une réponse argumentée sans que le dessin de la situation en vraie grandeur soit nécessaire. Il pourrait s'exprimer ainsi : « Si le triangle ABC était équilatéral, le point A serait sur le cercle. Ce n'est pas le cas donc la figure de Victor est fausse. »

▪ Associations

Cette tâche est associée d'une part à l' « exercice » 1.2. composant ainsi le questionnaire N et d'autre part à l' « exercice 1.6. » pour former le questionnaire M.

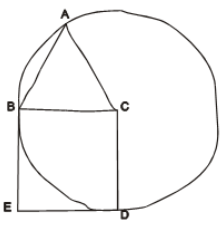
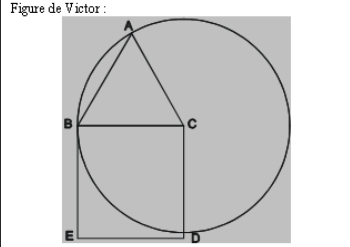
Rappelons que dans l'exercice 1.2., il s'agit de rayer les triangles qui ne sont pas des triangles isocèles alors que les dessins proposés sont faits à main levée. Comme dans le questionnaire E le niveau de difficulté entre les deux tâches est donc très différent : l'activité du recto est nettement plus facile que celle du verso. Ce sera pour nous une autre occasion de repérer comment les élèves passent d'une tâche très simple à une autre nettement plus complexe : fonctionnent-ils toujours dans le même paradigme ? Témoignent-ils toujours du même niveau de van Hiele ?

L' « exercice » 1.6. est une version du jeu du portrait dans lequel il faut, d'une part, trouver le nombre impair, multiple de 5, compris entre 29 et 43 et, d'autre part, garder les quadrilatères qui ont au moins un angle droit et leurs côtés de même longueur deux à deux. Là encore les élèves n'ont pas à rédiger quoi que ce soit ni à dessiner. Il n'ont pas de moyen de vérifier leurs choix. Il est tout à fait envisageable que leur démarche dans ce questionnaire M soit comparable à celle que nous aurons constatée dans le questionnaire N

11. Exercice 2.3.

Exercice 2.3.

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.

A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Penses-tu qu'elle était juste ?
 Donne tes explications.

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

- Consigne

La consigne est toujours d'associer et de comparer le texte, le schéma et la figure faite par Victor, figure dont on donne une copie réduite. Dans cette nouvelle version de l'exercice 2.1., le changement de variable porte sur le fait que le point D n'est pas sur le cercle ; le quadrilatère BCDE n'est donc pas un carré. Pour atteindre une réponse exacte, il faut donc mettre en œuvre la définition du cercle et l'égalité de tous les rayons. Or sur la feuille proposée aux élèves, la longueur CD est de 2,9 cm. Elle est donc très proche de 3 cm. Ceci peut suggérer à certains élèves de revenir à l'espace mesurable et y rester pour expliquer que la construction de Victor est fautive : tous les côtés du carré ne mesurent pas 3 cm.

La figure proposée dans l'exercice 2.2., était fautive à cause du point A, ici c'est à cause du point D. On passe donc du concept de triangle équilatéral au concept de carré. Or par expérience nous savons que les élèves ont plus de difficultés à mettre en œuvre l'égalité des longueurs des côtés du carré comme rayons d'un cercle que celle des côtés du triangle équilatéral. L'intérêt est alors de vérifier cet a priori par l'expérience.

C'est intentionnellement que nous n'avons pas codé les angles droits du carré. On peut penser que le schéma et la figure étant suffisamment suggestifs à ce niveau, c'est un argument qui ne sera pas relevé par les élèves. Nous laisserons ici les élèves gérer l'implicite contenu dans ces deux dessins. Le fait que le point D n'appartienne pas au cercle est pour nous l'argument décisif.

Il n'y a pas non plus de traits de construction qui indiquent la démarche suivie par Victor. On n'a donc aucune information à propos du triangle ABC. Le fait que le point A soit sur le cercle permet de déduire que le triangle ABC est isocèle en C mais la mesure des trois côtés révèle qu'ils ont tous la même longueur. Là encore il y peut y avoir contamination du su par le perçu. Si toutefois, un élève devait relever cette absence de codage ou d'information sur la figure de Victor, nous le considérerons immédiatement comme très performant.

L'analyse de cet exercice se fera dans les mêmes conditions que celles utilisées pour l'exercice 2.2.

- Comment vont-ils faire ?

A priori il n'est pas nécessaire de refaire la figure puisque celle de Victor est fautive : le point D n'est pas sur le cercle.

Comme dans les deux cas précédents, on peut penser que bon nombre d'élèves feront une figure pour s'approprier la situation géométrique.

On trouvera encore des élèves qui disent que la figure est fautive parce que les dimensions ne sont pas respectées.

On va trouver des élèves qui identifient l'erreur dans la figure de Victor : le quadrilatère BCDE ne peut être un carré. Il est vraisemblable que l'on ne pourra pas déterminer si pour ces élèves le carré est un cas particulier du rectangle. Ils pourront être arrivés à cette conclusion de plusieurs manières. Ils ont mesuré les longueurs sur la figure de Victor, en prenant en compte qu'elle avait été diminuée à la photocopie, ils ont fait une figure soignée et ont obtenu un point D sur le cercle. C'est donc la nature de leur explication et les traces qu'ils laisseront qui seront déterminantes.

On trouvera aussi des élèves pour qui la figure est juste parce que le triangle ABC est un triangle équilatéral d'après leurs mesures sans tenir compte du fait que le quadrilatère ABCD n'est pas un carré.

Il est peut vraisemblable que des élèves se prononcent à propos du triangle ABC en évoquant l'absence de codage.

- En termes de paradigmes géométriques

Là encore les élèves qui mesurent et prennent position à partir de ces mesures sont dans G1. Fonctionnent aussi en G1 les élèves qui, comparant le schéma et la figure, en déduisent qu'elle est fausse. On peut s'attendre à trouver des réponses du genre : « c'est pas pareil, le point D est plus bas. » Nous pourrions aussi rencontrer des élèves qui, capables de fonctionner en G2, donnent ce genre de réponse parce qu'elle est suffisante pour être convaincu de l'erreur de Victor.

La question se pose pour les élèves qui refont une figure soignée et qui arrivent à la conclusion que D devrait être sur le cercle. Font-ils usage de la définition du cercle ou constatent-ils que ça marche ? Si leur réponse ne témoigne d'aucune inférence entre les définitions du cercle et du carré, on peut alors penser qu'ils ont constaté l'erreur de Victor sans l'anticiper. De tels élèves fonctionnent sans doute dans G1.

Les élèves qui argumentent le fait que BCDE ne peut être un carré parce que D n'est pas sur le cercle sont sans doute dans G2 : ils ont quitté l'espace mesurable. C'est parmi eux que l'on trouvera ceux qui n'ont pas refait de figure. Mais ils pourront aussi en proposer une, pour vérifier que les liens qu'ils ont imaginé au plan théorique sont vérifiés par le dessin.

- Niveaux de van Hiele

Les élèves qui écrivent que le quadrilatère BCDE ne peut être un carré parce que le point D n'est pas sur le cercle sont certainement au moins au niveau de déduction informelle : ils sont capables de raisonner sur une figure qui n'est pas en vraie grandeur et composer à la fois la définition du cercle et celle du carré pour apporter une conclusion nouvelle.

L'élève qui évoque le fait que BCDE est un rectangle est sans doute au niveau d'analyse. Il a été en mesure d'identifier les sous-figures dans la figure et il en a inventorié les propriétés. Un élève pourra écrire : « Victor s'est trompé. Il a dessiné un rectangle au lieu d'un carré. » où « Les longueurs BC et CD sont différentes donc ce n'est pas un carré. » Pour arriver à cette réponse, l'élève peut avoir mesuré sur la figure de Victor, comparé son dessin et celui de Victor. Dans tous les cas, son texte témoigne de la constatation des faits mais il ne dit pas que le dessin de Victor est trop petit ; il a pris en compte le fait que

la photocopie a été réduite. Un tel élève connaît les propriétés des figures mais elles ne sont pas ordonnées dans un système axiomatique.

En revanche, si dans sa réponse, il est question de la taille de la reproduction ou d'une comparaison globale entre le schéma et la reproduction, nous considérerons que l'élève est au niveau d'identification-visualisation. On peut imaginer des textes comme : « Victor s'est trompé : son dessin est trop petit. » Toutefois, nous devons être vigilante dans l'analyse des réponses parce qu'un élève qui écrira que la figure de Victor est fautive parce que le carré « dépasse du cercle » témoigne certes du niveau d'identification-visualisation mais il se peut aussi qu'il maîtrise par ailleurs un niveau de van Hiele supérieur, s'étant limité ici à associer le texte, le schéma et la reproduction.

▪ Associations

Cette tâche est associée à l' « exercice » 1.1. dans le questionnaire O et à l' « exercice » 1.4. composant ainsi le questionnaire I

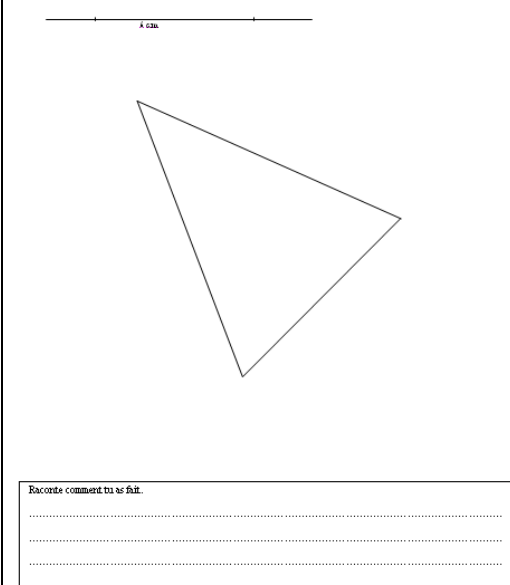
Le questionnaire O est sans doute l'un des questionnaires où les deux tâches recto et verso sont les plus éloignées l'une de l'autre. En effet dans l'exercice 1.1., l'élève doit fonctionner comme le fait tout élève de primaire puisque la validation est totalement instrumentée quand dans l'exercice 2.3., l'analyse de la situation et la validation de la réponse se situent dans une géométrie théorique.

Rappelons que dans l' « exercice » 1.4., il faut rayer les descriptions qui ne correspondent pas à celles d'un triangle isocèle. Les descriptions ont été classées dans un ordre que nous considérons comme un ordre croissant de difficultés. L'élève n'a pas à expliquer ou justifier son choix mais il peut faire des dessins pour mieux se déterminer. Nous l'avons dit cette tâche est sans doute moins facile pour les élèves de CM2 en particulier puisque les triangles ne sont pas dessinés. Cet exercice est aussi associé dans le cadre du questionnaire J à l'exercice 2.1.. Nous avons ainsi deux questionnaires pour lesquels la seule variable didactique repose sur un dessin suggérant une erreur dans l'exercice 2.3.. L'analyse des réponses à ces deux questionnaires devrait nous permettre de savoir si les élèves ont été plus nombreux à fonctionner dans le même paradigme et ont témoigné du même niveau de van Hiele sur l'ensemble des deux tâches.

12. Exercice 2.4.

Nous abordons ici les deux activités relatives au cercle circonscrit d'un un triangle quelconque, activité sans doute peu familière aux élèves de 6^{ème} et encore moins aux élèves de CM2.

Exercice 2.4.
On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle.
Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait 6 cm de rayon.
À toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.



Reconnais comment tu as fait.

.....

.....

.....

- Consigne

Les élèves doivent tracer le cercle circonscrit au triangle. Dans ce premier cas, les trois angles du triangle sont des angles aigus donc le centre du cercle se trouve à l'intérieur du triangle. Le rayon du cercle étant donné, il n'est donc pas nécessaire de mettre en œuvre des connaissances sur les médiatrices ; mais il s'agit de changer de point de vue quant à la définition du cercle.

On passe de : « tous les points du cercle sont à 6 cm du centre » (A)

à : « le centre est à 6 cm de tous les points du cercle » (B)

Pour cela il faut utiliser le compas à partir de deux sommets avec un rayon de 6 cm autrement dit tracer deux arcs de cercle de rayon 6 cm et dont les centres sont les sommets du triangle. L'intersection des deux arcs de cercle donne la position du centre. Il faut alors tracer le cercle dont on vient de trouver le centre et dont le rayon est 6 cm. Il est probable que le tracé ne passera pas exactement par les trois sommets du triangle. Cet exercice est donc aussi un exercice de précision dans la manipulation des outils et dans le tracé. Le récit de la démarche suivie par les élèves devrait préciser ce que nous pouvons supposer à partir des traces laissées sur la feuille.

- Comment vont-ils faire ?

Ils vont sans doute tous commencer par essayer de trouver le centre du cercle en piquant au hasard au « milieu » du triangle. A partir de là, ils peuvent continuer à piquer leur compas en différents endroits pour s'approcher des sommets. Certains d'entre eux peuvent changer le rayon du cercle pour atteindre certains sommets. Après une période d'essais – erreurs la technique peut évoluer. Là peuvent surgir des éléments de réflexion comme la recherche de milieux, d'axes de symétrie ou de hauteurs, même si les élèves ne connaissent pas toutes les propriétés de tous ces objets. Il se peut que les élèves de 6^{ème} tracent des médiatrices si ses propriétés ont été vues en classe et sont maîtrisées. Les élèves de CM2 ne disposent que de la définition du cercle.

- En termes de paradigmes géométriques

Un tel exercice se situe dans G2 puisque la recherche du centre se fait à partir de la définition du cercle mais cette définition doit être appliquée « à l'envers » de son usage habituel. Pour tracer le cercle recherché, il faut déjà tracer des arcs de cercle dont les centres sont les sommets du triangle alors que le cercle recherché passe par les sommets du triangle et que son centre se situe ailleurs. Les élèves qui fonctionnent dans ce paradigme peuvent ne laisser que deux traces de compas à l'emplacement du centre du cercle. Pour autant on peut s'attendre à ce que certains fassent trois arcs de cercle pour être bien sûrs que la position qu'ils ont trouvée est la bonne. Dans un tel cas on pourra dire que l'élève raisonne en G2 mais applique une technique de G1 puisque la précision de son tracé a une certaine importance.

Les élèves qui fonctionnent seulement dans G1 vont faire des essais - erreurs et cela sera confirmé par plusieurs trous dans la feuille. Il se peut aussi que certains élèves mesurent les côtés pour en placer les milieux. Ils obtiendront alors un cercle passant par deux sommets. Ces élèves auront perdu l'information selon laquelle le rayon du cercle est 6 cm. Ils sont dans le perçu et ne peuvent s'en détacher. De plus ils recherchent le cercle en utilisant la définition dans le sens (A) où les points du cercle sont équidistants du centre et non pas dans le sens (B) nécessaire à l'exercice.

Les élèves qui écriront qu'ils ont trouvé immédiatement le centre sans recherche à partir des sommets seront aussi considérés comme ayant fonctionné en G1. De tels élèves n'ont pas eu une démarche de type proto-axiomatique mais ont utilisé le dessin comme celui d'un objet sur lequel on pouvait travailler.

- Niveaux de van Hiele

Un tel exercice peut être considéré comme relevant du niveau de déduction informelle puisque l'élève doit mener un raisonnement avant de tracer le cercle demandé. En effet il doit penser que si le cercle de rayon 6 cm passe par les trois sommets, les cercles de rayon 6 cm et de centre chacun des sommets passeront par le centre du cercle demandé. Le raisonnement déductif complet n'a pas à être explicité mais il est indispensable pour mener à bien la recherche.

Une simple description de la situation, sans organisation d'un raisonnement, ne permet pas de trouver le centre du cercle qui n'est pas encore dessiné. On peut donc envisager que les élèves qui maîtrisent seulement le niveau d'analyse auront du mal à trouver le centre du cercle. Ils peuvent réussir à deviner la position du centre du cercle circonscrit, à l'œil, sans avoir élaboré un raisonnement. Ils ont alors géré simultanément les diverses contraintes liées au respect du rayon de 6 cm et du passage du cercle par les trois sommets mais n'ont pas organisé leur démarche. Il y a simplement une prise en compte des contraintes et des informations mais pas d'organisations de celles-ci. En particulier ces élèves n'auront pas été en mesure de changer de point de vue dans l'usage de la définition du cercle.

Les élèves qui en sont au niveau d'identification-visualisation utiliseront une démarche faite d'essais – erreurs qui laissera des traces dans la feuille. Le cercle qu'ils vont tracer passera par un ou deux des trois sommets, témoignant ainsi de la connaissance de la définition du cercle. Ces élèves pourront utiliser le milieu des côtés du triangle et tracer plusieurs cercles sans en tirer quelque conséquence que ce soit. On peut même s'attendre à ce que certains changent le rayon du cercle pour arriver à un tracé qui les satisfasse davantage.

▪ Associations

Cette tâche est associée à l' « exercice » 1.2. composant ainsi le questionnaire R, à l' « exercice » 1.3. dans le questionnaire P, à l' « exercice » 1.5. dans le questionnaire G et à l' « exercice » 1.6. dans le questionnaire S.

Dans l' « exercice » 1.2. (Questionnaire R), parmi les triangles dessinés à main levée et codés, il faut rayer ceux qui ne sont pas des triangles isocèles. Ainsi dans des cadres différents l'élève, en particulier l'élève de CM2, doit changer de point de vue. Tout d'abord au recto de sa feuille, les dessins ne sont pas réalisés à la règle comme il en a l'habitude ; il doit donc appréhender peut-être pour la première fois la distinction entre le su et le perçu. Au verso de la feuille, pour ne pas agir par essais-erreurs, il doit changer de point de vue quant à la définition du cercle mais le dessin qu'il doit produire est en « vraie grandeur » et sa validation pourra se faire au niveau du perçu. Comment les élèves vont-ils gérer ces exigences ? L'analyse des réponses en termes de paradigmes géométriques et de niveaux de van Hiele devrait nous éclairer.

Dans le questionnaire P l'exercice 2.4. est associé à l'exercice 1.3. où les dessins ont été réalisés à main levée ou à la règle ; seul le codage est à prendre en compte. Les élèves sont donc dans une situation comparable à celle du questionnaire décrit ci-dessus (questionnaire R), la variable didactique portant sur

la lecture des dessins proposés au recto. Les informations données par ce questionnaire devraient corroborer celles que nous auront obtenues précédemment dans le questionnaire R.

Avec l' « exercice » 1.5., l' « exercice » 2.4. compose le questionnaire G. Au recto il est demandé de rayer les phrases dans lesquelles le triangle ABC n'est pas un triangle isocèle ; les descriptions étant proposées dans un ordre aléatoire quant à leur difficulté de compréhension. L'intérêt d'un tel questionnaire est dans le contraste entre les deux tâches : la première demande à l'élève de lire un texte, le traduire en un dessin si nécessaire et se déterminer sans expliquer son choix. La seconde lui demande au contraire d'analyser la situation, d'agir en vraie grandeur et de raconter sa démarche. Le langage français intervient donc au début de la tâche du recto (lecture) quand il est nécessaire à la fin de la tâche du verso (écriture). Nous considérons que pour cette raison la tâche demandée au verso (exercice 2.4.) est plus difficile que la tâche demandée au recto (exercice 1.5.).

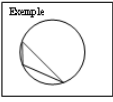
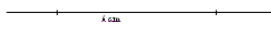

Dans le questionnaire S l' « exercice » 2.4. est cette fois associé à l' « exercice » 1.6. dans lequel l'élève doit répondre au jeu du portrait à propos du multiple de 5 et des figures à rayer. Au travers de cette activité nous avons l'occasion de mesurer dans diverses situations la gestion que les élèves auront de la simultanéité des contraintes, que ce soit simplement par le choix d'un nombre, de dessins ou la construction du cercle circonscrit à un triangle. Au recto les contraintes sont présentées les unes après les autres ; au verso elles s'expriment en une seule phrase. De plus au verso, l'élève doit exprimer sa gestion de la simultanéité de ces contraintes. Les différents types de réponse que nous obtiendrons à ces items devraient nous permettre de préciser dans quelles mesures l'élève fonctionne toujours dans le même paradigme ou non, dans quelle mesure il se replie vers des niveaux de van Hiele inférieurs quand la tâche lui semble plus compliquée.

13. Exercice 2.5.

Dans cette version de l'activité, le changement de variable didactique porte sur la nature du triangle. Il y a un angle obtus ; le centre du cercle recherché est donc à l'extérieur du triangle.

Exercice 2.5.
 On veut dessiner un cercle passant par les trois sommets du triangle.
 Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait 6 cm de rayon.
 À toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.

Exemple

Raconte comment tu as fait.

.....

.....

.....

- Consigne

Nous avons considéré que cette autre situation pouvait être plus difficile dans le mesure où le centre est à l'extérieur du triangle. Pour éviter que les élèves ne cherchent en vain un centre à l'intérieur du triangle, le choix a été fait de donner un exemple dans lequel le triangle a encore un angle obtus, on ne donne aucune indication quant à la position du centre et surtout le triangle est « orienté » différemment dans la feuille. Si le raisonnement est le même que dans l'exercice 2.4., la recherche par essais – erreurs risque d'être beaucoup plus longue dans la mesure où le champ des possibles est plus vaste. Nous avons fait le choix de placer le triangle au centre de la surface disponible pour ne pas suggérer aux élèves une recherche dans une zone particulière de la feuille.

- Comment vont-ils faire ?

Les techniques utilisées pour cet exercice seront sans doute les mêmes que celles qui ont été utilisées dans l'exercice 2.4.. Tout d'abord des recherches par essais et erreurs puis une recherche plus méthodique fondée sur des propriétés d'équidistances avec ou sans changement de point de vue selon les modes de fonctionnement ou les compétences de chacun.

- En termes de paradigmes géométriques

Comme dans l'exercice 2.4., les élèves qui piquent le compas à plusieurs reprises sans démarche organisée fonctionnent vraisemblablement dans G1. Ceux qui font des constructions de cercles à partir de

recherches de milieux, de perpendiculaires, etc. essaient de sortir de G1 sans pour autant arriver à un fonctionnement dans G2 qui soit efficace. Seuls ceux qui laissent les traces de compas indispensables fonctionnent dans G2 avec des outils de G1 puisque la réussite à l'exercice est déterminée par la précision dans le tracé du cercle.

- Niveaux de van Hiele

Comme le précédent, cet exercice relève du niveau de déduction informelle puisque l'élève doit organiser un raisonnement et en donner la conclusion en construisant le cercle.

Les élèves fonctionnant dans les niveaux inférieurs auront sans doute les mêmes comportements que ceux qui ont été décrits dans l'analyse de l'exercice 2.4.

- Associations

Cette tâche est associée à l' « exercice » 1.3. pour former le questionnaire F, à l' « exercice » 1.5. composant ainsi le questionnaire H, à l' « exercice » 1.7. dans le questionnaire Q et à l' « exercice » 1.8. dans le questionnaire T.

En faisant successivement les exercices 1.3. et 2.5. l'élève passe d'une tâche où les dessins qui sont proposés sont tracés à main levée ou à la règle où en aucun cas il ne devrait se fier à ce qu'il perçoit à une tâche où la validation peut se faire par le perçu puisque le cercle qui lui est demandé doit passer par les sommets du triangle. Toutefois dans une géométrie proto-axiomatique, la validation de l'exercice 2.5. ne relève pas de la perception, un géomètre expert ne considérant pas la précision du tracé comme un outil de preuve.

La composition des questionnaires H et G met en évidence la variable didactique sur la nature du triangle dont on cherche le centre du cercle circonscrit puisque dans les deux cas l'exercice du recto est le n° 1.5. à propos des triangles isocèles décrits dans un ordre aléatoire.

L'intérêt du questionnaire Q réside dans les changements quant à la fonction des instruments au recto et au verso, changements qui sont nécessaires à l'élève pour mener à bien les deux tâches. Au recto (n° 1.7.) il doit utiliser les points proposés pour retrouver des rectangles qui sont « cachés » ; il peut joindre les points qui, à l'œil, semblent convenir et vérifier avec ses instruments. Au verso il doit utiliser le compas pour construire le centre du cercle circonscrit au triangle.

La composition des questionnaires S et T est comparable. Au recto dans les deux cas, il est question du jeu du portrait dans ses diverses versions (n°1.6. et n° 1.8.). Au verso, dans le questionnaire S, il s'agit de retrouver le centre du cercle circonscrit dans le cas du triangle acutangle (n°2.4.) ; dans le questionnaire T, l'exercice du verso porte sur la recherche du centre du cercle circonscrit au triangle obtusangle. Il y a donc une variable didactique à la fois au recto et au verso. Il aurait sans doute été préférable de proposer deux versions de chacun de ces questionnaires pour limiter les variables didactiques de l'un à l'autre mais la taille de notre échantillon étant réduite, nous aurions eu trop peu de réponses utilisables dans chaque version.

14. Exercice 2.6.

Cette activité centrée sur le triangle isocèle et le triangle équilatéral est déclinée selon quatre versions, le changement de variable didactique portant sur les longueurs de certains segments, longueur qui sont proposées ou non et sur la présence ou non d'un tableau dans lequel l'élève est amené à préciser ce qu'il comprend de la situation.

Exercice 2.6.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.
Aide-la à répondre aux questions.

a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

- Consigne

Comme à chaque fois qu'elle doit être utilisée, la définition du triangle isocèle est rappelée. La figure proposée est un schéma à main levée où les points B, C et D ont été placés sur un cercle de centre A et de rayon 5 cm, cercle qui n'a pas été dessiné. Les distances AB, AC et AD sont donc fiables pour l'élève qui utilisera sa règle ou son compas. Mais, telle qu'elle est proposée, la longueur BD est aussi égale à 5 cm.

L'élève peut donc trouver là une information qui n'est jamais donnée ni même évoquée. Le schéma peut donc induire l'élève en erreur ; il doit s'en détacher pour répondre aux deux questions.

Après avoir pris en compte simultanément le texte et le schéma fait à main levée et analysé la situation, les élèves doivent se déterminer et argumenter ou préciser leur position : sont-ils certains que le triangle ABD est isocèle ? qu'il est équilatéral ? Le schéma qui leur est donné à voir est très suggestif d'une réponse fautive.

- Comment vont-ils faire ?

Toute réponse faisant intervenir la distance $BD = 5$ cm parce qu'elle a été mesurée sur la feuille, montre que l'élève gère la situation comme étant un objet matériel et non pas abstrait, porteur d'un certain nombre de propriétés.

Les élèves de CM2 ne connaissent a priori pas la représentation d'une situation géométrique sous la forme d'un schéma à main levée. On peut imaginer qu'ils vont se fier à l'allure globale du dessin qui suggère que ABD est un triangle équilatéral. Cette conviction sera d'autant plus forte que les distances mesurées entre les points le confirment. Si, au cours de la passation du questionnaire, un élève pose la question de savoir comment faire la figure en vraie grandeur, il montrera alors qu'il distingue bien les deux types d'informations. En effet, il n'y a aucune information quant aux longueurs BC et BD donc la figure peut être construite dans une infinité de cas particuliers. Si les élèves font un dessin soigné, et s'ils dessinent le triangle ABC isocèle en A et le triangle ABD équilatéral, se laissant ainsi guider par le schéma, ils ne tiennent alors pas compte de la phrase d'énoncé qui se limite aux triangles ABC et ACD. Si tel est le cas on devrait avoir des réponses fautes aux deux questions, ou au moins à la deuxième (reconnaissance d'un triangle équilatéral). Mais il peut y avoir aussi un défaut de contrat ou d'inattention : ne pas comprendre que la phrase d'énoncé et le schéma apportent des informations complémentaires et ne retenir que les informations suggérées par la position des points sur le dessin. Un élève scrupuleux pourra alors faire « sa » figure pour mieux s'approprier la situation. Il pourra alors reporter au compas et tracer à la règle les distances entre les points A, B, C et D telles qu'elles existent sur le schéma. Cette démarche ne prouve pas que l'élève soit à un niveau inférieur dans la compréhension de la situation géométrique. Seules les explications qu'il donnera dans les deux réponses permettront d'identifier son mode de fonctionnement. En effet selon qu'il prend en compte ou non la longueur BD comme étant égale à 5 cm ou non, il aura une appréhension du rôle du dessin très différente. On peut s'attendre à ce que les élèves qui feront un triangle ABD nettement non équilatéral avec des longueurs BC et CD très différentes seront très rares.

Les élèves de 6^{ème} devraient être plus familiers avec ce genre de dessin et proposer, le cas échéant, une figure qui respecte la phrase d'énoncé avec toute son ambiguïté quant à la longueur BD. On peut même

envisager que certains ne referont pas de dessin et se contenteront d'analyser le schéma pour donner leurs réponses et leurs arguments.

- En termes de paradigmes géométriques

La tâche prescrite dans cet exercice se situe dans G2 : le dessin proposé met en jeu le concept abstrait de triangle isocèle et de plus le perçu est en contradiction avec le su.

Les élèves qui mesurent les distances entre les points sur le schéma pour répondre en ayant ou non refait une figure sont dans G1 : ils considèrent le dessin comme objet et veulent lui donner un plus bel aspect en faisant « un dessin soigné ». Ceci sera renforcé par deux réponses fausses aux questions : « le triangle ABD n'est pas isocèle, il est équilatéral ». Pour ces élèves il y a alors exclusion entre les concepts de triangles particuliers.

A l'opposé l'élève qui donne les deux bonnes réponses sans mesurer et sans évoquer la longueur BD est assurément dans G2.

Comment classer l'élève qui répondrait que le triangle ABD est isocèle et est aussi équilatéral ? Il peut être arrivé à la première conclusion en raisonnant surtout à partir des informations données verbalement. Pour conclure que le triangle est aussi un triangle équilatéral, il faut qu'il ait mesuré et ait fait confiance à sa mesure. Un tel élève fonctionne en G1 mais dans le même temps il propose un ensemble de réponses qui relèvent de G2 puisqu'il est capable de dire qu'un triangle équilatéral est aussi un triangle isocèle. On peut donc penser qu'un tel élève se situe dans une zone de développement proximal entre les deux paradigmes, utilisant, comme Jore (2006) l'a constaté, G1 quand c'est difficile et G2 quand il maîtrise la situation.

- Niveaux de van Hiele

Sous cette forme, l'exercice demande la maîtrise du niveau de déduction informelle puisqu'il faut non seulement prendre position par rapport à une nouvelle information mais argumenter à son propos. Pour cela il faut connaître et appliquer la définition du triangle isocèle telle qu'elle est donnée dans le rappel, gérer la transitivité de l'égalité pour ensuite appliquer dans le sens réciproque la définition du triangle isocèle. Il faut aussi que l'élève sache que le triangle équilatéral est un cas particulier de triangles isocèles, mais qu'il n'y a aucune certitude ici quant à l'existence d'un triangle si particulier. Donc toute réponse juste aux deux questions montre que l'élève maîtrise le niveau de déduction informelle. Il est en mesure d'organiser les informations qui lui sont données et ses connaissances géométriques pour en tirer les conclusions pertinentes.

Nous classerons au niveau d'analyse les élèves qui, sans refaire de figure, ont codé l'égalité des longueurs AB, AC et AD et en déduisent que le triangle ABD est isocèle. Ici, on ne peut pas affirmer que ce triangle soit équilatéral. Donc les élèves à ce niveau de van Hiele ne maîtrisant pas l'inclusion entre les figures particulières, risquent d'écrire que puisque le triangle est isocèle, il ne peut pas être équilatéral, contrairement à ceux qui, témoignant du niveau de déduction informelle évoqueront l'absence d'informations à propos de BD.

« Un dessin soigné » n'est pas nécessaire ; il peut être difficile à faire puisque toutes les longueurs ne sont pas données. Il est inutile peut même être contre-productif s'il respecte les 5 cm entre B et D. Les élèves qui feront de tels dessins en sont sans doute au niveau d'identification-visualisation. On pourra reconnaître ces élèves car ils motiveront leurs réponses en utilisant les distances mesurées entre les points et en particulier la distance BD. De plus la deuxième réponse sera fautive et pourra ne pas être argumentée puisqu'elle aura été constatée par mesurage.

- Associations

Cette tâche est associée à l' « exercice » 1.1. pour former le questionnaire A.

Le questionnaire A est donc, comme le questionnaire O l'un des questionnaires où les tâches se situent dans des géométries distinctes et où les contrats didactiques sont très différents. Au recto, l'élève n'a qu'à rayer certains dessins quand au verso, il doit analyser une situation géométrique présentée de diverses manières et où la réponse attendue est double : d'une part l'élève doit se prononcer sur la justesse du dessin et d'autre part il doit expliquer sa prise de position.

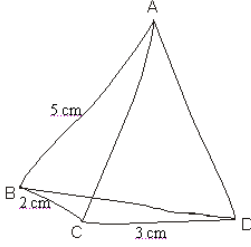
Nous n'avons pas prévu d'utiliser cette version de l'activité sur les triangles isocèles accolés en grand nombre, conscients que, en l'état, elle serait très difficile à mener à son terme par un grand nombre d'élèves du primaire en particulier.

15. Exercice 2.7.

Exercice 2.7.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A**. Elle a marqué les longueurs qu'elle aurait dû respecter sur la figure et dans le tableau. A toi de compléter le tableau puis de répondre aux questions.



	2 cm	3 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

■ Consigne

Dans cette version de l'exercice 2.6., la consigne verbale est identique, les mesures des côtés [BC] et [CD] sont données sur le schéma, reportées dans le tableau. Nous avons choisi dans un premier temps de donner 2 cm et 3 cm comme longueurs des segments [BC] et [CD]. On peut prévoir que le rapprochement entre la somme $2 + 3$ et 5 sera facile mais il sera une source d'erreur puisqu'il sera associé à une mauvaise gestion de l'inégalité triangulaire.

Comme dans l'exercice 2.6., l'élève a la possibilité de refaire la figure comme il l'entend. Contrairement à l'exercice précédent, la réflexion de l'élève pourrait être guidée par le remplissage du tableau. Les mesures qui y sont déjà indiquées sont aussi celles qui apparaissent sur le schéma.

Pour remplir le tableau, il faut gérer simultanément les informations données par le texte et par le schéma sans se laisser influencer par la perception. Si l'élève se contente de l'information donnée graphiquement, il utilisera la colonne « on ne sait pas » du tableau parce que rien n'indique que les triangles ABC, ADC et ABD soient particuliers. Un élève peut aussi répondre « on ne sait pas » à propos de la longueur BD. En effet, les informations données ne permettent pas de trouver cette longueur et il est possible que l'élève ne comprenne pas que cette longueur est déterminée. Si au contraire il se laisse guider par la perception, il affirmera que les longueurs AB, BC, CD et BD sont toutes égales à 5 cm.

■ Que vont-ils faire ?

Ils peuvent remplir le tableau et l'utiliser pour étayer leurs réponses. Ils peuvent aussi dissocier le remplissage du tableau et l'organisation des réponses aux questions.

Ils peuvent refaire la figure en vraie dimension ; cette fois ils ont suffisamment d'informations. Un risque est qu'ils se laissent convaincre par le fait que le triangle ABD est équilatéral, qu'ils commencent par le dessiner, poursuivent avec la construction du point C sans vérifier que la longueur AC doit mesurer 5 cm. Dans ce cas les élèves auront réussi à construire un triangle aplati. Nous savons par ailleurs (Arsac et al. 1992) que cette difficulté ne peut se résoudre sans une réflexion collective et l'intervention de l'enseignant. Les élèves qui construiront la figure en commençant par le triangle isocèle ABC puis le triangle isocèle CAD, auront peut-être du mal à répondre correctement aux deux questions puisque la longueur BD est de l'ordre de 4,9 cm. Le risque est grand qu'ils attribuent l'écart de longueur à une imprécision dans leur construction.

- En termes de paradigmes géométriques

Les valeurs données dans le tableau déterminent pour une part le paradigme géométrique dans lequel les élèves fonctionnent. En effet tout élève qui donne 5 cm comme mesure BD, a mesuré sur le schéma ou éventuellement sur la figure qu'il a faite, ou encore, a une mauvaise gestion de l'inégalité triangulaire. Cet élève est en G1 : il s'appuie sur la mesure pour donner un résultat. De plus on peut s'attendre à trouver une confirmation de cette catégorisation dans les explications fournies dans la suite de l'exercice. Si l'élève écrit que la longueur BD est 5 cm et surtout si les deux réponses sont fausses : le triangle ABD n'est pas isocèle et il est équilatéral, on pourra dire qu'il fonctionne en G1.

A l'opposé, l'élève qui répond avec exactitude aux deux questions et qui ne remplit pas le tableau est sans doute dans G2. Pour autant, tout élève qui, dans le tableau, donne les mesures 5 cm pour les longueurs AC et AD et une longueur différente pour BD est aussi dans G2. On pourra toutefois faire la distinction entre les élèves qui choisissent de dire que BD « est une autre longueur » en cochant cette case, ceux qui la donnent parce qu'il ont refait la figure et ceux qui cochent la case « on ne sait pas ». Ces derniers ne maîtrisent sans doute pas encore le fait que le quadrilatère convexe ABCD est défini de manière unique par la longueur de ses quatre côtés. Ils ne maîtrisent peut-être pas encore tous les éléments de G2.

- Niveaux de van Hiele

Le remplissage du tableau relève du niveau d'analyse : il faut appliquer la définition du triangle isocèle en utilisant simultanément l'énoncé donné en Français et les informations fournies par le schéma. Mais en remplissant les lignes AC et AD de ce tableau, l'élève n'apporte pas une nouvelle information, il fait l'inventaire des longueurs égales à 5 cm d'après la définition du triangle isocèle. Ensuite, l'élève peut

répondre que l'on ne connaît pas la longueur BD ou qu'elle vaut autre chose que 2 cm, 3 cm ou 5 cm. On peut imaginer qu'alors l'élève en conclut que le triangle ABD est isocèle mais il n'a peut-être pas eu recours à l'inégalité triangulaire ; il a scrupuleusement respecté la définition du triangle isocèle. Si de plus, il accompagne ses réponses d'un commentaire évoquant l'exclusion des triangles particuliers les uns par rapport aux autres, nous pourrions dire qu'il est bien au niveau d'analyse.

Aussi nous considérerons que l'élève qui répond que la longueur BD vaut 5 cm est au niveau d'identification-visualisation. En effet un tel élève a pu se déterminer à vue ou en mesurant la distance entre les points sur la feuille donc sans analyse particulière de la situation. On peut s'attendre à ce qu'un tel élève dise que le triangle ABD n'est pas isocèle parce qu'il est équilatéral.

Comme dans l'exercice 2.6., les réponses aux deux autres questions relèvent de la déduction informelle : l'élève doit prendre position quant à la nature du triangle ABD et justifier sa réponse.

▪ Associations

Cette tâche est associée à l' « exercice » 1.7. pour former le questionnaire C et d'autre part à l' « exercice » 1.3. dans le questionnaire K.

Dans le questionnaire C, au recto l'élève doit retrouver les rectangles parmi les points proposés : il travaille ainsi avec ses instruments et en vraie grandeur. Il peut valider ses choix par la perception et aux instruments. Au verso, au contraire, le schéma proposé n'est pas une illustration exacte en vraie grandeur en dépit des apparences et les explications qui sont demandées à l'élève se situent nécessairement dans une géométrie au moins proto-axiomatique. La technique de validation qu'un élève pourra mettre en œuvre au recto ne sera pas pertinente au verso. La question est alors de savoir si les élèves de CM2 et ceux de 6^{ème} peuvent s'adapter facilement à un tel changement dans le contrat didactique.

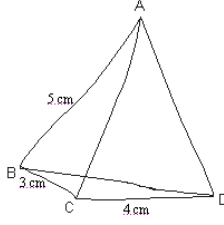
Dans le questionnaire K, au recto les élèves doivent repérer les triangles isocèles parmi les dessins codés, que ceux-ci aient été faits à main levée ou tracés à la règle. Ils ne doivent donc pas se laisser influencer par ce qui leur est donné à voir. Au verso, on attend la même attitude avec, en plus, l'explication rédigée du choix qui vient d'être fait. On pourrait considérer que l' « exercice » du recto est en quelque sorte un entraînement pour celui du verso : dans un cas comme dans l'autre on est dans une géométrie au moins proto-axiomatique, et l'élève doit analyser les codages ou les propriétés des figures qui sont évoquées sans s'appuyer sur la perception qu'il a de la situation.

16. Exercice 2.8.

Exercice 2.8.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.** Elle a marqué les longueurs qu'elle aurait dû respecter sur la figure et dans le tableau. A toi de compléter le tableau puis de répondre aux questions.



	3 cm	4 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui - non. Pourquoi ?

b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui - non. Pourquoi ?

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

▪ Consigne

La différence entre cet exercice et l'exercice 2.7. se situe dans les mesures proposées pour les distance BC et CD : $BC = 3 \text{ cm}$ et $CD = 4 \text{ cm}$. Si les élèves font la figure en vraie grandeur, la distance BD est de l'ordre de 6,6 cm soit une mesure assez éloignée de 5 cm. Ou encore la somme $3 + 4$ étant différente de 5, on peut imaginer que l'inégalité triangulaire sera plus fréquemment mise en œuvre. Cette nouvelle situation devrait permettre à plusieurs d'arriver aux bonnes réponses pour chacune des deux questions. Le tableau est aussi proposé pour que l'on sache comment les élèves ont compris la situation. La comparaison des tableaux de cet exercice et de l'exercice précédent devrait nous donner une indication sur la façon dont les élèves ont géré les informations qui étaient données verbalement et graphiquement. A priori les tableaux devraient contenir les mêmes croix aux mêmes endroits. Si les élèves ont utilisé leur règle, on aura comme longueur BD 5 cm alors que l'on ne sait pas a priori combien elle vaut tant dans cet exercice que dans l'exercice précédent.

▪ Comment vont-ils faire ?

S'ils mesurent les distances sur le schéma pour remplir le tableau, la différence entre ce qui est déjà donné et ce qu'ils trouvent devrait les alerter et mettre en évidence le fait que le dessin proposé n'est qu'un schéma et non pas une figure en vraie grandeur. Pour donner une mesure à toutes les lignes du tableau, ils devraient refaire la figure. On peut imaginer deux appréhensions séquentielles de la figure. Dans un premier cas, l'élève construit le triangle ABC puis le triangle ACD en utilisant les longueurs indiquées. Il

devrait alors constater que BD ne mesure pas 5 cm. Dans un autre cas, se laissant influencer par la perception qu'il a du schéma, il commence par dessiner le triangle ABD équilatéral pour terminer avec le triangle ABC , il notera que $BD = 5$ cm. Si l'on trouve dans le tableau 5 cm pour la mesure BD sans que la construction ait été refaite, il s'agira de la mesure sur le schéma. Dans ce cas l'élève ne prend pas en compte le fait que le schéma est à main levée et n'est pas en grandeur réelle. Une telle position devrait être confirmée par l'absence de figure en vraie grandeur et par des réponses fausses aux deux questions, s'appuyant sur des mesures faites sur le schéma.

Certains élèves pourront ne pas faire de figure précise et remplir le tableau en disant que l'on ne connaît pas la distance BD , ou que c'est une autre longueur.

Le schéma suggère que le triangle ABD est équilatéral. On peut donc prévoir que certains élèves se laisseront guider par cette impression et construiront une figure dans laquelle le triangle BCD est tel que $BD = 5$ cm, $BC = 3$ cm et $CD = 4$ cm. Dans ce cas la consigne verbale n'est pas respectée, soit parce qu'elle a été oubliée soit parce que l'élève a fait le choix de respecter les suggestions du schéma pour résoudre la contradiction qu'il y avait entre le texte et le dessin.

- En termes de paradigmes géométriques

Si les élèves font une figure en vraie grandeur, ils pourront facilement conclure que le triangle ABD est isocèle sans être équilatéral. Si leur réponse d'appuie sur la mesure, il est clair que ces élèves fonctionnent dans $G1$. Seront aussi considérés comme ayant fonctionné en $G1$ les élèves qui ont refait la figure en commençant par le triangle ABD dessiné équilatéral.

La comparaison avec les réponses à l'exercice précédent pourra nous dire si les mesures que nous avons données permettent de créer un exemple générique ou non. En effet si la proportion d'élèves ayant trouvé que le triangle ABD est un triangle équilatéral est maintenant plus faible que dans l'exercice précédent, nous pourrions dire que les longueurs proposées ici ont été une expérience cruciale pour eux mais que la donnée de longueurs particulières ne constitue pas autant d'exemples génériques. Le constat que BD est différent de 5 cm est le témoignage d'un fonctionnement en $G1$. Son explication en termes de gestion de l'inégalité triangulaire est une illustration d'un fonctionnement en $G2$.

- Niveaux de van Hiele

Comme les deux exercices précédents, cet exercice relève de la déduction informelle puisqu'il faut apporter une preuve que le triangle ABD s'il est isocèle n'est pas pour autant équilatéral.

Les conditions d'attribution des niveaux de van Hiele seront les mêmes que dans l'exercice précédent. Une différence apparaîtra peut-être à cause des longueurs 3 cm et 4 cm. Elles devraient amener davantage d'élèves à prendre en compte le fait que le dessin n'est qu'un schéma de la situation géométrique et les aider à donner des réponses justes (le triangle ABD est isocèle sans être équilatéral) sans qu'elles soient expliquées. Dans un tel cas, les élèves pourront avoir eu une appréhension séquentielle de la figure ; ils seront capables de lister ses propriétés mais ne seront pas en mesure de les organiser dans le cadre des réponses aux deux questions. On peut s'attendre à ce que les commentaires reprennent une conception exclusive des triangles particuliers.

Comme dans les versions précédentes, nous attribuerons le niveau de déduction informelle aux réponses évoquant l'inégalité triangulaire, sans qu'elles soient accompagnées de figure.

- Associations

Cette tâche est associée à l' « exercice » 1.7. pour former le questionnaire D et d'autre part à l' « exercice » 1.2. dans le questionnaire L.

Ainsi les questionnaires D et C se différencient par la seule variable didactique portant sur les longueurs BC et CD dans l'exercice du verso. Dans les deux questionnaires, au recto, l'élève doit retrouver les rectangles parmi les points proposés. A l'aide de ces deux questionnaires, nous devrions pouvoir apprécier dans quelle mesure les élèves ont été influencés par ce qui leur a été donné à voir puisque ici les distances BC et CD sont assez différentes des distances réelles.

Dans le questionnaire L, au recto les élèves doivent repérer les triangles isocèles parmi les dessins codés, et faits à main levée ou tracés à la règle. Par rapport au questionnaire K il y a donc deux variables didactiques : au recto, les triangles proposés sont tous codés mais ne sont pas tous dessinés dans la même manière ; au verso, les longueurs BC et CD varient d'un questionnaire à l'autre. Dans les deux questionnaires, l'attitude de l'élève devrait être la même : analyser les situations dans une géométrie théorique.

17. Exercice 2.9

Exercice 2.9

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A**. Elle a commencé à refaire la figure en vraie grandeur avec son compas. A toi de répondre aux questions.

Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

.....

.....

Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

.....

.....

Si cela peut t'aider tu peux continuer la figure ou la refaire en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

■ Consigne

Le changement de variable par rapport à l'exercice 2.6. réside dans le fait que la construction en vraie grandeur est amorcée. Les traces de compas sont nettes et des segments de longueur 2 cm, 3 cm et 5 cm sont proposés. Comme dans les autres versions de cette activité, on offre aussi à l'élève la possibilité de faire sa propre figure. Nous avons choisi de présenter ce début de construction en laissant les traces de compas afin de suggérer aux élèves les conséquences de la transitivité de l'égalité appliquée aux longueurs AB, AC et AD. Le point D est un point du cercle de centre A et de rayon 5 cm ; il est aussi à 3 cm de C. Telle qu'elle est présentée, la construction est presque terminée mais l'élève n'en est pas l'auteur et peut avoir des difficultés à se l'approprier et en avoir une appréhension séquentielle ou discursive. Les questions suivantes ont motivé le choix d'une telle présentation : les élèves vont-ils utiliser la figure en vraie grandeur pour répondre ? Vont-ils reproduire et poursuivre la figure en vraie grandeur ? Pourra-t-on considérer que la présence de cette figure a eu une influence sur les textes produits par les élèves dans le cadre des réponses aux deux questions. Y aura-t-il davantage de réponses justes dans cette version que dans l'exercice 2.6. ? Si oui dans quelle proportion ?

Si les élèves utilisent et poursuivent la figure en vraie grandeur en étant très précis, ils pourront constater que le triangle ABD est isocèle sans être équilatéral. Mais l'écueil est le même que dans l'exercice 2.6. puisque la longueur BD mesure environ 4,9 cm. Quand bien même les conditions de dessin sont

différentes, on peut penser que les élèves seront tout autant embarrassés et que leurs réponses seront influencées dans un sens ou dans l'autre selon qu'ils font confiance à leur tracé ou non. On aura alors le même type de réponses que dans l'exercice 2.6..

Il sera donc intéressant de voir dans quelle proportion les élèves exploitent ce supplément d'informations que constitue le début de la construction.

- Comment vont-ils faire ?

Les élèves devraient poursuivre la construction qui leur est proposée en vraie grandeur. Mais on peut imaginer que bon nombre d'élèves vont être surpris par la technique qui consiste à dessiner un triangle isocèle à partir de son sommet principal. On peut donc s'attendre à ce que le début de la figure ne soit pas utilisé et que les élèves refassent la figure complète en commençant par tracer le segment [BC] de 2 cm puis en plaçant le point A à 5 cm de B et de C. Pour continuer la figure il se peut qu'ils assument que la longueur BD est de 5 cm afin de construire le triangle BCD. En mesurant AD, ils retrouveront approximativement 5 cm et auront ainsi la conviction que le triangle ABD est isocèle et équilatéral. Ils peuvent aussi compléter la figure en utilisant la règle pour placer le point D sur le cercle à 3 cm de C. Dans ce cas la précision risque d'être déterminante pour la réponse à la deuxième question.

- En termes de paradigmes géométriques

Nous utiliserons ici les critères définis pour les autres versions de l'activité.

Tout élève qui précise que l'on n'a aucune assurance que le triangle ABD soit équilatéral alors qu'on est certain qu'il est isocèle en utilisant la transitivité de l'égalité et l'inégalité triangulaire, aura fonctionné en G2.

Tout élève qui donne des réponses où un triangle équilatéral n'apparaît pas comme un triangle isocèle particulier est en G1, qu'il ait refait une figure ou non. Tout élève qui détermine sa position après avoir mesuré sur le schéma ou sa figure est lui aussi dans G1.

- Niveaux de van Hiele

Les niveaux de van Hiele seront déterminés dans les mêmes conditions que dans l'exercice 2.6.. On peut imaginer que la présence du début de construction de la figure, si elle est exploitée, amènera davantage d'élèves à utiliser le niveau d'analyse. Le dessin de l'arc de cercle de centre A pourrait renforcer l'idée que les longueurs AB, AC et AD sont égales et suggérer l'utilisation de la transitivité de l'égalité. Une telle attitude amènera les élèves à une réponse juste à la première question. Mais il est possible qu'ils se retrouvent avec une contradiction puisque la longueur BD est très proche de 5 cm et qu'au niveau

d'analyse, les figures ne sont pas ordonnées et donc le triangle ne peut être à la fois isocèle et équilatéral. Il se peut aussi que la contradiction vienne du fait que le triangle BCD est un triangle aplati si l'on prend $BD = 5$ cm. Les taux de réussite et la nature des réponses dans les exercices 2.6. et 2.8. devraient nous permettre de situer ces deux activités dans une zone de développement proximal l'une par rapport à l'autre.

- Associations

Cette dernière version des triangles isocèles accolés a été associée à l' « exercice » 1.8. pour former le questionnaire B.

Dans ce questionnaire, l'élève travaille sur les rectangles au recto et sur les triangles au verso. Toutefois les conditions de travail sont très différentes puisque dans un premier temps les figures sont « des dessins en vraie grandeur » et les validations se font par le perçu et aux instruments, tandis qu'au verso les figures se réduisent à des schémas et que les validations sont d'ordre théorique. Ce questionnaire, comme le questionnaire C, propose au recto une activité sur les rectangles tandis qu'au verso les triangles isocèles accolés ont les mêmes mesures mais sont illustrés différemment. De plus les conditions de reconnaissance des rectangles du recto sont différentes : dans l'exercice 1.7. (questionnaire C) l'élève doit retrouver les rectangles ; dans l'exercice 1.8. (questionnaire B) les rectangles sont déjà dessinés à la règle et à l'équerre.

18. Conclusion

Nous avons analysé chacun des « exercices » tels qu'ils ont été donnés aux élèves en essayant de prévoir comment ils pouvaient répondre et comment nous allions interpréter ces réponses. Nous avons aussi expliqué les associations faites entre les exercices du recto et les exercices du verso des feuilles.

A l'exception de l'exercice 1.1., tous les autres devraient être abordés dans une géométrie proto-axiomatique (G2). Mais nous avons vu que les élèves qui fonctionneront en G1 parce qu'ils ne connaissent pas d'autre paradigme, pourront donner des réponses satisfaisantes à leurs yeux.

Les élèves qui ne maîtriseraient que le niveau d'identification-visualisation de van Hiele pourront eux aussi répondre à l'ensemble des questions même si aucun exercice ne témoigne de ce seul niveau. Toutes les activités que nous proposons demandent au moins le niveau d'analyse et pour l'ensemble des

exercices du recto, numérotés de 2.1. à 2.9, c'est le niveau de déduction informelle qui est le plus efficace.

Nous avons vu que les critères de fonctionnement dans un paradigme géométrique ne s'expriment pas toujours avec les mêmes mots que ceux qui déterminent un niveau de van Hiele. Il semble bien que selon les situations, le niveau d'analyse de van Hiele puisse être utilisé dans une géométrie spatio-graphique (G1) ou dans une géométrie proto-axiomatique (G2). Nous avons été en mesure de décrire des attitudes relevant d'un mode fonctionnement ou d'un autre, d'un niveau de van Hiele ou d'un autre pour tous les exercices. Tous les élèves, quel que soit leurs compétences en mathématiques, devraient donner des réponses exploitables.

TABLEAU RECAPITULATIF DES ANALYSES D'EXERCICES.

N° et titre de l'exercice	Paradigmes géométriques	Niveaux de van Hiele
1.1. Recherche de triangles isocèles (côtés dessinés à la règle)	G1	Déduction informelle
1.2. Recherche de triangles isocèles (côtés dessinés à main levée)	G2	Déduction informelle
1.3. Recherche de triangles isocèles (côtés dessinés à la règle et à main levée)	G2	Déduction informelle
1.4. Recherche de triangles isocèles (textes rangés par ordre croissant de difficulté)	G2	Déduction informelle
1.5. Recherche de triangles isocèles (textes rangés dans un ordre aléatoire)	G2	Déduction informelle
1.6. Portrait de nombre et de quadrilatères (sans grille de nombres)	G2 avec des outils de G1	Déduction informelle
1.7. Recherche de rectangles (par leurs sommets)	G2 avec des outils de G1	Déduction informelle
1.8. Portrait de nombre et de quadrilatères (avec grille de nombres)	G2 avec des outils de G1	Déduction informelle
2.1. Victor (figure juste)	G2	Déduction informelle
2.2. Victor (triangle isocèle)	G2	Déduction informelle
2.3. Victor (rectangle)	G2	Déduction informelle
2.4. Cercle circonscrit (triangle acutangle)	G2	Déduction informelle
2.5. Cercle circonscrit (triangle obtusangle)	G2	Déduction informelle
2.6. Nature du triangle ABD (aucune indication)	G2	Déduction informelle
2.7. Nature du triangle ABD (tableau de mesures et $BC = 2$ cm et $CD = 3$ cm)	G2	Déduction informelle
2.8. Nature du triangle ABD (tableau de mesures et $BC = 3$ cm et $CD = 4$ cm)	G2	Déduction informelle
2.9. Nature du triangle ABD (figure en vraie grandeur commencée avec $BC = 2$ cm et $CD = 3$ cm)	G2	Déduction informelle

Chapitre V

RESULTATS

Dans ce chapitre nous donnerons les résultats du dépouillement des réponses données par les élèves aux deux tâches qui ont été attribuées à chacun.

Dans un premier temps, nous analyserons, sous forme de tris à plat, les réponses données au recto des questionnaires tant du point de vue des paradigmes utilisés que des niveaux de van Hiele. Nous procéderons de même pour les réponses données au verso des questionnaires. Pour chaque tâche nous croiserons les résultats obtenus en termes de paradigmes géométriques et de niveaux de van Hiele.

Codages des paradigmes et des niveaux de van Hiele mal identifiés

Nous avons choisi de coder GX les copies pour lesquelles le paradigme était particulièrement difficile à déterminer. Il s'agit le plus souvent d'élèves qui n'ont laissé aucune trace de leur travail et qui ont donné des réponses fausses ou incohérentes du point de vue de la géométrie. Mais les élèves auxquels nous nous sommes adressés ont déjà une certaine pratique de la géométrie et il est raisonnable de penser qu'ils ne sont plus dans un fonctionnement de type G0, géométrie concrète où les « objets géométriques » se confondent avec les objets réels. En CM2 ou en 6^{ème}, les élèves ont été confrontés à des situations géométriques relevant de G1, qu'ils en maîtrisent ou non toutes les composantes. Aussi, le cas échéant, pour les études statistiques, nous considérerons que les élèves pour lesquels nous n'avons pas pu vraiment identifier le paradigme de fonctionnement et auxquels nous avons dans un premier temps attribué le code GX, ont vraisemblablement au moins fonctionné en G1 : nous avons affaire à un public ayant déjà pratiqué la géométrie sans que nous ayons pu sur telle ou telle activité déterminer le paradigme de fonctionnement.

De la même manière, certains élèves ont donné des réponses qui n'étaient pas révélatrices d'un niveau de van Hiele particulier. Nous avons attribué le code N0 à ces élèves. Là encore, au niveau de scolarité où se situe notre enquête, les élèves ont été confrontés à des expériences géométriques se situant au moins au niveau d'identification-visualisation de van Hiele (N1). Il est donc tout à fait raisonnable de regrouper si nécessaire les élèves auxquels nous aurons attribué les codes N0 et N1.

1. Recto des questionnaires : informations sur les activités

1.1. Exercice 1.1.

Dans cet exercice, les élèves doivent rayer les triangles qui ne sont pas isocèles alors que tous les dessins proposés ont été faits à l'ordinateur. Donc « tous les traits sont droits » et certains triangles sont des triangles isocèles particuliers.

On a vu dans l'analyse a priori que cet exercice typique de ceux qui sont proposés en Primaire, ne permet pas de témoigner d'un maximum de compétences de la part de l'élève. Au plus il peut montrer qu'il maîtrise l'inclusion des figures particulières parmi les figures générales.

21 élèves de CM2 et 26 élèves de 6^{ème} ont fait cet exercice. Les informations obtenues sont les suivantes.

1.1.1. PARADIGMES

GX : procédure impossible à identifier

G1 : soit l'élève a laissé des traces de mesure à la règle ou au compas soit il n'a rien laissé et il est resté au stade de la perception. Dans tous les cas il a respecté une définition exclusive du triangle isocèle en rayant soit les triangles équilatéraux soit les triangles rectangles soit les deux. On est ici dans une géométrie de précision de la mesure.

G2 : l'élève a laissé des traces de mesure (technique relevant alors de G1) mais il a appliqué une relation d'inclusion entre les différents types de triangles. Il a accepté comme étant un triangle isocèle au moins l'un des triangles particuliers : le triangle équilatéral (n°5), le triangle isocèle-rectangle (n°7).

	GX	G1	G2	Total
CM2	1	12	8	21
6^{ème}	1	18	7	26
Total	2	30	15	47

Les résultats sont conformes à ce que nous attendions. Les deux tiers des élèves que ce soit en CM2 ou en 6^{ème} ont utilisé les techniques qui relèvent de G1 : mesure des côtés à la règle ou au compas avec exclusion des triangles particuliers. On peut toutefois remarquer qu'environ un tiers des élèves a pu témoigner d'une certaine maîtrise de G2 dans la mesure où ils ont accepté comme triangles isocèles les triangles particuliers.

Au total c'est donc 30 élève sur 47 soit 64% qui ont témoigné de compétences relevant de G1 et 15 élèves soit 32% qui ont été classés en G2.

On peut aussi noter que dans chaque niveau, un élève (P 108 et S 158) a été codé GX : ces élèves n'ont pas laissé de trace et se sont limités à rayer deux triangles, acceptant ainsi comme isocèles des triangles qui ne l'étaient pas.

Il n'y a pas de différence significative entre les paradigmes utilisés par les élèves de CM2 et les élèves de 6^{ème}. S'il ya une différence, elle est marginale et va plutôt dans le sens où les élèves de Primaire se sont contentés de vérifier avec la précision qui est la leur, que deux côtés d'un triangle étaient de même longueur, sans aller plus loin. Seuls quelques élèves de 6^{ème} ont codés les angles droits des triangles rectangles.

La technique utilisée dans cette tâche relève de G1. Pour que nous puissions considérer qu'un élève fonctionne en G2, il a dû laisser sans trace les triangles isocèles particuliers. Or cela a pu se produire à l'insu même de l'élève s'il s'est réellement arrêté dans sa recherche dès qu'il a trouvé les triangles dans lesquels deux côtés avaient la même longueur. Le fonctionnement en G2 sera nécessaire dans les exercices suivants dans la mesure où les triangles sont codés et pour certains dessinés à main levée.

1.1.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

NO : l'élève n'a repéré aucun triangle isocèle ou s'est montré incohérent dans ses choix.

N1 : identification-visualisation. L'élève n'a pas laissé de traces de sa démarche et il a gardé les triangles qui semblent isocèles qu'ils le soient ou non, qu'ils soient des triangles isocèles particuliers ou non.

N2 : analyse. L'élève a mesuré à la règle ou au compas les longueurs des côtés des triangles et a appliqué une relation d'exclusivité entre les différents types de triangles. Il a ainsi éliminé le triangle équilatéral ou le triangle isocèle rectangle ou les deux.

N3 : déduction informelle. L'élève a fait des mesures et a gardé tous les triangles isocèles qu'ils soient particuliers ou non. En particulier l'élève s'est limité à mesurer les deux côtés qui avaient des longueurs assez proches les unes des autres et n'a pas cherché à vérifier si le triangle avait d'autres propriétés.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	7	5	8	21
6^{ème}	1	8	10	7	26
Total	2	15	15	15	47

Là un tiers des élèves est resté au niveau de l'identification-visualisation. Ils ont rayé les triangles particuliers. Dans les deux groupes, il y a 15 élèves pour qui le niveau d'analyse est vraisemblablement maîtrisé puisqu'ils ont accepté certains triangles isocèles particuliers ou ont pris leur décision en fonction des mesures qu'ils ont faites.

Les 15 élèves que nous avons classés en N3 n'ont pas produit de démonstration mais ont accepté comme triangle isocèle les triangles 5 et 7 qui sont respectivement équilatéral et isocèle-rectangle. Proportionnellement ils sont plus nombreux en CM2 qu'en 6^{ème} sans doute parce qu'ils ont été moins « curieux » dans leurs recherches en se limitant à mesurer deux côtés sur trois et sans utiliser l'équerre pour cette tâche. Nous avons même eu le cas d'un élève (S132) que nous avons classé en N3, déduction informelle : il a tracé au compas les axes de symétrie nécessaires à l'identification 'un triangle isocèle.

Les trois groupes correspondants à chacun des niveaux de van Hiele sont de même taille ; c'est-à-dire que deux tiers des élèves ont témoigné d'un niveau de maîtrise supérieur ou égal à celui de l'analyse.

Enfin les deux élèves pour qui nous avons utilisé le code GX, sont maintenant en N0 : ils ne reconnaissent pas un triangle isocèle dans sa globalité.

De la même manière il n'y a pas dans cette activité de différence significative entre les niveaux de van Hiele auxquels les élèves de CM2 et les élèves de 6^{ème} ont eu recours.

Donc que ce soit en termes de paradigmes ou de maîtrise des niveaux de van Hiele, les élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} ont eu des comportements comparables.

1.1.3. TABLEAUX DE CROISEMENT

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	1	0		1
N1		7		7
N2		5		5
N3			8	8
Total	1	12	8	21

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	1			1
N1		8		8
N2		10		10
N3			7	7
Total	1	18	7	26

Donc dans cette activité les élèves des deux niveaux sont répartis de la même manière. Dans G1 on retrouve tous les élèves auxquels nous avons attribué un niveau de van Hiele inférieur ou égal à celui de l'analyse. Dans G2 se trouvent tous les élèves qui ont considéré que les triangles équilatéral et isocèle-rectangle étaient aussi des triangles isocèles. Dans un tel exercice, la technique relevant de la mesure et de la précision de celle-ci donc de G1, les élèves qui maîtrisent seulement le niveau d'analyse ne peuvent être considérés comme ayant fonctionné dans G2 : les triangles ne sont pas des objets idéaux mais ne représentent qu'eux-mêmes.

1.2. Codage des exercices 1.2.et 1.3.:

La différence entre ces deux exercices tient dans le fait que dans le n°1.2. tous les triangles sont dessinés à main levée, même si certains « traits » sont « droits » alors que dans le n°1.3., il y a à la fois des triangles tracés à la règle et d'autres à main levée. Mais dans ces deux exercices, c'est le codage qui doit être pris en compte. Nous avons donc appliqué les mêmes critères pour l'un et l'autre de ces deux exercices.

1.2.1 PARADIGMES

GX : procédure impossible à identifier ou choix incohérents quant à la nature des triangles isocèles et isocèles particuliers.

G1 : soit l'élève a laissé des traces de mesure à la règle ou au compas soit il n'a rien laissé et il est resté au stade de la perception. En particulier, il a éliminé les triangles isocèles particuliers comme les triangles équilatéraux et isocèles-rectangles, sans toujours tenir compte des codages. Nous avons donc regroupés ici tous les élèves qui, d'une part, ont indiqué des mesures sur les côtés des triangles, que ceux-ci aient été codés ou non et qui, d'autre part, en ont tenu compte pour se décider. De plus nous avons considéré que relevaient à la limite de ce paradigme, les élèves qui, sans avoir mesuré et donc en ayant analysé la situation en s'appuyant sur le codage, ont appliqué une définition exclusive du triangle isocèle éliminant ainsi tous les triangles isocèles particuliers. En effet dans ce cas, l'élève utilise le dessin comme représentant d'un triangle idéal ; il n'est plus vraiment dans une géométrie où les objets sont des objets physiques c'est-à-dire dans G1 mais il ne fonctionne pas encore complètement dans G2 parce qu'il n'a pas une conception inclusive des triangles isocèles particuliers. De tels élèves sont sans doute dans la zone de tuilage entre les deux paradigmes.

G2 : l'élève a su respecter les codages et a appliqué une relation d'inclusion entre les différents types de triangles. Il n'y pas nécessairement de trace écrite autre que la rayure des triangles non isocèles. Plus particulièrement, nous avons considéré que les élèves qui avaient accepté les triangles dont le codage correspond à celui d'un triangle isocèle-rectangle commençaient à fonctionner en G2.

1.2.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

N0 : l'élève n'a repéré aucun triangle isocèle ou s'est montré incohérent dans ses choix.

N1 : identification-visualisation. L'élève n'a pas laissé de traces de sa démarche et il a gardé les triangles qui semblent isocèles, que ceux-ci soient codés ou non, qu'ils soient isocèles ou non. Dans cette tâche, le contrat didactique est différent de celui qui existe dans l'exercice 1.1. puisque les triangles sont codés. L'élève qui mesure les côtés du triangle, sans tenir compte du codage, sera maintenant considéré comme maîtrisant seulement le niveau d'identification-visualisation.

N2 : analyse. L'élève a tenu compte des codages mais a appliqué une relation d'exclusivité entre les différents types de triangles. Il a éliminé les triangles équilatéraux et/ou les triangles

isocèles rectangles. Dans la mesure où ce qui caractérise le niveau d'analyse est l'absence d'organisation entre les figures, tout élève qui refuse un cas particulier de triangle isocèle ne peut être considéré comme ayant la maîtrise du niveau de déduction informelle.

N3 : déduction informelle. L'élève a respecté les codages et a rayé les seuls triangles pour lesquels il n'y avait aucun codage : triangles n°2 et n°6 de l'exercice 1.2, triangles n°1, n°6 et n°7 dans l'exercice 1.3.. Pour ce faire l'élève n'a pas laissé de traces de mesures.

La comparaison des résultats obtenus dans ces deux exercices devrait permettre de repérer la sensibilité que les élèves ont encore à l'égard des tracés précis de figures et le sens qu'ils accordent au codage de celles-ci.

1.3. Exercice 1.2.

CM2 : Nous avons 41 réponses exploitables.

6^{ème} : Nous avons donc 43 réponses exploitables.

En tout nous avons donc 84 exemplaires de cette activité.

1.3.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	8	21	12	41
6^{ème}	4	9	30	43
Total	12	30	42	84

Les élèves de CM2 sont environ deux fois plus nombreux que les élèves de 6^{ème} dans les paradigmes GX (souvent ils n'ont pas été cohérents dans leur démarche) et G1 : ils ont tenu compte du codage mais ont considéré comme isocèles les triangles ayant deux marques identiques et deux seulement.

On pourra remarquer aussi qu'en tout il y a 12 élèves que nous avons classés en GX : ces élèves ont fait des choix incohérents et n'ont pas semblé maîtriser la définition même du triangle isocèle. En effet certains d'entre eux, ont fait des mesures sur les triangles sans codage, d'autres ont accepté certains triangles comme étant isocèles sans pour autant donner de trace de leur démarche, etc.

En regroupant GX et G1, on obtient :

	G1 +GX	G2	total
CM2	29	12	41
6^{ème}	13	30	43
Total	42	42	84

On constate alors que les proportions d'élèves dans les deux modes de fonctionnement sont complètement inversées. Les deux tiers des élèves de CM2 sont dans un paradigme inférieur à G2 quand il y en a autant en 6^{ème} qui sont en G2. La différence de comportement est donc sensible voire significative (χ^2 obs. = 13,77 ; ddl = 1 : $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Il faut toutefois rappeler que nous avons attribué le code G2 aux élèves qui ont accepté comme isocèle au moins une sorte de triangle isocèle particulier, en général il s'agit du triangle isocèle-rectangle. Certains élèves ont pu laisser des traces de mesures sur certains triangles, en particulier sur les triangles sans codage, mais quand le choix définitif des triangles s'est révélé pertinent, nous avons considéré que l'élève avait fonctionné en G2.

Au total c'est la moitié des 84 élèves de notre échantillon, qui a eu recours à des techniques relevant de G1 alors que, par contrat didactique l'activité se plaçait dans G2. On peut aussi considérer que cet exercice a été réussi par un élève sur deux, quelque soit son niveau..

1.3.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	6	19	7	9	41
6^{ème}	4	5	19	15	43
Total	10	24	26	24	84

En utilisant les critères des niveaux de van Hiele, on s'aperçoit que 10 élèves, dont 4 élèves de 6^{ème}, ne maîtrisent toujours pas la notion de triangle isocèle.

24 en ont une connaissance limitée puisque nous les retrouvons au niveau d'identification-visualisation : ces élèves n'ont pas tenu compte des codages, ont laissé des indications de mesure et ont considéré que les triangles isocèles particuliers devaient être rayés. Ils représentent environ 28% de notre échantillon. Il n'est pas surprenant que la moitié des élèves de CM2 auxquels nous avons proposé cette tâche soit dans ce cas : le codage des figures n'est nullement au programme de ce niveau et encore moins le codage d'un schéma à main levée.

26 élèves (31% de notre échantillon) sont au niveau N2, niveau d'analyse : ils ont su tenir compte du codage des figures et n'ont pas eu besoin de laisser de trace écrite mais ont encore une conception exclusive des triangles particuliers.

24 élèves soit près de 28% sont au niveau de déduction informelle (N3) : ils n'ont pas laissé de trace de mesure sur leur feuille et ont une conception inclusive des triangles particuliers.

En regroupant les effectifs des cases N0 et N1 d'une part, N2 et N3 d'autre part, nous obtenons le tableau suivant :

	N<2	N≥2	Total
CM2	25	16	41
6^{ème}	9	34	43
Total	34	50	84

La différence entre les réponses des élèves de CM2 et les élèves de 6^{ème} est significative. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique que les variables sont dépendantes les unes des autres

(χ^2 obs. = 13,97 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Comme on pouvait s'y attendre, les élèves de CM2 ont tendance à être toujours au niveau d'identification-visualisation quand les élèves de 6^{ème} maîtrisent le niveau d'analyse voire le niveau de déduction informelle. Mais la tâche relève du collège et non pas du Primaire. On peut même se réjouir que 16 élèves de CM2, soit près de 40% de notre échantillon de Primaire, aient été en mesure de donner du sens au codage alors que ceci n'a sans doute pas été l'objet d'un apprentissage spécifique.

Dans cet exercice les élèves de 6^{ème} et de CM2 ont eu des comportements différents. Comment se répartissent-ils à l'intérieur des paradigmes et de niveaux de van Hiele ?

1.3.3. CROISEMENTS DE TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	5	1		6
N1	3	16		19
N2		4	3	7
N3			9	9
Total	8	21	12	41

Il ressort de ce tableau que les élèves qui pour nous fonctionnent dans G1 ou dans un paradigme que nous n'avons pas pu identifié, en sont aussi pour la moitié d'entre eux au niveau d'identification-visualisation de van Hiele (N1). En revanche sur les 12 élèves que nous avons placés dans la colonne G2, 9 d'entre eux, soit les trois quarts, ont accepté les triangles isocèles-rectangles comme étant des triangles isocèles.

Les élèves qui maîtrisent le niveau d'analyse se retrouvent de manière assez équilibrée, même si les effectifs sont faibles, dans les deux paradigmes. Nous pourrions conclure qu'à ce niveau, c'est-à-dire en CM2, parmi les élèves qui savent décoder une figure, la moitié d'entre eux en a une conception complètement exclusive.

Globalement on peut considérer que 16 élèves de notre échantillon soit près de 40%, ont décodé les figures sans y avoir été particulièrement initiés. C'est sans doute un signe que

l'apprentissage du codage des figures, s'il est nécessaire, ne devrait pas être très difficile à mener en 6^{ème}.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	2	2		4
N1	2	3		5
N2		4	15	19
N3			15	15
Total	4	9	30	43

La répartition des élèves dans ce tableau est très différente. Dans la colonne G1, il y a autant d'élèves qui ont fait des mesures ou qui ont décodé correctement les triangles de manière exclusive les uns par rapport aux autres. De la même façon, les élèves se répartissent équitablement dans la colonne G2 entre ceux qui n'ont reconnu que le triangle isocèle-rectangle (N2) et ceux qui ont accepté aussi les triangles équilatéraux (N3).

En ce qui concerne la ligne N2 du tableau des 6^{ème}, les élèves qui ont accepté comme triangle isocèle les triangles isocèles-rectangles sont presque quatre fois plus nombreux que ceux qui ont encore une connaissance tout à fait exclusive du concept de triangle isocèle.

En tout, on peut considérer que 34 élèves sur 43 (soit près de 80%), ont su analyser correctement le codage des figures. L'un des objectifs de la classe de 6^{ème} est donc atteint.

1.4. Exercice 1.3

1.4.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	13	11	4	28
6^{ème}	10	11	9	30
Total	23	22	13	58

La première remarque que l'on peut faire est le grand nombre d'élèves pour lesquels nous n'avons pas pu identifier une technique ou un fonctionnement particulier et auxquels nous avons attribué le code GX. Il y a ainsi 23 élèves sur 58 soit 38% de notre échantillon. Nul doute que la présentation de cet exercice avec les dessins des triangles à main levée ou à la règle a été une source de confusion chez ces élèves ; ils en ont perdu le sens de la consigne et ont témoigné de démarches qui se révèlent incohérentes. On y trouve des élèves qui ont accepté certains triangles d'après leur apparence en l'absence de tout codage, ou qui ont accepté un triangle codé comme équilatéral mais ont rayé un triangle codé comme isocèle, etc. Il n'y a pas de différence significative entre les réponses des élèves de CM2 et de 6^{ème}. Dans les deux groupes, le respect du codage s'est révélé plus difficile que dans l'exercice précédent où tous les triangles étaient dessinés à main levée.

11 élèves de chaque groupe ont laissé des traces de mesure, y compris sur certains triangles dessinés à main levée ou ont témoigné d'une connaissance exclusive du concept de triangle isocèle. Ils représentent 38% de notre échantillon.

Seulement 4 élèves de CM2 et 9 élèves de 6^{ème} ont appliqué scrupuleusement la consigne et n'ont laissé aucune trace de mesure. Ils représentent 22% de notre échantillon. Mais ils n'ont pas tous reconnu la totalité des triangles isocèles.

	GX+G1	G2	Total
CM2	24	4	28
6^{ème}	21	9	30
Total	45	13	58

Cet exercice met en évidence l'importance que l'élève accorde au dessin à la règle au détriment de la consigne qui demandait d'interpréter les codages pour tous les triangles. En CM2, il y a en tout 24 élèves sur 28 qui ont fait des mesures ou qui ont suivi des démarches différentes à l'intérieur même de l'activité. En 6^{ème}, ils sont 21 sur 30 dans ce cas. Globalement on peut dire que plus des trois quarts des élèves n'ont pas complètement respecté le contrat. Le test du χ^2 confirme qu'il n'y a pas de dépendance entre les variables : χ^2 obs. = 2,06 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Une telle activité suggère que si la consigne est claire, son domaine d'application ne l'est pas et les élèves sont troublés. Le contrat didactique n'est pas celui de l'exercice 1.2.. Les concepts géométriques, surtout en primaire, sont en construction et une telle activité où les tracés à la règle côtoient des schémas faits à main levée se révèle tout à fait déconcertante.

1.4.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	11	9	5	3	28
6^{ème}	12	2	4	12	30
Total	23	11	9	15	58

Du point de vue des niveaux de van Hiele, la situation est un peu la même. Nous avons attribué le code N0 à 40% des élèves de chaque niveau (11 élèves de CM2 et 12 élèves de 6^{ème}) : ils ont fait des choix que nous avons jugé incohérents. On trouve parmi ces élèves, ceux qui ont gardé les triangles d'apparence isocèle alors qu'ils étaient sans aucun codage, ceux qui ont rayé le triangle n°3 qui a l'allure d'un triangle isocèle, et qui ont accepté le triangle n°8 qui « a l'air d'être équilatéral » alors que les deux étaient dessinés à la main et codés comme étant équilatéraux, etc.

On peut aussi remarquer qu'un tiers des élèves (9 sur 28) se trouvent au niveau N1 d'identification-visualisation. Ces élèves reconnaissent les triangles isocèles à leur forme ou à

leur codage à l'exclusion de tout triangle isocèle particulier. Ils sont nettement moins nombreux dans ce cas en 6^{ème}.

Dans la colonne N2 se trouvent les élèves qui ont décodé les triangles isocèles et éventuellement les triangles isocèles-rectangles.

Les 12 élèves de 6^{ème} qui sont dans la colonne N3 ont su décodé tous les triangles isocèles proposés, que ceux-ci soient des triangles isocèles quelconques ou particuliers. Ils représentent ainsi 40% de notre échantillon. En CM2, 3 élèves sont dans ce cas soit 10% de notre échantillon.

En regroupant les élèves selon ce critère du respect de la consigne, on obtient le tableau suivant :

	N0 + N1	N2 + N3	Total
CM2	20	8	28
6^{ème}	14	16	30
Total	34	24	58

On peut aussi remarquer que 20 élèves sur 28 en CM2 n'ont pas vraiment su appliquer la consigne soit 70% de l'échantillon quand 16 élèves de 6^{ème} l'ont fait, soit de manière exclusive (N2) soit de manière inclusive (N3) c'est-à-dire la moitié de l'échantillon. Les élèves de CM2 ont tendance à être au niveau d'identification-visualisation quand les élèves de 6^{ème} maîtrisent davantage le niveau d'analyse voire le niveau de déduction informelle. Un tel constat est a priori en accord avec les objectifs des programmes de Primaire et de Collège en ce que l'identification et la description des figures relève de l'école primaire et qu'en 6^{ème} il est « nécessaire de développer des apprentissages qui initient l'élève à la démonstration. » (cf. Programmes du Collège 2004)

La différence entre les réponses des élèves de CM2 et les élèves de 6^{ème} n'est pas pour autant significative. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique que les variables sont indépendantes les unes des autres (χ^2 obs. = 3,66 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84).

Comment se répartissent les élèves à l'intérieur des paradigmes et des niveaux de van Hiele ?

1.4.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	8	3		11
N1	4	5		9
N2		2	3	5
N3			3	3
Total	12	10	6	28

De ce tableau il ressort que les élèves les plus nombreux sont ceux de la cases GX-N0 : 8 élèves sur 28 soit plus d'un quart d'entre eux. Ils ont fait des choix dans lesquels nous avons du mal à trouver une cohérence. Par exemple le sujet P41 a gardé les triangles n°1, 4, 6 et 7 alors que certains sont tracés à la règle, d'autres à main levée, certains sont codés, d'autres non.

A propos des 4 élèves qui sont dans la case GX-N1, comme nous l'avons dit plus haut, ces élèves ont sans doute été au cœur d'un conflit entre le su et le perçu puisque qu'ils ont accepté comme triangle isocèle un triangle qui en a l'air comme le triangle n°3 (codé équilatéral) mais ont rejeté le triangle n°5 qui n'en a pas l'air mais est codé équilatéral.

La moitié des élèves qui, pour nous ont fonctionné en G1, sont aussi au niveau N1 d'identification-visualisation. Pour ces élèves le triangle isocèle est un concept exclusif du triangle équilatéral et même du triangle isocèle-rectangle. Ainsi le sujet P37 n'a gardé que les triangles 3 et 4 qui ont chacun un sommet équidistant des deux autres mais sont codés comme étant l'un isocèle, l'autre équilatéral. De plus le triangle 3 est dessiné à la règle quand le triangle 4 est à main levée.

Les deux élèves qui sont dans la case G1-N2 sont deux élèves qui ont décodé les triangles isocèles exclusivement tandis que les trois élèves qui sont dans la case G2-N2 n'ont pas rayé les triangles isocèles-rectangles ; ils ont toutefois rayé les triangles codés comme équilatéraux. Il n'y a finalement que trois élèves dans la case G2-N3 soit 10% qui ont été en mesure de répondre « correctement » à la question en conservant tous les triangles isocèles qu'ils soient quelconques ou particuliers.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	5	7		12
N1	2			2
N2		2	2	4
N3			12	12
Total	7	9	14	30

Comme on le voit sur ce tableau, la répartition des élèves de 6^{ème} est différente. L'effectif le plus grand se trouve dans la case G2-N3 avec 12 élèves. Si l'on prend en compte aussi les deux élèves qui sont dans la case G2-N2 qui ont interprété correctement le codage des triangles isocèles y compris les triangles isocèles-rectangles, il y a 14 élèves de 6^{ème} qui, pour nous, ont fonctionné en G2 soit près de la moitié de notre échantillon. Ils ne sont que 6 dans ce cas en CM2 soit à peine un quart ; la différence est donc sensible. Une autre différence se situe dans la répartition des élèves à l'intérieur de la colonne G1 : 7 sur 9 sont sur la ligne N0 autrement dit, ont fait des choix que nous avons jugés incohérents. Seulement 2 élèves sont sur la ligne N2 : ils ont décodé de manière exclusive les triangles isocèles. On peut aussi remarquer que la case G1-N1 est vide : aucun élève de 6^{ème} n'a fait le choix de triangles isocèles d'après leurs apparences ou des mesures alors qu'ils sont 5 sur 10 en CM2. Au vu de ces résultats on pourrait dire que l'apprentissage du décodage des figures est une réalité en 6^{ème}.

1.5. Comparaison des résultats des exercices 1.2. et 1.3.

On a vu que les résultats obtenus dans ces deux exercices étaient légèrement différents : la seule variable didactique étant le dessin des triangles proposés. Il peut être intéressant de savoir si cette différence est significative, indépendamment du niveau de scolarité de l'élève.

1.5.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
exo 1.2.	12	30	42	84
exo 1.3.	23	22	13	58
Total	35	52	55	142

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique que le paradigme utilisés pour répondre à chacun des exercices est lié à l'exercice ($\chi^2_{\text{obs}} = 14,81$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99). Nous avons d'ores et déjà remarqué que dans le cadre de l'exercice 1.2., les élèves de CM2 et de 6^{ème} avaient eu recours à des fonctionnements dans des paradigmes différents, situation qui ne s'est pas confirmée dans l'exercice 1.3., nous constatons maintenant que le recours aux différents paradigmes est significativement différent d'une tâche à l'autre. En effet, dans la colonne GX, les élèves sont proportionnellement nettement plus nombreux sur la ligne de l'exercice 1.3. que sur la ligne de l'exercice 1.2. : 23 sur 58 soit 40% contre 12 sur 84 soit 14%. Rappelons que, parmi les dessins proposés dans l'exercice 1.3., certains étaient manifestement tracés à la règle et d'autre à la main alors que dans l'autre exercice, tous les dessins proposés avaient été faits à la main ; dans les deux cas, seul le codage était à prendre en compte. On peut alors raisonnablement penser que cette seule différence suffit à expliquer le recours à des fonctionnements qui n'ont pas été identifiés comme relevant de G1 ou de G2 ; la présentation de l'exercice 1.3. a vraisemblablement favorisé une certaine « contamination du su par le perçu ».

Quelque soit la tâche, les deux tiers de élèves ont fonctionné en G1 : soit ils se sont déterminés à partir de mesures, soit ils ont interprété correctement les codages ; mais dans un cas comme dans l'autre ils ont témoigné d'une conception exclusive du triangle isocèle, excluant les triangles isocèles-rectangles et équilatéraux.

Enfin si la moitié des élèves de notre échantillon sont dans la colonne G2 pour l'exercice 1.2., ils ne représentent qu'à peine un quart pour l'exercice 1.3.. L'association de dessins à la règle et à main levée a été une source de difficultés : nombreux sont les élèves qui, sans doute, ont été gênés par cette diversité et ont recours à des techniques relevant de paradigmes moins élaborés voire incohérentes.

1.5.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
Exo 1.2.	10	24	26	24	84
Exo1.3.	23	11	9	15	58
Total	33	35	35	39	142

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme que les niveaux de maîtrise révélés par l'exercice 1.2. sont significativement différents de ceux de l'exercice 1.3. ($\chi^2_{\text{obs}} = 16,06$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,81).

En particulier on voit que les élèves que nous avons classés en N0 pour l'exercice 1.3. sont proportionnellement nettement plus nombreux que pour l'exercice 1.2. (respectivement 23 sur 58 soit 40% et 10 sur 84 soit 12%).

Dans la colonne N2, la répartition des élèves est tout autre puisque 26 sur 84 soit 30 % sont dans ce cas à propos de l'exercice 1.2. tandis qu'ils ne sont que 9 sur 58 soit 15% dans l'exercice 1.3. . L'analyse de la figure et, en particulier, son décodage se sont révélés plus difficile à réussir dans le second exercice ; la tentation étant de se limiter aux dessins tracés à la règle.

Dans la colonne N3 (déduction informelle), la situation est tout à fait différente puisque dans les deux exercices nous avons la même proportion d'élèves : environ 25% des deux échantillons. Mais on gomme ici la nuance faite dans l'analyse des réponses à l'exercice 1.2. où la répartition des élèves était significativement différente d'un niveau à l'autre : les élèves de 6^{ème} étant nettement plus nombreux que leurs camarades de CM2 .

Les analyses des réponses à ces deux exercices suggèrent que les élèves peuvent révéler des niveaux de maîtrise différents selon l'activité qui leur est proposée. Nul doute que le fait de proposer des dessins à la règle et des dessins à main levée dans une même tâche a été une source de difficulté voire de confusion. Il y a là vraisemblablement un effet de contrat qui se manifeste tant au niveau du mode de fonctionnement dans l'un ou l'autre des paradigmes que dans la maîtrise des niveaux de van Hiele.

1.6. Exercices 1.4.et 1.5.

Nous analyserons ces deux exercices sans distinction puisque la seule variable didactique est l'ordre dans lequel les descriptions des triangles est donné.

Pour ce faire nous avons redonné à l'exercice 1.5 la numérotation des triangles de l'exercice 1.4.

Toutefois la comparaison entre les réponses obtenues dans l'exercice 1.4. et l'exercice 1.5. permettra de savoir si l'ordre dans lequel les énoncés ont été proposés a pu avoir une influence. En effet, dans l'exercice 1.5., l'ordre dans lequel les descriptions proposées est aléatoire, et peut avoir une incidence sur les performances des élèves. Au contraire, dans l'exercice 1.4., l'ordre est, pour nous, selon une difficulté croissante pour les élèves.

Afin d'associer facilement les descriptions de chaque exercice, nous avons fait le choix des les numéroter de 1 à 10 dans l'exercice 1.4. et de les numéroter de 1* à 10* dans l'exercice 1.5. ; deux descriptions identiques étant présentées à chaque fois que cela est nécessaire selon les deux numérotations. Par exemple les descriptions 2 de l'exercice 1.4. et 9* de l'exercice 1.5. correspondent à la phrase : «Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm). »

A la première lecture des copies, il apparaît que certains élèves semblent avoir été surpris par la difficulté de la tâche et n'ont pas répondu clairement à la question qui leur était posée. Rares sont ceux qui ont fait des figures ou qui ont répondu à toutes les questions. Il est donc parfois délicat d'apprécier le paradigme géométrique dans lequel ils ont fonctionné ou le niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent réellement. Pour les élèves qui ont fait des figures, la tâche semble avoir consisté à dessiner des triangles isocèles respectant autant que possible les contraintes proposées. C'est ainsi que sur plusieurs copies (CM2 et 6^{ème}), les figures ne sont pas terminées parce qu'il y aurait sans doute eu une contradiction avec le concept de triangle isocèle de l'élève et les contraintes données ; la présentation stéréotypique étant très prégnante, on peut supposer que ces élèves se sont interrompus parce que leur triangle était « mal orienté » dans la feuille.

1.6.1. PARADIGMES

GX : tout élève qui n'a pas reconnu que le triangle n°1 était isocèle. Il peut avoir trouvé que d'autres triangles n'étaient pas isocèles dans la mesure où il n'a pas rayé les descriptions afférentes. De plus certains élèves ont pu faire des choix contradictoires, comme l'élimination du triangle rectangle et l'élimination du triangle isocèle quelconque. Dans un tel cas on peut douter de la conception même du triangle isocèle qu'ils peuvent avoir.

D'une manière générale, il y a eu très peu de dessins que nous aurions pu considérer comme élément de preuve d'un fonctionnement en G1 plutôt qu'en G2. C'est donc avant tout sur les critères d'inclusion ou d'exclusion que nous avons décidé qu'une élève fonctionnait dans un paradigme ou dans un autre.

G1 : On y trouvera les élèves qui ont reconnu le triangle isocèle dans la présentation du seul triangle 1 à l'exclusion de tout autre triangle, surtout s'ils ont fait un dessin soigné à la règle. Seront considérés comme ayant fonctionné dans G1, les élèves qui ont rayé le triangle équilatéral n°2 et les triangles isocèles qui sont des sous-figures. Pour ce qui concerne les autres triangles (n°3 et n°5), on considèrera que la seule mention « deux côtés de même longueur » dans la description a suffi pour les convaincre du caractère isocèle de ce triangle. L'absence d'une telle mention étant alors la preuve du contraire : si la description ne contient pas l'expression « deux côtés de même longueur », l'élève en conclut que le triangle n'est pas isocèle. De plus, cette information étant donnée à la fin de la description, elle est d'autant plus facilement prise en compte. C'est ainsi que les élèves fonctionnant dans ce paradigme ont aussi rayé les descriptions des triangles 4, 6 et 7.

Nous considèrerons aussi comme fonctionnant en G1 tout élève qui a élaboré des tracés à la règle où à l'évidence les mesures ou indications proposées ont été respectées.

Même si les réponses données à propos des triangles intervenant en tant que sous-figures dans les situations 8 à 10 ne sont pas déterminantes, le fait de rayer ces trois descriptions est un indice de fonctionnement en G1 : l'élève n'est pas en mesure de décomposer une figure en différentes sous-figures. Enfin dans la version 1.4., les descriptions dans lesquelles les triangles sont des sous-figures sont proposées en fin d'énoncé et peuvent ne pas avoir été traitées, faute de temps. Auquel cas l'élève n'a pas rayé les descriptions, ce qui est alors une réponse exacte.

G2 : La plupart des autres élèves, avec sans doute des nuances selon les situations et les schémas qu'ils peuvent avoir faits, seront considérés comme ayant fonctionné dans G2. Chacun de ces élèves a analysé le texte qui lui était proposé et s'est déterminé en fonction du concept de triangle isocèle qu'il maîtrise, conception incluant les triangles particuliers. G2 est complètement maîtrisé si l'élève est capable d'identifier les triangles isocèles dans les cas 8, 9 et 10, les triangles isocèles étant alors des sous-figures de la figure proposée.

Tout élève qui a reconnu les triangles isocèles particuliers n° 1, 2, 3, et 5 et qui a rejeté les triangles n°4, 6 et 7 sera aussi considéré comme fonctionnant en G2. Les élèves qui se sont trompés dans les déterminations des triangles n°8, 9 et 10 ont aussi été considérés comme relevant de G2, quand bien même il y a là une différence de maîtrise à l'intérieur de ce paradigme.

1.6.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

N0 : tout élève qui n'a pas été capable d'associer la description n°1 à celle d'un triangle isocèle et qui a pu en trouver ailleurs. Est à ce niveau l'élève qui fait des choix contradictoires dans l'élimination des triangles. Il ne sait pas reconnaître un triangle isocèle, même verbalement.

N1 : Tout élève qui a fait le bon choix dans les descriptions des triangles n°1 et 7. Il se peut qu'il se soit trompé dans les descriptions des triangles n°4 et 6 puisqu'elles ne disent rien quant à la longueur des côtés. Un tel élève a connaissance tout à fait exclusive du triangle isocèle en terme de longueur de côtés et n'a aucune idée des propriétés géométriques qui en découlent. Il a refusé ou ignoré les descriptions n°8, 9 et 10 parce qu'il ne s'agit pas de triangles. C'est un niveau qu'il est vraisemblablement assez difficile de tester dans cet exercice puisque tous les énoncés sont verbaux et que l'élève n'a aucun moyen de se déterminer à partir de ses perceptions visuelles.

N2 : un tel élève est au niveau d'analyse et reconnaît les figures à ses propriétés. Il a donc fait les mêmes choix que l'élève auquel nous avons attribué le niveau N1 mais il a su aussi accepter la description n°3 ou n°5. En effet dans ces deux descriptions, les deux côtés de

même longueur sont explicitement énoncés : cela correspond encore au critère exclusif de la définition du triangle isocèle. En revanche un tel élève a éliminé la description du triangle équilatéral n°2 et n'a pas toujours su retrouver les triangles isocèles dans les situations n°8, 9 et 10.

Est au niveau d'analyse l'élève qui reconnaît le triangle n°1 à l'exclusion du triangle équilatéral, et qui est capable d'éliminer les triangles qui n'ont pas les conditions pour être des triangles isocèles. Comme pour le paradigme G1, les autres présentations de triangles peuvent avoir été considérées comme autant de précisions à apporter à la construction du triangle. C'est la mention « côtés de même longueur » ou son absence qui détermine la position de l'élève. Le cas du triangle isocèle rectangle (n°5) est à dissocier du cas triangle équilatéral dans la mesure où l'énoncé se termine par « les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur ». On peut concevoir que les élèves ont considéré alors qu'il s'agissait d'un triangle isocèle dont on précisait la mesure d'un angle, autrement dit, on leur donnait plus d'informations pour construire le triangle.

N3 : à ce niveau de déduction informelle, l'élève a su reconnaître tous les triangles isocèles proposés dans les descriptions de 1 à 7. Il a su aussi traiter certaines des situations plus complexes proposées dans les descriptions 8 à 10. Il se peut qu'il n'ait pas réussi complètement cette deuxième partie de l'activité. Il est bien évident que celui qui a su identifier le triangle isocèle dans les situations 8, 9 et 10 est plus avancé dans la maîtrise de ce niveau que celui qui s'est limité aux 7 premiers cas. Pour autant la maîtrise du niveau 4 de déduction formelle n'est nullement nécessaire dans cet exercice puisque aucune démonstration n'est demandée et le rôle des définitions et des théorèmes n'a pas à être évoqué.

Pour situer chaque élève dans un paradigme ou un niveau, nous avons corrigé en termes de 1 ou 0 les réponses bonnes ou fausses pour chacune des descriptions. Nous obtenons les résultats sont présenté dans les tableaux en annexe 3.

1.7. Exercice 1.4.

En CM2, 25 élèves ont reçu la feuille. 2 n'ont strictement rien répondu. Nous avons donc 23 copies exploitables.

En 6^{ème}, 30 élèves ont reçu la feuille et tous ont donné des éléments de réponse.

Mais, que ce soit en CM2 ou en 6^{ème}, tous n'ont pas donné une réponse complète, en particulier dans le cas où le triangle isocèle apparaît dans une sous-figure, c'est-à-dire à la fin de l'activité. C'est pourquoi, il était pertinent de proposer aussi l'exercice 1.5 où les descriptions sont proposées dans un ordre aléatoire.

1.7.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	1	10	12	23
6^{ème}	2	15	13	30
Total	3	25	25	53

D'emblée on peut dire que les modes de fonctionnement des élèves des deux niveaux ont été tout à fait similaires au cours de cette activité. Que ce soit en en CM2 ou en 6^{ème} la moitié des élèves a appliqué une définition exclusive du triangle isocèle ou a fait des dessins qui témoignaient d'un fonctionnement relevant de G1 quand l'autre moitié a témoigné d'une maîtrise plus avancée des concepts et a été classée en G2. Toutefois nous avons attribué le code G2 aux élèves qui, tout en rayant la description du triangle équilatéral n°2, avaient accepté les triangles isocèles n° 3 et 5 ainsi que quelques uns des triangles isocèles sous-figures dans les situations 8 à 10.

1.7.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	3	14	5	23
6^{ème}	2	5	13	10	30
Total	3	8	27	15	53

La répartition est quelque peu nuancée quand on recherche les niveaux de van Hiele atteints par les élèves.

En tout 3 élèves (P143, S16 et S124) se sont trompés dès la première description et n'ont pas reconnu là celle d'un triangle isocèle alors qu'elle était rappelée en haut de la feuille. Ce sont aussi les élèves auxquels nous avons attribué le code GX dans la mesure où, dans la suite de l'activité, ils ont accepté comme étant isocèles des triangles qui l'étaient et d'autres qui ne l'étaient pas.

Parmi les 8 élèves pour lesquels nous avons utilisé le code N1 (identification-visualisation) il y a ceux qui, certes ont appliqué une définition exclusive du triangle isocèle, mais qui ont donné des réponses fausses par ailleurs, en particulier à propos des triangles n°4 et 6. Ils représentent environ 15% de l'effectif de chaque groupe d'élèves.

Nous avons codés en N2 (analyse) les élèves qui ont été capables d'identifier davantage de triangles isocèles mais qui sont restés gênés par la description du triangle équilatéral (n°2). Ils ont aussi en général eu beaucoup de mal à exploiter les descriptions n° 8 à 10. Il n'est donc pas étonnant qu'à ce niveau de scolarité nous ayons là les effectifs les plus nombreux, la moitié de nos échantillons environ, les CM2 étant proportionnellement plus nombreux que les 6^{ème}.

La différence se situe au niveau N3 de déduction informelle où les élèves maîtrisent une conception inclusive des triangles particuliers ; mais tous n'ont pas forcément été en mesure d'exploiter les descriptions n°8 à 10 où le triangle isocèle devient une sous-figure de la figure proposée. Pour avoir une idée il suffit de voir ce que les élèves ont fait dans l'exercice 1.5. Toutefois, il y a une certaine différence dans la répartition entre les élèves CM2 et de 6^{ème} à ce niveau : 5 sur 23 en CM2 soit 22% et 10 sur 30 en 6^{ème} soit 33%.

1.7.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	1			1
N1		3		3
N2		7	7	14
N3			5	5
Total	1	10	12	23

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	2			2
N1		5		5
N2		10	3	13
N3			10	10
Total	2	15	13	30

Si l'on compare les effectifs des deux tableaux, leurs répartitions se ressemblent. Un tiers des élèves se situe dans la case G1-N2 : ils témoignent là d'une maîtrise du concept de triangle isocèle qui ne se réduit pas à sa reconnaissance à vue d'œil mais pour autant l'intégration du triangle équilatéral comme un triangle isocèle particulier n'est pas faite.

La répartition des élèves dans la colonne G2 est différente d'un niveau de scolarité à l'autre. Si en CM2 les effectifs sont relativement équilibrés entre les niveaux N2 et N3 en revanche en 6^{ème}, les élèves auxquels nous avons attribué le code N3 sont trois fois plus nombreux que ceux auxquels nous avons attribué le code N2. on peut sans doute y voir là l'effet de

l'apprentissage qui a eu lieu en 6^{ème} en direction de l'abstraction et d'une conception inclusive de la notion de triangles particuliers. Un tiers des élèves de 6^{ème} est à ce niveau quand ils sont 20% en CM2.

Parmi les copies remarquables nous pouvons citer le cas de l'élève P120 qui a été le seul à identifier comme triangle isocèle le seul triangle n°1, triangle qu'il a dessiné et a rejeté tous les autres. Cet élève est dans G1. Il a vraisemblablement en tête une définition exclusive du triangle isocèle et les choix qu'il a fait par ailleurs suggèrent qu'il est loin d'une définition inclusive.

A l'autre extrémité du spectre nous avons 3 élèves de 6^{ème} (S23, S89 et S161) et 1 élève de CM2 (P75) qui ont été en mesure de donner un ensemble de réponses entièrement juste.

1.8. Exercice 1.5.

En CM2, sur les 27 copies distribuées un seul élève (P205) n'a rien fait. Nous avons donc 26 copies exploitables dont l'une d'entre elles (P151) contient plusieurs dessins de triangle alors que les descriptions proposées ne sont pas rayées comme le demandait la consigne. Il est donc assez difficile de se prononcer pour l'ensemble de la tâche.

En 6^{ème}, 29 copies ont été distribuées et les 29 élèves ont répondu.

Comme pour l'exercice 1.4., nous donnons en annexe 3 le codage des réponses en 1 ou 0 selon que l'élève a identifié ou non le triangle isocèle. Afin de pouvoir rapprocher les descriptions de cet exercice de celles de l'exercice 1.4., nous les avons numérotées avec une étoile et entre parenthèse nous rappelons le numéro de la même description dans l'exercice précédent.

Dans cette activité, il y a encore 3 élèves de CM2 (P67, P174 et P185) qui n'ont pas reconnu la description d'un triangle isocèle dans la première phrase alors qu'il n'y en a aucun en 6^{ème}.

1.8.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	2	15	9	26
6^{ème}	1	13	15	29
Total	3	27	25	55

Les deux élèves de CM2 que nous avons placés en GX ont eu les comportements suivants. L'élève P30 a fait le choix du triangle 4* décrit comme ayant l'angle de sommet A plus petit que les angles de sommets B et C. De plus il a dessiné un carré sans aucune annotation. L'élève P67 a de toute évidence répondu au hasard, confondant angle et côté : il a, entre autres, rejeté la première description et a accepté la dernière où il est précisé que tous les côtés ont une longueur différente. Il a aussi accepté le triangle 4*. Enfin l'élève de 6^{ème} (S26) auquel nous avons attribué le code GX a rendu une copie délicate à interpréter : la seule description qu'il ait rayée est la dernière (n°10*) et il n'a dessiné qu'un triangle équilatéral de 4 cm de côté avec la mention suivante « triangle n°4 ».

Plus de la moitié des élèves de CM2 sont classés dans le paradigme G1, non pas parce qu'ils ont fait des dessins mais parce qu'ils ont témoigné d'une conception exclusive du triangle isocèle. Proportionnellement ils sont un peu moins nombreux en 6^{ème} 13 sur 29 soit 45%.

Tous les élèves que nous avons classés dans G2 ont témoigné d'une connaissance de la définition des triangles particuliers en terme d'inclusion les uns par rapport aux autres. Tous cependant n'ont pas été en mesure de retrouver les triangles isocèles dans les sous-figures des descriptions 3* (rectangle), 5* (carré) et 7* (losange). Nous avons là la moitié des élèves de 6^{ème} et seulement 38% des élèves de CM2 (10 sur 26).

1.8.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	4	6	9	7	26
6^{ème}	1	7	14	7	29
Total	5	12	24	14	55

Il y a maintenant 4 élèves de CM2 et un élève de 6^{ème} qui n'ont pas été en mesure de reconnaître un triangle isocèle par sa simple description. Parmi ces quatre élèves nous retrouvons P30 dont nous avons déjà parlé, il y a aussi P67 qui, entre autres, rejette la description du triangle 1* mais accepte la description du triangle 4* où « l'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C » ; il y a sans doute chez cet élève une confusion de sens entre les mots « angles » et « côtés » accompagné du sous-entendu suivant : les angles de sommets B et C sont égaux. Il y a aussi P174 qui a rejeté le triangle 1* mais a dessiné et accepté le triangle 2* avec l'angle de sommet C obtus et les longueurs CA et CB de 4 cm. En revanche, ce même élève a rejeté les triangles 8* (isocèle rectangle) et 9* (équilatéral).

Nous avons classé en N1 (identification-visualisation) les élèves qui n'ont pu reconnaître que le triangle isocèle 1* (cas général). Certains d'entre eux ont été capables d'accepter l'un des cas plus précis de triangle isocèle proposé dans les descriptions 2* et 8*. En effet dans ces deux dernières, on retrouve explicitement la mention de deux côtés de même longueur. Comme cette précision termine la phrase, elle a d'autant plus d'impact. Mais souvent ces élèves ont aussi accepté comme triangle isocèle le triangle décrit en 4* (l'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C) et ont rejeté bon nombre de cas de sous-figure (triangles 3*, 5* et 7*)

Ont été classés en N2 (analyse) les élèves qui ont accepté les triangles isocèles (1*, 2* et 8*) mais qui n'ont pas rejeté le triangle équilatéral (triangle 9*). De plus ces élèves ont su rejeter les triangles qui n'étaient pas des triangles isocèles. Ces élèves n'ont pas forcément su gérer les situations de sous-figures.

Enfin nous avons attribué le niveau N3 (déduction informelle) aux élèves qui ont appliqué une organisation inclusive des définitions des triangles particuliers, qui ont rejeté les triangles qui n'étaient pas des triangles isocèles. Tous n'ont pas été en mesure de retrouver les triangles isocèles dans les cas de sous-figures. Ces dernières pourraient sans doute être considérées, à l'intérieur du niveau de déduction informelle, comme des activités relevant d'une zone de développement proximal.

En CM2 un seul élève (P172) a donné l'ensemble des réponses exactes. Ils sont deux en 6^{ème} : S127 et S213.

D'une manière générale on peut dire que les élèves de CM2 se sont comportés comme les élèves de 6^{ème}. Il n'y a pas de différence significative à cet égard.

1.8.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	2	2		4
N1		6		5
N2		7	2	10
N3			7	7
Total	2	14	10	26

	GX	G1	G2	Total
N0	1			1
N1		7		7
N2		6	8	14
N3			7	7
Total	1	13	15	29

Ces deux tableaux ne présentent qu'une seule différence notable dans la colonne G2. Les élèves de 6^{ème} sont équitablement répartis entre les deux niveaux de van Hiele N2 et N3 tandis qu'en CM2 il n'y a que 2 élèves qui soient en N2 et 7 qui sont en N3.

Cette activité a permis de mettre en évidence que les élèves de CM2 qui fonctionnent en G1 peuvent tout autant relever du niveau d'identification-visualisation que du niveau d'analyse alors que ceux qui peuvent fonctionner en G2 le font au niveau de déduction informelle. En 6^{ème} la répartition est différente et le niveau N2 d'analyse peut être considéré comme une zone de tuilage entre G1 et G2 puisque les effectifs des quatre cases G1-N, G1-N2, G2-N2 et G2-N3 sont de mêmes tailles.

1.9. Comparaison entre 1.4.et 1.5.

L'intérêt maintenant est de savoir si l'ordre dans lequel les descriptions ont été proposées a eu une incidence sur la qualité des réponses.

Pour cela nous avons numérotés les descriptions dans l'ordre de l'exercice 1.4. et nous avons indiqué entre parenthèses le numéro de la même description dans l'exercice 1.5., assorti d'une étoile. La comparaison du nombre de réponses exactes pour chaque description sur l'ensemble des deux exercices est la suivante :

CM2

	Tri. 1(1*)	Tri. 2(9*)	Tri. 3(8*)	Tri. 4(4*)	Tri. 5(2*)	Tri. 6(6*)	Tri. 7(10*)	Tri. 8(5*)	Tri. 9(3*)	Tri. 10(7*)
Ex. 1.4.	22	14	13	15	17	18	20	12	10	9
Ex. 1.5.	20	10	15	10	18	17	19	11	4	7
Total	42	24	28	25	35	35	39	23	14	16

Peut-être est-il bon de rappeler qu'en CM2, 23 élèves ont fait l'exercice 1.4. et qu'ils sont 26 à avoir fait le n°1.5.. Cela nous donne un effectif global de 49 élèves. On retrouve très nettement dans ce tableau le fait que les élèves ont eu plus de difficultés avec les cas de sous-figures proposées dans les triangles 8 à 10. Le faible nombre de réponses en témoigne. Mais cette difficulté se retrouve autant dans l'exercice 1.4 que dans l'exercice 1.5..

6^{ème}

	Tri. 1(1*)	Tri. 2(9*)	Tri. 3(8*)	Tri. 4(4*)	Tri. 5(2*)	Tri. 6(6*)	Tri. 7(10*)	Tri. 8(5*)	Tri. 9(3*)	Tri. 10(7*)
Ex. 1.4.	28	14	20	18	20	23	23	17	20	14
Ex. 1.5.	29	17	21	15	18	19	26	17	18	18
Total	57	31	41	33	38	42	49	34	38	32

A ce niveau, 30 élèves ont fait l'activité 1.4. et 29 élèves l'activité 1.5 donc nous avons un échantillon de 59 élèves. Proportionnellement, les élèves de 6^{ème} sont plus nombreux à avoir su identifier les triangles isocèles dans les situations de sous-figures que les élèves de CM2. Par exemple, le triangle n°9 (triangle isocèle formé par les diagonales et un côté d'un rectangle), a été identifié comme isocèle par deux élèves sur trois en 6^{ème} ; en CM2, c'est moins d'un élève sur deux qui a réussi dans le cas de l'exercice 1.4. et moins d'un sur six dans l'exercice 1.5..

On peut tout de suite remarquer que l'ordre dans lequel les descriptions ont été données aux élèves n'a pas eu d'incidence remarquable tant pour les élèves de CM2 que pour les 6^{ème}. Le test du χ^2 appliqué sur les triangles 1 à 7 entre les deux exercices montre que l'ordre dans lequel les descriptions ont été proposées n'a pas eu d'incidence sur les réponses.

On remarque aussi qu'une très grande majorité des élèves a été capable de reconnaître le triangle isocèle par sa simple description (triangle n°1) tant en CM2 qu'en 6^{ème}. Le triangle qui a ensuite été le mieux identifié par les deux groupes d'élèves est le triangle n°7 où l'on précise que les trois côtés ont une longueur différente. Nous retrouvons là le critère d'identification d'un triangle isocèle tel que proposé à l'école primaire. Comme on pouvait s'y attendre le triangle équilatéral a été moins facilement reconnu comme un triangle isocèle particulier que les triangles isocèles pour lesquels on précisait la mesure de l'angle au sommet (n° 3 et 5).

On peut s'attarder sur le taux de réussite assez faible tant en CM2 qu'en 6^{ème} dans le cas du triangle n°4. En effet les quelques élèves qui ont fait des dessins de cette situation l'ont interprétée comme étant celle d'un triangle isocèle dont les angles à la base sont plus petits que l'angle au sommet principal, oubliant qu'il n'y avait aucune indication quant aux longueurs des côtés.

Le nombre de réponses exactes dans le cas des triangles 8, 9 et 10 c'est-à-dire des sous-figures est nettement plus petit en CM2 qu'en 6^{ème}. Nous avons fait le choix de considérer que toute description qui n'était pas rayée était approuvée par l'élève. C'est la comparaison avec les choix faits par les élèves dans le cas de l'exercice 1.5. qui nous a amenée à cette décision : au cours de l'expérimentation, les élèves ont lu les descriptions dans l'ordre proposé et se sont déterminés au fur et à mesure. Ils ont donc eu le temps de terminer l'activité. Le fait que les descriptions 8 à 10 dans le cas de l'exercice 1.4. n'aient pas été rayées peut donc être considéré comme une approbation de la part de l'élève. Certains élèves ont écrit des phrases telles que « un rectangle n'est pas un triangle » ou ont fait le dessin d'un rectangle sans ses diagonales et donc ne pouvaient conclure. Ceci montre bien que l'exploitation d'une description dans le cadre d'une sous-figure est plus délicate qu'une description simple et relève sans aucun doute d'une activité de zone de développement proximal quand bien même nous avons dû les classer dans les mêmes paradigmes ou niveaux de van Hiele.

Si l'on regroupe les résultats obtenus dans les deux activités, on obtient les tableaux suivants.

1.9.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	3	24	22	49
6^{ème}	3	28	28	59
Total	6	52	50	108

	GX+G1	G2	Total
CM2	27	22	49
6^{ème}	31	28	59
Total	58	50	108

On voit que l'identification d'un triangle isocèle par une description littérale est maîtrisée par la moitié des élèves (6 et 52 soit 58 sur 108), de manière exclusive. Mais d'ores et déjà un bon nombre d'élèves de CM2 (22 sur 49 soit 45%) ou en 6^{ème} (28 sur 59 soit 47%) maîtrisent une conception inclusive des triangles isocèles particuliers au moins dans le contexte d'une description directe du triangle. En effet nous avons vu dans l'analyse des tableaux précédents que les élèves de CM2 avaient été proportionnellement moins nombreux à retrouver les triangles isocèles dans le contexte de sous-figures.

1.9.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	5	8	24	12	49
6^{ème}	3	12	27	17	59

Total	8	20	51	29	108
-------	---	----	----	----	-----

	N0+N1	N2+N3	Total
CM2	13	36	49
6^{ème}	15	44	59
Total	28	80	108

On peut remarquer qu'en CM2 (13 sur 49) comme en 6^{ème} (15 sur 59), il y a plus d'un quart des élèves (voire 30%) qui ne reconnaissent un triangle isocèle qu'en appliquant une définition exclusive de celui-ci (niveau identification-visualisation ou inférieur). La proportion des élèves qui reconnaissent le triangle isocèle à ses propriétés (niveau d'analyse) est plus grande : la moitié en CM2 et un peu moins (46%) en 6^{ème}. La tendance s'inverse au niveau de déduction informelle (N3) où les élèves de 6^{ème} ont été légèrement plus nombreux (17 sur 59 soit 29%) que les élèves de CM2 (12 sur 49 soit 24%) à maîtriser une définition complète du triangle isocèle.

D'une manière générale, un quart des élèves quel que soit le niveau de scolarité a une conception exclusive du triangle isocèle alors que les trois quarts restants en ont déjà une maîtrise plus abstraite.

1.9.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

Si l'on ajoute les effectifs obtenus dans les exercices 1.4. et 1.5. à chaque niveau de scolarité, on obtient les tableaux suivants.

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	3	2	0	5
N1	0	8	0	8
N2	0	14	10	24

N3	0	0	12	12
Total	3	24	22	49

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	3	0	0	3
N1	0	12	0	12
N2	0	16	11	27
N3	0	0	17	17
Total	3	28	28	59

La répartition des élèves à l'intérieur des deux tableaux est très semblable : un quart des effectifs se retrouve dans les cases de paradigme G1 ou GX et les niveaux N1 ou N0. Ces élèves ont une connaissance très restrictive du triangle isocèle voire pas de connaissance du tout. Plus d'un quart se situe dans la case G1-N2 : ces élèves connaissent les propriétés du triangle isocèle mais de manière exclusive. Environ 20% ont une connaissance de niveau plus abstraite du triangle isocèle sans pour autant considérer qu'un triangle équilatéral est aussi un triangle isocèle : ce sont les élèves qui sont identifiés par le codage G2-N2. Une très légère différence dans la répartition se situe au niveau de la case G2-N3 où les élèves de 6^{ème} sont proportionnellement plus nombreux (29%) que les élèves de CM2 (24%).

1.10. Conclusion à propos des triangles isocèles.

On peut aussi comparer pour chacun des exercices précédents le paradigme dans lequel chaque élève a fonctionné, indépendamment du support.

1.10.1. PARADIGMES

PARADIGMES UTILISES DANS CHAQUE EXERCICE :

	GX	G1	G2	Total
Ex. 1.1.	2	30	15	47
Ex. 1.2.	12	30	42	84
Ex. 1.3.	19	19	20	58
Ex. 1.4.	3	25	25	53
Ex. 1.5.	3	27	25	55
Total	39	131	127	297

Il apparaît nettement dans ce tableau que l'exercice 1.3. a été le plus déroutant à la fois pour les élèves et pour nous, puisque c'est là que nous rencontrons le plus grand nombre d'élèves pour lesquels nous n'avons pas pu déterminer un paradigme de fonctionnement.

Globalement on peut considérer que les élèves se répartissent en deux groupes de tailles inégales : plus de la moitié des élèves ont donc fonctionné dans G1 ou ont procédé d'une façon que nous n'avons pas identifiée et que nous avons codée GX (170 sur 297 soit environ 57%). A cet égard, on peut noter que c'est essentiellement pour les exercices 1.2. et 1.3. c'est-à-dire ceux dans lesquels on trouve des dessins à main levée que cela (utilisation du code GX) s'observe. C'est aussi, toujours plus d'un tiers des élèves qui ont témoigné d'un fonctionnement dans G2 quelque soit l'exercice proposé. Dans certains cas, c'est même la moitié d'entre eux.

PARADIGMES UTILISES PAR LES ELEVES

	GX	G1	G2	Total
CM2	24	67	48	139
6^{ème}	15	64	79	158
Total	39	131	127	297

Comme à chaque fois, nous avons cumulé les effectifs des cases GX et G1. Nous obtenons alors le tableau suivant :

	GX+G1	G2	Total
CM2	91	48	139
6^{ème}	79	79	158
Total	170	127	297

Le test du χ^2 indique qu'il y a un lien entre les variables : χ^2 obs. = 7,23 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Les paradigmes dans lesquels les élèves ont fonctionné dépendent donc de leur niveau de scolarité, quand on ne distingue plus le support de l'activité : dessins à la règle, à main levée et codés ou énoncés littéraux.

Là on voit que les élèves de CM2 sont pratiquement deux fois plus nombreux que les élèves de 6^{ème} à utiliser G1 que G2. Le codage proposé dans les exercices 1.2. et 1.3. ne leur est pas facilement accessible. Ceci n'est pas étonnant puisque l'apprentissage du codage des figures n'est pas un objectif de l'école primaire. En revanche en 6^{ème} il y a autant d'élèves qui ont fonctionné dans l'un ou l'autre des paradigmes : l'apprentissage du codage des figures est institutionnalisé et a pu faire basculer les élèves de G1 vers G2 en les amenant à une conception plus abstraite du triangle isocèle. On peut aussi déplorer que seulement une moitié des élèves de 6^{ème} n'ait atteint ce niveau.

Si l'on regroupe d'une part les exercices 1.1. à 1.3. où l'énoncé était figural et d'autre part les exercices 1.4. et 1.5. où l'énoncé était littéral, on obtient les tableaux suivants.

CM2

	G1 + GX	G2	Total
1.1. à 1.3.	64	26	90
1.4. et 1.5.	27	22	49
Total	91	48	139

6^{ème}

	G1 + GX	G2	Total
1.1. à 1.3.	48	51	99
1.4. et 1.5.	31	28	59
Total	79	79	158

Le test du χ^2 appliqué à chacun de ces tableaux montre qu'il n'y a pas de lien entre les variables. Pour le tableau concernant les CM2, nous avons : χ^2 obs. = 3,26 ; ddl = 1 ; $k > 0,5$; χ^2 critique = 3,84. Pour les élèves de 6^{ème}, ce même test donne : χ^2 obs. = 0,24 ; ddl = 1 ; $k > 0,5$; χ^2 critique = 3,84. Autrement dit, le fait que l'énoncé soit présenté sous une forme ou sous une autre n'a pas d'incidence véritable sur le mode de fonctionnement des élèves. Pour autant, les élèves de CM2 ont été proportionnellement plus nombreux à fonctionner en G1 quand l'énoncé était figural que les élèves de 6^{ème} : 64 sur 90 en CM2 soit 70% et 48 sur 99 en 6^{ème} soit 48%. On peut donc dire que c'est la conception même du triangle isocèle qui a évolué entre CM2 et 6^{ème} : une conception inclusive de la définition des triangles isocèles est plus avancée chez les élèves de 6^{ème} qu'au CM2.

1.10.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
Ex. 1.1.	2	15	15	15	47
Ex. 1.2.	10	24	26	24	84
Ex. 1.3.	23	11	9	15	58
Ex. 1.4.	3	8	27	15	53
Ex. 1.5.	5	12	24	14	55
Total	43	70	101	83	297

Comme dans le tableau précédent c'est l'exercice 1.3. qui a été la source de difficultés majeures pour repérer le niveau de fonctionnement des élèves. C'est à cette occasion que l'on a le pourcentage le plus élevé d'élèves classés en N0 : 23 sur 58 soit 40%. Dans les exercices 1.1. et 1.2. les répartitions dans les niveaux connus sont équilibrées. Compte tenu de la forme de l'énoncé, le niveau d'identification-visualisation a été moins présent dans les exercices 1.4. et 1.5. En revanche, dans l'exercice 1.3., c'est le niveau N3 qui est le plus représenté quand dans les exercices 1.4. et 1.5. c'est le niveau N2. On peut donc penser que l'exercice 1.3. (mélange de dessins faits à main levée et tracés à la règle) est plus difficile que les exercices où les triangles isocèles sont décrits en mots. Et cette dernière activité amène davantage d'élèves à témoigner du niveau d'analyse que celles où les triangles sont codés qu'ils soient tracés à la règle ou dessiné à main levée. On pourrait déduire de ces remarques que la mise en mots est une étape favorisant l'accès à l'abstraction. Représente-t-elle une activité relevant de zone de développement proximal ? On peut le penser.

Est-ce que pour autant les élèves de CM2 et de 6^{ème} ont témoigné de niveaux de maîtrise comparables ?

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	23	43	41	32	139
6^{ème}	20	27	60	51	158
Total	43	70	101	83	297

On voit dans ce tableau que les niveaux auxquels les élèves de CM2 et de 6^{ème} ont pu fonctionner sont différents. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau montre qu'il y a un certain lien entre les variables ($\chi^2_{\text{obs.}} = 10,62$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,81). Les élèves de CM2 ont encore tendance à fonctionner au niveau d'identification-visualisation alors que certains élèves de 6^{ème} ont accès au niveau de déduction informelle. Si en CM2 c'est moins de 30% des élèves qui se situent au niveau d'analyse, en 6^{ème} ce sont 38% avec 60 élèves sur 158. C'est à ce niveau que nous avons le plus d'élèves de 6^{ème}.

Dans la mesure où, de façon significative, les élèves de CM2 et de 6^{ème} ne se répartissent pas de la même manière de façon significative, on peut s'intéresser à la forme de l'énoncé qui a été la plus efficace pour les uns et pour les autres. Pour cela nous avons regroupé d'une part l'ensemble des activités à support figural d'une part (exercices 1.1. à 1.3.) et à support littéral d'autre part (exercices 1.4. et 1.5.).

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
1.1. à 1.3.	18	35	17	20	90
1.4. et 1.5.	5	8	24	12	49
Total	23	43	41	32	139

D'un simple coup d'œil, on peut voir que les répartitions des élèves de CM2 sont très différentes selon la forme de l'énoncé. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme qu'il y a un lien entre les variables : χ^2 obs. = 16,87 ; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,81. Autrement dit la forme dans laquelle l'énoncé est donnée a une importance. En particulier, quand l'énoncé a été donné sous forme littérale, un plus grand nombre d'élèves a pu témoigner de la maîtrise du niveau d'analyse. Au contraire sous forme figurale, le plus grand nombre d'élèves se situe au niveau N1 d'identification-visualisation. On retrouve là le fait que le codage n'est pas un apprentissage qui relève de l'école primaire mais aussi l'hypothèse que la description de la figure puisse amener l'élève à un niveau de compétences supérieur.

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
1.1. à 1.3.	17	15	33	34	99
1.4. et 1.5.	3	12	27	17	59
Total	20	27	60	51	158

Alors même que l'effectif de la case N0-1.4.et 1.5. est réduit à 3, le test du χ^2 indique qu'il n'y a pas de lien entre les variables. Autrement dit, la forme de l'énoncé n'a pas l'importance à ce niveau de scolarité qu'elle a pu avoir au CM2. Quand nous regroupons les cases N0 et N1 où l'on décompte les élèves qui ont une connaissance élémentaire du triangle isocèle, on obtient le tableau suivant :

	N0+N1	N2	N3	Total
1.1. à 1.3.	32	33	34	99
1.4. et 1.5.	15	27	17	59
Total	47	60	51	158

Maintenant tous les effectifs sont supérieurs à 5, on peut donc appliquer le test du χ^2 . On a alors : χ^2 obs. = 2,45 ; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. Là encore il n'y a pas de lien entre les variables. Donc, pour les élèves de 6^{ème}, la forme de l'énoncé n'a pas d'incidence forte sur le niveau de van Hiele dont ils font preuve dans ce genre d'exercices.

Compte tenu du résultat obtenu plus tôt à propos des élèves de CM2 où la forme de l'énoncé avait une certaine influence sur le niveau de van Hiele maîtrisé, on peut facilement arriver à la conclusion que l'activité de description est nécessaire en 6^{ème} afin de favoriser le passage d'un niveau d'identification-visualisation à un niveau plus théorique du concept de triangle isocèle.

1.10.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

Nous allons maintenant comparer la répartition des élèves de chaque niveau de scolarité à l'intérieur des paradigmes et des niveaux de van Hiele pour l'ensemble des exercices sur le triangle isocèle.

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	17	6	0	23
N1	7	36	0	43
N2	0	25	16	41
N3	0	0	32	32
Total	24	67	48	139

	GX	G1	G2	Total
N0	11	9	0	20
N1	4	23	0	27
N2	0	32	28	60
N3	0	0	51	51
Total	15	64	79	158

De la comparaison de ces tableaux, il ressort que les effectifs les plus grands sont dans la case G1-N1 pour les CM2 et dans la case G2-N3 pour les 6^{ème}, respectivement 17 sur 139 soit 12% et 51 sur 158 soit 32%.

La répartition des élèves à l'intérieur de chaque paradigme n'est pas la même. Si l'on considère le paradigme G1, en CM2, l'effectif est de 36 au niveau N1 d'identification-visualisation, et de 25 au niveau N2 d'analyse soit 30% en moins, tandis qu'en 6^{ème}, les effectifs sont respectivement de 23 et 32 soit 39% en plus. En revanche, dans le paradigme G2, au niveau CM2, l'effectif est de 16 au niveau d'analyse et de 32 au niveau N3 de déduction informelle soit une augmentation de 100%. En 6^{ème} on passe de 28 à 51 soit aussi une augmentation de 82%. On peut donc en déduire que les élèves qui maîtrisent le niveau N3 donc fonctionnent en G2, sont deux fois plus nombreux que ceux qui ne maîtrisent que le niveau d'analyse dans ce paradigme.

De la même façon, si l'on observe la ligne N2 des tableaux, nous constatons un effectif moindre en G2 qu'en G1 en CM2 et en 6^{ème}. Mais le taux de baisse est différent. En effet, en CM2, on passe de 25 à 16 soit une baisse de 36% quand en 6^{ème}, on passe de 32 à 28 soit une baisse de 13%.

Il semble au vu de tous ces résultats que le chemin le plus favorable sur lequel l'enseignant doit accompagner l'élève dans son apprentissage soit le suivant : G1-N1 ; G1-N2 ; G2-N2 et G2-N3.

Le changement de paradigme peut s'opérer au niveau N2 d'analyse grâce à des activités de dessins en vraie grandeur, de décodage de dessins à main levée, de descriptions de figures. L'élève passe ainsi d'une conception très concrète de l'objet à une gestion plus abstraite.

1.11. Exercice 1.7.

Dans cet exercice, les élèves devaient retrouver des rectangles en reliant différents points dans la feuille.

29 élèves de CM2 et 32 élève de 6^{ème} ont fait cette activité. Les essais et erreurs sont nombreux sur certaines feuilles.

Nous avons codé de la manière suivante :

1.11.1. PARADIGMES :

G1 : Ce code a été attribué à tous les élèves qui ont relié des points, avec ou sans indication de mesure, d'usage de l'équerre ou de trace de compas. En particulier ces élèves n'ont pas clairement identifié le carré comme étant un rectangle particulier ou l'ont rejeté. Les élèves qui se sont trompés dans le repérage des sommets du grand rectangle n°3 sont aussi dans G1 : ils n'ont pas utilisé toutes les propriétés du rectangle pour vérifier leurs choix et la perception a été déterminante. D'une manière générale, nous avons considéré que les élèves qui n'ont trouvé que deux des quatre rectangles fonctionnaient en G1 : ils n'ont pas témoigné d'une connaissance des propriétés du rectangle qui relève de l'abstraction. Il a fallu beaucoup de temps à ces élèves pour trouver seulement deux rectangles ; donc ou bien ils ont fonctionné essentiellement « à vue », ou bien ils ont été très lents dans la vérification de ce qu'ils avaient trouvé, et il n'y a pas eu de décollement de la figure par rapport à un schéma de la réalité. On peut encore supposer que ces élèves n'ont pas travaillé sur l'objet géométrique à travers son dessin.

G2 : Dans ce paradigme les élèves ont indiqué qu'ils connaissaient les propriétés du rectangle et ont tracé le carré. Ils ont alors rejoint avec précision les sommets du grand rectangle n°3. Nous trouvons sur ces copies des indications de mesure de demi-diagonales, de tracés de diagonales, d'angles droits, etc. Nous n'avons pas les moyens de savoir avec certitude si les élèves qui ont dessiné le carré ont une conception inclusive des quadrilatères particuliers. Mais nous formons l'hypothèse que si les élèves ont dessiné le carré sans l'effacer ou sans

chercher à le distinguer des autres rectangles, c'est-à-dire sans considérer que ce pouvait ne pas être un rectangle, alors ils fonctionnent déjà en G2 de manière implicite. C'est donc le tracé du rectangle n°3 et du carré qui déterminent le fonctionnement explicite en G2.

Nous n'avons donc pas utilisé le code G0 puisque tous les élèves ont commencé une recherche en laissant des traces de crayon sur leur feuille.

Nous obtenons le tableau suivant.

	G1	G2	Total
CM2	27	2	29
6^{ème}	13	19	32
Total	40	21	61

Il apparaît tout de suite que les élèves de CM2 ne savent pas encore exploiter la connaissance qu'ils peuvent avoir d'un rectangle en tant que concept figural. Ils sont dans une très grande majorité, restés dans un fonctionnement propre à l'école primaire où la perception a une grande place et la précision des tracés est déterminante. Mais on peut aussi remarquer que seulement 19 sur 32 soit 60% des élèves de 6^{ème} de notre échantillon ont vraisemblablement fonctionné en G2 : soit ils ont laissé des traces indiquant qu'ils utilisaient les propriétés du rectangle, soit ils ont retrouvé les quatre rectangles dans le temps qui leur était imparti.

1.11.2. NIVEAUX DE VAN HIELE :

Tous ces élèves sont en N1 quand ils n'ont pas trouvé le grand rectangle (n°3) , en N2 quand ils l'ont trouvé et en N3 quand ils ont trouvé aussi le carré

Le code N0 n'a été utilisé que pour l'élève P52 dans la mesure les seules traces qui restent ou qui ont été effacées témoignent qu'il n'a pas été en mesure de retrouver un seul rectangle fût-il le rectangle n°1.

N1 : Nous avons considéré que les élèves à ce niveau d'identification-visualisation étaient ceux qui n'avaient retrouvé que les rectangles n°1 parallèle aux bords de la feuille et n°2 dont

l'orientation dans la feuille est donnée par le segment déjà dessiné pour le rectangle n°3. Ces élèves semblent avoir retrouvé ces rectangles à l'œil sans forcément avoir vérifié la pertinence de leurs tracés. Il n'y a aucune indication de mesure ou de tracé annexe.

N2 : Nous avons attribué ce code correspondant au niveau d'analyse, aux copies sur lesquelles, trois des quatre rectangles ont été retrouvés et sur lesquelles on trouve des indications de propriétés de rectangle mises en œuvre pour assurer les tracés. Nous avons aussi attribué ce code aux élèves qui n'ont identifié que deux rectangles mais qui ont clairement explicité la technique utilisée. Dans la très grande majorité des cas, le carré n'a pas été retenu.

N3 : A ce niveau de déduction informelle, les élèves ont retrouvé les quatre rectangles, indiqué les propriétés mises en œuvre. Nous avons même codé en N3 quelques élèves qui ont rapidement terminé le tracé du rectangle n°3 mais qui avaient indiqué au préalable qu'ils savent qu'un carré est un rectangle particulier. En effet, on peut facilement concevoir que pour certains de ces élèves le dessin du rectangle n'est que la représentation d'un rectangle idéal et que la précision du tracé n'est plus très importante.

La répartition des élèves selon les trois niveaux de van Hiele est la suivante :

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	23	4	1	29
6^{ème}	0	5	16	11	32
Total	1	28	20	12	61

On peut tout de suite constater que les niveaux maîtrisés par les deux groupes d'élèves sont différents.

Pour 23 élèves de CM2 sur 29 nous avons utilisé le code N1 alors que nous ne l'avons fait que pour 5 élèves de 6^{ème}. En effet, les élèves du primaire non seulement n'ont pas codé les figures et n'ont jamais dessiné les diagonales, propriété qui n'est pas au programme à ce niveau de scolarité. Il n'est donc pas étonnant qu'ils ne maîtrisent pas le niveau d'analyse où

les élèves témoignent de la connaissance d'un certain nombre de propriétés. On peut remarquer qu'un seul élève de CM2 a retrouvé les quatre rectangles.

La moitié du groupe des élèves de 6^{ème} reste encore au niveau d'analyse : ils ont une connaissance des propriétés du rectangle qui est essentiellement descriptive. 11 sur 32 soit 34% sont au niveau N3 de déduction informelle : pour ces élèves une conception inclusive des quadrilatères est vraisemblablement en place. Compte tenu des effectifs de certaines cases, nous devons regrouper les effectifs des colonnes N0 et N1 et N2 et N3, c'est-à-dire d'une part les élèves qui ont une connaissance purement visuelle du rectangle et d'autre part, ceux qui connaissent au moins les propriétés du rectangle ne serait-ce qu'en termes descriptifs. Nous obtenons alors le tableau suivant :

	N0 +N1	N2 + N3	Total
CM2	24	5	29
6^{ème}	5	27	32
Total	29	32	61

Il est clair que le niveau de van Hiele atteint par les élèves dépend du niveau de scolarité : les niveaux de van Hiele atteints par les élèves de 6^{ème} sont supérieurs aux niveaux des élèves de CM2. Au travers de cette activité, on voit nettement l'apport du cours de 6^{ème} et l'apprentissage des propriétés du rectangle, en particulier celles des diagonales. En effet, aucun élève de CM2 n'a utilisé le centre des rectangles pour retrouver les côtés de ceux-ci.

1.11.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	G1	G2	Total
N0	1		1
N1	23		23
N2	3	1	4
N3		1	1
Total	27	2	29

6^{ème}

	G1	G2	Total
N0			0
N1	5		5
N2	8	8	16
N3		11	11
Total	13	19	32

La comparaison des effectifs dans les cases de ces deux tableaux indique que la différence se situe aussi au niveau de la ligne N2 où les élèves de 6^{ème} se répartissent équitablement entre les deux paradigmes alors que sur les 3 élèves de CM2, 1 seul a été identifié comme fonctionnant en G2.

Dans la mesure où la répartition des élèves de 6^{ème} est plus étalée dans ce tableau, on peut penser qu'une telle activité est intéressante à mener en classe : certains élèves ont pu retrouver le carré sans pour autant l'identifier comme un rectangle et on pourrait considérer qu'ils ont

fonctionné en G2 sans s'en apercevoir. L'institutionnalisation permettrait alors d'explicitier au niveau du groupe classe ce qui pouvait être implicite au niveau de l'élève.

1.12. Exercices 1.6. et 1.8.

L'objet de ces exercices est l'étude du rectangle et des quadrilatères particuliers.

Dans l'exercice 1.6., à l'issue de l'activité, il ne reste normalement que deux quadrilatères : le rectangle qui est dessiné en suivant les bords de la feuille et le carré qui, lui, est en biais dans la feuille. Dans l'exercice 1.8., et dans la version du questionnaire T on retrouve les mêmes quadrilatères tandis que dans la version du questionnaire B on a en plus un cerf-volant dont deux côtés perpendiculaires sont parallèles aux bords de la feuille. La différence entre les exercices 1.6. et 1.8. se situe au niveau de la présentation de leur première partie numérique : dans l'exercice 1.6., une grille de nombres entiers est proposée à l'élève ; dans l'exercice 1.8., il n'y en a pas.

L'exercice 1.6. a été distribué à 26 élèves de CM2 et 29 élèves de 6^{ème}. Tous ont répondu à cette tâche. Nous avons donc 55 réponses exploitables.

L'exercice 1.8., lui, a été soumis à 25 élèves de CM2 et 30 élèves de 6^{ème}. Là aussi tous les élèves ont répondu. Nous avons donc 55 réponses exploitables. Toutefois, il existe deux versions de cet exercice pour ce qui concerne la partie géométrique : 13 élèves de CM2 et 14 élèves de 6^{ème} ont reçu la version associée au questionnaire T, soit un total de 27 réponses, et 12 élèves de CM2 et 16 élèves de 6^{ème} ont reçu la version associée au questionnaire B soit un total de 28 réponses.

Ces exercices comportant deux parties, l'une numérique l'autre géométrique, nous allons d'abord analyser les résultats de la partie numérique.

1.12.1. ANALYSE DE LA PREMIERE PARTIE

Dans cette première activité les élèves devaient trouver un nombre impair, situé dans la table des 5 et compris entre 29 et 43. Le seul nombre qui satisfasse ces trois conditions est 35.

Tout d'abord, il nous paraît intéressant de regarder si la présence de la grille de nombre dans la version 1.8. a été déterminante ou non.

Nous avons pour cela fait la distinction entre les élèves qui ont donné la bonne réponse « 35 », ceux qui ont répondu différemment en deux catégories : d'une part, 35 lui-même et d'autres nombres, la plupart du temps des multiples de 5 ou des nombres impairs, et d'autre part, d'autres nombres parmi lesquels on ne trouve pas 35. Tous niveaux scolaires confondus, nous obtenons la répartition suivante.

	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	Autres réponses	Total
1.6.	30	10	15	55
1.8.	38	5	12	55
Total	68	15	27	110

Globalement, on peut dire que les élèves ont proportionnellement été plus nombreux à trouver la bonne réponse quand on leur a proposé la grille de nombres puisqu'ils sont 38 à avoir trouvé la bonne réponse dans l'exercice 1.8. alors qu'ils ne sont que 33 dans le cas de l'exercice 1.6. soit 69% d'une part et 54% d'autre part. De plus il apparaît que les élèves ont été deux fois plus nombreux à proposer des réponses multiples autour de 35 quand il n'avaient pas la grille de nombres sous les yeux. Enfin, les réponses très éloignées de la réponse exacte sont moins nombreuses dans le cas de l'exercice 1.8. que dans le cas de l'exercice 1.6. comme si la présence de la grille de nombres avait été une aide non négligeable pour les élèves. Toutefois, le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique que les variables sont indépendantes (χ^2 obs. = 2,94 ; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99). Les réponses données par les élèves ne sont pas vraiment liées au fait que de la présence de la grille ou non.

Si l'on regarde la répartition des réponses par niveau à l'intérieur de chaque exercice puis sur l'ensemble de l'activité, on étudie les tableaux suivants.

Dans l'exercice 1.6. les élèves n'avaient pas de support pour faire leur recherche. Nous obtenons les résultats suivants.

Réponses à l'exercice 1.6.				
	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	Autres réponses	Total
CM2	11	7	8	26
6^{ème}	19	3	7	29
Total	30	10	15	55

On voit tout de suite que les élèves de CM2 ont eu plus de difficultés à singulariser 35 que les 6^{ème} : 42% en CM2 contre 66% en 6^{ème}.

Les élèves qui ont cité d'autres nombres en guise de réponse à la 2^{ème} question ont donné soit des multiples de 5 compris entre 29 et 43 soit les nombres impairs compris entre 29 et 43. Ces élèves n'ont donc pas appliqué les contraintes de manière conjonctive les unes par rapport aux autres.

Les élèves qui n'ont pas trouvé 35 à la 1^{ère} question ont en général trouvé 40 ou ont donné là encore des multiples de 5. Un élève de 6^{ème} a même proposé 31,5 ! De tels élèves n'ont à l'évidence pas été en mesure de gérer au moins deux des trois contraintes imposées.

Dans l'exercice 1.8. les résultats sont les suivants.

Réponses à l'exercice 1.8.				
	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	pas « 35 »	Total
CM2	17	3	5	25
6^{ème}	21	2	7	30
Total	38	5	12	55

Dans cette version de l'exercice, une grille de nombres de 0 à 50 était proposée pour que les élèves puissent écrire s'ils le désiraient les nombres dont ils auraient besoin.

On peut tout de suite noter que le nombre d'élèves de CM2 qui ont trouvé l'unique bonne réponse est plus élevé : 68% et reste stable en 6^{ème} : 70%. On peut alors se poser la question de savoir si les élèves de CM2 ont été aidés par la l'usage de la grille ou non.

En observant les traces laissées par les élèves sur la grille, on obtient l'analyse des résultats suivante :

Usage de la grille de nombres				
	aucun	partiel	total	Total
CM2	15	6	4	25
6^{ème}	9	5	16	30
Total	24	11	20	55

La colonne « partiel » correspond à l'écriture de quelques nombres dans la grille sans que celle-ci soit complétée.

On voit que les élèves de CM2 n'ont pratiquement pas utilisé la grille. Ce sont plutôt les élèves de 6^{ème} qui l'ont fait. Dans quelle mesure cette grille a-t-elle permis aux élèves d'arriver à la bonne réponse ? Pour cela nous avons croisé les résultats des élèves qui avaient trouvé

« 35 » comme solution unique à la première question et l'usage qu'ils avaient fait de la grille. Nous obtenons le tableau suivant :

Usage de la grille pour trouver « 35 » comme solution unique				
	aucun	partiel	total	Total
CM2	12	3	2	17
6^{ème}	6	4	11	21
Total	18	7	13	38

Force est de constater que ce sont les élèves de 6^{ème} qui ont le plus bénéficié de la présence de la grille. Pour la moitié d'entre eux, le remplissage de la grille est associé à la réponse exacte. On ne peut dire si la grille a été complétée après la recherche de la réponse et en a permis une vérification ou si, au contraire, c'est au cours du remplissage de la grille que la réponse a été trouvée. En revanche rares ont été les élèves de CM2 à fonctionner de l'une ou l'autre de ces deux manières. La différence est significative si l'on considère d'une part le fait que l'élève n'a fait aucun usage de la grille de nombres et d'autre part le fait qu'il l'a utilisée totalement ou en partie. Le tableau sur lequel nous appliquons le test du khi deux est le suivant :

Usage de la grille de nombres pour trouver « 35 »			
	Aucun	partiel ou total	Total
CM2	12	5	17
6^{ème}	6	15	21
Total	18	20	38

Le test du χ^2 confirme le lien entre les variables ($\chi^2_{\text{obs.}} = 6,65$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Les élèves de CM2 qui ont donné une bonne réponse, l'ont plutôt fait sans le support de la grille, ce qui ne fut pas le cas des élèves de 6^{ème}.

On peut aussi remarquer que, dans l'exercice 1.6., en CM2, 11 élèves sur 26 ont trouvé « 35 » quand ils sont 17 sur 25 dans l'exercice 1.8. et que seulement 2 d'entre eux ont utilisé la

grille. On peut donc en conclure pour les élèves de CM2 que la présence de la grille de nombres n'a pas été de grand intérêt. Les élèves de 6^{ème} n'ont pas eu le même comportement. Dans l'exercice 1.6., ils sont 19 sur 29 à avoir trouvé « 35 » et dans l'exercice 1.8., ils sont 21 mais 15 d'entre eux ont partiellement ou totalement utilisé la grille de nombres.

L'intérêt de cette première partie était de savoir si les élèves, dans le domaine du numérique, pouvaient gérer le respect de trois contraintes à la fois. Pour cela nous allons réunir les résultats obtenus dans chacun des exercices.

Exercices 1.6. et 1.8.				
	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	pas « 35 »	Total
CM2	28	10	13	51
6^{ème}	40	5	14	59
Total	68	15	27	110

Le test du χ^2 indique qu'il n'y a pas de différence significative entre les réponses des élèves de CM2 et de 6^{ème} ($\chi^2_{\text{obs.}} = 3,26$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99). On se limitera à remarquer que les élèves de 6^{ème} ont été plus nombreux (68%) que les élèves de CM2 (55%) à trouver la réponse unique, autrement dit à gérer les trois contraintes. 10 élèves de CM2 n'ont su gérer qu'au maximum deux des trois contraintes quand ils n'ont été que 5 en 6^{ème}. On peut aussi constater qu'environ un quart des élèves des deux niveaux n'a pas su répondre à cette première partie de l'exercice. Ou à l'inverse, on peut conclure que les trois quarts des élèves qui ont participé à cette recherche, ont témoigné d'une bonne compréhension d'une telle activité : ils ont su gérer au moins deux des trois contraintes qui leur étaient imposées.

Sachant que les transferts de compétences d'un domaine à l'autre n'ont rien d'automatiques, on peut s'attendre à obtenir des résultats différents dans la partie géométrique de l'exercice quand bien même les contraintes étaient présentées sous la même forme.

1.12.2. ANALYSE DE LA DEUXIEME PARTIE

Il s'agissait pour les élèves d'identifier parmi tous les dessins réalisés à la règle mais sans codage, ceux qui représentaient des quadrilatères ayant leurs côtés de la même longueur deux à deux et ayant au moins un angle droit. Les dessins ne remplissant pas ces trois conditions devaient être rayés.

Dans les exercices 1.6. et 1.8. (questionnaire T), seuls restaient le rectangle n°5 et le carré n°4. Dans l'exercice 1.8. (questionnaire B), il restait en plus le cerf-volant n°10.

Avant toute étude des résultats, il nous paraît important de noter qu'en CM2, deux élèves seulement ont écrit sur leur feuille les mesures ou les remarques qu'ils faisaient à propos des dessins. L'un (P181) a noté tous les angles droits qu'il a trouvés et indiqué certaines mesures de longueurs. L'autre (P186) a indiqué les mesures des côtés du triangle équilatéral en précisant qu'il s'agissait d'un quadrilatère, celles des côtés du carré, du triangle isocèle rectangle et du parallélogramme. Les autres élèves se sont contentés de rayer les dessins qui ne convenaient pas selon leurs critères.

De la même façon seulement deux élèves de 6^{ème} ont laissé des traces. L'un d'entre eux (S104) indiqué les mesures qu'il a prises, l'autre (S176) a codé les côtés de même longueur et les angles droits. Quelques uns ont laissé des marques de mesure de côtés. Mais la très grande majorité des élèves n'a laissé aucune indication quant à la démarche suivie pour arriver à sa conclusion.

1.12.3. PARADIGMES

GX : quand bien même pour le traitement statistique, les élèves dont on parle ici seront intégrés au groupe des élèves réunis sous le code G1, nous avons réservé ce code aux élèves chez lesquels nous n'avons pas trouvé de cohérence dans le respect d'au moins une contrainte. Cet artifice de codage devrait nous permettre de faire le rapprochement avec les élèves qui n'ont pas trouvé 35 comme réponse possible dans la partie numérique.

G1 : Les élèves auxquels nous nous adressons ont tous un minimum de connaissances et de compétence pour fonctionner dans G1. Ils ont déjà rencontré tous les mots de vocabulaire utilisés dans la consigne. Nous n'avons en revanche aucune certitude quant à la précision des concepts associés à ces mots de vocabulaire. Nous associerons donc le code G1 à tout élève qui n'arrive pas à gérer les trois contraintes simultanément. Il y a cependant des nuances à apporter à l'intérieur du paradigme G1. G1 est un mode de fonctionnement mais celui-ci peut être plus ou moins abouti. En effet, deux élèves peuvent se voir attribuer le même codage mais en être à des stades de développements très variables. Ainsi un élève qui ne maîtrise qu'une seule des contraintes tout au long de la question et un autre qui aura repéré le rectangle à l'exclusion du carré seront tous les deux intégrés au paradigme G1 alors que vraisemblablement ils ont des niveaux de compétence en géométrie très différents. C'est pourquoi les niveaux de van Hiele peuvent nous apporter un éclairage différent.

G2 : quand bien même les outils nécessaires à l'identification des quadrilatères relèvent de G1, seuls les élèves qui gèrent simultanément les trois contraintes, peuvent être considérés comme fonctionnant dans G2. En effet les dessins proposés ont été dessinés à la règle et à l'équerre et sans codage ; une telle tâche relève donc de G1. Toutefois pour ne garder que les quadrilatères acceptables, l'élève doit accepter l'idée que les contraintes ne sont pas exclusives les unes des autres, donner son sens à l'expression « au moins un angle droit » en ne la confondant pas avec « exactement un seul angle droit » et considérer que l'expression « leurs côtés ont la même longueur deux à deux » n'est pas exclusive de « quatre côtés de la même longueur ». Aussi pour l'ensemble de ces raisons, nous considérons qu'un élève qui est en mesure de respecter toutes ces contraintes fonctionne plutôt en G2 qu'en G1 : il est tout prêt d'avoir ou a même déjà une conception inclusive des propriétés des figures. Ainsi dans l'exercice 1.6., nous n'avons pas le moyen de savoir si les élèves qui ont gardé le carré l'ont fait en connaissance de cause ou en ignorant que ses quatre côtés avaient la même longueur. Cependant les élèves auxquels nous attribuons le code G2 sont ceux qui ont laissé sans rature le carré n°4 et le rectangle n°5, voire seulement le carré. De plus les élèves qui, dans l'exercice 1.8. (questionnaire B), considèrent que le rectangle et le cerf-volant sont des figures qui conviennent mais qui ont rayé le carré n°4 sont vraisemblablement déjà dans G2. En effet ces derniers ont été en mesure de gérer conjointement, au moins sur une figure mal connue, les contraintes fixées dans l'énoncé.

La répartition des élèves ayant répondu à la tâche 1.6. est la suivante :

Exercice 1.6.

	GX	G1	G2	Total
CM2	9	9	8	26
6^{ème}	4	7	18	29
Total	13	16	26	55

Les élèves de CM2 sont proportionnellement plus nombreux que les élèves de 6^{ème} dans le respect d'au moins une contrainte : 9 sur 26 soit 35% contre 4 sur 29 soit 14%.

La répartition des élèves entre les deux paradigmes est très différente. Il y a environ 70% d'élèves de CM2 dont on peut dire qu'ils ont fonctionné dans G1 tandis qu'en 6^{ème}, ils sont 62% à avoir fonctionné dans G2.

Dans le questionnaire T de l'exercice 1.8., les dessins proposés aux élèves sont les mêmes que les précédents. Le codage a donc été fait dans les mêmes conditions. Nous obtenons les tableaux suivants :

Exercice 1.8. T

	GX	G1	G2	Total
CM2	1	3	9	13
6^{ème}	1	6	7	14
Total	2	9	16	27

On peut remarquer tout d'abord que le nombre des élèves qui ont été classé en GX est nettement plus bas que dans l'exercice précédent. On notera aussi que la proportion d'élèves de CM2 auxquels nous avons attribué le code G2 est nettement plus importante puisque l'on passe de 8 sur 26 soit 30% à 9 sur 13 soit 69%. Mais ce sont là des effectifs très réduits et ne sauraient être analysés seuls. En revanche l'ensemble des dessins proposés étant le même que dans l'exercice 1.6, il nous paraît judicieux de compiler l'ensemble des résultats.

Exercices 1.6. et 1.8. T

	GX	G1	G2	Total
CM2	10	12	17	39
6^{ème}	5	13	25	43
Total	15	25	42	82

Les résultats sont maintenant un peu plus nuancés. Les élèves de CM2 se répartissent de manière plus équilibrée entre les deux paradigmes avec un rapport de 1,4 entre les deux paradigmes quand les élèves de 6^{ème} se situent dans un rapport de 2 pour 1. Mais la différence entre les deux n'est pas significative si l'on se réfère au test du χ^2 : $\chi^2_{\text{obs.}} = 3,04$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99.

1.12.4. NIVEAUX DE VAN HIELE

N0 : nous réserverons ce code aux élèves qui n'ont pas réussi à respecter de manière cohérente l'une ou l'autre des contraintes sur l'ensemble des dessins. En effet de tels élèves se sont sans doute perdus dans les allers-retours entre les différentes contraintes et leur respect dans l'un ou l'autre des dessins.

N1 : identification-visualisation. Nous considérons que les élèves à ce niveau sont capables de respecter certaines contraintes. Nous avons donc regroupé sous ce code les élèves pour qui nous avons identifié qu'ils n'avaient pu respecter qu'une ou deux des trois contraintes.

N2 : analyse. Nous savons qu'à ce niveau les propriétés des figures ne sont pas organisées les unes par rapport aux autres mais l'élève est capable de les lister. Ceci sera caractérisé par l'acceptation du rectangle dans les deux exercices et du cerf-volant dans le questionnaire B de l'exercice 1.8. mais par le rejet du carré puisqu'il a ses quatre côtés de la même longueur.

N3 : déduction informelle. A ce niveau, les élèves auront rayé tous les dessins à l'exception du rectangle et du carré pour les deux exercices et du cerf-volant pour le questionnaire B de l'exercice 1.8..

Les niveaux de van Hiele que nous avons attribués aux se répartissent ainsi.

Exercice 1.6.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	9	8	2	7	26
6^{ème}	5	2	6	16	29
Total	14	10	8	23	55

Dans ce tableau, il apparaît que l'effectif le plus grand concerne les élèves de 6^{ème} qui ont été capables de garder le rectangle et le carré. Il s'agit de la moitié d'entre eux. Si l'on prend en compte d'une part les 6 élèves qui ont été considérés dans N2, c'est-à-dire ceux qui ont sélectionné soit le rectangle soit le carré et d'autre part les 16 élèves à qui ont attribué le niveau N3, on arrive à 22 élèves sur 29 soit 76% de l'effectif de 6^{ème} qui a su gérer simultanément l'ensemble des trois contraintes. On ne saurait négliger pour autant que 5 élèves (un sixième de notre échantillon) n'ont pas su gérer de façon cohérente ne serait-ce que l'une des contraintes de la consigne.

En CM2, c'est un tiers des élèves qui est dans ce cas ; c'est dire combien la question a été déroutante pour eux. Pour autant en regroupant les 2 élèves de niveau N2 et les 7 élèves de niveau N3, nous obtenons 9 élèves sur 26 soit encore un tiers de notre échantillon qui lui aussi a su gérer l'ensemble des trois contraintes.

Les résultats obtenus dans l'exercice 1.8. (questionnaire T) sont les suivants :

Exercice 1.8. T

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	1	2	9	13
6^{ème}	1	1	6	6	14
Total	2	2	8	15	27

La première impression est que les résultats semblent très différents des résultats précédents. Là encore les effectifs de chaque case sont réduits et doivent être ajoutés aux effectifs obtenus dans le cadre de l'exercice 1.6. pour avoir une vue d'ensemble plus fiable. Nous obtenons alors le tableau suivant.

Exercice 1.6. et 1.8. T

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	10	9	4	16	39
6^{ème}	6	3	12	22	43
Total	16	12	16	38	82

L'analyse suggérée par les résultats à l'exercice 1.6. se précise.

En CM2, c'est un quart des élèves (10 sur 39) pour qui nous n'avons pas réussi à identifier une cohérence dans le respect des trois contraintes. A l'opposé c'est 4 et 16 soit 20 élèves donc la moitié de notre échantillon qui a su gérer l'ensemble des trois contraintes sans pour autant être toujours en mesure de la mener à son terme. Rappelons que nous avons attribué le niveau N2 aux élèves qui ont gardé soit le rectangle soit le carré mais pas les deux puisque ceci correspond au niveau N3 de déduction informelle. A ce dernier niveau nous avons 16 élèves soit 38% de notre échantillon alors que ce n'est pas nécessairement le niveau attendu en fin d'école primaire.

En 6^{ème} la situation est très différente puisque nous avons utilisé le code N0 pour 6 élèves soit un élève sur 7. En ajoutant les 12 élèves en N2 aux 22 élèves en N3, nous obtenons 34 élèves sur 43 soit près de 80% de notre échantillon qui a su maîtriser l'ensemble des contraintes. On peut aussi remarquer que la moitié des élèves de 6^{ème} sont en N3 (niveau de déduction informelle) c'est-à-dire qu'ils ont géré l'ensemble des contraintes et leurs conséquences de manière inclusive.

Si l'on regroupe les effectifs des colonnes N0 et N1 d'une part, N2 et N3 d'autre part, on obtient le nouveau tableau suivant :

	N0 + N1	N2 + N3	Total
CM2	19	20	39
6^{ème}	9	34	43
Total	28	54	82

On peut alors utiliser le test du χ^2 pour savoir si les niveaux atteints par les élèves sont liés à leur niveau de scolarité. Les résultats sont les suivants : $\chi^2_{\text{obs.}} = 7,02$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; $\chi^2_{\text{critique}} = 3,84$. Il y a donc une certaine dépendance entre le niveau de van Hiele et le niveau de scolarité ; les élèves de 6^{ème} ayant atteint , et cela semble logique, des niveaux de maîtrise plus élevés que les élèves de CM2.

1.12.5. CROISEMENT DES TABLEAUX

En ajoutant les effectifs des résultats obtenus à propos des exercices 1.6. et 1.8. T , le croisement entre les paradigmes et les niveaux de van Hiele se présente ainsi.

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	10			10
N1		9		9
N2		3	1	4
N3			16	16
Total	10	12	17	39

	GX	G1	G2	Total
N0	5	1		6
N1		3		3
N2		9	3	12
N3			22	22
Total	5	13	25	43

La comparaison de ces deux tableaux amène les commentaires suivants.

Dans le paradigme G1, les répartitions des élèves de CM2 et de 6^{ème} sont très différentes. En effet si les élèves de CM2 sont trois fois plus nombreux dans le niveau N1 d'identification-visualisation que dans le niveau N2 d'analyse, c'est exactement l'inverse qui se produit en 6^{ème} où les élèves sont trois fois plus nombreux dans le niveau N2 que dans le niveau N1. Une telle remarque pourrait suggérer que l'apprentissage des propriétés des figures en termes descriptifs est une étape qui peut avoir eu lieu en 6^{ème} mais qui tend à être absent à l'école primaire.

Dans le paradigme G2, les élèves de chaque niveau sont, à une très grande majorité, au niveau N3 de déduction informelle. On peut aussi reconnaître que les conditions dans lesquelles nous avons codé une réponse en G2-N2 étaient particulièrement fortes : l'élève devait avoir accepté le carré mais rayé le rectangle ainsi que les autres figures et avoir laissé des traces de codage ou de connaissance des propriétés.

Si l'on regarde les lignes des tableaux, il apparaît que sur la ligne N2 (niveau d'analyse), les élèves de chaque niveau sont trois fois plus nombreux en G1 qu'en G2 : les élèves ont eu plus de facilité à respecter deux des trois contraintes sur des dessins qui ne représentaient qu'eux-mêmes. Mais ces effectifs sont faibles et donc peu fiables.

1.13. Exercices 1.8 (questionnaire T) et 1.8. (questionnaire B)

La différence entre ces deux versions est la présence d'un cerf-volant dans le questionnaire B, absent du questionnaire T. Cette figure inconnue de la plupart des élèves a sans doute été

source d'interrogations lors de l'expérimentation. Les élèves n'ont pas exprimé ces interrogations.

1.13.1. PARADIGMES

Exercice 1.8.T				
	GX	G1	G2	Total
CM2	1	3	9	13
6 ^{ème}	1	6	7	14
Total	2	9	16	27

Exercice 1.8.B				
	GX	G1	G2	Total
CM2	3	3	6	12
6 ^{ème}	1	3	12	16
Total	4	6	18	28

La seule différence entre ces deux tableaux réside dans le fait que le moitié des élèves de CM2 ont vraisemblablement fonctionné dans G2 dans le questionnaire B quand ils n'étaient qu'un quart dans le questionnaire T. Mais nous avons vu que cela n'avait pas été le cas pour l'exercice 1.6 donc on peut dire que sur le questionnaire B les élèves ont fonctionné dans les mêmes paradigmes que dans l'autre version de l'exercice. Pour ce qui concerne les 6^{ème} là encore on retrouve que plus d'un élève sur deux a fonctionné dans G2 sans pour autant atteindre les proportions que nous avons eu précédemment à savoir deux sur trois. L'effet de la variable didactique liée à la présence du cerf-volant dans le questionnaire B n'a donc pas eu de conséquences remarquables sur les paradigmes utilisés par les élèves.

1.13.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

Exercice 1.8.T					
	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	1	2	9	13
6 ^{ème}	1	1	6	6	14
Total	2	2	8	15	27

Exercice 1.8.B					
	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	3	2	5	2	12
6 ^{ème}	1	1	9	5	16
Total	4	3	14	7	28

La première constatation que l'on puisse faire et qui était attendue, c'est que le code N3 a été utilisé pour 7 élèves dans le questionnaire B, qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème}, soit un quart de

l'effectif, quand il a été utilisé pour 15 d'entre dans le questionnaire T soit plus de la moitié. Ce qui tend à prouver, comme on pouvait s'y attendre sur cet exemple limité, que l'attribution du code N3 dans le questionnaire B a été plus difficile que dans le questionnaire T. En effet le code N3 a été attribué aux élèves qui ont gardé les seuls quadrilatères convenables soit le rectangle et le carré dans le cas de l'exercice 1.8.T soit le rectangle, le carré et le cerf-volant dans l'exercice 1.8.B. Toutefois, ce sont les élèves de CM2 qui ont eu le plus de difficultés dans cette activité puisqu'ils ne sont que 2 à avoir laissé les trois « bons » quadrilatères.

La différence apparaît dans la répartition des niveaux N2, N3 entre les élèves de CM2 et les 6^{ème}. En effet, nous avons pu attribuer le code N3 à 9 élèves de CM2 dans le questionnaire T, soit plus de la moitié d'entre eux, ce qui est légèrement supérieur à ce que nous avons trouvé quand nous avons étudié l'ensemble de l'activité (exercice 1.6. et exercice 1.8.T). En revanche nous n'avons trouvé que 2 élèves à ce niveau dans le questionnaire B. Il nous paraît intéressant à ce moment de recopier le commentaire de chacun de ces deux élèves.

P35 : « carré, le rectangle, le losange » alors qu'il a rayé le losange propre mais gardé le cerf-volant.

P60 : « Leur nom est : le carré, le rectangle et je ne connais pas le nom de la figure restante. ».

L'écart est moindre quand on observe les codages réservés à l'ensemble des élèves de 6^{ème}. En effet, dans le questionnaire T, nous avons utilisé le code N3 6 fois, soit dans près de la moitié des cas, à l'image de ce qui s'est passé sur l'ensemble de l'activité (exercice 1.6 et 1.8.T). Nous avons pu attribuer ce même code N3 à 5 élèves de 6^{ème} soit près d'un tiers d'entre eux. Là encore, les commentaires des élèves sont intéressants.

S33 : « rectangle, le carré et le ... » ;

S60 et S66 : « rectangle, carré » alors que les dessins qu'ils ont gardés sont très clairement les bons ; S223 n'a rien écrit ;

S245 : « rectangle, carré, bizarre ». On est bien certain que ces élèves ont géré l'ensemble des contraintes de manière inclusive.

1.13.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	3			3
N1		2		2
N2		1	4	5
N3			2	2
Total	3	3	6	12

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	1			1
N1		1		1
N2		2	7	9
N3			5	5
Total	1	3	12	16

La différence entre ces deux tableaux se situe essentiellement dans la case G2-N2 où les élèves ont identifié deux des trois quadrilatères attendus. Nous avons 7 élèves de 6^{ème} sur 16 dans ce cas soit près de la moitié quand il n'y en a que 4 sur 12 en CM2 soit le tiers. Mais les effectifs de ces tableaux sont très réduits et à cause de cela ils seront intégrés aux effectifs des tableaux précédents.

Si l'on regroupe les effectifs des tableaux de croisement des exercices 1.6. et 1.8. versions T et B, on obtient :

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	13			13
N1		11		11
N2		4	5	9
N3			18	18
Total	13	15	23	51

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	6	1		7
N1		4		4
N2		11	10	21
N3			27	27
Total	6	16	37	59

On distingue deux différences majeures.

Dans la case GX-N0, les élèves de CM2 sont proportionnellement plus nombreux que les 6^{ème} : 13 sur 51 soit 25% en CM2 contre 6 sur 59 en 6^{ème} soit 10%.

Dans la colonne G1, les répartitions des élèves sont inverses l'une de l'autre : ils sont trois fois plus nombreux en CM2 à être au niveau N1 qu'au niveau N2 quand c'est le contraire en 6^{ème}.

Enfin, on peut remarquer que, en CM2, c'est environ un tiers des élèves de notre échantillon qui se situe dans la case G2-N3 soit dans un mode de fonctionnement théorique où les dessins ne sont que des représentants d'objets idéaux et les propriétés géométriques s'organisent déductivement les unes des autres. En 6^{ème}, nous avons la moitié de l'échantillon à ce niveau. De plus, les proportions d'élèves se situant dans le niveau N2 étant très différentes entre les CM2 et les 6^{ème}, nous pouvons émettre l'hypothèse que l'apprentissage des propriétés des figures géométriques en dehors de toute organisation hypothético-déductive de celles-ci, soit une étape favorisant l'apprentissage du raisonnement abstrait.

Il est bien évident que nous devons confronter ces résultats avec ceux que nous avons obtenus dans la partie numérique de l'activité. Pour cela nous allons croiser les réponses des élèves à la 1^{ère} partie de l'activité avec chacun des éléments d'analyse de l'activité géométrique en commençant par les paradigmes puis avec les niveaux de van Hiele

1.13.4. Comparaison des résultats « arithmétique » - « géométrie » dans les exercices 1.6. et 1.8. .

PARADIGMES

paradigme GX dans 1.6. + 1.8.

	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	6	4	3	13
6^{ème}	3	2	1	6
Total	9	6	4	19

Rappelons que nous avons rangé sous cette étiquette les copies dans lesquelles nous n'avons pas trouvé de cohérence à propos du respect des contraintes. Cependant, autant pour les élèves de CM2 que pour les élèves de 6^{ème}, il apparaît que la moitié d'entre eux a été en mesure de répondre correctement à la question de la 1^{ère} partie. C'est dire combien la gestion des contraintes sur les nombres s'est révélée plus facile que sur les propriétés géométriques.

paradigme G1 dans 1.6. + 1.8.

	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	9	5	1	15
6^{ème}	11	4	1	16
Total	20	9	2	31

La proportion d'élèves ayant donné la bonne réponse numérique augmente quand on s'intéresse au paradigme G1 : elle passe à 60% en CM2 et à 68% en 6^{ème}.

paradigme G2 dans 1.6.+1.8.

	« 35 » seul	« 35 » et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	13	8	2	23
6ème	26	6	5	37
Total	39	14	7	60

Cette proportion reste relativement stable quand on se limite aux élèves auxquels on a attribué le code G2. Avec 13 élèves de CM2 sur 23 nous avons là 57% de l'échantillon, et 26 élèves de 6^{ème} représentent 70% de l'échantillon. On pourra remarquer qu'en 6^{ème} il y a 5 élèves qui n'ont pas donné 35 comme réponse dans la partie numérique alors qu'ils ont réussi dans leurs choix de quadrilatères. Les réponses numériques qu'ils ont faites sont : 30 ; 29,5 – 31 – 31,5 ; 30 – 40 ; 39. Elles sont donc assez éloignées de la réponse attendue.

Dans la mesure où les réponses des élèves de CM2 ne sont pas nettement différentes des réponses des élèves de 6^{ème}, nous allons dorénavant les regrouper afin d'étudier d'autres aspects comme un lien éventuel entre la réponse donnée dans la partie numérique et les choix faits dans la partie géométrique tant du point de vue des paradigmes que des niveaux de van Hiele.

Y a-t-il un lien entre le paradigme de fonctionnement en géométrie et le fait d'avoir donné la bonne réponse à la 1^{ère} question de l'activité ?

	GX	G1	G2	Total
autre réponse	4	2	7	13
"35" et d'autres nombres	6	9	14	29
"35" seul	9	20	39	68
Total	19	31	60	110

Dans la mesure où certains effectifs sont très faibles, nous allons, comme nous l'avons fait pour les analyses précédentes regrouper les effectifs des colonnes GX et G1. Le tableau est alors le suivant :

	GX+G1	G2	Total
autre réponse	6	7	13
"35" et d'autres nombres	15	14	29
"35" seul	29	39	68
Total	50	60	110

Si l'on applique le test du χ^2 à ce tableau nous avons les résultats suivants : : $\chi^2_{\text{obs}} = 0,68$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; $\chi^2_{\text{critique}} = 5,99$. On ne peut donc pas dire qu'il y ait un lien entre les réponses données dans la partie numérique et le paradigme de fonctionnement en géométrie. On peut donc extrapoler en disant que la maîtrise des contraintes, si elle est assez bien gérée à propos des nombres, l'est nettement moins à propos de la géométrie sans qu'il y ait un lien de dépendance entre les deux.

A-t-on le même genre de résultats si l'on considère les niveaux de van Hiele ?

NIVEAUX DE VAN HIELE

niveau N0

	"35" seul	"35" et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	6	4	3	13
6^{ème}	3	2	2	7
Total	9	6	5	20

De ce tableau il ressort que la moitié des élèves de CM2 qui n'ont pas su respecter de manière cohérente au moins une contrainte en géométrie et auxquels on a attribué le niveau N0, ont cependant trouvé « 35 » comme solution unique à la 1^{ère} question. On peut aussi dire qu'il y en a la moitié qui n'ont pas trouvé que « 35 » était une solution unique ou qui ont carrément proposé d'autres nombres. La situation est exactement la même en 6^{ème}. La similitude est assez frappante. Toutefois, il serait hasardeux de tirer des conclusions de cette expérience : les effectifs sont trop réduits.

niveau N1

	"35" seul	"35" et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	7	3	1	11
6^{ème}	1	3	0	4
Total	8	6	1	15

Ce tableau concerne donc les élèves auxquels on a attribué le niveau N1 d'identification-visualisation. Ils ont donc été capables de respecter au moins l'une des contraintes proposées dans la partie géométrique. Mais dans la partie numérique ils n'ont globalement pas été plus performants que les élèves auxquels nous avons attribué le code N0. Toutefois et malgré un tout petit effectif en 6^{ème}, on peut remarquer que les élèves de CM2 ont su majoritairement (64%) donner « 35 » en solution unique dans la partie numérique tandis que seulement un quart des élèves de 6^{ème} est dans ce cas.

Globalement, la moitié des élèves auxquels nous avons attribué le code N1 a su trouver « 35 » comme solution unique. Dans l'autre moitié, parmi les élèves qui ont proposé d'autres nombres, les plus nombreux sont ceux qui ont listé les multiples de 5 compris entre 29 et 43. Deux élèves de CM2 ont donné la liste des nombres impairs. Globalement on peut dire de ces élèves qu'ils ont eu en arithmétique la même attitude qu'en géométrie, à savoir qu'ils n'ont pas pu respecter trois contraintes simultanément. Les élèves qui n'ont pas trouvé « 35 » soit n'ont pas donné de réponse du tout soit ont proposé un ou des nombres comme 30, 40 voire même 39. Là encore pour ces élèves le respect des trois contraintes était un problème trop complexe : ils n'en ont respecté qu'une ou deux.

niveau N2

	"35" seul	"35" et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	4	5	0	9
6^{ème}	17	3	1	21
Total	21	8	1	30

Ce qui apparaît tout de suite dans ce tableau c'est le fait que la colonne « autre réponse » soit pratiquement vide : tous les élèves, ou presque, à ce niveau de compétence en géométrie ont su gérer au moins l'une des trois contraintes imposées dans l'activité numérique. Si on ne peut pas vraiment parler de transfert de compétence dans le cadre de telles activités, il n'en reste pas moins que les élèves qui sont au niveau d'analyse et sont capables d'identifier toutes les propriétés d'une figure sans pour autant être en mesure des les organiser les unes par rapport aux autres, ont su respecter au moins une sinon deux des trois contraintes dans la partie numérique. On constate ici que seulement la moitié des élèves de CM2 a trouvé « 35 » comme solution unique tandis que ce sont 17 élèves sur 21 qui ont réussi en 6^{ème}, soit plus de 80%. Les élèves de 6^{ème} semblent avoir été plus performants ici à propos des nombres que des figures géométriques.

niveau N3

	"35" seul	"35" et d'autres nombres	autre réponse	Total
CM2	11	5	2	18
6^{ème}	19	4	4	27
Total	30	9	6	45

Ce tableau concerne tous les élèves qui ont complètement réussi la partie géométrique de l'activité. On voit que les deux tiers d'entre eux (30 sur 45) ont aussi trouvé la bonne réponse

à la 1^{ère} question. La répartition est légèrement différente entre les deux groupes d'élèves : 11 sur 18 en CM2 soit 61% et 19 sur 27 en 6^{ème} soit 70%. De tels résultats suggèrent que la gestion des contraintes multiples qui a été réussie ici en géométrie, est aussi plutôt réussie sur les nombres. En revanche on peut noter que quelques élèves ont aussi proposé d'autres nombres solutions dans le cadre de la réponse à la 2^{ème} question. Ils sont certes très peu nombreux mais cela peut surprendre dans la mesure où nous n'avons qu'un élève dans ce cas dans le tableau précédent.

Y a-t-il vraiment un lien entre les niveaux de van Hiele et les réponses données dans la 1^{ère} partie ?

	N0	N1	N2	N3	Total
autre réponse	5	1	1	6	13
"35" et d'autres nombres	6	6	8	9	29
"35" seul	9	8	21	30	68
Total	20	15	30	45	110

On peut facilement conjecturer qu'il n'y a pas de lien entre le niveau de van Hiele atteint et la réussite à la première question. En effet, si l'on regarde les lignes du tableau, les effectifs se répartissent de façon très variable. D'une part il y a autant d'élèves qui ont donné d'autres réponses et qui sont au niveau N0 ou au niveau N3. D'autre part, sur la ligne « 35 et d'autres nombres » les élèves se répartissent de manière assez équilibrée avec un léger accroissement vers les niveaux supérieurs. Enfin cet accroissement devient plus sensible sur la ligne « 35 seul » où les élèves ont donc donné la bonne réponse numérique et se sont approchés voire ont atteint la bonne réponse géométrique. Si l'on regroupe les niveaux N0 et N1 d'une part et N2 et N3 d'autre part, nous obtenons le tableau suivant :

	N0 + N1	N2 + N3	Total
autre réponse	6	7	13
"35" et d'autres nombres	12	17	29
"35" seul	17	51	68
Total	35	75	110

Le test du khi deux appliqué à ce tableau indique qu'il n'y a pas de lien entre les variables : $\chi^2_{\text{obs.}} = 3,91$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. Comme pour les paradigmes, on ne peut pas affirmer que les deux réponses soient liées l'une à l'autre ; un élève qui maîtrise le niveau N2 ou N3 a eu davantage tendance à maîtriser les trois contraintes de la partie numérique. Mais ce n'est là qu'une tendance et non pas un fait établi.

Comparaison des niveaux de van Hiele pour les élèves qui ont trouvé « 35 seul »					
	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	7	7	3	11	28
6^{ème}	3	7	11	19	40
Total	10	14	14	30	68

Dans ce tableau, il ressort que globalement les élèves sont de plus en plus nombreux dans les niveaux les plus élevés. Mais ceci est essentiellement dû au nombre d'élèves de 6^{ème} qui va croissant du niveau N0 au niveau N3 de déduction informelle. La répartition des élèves de CM2 est plus variable même si on peut se réjouir du fait que les plus nombreux d'entre eux soit aussi au niveau N3. Il n'en reste pas moins que la moitié d'entre eux se répartit équitablement entre les niveaux N0 et N1 d'identification-visualisation. Autrement pour ces élèves il n'y a eu aucun transfert de compétence ou aucune cohérence dans la démarche entre les deux parties de l'activité puisqu'ils ont su trouver « 35 » seul mais n'ont pas été en mesure de respecter les trois contraintes imposées dans le domaine géométrique.

Dans notre mémoire de DEA à la suite de Hoyles et de Healy (1998), nous avons montré qu'il n'y avait pas de transfert de compétences en termes de preuves et de démonstrations entre

algèbre et géométrie. Là le projet est moins ambitieux puisqu'il se limite à la compréhension de la consigne mais le rapprochement mérite peut-être d'être fait. Pour autant, nous avons mis la partie numérique avec pour objectif de faire prendre conscience aux élèves qu'il fallait gérer la conjonction de trois conditions, sans avoir à gérer la question de l'interprétation du dessin ; mais force est de constater qu'une fois de plus il n'y a pas eu vraiment de transfert de compétences d'un domaine des mathématiques à l'autre.

1.14. Bilan des activités menées sur le recto des feuilles.

Arrivés à ce stade du dépouillement des résultats, il nous paraît important de faire un premier point. En effet les tâches demandées au verso des feuilles sont de nature plus complexe, relèvent souvent du paradigme G2 et des niveaux de van Hiele les plus élevés. Nous pouvons donc dresser un premier bilan des activités menées jusqu'ici.

1.14.1. Utilisation des paradigmes géométriques dans l'ensemble des exercices du recto des questionnaires

Dans les tableaux qui suivent nous présentons les paradigmes utilisés par les élèves de CM2 et de 6^{ème} sur l'ensemble des exercices 1.1. à 1.8..

	GX	G1	G2	Total
CM2	37	110	72	219
6^{ème}	21	93	135	249
Total	58	203	207	468

On voit tout de suite que la moitié des élèves de CM2 ont fonctionné en G1 et c'est un tiers en G2. En 6^{ème}, la situation est un peu différente puisque plus de la moitié ont fonctionné en G2 et plus d'un tiers en G1. Une autre différence est dans la proportion d'élèves pour lesquels nous n'avons pas pu identifier le paradigme : 17% en CM2 et 8% en 6^{ème}.

Dans le tableau suivant, et par souci de cohérence entre les corrections des différents exercices, nous avons regroupés les élèves pour qui nous avons indiqué le paradigme GX faute d'information spécifique, avec les élèves auxquels nous avons attribué le code G1. Il est en effet tout à fait réaliste de penser qu'à ce niveau de scolarité, tous les élèves manifestent une connaissance de la géométrie qui ressort au moins du paradigme G1 plutôt que du paradigme G0, paradigme qui, rappelons-le, relève des activités de l'école maternelle et où les objets sont concrets.

	GX + G1	G2	Total
CM2	146	73	219
6ème	114	135	249
Total	260	208	468

Dans ce tableau on voit tout de suite que les élèves les moins nombreux sont les élèves de CM2 qui ont fonctionné en G2. Dans le même temps, les plus nombreux sont encore les élèves de CM2 qui ont fonctionné dans G1 alors que le groupe des élèves de CM2 est moins grand que celui des élèves de 6^{ème}. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique très nettement que les répartitions des effectifs ne sont pas le fruit du hasard : les variables sont liées entre elles ($\chi^2_{\text{obs}} = 20,58$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Donc, quelle que soit la tâche demandée, l'élève de CM2 témoigne plutôt d'un fonctionnement de type G1 quand en 6^{ème}, plus de la moitié des élèves a tendance à fonctionner en G2. Nous pouvons dire ici que nous sommes dans la logique des programmes puisqu'il n'est pas prévu qu'en Primaire les élèves soient initiés à une géométrie déductive, ne serait-elle que proto-axiomatique. En revanche, l'amorce se fait en 6^{ème} mais tous les élèves ne l'ont pas encore acquise. On peut dire aussi, au vu de ces résultats, que selon les activités proposées, on peut amener certains élèves de CM2 à fonctionner dans un paradigme géométrique autre que celui qu'ils ont l'habitude d'utiliser. On peut rappeler que les tâches au travers desquelles les élèves de CM2 ont le plus fréquemment abordé le paradigme G2 ont été celles dans lesquelles les figures étaient décrites verbalement ou celles dans lesquelles il fallait prendre en considération plusieurs contraintes simultanément.

Au vu de ces résultats on pourrait dire que le passage du paradigme G1 vers le paradigme G2 se met en place au cours de l'année de 6^{ème}. Mais, au travers d'activités appropriées, un élève

de CM2 peut déjà travailler en G2 sans que le fonctionnement dans ce paradigme doive être institutionnalisé.

1.14.2. Niveaux de van Hiele mis en évidence sur l'ensemble des exercices du recto des questionnaires

Dans ce tableau nous avons regroupé les niveaux maîtrisés par les élèves ; le niveau N0 étant le manque de connaissance soit de figure soit de vocabulaire adapté à la tâche prescrite. C'est dans la recherche de triangles isocèles que cette situation a été la plus fréquente.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	37	77	54	51	219
6ème	27	36	97	89	249
Total	64	113	151	140	468

Comme on pouvait s'y attendre les élèves de CM2 les plus nombreux sont en N1, c'est-à-dire au niveau d'identification-visualisation. On trouve davantage d'élèves de 6^{ème} au niveau N2 d'analyse qu'au niveau N3 de déduction informelle. Or dans les activités qui ont été proposées il n'y avait pas de raisonnement ni de justification à produire. Il est donc légitime que les élèves se soient limités à donner des réponses peu révélatrices du niveau de déduction informelle. C'est pourquoi il nous fallait donner une deuxième tâche aux élèves pour déterminer avec plus de précision les niveaux de van Hiele qu'ils peuvent maîtriser. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme ces propos : le lien entre les variables est fort ($\chi^2_{obs.} = 37,22$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,82). On peut toutefois s'interroger sur le sort des 64 élèves pour qui nous avons utilisé le code N0 dans la mesure où ceux-ci n'ont témoigné soit d'aucune compréhension des consignes soit une méconnaissance du vocabulaire de la géométrie. Si une majorité d'élèves est dans une démarche d'apprentissage que nous pouvons identifier, il en reste presque 14% d'entre eux semblent en grandes difficultés. Toutefois ils ont tendance à être moins nombreux en 6^{ème} qu'en CM2 : respectivement 27 sur 249 soit 11% contre 37 sur 219 soit 17%.

1.14.3. Lien entre les paradigmes et les niveaux de van Hiele d'après les tâches du recto

Nous allons maintenant croiser les informations données par les paradigmes d'une part et les niveaux de van Hiele d'autre part sur l'ensemble des exercices du recto des feuilles de travail, exercices qui, a priori sont plus faciles d'accès que ceux que nous trouverons au verso.

Le premier tableau concerne les résultats obtenus en CM2.

	GX	G1	G2	Total
N0	30	7	0	37
N1	7	70	0	77
N2	0	32	22	54
N3	0	0	51	51
Total	37	109	73	219

Comme on peut le constater il y a davantage d'élèves qui ont fonctionné en G1 qu'en G2 et pour un certain nombre d'entre eux nous avons créé le code GX. Mais comme nous l'avons déjà signalé par ailleurs à ce niveau de scolarité, on peut considérer que tous les élèves ont maîtrisent le paradigme G0 de la géométrie concrète développé au cycle 1 et donc connaissent certains éléments du paradigme G1. En rassemblant en une seule colonne les effectifs des colonnes GX et G1, nous obtenons alors le tableau suivant.

CM2

	GX+G1	G2	Total
N0	37	0	37
N1	77	0	77
N2	32	22	54
N3	0	51	51

Total	146	73	219
-------	-----	----	-----

Maintenant ce sont 146 sujets qui se trouvent dans la 1^{ère} colonne soit les deux tiers de notre effectif. Dans le même temps, nous avons un tiers en G2, or ce paradigme ne relève pas explicitement du CM2. Donc on peut conjecturer qu'en proposant certaines activités aux élèves, on peut tout à fait les mobiliser dans un paradigme nouveau.

Si l'on considère les niveaux de van Hiele, l'information est légèrement différente. Il y a 37 sujets pour lesquels nous n'avons pas pu attribuer de niveau soit 17%. Ces élèves semblent n'avoir que des connaissances très parcellaires, incohérentes, voire erronées du vocabulaire et des figures de géométrie. Ceci est quelque peu inquiétant à ce niveau de scolarité. Nous avons 77 sujets sur la ligne N1, soit près 35% de notre effectif, qui reconnaissent les figures de géométrie sans pour autant justifier leur choix à l'aide d'outils relevant d'une géométrie plus théorique. Si l'on considère aussi les 54 élèves sur la ligne N2, niveau d'analyse, nous avons un total de 139 sujets soit 63% de notre effectif qui connaissent le vocabulaire de la géométrie et, pour un quart d'entre eux connaissent les propriétés des figures.

51 élèves ont témoigné d'une certaine maîtrise du niveau de déduction informelle (N3) soit près d'un élève sur quatre, ce qui est tout à fait remarquable dans la mesure où, là encore, cette compétence ne fait pas partie des objectifs de l'école primaire. On peut facilement augurer que ces élèves ont toutes les chances de réussir leur scolarité au collège.

L'intérêt de ce tableau est peut-être de montrer que les élèves au niveau d'analyse ont fonctionné dans les deux paradigmes dans un rapport de 3 pour deux en faveur du paradigme G1. Pour ce qui concerne le cadre théorique que nous avons élaboré au chapitre 2, si le niveau N1 d'identification-visualisation relève bien du paradigme G1 et le niveau N3 de déduction informelle du paradigme G2, en revanche la situation n'est pas tranchée pour ce qui concerne le niveau N2 d'analyse puisque, selon les situations, nous avons associé ce niveau à une démarche relevant de G1 ou de G2.

Nous allons maintenant faire la même étude pour les élèves de 6^{ème}.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	17	10	0	27
N1	4	32	0	36
N2	0	51	46	97
N3	0	0	89	89
Total	21	93	135	249

Nous voyons que le paradigme GX a été très peu utilisé à ce niveau et pour les mêmes raisons que précédemment, nous allons regrouper les colonnes GX et G1. Nous obtenons alors le tableau suivant.

6^{ème}

	GX+G1	G2	Total
N0	27	0	27
N1	36	0	36
N2	51	46	97
N3	0	89	89
Total	114	135	249

Cette fois nous constatons que les élèves se répartissent de manière plus équilibrée entre les deux paradigmes G1 et G2 avec une majorité d'élèves en G2. La proportion d'élèves fonctionnant en G2 est supérieure à celle que nous avons en CM2 puisque l'on passe de 33% à 54%. Au travers de ces tâches nous pouvons donc dire que la moitié des élèves de 6^{ème} de notre échantillon est en mesure de fonctionner en G2. On peut aussi conclure que le passage de la géométrie spatio-graphique à la géométrie proto-axiomatique n'est pas achevé en fin de 6^{ème}.

Pour ce qui concerne les niveaux de van Hiele, on doit constater qu'il y a 27 sujets pour qui nous avons utilisé le code N0 : ces élèves semblent avoir des connaissances très limitées en géométrie. 36 élèves soit près de 14% de notre échantillon sont au niveau d'identification visualisation ; ces deux faits sont un peu inquiétants en fin de 6^{ème}. Il est intéressant de remarquer que, comme en CM2, nous avons un peu plus d'élèves en N2 qu'en N3 : 97 sujets soit 39% de l'effectif de 6^{ème} sont au niveau N2 quand il y en a 89 au niveau N3 soit 36%. On peut pratiquement affirmer que ces élèves ont pleinement profité des apprentissages relevant du collège et sont même quelque peu en avance si l'on considère que la déduction informelle n'est pas un objectif à atteindre dès la classe de 6^{ème}.

A propos du cadre théorique, nous pouvons faire les mêmes constats que précédemment : le niveau N1 relève de G1, le niveau N3 de G2 mais le niveau d'analyse (N2) peut être associé au paradigme G1 comme à G2 selon les situations. Comme en CM2, en 6^{ème}, il y a davantage d'élèves dans la case G1-N2 que dans la case G2-N2 mais l'écart entre les deux effectifs se resserre puisque les effectifs sont respectivement de 51 et 46 pour les paradigmes G1 et G2. On peut donc avancer l'idée que le niveau d'analyse tel que le définit P.M. van Hiele est bien une étape nécessaire à l'apprentissage de la géométrie plane au collège mais ce niveau peut relever selon les situations proposées de l'un ou l'autre des paradigmes géométriques. C'est peut-être en proposant aux élèves des situations d'apprentissage qui relèvent du niveau d'analyse mais demandent un changement de paradigme que l'on procédera par zone de développement proximal.

Si l'on réunit les tableaux de résultats en CM2 et en 6^{ème}, on obtient le tableau suivant qui confirme ce qui a déjà été dit.

	GX+G1	G2	Total
N0	64		64
N1	114		114
N2	83	67	150
N3		140	140
Total	261	207	468

On ne peut donc pas associer de manière rigide le niveau d'analyse N2 de van Hiele au paradigme G1. En effet ce niveau correspond avant tout à une connaissance des propriétés des figures sans que celles-ci soient organisées les unes par rapport aux autres. Or la manifestation de cette connaissance peut se révéler par les outils propres à G1 comme la mesure à la règle ou au compas, ou à G2 dans le cas du décodage d'une figure faite à main levée. On a même pu voir grâce à certaines activités, que c'est par ce niveau que les élèves peuvent passer d'un mode de fonctionnement proche du concret à un fonctionnement plus abstrait, comme si le passage par ce niveau de van Hiele représentait une zone de développement proximal sur la voie du raisonnement hypothético-déductif.

2. Verso des questionnaires : informations sur les activités

2.1. Exercices 2.1. à 2.3.

Dans ces exercices, la tâche est double. L'élève est confronté à une description verbale accompagnée d'un schéma d'une situation géométrique où interviennent un cercle, un triangle équilatéral et un carré et de la reproduction réduite de la figure en vraie grandeur faite par Victor. Dans l'exercice 2.1., la figure est juste, dans l'exercice 2.2., le triangle est en fait au minimum un triangle isocèle et dans l'exercice 2.3., le quadrilatère est au mieux un rectangle. Dans chacune des versions de l'exercice, il est demandé à l'élève si la figure proposée par Victor était juste et de justifier sa réponse.

2.1.1. PARADIGMES

GX : Nous n'avons pas pu identifier le mode de fonctionnement de l'élève.

G1 : L'élève qui évoque le fait que la figure n'a pas les bonnes dimensions parce qu'il a mesuré sur la reproduction est évidemment en G1. Dans la mesure où sa prise de position dépend de ce qu'il a mesuré, que ce soit sur le schéma ou sur la reproduction, il est en G1. Dans ce paradigme l'élève reconnaît les sous-figures en mesurant les segments mais il n'évoque pas le lien entre les différents éléments géométriques, en particulier que les points A

et C doivent être sur le cercle. Dans ce paradigme l'élève peut aussi se limiter au perçu en comparant le schéma et la reproduction qui lui sont proposés. Il procède par comparaison globale entre les deux dessins. Dans l'exercice 2.1. la reproduction est conforme au modèle, il peut donc en conclure que la figure est juste. Dans les deux autres exercices la reproduction n'est pas conforme au modèle, la figure est donc fautive.

G2 : Dans ce paradigme, l'élève ne devrait pas avoir besoin de refaire la figure ni de mesurer sur la reproduction. Il peut prendre position à partir des tracés qui sont proposés sur la reproduction. Il est aussi en mesure d'argumenter à propos des points A et C en particulier. Pour cela il doit évoquer que ces points doivent être sur le cercle puisque le triangle ABC est équilatéral et que le quadrilatère BCDE est un carré. Sans le dire clairement ou sans l'exprimer de manière formelle, il fait référence aux définitions de ces figures.

2.1.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

N0 : L'élève ne répond pas vraiment à la question ou témoigne d'une méconnaissance des définitions.

N1 (identification-visualisation) : A ce niveau l'élève observe globalement la figure et ne la décompose pas en sous-figures. Il n'est pas certain qu'il arrive à faire le lien entre les contraintes données dans l'énoncé, leur respect dans le schéma et dans les diverses reproductions.

Dans l'exercice 2.1., l'élève compare le schéma et la reproduction et prend position en disant que la figure est fautive parce que le rayon utilisé n'est pas 3 cm. Il n'évoque pas le triangle équilatéral ni le carré. Ici l'élève se limite à comparer la globalité de la figure réduite avec le schéma.

Dans les deux autres exercices l'élève répond que la reproduction est fautive parce qu'elle n'a pas les bonnes dimensions ou parce que les points A (dans le cas de l'exercice 2.2.) et C (dans le cas de l'exercice 2.3.) sont mal placés en comparant leurs positions avec celles qu'ils ont sur le schéma, sans faire le lien avec les définitions ou les propriétés du triangle équilatéral et du carré par rapport au cercle.

A ce niveau de van Hiele les sous-figures ne sont pas analysées en tant que telles. C'est la conformité globale de la reproduction avec le schéma qui est déterminante. Certains élèves

font eux-mêmes une figure qui reproduit la figure réduite de Victor, figure qui devient alors une figure fautive. Nous avons ainsi la preuve que l'élève n'a pas su analyser les sous-figures et n'a pas su prendre en compte aussi les contraintes de l'énoncé.

N2 (analyse) : L'élève explique dans son commentaire la position qu'il prend, analyse les sous-figures en faisant la distinction entre les triangles équilatéral et isocèle, et entre le carré et le rectangle. Pour cela il peut avoir mesuré sur la reproduction ou fait sa figure. L'élève ne maîtrise pas la relation d'inclusion entre les différentes figures particulières.

Dans l'exercice 2.1., un tel élève peut considérer que la figure (en parlant de la reproduction) est fautive parce qu'elle n'a pas les bonnes dimensions mais il y a quand même un triangle équilatéral et un carré parce qu'il l'a mesuré. Il peut aussi répondre « oui, mais les dimensions utilisées par Victor sont fautes ».

Dans les deux autres exercices, l'élève prend position en donnant une raison liée aux sous-figures. Dans le cas de l'exercice 2.2., l'élève écrit que le triangle ABC est isocèle ou à défaut qu'il n'est pas équilatéral. Dans l'exercice 2.3., il est fait référence au rectangle BCDE ou sinon au fait ce n'est pas un carré.

N3 (déduction informelle) : L'élève motive sa prise de position quant à la nature des sous-figures et des incidences existant entre les points de celles-ci sans faire référence au fait que la reproduction n'est pas en vraie grandeur.

Dans l'exercice 2.1, l'élève justifie avec ses mots le fait que la figure est juste en utilisant ou en évoquant les définitions du triangle équilatéral et du cercle. Il évoque le fait que les points A et C en particulier doivent appartenir au cercle.

Dans les exercices 2.2. et 2.3. où les reproductions sont fautes, l'élève rappelle que tous les côtés du triangle équilatéral ou du carré ont la même longueur. Il explique en quoi le triangle ou le quadrilatère proposés ne respectent pas les contraintes définies dans l'énoncé.

2.2. **Exercice 2.1.**

En CM2, 24 élèves ont reçu cette tâche à faire. Seulement 22 ont répondu.

En 6^{ème}, tous les élèves ont répondu. Nous avons un échantillon de 30 sujets.

Avant l'analyse des résultats en terme de paradigmes ou de niveaux de van Hiele, nous allons nous intéresser aux élèves qui ont fait leur propre construction. Ils peuvent avoir fait ces dessins dans le but de mieux s'approprier la situation et avant tout commentaire ou au contraire, après avoir rédigé leur commentaire, pour avoir la confirmation de ce qu'ils avaient écrit. Certains ont eu une telle démarche parce qu'ils ont effacé une première réponse et en ont proposé une autre ensuite. Il y a peut-être eu aussi un effet de contrat : « tu peux » compris comme « je dois ».

Les élèves ont ainsi proposé des dessins que nous appellerons :

- figure exacte quand le rayon est de 3 cm et les contraintes liées au triangle équilatéral et au carré sont respectées ;
- figure approximative quand le rayon est de 3 cm mais la précision du dessin laisse à désirer ;
- figure fautive quand elle ne respecte pas les contraintes liées au triangle équilatéral et au carré ;
- reproduction quand l'élève a reproduit la réduction qui lui était proposée ;
- figure agrandie quand le rayon est supérieur à 3 cm et que les contraintes sont respectées.

La répartition entre les élèves de CM2 et les 6^{ème} est la suivante.

	pas de figure	figure exacte	figure approximative	figure fautive	reproduction	figure agrandie	Total
CM2	9	7	1	2	2	1	22
6^{ème}	23	7					30
Total	32	14	1	2	2	1	52

La première remarque que l'on puisse faire est que les élèves ont été nombreux à ne pas faire de figure : 9 sur 22 en CM2 soit 41%, 23 sur 30 en 6^{ème} soit près de 78%.

Ensuite si 7 élèves ont réalisé une construction en vraie grandeur cela ne représente pas les mêmes proportions dans chaque groupe. Nous avons ainsi 32% des élèves de CM2 contre un peu plus de 23 % en 6^{ème} qui ont construit une figure exacte.

Il est remarquable que le reste du tableau ne concerne que des élèves de CM2. A commencer par l'élève qui a réalisé une figure approximative (P29) : il a tracé un cercle de rayon 3 cm mais la technique utilisée pour dessiner le triangle équilatéral et le carré n'est pas précise et l'angle de sommet D est très loin d'être dessiné droit.

Les deux élèves qui ont dessiné des figures fausses (P120 ; P124) ont fait des tracés dans lesquels les contraintes ne sont pas respectées : le centre du cercle n'est pas un sommet du triangle équilatéral, le triangle ABC est un triangle quelconque en dépit de la trace de l'arc de cercle de centre B passant par C.

Deux élèves (P39 ; P211) ont reproduit exactement la figure proposée en utilisant le rayon mesuré sur la réduction soit 2,6 cm.

Enfin un élève (P100) propose une construction à partir d'un rayon de 5 cm pour bien montrer que les incidences entre les points restent les mêmes. Malheureusement son texte ne confirme pas ce qu'il semble avoir compris.

Donc en tout 6 élèves sur 22 (soit 27%) de CM2 ont eu recours à un dessin peu fiable. Et globalement 14 élèves sur 22 ont fait des dessins soit près de 64% quand ils ne sont que 23% en 6^{ème}.

A partir de là on peut prévoir que la résolution de la tâche peut être très différente d'un niveau de scolarité à l'autre. On peut aussi penser que l'interprétation de la consigne est différente.

2.2.1. PARADIGMES

La répartition des élèves selon les différents paradigmes est la suivante.

	GX	G1	G2	Total
CM2	0	17	5	22
6^{ème}	1	15	14	30
Total	1	32	19	52

Tout de suite on peut remarquer qu'un seul élève de 6^{ème} (S145) est classé en GX : nous n'avons pu identifier son mode de fonctionnement. Son texte dit que « la figure de Victor est faite avec des instruments mais quand elle passe à la photocopieuse, on dirait que la figure a été faite à main levée ». La consigne a vraisemblablement été mal comprise.

Ensuite la répartition des élèves dans les deux paradigmes est totalement différente : en 6^{ème}, il y a autant d'élèves dont la réponse se situe en G1 qu'en G2 alors qu'en CM2 ils sont plus de trois fois plus nombreux en G1 qu'en G2. On pouvait s'attendre à un tel résultat dans la mesure où les élèves de CM2 ont été bien plus nombreux à faire des figures que les élèves de 6^{ème}.

En considérant que l'élève de 6^{ème} qui est dans la case GX peut être assimilé à un élève fonctionnant en G1, on obtient le tableau suivant :

	GX + G1	G2	Total
CM2	17	5	22
6^{ème}	16	14	30
Total	33	19	52

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique qu'il n'y a pas vraiment de lien entre les variables : $\chi^2 = 3,16$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. On peut donc suggérer que les élèves de 6^{ème} ont eu une tendance plus marquée que les élèves de CM2 à fonctionner dans G2 pour cet exercice sans que cette tendance soit significative. Les résultats obtenus dans les deux exercices suivants devraient permettre de préciser cette information.

2.2.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

La répartition dans les différents niveaux de van Hiele est la suivante.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	3	7	11	1	22
6^{ème}	3	5	14	8	30
Total	6	12	25	9	52

Tout de suite on peut constater que la moitié des élèves de chaque niveau de scolarité est au niveau N2 d'analyse c'est-à-dire qu'ils ont bien reconnu les sous-figures dans la figure globale sans pour autant justifier de la position des points A et C en particulier.

Il y a aussi 3 élèves en CM2 et en 6^{ème} qui ont montré qu'ils ne connaissaient pas les définitions du triangle équilatéral et du carré ou ont rédigé des textes qui étaient tout à fait étrangers à la consigne. Ils représentent ainsi près de 14% de l'échantillon en CM2 et 10% en 6^{ème}, ce qui n'est pas complètement négligeable.

La répartition des élèves entre les niveaux N1 (identification-visualisation) et N3 (déduction informelle) est très différente d'un niveau de scolarité à l'autre. 7 élèves de CM2 sont au niveau N1 soit 32% de notre échantillon quand ils ne sont que 4 en 6^{ème} soit un peu plus de 13%. A l'inverse 1 seul élève de CM2 (P134) a rédigé un texte qui témoigne de la dépendance entre les différents éléments de la figure : « le carré est bien fait par rapport au triangle et au cercle ». Cet élève a aussi réalisé une construction en vraie grandeur. En 6^{ème}, ce sont 8 élèves sur 30 qui sont de niveau N3 soit 30% de notre échantillon. Par exemple nous avons pu lire (S235) : « un triangle équilatéral a ses trois côtés égaux. Avec un compas on est sûr que les points sont égaux. Le carré a ses quatre côtés égaux donc on utilise le compas ». Cet élève a accompagné son texte d'une figure exacte. Ou encore S197 a écrit : « Oui elle était juste car $AB = AC = BC$ donc le triangle ABC est équilatéral. Le quadrilatère BCDE a au moins 3 angles droits et ses côtés de même longueur donc BCDE est un carré. » Cet élève n'a pas refait de figure.

2.2.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0		3		3
N1		7		7
N2		7	4	11
N3			1	1
Total		17	5	22

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	1	2		3
N1		5		5
N2		8	6	14
N3			8	8
Total	1	15	14	30

Toutes proportions gardées, les élèves de CM2 ont été plus nombreux que les élèves de 6^{ème} à fonctionner en G1 c'est-à-dire dans un paradigme où la mesure sur le dessin est déterminante. Nous avons déjà fait une telle remarque au cours des analyses précédentes. De plus il semble que les élèves de CM2 se répartissent en deux groupes de même taille entre ceux qui ont retrouvé les différents éléments de la situation géométrique qui leur était proposée à l'aide du schéma et ceux qui l'ont fait à l'aide de la reproduction. Ils l'ont mentionné dans leurs textes. En 6^{ème}, dans cette même colonne G1, l'écart entre les effectifs des lignes N1 et N2 n'est pas très grand : 5 élèves en N1 et 8 élèves en N2.

Les quelques élèves de CM2 qui se situent dans la colonne G2 se retrouvent principalement sur la ligne N2. Là encore rien d'étonnant dans la mesure où la démonstration en géométrie n'a pas été abordé en classe. En revanche, on peut voir que certains élèves de 6^{ème}, 8 sur 30 soit plus du quart de notre échantillon, ont su donner des réponses dans lesquelles la référence aux propriétés et définitions est présente. L'apprentissage de la démonstration est en bonne voie pour ces élèves.

Mais les effectifs sont ici réduits et c'est la compilation des résultats obtenus dans les autres versions de l'activité qui sera déterminante.

2.3. Exercice 2.2.

Cet exercice a été proposé à 23 élèves de CM2 mais 3 d'entre eux ont donné des réponses que nous ne pouvons exploiter faute de texte. Parmi ces 3 élèves, l'un d'entre eux a fait une figure fautive sans rien écrire en complément. Nous avons donc 20 réponses exploitables.

En 6^{ème}, ce sont 2 élèves qui n'ont pas répondu sur 25. Nous avons donc 23 réponses exploitables dans ce niveau de scolarité.

La différence avec l'exercice précédent réside dans le fait que le triangle ABC de la reproduction n'est pas un triangle équilatéral puisque le point A n'appartient pas au cercle de centre C.

Tout d'abord nous allons observer comment les élèves ont réagi à cet exercice en s'appuyant ou non sur une figure qu'ils auraient dessinée. Nous avons désigné par « figure légèrement fautive » les cas où l'élève a essayé de faire coïncider sa connaissance du tracé d'un triangle équilatéral à l'aide du compas et la reproduction qui lui était proposée où le point A n'appartient pas au cercle. Ces élèves ont alors « triché » autant que possible pour obtenir un point A hors du cercle tout en utilisant le compas. Ce point se révèle être à 3,1 cm du point C et du point B. Le constat est résumé dans le tableau suivant.

	pas de figure	figure exacte	figure légèrement fausse	figure fausse	Total
CM2	12	3		6	21
6^{ème}	14	6	3		23
Total	26	9	3	6	44

La première remarque est que, autant en CM2 qu'en 6^{ème}, plus de la moitié des élèves n'ont pas fait de figure. 12 élèves sur 21 en CM2 soit plus de 57% et 14 sur 23 en 6^{ème} soit près de 61%.

En CM2, 3 élèves ont réussi à faire une figure exacte c'est-à-dire une figure qui respecte toutes les contraintes. Ces élèves représentent plus de 14% de notre échantillon. En 6^{ème}, ils sont 6 soit 26% autrement dit pratiquement deux fois plus nombreux. On peut remarquer que les 3 élèves qui ont fait une « figure légèrement fausse » sont tous en 6^{ème} quand les 6 élèves qui ont fait une figure fausse sont tous en CM2. Ces derniers se sont avant tout appuyés sur la reproduction et ont négligé la contrainte relative au triangle équilatéral quand les trois élèves de 6^{ème} qui ont fait une figure « légèrement fausse » ont utilisé leur compas pour construire le point A. Parmi les 6 élèves de CM2 qui ont fait une figure fausse, très souvent seul le cercle a été tracé au compas ; les autres tracés ont été fait avec la règle graduée et éventuellement à l'équerre.

2.3.1. PARADIGMES

Nous avons pu identifier le paradigme dans lequel tous les élèves avaient fonctionné. Nous avons donc la répartition suivante.

	GX	G1	G2	Total
CM2		20		20
6^{ème}		18	5	23
Total		38	5	43

Il apparaît que tous les élèves de CM2 ont donné une réponse situant leur fonctionnement dans G1 et que ce fut le cas pour 19 sur 23 soit plus de 82% des élèves de 6^{ème}. Les textes qu'ils ont fournis montrent qu'une très grande majorité des élèves des deux niveaux s'est appuyée sur le mesurage de la reproduction ou la conformité de l'ensemble de celle-ci avec le schéma. Très rares sont ceux qui ont analysé la situation de manière plus théorique, évoquant la définition du triangle équilatéral et la relation ici avec la définition du cercle. On ne peut donc pas dire sur cet exercice que le mode manifeste de fonctionnement des élèves de 6^{ème} ait été très différent de celui des CM2. La reproduction étant fautive, les élèves à ce niveau de scolarité n'ont pas été enclins à fournir une explication qui se situe dans un paradigme plus théorique. En fonctionnant dans G1, et sans même avoir recours à une validation instrumentée, ils ont pu facilement être convaincu et se décider.

2.3.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

La répartition des réponses selon les niveaux de van Hiele est la suivante.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2		15	5		20
6^{ème}	1	10	8	4	23
Total	1	25	13	4	43

On peut tout de suite remarquer que la seule réponse que nous avons classée comme relevant de N0 c'est-à-dire ne donnant aucune information sur ses connaissances géométriques vient d'un élève de 6^{ème}, S244, qui a écrit : « Oui elle est juste parce qu'elle est droite. » Tous les autres élèves ont donné des réponses exploitables selon les niveaux de van Hiele.

La répartition des élèves au niveau N1 (identification-visualisation) est différente entre les deux niveaux. Nous avons 14 réponses sur 20 en CM2 soit 70% quand nous en avons 10 sur 23 en en 6^{ème} soit près de 61%. Quoiqu'il en soit dans les deux cas c'est une majorité d'élèves qui s'est décidée en comparant globalement le schéma et la reproduction, sans juger nécessaire de faire une analyse des sous-figures de la situation géométrique, ou qui a considéré que la reproduction était fautive parce que le rayon du cercle ne mesure pas 3 cm. Ainsi nous avons pu lire : « Non, parce que d'abord le triangle n'est pas du tout sur le

cercle. » (S14) ou « Non car si elle était diminuée à la photocopieuse, les 3 cm de rayon du cercle ne font plus 3 cm. » (P16).

Au niveau N2 (analyse) la répartition des élèves est inversée entre les deux niveaux de scolarité. D'une part nous avons 6 élèves de CM2 sur 20 ce qui représente 30% de notre échantillon quand d'autre part nous avons 9 élèves de 6^{ème} sur 23 soit un peu plus de 39%. Dans tous les cas les élèves ont témoigné de l'erreur sur la reproduction à propos du triangle équilatéral. Par exemple le sujet P113 a écrit : « La figure de Victor n'est pas juste car le triangle est isocèle au lieu d'un triangle équilatéral et que le sommet A du triangle dépasse le cercle alors qu'il ne le dépassait pas. »

Seulement 3 élèves de 6^{ème} sur l'ensemble de l'échantillon ont rédigé des textes assez complets et précis pour que nous puissions les considérer comme relevant du niveau N3 (déduction informelle). Ils représentent ainsi environ 13% des élèves de 6^{ème} et à peine 7% de l'échantillon. Ainsi le sujet S176 a écrit : « Ce n'est pas juste car [AC] fait partie d'un triangle équilatéral donc il devrait mesurer 3 cm et ne peut pas dépasser du cercle ; il devrait être dessus. ».

2.3.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0				0
N1		15		15
N2		5		5
N3				0
Total		20		20

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0		1		1
N1		10		10
N2		7	1	8
N3			4	4
Total		18	5	23

La différence entre ces deux tableaux se situe avant tout dans la colonne G2. Celle-ci est vide pour ce qui concerne le petit groupe d'élèves de CM2. Ils sont 5 en 6^{ème} et 4 d'entre eux sont au niveau N3 de déduction informelle. En effet ces élèves ont argumenté leur propos en faisant référence aux définitions du triangle équilatéral, du carré ou du cercle. Surtout ils se sont décidés sans se référer au fait que la construction présentée était une réduction de la construction originale.

Ensuite dans la colonne G1, que ce soit en 6^{ème} ou en CM2, les élèves se situent majoritairement au niveau N1 d'identification-visualisation. Ils sont même trois fois plus nombreux en CM2 à être à ce niveau qu'au niveau d'analyse. Le rapport est seulement de 1,5 pour les 6^{ème}. Généralement, les élèves ont répondu en s'appuyant sur l'interprétation qu'ils faisaient de l'ensemble des dessins qui leur étaient proposés sans référence explicite aux éléments géométriques nommément présentés en français.

On pourrait penser au vu de ces résultats que dans le cas d'une tâche plus difficile, les élèves ont eu tendance à fonctionner dans un paradigme plus familier et à témoigner d'un niveau de van Hiele inférieur à celui qu'ils maîtrisent par ailleurs. Ce phénomène a été constaté au cours dans d'autres circonstances que ce soit à propos des paradigmes géométriques (Jore 2006) ou des niveaux de van Hiele (Gutiérrez, 1991). Mais dans le cas qui est le nôtre, cela tient-il peut-être aussi à la formulation de la tâche qui ne les a pas nécessairement appelés à fonctionner dans un paradigme plus théorique ou à un niveau de van Hiele supérieur.

2.4. Exercice 2.3.

Dans cet exercice le triangle proposé sur la reproduction est acceptable alors que le point D n'appartient pas au cercle donc le quadrilatère BCDE ne peut pas être un carré. Les conditions de codage des réponses des élèves sont les mêmes que dans l'exercice précédent.

22 questionnaires ont été proposés en CM2 et un élève n'a rien répondu ; nous avons donc 21 réponses exploitables. Les 25 élèves de 6^{ème} qui ont reçu cette tâche ont tous répondu.

Comme dans les exercices précédents, les élèves avaient la possibilité de faire un dessin ou une figure s'ils en ressentaient le besoin. Le tableau suivant indique comment les élèves ont exploité cette possibilité.

	pas de figure	figure exacte	reproduction	reproduction agrandie	reproduction corrigée	Total
CM2	11	4	4	2		21
6^{ème}	17	4	2	1	1	25
Total	28	8	6	3	1	46

La première remarque que l'on puisse faire consiste à dire que la moitié des élèves de CM2 n'ont pas fait de dessin tandis qu'ils sont 17 sur 25 soit 68% en 6^{ème}. Autrement dit les élèves de 6^{ème} ont eu plus de facilité pour se décider sans avoir recours à un dessin.

En CM2 comme en 6^{ème}, 4 élèves ont réussi à faire une « figure exacte » c'est-à-dire un cercle de rayon 3 cm complété du triangle équilatéral et du carré. Ils représentent respectivement 19% et 16% de notre échantillon.

Dans la colonne « reproduction », nous regroupons les élèves qui ont reproduit fidèlement le dessin qui était proposé dans la reproduction, reprenant ainsi le rayon de 2,7 cm et l'erreur relative au carré. 6 élèves sont dans ce cas : 4 élèves de CM2 et 2 élèves de 6^{ème}. Il semble que ces élèves ne soient pas en mesure d'analyser les sous-figures et les relations entre les différents éléments de celles-ci.

Dans la colonne « reproduction agrandie » nous avons compté les élèves qui avaient tracé un cercle de rayon 3 cm, le triangle ABC équilatéral mais qui ont reproduit l'erreur sur la

construction du carré : le point D n'est pas sur le cercle. Au total 3 élèves sur 46 ont fait ce genre de dessin : deux élèves de CM2 et un élève de 6^{ème}. On peut penser que ces élèves n'ont pas établi de relation entre les points de la figure et les propriétés du carré en particulier. Ces élèves ont eu tendance à comparer le schéma et la photocopie sans analyser la situation géométrique. S177 a écrit : « Le cercle ne doit pas passer par le point D. Le triangle équilatéral n'est pas droit. Le cercle n'est pas tout à fait rond. » Un tel élève semble avoir fait des allers et retours entre le schéma et la figure diminuée sans avoir analysé pas la situation géométrique.

Seul un élève de 6^{ème} (S27) a réalisé ce que nous avons appelé une reproduction corrigée dans la mesure où le rayon du cercle est de 2,7 cm mais le point D appartient à ce cercle. Pour autant cet élève n'a pas su tirer partie de sa construction puisqu'il a écrit : « oui elle me paraît juste parce que le point C touche le centre du cercle et donc le segment [BC] est bien le rayon du cercle. »

2.4.1. PARADIGMES

La répartition des élèves selon les différents paradigmes est la suivante.

	GX	G1	G2	Total
CM2		19	2	21
6^{ème}		18	7	25
Total		37	9	46

Comme dans l'exercice précédent, on peut tout de suite remarquer que plus de 80% des élèves de notre échantillon (37 sur 46) ont fonctionné en G1. Soit ils ont mesuré les longueurs des segments sur la reproduction, soit ils ont comparé le schéma et la reproduction. 19 élèves de CM2 représentent 90% de l'échantillon quand 18 élèves de 6^{ème} correspondent à 72%. Tous ces élèves ont donc eu recours soit au mesurage sur le schéma soit sur la reproduction et ont pris position à partir de ces informations. Soit ils ont considéré globalement les dessins proposés (schéma et reproduction) et les ont comparés. Dans tous les cas, comme dans l'exercice précédent, il n'y a pas eu de prise en compte simultanée des relations entre les divers éléments données par l'énoncé, le schéma et la reproduction. Ainsi un élève de CM2 a écrit : « La figure de Victor n'est pas juste car le carré ne mesure pas de tous les côtés la

même longueur ». De plus cet élève a indiqué toutes les mesures qu'il a prises sur la reproduction et a complété en réalisant une figure juste en vraie grandeur.

La proportion des élèves de 6^{ème} ayant fonctionné en G2 est donc supérieure à celle des CM2. Mais cette différence n'est sans doute pas significative. Tous ces élèves se sont dégagés des considérations de dimensions de la reproduction et ont pris position en argumentant sur le fait que si BCDE était un carré le point D devait être sur le cercle. Ainsi nous avons considéré que l'élève de CM2 (P27) qui a écrit : « Elle n'était pas juste car le cercle doit toucher le carré » avait fonctionné en G2, d'autant plus qu'il n'a laissé aucune trace de mesure sur le schéma ou la reproduction.

2.4.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

En revanche la répartition des élèves selon les niveaux de van Hiele est plus contrastée.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	2	14	5	0	21
6^{ème}	3	7	12	3	25
Total	5	21	17	3	46

En effet les effectifs les plus nombreux se situent à des niveaux différents. 14 élèves de CM2 sur 21 soit près de 67% ont donné une réponse de niveau N1 (identification-visualisation) quand ils sont 12 sur 25 en 6^{ème} soit 48% en N2 (analyse).

De plus aucun élève de CM2 n'a donné une explication qui relève de la déduction informelle (N3) quand ils sont 3 en 6^{ème} soit 12%.

Dans les deux groupes nous avons quelques élèves auxquels nous avons attribué le niveau N0 : les réponses qu'ils ont données n'indiquent rien quant à leurs connaissances en géométrie. Vraisemblablement ces élèves n'ont pas compris la consigne ou se sont limités à faire des commentaires tels que [BC] était le rayon du cercle ou que la photocopieuse avait

agrandi le dessin établissant ainsi une comparaison entre le schéma et la figure diminuée contraire aux indications de l'énoncé.

Si l'on associe ces élèves à ceux auxquels nous n'avons pu attribuer que le niveau d'identification-visualisation (N1) puisqu'ils ont comparé globalement le schéma et la reproduction, d'une part et d'autre part, on regroupe les élèves auxquels nous avons attribué les niveaux N2 et N3 dans la mesure où ils ont montré qu'ils avaient analysé les différents éléments de la situation géométrique, alors on obtient le tableau suivant.

	N0+N1	N2+N3	Total
CM2	16	5	21
6^{ème}	10	15	25
Total	26	20	46

Cette fois les effectifs sont un peu plus grands et le test du χ^2 appliqué à ce tableau indique qu'il y a une dépendance entre les variables ($\chi^2 = 6,08$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Les élèves de 6^{ème} sont donc significativement plus nombreux à maîtriser explicitement les niveaux N2 et N3 de van Hiele dans cet exercice que les élèves de CM2.

Au niveau N1, (identification-visualisation), comme dans l'exercice précédent, les élèves ont soit commenté la différence entre le schéma et la reproduction soit ont pris des mesures sur la reproduction, ce qui les a amené à conclure que la figure de Victor était fautive. Dans tous les cas ils n'ont pas géré simultanément l'ensemble des contraintes présentées dans l'énoncé, le schéma et la reproduction.

Au niveau N2 (analyse) les élèves évoquent la présence des sous-figures et le fait qu'elles sont non conformes à l'énoncé ou au schéma. Par exemple l'élève S35 de 6^{ème} a écrit : « Non elle n'est pas juste car les dimensions ont diminué et le point D est en dehors du cercle et que sur le brouillon il est sur les traces du cercle. » Il est clair qu'un tel élève ne s'est pas contenté d'une approche globale de la situation mais il n'est pas allé jusqu'à articuler les différentes incidences entre les points.

Parmi les 3 élèves de 6^{ème} auxquels nous avons attribué le niveau N3 (déduction informelle), on peut donner comme exemple le texte du sujet S222 : « Non elle n'était pas juste car [BC] est un rayon du carré et un carré a 4 côtés de même longueur et le carré ne doit pas descendre plus bas que le cercle puisque les rayons d'un cercle ont tous la même longueur.

2.4.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0		2		2
N1		14		14
N2		3	2	5
N3				0
Total		19	2	21

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0		3		3
N1		7		7
N2		8	4	12
N3			3	3
Total	0	18	7	25

Dans ces tableaux, la différence la plus intéressante se situe sans doute dans la colonne G1 où les élèves de CM2 sont presque 5 fois plus nombreux à être au niveau N1 qu'au niveau N2 quand en 6^{ème}, la répartition est équilibrée entre les deux niveaux.

Pour les élèves de 6^{ème}, la répartition est elle aussi équilibrée entre les deux niveaux de van Hiele à l'intérieur de la colonne G2.

Si l'on s'intéresse maintenant aux lignes des tableaux et en particulier à la ligne N2, on voit que les élèves de CM2 sont pratiquement aussi nombreux dans la colonne G1 que dans la colonne G2 alors qu'ils sont deux fois plus nombreux dans la première des deux colonnes en 6^{ème}.

Dans cet exercice, comme dans l'exercice précédent, le paradigme G2 a été peu utilisé par les élèves de CM2 de même que les niveaux plus avancés de van Hiele. La situation était différente dans l'exercice 2.1. où la reproduction proposée était celle d'une figure juste. En effet dans cette activité, un certain nombre d'élèves qu'ils aient été de CM2 ou de 6^{ème}, avaient donné des réponses que nous avons codées comme G2-N2 ou G2-N3. On peut donc se demander si la variable didactique qui consistait à modifier la reproduction a eu une incidence sur les réponses des élèves.

Dans cette tâche on retrouve le phénomène évoqué précédemment où l'élève en difficulté se replie dans un paradigme et un niveau de van Hiele inférieurs. Mais, cette tâche, ou l'interprétation que les élèves en ont eu, n'a peut-être pas été la plus favorable à l'expression des élèves dans un paradigme plus élevé ou un niveau de van Hiele supérieur : on pouvait se décider par une simple perception globale des diverses représentations de la situation géométrique.

2.5. Bilan des exercices 2.1. à 2.3.

Dans la mesure où dans ces trois exercices, l'objectif était le même à savoir faire le lien entre un énoncé, un schéma et une représentation de la situation géométrique qui ne soient pas en vraie grandeur, il est raisonnable de comparer les informations obtenues après chaque dépouillement. Sans qu'il ne soit clairement exprimé, (c'est toute l'ambiguïté des exercices de géométrie au collège et ici en particulier), le contrat didactique demandait la rédaction d'une démonstration formelle. Selon la théorie des paradigmes géométriques précisée par Parzysz, et tels qu'ils sont présentés ces exercices relèvent de G2, en particulier à cause du type de validation attendue par le chercheur. Du point de vue des niveaux de van Hiele, ils relèvent de

la déduction informelle (N3) au minimum puisque nous demandions à l'élève de motiver sa réponse. Qu'en est-il globalement ?

2.5.1. PARADIGMES

Si nous regroupons les résultats obtenus précédemment nous obtenons le tableau suivant.

	GX	G1	G2	Total
2.1.	1	32	19	52
2.2.	0	38	5	43
2.3.	0	37	9	46
Total	1	107	33	141

Dans la mesure où un seul sujet se trouve dans la colonne GX, comme nous l'avons fait lors des analyses précédentes, nous allons assimiler ce cas au cas d'un élève fonctionnant dans G1. Nous obtenons alors le tableau suivant.

	G1 + GX	G2	Total
2.1.	33	19	52
2.2.	38	5	43
2.3.	37	9	46
Total	108	33	141

Même si les effectifs de la 1^{ère} colonne sont du même ordre (entre 30 et 40) ils représentent des proportions d'élèves assez différentes. Le contraste est nettement plus marqué dans la colonne G2 où l'on trouve 19 sujets sur 52 soit 37% à propos de l'exercice 2.1. alors que nous en avons seulement 5 sur 43 soit 12% à propos de l'exercice 2.2..

Si l'on applique le test du χ^2 à ce tableau le résultat est le suivant : $\chi^2 = 8,70$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. Il y a alors un lien entre les variables. Autrement dit les élèves n'ont pas fonctionné de la même manière selon qu'ils avaient l'exercice 2.1. à faire ou l'un des

deux autres. En effet dans l'exercice 2.1., la reproduction était conforme à la figure et où l'on donnait les traces de construction, alors que, dans les deux autres, non seulement la reproduction n'avait pas les bonnes dimensions mais en plus elle était celle d'une figure fautive. On peut imaginer que la trace de la construction de la figure a permis aux élèves de se détacher plus facilement du dessin et d'appréhender la situation géométrique de façon plus théorique : les traces de construction les ayant guidés dans leur analyse de la situation et la perception des sous-figures. Le fait que la reproduction et le schéma aient eu des aspects différents dans les exercices 2.2. et 2.3. a pu être une source de difficultés pour certains élèves alors que nous pensions que cela pourrait les aider. En effet nous avons eu de nombreux textes dans lesquels les élèves mentionnaient la différence d'aspect entre les deux dessins, cette différence étant à leurs yeux souvent suffisante pour se déterminer et dire que la figure de Victor est fautive sans en donner la raison attendue. Autrement dit, les élèves sont restés dans une géométrie spatio-graphique pour donner une explication satisfaisante à leurs yeux, échappant du même coup au contrat didactique tacite qui se situait dans un paradigme plus théorique (G2).

Si l'on considère les modes de fonctionnement dans ces exercices utilisés respectivement par les élèves de CM2 et de 6^{ème} nous obtenons les tableaux suivants.

CM2

	GX	G1	G2	Total
2.1.		17	5	22
2.2.		20		20
2.3.		19	2	21
Total		56	7	63

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
2.1.	1	15	14	30
2.2.		18	5	23
2.3.		18	7	25
Total	1	51	26	78

Les répartitions des effectifs sont assez semblables dans les deux tableaux.

Il est très net que ce sont les élèves de 6^{ème} qui sont proportionnellement les plus nombreux à avoir fonctionné dans G2. Mais malgré cela, dans les deux cas, c'est bien à propos de l'exercice 2.1. où l'on a la plus forte proportion d'élèves ayant fonctionné en G2. En effet ils sont 5 sur 22 soit à peine 23 % en CM2 et 14 sur 30 en 6^{ème} soit la moitié d'entre eux. Dans les deux tableaux aussi, c'est à propos de l'exercice 2.2. que la proportion d'élèves ayant fonctionné en G2 est la plus faible : aucun en CM2 et 5 sur 23 soit 22% en 6^{ème}.

A l'issue de ces premiers résultats, on peut émettre l'hypothèse que la charge de travail inhérente aux activités 2.2. et 2.3. était supérieure à celle nécessaire à l'exercice 2.1. et n'a pas permis aux élèves de CM2 de s'approcher d'un mode de fonctionnement plus théorique : ils se sont souvent limités à comparer globalement le schéma et la reproduction diminuée d'une figure fausse. Ils n'ont pas fait de lien entre les différents éléments géométriques et n'ont pas abordé la situation dans une perspective de validation théorique, peut-être aussi, tout simplement parce que rien ne le poussait à s'y engager.

Si l'on réunit les résultats de ces deux tableaux en regroupant les effectifs des colonnes GX et G1, nous obtenons alors :

	G1 + GX	G2	Total
CM2	56	7	63
6^{ème}	52	26	78
Total	108	33	141

Là encore même si les effectifs de la colonne G1 + GX sont très proches, ils correspondent à des proportions très différentes. 56 élèves sur 63 en CM2 soit près de 89% quand 52 élèves sur 78 en 6^{ème} représentent presque 67% de notre échantillon.

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme qu'il y a un lien entre les variables ($\chi^2 = 9,60$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Nous pouvons donc affirmer que, sur l'ensemble de ces trois exercices, le fonctionnement en G1 ou G2 dépend non seulement de la tâche mais aussi du niveau de scolarité ; les élèves de 6^{ème} étant significativement plus nombreux à avoir fonctionné en G2 que les élèves de CM2. Ceci n'est pas très surprenant dans la mesure où les activités proposées ici sont largement hors du programme de Primaire. Toutefois, on peut noter que dans l'exercice 2.1. les élèves de CM2 ont été les plus nombreux à fonctionner en G2, c'est l'exercice dans lequel les supports (schéma et reproduction de la figure) étaient sinon justes, au moins cohérents l'un avec l'autre et avec l'énoncé. C'est donc ces conditions qui ont été le plus favorables aux élèves pour un fonctionnement en G2.

2.5.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

L'analyse des résultats en termes de niveaux de van Hiele pourrait conduire à des conclusions similaires.

Le regroupement des résultats obtenus à l'issue de chaque exercice donne le tableau suivant, les deux niveaux de scolarité étant confondus.

	N0	N1	N2	N3	Total
2.1.	6	12	25	9	52
2.2.	1	25	13	4	43
2.3.	5	21	17	3	46
Total	12	58	55	16	141

Nous pouvons faire une première remarque quant aux effectifs très voisins des colonnes N1 et N2 où globalement nous avons respectivement 58 et 55 sujets. Mais un simple coup d'œil

permet de remarquer que la répartition des élèves est tout à fait différente d'une colonne à l'autre et entre l'exercice 2.1. et les deux autres exercices. En effet, dans la colonne N1 (identification-visualisation) et sur la ligne réservée à l'exercice 2.1., nous avons 12 élèves sur 52 soit 23% quand nous en avons 25 sur 43 (58%) à propos de l'exercice 2.2. et 21 sur 46 soit 46% à propos de l'exercice 2.3..

En revanche, il y a 25 élèves sur 52 soit près de la moitié d'entre eux qui sont dans la colonne N2 (analyse) à propos de l'exercice 2.1. alors qu'ils ne sont plus que 13 sur 43 (30%) ou 17 sur 46 (37%) pour les deux autres exercices.

La différence est aussi très marquée à l'intérieur de la colonne N3 (déduction informelle) où nous avons 9 élèves sur 52 soit 17% à propos de l'exercice 2.1. alors qu'il n'y en a que 4 sur 43 et 3 sur 46 soit 9% et 7% dans le cas des deux autres exercices.

Enfin il faut aussi noter que pour un certain nombre d'élèves nous n'avons pas pu identifier le niveau de van Hiele qu'ils pouvaient maîtriser tant leur réponse était déconcertante ou éloignée de notre propos : à ces élèves nous avons attribués le code N0. Ce qui remarquable c'est que contrairement aux autres niveaux, ce sont dans les exercices 2.1. et 2.3 où , toutes proportions gardées (environ 11.% dans les deux cas), il y a le plus d'élèves alors qu'il n'y en a qu'un seul dans le cas de l'exercice 2.2. où c'est l'erreur dans la reproduction se situait au niveau du triangle équilatéral. Une autre explication possible est que, dans le cas de l'exercice 2.1., tous les élèves sauf 1, ont repéré qu'il y avait une « erreur quelque part » ; ce qui n'a pas été le cas dans les deux autres exercices parce qu'ils n'ont pas compris ce qu'on leur demandait. Mais, dans le même temps, expliquer dans l'exercice 2.1. pourquoi la réponse est juste amenait les élèves à fonctionner au moins dans N2 alors que le niveau d'identification-visualisation (N1) était suffisant pour reconnaître l'erreur et expliquer en quoi on jugeait la réponse de Victor erronée.

Donc selon la théorie des niveaux de van Hiele, l'exercice 2.1. a favorisé l'expression de niveaux supérieurs par rapport aux autres exercices. Autrement dit les élèves ont mieux maîtrisé la tâche de coordination entre l'énoncé, le schéma et la reproduction proposée quand celle-ci était une reproduction d'une figure juste avec les traces de la construction. Les élèves ont été davantage déroutés dans le cas où les reproductions cumulaient les deux paramètres à savoir ne pas être en vraie grandeur et révéler une erreur de construction.

Si l'on regroupe dans une même colonne les effectifs des colonnes N0 et N1 d'une part et N2 et N3 d'autre part, nous obtenons le tableau suivant :

	N0 + N1	N2 + N3	Total
2.1.	18	34	52
2.2.	26	17	43
2.3.	26	20	46
Total	70	71	141

De ce tableau il ressort nettement que c'est bien l'exercice 2.1. qui a permis l'expression des niveaux supérieurs de van Hiele. C'est aussi dans cet exercice où la proportion de réponses de niveau N3 était la plus forte. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme une dépendance entre les variables : $\chi^2_{\text{obs.}} = 7,58$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; $\chi^2_{\text{critique}} = 5,99$.

De la même façon que nous avons comparé les modes de fonctionnement dans les différents paradigmes par niveau de scolarité, nous allons maintenant analyser séparément les résultats obtenus par les élèves de CM2 et de 6^{ème}.

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
2.1.	3	7	11	1	22
2.2.		15	5		20
2.3.	2	14	5		21
Total	5	36	21	1	63

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
2.1.	3	5	14	8	30
2.2.	1	10	8	4	23
2.3.	3	7	12	3	25
Total	7	22	34	15	78

Les disparités rencontrées plus haut se retrouvent plus ou moins à chaque niveau de scolarité.

Dans la colonne N0, nous avons des répartitions semblables en CM2 et en 6^{ème}.

En revanche, les effectifs globaux des colonnes N1 (identification-visualisation) et N2 (analyse) sont différents et se traduisent par des pourcentages très différents.

En CM2 36 élèves sur 63 soit 57% sont dans la colonne N1 quand ils sont 22 sur 78 soit 28% en 6^{ème}. On peut donc dire que sur l'ensemble de ces trois exercices plus de la moitié des élèves de CM2 a donné à lire un texte où il s'agissait essentiellement de décrire ce qui était proposé ou de mesurer les dessins pour confirmer qu'ils n'étaient pas à la bonne dimension. Mais les descriptions globales ont surtout eu lieu dans les exercices 2.2. et 2.3. où précisément, la reproduction était celle d'une figure fautive quand le schéma suggérait la figure juste. A l'intérieur de cette même colonne N1 les répartitions varient d'un exercice à l'autre. En particulier en CM2, l'effectif passe de 7 à 14 selon que l'on considère l'exercice 2.1. ou l'un des deux autres, alors que les tailles des échantillons sont similaires. Nous passons ainsi de 7 sur 22 soit près de 32% pour le premier exercice à 70% dans le cas du deuxième. Les élèves de CM2 n'ont pu que proposer des descriptions globales dans les exercices 2.2. et 2.3. alors qu'ils ont analysés les éléments de la figure reproduite avec plus de pertinence dans le cas de l'exercice 2.1..

En 6^{ème}, c'est aussi à propos de l'exercice 2.1. que le pourcentage est le plus faible : 5 sur 30 soit 17%. En revanche la répartition des élèves dans les deux autres exercices est différente. Il y a 10 élèves sur 23 soit plus de 43% à propos de l'exercice 2.2. et 7 sur 25 soit 28% à propos de l'exercice 2.3..

Dans la colonne N2, nous avons encore des répartitions très différentes selon que l'on considère l'un ou l'autre des deux tableaux.

En CM2, la moitié des élèves a donné une réponse relevant du niveau d'analyse dans l'exercice 2.1. alors qu'ils ne sont que 5 sur 20 et 5 sur 21 dans les deux autres exercices soit un quart de l'effectif.

Au contraire en 6^{ème} c'est à propos des exercices 2.1. et 2.3. que nous avons les pourcentages les plus élevés où près de la moitié de l'échantillon se situe à ce niveau : 14 sur 30 pour l'exercice 2.1. et 12 sur 25 pour l'exercice 2.3.. C'est donc à propos de l'exercice 2.2. que les élèves de 6^{ème} sont le moins nombreux dans cette colonne avec 8 sujets sur 23 soit 35%.

D'une manière générale, on pourrait dire que les élèves de CM2 comme les élèves de 6^{ème} ont été en mesure de donner des éléments d'analyse de la situation géométrique pour autant que le support visuel se rapprochait de la figure en vraie grandeur. Seuls les élèves de 6^{ème} ont eu la même attitude à propos de l'exercice 2.3. où l'erreur portait sur la reproduction du carré. On peut alors penser que les traces de construction laissée sur la reproduction de l'exercice 2.1. ont favorisé une appréhension séquentielle de la figure.

C'est indéniablement dans la colonne N3 que les disparités sont les plus grandes que l'on considère les résultats globaux ou les résultats exercice par exercice.

En CM2 nous n'avons rencontré qu'un seul élève ayant donné une réponse suffisamment argumentée pour nous puissions la considérer comme relevant de ce niveau. C'est dans l'exercice 2.1. où cette réponse nous a été donnée, c'est-à-dire dans le cadre des supports visuels les plus proches de la figure en vraie grandeur. On peut noter qu'aucun élève de CM2 n'a donné de réponse de niveau déduction informelle dans les exercices 2.2. et 2.3..

En 6^{ème} c'est aussi dans le cadre de ce même exercice 2.1. que nous avons à la fois l'effectif et le pourcentage les plus élevés : 8 sur 30 soit plus du quart de l'effectif des 6^{ème}. Les pourcentages relatifs aux deux autres exercices sont nettement plus faibles : 4 sur 23 soit 17% dans le cas de l'exercice 2.2. et 3 sur 25 soit 12% dans le cas de l'exercice 2.3.. Là encore, il semble que le fait d'avoir proposé une reproduction d'une figure exacte ait favorisé la qualité de l'argumentation.

Si l'on compare les résultats globaux par niveaux de scolarité on obtient le tableau suivant.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	5	35	22	1	63
6^{ème}	7	20	36	15	78
Total	12	55	58	16	141

L'effectif dans la colonne N3 de la ligne CM2 est évidemment particulièrement faible. Toutefois on peut remarquer que les effectifs maximums ne se situent pas dans les mêmes colonnes pour les deux groupes d'élèves. On peut donc regrouper d'une part les effectifs des colonnes N0 et N1 et d'autre part N2 et N3. Nous obtenons alors un tableau réduit.

	N0 + N1	N2 + N3	Total
CM2	40	23	63
6^{ème}	27	51	78
Total	67	74	141

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme, s'il en était besoin, la dépendance entre les variables : χ^2 obs. = 11,651; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84.

On pourrait donc conclure que la qualité de l'analyse et de l'argumentation dans une situation géométrique donnée dépend du niveau de scolarité. Il est évident que seuls les 6^{ème} ont été en mesure de donner des éléments de preuve mais nous avons vu que leurs réponses ont été d'autant meilleures que le support qui leur était offert était proche d'une figure exacte. En tout 16 élèves sur 141 sont dans la colonne N3 soit un peu plus de 13%.

Dans la plupart des cas les élèves ont pu repérer que non seulement les dessins proposés n'étaient pas de la bonne taille mais ils se sont aussi limités à constater les erreurs dans la reproduction dans le cas des exercices 2.2. et 2.3.. La différence essentielle à ce propos entre les élèves de CM2 et de 6^{ème} réside dans la rédaction des textes. Les premiers ont davantage comparé globalement le schéma et la reproduction quand les seconds ont exprimé en quoi la reproduction était fautive soit à cause de sa taille soit en analysant et en désignant les sous-figures. Quand la reproduction était celle d'une figure exacte (exercice 2.1.), les élèves de

CM2 comme de 6^{ème} ont été amenés à évoquer les différentes sous-figures qui constituaient la situation géométrique. Quand cette reproduction était celle d'une figure fausse, ils ont eu tendance à répondre par simple comparaison entre le schéma et la reproduction, évitant ainsi toute analyse de sous-figure. D'ailleurs il n'a pas été rare que le vocabulaire utilisé soit assez éloigné du vocabulaire de la géométrie. Nous avons retrouvé à cette occasion des expressions comme « le triangle dépasse », « le carré ne touche pas le rond » etc.

2.5.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

Dans les tableaux qui suivent, nous avons regroupé les résultats obtenus pour les activités 2.1. à 2.3. à chaque niveau de scolarité.

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0		5		5
N1		36		36
N2		15	6	21
N3			1	1
Total		56	7	63

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	1	6		7
N1		22		22
N2		23	11	34
N3			15	15
Total	1	51	26	78

En dépit des disparités rencontrées dans les analyses précédentes, on peut constater une certaine similitude entre ces deux tableaux. En particulier, sur la ligne N2, que ce soit en CM2 ou en 6^{ème}, il y a toujours deux fois plus d'élèves en G1 qu'en G2, un peu plus même en CM2. Les élèves qui, ici, sont dans la case G2-N2 sont ceux qui ont fait une analyse des sous-figures de la reproduction sans référence aucune aux dimensions de celle-ci alors que ceux qui sont dans la case G1-N2 se sont avant tout appuyés sur des mesures pour faire leurs descriptions. Nous avons peut-être ici une autre illustration du fait que, dans l'apprentissage de la géométrie, le passage de G1 à G2 peut être favorisé par des activités de descriptions de schémas à main levée où les propriétés des figures sont mises en évidence. Les variables didactiques nous avons utilisées dans ces trois activités pourraient être associées à des tâches menées dans le cadre d'un apprentissage de la démonstration, organisé selon les zones de développement proximal. C'est certainement un champ d'activités à explorer avec les élèves. Il est remarquable que, dans des conditions favorables (cf. : l'exercice 2.1.) même un élève de CM2 peut arriver à fonctionner dans ce nouveau paradigme étranger à l'école primaire.

2.6. Exercices 2.4. et 2.5.

Dans ces exercices les élèves devaient retrouver le centre du cercle circonscrit à un triangle, cercle dont on donnait le rayon, 6 cm. Dans l'exercice 2.4. le centre du cercle est à l'intérieur du triangle tandis que dans l'exercice 2.5. il est à l'extérieur ; mais pour aider les élèves, dans un petit encart il est donné un exemple de cercle circonscrit adéquat.

2.6.1. PARADIGMES

G1 : tout élève qui fait usage de la mesure sans montrer une quelconque utilisation de la définition du cercle. Il a piqué son compas au hasard et a laissé plusieurs traces d'essais-erreurs. En général le commentaire indique que l'élève a utilisé le compas de manière conventionnelle c'est-à-dire en posant la mine sur le point imaginé comme le centre du cercle avec une ouverture de 6 cm en espérant que le cercle passe par les trois sommets.

G2 : l'élève a laissé les traces de compas qui conviennent pour retrouver le centre du cercle. Il se peut qu'il en ait laissé deux ou trois. Peu importe puisque la troisième trace peut très bien

être une simple assurance de la précision du point obtenu par la première intersection. Certains textes d'élèves confirment cette démarche. L'élève peut avoir aussi, dans certains cas, évoqué ou tracé des droites particulières du triangle dans le but de retrouver le centre du cercle circonscrit. Une telle démarche se rencontre plus fréquemment classe de 6^{ème}.

2.6.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

L'identification des niveaux de van Hiele dans une telle activité n'est pas immédiate dans la mesure où l'élève n'a pas à interpréter une figure ni à exprimer un raisonnement.

N0 : tout élève qui ne répond pas en expliquant qu'il ne sait pas faire ou qui trace un cercle dont le rayon n'est pas de 6 cm.

N1 : identification-visualisation. L'élève a tracé un cercle de rayon 6 cm mais ce cercle ne passe pas par tous les sommets, un ou deux au maximum. Un tel élève sait ce qu'est un cercle de rayon 6cm mais n'en maîtrise complètement pas la définition. D'autres ont respecté une partie de la consigne en traçant un cercle passant par deux sommets mais le rayon du cercle n'est pas de 6 cm.

N2 : analyse. L'élève a réussi à tracer, même en tâtonnant, un cercle de rayon 6 cm qui passe par les trois sommets du triangle. Il a donc pu gérer simultanément les diverses contraintes que sont le rayon de 6 cm et le passage par les trois sommets. Un tel élève maîtrise la définition du cercle et le fait que tous les rayons mesurent ici 6 cm. En revanche, il ne sait pas encore l'utiliser dans le cadre d'un raisonnement, qu'il soit inductif ou déductif pour en tirer des conséquences ; en particulier l'élève n'arrive pas à changer de point de vue.

N3 : déduction informelle. L'élève a tracé des arcs de cercle (deux ou trois) dont les centres sont les sommets du triangle et il est capable d'expliquer sa démarche. Même s'il n'y a pas de commentaire, on peut considérer que l'élève qui a laissé les traces de compas pertinentes et qui témoignent de ce niveau de van Hiele : il n'a pas verbalisé son raisonnement mais il l'a tenu. C'est bien le propre de ce niveau de déduction informelle où les élèves commencent à percevoir ce qu'est un raisonnement en géométrie.

2.7. Exercice 2.4.

En CM2, deux élèves n'ont rien fait : ils n'ont laissé aucune trace écrite (P96 et P182). Notre échantillon se compose de 40 élèves qui ont travaillé la question.

En 6^{ème}, 43 élèves ont reçu cette tâche à faire. Le seul cas pour lequel nous avons eu un problème de codage est le sujet S102 qui a laissé des traces de cercles de 3 cm de rayon sur le segment de 6 cm donné comme mesure et qu'il a appelé [AB]. Il explique par ailleurs comment il a tracé ces arcs de cercle sur la droite mais n'a laissé aucune marque de travail sur le triangle. On peut penser que cet élève n'a pas compris la consigne ; il a fait quelque chose qui relève de G1 mais n'a pas su tracer un cercle de 6 cm de rayon à l'endroit attendu sur la feuille. Nous avons donc choisi d'attribuer à ce sujet le niveau 0 de van Hiele.

Tous les élèves n'ont pas expliqué comment ils avaient procédé mais les traces qu'ils ont laissées sont explicites quant à la méthode utilisée.

2.7.1. PARADIGMES

	G1	G2	Total
CM2	32	8	40
6^{ème}	11	32	43
Total	43	40	83

Comme on pouvait s'y attendre les élèves de CM2 et de 6^{ème} n'ont pas abordé la tâche de la même manière.

Une très grande majorité des élèves de CM2 (80%) se situe en G1 : ils ont essayé de trouver le centre du cercle par tâtonnements avec plus ou moins de succès. Dans ce groupe se retrouvent tous les élèves qui ont tracé des cercles mais on ne distingue pas ceux qui ont tracé un cercle de rayon 6 cm de ceux qui ont utilisé un autre rayon, ni ceux qui ont tracé un cercle de rayon 6 cm passant par un ou deux sommets ou par les trois sommets. Seuls les élèves classés en G2 ont utilisé la démarche qui consistait à utiliser les sommets du triangle comme centres de cercles de 6cm de rayon. 20% des élèves de CM2 ont réussi à changer leur point de vue sur l'usage qu'ils pouvaient faire de la définition du cercle.

La situation est inversée en 6^{ème} où la majorité des élèves (74%) se trouve dans G2. Ils ont utilisé une démarche adaptée. 3 élèves ont même dessiné au compas les médiatrices de deux côtés, appliquant là une propriété qui, a priori, relève du programme de 5^{ème} mais qu'il n'est pas rare de mettre en œuvre dès la classe de 6^{ème}. Parmi les élèves de 6^{ème} à qui nous avons attribué le code G1, nous trouvons tous ceux qui ne sont pas donc dans G2. Diverses réponses ont été considérées comme preuve d'un fonctionnement en G2 : depuis l'élève qui a tracé un cercle de rayon différent de 6 cm à celui qui a réussi par essais-erreurs à positionner la pointe sèche de son compas en un endroit satisfaisant pour la vue.

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme qu'il y a une très forte dépendance entre les variables ($\chi^2 = 24,57$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Les activités menées en 6^{ème} ont donc conduit une majorité d'élèves à changer plus facilement de point de vue mais on peut dans le même temps regretter qu'il reste 11 élèves sur 43 soit un quart de notre échantillon qui aient abordé l'activité de manière très concrète en restant focalisés sur l'usage de la pointe sèche du compas comme centre du cercle attendu.

2.7.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	2	14	16	8	40
6^{ème}	1	4	8	30	43
Total	3	18	24	38	83

On retrouve dans ce tableau les remarques faites précédemment puisque tous les élèves auxquels on a attribué le niveau N3 de déduction informelle sont aussi ceux qui ont eu une démarche plus théorique. Une très forte majorité des élèves de 6^{ème} (70%) se retrouve donc au niveau de déduction informelle quand ils ne sont que 20% des élèves de CM2.

Dans les autres niveaux, on peut aussi constater un certain nombre de disparités.

En particulier, dans la colonne N1 (identification-visualisation) où il y a 14 élèves de CM2 et 4 élèves de 6^{ème}. Ces élèves ont tracé des cercles de 6 cm de rayon qui ne passent pas par les trois sommets du triangle, loin de là.

Dans la colonne N2 (analyse), on trouve 16 élèves de CM2 soit 40% de l'effectif, et 8 élèves de 6^{ème} soit 19%. Ces élèves ont « réussi » à trouver un centre à peu près convenable puisque le cercle qu'ils ont tracé passe par les trois sommets de manière satisfaisante à l'œil. Certains confirment dans leurs commentaires qu'ils ont essayé plusieurs fois et qu'ils ont fini par trouver. D'autres affirment avoir « trouvé » du premier coup. Il est vrai qu'en dépit de l'insistance sur le fait de laisser toute trace de travail lors de la passation de l'épreuve, certains élèves se sont appliqués à ne laisser qu'un minimum de traces au point que sur certaines feuilles, n'apparaît qu'un seul trou : le centre du cercle qui convient. Néanmoins tous les élèves classés en N2 ont compris l'objet de l'exercice mais n'ont pas réussi à changer leur point de vue pour donner une autre solution. A ce niveau les élèves ont géré simultanément toutes les contraintes imposées dans la tâche mais leur démarche n'avait pour autant rien d'un raisonnement élaboré qui puisse s'apparenter à une déduction.

Si l'on regroupe les effectifs particulièrement faibles des colonnes N0 et N1, on obtient le tableau suivant :

	N0 + N1	N2	N3	Total
CM2	16	16	8	40
6^{ème}	5	8	30	43
Total	21	24	38	83

De ce tableau il ressort que les nombres d'élèves de CM2 dans les niveaux inférieurs ou égaux à N2 ou de 6^{ème} dans le niveau N3 sont d'un même ordre de grandeur : 80% en CM2 et 70% en 6^{ème}. Il semble donc que le niveau de van Hiele dont les élèves ont fait preuve au travers de cette activité dépende du niveau de scolarité. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme l'existence d'un lien entre les variables : χ^2 obs. = 21,08 ; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99.

2.7.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	G1	G2	Total
N0	2		2
N1	14		14
N2	16		16
N3		8	8
Total	32	8	40

6^{ème}

	G1	G2	Total
N0	1		1
N1	4		4
N2	6	2	8
N3		30	30
Total	11	32	43

Nous avons déjà remarqué que les élèves des deux niveaux ne se répartissaient pas du tout de la même manière entre les différents paradigmes et les niveaux de van Hiele. La comparaison de ces deux tableaux confirme, s'il en était besoin, cette disparité. Toutefois, on peut noter que dans la colonne G1 de chaque tableau, le nombre d'élèves sur la ligne N2 est très légèrement supérieur au nombre d'élèves sur la ligne N1, comme si, en proposant une tâche un peu différente et certainement moins conventionnelle les élèves pouvaient montrer des capacités d'adaptation intéressantes quant à l'apprentissage de l'abstraction et du raisonnement en géométrie en particulier. Les deux élèves de 6^{ème} qui sont répertoriés dans la case G2-N2 ont fait usage de connaissances théoriques qu'ils n'ont pas maîtrisées : ils ont dessiné des médianes ou des hauteurs qu'ils ont pu appeler médianes ou bissectrices tout en essayant de retrouver la construction du centre du cercle circonscrit par l'intermédiaire du point d'intersection des médiatrices. Pour ces quelques élèves, le fonctionnement en G2 n'a pas été très rentable puisque les cercles qu'ils ont tracés ne passent pas par les trois sommets du triangle et pour cause.

2.8. Exercice 2.5.

La différence essentielle avec l'exercice précédent réside dans le fait que le centre du cercle attendu est à l'extérieur du triangle et c'est pour cette raison que nous avons ajouté un exemple en vignette, sous la consigne. Le codage des réponses a été fait dans les mêmes conditions.

En CM2, 3 élèves sur 48 n'ont pas répondu à cet exercice. Notre échantillon se compose donc de 45 élèves. Parmi ceux qui ont tracé des cercles de 6 cm de rayon, l'un d'entre eux (P69) a même écrit : « C'est beaucoup trop dur pour un CM2. » Il n'a pas réussi à trouver un point satisfaisant pour que le cercle passe par au moins deux sommets du triangle.

En 6^{ème}, sur les 55 élèves à qui nous avons proposé l'activité, un seul n'a rien fait ; notre échantillon est donc de 54 élèves.

On peut aussi noter que, si quelques élèves de CM2 ont fait allusion à l'exemple donné en vignette, pour trouver le centre du cercle, aucun élève de 6^{ème} ne l'a mentionné.

2.8.1. PARADIGMES

	G1	G2	Total
CM2	36	9	45
6^{ème}	29	25	54
Total	65	34	99

Comme dans l'exercice précédent, ici, les élèves de CM2 sont très nombreux (80%) à avoir eu une démarche caractéristique d'un fonctionnement en G1. Seulement 9 d'entre eux ont réussi à construire le cercle en utilisant les sommets du triangle de manière appropriée. Quatre élèves (P2 ; P77 ; P154 ; P196) précisent qu'ils ont observé l'exemple avant de se mettre au travail. Un autre au contraire (P212) avoue : « J'ai fait au hasard. » alors que le cercle qu'il propose passe par les trois sommets du triangle de manière satisfaisante à l'œil.

En 6^{ème} la répartition est plus équilibrée : un peu moins de la moitié des élèves ont eu une démarche théorique pertinente en traçant des arcs de cercle appropriés voire les médiatrices des côtés, ce qui fut le cas pour 6 élèves (S57. S174. S187. S193 ; S196 ; S200). Il reste néanmoins plus de la moitié des élèves de 6^{ème} ayant abordé la tâche avec des outils relevant de G1 autrement dit sans utiliser complètement la définition du cercle, en particulier sans pouvoir changer de point de vue.

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme la dépendance entre les variables : l'enseignement assuré en 6^{ème} a modifié la réponse donnée à l'exercice (χ^2 obs. = 7,52 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84)

2.8.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	4	9	25	7	45
6^{ème}	5	5	19	25	54
Total	9	14	44	32	99

Dans ce tableau on peut remarquer que les 25 élèves de 6^{ème} qui étaient en G2 sont maintenant en N3 (déduction informelle) tandis que sur la ligne des CM2 seulement 7 élèves sont en N3 alors qu'ils étaient 9 en G2. Les deux élèves qui font défaut (P61 et P63) ont dessiné des arcs de cercle de 6 cm de rayon centrés aux sommets du triangle mais aucun d'entre eux n'a mené à terme sa démarche. P61 a utilisé le point d'intersection de deux arcs de cercle qui ne convient pas alors les tracés sont pertinents et P63 a placé le centre du cercle circonscrit sur un arc de cercle pertinent mais il a dû procéder par essais-erreurs puisqu'il n'a tracé qu'un seul arc de cercle. On peut remarquer que moins de la moitié des élèves de 6^{ème} sont maintenant dans la colonne N3 (25 sur 54 soit 46%) alors qu'ils étaient 70% dans la situation précédente. Dans une proportion moindre les élèves de CM2 sont aussi moins nombreux en N3 à l'issue de cette activité : 7 sur 45 soit 16% contre 20% précédemment. C'est sans doute là une confirmation de notre expérience quotidienne d'enseignant de Mathématiques que la recherche du centre du cercle circonscrit à un triangle est plus difficile quand celui-ci est extérieur au triangle. Les configurations associées aux triangles obtusangles sont peu familières aux élèves car elles sont plus rarement utilisées en classe et ne sont pas associées aux dessins prototypiques.

Les élèves repérés dans la colonne N2 (analyse) ont réussi, à l'œil, à trouver un point satisfaisant comme centre du cercle circonscrit. Ils constituent le groupe le plus nombreux : 44 élèves sur 99 soit 44% de notre effectif. On peut toutefois noter que la proportion d'élèves de CM2 (25 sur 45 soit 56%) est nettement supérieure à celle des 6^{ème} (19 sur 54 soit 35%). Toutefois l'écart est inférieur à ce qu'il était dans l'exercice 2.4. où les élèves de CM2 étaient deux fois plus nombreux que les élèves de 6^{ème} à ce même niveau de van Hiele.

Dans la colonne N1 (identification-visualisation) on trouve les élèves qui ont tracé un ou des cercles de rayon 6 cm et qui passent par un ou deux sommets du triangle. La proportion de ces élèves est supérieure en CM2 puisque 9 sur 45 soit 20% d'entre eux sont dans ce cas tandis qu'ils sont 5 sur 54 soit 9% en 6^{ème}. L'un d'entre eux (S226) précise lui-même : « J'y arrive pas ». Les commentaires laissés par les autres élèves ne suggèrent pas qu'ils aient eu conscience que le cercle qu'ils ont tracé ne passe que par un ou deux des trois sommets du triangle.

Dans la colonne N0, on trouve tous les élèves qui n'ont pas tracé de cercle de 6 cm de rayon. Le cas extrême étant sans doute le cas du sujet S175 qui a tracé le triangle symétrique du triangle donné par rapport au côté le plus long. Les autres élèves ont tracé des cercles de rayons variables soit autour du triangle soit sur la droite où la longueur 6 cm était représentée. On peut sans doute conjecturer que cette activité est plus difficile que la précédente si l'on considère que globalement et pour chaque groupe d'élèves, ce sont environ 10% des sujets qui sont à ce niveau quand ils n'étaient qu'un ou deux dans le cas où le centre du cercle est intérieur au triangle.

Si, comme nous l'avons fait précédemment, nous regroupons les effectifs des colonnes N0 et N1 nous obtenons le tableau suivant :

	N0 + N1	N2	N3	Total
CM2	13	25	7	45
6^{ème}	10	19	25	54
Total	23	44	32	99

De ce tableau il semble ressortir que le niveau de van Hiele maîtrisé par un élève puisse dépendre de son niveau de scolarité. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme cette hypothèse : χ^2 obs. = 10,60 ; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. Le lien entre le niveau de van Hiele et le niveau de scolarité est donc moins fort que précédemment mais il ne saurait être négligé pour autant.

2.8.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	G1	G2	Total
N0	4		4
N1	9		9
N2	23	2	25
N3		7	7
Total	36	9	45

6^{ème}

	G1	G2	Total
N0	5		5
N1	5		5
N2	19		19
N3		25	25
Total	29	25	54

Dans les colonnes G1 des deux tableaux, on remarque les élèves en N2 sont nettement plus nombreux qu'en N1, ce qui n'était pas le cas dans l'exercice précédent.

En revanche de la même façon, très rares sont les élèves dans la case G2-N2 : 2 élèves de CM2 cette fois quand il s'agissait de deux élèves de 6^{ème} plus tôt. On peut dire encore que le niveau d'analyse de van Hiele ne permet pas un « tuilage » entre G1 et G2. On peut donc conjecturer que ce type d'activités n'est guère favorable à l'émergence d'une démarche que nous avons rencontrée par ailleurs où l'élève aborde la tâche dans un contexte théorique (G2) sans utiliser véritablement un raisonnement hypothético-déductif (N2).

2.9. Comparaison entre les exercices 2.4. et 2.5.

La première question que l'on peut se poser est de savoir si les élèves de CM2 et de 6^{ème} ont utilisé les mêmes démarches dans les deux exercices dans la mesure où le centre du cercle est à l'intérieur du triangle dans l'exercice 2.4. et à l'extérieur dans l'exercice 2.5..

2.9.1. PARADIGMES

Si l'on considère les paradigmes utilisés par les élèves de chaque niveau dans chacune des activités nous obtenons les tableaux suivants :

CM2

	G1	G2	Total
Exercice 2.4.	32	8	40
Exercice 2.5.	36	9	45
Total	68	17	85

6^{ème}

	G1	G2	Total
Exercice 2.4.	11	32	43
Exercice 2.5.	29	25	54
Total	40	57	97

Il apparaît nettement que les élèves de Primaire ont fonctionné de la même manière dans les deux activités : très majoritairement en G1. Au contraire les élèves de 6^{ème} qui avaient fonctionné majoritairement en G2 pour l'exercice 2.4. dans un rapport de 3 pour 1, se retrouvent répartis de manière beaucoup plus équilibrée dans le cas de l'exercice 2.5., confirmant que la tâche demandée n'est plus du même niveau de difficultés pour les élèves. Pour les élèves de 6^{ème} le paradigme de fonctionnement semble lié à la tâche. Le test du χ^2 appliqué au tableau de résultats des 6^{ème} confirme cette hypothèse : $\chi^2 = 7,81$; ddl = 1 ;

$k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. On peut alors conclure que ces activités ne pouvaient être menées dans une géométrie proto-axiomatique pour les élèves de CM2 et que les élèves de 6^{ème} ont eu tendance à y retourner quand la difficulté de la tâche a augmenté.

Si l'on considère l'ensemble des résultats, on obtient le tableau suivant.

	G1	G2	Total
Exercice 2.4.	43	40	83
Exercice 2.5.	65	34	99
Total	108	74	182

On ne peut pas dire qu'il y ait un lien entre le paradigme de fonctionnement et le type de tâche demandée à l'élève. Le χ^2 vaut 3,59 (ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84).

Si les élèves ont eu tendance à fonctionner de la même manière dans les deux exercices, il peut être intéressant de comparer les paradigmes utilisés par chaque group d'élèves.

Si l'on regroupe ces tableaux en un seul on obtient :

	G1	G2	Total
CM2	68	17	85
6ème	40	57	97
Total	108	74	182

On voit alors très nettement que les effectifs se répartissent de manière opposée entre les lignes du tableau. La très grande majorité des élèves de CM2 a fonctionné dans G1 alors qu'une majorité (59%) des élèves de 6^{ème} a fonctionné dans G2. Le test du χ^2 confirme que les réponses des élèves sont directement liées à leur niveau de scolarité : $\chi^2 = 28,21$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Pour autant on ne peut pas dire que tous les élèves de 6^{ème}

maîtrisent la définition du cercle de façon à pouvoir l'utiliser avec un changement de point de vue, nécessaire dans ces deux activités.

2.9.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

Comparons maintenant les niveaux de van Hiele maîtrisés par les élèves de chaque niveau dans chacune de ces activités.

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.4.	2	14	16	8	40
Exercice 2.5.	4	9	25	7	45
Total	6	23	41	15	85

De la même façon que la plupart des élèves de CM2 ont fonctionné en G1, on trouve la majorité d'entre eux dans les niveaux N1 ou N2. Mais la répartition des élèves n'est pas équitable à l'intérieur de ces niveaux ; les plus nombreux se situent dans la colonne N2 (analyse) avec la particularité que 25 sur 45 soit 56% ont trouvé à l'œil une position satisfaisante pour le centre du cercle dans le cas de l'exercice 2.5. (centre à l'extérieur du cercle) quand ils ne sont que 16 sur 40 soit 40% à l'avoir fait dans le cas de l'exercice 2.4.. On se souviendra que 4 élèves ont reconnu avoir utilisé l'exemple pour travailler l'exercice 2.5.. D'autres élèves ont-ils utilisé l'exemple sans le dire ? Nous n'avons pas les moyens de répondre à cette question. C'est possible dans la mesure où l'exemple est semblable au triangle à étudier.

Quand on regroupe là encore les effectifs des colonnes N0 et N1, nous obtenons le tableau suivant :

	N0 + N1	N2	N3	Total
Exercice 2.4.	16	16	8	40
Exercice 2.5.	13	25	7	45
Total	29	41	15	85

On remarque alors que les niveaux de van Hiele ne sont pas liés à la tâche puisque les effectifs sont du même ordre à l'intérieur de chaque colonne. Le test du χ^2 confirme cette remarque : χ^2 obs. = 2,06 ; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. On pourrait alors conjecturer qu'un élève est caractérisé par un niveau de van Hiele particulier.

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.4.	1	4	8	30	43
Exercice 2.5.	5	5	19	25	54
Total	6	9	27	55	97

La plupart des élèves de 6^{ème} ont fonctionné en G2, et la majorité d'entre eux se retrouve dans la colonne N3 (déduction informelle) avec un pourcentage de réussite plus faible dans l'exercice 2.5 (25 sur 54 soit environ 46%) que dans l'exercice 2.4. (30 sur 43 soit près de 70%).

On peut remarquer aussi que, dans la colonne N2 (analyse) où les élèves ont réussi par tâtonnements à tracer un cercle qui passe de manière acceptable par les trois sommets du triangle, les effectifs sont assez différents. Même si aucun élève de 6^{ème} ne mentionne le recours à l'exemple pour faire sa recherche dans le cas de l'exercice 2.5., il se peut que celui-ci ait eu une certaine influence dans la mesure où la proportion d'élèves qui ont réussi cet exercice (19 sur 54 soit 35%) est supérieure à celle de l'exercice 2.4. (8 sur 43 soit 19%). On peut aussi noter que, dans l'exercice 2.5, davantage d'élèves se sont retrouvés en grande difficultés : 5 élèves dans chacune des colonnes N0 et N1 quand il n'y en a respectivement 1 et 2 à propos de l'exercice 2.4..

Selon toute vraisemblance, ici, il n'y a pas de lien entre le niveau de van Hiele attribué à un élève et la tâche qui lui a été confiée. Les écarts entre les effectifs ne sont pas très grands en dehors de la colonne N2 où l'on passe de 8 à 19 soit plus du double. D'ailleurs quand on regroupe les effectifs des colonnes N0 et N1 on obtient le tableau suivant :

	N0 + N1	N2	N3	Total
Exercice 2.4.	5	8	30	43
Exercice 2.5.	10	19	25	54
Total	15	27	55	97

Le test du khi deux appliqué au second tableau confirme, dans le cas des 6^{ème}, le fait que le niveau de van Hiele d'un élève soit indépendant de la tâche qui lui est confiée : $\chi^2 = 5,42$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99.

Si l'on regroupe en un seul tableau les résultats de tous les élèves concernant les niveaux de van Hiele, nous obtenons le tableau suivant.

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.4	3	18	24	38	83
Exercice 2.5	9	14	44	32	99
Total	12	32	68	70	182

Comme nous l'avons fait pour chaque groupe d'élèves, nous regroupons maintenant les effectifs des colonnes N0 et N1.

	N0 + N1	N2	N3	Total
Exercice 2.4	21	24	38	83
Exercice 2.5	23	44	32	99
Total	44	68	70	182

Quand bien même l'effectif le plus grand se situe dans la case N2 pour l'exercice 2.5. avec près de 50% de l'effectif, le test du χ^2 montre que les niveaux de van Hiele que nous avons attribués aux élèves ne sont pas liés aux exercices : $\chi^2 = 5,12$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. On pourrait alors dire que les niveaux de van Hiele que nous avons identifiés chez ces élèves sont propres à chacun et sans lien avec la tâche. Mais un même élève n'a fait qu'une seule des deux recherches.

Puisque ces activités permettent de caractériser le niveau de développement d'un élève en termes de niveaux de van Hiele, nous pouvons comparer ce qui s'est passé en CM2 et en 6^{ème} en réunissant dans un seul tableau, les effectifs obtenus à partir de chacune des activités 2.4. et 2.5..

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	6	23	41	15	85
6^{ème}	6	9	27	55	97
Total	12	32	68	70	182

Dans ce tableau on voit tout de suite qu'un certain nombre d'élèves n'ont pas compris la consigne ou n'ont pas su dessiner un cercle de rayon 6 cm, quel que soit leur niveau de scolarité. Ces élèves sont dans la colonne N0.

La répartition des effectifs dans les autres cases semble suggérer que les niveaux de van Hiele atteints par les élèves dépendent de leur niveau de scolarité. En effet d'une ligne à l'autre les effectifs sont très différents. De plus la répartition des effectifs est très différente d'un niveau à l'autre. En CM2, la moitié des élèves se situe dans la case N2, et plus d'un quart dans la

case N1 et 15 élèves soit 18%, dans la case N3. On peut alors conjecturer que les compétences en géométrie en fin de CM2 sont très hétérogènes. En revanche en 6^{ème}, l'impression est tout autre puisque 55 élèves sur 97 soit près de 57% sont au niveau N3 de déduction informelle sur l'ensemble des deux tâches. Dans le même temps 27 élèves soit 28% de l'effectif sont au niveau d'analyse dans le cadre de ces activités. Il y a néanmoins respectivement 6 élèves qui n'ont pas été en mesure de respecter au moins l'une des contraintes de la consigne et 9 élèves (près de 10%) qui ont répondu en traçant un cercle de rayon 6 cm passant par un seul sommet du triangle. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme le lien entre les variables : $\chi^2 = 31,20$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,82. Donc là encore, à l'issue de l'analyse de ces résultats nous pouvons dire que le niveau de van Hiele atteint par un élève dépend de son niveau de scolarité sans nécessairement être lié à la tâche.

2.9.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	G1	G2	Total
N0	6		6
N1	23		23
N2	39	2	41
N3		15	15
Total	68	17	85

6^{ème}

	G1	G2	Total
N0	6		6
N1	9		9
N2	25	2	27
N3		55	55
Total	40	57	97

L'observation de ces deux tableaux amène une remarque majeure : ce type de tâches n'a pas permis l'émergence de démarches que nous avons identifiées pour d'autres exercices dans la case G2-N2. En effet, les deux cas où nous l'avons rencontrée ici ont été les suivants : les élèves ont commencé par tracer des arcs de cercle de 6 cm de rayon, centrés sur les sommets du triangle, mais n'ont pas su tirer les conclusions pertinentes pour aboutir au centre du cercle circonscrit.

A l'intérieur des colonnes G1, on peut remarquer que selon le niveau de scolarité, la répartition est très différente, même si l'effectif le plus grand est au niveau N2 d'analyse.

2.10. Codage des exercices 2.6 à 2.9.

Dans ces exercices, les élèves doivent déterminer la nature du triangle ABD sachant que les triangles ABC et ACD sont isocèles en A. Dans les différentes versions de cet exercice, le dessin à main levée est toujours le même ; seules varient les indications des longueurs BC et CD. En outre, la distance entre les points A et B, A et C, A et D et B et D est de 5 cm. Cela a induit une tentation dans l'utilisation du schéma puisque les élèves qui ont mesuré ont eu la confirmation que la distance entre les derniers points cités était la bonne, donc vraisemblablement on pouvait s'appuyer sur ce schéma, c'est-à-dire mesurer toutes les distances entre les points.

2.10.1. PARADIGMES

GX : toute copie pour laquelle nous n'avons pu déterminer si l'élève avait mesuré ou analysé la situation. La plupart du temps les commentaires sont assez éloignés de l'objet de l'activité.

G1 : tout élève qui a mesuré ou utilisé les distances entre les points du schéma. Ceci se manifeste de plusieurs manières. L'élève a indiqué les mesures sur le schéma au millimètre près et en tire des conclusions sur la nature du triangle ABD, conclusions qui peuvent être pertinentes ou non selon la précision de ses mesures. Nous avons aussi utilisé ce code dans le cas où l'élève n'a pas indiqué de mesure sur le schéma mais les explications qu'il donne y fait référence, en particulier quand il conclut que le triangle ABD est équilatéral parce que ses trois côtés ont la même mesure. Est aussi considéré comme ayant fonctionné en G1 l'élève qui écrit que le triangle ABD étant isocèle il ne peut pas être équilatéral, sans évocation particulière de mesure. En effet un tel élève ne maîtrise pas l'inclusion entre les différentes figures particulières. Il ne relève donc pas de G2.

G2 : tout élève qui montre qu'il a su gérer la transitivité des égalités de longueur sans avoir recours à la mesure et qui gère l'inclusion entre les différents triangles. Ici l'élève devait évoquer que l'on n'avait a priori aucune information quant à la longueur BD, ou dans le cas des exercices 2.7 à 2.9, cette longueur pouvait être différente de 5 cm à cause de l'inégalité triangulaire.

2.10.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

N0 : toute réponse indiquant que l'élève ne connaît pas la définition des triangles isocèle et équilatéral ou qu'il les confond.

N1 (identification-visualisation) : L'élève témoigne de la connaissance des définitions des deux triangles. Pour cela il peut avoir mesuré ou analysé les informations données dans l'énoncé mais il n'a pas utilisé de compétence autre pour répondre aux questions de l'exercice. Il se peut même qu'à propos du triangle isocèle, il cite [AB] et [BD] comme étant deux côtés de même longueur s'il a fait des mesures. Nous avons codé aussi N1 la démarche suivante : ayant mesuré les distances entre les points A, B et D, l'élève conclut que le triangle

est équilatéral et que par conséquent il n'est pas isocèle. Un tel élève peut avoir indiqué les mesures sur le dessin ou, le cas échéant, rempli les cases des tableaux à partir des mesures qu'il a faites. La précision de ses mesures sera déterminante pour sa conclusion. Nous allons ainsi regrouper sous le code N1 des élèves qui peuvent avoir des réponses justes aux questions a) et b) ou fausses aux deux questions ou à l'une des deux seulement. C'est la démarche et l'ensemble des réponses qui détermine notre position. En effet il est fort probable que si la distance entre les points du schéma avait été toute autre, les conclusions de ces élèves auraient été différentes. Quand bien même certains d'entre eux peuvent laisser à penser qu'ils gèrent l'inclusion entre les triangles particuliers, cette attitude n'est certainement due qu'au fait que le schéma proposé est très proche d'une figure en vraie grandeur.

N2 (analyse) : Un élève à ce niveau est capable de lister les propriétés d'une figure sans que celle-ci soit dessinée avec application. Il peut donc évoquer les égalités de longueur sans avoir mesuré. Mais l'élève ne perçoit pas encore que le triangle équilatéral est un cas particulier de triangle isocèle. Il fonctionne dans l'exclusion des figures les unes par rapport aux autres. Donc un élève qui maîtrise le niveau d'analyse peut coder l'égalité des longueurs AB, AC et AD sur le schéma qui lui est proposé ou remplir les cases correspondantes des tableaux et avoir ainsi la certitude que le triangle ABD est isocèle. Sa réponse à la question a) est juste et peut être correctement argumentée. En revanche, il n'y a aucune information sur la longueur BD, donc ceci devrait être source de difficulté dans la réponse à la question b). L'élève ne peut déterminer la nature du triangle ABD en utilisant une démarche identique. Un des moyens que nous aurons de repérer qu'un élève est à ce niveau est dans une réponse du type : « Si c'est un triangle isocèle, il ne peut pas être un triangle équilatéral ». Il se peut aussi que l'élève ne réponde pas à la question b) ou dans les exercices 2.7. à 2.9., qu'il fasse référence à l'inégalité triangulaire avec plus ou moins de réussite.

N3 (déduction informelle) : A ce niveau, l'élève maîtrise le fait que le triangle équilatéral est un cas particulier de triangle isocèle. Il n'a pas besoin de mesurer la distance entre les points du dessin qui lui est proposé. Il maîtrise la transitivité de l'égalité des longueurs AB, AC et AD que ce soit en codant le schéma ou en remplissant le tableau et est capable de l'exprimer pour en déduire que le triangle ABD est isocèle en A et répondre ainsi correctement à la question a). De plus, il maîtrise le fait que les informations concernant la longueur BD sont ou inexistantes ou insuffisantes et il les utilise pour conclure que l'on ne peut affirmer que le triangle est équilatéral. Dans le cas des exercices 2.7. et 2.9. où les longueurs BC et CD valent

respectivement 2 cm et 3 cm, il peut conclure, en utilisant l'inégalité triangulaire que la longueur BD est différente de 5 cm et ainsi que le triangle n'est pas équilatéral. La réponse à la question b) est juste et correctement argumentée. Dans le cas de l'exercice 2.8. où les longueurs BC et CD valent respectivement 3 cm et 4 cm, l'élève ne peut prévoir quelle sera la longueur de [BC] même si le point C est unique, et l'explication qu'il donne devrait traduire cette incertitude, incertitude que l'on doit retrouver dans le tableau, si elle n'est pas évoquée dans le texte.

2.11. Exercice 2.6.

12 élèves de CM2 et 16 élèves de 6^{ème} ont fait cette tâche.

Dans la version de cette activité, seule l'indication 5 cm figure sur le côté [AB]. Les longueurs BC et CD sont inconnues et la distance entre les points A et B est de 5 cm. La tentation est donc très grande de mesurer les distances entre les autres points.

On peut déjà noter que seulement deux élèves de CM2 (P58 et P164) et un seul élève de 6^{ème} (S22) ont refait une figure. A chaque fois ils ont dessiné un triangle équilatéral qu'ils ont complété avec les distances entre les points B et C d'une part C et D d'autre part mesurées sur le schéma. L'élève P164 s'est même limité à dessiner un triangle équilatéral.

Les tableaux suivants indiquent nettement que les élèves ont été très nombreux à mesurer.

2.11.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	0	10	2	12
6^{ème}	3	11	2	16
Total	3	21	4	28

Le constat est qu'il n'y a pas de différence de comportement entre les élèves de CM2 et ceux de 6^{ème}. Une très grande majorité d'entre eux a vérifié soit à la règle soit au compas les distances entre les points. A chaque niveau de scolarité les deux élèves pour lesquels nous avons utilisé le code G2 (P195 ; P223 ; S115 ; S225) sont des élèves qui ont témoigné dans leurs textes qu'ils étaient en mesure de gérer la transitivité des égalités de longueurs puis d'accepter l'incertitude sur le caractère équilatéral du triangle ABC en ne se donnant aucune réponse à ce propos. Par exemple S225 a écrit : « Oui on est certain que le triangle ABD est un triangle isocèle car AB égale 5 cm donc AC aussi. Si AC égale 5 cm, AD égale 5 cm car il est isocèle. »

2.11.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	2	8	0	2	12
6^{ème}	4	10	0	2	16
Total	6	18	0	4	28

Dans ce tableau on peut remarquer que la colonne N2 (analyse) est vide. Aucun élève n'a été en mesure de témoigner d'une certaine compréhension de la situation géométrique, en particulier l'absence d'information sur la longueur BD. Si le code N1 (identification-visualisation) a été utilisé pour les deux tiers des élèves de chaque niveau c'est parce qu'ils ont indiqué dans leurs réponses qu'ils connaissaient la définition de chaque triangle. Les 6 élèves auxquels nous avons attribué le code N0 sont des élèves qui, soit ont confondu les définitions entre elles, soit ont confondu avec celle du triangle rectangle, ou encore ont fait des commentaires hors de propos. Les deux élèves de CM2 et de 6^{ème} qui sont dans la colonne N3 sont les élèves qui étaient dans la colonne G2 du tableau précédent. Ils ont su gérer la transitivité de l'égalité et n'ont pas affirmé que le triangle ABD était équilatéral.

2.11.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0		2		2
N1		8		8
N2				
N3			2	2
Total	0	10	2	12

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	3	1		4
N1		10		10
N2				0
N3			2	2
Total	3	11	2	16

Les répartitions des effectifs dans les deux tableaux sont tout à fait semblables. Dans cette tâche, il n'y a donc aucune différence de comportement entre les deux groupes d'élèves. En particulier la ligne N2 du niveau d'analyse de la théorie de van Hiele est vide dans les deux tableaux.

On peut ajouter que sous cette forme une telle tâche est mal adaptée à l'expression de la diversité des niveaux de développement des élèves de CM2 ou de 6^{ème}. Soit elle est inaccessible, soit elle est complètement réussie mais par une très faible minorité des élèves.

2.12. Exercice 2.7.

Rappelons que dans cette version de l'exercice, nous avons complété le schéma par deux indications de longueur : $BC = 2$ cm et $CD = 3$ cm. Cette fois la distance entre les points du schéma n'est pas égale à la longueur indiquée. Afin d'aider les élèves dans leurs démarches nous avons aussi proposé un tableau à double entrée où les cases correspondant aux longueurs annoncées sur le schéma sont cochées. Le tableau se présente donc ainsi :

	2 cm	3 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

20 élèves de CM2 et 20 élèves de 6^{ème} ont fait cet exercice. Tous ont complété le tableau, soit en indiquant dans leur texte qu'ils avaient mesuré sur le schéma soit sans indication aucune. Certains élèves ont rédigé des textes qui peuvent être en contradiction avec les cases qu'ils ont cochées dans le tableau. Les élèves qui ont fait des figures sont nettement plus nombreux que dans le cas de l'exercice 2.6.. En tout 17 élèves sur 40 (43%) ont fait des tracés, les 6^{ème} étant plus nombreux que les CM2

	pas de figure	figure juste	figure fausse	triangle équilatéral complété approximativement	triangle équilatéral seul	Total
CM2	14	1	2	3		20
6 ^{ème}	9	5	2	2	2	20
Total	23	6	4	5	2	40

On peut constater que près des trois quarts des élèves de Primaire et la moitié des élèves de 6^{ème} n'ont pas fait de figure mais à l'inverse on peut dire aussi qu'un quart des élèves de CM2

et la moitié de 6^{ème} ont complété leur raisonnement à l'aide d'un support graphique. En CM2 seul un élève a réalisé une figure juste quand ils sont 5 en 6^{ème}. L'influence des distances repérées sur le schéma se retrouve dans les 7 figures identifiées dans les colonnes « triangle équilatéral complété approximativement » et triangle équilatéral seul ». Il semble que les élèves ont ensuite été assez embarrassés pour poursuivre leur construction. En effet, l'intitulé de la colonne « triangle équilatéral complété approximativement » signifie que ces figures sont basées sur le tracé d'un triangle équilatéral et que les longueurs BC et CD mesurent approximativement 2 cm et 3 cm. A chaque fois, l'épaisseur des traits permet cette approximation qui risque d'induire des réponses mal argumentées aux deux questions.

2.12.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	1	16	3	20
6^{ème}	4	6	10	20
Total	5	22	13	40

On remarque immédiatement une répartition très différente des modes de fonctionnement entre les élèves de CM2 et ceux de 6^{ème}. Plus des trois quarts des élèves de CM2 ont fonctionné dans G1, c'est-à-dire qu'ils ont mesuré ou indiqué qu'ils avaient eu recours au schéma comme s'il avait été une figure en vraie grandeur alors que la moitié des élèves de 6^{ème} ont fonctionné en G2.

Parmi les 16 élèves de CM2 qui ont fonctionné en G1 seul l'un d'entre eux a été capable de faire une figure juste mais le texte qu'il propose indique qu'il ne fait aucun lien entre les différents éléments de la figure au point que les cases qu'il coche dans le tableau sont en contradiction avec les mesures qu'il a utilisées pour réaliser sa figure. 10 d'entre eux n'ont pas fait de figure pour s'approprier la situation géométrique, confiants sans doute qu'ils étaient dans les mesures prises sur le schéma.

A l'opposé les élèves de 6^{ème} qui sont dans la colonne G2 ont su gérer la transitivité de l'égalité des longueurs AB, AC et AD au point que cela apparaît dans le tableau ou dans leur texte. La réponse à la question b) concernant le caractère équilatéral du triangle ABD est plus délicate à traiter dans la mesure où la réponse est négative. On peut remarquer que parmi les 10 élèves de 6^{ème} qui apparaissent dans la colonne G2, seuls 5 d'entre eux ont eu recours à une figure soignée et juste. Les autres ont pu faire des figures fausses à partir desquelles ils ont raisonné correctement ou n'ont pas fait de figure.

	GX + G1	G2	Total
CM2	17	3	20
6^{ème}	10	10	20
Total	27	13	40

Si l'on regroupe les effectifs des colonnes GX et G1, on obtient un tableau où l'on voit nettement que le paradigme dans lequel les élèves ont fonctionné dépend du niveau de scolarité. En effet nous avons une répartition équilibrée entre les deux paradigmes en 6^{ème} quand elle est de l'ordre de 6 pour 1 en faveur de G1 en CM2.

2.12.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	4	9	4	3	20
6^{ème}	3	7	0	10	20
Total	7	16	4	13	40

Les remarques qui viennent d'être faites à propos des modes de fonctionnement des élèves se répètent lorsqu'on s'intéresse aux niveaux de van Hiele que l'on a pu attribuer à chacun.

Tout d'abord les 7 élèves que l'on trouve dans la colonne N0 sont des élèves qui ne semblent pas connaître les définitions des triangles isocèle et équilatéral soit parce qu'ils les confondent entre elles soit parce qu'ils les confondent avec celle du triangle rectangle.

Nous avons maintenant 9 élèves de CM2 en N1 : ils ont montré qu'ils connaissent les définitions des triangles mais n'ont pas été en mesure d'aller au delà.

On peut s'arrêter sur le cas des quatre élèves de CM2 (P74, P116, P163 et P192) de la colonne N2 (analyse). Ces élèves indiquent dans les tableaux que les trois longueurs AB, AC et AD sont égales mais n'en font pas mention dans leur texte. De plus à la deuxième question, les réponses qu'ils donnent montrent leur embarras dans la gestion de l'inégalité triangulaire. En particulier P163 affirme : « Oui c'est un triangle équilatéral car ses côtés sont tous de la même longueur. » et, pour preuve de son affirmation (?), il a repassé au crayon les tracés entre B et C d'une part, C et D d'autre part d'un trait appuyé. Notre interprétation serait qu'il considère que la distance BD est égale à la somme des distances BC et CD. P74 répond « à la vision on peut s'aider de BC et CD » (fait-il allusion à l'inégalité triangulaire ?) et P116 qui a fait une figure juste, écrit « parce que le segment [BC] mesure 5,2 cm. Enfin P192 écrit : « Pas tout à fait mais je pense que oui, car si on fait de BCD une seule ligne, elle ferait 5cm. ». Il est sans doute important de remarquer qu'aucun élève de 6^{ème} n'est en N2. En effet nous n'avons pas rencontré d'élève qui décrive la situation géométrique sans relation d'incidence entre ses divers éléments, comme un lien entre la figure et les sous-figures que sont les triangles isocèles ABC et ACD.

En revanche dans la colonne N3 (déduction informelle) nous avons 10 élèves de 6^{ème} et aucun élève de CM2. Ils ont été capables d'utiliser correctement la transitivité de l'égalité dans la première question et les allusions qu'ils ont pu faire dans la deuxième question montrent qu'ils ont conscience de l'inégalité triangulaire sans pour autant être toujours très précis dans leurs explications. Nous avons à ce propos eu tendance à interpréter favorablement tout commentaire quelque peu ambigu. Ainsi à la première question S107 a répondu « oui car puisque le triangle ABC est isocèle il a deux côtés de 5 cm AB et AC, le triangle ADC est isocèle et comme le côté AC mesure 5 cm, le côté AD aussi alors le triangle ABD est isocèle car deux de ses côtés mesurent 5 cm. » A la deuxième question S147 écrit : « on ne connaît que deux longueurs AB et AD », laissant entendre que les informations sont insuffisantes pour conclure.

Si l'on regroupe les effectifs des colonnes N0 et N1 d'une part et ceux des colonnes N2 et N3 d'autre part, on obtient un tableau duquel il ressort que les niveaux de van Hiele qu'ils soient de base ou supérieurs ne sont pas ici, liés au niveau de scolarité.

	N0 + N1	N2 + N3	Total
CM2	13	7	20
6^{ème}	10	10	20
Total	23	17	40

2.12.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	1	3		4
N1		9		9
N2		4		4
N3			3	3
Total	1	16	3	20

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	3			3
N1	1	6		7
N2				0
N3			10	10
Total	4	6	10	20

La seule différence entre les deux tableaux concerne la ligne N2 où nous avons 4 élèves de CM2 et aucun élève de 6^{ème}. Ces quatre élèves ont tous fonctionné dans G1. Dans l'exercice précédent, cette ligne était vide dans les deux tableaux. On peut donc conjecturer qu'un tel exercice n'est guère favorable à un apprentissage de la géométrie qui procède par zone de développement proximal. Est-ce aussi le cas dans les autres versions de cette activité ?

2.13. Exercice 2.8.

Dans cet exercice, par rapport au précédent, le changement de variable didactique porte sur les longueurs BC et CD puisque celles-ci sont proposées comme étant respectivement égales à 3 cm et 4 cm. Ceci a été conçu dans le but de mesurer l'impact, s'il existe, de la prise en compte des informations puisque $3 + 4 \neq 5$ et les distances entre les points sur le dessin sont très différentes de 3 cm et 4 cm. Les élèves faisant la construction de la figure en vraie grandeur peuvent alors constater que la longueur BC est nettement supérieure à 5 cm, ce qui n'était pas le cas dans l'exercice précédent. En effet à cause de mesures approximatives ou de la somme $3 + 2 = 5$, certains élèves pouvaient avoir conclu que le triangle ABC était équilatéral.

20 élèves de CM2 et 19 élèves de 6^{ème} ont fait cet exercice. Les résultats obtenus ici ainsi qu'à l'exercice précédent seront donc directement comparables.

	pas de figure	figure juste	figure fausse	autres figures	Total
CM2	14	1		5	20
6^{ème}	10	2	2	5	19
Total	24	3	2	5	34

De ce tableau, il ressort que très nombreux sont les élèves qui n'ont pas fait de figure. Près des trois quarts des élèves de CM2 et la moitié des élèves de 6^{ème} sont dans ce cas. En revanche seulement 3 élèves ont réussi à faire une figure juste. Les figures réalisées par les

autres élèves montrent combien ils ont été influencés par le schéma suggérant que le triangle ABD puisse être équilatéral. Dans la colonne « autres figures », nous trouvons des constructions telles que la reproduction du schéma, le tracé d'un triangle équilatéral complété approximativement d'un triangle BCD dont les côtés mesurent environ 3 cm et 4 cm, un triangle ABC dont le côté [BC] mesure 7 cm,...

Dans cette version de l'exercice comme dans le n°2.7., les élèves avaient à leur disposition le tableau à double entrée concernant les mesures des différents segments de la figure. Tous les élèves ont complété le tableau mais il n'est pas certain qu'il y ait un lien entre le remplissage du tableau et le texte proposé par l'élève. Certains d'entre eux ont même coché deux cases d'une même ligne laissant entendre que le même segment avait deux longueurs : en général la distance mesurée entre les points du schéma et le fait que l'on ne connaisse pas cette longueur.

2.13.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	1	17	2	20
6^{ème}	2	13	4	19
Total	3	30	6	39

Tout de suite on remarque que la plupart des élèves de chaque niveau ont fonctionné dans G1, même s'ils n'ont pas refait de figure. Ils sont ainsi 85% en CM2 et 68% en 6^{ème}. Les indications qu'ils donnent montrent qu'ils ont mesuré les distances entre les points du schéma et que leurs conclusions en dépendent. Le seul élève de CM2 qui ait fait une figure que nous avons considérée comme juste a lui aussi été classé en G1 parce qu'en fait son tracé est assez grossier et il n'y a aucune indication qu'il ait utilisé les propriétés du triangle isocèle sans référence au dessin. Les traces qu'il a laissées laissent à penser qu'il a pratiqué par essais-erreurs plus que par déduction. Il est intéressant de remarquer que les élèves de 6^{ème} sont plus nombreux ici à avoir fonctionné dans G1 que dans l'exercice précédent. De 6 élèves sur 20 dans l'exercice 2.7., on passe à 13 sur 19 dans cet exercice.

Il nous paraît intéressant d'indiquer que les deux élèves de CM2 qui ont vraisemblablement fonctionné en G2 n'ont pas fait de figure. En revanche les 4 élèves de 6^{ème} ont eu des comportements variables : S114 n'a pas fait de figure, S25 et S181 ont fait une figure juste, et S21 a construit une figure à partir des mesures prises sur le schéma. Les textes proposés par ces élèves sont donc indépendants de leurs réalisations graphiques. Par exemple, S25 a donné comme réponse à la première question : « Oui on est certain que le triangle ABD est isocèle car [AB] a la même longueur que [AC] qui a la même longueur que [AD] ». S21 a écrit en réponse à la deuxième question : « non, car on ne sait pas combien mesure le segment BD. ». Le texte de cet élève est donc indépendant de son dessin puisque, nous l'avons signalé plus haut, il a reproduit le schéma à la règle et au compas.

2.13.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	3	13	3	1	20
6^{ème}	2	11	2	4	19
Total	5	24	5	5	39

Ici il n'y a que 5 élèves qui soient dans la colonne N0 c'est-à-dire que, d'après leurs textes on ne peut savoir s'ils distinguent un triangle isocèle d'un triangle équilatéral.

Plus de la moitié des élèves de chaque niveau se situent au niveau N1 (identification-visualisation) et seulement 5 élèves sont au niveau N2 d'analyse soit 13% de notre échantillon. D'une certaine manière la situation que nous avons rencontrée dans l'exercice précédent se reproduit ici. Rares sont les élèves qui ont été capables d'analyser la situation géométrique en se dégageant du fait que le schéma proposé n'était pas une figure en vraie grandeur. La transitivité de l'égalité a été rarement évoquée. Ce qui a très certainement gêné le plus les élèves est le fait que les distances entre les points B, C et D sur le schéma sont très différentes des mesures proposées.

Les 5 élèves qui sont dans la colonne N3 (déduction informelle) sont pour la plupart des élèves de 6^{ème} : le texte qu'ils ont proposé témoigne de la gestion de la transitivité de l'égalité

entre les longueurs AB, AC et AD et le fait qu'il n'y a pas d'assurance que la longueur BC soit elle aussi égale à 5 cm. Comme dans l'exercice 2.7., les élèves de 6^{ème} ont été proportionnellement plus nombreux que ceux de CM2 à faire un tel raisonnement.

A l'issue de cette activité, la répartition des élèves entre les différents niveaux de van Hiele ou les deux paradigmes ne semble pas dépendre du niveau de scolarité. En effet, les élèves se retrouvent majoritairement dans le paradigme G1 et le niveau N1.

2.13.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	1	2		3
N1		13		13
N2		2	1	3
N3			1	1
Total	1	17	2	20

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	2			2
N1		11		11
N2		2		2
N3			4	4
Total	2	13	4	19

Une fois de plus la ligne N2 est très peu utilisée dans ces tableaux. Nous avons un seul élève de CM2 représenté dans la case N2-G2 ; il s'agit de P215. Il n'y a aucune indication sur le schéma qui prouve qu'il a mesuré les distances à la règle. D'après le tableau, les longueurs AC et AD sont égales aussi à 5 cm et la longueur BD est égale à 4 cm. A la première question, il a répondu : « oui, car de A à B il y a 5 cm donc C et D vont être à la même mesure. » C'est pour nous l'expression de la transitivité de l'égalité. En revanche en guise de réponse à la deuxième question, ce même élève a écrit : « non car dans le tableau on voit que la distance entre C et D fait 4 cm donc BD ça fait 4 cm. » Le raisonnement qui sous-tend une telle affirmation n'est pas clair. Nous n'avons pas pu considérer qu'un tel élève relève complètement du niveau de déduction informelle (N3).

2.14. Comparaison entre 2.7. et 2.8.

Dans la mesure où la seule variable didactique entre les exercices 2.7. et 2.8. était les longueurs BC et CD, il est intéressant d'analyser si celle-ci a eu un impact ou non sur les réponses données par les élèves.

2.14.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.7.	5	22	13	40
Exercice 2.8.	3	30	6	39
Total	8	52	19	79

Ce qui ressort de ce tableau est le fait que dans les deux exercices, les élèves ont fonctionné dans G1 dans plus de la moitié des cas, voire aux trois quarts dans le cas de l'exercice 2.8.. Du coup ils ont été proportionnellement moins nombreux à fonctionner dans G2 dans ce même exercice.

	GX + G1	G2	Total
Exercice 2.7.	27	13	40
Exercice 2.8.	33	6	39
Total	60	19	79

Dans le tableau ci-dessus, nous avons regroupé les effectifs des colonnes GX et G1. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau montre qu'il n'y a pas de dépendance entre les variables : $\chi^2 = 3,16$; ddl = 1 ; $k > .,05$; χ^2 critique = 3,84. Autrement dit le mode de fonctionnement des élèves n'a pas vraiment changé d'un exercice à l'autre et l'effet des variables didactiques que nous avons mises en place s'est révélé négligeable.

Si l'on considère maintenant les modes de fonctionnement des élèves selon leur niveau de scolarité, nous obtenons les tableaux suivants

CM2

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.7.	1	16	3	20
Exercice 2.8.	1	17	2	20
Total	2	33	5	40

De ce premier tableau, il ressort que le comportement des élèves de CM2 n'a pas changé d'un exercice à l'autre.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.7.	4	6	10	20
Exercice 2.8.	2	13	4	19
Total	6	19	14	39

En revanche le comportement des élèves de 6^{ème} a été différent. Si la moitié d'entre eux ont su fonctionner en G2 pour l'exercice 2.7., il n'y en a qu'un quart qui a su le faire dans l'exercice 2.8. Toutefois les effectifs sont ici très réduits et il serait présomptueux de dire que le mode de fonctionnement des élèves est lié à la tâche qui leur était proposée.

Si l'on regroupe maintenant les effectifs de chaque colonne des tableaux précédents, nous obtenons :

	GX	G1	G2	Total
CM2	2	33	5	40
6^{ème}	6	19	14	39
Total	8	52	19	79

En réunissant comme nous l'avons déjà fait les effectifs des colonnes GX et G1, le tableau se réduit à :

	GX +G1	G2	Total
CM2	35	5	40
6^{ème}	25	14	39
Total	60	19	79

Les effectifs de chaque case sont maintenant plus grands. La répartition des élèves de chaque niveau est différente entre les deux paradigmes. En appliquant le test du χ^2 , nous avons une preuve que le mode de fonctionnement est lié au niveau de scolarité : χ^2 obs. = 5,92 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84.

2.14.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.7.	7	16	4	13	40
Exercice 2.8.	5	24	5	5	39
Total	12	40	9	18	79

On retrouve dans ce tableau une répartition semblable à celle du tableau précédent. Le fait marquant est sans doute que dans les deux exercices, rares ont été les élèves pour lesquels nous avons utilisé le code N2 (analyse). Ceux qui vraisemblablement ne connaissent pas les définitions des triangles isocèle et équilatéral sont plus nombreux : 12 élèves dans la colonne N0 ! La moitié des élèves se retrouve ainsi dans la colonne N1 (identification-visualisation) et à peine un quart d'entre eux dans la colonne N3 (déduction informelle). On peut noter que c'est dans l'exercice 2.7. que les élèves sont les plus nombreux au niveau de déduction informelle (13 contre 5 pour l'exercice 2.8.).

Il est donc intéressant de regarder maintenant ce que les élèves de chaque niveau ont montré dans ces exercices.

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.7.	4	9	4	3	20
Exercice 2.8.	3	13	3	1	20
Total	7	22	7	4	40

Les élèves de CM2 ont eu tendance à témoigner des mêmes niveaux de compétences dans les deux exercices avec une légère accentuation au niveau N1 d'identification-visualisation dans le cas de l'exercice 2.8. . Donc le changement de variable didactique relatif aux longueurs BC et CD n'a eu que peu d'incidence. La moitié des élèves a témoigné de la connaissance des triangles isocèle et équilatéral. Quelques uns ont montré qu'ils pouvaient analyser la situation (N2) ou commencer à élaborer un raisonnement hypothético-déductif (N3). Ils ne représentent qu'un quart de notre échantillon.

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.7.	3	7	0	10	20
Exercice 2.8.	2	11	2	4	19
Total	5	18	2	14	39

Ici la situation est différente. En effet on trouve la moitié des élèves de 6^{ème} dans la colonne N3 (déduction informelle) à propos de l'exercice 2.7. et plus de la moitié des élèves dans la colonne N1 (identification-visualisation) à propos de l'exercice 2.8.. Même si les effectifs sont limités, on peut penser que le changement de variable didactique a eu un impact sur l'attitude des élèves. Dans l'exercice 2.8., les distances entre les points du schéma sont assez différentes de ce qu'elles seraient sur une figure en vraie grandeur, ce qui n'est pas le cas pour l'exercice 2.7.. On pourrait conclure alors qu'un schéma proche de la figure en vraie grandeur est un support efficace pour atteindre le niveau de déduction informelle. Mais ce n'est là qu'une possibilité.

En regroupant les deux tableaux nous obtenons :

	N0 +N1	N2 + N3	Total
CM2	29	11	40
6^{ème}	23	16	39
Total	52	27	79

Nous pouvons dire que les niveaux de van Hiele mis en évidence lors de ces activités ne sont pas liés au niveau de scolarité. Plus exactement, la nature même de l'activité semble peu propice à l'émergence de compétences particulières contrairement à ce que nous avons pu constater en d'autres occasions.

2.15. Exercice 2.9.

Dans cet exercice, le nouveau changement de variable didactique porte sur le fait que les mesures indiquées sur le schéma sont celles de l'exercice 2.7. ($BC = 2$ cm et $CD = 3$ cm) mais le tableau à double entrée a été remplacé par le début d'une figure en vraie grandeur : le triangle ABC a été dessiné et les traces de compas, en particulier le cercle de centre A, sont indiquées.

En CM2, 12 élèves ont reçu le questionnaire mais un élève n'a rien répondu. Nous n'avons donc que 11 réponses utilisables à cette activité.

En 6^{ème}, 16 élèves ont eu cette même tâche et ils ont tous répondu.

Le changement de variable didactique étant la proposition du début d'une figure en vraie grandeur, il est intéressant de voir combien les élèves ont été sensibles à cette nouveauté. Nous obtenons le tableau suivant.

	pas de figure	figure juste	autre figure	Total
CM2	6	2	3	11
6^{ème}	11	4	1	16
Total	17	6	4	27

Le titre de la colonne « pas de figure » signifie que les élèves n'ont pas laissé la moindre trace sur la figure qui était proposée et n'ont pas construit leur propre figure. Sous la rubrique « figure juste » nous regroupons deux situations : l'élève a complété la figure proposée (1 élève de CM2 et 2 élèves de 6^{ème}), l'élève a créé sa propre figure en utilisant la même procédure de construction que sur le modèle (1 élève de CM2 et 2 élèves de 6^{ème}). Puisque seulement 3 élèves sur 27 ont poursuivi la construction qui était amorcée, on peut dire que, leur ensemble, les élèves n'ont pas utilisé l'opportunité qui leur était offerte. Il est possible que le fait que le triangle ABC a été construit à partir d'un cercle de centre A ait été déconcertant. En effet, surtout en primaire, les élèves sont habitués à dessiner un triangle isocèle à partir des extrémités de sa base et cette présentation est tout à fait nouvelle pour eux. On peut toutefois noter que 4 élèves de 6^{ème} sur 16 soit un quart d'entre eux, ont complété ou

dessiné la figure de manière exacte. Quel usage ont-ils fait de cette figure ? Ont-ils pour autant produit des textes qui montrent qu'ils ont fonctionné dans un paradigme plutôt que dans un autre ?

2.15.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
CM2	0	10	1	11
6^{ème}	6	8	2	16
Total	6	18	3	27

Comme dans les versions précédentes de cette activité, la très grande majorité des élèves de CM2 a fonctionné dans G1. Le seul élève de CM2 (P60) dont nous puissions dire qu'il a fonctionné dans G2 n'a pas fait de figure. En particulier à la question b) il a répondu en ces mots : « Non le triangle ABD n'est pas équilatéral car il n'a pas tous ses côtés de même longueur. » Nous n'avons pas d'indication sur le raisonnement qui l'a amené à cette conclusion.

Les 6 élèves de 6^{ème} auxquels nous avons attribué le code GX sont des élèves qui n'ont pas fait de figure et dont le texte nous a paru difficile à exploiter. En effet souvent ces élèves ont évoqué des propriétés du triangle isocèle telles que les angles égaux ou, utilisant l'information sur les longueurs BC et CD, ils en ont déduit que $BD = 5$ cm. Le triangle ABD devient alors isocèle en B. Quand bien même ces élèves ont des connaissances qui pourraient relever de G2, puisqu'ils ne les maîtrisent pas encore complètement, on peut considérer qu'ils fonctionnent toujours en G1. On obtient alors le tableau suivant :

	GX + G1	G2	Total
CM2	10	1	11
6^{ème}	14	2	16
Total	24	3	27

Nous avons maintenant 14 élèves de 6^{ème} sur 16 qui sont ainsi dans ce paradigme. Aussi, même si l'échantillon est de petite taille, nous pouvons dire que la très grande majorité des élèves des deux niveaux a fonctionné en G1 pour cet exercice.

A l'opposé, les deux élèves de 6^{ème} qui sont dans la colonne G2, l'un (S166) a fait une figure juste et l'autre (S188) n'a pas fait de figure. A titre d'exemple, la réponse à la question b) de S118 est : « Non [BD] et [CD] mesurent respectivement 2 cm et 3 cm et cela ne veut rien dire comme C n'est pas sur [BD]. »

2.15.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	8	1	1	11
6^{ème}	1	10	3	2	16
Total	2	18	4	3	27

Là encore la majorité des élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} ont témoigné d'une simple connaissance des triangles isocèle et équilatéral : 8 sur 11 en CM2 soit 72% et 10 sur 16 en 6^{ème} soit 63%. Dans chacun des autres niveaux nous avons des effectifs très petits : 4 pour le niveau N2 (analyse) et 3 pour le niveau N3 (déduction informelle). Les effectifs étant très limités dans les niveaux supérieurs, on peut les regrouper.

	N0 + N1	N2 + N3	Total
CM2	9	2	11
6^{ème}	11	5	16
Total	20	7	27

On voit que dans une très grande majorité les élèves de CM2 ont témoigné des niveaux inférieurs de la théorie de van Hiele quand les élèves de 6^{ème} l'ont fait dans un rapport de 2 pour 1. Autrement dit, sous cette nouvelle forme, l'activité n'est sans doute pas favorable à la

manifestation des divers niveaux de compétences qui peuvent exister chez les élèves à la fin de l'école primaire.

2.15.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0		1		1
N1		8		8
N2		1		1
N3			1	1
Total	0	10	1	11

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	1			1
N1	5	5		10
N2		3		3
N3			2	2
Total	6	8	2	16

Les effectifs sont très petits mais on constate que les trois quarts des élèves de CM2 sont dans la case G1-N1 quand ils ne sont qu'un tiers en 6^{ème}. Dans le tableau consacré aux 6^{ème} on peut remarquer qu'il y a autant d'élèves en GX-N1 qu'en G1-N1 : 5 élèves dans chaque case quand l'échantillon est de 16 sujets. Des 5 élèves repérés en GX-N1, on peut dire qu'ils ont témoigné de la connaissance des définitions des triangles particuliers mais nous n'avons pas pu identifier l'usage qu'ils en avaient fait et être certain du paradigme dans lequel ils ont fonctionné.

2.16. Comparaison entre 2.7. et 2.9.

Dans la mesure où la seule différence entre ces deux exercices est le remplacement du tableau à double entrée par le début de la figure en vraie grandeur, nous allons comparer les résultats obtenus dans les deux cas.

2.16.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.7.	5	22	13	40
Exercice 2.9.	6	18	3	27
Total	11	40	16	67

Dans ces deux exercices les élèves ont majoritairement fonctionné en G1, en particulier dans le cas de l'exercice 2.9. où l'on atteint les deux tiers de notre échantillon. La proportion d'élèves ayant donné une trace de fonctionnement en G2 est particulièrement faible dans le cas de l'exercice 2.9. : 13 sur 40 dans le premier cas soit près de 33% contre 3 sur 27 soit 11% dans le second. On peut donc penser que la présence du tableau a été un facteur favorisant la réflexion dans un paradigme plus théorique alors que la figure en vraie grandeur, même incomplète, a eu l'effet inverse.

Dans chaque activité, plusieurs élèves ont utilisé des démarches que nous n'avons pas pu clairement assimiler à l'un ou l'autre des paradigmes. Si l'on considère que la plupart de ces élèves relèvent très vraisemblablement d'un fonctionnement de type G1 nous obtenons le tableau suivant.

	GX + G1	G2	Total
Exercice 2.7.	27	13	40
Exercice 2.9.	24	3	27
Total	51	16	67

Il apparaît alors que le mode de fonctionnement le plus courant a été G1. Il semble que la présence de la figure en vraie grandeur n'a pas eu d'effet favorable à l'expression d'un mode de fonctionnement plus abstrait.

Mais ceci correspond aux résultats globaux. Il est intéressant de voir ce que, par niveau de scolarité les élèves ont pu faire.

CM2

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.7.	1	16	3	20
Exercice 2.9.	0	10	1	11
Total	1	26	4	31

Que ce soit dans l'exercice 2.7. ou dans l'exercice 2.9., les élèves de CM2 ont fonctionné de la même manière, dans G1. Très rares sont ceux qui ont fonctionné dans G2. Quelle que soient les variables didactiques mises en oeuvre, une telle activité n'est pas accessible à la plus part des élèves de CM2.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.7.	4	6	10	20
Exercice 2.9.	6	8	2	16
Total	10	14	12	36

La situation est ici différente puisque nous avons la moitié des élèves qui ont fonctionné dans G2 dans l'exercice 2.7. quand ils sont que 2 sur 16 dans l'exercice 2.9.. De plus on peut noter que le nombre d'élèves dont nous n'avons pas pu déterminer le mode de fonctionnement et

que nous avons placé en GX soit 10 élèves en tout sur 36 soit près de 28% est bien supérieur dans le cas des 6^{ème} à celui des CM2. Si nous répétons la supposition que ces élèves relèvent davantage d'un fonctionnement en G1 plutôt qu'en G2 nous obtenons le tableau suivant.

	G1 + GX	G2	Total
Exercice 2.7.	10	10	20
Exercice 2.9.	14	2	16
Total	14	12	36

Nous avons alors la moitié des élèves dans chaque paradigme pour l'exercice 2.7. quand la majorité d'entre eux se situe en G1 (plus de 87%) pour l'exercice 2.9.. Autrement dit la présence de la figure amorcée n'a sans doute pas été pertinente pour les élèves de 6^{ème} tandis que cela n'a rien changé pour les élèves de CM2 : ils ont fonctionné en G1 dans les deux cas.

2.16.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.7.	7	16	4	13	40
Exercice 2.9.	2	18	4	3	27
Total	9	34	8	16	67

On retrouve dans la colonne N3 (déduction informelle) de ce tableau, la situation que nous avons rencontrée dans le tableau précédent puisque presque tous les élèves qui semblent avoir fonctionné en G2 sont à ce niveau de van Hiele.

La répartition des élèves est différente d'un exercice à l'autre au niveau N0 où les élèves ne sont pas en mesure de reconnaître les triangles particuliers. Ils sont 7 sur 40 soit 18% dans l'exercice 2.7. et 2 sur 27 soit 7% dans l'exercice 2.9.. La présence de la figure en vraie

grandeur a-t-elle permis de lever des doutes sur les définitions des triangles particuliers et les confusions qui peuvent exister chez certains élèves ?

Le nombre d'élèves dans la colonne N1 est presque le même pour les deux exercices mais cela représente des proportions différentes puisque les effectifs globaux sont différents. 16 sur 40 soit 40% dans le cas de l'exercice 2.7. contre 18 sur 27 soit près de 67% dans le cas de l'exercice 2.9..

La situation est la même dans la colonne N2 (analyse) où l'on trouve 4 élèves sur 40 (soit 10%) dans le cas de l'exercice 2.7. et 4 élèves sur 27 (soit 15%).

Si l'on regarde maintenant la répartition des élèves selon leur niveau de scolarité à l'intérieur des niveaux de van Hiele, nous obtenons les tableaux suivants.

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.7.	4	9	4	3	20
Exercice 2.9.	1	8	1	1	11
Total	5	17	5	4	31

Grossièrement on peut dire que plus de la moitié des élèves ont fonctionné dans N1. On peut remarquer que les élèves classés en N0 qui n'ont témoigné d'aucune connaissance des triangles particuliers, sont proportionnellement plus nombreux dans le cas de l'exercice 2.7. (4 sur 20 soit 20%) que dans l'exercice 2.9. (1 sur 11 soit 9%).

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.7.	3	7	0	10	20
Exercice 2.9.	1	10	3	2	16
Total	4	17	3	12	36

La répartition des élèves est différente ici pour les niveaux N1 (identification-visualisation) et N3 (déduction informelle). En effet les élèves classés en N1 sont proportionnellement moins nombreux dans l'exercice 2.7 (7 sur 20 soit 35%) que dans l'exercice 2.9. (10 sur 16 soit 63%). Le résultat global est que la moitié des élèves sont à ce niveau, ce qui est très proche du résultat obtenu en CM2 où l'on avait 17 élèves sur 31 soit 55%.

En revanche dans la colonne N3 de déduction informelle, la situation est plus marquée en 6^{ème} qu'elle ne l'était en CM2. Si la moitié des élèves ont pu montrer une compétence relevant de la déduction informelle dans l'exercice 2.7., ils ne sont que 2 sur 16 soit un peu plus de 12% à l'avoir fait dans le cas de l'exercice 2.9.. La tendance reste donc la même à savoir que la présence de la figure amorcée en vraie grandeur a été un frein à la manifestation de compétences de raisonnement abstrait.

De plus dans ces deux exercices la colonne N2 d'analyse est pratiquement vide, c'est dire que cette tâche ne semble guère adaptée au passage du niveau d'identification-visualisation vers le niveau de déduction informelle.

Enfin nous pouvons renouveler la remarque faite à propos des CM2 et du niveau N0 : les élèves sont moins nombreux dans le deuxième exercice que dans le premier. La supposition que nous faisons quant à l'aide qu'avait pu apporter la figure amorcée en vraie grandeur vaut autant pour les élèves de CM2 que de 6^{ème}.

2.17. Comparaison de 2.6. à 2.9.

Comme les exercices 2.6. à 2.9. portaient sur l'étude de la même situation géométrique, il est légitime de comparer les résultats obtenus à chacun des exercices afin de mesurer l'impact des variables didactiques, s'il existe.

2.17.1. PARADIGMES

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.6.	3	21	4	28
Exercice 2.7.	5	22	13	40
Exercice 2.8.	3	30	6	39
Exercice 2.9.	6	18	3	27
Total	17	91	26	134

En pourcentage par ligne ce tableau devient :

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.6.	11%	75%	14%	100%
Exercice 2.7.	13%	55%	33%	100%
Exercice 2.8.	8%	77%	15%	100%
Exercice 2.9.	22%	67%	11%	100%
Total	13%	68%	19%	100%

De ce tableau récapitulatif, il ressort que quelle que soit la présentation de la tâche les élèves ont majoritairement fonctionné en G1, 91 sur 134 soit 68%. Toutefois la répartition à l'intérieur de cette colonne varie d'une ligne à l'autre puisque l'on passe d'un peu plus de la moitié des élèves dans le cas de l'exercice 2.7. (avec les mesures 2 cm et 3 cm) aux trois-quarts d'entre eux dans le cas de l'exercice 2.6. (aucune indication de mesure).

La proportion d'élèves ayant fonctionné dans G2 est évidemment moindre : 26 sur 134 soit 19%. Mais elle aussi varie d'un exercice à l'autre, allant de 3 sur 27 soit 11% dans le cas de l'exercice 2.9. (figure en vraie grandeur amorcée) à 13 sur 40 soit près d'un tiers dans le cas de l'exercice 2.7. (avec les mesures 2 cm et 3 cm.).

On peut aussi noter que 17 élèves sur 137 sont dans la colonne GX soit près de 13 %. Ce sont des élèves dont nous n'avons pas pu clairement identifier le mode de fonctionnement ou qui ont essayé de fonctionner dans G2 sans succès.

Mais ceci est la répartition de l'ensemble des réponses. Voyons maintenant en fonction du niveau de scolarité si la répartition est la même ou non.

CM2

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.6.	0	10	2	12
Exercice 2.7.	1	16	3	20
Exercice 2.8.	1	17	2	20
Exercice 2.9.	0	10	1	11
Total	2	53	8	63

En pourcentages, par ligne le tableau est :

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.6.	0%	83%	17%	100%
Exercice 2.7.	5%	80%	15%	100%
Exercice 2.8.	5%	85%	10%	100%
Exercice 2.9.	0%	91%	9%	100%
Total	3%	84%	13%	100%

Globalement les élèves de CM2 ont été très nombreux à utiliser G1 pour faire ces différents exercices : 53 sur 63 soit 84%. La répartition est assez uniforme tout au long des exercices dans la mesure où le pourcentage le plus faible se rencontre à propos de l'exercice 2.7 avec 16 élèves sur 20 soit 80% et le plus élevé à propos de l'exercice 2.9. avec 10 élèves sur 11 soit 91%.

La situation est un peu la même dans la colonne G2 où globalement nous avons 8 élèves sur 63 soit près de 13% et une répartition qui va de 9% dans le cas de l'exercice 2.9. avec 1 élève sur 11 à 15% dans le cas de l'exercice 2.7. avec 3 élèves sur 20.

En revanche très rares sont les élèves dans la colonne GX quel que soit l'activité qui leur ait été proposée.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.6.	3	11	2	16
Exercice 2.7.	4	6	10	20
Exercice 2.8.	2	13	4	19
Exercice 2.9.	6	8	2	16
Total	15	38	18	71

En pourcentages par rapport aux lignes, nous avons :

	GX	G1	G2	Total
Exercice 2.6.	19%	69%	13%	100%
Exercice 2.7.	20%	30%	50%	100%
Exercice 2.8.	11%	68%	21%	100%
Exercice 2.9.	38%	50%	13%	100%
Total	21%	54%	25%	100%

La répartition des élèves de 6^{ème} est par conséquent très différente.

A commencer par la colonne GX où l'on regroupe en tout 15 élèves sur 71 soit plus de 21% avec une répartition variant de 2 sur 19 soit un peu plus de 10% dans le cas de l'exercice 2.8 (mesures 3 cm et 4 cm indiquées) à 4 sur 20 soit 20% dans le cas de l'exercice 2.7. (mesures 2 cm et 3 cm indiquées sur le schéma).

Dans la colonne G1, il y a, toutes proportions gardées, moins d'élèves qu'en CM2 : 38 sur 71 soit 54 % de l'échantillon. Mais là encore ce résultat global n'est pas le fruit d'une répartition uniforme entre les différents exercices puisque l'on va de 30% dans le cas de l'exercice 2.7. avec 6 élèves sur 20 à plus de 63% dans le cas de l'exercice 2.8. avec 12 élèves sur 19. Ces répartitions extrêmes concernent donc les mêmes exercices que ceux dont nous avons parlé à propos de la colonne GX.

Dans la colonne G2, là encore le bilan global de 18 élèves sur 71 soit 25% n'est pas le reflet d'une répartition homogène. En effet dans les exercices 2.6. et 2.9. nous avons repéré 2 élèves sur 16 ayant fonctionné en G2 soit 12,5% alors que nous en avons 10 sur 20 soit 50% dans le cas de l'exercice 2.7..

Donc, que ce soit en CM2 ou en 6^{ème}, c'est dans l'exercice 2.9. avec la figure en vraie grandeur amorcée que les élèves ont eu le plus de mal à fonctionner en G2 alors que c'est dans l'exercice 2.7. où l'on indiquait les mesures 2 cm et 3 cm que les élèves ont été le plus performants.

Si l'on regroupe les résultats de ces deux tableaux en un seul on obtient :

	GX	G1	G2	Total
CM2	2	53	8	63
6^{ème}	15	38	18	71
Total	17	91	26	134

Les élèves de CM2 ont été plus nombreux à fonctionner en G1 quand les élèves de 6^{ème} ont fait davantage usage du paradigme G2

Dans le même temps les élèves pour lesquels nous n'avons pas pu identifier le mode de fonctionnement et que l'on trouve dans la colonne GX sont nettement plus nombreux en 6^{ème} qu'en CM2. Or nous avons supposé que la plupart de ces élèves relevaient vraisemblablement de G1.

Si l'on intègre les effectifs de la colonne GX à ceux de la colonne G1, on obtient alors le tableau suivant.

	G1 + GX	G2	Total
CM2	55	8	63
6^{ème}	53	19	72
Total	108	27	135

On ne peut pas dire que le paradigme dans lequel les élèves ont fonctionné soit lié au niveau de scolarité. Le χ^2 obtenu est très petit : $\chi^2 = 3,93$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Autrement dit la différence de mode de fonctionnement entre les élèves de 6^{ème} et de CM2 n'est pas flagrante sur l'ensemble de ces activités.

2.17.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.6.	6	18	0	4	28
Exercice 2.7.	7	16	4	13	40
Exercice 2.8.	5	24	5	5	39
Exercice 2.9.	2	18	4	3	27
Total	20	76	13	25	134

Tr

aduisons ces résultats en pourcentages par ligne :

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.6.	21%	64%	0%	14%	100%
Exercice 2.7.	18%	40%	10%	33%	100%
Exercice 2.8.	13%	62%	13%	13%	100%
Exercice 2.9.	7%	67%	15%	11%	100%
Total	15%	57%	10%	19%	100%

De ce tableau il ressort que plus de la moitié des élèves sont dans la colonne N1 niveau d'identification-visualisation (76 sur 134 soit 57%), et que, assez rares sont ceux pour lesquels nous avons pu considérer qu'ils maîtrisaient le niveau d'analyse N2 (13 sur 134 soit à peine 10%).

On pourra s'étonner d'avoir 20 élèves dans la colonne N0, c'est-à-dire pour lesquels nous n'avons pu affirmer qu'ils connaissaient les définitions des triangles isocèle et équilatéral ; ils représentent à eux seuls 15% de notre échantillon.

La répartition des élèves à l'intérieur de chaque colonne n'est pas uniforme.

Ainsi dans la colonne N0 elle va de 7% (2 élèves sur 27) dans le cas de l'exercice 2.9. (figure amorcée) à 18% dans le cas de l'exercice 2.7. avec 7 élèves sur 40 où les mesures 2 cm et 3 cm étaient proposées.

Dans la colonne N1, c'est dans l'exercice 2.9. (figure amorcée) que les élèves ont été proportionnellement les plus nombreux à témoigner de leur connaissance des deux définitions avec 18 élèves sur 27 soit 67%. Et c'est dans l'exercice 2.7. où l'on proposait les mesures 2 cm et 3 cm que les élèves ont eu le moins de réussite avec 16 élèves sur 40 soit 40%.

Dans la colonne N2 (analyse) la répartition va de 0% dans le cas de l'exercice 2.6. à 15% dans la cas de l'exercice 2.9. avec 4 élèves sur 27.

Dans la colonne N3 (déduction informelle) nous avons un effectif global de 25 élèves sur 134 soit 19% de notre échantillon. Là encore la répartition des effectifs à l'intérieur de cette colonne n'est pas uniforme puisqu'elle va de 11% avec 3 élèves sur 27 dans l'exercice 2.9. où la figure en vraie grandeur était commencée à 33% avec 13 élèves sur 40 dans l'exercice 2.7. où les mesures 2 cm et 3 cm étaient proposées pour les segments [BC]et [CD].

Pour autant les élèves de chaque niveau ont-ils témoigné des mêmes niveaux de la théorie de van Hiele ?

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.6.	2	8	0	2	12
Exercice 2.7.	4	9	4	3	20
Exercice 2.8.	3	13	3	1	20
Exercice 2.9.	1	8	1	1	11
Total	10	38	8	7	63

En pourcentages par ligne, les résultats sont :

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.6.	17%	67%	0%	17%	100%
Exercice 2.7.	20%	45%	20%	15%	100%
Exercice 2.8.	15%	65%	15%	5%	100%
Exercice 2.9.	9%	73%	9%	9%	100%
Total	16%	60%	13%	11%	100%

Comme dans le tableau général, c'est dans la colonne N1 (identification-visualisation) que les élèves sont les plus nombreux avec 38 élèves sur 63 soit 60%. A l'intérieur de cette colonne la répartition des effectifs varie de 45% avec 9 élèves sur 20 pour l'exercice 2.7. à 73% avec 8 élèves sur 11 pour le 2.9..

Les 10 élèves de la colonne N0 représentent 16% de notre échantillon. Le pourcentage le plus faible est de 9% avec 1 élève sur 11 dans le cas de l'exercice 2.9.. Le pourcentage le plus élevé est de 20% dans le cas de l'exercice 2.7. avec 4 élèves sur 20.

C'est dans la colonne N2 où l'effectif global est le plus faible avec 8 élèves sur 63 soit 13%. A l'intérieur de cette colonne la répartition va de 0% pour l'exercice 2.6. à 20% pour l'exercice 2.7. où les mesures 2 cm et 3 cm étaient proposées. Mais les effectifs sont ici tellement réduits que le calcul d'un pourcentage a sans aucun doute un effet de loupe qui ne correspond pas forcément à la réalité.

Il n'y a que 7 élèves sur 63 soit 11% dans la colonne N3 de déduction informelle. Comme dans la colonne N2, les effectifs sont très petits et leur traduction en pourcentage difficile à interpréter. Le taux de réussite le plus faible est de 9% avec 1 élève sur 11 dans l'exercice 2.9. et le plus élevé de 17% avec 2 élèves sur 12 dans l'exercice 2.6. .

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.6.	4	10	0	2	16
Exercice 2.7.	3	7	0	10	20
Exercice 2.8.	2	11	2	4	19
Exercice 2.9.	1	10	3	2	16
Total	10	38	5	18	71

La traduction de ce tableau en pourcentages par ligne est :

	N0	N1	N2	N3	Total
Exercice 2.6.	25%	63%	0%	13%	100%
Exercice 2.7.	15%	35%	0%	50%	100%
Exercice 2.8.	11%	58%	11%	21%	100%
Exercice 2.9.	6%	63%	19%	13%	100%
Total	14%	54%	7%	25%	100%

Là encore les effectifs les plus nombreux sont dans la colonne N1 d'identification-visualisation avec, au total, 38 élèves sur 71 soit 54%. Le pourcentage le plus faible se rencontre dans le cas de l'exercice 2.7. avec 7 élèves sur 20 soit 35% et le plus élevé dans le cas des exercices 2.6. et 2.9. avec 63% avec 10 élèves sur 16 à chaque fois.

Il n'y a donc pas une grande différence avec les pourcentages rencontrés en CM2 et leur répartition à l'intérieur de la colonne N1.

Dans la colonne N0 il n'y a en tout que 10 élèves sur 71 soit 14%. Les effectifs sont assez petits et leur traduction en pourcentage amène à dire que le taux le plus faible se rencontre à propos de l'exercice 2.9. avec 1 élève sur 16 soit 6% quand le plus élevé se situe au niveau de l'exercice 2.6. avec 4 élèves sur 16 soit 25%. Nous avons là des résultats qui s'éloignent quelque peu de ceux qui ont été obtenus en CM2.

Les effectifs de la colonne N2 (analyse) sont si faibles qu'il semble présomptueux de vouloir les interpréter. Il semble plutôt que ce soit l'ensemble des exercices qui doit être remis en cause à cette occasion.

Les 18 élèves de la colonne N3 (déduction informelle) représente 25% de notre échantillon. Mais la répartition est très variable d'un exercice à l'autre. Elle va de 2 élèves sur 16 dans le

cas des exercices 2.6. et 2.9. soit 13% à 10 élèves sur 20 soit 50% dans le cas de l'exercice 2.7.. C'est à ce niveau que l'écart semble le plus marqué avec les CM2.

Si l'on récapitule les effectifs globaux des deux tableaux en un seul, on obtient le tableau suivant.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	10	38	8	7	63
6^{ème}	10	38	5	18	71
Total	20	76	13	25	134

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau montre qu'il n'y a pas de lien entre les variables : $\chi^2=5,07$; ddl = 3 ; $k>0,05$; χ^2 critique = 7,82. Autrement dit même si les effectifs correspondants au niveau N3 semblent très différents, cette différence n'est pas significative. On peut imaginer que les élèves ont été plutôt déroutés par cette activité, quelle qu'en ait été la forme, et la plupart d'entre eux n'ont pas pu témoigner des niveaux de compétence qu'ils peuvent maîtriser par ailleurs.

2.17.3. CROISEMENT DES TABLEAUX

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	2	8		10
N1		38		38
N2		7	1	8
N3			7	7
Total	2	53	8	63

	GX	G1	G2	Total
N0	9	1		10
N1	6	32		38
N2		5		5
N3			18	18
Total	15	38	18	71

Comme nous l'avons signalé pour chaque exercice, quand on rassemble les effectifs obtenus, les tableaux reprennent la caractéristique essentielle, à savoir le petit effectif de la ligne N2 et en particulier de la case G2-N2 puisque il n'y a qu'un élève de CM2 et aucun élève de 6^{ème}. On peut donc conjecturer que cette activité, quelque soit la forme qu'on lui ait donnée, n'a pas été propice à l'expression d'un fonctionnement en géométrie qui soit plus abstrait. Elle ne place pas, semble-t-il, les élèves dans une zone de développement proximal puisque ils sont soit dans la case G1-N1 soit dans la case G2-N3.

Les résultats obtenus sont très différents des précédents, tant du point de vue des paradigmes que des niveaux de van Hiele. Jamais nous n'avons rencontré un résultat comparable avec si peu d'élèves ayant fonctionné en G2. La remarque est la même concernant les niveaux de van Hiele : les élèves témoignant du niveau d'analyse (N2) ou du niveau N3 (déduction informelle) sont beaucoup plus nombreux et ceux qui relèvent du niveau N1 le sont d'autant moins. On pourrait en conclure qu'une telle activité, peu importe les variables didactiques mises en œuvre, est de peu d'intérêt pour notre recherche et sans doute pour l'enseignant.

A l'issue de cette analyse, il apparaît que la proportion d'élèves classés en N0 est importante, presque autant que pour l'exercice 1.3. où il fallait retrouver des triangles isocèles parmi un lot de schémas tracés à main levée et codés. Cette proportion est encore plus grande à propos de GX. Ce sont vraisemblablement les deux situations où les élèves sont écartelés entre l'envie de prendre des mesures directement sur le dessin et l'inanité de cette démarche,

puisque'il s'agit d'un schéma. Ce conflit perturbe les élèves qui en perdent une partie de leurs moyens et connaissances. Ce phénomène est plus sensible en 6^{ème} qu'en CM2. Il semble, malgré la faiblesse des effectifs, que ce conflit soit au maximum dans l'exercice 2.9. (figure en vraie grandeur amorcée) et au minimum dans l'exercice 2.7. (BC = 2 cm et CD = 3 cm annoncés) pour les 6^{ème}, et soit moins intense et beaucoup plus uniforme pour les CM2. Cela pourrait s'expliquer par un effet de contrat : les 6^{ème} se sentent concernés et pensent qu'ils doivent réussir ces exercices, qui ne sont pas si éloignés de ce qu'on leur demande d'habitude, même s'il y a un mélange des genres. Les CM2 sont plus décontractés devant une activité inhabituelle.

2.18. Bilan des activités menée aux versos des questionnaires

De la même manière que nous l'avons fait à l'issue de l'analyse des résultats des tâches proposées au recto des feuilles, nous allons maintenant compiler les résultats obtenus au verso des questionnaires. Si les effectifs sont inférieurs à ceux que nous avons lors de l'analyse des rectos, c'est parce qu'un certain nombre d'élèves n'ont rien répondu dans cette deuxième partie, prouvant ainsi que globalement, les activités demandées étaient plus difficiles que celles qui se trouvaient aux rectos.

Les tâches proposées étaient de trois natures différentes déclinées selon plusieurs variables didactiques créant ainsi 9 exercices. Nous allons donc réunir les résultats selon les paradigmes géométriques de Parzysz puis selon les niveaux de van Hiele et enfin nous croiserons l'ensemble de ces résultats.

2.18.1. PARADIGMES

Globalement toutes les activités demandées au verso des feuilles relevaient de G2. Mais d'une tâche à l'autre l'expression était variable, nous attendions soit un texte soit une figure avec les traces de construction.

	GX	G1	G2	Total
CM2	2	177	32	211
6^{ème}	16	129	101	246
Total	18	306	133	457

Dans le tableau suivant, nous avons aussi regroupé les effectifs de la colonne GX dans la colonne G1 par souci de cohérence sur l'ensemble de notre travail.

	GX + G1	G2	Total
CM2	179	32	211
6^{ème}	145	101	246
Total	324	133	457

On voit tout de suite que ce n'est pas une majorité d'élèves qui a abordé les tâches selon G2, tant en CM2 qu'en 6^{ème}. On peut dire, au vu de ces résultats que les élèves ne sont pas tous prêts à utiliser leurs connaissances dans le cadre d'une géométrie théorique. Il y a toutefois une différence notable entre les proportions d'élèves dans leur mode fonctionnement. En CM2, 179 élèves sur 211 sont dans la colonne G1 soit 85% de l'effectif de ce groupe, quand en 6^{ème}, ils sont 145 sur 246 soit près de 60%. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme la dépendance entre les variables : $\chi^2 = 36,90$; ddl= 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Même si une minorité d'élèves (133 sur 457 soit 29%) a témoigné d'une démarche relevant de G2, celle-ci est directement liée au niveau de scolarité : les élèves de 6^{ème} sont trois fois plus nombreux que les élèves de CM2 sont dans ce cas. On peut aussi dire que, même si les programmes de Primaire ne contiennent pas de référence explicite à G2, certains élèves sont déjà capables d'exprimer un tel mode de fonctionnement, pourvu que la situation y soit favorable.

D'ailleurs nous allons maintenant regrouper les résultats par type d'activité.

Nous appellerons « Victor » la ligne sur laquelle sont réunis sous forme de pourcentage, les résultats aux exercices 2.1. à 2.3. où les élèves devaient faire le lien entre la description d'une

situation géométrique, son illustration par un schéma et la reproduction réduite d'une figure construite à la règle et au compas. La ligne « cercles » correspond aux pourcentages traduisant les résultats cumulés des exercices 2.4. et 2.5. où les élèves devaient retrouver le centre du cercle circonscrit au triangle. Enfin sur la ligne « Marie » nous avons rassemblé les exercices 2.6. à 2.9. où la question était de savoir si, en juxtaposant deux triangles isocèles, on obtenait un triangle équilatéral. On obtient selon chacun des niveaux de scolarité les tableaux suivants :

CM2

	GX + G1	G2	Total
Victor	89	11	100
cercles	80	20	100
Marie	87	13	100

6^{ème}

	GX + G1	G2	Total
Victor	67	33	100
cercles	41	59	100
Marie	75	25	100

Par comparaison, on voit que les élèves de CM2 ont dans une écrasante majorité, fonctionné en G1. Certains d'entre eux ont cependant témoigné de démarches qui relevaient de G2, en particulier dans les activités de construction des cercles circonscrits.

Les modes de fonctionnement des élèves de 6^{ème} varient au contraire selon l'activité puisque l'on va de 25% de fonctionnement en G2 dans les derniers exercices où les triangles isocèles étaient accolés à plus de 50% dans le cas de la construction des cercles circonscrits. Le paradigme de fonctionnement est lié à l'activité : $\chi^2 = 26,57$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99. Or c'est précisément dans ce cas où la validation d'un raisonnement fait dans G2

pouvait avoir lieu dans G1. En effet si l'on considère que le respect des trois contraintes simultanées et le nécessaire changement de point de vue quant à l'usage de la définition du cercle sont autant de preuve d'un fonctionnement en G2, en revanche c'est la perception de la qualité du tracé qui valide le raisonnement. On peut aussi conclure en disant que les situations dans lesquelles l'élève n'a pas à fournir de justification sont plus favorables à un fonctionnement en G2 quand le raisonnement aboutit à une réussite dans G1.

2.18.2. NIVEAUX DE VAN HIELE

Dans la mesure où l'on demandait à l'élève d'expliquer sa démarche et plus généralement comment il avait abouti à sa conclusion ou à sa construction, les tâches proposées relevaient toutes du niveau 3 de déduction informelle. Comme nous allons le voir sur ce tableau récapitulatif, cela n'a pas été toujours le cas, loin de là.

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	21	97	70	23	211
6^{ème}	23	69	66	88	246
Total	44	166	136	111	457

La première remarque consiste sans doute dans le fait que, en CM2 comme en 6^{ème}, il y a environ 10% d'élèves pour lesquels les réponses ont été difficiles à interpréter, nous laissant à penser qu'ils ne maîtrisaient pas les définitions des figures élémentaires utilisées ici. On peut s'étonner d'un tel pourcentage, en particulier en 6^{ème}, dans la mesure où il s'agissait essentiellement du triangle isocèle et du triangle équilatéral et que ces figures relèvent des programmes antérieurs à celui du CM2.

Ensuite une majorité des élèves de CM2 a laissé des traces relevant du niveau 1 d'identification-visualisation (97 sur 211 soit près de 46%) quand c'est au niveau 3 de van Hiele (déduction informelle) que, toutes proportions gardées, les élèves de 6^{ème} sont les plus nombreux (89 sur 246 soit 36%). On peut remarquer que les proportions d'élèves relevant du niveau 2 d'analyse ne sont pas très différentes l'une de l'autre : 70 sur 211 en CM2 soit 33% et 66 sur 246 en 6^{ème} soit près de 27%.

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme la dépendance entre les variables : $\chi^2 = 40,55$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,82. On peut donc conclure que la maîtrise des niveaux de van Hiele s'acquiert au fil de la scolarité et le passage par le niveau d'analyse semble une nécessité puisque nous avons des effectifs décroissants d'un niveau à l'autre selon que l'on considère les résultats de CM2. En 6^{ème}, les nombres d'élèves en N1 et en N2 sont voisins ; le nombre d'élèves en N3 est sensiblement plus grand.

De la même façon que nous l'avons fait à propos des paradigmes, nous allons maintenant comparer les niveaux de van Hiele révélés par chaque type d'activité pour chacun des deux groupes d'élèves.

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
Victor	5	36	21	1	63
cercles	6	23	41	15	85
Marie	10	38	8	7	63
Total	21	97	70	23	211

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
Victor	7	22	34	15	78
cercles	6	9	27	55	97
Marie	10	38	5	18	71
Total	23	69	66	88	246

On voit qu'un seul élève de CM2 a explicitement géré la situation associée à « Victor » au niveau de déduction informelle alors que 15 élèves de 6^{ème} ont réussi. L'écart est encore très grand à propos des cercles puisque l'on passe de 15 élèves sur 85 en CM2 à 55 élèves sur 97

en 6^{ème}. Enfin dans le dernier regroupement, l'écart diminue encore puisque l'on passe de 7 élèves sur 63 en CM2 à 18 élèves sur 71 en 6^{ème}.

Dans la colonne N0 des deux tableaux, les effectifs sont inférieurs ou égaux à 10 mais correspondent à des proportions d'élèves différentes.

Les nombres affichés dans les tableaux sont des pourcentages sur l'ensemble des activités que nous avons regroupées sous les appellations : « Victor », « cercles » et « Marie ».

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
Victor	8%	57%	33%	2%	100%
cercles	7%	27%	48%	18%	100%
Marie	16%	60%	13%	11%	100

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
Victor	9%	28%	44%	19%	100%
cercles	6%	9%	28%	57%	100%
Marie	14%	54%	7%	25%	100%

Nous voyons maintenant que d'une activité à l'autre pour un même groupe d'enfants, les niveaux de van Hiele mis en évidence ne sont pas les mêmes.

En CM2 si le niveau de van Hiele le plus courant est le niveau N1 dans les activités qui relevaient manifestement du Collège (« Victor » et « Marie »), en revanche, la recherche du centre du cercle circonscrit à un triangle a été abordée à un autre niveau par près de la moitié des élèves qui ont eu cette tâche à faire. On retrouve ici le phénomène déjà décrit dans lequel l'élève témoigne d'un niveau de van Hiele inférieur quand la tâche est plus difficile.

En 6^{ème}, les répartitions varient encore plus d'une activité à l'autre. Mais c'est aussi à propos des cercles circonscrits que les élèves ont pu exprimer le niveau de van Hiele le plus élevé. C'était sans doute la tâche la plus accessible pour les élèves. Les tâches qui ont été sans doute les plus difficiles sont celles que nous avons regroupées sous le nom de « Marie » puisqu'il y a 14% des élèves qui se retrouvent en N0 et 54% en N1. C'est aussi le cas en CM2 où il y a 16% d'élèves en N0 et 60% en N1. Il y a donc environ 70% des élèves de chaque niveau qui n'ont pas été en mesure de dépasser le niveau d'identification-visualisation.

On peut donc s'intéresser à comparer les niveaux de van Hiele identifiés au travers des trois types de tâches, quel que soit le niveau de scolarité.

	N0	N1	N2	N3	Total
Victor	8	43	38	10	100
cercles	7	18	38	37	100
Marie	15	57	10	18	100

C'est donc dans l'activité de recherche du centre du cercle circonscrit que les élèves ont témoigné des niveaux de van Hiele les plus élevés. Au contraire, ce sont dans les deux activités de rédaction où ils ont eu le plus de difficultés puisque les niveaux de van Hiele utilisés à ces occasions sont des niveaux inférieurs. De plus c'est dans le dernier type de tâches (« Marie ») où les élèves ont les taux de performance les plus faibles. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme que le niveau de van Hiele que nous avons pu attribuer à un élève dépend de la tâche : χ^2 obs. = 59,53 ; ddl = 6 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 12,59.

Donc non seulement un élève évolue dans les niveaux de van Hiele au fil de sa scolarité mais il n'évolue pas simultanément dans toutes les activités de la géométrie. Selon la tâche qui lui est prescrite, il peut témoigner d'un niveau ou d'un autre ; ce niveau étant d'autant plus élevé que la tâche lui est accessible.

2.18.3. CROISEMENT DES PARADIGMES ET DES NIVEAUX DE VAN HIELE

Comme nous l'avons fait pour les tâches proposées au recto des questionnaires nous allons maintenant croiser pour chacun des niveaux de scolarité, les résultats obtenus selon les paradigmes géométriques et les niveaux de van Hiele, tous exercices du verso confondus.

CM2

	GX	G1	G2	Total
N0	2	19		21
N1		97		97
N2		61	9	70
N3			23	23
Total	2	177	32	211

Certaines cases du tableau sont vides comme par exemple la case G2-N1. En effet on voit mal comment un élève fonctionnant dans un paradigme proto-axiomatique pourrait relever du niveau 1 d'identification-visualisation de van Hiele ! Et à l'opposé, un élève en mesure de donner des arguments théoriques à son explication, ne fonctionne pas en G1 où le mesurage reste déterminant (case G1-N3). Comme dans le bilan à propos des tâches aux rectos de questionnaires, nous constatons que le niveau d'analyse peut être associé à un comportement de type G1 ou G2 selon le cas.

Quand on réunit les colonnes GX et G1, on obtient un tableau à peine différent.

	G1+GX	G2	Total
N0	21		21
N1	97	0	97
N2	61	9	70
N3		23	23
Total	179	32	211

De ce tableau on peut retenir que 46% des élèves de CM2 (97 sur 211) sont dans la case G1-N1 : ils ont été en mesure de se décider à l'aide de mesure ou de comparaisons et ne sont pas allés au-delà d'une description globale des situations géométriques qui leur étaient proposées. Il y a pratiquement autant d'élèves (21 ; 23) dans les cases extrêmes du tableau : G1-N0 d'une part et G2-N3 d'autre part. Ces élèves représentent 10% de notre échantillon. On peut s'attarder sur les 61 élèves (29%) identifiés par le code G1-N2 : avec des outils propres à une géométrie spatio-graphique, ces élèves sont capables d'analyser une situation géométrique en décrivant des sous-figures, ou donnant une propriété d'un élément particulier. Toutefois ces élèves sont sept fois plus nombreux que ceux qui sont au même niveau d'analyse en fonctionnant en G2, c'est-à-dire de manière plus théorique, dans une géométrie proto-axiomatique.

Les mêmes regroupements à propos des 6^{ème} donnent les tableaux suivants.

6^{ème}

	GX	G1	G2	Total
N0	10	13		23
N1	6	63		69
N2		53	13	66
N3			88	88
Total	16	129	101	246

Les élèves pour lesquels nous n'avons pas pu déterminer le mode de fonctionnement (colonne GX) sont ici plus nombreux qu'en CM2. Ils sont 16 sur un échantillon de 246 élèves soit 6,5% et pour 10 d'entre eux, nous n'avons pas été en mesure d'identifier la maîtrise d'un niveau de van Hiele quel qu'il soit. On peut d'ores et déjà diagnostiquer que ces élèves sont en grande difficulté, sans doute en géométrie et dans d'autres disciplines.

Comme nous l'avons fait précédemment nous allons regrouper les colonnes GX et G1 pour obtenir le tableau suivant.

	G1+GX	G2	Total
N0	23		23
N1	69		69
N2	53	13	66
N3		88	88
Total	145	101	246

Dans ce tableau, l'effectif le plus grand se trouve dans la case G2-N3 avec 88 sujets sur 246 soit 36%.

Comme en CM2, les élèves identifiés au niveau d'analyse (N2) se répartissent inégalement entre les paradigmes G1 et G2. Toutefois la proportion n'est pas la même. Si en CM2 nous avons 9 élèves en G2 et 61 en G1 donc de l'ordre de 1 pour 7, en 6^{ème} nous en avons 13 en G2 pour 53 en G1 soit de l'ordre de 1 pour 4. C'est donc au niveau d'analyse que semble se faire le passage de G1 vers G2. La « frontière » entre les deux paradigmes ne semble pas étanche à ce niveau de van Hiele. On peut aussi conjecturer que les élèves de 6^{ème} sont plus nombreux que leurs camarades de CM2 à maîtriser le niveau d'analyse de van Hiele dans le cadre d'une géométrie proto-axiomatique, ou encore que le niveau d'analyse permet l'acquisition du paradigme G2 par zone de développement proximal.

En rassemblant tous les élèves dans un seul tableau, on obtient la confirmation de ce qui vient d'être dit.

	G1+GX	G2	Total
N0	44		44
N1	166		166
N2	114	22	136
N3		111	111
Total	324	133	457

A savoir que le niveau 1 de van Hiele (identification-visualisation) est associé au paradigme G1 et le niveau 3 (déduction informelle) au paradigme G2. En revanche, le niveau d'analyse est un passage obligé selon P.M. van Hiele dans l'apprentissage de la démonstration en géométrie en particulier, mais il peut être conçu comme la zone de développement proximal qui permet le passage du paradigme G1 vers le paradigme G2. Les activités relevant du niveau d'analyse pourraient avoir un impact déterminant dans l'apprentissage de la géométrie et celui de la démonstration en particulier.

3. Résultats à propos des paradigmes géométriques

Nous allons maintenant regrouper les résultats obtenus globalement au recto et au verso des questionnaires, tant du point de vue des paradigmes que des niveaux de van Hiele. La plupart des élèves ayant répondu à deux exercices, l'un au recto, l'autre au verso de la feuille qui lui a été remise, chaque sujet est pris en compte deux fois mais chaque activité n'a qu'un seul codage.

3.1. Dans les activités

	GX	G1	G2	Total
CM2	39	287	104	430
6^{ème}	37	222	236	495
Total	76	509	340	925

Dans ce tableau le χ^2 vaut 55,31 avec un seuil significatif à 5,99. Il y a donc un lien très fort entre les variables. Il semble que le paradigme géométrique dans lequel un élève fonctionne soit lié à son niveau de scolarité.

Les élèves pour lesquels nous n'avons pas été en mesure d'identifier le mode de fonctionnement (GX) sont finalement assez nombreux puis qu'au total nous avons 76 réponses inclassables sur 925 soit 8% de notre échantillon. Selon les activités, il s'agit d'élèves dont nous n'avons pu reconstituer la démarche ou dans le cas de certains élèves de 6^{ème}, d'élèves qui, faisant état de leurs connaissances théoriques, n'ont pas su les mettre en œuvre pour fonctionner complètement en G2. Pour autant, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, nous allons regrouper en une seule colonne les effectifs des colonnes GX et G1 sous le prétexte que tous les élèves auxquels nous nous sommes adressés ont déjà une certaine pratique de la géométrie concrète ou spatio-graphique. On peut donc considérer, par défaut, que tous les élèves de CM2 et de 6^{ème} sont en mesure de fonctionner dans le paradigme G1. Nous obtenons alors le tableau suivant.

	G1 + GX	G2	Total
CM2	326	104	430
6^{ème}	259	236	495
Total	585	340	925

Il apparaît nettement que les élèves de CM2 ont, en très grande majorité (326 sur 430 soit plus de 76%), fonctionné en G1 alors que les élèves de 6^{ème} se répartissent de manière plus équilibrée entre les deux modes de fonctionnement : 236 élèves sur 495 ont vraisemblablement fonctionné en G2 soit 48% de notre échantillon. Le test du χ^2 appliqué à

ce tableau confirme ce qui apparaissait au tableau précédent, à savoir que le mode de fonctionnement des élèves est lié à leur niveau de scolarité : χ^2 obs. = 54,62 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Même si une certaine proportion (près du quart) d'élèves de Primaire est déjà en mesure de fonctionner dans G2 c'est-à-dire une géométrie proto-axiomatique, c'est loin d'être le cas pour la majorité d'entre eux ; ce qui est tout à fait acceptable à ce niveau de scolarité. En 6^{ème} le fonctionnement en G2 s'étend à la moitié de l'effectif. D'après ce tableau on pourrait dire que les élèves de CM2 et de 6^{ème} ne sont pas des mathématiciens experts mais des apprentis et que leur mode de fonctionnement en géométrie dépend de leur niveau de scolarité. On peut rapprocher cette remarque du constat fait par Jore dans lequel certains étudiants peuvent fonctionner dans un pseudo-paradigme quand ils ne sont pas sûrs de leur démarche. On ne saurait dire que le passage de G1 à G2 se fait par saut mais qu'au contraire il est progressif et s'installe dans la durée au travers d'activités menées par zones de développement proximal. Comme pour les niveaux de van Hiele ?

Nous avons remarqué au fil de l'analyse des résultats que certaines activités étaient plus favorables que d'autres à un fonctionnement en G2. Or, pour un mathématicien expert, les tâches proposées au verso des questionnaires relevaient toutes d'un fonctionnement en G2 alors que certains élèves n'en maîtrisent aucun élément : la figure comme représentant d'un objet théorique, le raisonnement basé sur la déduction etc.. En regroupant les élèves de CM2 et de 6^{ème} en fonction du paradigme dans lequel ils ont fonctionné au recto et au verso des feuilles, nous obtenons les résultats suivants :

	GX + G1	G2	Total
recto	261	207	468
verso	324	133	457
Total	585	340	925

Les effectifs des lignes du tableau ne sont pas équitablement répartis, même si tant au recto qu'au verso, c'est le paradigme G1 qui a été le plus utilisé. Au recto, il l'a été 1,3 fois plus que le paradigme G2 et au verso le rapport est de 2,5. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme la dépendance entre les variables ($\chi^2 = 22,76$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). On peut donc dire que selon l'activité, les élèves, même au niveau du CM2 ou de la classe de

6^{ème}, sont capables de fonctionner dans un paradigme ou dans l'autre, dans la mesure de leurs compétences individuelles. En particulier, quand la tâche leur est plus accessible, ils hésitent moins à utiliser un paradigme plus théorique. Ou encore, pour affronter une tâche plus difficile, les élèves auraient tendance à fonctionner dans un paradigme spatio-graphique plutôt que proto-axiomatique.

Mais nous avons vu que le paradigme dans lequel les élèves fonctionnaient dépendait du niveau de scolarité, nous devons séparer ce tableau en deux pour étudier séparément ce qui s'est passé à l'intérieur de chaque groupe.

CM2

	GX + G1	G2	Total
recto	147	72	219
verso	179	32	211
Total	326	104	430

Quand bien même les élèves de CM2 ont toujours majoritairement fonctionné en G1, cela a davantage été le cas au verso des feuilles plutôt qu'au recto. Cette différence de proportion est significative : $\chi^2 = 18,38$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. On peut s'étonner d'un tel constat dans la mesure où les activités proposées au verso demandaient exclusivement un fonctionnement en G2. Mais c'est aussi au verso que les élèves devaient verbaliser leur raisonnement et nul doute qu'ils n'y aient pas été habitués ou entraînés. C'est sans doute là une explication. Nous pouvons aussi répéter la remarque faite précédemment sur le fait qu'un élève peut fonctionner dans un paradigme d'autant plus théorique que la tâche lui paraît simple.

	GX + G1	G2	Total
recto	114	135	249
verso	145	101	246
Total	259	236	495

Le constat en 6^{ème} est encore plus net. Au recto des feuilles la majorité des élèves a témoigné d'un fonctionnement proto-axiomatique quand au verso il s'agit de l'autre paradigme plus concret. La tendance remarquée à propos des CM2 est accentuée en 6^{ème} : 46% des élèves sont associés aux paradigmes GX et G1 pour le recto quand il y en a 41% en G2 pour le verso. Ces différences sont significatives : $\chi^2 = 8,59$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Nul doute que les tâches proposées au recto des questionnaires étaient plus faciles pour les 6^{ème} qu'elles ne l'étaient pour les CM2 ; plus nombreux sont les 6^{ème} qui ont fonctionné en G2 au recto des questionnaires.

Dans des proportions différentes pour chaque niveau, le paradigme de fonctionnement semble lié à la tâche. De plus la verbalisation de la validation associée au paradigme G2 n'a vraisemblablement rien de spontané et doit être liée à un apprentissage particulier.

3.2. Paradigmes utilisés par chaque élève

Si maintenant nous regardons, pour chaque élève, les différents paradigmes dans lesquels il a pu fonctionner sur l'ensemble des deux tâches qui lui ont été prescrites, nous obtenons les tableaux suivants où les effectifs sont plus réduits puisque ne sont pris en compte que les élèves qui ont donné une réponse au recto et au verso du questionnaire qui leur avait été remis.

CM2

RECTO VERSO	GX (recto)	G1 (recto)	G2 (recto)	Total
GX (verso)		2		2
G1 (verso)	27	91	57	175
G2 (verso)	6	12	14	32
Total	33	105	71	209

91 élèves de CM2 se situent dans la case G1(recto)-G1(verso) soit 44% d'entre eux et 14 élèves dans la case G2(recto)-G2(verso) soit 7%. Il semble donc que le paradigme de fonctionnement soit plutôt lié au niveau de scolarité plus qu'à l'élève lui-même.

Le regroupement des rubriques GX et G1 en une seule donne le tableau suivant :

RECTO VERSO	GX + G1 (recto)	G2 (recto)	Total
GX + G1 (verso)	120	57	177
G2 (verso)	18	14	32
Total	138	71	209

Cette fois c'est plus de la moitié des élèves de CM2 (134 sur 209 soit 64%) qui ont fonctionné dans le même paradigme dans les deux activités proposées. Mais très rares sont les élèves dont on a pu dire qu'ils avaient toujours fonctionné en G2 : 14 sur 209 soit un sur 15 environ. Le test du χ^2 (χ^2 obs. = 1,61 ; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84) confirme qu'il n'y a pas de dépendance entre les variables. Donc le paradigme utilisé au recto par un élève n'est pas lié au paradigme utilisé au verso. On pourrait alors généraliser en disant que l'élève de CM2 a tendance à rester dans le même paradigme quelque soit la tâche qui lui est donnée ; ce qui confirmerait la conclusion à laquelle nous sommes arrivés au paragraphe précédent. D'ailleurs plus d'un élève sur 3 a changé de paradigme (75 sur 209) et à l'intérieur de ce groupe, ils ont été trois fois plus nombreux à utiliser un paradigme inférieur quand ils sont passés du recto au verso alors que les tâches prévues au verso étaient prescrites en G2. Seulement 18 élèves soit un élève sur 12 environ semble avoir été en mesure de s'adapter au contrat didactique en passant de G1 au recto à G2 au verso.

Enfin la répartition des élèves entre les deux paradigmes selon que l'on considère le recto ou le verso est la même : une très nette majorité d'entre eux a utilisé G1. Mais cette majorité est plus forte au verso qu'au recto : 177 contre 32 au verso et 138 contre 71 au recto. Or les activités du verso situées par contrat en G2, demandaient l'analyse d'une situation géométrique et la rédaction d'un texte. Les élèves de CM2 n'ont pratiquement jamais rencontré ce type d'activités, ils se sont donc reportés vers un paradigme mieux connu, G1.

6^{ème}

RECTO VERSO	GX (recto)	G1 (recto)	G2 (recto)	Total
GX (verso)	1	4	11	16
G1 (verso)	13	51	65	129
G2 (verso)	7	36	58	101
Total	21	91	134	246

Les effectifs sont plus équilibrés dans les différentes cases du tableau. Les trois quarts des élèves se répartissant dans les cases G1 (recto)-G1(verso), G2(recto)-G1(verso) et G2(recto)-G2(verso).

Le regroupement effectué à propos des élèves de 6^{ème} donne maintenant :

RECTO VERSO	GX + G1 (recto)	G2 (recto)	Total
GX + G1 (verso)	69	76	145
G2 (verso)	43	58	101
Total	112	134	246

Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme qu'il n'y a pas de lien entre les variables ($\chi^2 = 0,6$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84). Les fonctionnements utilisés par les élèves au recto ne sont pas liés à ceux qu'ils ont utilisés au verso. De là on peut aussi extrapoler que

l'élève de 6^{ème} comme celui de CM2, ne peut pas toujours répondre à la tâche qui lui est donnée et telle qu'il la comprend en fonctionnant dans le paradigme implicite. Globalement il y a encore plus d'un élève de 6^{ème} sur 4 qui ne peut fonctionner qu'en G1 c'est-à-dire dans une géométrie spatio-graphique quelle que soit la tâche prescrite. A l'opposé, les élèves qui ont fonctionné en G2 sur l'ensemble du questionnaire sont presque aussi nombreux : 58 sur 246 soit près d'un sur 4. Plus intéressante est donc la répartition des élèves qui ont changé de paradigme. Près de la moitié de l'échantillon des élèves de 6^{ème} est dans ce cas. En revanche, les élèves qui ont fonctionné dans un paradigme moins théorique au verso qu'au recto sont deux fois plus nombreux que ceux qui ont eu la démarche contraire ; en CM2 c'était un sur 3. On peut donc conjecturer que les activités proposées au verso étaient plus adaptées aux élèves de 6^{ème} qu'aux CM2 ou que certains élèves de 6^{ème} ont acquis l'habitude de fonctionner dans une géométrie proto-axiomatique à l'issue des activités menées tout au cours de l'année mais que ce paradigme est d'autant plus utilisé que la tâche est accessible.

Si, comme en CM2, les élèves ont eu tendance à moins utiliser G2 au verso qu'au recto, les proportions ne sont pas du tout les mêmes. C'est plus de la moitié qui a fonctionné en G2 au recto où l'on ne demandait aucune rédaction quand la majorité d'entre eux s'est reportée sur G1 au verso, dans des proportions semblables : 134 en G2 contre 112 en G1 au recto et 145 en G1 et 101 en G2 au verso. On retrouve là les constats faits par ailleurs : quand la tâche devient difficile, l'élève utilise un paradigme moins élaboré et moins abstrait.

On peut retrouver ce phénomène en s'arrêtant sur les cases GX-G1 et G1-G2, indiquant un changement de paradigme entre le recto et le verso tant pour les CM2 que pour les 6^{ème}.

Si on appelle A la case GX(verso)-G1(recto), B la case G1(recto)-GX(verso), C la case G1(verso)-G2(recto) et D la case G1(recto)-G2(verso),

Recto Verso	GX(recto)	G1(recto)	G2(recto)
GX(verso)		A	
G1(verso)	B		C
G2(verso)		D	

on voit que:

- dans le cas des élèves de CM2, $B = 13.A$ et $C = 5.D$
- dans le cas des élèves de 6^{ème}, $B = 3.A$ et $C = 2.D$.

Autrement dit, les élèves sont plus nombreux à être passé de GX au recto à G1 au verso que l'inverse. On peut alors conjecturer qu'ils se sont adaptés ainsi au mieux de leurs compétences à une tâche plus difficile alors qu'ils avaient témoigné d'un fonctionnement non identifiable au recto. En revanche, les élèves sont plus nombreux à montrer une baisse de paradigme du recto au verso que l'inverse. Ces deux phénomènes sont plus marqués en CM2 qu'en 6^{ème}.

Quand on regroupe l'ensemble des réponses des élèves le tableau est le suivant.

CM2 + 6^{ème}

RECTO VERSO	GX + G1 (recto)	G2 (recto)	Total
GX + G1 (verso)	189	133	322
G2 (verso)	61	72	133
Total	250	205	455

Ici nous avons : $\chi^2 = 6,26$; $ddl = 1$; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84. Il y a donc un lien, quoique ténu, entre les variables : plus de la moitié les élèves qui ont fonctionné en G1 au recto (189 sur 250 soit 61%) ont utilisé ce même paradigme au verso. De la même façon 65% des élèves qui ont fonctionné en G2 au recto ont été considérés comme relevant de G1 au verso (133 sur 205) : nous avons souligné ce changement de paradigme, en particulier chez les élèves de CM2. L'effectif le plus faible est celui de la case G1(recto)–G2(verso) : 61 élèves sur 455 au total soit 13% de notre échantillon global. Ces élèves ont donc utilisé des démarches plus

sophistiquées et théoriques dans la deuxième partie. D'après les tableaux précédents, nous savons que ce sont les élèves de 6^{ème} qui sont de loin les plus nombreux à avoir eu cette attitude, s'adaptant ainsi particulièrement bien à la tâche prescrite.

Enfin les élèves se répartissent de manière plutôt équilibrée entre les deux paradigmes quand on considère les rectos des feuilles : 250 en G1 et 205 en G2. Cette répartition est très différente si l'on considère le verso : 322 en G1 et 133 en G2. Mais nous avons vu que cette répartition était très différente à l'intérieur du groupe des CM2 et celui des 6^{ème}.

3.3. Abandon du paradigme G2 pour un élève.

Le but de l'enseignement de la géométrie au collège étant l'acquisition d'une géométrie plus théorique, nous devons maintenant nous intéresser aux activités qui ont amené les élèves à changer de paradigme en abordant la tâche du verso de leur questionnaire et, en particulier, à passer de G2 à G1 ou GX c'est-à-dire vers un paradigme spatio-graphique ou à tout le moins peu abouti du point de vue théorique, quand bien même la tâche relevait exclusivement de G2. Nous avons 133 élèves dans ce cas soit près de 30% de notre effectif : 57 élèves de CM2 et 76 élèves de 6^{ème} qui ont donc abordé les activités du verso après avoir travaillé en G2 au recto.

Les tableaux qui suivent donnent la répartition des élèves pour chaque association d'exercices. Nous avons grisé les cases qui correspondent à chaque questionnaire et dans lesquelles on peut rencontrer les élèves qui, rappelons-le ont travaillé en G2 au recto et ont abandonné ce paradigme au verso.

CM2 en G2 au recto

G1 ou GX au verso	ex.1.1 .	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.		2		4					6
ex. 2.2		3				4			7
ex. 2.3.	4			5					9
ex. 2.4.		1			8	1			10
ex. 2.5.			3				1	7	11
ex. 2.6.	3								3
ex. 2.7.			2						2
ex. 2.8.		4							4
ex. 2.9.								5	5
Total	7	10	5	9	8	5	1	12	57

6^{ème} en G2 au recto

G1 ou GX au verso	ex.1.1 .	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.		6		3					9
ex. 2.2		5				7			12
ex. 2.3.	2			4					6
ex. 2.4.			2		3	2			7
ex. 2.5.			2		4		3	4	13
ex. 2.6.	4								4
ex. 2.7.			1				5		6
ex. 2.8.		5					3		8
ex. 2.9.								11	11
Total	6	16	5	7	7	9	11	15	76

Dans ces tableaux certaines cases sont vides. Elles correspondent à deux situations très différentes. Soit aucun élève n'avait travaillé en G2 au recto dans ce questionnaire et donc aucun n'a pu « abandonner » G2, soit tout au contraire, tous les élèves qui ont travaillé en G2 au recto sont restés en G2 au verso.

Il s'agit en CM2, des exercices 2.7. et 2.8. associés à l'exercice 1.7. du recto dans lequel il fallait retrouver les rectangles dans un nuage de points. Tous les élèves, à l'exception d'un seul, sont dans la première situation où ils ont abordé le deuxième exercice en ayant utilisé le paradigme G1 au recto. Un élève (P215) a fonctionné en G2 sur l'ensemble du questionnaire et un autre à propos duquel nous reviendrons, est passé de G1 à G2.

En 6^{ème} la seule case qui soit vide est la case du questionnaire R associant les exercices 1.2. au recto et 2.4. au verso. Dans ce cas, les élèves ont fonctionné en G2 pour leur première tâche et y sont restés quand ils ont changé d'activité. Deux d'entre eux ont pourtant changé de paradigme mais c'est pour aller de GX à G2 (S31) et de G1 à G2 (S150).

Mais il faut aussi relever le nombre global d'élèves qui ont travaillé en G2 au recto.

	CM2			6 ^{ème}		
	Recto en G2	Verso en GX ou G1	Pourcentage	Recto en G2	Verso en GX ou G1	Pourcentage
ex. 2.1.	8	6	75%	18	9	50%
ex. 2.2	7	7	100%	15	12	80%
ex. 2.3.	11	9	82%	9	6	67%
ex. 2.4.	13	10	77%	26	7	27%
ex. 2.5.	14	11	79%	27	13	48%
ex. 2.6.	3	3	100%	4	4	100%
ex. 2.7.	3	2	67%	13	6	46%
ex. 2.8.	6	4	67%	10	8	80%
ex. 2.9.	6	5	83%	12	11	92%
Total	71	57	80%	134	76	57%

Les pourcentages sont nettement plus élevés dans la colonne relative aux CM2 que dans celle des 6^{ème}. Davantage d'élèves de Primaire que de Secondaire ont donc changé de paradigme en passant à leur seconde tâche. Il est tout à fait remarquable que tous les élèves qui avaient travaillé en G2 au recto ont basculé en G1 quand ils ont essayé de faire l'exercice 2.6, qu'ils soient élèves de CM2 ou de 6^{ème}. Mais ce sont de très petits effectifs : 3 élèves de CM2 et 4 élèves de 6^{ème}.

Le pourcentage le plus faible se situe sur la ligne de l'exercice 2.4. (recherche du centre du cercle circonscrit) en 6^{ème} où seulement 7 élèves sur 26 (27%) ont préféré travaillé en G1 quand ils avaient fonctionné en G2 au recto. Il est sans doute important de noter dès maintenant à propos de cette activité, que les 7 élèves dont nous venons de parler sont aussi les seuls qui ont fonctionné en G1 dans cet exercice ; tous les autres se sont placés en G2.

Quand on regroupe les activités du verso en fonction des critères didactiques qui les ont déterminées, nous avons trois thèmes que nous avons déjà désignés par « Victor », « cercles » et « Marie ».

- « Victor » renvoie à l'ensemble des trois exercices 2.1. à 2.3. où les élèves avaient à juger de la figure proposée par Victor. Celle-ci était une photocopie réduite d'une figure juste (exercice 2.1.) et d'une figure fautive (exercices 2.2. et 2.3.)
- « Cercles » demande aux élèves de retrouver le centre du cercle circonscrit à un triangle alors qu'on en connaît le rayon (exercices 2.4. et 2.5.).
- Enfin « Marie » est le groupement des quatre exercices 2.6. à 2.9. où les élèves devaient se prononcer sur la nature du triangle ABD sachant que les triangles ABC et ACD sont isocèles.

Le nombre d'élèves de chaque niveau de scolarité qui a changé de paradigme est le suivant :

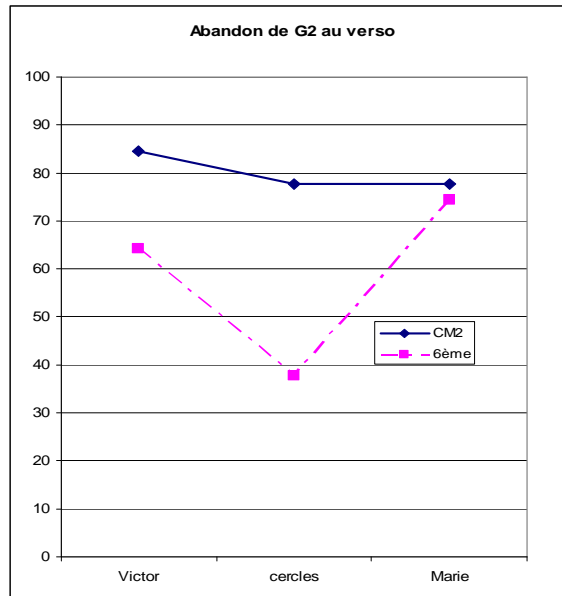
	CM2	6^{ème}	Total
Victor	22	27	49
cercles	21	20	41
Marie	14	29	43
Total	57	76	133

On a donc une vingtaine d'élèves qui sont passés de G2 vers G1 pour chaque type de situations et chaque niveau de scolarité. Mais les effectifs varient selon que l'on considère les élèves de CM2 ou de 6^{ème}.

Parmi les élèves qui ont fonctionné en G2 au recto, les pourcentages des élèves qui sont passés en G1 ou GX au verso sont les suivants :

Pourcentage	CM2	6^{ème}	Total
Victor	85%	64%	72%
cercles	78%	38%	51%
Marie	78%	74%	75%
Total	80%	57%	65%

Le graphique illustrant cette situation est :



De ce graphique il ressort que presque tous les élèves de CM2 qui ont travaillé en G2 au recto sont passés en G1 au verso. Ils ont donc basculé dans un paradigme spatio-graphique en dépit du contrat didactique. On ne saurait tenir compte des variations des valeurs des pourcentages pour le niveau CM2 tant les effectifs sont faibles et le calcul de pourcentage donne un effet de loupe difficile à interpréter. On peut encore dire que les tâches proposées au verso n'étaient pas accessibles en G2 à une très grande majorité d'élèves.

En revanche en 6^{ème}, il est très net que ce sont les activités de recherche de centre de cercle circonscrit qui ont permis aux élèves de ne pas basculer en G1 ou en GX. Plus de la moitié de ceux qui avaient fonctionné en G2 au recto sont restés dans ce paradigme au verso. Dans le même temps, à propos des triangles isocèles accolés (« Marie »), les trois quarts des élèves qui s'étaient placés en G2 au recto sont passés en G1 en abordant l'une de ces quatre tâches au verso. C'est la situation pour laquelle le plus grand nombre d'élèves de 6^{ème} a basculé vers une géométrie spatio-graphique plutôt que théorique, en dépit du contrat didactique. Les proportions d'élèves de CM2 et de 6^{ème} sont tout à fait comparables. On pourrait en déduire que la situation « Marie » sous quelque forme que ce soit était la plus difficile pour les élèves, y compris ceux qui avaient pu fonctionner en G2 dès la première activité.

3.4. Accès au paradigme G2 pour un élève

Nous allons maintenant considérer le groupe des élèves qui ont travaillé en G2 au verso du questionnaire après avoir donné une réponse relevant de G1 ou de GX au recto. On peut d'ores et déjà dire que de tels élèves s'ils existent, se sont remarquablement adaptés au contrat didactique qui leur était proposé.

En CM2 la situation se présente ainsi

CM2	ont reçu l'activité	recto en GX ou G1	verso en G2
ex. 2.1.	22	14	3
ex. 2.2	20	13	0
ex. 2.3.	20	9	0
ex. 2.4.	40	27	5
ex. 2.5.	44	30	6
ex. 2.6.	12	9	2
ex. 2.7.	20	17	2
ex. 2.8.	20	14	0
ex. 2.9.	11	5	0
Total	209	138	18

Comme l'indique ce tableau c'est une minorité d'élèves de CM2 qui s'est adaptée au contrat didactique de l'activité proposée au verso des questionnaires. 18 élèves sur 209 soit de 10% ont eu une telle attitude. On peut alléguer ici que, si un élève de CM2 fonctionne en G1 voire en GX pour une activité, il lui est très difficile de passer à un paradigme plus théorique même si on lui propose une tâche qui en relève.

En regroupant les effectifs des activités que nous avons associées, nous obtenons :

CM2	ont reçu l'activité	recto en GX ou G1	verso en G2
Victor	62	36	3
Cercles	84	57	11
Marie	63	45	4
Total	209	138	18

L'effectif le plus grand se situe sur la ligne « cercles » que ce soit pour le nombre d'élèves qui ont répondu à cette question, le nombre de ceux qui l'ont abordée après avoir fonctionné en G1 au recto et qui ont utilisé G2 pour la recherche du centre du cercle circonscrit.

Afin de comparer ces effectifs nous les traduisons en pourcentages. Dans la première colonne, nous avons indiqué le pourcentage d'élèves ayant travaillé sur cette activité du verso et qui s'étaient placés en GX ou G1 ou recto. Dans la deuxième colonne, il s'agit du pourcentage d'élèves qui, ayant fonctionné en GX ou G1 au recto ont fonctionné en G2 au verso.

	Recto en GX ou G1	Verso en G2
Victor	58%	8%
Cercles	68%	19%
Marie	71%	9%
Total	66%	13%

On voit que la situation la plus favorable est celle des cercles où, faut-il le rappeler, les élèves pouvaient agir en vraie grandeur et valider à l'œil leur recherche. Globalement ce sont 13% des élèves de CM2 qui ont été en mesure de donner une réponse qui relève de G2 alors qu'ils avaient fonctionné dans un paradigme moins théorique au recto de leur questionnaire.

En 6^{ème}, la situation est la suivante :

6 ^{ème}	ont reçu l'activité	recto en GX ou G1	verso en G2
ex. 2.1.	30	14	5
ex. 2.2	23	5	2
ex. 2.3.	25	7	4
ex. 2.4.	43	31	12
ex. 2.5.	54	25	11
ex. 2.6.	16	2	2
ex. 2.7.	20	10	3
ex. 2.8.	19	5	3
ex. 2.9.	16	2	1
Total	246	101	43

Il semble que davantage d'élèves de 6^{ème} ont été en mesure de s'adapter aux exigences plus théoriques des activités au verso des questionnaires puisque nous avons finalement 43 élèves sur 246 soit 17% qui ont fait le passage vers G2.

Le regroupement par activité donne les informations suivantes :

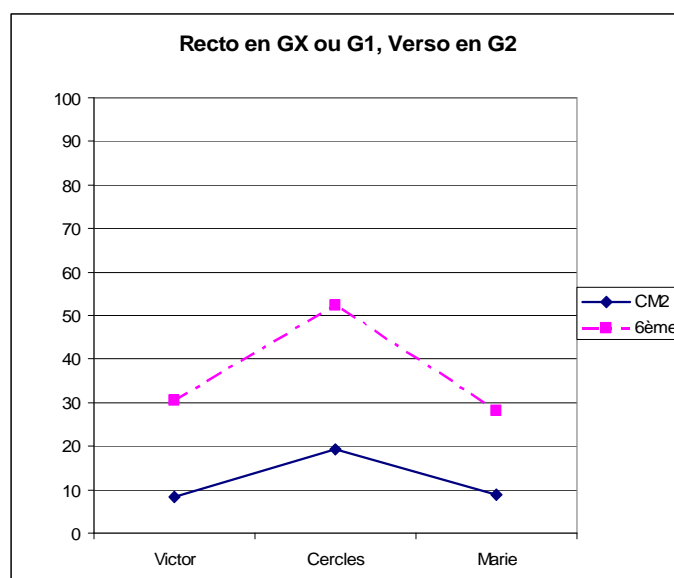
6 ^{ème}	ont reçu l'activité	recto en G1	verso en G2
Victor	78	36	11
cercles	97	44	23
Marie	71	32	9
Total	246	112	43

Comme pour les CM2, les effectifs les plus grands sont sur la ligne « cercles ». Traduits en pourcentages, ces résultats sont :

	recto en G1 ou GX	verso en G2
Victor	46%	31%
Cercles	45%	52%
Marie	45%	28%
Total	46%	38%

Nous retrouvons là le fait que moins de la moitié des élèves de 6^{ème} ont fonctionné en G1 ou en GX au recto, utilisant par conséquent G2 ou à tout le moins certaines de ces composantes. Le pourcentage d'élèves qui ont utilisé G2 au verso est le plus élevé dans le cas de la recherche du centre du cercle circonscrit comme cela fut le cas pour les CM2.

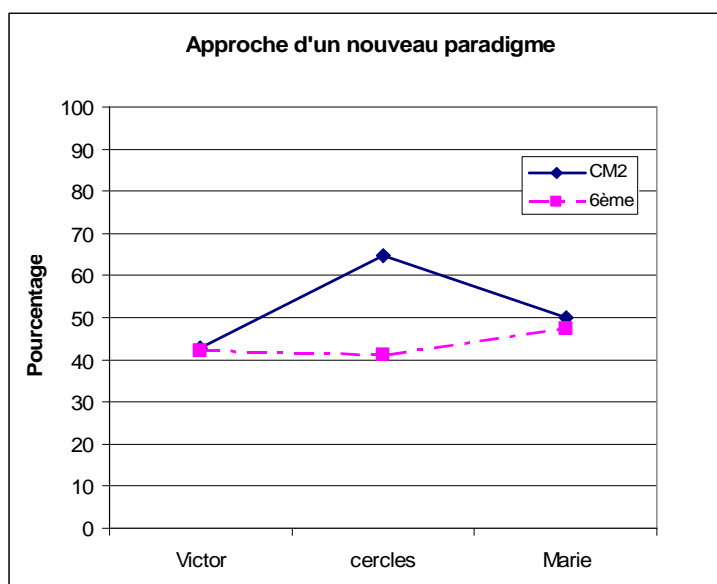
La comparaison entre les CM2 et les 6^{ème} présentée sous forme de graphique permet de dire que ce sont les 6^{ème} qui se sont le mieux adaptés au contrat didactique des tâches au verso des questionnaires.



Entre un tiers et la moitié des élèves de 6^{ème} se sont adaptés quand en CM2 ce sont entre 10% et 20%. Quoiqu'il en soit c'est, pour les deux groupes d'élèves la situation « cercles » qui a été la plus favorable au passage vers ce nouveau paradigme. Dans les deux autres situations,

les élèves ont sans doute eu plus de difficultés à répondre de manière satisfaisante aux questions qui leur étaient posées.

Quand, parmi tous les élèves qui ont travaillé en G2 au verso des questionnaires, on considère la proportion de ceux qui ont, à cette occasion, fait usage d'un paradigme plus théorique qu'au recto, le constat est un peu différent en particulier pour les 6^{ème}.



On voit que pour deux élèves de CM2 sur trois qui ont fonctionné en G2 au verso, avaient fonctionné en G1 ou en GX au recto. Rappelons que dans ces activités, les élèves devaient respecter simultanément les trois contraintes propres au cercle circonscrit d'un triangle et raconter comment ils avaient procédé. On peut aussi remarquer que pour près d'un élève sur deux qui a fonctionné en G2 au verso, celui-ci avait utilisé G1 au recto. Les élèves de CM2 ont donc compris le contrat didactique : il relevait de G2. Mais comme le montrent les tableaux ci-dessous, les effectifs restent très petits. Comme l'indiquent les tableaux suivants, seulement 7 élèves et 8 élèves de CM2 se sont placés dans G2 pour répondre aux questions à propos de « Victor » ou de « Marie » alors que nous avons distribué 63 exemplaires de ces situations dans l'une ou l'autre des versions.

CM2 par activité

	ont reçu l'activité à faire	verso en G2	Recto en GX ou G1
Victor	63	7	3
cercles	85	17	11
Marie	63	8	4
Total	211	32	18

6^{ème} par activité

	ont reçu l'activité à faire	Verso en G2	Recto en GX ou G1
Victor	78	26	11
cercles	97	56	23
Marie	71	19	9
Total	246	101	43

En 6^{ème} en revanche, les effectifs sont plus grands. Nous l'avons remarqué plus tôt un tiers des élèves a donné une réponse relevant de G2 à propos de « Marie », un tiers dans le cas de « Victor » et plus de moitié dans le cas des cercles. Dans ce dernier groupe d'élèves, près de la moitié d'entre eux a fait le changement de paradigme, répondant en cela au contrat didactique. C'est donc un quart des élèves de 6^{ème} qui, face à la recherche du centre du cercle circonscrit à un triangle, ont fait le passage vers un paradigme plus théorique. On pourrait généraliser cette remarque en suggérant que les dessins avec contraintes soient une opportunité de fonctionnement en G2 pour les élèves. La question est alors de savoir si les élèves ont utilisé les mêmes composantes du paradigme au cours de ce « saut ». C'est sans doute par l'étude des niveaux de van Hiele maîtrisés par les élèves que nous saurons si ce passage en G2 traduit un fonctionnement complet dans ce paradigme plus théorique ou si, au contraire, ils n'en utilisent que certaines composantes.

3.5. Recto et verso dans le même paradigme.

Si maintenant nous nous intéressons aux élèves qui sont ont fonctionné dans le même paradigme sur l'ensemble des deux activités. Ils sont 105 sur 209 élèves en CM2 c'est-à-dire la moitié de l'échantillon et 110 sur 246 en 6^{ème} soit 46% de notre échantillon. C'est dire que le changement de paradigme n'est sans doute pas une attitude spontanée chez les élèves à ce niveau de connaissances de la géométrie et l'accès à G2 ne peut se faire que par le biais de l'apprentissage.

La répartition dans les différents paradigmes est la suivante :

	GX	G1	G2	Total
CM2		91	14	105
6^{ème}	1	51	58	110
Total	1	142	72	215

On constate alors que la majorité des élèves de CM2 (91 sur 105 soit 87%) sont restés en G1 quand en 6^{ème} la répartition entre les deux paradigmes est plus équilibrée (51 en G1 soit 46% et 58 en G2 sur 110 soit 53%). Le test du χ^2 appliqué au tableau duquel on a retiré la colonne GX confirme le lien entre les variables : $\chi^2 = 38,1$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 3,84.

Quelles sont les activités qui ont permis aux élèves de rester dans le même paradigme ?

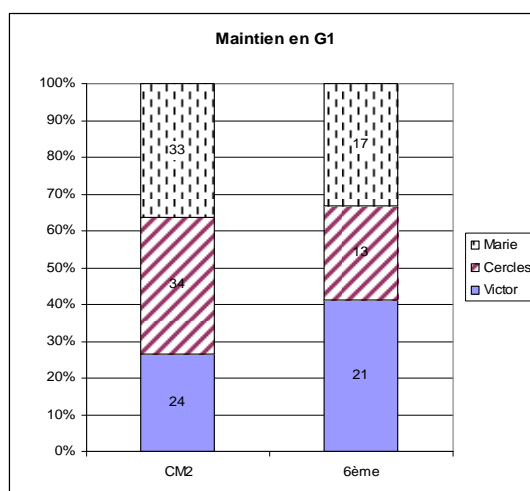
3.5.1. **Maintien dans le paradigme G1**

Il y a 91 élèves de CM2 et 51 élèves de 6^{ème} qui ont répondu à l'ensemble du questionnaire en se positionnant en G1. Le tableau ci-dessous en donne la répartition selon les trois types d'activités du verso.

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	24	21	45
Cercles	34	13	47
Marie	33	17	50
Total	91	51	142

On voit que cette répartition est inversée entre les CM2 et les 6^{ème}. Il y a autant d'élèves de CM2 qui ont continué de fonctionner en G1 (plus d'un tiers de l'effectif à chaque fois) dans le cadre des activités regroupées sous les noms de « Cercles » et « Marie » quand le plus grand nombre d'élèves de 6^{ème} l'a fait à propos de « Victor ».

Le graphique suivant permet de comparer les proportions d'élèves de chaque niveau dans les activités.



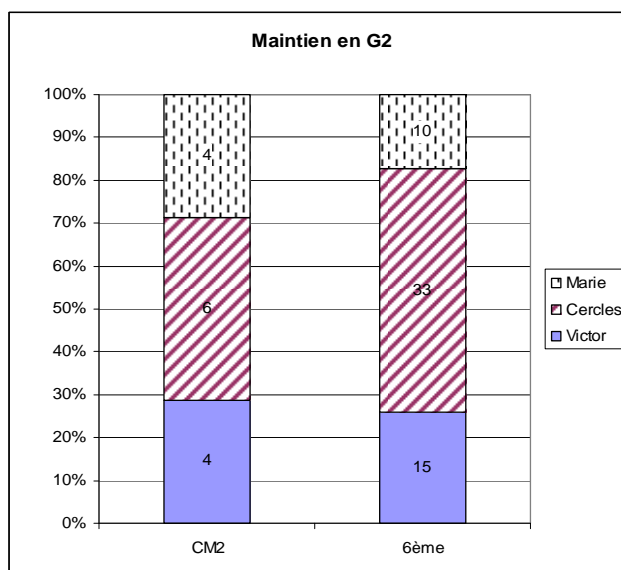
Les proportions d'élèves restés en G1 quand ils ont reçu l'une des tâches regroupées sous le nom « Marie » sont du même ordre en CM2 et en 6^{ème} : environ un tiers de l'échantillon. En revanche, les répartitions sont différentes quand on considère les deux autres activités : davantage d'élèves de CM2 que de 6^{ème} sont restés en G1 en travaillant sur les cercles alors que c'est le contraire pour « Victor ». Mais on ne saurait négliger dans le même temps que les élèves de CM2 qui ont continué de fonctionner en G1 sont presque deux fois plus nombreux que les 6^{ème} : 91 contre 51. C'est dire une fois de plus que les élèves de CM2 fonctionnent pour un grand nombre en G1, ce qui est attendu.

3.5.2. Maintien dans le paradigme G2

Nous avons vu que les élèves qui sont restés en G2 sur l'ensemble du questionnaire sont globalement moins nombreux et majoritairement des 6^{ème} : 14 élèves en CM2 et 58 élèves en 6^{ème}. D'ores et déjà nous pouvons dire que ces élèves sont sans doute les plus performants quant à l'apprentissage de la géométrie : ils sont su fonctionner dans un paradigme proto-axiomatique sur l'ensemble des deux exercices. Ils se répartissent ainsi selon les trois catégories du verso :

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	4	15	19
Cercles	6	33	39
Marie	4	10	14
Total	14	58	72

Tant pour les CM2 que pour les 6^{ème} ce sont les activités sur les cercles qui ont permis au plus grand nombre d'élèves de continuer à fonctionner en G2. Le graphique suivant indique que le rôle joué par ces activités n'est pas le même en CM2 et en 6^{ème}.



En effet, si les quelques élèves de CM2 qui sont restés en G2 l'ont fait de manière équilibrée sur l'ensemble des exercices du verso, en revanche les élèves de 6^{ème} l'ont fait dans le contexte de la recherche du centre du cercle circonscrit : 33 élèves sur 58 soit 57%. A l'opposé ce sont les activités sur les triangles isocèles accolés (« Marie ») où les élèves de 6^{ème} sont les moins nombreux à être restés en G2 : 10 sur 58 soit 17%. On peut y retrouver ici le constat fait ailleurs et qui est que ce type d'activité s'est révélé particulièrement difficile pour nos sujets.

3.6. Conclusion à propos des paradigmes

Nous avons vu que les élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} ne pouvaient spontanément changer de paradigme en fonction de la tâche qui leur était proposée. Au contraire, ils ont tendance à rester dans le même paradigme voire à utiliser un paradigme moins théorique quand la tâche leur semble plus difficile.

En particulier les trois quarts des élèves de CM2 sont dans ce cas. En revanche, les élèves de 6^{ème} nous ont amenés à une remarque plus nuancée. En effet, c'est dans les activités sur la recherche du centre du cercle circonscrit que les élèves qui avaient fonctionné en G2 au recto, ont été les plus nombreux à rester en G2 au verso, alors que dans l'étude des triangles isocèles accolés (« Marie »), le pourcentage d'élèves qui a changé de paradigme est le même qu'en primaire : 75% sont passés de G2 à G1 en passant au verso.

A l'opposé quand on s'intéresse à l'activité qui a permis à un plus grand nombre d'élèves d'aborder la deuxième activité en G2 comme prévu par le contrat didactique, là encore c'est la recherche du centre du cercle circonscrit qui a été la plus favorable, tant en CM2 qu'en 6^{ème}.

On peut donc conjecturer que ce type d'activité est une porte d'entrée pour les élèves au début du collège dans un paradigme proto-axiomatique. Rappelons que seule la narration de la procédure utilisée par l'élève était demandée. De plus, les tracés étaient en vraie grandeur et la validation pouvait se faire à vue d'œil. Même si l'objet sur lequel les élèves ont travaillé n'a pas été le représentant d'un objet théorique, avant d'arriver à une solution satisfaisante, ils ont dû changer de point de vue sur la définition du cercle et appliquer simultanément plusieurs

contraintes. Ce sont là des composantes du paradigme G2. On pourrait peut-être davantage généraliser en disant que le travail sur dessin en vraie grandeur demandant une certaine démarche analytique respecte un apprentissage par zone de développement proximal dans la maîtrise de G2, comme les constructions avec contraintes où la validation se fait par le dessin. Par exemple demander le dessin d'un « panneau de sens interdit » en donnant le rayon du cercle, la « hauteur » du rectangle et la distance entre les sommets du rectangle et le cercle.

4. Résultats à propos des niveaux de van Hiele

Nous allons maintenant analyser les réponses des élèves du point de vue des niveaux de van Hiele qui ont été identifiés en CM2 et en 6^{ème} dans chacune des activités. Puis nous nous intéresserons aux niveaux de van Hiele dont les élèves ont témoigné sur l'ensemble du questionnaire qu'ils ont reçu.

4.1. Dans les activités

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	58	175	123	74	430
6^{ème}	50	105	163	177	495
Total	108	280	286	251	925

Globalement nous avons donc 108 réponses sur 925 soit 12% auxquelles nous n'avons pas pu associer un niveau de van Hiele particulier. Ceci peut avoir plusieurs explications : l'élève a confondu les définitions des figures en particulier triangle isocèle et triangle équilatéral ; l'élève a donné une réponse qui était tout à fait étrangère à la consigne ; l'élève n'a pas compris la consigne.

Comme nous l'avons déjà remarqué lors des bilans à propos du recto et du verso, l'effectif le plus grand en CM2 se situe dans la case N1 (identification-visualisation) avec 175 sujets sur 430 soit près de 41% et en 6^{ème} dans la case N3 (déduction informelle) avec 177 sujets sur 495

soit plus de 35%. Le test du χ^2 confirme qu'il y a un lien entre les variables : $\chi^2 = 61,69$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,82. Donc ce n'est pas un hasard si les élèves de 6^{ème} sont plus nombreux à maîtriser l'amorce de la démonstration quand les élèves de CM2 en sont encore à décrire globalement les figures.

Toutefois il est remarquable que nous ayons des pourcentages très voisins en CM2 et en 6^{ème} dans la colonne N2 d'analyse : 123 sur 430 en CM2 soit près de 30% et 163 sur 495 en 6^{ème} soit 33%. De plus quand on considère chaque ligne du tableau, à partir de la colonne N1, les effectifs de CM2 vont décroissants quand ceux de 6^{ème} vont croissants. On pourrait tirer comme conclusion de ceci que le niveau d'analyse est vraiment le niveau charnière pour passer de l'identification-visualisation à la déduction informelle. Si l'on prend en compte à la fois le fait que selon la théorie de van Hiele, l'élève doit passer successivement d'un niveau à l'autre sans en sauter aucun, et que d'autre part, selon Vygotski, les apprentissages se font par l'intermédiaire de franchissement de zone de développement proximal, nous sommes incités à conclure que le niveau d'analyse pourrait être une zone de développement proximal dans l'apprentissage de la démonstration en géométrie.

Là encore on peut se poser la question de savoir si les élèves ont témoigné de la maîtrise des mêmes niveaux de van Hiele au recto ou au verso des feuilles ou si, au contraire, le niveau qui leur a été attribué est lié à la tâche.

	N0	N1	N2	N3	Total
recto	64	114	150	140	468
verso	44	166	136	111	457
Total	108	280	286	251	925

Globalement les niveaux de van Hiele déterminés sont différents entre le recto et le verso des feuilles. Au recto c'est le niveau d'analyse qui a été le plus fréquemment rencontré tandis qu'au verso il s'agit du niveau d'identification-visualisation. Mais nous avons vu que selon le niveau de scolarité, les niveaux de maîtrise étaient différents donc nous devons considérer séparément chacun des deux groupes d'élèves ;

CM2

	N0	N1	N2	N3	Total
recto	37	78	53	51	219
verso	21	97	70	23	211
Total	58	175	123	74	430

Sur chaque ligne du tableau, en dehors du niveau N0, les effectifs vont décroissants au fil de la progression dans les niveaux de van Hiele. Mais cette décroissance est nettement plus forte dans le cas du « verso » que dans le cas du « recto ». Dans la mesure où les exercices du « verso » demandaient la maîtrise des niveaux supérieurs de la théorie de van Hiele, il n'est pas étonnant que la décroissance soit plus grande au « verso » qu'au « recto » pour les élèves du Primaire. Cette différence est statistiquement significative : $\chi^2 = 19,28$; ddl = 3 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,82. On retrouve donc que face à une tâche plus difficile l'élève a tendance à témoigner d'un niveau de van Hiele inférieur. On peut aussi avancer l'hypothèse suivante : ce n'est pas en demandant aux élèves de rédiger des raisonnements qu'ils arriveront spontanément à le faire. Des activités basées sur le décodage des figures, la décomposition en sous-figures ou l'inclusion des figures particulières dans les figures plus générales ont tout autant d'intérêt.

6^{ème}

	N0	N1	N2	N3	Total
recto	27	36	97	89	249
verso	23	69	66	88	246
Total	50	105	163	177	495

La variation des effectifs sur chaque ligne de ce tableau ne se résume pas à une simple croissance au fil des colonnes. Si les effectifs dans la colonne N3 sont grands, ils ne sont pas la majorité sur chaque ligne mais représentent 36% de l'effectif de chaque ligne. Le niveau de

van Hiele attribué à chaque élève est pour autant lié à la tâche : $\chi^2 = 16,58$; ddl = 1 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 7,82. En effet, la différence se situe dans les colonnes N1 et N2 où, au recto, nous avons 97 élèves en N2 soit 39% et au verso 69 élèves en N1 soit 28%.

Enfin que ce soit en CM2 ou en 6^{ème}, il y a environ 10% des élèves pour lesquels nous avons utilisé le code N0 tant au « recto » qu'au « verso » : nous n'avons pas été en mesure d'associer les réponses données par ces élèves à l'un des niveaux de van Hiele. S'agit-il d'élèves en grande difficulté ?

4.2. Niveau de van Hiele attribué à chaque élève

Comme nous l'avons fait à propos des différents paradigmes géométriques, nous allons maintenant étudier quels niveaux de van Hiele ont été mis en évidence chez les élèves de CM2 puis les élèves de 6^{ème}, au travers des activités proposées à chacun.

CM2

RECTO VERSO	N0 (recto)	N1 (recto)	N2 (recto)	N3 (recto)	Total
N0 (verso)	1	8	10	2	21
N1 (verso)	19	39	18	18	94
N2 (verso)	7	25	13	25	70
N3 (verso)	5	3	10	6	24
Total	32	75	51	51	209

Les effectifs correspondant aux niveaux N0 sont trop faibles pour toute étude statistique aussi, comme nous l'avons déjà fait, nous allons les regrouper avec ceux des niveaux N1. mais ce choix est aussi tout à fait raisonnable dans la mesure où les élèves auxquels nous nous

adresses ont déjà une certaine pratique de la géométrie, au moins au niveau 1 d'identification-visualisation

RECTO VERSO	N0 + N1 (recto)	N2 (recto)	N3 (recto)	Total
N0 + N1 (verso)	67	28	20	115
N2 (verso)	32	13	25	70
N3 (verso)	8	10	6	24
Total	107	51	51	209

De ce tableau il ressort que très rares ont été les élèves de CM2 à témoigner de la maîtrise du niveau de déduction informelle sur l'ensemble des deux activités : 6 élèves sur 209 soit 3%. En revanche, il y en a près d'un tiers pour qui nous avons attribué un niveau de base (N0 ou N1) dans les deux cas. A l'intérieur de chaque colonne, les effectifs diminuent quand on passe d'un niveau de van Hiele au niveau supérieur comme si le niveau de van Hiele attribué à l'issue de l'activité du recto était supérieur ou égal à celui qui a été attribué au verso.

Il y a 50 élèves de CM2 ($32 + 8 + 10 = 50$) soit à peine un quart pour qui le niveau de van Hiele attribué au verso est supérieur au niveau attribué au recto. Pour les autres, soit les trois quarts de notre échantillon, le niveau de van Hiele attribué au verso est donc inférieur ou égal à celui du recto. Rappelons que les tâches proposées au recto étaient a priori plus simples que celles du verso. C'est dire que pour une très grande majorité des élèves de CM2, les niveaux de van Hiele qui leur ont été attribués étaient d'autant plus élevés que la tâche leur a été accessible. Il est peut-être pertinent de rappeler que, dans la plupart des exercices du verso, les élèves devaient exprimer leur raisonnement et que c'est là une activité qui dépasse largement les habitudes du Primaire. Donc il n'est pas étonnant que le niveau attribué au verso ne soit pas systématiquement celui qui a été donné au recto. Pour autant le test du khi deux confirme une certaine dépendance entre les variables : $\chi^2 = 13,93$; ddl = 4 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 9,49. Le niveau de van Hiele attribué à un élève à l'issue d'un exercice pourrait être lié à celui qui lui sera attribué à une autre occasion, en fonction de la tâche prescrite.

RECTO \ VERSO	N0 (recto)	N1 (recto)	N2 (recto)	N3 (recto)	Total
N0 (verso)	3	6	7	7	23
N1 (verso)	11	12	22	24	69
N2 (verso)	5	8	32	19	64
N3 (verso)	8	9	34	39	90
Total	27	35	95	89	246

Les effectifs les plus grands sont maintenant dans les cases correspondant aux niveaux supérieurs de la théorie de van Hiele. Pour établir une comparaison, nous regroupons ici les niveaux N0 et N1.

RECTO \ VERSO	N0 + N1 (recto)	N2 (recto)	N3 (recto)	Total
N0 + N1 (verso)	32	29	31	92
N2 (verso)	13	32	19	64
N3 (verso)	17	34	39	90
Total	62	95	89	246

Les résultats donnés par le test du χ^2 sont les suivants : $\chi^2 = 10,91$; ddl = 4 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 9,49. Il existe donc un lien entre les niveaux de van Hiele attribués à chaque élève à l'issue des deux activités. Là encore 64 élèves sur 246 ($13 + 17 + 34 = 64$) soit un peu plus d'un quart d'entre eux ont témoigné au verso d'un niveau de van Hiele supérieur à celui que nous avons identifié au recto. Autrement dit comme en CM2, les trois quarts des élèves de 6^{ème} ont eu tendance à se replier vers des niveaux de van Hiele inférieurs ou à se maintenir au même niveau quand la tâche est devenue plus difficile.

RECTO \ VERSO	N0 + N1 (recto)	N2 (recto)	N3 (recto)	Total
N0 + N1 (verso)	99	57	51	207
N2 (verso)	45	45	44	134
N3 (verso)	25	44	45	114
Total	169	146	140	455

Dans le tableau ci-dessus, nous avons réuni les effectifs des tableaux consacrés aux élèves de CM2 et de 6^{ème}. Si nous utilisons une fois de plus le test du χ^2 , nous pouvons affirmer que les tendances relevées pour chacun des niveaux de scolarité étaient dans le même sens et que les niveaux de van Hiele sont liés les uns aux autres, pour un même élève : $\chi^2 = 22,38$; ddl = 4 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 9,49.

Sur la diagonale du tableau, on compte 189 élèves ($99 + 45 + 45 = 189$) soit 42% qui ont le même niveau de van Hiele dans les deux activités. A 152 élèves soit un tiers de notre échantillon, nous avons attribué un niveau de van Hiele inférieur au verso par rapport à celui du recto. Il reste donc 114 élèves soit un quart de l'effectif, qui se sont remarquablement adaptés aux exigences des activités plus théoriques du verso en témoignant à cette occasion d'un niveau de van Hiele supérieur.

On peut alors conclure ainsi : on ne saurait associer un seul niveau de van Hiele à un élève pour tous les domaines de la géométrie et que plus l'élève est en difficulté plus il aura tendance à témoigner d'un niveau inférieur. Chaque élève témoigne de niveaux différents selon les situations. Ceci laisse entendre que l'enseignant a la responsabilité de proposer aux élèves des activités relevant de chaque niveau de van Hiele pour chaque domaine d'apprentissage.

4.3. Activités du verso dans lesquelles les élèves ont témoigné d'un niveau de van Hiele inférieur.

Comme nous l'avons fait à propos des paradigmes géométriques, nous allons maintenant repérer dans quelles conditions un élève a pu se replier vers un niveau de van Hiele inférieur à celui dont il avait fait preuve lors de la première activité. La recherche a déjà montré que lorsque la tâche devenait plus difficile, un élève avait tendance à se retrancher dans des niveaux de van Hiele inférieurs. Notre enquête devrait nous permettre de préciser dans quelles conditions et sur quel type de tâche ce repli peut exister.

Nous rappelons ici la répartition des élèves qui ont complété les questionnaires selon leurs niveaux de van Hiele au recto.

Niveau au recto	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	32	75	51	51	209
6^{ème}	27	35	95	89	246
Total	59	110	146	140	455

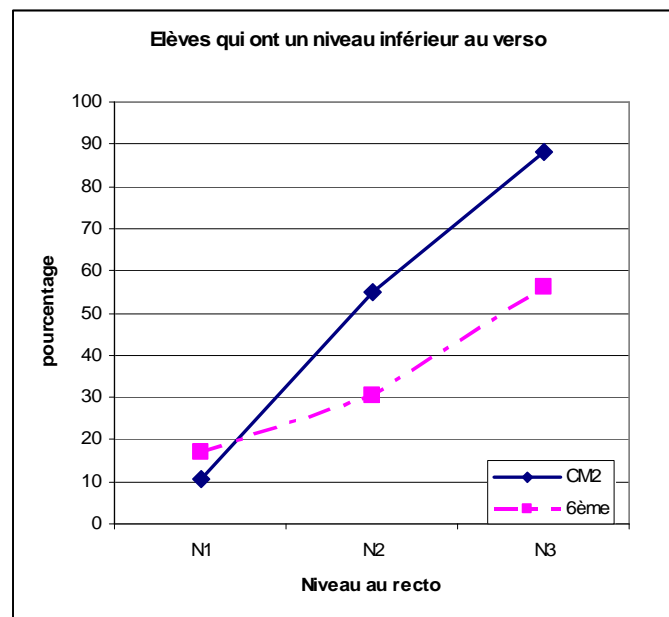
Le tableau suivant donne les effectifs des élèves qui n'ont pas atteints le même niveau au verso du questionnaire.

	N1 au recto vers N0 au verso	N2 au recto vers N1 ou N0	N3 au recto vers N2 ou N1 ou N0	Total
CM2	8	28	45	81
6^{ème}	6	29	50	85
Total	14	57	95	166

Nous avons donc 81 élèves de CM2 sur 209 qui ont basculé vers un niveau de van Hiele inférieur soit 39% de notre échantillon et 85 élèves de 6^{ème} sur 246 soit 35% qui sont dans le même cas. C'est plus d'un élève sur trois qui a changé de niveau de van Hiele en passant de la première à la deuxième tâche. Par conséquent on peut aussi dire que près de deux élèves sur

trois que ce soit en CM2 ou en 6^{ème} ont su rester au même niveau de van Hiele voire en maîtriser un qui soit supérieur au premier.

La proportion d'élèves qui a témoigné d'un changement de niveau de van Hiele vers un niveau inférieur est représentée par le graphique suivant.



On voit que les pourcentages les plus faibles tant en CM2 qu'en 6^{ème} concernent les élèves qui étaient au niveau d'identification-visualisation au recto. Nous n'avons pas pu identifier leur niveau de van Hiele au verso pour 10% à 20% d'entre eux. Les autres sont donc restés à ce niveau d'identification-visualisation ou ont témoigné d'un niveau supérieur.

La moitié des élèves de CM2 qui étaient au niveau d'analyse sont passés au niveau d'identification-visualisation lors de leur deuxième activité où à un niveau que nous n'avons pas qualifié. Ce sont 30% des élèves de 6^{ème} qui ont eu la même évolution. Autrement dit davantage d'élèves de 6^{ème} que de CM2 sont restés au niveau 2 d'analyse ou en ont profité pour montrer qu'ils maîtrisaient aussi quelques facettes du niveau 3 de déduction informelle.

Comme on pouvait s'y attendre, c'est à propos du niveau 3 (déduction informelle) que les pourcentages sont les plus grands. Plus d'un élève sur 2 en 6^{ème} et près de 90% des élèves de CM2 n'ont pas été en mesure de témoigner du niveau de déduction informelle au verso du questionnaire alors qu'ils l'avaient fait dans leur première activité. Ce dernier pourcentage n'a rien d'étonnant puisque les critères d'attribution du niveau 3 de van Hiele dans la seconde activité étaient davantage liés au discours et à l'argumentation et que les CM2 n'y sont pas

habitué. Nous avons là encore un argument pour dire que le niveau de van Hiele attribué à un élève dépend de la tâche qui lui est prescrite. Ainsi un même élève peut savoir gérer simultanément des contraintes ou des propriétés, avoir une conception inclusive des figures particulières et donc maîtriser certaines facettes du niveau 3 de déduction informelle quand il aura du mal à rédiger un texte argumentatif ce qui, a priori, relève du même niveau de van Hiele.

La question est alors de savoir vers quel niveau de van Hiele se sont repliés les élèves et quelles sont les activités qui ont été le plus révélatrices de cette évolution.

Le tableau suivant donne la répartition des élèves qui ont changé de niveau de van Hiele, selon qu'ils ont baissé d'un niveau ou plus.

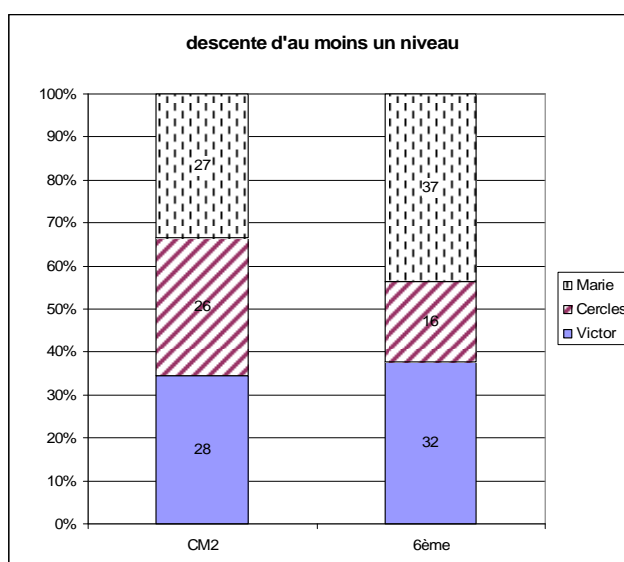
	N1 au recto	N2 au recto		N3 au recto			Total
	N0 au verso	N1 au verso	N0 au verso	N2 au verso	N1 au verso	N0 au verso	
CM2	8	18	10	25	18	2	81
	8	28		45			
6^{ème}	6	22	7	19	24	7	85
	6	29		50			
Total	14	40	17	44	42	9	166
Total	14	57		95			166

Nous pouvons dire que l'ensemble de notre échantillon se partage en quatre groupes de tailles équivalentes : une vingtaine d'élèves à chaque fois tant pour les CM2 que pour les 6^{ème} soit une quarantaine d'élèves pour chaque changement de niveau.

Plus précisément, deux groupes sont constitués des élèves qui sont descendus d'un niveau de van Hiele en passant de N2 à N1 (18 en CM2 et 22 en 6^{ème}) ou de N3 à N2 (25 en CM2 et 19 en 6^{ème}), un autre quart des élèves est composé de ceux qui sont passés de N3 à N1 (18 en CM2 et 24 en 6^{ème}). Enfin, on peut regrouper tous les élèves qui n'ont témoigné d'aucun

niveau de van Hiele (N0) au verso alors qu'ils avaient donné une réponse identifiable au recto ($8 + 10 + 2 = 20$ en CM2 et $6 + 7 + 7 = 20$ en 6^{ème}).

A quelles occasions ces changements de niveaux de van Hiele se sont-ils produits ? Quelles sont les activités qui ont fait basculé les élèves vers un niveau de van Hiele inférieur ?



Le graphique ci-dessus indique que les élèves de CM2 et de 6^{ème} n'ont pas réagi de la même manière. En effet en CM2 les trois activités ont amené les élèves à utiliser un niveau de van Hiele inférieur dans des proportions équivalentes. Il y a entre 26 et 28 élèves dans chaque cas. En 6^{ème}, au contraire, c'est à propos des triangles isocèles accolés que les élèves ont eu le plus de difficultés. Pour 37 d'entre eux nous avons attribué au verso un niveau de van Hiele inférieur à celui du recto. A l'opposé pour 16 élèves de 6^{ème}, c'est dans la recherche du centre du cercle circonscrit à un triangle que nous avons repéré un niveau de van Hiele inférieur.

4.3.1. Niveau 3 au recto

Nous donnons dans le tableau ci-dessous, le nombre d'élèves qui étaient au niveau de déduction informelle au recto et qui ne le sont plus au verso.

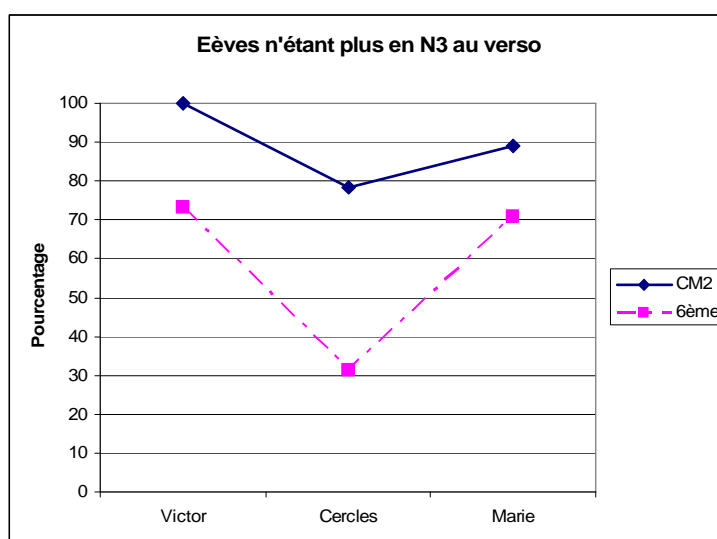
	CM2		6 ^{ème}	
	N3 au recto	pas N3 au verso	N3 au recto	pas N3 au verso
Victor	19	19	30	22
Cercles	23	18	35	11

Marie	9	8	24	17
Total	51	45	89	50

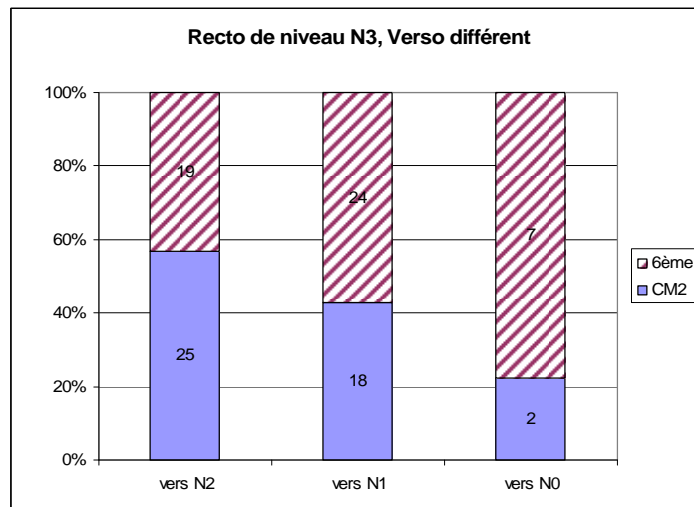
D'emblée nous constatons que presque tous les élèves de CM2 qui étaient au niveau 3 de van Hiele dans le cadre des premières activités, ne le sont plus au cours de la seconde. La situation qui est la plus favorable est celles de cercles circonscrits : 5 élèves de CM2 sont restés au niveau N3 sur 23 soit 22%.

En 6^{ème} la situation est un peu différente. Un plus grand nombre d'élèves sont restés au niveau N3 de déduction informelle dans les deux activités. Ceci n'est pas étonnant dans la mesure où l'enseignement de la géométrie en Primaire ne demande pas la maîtrise de ce niveau de van Hiele alors qu'en 6^{ème}, les élèves peuvent avoir été familiarisés avec l'organisation de séquences déductives.

Quand on traduit ce tableau en un graphique, on constate que pour les deux groupes d'élèves c'est la recherche des centres des cercles circonscrits qui a été l'activité la plus favorable au maintien dans le niveau de déduction informelle. Ceci est particulièrement net en 6^{ème} où les deux tiers des élèves qui étaient de niveau 3 au recto sont restés à ce niveau quand ils ont eu la recherche sur les cercles à faire. Pour les CM2, on pourrait dire que 22% d'entre eux sont aussi dans ce cas mais n'oublions pas que notre échantillon est limité et il s'agit ici de 5 élèves sur 23.



A partir du niveau N3 (déduction informelle), comme l'indique le graphique ci-dessous, les élèves de 6^{ème} sont proportionnellement moins nombreux à être passés au niveau 2 (analyse) que les CM2 alors que la tendance s'inverse à propos du passage au niveau 1 d'identification-visualisation. Quand bien même la différence est faible, on pourrait conjecturer que les élèves de 6^{ème} auxquels nous avons attribué le niveau N3 au travers des activités du recto ont eu plus de difficulté à témoigner d'un niveau de van Hiele voisin en passant à l'activité du verso. Peut-on généraliser en disant que ces élèves ne possèdent qu'un « vernis » de déduction informelle ? C'est possible.



On remarquera que les élèves de 6^{ème} semblent nettement plus nombreux que les CM2 à être passés à N0 quand en fait les effectifs sont réduits : 7 élèves en 6^{ème} et 2 en CM2. On peut considérer plutôt d'un phénomène marginal qui a concerné davantage d'élèves de 6^{ème} que de CM2.

4.3.1.a. De N3 vers N2

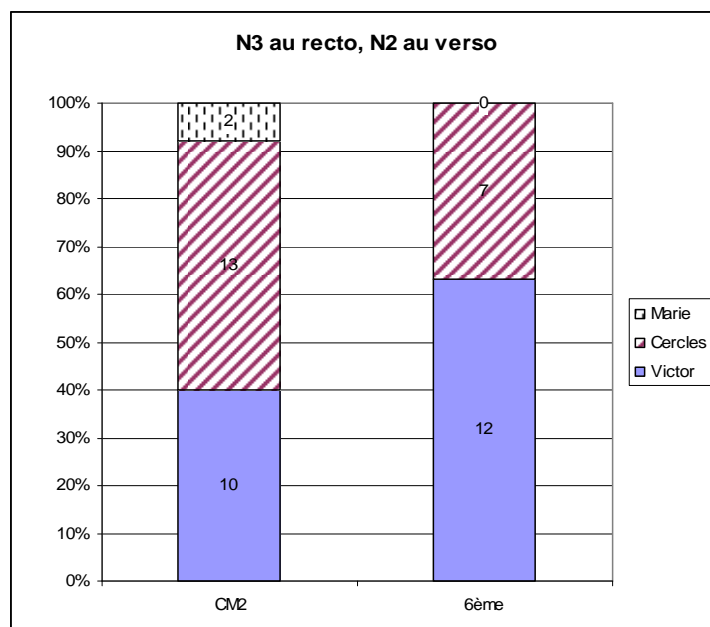
Compte tenu des questions posées dans la première des deux activités demandées aux élèves, le niveau de déduction informelle correspond essentiellement à la maîtrise de l'inclusion des définitions des figures particulières. Un quart des élèves de CM2 et un tiers des élèves de 6^{ème} sont dans ce cas. C'est donc à l'intérieur de ces groupes d'élèves que se situent ceux dont nous parlons maintenant et qui ont témoigné du niveau d'analyse au recto de leur questionnaire. Vraisemblablement ces élèves savent donner du sens au codage d'un schéma,

ils peuvent respecter simultanément plusieurs contraintes mais ont des difficultés dans l'expression d'une argumentation ou dans la découverte de nouvelles informations, voire dans l'appréhension discursive d'une figure. Pour autant au niveau de scolarité auquel nous nous adressons une telle situation n'a rien d'étonnant. Elle pourrait même être considérée comme celle qui traduit le niveau de compétences maximum d'un élève de 6^{ème}.

Nous donnons en annexe les questionnaires dans lesquels les élèves sont passés de N3 à N2. Quand nous regroupons les effectifs selon les trois types d'activités du verso, la répartition est la suivante :

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	10	12	22
Cercles	13	7	20
Marie	2	0	2
Total	25	19	44

La représentation graphique du tableau est la suivante :



Que ce soit en CM2 ou en 6^{ème}, c'est à propos des triangles isocèles accolés (« Marie ») que les élèves n'ont pas fait de changement vers le niveau d'analyse. Soit ils sont restés au niveau

de déduction formelle (N3) soit ils sont passés au niveau d'identification-visualisation (N1) ou à un niveau que nous n'avons pas identifié (N0). Le travail sur les triangles isocèles accolés est bien l'une des activités les plus difficiles des questionnaires puisque les élèves qui avaient atteint le niveau de van Hiele le plus élevé au recto n'ont pas confirmé leur niveau de compétence dans la seconde activité. En fait il n'y a qu'un seul élève de CM2 et 7 élèves de 6^{ème} qui soient restés au niveau N3 en répondant à l'un des exercices associés à « Marie ». Les autres se sont donc repliés vers des niveaux de van Hiele inférieur au niveau d'analyse.

C'est dans les cadre des situations géométriques que nous appelons « Victor », que deux élèves de 6^{ème} sur trois et 40% des élèves de CM2 sont passés de N3 à N2 : ces élèves qui maîtrisent vraisemblablement l'inclusion des figures particulières, n'ont pas été en mesure d'organiser un raisonnement dans le cadre de cette situation géométrique, à moins qu'ils n'en aient pas éprouvé la nécessité. Ils ont pu l'analyser, dire en quoi les diverses présentations étaient cohérentes entre elles ou non, mais sans justifier leur position. En fait aucun élève de CM2 et 8 élèves de 6^{ème} sont restés au niveau 3 en répondant à l'un des trois exercices associés à « Victor », respectant ainsi le contrat didactique implicite. On peut dire encore que plus de la moitié des élèves qui ont maîtrisé le niveau de déduction informelle dans le contexte des activités du recto, sont passés à un niveau d'identification-visualisation ou encore inférieur quand ils ont été confrontés à une tâche plus théorique comme celle que nous appelons « Victor », à moins qu'ils ne l'aient pas comprise comme telle. La proportion est moindre en 6^{ème}.

Enfin un tiers des élèves de 6^{ème} et la moitié des élèves de CM2 qui ont témoigné du niveau de déduction informelle au recto, sont passés au niveau inférieur (N2) au verso dans les activités sur les cercles. Les autres élèves sont passés à des niveaux de van Hiele encore plus bas : identification-visualisation ou N0

4.3.1.b. De N3 vers N1

Il y a 42 élèves qui sont passés du niveau de déduction informelle (N3) au niveau d'identification-visualisation (N1) en abordant la deuxième activité. On peut penser que le niveau 3 de van Hiele est loin d'être maîtrisé chez ces élèves puisque, dès que la tâche est plus difficile, ils se replient vers un niveau sans aucun élément théorique. En effet d'après les activités du recto, on peut dire que ces élèves ont su gérer simultanément plusieurs contraintes

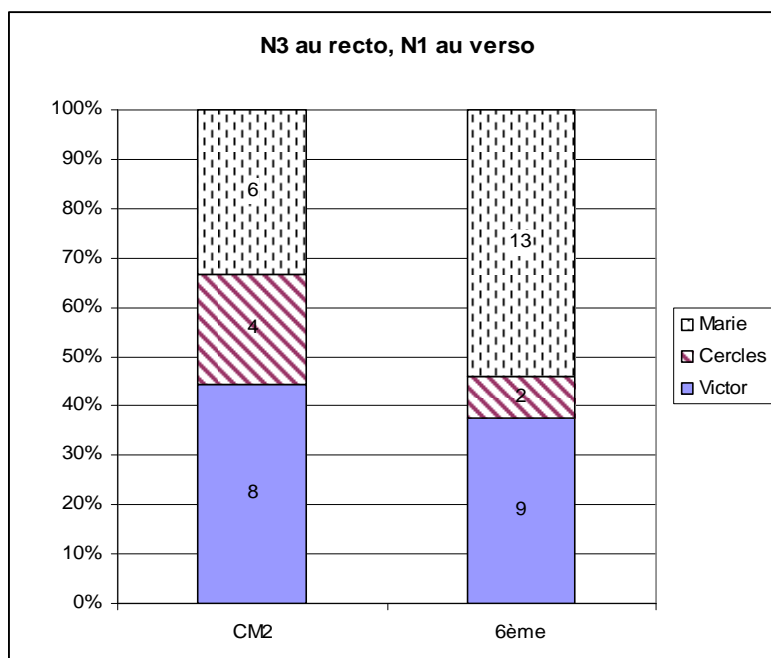
ou donner du sens au codage d'un schéma mais n'ont pas su analyser les sous-figures d'une figure géométrique ou organiser une démarche de construction dans le cas de la recherche du centre du cercle circonscrit.

La répartition des élèves est la suivante.

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	8	9	17
Cercles	4	2	6
Marie	6	13	19
Total	18	24	42

On voit tout de suite que c'est à propos des cercles que les effectifs sont les plus faibles tant en CM2 qu'en 6^{ème}. Les proportions des élèves qui sont passés de N3 à N1 semblent s'inverser entre les deux niveaux de scolarité.

Le graphique illustre cette remarque.



Les changements de niveaux de van Hiele les plus importants concernent sans aucun doute les quatre tâches regroupées sous le nom « Marie ». En effet, parmi les élèves à qui nous avons

attribué un niveau de van Hiele inférieur au verso par rapport au recto, pratiquement aucun élève n'a fait le glissement de N3 à N2. Ici nous constatons que la moitié des élèves de 6^{ème} et un tiers des élèves de CM2 ont donné des réponses relevant du niveau d'identification-visualisation soit un écart de deux niveaux dans la théorie de P.M. van Hiele. C'est dire une nouvelle fois combien ces questions ont pu être déroutantes pour les élèves et les moyens auxquels ils ont eu recours pour y répondre étaient de l'ordre du perceptif. On peut aussi ajouter que la moitié des élèves de 6^{ème} et les deux tiers des élèves de CM2 à qui nous avons attribué le niveau 3 au recto et un autre niveau au verso se sont retrouvés en grande difficulté puisque nous n'avons pas été en mesure d'associer leur réponse à un niveau de la théorie de van Hiele (N0).

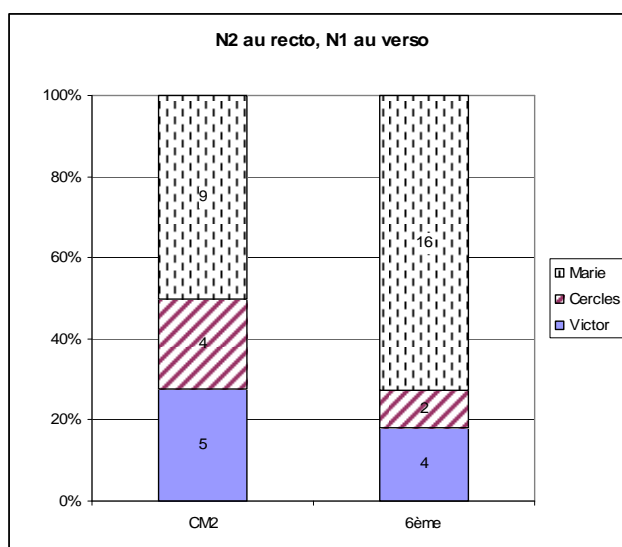
4.3.2. Niveau 2 au recto

De N2 à N1

Nous allons maintenant nous intéresser aux 40 élèves qui sont passés du niveau d'analyse au niveau d'identification-visualisation en abordant la deuxième activité. Ces élèves ont su donner du sens au codage d'une figure, respecter simultanément au moins deux contraintes. Ce sont là les principaux critères selon lesquels nous avons attribué le niveau d'analyse dans les activités du recto. Mais ces mêmes élèves ont eu davantage de difficultés à analyser les sous-figures d'une situation géométrique ou considérer qu'un schéma non codé n'était une représentation d'une situation géométrique théorique. Ils se sont limités une interprétation perceptive de la situation ; nous avons donc considéré que cela relevait du niveau d'identification-visualisation.

	CM2	6^{ème}	Total
Victor	5	4	9
Cercles	4	2	6
Marie	9	16	25
Total	18	22	40

On peut dire que c'est à propos des activités sur les triangles isocèles accolés (« Marie ») que le passage du niveau 2 vers le niveau 1 est le plus fréquent, en CM2 (50% des cas) et en 6^{ème} (64% des cas). Cela laisse entendre que la moitié des élèves de CM2 et un tiers des élèves de 6^{ème} qui étaient au niveau d'analyse au recto et qui ont changé de niveau de van Hiele ont donné des réponses que nous n'avons pas pu qualifier (N0).



C'est à propos des activités regroupées sous les noms « Victor » et « Cercles » que les pourcentages sont les plus faibles, en particulier en 6^{ème} à propos des cercles. Mais les effectifs tout en étant réduits sont du même ordre de grandeur.

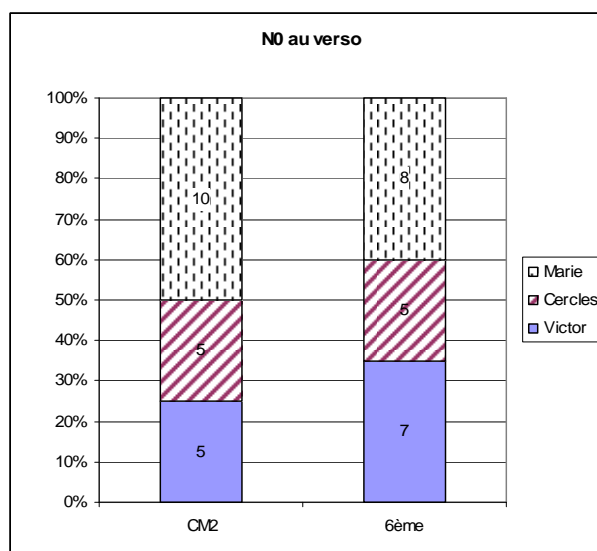
4.3.3. N0 au verso

Nous abordons maintenant les situations quelque peu déroutantes des élèves auxquels nous avons pu attribuer un niveau de van Hiele au recto alors que nous n'avons pas réussi à le faire au verso.

Les effectifs sont les suivants :

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	5	7	12
Cercles	5	5	10
Marie	10	8	18
Total	20	20	40

Il y a donc autant d'élèves de CM2 que d'élèves de 6^{ème} qui ont rendu un travail auquel nous n'avons pas pu attribuer un niveau de van Hiele au verso alors que cela n'avait pas été le cas au recto.



Dans les deux groupes d'élèves on peut dire que ce sont les activités portant sur les triangles isocèles accolés (« Marie ») qui ont été les plus déroutantes : 10 élèves sur 20 en CM2 et 8 sur 20 en 6^{ème}. A l'opposé c'est dans la recherche du centre du cercle circonscrit que les élèves de 6^{ème} ont été le moins nombreux à rendre un travail que nous n'avons pas pu qualifier : 5 élèves sur 20. Mais là encore ce sont des effectifs réduits et de grandeur comparable aux 5 élèves de CM2 auxquels nous n'avons pas attribué de niveau de van Hiele que ce soit dans la recherche du centre du cercle circonscrit ou dans la situation géométrique illustrée par « Victor ».

De quels niveaux de van Hiele avaient-ils témoigné au recto ?

CM2

	N1 au recto	N2 au recto	N3 au recto	Total
Victor	0	4	1	5
Cercles	3	1	1	5
Marie	5	5	0	10
Total	8	10	2	20

6^{ème}

	N1 au recto	N2 au recto	N3 au recto	Total
Victor	4	2	1	7
Cercles	1	3	2	6
Marie	1	3	4	8
Total	6	8	7	20

Quand bien même les effectifs sont souvent réduits à 1 ou 2, la répartition est assez différente si l'on compare les deux groupes d'élèves. En CM2, ils ont donné des réponses considérées comme relevant des niveaux 1 ou 2 quand en 6^{ème}, nous avons une répartition plus égale des élèves dans les trois niveaux. On peut s'arrêter sur le fait qu'il y a 4 élèves de 6^{ème} qui étaient en N3 au recto et en N0 à propos des triangles isocèles accolés (« Marie ») : S11 ; S60 ; S121 ; S130. Quand on reprend les réponses données par ces quatre élèves on s'aperçoit qu'ils ont parfaitement maîtrisé les questions au recto du questionnaire et qu'ils ont eu un tout autre comportement au verso en donnant des justifications tout à fait surprenantes. Ainsi nous avons

- S30 à la question b) de l'exercice 2.9. : « non car il a pas 4 côtés de la même longueur » alors qu'il a réécrit le 4 par-dessus le chiffre 3.
- S11 à la question b) de l'exercice 2.7. : « non parce que ça se voit à l'oeil » alors que les sommets du triangle ABD ont été dessinés équidistants les uns des autres.

Des tous ces élèves, on peut très certainement dire qu'ils ont des connaissances et des compétences parcellaires ou instables en géométrie plane.

4.4. Activités du verso dans lesquelles les élèves ont témoigné d'un niveau de van Hiele supérieur.

La répartition des élèves dans chacun des niveaux de van Hiele au recto est la suivante :

Recto	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	32	75	51	51	209
6^{ème}	27	35	95	89	246
Total	59	110	146	140	455

Les élèves qui ont atteint un niveau supérieur au verso par rapport à leur niveau au recto se répartissent ainsi :

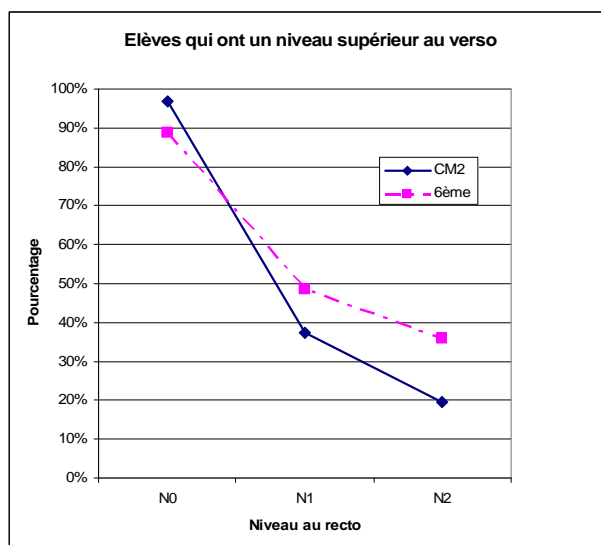
	N0 au recto	N1 au recto	N2 au recto	Total
CM2	31	28	10	69
6^{ème}	24	17	34	75
Total	55	45	44	144

On peut remarquer que si 144 élèves ont témoigné d'un niveau supérieur au verso par rapport au recto, ils étaient 166 à avoir fait le changement inverse. Les effectifs sont plus faibles tant en CM2 qu'en 6^{ème} et correspondent à des pourcentages voisins : 69 sur 209 soit 33% en CM2, et 75 sur 246 soit 30% en 6^{ème}.

Les effectifs sont maintenant variables d'un niveau de scolarité à l'autre en fonction du niveau de van Hiele initial. En CM2, les effectifs baissent au fur et à mesure que le niveau de van Hiele est plus élevé. En 6^{ème}, c'est à partir du niveau 2 de van Hiele qu'il y a le plus de glissement vers un niveau supérieur, le niveau 3 en l'occurrence. On peut aussi remarquer que l'effectif le plus faible en 6^{ème} concerne le passage de N1 vers N2 ou peut-être même N3 : 17 élèves dans ce cas. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau ($\chi^2 = 16,45$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2

critique = 5,99) confirme qu'il existe un lien entre le niveau de scolarité et le passage à un niveau de van Hiele supérieur, les élèves de 6^{ème} ayant davantage accès au niveau N3 que les élèves de CM2. Un tel constat n'a rien d'étonnant à ce niveau de scolarité.

Quand on traduit le nombre des élèves qui ont un niveau de van Hiele supérieur au verso par rapport au recto en terme de pourcentages, on obtient le graphique suivant.



On constate alors que presque tous les élèves, qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème}, qui étaient à un niveau que nous ne pouvions qualifier sont passés à un niveau de van Hiele supérieur au verso de leur questionnaire. On pourrait alors penser que l'activité du recto a pu servir « d'échauffement » pour ces élèves ou qu'ils ont été plus attentifs voire plus concentrés au cours de la deuxième activité parce qu'elle était aussi plus difficile.

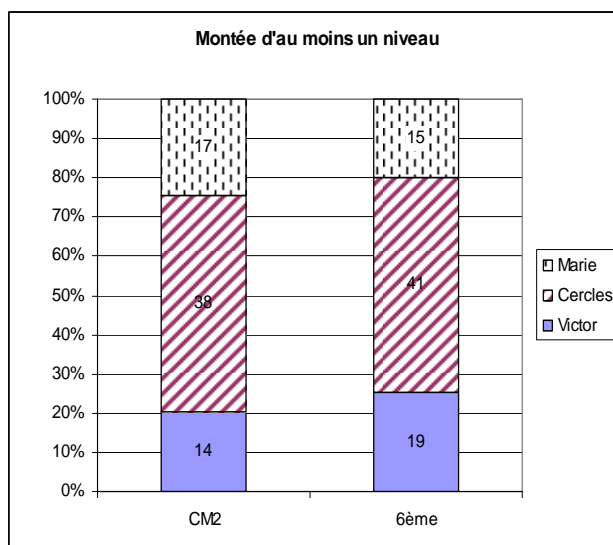
La moitié des élèves de 6^{ème} et un tiers des élèves de CM2 sont passés du niveau d'identification-visualisation à un niveau supérieur en répondant à la deuxième tâche.

Enfin c'est à partir du niveau 2 d'analyse que les glissements sont les plus rares en particulier pour les élèves de CM2 puisque seulement 20% d'entre eux sont concernés alors qu'il y en a un tiers en 6^{ème}. Cette dernière remarque confirme le fait que les contrats didactiques inhérents aux activités au verso des questionnaires ne relèvent pas des exigences du programme de Primaire.

Quand on regroupe les élèves selon les activités qu'ils ont eu à faire au verso et à l'occasion desquelles ils ont montré qu'ils pouvaient maîtriser un niveau de van Hiele supérieur, nous obtenons la répartition suivante :

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	14	19	33
Cercles	38	41	79
Marie	17	15	32
Total	69	75	144

Que ce soit pour les CM2 ou pour les 6^{ème} c'est dans l'activité sur les cercles que les effectifs sont les plus nombreux : 55% environ pour chaque groupe d'élèves. On peut alors dire que cette tâche a été particulièrement favorable à l'expression d'un niveau de van Hiele supérieur. Le graphique ci-dessous permet de visualiser l'importance de cette activité par rapport aux deux autres.



Il y a entre 20% et 25% des élèves à chaque niveau de scolarité qui ont utilisé l'une ou l'autre des deux autres activités (« Victor » ou « Marie ») pour témoigner d'un niveau de van Hiele supérieur à celui qu'il nous a été donné de constater au recto du questionnaire.

Comme nous l'avons fait pour le changement vers un niveau de van Hiele inférieur nous allons maintenant comptabiliser les élèves en fonction du nouveau niveau de van Hiele dont ils ont fait preuve au verso de leur questionnaire.

	N0 au recto			N1 au recto		N2 au recto	Total
	N0 vers N1	N0 vers N2	N0 vers N3	N1 vers N2	N1 vers N3	N2 vers N3	
CM2	19	7	5	25	3	10	69
	31			28		10	
6^{ème}	11	5	8	8	9	34	75
	24			17		34	
Total	30	12	13	33	12	44	144
	55			45		44	144

De ce tableau il ressort nettement que les élèves de CM2 qui ont changé de niveau de van Hiele vers un niveau supérieur l'ont fait vers le niveau immédiat : 19 sur 31 de N0 à N1 soit plus de 60%, 25 sur 28 de N1 à N2 soit près de 90%. En 6^{ème}, les changements sont plus variés puisque 11 sur 24 sont passés de N0 à N1 soit près de la moitié et le passage de N1 à un niveau supérieur se fait de manière équilibrée avec 8 élèves vers le niveau 2 d'analyse et 9 élèves vers le niveau 3 de déduction informelle.

De la même façon que nous avons analysé les situations qui avaient amené les élèves à témoigner d'un niveau de van Hiele inférieur nous allons maintenant regrouper les élèves dans leurs changements de au travers de leur activité. Nous analyserons ainsi le passage vers le niveau 1 d'identification-visualisation, puis le passage vers le niveau 2 d'analyse et enfin l'atteinte du niveau 3 de déduction informelle.

4.4.1. N1 au verso

Les élèves qui sont passés d'un niveau que nous n'avons pas qualifié au niveau d'identification-visualisation sont vraisemblablement les élèves en difficulté en géométrie. Dans un premier temps ils ont donné des réponses qui ne correspondent à aucun niveau de van Hiele, souvent par manque de cohérence dans le respect des contraintes ou la mauvaise compréhension d'une consigne. Dans un deuxième temps, alors que le contrat didactique

demandait une analyse de la situation géométrique d'un point de vue plus théorique, ils n'ont pu donner qu'une réponse déterminée par la perception qu'ils avaient des dessins proposés.

Relativement peu d'élèves sont dans ce cas : 19 élèves en CM2 et 11 élèves en 6^{ème}.

En fonction des tâches proposées au verso, ils se répartissent ainsi :

	CM2	6^{ème}	Total
Victor	6	5	11
Cercles	8	3	11
Marie	5	3	8
Total	19	11	30

Seule l'activité sur les cercles semble avoir été la plus favorable aux élèves de CM2 pour passer au premier niveau de van Hiele. Dans tous les autres cas, les effectifs sont de tailles comparables et réduits (3 à 5 ou 6 élèves) par rapport à l'échantillon global qui est de 209 élèves en CM2 et 246 en 6^{ème}. Ceci n'a rien de très étonnant puisque, comme nous l'avons déjà dit, dans chaque questionnaire, la seconde activité était plus difficile que la première, les élèves dont nous parlons sont sans doute des élèves en difficulté. Or la recherche a montré que lorsqu'un élève était en difficulté, il avait tendance à se replier vers un niveau de van Hiele inférieur. Donc que ces élèves soient peu nombreux est facilement explicable, qu'ils puissent rapidement progresser est peut-être le sens à donner à la réponse au verso de leur questionnaire.

4.4.2. N2 au verso

Les élèves qui ont atteint le niveau d'analyse (N2) au verso peuvent avoir été repérés au niveau d'identification-visualisation ou à aucun niveau de van Hiele au recto. Selon les cas, la répartition est la suivante :

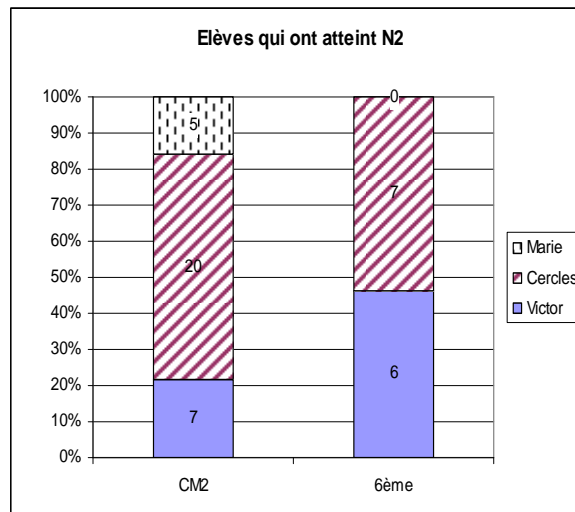
	CM2		6 ^{ème}		Total
	N0 vers N2	N1 vers N2	N0 vers N2	N1 vers N2	
Victor	0	7	3	3	13
	7		6		
Cercles	6	14	2	5	27
	20		7		
Marie	1	4	0	0	5
	5		0		
Total	7	25	5	8	45
	32		13		

Ce sont les élèves de CM2 qui ont été les plus nombreux à passer au niveau d'analyse au cours de la deuxième activité : 32 en CM2 contre 13 en 6^{ème}.

Plus précisément les cases contenant les effectifs les plus grands sont celles des colonnes du passage de N1 à N2. Ces élèves se sont adaptés au mieux de la compréhension qu'ils ont eue de la seconde tâche puisqu'ils sont passés d'une simple identification-visualisation à une analyse plus théorique de la situation géométrique qui leur était proposée. 25 élèves de CM2 ont réussi cette adaptation sur 32 soit plus des trois quarts et 8 élèves de 6^{ème} sur 13 soit plus de 60%.

C'est à propos de la recherche du centre du cercle circonscrit que les élèves sont les plus nombreux, cette remarque étant particulièrement nette en CM2 où l'on a 14 élèves quand le groupe est de 45 sujets. A l'opposé c'est l'activité sur les triangles isocèles accolés (« Marie ») qui a été la moins favorable à l'expression du niveau 2 de van Hiele.

La représentation graphique est la suivante :



Globalement en CM2, l'activité sur les cercles a été la plus favorable à l'expression du niveau d'analyse chez un élève quand en 6^{ème}, c'est tout autant l'étude de la situation géométrique que nous avons nommée « Victor » qui a permis à certains élèves d'utiliser ce niveau. Dans tous les cas, ce sont les exercices regroupés sous le nom de « Marie » qui ont été les moins pertinents, en particulier en 6^{ème}. Nous pouvons conjecturer ici que dans le cas des exercices baptisés « Marie », il était particulièrement difficile à un élève d'analyser la situation géométrique telle qu'elle lui était proposée ici quand, au recto, il n'avait témoigné au mieux que du niveau d'identification-visualisation. Un tel élève a une compréhension perceptive globale d'une figure géométrique, a sans doute peu de compétences dans la reconnaissance de sous-figures et encore moins quand il s'agit de décoder un schéma sur lequel les points peuvent être aussi à distance réelle les uns des autres. En revanche dans le contexte des exercices « Victor », les élèves avaient à leur disposition une reproduction d'une figure tracée à la règle et quand bien même elle n'était pas en vraie grandeur, par simple comparaison dans un jeu des différences entre le schéma et la « figure », l'élève pouvait identifier certains éléments de sous-figures et se déterminer avec confiance.

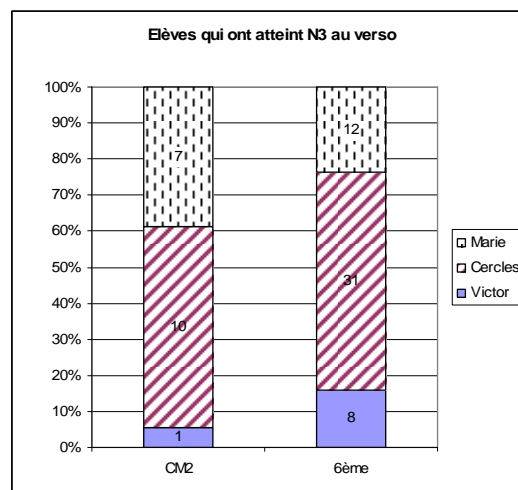
4.4.3. N3 au verso

Le dernier groupe auquel nous nous intéressons maintenant est composé de tous les élèves qui ont atteint le niveau de déduction informelle dans le contexte de la deuxième activité alors qu'ils ont témoigné d'un niveau de van Hiele inférieur au recto du questionnaire. Ces élèves

peuvent avoir donné des réponses de niveau 2 (analyse), de niveau 1 (identification-visualisation) ou de niveau 0. La répartition des élèves est la suivante :

	CM2			6 ^{ème}			Total
	N0 vers N3	N1 vers N3	N2 vers N3	N0 vers N3	N1 vers N3	N2 vers N3	
Victor	0	0	1	1	1	6	9
	1			8			
Cercles	4	1	5	5	6	20	41
	10			31			
Marie	1	2	4	2	2	8	19
	7			12			
Total	5	3	10	8	9	34	69
	18			51			

D'après ce tableau, on peut dire que les élèves 6^{ème} sont les plus nombreux à avoir témoigné du niveau 3 dans leur seconde activité, que c'est encore une fois l'activité sur les cercles qui a été la plus favorable à cette adaptation, enfin que les changements les plus fréquents se sont faits dans le cadre du passage de N2 à N3, soit la montée d'un niveau dans la théorie de van Hiele.



Le graphique indique que pour les deux groupes d'élèves c'est l'activité « Victor » qui a été la moins favorable à l'émergence du niveau 3 de van Hiele quand c'était les exercices regroupés sous le nom « Marie » qui étaient dans ce cas pour le niveau inférieur. On pourrait en déduire que la gestion simultanée des trois présentations de la situation géométrique dans « Victor » au lieu d'être une aide, n'a pas favorisé l'expression d'un raisonnement déductif. Une autre hypothèse serait que dans le cas des tâches désignées sous le nom de « Marie », à cause des distances entre les points du schémas, il a pu y avoir chez certains élèves un certain conflit entre le su et le perçu, conflit résolu par le raisonnement.

4.5. Activités du verso dans lesquelles les élèves ont témoigné du même niveau de van Hiele.

Nous avons vu que 144 élèves de notre échantillon avaient atteint au verso un niveau de van Hiele supérieur à celui du recto et 166 avaient au contraire témoigné d'un niveau inférieur. L'échantillon ayant un effectif de 455, il reste donc 145 qui sont restés au même niveau de van Hiele sur l'ensemble des deux activités. Il y a donc autant d'élèves qui sont passés d'un niveau de van Hiele à un niveau supérieur sur l'ensemble des deux exercices que d'élèves qui sont restés au même niveau. Ce sont les élèves qui ont changé pour un niveau de van Hiele inférieur qui sont relativement les plus nombreux.

Ces élèves qui sont restés au même niveau de van Hiele se répartissent ainsi :

	N0	N1	N2	N3	Total
CM2	1	39	13	6	59
6^{ème}	3	12	32	39	86
Total	4	51	45	45	145

Les plus nombreux sont ceux qui sont restés au niveau 1 d'identification-visualisation (51 sur 145 soit 35% du groupe et 11% de l'échantillon total). Il y a autant d'élèves qui sont restés au niveau 2 d'analyse ou au niveau 3 de déduction informelle : 45 sur 145 soit 31% du groupe et 10% de l'échantillon total).

Mais les effectifs sont différents en CM2 et en 6^{ème} : 59 sur 209 soit 28% sont restés au même niveau de van Hiele quand ils sont 86 sur 246 soit 35% en 6^{ème}. On pourrait donc en conclure que les élèves de CM2 ont eu tendance changer plus fréquemment de niveau de van Hiele que les élèves de 6^{ème}.

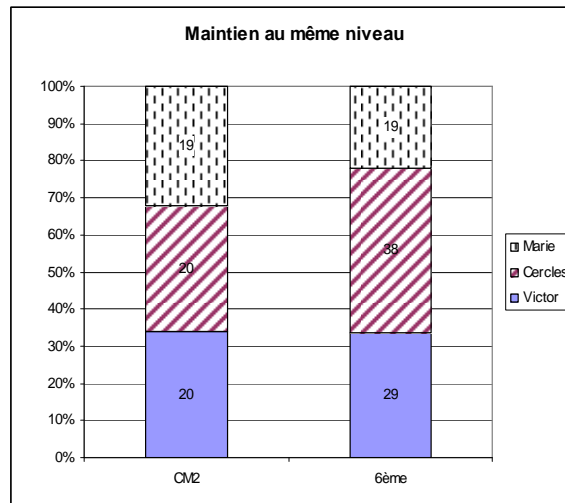
De plus, si l'on considère les effectifs de chaque ligne du tableau, on s'aperçoit que, pour les CM2, ceux-ci vont décroissants au fur et à mesure que l'on monte dans les niveaux de van Hiele quand pour les 6^{ème} c'est le contraire. En Primaire, le niveau auquel les élèves sont le plus stables est le niveau d'identification-visualisation ; en 6^{ème}, c'est aux niveaux d'analyse et de déduction informelle que les élèves sont les plus nombreux.

Si l'on considère la répartition des élèves selon les activités, le tableau récapitulatif est le suivant :

	CM2	6^{ème}	Total
Victor	20	29	49
Cercles	20	38	58
Marie	19	19	38
Total	59	86	145

On constate que les élèves de CM2 se répartissent de manière équitable entre les trois types d'activités. En revanche, en 6^{ème} c'est à propos des cercles que les élèves sont les plus nombreux et à propos des triangles isocèles accolés que l'effectif est le plus petit.

Le graphique ci-dessous permet d'interpréter dans quelle mesure l'activité sur les cercles est importante pour les 6^{ème}.



Donc près d'un élève de 6^{ème} sur deux qui a travaillé au même niveau de van Hiele sur l'ensemble de son questionnaire, l'a fait quand il a eu la recherche du centre du cercle circonscrit à faire.

Ce sont les activités regroupées sous le nom de « Marie » qui ont les moins efficaces pour permettre aux élèves de rester au même niveau de van Hiele, quelque soit ce niveau : 1 élève sur 3 en CM2 et 1 sur 4 en 6^{ème}.

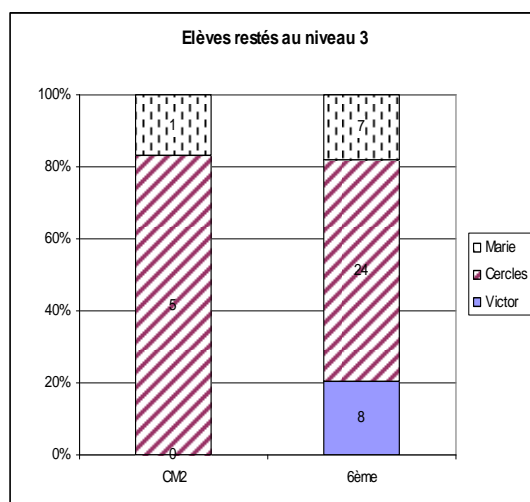
Nous allons maintenant considérer les activités au verso des questionnaires dans lesquelles les élèves sont restés au même niveau de van Hiele.

4.5.1. Maintien au niveau N3 (déduction informelle)

6 élèves de CM2 et 39 élèves de 6^{ème} sont donc restés au niveau 3 de déduction informelle. Nul doute que ces élèves sont parmi les plus experts de notre échantillon. Toutefois, la répartition des élèves selon les activités proposées au verso n'est pas équilibrée comme en témoigne le tableau ci-dessous.

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	0	8	8
Cercles	5	24	29
Marie	1	7	8
Total	6	39	45

Dans les deux groupes c'est à propos de la recherche du centre du cercle circonscrit que les élèves sont les plus nombreux à être restés au niveau 3.



A partir de la représentation graphique on pourrait dire que 20% des élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} sont restés au niveau 3 à propos des triangles isocèles accolés («Marie»). Mais une telle remarque doit être considérée avec prudence puisqu'il s'agit d'un seul élève de CM2 et de 7 élèves de 6^{ème}.

A propos des exercices regroupés sous le nom « Victor », la situation est à peu près la même : 20% des élèves de 6^{ème} et aucun CM2. Mais nous avons déjà remarqué que les élèves de CM2 avaient pu être moins sensibles que les élèves de 6^{ème} au contrat implicite associé à cette tâche où le chercheur attend plutôt un raisonnement hypothéico-déductif. Il y a donc 40% des élèves de 6^{ème} de notre échantillon qui ont été en mesure de répondre aux deux questions en utilisant la déduction informelle, c'est-à-dire, en articulant leur pensée de manière hypothéico-déductive.

Les 5 élèves de CM2 qui sont restés au niveau 3 l'ont fait dans la recherche sur les cercles. Même si c'est là un tout petit effectif, on peut dire que c'est à nouveau cette activité qui a été la plus favorable aux élèves pour témoigner d'un niveau de van Hiele élevé.

4.5.2. Maintien au niveau 2

13 élèves de CM2 et 32 élèves de 6^{ème} sont restés au niveau 2 d'analyse sur l'ensemble des deux activités qui leur étaient proposées. Autrement dit ces élèves n'ont pas été capables d'organiser une démarche de déduction, de respecter toutes les contraintes à l'intérieur d'une tâche ou de considérer l'inclusion des figures particulières.

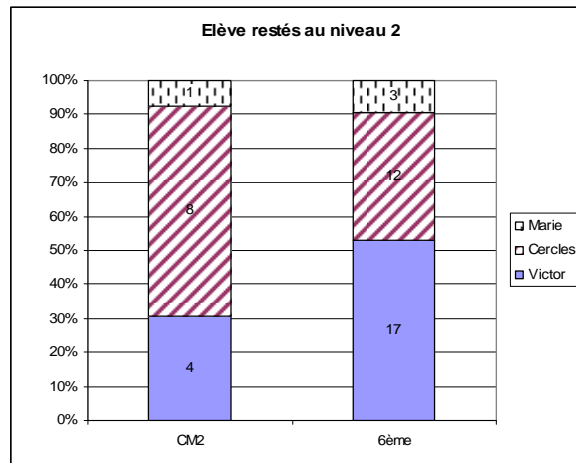
La répartition est la suivante.

	CM2	6^{ème}	Total
Victor	4	17	21
Cercles	8	12	20
Marie	1	3	4
Total	13	32	45

Il y a maintenant 4 élèves de CM2 qui ont réussi à donner des réponses à propos de « Victor » qui relèvent du niveau d'analyse de van Hiele et qui étaient déjà à ce niveau lors de leur première activité. Toutefois les élèves de CM2 qui ont travaillé sur la recherche du centre du cercle circonscrit sont deux fois plus nombreux : 8.

En 6^{ème}, c'est à propos de « Victor » où nous avons le plus grand nombre d'élèves : 17. Ces élèves ont su identifier les sous-figures dans la situation géométrique qui leur était proposée mais n'ont pas été en mesure d'établir des relations d'incidence entre les différents éléments.

Le graphique suivant permet de comparer les répartitions des élèves dans chaque type d'activité.



Le niveau d'analyse dans les exercices associés à « Victor » correspond à la description des sous-figures et en particulier à la comparaison entre le schéma à main levée et la « figure faite par Victor ». Même si les effectifs en CM2 sont réduits, nous pouvons constater qu'un certain nombre d'élèves ont réussi à décrire la situation dans ses différentes composantes. Proportionnellement, en 6^{ème}, les élèves sont plus nombreux à être restés au niveau d'analyse dans le contexte des situations associées à « Victor » que dans la recherche du centre du cercle circonscrit.

4.5.3. Maintien aux niveaux 1 ou 0

Nous regroupons maintenant les élèves sans doute en difficulté en géométrie : ceux qui sont restés en N1 et ceux qui sont restés en N0 c'est-à-dire qui ont fourni des réponses que nous n'avons pas pu identifiées selon les critères de la théorie de van Hiele.

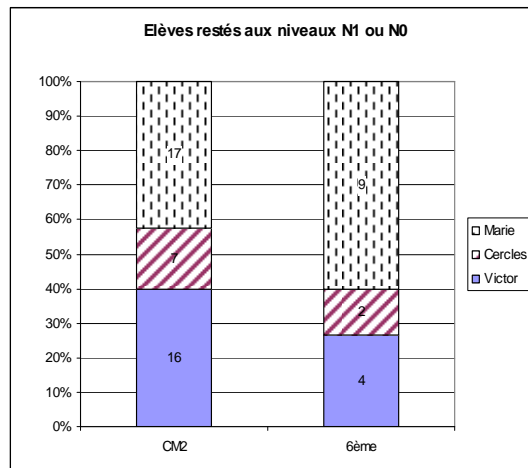
Se sont maintenus en N1 39 élèves de CM2 et 12 élèves de 6^{ème}. 1 seul élève de CM2 et 3 élèves de 6^{ème} sont restés en N0. Selon les activités, la répartition est la suivante :

	CM2	6 ^{ème}	Total
Victor	16	4	20
Cercles	7	2	9
Marie	17	9	26
Total	40	15	55

Maintenant les élèves de 6^{ème} sont nettement moins nombreux que les élèves de CM2.

C'est à propos de l'activité sur les cercles où les effectifs des deux colonnes sont les plus faibles.

La représentation graphique illustre le fait que ce sont les exercices sur les triangles isocèles accolés (« Marie ») qui a été la plus difficile : c'est là que les effectifs sont les plus grands.



En effet près de la moitié des élèves de CM2 et 60% des élèves de 6^{ème} qui n'ont pas dépassé le niveau d'identification-visualisation sur l'ensemble des deux exercices avaient reçu l'une des versions des tâches désignées par « Marie ». Ce type de tâche s'est révélé le moins favorable à une évolution vers un niveau de van Hiele supérieur.

4.6. Conclusion à propos des niveaux de van Hiele

A l'issue de ce dépouillement, il apparaît que le niveau de van Hiele que l'on peut attribuer à un élève dépend non seulement de son niveau de scolarité mais aussi de la tâche qui lui est confiée. Un élève ne saurait être identifié par un seul niveau de van Hiele. Nous retrouvons ici des résultats annoncés par les recherches que nous avons citées, en particulier Gutiérrez et Fortuny (1991), Burger et Shaughnessy (1986).

Nous avons donné deux exercices à chaque élève afin de repérer dans quelles conditions il pouvait y avoir un changement de niveau de van Hiele.

Il apparaît que notre échantillon de 455 élèves se partage en trois groupes de tailles équivalentes : 166 élèves descendent d'au moins un niveau de van Hiele quand ils passent à la seconde tâche ; 144 témoignent d'un niveau de van Hiele supérieur et 145 restent au niveau de van Hiele qui leur a été attribué lors de la première tâche. A l'intérieur de ces groupes, la répartition des élèves entre CM2 et 6^{ème} est variable. Ce sont les élèves de CM2 qui ont le plus tendance à changer de niveau de van Hiele. Quand ils se maintiennent à un seul niveau sur l'ensemble du questionnaire, c'est au niveau 1 d'identification-visualisation. On peut sans doute y voir là le fait qu'en fin de Primaire, les connaissances de géométrie des élèves sont encore ancrées dans une géométrie spatio-graphique mais que celles-ci peuvent rapidement évoluer pourvu que des tâches appropriées leur soient proposées.

Dans tous les cas de figures, il apparaît que l'activité sur la recherche du centre du cercle circonscrit est celle qui favorise le plus le passage vers un niveau de van Hiele supérieur et celle qui provoque le moins une descente dans les niveaux de van Hiele. A l'opposé c'est l'étude des triangles isocèles accolés qui s'est révélée la plus difficile, amenant un grand nombre d'élèves, de 6^{ème} en particulier, à se replier vers un niveau de van Hiele inférieur.

Donc pour accompagner un élève dans son apprentissage de la géométrie et l'amener au niveau de van Hiele supérieur à son niveau actuel, il semble que le travail sur dessin avant toute activité de rédaction soit particulièrement efficace.

Mais dans le même temps il semble bien qu'un élève puisse témoigner de niveaux de van Hiele différents selon la situation qui lui est proposée et telle qu'il la comprend. Ceci a deux conséquences majeures. La première est qu'il est de la responsabilité de l'enseignant de proposer à ses élèves des activités suffisamment variées pour que les différents niveaux de van Hiele soient exprimés. La seconde concerne notre cadre théorique. En effet, si on respecte le principe énoncé par van Hiele selon lequel un élève doit passer successivement d'un niveau à l'autre sans en sauter aucun, le niveau d'analyse (N2) pourrait bien être à lui seul une zone de développement proximal dans l'apprentissage de la démonstration en géométrie tel que le propose Vygotski.

5. Croisement des résultats à propos des paradigmes et des niveaux de van Hiele au travers des activités

Si l'association entre les niveaux N1 et N3 d'une part et les paradigmes G1 et G2 d'autre part et pris dans cet ordre sont évidents, la position du niveau N2 par rapport à ces deux paradigmes est intéressante à étudier. Nous allons étudier ces associations au travers des informations données par le codage des activités puis à propos de chaque élève.

5.1. Croisement dans les activités

Sont pris en compte ici les codages de toutes les réponses, chaque élève apparaît donc deux fois puisqu'il y avait deux « exercices » à faire.

CM2

	GX +G1	G2	Total
N0	58	0	58
N1	175	0	175
N2	93	30	123
N3	0	74	74
Total	326	104	430

Nous avons utilisé le code G2-N2 30 fois soit dans 7% des cas. C'est le codage le plus rare qui ait été utilisé, plus rare même que le code (GX + G1)-N0. A ce niveau de scolarité, les élèves qui ont témoigné du niveau d'analyse en utilisant une démarche relevant de G1 sont trois fois plus nombreux que ceux qui l'ont fait selon une méthode caractéristique de G2 : 93 contre 30. Si l'on considère la colonne G2 du tableau, on s'aperçoit que le code N2 correspond à 29% des réponses données par les élèves de CM2 (30 sur 104). Ce n'est donc pas un pourcentage négligeable.

	GX +G1	G2	Total
N0	50	0	50
N1	105	0	105
N2	104	59	163
N3	0	177	177
Total	259	236	495

En 6^{ème} l'importance du niveau d'analyse est plus marquée. Un tiers des réponses ont été codées comme telles. Elles sont presque aussi nombreuses que les réponses codées en N3 : 163 en N2 contre 177 en N3. Le rapport des réponses issues d'une démarche relevant de G1 par rapport à celles appartenant à G2 est inférieur à 2. Comme en CM2, le nombre de réponses codées N2 dans la colonne G2 représentent 25% du total : 59 sur 236. Nous avons là des proportions tous à fait comparables.

LES DEUX NIVEAUX DE SCOLARITE CONFONDUS

Si l'on regroupe ces deux tableaux, nous avons bien la confirmation que le niveau d'analyse (N2) est un niveau de van Hiele que les élèves peuvent maîtriser, soit à l'aide d'outils relevant de G1, soit par une méthode relevant de G2.

	GX +G1	G2	Total
N0	108	0	108
N1	280	0	280
N2	197	89	286
N3	0	251	251
Total	585	340	925

Ce niveau de van Hiele serait bien alors le niveau par lequel l'élève peut passer d'une géométrie concrète à une géométrie proto-axiomatique. Nous reviendrons sur cette question dans le paragraphe 7 où nous étudierons en détail l'articulation entre le niveau 2 d'analyse et les différents paradigmes géométriques.

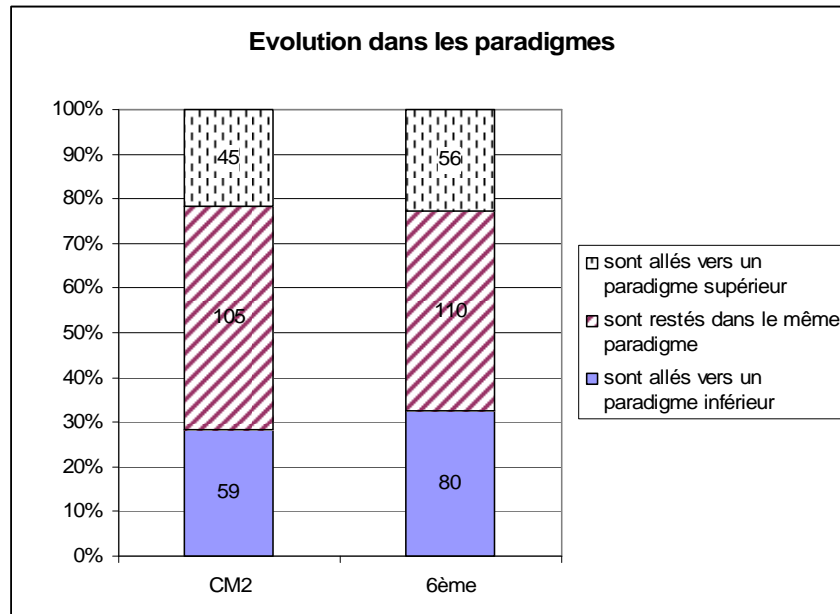
5.2. Croisement entre paradigmes et niveaux de van Hiele pour chaque élève.

Nous avons vu que la moitié des élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème}, avaient travaillé dans le même paradigme géométrique sur l'ensemble du questionnaire qui leur a été soumis.

Le tableau ci-dessous récapitule les évolutions des élèves entre le premier et le second exercice du point de vue des paradigmes.

	sont allés vers un paradigme inférieur	sont restés dans le même paradigme	sont allés vers un paradigme supérieur	Total
CM2	59	105	45	209
6 ^{ème}	80	110	56	246
Total	139	215	101	455

L'illustration de cette répartition en termes de pourcentage est donnée par le graphique suivant.



On retrouve que les élèves de CM2 ont été légèrement plus nombreux à rester dans le même paradigme, G1 en l'occurrence et que ce sont plutôt les élèves de 6^{ème} qui se sont repliés vers un paradigme inférieur au verso du questionnaire. Il y a un peu plus de 20% des élèves qui sont passés à un paradigme supérieur c'est-à-dire de G1 à G2, de GX à G1 voire de GX à G2.

Quel est le niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent alors ?

Nous étudierons l'évolution dans les niveaux de van Hiele des élèves qui sont restés dans le même paradigme, puis celle des élèves qui ont fonctionné en G2 au recto et en G1 au verso et enfin ceux qui sont passés de G1 à G2 en abordant le deuxième exercice. Nous ne prendrons pas ici en compte les élèves pour lesquels nous n'avons pas pu identifier le paradigme de fonctionnement et que nous avons codés GX. En effet, ces élèves peuvent être dans un paradigme intermédiaire entre une géométrie concrète et une géométrie spatio-graphique, ou plus certainement dans un pseudo-paradigme instable entre G1 et G2.

5.2.1. Même paradigme au recto et au verso

Dans un premier temps nous donnons la répartition des élèves qui ont fonctionné en G1 sur l'ensemble du questionnaire, à l'intérieur des niveaux de van Hiele.

CM2

Recto Verso	N0	N1	N2	Total
N0		6	5	11
N1	4	37	10	51
N2	2	19	8	29
Total	6	62	23	91

6^{ème}

Recto Verso	N0	N1	N2	Total
N0		4	4	8
N1	5	11	9	25
N2	1	4	13	18
Total	6	19	26	51

Ces résultats traduits en pourcentages, permettent d'apporter les nuances suivantes :

CM2

Recto Verso	N0	N1	N2	Total
N0		7	5	12
N1	4	41	11	56
N2	2	21	9	32
Total	7	68	25	100

6^{ème}

Recto Verso	N0	N1	N2	Total
N0		8	8	16
N1	10	22	18	49
N2	2	8	25	35
Total	12	37	51	100

En CM2, comme en 6^{ème}, la moitié des élèves qui n'ont pas changé de paradigme n'ont pas changé de niveau de van Hiele : $37 + 8 = 45$ sur 91 en CM2 ; $11 + 13 = 24$ sur 51 en 6^{ème}. Toutefois les élèves de CM2 sont très nettement les plus nombreux à être restés au niveau d'identification-visualisation (41% d'entre eux) alors que les élèves de 6^{ème} se répartissent plus équitablement entre ceux qui sont restés au niveau 1 (22%) et ceux qui sont restés au niveau 2 (25%).

En CM2 le paradigme G1 a été l'occasion de passer du niveau 1 au niveau 2 pour 19 élèves soit 1 élève sur 5 dans ce groupe. Au contraire, en 6^{ème} ce sont 9 élèves sur 51 (donc encore 1 élève sur 5) qui sont passés de N2 à N1 : ils ont donc témoigné d'un niveau de van Hiele inférieur au verso par rapport au recto.

On pourrait dire aussi que dans le contexte du paradigme G1, les élèves de CM2 restent au niveau d'identification-visualisation ou en profitent pour passer au niveau d'analyse quand les élèves de 6^{ème} témoignent du même niveau de van Hiele ou ont tendance à indiquer un niveau de van Hiele inférieur.

La répartition des élèves à l'intérieur du paradigme G2 est la suivante :

CM2

Recto Verso	N2	N3	Total
N2	1	4	5
N3	3	6	9
Total	4	10	14

6^{ème}

Recto Verso	N2	N3	Total
N2	1	2	3
N3	16	39	55
Total	17	41	58

Les élèves de 6^{ème} étant quatre fois plus nombreux que les élèves de CM2 à avoir fonctionné en G2 sur l'ensemble du questionnaire, il est intéressant de traduire ces résultats en termes de pourcentages.

CM2

Recto Verso	N1	N2	Total
N1	7	29	36
N2	21	43	64
Total	29	71	100

Recto Verso	N1	N2	Total
N1	2	3	5
N2	28	67	95
Total	29	71	100

Là encore la majorité des élèves est restée au même niveau de van Hiele, le niveau 3 en l'occurrence, même si cette « majorité » est plus nette en 6^{ème} qu'en CM2. Sur les 6 élèves de CM2 qui sont restés à ce niveau de van Hiele, 5 ont réussi parfaitement l'activité de recherche du centre du cercle circonscrit. Parmi les 39 élèves de 6^{ème} qui sont dans le même cas, 24 ont fait les mêmes exercices dans lesquels l'expression d'une justification n'était pas explicitement attendue.

Les élèves de CM2 qui ont fonctionné en G2 sur l'ensemble des deux activités sont relativement peu nombreux et il est sans doute difficile d'interpréter les changements de niveaux que nous avons constatés chez certains. En revanche, en 6^{ème}, nous devons remarquer que 16 élèves sur 58 (28%), est passé du niveau 2 d'analyse au niveau 3 de déduction informelle en abordant la deuxième tâche. Une recherche plus précise nous dit que sur les 16 élèves, 8 ont reçu un questionnaire contenant au verso la recherche du centre du cercle circonscrit.

5.2.2. de G2 vers G1

Il s'agit ici des élèves qui ont fonctionné en G2 au recto et en G2 au verso. Ces élèves maîtrisent donc tout ou partie des niveaux 2 et 3 de van Hiele d'après leur travail au recto, mais ne dépassent plus le niveau 2 au verso. On peut donc penser que leurs compétences au niveau de la déduction informelle sont parcellaires ou que la maîtrise du niveau d'analyse est incomplète puisqu'ils ont changé de paradigme en travaillant à la deuxième tâche.

Plus d'un quart des élèves de chaque niveau sont dans ce cas : 57 sur 209 en CM2 soit 27% et 65 sur 246 en 6^{ème} soit 26%.

CM2

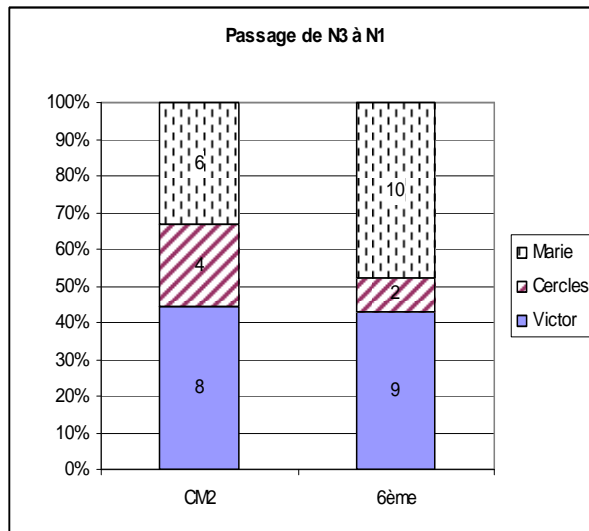
Recto Verso	N2	N3	Total
N0	4	2	6
N1	8	18	26
N2	4	21	25
Total	16	41	57

6^{ème}

Recto Verso	N2	N3	Total
N0		3	3
N1	10	21	31
N2	14	17	31
Total	24	41	65

Dans les deux groupes d'élèves la majorité était au niveau 3 de van Hiele au recto du questionnaire : 41 élèves tant en 6^{ème} qu'en CM2. En changeant de paradigme, ces élèves ont aussi utilisé un niveau de van Hiele inférieur. Or si la moitié d'entre eux ont donné des réponses associées au niveau 2 analyse, une autre moitié a répondu en des termes que nous avons identifiés comme caractéristiques du niveau 1 d'identification-visualisation.

Il y a ainsi 18 élèves de CM2 sur 57 et 21 élèves de 6^{ème} soit près d'un tiers dans chaque cas qui, dans un premier temps, ont montré qu'ils pouvaient donner du sens au codage d'un schéma fait à main levée, respecter simultanément plusieurs contraintes ou gérer inclusivement les figures particulières, et qui dans la deuxième tâche se sont retrouvés en difficultés puisqu'ils ont eu une compréhension perceptive et globale de la situation qui leur était proposée.



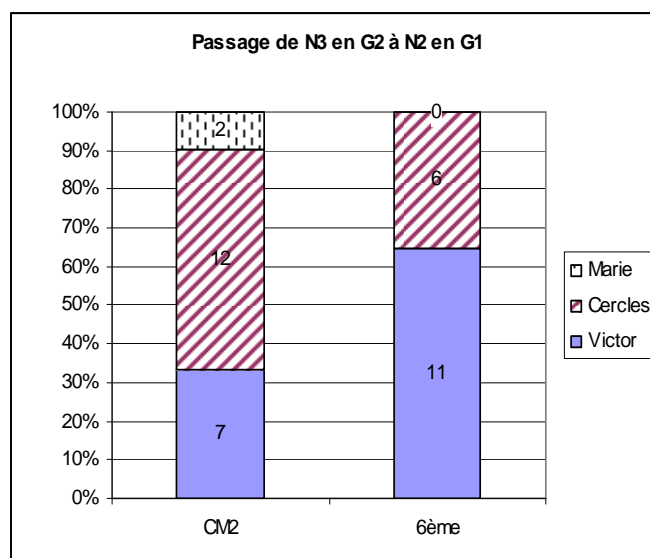
Le graphique ci-dessus indique que ce sont surtout dans les activités associées à « Victor » et « Marie » que le repli vers le niveau d'identification-visualisation a eu lieu.

Par exemple P138 a donné les réponses suivantes à l'exercice 2.8. :

- « *Oui (le triangle ABD est isocèle) parce qu'il y a deux côtés égaux sur ce triangle* »
- « *Oui (le triangle ABD est équilatéral) parce qu'il y a trois côtés égaux.* »

Au recto de son questionnaire, dans l'exercice 1.2., il a su parfaitement gérer les codages des figures proposées et les triangles qu'il a laissés étaient les triangles attendus. On peut donc penser que ces élèves ont des connaissances sont encore très fragiles dans le cadre d'une géométrie proto-axiomatique et que les situations un peu complexes du type de celles de « Victor » ou de « Marie » ne sont pas particulièrement accessibles.

Il y a 38 d'élèves qui sont passés de G2 à G1 en témoignant tout d'abord du niveau 3 de van Hiele puis du niveau 2 : 21 sur 57 en CM2 soit plus d'un élève sur 3 et 17 sur 65 en 6^{ème} soit plus d'un élève sur 4.



Cette fois les CM2 et les 6^{ème} n'ont pas eu le même comportement. La majorité des élèves de CM2 a changé de paradigme dans le contexte de la recherche du cercle du centre circonscrit alors que c'est à propos de la situation « Victor » que les 6^{ème} ont fait ce même mouvement.

Les réponses données par P149 sont un exemple de fonctionnement en G2 tout à fait parcellaire. En effet, P190 a reçu le questionnaire T. Dans l'exercice 1.8., il a ainsi trouvé le nombre 5 sans utiliser la grille de nombres et il a su garder les quadrilatères satisfaisants toutes les contraintes. Dans l'exercice 2.5. au verso, il a tracé un cercle de 6 cm de rayon qui passe par les trois sommets et il a expliqué sa démarche en ces termes

- « *J'ai fait six centimètres avec le compas et j'ai planté le compas à différents endroits jusqu'à ce qu'il touche les 3 côtés du triangle.* »

Un tel élève est donc en mesure de respecter simultanément plusieurs contraintes et a peut-être une conception inclusive des définitions des figures particulières mais il n'est pas encore en mesure de changer de point de vue sur la définition du cercle et valide son travail de manière perceptive.

Un autre exemple est donné par le sujet S52 qui a reçu le questionnaire M et a su sélectionner les quadrilatères dans l'exercice 1.6. En revanche la réponse qu'il a donnée à l'exercice 2.2. au verso ne relève nullement d'un paradigme proto-axiomatique :

- « *Non, elle n'est pas juste car le rayon [BC] devrait mesurer 3 cm mais il ne mesure que 2,7 cm donc forcément le triangle qui devrait être équilatéral n'est pas équilatéral mais isocèle.* »

Ici l'élève essaie de mettre en coïncidence la présentation de la situation géométrique et la figure qui lui est proposée mais il ne tient pas compte de la réduction à la photocopie et détermine sa position à partir de ce qu'il mesure tout en étant capable d'identifier au moins une sous-figure à l'intérieur du dessin. Ici l'élève n'est pas encore en mesure de considérer qu'une figure est la représentant d'un objet théorique géométrique.

Rares sont les élève de CM2 qui ont changé de paradigme en passant de G2 à G1 tout en travaillant au niveau 2 de van Hiele : 4 sur 57. En revanche parmi les 14 élèves de 6^{ème} (sur 65 soit plus de 20%) qui ont fait le même changement 8 l'ont fait à propos de la recherche du centre du cercle circonscrit. Ainsi le sujet S37 qui a reçu le questionnaire Q n'a pas trouvé le carré au sein du nuage de points de l'exercice 1.7. alors qu'il a retrouvé les sommets du grand rectangle. Dans l'exercice 2.5., le cercle qu'il a tracé passe par les trois sommets ; l'élève a su respecter la simultanété des contraintes et il a clairement décrit une démarche par essais-erreurs validée de manière perceptive.

- « *J'ai mis ma mine de crayon du compas sur un sommet et je bougeais la pointe de mon compas jusqu'à ce que mon crayon, en partant du sommet, passe par les deux autres.* »

Un tel élève connaît les définitions, peut respecter simultanément plusieurs contraintes mais n'a pas encore une conception inclusive des définitions des figures particulières et ne peut changer de point de vue quand cela serait nécessaire.

Nous nous intéressons maintenant aux 8 élèves de CM2 et 10 élèves de 6^{ème} qui tout en changeant de paradigme sont aussi passé du niveau 2 d'analyse au niveau 1 d'identification-visualisation. Ces élèves ont sans doute une maîtrise encore plus réduite du niveau d'analyse et vraisemblablement. Si l'on considère les activités qui ont permis de mettre en évidence une telle attitude, on s'aperçoit que la recherche sur les cercles n'est pas la plus fréquente. C'est au contraire à propos des triangles isocèles accolés que nous avons les effectifs les plus grands : 5 sur 8 en CM2 et 6 sur 10 en 6^{ème}.

Les réponses données par le sujet S82 illustrent ce changement de position. Il a reçu le questionnaire D. Au recto, dans l'exercice 1.7., il a retrouvé les rectangles au sein du nuage de points mais n'a rien indiqué à propos du carré. Au verso, sur le schéma de l'exercice 2.8. , il a

ajouté « 5 cm » indiquant ainsi qu'il avait mesuré les distances entre les points ; il a aussi complété le tableau de mesures dans le même sens. Enfin il a conforté sa position en répondant en ces termes à la deuxième question :

- « *Oui, (le triangle ABD est équilatéral) car le triangle ABD a 3 côtés égaux alors qu'un triangle isocèle ça a 2 côtés égaux mais pas 3. »*

Au terme de cette étude nous pouvons dire qu'un quart des élèves qu'ils soient en CM2 ou en 6^{ème} peuvent appréhender une situation géométrique dans un paradigme proto-axiomatique mais que bien des composantes de ce paradigme ne sont pas encore maîtrisées. Les niveaux de van Hiele dont les élèves témoignent permettent de préciser les différents éléments du paradigme qui sont mis en œuvre ou au contraire manquants.

5.2.3. de G1 vers G2

Comme on pouvait s'y attendre les élèves qui ont fonctionné en G1 au recto et en G2 au verso sont peu nombreux, en particulier en CM2. En effet, ces élèves se sont remarquablement adaptés au contrat didactique des activités du verso des questionnaires.

CM2

Recto Verso	N0	N1	N2	Total
N2		2		2
N3		3	7	10
Total	0	5	7	12

6^{ème}

Recto Verso	N0	N1	N2	Total
N2		2	4	6
N3	3	9	18	30
Total	3	11	22	36

Dans la moitié des cas, tant en CM2 qu'en 6^{ème}, les élèves qui ont changé de paradigme l'ont fait au travers des niveaux 2 et 3 de van Hiele. Quelques un ont montré qu'ils maîtrisaient aussi le niveau 2 dans le contexte de G2 après avoir fonctionné en G1 au niveau d'identification-visualisation dans la première activité. Rares sont les élèves qui ont atteint le niveau 2 de van Hiele dans le contexte de G2 après avoir témoigné de ce niveau ou du niveau 1 au recto avec des techniques propres à G1.

Sur les 7 élèves de CM2 qui ont répondu au verso en termes de G2-N3, 5 l'ont fait en réponse aux exercices 2.4. et 2.5. sur la recherche du centre du cercle circonscrit. Sur les 18 élèves de 6^{ème} qui ont fait le même changement de paradigme et de niveau, 12 l'ont fait au travers de ces mêmes activités. C'est dire l'importance de celles-ci pour l'acquisition d'un niveau de van Hiele supérieur, voire l'expression d'un changement de paradigme.

Les réponses au questionnaire Q soumis au sujet P206 sont révélatrices de son adaptation. Au recto, dans l'exercice 1.7., il n'a pas repéré le carré dans le nuage de points et a bien vérifié à la règle les propriétés métriques du grand rectangle. Au verso, il a laissé les traces des intersections de deux des cercles nécessaires à la recherche et tracé le cercle circonscrit. Il explique sa démarche en ces mots ;

- « *J'ai tracé 2 arcs de cercle et j'ai trouvé le centre du cercle au point opposé.* »

Un tel élève sait analyser une figure, changer de point de vue, mais ne maîtrise sans doute pas complètement l'inclusion entre les figures particulières. On pourrait alors conjecturer que, pour ces élèves, le fonctionnement en G2 sera d'autant mieux assuré qu'ils maîtrisent davantage le niveau 2 de van Hiele.

5.2.4. élèves en GX

Tous les élèves à propos desquels nous avons utilisé le code GX sont des élèves pour lesquels nous n'avons pas pu identifier le paradigme géométrique dans lequel ils s'étaient placés.

Au recto, les élèves se sont très peu exprimés. Nous avons donc jugé du paradigme dans lequel ils avaient fonctionné à partir des traces qu'ils ont laissées, de la cohérence que nous avons pu trouver dans leurs réponses. Nous avons utilisé ce code au recto des questionnaires pour 37 élèves de CM2 et 21 élèves de 6^{ème} soit 58 élèves sur un échantillon global de 468 sujets qui ont donné une réponse au recto donc 1 élève sur 8.

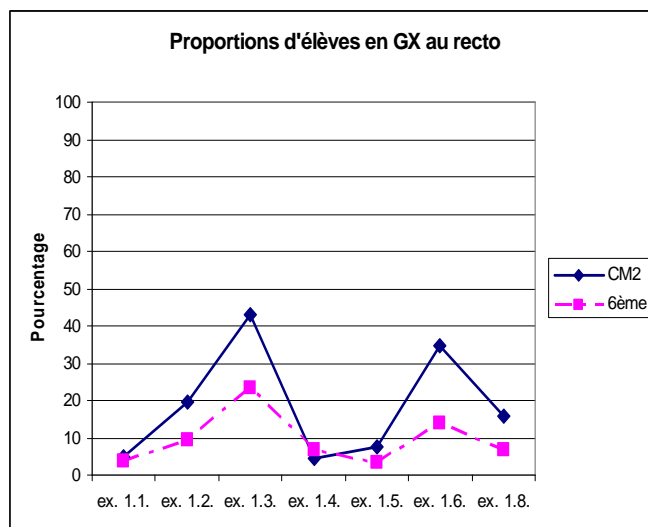
Au verso, il était demandé aux élèves de raconter leur démarche ou de justifier leur prise de position. Nous avons ainsi pu mieux comprendre dans quel univers ils s'étaient placés : spatio-graphique ou proto-axiomatique. Il était prévisible que davantage de réponses au verso soient rapprochées d'un paradigme particulier. Dans le codage des réponses au verso, nous avons pourtant utilisé ce code GX pour 2 élèves de CM2 et 16 élèves de 6^{ème} soit 18 élèves sur 457 réponses codées, environ 4% de l'échantillon. Un élève de 6^{ème} (S239) a donné des réponses que nous n'avons pas pu catégoriser ; c'est le seul dont l'ensemble du travail soit codé GX-N0.

5.2.4.a. GX au recto

Le tableau ci-dessous récapitule les effectifs des élèves pour lesquels nous avons utilisé le code GX au recto. On remarquera que l'activité de recherche des rectangles (exercice 1.7.) n'est pas dans la liste des occurrences de GX.

	CM2	6ème	Total
ex. 1.1.	1	1	2
ex. 1.2.	8	4	12
ex. 1.3.	12	7	19
ex. 1.4.	1	2	3
ex. 1.5.	2	1	3
ex. 1.6.	9	4	13
ex. 1.8.	4	2	6
Total	37	21	58

Les exercices dans lesquelles le code GX a été le plus utilisé tant en CM2 qu'en 6^{ème} sont les exercices 1.2. et 1.3. où il fallait identifier des triangles isocèles en ne tenant compte que du codage. Dans l'exercice 1.3., certains tracés avaient été faits à la règle et ont gêné les élèves dans la cohérence à donner à leur interprétation du codage, la contamination étant du « perçu par le su ». Quand on rapporte ces effectifs au nombre d'élèves qui ont eu la même tâche à faire, on a la répartition suivante :

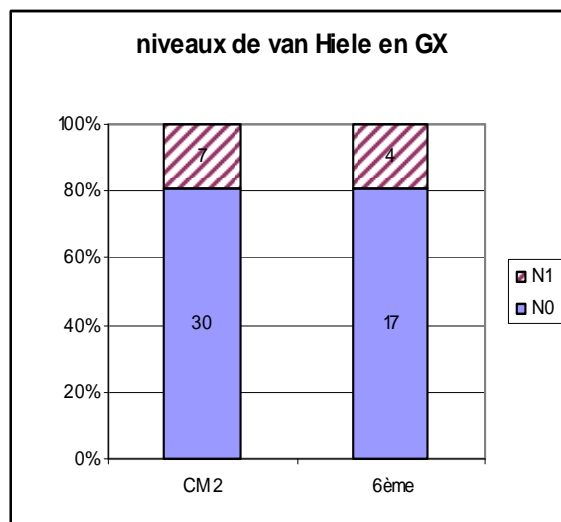


On peut remarquer que les courbes ont les mêmes tendances. Pour les élèves de CM2 ou les 6^{ème}, c'est dans l'exercice 1.3. qu'ils sont les plus nombreux : près d'un élève sur 2 en CM2 et 1 sur 4 en 6^{ème}. Nul doute que le codage d'une figure est difficile à appréhender, surtout quand la perception du dessin vient en contradiction avec le sens à donner au codage.

Dans les exercices 1.6. et 1.8., l'usage du code GX traduit le fait que nous n'avons trouvé dans les réponses des élèves aucun respect d'au moins une contrainte sur l'ensemble de la tâche. Ces élèves ont donc tantôt éliminé les triangles, les figures qui n'avaient pas d'angles droit ou plus d'un angle droit, etc.. On peut s'étonner d'avoir d'une part un tiers des élèves de CM2 et près de 15% des élèves de 6^{ème} pour qui nous avons utilisé le code GX dans l'exercice 1.6. alors que les proportions sont nettement plus faibles pour l'exercice 1.8.. La différence entre ces deux tâches était la présence dans l'exercice 1.6. de la grille de nombres pouvant aider à la recherche du nombre 35 alors qu'elle était absente pour la version 1.8.. Or dans l'analyse par exercice nous avons vu que la présence de la grille de nombres n'avait pas de lien avec la réponse « 35 » et que les élèves de CM2 avaient été proportionnellement moins nombreux à l'utiliser que les 6^{ème}. Nous ne trouvons là aucune explication à ce phénomène ? Un trop petit échantillon pourrait être un début d'explication.

On peut aussi s'arrêter sur le fait que ce sont les descriptions verbales des figures (exercice 1.4. et 1.5.) qui sont associées aux plus faibles taux de GX. Dans une population francophone comme celle sur laquelle nous faisons notre étude, nous constatons que le texte est au moins aussi accessible que le dessin, surtout quand celui-ci est codé.

Du point de vue des niveaux de van Hiele il y a environ 20% des élèves auquel nous avons attribué le niveau 1 d'identification-visualisation.



D'une manière générale, ces élèves ont montré qu'ils connaissaient les triangles ou les quadrilatères particuliers, qu'ils pouvaient les reconnaître dans des situations individuelles mais ne pouvaient respecter de manière cohérente une même contrainte tout au long d'une tâche. Tous les élèves qui sont dans ce cas ont eu l'exercice 1.2. ou 1.3. à faire. Ils ont ainsi gardé les triangles isocèles qui correspondaient le mieux au stéréotype qu'ils connaissent et ont éliminé tous les autres, ne respectant ainsi une seule des trois contraintes prescrites et surtout ne prenant pas le codage en compte.

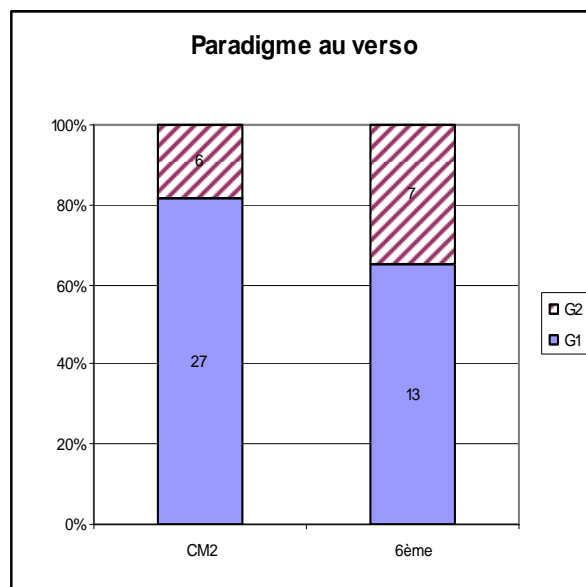
Mais on ne saurait négliger que 80% des élèves pour lesquels nous avons utilisé le code GX à propos des paradigmes géométriques, sont aussi au niveau N0 du point de vue de la théorie des niveaux de van Hiele. Ce sont vraisemblablement des élèves en grande difficulté puisqu'ils n'ont pas été en mesure d'identifier ou de distinguer les triangles isocèles des triangles équilatéraux, ou n'ont pas pu respecter de manière consistante une seule contrainte sur l'ensemble des dessins proposés, que ceux-ci aient été codés ou non.

5.2.4.b. Verso des rectos en GX.

Nous allons maintenant étudier ce que les élèves ont donné comme réponse au verso des questionnaires quand nous leur avons attribué le code GX au recto en commençant par repérer dans quel paradigme ils ont fonctionné.

	GX	G1	G2	Total
CM2		27	6	33
6^{ème}	1	13	7	21
Total	1	40	13	54

On s'aperçoit que la majorité des élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} ont fonctionné en G1 dans la seconde activité. Comme l'indique le graphique ci-dessous les proportions ne sont pas les mêmes : plus de 80% des CM2 et environ les deux tiers des 6^{ème}.



Les élèves qui ont fonctionné en G2 sont donc peu nombreux : 6 élèves de CM2 et 7 élèves de 6^{ème}. Toutefois il est sans doute intéressant de remarquer qu'à de très rares exceptions près, ces élèves ont changé de paradigme dans le cadre de la recherche du centre du cercle circonscrit et qu'à cette occasion ils ont atteint le niveau 3 de van Hiele. Pour la plupart ce sont des élèves qui ont fait soit l'exercice 1.2. soit l'exercice 1.3. sur la recherche du triangle isocèle à partir du codage et qui ont, ensuite, su gérer la démarche de construction du cercle circonscrit au triangle. On peut penser que ces élèves ont un problème d'apprentissage du sens du codage et de la cohérence qu'ils donnent à la lecture d'une figure quand ils savent organiser une démarche personnelle dans un paradigme proto-axiomatique.

Les élèves qui ont utilisé G1 pour travailler au verso du questionnaire se répartissent ainsi dans les niveaux de van Hiele.

	N0	N1	N2	Total
CM2	2	17	8	27
6^{ème}	2	7	4	13
Total	4	24	12	40

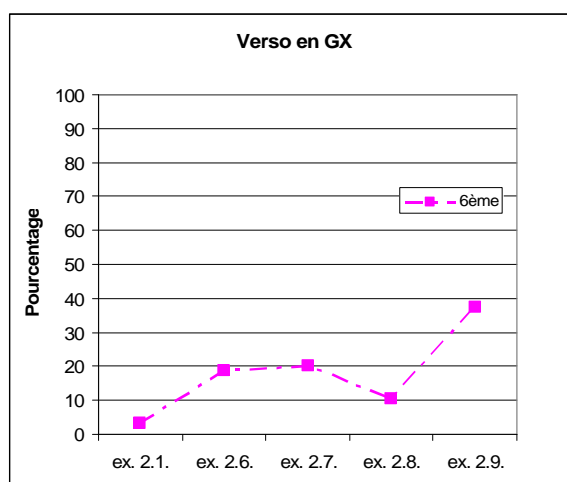
Très rares sont ceux qui sont restés au niveau N0. Ce sont vraisemblablement quelques élèves en grande difficulté qui confondent encore les noms et les formes des figures particulières. Nous retrouvons là un résultat établi au travers des évaluations nationales à l'entrée en 6^{ème}. Nous pouvons interpréter le fait que la majorité des élèves soient aux niveaux 1 ou 2 comme une preuve que presque tous les élèves en fin de Primaire connaissent les figures particulières et sont capables de les reconnaître au moins au niveau d'identification-visualisation. Un tiers d'entre eux est même capable d'atteindre le niveau 2 d'analyse. Or c'est dans le cadre de la recherche du centre du cercle circonscrit que les élèves ont été le plus nombreux à atteindre le niveau 2 : ils ont réussi à tracer un cercle de 6 cm de rayon qui passe par les trois sommets du triangle sans par essais-erreurs. Dans le même temps les exercices qu'ils ont faits au recto étaient les exercices 1.2. et 1.3. de décodage d'un triangle isocèle. Donc nous avons encore ici des élèves pour qui le sens du codage n'a rien de spontané, surtout quand il est en contradiction avec le perçu alors que dans une activité de construction, ils peuvent respecter simultanément plusieurs contraintes.

5.2.4.c. GX au verso

Les situations dans lesquelles nous avons utilisé ce code sont très rares en CM2 et rares en 6^{ème}. En particulier elles ne concernent qu'un type d'activité : l'étude des triangles isocèles accolés que nous avons appelée « Marie » (exercices 2.6. à 2.9.). Nous avons utilisé ce code pour les élèves qui ont donné des réponses souvent éloignées des questions à traiter et pour qui nous n'avons pas le moyen de décider si la réponse était associée à une mesure (comportement relevant de G1) ou d'une analyse du schéma (raisonnement dans G2).

	CM2	6 ^{ème}	Total
ex. 2.1.		1	1
ex. 2.6.		3	3
ex. 2.7.	1	4	5
ex. 2.8.	1	2	3
ex. 2.9.		6	6
Total	2	16	18

Par rapport au nombre d'élèves qui ont fait ces exercices, les pourcentages de ces réponses sont représentés par le graphique ci-dessous.



Les réponses données par S170 sont un exemple de ce qui nous a été donné à lire pour l'exercice 2.9.

- « *Oui (le triangle ABD est isocèle) parce que le point C est placé sur l'arc de cercle comme le point B.* »
- « *Oui (le triangle ABD est équilatéral) parce qu'on dit que les triangles ABC et ADC sont tous les 2 isocèles donc le triangle ABD est équilatéral.* »

On doit remarquer que la présence du début de la figure (exercice 2.9.) n'a pas été nécessairement une aide pour les élèves en difficulté puisque c'est à cette occasion qu'ils ont

été le plus nombreux à donner des réponses difficiles à interpréter dans le cadre des paradigmes géométriques.

A l'opposé c'est dans le cas où nous avons proposé les longueurs 3 cm et 4 cm pour les côtés [BC] et [CD] (exercice 2.8.) que les élèves ont été le plus clairs : 10% des réponses ont été codées GX.

Le fait que le code GX n'ait été nécessaire que dans un seul type d'activités au verso peut s'expliquer ainsi. Dans le cas de la recherche du centre du cercle circonscrit, les élèves ont agi avec ou sans raisonnement théorique donc ils se sont au minimum placés en G1. Ils ont pu aussi valider leur travail par la perception et ne respecter qu'une partie des contraintes confirmant là un fonctionnement en G1. Dans le cas des activités regroupées sous le nom de « Victor », la situation géométrique était présentée de trois façons : verbales, schématique, figurale. La comparaison entre deux de ces trois présentations était déjà une démarche relevant de G1 : on est dans l'observation du dessin en tant représentant d'un objet géométrique et non pas d'un objet théorique. Dans les exercices 2.6. à 2.9., l'élève a certes deux présentations de la situation géométrique mais le schéma qui lui est proposé est « trompeur » puisque les distances entre les points sont aussi les distances réelles. Un élève peut donc avoir été complètement dérouté par cette présentation, et ne plus savoir jusqu'à quel point il pouvait s'appuyer sur ce qu'il voyait pour se déterminer.

5.3. Conclusion

En conclusion on pourrait dire que le code GX nous a permis de mettre en évidence des lacunes dans les connaissances donc dans l'apprentissage de la géométrie chez ces élèves.

Environ la moitié des élèves de chaque niveau de scolarité a travaillé dans le même paradigme géométrique au recto et au verso du questionnaire. Ces élèves ont eu tendance à rester au même niveau de van Hiele. Toutefois certains élèves de 6^{ème} ont su témoigner du niveau 3 de van Hiele au verso quand ils semblaient ne maîtriser que le niveau 2 d'analyse au recto tout fonctionnant toujours dans un paradigme proto-axiomatique.

Un peu plus d'un quart des élèves de notre échantillon a utilisé au verso les outils propres à un paradigme inférieur à celui qui avait été utilisé au recto, montrant du même coup que le niveau de van Hiele suggéré au recto n'était pas atteint dans le cadre des tâches du verso.

Pour quelques élèves le second exercice a été l'occasion de changer de paradigme de fonctionnement en passant de G1 à G2 et ce faisant, ces élèves ont aussi montré qu'ils maîtrisaient certaines composantes du niveau 3 de van Hiele, de déduction informelle.

En d'autres termes, on pourrait dire que les tâches proposées ici aux élèves ont tout autant révélé une certaine stabilité de fonctionnement dans un paradigme géométrique ou un niveau de van Hiele que le contraire. On peut donc imaginer que des activités peuvent être source de maintien dans un fonctionnement dans un paradigme particulier à un niveau de van Hiele donné, ou au contraire source d'évolution des élèves vers un paradigme plus théorique et/ou un niveau de van Hiele supérieur. Ce sera alors le choix de l'enseignant.

6. Lien entre paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele à propos d'un élève au travers des exercices

6.1. Valeur du niveau de van Hiele moyen dans chaque paradigme

Nous savons que les paradigmes et les niveaux de van Hiele ne repèrent pas la même chose quant à l'activité de l'enfant. Les premiers précisent l'univers géométrique dans lequel il se place pour faire son travail, cet univers pouvant varier selon la perception qu'il a de la tâche ou de ses compétences. Les seconds révèlent davantage le niveau de compétences atteint par l'élève ou à tout le moins le type de compétences qu'il met en œuvre pour mener à bien la tâche telle qu'il l'a comprise. Bien évidemment, le paradigme dans lequel se place un enfant ne saurait être totalement indépendant de son niveau de développement ou de compétences. En effet, on voit mal comment un enfant qui ne connaît pas la liste de propriétés des quadrilatères particuliers pourrait se placer dans un paradigme de nature axiomatique ou même proto-axiomatique pour prouver qu'une figure est un carré. A l'opposé un élève qui maîtrise la différence entre définition et propriété n'aura pas recours à une validation expérimentée pour valider son affirmation. En d'autres termes, on peut facilement dire que le niveau d'identification-visualisation de van Hiele s'inscrit dans le paradigme G1 et le niveau de déduction formelle dans le paradigme G2. Or nous avons vu que, selon les élèves, selon les tâches, le niveau d'analyse avait pu être associé à un fonctionnement en G1 comme en G2. Aussi afin d'essayer de mieux cerner la position du niveau d'analyse par rapport à ces deux

paradigmes, nous allons numériser les résultats. Pour cela nous allons attribuer à chaque niveau de van Hiele un nombre : 0 pour l'absence de niveau (N0), 1 pour le niveau d'identification-visualisation (N1), 2 pour le niveau d'analyse (N2) et 3 pour le niveau de déduction informelle (N3). La valeur associée à un paradigme est alors le barycentre des valeurs associées à chaque niveau de van Hiele affectées des coefficients que sont les fréquences de ces niveaux de van Hiele dans le paradigme en question. Ainsi dans le cas de l'exercice 1.1. en CM2, nous avons la répartition suivante :

Exercice 1.1.

	GX +G1	G2	Total
N0	1		1
N1	7		7
N2	5		5
N3	0	8	8
Total	13	8	21

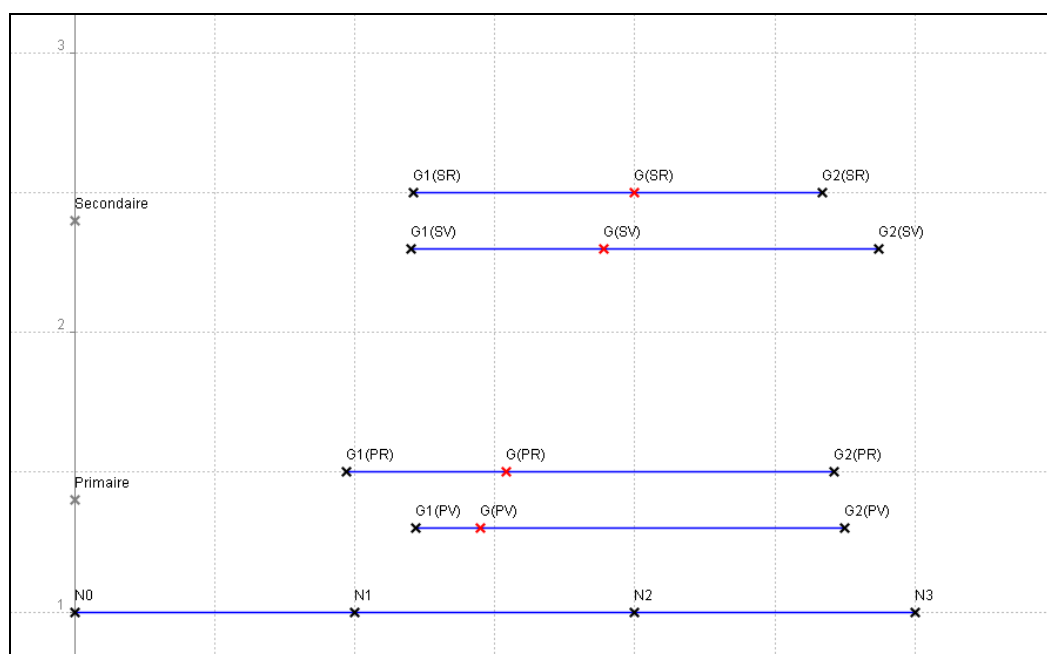
La valeur de G1 est environ égale à : $\frac{0 \times 1 + 1 \times 7 + 2 \times 5 + 3 \times 0}{(1 + 7 + 5 + 0)} \approx 1,31$. Si tous les élèves qui ont vraisemblablement fonctionné en G1 avaient témoigné du niveau d'identification-visualisation la valeur de G1 serait 1 ; s'ils avaient tous témoigné du niveau d'analyse sa valeur serait 2 et s'il y avait eu autant d'élèves d'un niveau que de l'autre, la valeur de G1 serait 1,5.

En compilant les effectifs de chaque niveau de van Hiele pour chaque tâche au recto des questionnaires et à chacun des niveaux de scolarité, nous obtenons les quatre valeurs associées à G1 et les quatre valeurs associées à G2.

		Valeur associée à G1	Valeur associée G2	Valeur du barycentre des valeurs associées à G1 et à G2
Secondaire	Recto	$G1(SR) = 1,21$	$G2(SR) = 2,67$	$G(SR) = 2$
	Verso	$G1(SV) = 1,20$	$G2(SV) = 2,87$	$G(SV) = 1,89$
Primaire	Recto	$G1(PR) = 0,97$	$G2(PR) = 2,71$	$G(PR) = 1,54$
	Verso	$G1(PV) = 1,22$	$G2(PV) = 2,75$	$G(PV) = 1,45$

Les mentions SR et SV signifient respectivement Secondaire Recto et Secondaire Verso ; les mentions PR et PS signifient Primaire Recto et Primaire Verso.

Le graphique suivant donne les positions des valeurs associées à G1 et à G2 par rapport aux valeurs des niveaux de van Hiele, pour chaque niveau de scolarité.



La première remarque que l'on peut faire est que sur l'ensemble des résultats, les positions des valeurs associées à G1 et à G2 sont cohérentes : par rapport à G1 nous avons une valeur qui reste aux alentours de 1 quand, pour G2, nous avons une valeur comprise entre 2.5 et 3.

On peut ensuite s'attarder sur deux points :

- 1- Au niveau Primaire, la valeur associée à G1 est plus élevée au verso qu'au recto. On peut donc conjecturer que, pour ces exercices situés dans G2 pour l'enseignant, les élèves, restant malgré tout en G1, ont fait usage de compétences relevant plus

souvent du niveau d'analyse que de l'identification-visualisation. Cette remarque ne s'applique pas au niveau 6^{ème}.

- 2- Au niveau Secondaire, ce sont les valeurs associées à G2 qui sont remarquables. De la même façon, la valeur associée à G2 au verso est supérieure à celle obtenue au recto. Les élèves qui ont fonctionné dans une géométrie proto-axiomatique ont été proportionnellement plus nombreux à le faire au niveau de déduction informelle (N3) au verso de la feuille qu'au recto. Au verso, aucune explication ou justification n'était demandée, le niveau N3 est le plus souvent repéré par la conception inclusive des figures.

Enfin que ce soit au recto des feuilles ou au verso, le barycentre des deux paradigmes se situe entre N1 (identification-visualisation) et N2 (analyse) en CM2 et aux alentours de N2 en 6^{ème}.

Si l'on calcule pour chaque exercice les valeurs numériques associées à G1 et à G2, barycentres respectifs des niveaux de van Hiele dont les valeurs vont de 0 à 3, on obtient les résultats : suivants donnés dans le tableau de la page suivante.

Les valeurs associées à G1 se répartissent entre 0,38 et 1,62 ; la valeur 1 signifiant que tous les élèves se situent au niveau N1 pour l'exercice en question ou qu'il y en a autant pour lesquels nous avons attribué le code N0 que le code N2. Les valeurs associées à G1 inférieures à 1 indiquent qu'une majorité des élèves est au niveau N0 quand les valeurs supérieures à 1 montrent que les élèves ont été plus nombreux à témoigner du niveau N2 par rapport aux autres niveaux de van Hiele.

	CM2		6 ^{ème}	
	G1	G2	G1	G2
Ex. 1.1.	1.31	3	1.47	3
Ex. 1.2.	0.93	2.75	1	2.5
Ex. 1.3.	0.59	2.5	0.38	2.86
Ex. 1.4.	1.55	2.42	1.47	2.77
Ex. 1.5.	1.18	2.78	1.36	2.47
Ex. 1.6.	0.56	2.88	0.91	2.89
Ex. 1.7.	1.07	2.5	1.62	2.58
Ex. 1.8.	0.9	2.73	1.45	2.58
Ex. 2.1.	1.24	2.2	1.31	2.57
Ex. 2.2.	1.25	X	1.33	2.8
Ex. 2.3.	1.05	2	1.28	2.43
Ex. 2.4.	1.44	3	1.45	2.94
Ex. 2.5.	1.53	2.78	1.48	3
Ex. 2.6.	0.8	3	0.71	3
Ex. 2.7.	1	3	0.7	3
Ex. 2.8.	0.94	3	0.93	3
Ex. 2.9.	1	3	1.14	3

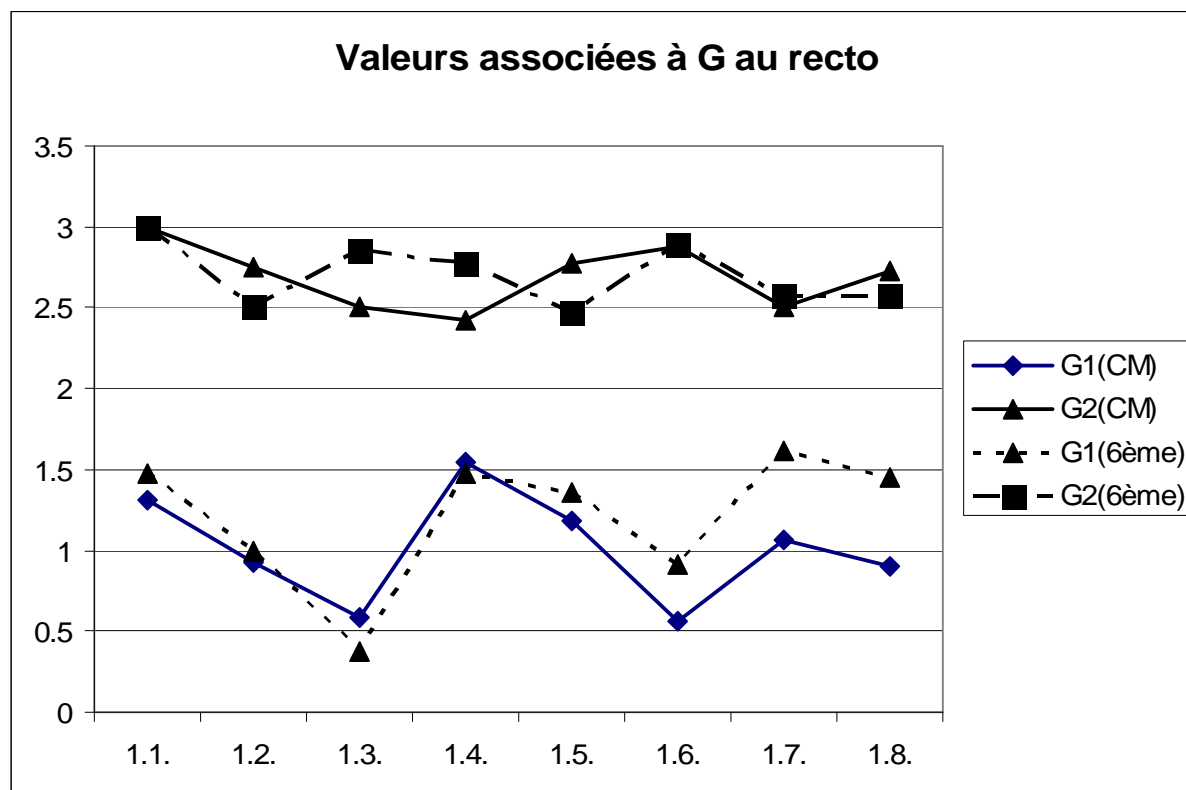
Dans la colonne G1, à propos des CM2, on voit que les valeurs vont de 0,56 à 1,53 quand pour les élèves de 6^{ème}, elles vont de 0,38 à 1,62. On peut conjecturer que les élèves de 6^{ème} témoignent de niveaux de van Hiele plus diversifiés que les élèves de CM2 quand ils travaillent dans une géométrie spatio-graphique.

Les valeurs associées à G2 s'étalent de 2 à 3 puisque nous avons considéré que les élèves qui fonctionnent dans ce paradigme maîtrisent les niveaux N2 ou N3 de van Hiele. La valeur 2 traduit le fait qu'aucun élève n'est au niveau N3 pour l'exercice en question quand la valeur 3 montre que tous les élèves sont à ce niveau. Les valeurs intermédiaires indiquent la proportion d'élèves en N2 et en N3 : plus la valeur est proche de 2 plus les élèves de niveau N2 sont nombreux par rapport à ceux de N3 ; quand la valeur associée à G2 se rapproche de 3, la proportion s'inverse.

Dans la colonne G2 réservée aux CM2, la valeur la plus basse est 2 et la plus haute est 3. Nous devons faire la remarque qu'il n'y a pas de valeur à propos de l'exercice 2.2. (« Victor » dans le cas du triangle qui n'est pas équilatéral) : aucun élève de primaire n'a donné une réponse à cet exercice qui se situe dans le contexte de G2. En 6^{ème} les valeurs vont de 2,43 à 3. Elles ont donc une étendue moindre par rapport aux valeurs rencontrées à propos des CM2. Une explication pourrait être que les élèves de 6^{ème} sont davantage maîtres du niveau de déduction informelle que les élèves de CM2 quand ils fonctionnent dans une géométrie proto-axiomatique.

Dans chaque groupe d'élèves, il y a 6 exercices pour lesquels la valeur associée à G2 est 3 : tous les élèves qui ont abordé la tâche en question dans une géométrie proto-axiomatique et l'ont fait au niveau 3 de déduction informelle. Il s'agit pour les CM2 et les 6^{ème} de l'exercice 1.1. où les triangles étaient tous dessinés à la règle et sans codage, des exercices 2.6. à 2.9. sur l'étude des triangles isocèles accolés, et de l'un des exercices de recherche du centre du cercle circonscrit : exercice 2.4. pour les CM2 et exercice 2.5. pour les 6^{ème}.

Si l'on s'intéresse aux activités du recto, en transformant le tableau en un graphique on obtient :



On peut lire à propos du fonctionnement en G1 que les élèves de CM2 et de 6^{ème} ont eu tendance à utiliser les mêmes niveaux de van Hiele sauf dans les deux derniers exercices où les élèves de 6^{ème} ont davantage eu recours au niveau d'analyse que les CM2. Rappelons qu'il s'agissait dans l'exercice 1.7. de retrouver les rectangles parmi les points proposés et, dans l'exercice 1.8., de retrouver d'une part le nombre « 35 » et d'autre part le quadrilatère qui avait au moins un angle droit et des côtés de même longueur deux à deux. L'exercice le plus difficile a été l'exercice 1.3. où il fallait rayer les triangles qui n'étaient pas isocèles alors que les dessins étaient faits à main levée ou à la règle et que seul le codage devait être pris en compte. Seul un fonctionnement en G2 permettait de réussir cet exercice et il n'est pas surprenant que les élèves de CM2 aient rencontré plus de difficulté à cette occasion.

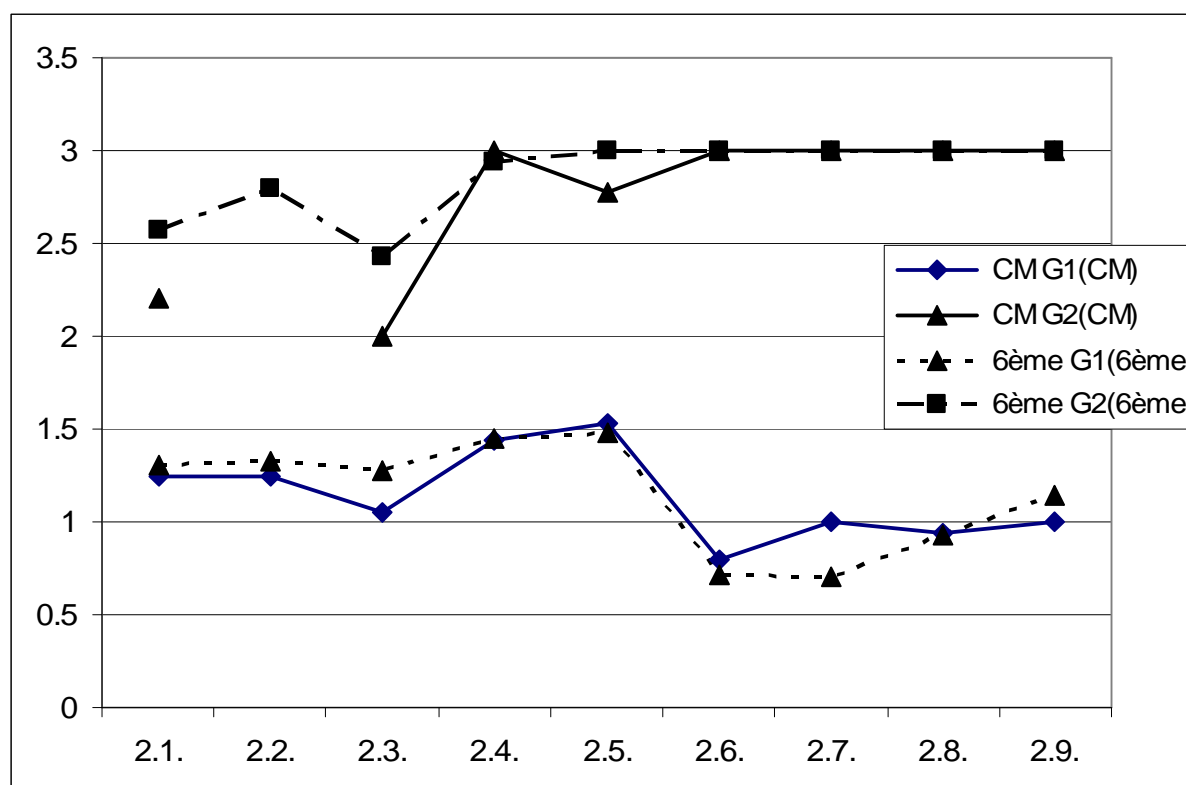
A propos de G2, le constat est différent. Les élèves ont témoigné des mêmes niveaux de van Hiele dans le cadre des activités 1.1., 1.6. et 1.7..

Pour chaque activité, la valeur moyenne est toujours supérieure ou égale à 2,5. Autrement dit, quand les élèves fonctionnent en G2, il y en a au moins la moitié qui sont au niveau 3 de van Hiele de déduction informelle. Toutefois, cette valeur de 2,5 est atteinte pour des exercices

différents selon les deux groupes d'élèves. Il s'agit des exercices 1.3., 1.4., et 1.7 pour les CM2 et des exercices 1.2., 1.5., 1.7. et 1.8. pour les 6^{ème}.

La valeur moyenne est 3 seulement dans le cas du premier exercice où les triangles étaient dessinés à la règle et sans codage. Elle s'en approche aussi dans le cas de l'exercice 1.6. où il fallait reconnaître un quadrilatère à partir de sa description.

A propos des activités au verso des questionnaires, le graphique donne une autre information.



Les courbes sont très proches les unes des autres à l'exception de l'utilisation de G2 pour les exercices 2.1., 2.2. et 2.3., autrement dit les trois activités que nous avons regroupés sous le nom de « Victor ».

Quand les élèves ont fonctionné en G1, ils l'ont plutôt fait au niveau d'identification-visualisation. Qu'ils aient été élèves de CM2 ou de 6^{ème}, c'est dans la recherche du centre du cercle circonscrit (exercices 2.4. et 2.5.) que les élèves ont été proportionnellement les plus nombreux à témoigner du niveau d'analyse puisque la moyenne est d'environ 1,5. On peut aussi dire que les exercices 2.6. à 2.9. (triangles isocèles accolés ou « Marie ») ont été

particulièrement difficiles pour les élèves qui les ont abordés en G1, que ce soient des élèves de CM2 ou de 6^{ème} : ils n'ont pas été en mesure de dépasser le niveau d'identification-visualisation dans ce contexte. Quand bien même ces activités se situaient dans G2, de telles activités sont trop éloignées de leur niveau de compétences et n'offrent pas aux élèves la possibilité de progresser dans les niveaux de van Hiele ni de passer d'un paradigme géométrique à l'autre.

Si l'on s'intéresse au fonctionnement en G2, on constate que la moyenne est de 3 pour presque tous les exercices à l'exception des trois premiers. Les élèves ont donc donné des réponses qui témoignaient de la maîtrise du niveau de déduction informelle, qu'ils aient été élèves de CM2 ou de 6^{ème}. C'est dans les activités à partir d'un schéma accompagné d'une reproduction diminuée (« Victor ») que les élèves de CM2 ont rencontré le plus de difficultés à organiser leurs réponses. Ils ont, le plus souvent, décrit ce qu'ils comprenaient de la situation sans établir de lien de cause à effet. En particulier, aucun élève de CM2 n'a donné de réponses relevant de G2 à l'exercice 2.2..

6.2. Une « note » pour chaque élève

Dans la mesure où, pour chaque activité, nous avons attribué à chaque élève deux codes : l'un identifiant le paradigme dans lequel il a vraisemblablement fonctionné ; l'autre étant le niveau de van Hiele dont il a fait preuve, nous pouvons maintenant lui associer deux nombres :

- le premier de ces nombres est la valeur numérique du niveau de van Hiele associées à sa réponse à l'exercice
- le second des deux nombres est la valeur associée à G1 ou à G2 établie précédemment, c'est-à-dire la « moyenne » des niveaux associés aux paradigme de fonctionnement telle que calculée précédemment.

A partir de là, nous pouvons calculer le rapport entre la valeur associée au niveau de van Hiele et la valeur associée au paradigme géométrique pour chaque élève dans la tâche en question. Nous appellerons (x) ce quotient. Par exemple, dans l'exercice 2.5., l'élève P2 a donné une réponse de niveau 2 selon la théorie de van Hiele dans le paradigme G1. La valeur

associée au niveau 2 de van Hiele est 2 ; la valeur associée à G1 dans cet exercice est 1,53 donc la « note » (x) de cet élève dans cette activité est de 1,31 ($2 \div 1,53 \approx 1,31$)

Nous avons donc regroupé les élèves selon leur « note », le rapport (x) obtenu à chaque exercice. Les valeurs des quotients ont une étendue de 5,26. La note la plus basse est de 0 pour les élèves qui sont au niveau N0 de van Hiele. La note la plus élevée est de 5,26 pour deux élèves de 6^{ème} qui, dans l'exercice 1.3., ont fonctionné en G1 en étant au niveau d'analyse N2, la valeur associée à G1 étant 0,38 pour cet exercice.

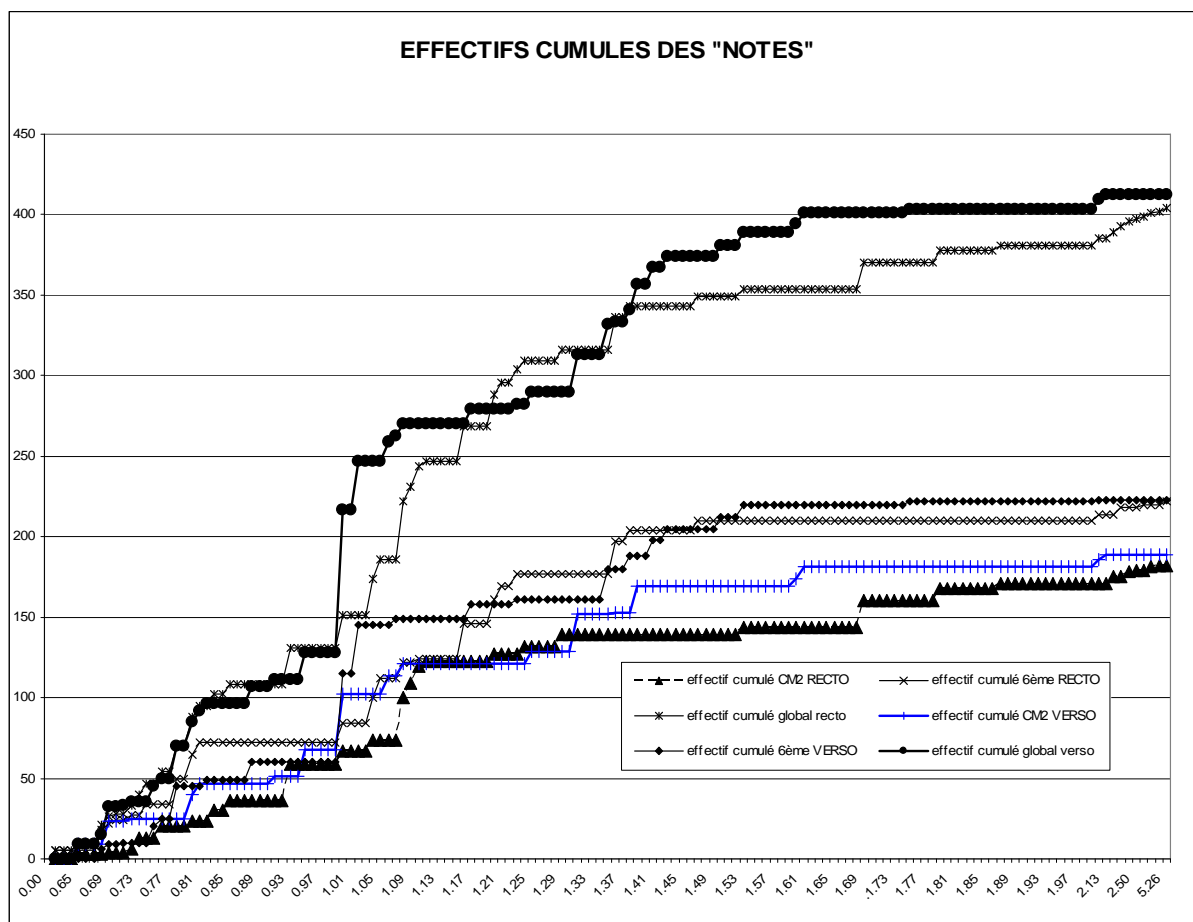
Quel sens donner à ces « notes » ? Nous identifions trois cas de figures :

- L'élève a une « note » très inférieure à 1. Il a témoigné d'un niveau de van Hiele inférieur à celui de ses camarades qui ont fonctionné dans le même paradigme. Ce sera le cas si, fonctionnant en G1, l'élève est au niveau 1 d'identification-visualisation de van Hiele quand la plupart de ses camarades ont utilisé le niveau 2 d'analyse. On trouvera dans ce cas de figure, l'élève qui ne sait pas encore tenir compte du codage des figures, qu'elles soient dessinées à la règle ou à main levée. Dans le cas d'un fonctionnement en G2, l'élève qui est au niveau d'analyse quand ses camarades sont au niveau 3 de déduction informelle aura une « note » inférieure à 1. Par exemple, l'élève peut savoir analyser les propriétés d'une figure géométrique présentée sous la forme d'un schéma sans pouvoir articuler un raisonnement hypothético-déductif. On peut résumer une telle situation en disant que, face à cette tâche, l'élève est en difficulté dans son groupe ou qu'il ne maîtrise pas les mêmes composantes du paradigme que ses camarades. S'il a une « note » très éloignée de 1, il est vraisemblablement en grande difficulté et la tâche qui lui a été prescrite était trop difficile, trop éloignée de ses compétences actuelles pour pouvoir être résolue dans le cadre d'un apprentissage par zone de développement proximal.
- L'élève a une « note » aux alentours de 1. Il s'est comporté comme « l'élève moyen » de son groupe. Il est au même niveau de van Hiele que la plupart de ses camarades dans le même paradigme pour accomplir la tâche qui lui était

prescrite. Ainsi pour un fonctionnement en G1, l'élève est au niveau d'identification-visualisation comme la majorité de ses camarades. Dans le cas du fonctionnement en G2, la « note » 1 correspond à deux cas de figures distincts : soit l'élève est au niveau 2 d'analyse comme tous ses camarades pour la tâche donnée soit il est au niveau 3 de déduction informelle comme tous ses camarades. On peut penser qu'alors l'élève fonctionne en G1 ou en G2 de manière à pouvoir communiquer avec ses camarades.

- L'élève a une « note » supérieure à 1. Il maîtrise alors un niveau de van Hiele supérieur à la plupart de ses camarades qui ont fonctionné dans le même paradigme que lui. Ainsi, pour un fonctionnement en G1, l'élève qui est au niveau 2 d'analyse quand la majorité du groupe est au niveau 1 d'identification-visualisation, aura une note supérieure à 1. Cette note pourra aller bien au-delà de 1, si certains élèves sont au niveau 0 de van Hiele quand l'élève en question est au niveau d'analyse. Dans le cas du fonctionnement en G2, l'élève qui est au niveau de déduction informelle quand ses camarades sont au niveau d'analyse aura lui aussi une « note » supérieure à 1. A chaque fois, ce sont vraisemblablement des élèves qui utilisent des composantes du paradigme encore mal connues du reste du groupe. Si l'élève a une « note » nettement supérieure à 1, on peut penser que la tâche lui a semblé très facile et ne pouvait être source d'un apprentissage pour lui.

Le graphique ci-dessous donne la répartition des « note » en termes d'effectifs cumulés :



A l'étude de la répartition des « notes » des élèves de CM2, deux sauts sont apparus à 0,83 et 1,16 nettement inférieure à 0,83 ; un second groupe d'élèves a une note comprise entre 0,83 et 1,16 ; enfin un dernier groupe d'élèves a une note nettement supérieure à 1,16. Nous avons donc retenu ces valeurs comme étant des valeurs à partir desquelles nous allons considérer trois groupes distincts d'élèves, tant pour les exercices du recto que du verso. Le regroupement est le suivant :

- groupe des élèves ayant une note inférieure à 0,83 : $(x) < 0,83$.
- groupe des élèves ayant une note comprise entre 0,83 et 1,16 : $0,83 \leq (x) < 1,16$.
- groupe des élèves ayant une note supérieure ou égale à 1,16 : $1,16 \leq (x)$.

6.3. Conséquences à propos des élèves

On peut alors regrouper les élèves par niveau et par « note » obtenue au recto et au verso des feuilles. On devrait alors Les tableaux de regroupements sont les suivants :

6.3.1. « note » (x) au recto

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	67	93	59	219
6 ^{ème}	99	52	98	249
Total	166	145	157	468

De ce tableau il ressort que les élèves de CM2 sont les plus nombreux dans la case du milieu, où la « note » est comprise entre 0,83 et 1,16. Les élèves ont fonctionné dans un paradigme auquel nous avons associé une valeur qui corresponde à leur niveau de van Hiele. Au contraire en 6^{ème} les effectifs les plus grands sont dans les cases extrêmes : soit les élèves ont eu tendance à fonctionner dans un paradigme auquel nous avons associé une valeur supérieure au niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent et on peut penser qu'ils ont été en difficultés, soit ils ont été témoigné d'un niveau de van Hiele supérieur à la valeur associée à leur paradigme de fonctionnement et la tâche leur a semblé facile. Le test du χ^2 appliqué à ce tableau confirme le lien entre les variables : $\chi^2 = 25,63$; ddl = 2 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 5,99

6.3.2. « note » (x) au verso

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	69	71	71	211
6 ^{ème}	64	100	82	246
Total	133	171	153	457

La situation est maintenant différente. Les élèves de CM2 se répartissent de manière tout à fait équilibrée selon les trois critères quand les élèves de 6^{ème} se retrouvent les plus nombreux

dans la case du milieu où la « note » est comprise entre 0,83 et 1,16. On peut encore conjecturer que les élèves de CM2 ont donné aux tâches qui leur étaient prescrites les réponses qui correspondaient au mieux de la compréhension qu'ils avaient de la situation quand les élèves de 6^{ème} ont eu tendance à se regrouper autour de réponses comparables en termes d'adéquation entre le niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent et la valeur associée au paradigme dans lequel ils fonctionnent.

Nous avons organisé les questionnaires de façon que les exercices du verso soient plus accessibles et faciles que ceux du recto. En particulier au recto, il n'était pas demandé de rédiger une argumentation ou une démarche hypothético-déductive quelconque. Au plus il était demandé le nom d'un quadrilatère ou d'un triangle. On peut donc établir un croisement des positions des élèves quant à la difficulté rencontrée au recto et au verso de chaque questionnaire. A chaque niveau de scolarité les regroupements des élèves sont les suivants :

CM2

		RECTO			
		$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
VERSO	$(x) < 0,83$	20	30	18	68
	$0,83 \leq (x) < 1,16$	29	27	14	70
	$1,16 \leq (x)$	12	33	26	71
	Total	61	90	58	209

		RECTO			
VERSO		$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
	$(x) < 0,83$	26	18	20	64
	$0,83 \leq (x) < 1,16$	40	17	43	100
	$1,16 \leq (x)$	32	16	34	82
	Total	98	51	97	246

Les deux niveaux confondus :

		RECTO			
VERSO		$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
	$(x) < 0,83$	46	48	38	132
	$0,83 \leq (x) < 1,16$	69	44	57	170
	$1,16 \leq (x)$	44	49	60	153
	Total	159	141	155	455

Dans ces tableaux les élèves représentés dans les cases de la diagonale ont des « notes » voisines l'une de l'autre à l'issue des deux exercices. Ces élèves ont donc utilisé des niveaux de van Hiele qui correspondent aux valeurs que nous avons associées au paradigme dans lequel la plupart des élèves ont fonctionné dans les deux activités. Sous la diagonale du tableau se trouvent les élèves qui ont une « note » supérieure au verso par rapport au recto. Dans ce cas les élèves ont pu, tout en fonctionnant dans le même paradigme, témoigner d'un niveau de van Hiele supérieur, soit, et c'est le plus fréquent, basculer vers un paradigme plus spatio-graphique et témoigner d'un niveau de van Hiele équivalent à celui de leurs camarades, voire supérieur. Au dessus de la diagonale se trouvent les élèves qui ont donc une « note » au recto supérieure à celle qu'ils ont verso. De tels élèves ont dû rencontrer des difficultés avec la deuxième activité qui leur était proposée.

Dans le tableau consacré aux élèves de 6^{ème}, les effectifs de la colonne centrale sont les plus faibles. L'effectif le plus grand (51 élèves sur 246 soit 21%) est dans la case (x) supérieure ou égale à 1,16 au recto et (x) comprise entre 0,83 et 1,16 au verso. On peut dire que ces élèves se sont plutôt moins bien adaptés à la tâche du verso que celle du recto.

Si l'on traduit ces tableaux en pourcentages pour avoir des effectifs de tailles comparables, on obtient :

Pour les CM2 :

		RECTO			
VERSO		$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
	$(x) < 0,83$	10%	14%	9%	33%
	$0,83 \leq (x) < 1,16$	14%	13%	7%	33%
	$1,16 \leq (x)$	6%	16%	12%	34%
	Total	29%	43%	28%	100%

Pour les 6^{ème} :

		RECTO			
VERSO		$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
	$(x) < 0,83$	11%	7%	8%	26%
	$0,83 \leq (x) < 1,16$	16%	7%	17%	41%
	$1,16 \leq (x)$	13%	7%	14%	33%
	Total	40%	21%	39%	100%

Les deux groupes d'élèves étant réunis :

		RECTO			
		$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
VERSO	$(x) < 0,83$	10%	11%	8%	29%
	$0,83 \leq (x) < 1,16$	15%	10%	13%	37%
	$1,16 \leq (x)$	10%	11%	13%	34%
	Total	35%	31%	34%	100%

Dans les trois tableaux, il y a un tiers de l'effectif du groupe sur la diagonale. Chaque élève étant représenté par sa note, on peut en conclure qu'un tiers de notre échantillon a gardé sa position par rapport au groupe que ce soit dans la difficulté (note inférieure à 0,83), dans le comportement d'un « élève moyen » (note comprise entre 0,83 et 1,16) ou dans l'aisance (note supérieure à 1,16).

Un autre tiers des élèves se trouve au dessus de la diagonale du tableau. Ces élèves ont donc une « note » au recto supérieure à celle du verso. Ce sont des élèves qui, par comparaison avec l'ensemble du groupe, avaient des compétences moins adaptées aux exercices du verso qu'à ceux du recto. Très nombreux sont ceux qui ont témoigné d'un niveau de van Hiele inférieur au verso tout en ayant fonctionné dans le même paradigme ou qui sont passés de G2 à G1. Ce sont donc les élèves pour lesquels le verso a été plus difficile que le recto. Les activités du verso étaient plus difficiles en ce qu'elles demandaient pour certaines, la lecture de sous-figures ou la rédaction d'un raisonnement. Or par construction des questionnaires, c'est la situation attendue. On peut donc porter au crédit de cette recherche la fait de faire apparaître d'autres profils au travers d'activités particulières.

Enfin le dernier tiers des élèves est situé sous la diagonale des tableaux. Ils ont une « note » au verso supérieure à celle du recto. Ce sont là les élèves qui se sont révélés plus efficaces en termes d'adaptation à la tâche au verso qu'au recto que la plupart de leurs camarades. Ces élèves sont restés dans le même paradigme ou sont passés de G1 à G2 et ont témoigné d'un niveau de van Hiele supérieur ou, à tout le moins, plus en adéquation avec le paradigme dans lequel ils ont fonctionné au verso qu'au recto.

Le seul tableau dans lequel le test du χ^2 indique un lien, lequel se fait ténu, entre les variables est celui des CM2 : $\chi^2 = 11,38$; ddl = 4 ; $k > 0,05$; χ^2 critique = 9,49. C'est dans ce tableau que les effectifs des cases extrêmes sont les plus faibles ; les cases extrêmes étant celles où la « note » du recto est maximale et celle du verso minimale (18 élèves sur 209 et le contraire), la « note » du recto minimale et celle du verso maximale (12 élèves sur 209). L'effectif le plus grand (33 élèves sur 209 soit 16%) correspond à des élèves à qui l'activité du recto a pu sembler de difficulté normale (leur « note » (x) est comprise entre 0,83 et 1,16), et se sont particulièrement bien adaptés à l'activité du verso (leur « note » (x) est supérieure ou égale à 1,16).

En fait on retrouve ici avec un autre procédé le fait que les élèves qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} utilisent le paradigme dans lequel ils sont le plus à l'aise ou celui qu'ils connaissent et au niveau de van Hiele qu'ils maîtrisent le mieux pour le domaine de la géométrie et la tâche en question.

Nous avons vu qu'un élève peut être à différents niveaux de van Hiele selon les domaines de la géométrie dans lesquels a eu lieu l'apprentissage. Les questionnaires que nous avons proposés étaient conçus de façon que les sujets abordés au recto et au verso des feuilles soient différents. Il n'est donc pas étonnant que les « notes » obtenues au recto et au verso soient indépendantes : elles ont été établies à partir de domaines différents de connaissances (triangles au recto et quadrilatères au verso par exemple) et différents contrats didactiques (rédaction de justifications au verso, éliminations de figures au recto). Le fait que les résultats des élèves de CM2 soient liés les uns aux autres et encore, de façon ténue, est peut-être dû au moindre développement des connaissances en Primaire qu'au Collège.

6.4. Caractérisation d'un « groupe étalon »

Nous venons d'attribuer « une note » à chaque élève. Les répartitions des notes nous ont conduite à définir l'élève « moyen » comme étant celui qui a une note comprise entre 0,83 et 1,16. Les différentes combinaisons entre les valeurs attribuées aux niveaux de van Hiele et les valeurs associées au paradigmes géométriques donnent, selon les exercices, le tableau suivant

où dans chaque case apparaît le quotient de la valeur correspondant au niveau de van Hiele par la valeur moyenne associée au paradigme géométrique.

	CM2						6 ^{ème}					
	G1	N1/G 1	N2/G 1	G2	N2/G 2	N3/G 2	G1	N1/G 1	N2/G 2	G2	N2/G 2	N3/G 2
Ex. 1.1.	1,31	0,76	1,53	3,00	0,67	1,00	1,47	0,68	1,36	3,00	0,67	1,00
Ex. 1.2.	0,93	1,08	2,15	2,75	0,73	1,09	1,00	1,00	2,00	2,50	0,80	1,20
Ex. 1.3.	0,59	1,69	3,39	2,50	0,80	1,20	0,38	2,63	5,26	2,86	0,70	1,05
Ex. 1.4.	1,55	0,65	1,29	2,42	0,83	1,24	1,47	0,68	1,36	2,77	0,72	1,08
Ex. 1.5.	1,18	0,85	1,69	2,78	0,72	1,08	1,36	0,74	1,47	2,47	0,81	1,21
Ex. 1.6.	0,56	1,79	3,57	2,88	0,69	1,04	0,91	1,10	2,20	2,89	0,69	1,04
Ex. 1.7.	1,07	0,93	1,87	2,50	0,80	1,20	1,62	0,62	1,23	2,58	0,78	1,16
Ex. 1.8.	0,9	1,11	2,22	2,73	0,73	1,10	1,45	0,69	1,38	2,58	0,78	1,16
Ex. 2.1.	1,24	0,81	1,61	2,20	0,91	1,36	1,31	0,76	1,53	2,57	0,78	1,17

Ex. 2.2.	1,25	0,80	1,60				1,33	0,75	1,50	2,80	0,71	1,07
Ex. 2.3.	1,05	0,95	1,90	2,00	1,00	1,50	1,28	0,78	1,56	2,43	0,82	1,23
Ex. 2.4.	1,44	0,69	1,39	3,00	0,67	1,00	1,45	0,69	1,38	2,94	0,68	1,02
Ex. 2.5.	1,53	0,65	1,31	2,78	0,72	1,08	1,48	0,68	1,35	3,00	0,67	1,00
Ex. 2.6.	0,8	1,25	2,50	3,00	0,67	1,00	0,71	1,41	2,82	3,00	0,67	1,00
Ex. 2.7.	1	1,00	2,00	3,00	0,67	1,00	0,70	1,43	2,86	3,00	0,67	1,00
Ex. 2.8.	0,94	1,06	2,13	3,00	0,67	1,00	0,93	1,08	2,15	3,00	0,67	1,00
Ex. 2.9.	1	1,00	2,00	3,00	0,67	1,00	1,14	0,88	1,75	3,00	0,67	1,00

Dans ce tableau nous avons repéré en caractère gras les notes supérieures ou égales à 0,83 et inférieures à 1,16. Elles correspondent à des combinaisons entre paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele représentant l'élève « moyen » de notre échantillon face à l'activité proposée. Ces informations converties en niveaux de van Hiele et paradigmes géométriques aboutissent au tableau suivant :

	CM2			6 ^{ème}	
Ex. 1.1.			G2 - N3		G2 - N3
Ex. 1.2.	G1 - N1		G2 - N3	G1 - N1	
Ex. 1.3.					G2 - N3
Ex. 1.4.		G2 - N2			G2 - N3
Ex. 1.5.	G1 - N1		G2 - N3		
Ex. 1.6.			G2 - N3	G1 - N1	G2 - N3
Ex. 1.7.	G1 - N1				
Ex. 1.8.	G1 - N1		G2 - N3		

Ex. 2.1.		G2 - N2			
Ex. 2.2.					G2 - N3
Ex. 2.3.	G1 - N1	G2 - N2			
Ex. 2.4.			G2 - N3		G2 - N3
Ex. 2.5.			G2 - N3		G2 - N3
Ex. 2.6.			G2 - N3		G2 - N3
Ex. 2.7.	G1 - N1		G2 - N3		G2 - N3
Ex. 2.8.	G1 - N1		G2 - N3	G1 - N1	G2 - N3
Ex. 2.9.	G1 - N1		G2 - N3	G1 - N1	G2 - N3

Certaines lignes de ce tableau sont vides, soit pour les élèves de CM2, soit pour les élèves de 6^{ème}. On pourrait en déduire que les activités concernées n'ont pas permis l'émergence du profil d'un élève « moyen ». Ces activités étaient sans doute ou trop difficiles et mal comprises (et la note est toujours inférieure à 0,83), ou trop simples et de peu d'intérêt pour les élèves (cas des notes supérieures ou égales à 1,16). En CM2, il s'agit des exercices 1.3. (triangles isocèles dessinés à main levée et codés) et 2.2. (« Victor » dans le cas où le triangle ne peut être équilatéral). En 6^{ème} la situation est plus fréquente ; on la rencontre à propos des exercices 1.5. (description des triangles isocèles dans un ordre aléatoire), 1.7. (recherche des rectangles dans un nuage de points), 1.8. (recherche des rectangles ou des cerfs-volants), 2.1. (« Victor » dans le cas de la figure juste) et 2.3. (« Victor » dans le cas où le quadrilatère ne peut être un carré). On peut toutefois remarquer que cela ne se produit jamais simultanément dans les deux groupes d'élèves. On peut y voir là le fait que les activités telles que nous les avons conçues, étaient toujours adaptées à l'un des deux groupes d'élèves au moins.

Au contraire pour certains exercices, plusieurs combinaisons amènent à une « note » moyenne. Cette situation est plus fréquente en CM2 qu'en 6^{ème}. Une explication serait que deux groupes distincts déterminent le profil de l'élève « moyen ». Il s'agit presque toujours des combinaisons G1-N1 et G2-N3, c'est-à-dire d'élèves qui, fonctionnant dans un paradigme spatio-graphique, ne maîtrisent que le niveau 1 d'identification-visualisation de van Hiele et d'élèves qui, fonctionnant dans une géométrie proto-axiomatique, maîtrisent certaines composantes du niveau 3 de déduction informelle de van Hiele.

On peut aussi noter que la combinaison G2-N2 apparaît seulement en CM2 et pour trois exercices : 1.4. (description de triangles isocèles par ordre de difficulté croissante), 2.1. (« Victor » avec figure juste) et 2.3. (« Victor » où le quadrilatère ne peut être un carré).

6.5. Conséquences à propos des activités

Nous avons retrouvé dans l'analyse précédente, la diversité des comportements des élèves face à deux tâches de natures différentes. Il paraît maintenant pertinent de savoir comment les élèves se répartissent selon leurs « notes » à propos de chaque activité.

Les répartitions selon les exercices au recto des questionnaires sont les suivantes :

Exercice 1.1.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	8	8	5	21
6^{ème}	9	7	10	26
Total	17	15	15	47

Exercice 1.2.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	9	28	4	41
6^{ème}	19	5	19	43
Total	28	33	23	84

Exercice 1.3..

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	13	0	15	28
6^{ème}	14	12	4	30
Total	27	12	19	58

Exercice 1.4.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	11	0	12	23
6^{ème}	10	10	10	30
Total	21	10	22	53

Exercice 1.5.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	6	13	7	26
6^{ème}	15	0	14	29
Total	21	13	21	55

Exercice 1.6.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	10	7	9	26
6^{ème}	7	18	4	29
Total	17	25	13	55

Exercice 1.7.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	2	23	4	29
6^{ème}	13	0	19	32
Total	15	23	23	61

Exercice 1.8.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	8	14	3	25
6^{ème}	12	0	18	30
Total	20	14	21	55

On retrouve ici le fait que les élèves selon leur niveau de scolarité n'ont pas toujours eu les mêmes réactions. Les répartitions sont très variables d'un exercice à l'autre entre les élèves de CM2 et de 6^{ème}. En effet, à l'exception du premier exercice, la répartition est toujours très différente d'une ligne à l'autre. Quand les élèves de CM2 se répartissent en deux groupes distincts entre les cases extrêmes, les élèves de 6^{ème} sont regroupés dans la case du milieu. L'inverse existe tout autant : deux groupes distincts d'élèves de 6^{ème} dans les cases extrêmes et un maximum d'élèves de CM2 dans la case du milieu. En particulier certaines cases du centre sont vides. Comme nous l'avons supposé précédemment, elles traduisent sans doute le fait que les tâches en question ne permettent pas de repérer un « élève moyen ». Ces tâches sont différentes selon que l'on s'intéresse aux élèves de CM2 ou de 6^{ème}.

Il s'agit

- pour les CM2 des exercices 1.3. (identification de triangles isocèles à partir de dessins faits à main levée ou à la règle et codés) et 1.4 ; (identification de triangles isocèles par leur description verbale, la liste étant donnée par ordre de difficulté croissante d'identification).

- pour les 6^{ème} des exercices 1.5. (identification de triangles isocèles par leur description verbale, la liste étant donnée selon un ordre aléatoire de difficulté croissante d'identification), 1.7. (recherche de rectangles dont on connaît les centres) et 1.8. (identification d'un nombre et de quadrilatères ayant leurs côtés de même longueur deux à deux et un angle droit).

Sur la ligne de ces cases vides on a le plus souvent les élèves répartis en deux groupes de mêmes tailles. Toutefois, dans le cas des exercices 1.7. et 1.8. en 6^{ème}, les élèves sont sensiblement plus nombreux dans la case « $1,16 \leq (x)$ » que dans la case « $(x) < 0,83$ » : respectivement 19 et 13 élèves dans le cas de l'exercice 1.7. et 18 et 12 élèves pour l'exercice 1.8.. On pourrait alors conjecturer que de telles tâches (exercices 1.5., 1.7. et 1.8.) proposés en 6^{ème} ne permettent pas à un « élève moyen » d'émerger : soit c'est très facile et la « note » est supérieure à 1,16 soit c'est trop difficile et la « note » est inférieure à 0,83. Il est sans doute important de remarquer que dans le même temps en CM2, l'effectif le plus grand se situe dans la case du milieu. Autrement dit, il se pourrait que de telles tâches ne soient pas particulièrement propices à l'apprentissage par zone de développement proximal en 6^{ème} quand elles le seraient en CM2.

A l'opposé, face à certaines tâches, les élèves ont eu des comportements assez semblables. C'est ainsi que dans certaines cases, on retrouve plus de la moitié de l'effectif des élèves qui ont donné une réponse. Cette remarque s'applique tout particulièrement au cas des élèves de CM2 dans le cadre de l'exercice 1.7. de recherche de rectangles dans un nuage de points où 23 élèves sur 29 ont une « note » (x) comprise entre 0,83 et 1,16. C'est aussi le cas des élèves de 6^{ème} dans ce même exercice où 19 élèves sur 32 ont une « note » supérieure à 1,16 et dans l'exercice 1.8. où 18 élèves sur 30 ont aussi une note supérieure à 1,16.

Les tableaux suivants donnent la répartition des élèves selon la « note » qu'ils ont obtenue dans l'exercice du verso des questionnaires.

Exercice 2.1.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	10	4	8	22
6^{ème}	13	0	17	30
Total	23	4	25	52

Exercice 2.2.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	15	0	5	20
6^{ème}	12	4	7	23
Total	27	4	12	43

Exercice 2.3.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	2	16	3	21
6^{ème}	14	0	11	25
Total	16	16	14	46

Exercice 2.4.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	16	8	16	40
6^{ème}	5	30	8	43
Total	21	38	24	83

Exercice 2.5.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	15	7	23	45
6^{ème}	10	25	19	54
Total	25	32	42	99

Exercice 2.6.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	2	2	8	12
6^{ème}	4	2	10	16
Total	6	4	18	28

Exercice 2.7.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	4	12	4	20
6^{ème}	3	10	7	20
Total	7	22	11	40

Exercice 2.8.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	3	14	3	20
6^{ème}	2	16	1	19
Total	5	30	4	39

Exercice 2.9.

	$(x) < 0,83$	$0,83 \leq (x) < 1,16$	$1,16 \leq (x)$	Total
CM2	2	8	1	11
6 ^{ème}	1	13	2	16
Total	3	21	3	27

Cette fois la répartition des élèves est tout autre.

A commencer par les exercices 2.1. et 2.2. (« Victor ») où en CM2 comme en 6^{ème}, les effectifs les plus faibles sont dans la case centrale. Au contraire dans le cas des exercices 2.7. et 2.8. (« Marie ») les effectifs les plus grands sont dans la case centrale et rares sont les élèves dans les cases extrêmes, comme si une telle tâche, tellement difficile pour les élèves de notre échantillon, les avait amenés à des réponses similaires, ne permettant pas de dégager d'élève en situation d'aider ses camarades pour un apprentissage en termes de zone de développement proximal.

Dans le cas de l'exercice 2.6. (« Marie » sans aucune aide) les effectifs les plus grands sont dans la case « $1,16 \leq (x)$ ».

Le tableau contenant une case vide qui appelle un commentaire, est celui de l'exercice 2.3. (« Victor » quand le quadrilatère BCDE ne peut pas être un carré). Les élèves de 6^{ème} ont des « notes » qui sont soit inférieures à 0,83 soit supérieures ou égales à 1,16. Au contraire 16 élèves de CM2 sur 21 sont dans la case centrale : ils ont une « note » comprise entre 0,83 et 1,16. Or nous avons vu que les élèves de CM2 avaient plutôt abordé cet exercice en G1 et au niveau d'analyse quand les élèves de 6^{ème} étaient répartis sur tous les niveaux de van Hiele dans les deux paradigmes géométriques. C'est encore dire que cette tâche n'est pas particulièrement adaptée en 6^{ème} et qu'elle ne donne pas davantage l'occasion aux élèves de CM2 de se répartir entre les différentes possibilités.

On peut dire de ces situations qu'elles sont sans doute ou trop difficiles ou trop simples pour les élèves concernés. Elles ne permettent sans doute pas d'identifier « un élève moyen ». On

peut aussi en dire que les niveaux de van Hiele atteints par les élèves ne sont pas adaptés aux paradigmes dans lesquels ils ont choisi de fonctionner pour traiter la question.

7. Quels paradigmes pour le niveau 2 d'analyse de van Hiele ?

Nous avons vu que le niveau d'analyse est le niveau de la théorie de van Hiele qui peut être associé aux deux paradigmes G1 et G2 selon les composantes de ces derniers qui sont mises en œuvre. Il y a 45 élèves qui ont témoigné du niveau d'analyse sur l'ensemble du questionnaire soit 13 en CM2 et 32 en 6ème. Les paradigmes dans lesquels ces 45 élèves ont fonctionné sont :

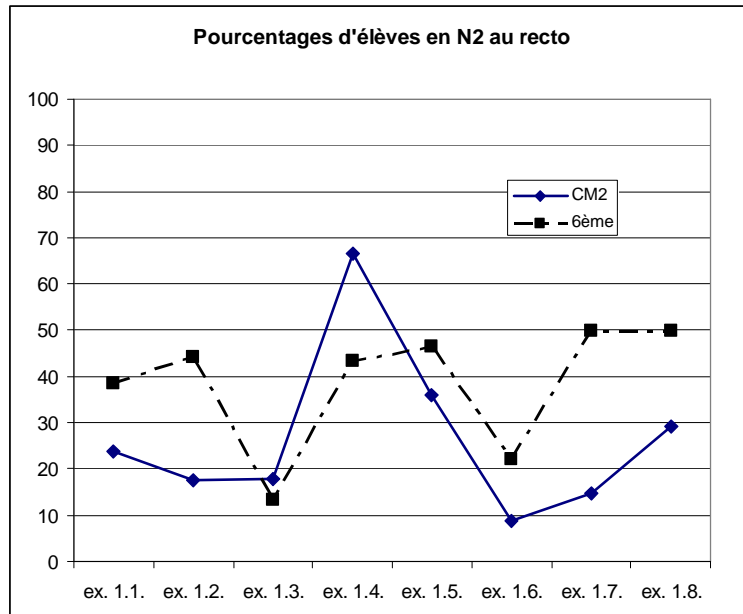
	G1 recto	G2 recto	Total
G1 verso	21	18	39
G2 verso	4	2	6
Total	25	20	45

Près de la moitié des élèves (21 sur 45) ont donc fonctionné en G1 pour les deux activités. 18 élèves (soit 40%) sur 45 ont fonctionné en G2 puis en G1 quand ils sont passés au deuxième exercice du questionnaire. Globalement ce sont 39 élèves soit 87% de notre échantillon qui se sont placés dans G1 pour le second exercice, même si celui était dans G2 par contrat. Seulement deux élèves ont fonctionné en G2 pour les deux tâches qui leur avaient été données tout en restant au niveau d'analyse ! On peut aussi dire que les activités proposées au recto des questionnaires ont permis aux élèves de niveau 2 de se placer autant dans G1 que dans G2 alors que, contrairement au contrat didactique, les élèves au niveau d'analyse se sont repliés dans un fonctionnement en G1 au verso. Il nous faut donc analyser la nature des tâches qui ont permis aux élèves l'expression d'un même niveau de van Hiele dans les deux paradigmes.

7.1. Du point de vue des tâches

7.1.1. Tâches du recto

Nous allons commencer par analyser les tâches qui, au recto des questionnaires, ont permis l'expression du niveau d'analyse chez certains élèves.



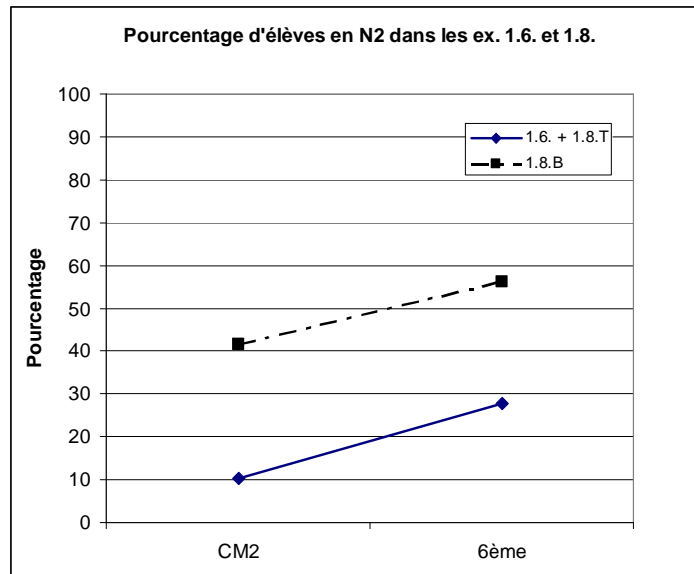
De ce graphique, il ressort que les élèves de CM2 et de 6^{ème} n'ont pas témoigné du niveau d'analyse dans les mêmes situations : les courbes ne sont pas parallèles. Les écarts les plus grands se situent dans le cas des exercices 1.1., 1.2., 1.4, 1.7. et 1.8.. Le paradigme dans lequel les élèves ont fonctionné dans ces exercices devrait nous éclairer sur ces différences.

A l'opposé les réponses des élèves sont comparables du point de vue de l'expression du niveau d'analyse de van Hiele dans les exercices 1.3., 1.5. et 1.6.. Dans l'exercice 1.3. nous avons attribué le niveau d'analyse aux élèves qui ont respecté les codages mais ont appliqué une relation d'exclusivité entre les différents types de triangles. Or nous savons que le respect des codages n'a rien de spontané. Soit les élèves ont appris à décoder une figure et ils ont alors la possibilité de témoigner d'un niveau de van Hiele supérieur soit ils ne le savent pas et ils ne peuvent pas dépasser le niveau d'identification-visualisation. Autrement dit, les élèves qui sont niveau d'analyse dans cette activité, sont ceux qui, tout en sachant décoder un schéma, n'ont pas une conception inclusive des figures particulières. Mais comme l'indique le graphique, de tels élèves sont relativement peu nombreux. Ils représentent tant en CM2 qu'en 6^{ème} moins de 20% de l'échantillon. Le graphique indique aussi que les élèves de CM2 ont eu non seulement des difficultés dans la conception inclusive des figures particulières mais aussi

à propos du sens à donner au codage puisque les taux d'élèves en N2 dans les deux premiers exercices (exercices 1.1. et 1.2.) sont eux aussi assez faibles. L'activité de décodage est bien une activité inhérente au niveau 2 de van Hiele mais elle relève des apprentissages du Collège.

Dans l'exercice 1.5. le niveau d'analyse correspond à la reconnaissance du triangle isocèle dans le cas des descriptions mentionnant explicitement deux côtés de même longueur. De plus nous avons considéré que les élèves qui rejetaient le cas du triangle équilatéral et des sous-figures dans lesquelles le triangle ABC était néanmoins un triangle isocèle, relevaient eux aussi du niveau d'analyse. Environ 40% des élèves qui ont reçu l'exercice 1.5. sont dans ce cas, les élèves de 6^{ème} étant plus nombreux que leurs camarades de CM2. Dans cette activité, les descriptions étaient proposées dans un ordre aléatoire. Or les réponses de niveau d'analyse, données par les élèves de CM2 dans l'exercice 1.4. où les descriptions ont été classées par ordre de difficulté croissante ont été nettement plus nombreuses. En 6^{ème}, en revanche, les proportions d'élèves de niveau 2 dans les deux exercices sont du même ordre de grandeur. On peut donc conjecturer que le fait d'avoir proposé les descriptions dans un ordre aléatoire a cristallisé les positions des élèves de CM2 en laissant une moindre place aux élèves de « niveau moyen ». On pourrait aussi dire que, pour les CM2 au moins, la variable didactique liée à l'ordre dans les questions relève d'une zone de développement proximal dans l'apprentissage de la reconnaissance de sous-figures en particulier.

Dans les exercices 1.6. et 1.8. l'expression du niveau d'analyse a été très variable, à la fois d'un groupe à l'autre et d'un exercice à l'autre. Ici le niveau d'analyse se traduit en géométrie par le rejet du carré témoignant alors d'une conception exclusive des définitions des figures particulières. Or on se souvient qu'il existe deux versions de l'exercice 1.8. : dans l'une (1.8.T) la partie géométrique est identique à celle de l'exercice 1.6. ; dans l'autre (1.8.B) la partie géométrique est complétée par un « cerf-volant » satisfaisant aux trois contraintes. Quand on regroupe les résultats des exercices 1.6. et 1.8.T pour comparer les occurrences du niveau d'analyse on obtient le graphique suivant :



Il apparaît alors que les élèves de CM2 et de 6^{ème} ont eu les mêmes réactions : l'exercice 1.8.B est plus favorable que l'exercice 1.6. à l'expression du niveau d'analyse, même si c'est dans une moindre mesure pour les élèves du primaire. Plus de la moitié des élèves de 6^{ème} sont à ce niveau : ils ne maîtrisent pas l'inclusion entre les définitions des figures particulières mais savent respecter simultanément plusieurs contraintes. On peut conjecturer qu'ils le font d'autant mieux que le résultat (ici le « cerf-volant ») ne les amène pas à une situation de conflit cognitif entre leurs conceptions initiales et le respect des diverses contraintes. Là encore, on peut suggérer que la version 1.8.B de l'exercice (avec le « cerf-volant ») est une activité relevant de zone de développement proximal dans l'apprentissage de l'inclusion des définitions des figures particulières. Une autre interprétation peut être que le respect simultané de plusieurs contraintes est un préalable à une conception inclusive des définitions des figures particulières.

Enfin dans l'exercice 1.7. (nuage de points pour retrouver les quatre rectangles) les proportions d'élèves qui ont témoigné du niveau 2 de van Hiele sont différentes : 15% en CM2 ; 50% en 6^{ème}. Comme dans les exercices précédents, les élèves au niveau d'analyse ont pu appliquer et vérifier plusieurs propriétés du rectangle et ont souvent éliminé le carré. Les élèves de 6^{ème} ont été plus nombreux que ceux de CM2 : ils maîtrisent davantage les propriétés et les appliquent simultanément alors que les élèves de CM2 ont plus facilement tendance à respecter successivement les contraintes et travailler au niveau du « perçu » plutôt que du « su ».

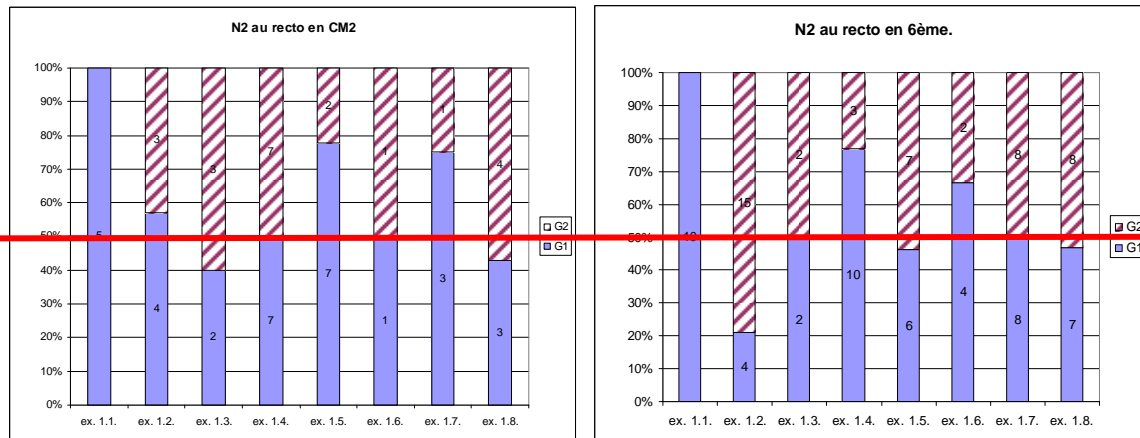
Si l'on s'intéresse maintenant aux paradigmes dans lesquels les élèves ont fonctionné au recto, la répartition en est donnée par le tableau suivant.

	CM2			6 ^{ème}			Total général
	G1	G2	Total	G1	G2	Total	
ex. 1.1.	5		5	10		10	15
ex. 1.2.	4	3	7	4	15	19	26
ex. 1.3.	2	3	5	2	2	4	9
ex. 1.4.	7	7	14	10	3	13	27
ex. 1.5.	7	2	9	6	7	13	22
ex. 1.6.	1	1	2	4	2	6	8
ex. 1.7.	3	1	4	8	8	16	20
ex. 1.8.	3	4	7	7	8	15	22
Total	32	21	53	51	45	96	149

On constate que ce sont 32 élèves de CM2 sur 53 qui ont fonctionné en G1 soit 60% de l'effectif quand ce sont 51 élèves sur 96 en 6^{ème} soit 53% de l'échantillon. La proportion est donc légèrement moindre pour les élèves du secondaire.

Pour certains exercices comme les exercices 1.3. et 1.6., les effectifs sont très réduits et difficilement exploitables. Une conclusion pourrait être que, sous cette forme, ces deux items ne sont pas favorables à la manifestation du niveau 2 d'analyse de van Hiele.

Si maintenant on compare, exercice par exercice, les taux de fonctionnement en G1 et en G2 pour chacun des groupes d'élèves, on obtient les deux graphiques ci-dessous.



Dans l'exercice 1.1., les élèves de niveau d'analyse, ont tous fonctionné en G1. Une telle situation est inhérente à l'activité. En effet ce niveau de van Hiele correspond à une conception exclusive des définitions des figures particulières mais les figures étaient dessinées à la règle et l'élève devait faire usage d'instruments donc fonctionner dans G1 pour se décider : mesurage, usage de l'équerre, etc.

Dans l'exercice 1.2., la prise en compte du codage est associée à un fonctionnement en G2. Les élèves de 6^{ème} sont alors nettement plus nombreux à utiliser ce paradigme.

Ce phénomène semble se reproduire dans le cas de l'exercice 1.7. (nuage de points pour retrouver les rectangles) où 50% des élèves de 6^{ème} ont fonctionné en G1 mais le nombre d'élèves de CM2 au niveau N2 est petit et la comparaison risquée.

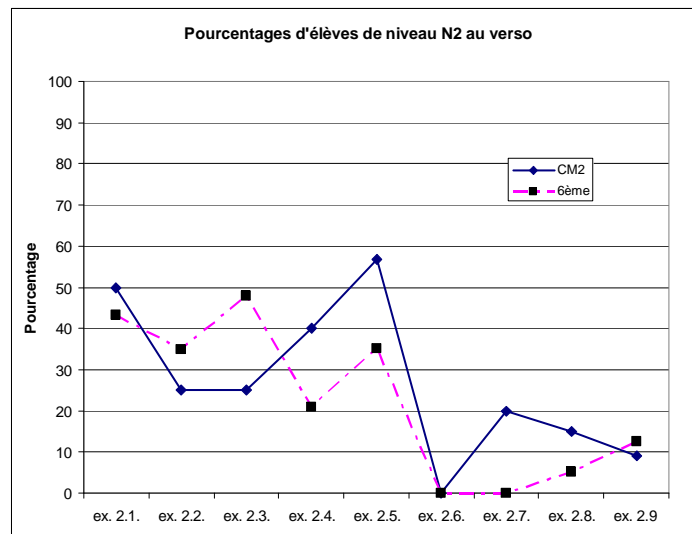
A propos des exercices 1.4. et 1.5., il semble que l'ordre dans lequel les descriptions ont été proposées n'a pas eu le même impact sur les élèves de CM2 et de 6^{ème} : les proportions d'élèves dans chaque paradigme s'inversent d'un groupe d'élèves à l'autre. Dans l'exercice 1.4., on peut penser que l'ordre croissant dans lequel les descriptions ont été données a permis à un plus grand nombre d'élèves de CM2 de fonctionner en G2 : graduellement, ils ont été amenés à repérer les cas où les figures avaient deux côtés de même longueur, même s'ils ont eu par la suite des difficultés dans la reconnaissance des sous-figures. Il semble que les élèves de CM2 y aient été moins sensibles.

7.1.2. Tâches du verso

Dans cette partie du questionnaire, le niveau 2 d'analyse est caractérisé par :

- une reconnaissance des figures grâce au sens donné au codage des dessins,

- la difficulté à retrouver une sous-figure dans une figure et ;
- surtout ne pas témoigner de l'incidence entre certains éléments de la figure.



Globalement, on pourrait dire que les courbes ont les mêmes tendances : les exercices les plus favorables à l'expression du niveau d'analyse étant le n° 2.1. où la situation « Victor » était accompagnée d'une figure juste et l'exercice 2.5. de recherche du centre du cercle circonscrit (centre extérieur au cercle). Les cas les moins favorables ont été les quatre versions de triangles isocèles accolés (« Marie ») soit les exercices 2.6. à 2.9.. Dans l'exercice 2.6. où aucune indication de mesure n'était donnée sur le schéma, aucun élève qu'il ait été de CM2 ou de 6^{ème} n'a témoigné du niveau d'analyse.

On peut aussi remarquer que les deux activités de recherche du centre du cercle circonscrit (n°2.4. et n°2.5.) ont été plus favorables aux élèves de CM2 qu'aux 6^{ème} dans l'expression du niveau 2 de van Hiele. Rappelons que dans ces cas, nous avons attribué le niveau 2 aux élèves qui avaient réussi à tracer un cercle qui passe par les trois sommets du triangle par essais-erreurs, ou sans qu'une démarche explicite associée à un changement de point de vue ait pu être identifiée. Il n'est donc pas étonnant que les élèves de CM2 aient été proportionnellement plus nombreux que les élèves de 6^{ème} dans ce cas.

Le tableau ci-dessous regroupe les élèves de niveau 2 de CM2 et de 6^{ème} selon les paradigmes dans lesquels ils ont fonctionné.

	CM2			6 ^{ème}			Total général
	G1	G2	Total	G1	G2	Total	
ex. 2.1.	7	4	11	8	5	13	24
ex. 2.2.	5		5	7	1	8	13
ex. 2.3.	3	2	5	8	4	12	17
ex. 2.4.	16		16	8	1	9	25
ex. 2.5.	23	2	25	19		19	44
ex. 2.6.							
ex. 2.7.	4		4				4
ex. 2.8.	3		3	1		1	4
ex. 2.9	1		1	2		2	3
Total	62	8	70	53	11	64	134

On remarque que certaines cases sont vides ou ont un effectif de 1 ou 2 élèves.

C'est le cas pour les exercices n°2.2. (« Victor » dans le cas où le triangle ne peut pas être équilatéral), les exercices n°2.4. et n°2.5. de recherche du centre du cercle circonscrit et tous les exercices à propos des triangles isocèles accolés (« Marie »).

La seule situation dans laquelle les élèves ont pu témoigner du niveau d'analyse en utilisant l'un ou l'autre des deux paradigmes géométriques est la première, n°2.1. où la situation « Victor » était accompagnée d'une figure juste. Les élèves auxquels nous avons attribué le codage G2-N2 ont donné des réponses dans lesquelles ils évoquaient les sous-figures sans établir de lien entre elles. La variable didactique que nous avons utilisée dans les deux autres versions (n°2.2. et n°2.3.) s'est révélée peu efficace dans la mesure où aucun élève n'a donné une réponse relevant de G2. En effet, les figures proposées étant manifestement fausses, les élèves qui ne pouvaient que nommer les sous-figures l'ont fait par comparaison globale entre la « construction » de Victor et le schéma ; ils ont alors fonctionné en G1.

De ce tableau, il ressort que les activités basées sur le codage des figures et les relations d'incidence entre les points ne sont pas les mieux favorables à l'expression du niveau d'analyse, et encore moins dans le cadre d'une géométrie proto-axiomatique, surtout si le schéma proposé est manifestement faux.

Nous avons vu que l'activité sur la construction des rectangles au recto des questionnaires avait permis à plusieurs élèves de travailler au niveau d'analyse tant en géométrie 1 qu'en géométrie 2. Au verso nous constatons aussi que c'est l'activité où les élèves construisent en vraie grandeur des objets géométriques que nous avons les plus forts taux d'expressions du niveau de 2 de van Hiele. On pourrait conjecturer alors que les activités de dessins qui ne sont pas des activités de reproduction à l'identique mais dans lesquelles les élèves doivent mettre en œuvre leurs connaissances sous certaines contraintes, sont favorables à la manifestation du niveau d'analyse.

De plus l'apprentissage du sens à donner au codage des schémas fait partie du passage de G1 à G2 en passant par le niveau d'analyse : un élève sachant décoder une figure pourra d'autant mieux décrire l'objet géométrique idéal dont il est question ; il pourra alors en avoir une conception dynamique et commencer à prévoir les incidences entre les différents éléments de la situation géométrique qui lui est proposée.

7.2. Du point de vue des élèves

Si maintenant on s'arrête sur les élèves qui, dans une activité ou une autre, ont témoigné du niveau d'analyse, nous devons distinguer deux cas : le niveau d'analyse tel que nous l'avons identifié au recto des questionnaires et tel que nous l'avons repéré au verso. En effet, dans un premier temps les critères de reconnaissance du niveau d'analyse ont été liés à une conception exclusive des définitions des figures particulières et le respect simultané de diverses contraintes. D'après les exercices du verso, le niveau d'analyse se caractérise par la reconnaissance et la description de sous-figures à partir de dessins en vraie grandeur ou de schémas.

La répartition des élèves au niveau d'analyse dans les deux paradigmes dans les exercices du recto est la suivante.

	G1	G2	Total
CM2	31	20	51
6^{ème}	50	45	95
Total	81	65	146

Ici, les élèves, qu'ils soient de CM2 ou de 6^{ème} ont majoritairement fonctionné en G1 ; la proportion en CM2 étant toutefois moindre qu'en 6^{ème} (20 sur 31 soit 2 sur 3 en CM2 contre 45 sur 50 en 6^{ème} soit une répartition plus équilibrée).

Les élèves qui ont fonctionné en G1 auxquels nous avons attribué le niveau d'analyse dans les exercices du recto ont montré qu'ils n'avaient pas une conception inclusive des définitions des figures particulières ou qu'ils avaient des difficultés à respecter simultanément plusieurs contraintes. Certains ont même eu du mal à décoder le schéma d'une figure fait à main levée: il y a vraisemblablement « contamination du su par le perçu ».

Dans les exercices du verso, la répartition des élèves au niveau 2 de van Hiele dans les deux paradigmes est la suivante :

	G1	G2	Total
CM2	62	8	70
6^{ème}	53	11	64
Total	115	19	134

Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, rares ont été les élèves à fonctionner en G2 au niveau d'analyse dans les activités du verso : 8 sur 70 en CM2 soit 11% et 11 sur 64 en 6^{ème} soit 17%.

Dans la mesure où les élèves de CM2 et de 6^{ème} ont eu des comportements comparables, nous allons les regrouper pour étudier leurs évolutions à l'intérieur des questionnaires. Dans un premier temps, nous observerons le paradigme de fonctionnement et le niveau de van Hiele atteint au verso par les élèves qui ont le codage G1-N2 au recto. Dans un deuxième temps, nous étudierons l'évolution des élèves repérés par G2-N2.

élèves en G1-N2 au recto

CM2 + 6 ^{ème}	GX au verso	G1 au verso	G2 au verso	Total
N0	3	9		12
N1		19		19
N2		21	4	25
N3			25	25
Total	3	49	29	81

On constate que les élèves qui ont continué de fonctionner en G1 l'ont fait tout autant au niveau d'analyse qu'au niveau d'identification-visualisation : respectivement 19 et 21 élèves sur 81 soit un quart de l'effectif global à chaque fois. Globalement ils sont 1,6 fois plus nombreux que ceux qui ont basculé et travaillé en G2 au verso. Parmi les 29 élèves qui ont changé de paradigme, 25 ont aussi témoigné du niveau 3 de déduction informelle soit 86% de ceux qui ont changé de paradigme mais aussi 30% des élèves qui appartiennent au groupe G1-N2 d'après l'activité du recto. Pour les élèves de 6^{ème}, ce sont les activités de recherche de centre de cercle circonscrit qui ont été le plus favorables à cette évolution vers un paradigme géométrique plus théorique.

En d'autres termes, rares ont été les élèves qui, en ayant fonctionné en G1 au niveau d'analyse au recto, ont fonctionné en G2 à ce même niveau de van Hiele au verso.

L'évolution des élèves qui ont donné au recto des réponses codées G2-N2 à l'issue des activités du verso est la suivante :

élèves en G2-N2 au recto

CM2 + 6 ^{ème}	GX au verso	G1 au verso	G2 au verso	Total
N0	1	4		5
N1	3	18		21
N2		18	2	20
N3			19	19
Total	4	40	21	65

L'évolution des élèves est tout à fait comparable à celle que nous avons précédemment étudiée. Le groupe se divise en trois sous-groupes de tailles égales. Le fait qu'ils aient eu un mode de fonctionnement plus théorique au recto, n'a pas eu une influence particulière ou en tous les cas une incidence dont nous puissions rendre compte sur le mode de fonctionnement au verso du questionnaire tant dans le paradigme géométrique que du niveau de van Hiele. Les répartitions sont les mêmes que pour les élèves qui ont fonctionné en G1 : un tiers des élèves a basculé dans G1 au niveau d'identification-visualisation, un autre tiers a aussi basculé en G1 en restant au niveau d'analyse et le dernier tiers est resté en G2 mais a témoigné du niveau 3 de déduction informelle. Seulement deux élèves (un de chaque niveau de scolarité P27 et S76) sont restés au niveau d'analyse et en G2 sur l'ensemble des deux activités proposées.

On peut conclure de cette étude que les activités proposées au verso ont été moins favorables à l'expression du niveau d'analyse dans le cadre d'une géométrie proto-axiomatique (G2) que les activités du recto.

Dans le cas des exercices 2.2. et 2.3. où les reproductions de figures proposées étaient celles d'une figure fautive, l'élève qui maîtrise le niveau d'analyse ne peut que décrire les sous-figures qu'il perçoit, et est limité à faire une comparaison globale du schéma et de la reproduction donc à fonctionner en G1. Les élèves qui, sur ce thème ont pu fonctionner en G2 l'ont fait dans l'exercice 2.1. où la reproduction était celle d'une figure juste.

Dans le cas des exercices sur les triangles isocèles accolés, les points A, B et D du schéma ont été placés à distance réelle les uns des autres. Les élèves qui fonctionnent dans une géométrie spatio-graphique ont pu confondre le schéma et une figure en vraie grandeur ; ils n'avaient pas la possibilité de distinguer l'objet géométrique de son représentant. Les différentes

variables didactiques que nous avons utilisées ont eu peu d'effet. Une hypothèse à tester serait de proposer aux élèves un schéma dans lequel les distances entre les points sont nettement différentes des distances réelles, tout en laissant au triangle ABD une allure de triangle équilatéral.

8. Conclusion

A l'issue de cette analyse, les résultats sont plutôt conformes à ce que nous avons imaginés lors de l'analyse a priori. On peut penser que les élèves ont considéré la tâche demandée au recto plus facile ou moins déroutante que celle qui était au verso. Cependant c'est dans une très grande majorité que tous les élèves se sont engagés dans ces recherches sans hésiter.

Il apparaît que certaines activités sont plus pertinentes que d'autres pour répondre à certaines questions. En particulier, les activités où les élèves devaient être acteurs et dessiner en vraie grandeur une figure qui respecte un certain nombre de contraintes ont permis à un bon nombre d'élèves de CM2 et de 6^{ème} de commencer à fonctionner dans une géométrie proto-axiomatique sans jamais y avoir été préparé. Demander à un élève de raconter comment il est arrivé à sa conclusion ou comment il a organisé sa construction sont autant de questions qui semblent favoriser par la verbalisation le passage vers une géométrie plus théorique. En revanche, l'étude des dessins tracés à la règle et à l'équerre s'est révélée de peu d'intérêt pour notre recherche.

CONCLUSION

1. *Objet de la recherche*

La raison de cette recherche se situe à l'interface entre la pratique quotidienne d'enseignante de mathématiques au collège et l'adaptation d'un modèle théorique de la compréhension du passage à l'abstraction dans l'apprentissage de la géométrie à l'entrée en 6^{ème}.

Les référents théoriques majeurs sur lesquels nous nous sommes appuyée sont :

- D'une part, la théorie des paradigmes géométriques telle que redéfinie par Parzysz où le paradigme G1 (géométrie spatio-graphique) correspond grosso modo à la géométrie de l'école primaire et le paradigme G2 (géométrie proto-axiomatique) à la géométrie du collège et du lycée ;
- D'autre part, la théorie des niveaux de van Hiele où le niveau 1 d'identification-visualisation correspond à un niveau de compétence suffisant pour l'école primaire alors que le niveau 3 de déduction informelle est le niveau attendu des élèves de collège.

Ces deux cadres théoriques ont été testés sur des étudiants de niveau secondaire ou supérieur quand bien même, chacun évoque la situation de l'élève apprenti tel qu'on peut le rencontrer en CM2 ou en 6^{ème}.

Les principaux résultats connus sont les suivants :

- à propos des paradigmes géométriques : quand bien même celui-ci est défini par la tâche ou par le contrat didactique, l'étudiant peut fonctionner dans un paradigme différent, en général inférieur à celui que l'on attendait, par méconnaissance de la géométrie ou mauvaise interprétation du contrat. Il arrive même qu'il fonctionne dans un pseudo-paradigme selon les différents éléments de géométrie qu'il connaît ou selon ce qu'il comprend de la tâche qui lui est prescrite ; un étudiant ayant toujours tendance à basculer vers un paradigme de niveau inférieur quand la tâche lui est plus difficilement accessible ;
- à propos des niveaux de van Hiele : un même élève peut témoigner de différents niveaux de van Hiele selon la tâche qui lui est prescrite ; il lui arrive aussi de témoigner d'un niveau de van Hiele inférieur quand il perçoit la tâche comme étant plus difficile. Quand bien même, van Hiele a

défini les conditions les plus favorables au passage d'un élève d'un niveau de pensée en géométrie au niveau immédiatement supérieur, il n'est pas certain que la pratique quotidienne de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au collège laisse une grande place au niveau 2 d'analyse, niveau intermédiaire entre les niveaux 1 d'identification-visualisation et niveau 3 de déduction informelle.

Nous avons alors trois grandes questions :

- Peut-on rattacher la « géométrie » dans laquelle un élève de CM2 ou de 6^{ème} fonctionne à un paradigme particulier ?
- Peut-on caractériser un élève par le ou les niveaux de van Hiele qu'il maîtrise quand il passe ou quand il est en 6^{ème} ?
- Y a-t-il un lien entre la géométrie dans laquelle il se place en termes de paradigmes géométriques et le niveau de van Hiele dont il fait preuve ?

Nous avons donc constitué un corpus de questions (17 « exercices ») organisées de telle manière que les réponses données par les élèves et décrites dans l'analyse a priori puissent être associées à un fonctionnement dans un paradigme géométrique déterminé, et à un niveau de van Hiele particulier.

Pour répondre à ces questions, nous nous sommes adressée à deux groupes de 250 élèves de CM2 et de 6^{ème}. A chaque élève nous avons demandé de faire deux « exercices » sous la forme d'un questionnaire papier-crayon. Nous avons organisé les questionnaires de façon que le premier des deux exercices soit plus facile d'accès que le second et serve en quelque sorte d'exercice d'entraînement.

Nous avons ensuite analysés les réponses données par les élèves sous différents angles en les codant en termes de paradigmes de fonctionnement quand celui-ci était décelable et en leur attribuant autant que possible un niveau de van Hiele.

2. Rappel des questions de recherche

Les questions de recherche que nous avons retenues étaient les suivantes :

2.1. A propos des paradigmes géométriques

2.1.a.) Peut-on au travers d'une activité déterminer le paradigme dans lequel un élève de CM2 ou de 6^{ème} fonctionne ?

2.1.b.) Le paradigme de fonctionnement dépend-il du niveau de scolarité ? Est-ce que tous les élèves de CM2 et de 6ème fonctionnent dans le même paradigme pour une tâche donnée ?

2.1.c.) Le paradigme de fonctionnement dépend-il de la tâche ? Un même élève de CM2 ou de 6^{ème} peut-il changer de paradigme en fonction de la tâche ?

2.1.d.) Les élèves de CM2 ou de 6^{ème} peuvent-ils aussi fonctionner dans des « pseudo-paradigmes » personnels au sens où l'entend F. Jore ?

2.2. A propos des niveaux de van Hiele

2.2.a.) La théorie des niveaux de pensée en géométrie telle que définie par P.M. van Hiele s'applique-t-elle aux élèves à la charnière entre l'école primaire et le collège ? Peut-on identifier le niveau de van Hiele maîtrisé par un élève de CM2 ou de 6ème au travers d'une tâche écrite ?

2.2.b.) Pour une tâche donnée, les élèves de CM2 et de 6ème témoignent-ils tous du même niveau de van Hiele ? En d'autres termes, le niveau de développement selon la théorie de van Hiele est-il lié au niveau de scolarité ?

2.2.c.) Un même élève de CM2 ou de 6ème peut-il maîtriser des niveaux de van Hiele différents selon la tâche qui lui est proposée ?

2.3. A propos du cadre théorique

2.3.a.) Peut-on associer paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele ? Y a-t-il un lien de corrélation entre les deux géométries G1 et G2 et les niveaux de van Hiele ?

2.3.b.) Le niveau d'analyse de van Hiele peut-il être considéré comme la zone de « tuilage » entre les géométries spatio-graphique (G1) et proto-axiomatique (G2) ? Quelles sont les caractéristiques de ce « tuilage » ?

2.3.c.) Peut-on caractériser les activités qui favorisent le passage de G1 à G2 et qui respecteraient la hiérarchie proposée par la théorie des niveaux de van Hiele ?

3. A propos des paradigmes géométriques :

3.1. Peut-on au travers d'une activité déterminer le paradigme dans lequel un élève de CM2 ou de 6ème fonctionne ?

Effectivement la théorie des paradigmes géométriques fonctionne à ce niveau de scolarité. Dans la plupart des cas, nous avons pu identifier le paradigme dans lequel un élève avait fonctionné pour mener à bien les deux tâches qui lui avaient été prescrites. Dans une très grande majorité les élèves de CM2 fonctionnent en G1 mais à l'occasion de certaines activités ils peuvent aussi aborder un fonctionnement en G2, en particulier lorsque celui-ci se fait dans un contexte où l'élève n'a pas à verbaliser sa réponse. Quand le paradigme est difficile à identifier, c'est souvent parce que l'élève ne maîtrise pas complètement G1 et se retrouve en difficulté, d'où des réponses qui paraissent erratiques.

3.2. Ce paradigme dépend-il de l'activité ou du niveau de scolarité ?

On peut dire que le paradigme dans lequel fonctionne un élève dépend à la fois de son niveau de scolarité et de la tâche qui lui est prescrite.

Les élèves de 6^{ème} sont proportionnellement plus nombreux à fonctionner en G2 que les élèves de CM2. Dans les activités proposées plus de la moitié des élèves de CM2 fonctionnent en G1 mais à l'occasion de certaines activités ils peuvent aussi aborder un fonctionnement en G2, en particulier lorsque celui-ci se fait dans un contexte où l'élève n'a pas à verbaliser sa réponse (déjà dit plus haut). C'est un quart des élèves de 6^{ème} qui a fonctionné en G1 sur l'ensemble des deux activités. On peut aussi dire que ce sont les trois quarts qui à un moment ou un autre ont fonctionné en G2. Mais, c'est seulement un élève de CM2 sur 15 dont nous pouvons dire qu'il a fonctionné en G2 sur l'ensemble des activités. Preuve s'il en est que les activités menées en classe de mathématiques en 6^{ème} se situent dans G2, implicitement ou explicitement. D'une manière générale, nous avons remarqué, comme les études précédentes l'ont montré à propos des PE1 par exemple, que, lorsque la tâche est difficile pour l'élève, celui-ci a tendance à fonctionner en G1 même si le contrat didactique suppose un fonctionnement en G2. En effet les élèves qui sont passés de G2 à G1 entre le recto et le verso sont trois fois plus nombreux que ceux qui ont eu l'attitude inverse (passage de G1 à G2) et qui était l'attitude attendue dans la plupart des cas.

Si on peut considérer que tous les élèves auxquels nous nous sommes adressés fonctionnent en G1, en revanche les élèves de CM2 sont nettement moins nombreux à utiliser G2 que les élèves de 6^{ème}. Nous avons déjà dit que les programmes de Primaire ne se situaient pas dans G2 et il n'est donc pas surprenant que les élèves ne sachent pas fonctionner dans un tel paradigme. Toutefois nous avons constaté que certaines activités permettaient l'émergence de ce nouveau paradigme. Il s'agit d'après notre recherche, d'activités dans lesquelles l'élève doit analyser une situation géométrique au sens de :

- décoder un schéma,
- respecter simultanément plusieurs contraintes de construction dans la construction d'une figure ou dans l'identification d'une figure particulière,
- considérer l'inclusion des figures particulières dans les figures générales ,
- voire organiser localement un raisonnement et apporter en les justifiant des informations nouvelles.

On pourrait encore caractériser ces activités en disant qu'il s'agit d'activités dans lesquelles G2 est susceptible d'être utilisé en tant que technologie de G1 : on se sert de propriétés données (codage ou texte) et non extraites du dessin pour résoudre la tâche. Le recours à G2 est dans doute facilité lorsque le dessin ne permet pas une réponse « fiable » dans G1, l'élève « pêchant » les informations nécessaires là où il peut.

D'une manière générale, les outils de G2 que les élèves de CM2 ont pu mettre en œuvre se situaient au niveau du dessin et non pas du texte ou du discours.

En considérant que l'introduction à G2 relève des objectifs du Collège, nous avons, à l'issue de notre enquête, quelques suggestions qui s'appuient sur l'idée de l'apprentissage de la géométrie par zone de développement proximal. L'introduction de la verbalisation du raisonnement peut se faire après que les autres aspects du paradigme ont été inventoriés : schémas à main levée, décodage des figures, analyse des propriétés des sous-figures, perception séquentielle de la figure.

3.3. Les élèves de CM2 ou de 6ème fonctionnent-ils dans un paradigme particulier tel que G1 ou G2 ?

D'après cette recherche, environ 10% élèves ont fonctionné dans un paradigme que nous avons désigné par GX. Or il semble bien que dans ce cas, nous ne puissions comparer le mode de fonctionnement des élèves à celui d'un fonctionnement dans un pseudo-paradigme au sens de Jore (2006). En effet nous avons constaté qu'il ne s'agissait pas d'un paradigme « intermédiaire » entre une géométrie spatio-graphique et proto-axiomatique, mais davantage un paradigme de type G1 incomplet. Les élèves pour lesquels nous avons utilisé le code GX étaient le plus souvent des élèves qui avaient des difficultés à respecter de manière cohérente une seule contrainte alors que l'énoncé de la consigne en imposait plusieurs, des élèves qui confondaient le sens des mots « isocèle » et « équilatéral », pour qui l'expression « au moins deux côtés de même longueur » signifie « exactement deux côtés de même longueur », etc. Ces exemples sont autant de situations que l'on peut interpréter comme un apprentissage incomplet des composantes de G1.

4. A propos des niveaux de van Hiele :

4.1. La théorie des niveaux de pensée en géométrie telle que définie par P.M. van Hiele s'applique-t-elle aux élèves à la charnière entre l'école primaire et le collège ? La théorie des niveaux de van Hiele est-elle fonctionnelle pour des élèves de CM2 et de 6ème ?

Dans la plupart des cas nous avons pu identifier le niveau de van Hiele atteint par un élève au travers d'une tâche écrite. Toutefois, dans un certain nombre de cas nous n'avons pas été en mesure d'attribuer un quelconque niveau. On peut supposer qu'il s'agit là d'élèves dont les connaissances et les compétences en géométrie sont ou très limitées ou confuses par rapport à la tâche à accomplir, en particulier dans la définition des figures de base (confusion des définitions de triangles isocèle et rectangle par exemple). Une telle situation a été rencontrée au cours d'études précédentes sur des sujets plus âgés.

4.2. Pour une tâche donnée, les élèves de CM2 et de 6^{ème} témoignent-ils tous du même niveau de van Hiele ? Le niveau de développement selon la théorie de van Hiele est-il lié au niveau de scolarité ?

Ainsi que l'on déjà montré d'autres études réalisées avec des sujets plus âgés, le niveau de van Hiele attribué à un élève dépend à la fois de la tâche et du niveau de scolarité.

Globalement les élèves de 6^{ème} ont atteint des niveaux de van Hiele supérieurs aux élèves de CM2.

Tous les élèves de CM2 maîtrisent au moins le niveau N1 d'identification-visualisation. Un quart d'entre eux maîtrise à certains moments le niveau d'analyse (N2) et près d'un tiers ont pu donner des réponses qui relèvent du niveau N3 de déduction informelle. Rares sont ceux qui ont témoigné de ce dernier niveau sur l'ensemble des deux activités. Mais nous pouvons suggérer que ce niveau peut être abordé par certains élèves sous l'angle de l'analyse de schémas codés dans lesquels les propriétés des sous-figures doivent être inventoriées, c'est-à-dire dans le cadre d'une géométrie proto-axiomatique. Toutefois, dans le respect des programmes, ce type d'activités ne saurait être mené systématiquement en Primaire. Nous pouvons simplement suggérer qu'il s'agit là d'exemples d'activités qui, en 6^{ème}, permettraient sans doute à l'élève de progresser par zones de développement proximal.

Si tous les élèves de 6^{ème} maîtrisent le niveau d'identification-visualisation (N1) et il reste encore un élève sur 8 qui ne témoigne que de ce seul niveau. 30% sont au niveau d'analyse au moins sur l'une des activités. Nous avons attribué le niveau N3 d'analyse à plus de la moitié des élèves de 6^{ème} à l'issue d'une activité au moins, et à un élève sur 6 sur l'ensemble des deux activités. Comme pour leurs camarades de CM2, ce sont les activités dans lesquelles la production d'aucun texte n'était requise qui ont permis l'expression de ce niveau supérieur de van Hiele.

4.3. Un même élève de CM2 ou de 6ème peut-il maîtriser des niveaux de van Hiele différents selon la tâche qui lui est proposée ?

Comme certaines recherches l'ont déjà montré, un même élève peut témoigner de deux niveaux de van Hiele différents selon les activités qui lui sont proposées. Ce phénomène apparaît d'autant plus clairement que l'on interroge l'élève sur des sujets différents de la géométrie comme les triangles ou les quadrilatères et quand on lui donne différentes consignes comme la rédaction d'une justification ou la reconnaissance de l'inclusion des figures particulières dans les figures générales. De plus quand la tâche devient plus difficile pour l'élève, il n'est pas rare qu'il ait recours à un niveau de van Hiele immédiatement inférieur à celui dont il a fait preuve quand il était plus à l'aise.

Le niveau d'analyse N2 est le niveau intermédiaire entre celui de l'identification-visualisation (N1) et celui de la déduction informelle (N3). Nous avons constaté que certaines activités ne permettent pas de faire apparaître un tel niveau de développement chez un élève. Il s'agit notamment des exercices 2.6. et 2.7. où aucun élève qu'il soit de CM2 ou de 6^{ème} n'a donné une réponse que nous puissions considérer comme caractéristique de ce niveau. Dans ces activités, l'élève devait se prononcer sur la nature du triangle en répondant à deux questions :

- a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non Pourquoi ?
- b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non Pourquoi ?

Un élève au niveau d'analyse a une conception exclusive des figures particulières et ne peut considérer qu'un triangle équilatéral soit un triangle isocèle particulier. De plus s'il sait décrire la figure déterminée par un codage, il ne peut encore établir de relation d'incidence entre les différents éléments géométriques de la situation qui lui est proposée. Or une des difficultés dans les exercices 2.6. et 2.7. réside dans le fait que le schéma proposé est un schéma à main levée et les distances entre les points sont égales, suggérant ainsi que le triangle ABD est un triangle équilatéral. Il est bien évident que pour les élèves qui n'ont pas l'habitude de considérer que le schéma est une représentation d'une situation idéale et qui ne gèrent pas les figures particulières comme étant incluses les unes dans les autres, une telle illustration est source de confusion. Les élèves qui ne maîtrisent que le niveau d'analyse ne peuvent pas s'appuyer sur le schéma : il n'est pas codé et de surcroît la suggestion du triangle

équilatéral est très forte. Le repli vers le niveau inférieur d'identification-visualisation est donc une modalité de réponse.

Nous avons constaté que le niveau N3 de déduction informelle était plus facilement mis en évidence quand l'élève ne doit pas rédiger un texte, mais qu'il doit témoigner d'autres facettes de ce niveau de van Hiele comme une conception inclusive des définitions des figures particulières, l'identification de sous-figures dans une figure plus générale et l'établissement d'incidence entre les points ou différents éléments de la figure. Cela nous amène à conclure que la rédaction d'un texte en termes hypothético-déductifs est une composante du niveau de van Hiele sur laquelle l'enseignant doit être particulièrement prudent.

5. A propos du cadre théorique

Il a l'air de fonctionner : il y a des élèves dans toutes les cases tel qu'annoncé. C'est bien le niveau d'analyse qui apparaît comme le niveau charnière entre les deux paradigmes.

5.1. Peut-on associer les paradigmes géométriques et les niveaux de van Hiele ? Y a-t-il un lien de dépendance entre les deux géométries G1 et G2 et les niveaux de van Hiele ?

Comme nous l'avions annoncé, les niveaux N1 d'identification-visualisation et N3 de déduction informelle de van Hiele peuvent être associés respectivement aux paradigmes G1 et G2.

L'identification-visualisation se fait dans un univers où la perception est déterminante, la précision de la mesure est très importante. A l'opposé, la déduction informelle se place dans un paradigme proto-axiomatique où le dessin n'est plus le représentant d'un objet singulier mais celui d'une figure idéale et où les propriétés s'organisent les unes par rapport aux autres de manière hypothético-déductive. Par contre, le niveau d'analyse est, selon les activités, associé au paradigme G1 ou au paradigme G2.

En généralisant, on peut dire que, pour une tâche donnée, l'élève se place dans un paradigme et n'en utilise que certaines composantes. De la même manière, il ne témoigne que de certaines caractéristiques de chaque niveau de van Hiele. Par exemple, dans les réponses à l'exercice 2.2., nous avons considéré que l'élève S176 qui avait écrit : « Ce n'est pas juste car [AC] fait partie d'un triangle équilatéral donc il devrait mesurer 3 cm et ne pas dépasser du cercle ; il devrait être dessus » était au niveau de déduction informelle parce qu'il justifiait avec ses mots l'appartenance du point A au cercle. On voit que, dans ce texte d'un élève de 6^{ème}, l'organisation déductive n'est pas encore explicite. Pour autant ce n'est plus une simple description de la situation et surtout, l'élève évoque la mesure réelle du segment [AC] alors que le dessin qui lui est proposé est réduit mais la mise en relation entre les différents éléments de la figure n'est pas encore organisée de manière hypothético-déductive. C'est ainsi que le niveau d'analyse, selon les tâches et les élèves, peut être identifié dans le contexte d'une géométrie spatio-graphique ou d'une géométrie proto-axiomatique.

5.2. Le niveau d'analyse de van Hiele peut-il être considéré comme la zone de « tuilage » entre les géométries spatio-graphique (G1) et proto-axiomatique (G2) ? Quelles sont les caractéristiques de ce « tuilage » ?

C'est donc le niveau d'analyse de van Hiele qui peut assurer le « tuilage » dont parle Parzysz, entre les paradigmes G1 et G2.

Les diverses activités que nous avons proposées aux élèves et leurs réponses nous permettent de dégager certaines caractéristiques du niveau d'analyse qui témoignent d'un fonctionnement en G1 ou en G2.

A ce niveau de van Hiele, l'élève connaît la liste des propriétés d'une figure mais ne les organise pas encore les unes par rapport aux autres en termes hypothético-déductifs et a une conception exclusive des figures particulières. Il peut avoir cette attitude face à des dessins tracés à la règle et représentant les figures en vraie grandeur, où le paradigme de fonctionnement est G1. Ce fut le cas dans l'exercice 1.1. où l'élève devait retrouver les triangles isocèles, sans codage aucun et parmi lesquels se trouvaient des triangles isocèles rectangles et surtout des triangles équilatéraux. Face à une telle tâche, on sait qu'un élève n'a

pas atteint le niveau N3 de déduction informelle quand il ne conçoit pas l'inclusion des figures particulières dans les figures générales. Nous l'avons aussi rencontré dans l'exercice 2.3. où la reproduction proposée était une réduction d'une figure fautive puisque le carré « déborde » du cercle. Les réponses données par les élèves nous ont permis de connaître le paradigme dans lequel ils se sont placés. Ceux qui ont évoqué les mesures prises sur la reproduction pour s'assurer que le quadrilatère n'était pas un carré ont fonctionné dans une géométrie spatio-graphique (G1). Ceux qui ont affirmé que le quadrilatère ne pouvait pas être un carré parce que les côtés n'avaient pas la même longueur ou parce que le carré « débordait » du cercle sans avoir eu recours à la mesure, ont eu une démarche caractéristique d'une géométrie proto-axiomatique (G2).

Nous avons pu aussi associer le niveau d'analyse à G2 dans le cas des figures faites à main levée et codées.

Les élèves qui ne peuvent fonctionner dans ce cadre et ne maîtrisent que G1 en sont réduits à mesurer les distances entre les points, à se déterminer à l'œil mais ne font pas usage du codage. C'est ainsi que les exercices 2.1. à 2.3. nous ont permis de distinguer les élèves qui, tout en étant au niveau d'analyse de van Hiele avaient fonctionné dans G1 ou dans G2. En effet dans ces exercices, le schéma non codé a été dessiné à main levée et la reproduction de la figure a été réduite. L'élève doit alors se déterminer en utilisant les connaissances qu'il a des propriétés des figures et le recours à la mesure est a priori inefficace. Or les élèves fonctionnant en G1 ont mesuré les distances entre les points pour se prononcer et ont comparé la figure réduite avec le schéma en se prononçant sur les dimensions de la figure. L'élève qui fonctionne en G2 a compris que la mesure sur un schéma était inappropriée mais il ne peut concevoir encore que les propriétés s'ordonnent les unes par rapport aux autres. C'est ainsi qu'un élève fonctionnant en G2 et au niveau d'analyse saura dire, par comparaison avec le schéma que la figure est fautive sans pour autant pouvoir en expliciter la raison à l'exemple de l'élève S35 dans l'exercice 2.3. : « Non elle n'était pas juste car les dimensions ont été diminuées et le point D est en dehors du cercle et que sur le brouillon il est sur les traces du cercle. » Il est bien évident que la maîtrise de G2 d'un tel élève est incomplète mais sa gestion de la situation témoigne de certaines facettes de ce paradigme géométrique.

On peut alors conjecturer que la tâche qui est proposée et le contrat didactique associé peuvent amener l'élève à un nouveau niveau de développement à l'intérieur du niveau d'analyse l'amenant alors à fonctionner successivement dans une géométrie spatio-graphique (G1) puis dans une géométrie proto-axiomatique (G2).

On pourrait alors résumer les conclusions de cette recherche en disant qu'au CM2, les élèves travaillent en G1 avant tout au niveau d'identification-visualisation de van Hiele et de temps à autre au niveau d'analyse alors qu'en 6^{ème}, ils doivent aborder le même niveau de van Hiele en G2 soit dans une géométrie proto-axiomatique avant d'atteindre le niveau 3 de déduction informelle. On pourrait encore dire que les enseignants de Primaire ont la responsabilité entière de l'acquisition complète du niveau N1 d'identification-visualisation de van Hiele dans la plupart des domaines de la géométrie, le fonctionnement étant toujours en G1. On peut aussi imaginer qu'à l'occasion, certaines activités amènent les élèves au niveau d'analyse de van Hiele, de préférence toujours dans le contexte d'une géométrie spatio-graphique. Ensuite, il revient aux professeurs de Collège d'organiser l'évolution des élèves dans les niveaux plus avancés de van Hiele et l'approche de la géométrie proto-axiomatique (G2) par zones de développement proximal. La transition d'un niveau vers le niveau suivant et d'un paradigme dans l'autre peut se faire en s'appuyant sur certains éléments du niveau de van Hiele en question et certaines facettes des paradigmes géométriques comme le décodage de figures à main levée, le respect simultané de plusieurs contraintes (ce qui est l'apanage des problèmes de construction, dans lesquels on doit, en outre, souvent déterminer quelles sont les contraintes), la rédaction de textes décrivant la démarche de l'élève.

6. Limites de la recherche

Cette recherche était un premier test relatif à la pertinence de notre modèle théorique et a donc été menée sur une échelle réduite. Non seulement la taille de l'échantillon est relativement limitée mais la variété des tâches est elle aussi réduite. De plus nous nous sommes limités à une enquête papier-crayon afin de récupérer les premières données statistiques dans le cadre d'une étude quantitative, mais une étude plus approfondie plus qualitative permettrait sans doute de mieux décrire les divers modes de fonctionnement des élèves tant du point de vue de l'identification des paradigmes géométriques que des niveaux de van Hiele. En particulier nous avons constaté que certaines activités semblaient plus favorables que d'autres à l'expression d'un niveau de van Hiele particulier dans un paradigme donné. Il aurait été intéressant d'entendre les élèves commenter leurs réponses à propos des exercices que nous

avons désignés par « Victor » où tous les niveaux de van Hiele ont été exprimés dans tous les paradigmes géométriques.

7. Implications dans la recherche

Les limites de cette recherche étant établies, les propositions de recherche ultérieures en découlent directement. Celles-ci peuvent s'orienter dans deux directions principales :

- faire une étude plus qualitative liée au modèle théorique que nous avons élaboré ;
- tester de nouvelles activités confirmant la pertinence du modèle théorique et en particulier le « tuilage » de G1 vers G2 par le niveau d'analyse N2.

7.1. Une étude qualitative liée au modèle

Les « exercices » qui nous ont d'ores et déjà donné le plus d'informations sur le lien entre les niveaux de van Hiele et les paradigmes géométriques pourraient faire l'objet d'enregistrements audio-visuels d'un ou plusieurs élèves. L'intérêt de l'enregistrement de deux ou trois élèves engagés dans une activité comme l'exercice 2.2 où la figure réduite est celle d'une figure fautive devrait permettre de préciser notre connaissance du fonctionnement en G1 ou en G2 chez les élèves de CM2 ou de 6^{ème} selon les différents niveaux de van Hiele qu'ils ont atteints. Pour des raisons clairement identifiées par P.M. van Hiele lui-même, il serait préférable, pour que l'échange ait du sens, que les élèves retenus maîtrisent le même niveau de van Hiele ou des niveaux très voisins. La démarche consisterait alors à proposer la version papier de l'exercice pour ensuite enregistrer l'échange entre les élèves auxquels on a attribué deux codages voisins : différents niveaux de van Hiele mais même paradigme ou paradigmes différents mais même niveau de van Hiele en l'occurrence le niveau d'analyse.

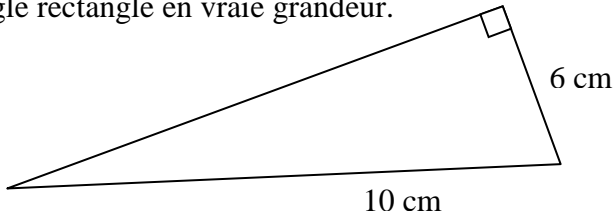
7.2. Tester de nouvelles activités

Au vu des résultats, il est apparu que certaines activités ne favorisaient pas l'expression de tous les profils possibles au niveau de scolarité où nous nous trouvons. Celles-ci

correspondent à des situations où la case G2-N2 des tableaux de résultats est vide ou encore où la case centrale du tableau des « notes » attribuées aux élèves est vide. Ce sont vraisemblablement autant d'activités qui ne mettent pas les élèves en situation d'apprentissage par zone de développement proximal. Nous devons donc proposer des tâches qui respectent a priori ces principes. Ainsi en CM2 on pourrait demander :

G1-N2 : l'élève doit analyser la situation avant d'agir ou donner toutes les informations qu'il possède sur la situation géométrique qui lui est proposée.

Construire le triangle rectangle en vraie grandeur.



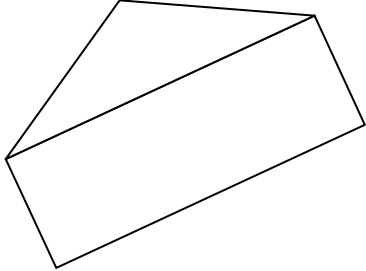
10 cm

6 cm

Construire un rectangle de 6 cm de long et dont la diagonale mesure 10 cm.
Combien mesure la largeur ?

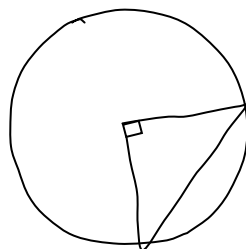
G1-N2

Construire la figure suivante en vraie grandeur où le quadrilatère est un rectangle de 6 cm de long et 4 cm de large et le triangle un triangle isocèle dont les deux côtés de même longueur mesurent 5 cm.



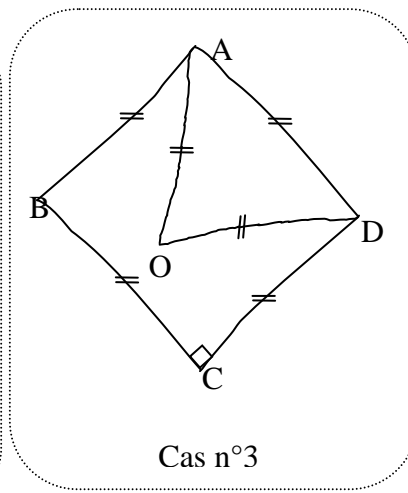
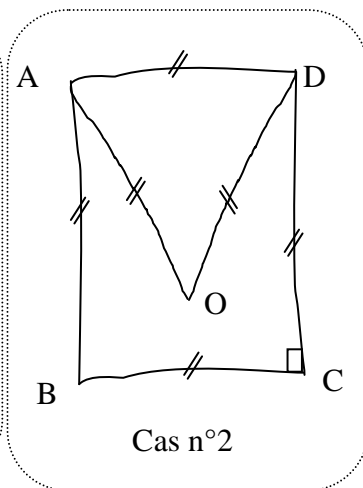
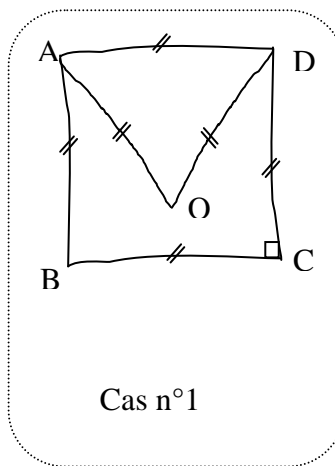
G2-N2

Dans le schéma suivant le triangle est un triangle isocèle- rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4 cm. Le cercle est un cercle de rayon 4 cm et son centre est au sommet de l'angle droit. Construire la figure en vraie grandeur. Est - on certain que les deux autres sommets du triangle sont sur le cercle ?

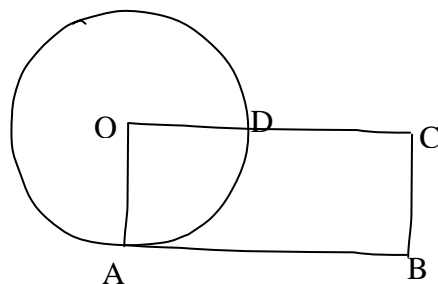


Dans chacun des cas suivants, la figure a été faite à main levée et codée et chaque trait représente un segment.

Y a-t-il un triangle isocèle ? un triangle équilatéral ? un triangle rectangle ?
Y a-t-il un carré ? un rectangle ? un losange ?



La situation suivante, désormais « classique », dans laquelle O est le centre du cercle et OABC est un rectangle peut être exploitée de différentes manières.



G1-N1

Un dessin étant fait à la règle et à l'équerre à une autre échelle, construire la figure où le cercle a un rayon de 3cm et le rectangle 8 cm de long. Combien mesure [CD] ?

G1-N2

Le dessin étant un schéma sur lequel les mesures sont données, est accompagné d'un texte précisant que le centre du cercle est aussi un sommet du rectangle. Demander la construction du rectangle et poser la même question : Combien mesure [CD] ?

G2-N2

A partir du schéma sur lequel les distances AB et BC sont données, demander la construction en vraie grandeur puis la longueur du rayon du cercle.

G2-N2

A partir du schéma sur lequel les distances OA et DC sont données, le texte précisant que O est à la fois le centre du cercle et un sommet du rectangle, demander

- la distance OD,
- la mesure de la longueur du rectangle
- la construction de la figure en vraie grandeur.

G2-N3

A partir du schéma sur lequel les distances BC et CD sont données, demander le rayon du cercle et demander l'explication de la réponse.

G2-N3

A partir du schéma sur lequel les distances OA et AB sont données, demander la distance CD. Eventuellement demander l'explication de la réponse à partir de la question : « Comment as-tu fait ? ».

BIBLIOGRAPHIE

- ARSAC, G. et al. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*, IREM, Presses Universitaires de Lyon.
- ARSAC, G. (1997-1998) « Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie », in *Petit x*, vol 47 pp: 5-31.
- ARSAC, G. & MANTE, M. (1997) : « Situations d'initiation au raisonnement déductif », *Educational Studies in Mathematics*, vol.33, pp. 21-43
- ARDM et IREM de Paris7.(2002) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon 1
- ARTIGUE M., ROBINET. J. (1982) : « Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. » *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.3, n° 1 ; pp.5-65.
- BALACHEFF, N. (1982) : « Preuve et démonstration en Mathématiques au collège » *Recherche en Didactique des Mathématiques* ; vol. 3 ; n° 3 ; pp.261-304.
- BALACHEFF, N. (1987) : « Processus de preuve et situations de validation. » *Educational Studies in Mathematics*, vol 18: pp.147-176.
- BARBIN, E. (2001) : « Qu'est-ce que faire de la géométrie ? », *Repères – IREM* n°43 ; pp. 59-83.
- BARTOLINI BUSSI, M. G. (2000): “Early approach to mathematical ideas related to proof making” ; in *Proof and Proving in Mathematics Education*, ICME9. TSG 12.
- BERTHELOT, R. & SALIN, .M. H. (2000-2001): « L'enseignement de la géométrie au début du collège. », in *Petit x*, vol 56 pp: 5-34.
- BERTHELOT, R & SALIN, M.H. (2000): « L'enseignement de l'espace à l'école primaire. », in *Grand N*, vol 65 pp: 37-59.
- BOERO, P. & GARUTI, R; MARIOTTI, M. A. (1996) : “Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures”; *Actes de PME20*; vol. 2; pp. 121-128.
- BOERO, P. & GARUTI, R; LEMUT, E. ; MARIOTTI, M. A. (1996) : “Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems”; *Actes de PME20*; vol. 2; pp. 113-120.
- BOERO, P. & GARUTI, R. ; LEMUT, E. (1999) : “About the generation of conditionality of statements and its links with proving” in *Actes du colloque PME 23*, vol. 2, pp. 137-144
- BOERO, P (2000) : « Entrer dans la culture des théorèmes à 12-14 ans : un défi pour la didactique des mathématiques » in *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*, équipe DIDIREM PARIS 7
- BOERO, P. (2001) « Quelques idées après ICME 9 » in *La Lettre de la Preuve* <http://www-didactique.imag.fr/preuve>

- BURGER, W. F. ; SHAUGHNESSY, J. M. (1986): “Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry” ; *Journal for research in Mathematics Education*; vol. 17; n° 1; pp. 31-48.
- CAMARA, M. (2000) : « Un dispositif de recherche/formation sur les grandeurs dans le cadre de la coopération franco-brésilienne PRO-MATEMATICA » ; *Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques*, Université de Rennes1 ; pp. 1-12.
- CANNIZZARO, L & MENGHINI, M. (2006) : “From Geometrical Figures to Definitional Rigour : Teachers’ Analysis of Teaching Units Mediated through van Hiele’s Theory” ; *Revue Canadienne de l’Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*; vol. 6 ; n°4 ; pp. 369-386.
- CLEMENTS, D.H. & BATTISTA, M.T. (1992): “Geometry and Spatial Reasoning” ; *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Mac Millan Eds, N. Y. U.S.A.; pp.420-464
- COLOMB, J & al. (2006) : *Articulation école/collège en mathématiques : Ruptures et continuités*, Editeur INRP.
- Da PURIFICACAO, I (2000) : « Cabri-géomètre et théorie de van Hiele : possibilités et progrès dans la construction du concept de quadrilatère » ; *Actes de EM 2000* ; Grenoble ; pp. 1-8.
- DEKKER, R. (1987) : « Roos and José, Two Children in a Mixed Ability Group », *Educational Studies in Mathematics*, vol.18; pp. 317-324
- De VILLIERS, M. (1994) : « The Role and function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals » ; *For the Learning of Mathematics*; vol. 14; pp.11-18.
- DOUEK, N (2002) : « Context complexity and argumentation » in *Actes du colloque PME 26*, vol. 2, pp. 297-304
- DREYFUS, T. (1999) : “Why Johnny can’t prove” *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, pp. 85-109.
- DREYFUS, T. (2007) : “Unjustified assumptions based on diagrams in geometry” Technical Report
- DUVAL, R. (1991): « Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration » *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, pp. 233-261.
- DUVAL, R. (1994) : « Les différents fonctionnements d’une figure dans un démarche géométrique. » *REPERES – IREM*, n°17, pp; 121-138.
- DUVAL, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine*. E. P. Lang.
- DUVAL, R. (1996) : « Quel cognitif retenir en Didactique des Mathématiques ? » *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 16 ; n° 3 ; pp.349-382.

- DUVAL, R. (2000): « Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques », *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 20 ; n° 2 ; pp. 135-170.
- DVORA, T. ; DREYFUS, T. : “Unjustified assumptions based on diagrams in geometry” *Proceedings of PME28*; vol.2; pp. 311-318.
- FISCHBEIN, E. (1999): « Intuitions and schemata in mathematical reasoning. » *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, pp. 11-50.
- FISCHBEIN, E. (1993): “The theory of figural concepts.” *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, pp. 139-162.
- GARUTI, R. & BOERO, P; LEMUT, E. (1998): « Cognitive unity of theorems and difficulty of proof » in *Actes du colloque PME 22*, vol. 2, pp. 345-352
- GARUTI, R & BOERO, P (2002): « Interiorisation of Forms of argumentation : a case study » in *Actes du colloque PME 26*, vol. 2, pp. 408-415.
- GUTIERREZ, A (1992): « Exploration des liens entre les niveaux de van Hiele et la géométrie tridimensionnelle » ; in *Structural Topology*, 18 ; pp. 31-48.
- GUTIERREZ, A; JAIME, A, FORTUNY, J.M. (1991): “An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels”; *Journal for Research in Mathematics Education*; vol. 22; n° 3: pp.237-251.
- GUTIERREZ, A; JAIME, A; SHAUGHNESSY, J. M.; BURGER, W. F. (1991): “A Comparative Analysis of two ways of Assessing the van Hiele Levels of Thinking”; *Acte du colloque PME 15*; vol. 2; pp. 109-116.
- GONSETH, F. (1945) : *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne, Editions du Griffon
- HANNA, G. (1989) : “Proofs that Prove and Proofs that Explain”; *Actes PME XX*; vol. 2; pp. 45-51.
- HANNA, G. ; NIELS JAHNKE, H. (1993): “Proof and Application” ; *Educational Studies in Mathematics*; vol. 24; n°4; pp. 421-438.
- HARADA, K; GALLOU-DUMIEL, E; NOHDA, N. (2000) : “The Role of Figures in Geometrical Proof-Problem solving (Types of Students’ Apprehensions of Figures in France and Japan)” *Proceedings of ICME9*, TSG 12.
- HEINZE, A; von OSSIETZKY, C. (2002) : “Because a square is not a rectangle: Students’ knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof”; *PME 26*; vol3; pp. 81-88.
- HENRY, M. (1999) : « L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. » *REPERES - IREM* n° 36, pp. 15-34.

- HITT, F. (2004) : « *L'aube de la preuve en mathématique et le principe du tiers exclu.* » Groupement des Didacticiens des Mathématiques du Québec.
- HOOFFER, A (1981) : « Geometry is more than Proof » ; *Mathematics Teacher*; vol. 74; pp. 11-18.
- HOUEMENT, C (2007) : « A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège » ; *Repères IREM* n° 37 ; pp. 69-84
- HOUEMENT, C & KUZNIAK, A. (1996) : « Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. » *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 16 (n° 3): pp. 289 - 322.
- HOUEMENT, C & KUZNIAK, A. (1998-1999) : « Géométrie et paradigmes géométriques. » *Petit x* N°51: pp. 5-21.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999) : « Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. » *Educational Studies in Mathematics* vol. 40, pp. 283 - 312.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2000) : « Formation des maîtres et paradigmes géométriques » ; *Recherche en Didactique des Mathématiques* ; vol. 20, n°1 ; pp.89-116
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2002) : « Des paradigmes géométriques aux petites provocations didactiques » ; *Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques* ; pp.69-76
- HOUEMENT, C & KUZNIAK, A. (2003).: « Elementary geometry split into different geometrical paradigms. » *Proceedings of CERME-3.*
- HOUEMENT, C & KUZNIAK, A. (2006).: « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie » ; *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol.11 ; pp. 175-193
- JOHN-STEINER, V. (1988) : “Spontaneous and Scientific concepts in Mathematics: a Vygotskian Approach”; *PME 19 Proceedings*, vol. 1; pp. 30-44.
- JORE – LEMONNIER, F. (2006) : *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles en environnements papier-crayon et informatique* ; Thèse de Doctorat de Paris 7 Diderot
- JORE, F & PARZYSZ, B. (2008) : « Mise en œuvre des paradigmes géométriques en tant qu'outil d'analyse didactique dans la formation des futurs professeurs des écoles » ; *Actes de la XIVème Ecole d'Été de didactique des Mathématiques*, pp ; 1-19
- KNUTH, E. J. (2002). “Teachers' Conceptions of proof in the Context of Secondary School Mathematics.” *Journal of Mathematics Teacher Education* vol. 5, pp. 61-88.

- KUZNIAK, A. & RAUSCHER. J. C (2004). « Processus de formation de PE1 et anamnèse géométrique. » 30^{ème} colloque *Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres* ; pp. 231-248.
- KUZNIAK, A (2004) : *Paradigmes et espaces de travail géométrique*; HDR ; Ed. IREM Paris 7
- KUZNIAK, A (2005) : « Espace de travail géométrique personnel : une approche didactique et statistique » ; *Actes des Troisièmes rencontres internationales d'Analyse Statistique Implicative* ; Palerme ; pp. 211-227
- KUZNIAK, A. (2006) : « Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France », IREM Université Paris 7- Denis Diderot ; Cahier de DIDIREM Numéro spécial 6.
- MARIOTTI, M. A. (1996) : “Reasoning geometrically through the drawing activity”; in *Actes PME 20*; vol. 3; pp. 329-336.
- MARIOTTI, M A (2001) « La preuve en Mathématiques » in *La Lettre de la preuve* <http://www-didactique.imag.fr/preuve>
- MARIOTTI, M. A. & FISCHBEIN. E. (1997): « Defining in classroom activities. » *Educational Studies in Mathematics* vol. 34, pp. 219-248.
- MASON, M. (1998): “*The van Hiele Levels of Geometric Understanding*”. In *The Professional Handbook for Teachers: Geometry*. Geometry: Explorations and Applications; Boston: McDougal-Littell/Houghton-Mifflin, pp. 4-8
- OLERON P. (1983) : *L'argumentation*, Paris, PUF
- OLERON P. (1983) : *Le raisonnement*, Paris, PUF
- PARZYSZ, B. (1988) : *Un cadre théorique pour la géométrie enseignée*
- PARZYSZ, B. (1988) : « Voir et savoir »; Bulletin de l'APMEP n° 364; pp; 339-350
- PARZYSZ, B. (1988) : “Knowing” vs “Seeing”; *Educational Studies in Mathematics*, vol. 19; pp. 79-92
- PARZYSZ, B. (1991) : “Representations of Space and Students' Conceptions at High School Level”; *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22; pp; 575-593
- PARZYSZ, B. (2003) : « Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1 » ; *Carnet de route de la COPIRELEM*, tome 2 ; pp. 107-125
- PARZYSZ, B. (2005) : « *Espace(s) et géométrie(s) à l'école primaire* » ; Conférence prononcée à l'IUFM de Melun
- PERRIN, M. J.. (2004) : « Eclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les

- connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. »; *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* ; vol. 9 ; pp. 67-82
- PUSEY, E. L. (2003) : « *The van Hiele Levels Model of reasoning in Geometry : A Literature Review* » ; Thesis in Mathematics Education; Raleigh, North Carolina State University.
- REID, D. A. (2002) : “What is Proof ?”; *La lettre de la Preuve*, Eté 2002 ; [http://www-didactique;imag.fr/preuve](http://www-didactique.imag.fr/preuve)
- SALIN, M.H. (2004) : « L'enseignement de la géométrie au cycle 3 » ; *Bulletin de l'APMEP*, n° 454. pp. 729-735
- SALIN, M.H. (2006) : « Du CM2 à la 6^{ème} : quelques pistes pour une transition plus efficace » ; *PLOT* n°13 ; pp. 2-7
- SALIN, M.H. (2006) : « Du CM2 à la 6^{ème} : quelques pistes pour une transition plus efficace (2^{ème} partie) » ; *PLOT* n°14 ; pp. 2-9
- SCHNEUWLY, B. & BRONCKART, J. P. (1992) : *Vygotsky aujourd'hui*; collection Textes de base en psychologie ; Editions Delachaux et Niestlé
- STYLIANIDES, A. J. (2007): “The notion of proof in the context of elementary school mathematics”; *Educational Studies in Mathematics*; vol. 65; pp. 1-20
- TREFFERS, A. (1993): “Wiskobas and Freudenthal, Realistic Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* ; vol. 25; pp. 89-108
- USISKIN, Z. (1982) : *van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*, CDASSG Project, University of Chicago; ED220288
- Van den HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2001): “Realistic Mathematics Education as work in progress”; in *Common Sense in Mathematics Education, Proceedings of the 2001 Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, pp. 1-40.
- Van HIELE, P.M. (1957): « *The problem of insight, in connection with schoolchildren's insight into the subject matter of geometry.* » English summary (by P.M. van Hiele) of « *De Problematiek van het Inzicht Gedemonstreed wan het Inzicht von Schoolkindren in Meetkundeleerstof* », Mémoire de Doctorat , Université d'Utrecht, 1957
- Van HIELE .P.M. & van Hiele-Geldof, D. (1958): “*A Method of Initiation into Geometry*”; in *Report on Methods of Initiation into Geometry*, in H. Freudenthal, *Learning and Understanding in Mathematics, a Tribute to Richard Skemp*; pp. 27-47.
- Van HIELE .P.M. (1959): « La pensée de l'enfant et la géométrie » ; *Bulletin de l'APMEP* ; n° 198 ; pp. 199-205.
- Van HIELE .P.M. (1968): « *Quelques aspects didactiques du développement de la pensée des enfants dans les mathématiques et la physique* » Congrès sur l'intégration des enseignements scientifiques ; Varna ; Bulgarie ; 11-19 septembre 1968.

- Van HIELE .P.M. (1986): *Structure and Insight* ; Academic Press Inc.
- Van HIELE .P.M. (2000): “Similarities and Differences between the Theory of Learning and Teaching of Skemp and the van Hiele Levels of Thinking”; in *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics, a Tribute to Richard Skemp*; pp. 27-47.
- VERGNAUD, G. (1978): *Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre temps*; in Portraits d'éducateurs, Hachette Education
- VYGOTSKI, L. (1978) : *Mind in Society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA, Harvard University Press.
- WIRSZUP, I. (1976): “Breakthroughs in the Psychology of Learning and teaching Geometry” in *Space and Geometry, Papers from a Research Workshop*”; Martin, J. Larry, Ed., Bradbard, David A., Ed. ; ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education; Ohio State University (ED 132033)

Annexes

Annexe 1

Extraits de manuels

1. Manuels de CM2

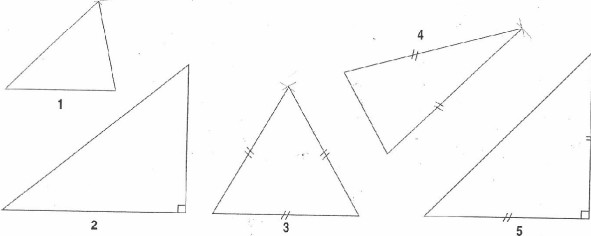
1.1. Bordas CM2 collection Thévenet 1996



60. Les triangles

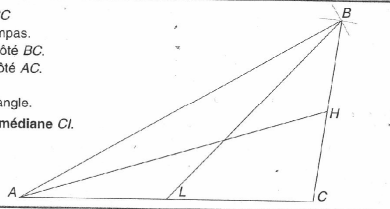
JE DÉCOUVRE

1. Observe les constructions des triangles ci-dessous.

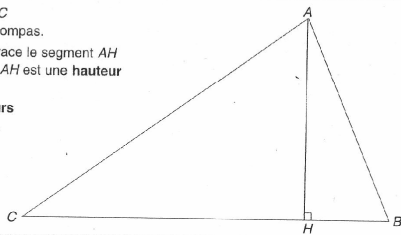


- a) Indique, pour chaque triangle, s'il s'agit d'un triangle isocèle, équilatéral, rectangle.
 b) En utilisant les instruments (règle, compas, équerre), reproduis ces triangles en multipliant la longueur des côtés par 2.

2. a) Reproduis le triangle ABC en utilisant une règle et un compas. Place le point H au milieu du côté BC . Place le point L au milieu du côté AC . Trace les segments AH et BL . Ce sont deux médianes du triangle.
 b) De la même façon, trace la médiane CI . Que remarques-tu?



3. Reproduis le triangle ABC en utilisant une règle et un compas.
 a) En utilisant ton équerre, trace le segment AH perpendiculaire au côté BC . AH est une hauteur du triangle.
 b) Trace les 2 autres hauteurs à partir des sommets B et C . Que remarques-tu?



134

pour avec les nombres

Regrouper les écritures qui représentent le même nombre :
 $5,4$ $5 + \frac{4}{100}$ $\frac{54}{100}$ $5,04$ $5 + \frac{4}{10}$ $\frac{504}{100}$ $5 + 0,4$.

JE M'ENTRAÎNE

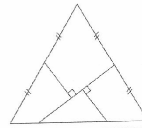
1. Trace un segment AB de 8 cm de longueur.

a) Essaie de construire le triangle ABC dans chacun des cas suivants :

$AC = 9$ cm $AC = 8$ cm $AC = 4$ cm $AC = 3$ cm
 $BC = 4$ cm $BC = 3$ cm $BC = 4$ cm $BC = 2,5$ cm

b) Comment faut-il choisir les longueurs des côtés AC et BC pour que la construction du triangle ABC soit possible?

2. Reproduis la figure ci-dessous sur une feuille. Découpe-la et assemble les quatre parties de façon à obtenir un carré.



3. Trace un cercle de centre O et de diamètre $AB = 6$ cm.

a) Place un point C sur ce cercle et trace le triangle ABC .

Que peux-tu dire de ce triangle?

b) Place un point D sur le cercle tel que :

$AD = BD$.

Que remarques-tu?

c) Trace le diamètre DE .

Que remarques-tu?

4. Sur une feuille de papier non quadrillé, construis deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 7 cm. Découpe ces deux triangles.

a) Assemble-les de façon à obtenir un triangle isocèle.

Mesure la longueur des côtés du triangle obtenu.

b) Assemble ces deux triangles de façon à obtenir un rectangle.

c) Assemble ces deux triangles de façon à obtenir un parallélogramme.

5. Trace un triangle équilatéral ABC dont chaque côté mesure 6 cm.

a) Trace les hauteurs AM , BN et CP .

Que constates-tu?

b) Mesure les segments MB et MC .

Que peux-tu dire du point M ?

De la même façon, mesure les segments AN et CP .

Que peux-tu dire des points N et P ?

c) Que peux-tu dire des hauteurs du triangle équilatéral ABC ?

6. a) Trace un segment BC de 10 cm de longueur.

Place un point M au milieu de BC .

Trace la perpendiculaire en M au segment BC .

Que remarques-tu?

b) Choisis un point A sur cette perpendiculaire et trace le triangle ABC .

Que remarques-tu?

Que peux-tu dire de ce triangle?

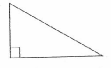
JE RETIENS



triangle équilatéral :
 les 3 côtés ont la même longueur



triangle isocèle :
 2 côtés ont la même longueur



triangle rectangle :
 un angle droit.

135

1.2. Hatier CM2 CAP Maths (2004)

Unité 8 Séance 5 **Triangles**

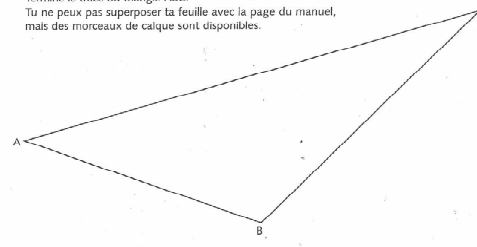
Revoir Multiplier et diviser par 10, 100 et 1 000

1) Calcule ces produits.
 12×100 20×100
 450×10 $32 \times 1\,000$
 80×10 $50 \times 1\,000$
 235×100 100×100

2) Trouve le quotient et le reste.
 10 divisé par 10 $5\,000$ divisé par 100
 452 divisé par 10 $3\,250$ divisé par 100
 38 divisé par $1\,000$ $12\,600$ divisé par $1\,000$
 $804\,523$ divisé par 10 $804\,523$ divisé par 100

Chercher Trois côtés... un triangle

1) Sur ta feuille, trace un segment AB de même longueur que le côté AB du triangle ABC.
 Termine le tracé du triangle ABC.
 Tu ne peux pas superposer ta feuille avec la page du manuel, mais des morceaux de calque sont disponibles.



2) Sur ta seconde feuille, après avoir tracé un segment AB de même longueur que le côté AB du triangle ABC, termine le tracé du triangle ABC.
 Cette fois, tu ne disposes plus de papier calque.
 Tu dois placer correctement et avec précision le point C, du premier coup.

Exercices

Utilise la règle et le compas pour construire sur papier uni chacun des triangles suivants.

1) Les côtés du triangle mesurent 9 cm ; 5 cm et 6,5 cm.
 2) Les côtés du triangle mesurent 7,5 cm ; 6 cm et 7,5 cm.
 3) Les côtés du triangle mesurent 6 cm ; 8 cm et 10 cm.
 4) Les côtés du triangle mesurent tous 6,5 cm.
 5) Les côtés du triangle mesurent 4,5 cm ; 6 cm et 7,5 cm.

88 quatre-vingt-huit

Unité 8 Séance 6 **Triangles**

Multiplication et division de nombres entiers par 10, 100, 1 000

Revoir Ordre de grandeur d'une somme

Tom a calculé ces cinq sommes avec sa calculatrice. Trois résultats sont faux. Trouve lesquels en faisant des calculs approchés. Écris les calculs que tu as effectués.

a. $7\,216 + 795 = 9\,011$ d. $19\,678 + 6\,129 = 24\,807$
 b. $42\,856 + 7\,215 = 50\,071$ e. $986 + 68 + 1\,112 = 2\,166$
 c. $845 + 78 + 214 = 1\,767$ f. $2\,012 + 489 + 5\,498 = 7\,999$

Chercher Des triangles particuliers

► Travail sur fiche 52

Les équipes A disposent d'une équerre et de morceaux de papier calque, les équipes B d'une équerre et d'un compas.

1) Avec les camarades de ton équipe, rédige une description de votre triangle pour permettre à une équipe, qui a le même matériel que vous, de retrouver votre triangle parmi les autres de la fiche. Tu ne peux pas utiliser la lettre qui désigne le triangle, ni indiquer la position du triangle sur la fiche.

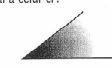
2) Les équipes A et B changent de matériel et échangent leurs descriptions. Avec les camarades de ton équipe, trouve le triangle qui correspond à la description que vous avez reçue.

3) Construis un triangle qui a trois côtés de même longueur, puis compare ses angles. Construis un triangle qui a deux côtés de même longueur, puis compare ses angles.

Exercices

1) Construis un triangle isocèle. Les deux côtés de même longueur mesurent chacun 7,5 cm.


2) Construis un triangle isocèle. Les deux côtés de même longueur mesurent chacun 7,5 cm. L'angle formé par les deux côtés de même longueur est égal à celui-ci :



3) Construis un triangle rectangle. Les côtés de l'angle droit mesurent 4,5 cm et 8 cm.

4) Construis un triangle équilatéral. La longueur d'un côté mesure 6,5 cm.

5) Construis un triangle isocèle. Le côté du triangle qui est commun aux deux angles égaux mesure 6 cm. Les angles égaux sont égaux à celui-ci :



89 quatre-vingt-neuf

2. Manuels de 6ème

2.1. Hachette collection cinq sur cinq (2000)

CHAPITRE 9 **Retenir** notions et méthodes

3 Reconnaître et tracer un triangle isocèle

Définition
 Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

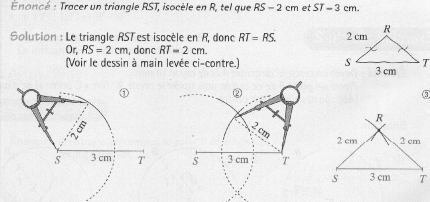
Exemple Le triangle ABC est isocèle en A, car $AB = AC$ (on lit cette égalité grâce au dessin codé).

• Le point A est le sommet principal de ce triangle isocèle.
 • Le côté [BC] est la base de ce triangle isocèle.

Exercice résolu 3

Énoncé : Tracer un triangle RST, isocèle en R, tel que $RS = 2$ cm et $ST = 3$ cm.

Solution : Le triangle RST est isocèle en R, donc $RS = RT$. Or, $RS = 2$ cm, donc $RT = 2$ cm. (Voir le dessin à main levée ci-contre.)



On trace un segment [ST] mesurant 3 cm. Ensuite, on trace le cercle de centre S et de 2 cm de rayon.

On trace le cercle de centre T et de 2 cm de rayon.

On choisit l'un des deux points d'intersection des deux cercles : on l'appelle R. Ensuite, on trace les segments [RS] et [RT].

Remarque Dans la pratique, il suffit de tracer les deux arcs de cercle en traits pleins (voir la figure 3).

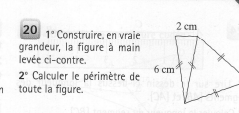
Application → exercice n° 14

134 9 - Avec un compas et une règle graduée

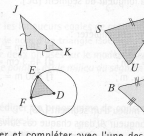
CHAPITRE 9 **Appliquer le cours**

Triangle isocèle, triangle équilatéral

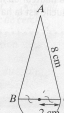
20 1° Construire, en vraie grandeur, la figure à main levée ci-contre.
 2° Calculer le périmètre de toute la figure.



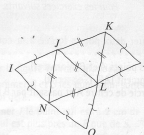
21



22 1° Tracer la figure ci-contre en vraie grandeur (elle est constituée d'un triangle isocèle et d'un demi-cercle).
 2° Rédiger un « programme » de construction de cette figure.



23



12 a) Tracer un cercle de centre A et de rayon 3 cm.
 b) Placer, sans instrument, deux points E et F tels que le triangle AEF soit isocèle en A.
 c) Citer la base de ce triangle isocèle.

13 a) Tracer un cercle de centre I et de diamètre 8 cm. Conseil : calculer le rayon.
 b) Tracer une corde [RS] mesurant 4 cm.
 c) Quelle est la nature du triangle RIS? (En cas de besoin, voir le Mini-dico, page 270.)

14 Voir l'exercice résolu 3 de la page 134.
 Tracer un triangle isocèle ABC tel que :
 $AB = AC = 5$ cm et $BC = 4$ cm.

15 a) Tracer un triangle DEF, isocèle en F, tel que :
 $DF = 6$ cm et $DE = 4$ cm.
 b) Citer la base et le sommet principal de ce triangle.

16 Voir l'exercice résolu 4 de la page 135.
 Tracer un triangle équilatéral DEF de côté 4 cm.

17 Tracer un triangle équilatéral RST de périmètre 18 cm.

18 Sur une feuille de papier, reproduire, en entier, le triangle équilatéral ci-contre qui a été en partie brûlé.

19 1° a) Tracer un segment [AB] mesurant 8 cm.
 b) Tracer le cercle de diamètre [AB].
 2° a) Placer un point E sur le cercle tel que $BE = 3$ cm.
 b) Au compas, placer le point D du cercle tel que $BD = BE$.
 3° Sans donner de preuve :
 a) comparer la longueur des petits arcs de cercle BD et BE ;
 b) indiquer la nature du triangle ADE.

Grâce aux codages, citer :
 a) tous les triangles équilatéraux ;
 b) tous les triangles isocèles non équilatéraux.

9 - Avec un compas et une règle graduée 137

Triangle isocèle, triangle équilatéral

63

Calquer le dessin, puis construire deux points R et S de la ligne droite (d) tels que le triangle RAS soit isocèle en A et que $RA = 4$ cm.

64 On veut construire un triangle isocèle DEF tel que $DE = 8$ cm et $EF = 5$ cm.

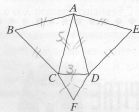
1° a) Le sommet principal de ce triangle peut-il être le point D ? le point E ? le point F ?
(Faire la recherche en faisant des dessins à main levée.)

b) Dans les cas possibles, construire le triangle DEF en vraie grandeur.

2° Recommencer le 1° avec :
 $DE = 8$ cm et $EF = 3$ cm.

65 a) Tracer un segment $[DM]$ mesurant 3 cm.
b) Construire un triangle équilatéral DEF tel que M soit le milieu du côté $[DE]$.

66



1° Refaire le dessin à main levée ci-dessus, puis le coder sachant que :

- le triangle ACD est isocèle en A ;
- les triangles ABC , ADE et CDF sont équilatéraux.

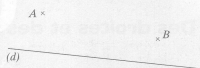
2° a) Construire cette figure en vraie grandeur sachant que :

$CD = 3$ cm et $AC = 5$ cm.

b) Calculer le périmètre du polygone $ABCFDE$.

3° Les segments $[BD]$, $[CE]$ et $[AF]$ semblent-ils de la même longueur?
(Utiliser un compas pour répondre.)

67



1° a) Calquer le dessin, puis placer, au compas, un point C de la ligne droite (d) de façon que le triangle ABC soit isocèle en A .

b) Quel est le nombre de solutions?

2° Recommencer le 1° avec un triangle ABC isocèle en B .

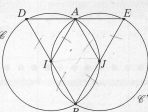
68

a) Calquer la figure ci-contre, puis tracer un triangle équilatéral ABC tel que le point B soit sur la ligne (d) et $AB = 2$ cm.

b) Quel est le nombre de solutions?

69

« Lire » une figure



- I et J sont les centres des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' ;
- les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont le même rayon;
- $A \in \mathcal{C}$; • $B \in \mathcal{C}$; • $J \in \mathcal{C}$; • $D \in \mathcal{C}$;
- $A \in \mathcal{C}'$; • $B \in \mathcal{C}'$; • $E \in \mathcal{C}'$; • $I \in \mathcal{C}'$.

1° Parmi les égalités suivantes, quelles sont celles qui sont vraies, à coup sûr?

- a) $IA = IB$ b) $IA = AD$ c) $IA = IJ$
- d) $AJ = JB$ e) $AE = AJ$ f) $AJ = JE$
- g) $AI = AE$ h) $BJ = BI$ i) $AD = AE$.

2° Parmi les triangles suivants, retrouver ceux qui sont équilatéraux et ceux qui sont isocèles non équilatéraux :

- IAD • IAJ • AEJ • BIJ • AIB • AJB .

9 - Avec un compas et une règle graduée

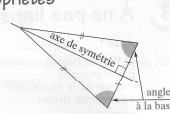
1 Triangle isocèle, triangle équilatéral*

Triangle isocèle : propriétés

Un triangle isocèle a un axe de symétrie : la médiatrice de la base.

Cet axe est la bissectrice de l'angle principal.

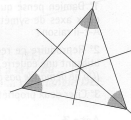
- Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base sont égaux.
- Si un triangle a deux angles égaux, alors ce triangle est isocèle.



Triangle équilatéral : propriétés

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie : les médiatrices des côtés (celles-ci passent par un même point).

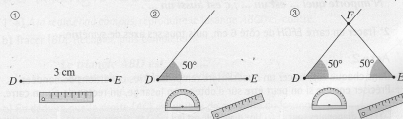
- Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles sont égaux.
- Si les trois angles d'un triangle sont égaux, alors ce triangle est équilatéral.



Exercice résolu 1

Énoncé : Tracer un triangle isocèle DEF tel que $DE = 3$ cm et $\widehat{FDE} = \widehat{DEF} = 50^\circ$.

Solution :



Méthode

Pour être sûr qu'un triangle est isocèle, il suffit de savoir qu'il a deux angles égaux.

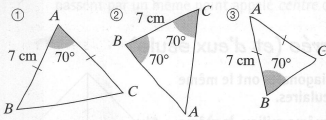
* Voir aussi les pages 134 et 135.

Application → exercice n° 2

Triangle isocèle, triangle équilatéral

- 1° Tracer un triangle EFG isocèle en E tel que : $FG = 5$ cm et $EF = 6$ cm.
- 2° Tracer son axe de symétrie Δ : il coupe $[FG]$ en M . Que peut-on dire du point M ? de la demi-droite $[EM]$?

2 Voir l'exercice résolu 1 de la page 230. Dans chaque cas, tracer le triangle ABC isocèle en A .



3 Dans chaque cas, reproduire la figure ci-contre.

- 1 Construire deux points R et S de la droite \mathcal{D} tels que le triangle RAS soit isocèle en A et $RS = 6$ cm.
- 2 Construire deux points I et J tels que le triangle AIJ soit isocèle en I , d'axe de symétrie \mathcal{D} et $AI = 6$ cm.
- 3 Construire deux points B et C tels que le triangle ABC soit isocèle en B , d'axe de symétrie \mathcal{D} et $\widehat{BAC} = 40^\circ$.
- 4 Construire deux points M et N tels que le triangle AMN soit équilatéral, ayant pour axe de symétrie la droite \mathcal{D} .

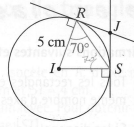
- 4 1° Tracer un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 5 cm, puis une corde $[MN]$.
- 2° Tracer la médiatrice Δ du segment $[MN]$.
- 3° Recopier, compléter, puis justifier : La ... Δ passe par le ... O .

- 5 1° a) Tracer un triangle équilatéral ABC .
- b) Avec une équerre seulement, tracer ses axes de symétrie.
- c) Marquer, sur la figure, les angles égaux et les longueurs égales.
- 2° Peut-on tracer un cercle passant par les trois points A , B et C ? Si oui, tracer ce cercle.

Triangle isocèle

41 Apprendre à prouver

- 1° Tracer la figure codée ci-contre en vraie grandeur.
- 2° Recopier et compléter le raisonnement suivant :



R et S sont deux ... du ... de centre I , donc $IR = IS$ et le triangle IRS est ... en I .
Or, les ... à la base d'un triangle ... sont égaux.
Par conséquent : $\widehat{IRS} = \widehat{ISR} = 70^\circ$.
D'autre part $\widehat{JRS} = \widehat{JRI} - \widehat{IRS} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ et $\widehat{JSR} = \widehat{JSI} - \widehat{ISR} = \dots - \dots = \dots$.
Donc $\widehat{JRS} = \widehat{JSR}$, et le triangle JRS , qui a deux ... égaux, est ... en J .

42 À faire après l'exercice 41.

- 1° a) Tracer un triangle ABC tel que : $BC = 6$ cm, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 70^\circ$.
- b) Préciser la nature de ce triangle. Justifier.
- 2° a) Tracer les bissectrices des angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} : elles se coupent en I .
- b) Calculer la mesure des angles \widehat{IBC} et \widehat{ICB} . 35°
En déduire la nature du triangle IBC . $isocèle en I$
- 3° a) À la règle seule, tracer l'axe de symétrie de la figure.
- b) Marquer les milieux respectifs M et N des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Comparer les longueurs BN et CM .

43 Justifications

- 1° Tracer un cercle de centre I . Marquer un point A sur le cercle. Tracer la médiatrice du segment $[AI]$: elle coupe le cercle en R et S .
- 2° a) Justifier l'égalité $IR = IS$.
- b) Indiquer, en justifiant les réponses, la nature des triangles RAI et SAI , et celle du quadrilatère $RASI$.

44 Utiliser la bonne propriété

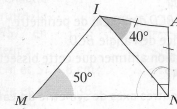
- 1° Tracer un segment $[AB]$ mesurant 8 cm. Placer son milieu I . Placer deux points D et E tels que : $DE = 6$ cm, $(DE) \perp (AB)$ et I est le milieu du segment $[DE]$.
- 2° Relire les propriétés des losanges, et d'eux seuls, de la page 231. Quelle est celle qui permet de justifier que le quadrilatère $AEBD$ est un losange?

- 68 1° Marquer trois points E , F et G non alignés. Construire, avec une règle et un compas, le point I tel que les triangles IEF et IFG soient isocèles en I .
- 2° Tracer le cercle de centre I et passant par E . Faire une conjecture, puis la prouver.
- 3° À l'équerre, placer le milieu du segment $[EG]$.

- 69 Placer un point A , puis tracer une droite Δ passant par A . Construire deux points B et C vérifiant les conditions suivantes :
 - ABC est isocèle ;
 - Δ est son axe de symétrie ;
 - $\widehat{BAC} = 70^\circ$;
 - $AB = 6$ cm.

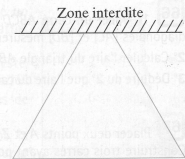
- 70 1° Tracer deux droites d_1 et d_2 sécantes en A . Placer un point M n'appartenant ni à d_1 ni à d_2 . Construire les symétriques :
 - N de M par rapport à la droite d_1 ;
 - P de N par rapport à la droite d_2 .
 2° a) Recopier, compléter et justifier : Le ... de centre A et passant par M passe aussi par ... et ...
Les ... M et P sont ... par rapport à une ... d_3 .
b) Tracer la droite d_3 à l'aide d'une équerre.

- 71 Prouver que :
a) $\widehat{ANI} = 40^\circ$; b) $\widehat{INM} = 50^\circ$; c) $IM = IN$.



72 Zone interdite

Calquer le morceau de triangle équilatéral ci-contre, puis, sans effectuer de tracé dans la zone interdite, construire ses trois bissectrices, à l'aide d'une règle et d'un compas.



2.2. Bordas collection Maths et clic (2000)

Savoir

1. Angles

Vocabulaire \rightarrow O est le sommet de l'angle \widehat{AOB} . Les demi-droites $[OA)$ et $(OB]$ sont les **côtés** de l'angle \widehat{AOB} . Les angles se mesurent en **degrés** avec un **rapporteur**.

angle droit

$\widehat{xOy} = 90^\circ$

angle aigu

$\widehat{xOy} < 90^\circ$

angle obtus

$\widehat{xOy} > 90^\circ$

angle plat

$\widehat{xOy} = 180^\circ$

2. Triangles

DÉFINITIONS

- Un triangle est un polygone à trois côtés.
- Un triangle **isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
- Un triangle **équilatéral** est un triangle qui a trois côtés de même longueur.
- Un triangle **rectangle** est un triangle qui a un angle droit.

triangle isocèle

1 axe de symétrie

triangle équilatéral

3 axes de symétrie

triangle rectangle

PROPRIÉTÉS

- Un triangle isocèle a un axe de symétrie.
- Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie.

Remarque : Un triangle équilatéral est aussi un triangle isocèle.

136 cent trente-six

Exercices

Triangles

13 Construire un triangle ULM , rectangle en U , et tel que $UL = 5$ cm et $UM = 8$ cm.

14 Construire un triangle équilatéral GUS , de côté 8,4 cm.

15 Construire un triangle FAN , isocèle en F , avec $FA = 6,4$ cm et $AFN = 52^\circ$.

17 Construire un triangle TAP rectangle isocèle en A , tel que $AP = 3,6$ cm.

18 Des triangles de toutes sortes
Reproduire les triangles en tenant compte des indications et des codages. Indiquer quelle propriété possède chacun d'eux.

a)

b)

c)

d)

19 Dans cette figure, les segments $[DB]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires, et leur point d'intersection est le milieu de chacun d'eux.

a) Reproduire cette figure sur une feuille quadrillée, et nommer O le point d'intersection de $[DB]$ et $[AC]$.

b) Nommer tous les triangles rectangles.

c) Nommer tous les triangles isocèles.

d) Peut-on voir d'autres triangles ?

cent trente-neuf 139

Exercices

13 Drôle de jeu
Amélie, Boris et Chloé jouent aux dés : chacun lance son dé, puis ils essaient de construire le triangle dont les dimensions, en cm, sont données par les résultats de leurs lancers.

	Amélie	Boris	Chloé
Premier lancer	6	4	3
Deuxième lancer	4	4	1

Voici les résultats de leurs deux premiers lancers :

a) Parmi ces deux triangles, l'un est un triangle particulier. Lequel et pourquoi ?
b) Construire les deux triangles.
c) Ils font encore trois lancers. Que peut-on dire des triangles obtenus avant de les construire ? Effectuer les constructions.

	Amélie	Boris	Chloé
Troisième lancer	3	3	3
Quatrième lancer	4	5	6
Cinquième lancer	1	1	6

14 Avis de recherche
Parmi les descriptions de figures suivantes, certaines sont possibles, d'autres sont impossibles ! Construire un exemple pour chaque description possible.

- Un triangle avec un axe de symétrie.
- Un triangle rectangle avec 1 axe de symétrie.
- Un triangle avec 2 axes de symétrie.
- Un triangle avec 3 axes de symétrie.
- Un triangle avec 4 axes de symétrie.

Soutien

15 Mesurer un angle
Pour chacun des angles :

- indiquer s'il s'agit d'un angle aigu ou obtus,
- repasser un des côtés de l'angle en rouge,
- placer la graduation 0 du rapporteur sur ce côté,
- donner la mesure en degrés.

16 Reconnaître des triangles
Découper la figure ci-contre et repasser dans des couleurs différentes : deux triangles isocèles, puis deux triangles rectangles.

a) Peut-on trouver un triangle équilatéral ?
b) Peut-on trouver un triangle rectangle et isocèle ?

17 Construire des triangles
Voici, dans le désordre, les étapes de construction d'un triangle ABC , tel que : $AB = 2,7$ cm, $\widehat{CAB} = 79^\circ$ et $\widehat{CBA} = 36^\circ$.

- Remettre les images dans l'ordre de la construction.
- Construire de la même manière un triangle TGV tel que $TG = 5,8$ cm, $\widehat{GTV} = 75^\circ$ et $\widehat{TGV} = 24^\circ$.

144 cent quarante-quatre

Annexe 2

Questionnaires et exercices

Questionnaire A

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

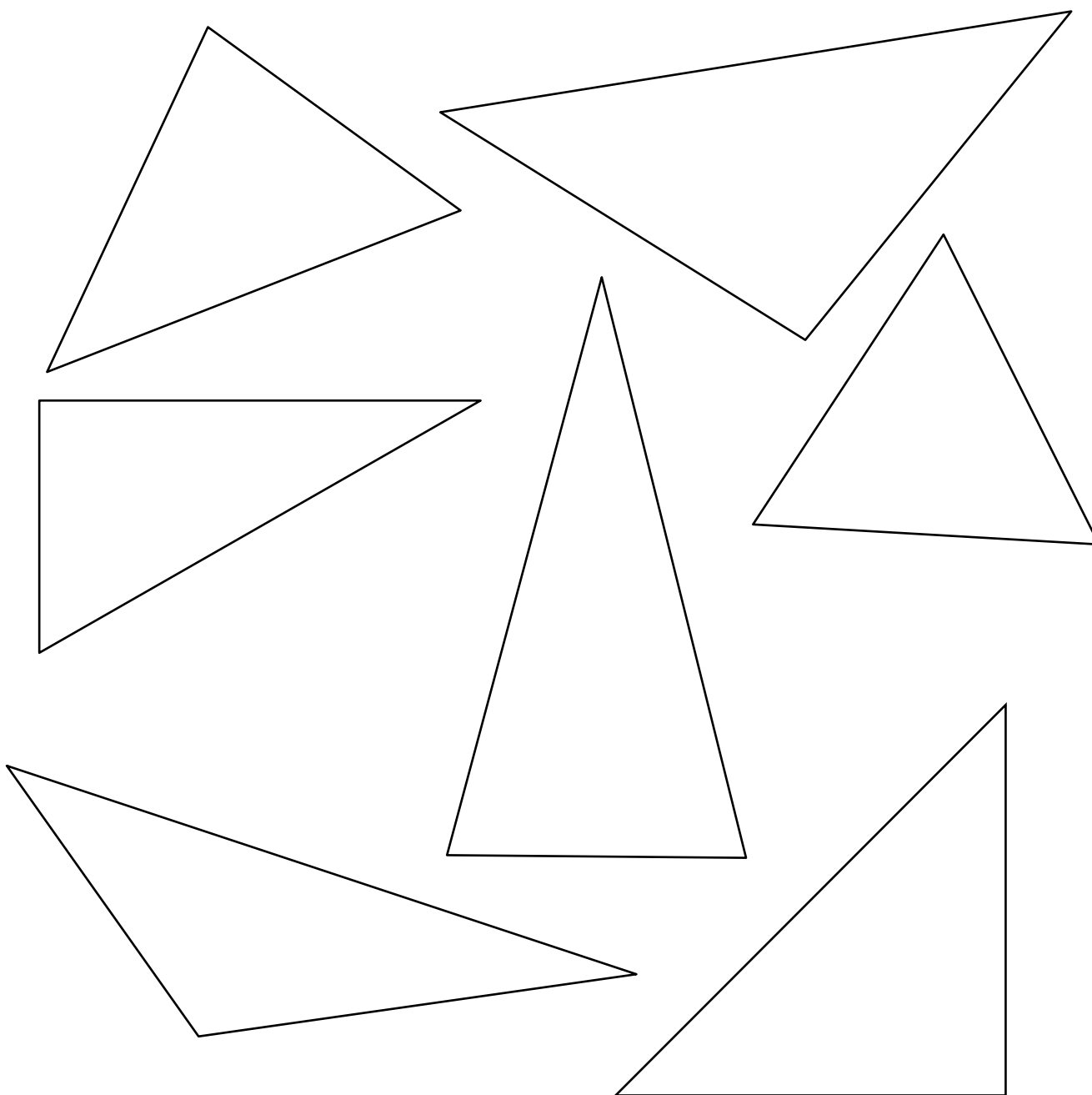
- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.
- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Exercice 1.1

Raye les triangles qui **ne sont pas** des triangles isocèles.
(Si tu n'y arrives pas à la règle, prends ton compas.)



Questionnaire E

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.

- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

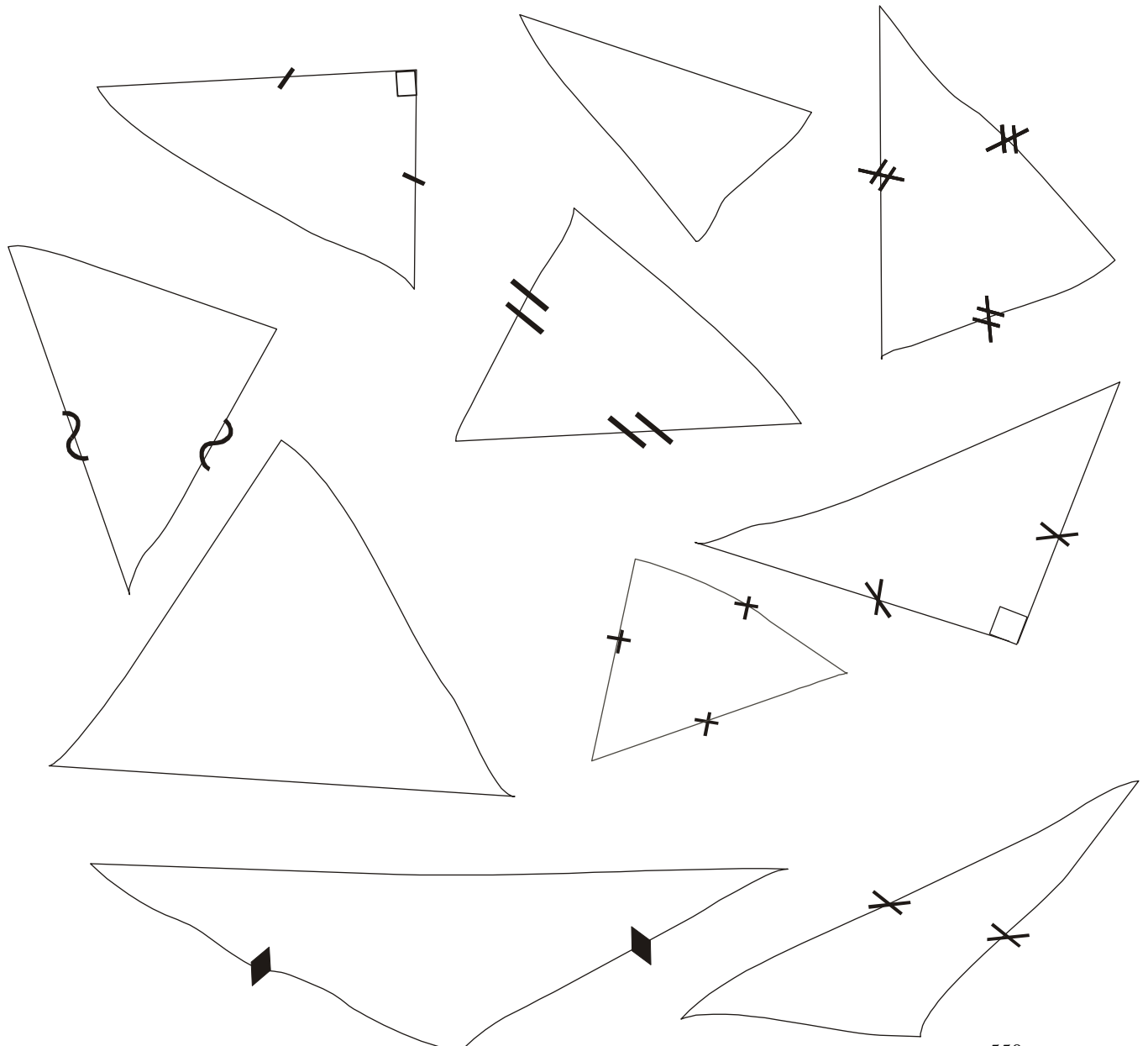
Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.2

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les triangles qui ont été dessinés à main levée. Dans chaque triangle, quand des côtés doivent avoir la même longueur, on les a indiqués avec la même marque. Sinon, il n'y a aucune marque.

Raye les triangles qui, d'après les codages, **ne sont pas** des triangles isocèles.



Questionnaire F

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.
- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

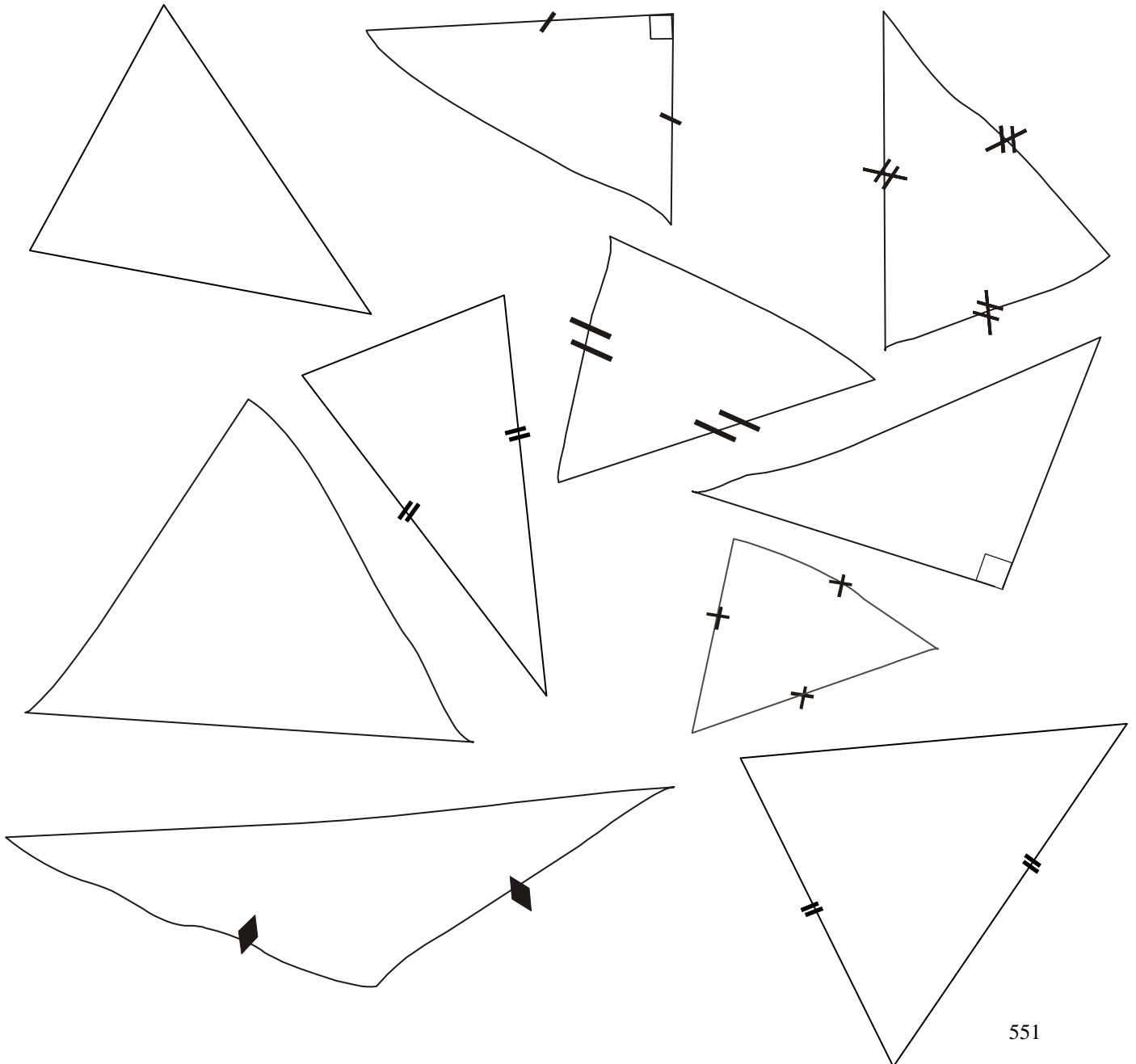
Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.3.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les triangles qui ont été dessinés au hasard, soit à la règle soit à main levée. Dans chaque triangle, quand des côtés devraient avoir la même longueur, on les a indiqués avec la même marque. Sinon il n'y a aucune trace.

Raye les triangles qui, d'après les codages, **ne sont pas** des triangles isocèles.



Questionnaire I

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.

- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.4.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les descriptions des figures. Dans tous les cas tu dois t'intéresser au triangle ABC qui est contenu dans la figure.

Raye les triangles qui, d'après les informations, **ne sont pas** des triangles isocèles.

Triangle n°1	Les côtés [AB] et [BC] sont de la même longueur (4 cm).
Triangle n°2	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°3	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4cm)
Triangle n°4	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.
Triangle n°5	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4 cm)
Triangle n°6	L'angle de sommet B est un angle droit.
Triangle n°7	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont tous une longueur différente. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].
Triangle n°8	Les segments [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD.
Triangle n°9	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.
Triangle n°10	Le quadrilatère ABEC est un losange.

Si cela peut t'aider, tu peux faire des dessins. Mais n'oublie pas de numéroter les triangles que tu dessines et laisse ensuite toutes les traces de ton travail (mesures à la règle, traces de compas,....)

Questionnaire G

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.

- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.5.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Observe bien les descriptions des figures. Dans tous les cas tu dois t'intéresser seulement au triangle ABC qui est contenu dans la figure.

Raye les triangles qui, d'après les informations, **ne sont pas** des triangles isocèles.

Triangle n°1*	Les côtés [AB] et [BC] sont de la même longueur (4 cm).
Triangle n°2*	L'angle de sommet C est un angle obtus et les côtés [CB] et [CA] ont la même longueur (4 cm)
Triangle n°3*	Dans le rectangle BCDE, les diagonales se coupent au point A.
Triangle n°4*	L'angle de sommet A est plus petit que les angles de sommets B et C.
Triangle n°5*	Les segments [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD.
Triangle n°6*	L'angle de sommet B est un angle droit.
Triangle n°7*	Le quadrilatère ABEC est un losange.
Triangle n°8*	L'angle de sommet A est un angle droit et les côtés [AB] et [AC] ont la même longueur (4cm)
Triangle n°9*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont la même longueur (4 cm).
Triangle n°10*	Les côtés [AB], [AC] et [BC] ont tous une longueur différente. Les côtés [AB] et [AC] sont plus longs que le côté [BC].

Si cela peut t'aider, tu peux faire des dessins. Mais n'oublie pas de numéroter les triangles que tu dessines et laisse ensuite toutes les traces de ton travail (mesures à la règle, traces de compas,....)

Questionnaire M : « Les jeux du portrait »

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.

- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.6. : « Portrait de nombres ».

C'est un nombre impair comme 1, 3, 5, 7...

Il est dans la table des 5.

Il est plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

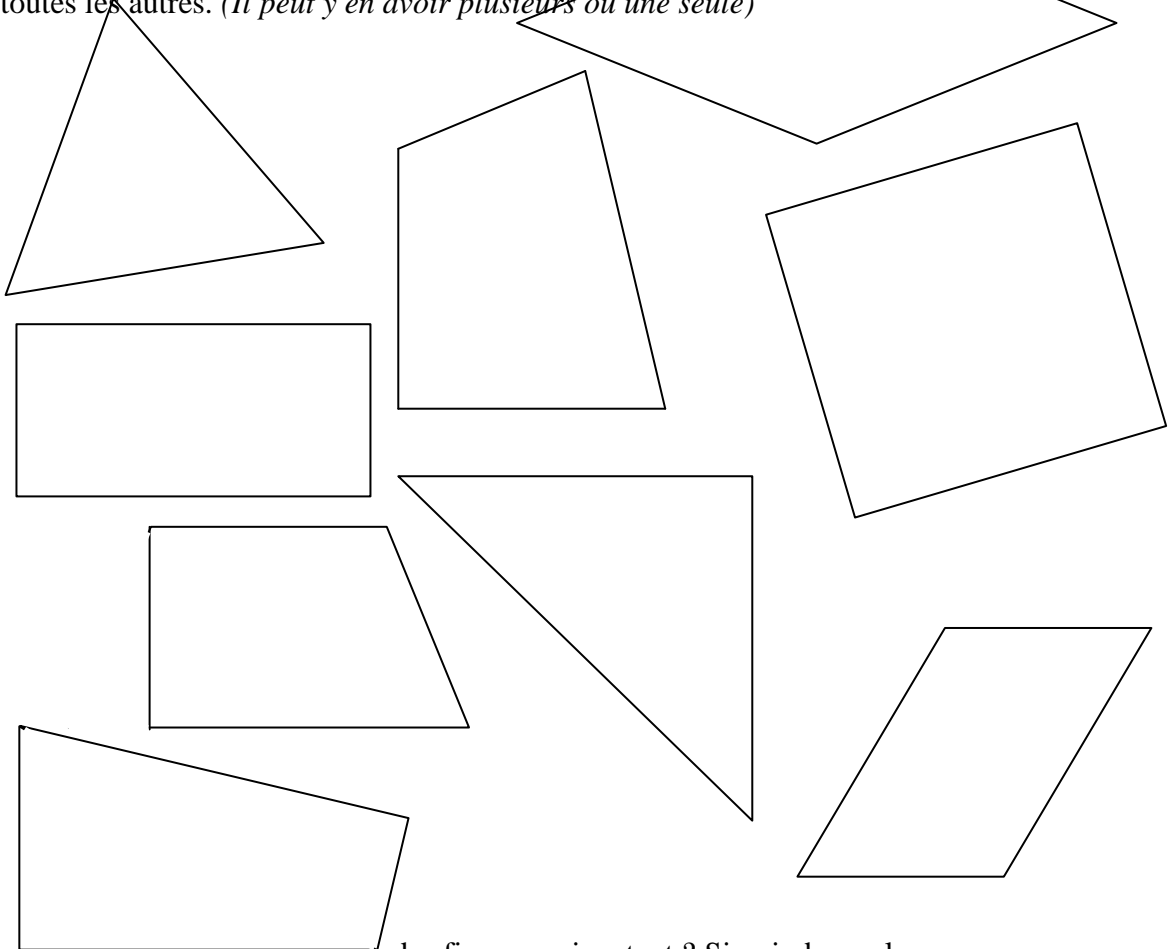
S'il y a plusieurs nombres donne-les tous.

Exercice 1.6. : « Portrait de figures »

Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, **à la fois**, :

- **sont des quadrilatères**
- **ont leurs côtés de la même longueur deux à deux**
- **ont au moins un angle droit**

Raye toutes les autres. (*Il peut y en avoir plusieurs ou une seule*)



Commence-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le.

.....

Questionnaire Q

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.
- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

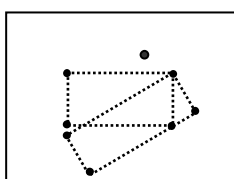
Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.7.

Dans la figure ci-dessous, il y a des rectangles. Le centre de chaque rectangle est indiqué sur le dessin par une croix.

On a déjà commencé le dessin et le côté d'un des rectangles est tracé. Trouves-en au moins deux autres, et plus si tu peux.

(Tu peux utiliser ton équerre si tu veux)



Questionnaire B : « Les jeux du portrait »

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.

- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.8. : « Portrait de nombres »

C'est un nombre impair comme 1, 3, 5, 7...

Il est dans la table des 5.

Il est plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

S'il y a plusieurs nombres donne-les tous :

.....

1	2	3							10
11									
21									
31									
41									50

Exercice 1.8 : « Portrait de figures »

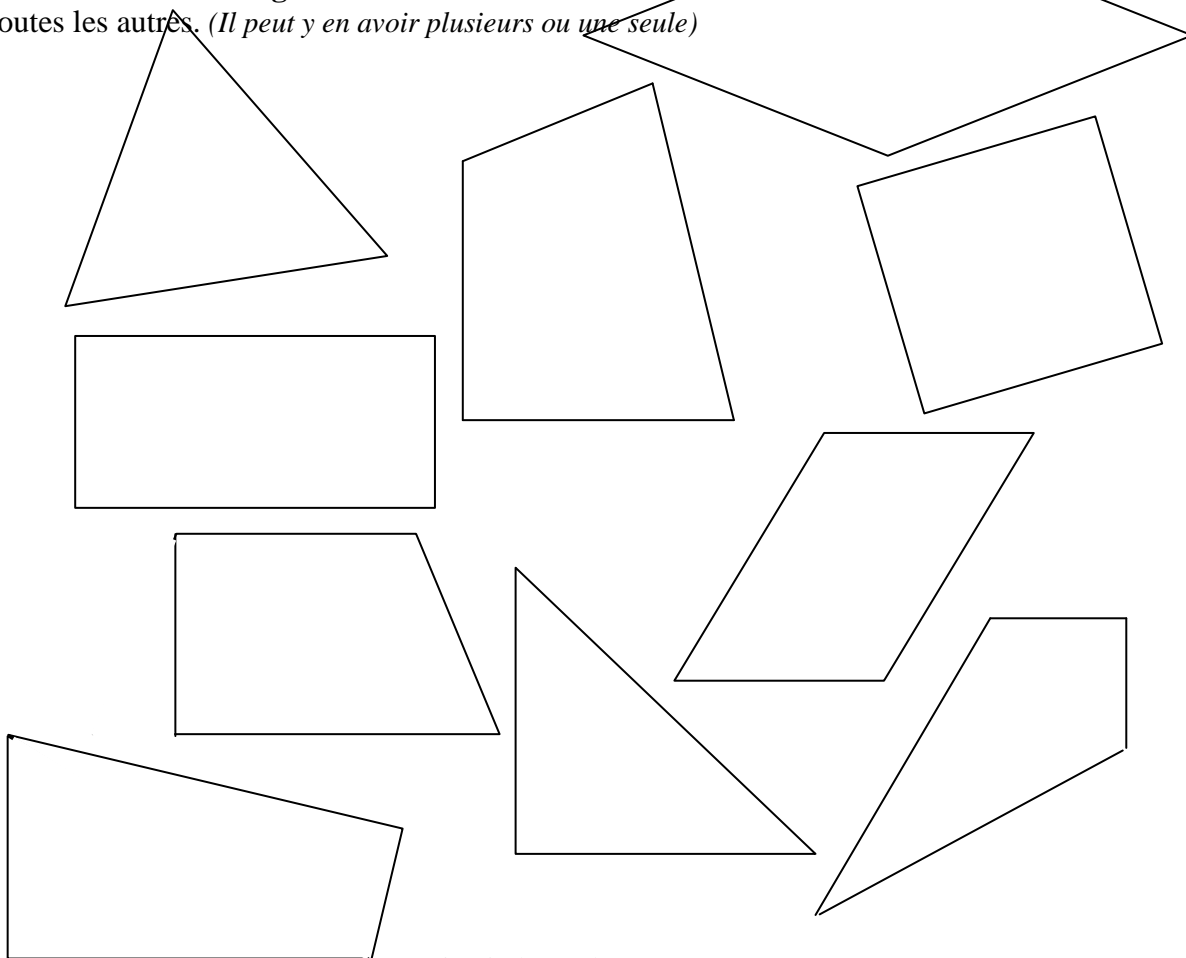
Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, **à la fois**, :

sont des quadrilatères

ont leurs côtés de la même longueur deux à deux

ont au moins un angle droit

Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)



Connais-tu le nom des figures qui restent ? Si oui, donne-le.

Questionnaire T : « Les jeux du portrait »

Consigne générale

Dans tous les exercices, tu laisseras les traces de ton travail.

- Si tu prends des mesures avec ta règle, écris-les.
- Si tu utilises ton compas, laisse les traces.

Lis bien attentivement la consigne de chaque exercice.

Exercice 1.8. : « Portrait de nombres »

C'est un nombre impair comme 1, 3, 5, 7...

Il est dans la table des 5.

Il est plus grand que 29 mais plus petit que 43.

De quel nombre s'agit-il ?

.....

S'il y a plusieurs nombres donne-les tous.

.....

1	2	3							10
11									
21									
31									
41									50

Exercice 1.8. : « Portrait de figures »

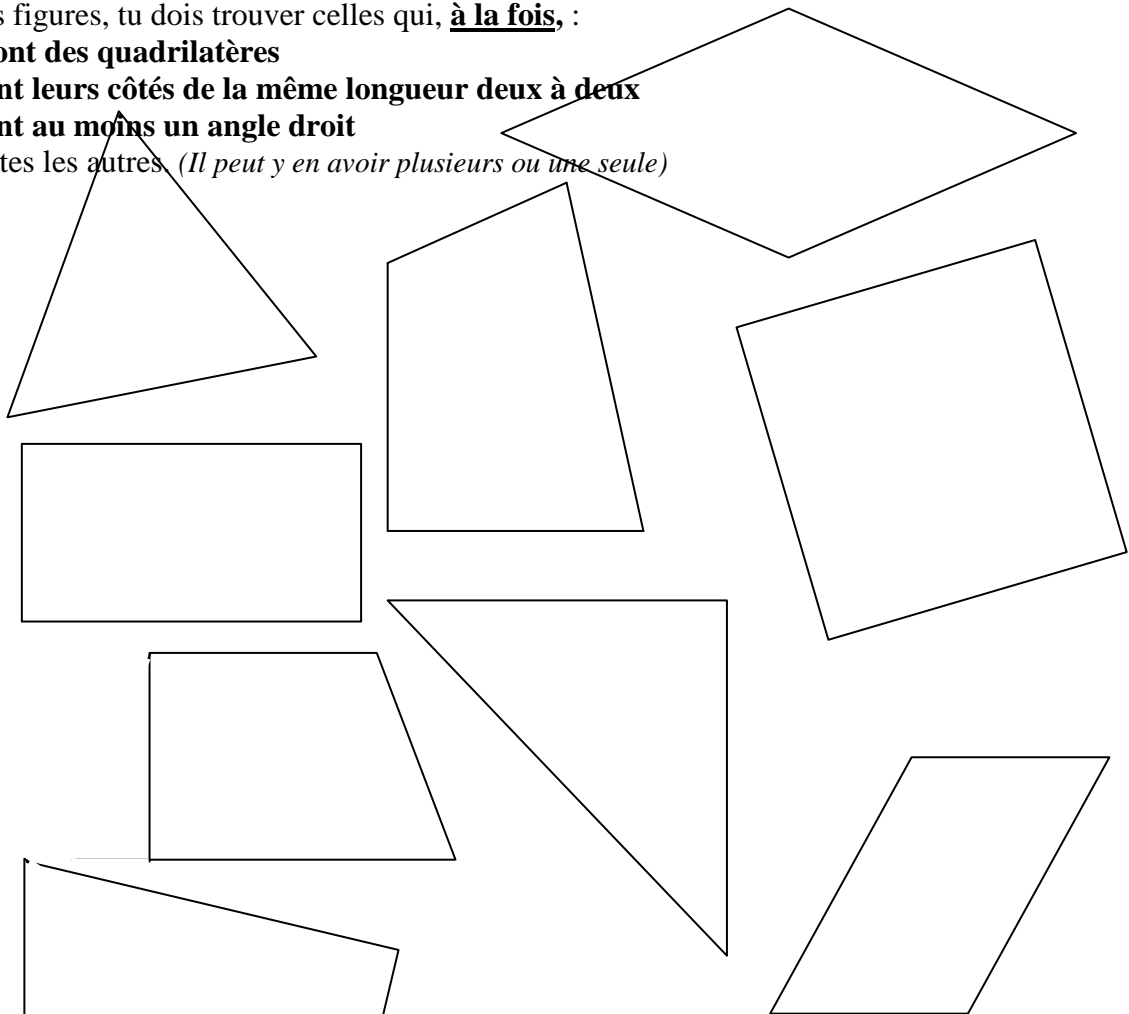
Parmi les figures, tu dois trouver celles qui, **à la fois**, :

sont des quadrilatères

ont leurs côtés de la même longueur deux à deux

ont au moins un angle droit

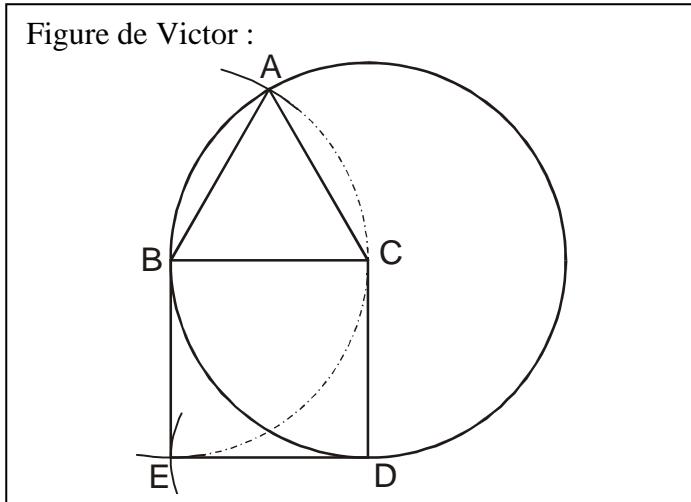
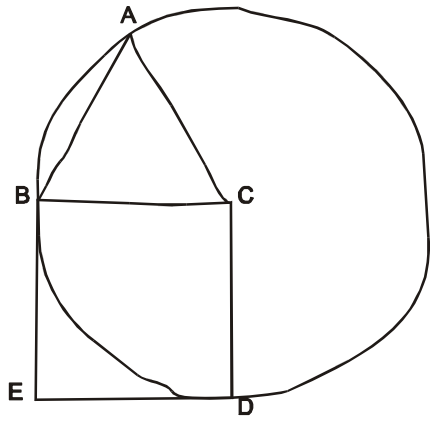
Raye toutes les autres. (Il peut y en avoir plusieurs ou une seule)



Connais-tu ? Si oui, donne-le.

Exercice 2.1.

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Penses-tu qu'elle était juste ?

Donne tes explications.

.....

.....

.....

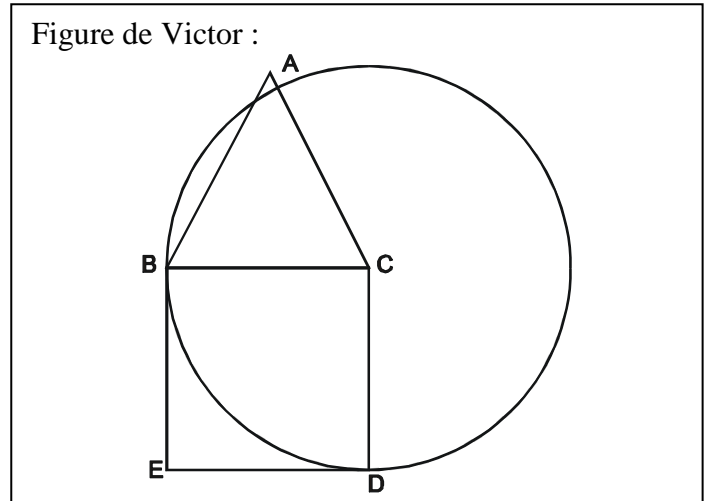
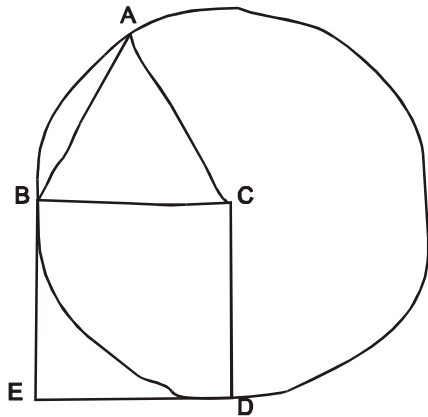
.....

Si cela peut t'aider à répondre tu peux refaire ici, la figure demandée à Victor.

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

Exercice 2.2

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Penses-tu qu'elle était juste ?

Donne tes explications.

.....

.....

.....

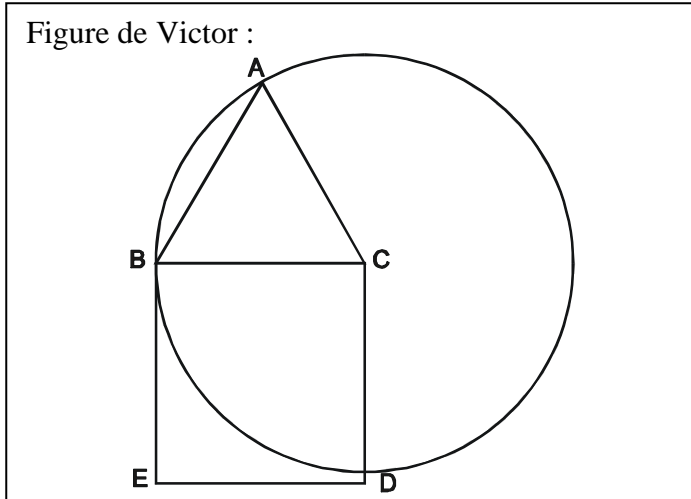
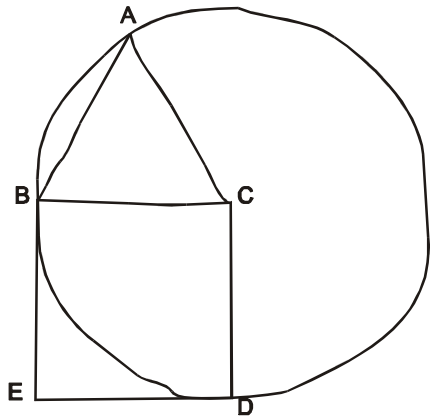
.....

Si cela peut t'aider à répondre tu peux refaire ici, la figure demandée à Victor.

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

Exercice 2.3.

Victor devait refaire en vraie grandeur la figure qu'il avait faite rapidement au brouillon. Il savait que le segment [BC] est un rayon du cercle et que sa longueur est 3 cm. Il y avait aussi un carré et un triangle équilatéral.



A la photocopie, la figure de Victor a été diminuée. Penses-tu qu'elle était juste ?

Donne tes explications.

.....

.....

.....

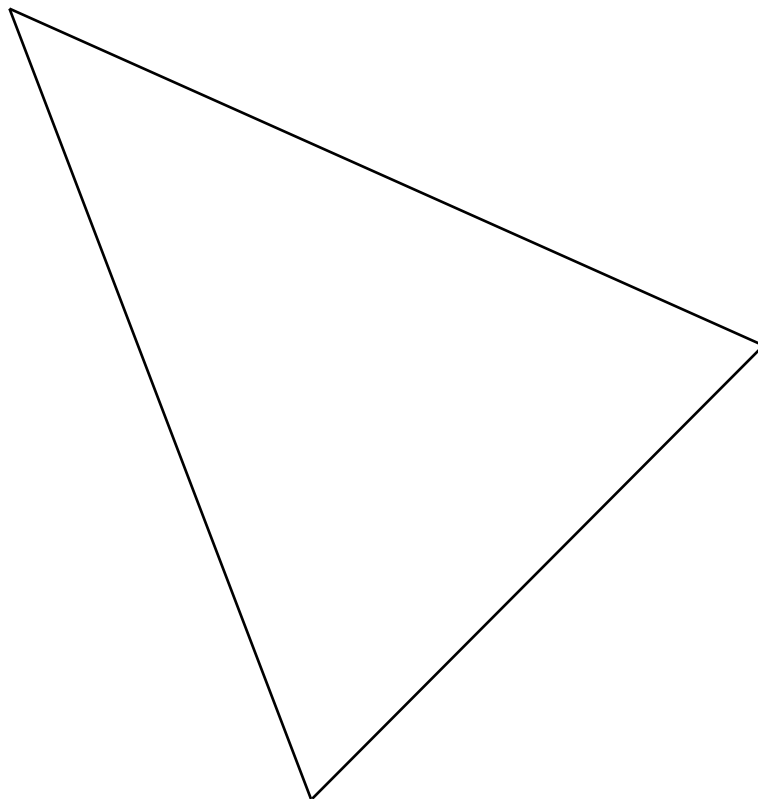
.....

Si cela peut t'aider à répondre tu peux refaire ici, la figure demandée à Victor.

Si cela peut t'aider, tu peux refaire ici la figure demandée à Victor.

Exercice 2.4.

On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle.
Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait **6 cm de rayon**.
A toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.



Raconte comment tu as fait.

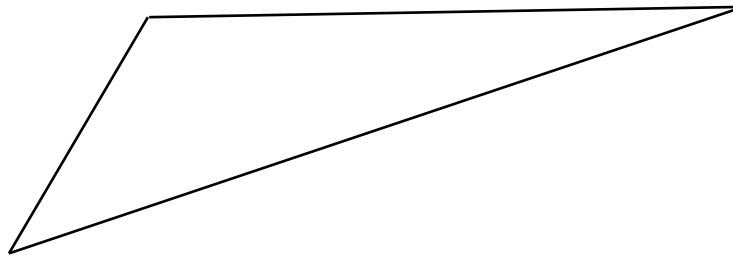
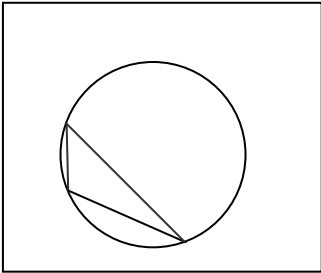
.....

.....

.....

Exercice 2.5.

On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle.
Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait **6 cm de rayon**.
A toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.



Raconte comment tu as fait.

.....

.....

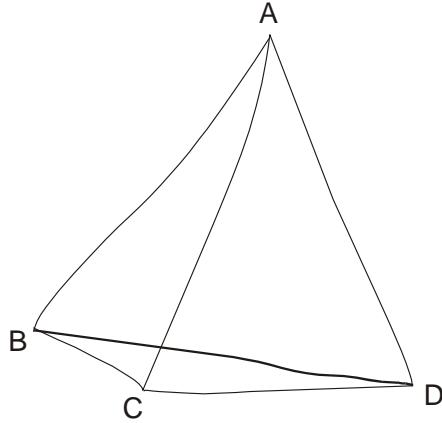
.....

Exercice 2.6.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**

Aide-la à répondre aux questions.



a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

.....
.....

b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

.....
.....

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

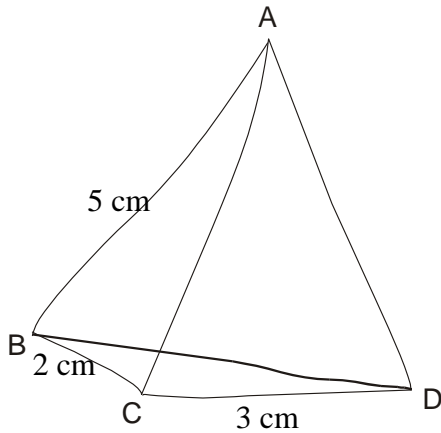
Exercice 2.7.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**

Elle a marqué les longueurs qu'elle aurait dû respecter sur la figure et dans le tableau.

A toi de compléter le tableau puis de répondre aux questions.



	2 cm	3 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

.....

b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

.....

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

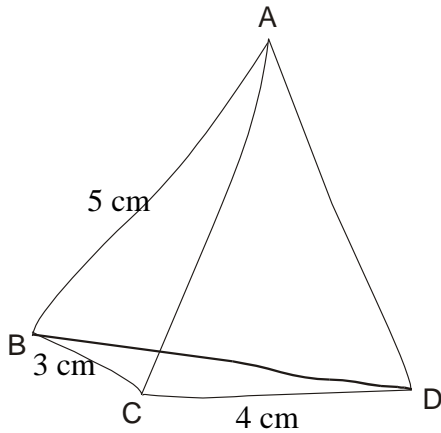
Exercice 2.8.

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**

Elle a marqué les longueurs qu'elle aurait dû respecter sur la figure et dans le tableau.

A toi de compléter le tableau puis de répondre aux questions.



	3 cm	4 cm	5 cm	C'est une autre longueur	On ne sait pas
AB			X		
AC					
AD					
BC	X				
CD		X			
BD					

a) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

.....

b) Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

.....

Si cela peut t'aider tu peux faire la figure en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

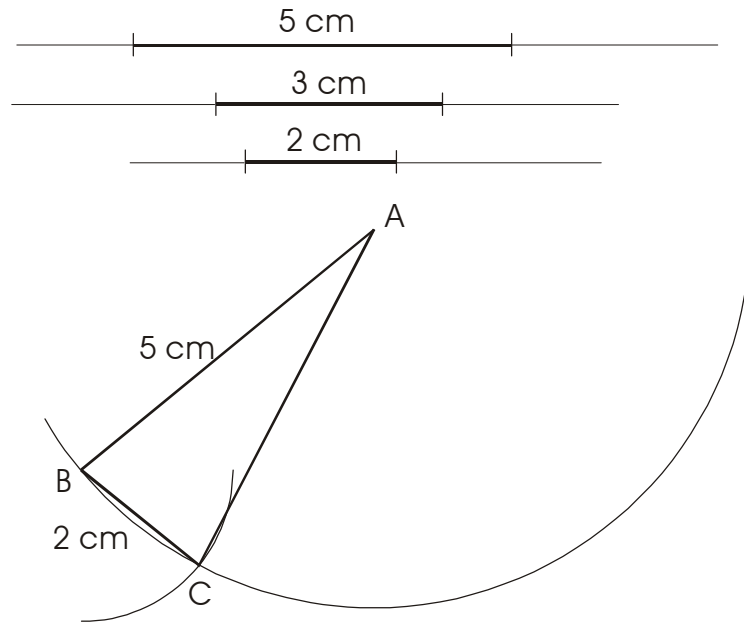
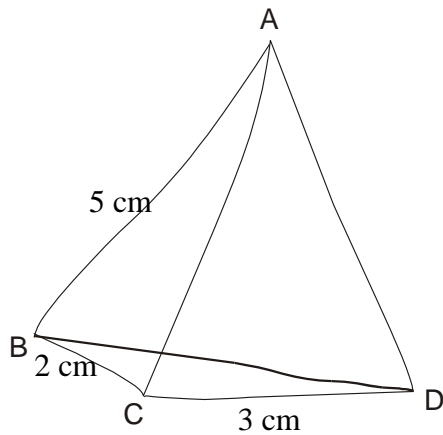
Exercice 2.9

Rappel : Un triangle isocèle est un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.

Marie a fait à la main, la figure qui lui avait été proposée et dans laquelle, **les triangles ABC et ADC sont isocèles en A.**

Elle a commencé à refaire la figure en vraie grandeur avec son compas.

A toi de répondre aux questions.



Est-on certain que le triangle ABD est un triangle isocèle ? oui – non. Pourquoi ?

.....

Est-on certain que le triangle ABD est un triangle équilatéral ? oui – non. Pourquoi ?

.....

Si cela peut t'aider tu peux continuer la figure ou la refaire en vraie grandeur, avec ta règle et ton compas.

Annexe 3

Codages des réponses des élèves

1. CM2

Sujet n°	Questionnaire	recto	Paradigme	Niveau vH	verso	Paradigme	niveau vH
classe n°1: L'Etang la Ville (1)							
P1	Q	7	G1	N1	5	G1	N1
P2	H	5	G1	N2	5	G1	N2
P3	S	6	GX	N0	4	G1	N1
P4	G	5	G1	N1	4	G1	N2
P5	C	7	G1	N1	7	G1	N1
P6	B	8	G2	N2	9	G1	N1
P7	O	1	G1	N1	3	G1	N1
P8	K	3	GX	N1	7	G1	N1
P9	D	7	G1	N1	8	G1	N2
P10	J	4	G2	N3	1	G1	N0
P11	R	2	G1	N1	4	G1	N2
P12	C	7	G1	N1	7	G1	N1
P13	E	2	G1	N1	1	G1	N1
P14	F	3	G1	N1	5	G1	N2
P15	T	8	G2	N3	5	G1	N2
P16	N	2	G1	N1	2	G1	N1
P17	M	6	G1	N1	2	G1	N2
P18	L	2	GX	N0	8	G1	N1
P19	I	4	G2	N3	3	G1	N2
P20	D	7	G1	N2	8	G1	N0
P21	H	5	G1	N2	5	G1	N2
P22	G	5	G2	N3	4	G1	N2
P23	A	1	G1	N1	6	G1	N1
classe n°2: L'Etang la ville (2)							
P24	B	8	GX	N0	9		
P25	Q	7	G1	N1	5	G1	N1
P26	R	2	GX	N0	4	G1	N2
P27	I	4	G2	N2	3	G2	N2
P28	J	4	G2	N2	1		
P29	E	2	G2	N3	1	G2	N2
P30	G	5	GX	N0	4	G1	N1
P31	S	6	GX	N0	4	G1	N1

P32	C	7	G1	N1	7	G1	N1
P33	D	7	G1	N1	8	G1	N1
P34	O	1	G2	N3	3	G2	N2
P35	B	8	G2	N3	9	G1	N2
P36	T	8	G1	N2	5	G2	N3
P37	K	3	G1	N1	7	G1	N1
P38	L	2	G1	N1	8	G1	N1
P39	E	2	G2	N3	1	G1	N1
P40	M	6	G2	N3	2	G1	N1
P41	P	3	GX	N0	4	G1	N2
P42	F	3	G2	N3	5	G1	N2
P43	F	3	GX	N1	5	G1	N2
P44	A	1	G2	N3	6	G1	N1
P45	A	1	G1	N1	6	G1	N1
P46	N	2	G2	N2	2	G1	N2
P47	H	5	G1	N2	5	G2	N3
classe n°3: Schweitzer (1)							
P48	L	2	G2	N3	8	G1	N1
P49	H	5	G1	N1	5	G1	N2
P50	E	2	GX	N1	1	G1	N2
P51	M	6	G1	N1	2	G1	N1
P52	C	7	G1	N0	7	G1	N1
P53	E	2	GX	N1	1	G1	N2
P54	P	3	G1	N1	4	G1	N2
P55	M	6	G2	N3	2	G1	N1
P56	I	4	G2	N3	3	G1	N1
P57	B	8	G2	N2	9	G1	N1
P58	A	1	G2	N3	6	G1	N1
P59	I	4	G1	N2	3	G1	N1
P60	B	8	G2	N3	9	G2	N3
P61	F	3	GX	N0	5	G2	N2
P62	P	3	GX	N0	4	G1	N1
P63	T	8	G2	N3	5	G2	N2
P64	N	2	GX	N1	2	G1	N1
P65	O	1	G2	N3	3	G1	N2
P66	J	4	G1	N2	1	G1	N2
P67	G	5	GX	N0	4	G2	N3
P68	S	6	GX	N0	4	G1	N1
P69	T	8	G2	N3	5	G1	N0
P70	R	2	G2	N3	4	G1	N2
P71	Q	7	G2	N3	5	G1	N1
P72	A	1	G1	N2	6	G1	N1
P73	D	7	G1	N1	8	G1	N1
P74	K	3	GX	N0	7	G1	N2
P75	J	4	G2	N3	1	G2	N2
P76	S	6	G2	N2	4	G1	N2
P77	F	3	G1	N1	5	G1	N1

P78	G	5	G2	N3	4	G1	N1
classe n°4: Schweitzer (2)							
P79	F	3	G1	N1	5	G1	N2
P80	L	2	G1	N1	8	G1	N1
P81	K	3	G1	N2	7	GX	N0
P82	J	4	G1	N2	1	G1	N0
P83	I	4	G2	N2	3	G1	N1
P84	H	5	G1	N1	5	G1	N2
P85	T	8	G2	N3	5	G1	N2
P86	E	2	G1	N1	1	G1	N2
P87	M	6	GX	N0	2	G1	N1
P88	O	1	G1	N1	3	G1	N1
P89	N	2	G1	N2	2	G1	N1
P90	G	5	G2	N3	4	G1	N2
P91	B	8	G2	N2	9	G1	N1
P92	A	1	G1	N2	6	G1	N0
P93	D	7	G1	N1	8	G1	N1
P94	S	6	G1	N2	4	G1	N2
P95	C	7	G1	N1	7	G1	N0
P96	R	2			4		
P97	Q	7	G1	N1	5		
classe n°5: Rostand (1)							
P98	H	5	G1	N2	5	G1	N1
P99	I	4			3	G1	N1
P100	E	2	G1	N1	1	G2	N2
P101	F	3	G2	N2	5	G1	N2
P102	G	5	G1	N1	4	G2	N3
P103	G	5	G2	N2	4	G1	N0
P104	D	7	G1	N1	8	G1	N1
P105	S	6	G1	N1	4	G1	N0
P106	B	8	GX	N0	9	G1	N1
P107	L	2	G1	N2	8	G1	N1
P108	O	1	GX	N0	3	G1	N1
P109	K	3	G2	N2	7	G1	N1
P110	Q	7	G1	N2	5	G2	N3
P111	A	1	G1	N2	6	G1	N0
P112	M	6	GX	N0	2		
P113	N	2	G2	N3	2	G1	N2
P114	R	2	GX	N0	4	G1	N1
P115	T	8	G2	N3	5	G1	N1
P116	C	7	G1	N1	7	G1	N2
P117	T	8	G2	N3	5	G1	N2
P118	S	6	G1	N1	4	G1	N2
P119	I	4	G1	N2	3	G1	N1
P120	J	4	G1	N1	1	G2	N2
P121	R	2	G1	N2	4	G2	N3

classe n°6: Rostand (2)							
P122	O	1	G1	N1	3	G1	N1
P123	C	7	G1	N1	7	G2	N3
P124	J	4	G2	N2	1	G1	N0
P125	I	4	G2	N2	3	G1	N0
P126	N	2	G1	N1	2	G1	N1
P127	K	3	GX	N0	7	G1	N0
P128	S	6	G2	N3	4	G2	N3
P129	S	6	G2	N3	4	G2	N3
P130	T	8	G1	N2	5	G1	N2
P131	D	7	G1	N1	8	G1	N0
P132	M	6	G2	N3	2	G1	N2
P133	Q	7	G1	N1	5		
P134	J	4	G1	N2	1	G2	N3
P135	H	5	G2	N3	5	G2	N3
P136	F	3	GX	N0	5	G1	N2
P137	N	2	G1	N1	2	G1	N1
P138	L	2	G2	N3	8	G1	N1
P139	T	8	GX	N0	5	G2	N3
P140	M	6	G1	N1	2	G1	N1
P141	T	8	G1	N1	5	G1	N2
P142	P	3	GX	N1	4	G1	N2
P143	J	4	GX	N0	1	G1	N1
P144	L	2	G2	N3	8	G1	N1
P145	R	2	GX	N0	4	G2	N3
classe n°7: Saint Exupéry (1)							
P146	I	4	G2	N2	3	G1	N1
P147	J	4	G2	N2	1	G1	N2
P148	M	6	G2	N3	2	G1	N1
P149	T	8	G2	N3	5	G1	N2
P150	B	8	G1	N1	9	G1	N0
P151	G	5	G2	N2	4	G1	N1
P152	E	2	G2	N3	1	G1	N1
P153	F	3	G1	N0	5	G1	N2
P154	H	5	G1	N1	5	G1	N2
P155	A	1	G1	N2	6	G1	N1
classe n°8: Saint Exupéry (2)							
P156	F	3	G1	N2	5	G1	N1
P157	G	5	G1	N2	4	G1	N1
P158	J	4			1		
P159	K	3	G1	N0	7	G1	N1
P160	L	2	G2	N2	8	G1	N1
P161	Q	7	G1	N1	5	G1	N0
P162	I	4	G1	N1	3	G1	N1

P163	C	7	G1	N1	7	G1	N2
P164	A	1	G2	N3	6	G1	N1
P165	B	8	G1	N1	9	G1	N1
P166	R	2	G1	N0	4	G1	N1
P167	M	6	GX	N0	2	G1	N1
P168	H	5	G1	N2	5	G1	N2
P169	N	2	G2	N3	2	G1	N2
P170	O	1	G2	N3	3	G1	N1
P171	I	4	G1	N1	3	G1	N1
P172	G	5	G2	N3	4	G1	N2
P173	K	3	GX	N0	7	G2	N3
P174	H	5	G1	N0	5	G1	N2
P175	P	3	GX	N0	4	G2	N3
P176	D	7	G1	N1	8	G1	N2
P177	E	2	G1	N1	1	G1	N2
P178	S	6	G1	N1	4	G1	N2
classe n°9: saint Exupéry (3)							
P179	Q	7	G1	N1	5	G1	N1
P180	N	2	G1	N1	2		
P181	M	6	GX	N0	2		
P182	S	6	GX	N0	4		
P183	G	5	G1	N1	4	G1	N1
P184	I	4	G1	N2	3		
P185	H	5	G1	N0	5		
P186	M	6	GX	N0	2	G1	N1
P187	L	2	G1	N2	8	G1	N2
P188	A	1	G1	N1	6	G1	N1
P189	C	7	G1	N1	7	G1	N0
P190	T	8	G2	N3	5	G1	N2
P191	B	8	GX	N0	9	G1	N1
P192	K	3	G2	N3	7	G1	N2
P193	R	2	G1	N1	4	G1	N1
P194	D	7	G1	N1	8	GX	N0
P195	A	1	G1	N2	6	G2	N3
P196	F	3	G1	N0	5	G1	N1
P197	E	2	G1	N1	1	G1	N1
P198	F	3	GX	N1	5	G1	N0
P199	E	2	GX	N0	1	G1	N1
P200	G	5	G2	N3	4	G1	N1
P201	B	8	G1	N2	9	G1	N1
P202	H	5	G1	N2	5	G1	N2
P203	S	6	G2	N3	4	G2	N3
P204	O	1	G2	N3	3	G1	N1
classe n°10: Champ des oiseaux							
P205	H	5			5	G1	N0

P206	Q	7	G1	N2	5	G2	N3
P207	S	6	G1	N1	4	G1	N2
P208	C	7	G1	N1	7	G1	N1
P209	J	4	G2	N3	1	G1	N2
P210	B	8	G2	N2	9	G1	N0
P211	E	2	G1	N1	1	G1	N1
P212	F	3	G2	N3	5	G1	N2
P213	M	6	G1	N1	2	G1	N1
P214	N	2	G1	N1	2	G1	N1
P215	D	7	G2	N2	8	G2	N3
P216	G	5	G2	N3	4	G1	N2
P217	K	3	G2	N2	7	G2	N3
P218	L	2	G2	N2	8	G2	N3
P219	T	8	G2	N3	5	G2	N3
P220	I	4	G1	N2	3	G1	N0
P221	R	2	G1	N1	4	G1	N1
P222	O	1	G2	N3	3	G1	N2
P223	A	1	G1	N1	6	G2	N3

2. 6^{ème}

Sujet n°	Questionnaire	Recto	Paradigme	Niveau vH	Verso	Paradigme	Niveau vH
classe n°1: 601							
S1	F	3	GX	N0	5	G1	N1
S2	E	2	G1	N0	1	G1	N1
S3	R	2	G2	N2	4	G2	N3
S4	D	7	G2	N2	8	G1	N1
S5	Q	7	G2	N3	5	G2	N3
S6	G	5	G1	N1	4	G1	N1
S7	H	5	G2	N2	5	G1	N1
S8	J	4	G1	N2	1	G2	N2
S9	K	3	G1	N0	7	G1	N1
S10	S	6	GX	N0	4	G1	N2
S11	C	7	G2	N3	7	GX	N0
S12	T	8	G2	N3	5	G1	N0
S13	O	1	G1	N2	3	G1	N0
S14	M	6	G1	N0	2	G1	N1
S15	B	8	G2	N2	9	G1	N2
S16	I	4	GX	N0	3	G1	N1
S17	L	2	G1	N1	8	G1	N1
S18	A	1	G1	N1	6	G1	N1
classe							

n°2: 602							
S19	F	3	GX	N0	5	G1	N1
S20	A	1	G2	N3	6	G1	N1
S21	D	7	G2	N3	8	G2	N3
S22	A	1	G1	N2	6	G1	N1
S23	J	4	G2	N3	1	G1	N2
S24	K	3	G2	N3	7	G1	N1
S25	D	7	G1	N2	8	G2	N3
S26	G	5	GX	N0	4	G2	N3
S27	I	4	G1	N1	3	G1	N0
S28	M	6	GX	N0	2	G1	N1
S29	S	6	G1	N2	4	G2	N3
S30	E	2	G2	N3	1	G1	N2
S31	R	2	GX	N0	4	G2	N3
S32	M	6	G1	N2	2	G1	N1
S33	B	8	G2	N3	9	GX	N1
S34	S	6	G2	N3	4	G2	N2
S35	I	4	G1	N1	3	G1	N1
S36	H	5	G2	N2	5	G2	N3
S37	Q	7	G2	N2	5	G1	N2
S38	T	8	G2	N3	5	G1	N2
S39	C	7	G2	N3	7	G1	N1
S40	L	2	G2	N2	8	G1	N1
S41	N	2	G2	N2	2	G1	N2
S42	T	8	G2	N3	5	G2	N3
S43	O	1	G1	N2	3	G1	N2
S44	L	2	G2	N3	8	G1	N1
S45	Q	7	G1	N1	5	G2	N3
S46	N	2	G2	N2	2	G2	N3
classe n°3: 603							
S47	K	3	G1	N0	7	G2	N3
S48	E	2	GX	N0	1	G2	N2
S49	S	6	GX	N0	4	G2	N3
S50	Q	7	G1	N2	5	G2	N3
S51	J	4	G2	N2	1	G2	N3
S52	M	6	G2	N3	2	G1	N2
S53	H	5	G2	N3	5	G2	N3
S54	C	7	G2	N2	7	G2	N3
S55	G	5	G1	N1	4	G2	N3
S56	R	2	G2	N3	4	G2	N3
S57	T	8	G2	N3	5	G2	N3
S58	F	3	G2	N3	5	G1	N2
S59	N	2	G2	N3	2	G1	N2
S60	B	8	G2	N3	9	GX	N0
S61	F	3	GX	N0	5	G1	N2
S62	I	4	G2	N3	3	G2	N3
S63	D	7	G2	N3	8	G2	N3

S64	E	2	G2	N2	1	G1	N2
S65	G	5	G2	N3	4	G2	N3
S66	H	5	G1	N1	5	G1	N2
S67	L	2	G1	N1	8	G1	N1
S68	B	8	GX	N0	9	G1	N1
S69	O	1	G1	N2	3	G1	N2
classe n°4: 604							
S70	F	3	G1	N0	5	G1	N1
S71	H	5	G1	N1	5	G1	N2
S72	G	5	G2	N2	4	G1	N2
S73	C	7	G2	N2	7	G2	N3
S74	E	2	G2	N2	1	G2	N3
S75	A	1	G2	N3	6	G1	N1
S76	J	4	G2	N2	1	G2	N2
S77	B	8	G2	N2	9	GX	N1
S78	T	8	G2	N3	5	G1	N2
S79	M	6	G2	N3	2	G1	N2
S80	K	3	G1	N0	7	G1	N1
S81	S	6	G2	N3	4	G2	N3
S82	D	7	G2	N2	8	G1	N1
S83	H	5	G2	N3	5	G2	N3
S84	L	2	G1	N2	8	G1	N2
S85	J	4	G2	N3	1	G2	N3
S86	I	4	G2	N3	3	G1	N1
S87	N	2	G1	N2	2	G2	N3
S88	R	2	G2	N2	4	G2	N3
S89	I	4	G2	N3	3	G1	N2
S90	O	1	G1	N2	3	G1	N2
S91	G	5	G2	N2	4	G2	N3
S92	T	8	G2	N3	5	G2	N3
S93	P	3	G2	N3	4	G2	N3
classe n°5: 605							
S94	T	8	GX	N0	5	G1	N0
S95	H	5	G2	N2	5	G1	N2
S96	P	3	G2	N3	4	G1	N1
S97	S	6	GX	N0	4	G1	N2
S98	N	2	GX	N1	2	G1	N1
S99	O	1	G1	N1	3	G1	N0
S100	E	2	G2	N2	1	G2	N3
S101	B	8	G2	N2	9	GX	N1
S102	G	5	G2	N3	4	G1	N0
S103	I	4	G1	N2	3	G1	N1
S104	M	6	G2	N3	2	G1	N2
S105	F	3	G2	N3	5	G2	N3
S106	B	8	G1	N1	9	G1	N1
S107	K	3	G2	N3	7	G2	N3
S108	Q	7	G1	N1	5	G2	N3

S109	G	5	G1	N2	4	G2	N3
S110	C	7	G2	N3	7	GX	N1
S111	D	7	G1	N2	8	G1	N1
S112	F	3	G1	N0	5	G1	N2
S113	E	2	G2	N3	1	G1	N2
S114	L	2	G1	N2	8	G2	N3
S115	A	1	G1	N1	6	G2	N3
S116	J	4	G1	N1	1	G1	N0
S117	R	2	G2	N3	4	G2	N3
S118	A	1	G1	N1	6	G1	N1
classe n°: 606							
S119	H	5	G1	N1	5		
S120	I	4	G2	N3	3	G1	N2
S121	A	1	G2	N3	6	G1	N0
S122	F	3	GX	N1	5	G1	N0
S123	B	8	G2	N2	9	G1	N2
S124	J	4	GX	N0	1	G2	N3
S125	Q	7	G2	N2	5	G1	N2
S126	R	2	G2	N2	4	G2	N3
S127	G	5	G2	N3	4	G2	N3
S128	C	7	G1	N2	7	G2	N3
S129	P	3	G1	N2	4	G2	N3
S130	K	3	G1	N0	7	G2	N3
S131	B	8	G2	N2	9	G1	N1
S132	A	1	G2	N3	6	GX	N0
S133	G	5	G1	N2	4	G2	N3
S134	J	4	G1	N2	1	G1	N2
S135	O	1	G2	N3	3	G1	N1
S136	H	5	G1	N2	5	G1	N2
S137	F	3	G2	N3	5	G2	N3
S138	M	6	G2	N3	2	G1	N2
S139	T	8	G1	N2	5	G2	N3
S140	D	7	G1	N2	8	GX	N0
S141	S	6	G2	N3	4	G2	N3
S142	L	2	G2	N3	8	G1	N1
S143	E	2	G2	N2	1	G1	N1
S144	N	2	G2	N3	2	G1	N1
S145	E	2	G2	N3	1	GX	N0
classe n°: 607							
S146	L	2			8		
S147	C	7	G2	N3	7	G2	N3
S148	D	7	G2	N3	8	G1	N1
S149	Q	7	G1	N2	5	G2	N3
S150	R	2	G1	N0	4	G2	N3
S151	N	2	G2	N2	2	G1	N1
S152	N	2	GX	N1	2	G2	N2
S153	F	3	G2	N3	5	G2	N3

S154	K	3	G2	N3	7	G2	N3
S155	K	3	G1	N0	7	GX	N0
S156	A	1	G1	N2	6	G1	N1
S157	A	1	G1	N2	6	G1	N1
S158	O	1	GX	N0	3	G1	N1
S159	A	1	G1	N2	6	G1	N1
S160	G	5	G2	N3	4	G2	N3
S161	J	4	G2	N3	1	G1	N1
S162	I	4	G1	N1	3	G2	N2
S163	H	5	G1	N2	5	G1	N2
S164	S	6	G2	N3	4	G2	N3
S165	M	6	G2	N3	2		
S166	B	8	G2	N3	9	G2	N3
S167	T	8	G1	N2	5	G1	N2
S168	S	6	G2	N3	4	G2	N3
S169	T	8	G1	N1	5	G2	N3
S170	B	8	G2	N2	9	GX	N1
S171	T	8	G1	N2	5	G2	N3
S172	M	6	G2	N3	2	G1	N1
S173	M	6	G2	N3	2	G1	N1
classe n°: 608							
S174	F	3	G1	N2	5	G2	N3
S175	H	5	G1	N2	5	G1	N0
S176	M	6	G2	N3	2	G2	N3
S177	O	1	G2	N3	3	G1	N1
S178	G	5	G1	N1	4	G2	N3
S179	C	7	G2	N3	7	G1	N1
S180	P	3	G2	N3	4	G1	N1
S181	D	7	G1	N2	8	G2	N3
S182	L	2	G2	N2	8	GX	N0
S183	I	4	G1	N2	3	G1	N2
S184	J	4	G1	N1	1	G2	N3
S185	I	4	G1	N2	3	G2	N2
S186	B	8	G2	N2	9	G1	N1
S187	Q	7	G1	N2	5	G2	N3
S188	B	8	G1	N2	9	G2	N3
S189	K	3	G2	N3	7	G2	N3
S190	A	1	G1	N2	6	GX	N0
S191	T	8	G1	N2	5	G2	N3
S192	S	6	G1	N2	4	G2	N3
S193	F	3	G2	N2	5	G2	N3
S194	N	2	G2	N2	2	G2	N3
S195	J	4	G1	N2	1	G2	N2
S196	H	5	G2	N2	5	G2	N3
S197	E	2	G2	N3	1	G2	N3
S198	R	2	G2	N2	4	G2	N3
classe n°: 609							

S199	P	3	GX	N0	4	G2	N3
S200	Q	7	G2	N3	5	G2	N3
S201	S	6	G2	N3	4	G2	N3
S202	M	6	G1	N1	2	G1	N1
S203	F	3	G2	N3	5	G2	N3
S204	E	2	G2	N3	1	G1	N2
S205	A	1	G1	N2	6	G1	N1
S206	B	8	G1	N2	9	G1	N1
S207	E	2	G1	N2	1	G1	N2
S208	F	3	GX	N1	5	G1	N2
S209	G	5	G1	N2	4	G1	N2
S210	F	3	G2	N2	5	G1	N2
S211	I	4	G2	N2	3	G1	N2
S212	G	5	G2	N3	4	G1	N2
S213	H	5	G2	N3	5	G1	N2
S214	M	6	G2	N2	2	G1	N2
S215	A	1	G1	N1	6	G1	N1
S216	J	4	G2	N3	1	G1	N1
S217	Q	7	G1	N1	5	G1	N2
S218	I	4	G2	N3	3	G2	N3
S219	E	2	G2	N3	1	G2	N3
S220	C	7	G2	N3	7	G1	N1
S221	H	5	G2	N2	5	G1	N2
S222	O	1	G2	N3	3	G2	N3
S223	B	8	G2	N3	9	GX	N1
S224	J	4	G1	N2	1	G1	N2
classe n°10: 610							
S225	A	1	G1	N1	6	G2	N3
S226	Q	7	G2	N2	5	G1	N1
S227	M	6	G1	N2	2		
S228	S	6	G2	N3	4	G2	N3
S229	S	6	G2	N3	4	G1	N2
S230	S	6	G2	N2	4	G1	N2
S231	T	8	G2	N2	5	G1	N2
S232	T	8	G1	N2	5	G1	N0
S233	L	2	G2	N2	8	G1	N1
S234	A	1	G1	N1	6	GX	N0
S235	E	2	G2	N3	1	G2	N3
S236	I	4	G1	N2	3	G2	N2
S237	D	7	G1	N1	8	G1	N1
S238	J	4	G1	N2	1	G1	N0
S239	K	3	GX	N0	7	GX	N0
S240	I	4	G1	N2	3	G1	N2
S241	G	5	G1	N1	4	G1	N2
S242	N	2	G2	N3	2	G1	N1
S243	J	4	G2	N3	1	G2	N2
S244	M	6	G1	N1	2	G1	N0

S245	B	8	G2	N3	9	G1	N1
S246	E	2	G1	N1	1	G1	N1
S247	C	7	G2	N2	7	G2	N3
S248	Q	7	G1	N1	5	G2	N3
S249	O	1	G1	N1	3	G2	N2
S250	R	2	G2	N3	4	G2	N3

Annexe 4

Changement de niveaux de van Hiele chez les élèves.

Dans chacun des tableaux les cases grisées sont celles qui correspondent associations d'exercices des questionnaires distribués aux élèves.

1. Passage à un niveau de van Hiele inférieur entre le recto et le verso.

1.1. Niveau 3 au recto et niveau inférieur au verso

1.1.1. De N3 au recto vers N2 au verso

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex.2.1		1		2					3
ex. 2.2.		2				1			3
ex. 2.3.	3			1					4
ex. 2.4.		1			4				5
ex. 2.5.			2					6	8
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			1						1
ex. 2.8.									0
ex. 2.9								1	1
Total	3	4	3	3	4	1	0	7	25

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex.2.1.		3		2					5
ex. 2.2.		1				4			5
ex. 2.3.	0			2					2
ex. 2.4.					1	2			3
ex. 2.5.			1		1			2	4
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	0	4	1	4	2	6	0	2	19

1.1.2. De N3 au recto vers N1 au verso

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex.2.1.		2							2
ex. 2.2.						3			3
ex. 2.3.	2			1					3
ex. 2.4.					2				2
ex. 2.5.							1	1	2
ex. 2.6.	3								3
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.		3							3
ex. 2.9									0
Total	5	5	0	1	2	3	1	1	18

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex.2.1.				2					2
ex. 2.2.		2				2			4
ex. 2.3.	2			1					3
ex. 2.4.			2						2
ex. 2.5.									0
ex. 2.6.	2								2
ex. 2.7.			1				4		5
ex. 2.8.		2					1		3
ex. 2.9								3	3
Total	4	4	3	3	0	2	5	3	24

1.2. De N2 au recto vers N1 au verso

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.									0
ex. 2.2.		1							1
ex. 2.3.				4					4
ex. 2.4.					2				2
ex. 2.5.			1		1				2
ex. 2.6.	2								2
ex. 2.7.			1						1
ex. 2.8.		2							2
ex. 2.9								4	4
Total	2	3	2	4	3	0	0	4	18

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		1							1
ex. 2.2.		1				1			2
ex. 2.3.				1					1
ex. 2.4.									0
ex. 2.5.					1		1		2
ex. 2.6.	5								5
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.		2					3		5
ex. 2.9								6	6
Total	5	4	0	1	1	1	4	6	22

1.3. N0 au verso

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.				3					3
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.				2					2
ex. 2.4.					1	1			2
ex. 2.5.			1				1	1	3
ex. 2.6.	2								2
ex. 2.7.			1				2		3
ex. 2.8.							3		3
ex. 2.9								2	2
Total	2	0	2	5	1	1	6	3	20

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		1		2					3
ex. 2.2.						1			1
ex. 2.3.	2			1					3
ex. 2.4.					1				1
ex. 2.5.			1		1			2	4
ex. 2.6.	4								4
ex. 2.7.							1		1
ex. 2.8.		1					1		2
ex. 2.9								1	1
Total	6	2	1	3	2	1	2	3	20

2. Passage à un niveau de van Hiele supérieur entre le recto et le verso

2.1. N0 au recto et un niveau supérieur au verso.

2.1.1. De N0 vers N1

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.		1		1					2
ex. 2.2.						3			3
ex. 2.3.	1								1
ex. 2.4.		2	1		1	3			7
ex. 2.5.			1						1
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			1				1		2
ex. 2.8.		1							1
ex. 2.9								2	2
Total	1	4	3	1	1	6	1	2	19

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.		1							1
ex. 2.2.						2			2
ex. 2.3.	1			1					2
ex. 2.4.									0
ex. 2.5.			3						3
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			2						2
ex. 2.8.									0
ex. 2.9								1	1
Total	1	1	5	1	0	2	0	1	11

2.1.2. De N0 vers N2

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.									0
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.		1	1		1				3
ex. 2.5.			3						3
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			1						1
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	0	1	5	0	1	0	0	0	7

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		1							1
ex. 2.2.						2			2
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.									0
ex. 2.5.			2						2
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	0	1	2	0	0	2	0	0	5

2.1.3. De N0 vers N3

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.									0
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.		1	1		1				3
ex. 2.5.								1	1
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			1						1
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	0	1	2	0	1	0	0	1	5

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.				1					1
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.		2	1		1	1			5
ex. 2.5.									0
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			2						2
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	0	2	3	1	1	1	0	0	8

2.2.

2.3. N1 au recto et un niveau supérieur au verso

2.3.1. De N1 vers N2

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.		5		1					6
ex. 2.2.						1			1
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.		1	2		1	3			7
ex. 2.5.			3		3			1	7
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.							2		2
ex. 2.8.							2		2
ex. 2.9									0
Total	0	6	5	1	4	4	4	1	25

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	Total
ex. 2.1.									0
ex. 2.2.		1							1
ex. 2.3.	1			1					2
ex. 2.4.					1				1
ex. 2.5.			1		2		1		4
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	1	1	1	1	3	0	1	0	8

2.3.2. De N1 vers N3

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.									0
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.					1				1
ex. 2.5.									0
ex. 2.6.	1								1
ex. 2.7.							1		1
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	1	0	0	0	1	0	1	0	3

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.				1					1
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.					2				2
ex. 2.5.							3	1	4
ex. 2.6.	2								2
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.									0
ex. 2.9									0
Total	2	0	0	1	2	0	3	1	9

2.4. N2 au recto et N3 au verso

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.				1					1
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.		1							1
ex. 2.5.					1		2	1	4
ex. 2.6.	1								1
ex. 2.7.			1						1
ex. 2.8.		1					1		2
ex. 2.9									0
Total	1	2	1	1	1	0	3	1	10

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		2		1					3
ex. 2.2.		3							3
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.		4	1		3	2			10
ex. 2.5.			2		2		3	3	10
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.							4		4
ex. 2.8.		1					2		3
ex. 2.9								1	1
Total	0	10	3	1	5	2	9	4	34

3. Maintien au même niveau de van Hiele

3.1. Maintien en N0 ou N1

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		3							3
ex. 2.2.		5				3			8
ex. 2.3.	3			2					5
ex. 2.4.		2			1				3
ex. 2.5.			1				3		4
ex. 2.6.	3								3
ex. 2.7.			3				4		7
ex. 2.8.		2					4		6
ex. 2.9.								1	1
Total	6	12	4	2	1	3	11	1	40

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		1							1
ex. 2.2.		1				1			2
ex. 2.3.				1					1
ex. 2.4.					1				1
ex. 2.5.								1	1
ex. 2.6.	3								3
ex. 2.7.			2						2
ex. 2.8.		2					1		3
ex. 2.9.								1	1
Total	3	4	2	1	1	1	1	2	15

3.2. Maintien en N2

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.				2					2
ex. 2.2.		1							1
ex. 2.3.				1					1
ex. 2.4.						2			2
ex. 2.5.			1		4			1	6
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.		1							1
ex. 2.9									0
Total	0	2	1	3	4	2	0	1	13

6ème	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		2		5					7
ex. 2.2.		1				1			2
ex. 2.3.	3			5					8
ex. 2.4.					2	1			3
ex. 2.5.			1		4		2	2	9
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.		1							1
ex. 2.9								2	2
Total	3	4	1	10	6	2	2	4	32

3.3. Maintien en N3

CM2	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.									0
ex. 2.2.									0
ex. 2.3.									0
ex. 2.4.						3			3
ex. 2.5.					1			1	2
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.									0
ex. 2.8.									0
ex. 2.9								1	1
Total	0	0	0	0	1	3	0	2	6

6 ^{ème}	ex. 1.1.	ex. 1.2.	ex. 1.3.	ex. 1.4.	ex. 1.5.	ex. 1.6.	ex. 1.7.	ex. 1.8.	total
ex. 2.1.		3		1					4
ex. 2.2.						1			1
ex. 2.3.	1			2					3
ex. 2.4.		3	1		3	6			13
ex. 2.5.			4		2		2	3	11
ex. 2.6.									0
ex. 2.7.			3				1		4
ex. 2.8.							2		2
ex. 2.9								1	1
Total	1	6	8	3	5	7	5	4	39

