



**HAL**  
open science

# Etude et réalisation d'un spectromètre compact en optique intégrée sur verre

Bruno Martin

► **To cite this version:**

Bruno Martin. Etude et réalisation d'un spectromètre compact en optique intégrée sur verre. Physique mathématique [math-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2009. Français. NNT: . tel-00392702

**HAL Id: tel-00392702**

**<https://theses.hal.science/tel-00392702>**

Submitted on 8 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : ***Optique et Radiofréquences***

Préparée à l'***Institut de Microélectronique, Electromagnétisme et Photonique -  
Laboratoire d'Hyperfréquences et de Caractérisation***

dans le cadre de l'***Ecole Doctorale Electronique, Electrotechnique,  
Automatique, Traitement du Signal (EEATS)***

présentée et soutenue publiquement

par

Bruno Martin

le 23 janvier 2009

Etude et réalisation d'un spectromètre compact  
en optique intégrée sur verre

Directeurs de thèse :

Pr. Pierre BENECH

Dr. Alain MORAND

JURY

Pr. Pierre SAGUET  
Pr. Evgueni POPOV  
Dr. Christian SEASSAL  
Pr. Pierre BENECH  
Dr. Alain MORAND  
Dr. Dominique BOSC

, Président  
, Rapporteur  
, Rapporteur  
, Directeur de thèse  
, Co-encadrant  
, Examineur



# Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier messieurs Francis Balestra et Gérard Ghibaudo, directeurs successifs de L'Institut de Microélectronique Electromagnétisme et Photonique et du Laboratoire d'Hyperfréquences et de Caractérisation, de m'avoir accueilli depuis mon stage de DEA pendant ces trois dernières années et demi.

Je tiens à remercier messieurs Evgueni Popov, professeur à l'Institut Fresnel de Marseille, et Christian Seassal, chargé de recherche à l'Institut des Nanotechnologies de Lyon pour avoir accepté de juger ces travaux de recherche et de rapporter sur mon manuscrit de thèse. Je tiens également à remercier Pierre Saguet, professeur à PHELMA d'avoir accepté de présider ce jury et Dominique Bosc, ingénieur de recherche et responsable du Centre Commun Lannionnais d'Optique d'y avoir participer.

J'adresse mes remerciements à Etienne Le Coarer et Pierre Benech, initiateurs des projets SWIFTS et LLITFS et sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu.

Je remercie chaleureusement mes directeurs de thèse Pierre Benech et Alain Morand pour m'avoir dirigé ces trois dernières années. Ils ont su me transmettre leurs connaissances et leur passion pour l'optique guidée tant au niveau théorique qu'au niveau pratique.

Merci à Aude Bouchard et Grégory Grosa pour m'avoir formé aux manipulations délicates de l'échange d'ions. Leurs conseils ont été d'une aide indispensable à la réalisation des premiers dispositifs. Je remercie particulièrement Grégory pour m'avoir aidé à adapter un banc de manipulation qui a permis les premières mesures.

Je tiens à remercier Etienne Le Coarer et Laurent Jocou pour m'avoir permis d'effectuer des mesures plus qu'importantes au Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire de Grenoble.

Merci à Davide Bucci et Jean-Emmanuel Broquin dont le savoir et les travaux m'ont permis un premier dimensionnement des structures en échange d'ions Argent/Sodium.

Je remercie Elise Ghibaudo, Celine Tavares, Alain Morand et Luiz Poffo avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner des notions d'optique au travers de travaux dirigés à l'IUT GEII et GTR.

Merci à Gilles Rostaing, Jérôme Grelin, Ernest Galbrun, Hervé Eusebe, Valier Poydenot, Philippe Boyer, Claire Brutel et Davide Bucci avec qui j'ai redécouvert et enseigné les notions de base de l'électronique à travers de travaux pratiques à l'ENSPG nouvellement PHELMA.

Je tiens à remercier Kien Phan Huy, Yannis Leguennec et Claude Gaubert pour m'avoir formé sur les travaux pratiques dispensés au Laboratoire d'Hyperfréquence et d'Optique Guidée. Je remercie aussi Nicolas Corrao et Aurélien Morales pour l'aide indispensable qu'ils

m'ont apportée sur ces TPs.

Je remercie mes collègues thésards devenus docteurs : Davide, Jérôme, Raf et Luiz ainsi que mes collègues thésards à qui je donne le relai : Lydie, Bertrand, Thomas et Armin. Je suis sûre que ces derniers feront de belles choses durant les années à venir.

Ln| } {xr| jwwòn| |xw} yj||òn| é ~wn ;r}n||n5 ;x~| yx~;n¥ yj| lj;xr{7 Vjr| ðj j ò}ð }nuunv nw }rw}nw|n5 z~n sn vn |x~;rnwm{jr mn uj vxrwm{n sx~{wòn5 mn uj vxrwm{n qn~{n yj||òn mjw| ln k~{nj~7 Ln |n{jr} }{xy uxwp mn {jyynun{ rlr un| vnruun~{| vxv nw }|5 sn ujr||n ln } {j;jru é uj vòvxr{n m~ k~{nj~ J<:< jr w|r z~0j~£ ¡ý} {n| Lq{r}|xyqn5 Vj£rvn n} Z~nw}rw7 \_x~| v0j;n¥ |x~}nw~ s~|z~0j~ mn{wrn{ vxv nw }5 sn wn ;x~| {nvn{lrn{jr sjvjr| j||n¥ yx~{ ðj7

Je remercie les personnes qui m'ont permis de participer à des pièces de théâtre. Merci à Jérémy, Cécile, Malika, Thomas, Emilie, Greg et Nosca avec qui nous avons fait revivre Brassens. J'ai passer un bon moment à me faire les mains sur les célèbres pompes à la gratte. Merci à Laurent, Marion, Delphine, Thierry, Marie, Basile, Céline, Maurice, Raphaël, Sylvia, Dominique, Bernard, Flo et Seb pour ces chouettes représentations de Scapin (haaaaa Scapin !) et cette mémorable soirée de clôture.

Ces trois années auront été sous le signe de la guitare, aussi, merci à Flo pour ce duo gratte/voix de folie. Merci au café Bayard et aux tontons Bernie et Manu de nous avoir permis de nous produire sur leur scène.

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour m'avoir encouragé et soutenu durant les périodes difficiles de cette thèse.

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 La spectrométrie de Fourier</b>	<b>3</b>
1.1 Interféromètre de Michelson . . . . .	3
1.1.1 Historique de la spectrométrie . . . . .	3
1.1.2 Spectromètre à transformée de Fourier : principe . . . . .	4
1.1.3 Obtention du spectre . . . . .	7
1.1.4 Spectromètre réel et fonction d'appareil . . . . .	8
1.1.5 Configuration statique : principe . . . . .	13
1.1.6 Conclusion . . . . .	16
1.2 Spectromètre de Fourier à réseaux entre-croisés . . . . .	16
1.3 Interférence par des milieux biréfringents . . . . .	16
1.4 Echantillonnage d'onde stationnaire . . . . .	17
1.4.1 Onde stationnaire en technologie MEMS . . . . .	17
1.4.2 Onde stationnaire en optique intégrée : SWIFTS . . . . .	18
1.5 Interféromètres en optique intégrée . . . . .	19
1.5.1 Interféromètres en optique intégrée : mesure déportée . . . . .	19
1.5.2 Interféromètres compacts . . . . .	19
1.6 De l'interférométrie à la spectrométrie . . . . .	21
1.6.1 Spectromètre à jonction-Y . . . . .	21
1.6.2 Spectromètre LLIFTS . . . . .	22
1.7 Objectifs et plan de la thèse . . . . .	23
<b>Chapitre 2 Modélisation de la structure courbe</b>	<b>25</b>
2.1 Motivations et choix de l'AFFM . . . . .	25
2.1.1 Différences finies dans le domaine temporel . . . . .	26
2.1.2 La méthode de propagation d'ondes . . . . .	28
2.1.3 Développement en modes à fuite : fonctions de Bessel . . . . .	29
2.1.4 Développement en modes propres dans plan conforme . . . . .	31
2.2 Introduction à l'AFMM . . . . .	32
2.3 Modélisation du guide courbe . . . . .	34
2.3.1 Les équations électromagnétique dans le plan $(r, \theta)$ . . . . .	35
2.3.2 Représentation dans le plan conforme . . . . .	37
2.3.3 Projection dans l'espace de Fourier . . . . .	38

2.3.4	Convergence uniforme des produits de Fourier . . . . .	41
2.3.5	Correspondance avec l'AFMM et la RCWA . . . . .	43
2.3.6	Résolution dans l'espace propre . . . . .	43
2.3.7	Relation entre l'espace propre et le plan $(r, \theta)$ . . . . .	44
2.3.8	Carte d'excitation du guide droit dans l'espace propre . . . . .	46
2.3.9	Résultats de simulation sans PMLs : RCWA . . . . .	48
2.3.10	Ajout et définition des PMLs dans le plan conforme . . . . .	50
2.4	Résultats et comparaison . . . . .	51
2.4.1	Résultats et comparaison avec la FDTD . . . . .	51
2.4.2	Résultats et comparaison modale . . . . .	54
2.4.3	Comparaison à la méthode modale analytique . . . . .	59
2.4.4	Comportement modal de la courbure . . . . .	61
2.4.5	Mise en évidence du phénomène de battement . . . . .	61
2.4.6	Conclusion sur le guide courbe . . . . .	63
2.5	Modélisation du couplage avec le guide plan . . . . .	63
2.5.1	Expressions des champs tangentiels dans une section . . . . .	64
2.5.2	Expression matricielle de la continuité des champs tangentiels . . . . .	65
2.5.3	Résultats et comparaison modale . . . . .	70
2.6	Conclusion . . . . .	72
2.7	Perspectives . . . . .	73
<b>Chapitre 3 Modélisation et performances du spectromètre</b>		<b>75</b>
3.1	Modélisation du système précédent la structure courbe . . . . .	76
3.1.1	Profil d'indice de réfraction . . . . .	76
3.1.2	Méthode de l'indice effectif . . . . .	78
3.1.3	Jonction-Y . . . . .	80
3.1.4	Guide en S . . . . .	80
3.2	Modélisation des interférences en champ lointain . . . . .	81
3.2.1	Introduction à la théorie de la diffraction . . . . .	82
3.2.2	Théorème intégrale de Helmholtz-Kirchhoff . . . . .	82
3.2.3	Application à la structure . . . . .	84
3.2.4	Modélisation du champ lointain . . . . .	85
3.2.5	Lien avec la transformée de Fourier . . . . .	86
3.2.6	Echantillonnage des modes propres . . . . .	86
3.2.7	Images des interférences sur les détecteurs . . . . .	87
3.2.8	Conclusion . . . . .	90
3.3	Modèle de fuite et optimisation de la structure courbe . . . . .	90
3.3.1	Modèle de fuite . . . . .	90
3.3.2	Evolution de l'indice effectif du mode fondamental . . . . .	94
3.3.3	Evolution du gap pour un profil d'intensité arbitraire . . . . .	95
3.3.4	Expression du profil d'intensité sur les détecteurs . . . . .	96
3.3.5	Résultats . . . . .	98
3.3.6	Conclusion . . . . .	101

3.4	Traitement du profil d'intensité - obtention du spectre . . . . .	101
3.4.1	Lien entre l'intensité détectée et la densité spectrale . . . . .	102
3.4.2	Motivations et énoncé de la transformée de Fourier adaptée . . . . .	104
3.4.3	Calibration en nombre d'onde . . . . .	107
3.4.4	Simulation d'un interférogramme et restitution du spectre . . . . .	108
3.4.5	Simulation de la résolution . . . . .	109
3.4.6	Simulation de la gamme de longueur d'onde . . . . .	110
3.5	Performances attendues . . . . .	111
3.6	Conclusion et Perspectives . . . . .	113
3.6.1	Conclusion . . . . .	113
3.6.2	Perspectives . . . . .	113
<b>Chapitre 4 Validation expérimentale</b>		<b>115</b>
4.1	Réalisation du guide optique . . . . .	115
4.1.1	Silicon-On-Insulator (SOI) . . . . .	115
4.1.2	Ecriture par laser femtoseconde . . . . .	115
4.1.3	Echange ionique . . . . .	116
4.1.4	Généralités sur le verre . . . . .	116
4.1.5	Echange ionique . . . . .	116
4.2	Réalisation des composants . . . . .	118
4.2.1	Réalisation des guides . . . . .	118
4.2.2	Monomodicité du guide . . . . .	119
4.2.3	Évolution du gap . . . . .	119
4.3	Banc de caractérisation en champ proche . . . . .	121
4.3.1	Description du banc de caractérisation . . . . .	121
4.3.2	Profils d'interférences . . . . .	123
4.3.3	Transformée de Fourier . . . . .	125
4.3.4	Calibration en nombre d'onde . . . . .	126
4.3.5	Comparaison des résolutions spectrales . . . . .	127
4.3.6	Réponse en puissance . . . . .	128
4.3.7	Conclusion sur les mesures en champ proche . . . . .	128
4.4	Banc de caractérisation en dispersion . . . . .	129
4.4.1	Description du banc de caractérisation . . . . .	129
4.4.2	Gamme spectrale . . . . .	130
4.4.3	restitution de la transmission spectrale du filtre H . . . . .	131
4.4.4	Conclusion sur les mesures en dispersion . . . . .	133
4.5	Conclusion et perspectives . . . . .	133
4.5.1	Conclusion . . . . .	133
4.5.2	Perspectives . . . . .	134
<b>Conclusion Générale</b>		<b>135</b>



<b>Annexe A Équations d’Helmholtz dans le plan conforme</b>	<b>147</b>
A.1 Équations dans le plan $(r, \theta)$ . . . . .	147
A.2 Transformation conforme . . . . .	148
A.3 Cas de la polarisation TE . . . . .	148
A.4 Cas de la polarisation TM . . . . .	151
<b>Annexe B Produit de Fourier et produit inverse</b>	<b>153</b>
B.1 Rappel des produits de Fourier . . . . .	153
B.2 Application des règles . . . . .	153
<b>Annexe C Perfectly Matched Layer</b>	<b>157</b>
<b>Annexe D Expression des champs normaux à la propagation</b>	<b>163</b>
D.1 Cas de la polarisation TE . . . . .	163
D.2 Cas de la polarisation TM . . . . .	164
<b>Annexe E Expression du taux de transmission</b>	<b>167</b>
E.1 Cas de la polarisation TE . . . . .	167
E.2 Cas de la polarisation TM . . . . .	171
<b>Annexe F Formalisme de l’algorithme en matrice-S</b>	<b>173</b>
F.1 Détermination des relations d’entrée et sortie d’une section . . . . .	173
F.1.1 Détermination des matrices $t_{++}^t$ et $r_{+-}^t$ . . . . .	173
F.1.2 Détermination des matrices $r_{-+}^t$ et $t_{--}^t$ . . . . .	174
F.1.3 Résumé de la formulation matricielle . . . . .	175
F.2 Détermination des relations d’entrée et sortie du système . . . . .	175
F.2.1 Détermination des matrices $T_{++}^{[t]}$ et $R_{+-}^{[t]}$ . . . . .	176
F.2.2 Détermination des matrices $R_{-+}^{[t]}$ et $T_{--}^{[t]}$ . . . . .	177
F.2.3 Résumé de la formulation matricielle . . . . .	178
F.3 Expression des amplitudes des modes propres . . . . .	179
<b>Annexe G Théorème de Helmholtz-Kirchhoff dans le plan</b>	<b>181</b>
G.1 Théorème d’Helmholtz-Kirchhoff . . . . .	181
G.2 Application à la structure courbe . . . . .	185
G.2.1 Approximation des fonctions de Hankel . . . . .	187
G.2.2 Approximation sur la distance des détecteurs . . . . .	187

# Introduction Générale

La spectrométrie a vu le jour en 1812 suite aux travaux de Joseph Von Fraunhofer. Il fut l'inventeur du spectroscope et du réseau de diffraction. En 1881, Albert Abraham Michelson travaillant alors à la détermination de la vitesse de la lumière conçoit un instrument capable de déterminer les profils spectraux de rayonnement. L'instrument, qui portera son nom par la suite, mesure la cohérence temporelle d'un rayonnement. Via un calcul mathématique, il est alors possible de mesurer le spectre de ce rayonnement. En 1951, Peter Fellgett effectue la première transformée de Fourier numérique d'un interférogramme. Il devient alors possible de faire de la spectrométrie par transformée de Fourier grâce à l'interféromètre de Michelson. La mise en place de cet instrument est peu coûteuse et permet de mesurer des spectres avec de très hautes résolutions.

Depuis, ces spectromètres ont évolué vers des instruments de plus en plus compacts pour répondre à des besoins de place et de mobilité. L'analyse spectrale dans le domaine du proche infrarouge (pour des longueurs d'onde allant de  $0,8 \mu\text{m}$  à  $2,5 \mu\text{m}$ ) s'est considérablement développée ces dernières années avec, notamment, l'arrivée sur le marché de photodétecteurs performants. Elle est maintenant largement utilisée dans les domaines comme la médecine [1], l'astrophysique, la détection de gaz [2], l'industrie agroalimentaire [3], l'industrie pharmaceutique [4] ou encore l'industrie des polymères [5].

En 1972, l'optique intégrée sur verre a vu le jour suite aux travaux de Izawa et Nakagome [6]. Cette technique permet, par implantation ionique dans un substrat de verre, de créer localement un contraste d'indice de réfraction qui permet le guidage de la lumière. Les développements de cette technique ont permis à des instruments compacts de voir le jour et la mise en pratique d'idées nouvelles. L'optique intégrée sur verre est développée au laboratoire IMEP-LAHC depuis de nombreuses années.

Le projet LLIFTS (Leaky Loop Integrated Fourier Transform Spectrometer) est en étroite collaboration avec le projet SWIFTS (Standing Wave Fourier Transform Spectrometer). Ces projets ont été initiés par Etienne Lecoarer et Pierre Benech et ont pour but de développer des spectromètres à transformée de Fourier en optique intégrée sur verre. Ces projets se basent sur le principe photographique de Gabriel Lippmann, physicien français de la fin du 19<sup>ème</sup> siècle.

Dans cette thèse, nous nous proposons de développer et de réaliser ce nouveau spectromètre à transformée de Fourier à l'aide de la technologie d'optique intégrée sur verre. Ce spectromètre a pour but d'être compact et intégrable. L'innovation que constitue le LLIFTS est l'utilisation d'une structure qui permet de faire fuir la lumière sur une étendue arbitraire.

Dans le chapitre 1, nous exposons des éléments nécessaires à l'introduction du spectromètre LLIFTS développé durant cette thèse. Ceci a nécessité le développement d'un modèle

numérique d'une structure courbe que nous exposons dans le chapitre 2. Afin de modéliser l'intégralité du spectromètre et d'étudier ses performances, nous avons adapté le théorème intégrale d'Helmholtz-Kirchhoff à notre problème et mis au point un modèle de fuite permettant d'obtenir un profil d'intensité particulier. Cette modélisation et cette étude font l'objet du chapitre 3. Enfin, nous avons pu réaliser un premier composant au laboratoire IMEP-LAHC et effectuer des premiers traitements que nous exposons dans le chapitre 4.

# Chapitre 1

## La spectrométrie de Fourier

Dans ce chapitre, nous exposons des éléments qui nous permettront d'introduire l'instrument développé durant cette thèse : le LLIFTS. Nous commençons par exposer l'expérience de l'interféromètre de Michelson et son utilisation en spectrométrie. Puis nous abordons le concept de spectromètre à transformée de Fourier statique qui est une version figée de l'interféromètre de Michelson. Nous donnons ensuite quelques exemples de spectromètres afin d'introduire l'innovation que constitue le LLIFTS. De ce dernier concept, nous décrivons le LLIFTS et nous donnons les objectifs de la thèse.

### 1.1 Interféromètre de Michelson

#### 1.1.1 Historique de la spectrométrie

A la fin du XVII<sup>e</sup> Siècle, Isaac Newton met en évidence la composition en couleur de la lumière blanche. Lors du passage de la lumière blanche à travers un prisme dont l'indice de réfraction varie en fonction de la longueur d'onde, chaque composante de la lumière effectue un trajet différent. Si les faisceaux sont projetés sur un écran, il est alors possible d'observer la décomposition de la lumière blanche.

En 1812, alors qu'il travaillait à la conception d'objectifs de télescope achromatiques, l'opticien allemand Joseph von Fraunhofer observe le même effet de dispersion à travers une fente fine. En regardant ainsi le spectre du soleil, il observe des raies sombres jusqu'alors jamais observées. En 1814, il réalise le premier spectroscopie avec lequel il identifie 574 raies du spectre solaire [7]. Il lui vient alors à l'idée de combiner plusieurs fentes fines et il met ainsi au point le premier réseau de diffraction de l'histoire en 1821. Ce réseau présente 260 fentes et lui permet d'obtenir une résolution spectrale remarquable à l'époque. Il constate qu'en rapprochant les fentes fines, l'effet de dispersion est amplifié. Enfin, il crée des réseaux, non plus en transmission, mais cette fois-ci, en réflexion.

Dès lors, la spectroscopie devient une science quantitative qui permet de déterminer avec exactitude la longueur d'onde d'un rayonnement lumineux. Les raies d'absorption du soleil sont expliquées en 1860 par les travaux de Gustav Kirchhoff et Robert Bunsen [8]. Le spectre émis par des composants chimiques portés à incandescence ne dépend pas de la source de chaleur ni

du milieu dans lequel il se trouve. Dès lors, la composition chimique d'un matériau peut être déterminé par son analyse spectrale.

A la même époque que Joseph von Fraunhofer, Thomas Young travaille sur la théorie ondulatoire de la lumière. Il met en évidence sa théorie par l'expérience maintenant appelée l'expérience des fentes d'Young. La lumière semble se comporter comme une onde au passage dans deux fentes suffisamment fines. La lumière projetée sur un écran suffisamment loin des fentes présente des zones alternativement éclairées et sombres appelées franges d'interférence. La distance entre chacune de ces franges, appelée interfrange, est constante et proportionnelle à la longueur d'onde du signal émis. Ce phénomène d'interférence est repris par Albert Abraham Michelson un physicien américain. En 1881, celui-ci met au point un interféromètre dans le but de mettre en évidence la vitesse propagation de la lumière, cet instrument portera son nom par la suite. Il détermine avec cet instrument les profils spectraux en utilisant une méthode mathématique sur la visibilité des franges d'interférences. En 1911, le premier interférogramme est publié par Rubens et Wood.

En 1951, Peter Fellgett publie ses travaux de recherche. Une partie concerne l'avantage majeur des spectromètres à transformée de Fourier sur les spectromètres à réseaux : le multiplexage : là où le spectromètre à réseau enregistre un élément spectral, le spectromètre à transformée de Fourier les enregistre tous. L'autre partie concerne la première transformée de Fourier numérique d'un interférogramme. Les résultats obtenus par cette transformée de Fourier sont comparables à ceux obtenus avec un spectromètre à réseaux. Peu de temps avant en 1948, Pierre Jacquinot a mis en évidence un autre avantage : à résolution équivalente, la quantité d'énergie mesurée est plus grande pour un spectromètre à transformée de Fourier que pour un spectromètre à réseau. La spectrométrie à transformée de Fourier est depuis cette époque largement utilisée car elle permet la conception de spectromètres haute résolution et ceci à des prix raisonnables.

Ces dernières années, l'avènement de nouvelles technologies telles que l'optique intégrée ou les MEMS ont permis de rendre compacts ces spectromètres à transformée de Fourier. Ceux-ci peuvent atteindre aujourd'hui des tailles millimétriques.

Nous nous proposons maintenant de donner quelques éléments de spectrométrie à transformée de Fourier et nous commençons par décrire le principe de l'interféromètre de Michelson.

### 1.1.2 Spectromètre à transformée de Fourier : principe

Dans cette partie, nous présentons le principe du spectromètre à transformée de Fourier. Nous avons représenté le schéma de principe de l'interféromètre de Michelson à la figure 1.1. Cet interféromètre est composé d'un système de lentilles et de deux miroirs : l'un est fixe, l'autre est mobile.

Sur ce schéma, le faisceau issu d'une source  $S$  est collimaté et séparé en deux parties par une lame séparatrice. Chaque partie du faisceau est dirigée vers un miroir. Un miroir est fixe et l'autre est mobile. Le miroir mobile opère un déphasage d'un des faisceaux par rapport à l'autre. Enfin, Les deux faisceaux interfèrent entre eux et l'intensité issue de cette interférence est mesurée par une cellule photodéetectrice. Nous considérons ici que les amplitudes des deux faisceaux sont égales. Comme le temps d'intégration d'un photodéetecteur est grand devant la

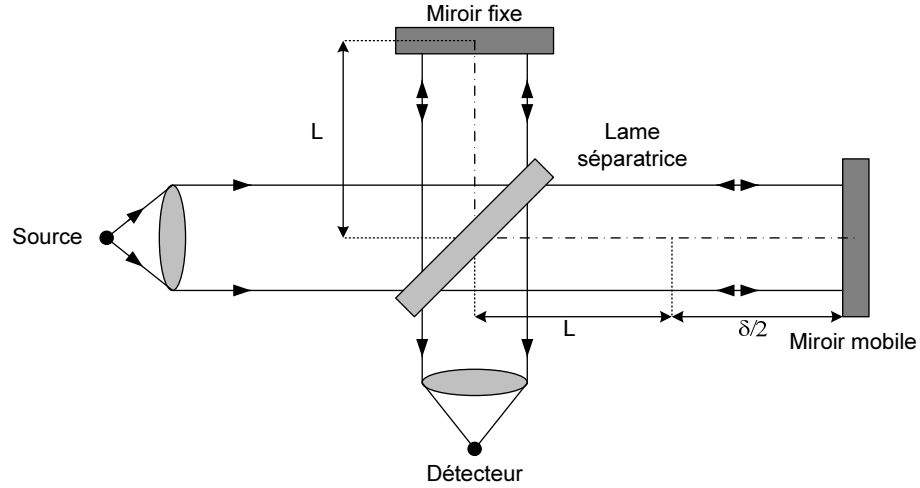


FIG. 1.1 – Schéma de principe de l'interféromètre de Michelson

période de la lumière, celui-ci détecte la moyenne temporelle du signal. L'intensité mesurée par le détecteur peut s'écrire [9] en fonction du champ électrique  $E$  du faisceau sous la forme :

$$I_d = \frac{1}{Z} \left\langle \left| E(t) + E\left(t - \frac{\delta}{c}\right) \right|^2 \right\rangle, \quad (1.1)$$

où  $Z$  est l'impédance du milieu dans lequel se propage l'onde,  $\delta$  est la différence de chemin optique introduite par le miroir mobile et  $c$  la vitesse de propagation de l'onde dans le vide. En développant l'équation (1.1), nous obtenons l'équation suivante :

$$I_d = \frac{1}{Z} \left\langle |E(t)|^2 \right\rangle + \frac{1}{Z} \left\langle \left| E\left(t - \frac{\delta}{c}\right) \right|^2 \right\rangle + \frac{1}{Z} \left( \left\langle E(t)E^*\left(t - \frac{\delta}{c}\right) \right\rangle + \left\langle E^*(t)E\left(t - \frac{\delta}{c}\right) \right\rangle \right). \quad (1.2)$$

Les deux premières moyennes temporelles de l'équation (1.2) correspondent à l'intensité  $I_0$  du signal après la division d'amplitude. Nous introduisons la notion d'auto-cohérence du signal  $\Gamma$  définie par la relation :

$$\Gamma(\tau) = \frac{1}{Z} \langle E(t)E^*(t - \tau) \rangle. \quad (1.3)$$

Dans cette expression, le temps  $\tau = \delta/c$  est le retard temporel induit par la différence de marche du miroir mobile. L'équation (1.2) devient alors :

$$I_d(\delta) = I_0 + 2\Re \left\{ \Gamma\left(\frac{\delta}{c}\right) \right\}. \quad (1.4)$$

Nous voyons ainsi apparaître la partie réelle de la fonction d'auto-cohérence du signal. Dans le cas d'un signal monochromatique de fréquence  $\nu_0$ , le champ électrique  $E$  s'exprime en fonction du temps de la façon suivante :

$$E(t) = E_0 \cos(2\pi\nu_0 t). \quad (1.5)$$

Dans ce cas, la fonction d'auto-cohérence du signal  $\Gamma$  s'écrit :

$$\Gamma\left(\frac{\delta}{c}\right) = \frac{1}{Z} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{t=+\frac{T}{2}} E_0^2 \cos(2\pi\nu_0 t) \cos\left(2\pi\nu_0\left(t - \frac{\delta}{c}\right)\right) dt \quad (1.6)$$

$$= \frac{I_0}{2} \cos\left(2\pi\nu_0 \frac{\delta}{c}\right). \quad (1.7)$$

La fonction d'auto-cohérence  $\Gamma$  varie de façon sinusoïdale en fonction de la différence de marche du miroir mobile. Nous introduisons le nombre d'onde dans le vide  $\sigma_0$  défini par la relation :

$$\sigma_0 = \frac{\nu_0}{c}. \quad (1.8)$$

L'intensité détectée dans le cas du signal monochromatique s'écrit alors :

$$I_d = I_0 (1 + \cos(2\pi\sigma_0\delta)). \quad (1.9)$$

Ainsi, l'intensité détectée se retrouve sous la forme d'une partie continue et d'une variation idéalement sinusoïdale de fréquence spatiale égale au nombre d'onde du signal.

Dans le cas d'une source polychromatique, les intensités correspondant à chaque nombre d'onde se somment indépendamment les unes des autres. Nous considérons alors la densité spectrale d'intensité  $B(\sigma)$  que nous appellerons spectre dans la suite. L'intensité détectée devient alors une somme sur le nombre d'onde  $\sigma$  et s'exprime de la façon suivante :

$$I_d = \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) (1 + \cos(2\pi\sigma\delta)) d\sigma. \quad (1.10)$$

Que nous pouvons écrire sous la forme :

$$I_d = \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) d\sigma + \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma. \quad (1.11)$$

Le premier terme de la relation (1.11) correspond à l'intensité totale du signal détectée et le deuxième terme correspond à la variation du à l'étendue spectrale du signal. Dans le cas où la source est polychromatique de largeur spectrale  $\Delta\sigma$  autour d'un nombre d'onde central  $\sigma_0$ , la fonction d'auto-cohérence s'écrit de la façon suivante :

$$\Gamma\left(\frac{\delta}{c}\right) = \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta). \quad (1.12)$$

L'intensité détectée s'exprime alors sous la forme suivante :

$$I_d = I_0(1 + \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta)). \quad (1.13)$$

Autrement dit, l'intensité varie de façon sinusoïdale et son amplitude varie en sinus cardinal et diminue au fur et à mesure que la différence de marche augmente. La figure 1.2 donne un exemple d'interférences obtenues par une source monochromatique et une source polychromatique. Nous avons représenté à gauche les spectres et à droite les intensités des figures d'interférences correspondantes.

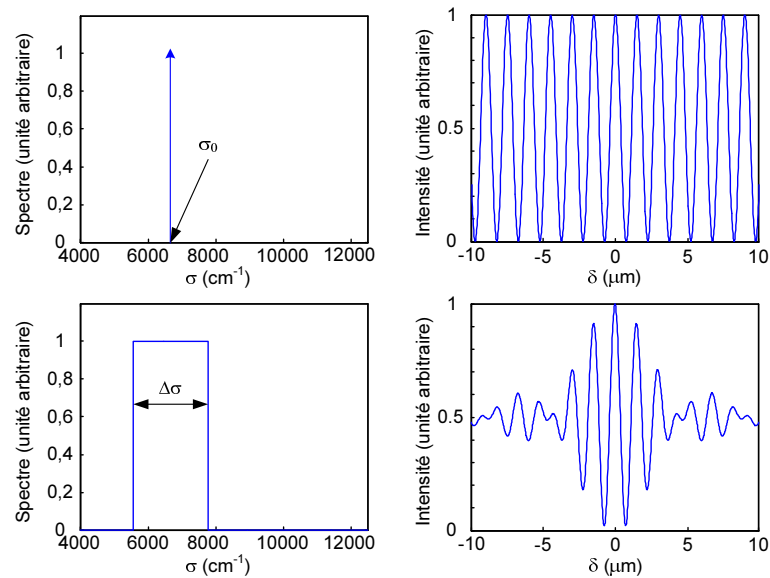


FIG. 1.2 – Schéma de correspondance entre un spectre et son interférogramme dans le cas monochromatique de nombre d'onde  $\sigma_0$  et polychromatique de largeur  $\Delta\sigma$  autour de  $\sigma_0$

Dans le cas de la source monochromatique, nous constatons bien une sinusoïde et dans le cas de la source polychromatique, nous constatons bien une évolution du contraste en fonction de la différence de marche.

Chaque signal analysé produit une figure d'interférence qui a directement rapport avec son spectre. Dans la partie suivante, nous nous proposons d'étudier la relation entre cette figure d'interférence et le spectre du signal.

### 1.1.3 Obtention du spectre

L'équation (1.11) relie l'intensité détectée en fonction du déplacement du miroir au spectre du signal. Nous définissons l'interférogramme  $I$  comme étant la partie modulée de l'intensité



détectée  $I_d$ , c'est-à-dire, sans sa composante continue. L'interférogramme s'écrit de la manière suivante :

$$I(\delta) = I_d - \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) d\sigma = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma. \quad (1.14)$$

Comme tout spectre  $B(\sigma)$  n'est physiquement défini que pour les nombres d'onde  $\sigma$  positifs, nous pouvons le considérer nul pour  $\sigma < 0$  et nous pouvons étendre l'intégrale (1.14) et cette relation devient la suivante :

$$I(\delta) = \int_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma. \quad (1.15)$$

Cette dernière relation montre que le spectre  $B(\sigma)$  du signal est lié à l'interférogramme  $I(\delta)$  mesuré par une transformée de Fourier en cosinus. Elle montre aussi que l'interférogramme est une fonction symétrique dont l'axe de symétrie est la différence de marche nulle. Le spectre  $B(\sigma)$  s'obtient alors par la transformée de Fourier inverse de l'interférogramme et s'exprime de la façon suivante :

$$B(\sigma) = \int_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} I(\delta) \cos(2\pi\sigma\delta) d\delta. \quad (1.16)$$

Ainsi la mesure de l'interférogramme d'un signal permet, par transformée de Fourier inverse, d'en obtenir sa densité spectrale d'intensité, d'où le nom spectromètre à transformée de Fourier donnée à cet instrument. Dans le cas idéal, l'interférogramme est symétrique  $I(\delta)$  car le spectre  $B(\sigma)$  est réel. Aussi, il n'est pas nécessaire de mesurer tout l'interférogramme mais seul un coté suffit. Toutefois, la mesure de l'interférogramme s'effectue par un instrument réel et nous devons prendre en compte les défauts de cet instrument et la mesure de l'ensemble de l'interférogramme peut être nécessaire. Nous parlons alors de fonction d'appareil.

## 1.1.4 Spectromètre réel et fonction d'appareil

Dans cette partie, nous exposons quelques éléments concernant la fonction d'appareil de l'instrument de mesure. Dans la pratique, il faut tenir compte par exemple, des bruits de mesure, de l'échantillonnage de l'interférogramme ou encore du déplacement maximal du miroir mobile. Ces éléments limitent l'obtention du spectre à partir des mesures.

### 1.1.4.1 Transformée de Fourier complexe

Dans la pratique, la présence de bruit de mesure (électronique, photonique) ou encore le fait qu'aucun point de mesure ne soit fait pour une différence de marche  $\delta$  nulle rend l'interférogramme dissymétrique. Afin de prendre en compte les dissymétries, il est alors nécessaire de considérer la transformée de Fourier complexe :

$$I(\delta) = \int_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) e^{-2j\pi\delta\sigma} d\sigma, \quad (1.17)$$

$$B(\sigma) = \int_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} I(\delta) e^{+2j\pi\delta\sigma} d\delta. \quad (1.18)$$

La transformée de Fourier complexe permet de prendre en compte la dissymétrie de l'interférogramme. Dans la plupart des cas, le spectre du signal est alors obtenu en prenant la valeur absolue de  $B(\sigma)$ .

#### 1.1.4.2 Effet de la troncature - résolution

Dans la pratique, l'interférogramme ne peut être mesuré sur une distance infinie. Ceci est d'autant plus vrai que les spectromètres sont compacts. L'effet de cette troncature sur l'intégrale (1.18) se traduit par l'expression suivante du spectre :

$$B(\sigma) = \int_{-\delta_{\max}}^{+\delta_{\max}} I(\delta) e^{2j\pi\delta\sigma} d\delta. \quad (1.19)$$

La troncature de l'interférogramme revient à un produit de convolution par une fonction porte définie par la relation :

$$\Pi(\delta) = \begin{cases} 1 & , \quad |\delta| < \delta_{\max} \\ 0 & , \quad |\delta| > \delta_{\max} \end{cases}. \quad (1.20)$$

Un produit dans l'espace revient à un produit de convolution dans l'espace de Fourier. Le spectre obtenu est alors convolué par la transformée de Fourier de la porte (1.20) :

$$B(\sigma) = \text{TF}\{\Pi\} \otimes \text{TF}\{I\}, \quad (1.21)$$

où  $\text{TF}\{\}$  désigne la transformée de Fourier et  $\otimes$  désigne le produit de convolution. Ceci a pour effet de modifier le pic de Dirac théorique par la transformée de Fourier de la porte  $\Pi(\delta)$ . Cette transformée de Fourier est un sinus cardinal. Cette troncature fixe la résolution spectrale du spectromètre de Fourier. La figure 1.3 illustre l'effet de la troncature de l'interférogramme. Sur cette figure, nous avons représenté à gauche l'interférogramme d'un signal monochromatique tronqué et à droite la partie réelle du spectre obtenu

Sur cette figure, nous constatons que le pic de Dirac théorique s'élargit en un sinus cardinal. Nous définissons la largeur à mi-hauteur comme étant la résolution spectrale de l'instrument. Celle-ci est donnée par la relation suivante :

$$\delta\sigma = \frac{0,6}{\delta_{\max}}, \quad (1.22)$$

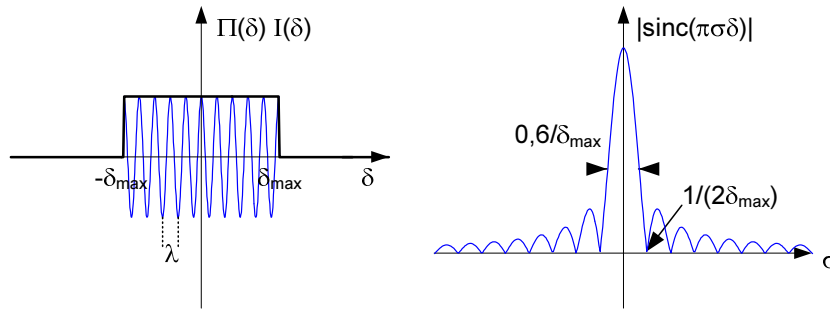


FIG. 1.3 – Effet de la troncature de l'interférogramme sur le spectre obtenu

où  $\delta_{\max}$  est la moitié de la distance sur laquelle est mesuré l'interférogramme. Le pouvoir de résolution  $R$  du spectromètre est défini par la relation suivante :

$$R = \frac{\sigma}{\delta\sigma} = 1,67\sigma\delta_{\max} = \frac{1,67\delta_{\max}}{\lambda}. \quad (1.23)$$

Autrement dit, le pouvoir de résolution  $R$  est proportionnel au facteur  $\frac{\delta_{\max}}{\lambda}$  qui correspond au nombre de périodes de modulation enregistrées sur la différence de marche maximale  $\delta_{\max}$ .

La résolution équivalente en longueur d'onde est alors donnée par la relation suivante :

$$\delta\lambda = \frac{0,6\lambda^2}{\delta_{\max}}. \quad (1.24)$$

La troncature de l'interférogramme fait apparaître des lobes secondaires qui peuvent être gênant dans le cas où nous mesurons des spectres continus. L'apodisation permet de diminuer la hauteur de ces lobes secondaires au prix d'une plus faible résolution.

### 1.1.4.3 Apodisation

Nous avons vu que la transformée de Fourier de la fonction porte est un sinus cardinal. Cette dernière fonction présente des lobes secondaires. Cet effet de troncature peut être gênant dans le cas où nous cherchons à obtenir des spectres continus. En effet, la troncature peut provoquer des distorsions dans le spectre calculé par transformée de Fourier. Afin d'éliminer ces effets, il est possible d'utiliser des fonctions d'apodisation. Ces fonctions ont aussi un intérêt dans le cas où le rapport signal sur bruit est faible au bord de l'interférogramme. L'apodisation revient à multiplier l'interférogramme par une fonction particulière remplaçant ainsi la fonction porte. La plupart des fonctions ont pour effet d'éliminer les lobes secondaires évitant ainsi les distorsions mais ceci au prix d'une résolution moins bonne.

Nous donnons un exemple de fonction d'apodisation d'une simple fonction triangle. La figure 1.4. Sur cette figure, nous avons représenté les interférogrammes apodisé et non-apodisé ainsi que les spectres résultants.

Sur cette figure, nous constatons que l'apodisation par la fonction triangle atténue les lobes secondaires (d'un facteur 0,21), mais la largeur à mi-hauteur du spectre résultant est élargie

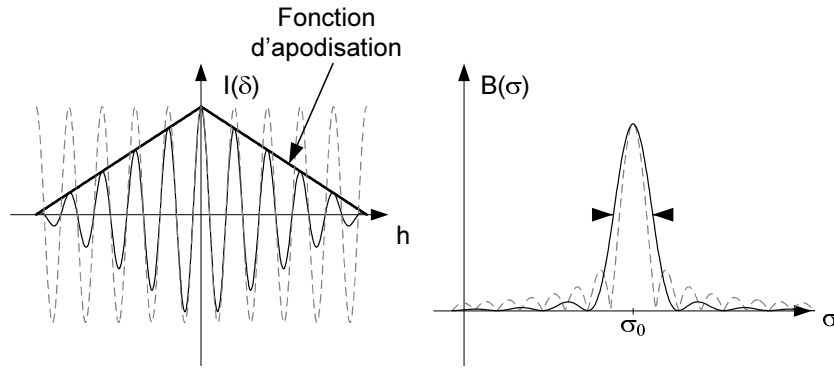


FIG. 1.4 – Apodisation d'un interférogramme : interférogramme et spectre non-apodisé en pointillés, interférogramme et spectre apodisé en trait plein

(d'un facteur 1,48). Ainsi, un compromis est à effectuer entre la résolution du spectre obtenu et la hauteur des lobes secondaires.

Des travaux récents [10] ont mené à une famille de fonctions d'apodisation permettant une optimisation de ce compromis.

#### 1.1.4.4 Échantillonnage

Physiquement, le spectre d'un rayonnement est toujours limité par un nombre d'onde maximal  $\sigma_{\max}$ . En pratique, le mouvement du miroir mobile est incrémenté par un moteur. Aussi, l'interférogramme est échantillonné avec un pas de déplacement  $p_e$  du miroir. Cela a pour effet de périodiser le spectre obtenu par transformée de Fourier. Le spectre obtenu s'exprime de la façon suivante :

$$B(\sigma) = \frac{1}{p_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B\left(\sigma - \frac{k}{p_e}\right). \quad (1.25)$$

La figure 1.5 illustre cette périodisation. Sur cette figure, nous avons représenté le spectre  $B(\sigma)$  limité par son nombre d'onde maximal  $\sigma_{\max}$ .

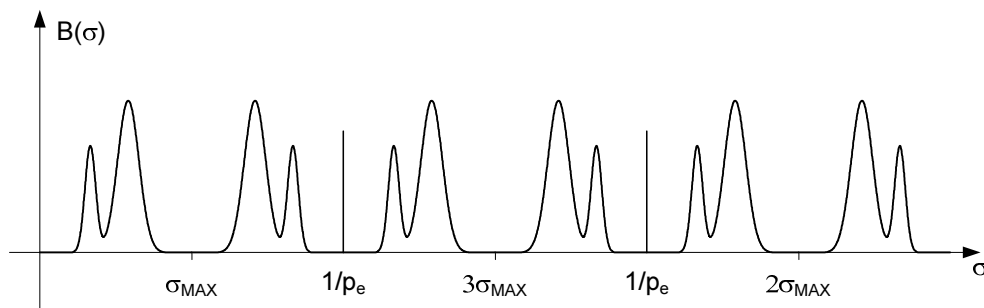


FIG. 1.5 – Reconstruction du spectre, effet de l'échantillonnage spatiale de l'interférogramme

Nous remarquons que si le pas d'échantillonnage de l'interférogramme n'est pas assez petit, le spectre obtenu subit un phénomène de recouvrement. Ainsi, le pas  $p_e$  d'échantillonnage doit

être choisi afin d'éviter le recouvrement des spectres périodisés et pour obtenir la reconstruction du spectre du signal. Le critère de Shannon-Nyquist [11] nous dit que la fréquence spatiale d'échantillonnage  $\frac{1}{p_e}$  doit être supérieure ou égale à deux fois la fréquence  $\sigma_{\max}$  maximale du spectre ou plus généralement à deux fois sa largeur spectrale  $\Delta\sigma$ . Le spectre peut alors être restitué sans ambiguïté. Ainsi, un spectre dont le nombre d'onde maximum est  $\sigma_{\max}$  peut être restitué sous la condition suivante :

$$\frac{1}{2p_e} > \sigma_{\max}(\Delta\sigma). \quad (1.26)$$

#### 1.1.4.5 Contraste

L'interférogramme se forme idéalement sur tout l'axe décrit par la différence de marche. Néanmoins, des défauts de l'instrument comme une mauvaise inclinaison d'un des miroirs ou la largeur spatiale de la source peuvent influencer le contraste de l'interférogramme. Dans le cas où cette influence est indépendante de la nature du spectre, autrement dit, de  $\sigma$ , l'interférogramme mesuré est de la forme suivante :

$$I(\delta) = C(\delta) \int_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) e^{-2j\pi\delta\sigma} d\sigma. \quad (1.27)$$

où  $C(\delta)$  est le facteur de visibilité induit par les défauts de l'instrument. Le spectre mesuré  $\bar{B}$  alors calculé a pour expression :

$$\bar{B}(\sigma) = \text{TF}\{C\} \otimes \text{TF}\{I\} = \text{TF}\{C\} \otimes B. \quad (1.28)$$

C'est-à-dire que le spectre  $\bar{B}$  mesuré est le produit de convolution du terme  $\text{TF}\{C\}$  avec le spectre réel  $B(\sigma)$ . Il est alors nécessaire d'effectuer une opération de déconvolution du contraste pour obtenir le spectre donné par la transformée de Fourier inverse de l'interférogramme. Dans le cas où l'interférogramme  $I$  est bruité et où le contraste  $C$  est faible, il devient alors difficile de retrouver le spectre réel.

#### 1.1.4.6 Bruit dans les photodétecteurs

Il existe plusieurs types de photodétecteurs opérant dans le proche infra-rouge (InGaAs, HgCdTe ...). Les détecteurs utilisés dans le proche infrarouge sont principalement à base de semi-conducteurs.

Le bruit thermique ou bruit de Johnson est dû aux fluctuations thermiques. Il est indépendant du signal. Ces fluctuations sont gênantes dans l'infrarouge moyen et lointain car l'énergie des photons est faible. Les détecteurs doivent alors être refroidis pour permettre une bonne détection. Dans le cas du proche infrarouge, les photons ont une énergie suffisante pour être détectés, ceci à condition de disposer d'une électronique satisfaisante.

Le bruit d'obscurité est le courant qui existe dans la jonction lorsque la photodiode ne reçoit pas de lumière. Ce bruit est le résultat de générations aléatoires de paires électron-trou dans la

zone de charge d'espace du semi-conducteur. Ces générations sont dues à la température et à l'effet tunnel entre les jonctions du semi-conducteur. Ce bruit peut être atténué en soustrayant le bruit de fond à l'interférogramme.

Le bruit photonique (ou bruit de grenaille) est provoqué par les fluctuations dues à l'arrivée aléatoire de photons sur le détecteur. L'écart type de ces fluctuations est proportionnel à la racine carré du nombre de photons incidents, et donc, proportionnel à la racine carré de l'intensité détectée. Dans le domaine du proche infrarouge et du visible, il existe des détecteurs très sensibles permettant d'atteindre la limite du bruit photonique.

### 1.1.5 Configuration statique : principe

Le spectromètre à transformée de Fourier utilise un miroir mobile qui permet la mesure de l'interférogramme dans le temps. Il est possible de générer cet interférogramme spatialement et de l'échantillonner à l'aide d'une barrette ou d'une matrice de photodétecteurs. Ainsi, le système est figé et ne présente pas de pièces mobiles. L'interférogramme est mesuré en une fois sur tous les détecteurs en même temps. La plupart des barrettes de photodétecteurs ont des tailles et des périodes de l'ordre de la dizaine de  $\mu\text{m}$ , aussi, il est nécessaire d'agrandir l'interférogramme afin de ne pas le sous-échantillonner.

Un autre problème lié au spectromètres statiques est le bruit lié à l'électronique de lecture des barrettes de photodétecteurs. Néanmoins, les progrès effectués sur les photodétecteurs ces dernières années permettent d'obtenir des rapports signal à bruit convenables.

#### 1.1.5.1 Exemple de configuration statique

Nous donnons un exemple de configuration statique obtenu dans la littérature [12]. La figure 1.6 présente un exemple de configuration de l'interféromètre de Michelson statique en triangle. Sur cette figure, nous avons représenté à gauche le schéma du spectromètre statique. Le faisceau issu de la source  $S$  est focalisé sur une lame séparatrice. Une partie de ce faisceau est réfléchi par le miroir 2 puis par le miroir 1 tandis que l'autre partie effectue le trajet inverse. Le miroir 1 est décalé d'une distance  $a$  de sorte que, vu des photodétecteurs, la source réelle  $S$  est dédoublée en deux sources  $S_1$  et  $S_2$  virtuelles séparées d'une distance  $L = \sqrt{2}a$ . Le schéma optique équivalent est présent à droite sur la figure 1.6.

Sans tenir compte des éléments optique et dans cet exemple de configuration, l'intensité sur les photodétecteurs est de la forme [12] :

$$I(x) = \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) \cos\left(2\pi\sigma\frac{Lx}{f}\right) d\sigma. \quad (1.29)$$

où  $L = \sqrt{2}a$  et  $a$  est la distance de décalage du miroir 1 représentée sur la figure 1.6.

Comme dans le cas précédent, le spectre se déduit de l'intensité par une transformée de Fourier inverse :

$$B(\sigma) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} I(x) e^{+2j\pi\frac{Lx}{f}\sigma} dx. \quad (1.30)$$

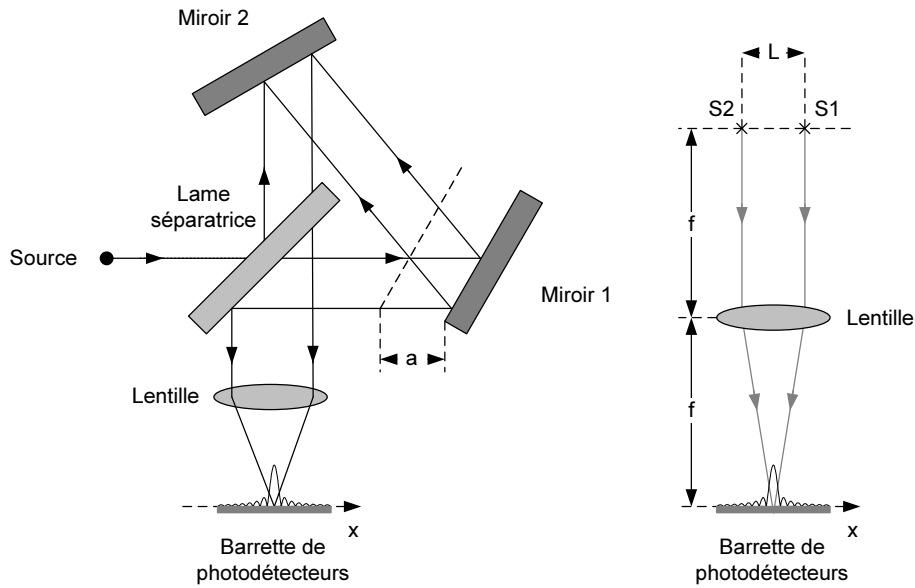


FIG. 1.6 – Schéma de principe d'un spectromètre à transformée de Fourier statique à gauche et son équivalent en terme de sources virtuelles à droite

Le système optique opère alors un agrandissement des interfranges d'un facteur  $\frac{f}{L}$ , autrement dit, une diminution de leur fréquence spatiale d'un facteur  $\frac{L}{f}$ . Si l'agrandissement des interfranges est suffisamment important, il est alors possible d'échantillonner l'interférogramme obtenu et de reconstruire le spectre du signal. Comme dans le cas de la configuration mobile, le pas d'échantillonnage  $p_e$  détermine le nombre d'onde maximal  $\sigma_{\max}$  que le spectromètre peut reconstruire. Ce pas d'échantillonnage est alors défini par la relation :

$$\frac{1}{2p_e} > \frac{L}{f} \sigma_{\max} = \frac{L}{f} \frac{1}{\lambda_{\min}}. \quad (1.31)$$

Le choix de  $L$  et de  $f$  permet alors de fixer la gamme spectrale analysable du spectromètre. Pour un pas de détecteur donné, la longueur d'onde minimale est alors proportionnelle au facteur  $\frac{f}{L}$ . La résolution atteinte dans le cas de ce spectromètre statique est donnée par la relation suivante :

$$\delta\sigma = \frac{0,6}{\frac{Lx_{\max}}{2f}} = 2 \frac{f}{L} \frac{0,6}{x_{\max}}. \quad (1.32)$$

où  $x_{\max}$  désigne la taille de la barrette de photodétecteurs. Ceci signifie que la résolution spectrale  $\delta\sigma$  est liée à la largeur  $x_{\max}$  de la barrette de photodétecteurs et au facteur  $\frac{L}{f}$  effectué sur les modulations. Nous pouvons déjà voir qu'il y a un compromis à faire entre la résolution spectrale et la gamme de longueur d'onde.

La mesure de l'intensité se faisant sur la barrette de détecteur, il faut alors tenir compte de l'épaisseurs des pixels.

### 1.1.5.2 Effet de la taille des détecteurs

La largeur des détecteurs a pour effet de mesurer la moyenne de l'interférogramme sur le détecteur. Ainsi, pour chaque détecteur  $k$  de largeur  $w$ , l'intensité  $I_e(k)$  mesurée est donnée par la relation :

$$I_e(k) = \frac{1}{w} \int_{kp_e - \frac{w}{2}}^{kp_e + \frac{w}{2}} I(x) dx. \quad (1.33)$$

Dans le cas où l'interférogramme est échantillonné par des détecteurs de largeur  $w$ , il est montré [13] que le spectre  $B(\sigma)$  s'exprime de la façon suivante :

$$B_e(\sigma) = \frac{1}{w} \text{sinc}\left(\pi w \left(\sigma - \frac{k}{p_e}\right)\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B\left(\sigma - \frac{k}{p_e}\right). \quad (1.34)$$

Dans le cas où nous ne regardons que la reconstruction du spectre pour  $k = 0$ , son expression est :

$$B_{e0}(\sigma) = \frac{1}{w} \text{sinc}(\pi w \sigma) B(\sigma). \quad (1.35)$$

Ainsi, le spectre est périodisé comme dans le cas de l'échantillonnage ponctuel et est multiplié par une fonction en sinus cardinal dépendant de la taille du détecteur. Cela a pour effet de diminuer le contraste des franges d'interférence pour des nombres d'onde élevés. La figure 1.7 représente l'effet de la largeur  $w$  des détecteurs sur le spectre. Nous avons représenté la reconstruction du spectre autour de  $\sigma = 0$ . Dans cet exemple, la largeur  $w$  est égale à 80 % de la période d'échantillonnage  $p_e$ .

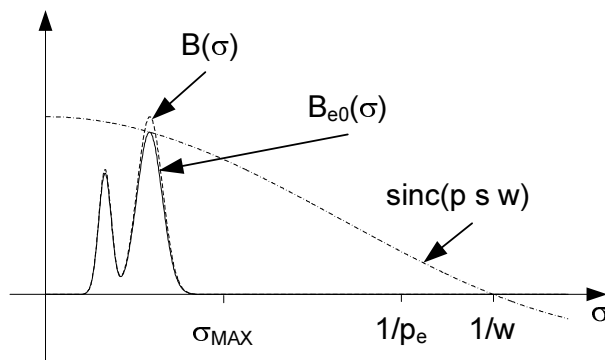


FIG. 1.7 – Reconstruction du spectre, effet de l'échantillonnage spatiale de l'interférogramme

Le spectre est ainsi modifié. La connaissance de la largeur des détecteurs permet de rehausser le spectre mais risque d'augmenter le bruit au niveau des hauts nombres d'onde.



### 1.1.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons énoncé les principaux éléments concernant la spectrométrie de Fourier. Ceci nous permet maintenant d'aborder les principaux spectromètres compacts existants afin d'introduire le spectromètre LLIFTS développé durant cette thèse.

## 1.2 Spectromètre de Fourier à réseaux entre-croisés

Les récents développement des systèmes micro-électro-mécaniques (MEMS) ont permis la réalisation et la miniaturisation de capteurs. Ce domaine de recherche utilise les technologies de la micro-électronique pour réaliser des systèmes de taille micro-métrique actionnés par des transducteurs électromagnétiques.

Dans cet exemple [14], le signal dont nous voulons déterminer le spectre est collimaté sur deux réseaux de miroirs entre-croisés. La taille de chaque élément des réseaux et leur agencement sont optimisés pour ne réfléchir que l'ordre zéro de diffraction. L'un des réseaux est fixe tandis que l'autre est mobile et actionné par un transducteur électromagnétique. Une partie du signal est réfléchié par le réseaux de miroirs mobiles, l'autre partie est réfléchié par le réseaux de miroirs fixes. L'interférogramme est mesuré en fonction du déplacement du réseaux de miroir mobile. La figure 1.8 présente à gauche le principe du spectromètre et à droite une image des réseaux entre-croisés.

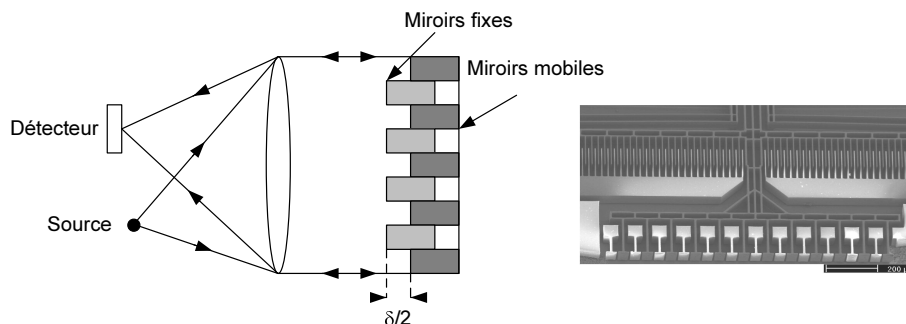


FIG. 1.8 – Schéma de principe du spectromètre de Fourier à réseaux entre-croisés à gauche et image des réseaux entre-croisés à droite

Les avantages de ce spectromètre sont sa compacité (5x5x0.5 mm), son intégrabilité et son étendue, c'est-à-dire, la quantité de lumière atteinte par le détecteur. Néanmoins, la différence de marche maximale de ce spectromètre est de l'ordre de la centaine de micromètres limitant ainsi sa résolution. Ce spectromètre atteint une résolution de l'ordre  $\delta\lambda = 13 \text{ nm}$  à  $\lambda = 1544 \text{ nm}$  [15]. De plus, le contrôle des éléments est plus difficile sur de grandes distances nécessitant ainsi des traitements de données supplémentaires.

## 1.3 Interférence par des milieux biréfringents

En transformée de Fourier statique, une méthode pour créer un profil d'interférence à partir d'un faisceau unique est de considérer la polarisabilité de la lumière. Un milieu biréfringent est

par définition un milieu où la lumière parcourt un chemin optique différent selon sa polarisation. L'utilisation de prismes de Wollaston permet de séparer un faisceau non-polarisé en deux faisceaux polarisés parcourant une distance optique différente. En utilisant un prisme de Wollaston en sortie du premier, les deux polarisations se recombinent et créent ainsi un profil d'interférence localisé. La figure 1.9 schématise le principe. La lumière incidente est non polarisée, c'est-à-dire qu'elle présente les deux polarisations liées au milieu biréfringent. Sur cette figure, les trajets de deux polarisations sont schématisés. Les deux polarisations viennent interférer sur une matrice de détecteurs créant ainsi le profil d'interférence lié à la lumière incidente.

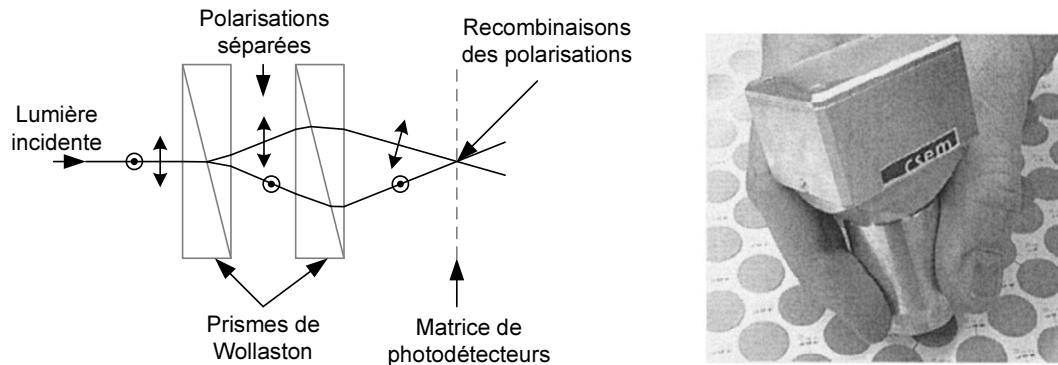


FIG. 1.9 – Schéma du spectromètre basé sur les prismes de Wollaston à gauche et photographie de l'instrument à droite

La résolution du spectromètre est  $\delta\lambda = 10 \text{ nm}$  à  $\lambda = 570 \text{ nm}$  [16]. Les récents développements [17,18] de cette configuration ont abouti à un instrument de petite taille ( $25 \times 25 \times 6 \text{ mm}^3$ ) [16] dont la compacité est limitée par la taille de la matrice de détecteurs. Ce dernier point limite l'intégrabilité planaire de l'instrument.

## 1.4 Echantillonnage d'onde stationnaire

A la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, le physicien et inventeur Gabriel Lippmann met au point un procédé de reproduction photographique basée sur une méthode interférentielle. Un substrat de verre est recouvert d'une émulsion photosensible à base de nitrate d'argent et de bromure de potassium. La couche photosensible est placée au contact de mercure lors de la prise de vue. Les ondes lumineuses se réfléchissent sur le miroir de mercure et interfèrent avec elles-mêmes à sa surface. La plaque photosensible enregistre alors la figure d'interférence produite par chaque longueur d'onde. Après le temps de pose, il suffit alors d'éclairer la plaque en lumière blanche pour voir la photographie.

Sur ce principe, des spectromètres compacts ont vu le jour. Nous nous proposons d'en donner quelques exemples.

### 1.4.1 Onde stationnaire en technologie MEMS

Dans la référence [19], le spectromètre est réalisé en technologie MEMS (Micro Electro Mechanical Systems). Le spectromètre est composé d'un miroir mobile contrôlé par un actua-

teur et d'un détecteur. La lumière émise dans le système est réfléchiée par le miroir mobile. Une figure stationnaire se crée alors entre l'onde incidente et l'onde réfléchiée. Le détecteur est un film suffisamment fin devant l'interfrange de l'onde stationnaire et absorbe peu de lumière pour ne pas détériorer l'onde stationnaire créée. La figure 1.10 schématise ce dispositif.

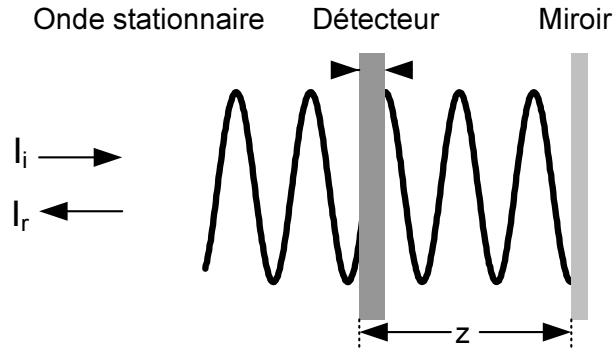


FIG. 1.10 – Schéma de principe du spectromètre à onde stationnaire en technologie MEMS

Sur ce schéma, nous avons représenté les intensités  $I_i$  incidente et  $I_r$  réfléchiée par le miroir mobile, l'onde stationnaire résultante, ainsi que le détecteur. L'onde stationnaire se déplace dans le dispositif par le mouvement  $z$  du miroir et le détecteur mesure l'intensité de cette onde en fonction  $z$ .

Dans ce spectromètre, le détecteur joue un rôle important. En effet, il doit absorber suffisamment de signal, sans pour autant perturber l'onde stationnaire créée entre l'onde incidente et l'onde réfléchiée. De plus, un phénomène de résonance apparaît entre le miroir et le détecteur qui détériore le contraste des franges d'interférences dans le dispositif.

La résolution atteinte est [20]  $\delta\lambda = 6 \text{ nm}$  à  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , ce qui correspondrait à environ  $\delta\lambda = 43 \text{ nm}$  à  $\lambda = 1700 \text{ nm}$  adaptée dans le proche infra-rouge.

## 1.4.2 Onde stationnaire en optique intégrée : SWIFTS

Le SWIFTS est l'adaptation du principe de Lippmann en optique intégrée. Dans la référence [21], l'onde stationnaire est créée dans un guide optique. Le signal est couplé dans un guide optique, séparé en deux parties idéalement égales puis interfère dans un guide droit créant ainsi une onde stationnaire. Le guide optique est un guide de surface et une partie de la lumière se propageant dans ce guide interagit avec des plots d'or déposés à sa surface. Au niveau de chaque plot d'or, une partie de l'onde stationnaire est alors diffractée et mesurée par un détecteur. Sur la figure 1.11, sont représentés à gauche, le schéma des interférences produites en lumière blanche (c'est-à-dire pour un spectre large) et à droite les résultats obtenus sur un guide en technologie d'échange ionique sur substrat de verre.

Les plots d'or sont déposés tous les  $2,7 \mu\text{m}$  et ont une largeur de  $50 \text{ nm}$ . Les premières mesures [21] ont été réalisées en injectant un signal des deux côtés du guide droit. En appliquant un déphasage, l'onde stationnaire se déplace dans le guide droit. Pour différentes valeurs du déphasage, l'onde stationnaire a été mesurée. Les premiers résultats ont donné un pouvoir de résolution de 95 à une longueur d'onde de  $863 \text{ nm}$ . Néanmoins, les plots sont trop rapprochés

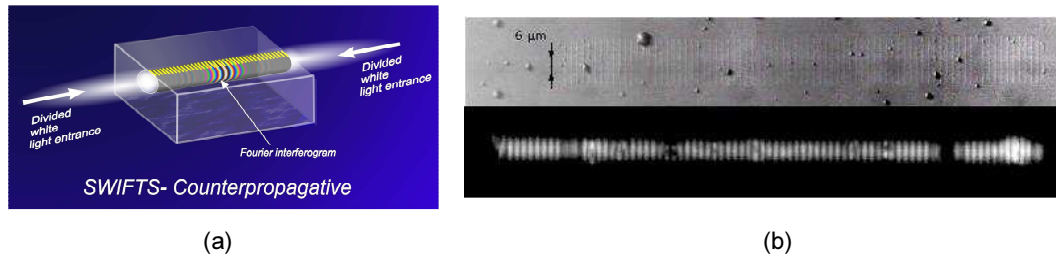


FIG. 1.11 – (a) : Schéma de principe du SWIFTS éclairé en lumière blanche extrait de la référence [22] et (b) mesures de la lumière diffractée par les plots d'or extrait de la référence [21]

pour utiliser des barrettes de photodétecteurs disponibles sur le marché.

## 1.5 Interféromètres en optique intégrée

### 1.5.1 Interféromètres en optique intégrée : mesure déportée

L'apport de l'optique intégrée est clairement la compacité et l'intégrabilité planaire. Elle permet de concevoir des structures planes et compatibles avec les processus de fabrication en microélectronique. Plus spécifiquement, l'optique intégrée sur verre par échange d'ions permet de fabriquer des composants sur un substrat de verre en une étape de lithographie.

Les travaux réalisés [23, 24] par A. Brandebourg ont mené à la conception d'un interféromètre en optique intégrée sur verre. La figure 1.12 représente le montage de l'interféromètre. Sur cette figure est représenté un laser à semi-conducteur. La lumière issue de ce laser est couplée dans un composant optique. Ce composant optique est une jonction-Y d'écart  $d$  en sortie où la puissance du signal est idéalement divisée en deux. Les signaux sortent alors du composant optique et sont diffractés par l'ouverture numérique des guides optiques. Une lentille cylindrique permet de focaliser verticalement la figure d'interférence sur une barrette de photodétecteurs CCD.

La distance entre la sortie de la jonction-Y et les capteurs CCD est de 17 cm. Elle permet d'obtenir des franges d'interférences de largeur constante sur la largeur du détecteur. Néanmoins, cette distance ne le rend pas convenable pour une utilisation en spectrométrie compacte.

### 1.5.2 Interféromètres compacts

D'autres part, des interféromètres [25, 26] de taille compacte ont été réalisés en optique intégrée sur verre. La figure 1.13 présente le principe de l'interféromètre. Le signal est injecté dans un guide droit. Comme précédemment, une jonction-Y sépare la puissance en deux parties. Les signaux parcourent les deux bras jusqu'à des tapers qui élargissent le signal de manière adiabatique. Un guide plan permet de guider verticalement la lumière jusqu'à l'arête de sortie du composant.

La figure d'interférence est alors mesurée à la sortie du composant. Néanmoins, Cet interféromètre n'est pas prévu pour faire apparaître un nombre de franges d'interférence important qui, rappelons-le détermine la résolution spectrale du spectromètre.

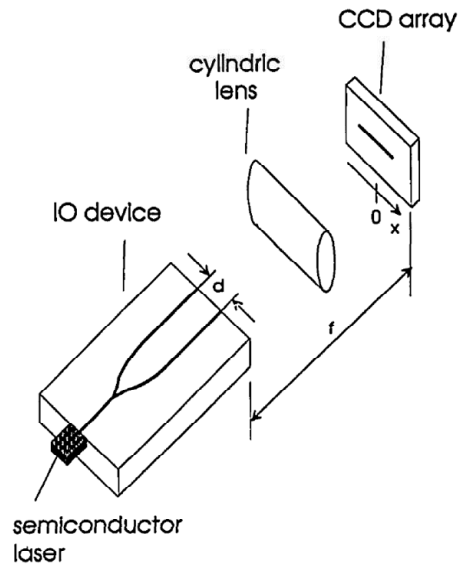


FIG. 1.12 – Schéma de l'interféromètre de Brandebourg extrait de la référence [23]

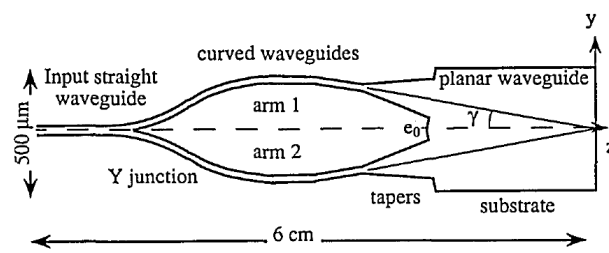


Fig. 5. Integrated-optics interferometer.

FIG. 1.13 – Schéma de l'interféromètre extrait de la référence [25]

## 1.6 De l'interférométrie à la spectrométrie

### 1.6.1 Spectromètre à jonction-Y

La première idée est d'étendre le signal sur une plus grande largeur afin de faire apparaître un maximum de franges et ainsi augmenter la résolution. L'interféromètre introduit précédemment peut alors être modifié dans ce sens. Les tapers peuvent être rétrécis afin d'augmenter la diffraction de chaque sortie. L'écart en sortie des deux bras de la jonction-Y fixe l'agrandissement effectué sur les franges d'interférences. Si les interfranges sont assez grandes, la figure d'interférence peut être convenablement échantillonnée au sens de Shannon-Nyquist. Les guides de sortie de la jonction-Y sont alors orientés de sorte que les faisceaux qui en sont issus se croisent à une distance assez grande pour satisfaire le critère de Shannon-Nyquist. La figure 1.14 schématise le spectromètre basé sur l'interféromètre précédemment introduit. Nous représentons à gauche, le spectromètre dans sa globalité. Celui-ci comprend une jonction-Y détaillée à droite, un guide plan permettant de guider la lumière jusqu'aux photodétecteurs.

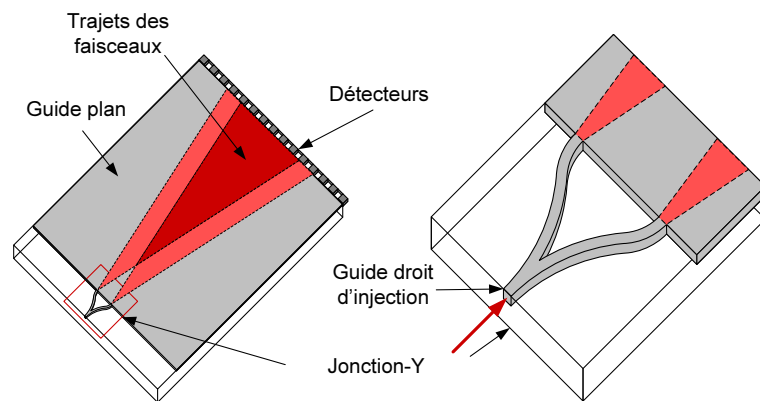


FIG. 1.14 – Schéma global du spectromètre basé sur l'interféromètre de la référence [25]

Si nous considérons une barrette de photodétecteurs de 1024 éléments et avec une largeur de pixels de  $25\ \mu\text{m}$ , la largeur totale de détection en face de sortie est  $2,56\ \text{cm}$ . La figure 1.15 représente les intensités issues des bras de la jonction-Y obtenue à  $4\ \text{cm}$  de la sortie du taper dans le cas d'un contraste d'indice de réfraction de  $3,5 \cdot 10^{-2}$ . Les guides planaires en sortie de la jonction-Y ont une largeur de  $2\ \mu\text{m}$ . La méthode de simulation utilisée est le théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff appliquée dans le plan.

Sur cette figure, nous constatons que les intensités ont une tendance de type gaussien. Les intensités se recouvrent bien sur leur largeur et nous nous attendons à obtenir un système de franges d'interférence.

Néanmoins, comme nous pouvons le constater sur cette figure, les intensités ne recouvrent pas la totalité des détecteurs. L'ouverture numérique des guides, c'est-à-dire, leur cône maximale de diffusion est limité par le contraste d'indice. L'inclinaison des bras de sortie de la jonction-Y reste possible, mais cela élargirait le composant.

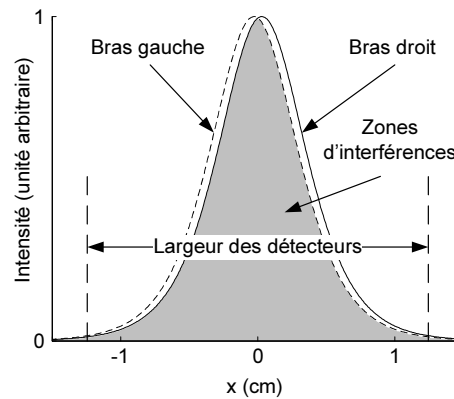


FIG. 1.15 – Intensités issues des bras gauche (en pointillés) et droit (en trait plein) de la jonction-Y en fonction de la distance sur les photodétecteurs. La zone grise représente le lieu des interférences

### 1.6.2 Spectromètre LLIFTS

L'idée du LLIFTS est d'obtenir un contraste étendu sur la largeur des détecteurs tout en limitant le signal perdu, c'est-à-dire, le signal n'atteignant pas les détecteurs. Pour ceci, nous modifions le guide de sortie de la jonction-Y précédemment introduite par une structure appropriée. La figure 1.16 schématise le spectromètre LLIFTS. La lumière est injectée par couplage dans le guide d'entrée et une jonction-Y permet de la séparer en deux parties idéalement de puissances égales. La lumière atteint alors la structure courbe qui est composée d'un guide courbe dont le rayon de courbure permet une fuite réfractive de la lumière. L'approche du guide plan le long de la propagation angulaire permet le couplage de la lumière du guide courbe dans le guide plan par effet tunnel. Au niveau d'un bras, la lumière fuit au fur et à mesure qu'elle parcourt la structure courbe. Le guide plan joue alors deux rôles : celui de contrôler la fuite de lumière et ainsi d'obtenir un profil d'interférence particulier sur les détecteurs et celui de guider la lumière verticalement vers les détecteurs.

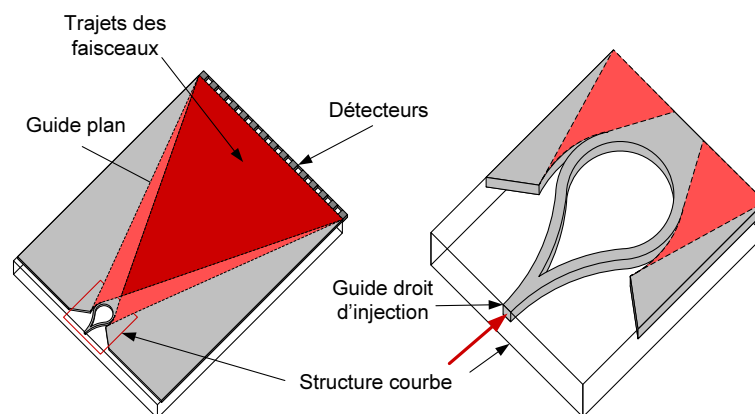


FIG. 1.16 – Schéma globale du spectromètre LLIFTS

De façon similaire à l'interféromètre de Brandebourg [23], les franges d'interférences obtenues sur les détecteurs sont agrandies par un facteur dépendant de la distance de la structure

courbe aux photodétecteurs et du rayon de courbure du guide courbe.

Un problème subsiste alors dans la récupération du signal. En effet, dans le cas de l'interféromètre de Michelson, la figure d'interférence obtenue par un signal monochromatique est idéalement sinusoïdale. Due à la géométrie de notre instrument, cette même figure ne sera pas sinusoïdale. Un traitement est alors nécessaire afin d'obtenir le spectre du signal.

Les avantages de ce composant sont dans l'intégration, la simplicité de réalisation et l'absence de pièces mobiles. La taille du composant optique sera de l'ordre de 50x25x3mm et la réalisation ne nécessite qu'une étape technologique de type microélectronique. Les inconvénients sont la nécessité d'injecter le signal dans une fibre optique ainsi que sa résolution modérée ( $\delta\lambda = 5 \text{ nm}$  à  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ ).

Le spectromètre LLIFTS est donc destiné à une utilisation fibrée où la haute résolution n'est pas nécessaire et où la compacité et la solidité sont souhaitées. Les caractéristiques de ce spectromètre peuvent correspondre à celles actuellement disponibles sur le marché dans le domaine du proche infrarouge mais avec des systèmes de micro optiques ou plus complexes.

Cette introduction nous mène aux objectifs de la thèse.

## 1.7 Objectifs et plan de la thèse

Dans ce premier chapitre, nous avons introduit le principe du spectromètre LLIFTS en donnant quelques éléments de la spectrométrie de Fourier. Durant ces trois années de thèse, les objectifs ont été les suivants :

Le premier objectif a été de modéliser l'ensemble du spectromètre depuis l'excitation du guide d'injection jusqu'à l'arête de sortie du composant.

Le premier élément de cet objectif a été de modéliser la structure courbe qui est le cœur du spectromètre et d'analyser les problèmes liés à cette structure. Cette structure comprend un guide courbe couplé avec un guide plan. Pour cela, nous avons adapté une méthode modale de Fourier (AFMM). Une approximation nous permet de modéliser cette structure en deux dimensions. Cette modélisation fait l'objet du chapitre 2.

Le deuxième élément de cet objectif a été de modéliser l'intensité qui atteint les photodétecteurs à partir de l'excitation de cette structure courbe. Une fois cette partie modélisée, il a fallu étudier une méthode de récupération du spectre à partir des interférences produites. Cette étude fait l'objet du chapitre 3.

Le deuxième objectif a été de réaliser un premier composant au laboratoire IMEP-LAHC en utilisant la technologie d'échange ionique disponible. Une première caractérisation a été effectuée sur ce premier composant et cette étude fait l'objet du chapitre 4.





# Chapitre 2

## Modélisation de la structure courbe

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le modèle développé dans cette thèse est composé de deux parties : la modélisation de la structure courbe en deux dimensions et la modélisation des interférences au loin. Dans ce chapitre, nous développons la modélisation de la structure courbe. Pour cette modélisation, nous avons utilisé une méthode modale de Fourier a périodique, autrement appelée Aperiodic Fourier Modal Method (AFMM). Cette méthode est la combinaison d'une méthode modale de Fourier et de l'utilisation de milieux absorbants non réfléchissants, appelées Perfectly Matched Layers (PMLs).

Nous commençons par présenter les motivations qui nous ont menées à choisir l'AFMM parmi les méthodes communément utilisées. Nous l'appliquons ensuite à la structure du guide courbe simple. Pour cela, nous utilisons un plan conforme dans lequel le guide est droit et a une distribution d'indice de réfraction exponentielle. Puis nous validons l'AFMM en la comparant avec d'autres méthodes. Afin de contrôler la fuite de la lumière le long du guide courbe, nous utilisons le couplage avec un guide plan de même indice de réfraction. Afin d'optimiser cette fuite, nous faisons varier la distance entre le guide courbe et le guide plan le long de la propagation. Pour prendre en compte cette variation, il nous faut mettre en cascade plusieurs sections. Nous exposons donc la méthode de mise en cascade. Nous validons ensuite la méthode concernant l'ajout du guide plan. Enfin nous concluons sur le modèle de l'AFMM appliqué à la structure courbe.

### 2.1 Motivations et choix de l'AFMM

La technologie actuelle nous permet de concevoir des guides optiques de contrastes d'indice de réfraction variés allant typiquement de  $10^{-2}$  dans le cas de l'échange d'ions  $K^+/Na^+$  sur substrat de verre à 2 dans le cas du SOI (Silicon On Insulator). Plus le contraste d'indice de réfraction est grand, plus la lumière est confinée dans le guide. Comme nous cherchons à faire fuir la lumière en courbant le guide, plus le contraste d'indice de réfraction est grand, plus il faudra le courber. Inversement, plus le contraste d'indice de réfraction est faible, moins le guide devra être courbé. De plus, la configuration planaire des guides nous permet de simplifier le problème à une modélisation 2D. Ainsi, nous cherchons une méthode de simulation de guide courbe en deux dimensions qui soit adaptable aux petits rayons comme aux grand rayons de

courbure. Nous donnons un aperçu non-exhaustif des méthodes de simulation existantes en y relevant les avantages et les inconvénients. Toutes ces méthodes ont pour but de résoudre les équations de Maxwell dont l'expression générale dans les milieux diélectriques, linéaires, sans charge ni courant est :

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathcal{E}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathcal{H}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \wedge \mathcal{E} = -\frac{\partial \mu \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \wedge \mathcal{H} = \frac{\partial \epsilon \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  sont les champs électrique et magnétique,  $\epsilon$  et  $\mu$  sont respectivement les permittivités électrique et perméabilité magnétique du milieu,  $\nabla \cdot$  est l'opérateur divergence et  $\nabla \wedge$  est l'opérateur rotationnel.

### 2.1.1 Différences finies dans le domaine temporel

La FDTD (Finite Differences Time Domain) [27] est une des méthodes de simulation les plus utilisées pour la résolution des équations de Maxwell. Elle repose sur un maillage de la zone de simulation et la discrétisation des équations de Maxwell. Sur la figure 2.1, nous avons représenté deux exemples de maillage possible pour la modélisation du guide courbe.

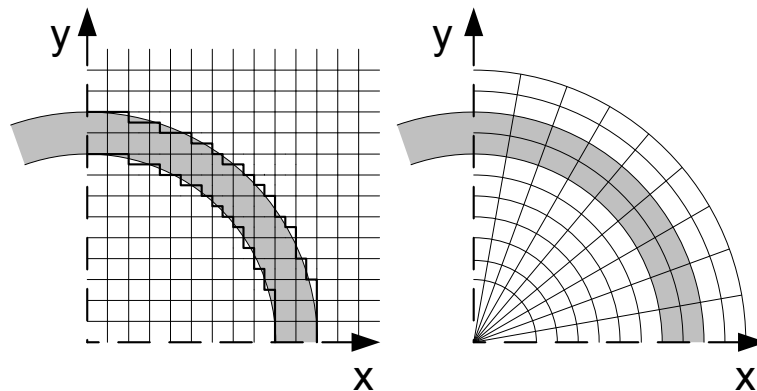


FIG. 2.1 – Schéma du maillage de la structure en cartésien (à gauche) et en cylindrique (à droite)

Sur cette figure, la zone grise correspond au guide courbe qui a un indice de réfraction plus élevé que celui du milieu symbolisé par la zone blanche. A gauche, le maillage du guide courbe est cartésien et la courbure est approchée par une discrétisation en marche d'escalier. A droite, le maillage est cylindrique et la courbure est bien représentée. Nous pouvons d'ores et déjà constater que le maillage cartésien n'est pas adapté au problème du guide courbe. Le maillage au niveau des interfaces du guide présente, en effet, un crénelage qui peut perturber l'évolution de la fuite du champ sur de longues distances [28]. Le maillage cylindrique est plus adapté.

Les équations 2.3 et 2.4 montrent que les champs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  sont liés et que la connaissance de ces champs à un instant  $t_0$  nous permet de connaître ces champs à un instant  $t_1 > t_0$  et ceci dans toute la zone de simulation.

La force de la FDTD réside dans la large diversité des milieux qui peuvent être simulés (métallique, diélectrique, non-linéaire, anisotrope) car la permittivité électrique et la perméabilité magnétique peuvent être arbitrairement choisies. Cette méthode étant une méthode temporelle, c’est-à-dire qu’une excitation peut contenir plusieurs fréquences, une simulation suffit pour obtenir la réponse de la structure en fréquence. Enfin, en utilisant des conditions appropriées aux limites de la zone de simulation, une méthode de calcul de champ lointain permet d’étendre le domaine de simulation. Pour notre problème, la FDTD serait intéressante pour simuler la réponse spectrale du guide courbe à une excitation ayant un spectre large.

Les points faibles de la FDTD viennent de la discrétisation spatiale. En effet, pour que la simulation soit concluante, il nous faut prendre un pas en espace  $(\Delta x, \Delta y)$  qui soit une fraction (en générale, un dixième) de la longueur d’onde  $\lambda$  des ondes dont nous cherchons à simuler l’évolution. Pour que la méthode soit stable, le pas en temps  $\Delta t$  doit vérifier la relation [27] :

$$\Delta t^2 \left( \frac{c_0}{n} \right)^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad (2.5)$$

où  $c_0$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $n$  l’indice de réfraction du milieu que nous voulons simuler. Si nous cherchons à simuler une structure courbe dans le cas de l’échange d’ions  $\text{Ag}^+/\text{Na}^+$ , la courbure typique pour notre application est de  $500 \mu\text{m}$  et la longueur d’onde travaille est  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  dans le milieu. La simulation est effectuée sur un quart de cercle. Le pas de simulation  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  doit être inférieur à une fraction de la longueur d’onde dans le milieu que nous choisissons en générale égale à  $\frac{\lambda}{10}$ . Le temps approximatif de parcours de l’onde sur la distance de simulation est  $n\pi * 500 \mu\text{m} / 2c_0$  et le nombre d’itérations en temps est donné par la relation :

$$\frac{n\pi * 500 \mu\text{m}}{2c_0} \frac{1}{\Delta t} > \frac{\pi * 500 \mu\text{m}}{2\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{10\pi * 500 \mu\text{m}}{2\lambda} \approx 10^4. \quad (2.6)$$

A chaque itération en temps,  $N_x * N_y$  termes doivent être calculés pour chaque composante des champs,  $N_x$  et  $N_y$  représentant le nombre de points respectivement en  $x$  et en  $y$ . Si nous bornons la zone de simulation avec des conditions aux limites adaptées, seuls quelques points sont nécessaires pour décrire la section transversale du guide, mais le nombre de points dans la section longitudinale reste important. Nous pouvons estimer la largeur transversale de simulation à  $20 \mu\text{m}$ , ce qui nous donne un nombre de points d’environ :

$$\frac{\pi * 500 * 20 \mu\text{m}^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} > \frac{10\pi * 500 * 20 \mu\text{m}^2}{2\lambda^2} \approx 10^5. \quad (2.7)$$

Ceci nous donne un nombre approximatif de  $10^9$  composantes de champ à calculer pour obtenir la simulation temporelle de l’excitation du guide courbe. Malgré l’intérêt de la FDTD

sur le domaine temporel, un nombre important d'opérations est à effectuer pour des grands rayons de courbure.

Nous en concluons que la FDTD est adaptée pour simuler l'évolution des champs dans guide courbe de faibles rayons de courbure mais n'est pas adaptée pour des grands rayons de courbure. Enfin, notons que le MIT a développé une FDTD en repère cylindrique [29] qui pourrait servir de référence.

En revanche, il existe d'autres méthodes plus rapides en adoptant en contre partie certaines approximations. Celles-ci sont en générale utilisées à  $\omega$  constant, c'est à dire, que l'on peut étudier le champ sans dépendance temporelle.

A défaut d'obtenir la réponse temporelle de l'excitation du guide courbe, nous pouvons obtenir sa réponse fréquentielle. Ceci s'effectue en considérant les harmoniques temporelles des champs électromagnétiques.

### 2.1.2 La méthode de propagation d'ondes

La méthode de propagation d'ondes (BPM) est une des méthodes les plus utilisées dans la conception et modélisation de composants optiques [30]. Cette méthode fait son apparition en 1978 [31]. La première formulation fait apparaître une approximation paraxiale où l'enveloppe de l'onde varie peu dans la direction de propagation. Cette méthode ne considère pas l'évolution dans le temps comme la FDTD mais est basée sur l'étude harmonique. Les champs ont une dépendance en  $e^{j\omega t}$  où  $\omega$  est la pulsation du champ modélisée. Compte tenu de cette dépendance et en considérant les équations 2.3 et 2.4, nous obtenons l'équation d'Helmholtz pour, par exemple, la composante  $E_z$  du champ électrique :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 n^2 E_z = 0, \quad (2.8)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu et  $k_0$  le vecteur d'onde du champ. L'approximation paraxiale revient à considérer que le champ se propage principalement dans la direction  $y$  et que son enveloppe varie peu dans cette direction. Ces approximations se traduisent par l'expression suivante :

$$E_z(x, y) = u(x, y) e^{-jk_0 n_0 y}, \quad (2.9)$$

où  $\frac{\partial u(x, y)^2}{\partial y^2} \ll -2jk_0 n_0 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ . Compte tenu de l'approximation paraxiale, l'équation 2.8 devient :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2jk_0 n_0} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2) u \right). \quad (2.10)$$

Nous nous ramenons ainsi à une dérivée partielle du premier ordre en  $y$ . Ainsi, connaissant le champ en  $y$ , nous pouvons calculer le champ en  $y + \Delta y$ .

Il existe plusieurs versions de la BPM faisant intervenir la Transformée de Fourier Rapide [31], les différences finies [32, 33] ou encore les éléments finis [34]. La BPM grand

angle permet de limiter l’approximation paraxiale grâce à l’approximation de Padé [35]. Des études [36] ont été faites sur les phénomènes de battement de mode en utilisant une version curviligne de la BPM avec les approximations de Padé. Il a été montré que cette méthode peut donner des résultats pour des rayons de courbure relativement faibles. Mais celle-ci alourdit les algorithmes et ralentit la méthode de simulation. De plus, la variation lente de l’enveloppe ne peut être satisfaite si nous voulons étudier les phénomènes de battements de modes dans des guides courbes de très faibles rayons de courbure.

Si nous voulons pouvoir étudier le comportement de chaque mode dans le guide courbe, il nous faut une méthode modale.

### 2.1.3 Développement en modes à fuite : fonctions de Bessel

Certains modes de propagation du guide courbe peuvent être déterminés analytiquement à partir des fonctions de Bessel [37]. La figure 2.2 schématise un guide courbe de largeur  $w$ , de rayon  $R$  et de répartition d’indice de réfraction  $n$ . Le coeur du guide a un indice de réfraction  $n_1$  dans un milieu d’indice de réfraction  $n_0$ .

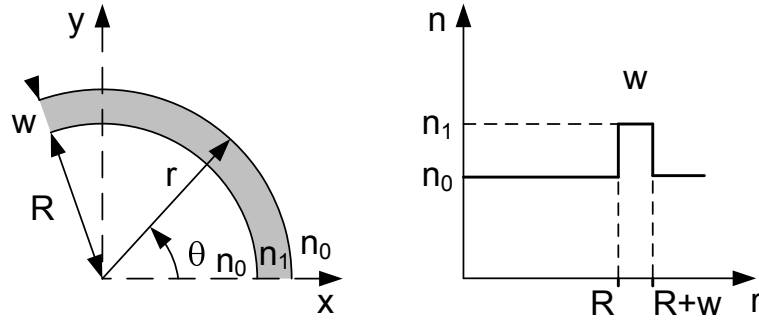


FIG. 2.2 – Schéma de la distribution d’indice de réfraction radiale

De récentes recherches menées [38] ont permis de calculer les modes à fuites se propageant dans le guide courbe. La détermination de ces modes revient à étudier le régime libre de propagation. Comme les champs se propagent selon  $\theta$ , une dépendance en  $e^{jv\theta}$  est imposée où  $v$  est la constante de propagation angulaire. La combinaison des équations de Maxwell 2.3 et 2.4 dans un milieu isotrope mène à l’équation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \left( n^2 k_0^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) \phi = 0, \quad (2.11)$$

où  $\phi$  désigne soit la composante  $E_z$  champ électrique ou  $H_z$  du champ magnétique,  $n$  la répartition d’indice de réfraction et  $k_0$  le vecteur d’onde. La solution générale de cette équation différentielle est, dans chaque région, une combinaison linéaire de fonctions de Bessel ( $J_v, Y_v$ ) et de Hankel ( $H_v^{(1)}, H_v^{(2)}$ ). Compte tenu des conditions aux limites, c’est-à-dire que le champ est borné en  $r = 0$  et qu’une seule onde se propage vers les  $r$  positifs à l’extérieur du guide, le champ  $\phi$  s’exprime :

$$\phi(r) = \begin{cases} A_0 J_\nu(n_0 k_0 r) & \text{pour } 0 \leq r \leq R \\ A_1 J_\nu(n_1 k_0 r) + B_1 Y_\nu(n_1 k_0 r) & \text{pour } R \leq r \leq R+w \\ A_2 H_\nu^{(2)}(n_0 k_0 r) & \text{pour } r \geq R+w \end{cases} \quad (2.12)$$

Il nous faut maintenant considérer deux cas bien distincts : les modes de galerie et les modes à fuite. En effet, nous regardons la propagation d'une onde dans la direction  $\theta$ . Lorsque la lumière fait un tour complet dans le guide, elle interfère avec elle-même. En tenant compte de la périodicité selon  $\theta$ , la valeur  $\nu$  prend un nombre fini de valeurs entières. Les modes ainsi obtenus sont appelés modes de galerie [39]. Dans notre cas, nous nous intéressons aux modes se propageant selon  $\theta$  sans tenir compte de cette périodicité. Afin de représenter cette indépendance de la périodicité, nous pouvons imaginer le guide courbe sous forme d'une hélicoïde. Ainsi la lumière se propage sans interférer avec elle-même. La figure 2.3 représente les deux visions adoptées du guide courbe dans le cas des modes de galerie (à gauche) et dans le cas des modes à fuite (à droite). Sur cette figure, les flèches représentent la fuite de la lumière.

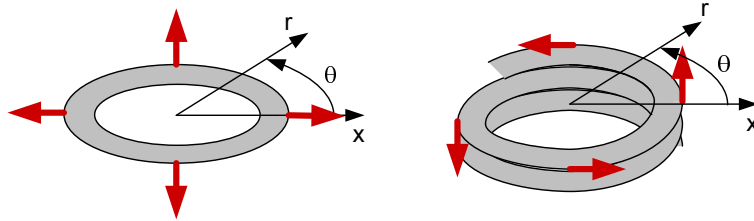


FIG. 2.3 – Schéma de propagation des modes de galerie et des modes à fuite

Physiquement, l'excitation des modes à fuite consiste à considérer une infinité d'énergie à un temps infini avant l'observation. La figure 2.4 schématise cette excitation. L'énergie parcourt un nombre infini de tours dans le guide courbe et nous observons alors un mode qui est le mode à fuite.

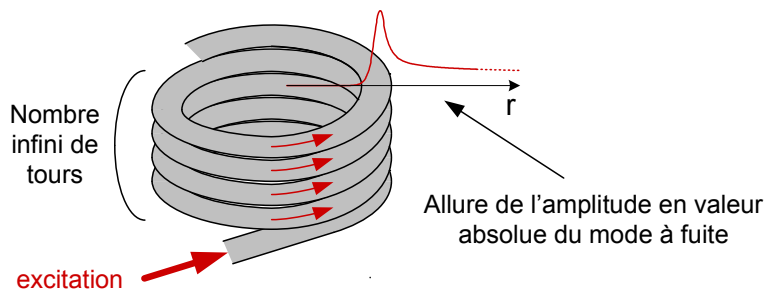


FIG. 2.4 – Schéma d'excitation des modes à fuite

Cette figure montre l'allure en valeur absolue du mode observé. Ce mode ne voit sa valeur absolue diminuer qu'à l'infini. Nous pouvons alors comprendre que les modes à fuite ne peuvent pas expérimentalement être observés. Néanmoins, ces modes ont des propriétés intéressantes dont la possibilité d'être normalisés et ils sont orthogonaux au sens de Poynting [38]. En reprenant les solutions (2.12) dans le cas des modes à fuites et en considérant les conditions de continuité des champ tangentiels aux interfaces, nous obtenons le système matriciel :

$$M \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.13)$$

où les coefficients  $A_0, A_1, B_1$  et  $A_2$  sont les solutions et  $M$  est une matrice  $4 \times 4$  contenant, entre autres, les évaluations des fonctions de Bessel et Hankel d’ordre  $\nu$  aux interfaces. La recherche de solutions non-triviales entraîne que le déterminant de la matrice  $M$  doit être nul. Ce dernier point nous donne des valeurs discrètes de  $\nu$ . Les fonctions de Bessel et de Hankel intervenant dans ce déterminant sont à ordre  $\nu$  complexe. Ces fonctions étant en général programmées pour être utilisées à ordre  $\nu$  réel, des développements uniformes sont nécessaires [40]. Ceux-ci permettent d’approcher les fonctions avec une bonne précision tant que l’ordre  $\nu$  et l’argument  $nk_0r$  sont suffisamment différents [38]. Dans le cas de guide fortement courbés, l’ordre  $\nu$  a une partie imaginaire élevée et les développements uniformes sont valables.

Malgré, la recherche des zéros du déterminant s’effectue par des méthodes qui demande des valeurs de départ (méthode de Newton, méthode de la sécante). Si cette valeur n’est pas suffisamment proche, la recherche des zéros dans le plan complexe peut être relativement longue.

Enfin, l’ensemble des modes à fuites ne constitue pas une base de mode du guide courbe. Autrement dit, la seule connaissance de ces modes ne nous permet pas de simuler convenablement la propagation du champ.

Pour conclure, le développement en mode à fuite ne convient pas pour la simulation de structure courbe puisque’elle ne prend pas en compte tous les modes de propagation. Cette méthode servira néanmoins de référence par la suite.

### 2.1.4 Développement en modes propres dans plan conforme

Afin de modéliser le guide courbe, beaucoup de méthodes basées sur le plan conforme [41] ont été développées en utilisant, par exemple, la BPM en différences finies [42], une méthode analytique basée sur l’approximation de l’exponentielle [43] ou encore la méthode des perturbations [44]. En 2002, P. Bienstman [45] a proposé l’application de la méthode de développement en mode propres (EigenMode Expansion ou EME) dans le plan conforme.

Dans le plan conforme, la répartition d’indice de réfraction de la section de propagation du champ est multipliée par une fonction exponentielle (décrite dans la partie 2.3.2). La figure 2.5 présente la section transverse à la propagation dans le plan conforme.

Cette figure décrit la zone de simulation. Celle-ci est composée au centre, du profil d’indice de réfraction du guide, de chaque côté, de couches qui absorbent le champ sans le réfléchir appelées PMLs (décrites dans la partie 2.3.10) et, aux extrémités, de murs métalliques qui imposent au champ d’être nul. La répartition d’indice de réfraction totale est discrétisée en marches d’escaliers et chaque tranche a un indice de réfraction constant.

La méthode réside dans le calcul des modes propres de la structure. Dans chaque tranche  $i$ , les champs s’expriment de manière générale :



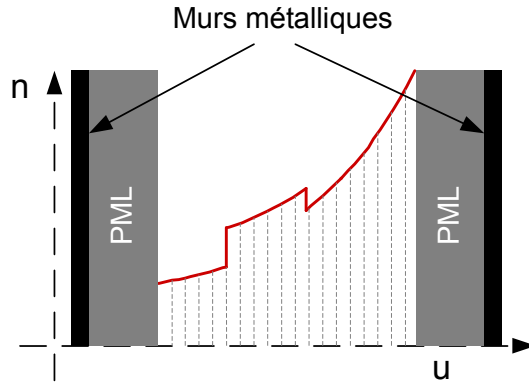


FIG. 2.5 – Schéma du plan conforme dans le cas de la EME

$$\phi_n(u_i) = A_{i,n} \cos(\beta_n u_i) + B_{i,n} \sin(\beta_n u_i), \quad (2.14)$$

où  $A_{i,n}$  et  $B_{i,n}$  sont les coefficients du mode propre  $\phi_n$  dans la tranche  $i$ ,  $\beta_n$  est la constante de propagation du mode propre  $n$  et  $u_i$  est la variable  $u$  dans la tranche  $i$ . En appliquant les conditions de continuité et de discontinuité du champ et de sa dérivée aux interfaces de chaque tranche nous obtenons un système matriciel qui lie les coefficients  $A_{i,n}$  et  $B_{i,n}$  entre eux. La condition d'annulation du champ par les murs métalliques mène à la résolution d'un système homogène [46] et à l'annulation du déterminant d'une matrice. Comme dans le cas précédent, les constantes  $\beta_n$  sont déterminées par les zéros de ce déterminant. Les coefficients  $A_{i,n}$  et  $B_{i,n}$  sont ensuite déterminés pour chaque mode à une constante près. Enfin, la normalisation des modes au sens de Poynting fixe cette constante.

La précision de cette méthode, pour ce qui est de la détermination des modes, est basée sur le nombre de tranches prises en compte pour discrétiser la fonction exponentielle. Pour la propagation du champ, la précision est basée sur le nombre de modes pris en compte.

Cette méthode est puissante dans le sens où le calcul de seulement quelques modes suffit pour obtenir une bonne précision. Néanmoins, plus le rayon de courbure est petit, plus la fonction exponentielle croît. Pour garder une bonne précision sur la discrétisation de cette fonction, il est alors nécessaire de diminuer le pas de discrétisation. Ceci a pour effet de prendre en compte un nombre de tranches plus important et d'augmenter le temps de calcul.

Afin de s'affranchir de la discrétisation de la fonction exponentielle, une autre manière de la modéliser est de la décrire dans l'espace de Fourier. C'est que nous proposons dans la partie suivante.

## 2.2 Introduction à l'AFMM

La RCWA (Rigorous Coupled Wave Analysis) est une méthode modale de Fourier initialement développée pour l'étude des réseaux de diffraction. Elle est basée sur la décomposition en série de Fourier des permittivités et perméabilités qui définissent le réseau étudié. Ceci a pour

conséquence de décomposer le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) solution du problème en série de Fourier. La figure 2.6 illustre le cas général de diffraction par un réseau diélectrique.

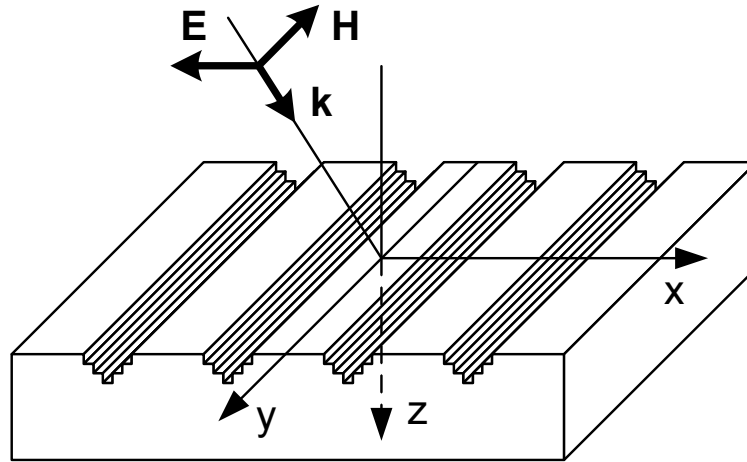


FIG. 2.6 – Schéma de structure d'un réseau

Le réseau est défini sur plusieurs couches dans la profondeur  $z$ . Une onde électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) quelconque incidente au réseau est réfléchi et transmise par celui-ci. Chaque couche du matériau diélectrique est définie par sa permittivité et sa perméabilité relative. Ces dernières sont décomposées en série de Fourier selon l'axe  $x$  avec un certain nombre d'harmoniques, ce qui entraîne la décomposition en série de Fourier des solutions et le problème est ainsi résolu dans l'espace de Fourier.

Au sens de l'électromagnétisme, la RCWA est rigoureuse car elle ne fait aucune approximation si nous considérons des réseaux lamellaires. Ceci signifie que les solutions obtenues tendent vers leur valeurs présumées exactes pour un nombre d'harmoniques infini. Cette méthode voit le jour dans les années 70 par les travaux de M. Nevière [47], K. Knop [48] et M. G. Moharam [49]. Elle donne ses premiers résultats précis [50] sur la simulation d'ordre de diffraction par des réseaux obliques par les travaux de M. G. Moharam and T. K. Gaylord. Elle est appliquée aux calculs de transmission et réflexion de plusieurs types de réseaux [51–56] mais souffre encore de lenteur de convergence pour les modes polarisés TM. En 1995, des solutions sont proposées, d'une part, par P. Lalanne et G. Michael Morris [57], d'autre part, par G. Granet et B. Guizal [58] sur la formulation des équations matricielles qui mène à une bien meilleure convergence en polarisation TM. En 1996, Li [59] propose une méthode d'utilisation du produit de Fourier dans les méthodes modales de Fourier expliquant ainsi les problèmes de convergence. La même année, Li propose un algorithme de calcul matriciel stable [59] dont nous nous servons dans cette thèse.

En 2000, P. Lalanne et E. Silberstein [60] proposent de simuler la réflexion et la transmission d'un réseau non pas décrit sur le plan d'incidence dans le cas de la RCWA mais dans la profondeur. La figure 2.7 détaille comment le problème est transposé. Le schéma de droite représente le réseau simulé et le schéma de gauche représente son équivalent dans le cas de la RCWA. Le réseau simulé correspond à une période de son équivalent en RCWA.

La structure est périodisée de la même façon que précédemment. La propagation s'effectue selon l'axe  $z$  où différentes sections sont mises en cascade. La figure 2.7 montre la correspon-

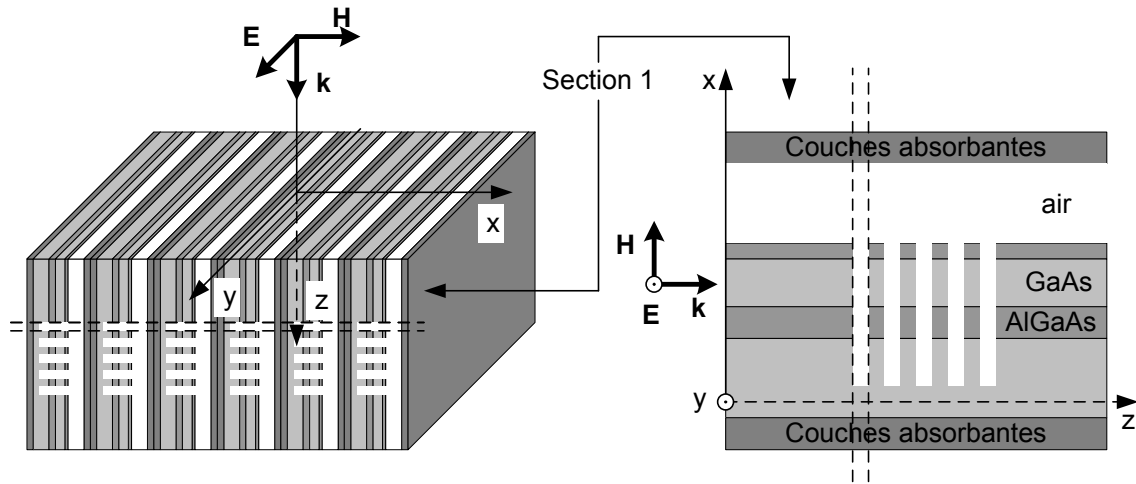


FIG. 2.7 – Schéma du passage au problème plan

dance de la section 1 entre les deux représentations. Comme l'étude ne porte que sur une période du réseau, des couches absorbantes sont ajoutées de chaque côté de la zone étudiée. La méthode donne de très bons résultats en comparaison avec d'autres modèles [61, 62]. Les couches absorbantes sont définies par un gradient d'indice de réfraction imaginaire. Ce n'est qu'en 2001 que les couches absorbantes non-réfléchissantes, autrement appelées PMLs (Perfectly Matched Layers) sont introduites dans la RCWA et comparées avec d'autres types de couches absorbantes. Les PMLs anisotropes initialement proposées par J.P. Bérenger en 1994 sont mathématiquement formulées par Z.S. Sacks [63]. En 2001, la RCWA, initialement du domaine des réseaux de diffraction, est adaptée à l'optique intégrée [64]. Les résultats sont comparables aux autres méthodes et la RCWA combinée avec les PMLs apporte une rapidité non négligeable au calcul d'indice effectif de propagation des modes dans les guides optiques. En 2005, différents types de PMLs sont comparées [65], les PMLs à transformée de coordonnées complexes sont démontrées plus efficaces pour la convergence de la méthode. En 2006, la méthode qui combine la RCWA et les PMLs est baptisée l'AFMM (Aperiodic-Fourier Modal Method). Elle est utilisée pour l'étude de micro-résonateurs [66] comme des micro-piliers [67, 68] ou des micro-disques [69]. Elle est aussi utilisée pour l'étude de cristaux photoniques [70–74] et pour l'étude spectrale des cristaux plasmoniques [75–77].

Dans cette thèse, nous étudions cette méthode appliquée au cas du guide courbe dans le plan conforme. Nous nous sommes concentrés sur le cas simple des PMLs anisotropes.

## 2.3 Modélisation du guide courbe

Dans cette partie, nous détaillons le modèle utilisé pour simuler le guide courbe simple, ainsi, une seule section est nécessaire. Pour expliquer l'enchaînement des prochaines parties, nous donnons un bref aperçu de la méthode utilisée.

La figure 2.8 résume le cheminement du modèle. Nous y avons représenté sous forme de blocs les différents passages d'espace. Nous commençons par exprimer les équations de l'électromagnétisme dans un repère cylindrique que nous appellerons indifféremment plan  $(x, y)$  ou

plan  $(r, \theta)$ . Le champ électromagnétique dans le plan  $(r, \theta)$  est noté  $(\mathbf{E}(r, \theta), \mathbf{H}(r, \theta))$ . Puis, nous exprimons ces mêmes équations dans le plan conforme  $(u, v)$ . Le champ électromagnétique dans le plan conforme  $(u, v)$  est noté  $(\mathbf{E}^c(u, v), \mathbf{H}^c(u, v))$ . Dans ce plan conforme, le guide courbe devient un guide droit avec une distribution d'indice de réfraction exponentielle. De ce plan conforme, nous projetons les équations dans l'espace de Fourier. Pour chaque fonction  $f$ , nous notons par  $\bar{f}$  le vecteur de ses coefficients de Fourier. Le champ électromagnétique dans l'espace de Fourier est noté  $(\bar{s}, \bar{u})$ . Le passage dans l'espace de Fourier nous permet de résoudre le problème de façon matricielle. De cette formulation matricielle, nous faisons apparaître un espace propre qui est constitué des modes de propagation propres du guide courbe. Nous notons  $\bar{f}_W$  le vecteur  $\bar{f}$  exprimé dans l'espace propre. Le champ électromagnétique dans l'espace propre est noté  $(\bar{s}_W, \bar{u}_W)$ .

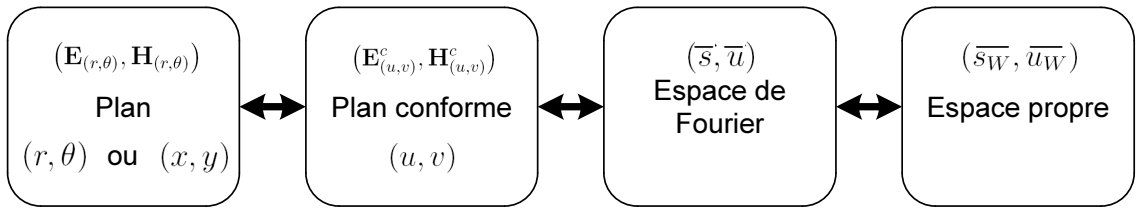


FIG. 2.8 – Schéma du résumé du modèle

Une fois les équations résolues dans cet espace propre, nous remontons à l'expression des solutions dans le repère cylindrique en passant successivement de l'espace propre à l'espace de Fourier puis au plan conforme et plan  $(x, y)$ .

### 2.3.1 Les équations électromagnétique dans le plan $(r, \theta)$

Nous considérons la lumière comme une onde électromagnétique évoluant dans un milieu linéaire, diélectrique, sans charge ni courant. Nous considérons volontairement un milieu anisotrope en vue de l'introduction des PMLs. Nous introduisons les tenseurs de permittivité relative  $[\epsilon_r]$  et de perméabilité magnétique relative  $[\mu_r]$  définis par les relations suivantes :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{rz} \end{bmatrix}, \quad [\mu_r] = \begin{bmatrix} \mu_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Dans le plan  $(x, y)$ , nous considérons un guide courbe de rayon intérieur  $R$ , de largeur  $w$  et d'indice de réfraction  $n_1$  dans un matériau d'indice de réfraction  $n_0 < n_1$  comme le décrit la figure 2.9. Par la suite, nous utiliserons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  qui sont plus adaptées au problème du guide courbe.

La distribution d'indice de réfraction  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  est radiale. Ainsi, les tenseurs permittivité et perméabilité relatives  $[\epsilon_r]$  et  $[\mu_r]$  ne dépendent que de  $r$ . Les équations de Maxwell (2.16,2.17,2.18,2.19) régissant l'évolution des champs électrique  $\mathcal{E}$  et magnétique  $\mathcal{H}$  dans le milieu considéré sont :

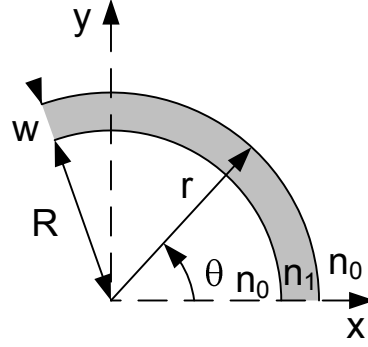


FIG. 2.9 – Schéma du guide courbe

$$\nabla \cdot ([\varepsilon_r] \varepsilon_0 \mathcal{E}) = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot ([\mu_r] \mu_0 \mathcal{H}) = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla \wedge \mathcal{E} = -\frac{\partial [\mu_r] \mu_0 \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$\nabla \wedge \mathcal{H} = \frac{\partial [\varepsilon_r] \varepsilon_0 \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Comme nous sommes dans le plan, les champs ne dépendent pas de la variable  $z$ . Nous supposons que les champs électrique et magnétique sont de la forme :

$$\mathcal{E}_{(r,\theta,z,t)} = \mathbf{E}_{(r,\theta)} e^{j\omega t}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{H}_{(r,\theta,z,t)} = \mathbf{H}_{(r,\theta)} e^{j\omega t}, \quad (2.21)$$

où  $\omega$  est la pulsation temporelle,  $\mathbf{E}_{(r,\theta)} = (E_r(r, \theta), E_\theta(r, \theta), E_z(r, \theta))$  et  $\mathbf{H}_{(r,\theta)} = (H_r(r, \theta), H_\theta(r, \theta), H_z(r, \theta))$ . En injectant les relations (2.20) et (2.21) dans les équations de Maxwell (2.18) et (2.19), nous obtenons les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rz}r} \left( \frac{\partial r H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \\ H_r = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \\ H_\theta = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{cases}, \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rz}r} \left( \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \right) \\ E_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rr}r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \\ E_\theta = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{r\theta}} \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{cases}. \quad (2.23)$$

Nous constatons que les systèmes d'équations (2.22) et (2.23) présentent deux parties indépendantes l'une de l'autre. Celles-ci correspondent aux deux polarisations transverse électrique TE et transverse magnétique TM. La connaissance des champs  $E_z$  et  $H_z$  nous donne la solution complète du problème. La combinaison des deux équations de Maxwell (2.18) et (2.19) nous

donne les équations d'Helmholtz régissant les composantes  $E_z$  et  $H_z$  selon  $z$  des champs dans le cas anisotrope :

$$k_0^2 \epsilon_{rz} E_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\mu_{rr} r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.24)$$

$$k_0^2 \mu_{rz} H_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon_{r\theta}} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\epsilon_{rr} r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.25)$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  est le vecteur d'onde.

Afin de résoudre ces équations dans l'espace de Fourier, il nous faut périodiser la distribution d'indice de réfraction  $n$ , autrement dit, les permittivités et perméabilités relatives, le long de l'axe  $r$ . Or les solutions des équations (2.24) et (2.25) sont des fonctions de Bessel [40] et ne sont pas périodiques. Nous nous proposons donc d'exprimer ces équations dans le plan conforme exponentiel.

### 2.3.2 Représentation dans le plan conforme

Considérons la transformation conforme :

$$g : Z \rightarrow W = R \ln \frac{Z}{R}, \quad (2.26)$$

où  $R$  est le rayon de courbure intérieur du guide,  $Z = x + jy = r e^{j\theta}$  et  $W = u + jv = R \ln \frac{r}{R} + jR\theta$ . Les systèmes d'équations (2.22) et (2.23) s'expriment dans le plan conforme  $(u, v)$  :

$$\begin{cases} E_z^c = \frac{1}{j\omega \epsilon_0 \epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \left( \frac{1}{R} H_\theta^c + \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} - \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \right) \\ H_r^c = -\frac{1}{j\omega \mu_0 \mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \\ H_\theta^c = \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \end{cases}, \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} H_z^c = \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \left( \frac{\partial E_r^c}{\partial v} - \frac{1}{R} E_\theta^c - \frac{\partial E_\theta^c}{\partial u} \right) \\ E_r^c = \frac{1}{j\omega \epsilon_0 \epsilon_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_z^c}{\partial v} \\ E_\theta^c = -\frac{1}{j\omega \epsilon_0 \epsilon_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_z^c}{\partial u} \end{cases}. \quad (2.28)$$

Le calcul des équations (2.27) et (2.28) est détaillé dans l'annexe A. De chaque système d'équations (2.27) et (2.28) nous obtenons les équations d'Helmholtz régissant les champs électrique  $E_z^c(u, v) = E_z(r, \theta)$  et magnétique  $H_z^c(u, v) = H_z(r, \theta)$  exprimés dans le plan conforme  $(u, v)$  :

$$k_0^2 \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} E_z^c + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2} = 0, \quad (2.29)$$

$$k_0^2 \mu_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} H_z^c + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\epsilon_{r\theta}^c} \frac{\partial H_z^c}{\partial u} \right) + \frac{1}{\epsilon_{rr}^c} \frac{\partial^2 H_z^c}{\partial v^2} = 0. \quad (2.30)$$

Comparons ces équations avec celles d'un guide droit [37] dans un plan  $(x,y)$  :

$$k_0^2 \epsilon_{rz} E_z + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{ry}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{\mu_{rx}} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = 0, \quad (2.31)$$

$$k_0^2 \mu_{rz} H_z + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\epsilon_{ry}} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon_{rx}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = 0. \quad (2.32)$$

Nous constatons que résoudre l'équation d'Helmholtz dans le plan  $(x,y)$  où le guide est courbe revient à résoudre ces mêmes équations dans le plan conforme  $(u,v)$  où le guide est droit et dont la permittivité relative ou la perméabilité relative est multipliée par la fonction  $e^{\frac{2u}{R}}$  comme l'illustre la figure 2.10. Sur cette figure, nous avons représenté à gauche le schéma du guide courbe dans le plan  $(x,y)$  et à droite, son équivalent dans le plan conforme  $(u,v)$ . Pour chaque schéma, nous avons représenté la distribution d'indice de réfraction.

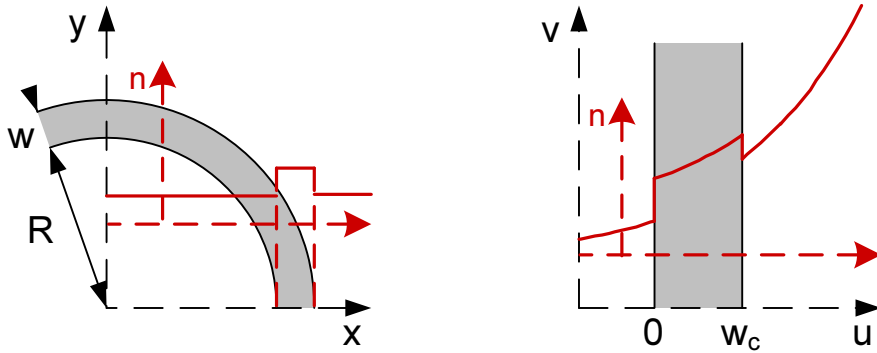


FIG. 2.10 – Schéma du guide courbe et de la permittivité relative dans le plan conforme  $(u, v)$

La distribution d'indice de réfraction dans le plan conforme  $(u, v)$  diverge exponentiellement lorsque  $u$  augmente, aussi, la lumière aura tendance à fuir du guide courbe vers les  $u$  positifs.

Nous constatons que la largeur du guide est modifiée lorsque nous passons dans le plan conforme exponentiel. Cette nouvelle largeur dépend du rayon  $R$  de la transformation conforme et a pour expression :

$$w^c = R \ln \left( \frac{R+w}{R} \right). \quad (2.33)$$

Dans les travaux réalisés sur les guides courbes dans le cadre de la transformation conforme cités plus hauts, il est appliquée en général une approximation au premier ordre dans le cas où le guide est faiblement courbé. La fonction exponentielle devient alors  $e^{\frac{u}{R}} \approx 1 + \frac{u}{R}$  et la largeur du guide  $w^c \approx w$  n'est pas modifiée par la transformation conforme. La méthode développée dans cette thèse nous permet de tenir compte de cette variation de largeur sans pour autant alourdir les calculs.

### 2.3.3 Projection dans l'espace de Fourier

Nous cherchons à résoudre les équations d'Helmholtz dans l'espace de Fourier. Pour cela, nous reproduisons artificiellement la zone de simulation contenant le guide courbe le long de

l'axe  $u$  avec une période  $\Delta u$ . La figure 2.11 schématise cette périodisation.

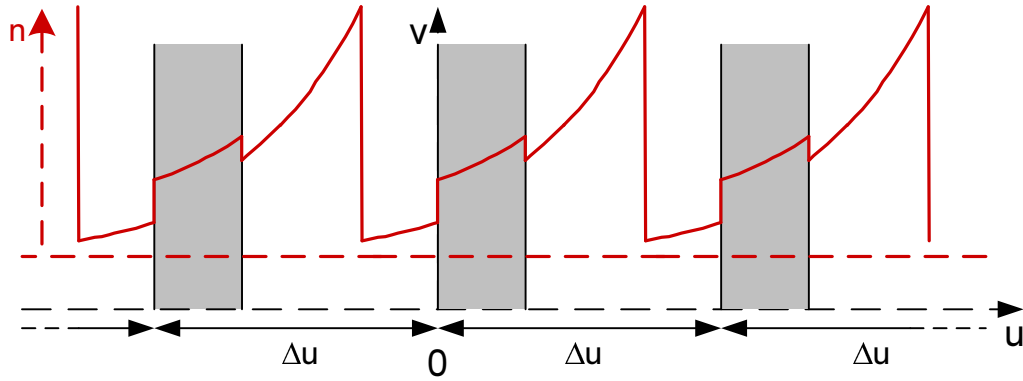


FIG. 2.11 – Schéma de la périodisation de la structure dans le plan conforme  $(u, v)$

La structure ainsi périodisée, nous pouvons décomposer les équations d'Helmholtz (2.29) et (2.30) précédemment déterminées dans l'espace de Fourier. La décomposition des permittivités et perméabilités relatives dans l'espace de Fourier entraîne que les solutions s'expriment aussi dans l'espace de Fourier.

Par exemple, une fonction  $f$  solution de l'équation (2.29) aura pour expression :

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{p=+\infty} f_p e^{j\gamma p u}, \quad (2.34)$$

où les termes  $f_n$  sont les coefficients de Fourier définis par la relation suivante :

$$f_p = \frac{1}{\Delta u} \int_{\Delta u} f(u) e^{-j\gamma p u} du, \quad (2.35)$$

et où  $\gamma = \frac{2\pi}{\Delta u}$ .

Nous voyons que l'équation (2.29) fait apparaître des produits de fonctions. Dans le cas où les fonctions ne présentent pas de discontinuités communes, le produit  $h$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  est donné par la relation suivante :

$$h = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} h_p e^{j\gamma p u} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left( \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} g_{p-q} f_q \right) e^{j\gamma p u}, \quad (2.36)$$

où  $f_p$ ,  $g_p$  et  $h_p$  sont les coefficients de Fourier des fonctions respectivement  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Comme les fonctions  $e^{j\gamma p u}$  de l'espace de Fourier sont orthogonales, les coefficients  $f_p$ ,  $g_p$  et  $h_p$  sont liés par la relation suivante :

$$h_p = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} g_{p-q} f_q. \quad (2.37)$$



Dans le cas où nous limitons les décompositions de Fourier au rang  $N$ , l'expression (2.37) devient :

$$h_p = \sum_{q=-N}^{q=+N} g_{p-q} f_q. \quad (2.38)$$

Nous faisons alors apparaître un produit matriciel. Si nous notons  $\bar{h}$  et  $\bar{f}$  les vecteurs dont les composantes sont les coefficients de Fourier des fonctions  $h$  et  $f$  respectivement, la relation (2.38) peut s'écrire :

$$\bar{h} = \llbracket g \rrbracket \bar{f}, \quad (2.39)$$

où  $\llbracket g \rrbracket$  est la matrice de Toeplitz des coefficients de Fourier de la fonction  $g$ . Cette matrice de Toeplitz est définie par la relation suivante :

$$\llbracket g \rrbracket = \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & g_{-2} & \cdots & g_{-2N+1} & g_{-2N} \\ g_1 & g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{-2N+2} & g_{-2N+1} \\ g_2 & g_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & g_{-1} & g_{-2} \\ g_{2N-1} & g_{2N-2} & \cdots & g_1 & g_0 & g_{-1} \\ g_{2N} & g_{2N-1} & \cdots & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Nous remarquons qu'il faut décrire la fonction  $g$  avec  $4N + 1$  harmoniques dans l'espace de Fourier pour pouvoir appliquer ce produit.

Nous voyons que l'équation (2.29) fait aussi apparaître des dérivées selon la variable  $u$ . Si nous reprenons notre fonction  $f$  définie par la relation (2.34), sa dérivée est donnée par la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} (j\gamma p) f_p e^{j\gamma p u}. \quad (2.41)$$

Cette relation peut s'exprimer de façon matricielle par la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = K \bar{f}, \quad (2.42)$$

où  $K$  est la matrice diagonale dont le  $(p, p)$  est  $j\gamma p$ .

Compte tenu des éléments de calculs (2.39) et (2.42), l'équation (2.29) d'Helmholtz dans le plan conforme, dans le cas de la polarisation TE ayant comme expression au préalable :

$$-\frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2} = k_0^2 \mu_{rr}^c \left( \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} E_z^c \right), \quad (2.43)$$

s'exprime dans l'espace de Fourier de la façon suivante :

$$-\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} = k_0^2 \llbracket \mu_{rr}^c \rrbracket \left( \frac{1}{k_0^2} K \llbracket \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \rrbracket K \bar{s} + \llbracket \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \rrbracket \bar{s} \right), \quad (2.44)$$

où  $\bar{s}$  est le vecteur dont les composantes sont les coefficients de Fourier de la composante  $E_z^c$  du champ électrique dans le plan conforme.

### 2.3.4 Convergence uniforme des produits de Fourier

Nous avons vu que le produit de Fourier  $h$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  revient au produit matriciel suivant :

$$\bar{h} = \llbracket g \rrbracket \bar{f}, \quad (2.45)$$

où  $\bar{h}$  et  $\bar{f}$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier des fonctions respectives  $h$  et  $f$  et  $\llbracket g \rrbracket$  est la matrice de Toeplitz des coefficients de Fourier de la fonction  $g$ . Ce produit est valable dans le cas où les fonctions ne présentent pas de discontinuités communes. Les fonctions mises en jeu dans nos équations présentent des discontinuités inhérentes à l'électromagnétisme comme, par exemple, la discontinuité de la composante normale aux interfaces du champ électrique ou les discontinuités des permittivités et perméabilités relatives aux interfaces dans le cas de guide à saut d'indice de réfraction. Aussi, la projection des équations d'Helmholtz dans l'espace de Fourier doit suivre certaines règles. Ces règles de factorisation ont été regroupées par Lifeng Li [78] pour certains cas de fonctions discontinues. Dans le cas où les fonctions  $f$  et  $g$  présentent des discontinuités communes et que leur produit  $h$  est continu, il est montré [78] que le produit de Fourier ne converge pas uniformément. Ceci signifie que le produit  $h$  est discontinu aux points de discontinuité communs à  $f$  et  $g$  et ceci ralentit la convergence des solutions. Dans ce cas, il nous faut utiliser le produit inverse défini par la relation suivante :

$$\bar{h} = \left[ \left[ \frac{1}{g} \right] \right]^{-1} \bar{f}. \quad (2.46)$$

Autrement dit, il faut utiliser la matrice de Toeplitz inverse des coefficient de Fourier de la fonction  $\frac{1}{g}$ . Nous donnons un exemple de fonction présentant des discontinuités communes. En prenant les fonctions  $f$  et  $g$  de période  $2\pi$  définies par les relations suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{pour } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (2.47)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{pour } 0 < x < \pi \end{cases}. \quad (2.48)$$

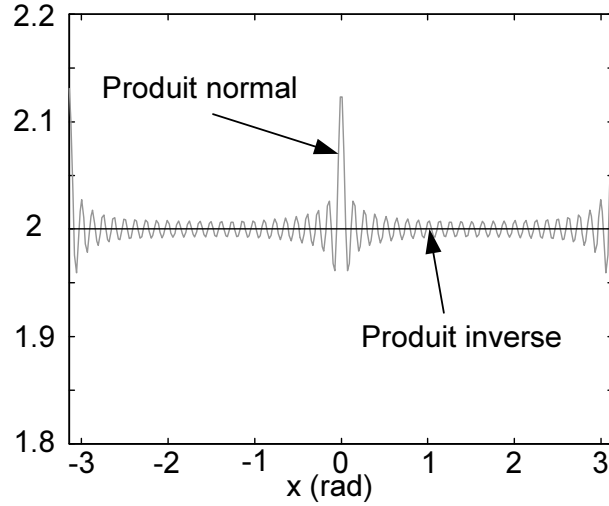


FIG. 2.12 – Illustration du produit inverse dans le cas de fonctions présentant les mêmes discontinuités pour 50 harmoniques

Les fonctions  $f$  et  $g$  présentent des discontinuités communes aux points  $x = 0$  et  $x = \pi$ . Leur produit  $h$  est continu et égale à 2. La figure 2.12 présente la reconstruction du produit  $h$  par le produit normal et le produit inverse.

Nous constatons que dans le cas du produit normal, la reconstruction de la fonction  $h$  présente des oscillations tandis que le produit inverse est fidèle au produit  $h$  des fonctions  $f$  et  $g$ .

Afin de tenir compte de ces règles, l'équation doit être remaniée. Le calcul est détaillé dans l'annexe B. L'équation matricielle dans le cas TE est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} + k_0^2 A_{\text{TE, TM}} \bar{s} = \bar{0}, \quad (2.49)$$

où  $A_{\text{TE, TM}}$  correspondent à

$$A_{\text{TE}} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \mu_{rr}^c \end{array} \right]^{-1} \left( \frac{K}{k_0} \left[ e^{\frac{u}{R}} \right] \left[ \mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}} \right]^{-1} \frac{K}{k_0} + \left[ \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \right] \right), \quad (2.50)$$

$$A_{\text{TM}} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \epsilon_{rr}^c \end{array} \right]^{-1} \left( \frac{K}{k_0} \left[ e^{\frac{u}{R}} \right] \left[ \epsilon_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}} \right]^{-1} \frac{K}{k_0} + \left[ \mu_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \right] \right), \quad (2.51)$$

où les termes  $\left[ \right]$  sont les matrices de Toeplitz associées aux décompositions de Fourier des différentes fonctions de permittivités et perméabilités relatives, le terme  $\bar{s}$  est le vecteur associé à la décomposition de Fourier de la composante  $E_z^c$  du champ électrique dans le plan conforme, la matrice  $K$  est la matrice diagonale dont le  $(p, p)$ -ième élément est  $j\gamma p$  et  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le vecteur d'onde et  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide.

### 2.3.5 Correspondance avec l'AFMM et la RCWA

Dans le cas où nous considérons un rayon de courbure  $R$  infini, c'est-à-dire que nous nous rapprochons de la configuration d'un guide droit, la fonction exponentielle  $e^{\frac{u}{R}}$  tend vers la fonction unité 1. La matrice de Toeplitz de cette fonction tend vers la matrice unité. Les variables  $(u, v)$ , dans ce cas, tendent vers les variables  $(x, y)$ . Ainsi, l'équation (2.49) dans le cas TE devient :

$$-\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} = k_0^2 \left[ \frac{1}{\mu_{rx}^c} \right]^{-1} \left( \frac{K}{k_0} \left[ \mu_{ry}^c \right]^{-1} \frac{K}{k_0} + \left[ \epsilon_{rz}^c \right] \right) \bar{s}. \quad (2.52)$$

Cette expression matricielle correspond à celle de l'AFMM dans le cas du plan  $(x, y)$  [64].

Si nous considérons maintenant un milieu isotrope et non magnétique, les perméabilités magnétiques sont égales à 1 et les matrices  $\left[ \frac{1}{\mu_{rx}^c} \right]$  et  $\left[ \mu_{ry}^c \right]$  deviennent alors des matrices unités. Nous obtenons ainsi, dans le cas TE, l'expression matricielle suivante :

$$-\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} = k_0^2 \left( \frac{K^2}{k_0^2} + \left[ \epsilon_{rz}^c \right] \right) \bar{s}, \quad (2.53)$$

qui correspond à l'expression matricielle de la RCWA dans le cas du plan  $(x, y)$  [79].

Enfin, si nous considérons un milieu isotrope et non magnétique pour l'équation matricielle (2.49), nous obtenons le problème du guide courbe dans le cas de la RCWA :

$$-\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} = k_0^2 \left( \frac{K^2}{k_0^2} + \left[ \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \right] \right) \bar{s}. \quad (2.54)$$

Cette dernière équation sera utilisée pour montrer la nécessité des PMLs.

### 2.3.6 Résolution dans l'espace propre

Dans le cas TE et TM, les composantes  $E_z^c$  et  $H_z^c$  des champs électrique et magnétique dépendent de la variable  $v$  ainsi que leurs coefficients de Fourier. Nous cherchons maintenant à déterminer leur dépendance en  $v = R\theta$  et, indirectement, leur dépendance en  $\theta$ . Comme nous cherchons des solutions sous la forme d'onde se propageant dans la direction  $\theta$ , autrement dit dans la direction  $v$ , nous nous attendons à trouver une dépendance en  $v$  de la forme  $e^{\pm jnk_0 v}$  où  $n$  est l'indice effectif de propagation.

Reprenons l'équation matricielle (2.49) dans le cas TE :

$$\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} + k_0^2 A_{TE} \bar{s} = \bar{0}, \quad (2.55)$$

où

$$A_{TE} = \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^c} \right]^{-1} \left( \frac{K}{k_0} \left[ e^{\frac{u}{R}} \right] \left[ \mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}} \right]^{-1} \frac{K}{k_0} + \left[ \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \right] \right). \quad (2.56)$$

Cette formulation nous fait apparaître une équation matricielle du second ordre en  $v$ . Afin de la résoudre, il nous faut déterminer l'espace propre de la matrice  $A_{TE}$ .

Supposons la matrice  $A_{TE}$  diagonalisable, notons  $D$  la matrice diagonale des valeurs propres  $n_q$  et  $W$  la matrice de passage de l'espace de Fourier à l'espace propre de la structure. La matrice  $A_{TE}$  a alors pour expression :

$$A_{TE} = WDW^{-1}, \quad (2.57)$$

et un vecteur  $\overline{s_W}$  dans l'espace propre a pour expression dans l'espace de Fourier :

$$\overline{s_W} = W^{-1}\overline{s}. \quad (2.58)$$

L'équation (2.55) s'exprime alors dans l'espace propre :

$$\frac{\partial^2 \overline{s_W}}{\partial v^2} + k_0^2 D \overline{s_W} = 0. \quad (2.59)$$

Les solutions  $\overline{s_W}$  de ce système d'équations différentielles du deuxième ordre sont de la forme :

$$s_{Wq} : v \rightarrow s_{Wq}(v) = s_{Wq}^+(v_0)e^{-jn_q k_0(v-v_0)} + s_{Wq}^-(v_0)e^{+jn_q k_0(v-v_0)}, \quad (2.60)$$

où  $s_{Wq}$  correspond au  $q$ -ième élément du vecteur  $\overline{s_W}$  solution de l'équation (2.59). Ses solutions correspondent bien à des ondes propagatives. Nous discernons deux types d'ondes : les ondes qui se propagent dans le sens des  $v$  positifs caractérisés par le terme  $e^{-jn_q k_0(v-v_0)}$  et les ondes qui se propagent dans le sens des  $v$  négatifs caractérisés par le terme  $e^{+jn_q k_0(v-v_0)}$ . Le terme  $v_0$  correspond à la coordonnée de début de propagation. La valeur propre  $n_q$  est l'indice effectif de propagation du mode propre  $q$ . La partie réelle de cet indice caractérise la vitesse de phase à laquelle se propage le mode dans la structure par sa partie réelle tandis que sa partie imaginaire caractérise la perte par propagation. Nous pouvons mettre sous forme matricielle :

$$\overline{s_W} = P_{v_0}^+ \overline{s_W}^+ + P_{v_0}^- \overline{s_W}^-,$$

où  $P_{v_0}^+$  et  $P_{v_0}^-$  sont les matrices diagonales de propagation dont les  $(q, q)$ -ième éléments sont respectivement les fonctions  $e^{-jn_q k_0(v-v_0)}$  et  $e^{+jn_q k_0(v-v_0)}$  et  $\overline{s_W}^+$  et  $\overline{s_W}^-$  sont les vecteurs des amplitudes des modes propres dont les  $q$ -ième termes sont respectivement  $s_{Wq}^+(v_0)$  et  $s_{Wq}^-(v_0)$ .

### 2.3.7 Relation entre l'espace propre et le plan $(r, \theta)$

Nous avons déterminé les solutions  $\overline{s_W}$  de l'espace propre de la structure. Ces solutions sont sous la forme générale de la somme des modes  $q$  associées aux valeurs propres  $n_q$ . Nous nous

proposons maintenant d'établir la relation entre l'expression générale des solutions de l'espace propre et sa correspondance dans le plan  $(r, \theta)$ .

La solution générale  $\overline{s_W}$  a pour expression dans l'espace propre :

$$\overline{s_W} = P_{v_0}^+ \overline{s_W^+} + P_{v_0}^- \overline{s_W^-}. \quad (2.61)$$

En connaissant la matrice de passage  $W$  de l'espace propre vers l'espace de Fourier, nous obtenons l'expression de la solution  $\overline{s_W}$  dans l'espace de Fourier. Ce vecteur a pour expression :

$$\overline{s} = W \overline{s_W} = W \left( P_{v_0}^+ \overline{s_W^+} + P_{v_0}^- \overline{s_W^-} \right). \quad (2.62)$$

Les éléments  $s_p$  du vecteur  $\overline{s}$  sont les coefficients de Fourier de la solution du problème. Notons que les éléments  $s_p$  dépendent de la variable de propagation  $v$ . Nous obtenons donc l'évaluation de la composante  $E_z^c(u, v)$  du champ électrique dans le plan conforme  $(u, v)$  par la relation suivante :

$$E_z^c(u, v) = \sum_{p=-N}^{p=+N} s_p e^{j\gamma p u}.$$

Enfin, nous obtenons l'expression du champ dans le plan  $(r, \theta)$  par le changement de variables  $(u, v) \rightarrow (r, \theta)$ . L'expression  $E_z(r, \theta)$  de la composante du champ électrique est donc la suivante :

$$E_z(r, \theta) = \sum_{p=-N}^{p=+N} s_p \left( \frac{r}{R} \right)^{j\gamma p R}. \quad (2.63)$$

Pour illustrer ce passage, nous donnons un exemple dans le cas où nous cherchons l'expression de la composante  $E_z$  du champ électrique propagatif d'un mode propre  $q$  de la structure. Ce mode propre est caractérisé par sa valeur propre  $n_q$ , autrement dit, son indice effectif de propagation. Nous fixons alors les valeurs initiales de propagation dans le sens des  $v$  positifs  $s_{Wq}^+(v_0) = 1$  et celui dans le sens des  $v$  négatifs  $s_{Wq}^-(v_0) = 0$ . Toutes les autres valeurs initiales sont fixées à 0. Compte tenu des formules précédemment introduites, le vecteur  $\overline{s_W}$  ne présente qu'une seule composante  $s_{Wq}$  dont l'expression est la suivante :

$$s_{Wq} = e^{-jn_q k_0 v}. \quad (2.64)$$

Son expression dans l'espace de Fourier est :

$$\overline{s}_q = W \overline{s_{Wq}}. \quad (2.65)$$

Le vecteur  $\overline{s}_q$  correspond alors au  $q$ -ième vecteur colonne de la matrice de passage  $W$  multiplié par la fonction  $e^{-jn_q k_0 v}$ . Rappelons que la fonction  $e^{-jn_q k_0 v}$  caractérise la propagation du

champ selon  $v$ . L'expression de la composante  $E_{zq}^c(u, v)$  du champ électrique du mode  $q$  dans le plan conforme  $(u, v)$  est alors :

$$E_{zq}^c(u, v) = \left( \sum_{p=-N}^{p=+N} w_{p,q} e^{j\gamma p u} \right) e^{-j n_q k_0 v}, \quad (2.66)$$

où  $w_{p,q}$  est le  $(p, q)$ -ième élément de la matrice de passage  $W$ . Et enfin, son expression  $E_{zq}(r, \theta)$  dans le plan  $(r, \theta)$  est la suivante :

$$E_{zq}(r, \theta) = \left( \sum_{p=-N}^{p=+N} w_{p,q} \left( \frac{r}{R} \right)^{j\gamma p R} \right) e^{-j n_q k_0 R \theta}. \quad (2.67)$$

Cette formule nous permet d'obtenir la carte de champ d'un mode propre de propagation.

### 2.3.8 Carte d'excitation du guide droit dans l'espace propre

Afin de simuler l'excitation d'un guide droit à l'entrée du guide courbe, il nous faut exprimer en premier lieu les cartes de champ des modes d'excitation de celui-ci dans le plan conforme. Ensuite, il nous faut projeter ces cartes dans l'espace de Fourier. Enfin, il nous faut les passer dans l'espace propre de la structure. Considérons un milieu isotrope et non-magnétique. Prenons un guide droit symétrique et plan de largeur  $w$ , d'un indice de réfraction de coeur  $n_1$  dans un matériau d'indice de réfraction  $n_0$  dans le plan  $(x, y)$ . Le schéma de la figure 2.13 représente ce guide droit. Nous y avons aussi représenté l'allure de la distribution d'indice de réfraction.

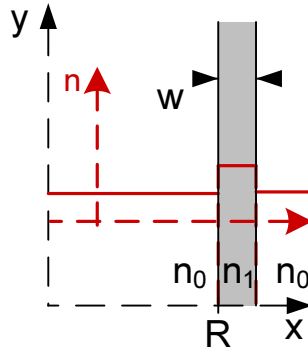


FIG. 2.13 – Schéma du guide droit

L'onde électromagnétique de polarisation TE et de pulsation  $\omega$  est régie par l'équation d'Helmholtz [37] :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 (n_0^2 - n_e^2) E_z = 0, & x < R \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 (n_1^2 - n_e^2) E_z = 0, & R < x < R + w, \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_0^2 (n_0^2 - n_e^2) E_z = 0, & R + w < x \end{cases} \quad (2.68)$$

où  $E_z$  est la composante selon  $z$  du champ électrique,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  et  $n_e$  l'indice effectif de propagation. Cet indice effectif de propagation  $n_e$  pour un mode guidé  $m$  est déterminé par l'équation caractéristique [37] suivante :

$$k_0 \sqrt{n_1 - n_e} = 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{n_e - n_0}}{\sqrt{n_1 - n_e}} \right) + m\pi. \quad (2.69)$$

La solution de l'équation d'Helmholtz (2.68) est :

$$E_{z0}(x) = \begin{cases} A_0 e^{+k_0 \sqrt{n_e^2 - n_0^2} x} & , \quad x < R \\ A_1 \cos(k_0 \sqrt{n_1^2 - n_e^2} x) \\ + B_1 \sin(k_0 \sqrt{n_1^2 - n_e^2} x) & , \quad R < x < R + w \\ A_2 e^{-k_0 \sqrt{n_e^2 - n_0^2} x} & , \quad R + w < x \end{cases} \quad (2.70)$$

où  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  et  $A_2$  sont des coefficients réels. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $E_z$  et de sa dérivée aux interfaces  $x = R$  et  $x = R + w$  nous donne un système linéaire dont les solutions sont les coefficients  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  et  $A_2$ . Le calcul des indices effectifs  $n_e$  de propagation est réalisé numériquement en annulant l'équation caractéristique (2.69) par la méthode de Newton-Raphson. Les coefficients  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  et  $A_2$  sont calculés à une constante près par la résolution numérique du système linéaire. La normalisation des champs au sens de Poynting fixe cette constante et cette normalisation est effectuée analytiquement.

Pour obtenir l'expression  $E_{z0}^c(u, v)$  de la composante du champ électrique dans le plan conforme, il suffit d'appliquer la transformation conforme (2.26) introduite précédemment à la composante  $E_{z0}(r, \theta)$  du champ dans le plan  $(r, \theta)$ . L'expression de  $E_{z0}^c$  est :

$$E_{z0}^c(u) = \begin{cases} A_0 e^{+Rk_0 \sqrt{n_e^2 - n_0^2} e^{\frac{u}{R}}} & , \quad u < 0 \\ A_1 \cos(Rk_0 \sqrt{n_1^2 - n_e^2} e^{\frac{u}{R}}) \\ + B_1 \sin(Rk_0 \sqrt{n_1^2 - n_e^2} e^{\frac{u}{R}}) & , \quad 0 < u < w_c \\ A_2 e^{-Rk_0 \sqrt{n_e^2 - n_0^2} e^{\frac{u}{R}}} & , \quad w_c < u \end{cases} \quad (2.71)$$

Nous excitons la structure par la carte de champ du mode fondamental du guide droit. Nous décomposons alors la composante  $E_{z0}^c$  (2.71) du champ électrique d'excitation dans l'espace de Fourier de façon numérique. Les coefficients de Fourier sont calculés par les fonctions d'intégration en trapèze de Matlab®), le pas d'échantillonnage en  $u$  est d'environ  $\frac{\lambda}{65}$ . La projection dans l'espace de Fourier de la composante  $E_{z0}^c$  du champ électrique a pour expression :

$$E_{z0}^c = \sum_{p=-N}^{p=+N} s_{0p} e^{j\gamma u p},$$

où les termes  $s_{0p}$  sont les coefficients de Fourier de  $E_{z0}^c$ . Nous introduisons le vecteur  $\overline{s_0}$  dont les éléments sont les coefficients  $s_{0p}$ .



L'expression du champ d'excitation dans l'espace propre est alors donnée par la relation faisant intervenir la matrice de passage  $W$  :

$$\overline{s_{0W}} = W^{-1}\overline{s_0}.$$

Ce vecteur  $\overline{s_{0W}}$  constitue l'excitation du guide courbe en  $v_0 = 0$ , autrement dit, en  $\theta_0 = 0$ . Dans cette expression, la matrice  $W$  peut être vue comme l'élément qui répartit les poids aux différents modes propres. Nous ne regardons pour le moment que la réponse en propagation de cette excitation dans le sens des  $v$  positifs. Nous utilisons alors les relations introduites à la partie 2.3.7 afin d'obtenir la réponse de la structure à cette excitation. La réponse  $\overline{s}$  dans l'espace de Fourier est donnée par la relation suivante :

$$\overline{s} = W\overline{s_{W0}} = WP_0^+(v)\overline{s_{W0}}, \quad (2.72)$$

où la matrice  $P_0^+(v)$  est la matrice de propagation dans le sens des  $v$  positifs et dont le départ est en  $v_0 = 0$ . Cette matrice dépend de la variable de propagation  $v$ , le vecteur  $\overline{s}$  en dépend donc aussi. La matrice  $P_0^+(v)$  permet de calculer la propagation de chaque mode propre le long de la propagation selon  $v$ . La matrice  $W$  permet d'exprimer la combinaison de ces modes dans l'espace de Fourier et ceci tout au long de la propagation.

La composante  $E_z(r, \theta)$  du champ électrique dans le plan  $(r, \theta)$  se déduit alors des coefficients  $s_p$  de son vecteur  $\overline{s}$  dans l'espace de Fourier par la relation suivante :

$$E_z(r, \theta) = \sum_{p=-N}^{p=+N} s_p \left(\frac{r}{R}\right)^{j\gamma p R}. \quad (2.73)$$

Cette formule nous permet de modéliser dans le plan  $(r, \theta)$  la réponse du guide courbe à l'excitation d'un guide droit.

### 2.3.9 Résultats de simulation sans PMLs : RCWA

Nous avons implémenté, dans le logiciel Matlab®, l'équation matricielle (2.54) qui correspond au cas où il n'y a pas de PMLs, c'est à dire, à la RCWA. Afin de tester la méthode, nous avons choisi de mener les simulations et les comparaisons avec les autres méthodes sur un guide présentant un relativement fort contraste d'indice de réfraction  $\Delta n = 0,1$ . Nous avons choisi un guide multimode pour étudier les fuites et les phénomènes de battements possibles entre les modes à fuite.

Les résultats du modèle RCWA sont donnés pour un guide courbe  $R = 14 \mu\text{m}$  de rayon de courbure interne et de largeur  $w = 4 \mu\text{m}$ . L'indice de réfraction du coeur de  $n_1 = 1,615$  dans un indice de réfraction du matériau de  $n_0 = 1,515$ . La période de la zone de simulation est  $\Delta u = 23 \mu\text{m}$  dans le plan conforme et le nombre d'harmonique est  $N = 200$ . Le guide courbe est excité par le mode fondamental du guide droit de mêmes caractéristiques et à une longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ . La figure 2.14 représente la valeur absolue de l'amplitude de la composante  $E_z$  du

champ électrique dans la structure avec le plan conforme  $(u, v)$  à gauche et avec le plan  $(x, y)$  à droite. Afin d'observer les résultats dans le plan  $(x, y)$ , nous opérons le changement de variable du plan conforme, ce qui explique que la représentation de la zone de simulation est courbe. Nous utilisons cette dernière représentation pour la suite.

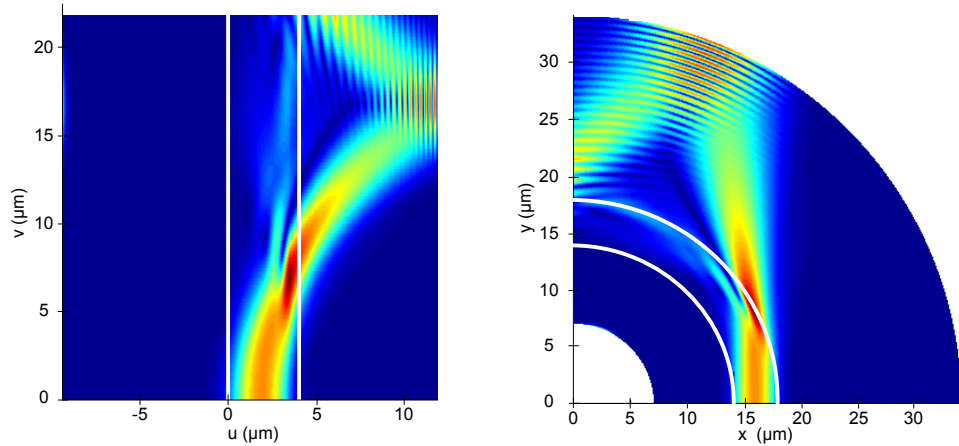


FIG. 2.14 – Valeur absolue de l'amplitude de la composante  $E_z$  du champ électrique simulée par la RCWA dans le plan conforme  $(u, v)$  à gauche et dans le plan  $(x, y)$  à droite

Nous observons une réflexion du champ à l'interface droite de la cellule de simulation. L'onde émise et l'onde réfléchie par l'interface interfèrent entre elles. Ceci s'explique en regardant la répartition de permittivité relative sur plusieurs cellules à la figure 2.15. Sur cette figure, nous avons représenté la permittivité relative sur 3 périodes de la zone de simulation.

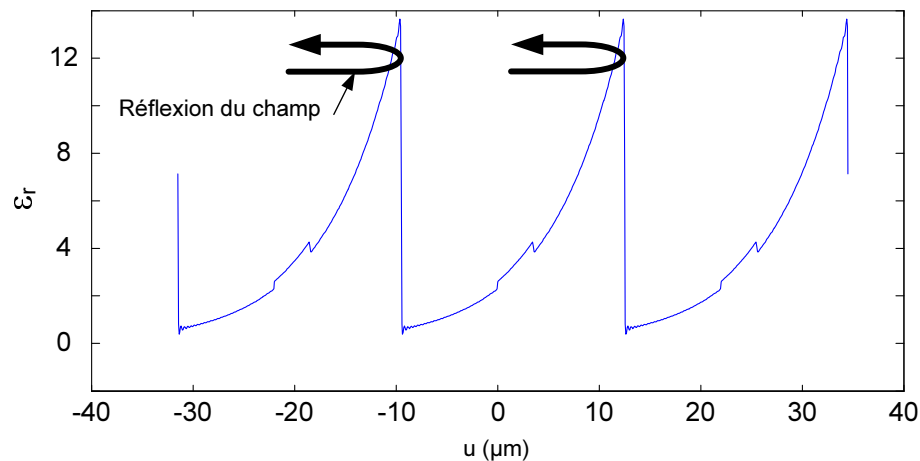


FIG. 2.15 – Répartition de permittivité relative

La permittivité relative, multipliée par la fonction exponentielle, projetée dans l'espace de Fourier présente une discontinuité franche à l'interface entre les cellules. Ce qui entraîne une réflexion du champ représentée par une flèche sur la figure 2.15.

Des simulations en FDTD ont été menées afin de comparer le modèle développé durant cette thèse. Les simulations ont été effectuées en maillage cartésien avec un pas en espace de

40 nm. Nous comparons cette simulation avec une simulation FDTD effectuée dans les mêmes conditions à la figure 2.16.

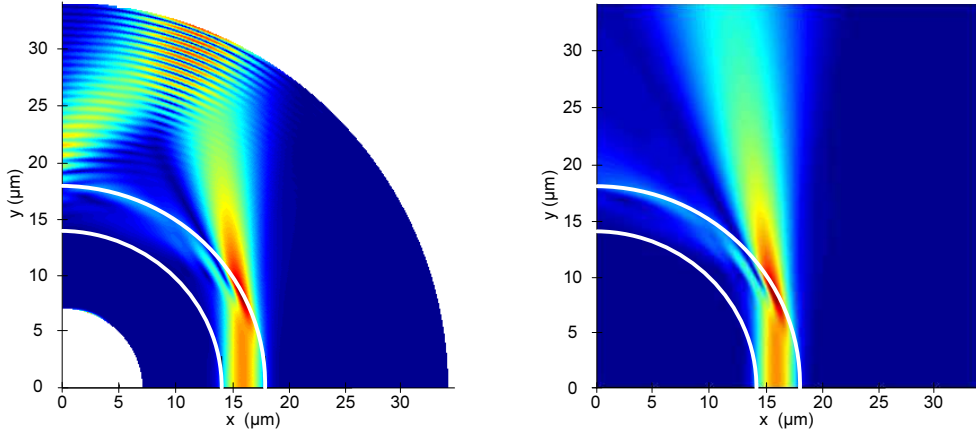


FIG. 2.16 – Valeur absolue de la composante  $E_z$  du champ électrique simulée par la RCWA à gauche et par la FDTD à droite dans le plan  $(x,y)$

Nous constatons une bonne similitude entre les deux méthodes au début de la propagation mais ce qui n'est plus le cas lorsqu'il y a réflexion entre deux cellules. Ceci perturbe la simulation.

Afin d'éviter cette réflexion parasite, l'idée est d'ajouter des couches absorbantes de chaque côté de la zone de simulation.

### 2.3.10 Ajout et définition des PMLs dans le plan conforme

Les Perfectly Matched Layers sont des zones qui sont définies pour absorber le champ et ne rien réfléchir. Intercalées entre les cellules de simulation, elles atténuent l'influence d'une cellule sur l'autre. Elles sont définies par un milieu absorbant et anisotrope. La figure 2.17 schématise la définition des PMLs. Sur cette figure, nous avons schématisé l'influence des PMLs sur le champ simulé dans une cellule. Le champ est transmis puis atténué dans les PMLs, et n'est pas réfléchi à l'interface.

Pour intégrer ces PMLs dans notre modèle de guide courbe, il nous faut considérer un milieu anisotrope défini par les tenseurs permittivité électrique  $[\epsilon_{PML}]$  et perméabilité magnétique  $[\mu_{PML}]$ . Comme le champ ne doit pas être réfléchi par les PMLs, autrement dit, doit être entièrement transmis, l'introduction des PMLs doit être "invisible" à ce champ. L'adaptation d'impédance des deux milieux nous permet cette transmission. Aussi, les impédances intrinsèques de la zone de simulation et des PMLs au niveau des interfaces doivent être égales. Nous montrons, en annexe C que la relation qui lie les tenseurs permittivité  $[\epsilon_{PML}]$  et perméabilité  $[\mu_{PML}]$  des PMLs aux permittivités et perméabilités de la zone de simulation est la suivante :

$$\frac{[\epsilon_{PML}]}{\epsilon} = \frac{[\mu_{PML}]}{\mu} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

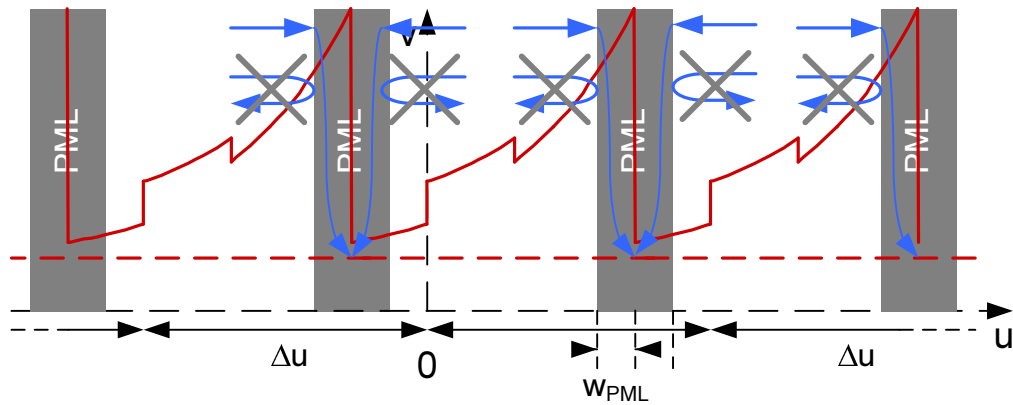


FIG. 2.17 – Schéma de rajout des PMLs dans la périodisation de la structure du plan conforme  $(u, v)$

Nous voyons apparaître le paramètre libre  $\alpha$ . Ce paramètre peut être choisi complexe, rendant ainsi les PMLs absorbantes. Nous notons  $w_{PML}$  la demi-largeur des PMLs comme noté sur la figure 2.17.

Nous pouvons aussi noter que l'ajout de ces PMLs modifie la structure simulée. Les résultats obtenus seront donc, a priori, approchés. Nous espérons donc trouver des résultats cohérents et comparables à d'autres méthodes. Le coefficient d'absorption a été choisi de la façon suivante :

- Un faible coefficient d'absorption entraîne une faible absorption du champ fuyant dans le guide. Nous nous rapprochons du cas où il n'y a pas de PMLs et le champ est réfléchi à la discontinuité de la fonction exponentielle comme nous l'avons vu dans la partie précédente 2.3.9.
- Un fort coefficient d'absorption entraîne une forte discontinuité des permittivités et perméabilités relatives dans la zone de simulation. Le champ est a priori absorbé mais beaucoup plus d'harmoniques sont nécessaires pour décrire les permittivités et perméabilités relatives dans l'espace de Fourier.

Compte tenu de ces remarques, nous avons choisi un coefficient d'absorption  $\alpha = 1 - j$ .

Pour des raisons similaires, nous avons choisi une largeur de PMLs  $w_{PML} = 2 \mu\text{m}$ . Cette largeur nous permet, a priori, d'absorber suffisamment le champ électromagnétique.

Nous utiliserons ces valeurs  $\alpha$  et  $w_{PML}$  pour le reste de la modélisation.

Nous les comparons donc à d'autres méthodes existantes pour estimer la validité de la méthode.

## 2.4 Résultats et comparaison

### 2.4.1 Résultats et comparaison avec la FDTD

Nous avons implémenté, dans le logiciel Matlab®, l'équation matricielle (2.49) qui permet d'introduire les PMLs. Dans cette section, nous détaillons les simulations menées. Toutes les simulations menées dans cette thèse tiennent compte, sauf si le cas est spécifié, d'un guide courbe de largeur  $w = 4 \mu\text{m}$ , d'un indice de réfraction du cœur  $n_1 = 1,615$ , d'un indice de

réfraction du matériau extérieur  $n_0 = 1,515$ .

La figure 2.18 présente la comparaison dans le cas TE de l'AFMM avec la FDTD pour un rayon  $R = 14 \mu\text{m}$ .

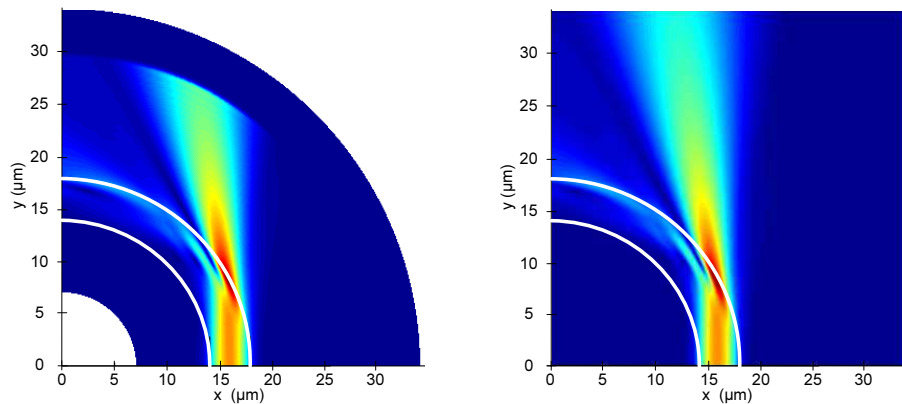


FIG. 2.18 – Simulation AFMM à gauche et FDTD à droite dans le plan  $(x,y)$

Nous constatons que le champ ne se réfléchit pas à l'interface et qu'il est absorbé dans les PMLs. Nous constatons, à première vue, la validité de la méthode.

Nous avons vu que pour de grands rayons, l'approximation  $w_c \approx w$  est d'autant plus valable, c'est-à-dire, que le plan conforme ne comprime pas les distances. En revanche, dans le cas de rayons faibles, cette approximation n'est plus valable. La figure 2.19 illustre cette approximation en montrant les valeurs absolues de la composante  $E_z$  du champ en entrée du guide courbe pour les deux méthodes de simulation.

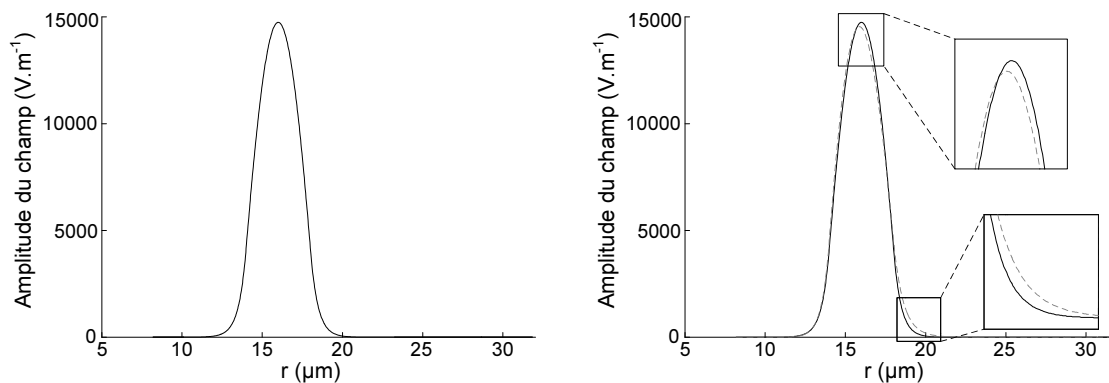


FIG. 2.19 – Comparaison de la valeur absolue de la composante  $E_z$  du champ électrique des champs d'entrée du guide courbe dans le cas sans approximation à gauche et dans le cas de l'approximation à droite pour la méthode AFMM (en pointillés) et la FDTD (en trait plein)

Sur le graphique de gauche, nous constatons que les valeurs absolues des composantes  $E_z$  du champ d'entrée pour les deux méthodes dans le cas sans approximation sont confondues. Sur le graphique de droite, nous constatons un élargissement de  $E_z$  dans le cas de l'approximation. En effet, dans le cas de l'approximation, le guide a une largeur  $w_c \approx w = 4 \mu\text{m}$  et celle-ci est plus grande que  $w_c \approx 3,5 \mu\text{m}$ . Ce point valide l'expression du mode d'excitation du guide droit dans le plan conforme introduit à la partie 2.3.8.

Afin de comparer les deux méthodes, des simulations FDTD ont été menées pour différents rayons de courbure. Nous comparons les méthodes en regardant la transmission dans un guide droit de même largeur sur une courbe à 90 degrés. Le schéma 2.20 illustre l'étude effectuée. Nous avons représenté un guide droit d'entrée, un guide courbe et un guide droit de sortie. Le guide courbe est excité par le mode fondamental du guide droit d'entrée dont nous avons représenté schématiquement l'allure. Nous regardons la puissance transmise sur chaque mode du guide droit de sortie. Nous avons représenté schématiquement les trois modes excités du guide droit de sortie.

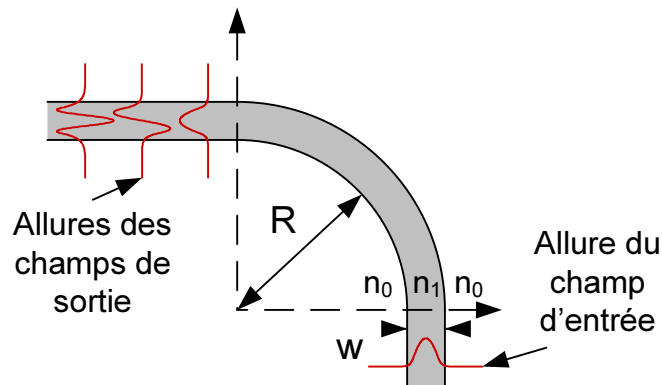


FIG. 2.20 – Schéma du calcul de couplage sur les modes guidés de sortie

Pour le calcul du taux de transmission sur chaque mode des simulations en FDTD, nous effectuons une intégration numérique du vecteur de Poynting du champ à 90 degrés avec les champs des modes du guide droit. Pour le calcul du taux de transmission dans le cas de la simulation AFMM, nous avons développé une formule dont les détails sont en annexes D et E.

La figure 2.21 compare les taux de transmission en puissance obtenus par les deux méthodes de simulation. Nous y avons représenté en ligne pleine, les taux de transmission calculés par l'AFMM et par des croix les taux de transmission calculés par la FDTD.

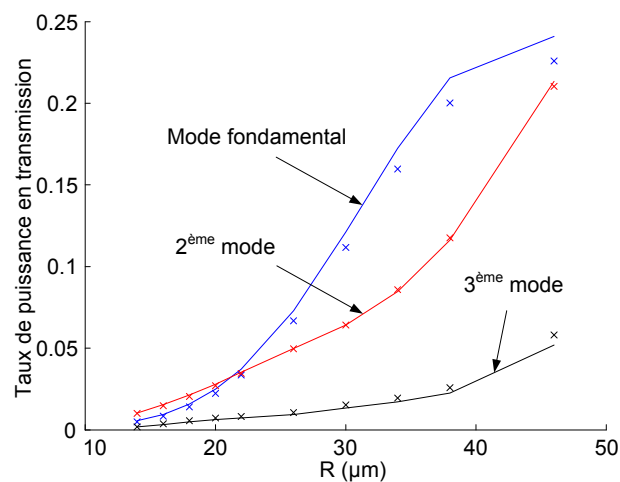


FIG. 2.21 – Taux de transmission en puissance des trois premiers modes du guide droit simulés par l'AFMM (ligne solide) et par la FDTD (croix)

Sur cette figure, nous observons l'excitation. Ceci met en évidence le phénomène de couplage entre les différents modes de propagation du guide courbe. C'est-à-dire que l'énergie va sembler osciller durant la propagation dans le guide courbe. Nous constatons que pour les faibles rayons, les résultats sont comparables. Pour les rayons plus élevés, les méthodes donnent des résultats différents. Le guide courbe simulé en FDTD semble moins fuir que celui simulé en AFMM. La figure 2.22 présente les cartes de champ d'entrée et de sortie du guide courbe de 90 degrés pour un rayon de 46  $\mu\text{m}$ .

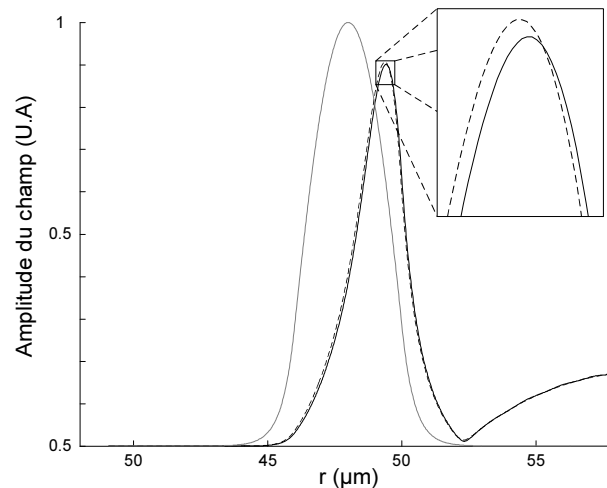


FIG. 2.22 – Comparaison des valeurs absolues des composantes  $E_z$  des champ d'entrée (en gris) avec celles issues de la simulation AFMM (en trait plein) et de la simulation FDTD (en pointillés)

Nous constatons que pour un rayon plus grand, le champ s'écarte moins du guide courbe pour la simulation FDTD comparé à la simulation AFMM. Ceci peut être la cause du maillage cartésien de la FDTD [28]. L'utilisation d'un maillage cylindrique dans la simulation FDTD pourrait éclaircir ce point.

Nous pouvons conclure que pour des rayons faibles, l'AFMM est en accord avec la FDTD. Pour des rayons plus grand, la modélisation de la fuite du guide courbe ne semble plus concorder. Il nous faut une autre méthode de comparaison.

## 2.4.2 Résultats et comparaison modale

Nous avons vu que l'AFMM est une méthode modale de Fourier. Aussi, tout champ se propageant dans cette structure est une combinaison des modes propres de la structure. L'étude qui suit traite de ces modes propres et de la comparaison avec des méthodes modales existantes : la méthode analytique et la méthode de développement en modes propres (EME).

### 2.4.2.1 Carte des indices effectifs de propagation

Comme nous l'avons vu, chaque mode propre est caractérisé par son indice effectif de propagation. Celui-ci caractérise la vitesse de phase à laquelle il se propage dans la structure donnée

par sa partie réelle ainsi que sa fuite donnée par sa partie imaginaire. La figure 2.23 expose la carte des indices effectifs des modes propres de la structure simulée pour un rayon  $R = 14\mu\text{m}$ , une largeur de guide  $w = 4\mu\text{m}$  et 100 harmoniques. Nous représentons la partie imaginaire de l'indice effectif de chaque mode en fonction de la partie réelle de son indice effectif.

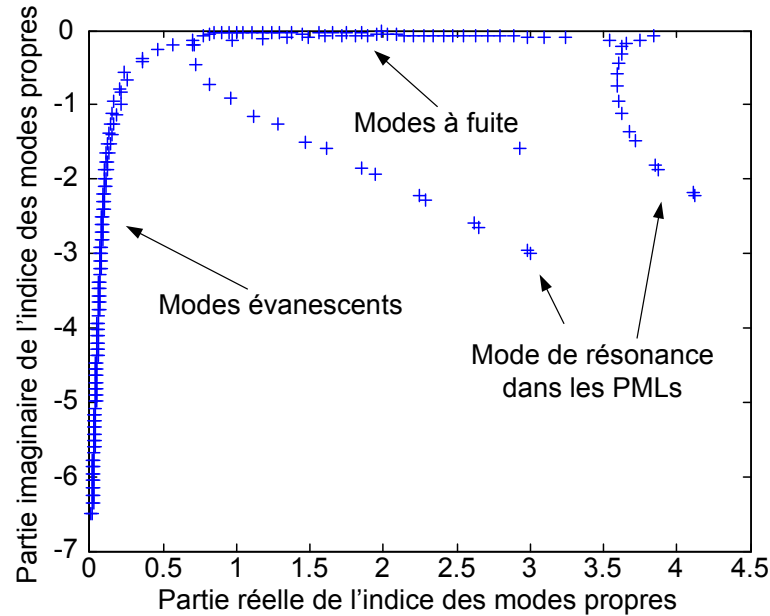


FIG. 2.23 – Carte des indices effectifs de propagation des modes propres

Nous discernons trois familles de modes : les modes évanescents qui semblent être en continuité avec les modes à fuites et les modes de résonance dans les PMLs.

La figure 2.24 montre les valeurs absolues des champs  $E_z$  des modes à fuite et des modes évanescents. Nous représentons deux modes de chaque type ainsi que la distribution d'indice de réfraction. Nous avons aussi représenté les PMLs sur les bords de la cellule de simulation.

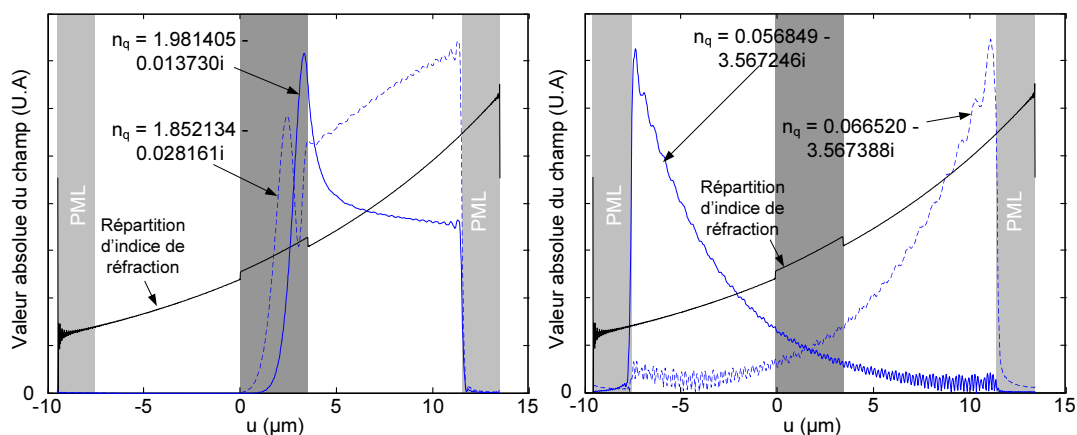


FIG. 2.24 – Valeurs absolues des champs  $E_z$  des modes à fuite (à gauche) et des modes évanescents (à droite)

Concernant les modes à fuite, nous pouvons constater que la valeur absolue de la compo-



sante  $E_z$  du champ électrique du premier mode présente un lobe proche de l'extérieur du guide et que le deuxième mode en présente deux. Ces mêmes champs voient leurs valeurs absolues augmenter au fur et à mesure qu'ils s'écartent du guide. Ce dernier caractérise la fuite du mode et le deuxième mode fuit plus que le premier. Nous pouvons apprécier une fois de plus l'absorption des PMLs qui limite la divergence des valeurs absolues des champs. Nous remarquons aussi des oscillations au bords de la cellule. Ces oscillations sont dues aux réflexions parasites des PMLs ainsi qu'à la décomposition de Fourier. Afin de les réduire, il faut utiliser plus d'harmoniques.

Pour les modes évanescents, compte tenu de la grande partie imaginaire de leur indice effectif, ces modes s'atténuent très vite lors de la propagation.

Enfin, la figure 2.25 montre les valeurs absolues des composantes  $E_z$  des champs des modes résonants dans les PMLs.

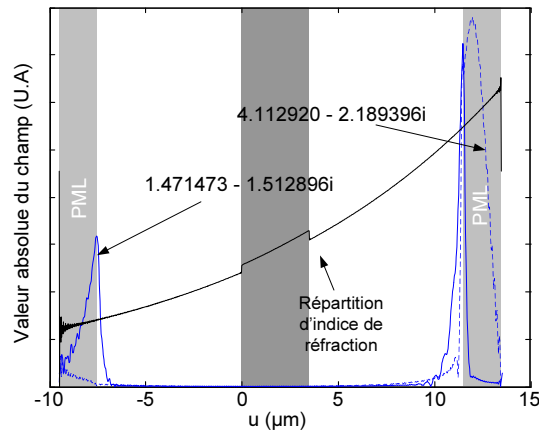


FIG. 2.25 – Carte de champ des modes résonants dans les PMLs

Sur cette figure, nous pouvons constater que ces modes ont une présence marquée dans la PML de droite. En effet, cette PML est une zone de haut indice de réfraction et, en quelque sorte, peut guider le champ. Néanmoins, la forte partie imaginaire de leurs indices effectifs induit une forte atténuation lors de la propagation. Ces modes existent donc dans la structure mais ne sont en général pas excités.

Nous avons vu que les modes propres sont caractérisés par leur indice effectif de propagation. Lorsque la structure est excitée, par exemple, par le mode fondamental d'un guide droit, ces modes sont excités et se propagent dans la structure. Plus il y a de modes propres, plus l'évolution du champ ainsi recombinaison est précise. Ce nombre de modes propres ainsi que la précision de leur représentation sont déterminés par le nombre d'harmoniques utilisé pour décrire les permittivités et perméabilités relatives. Aussi, nous cherchons maintenant à déterminer un nombre d'harmoniques suffisant pour décrire l'évolution de la composante  $E_z$  (ou  $H_z$  dans le cas TM) du champ électrique dans la structure.

#### 2.4.2.2 Étude de convergence

Dans cette partie, nous étudions la convergence des modes propres de la structure en fonction du nombre d'harmonique. Nous ne regardons maintenant que les indices des modes à fuite  $TE_i$  et  $TM_i$  qui se rapprochent le plus des modes du guide droit. Nous étudions l'évolution de

la convergence de l'AFMM pour ces différents modes. Les simulations menées visent à obtenir, pour différents rayons, la différence de l'indice effectif calculé à un nombre d'harmoniques donné par rapport à une référence. Cette référence, pour chaque rayon, est l'indice effectif calculé avec 301 harmoniques. Dans les figures suivantes, nous traçons la valeur absolue  $f$  de cette différence. Par exemple, pour la partie réelle de l'indice effectif  $\text{Re}\{n_q\}$  du mode  $q$ , la fonction  $f$  a pour expression la suivante :

$$f(N) = \left| \text{Re}\{n_q\}(N) - \text{Re}\{n_q\}(N = 301) \right|. \quad (2.75)$$

La figure 2.26 présente cette étude de convergence pour les parties réelles des indices effectifs des modes fondamentaux  $\text{TE}_0$  et  $\text{TM}_0$ , cette étude a été réalisée pour des rayons allant de  $30 \mu\text{m}$  à  $1 \text{ mm}$ .

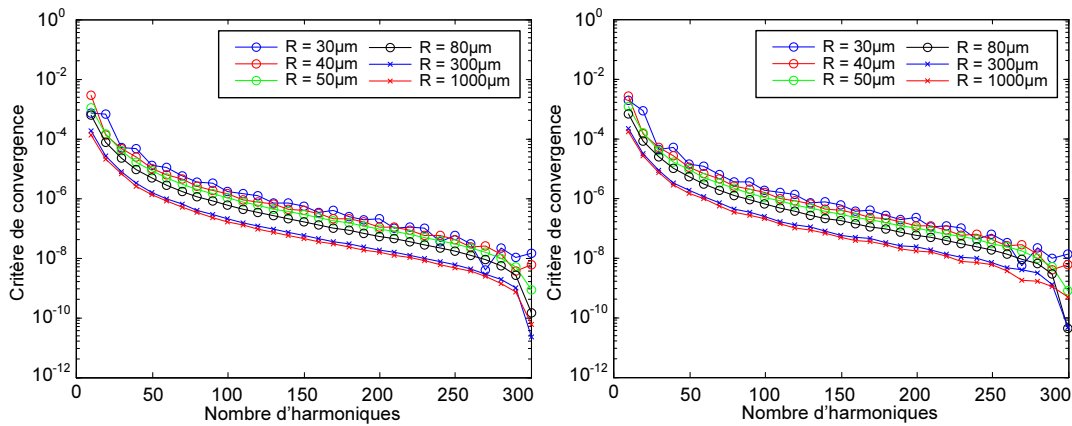


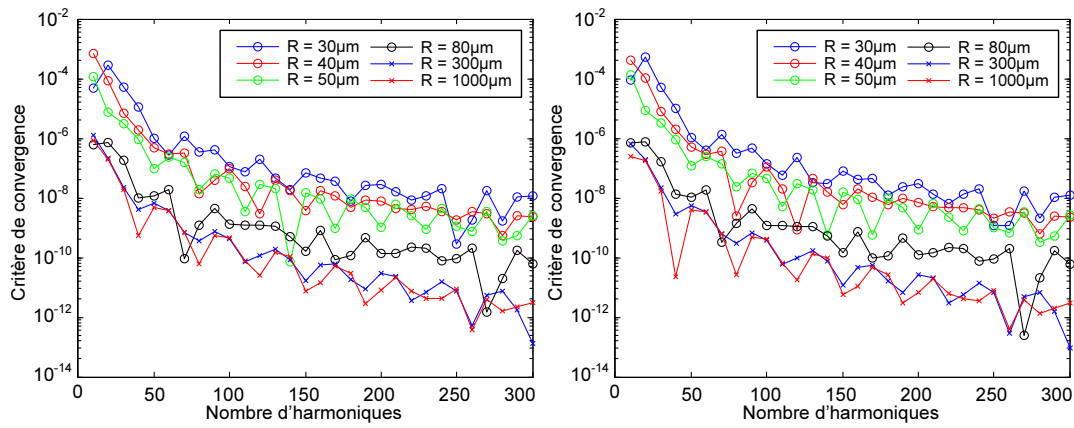
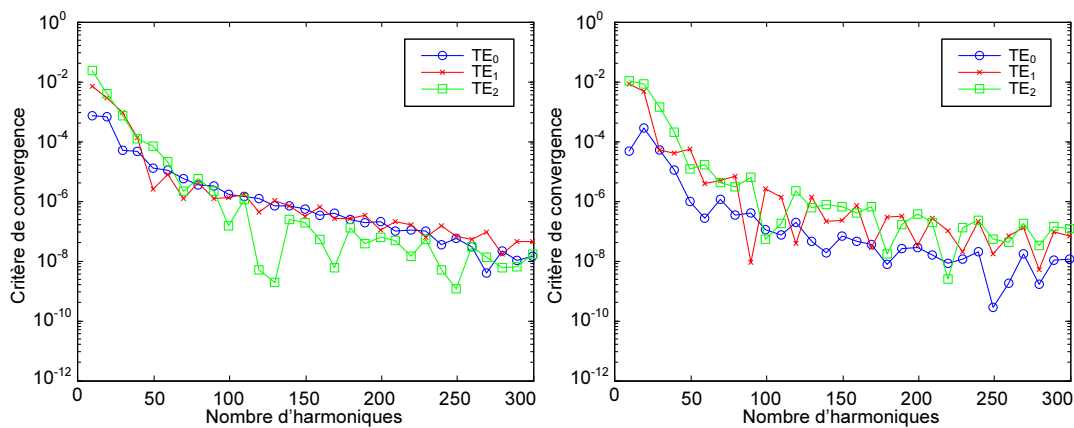
FIG. 2.26 – Convergence des parties réelles des indices effectifs des modes  $\text{TE}_0$  et  $\text{TM}_0$

Nous constatons que plus le rayon est grand, plus vite la méthode converge. Une centaine d'harmoniques suffisent à atteindre la valeur de convergence à  $10^{-5}$  près. La différence de vitesse de convergence vient de la fonction exponentielle et de sa discontinuité aux bords de la cellule et cette influence s'atténue pour de grands rayons.

La figure 2.27 présente cette étude de convergence pour les parties imaginaires de l'indice effectif du mode fondamental en polarisation TE et TM.

Cette étude est à prendre avec précaution. En effet, plus le rayon est grand, plus la partie imaginaire de l'indice effectif est faible. Néanmoins, un écart de  $10^{-5}$ , par exemple, de la partie imaginaire entraîne un écart de puissance du mode d'environ  $0.015 \text{ dB}$  et ce au bout de  $90^\circ$  de propagation pour un rayon  $R = 30 \mu\text{m}$ . Nous constatons que les parties imaginaires de l'indice effectif du mode fondamental converge à  $10^{-7}$  près pour 100 harmoniques. Pour de grands rayons, la partie imaginaire des indices effectifs tend vers zéro, ce qui explique les fortes oscillations.

Regardons maintenant, pour un rayon donné, la convergence des autres modes. Nous ne regardons que le mode TE, les conclusions étant les mêmes pour le mode TM. La figure 2.28 présente les convergences des modes  $\text{TE}_0$ ,  $\text{TE}_1$  et  $\text{TE}_2$  pour un rayon de  $30 \mu\text{m}$ .

FIG. 2.27 – Convergence des parties imaginaire des indices effectifs des modes  $TE_0$  et  $TM_0$ FIG. 2.28 – Convergence des parties réelles et imaginaires des indices effectifs des modes  $TE_0$ ,  $TE_1$  et  $TE_2$  pour un rayon de  $30\ \mu\text{m}$

Nous constatons que les autres modes convergent de la même façon. Les parties imaginaires convergent plus lentement pour les modes d'ordres supérieurs. Nous faisons la même étude pour un rayon plus grand de 300  $\mu\text{m}$  présentés à la figure 2.29

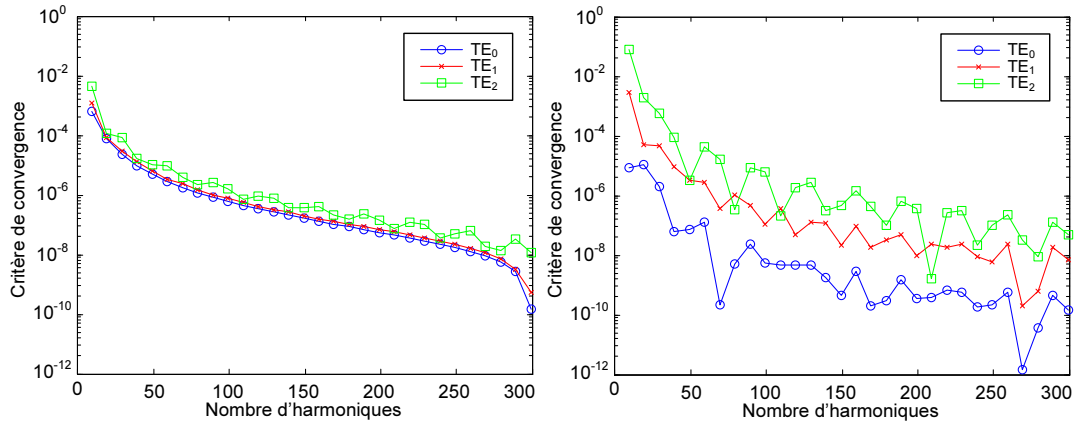


FIG. 2.29 – Convergence des parties réelles et imaginaires des indices effectifs des modes  $TE_0, TE_1$  et  $TE_2$  pour un rayon de 300  $\mu\text{m}$

Nous constatons que pour de grands rayons, la partie réelle du mode fondamental converge plus vite que celles des autres modes. La partie imaginaire converge plus vite pour le mode fondamental que pour les autres modes.

Cette étude montre que les solutions convergent assez rapidement : 200 harmoniques suffisent pour avoir une bonne précision des indices effectifs. Néanmoins, les modes d'ordre supérieur convergent moins vite que le mode fondamental au niveau de la partie réelle de leur indice effectif. De plus, l'ajout des PMLs modifie la simulation de la propagation du champ dans le guide courbe et les valeurs de convergence dépendent des paramètres  $\alpha$  et  $w_{PML}$ . C'est-à-dire que, plus la composante  $E_z$  du champ électrique du mode s'étend vers les PMLs, plus ces dernières modifient l'allure du mode. Nous poursuivons l'étude en comparant l'AFMM à la méthode modale analytique.

### 2.4.3 Comparaison à la méthode modale analytique

Nous comparons maintenant l'AFMM avec la méthode modale analytique qui a été abordée en introduction de ce chapitre 2.1.3. Le déterminant [38] à annuler afin d'obtenir les modes à fuites a été implémenté sous Matlab® et nous comparons les deux méthodes. Les paramètres de simulation sont identiques aux précédents. Les valeurs sont données à 200 harmoniques. Nous considérons les modes  $TE_0, TM_0, TE_2$  et  $TM_2$ , les tableaux suivant exposent les indices effectifs calculés par les deux méthodes pour des rayons allant de  $R = 30 \mu\text{m}$  à  $1000 \mu\text{m}$ .

Rayon ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $\text{TE}_0$		partie imaginaire $\text{TE}_0$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
30	1.767310	1.767322	$1.7785 \cdot 10^{-3}$	$1.7737 \cdot 10^{-3}$
40	1.722139	1.722143	$4.8642 \cdot 10^{-4}$	$4.8530 \cdot 10^{-4}$
50	1.695885	1.695885	$1.2245 \cdot 10^{-4}$	$1.2148 \cdot 10^{-4}$
80	1.658601	1.658601	$1.3163 \cdot 10^{-6}$	$1.3341 \cdot 10^{-6}$
300	1.618896	1.618896	$9.4107 \cdot 10^{-19}$	$2.9253 \cdot 10^{-11}$
1000	1.610521	1.610521	$4.6633 \cdot 10^{-18}$	$1.2192 \cdot 10^{-11}$

Rayon ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $\text{TM}_0$		partie imaginaire $\text{TM}_0$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
30	1.765764	1.765779	$1.9743 \cdot 10^{-3}$	$1.9724 \cdot 10^{-3}$
40	1.720794	1.720798	$5.4209 \cdot 10^{-4}$	$5.4187 \cdot 10^{-4}$
50	1.694702	1.694701	$1.3700 \cdot 10^{-4}$	$1.3579 \cdot 10^{-4}$
80	1.657748	1.657748	$1.4849 \cdot 10^{-6}$	$1.5010 \cdot 10^{-6}$
300	1.618499	1.618499	$9.4107 \cdot 10^{-19}$	$2.6654 \cdot 10^{-11}$
1000	1.610180	1.610180	$4.6633 \cdot 10^{-18}$	$1.0780 \cdot 10^{-11}$

Rayon ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $\text{TE}_2$		partie imaginaire $\text{TE}_2$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
30	1.638801	1.638495	$1.4210 \cdot 10^{-2}$	$1.4008 \cdot 10^{-2}$
40	1.617802	1.617547	$1.0644 \cdot 10^{-2}$	$1.0592 \cdot 10^{-2}$
50	1.605472	1.605531	$8.4475 \cdot 10^{-3}$	$8.6513 \cdot 10^{-3}$
80	1.586508	1.586606	$4.5110 \cdot 10^{-3}$	$4.4917 \cdot 10^{-3}$
300	1.558178	1.558179	$8.3610 \cdot 10^{-6}$	$8.0130 \cdot 10^{-6}$
1000	1.550746	1.550746	$8.4682 \cdot 10^{-17}$	$7.6360 \cdot 10^{-11}$

Rayon ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $\text{TM}_2$		partie imaginaire $\text{TM}_2$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
30	1.638837	1.638250	$1.7365 \cdot 10^{-2}$	$1.6982 \cdot 10^{-2}$
40	1.617585	1.617151	$1.2797 \cdot 10^{-2}$	$1.2698 \cdot 10^{-2}$
50	1.605048	1.605138	$1.0058 \cdot 10^{-2}$	$1.0396 \cdot 10^{-2}$
80	1.585701	1.585842	$5.3347 \cdot 10^{-3}$	$5.3249 \cdot 10^{-3}$
300	1.556699	1.556700	$1.5892 \cdot 10^{-5}$	$1.5945 \cdot 10^{-5}$
1000	1.549157	1.549157	$1.2852 \cdot 10^{-15}$	$5.7208 \cdot 10^{-11}$

Concernant les parties réelles des indices effectifs, nous constatons un très bonne concordance entre les deux méthodes pour des rayons élevés. Pour des rayons plus faibles, les parties réelles diffèrent d'un écart relatif de  $7 \cdot 10^{-6}$  pour le mode  $\text{TE}_0$  et  $4 \cdot 10^{-4}$  pour le mode  $\text{TM}_2$ . Concernant les parties imaginaires, nous nous apercevons que tant que le mode fuit, c'est-à-dire, que sa partie imaginaire est élevée ( $> 10^{-8}$  en valeur absolue d'après l'étude de convergence) les deux méthodes donnent des résultats similaires à  $10^{-2}$  près en écart relatif pour les modes fondamentaux. Dès que le mode ne fuit plus, c'est-à-dire, que sa partie imaginaire est faible et proche de 0, les deux méthodes ne concordent plus. Nous avons vu que la partie imaginaire des indices pour de grands rayons converge en oscillant fortement. Aussi, pour des faibles pertes ( $< 10^{-8}$  en valeur absolue), l'AFMM dans le plan conforme n'est plus valide. Cela dit, ceci ne nous gênera pas pour la suite puisque notre but est de faire fuir le champ électromagnétique.

### 2.4.4 Comportement modal de la courbure

Connaissant l'écart de l'AFMM à la méthode modale, nous pouvons étudier l'évolution des indices effectifs des modes à fuite du guide courbe en fonction du rayon. L'étude est effectuée avec les mêmes paramètres que précédemment sur un guide courbe de  $4\ \mu\text{m}$  de large avec 100 harmoniques. La figure 2.30 présente cette évolution en polarisation TE et TM, où les symboles correspondent à l'AFMM, les croix correspondent à la méthode modale.

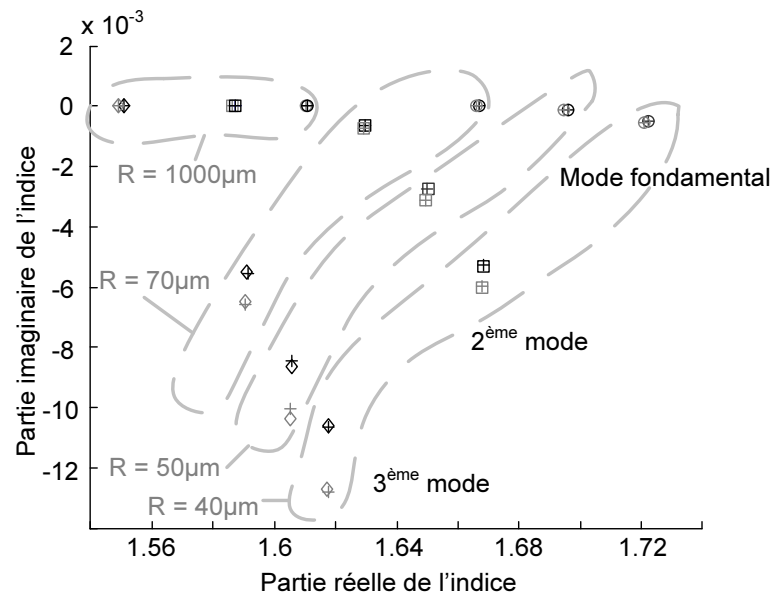


FIG. 2.30 – Carte des indices effectifs des modes  $TE_i$  (en noir) et  $TM_i$  (en gris) en fonction du rayon de courbure  $R$ . Les symboles correspondent à l'AFMM, les croix correspondent à la méthode modale.

Nous pouvons remarquer que l'évolution des modes dans la carte des indices effectifs diffère suivant l'ordre du mode. Les modes d'ordres supérieurs fuient plus que le mode fondamental. Nous remarquons que les modes  $TM_i$  fuient plus que les modes  $TE_i$ . La figure 2.31 présente l'évolution des parties imaginaires des indices effectifs des différents modes. Le calcul a été effectué avec 200 harmoniques.

Nous remarquons que les modes TE fuient moins que les modes TM. Nous constatons des oscillations pour les faibles rayons. Ces oscillations peuvent être dues aux réflexions parasites des PMLs des modes d'ordre supérieurs. En effet, l'étendue de ceux-ci est plus importante que celle du mode fondamental. Aussi, pour les décrire, il nous faut plus d'harmoniques. Dans notre cas, nous chercherons à ne faire fuir que le mode fondamental.

### 2.4.5 Mise en évidence du phénomène de battement

Le cas des guides multi-modes est intéressant car il met en évidence le battement des modes propres de la courbure et l'effet sur le couplage avec un guide droit en sortie. Cette notion a été abordée à la partie 2.4.1 lors de la comparaison avec la FDTD. Nous effectuons maintenant la même étude en comparant l'AFMM et la méthode de développement en modes propres (EME).

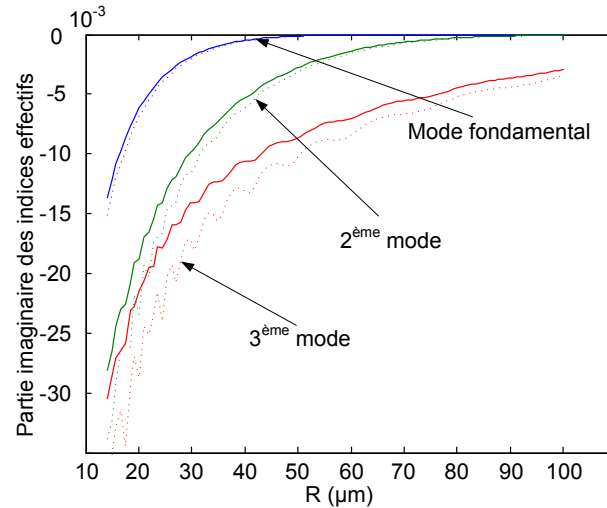


FIG. 2.31 – Evolution des parties imaginaires des indices effectifs en fonction du rayon pour les modes  $TE_i$  (ligne pleine) et  $TM_i$  (ligne en pointillés)

Nous nous référons aux travaux de Zhen Hu et YaYan Lu [36] sur les phénomènes de battement de modes dans les guides courbes multi-modes. Dans ces travaux, la méthode EME est comparée à une BPM grand angle développée dans le plan curviligne. L'étude réalisée concerne un guide courbe de 90 degrés, de largeur  $3\ \mu\text{m}$ , d'indice de réfraction du coeur  $n_1 = 3,24$  et d'indice de substrat  $n_0 = 3,17$ , c'est-à-dire, pour un faible contraste  $\Delta n = 0,07$ . Un nombre de 100 harmoniques a été utilisé pour simuler les puissances couplées sur chaque mode. Celles-ci ont été calculées en utilisant la formule détaillée aux annexes D et E. La figure 2.32 présente la comparaison des résultats obtenus avec l'AFMM, la BPM grand angle et la EME.

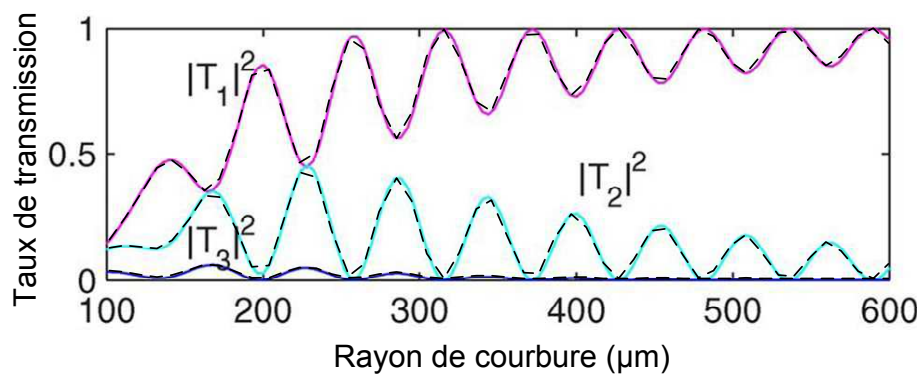


FIG. 2.32 – Taux de transmission en puissance des 3 premiers modes simulé par l'AFMM (traits en pointillés) et par les méthodes EME et BPM grand angle (traits pleins)

Nous constatons une très bonne concordance entre les trois méthodes pour un faible contraste d'indice. Nous pouvons aussi apprécier l'influence du rayon sur le guidage du mode fondamental. Suivant la longueur parcourue par le champ dans le guide courbe, ici, directement proportionnelle au rayon, l'énergie passe successivement d'un mode à l'autre.

### 2.4.6 Conclusion sur le guide courbe

Nous avons développé un modèle de simulation du guide courbe par l'AFMM. Les résultats sur les calculs de pertes et sur les cartes des indices montrent que la méthode concorde avec les méthodes déjà existantes. L'erreur faite par rapport au modèle modal est relativement faible et 200 harmoniques suffisent pour simuler l'évolution du champ dans le guide courbe. Par la suite, nous utilisons ce modèle dans le cas où le contraste d'indice de réfraction est faible (de l'ordre de  $10^{-2}$ ) et pour des rayons relativement élevés (de l'ordre de  $300\mu\text{m}$ ) ce qui nécessitera moins d'harmoniques. Ce modèle est donc validé pour notre application.

## 2.5 Modélisation du couplage avec le guide plan

Nous avons déterminé l'évolution du champ électromagnétique au sein d'une section où les permittivités et perméabilités sont constantes selon la variable de propagation  $v$ . L'AFMM nous permet de considérer plusieurs sections où les permittivités et perméabilités changent selon la propagation. Ceci nous permet de prendre en compte, dans notre cas, l'ajout d'un guide plan dont nous avons parlé lors de l'introduction 1.6.2. Dans cette partie, nous nous attachons donc à la détermination de l'évolution du champ électromagnétique dans une cascade de structures en fonction des données d'entrée des excitations propagatives et contra-propagatives. La figure 2.33 illustre une possible cascade de structures. Nous représentons, à gauche, un guide courbe de rayon de courbure  $R$  et de largeur  $w$  ainsi qu'un guide plan dont la distance au guide courbe évolue selon la variable  $\theta$ . Nous représentons, à droite, la structure correspondante dans le plan conforme. Nous avons fait apparaître différentes sections dans la propagation selon  $\theta$  dans le plan  $(r, \theta)$  et les sections équivalentes selon  $v$  dans le plan conforme  $(u, v)$ .

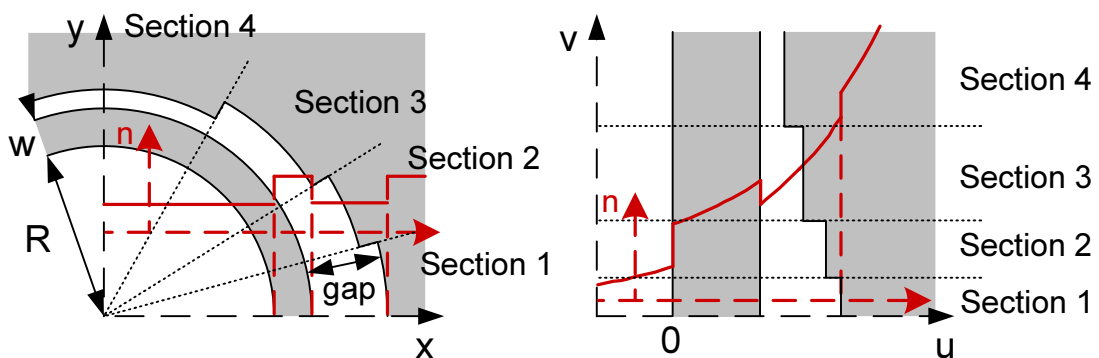


FIG. 2.33 – Schéma du guide courbe couplé avec le guide plan

Dans cette partie, nous exposons les relations liant les différents éléments de chaque section de la cascade. Nous détaillons l'algorithme en S [59] utilisé pour modéliser l'ensemble du champ électromagnétique dans une cascade de sections. Enfin, Nous vérifions si la méthode développée permet de simuler correctement le gap entre le guide courbe et le guide plan. Pour cela, nous regardons une structure invariante suivant  $\theta$  modélisable par la méthode analytique précédente afin de valider le choix de l'AFMM.



Afin de pouvoir simuler la propagation des modes le long de différentes sections, il nous faut déterminer les relations de passage des modes propres d'une section à l'autre. Ces relations de passages se déterminent par la continuité des champs tangentiels  $E_z^{c[t]}$  et  $H_r^{c[t]}$  dans le cas TE et  $H_z^{c[t]}$  et  $E_r^{c[t]}$  dans le cas TM à chaque interface entre les sections  $[t]$  et  $[t+1]$ . La figure 2.34 illustre la continuité des champs entre les sections  $[t]$  et  $[t+1]$ . Sur cette figure, nous avons représenté les champs intervenant dans les conditions de continuité pour les sections  $[t]$  et  $[t+1]$  dans le cas TE.

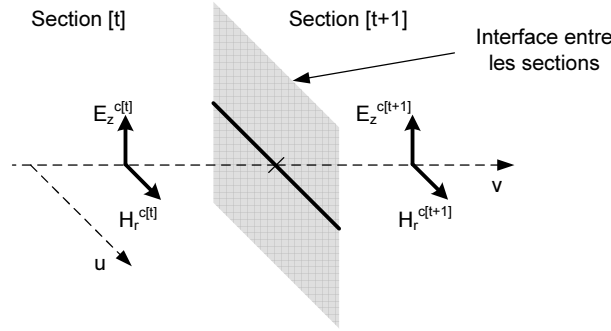


FIG. 2.34 – Schéma de la continuité des composantes tangentielles des champs entre les sections  $t$  et  $t+1$  en polarisation TE

## 2.5.1 Expressions des champs tangentiels dans une section

### 2.5.1.1 Cas de la polarisation TE

Dans le cas de la polarisation TE, les champs tangentiels à l'interface entre deux sections sont les composantes  $E_z^{c[t]}$  du champ électrique et  $H_r^{c[t]}$  du champ magnétique. Le deuxième se déduit du premier par la deuxième relation du système (2.27) que nous rappelons :

$$H_r^{c[t]} = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}}\frac{\partial E_z^{c[t]}}{\partial v}. \quad (2.76)$$

Nous montrons en annexe D.1, que l'expression du vecteur  $\overline{u^{c[t]}}$  des coefficients de Fourier de la composante  $H_r^{c[t]}$  du champ magnétique est :

$$\overline{u^{c[t]}} = \frac{k_0}{\omega\mu_0}V^{[t]}\left(P_{v_i}^{+[t]}(v)\overline{s_W^{+[t]}} - P_{v_i}^{-[t]}(v)\overline{s_W^{-[t]}}\right), \quad (2.77)$$

et où

$$V = \left[\left[\frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}}\right]\right]W^{[t]}\Lambda^{[t]},$$

où la matrice  $\left[\left[\frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}}\right]\right]$  est la matrice de Toeplitz associée aux coefficients de Fourier de la fonction  $\frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}}$  de la section  $[t]$ , la matrice  $W^{[t]}$  est la matrice des vecteurs propres de la section  $[t]$ ,

$\Lambda^{[t]}$  est la matrice diagonale dont le  $(q, q)$ -ième élément est l'indice effectif  $n_q^{[t]}$  de propagation du mode  $q$  de la section  $[t]$  et les matrices  $P_{v_t}^{+[t]}(v)$  et  $P_{v_t}^{-[t]}(v)$  sont les matrices diagonales de propagation dont les  $(q, q)$ -ième élément sont respectivement  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$  et  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$ .

### 2.5.1.2 Cas de la polarisation TM

Dans la cas de la polarisation TM, les champs tangentiels à l'interface entre deux sections sont les composantes  $E_r^{c[t]}$  du champ électrique et  $H_z^{c[t]}$  du champ magnétique :

$$E_r^{c[t]} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_z^{c[t]}}{\partial v}. \quad (2.78)$$

Nous montrons en annexe D.2, que l'expression du vecteur  $\overline{u^{c[t]}}$  des coefficients de Fourier de la composante  $E_r^{c[t]}$  du champ électrique est :

$$\overline{u^{c[t]}} = -\frac{k_0}{\omega\epsilon_0} V^{[t]} \left( P_{v_t}^{+[t]}(v) \overline{s_W^{+[t]}} - P_{v_t}^{-[t]}(v) \overline{s_W^{-[t]}} \right), \quad (2.79)$$

où

$$V^{[t]} = \left[ \frac{1}{\epsilon_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]}, \quad (2.80)$$

et où la matrice  $\left[ \frac{1}{\epsilon_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}} \right]$  est la matrice de Toeplitz associée aux coefficients de Fourier de la fonction  $\frac{1}{\epsilon_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}}$  de la section  $[t]$ , la matrice  $W^{[t]}$  est la matrice des vecteurs propre de la section  $[t]$ ,  $\Lambda^{[t]}$  est la matrice diagonale dont le  $(q, q)$ -ième élément est l'indice effectif  $n_q^{[t]}$  de propagation du mode  $q$  de la section  $[t]$  et les matrices  $P_{v_t}^{+[t]}(v)$  et  $P_{v_t}^{-[t]}(v)$  sont les matrices diagonales de propagation dont les  $(q, q)$ -ième élément sont respectivement  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$  et  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$ .

## 2.5.2 Expression matricielle de la continuité des champs tangentiels

Les conditions de continuité des champs tangentiels et de leur dérivées en  $v = v_{t+1}$  entre les sections  $[t]$  et  $[t+1]$  s'expriment à l'aide de leurs vecteurs dans l'espace de Fourier :

$$\overline{s^{[t]}}(v_{t+1}) = \overline{s^{[t+1]}}(v_{t+1}), \quad (2.81)$$

$$\overline{u^{[t]}}(v_{t+1}) = \overline{u^{[t+1]}}(v_{t+1}). \quad (2.82)$$

Autrement dit,

$$W^{[t]} \left( P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1}) \overline{s_W^{+[t]}} + P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1}) \overline{s_W^{-[t]}} \right) = W^{[t+1]} \left( \overline{s_W^{+[t+1]}} + \overline{s_W^{-[t+1]}} \right), \quad (2.83)$$

$$V^{[t]} \left( P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1}) \overline{s_W^{+[t]}} - P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1}) \overline{s_W^{-[t]}} \right) = V^{[t+1]} \left( \overline{s_W^{+[t+1]}} - \overline{s_W^{-[t+1]}} \right). \quad (2.84)$$

Cette relation nous permet de calculer les amplitudes des modes propres de la section  $[t + 1]$  en fonction de celles de la section  $[t]$ .

Au sein de la section  $[t]$ , les amplitudes des modes en  $v = v_{t+1}$  est donnée en fonction de leurs amplitudes en  $v = v_t$  par les relations suivantes :

$$\overline{s_W^{+[t]}}(v_{t+1}) = P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1}) \overline{s_W^{+[t]}}(v_t), \quad (2.85)$$

$$\overline{s_W^{-[t]}}(v_{t+1}) = P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1}) \overline{s_W^{-[t]}}(v_t), \quad (2.86)$$

où les matrices  $P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1})$  et  $P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1})$  sont les matrices de propagation dont les  $(q, q)$ -ièmes éléments sont respectivement  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v_{t+1}-v_t)}$  et  $e^{+jn_q^{[t]}k_0(v_{t+1}-v_t)}$  et où  $n_q^{[t]}$  est l'indice effectif du mode  $q$  de la section  $[t]$  et  $v_t$  et  $v_{t+1}$  sont les coordonnées respectivement du début et de la fin de la section  $[t]$ .

La fuite de puissance au niveau de la courbure et la présence des PMLs induisent une partie imaginaire des indices effectifs de propagation  $n_q^{[t]}$  négative. En tenant compte des parties réelles et imaginaires des indices effectifs de propagation, l'amplitude du mode  $q$  de la section  $[t]$  en  $v_{t+1}$  se déduit de son amplitude en  $v_t$  par le facteur suivant :

$$e^{-jn_q^{[t]}k_0(v_{t+1}-v_t)} = e^{-j\text{Re}\{n_q^{[t]}\}k_0(v_{t+1}-v_t)} e^{\text{Im}\{n_q^{[t]}\}k_0(v_{t+1}-v_t)}. \quad (2.87)$$

La partie imaginaire de l'indice effectif de propagation étant négative, le terme de propagation aura tendance à décroître.

Dans le sens contra-propagatif, c'est-à-dire, dans le sens des  $v$  négatifs, ce terme a pour expression :

$$e^{+jn_q^{[t]}k_0(v_{t+1}-v_t)} = e^{+j\text{Re}\{n_q^{[t]}\}k_0(v_{t+1}-v_t)} e^{-\text{Im}\{n_q^{[t]}\}k_0(v_{t+1}-v_t)}. \quad (2.88)$$

Ainsi, l'amplitude du mode  $q$  de la section  $[t]$  dans le sens contra-propagatif en  $v_{t+1}$  se déduit de son amplitude en  $v_t$  par la multiplication par un terme qui croît exponentiellement. Il est montré [80] que formulé ainsi, le calcul de propagation peut entraîner des instabilités numériques.

La figure 2.35 illustre le calcul des amplitudes du mode propre  $q$  entre les sections  $[t]$  et  $[t + 1]$ . Nous représentons le sens du calcul ainsi que l'évolution schématique de la fonction exponentielle intervenant dans ce même calcul.

Sur cette figure, nous remarquons que l'amplitude décroît dans le sens propagatif et croît dans le sens contra-propagatif.

Il est donc nécessaire de redéfinir l'origine des amplitudes pour le mode contra-propagatif. Ainsi, pour chaque zone  $[t]$ , nous choisissons l'origine des amplitudes du mode propagatif en  $v_t$  au début de la section et l'origine des amplitudes pour le contra-propagatif en  $v_{t+1}$  à la fin de la section. Les amplitudes des modes se déduisent par la relation suivante :

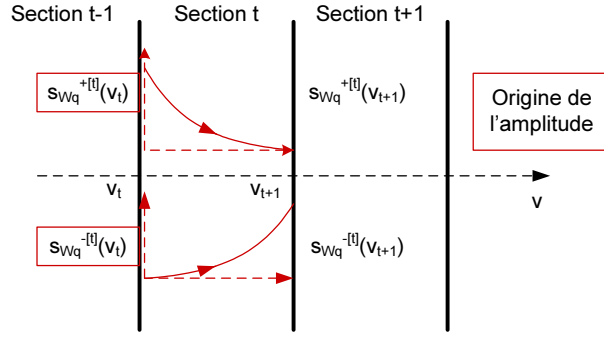


FIG. 2.35 – Schéma d'évolution de l'amplitude des modes  $q$  propagatifs  $s_{Wq}^{+[t]}$  et contra-propagatifs  $s_{Wq}^{-[t]}$  dans le cas instable

$$\overline{s_{Wq}^{+[t]}(v_{t+1})} = P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1}) \overline{s_{Wq}^{+[t]}(v_t)}, \quad (2.89)$$

$$\overline{s_{Wq}^{-[t]}(v_t)} = \left( P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1}) \right)^{-1} \overline{s_{Wq}^{-[t]}(v_{t+1})}. \quad (2.90)$$

Notons que l'inverse de la matrice de propagation dans le sens contra-propagatif  $\left( P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1}) \right)^{-1}$  n'est autre que la matrice de propagation  $P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1})$  dans le sens propagatif. Ainsi, le comportement de la fonction exponentielle est le même dans les deux cas et cette fonction est décroissante.

Ainsi définies, ces relations assurent la stabilité numérique du calcul. La figure 2.36 illustre le calcul des amplitudes du mode propre  $q$  entre les sections  $[t]$  et  $[t+1]$ . Nous représentons le sens du calcul ainsi que l'évolution schématique de la fonction exponentielle intervenant dans ce même calcul.

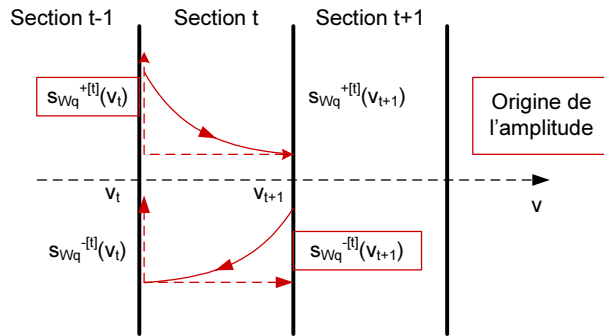


FIG. 2.36 – Schéma d'évolution de l'amplitude des modes  $q$  propagatifs  $s_{Wq}^{+[t]}$  et contra-propagatifs  $s_{Wq}^{-[t]}$  dans le cas stable

Sur cette figure, nous voyons que dans le sens du calcul, les fonctions exponentielles sont décroissantes dans les deux sens de propagation. Nous introduisons la matrice  $P^{[t]}$  telle que :

$$P^{[t]} = \left( P_{v_t}^{-[t]}(v_{t+1}) \right)^{-1} = P_{v_t}^{+[t]}(v_{t+1}). \quad (2.91)$$

La matrice  $P^{[t]}$  est la matrice diagonale de propagation dont le  $(q, q)$ -ième terme est  $e^{-\lambda_q^{[t]} k_0 (v_{t+1} - v_t)}$ .

Dans ces conditions, l'expression matricielle de la continuité des champs tangentiels (2.83) et (2.84) s'exprime de la manière suivante :

$$W^{[t]} \left( P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + \overline{s_W^{-[t]}} \right) = W^{[t+1]} \left( \overline{s_W^{+[t+1]}} + P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right), \quad (2.92)$$

$$V^{[t]} \left( P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} - \overline{s_W^{-[t]}} \right) = V^{[t+1]} \left( \overline{s_W^{+[t+1]}} - P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right). \quad (2.93)$$

Cette forme matricielle n'est pas encore exploitable numériquement. Nous proposons maintenant une forme matricielle plus adéquate.

### 2.5.2.1 Expression matricielle des relations entre les entrées et sorties d'une section

Pour la formulation matricielle du problème, nous utilisons l'algorithme en matrice-S introduit par Lifeng Li [59].

Pour calculer les vecteurs d'amplitude des modes propres dans chaque section, il nous faut tenir compte des matrices de propagation et de leur sens de progression. En effet, le mode propagatif converge de la section  $[t]$  vers la section  $[t+1]$  et le mode contra-propagatif converge de la section  $[t+1]$  vers la section  $[t]$ . Dans ce souci de stabilité numérique, il nous faut exprimer le vecteur  $\overline{s_W^{+[t+1]}}$  en fonction du vecteur  $\overline{s_W^{+[t]}}$  et le vecteur  $\overline{s_W^{-[t]}}$  en fonction du vecteur  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$ . Nous posons donc la formulation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t+1]}} \\ \overline{s_W^{-[t]}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{++}^{[t]} & r_{+-}^{[t]} \\ r_{-+}^{[t]} & t_{--}^{[t]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix} = b^{[t]} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

où les matrices  $t_{++}^t$ ,  $r_{+-}^t$ ,  $r_{-+}^t$  et  $t_{--}^t$  s'expriment :

$$t_{++}^{[t]} = 2 \left( W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right)^{-1} P^{[t]}, \quad (2.95)$$

$$r_{+-}^{[t]} = \left( W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right)^{-1} \left( -W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right) P^{[t+1]}, \quad (2.96)$$

$$r_{-+}^{[t]} = \left( W^{[t+1]-1} W^{[t]} + V^{[t+1]-1} V^{[t]} \right)^{-1} \left( -W^{[t+1]-1} W^{[t]} + V^{[t+1]-1} V^{[t]} \right) P^{[t]}, \quad (2.97)$$

$$t_{--}^{[t]} = 2 \left( W^{[t+1]-1} W^{[t]} + V^{[t+1]-1} V^{[t]} \right)^{-1} P^{[t+1]}. \quad (2.98)$$

Ce calcul est détaillé en annexe F.1. Nous remarquons qu'avec cette formulation les matrices de propagation  $P^{[t]}$  ne sont pas inversées. La cascade de ces matrices sur plusieurs sections ne risque donc pas de faire diverger les solutions. Nous avons une formulation matricielle de la relation de passage des champs électromagnétiques entre deux sections exploitable numériquement. Nous pouvons maintenant généraliser le cas à plusieurs sections.

### 2.5.2.2 Expression matricielle des relations entre les entrées et sorties de la zone de simulation

Nous cherchons maintenant à exprimer la relation entre les entrées  $\overline{s_W^{+[0]}}$  et  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$  et sorties  $\overline{s_W^{-[0]}}$  et  $\overline{s_W^{+[t+1]}}$  du système que constitue la zone de simulation :

$$\begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t+1]}} \\ \overline{s_W^{-[0]}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{++}^{[t]} & R_{+-}^{[t]} \\ R_{-+}^{[t]} & T_{--}^{[t]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[0]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix} = B^{[t]} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[0]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

où les matrices  $T_{++}^t$ ,  $R_{+-}^t$ ,  $R_{-+}^t$  et  $T_{--}^t$  s'expriment :

$$T_{++}^{[t]} = t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]}, \quad (2.100)$$

$$R_{+-}^{[t]} = \left( t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} + r_{+-}^{[t-1]} \right), \quad (2.101)$$

$$R_{-+}^{[t]} = R_{-+}^{[t-1]} + T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]}, \quad (2.102)$$

$$T_{--}^{[t]} = T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} t_{--}^{[t]}. \quad (2.103)$$

Cette relation nous permet d'obtenir les vecteurs  $\overline{s_W^{+[0]}}$  et  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$  des modes en sortie en fonction des vecteurs  $\overline{s_W^{+[t+1]}}$  et  $\overline{s_W^{-[0]}}$  des modes en entrée et de la zone de simulation.

### 2.5.2.3 Expression des amplitudes des vecteurs $\overline{s_W^{+[t]}}$ et $\overline{s_W^{-[t]}}$

Il nous faut maintenant obtenir les amplitudes des vecteurs  $\overline{s_W^{+[t]}}$  des modes propagatifs et  $\overline{s_W^{-[t]}}$  des modes contra-propagatifs dans chaque section  $[t]$  de la zone de simulation. Nous suivons, pour cela, le sens de propagation des modes propres comme nous l'avons introduit précédemment. Pour chaque section nous commençons par déterminer le vecteur  $\overline{s_W^{-[t]}}$  des modes contra-propagatifs qui dépend du vecteur  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$  des mode contra-propagatifs de la section  $[t+1]$  et du vecteur  $\overline{s_W^{+[0]}}$  des modes propagatifs de la première section par la relation :

$$\overline{s_W^{-[t]}} = \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} \left( r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right). \quad (2.104)$$

Puis nous déterminons le vecteur  $\overline{s_W^{+[t]}}$  des modes propagatifs qui dépend du vecteur  $\overline{s_W^{+[t-1]}}$  des modes propagatifs de la section  $[t-1]$  et du vecteur  $\overline{s_W^{-[t]}}$  des modes propagatifs de la section  $[t]$  calculé précédemment par la relation :

$$\overline{s_W^{+[t]}} = t_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[t-1]}} + r_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t]}}. \quad (2.105)$$

La composante  $E_z$  du champ électrique dans le cas TE ou la composante  $H_z$  du champ magnétique dans le cas TM s'obtient au sein de chaque section  $[t]$  par l'expression (2.63) établie à la partie 2.3.7.

### 2.5.3 Résultats et comparaison modale

La mise en cascade nous permet de décrire l'approche d'un guide plan le long du guide courbe. Cette approche est discrétisée en plusieurs sections où l'espace entre le guide courbe et le guide plan change. Mathématiquement, cet espace rajoute une discontinuité. Plus la taille de cette discontinuité est faible, plus elle sera difficile à décrire dans l'espace de Fourier. Autrement dit, il faudra utiliser plus d'harmoniques pour décrire les permittivités et perméabilités de la zone de simulation. Nous nous proposons donc d'étudier l'effet de cet ajout sur la convergence des indices effectifs des modes en comparant les résultats obtenus à la méthode modale analytique.

#### 2.5.3.1 Etude de convergence

Nous étudions la convergence des indices effectifs en fonction de la largeur du gap. Nous utilisons le même critère qu'à la partie 2.4.2.2. La figure 2.37 présente les résultats pour les modes fondamentaux  $TE_0$  et  $TM_0$  d'un guide de largeur  $w = 4 \mu\text{m}$  et de rayon de courbure  $R = 50 \mu\text{m}$  pour différents gaps allant de  $0,3 \mu\text{m}$  à  $3 \mu\text{m}$ .

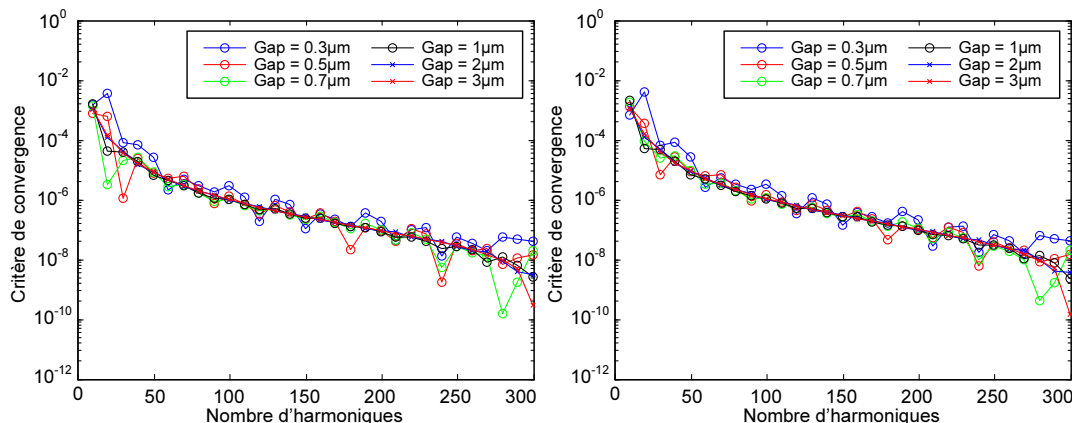


FIG. 2.37 – Convergence des parties réelles des indices effectifs des modes  $TE_0$  et  $TM_0$

Nous constatons une bonne convergence pour les grands gaps. Pour les gaps plus petits, des oscillations apparaissent dans la convergence. Celles-ci témoignent de la difficulté de projeter le motif du gap dans l'espace de Fourier. Nous obtenons néanmoins une précision de  $10^{-6}$  pour 200 harmoniques.

La figure 2.38 présente cette étude de convergence pour les parties imaginaires de l'indice des modes fondamentaux  $TE_0$  et  $TM_0$ .

Nous constatons, comme pour la partie réelle, une meilleure convergence pour des grands gaps. Nous obtenons une précision à  $10^{-5}$  pour 200 harmoniques dans le cas extrême d'un gap de  $0,3 \mu\text{m}$ .

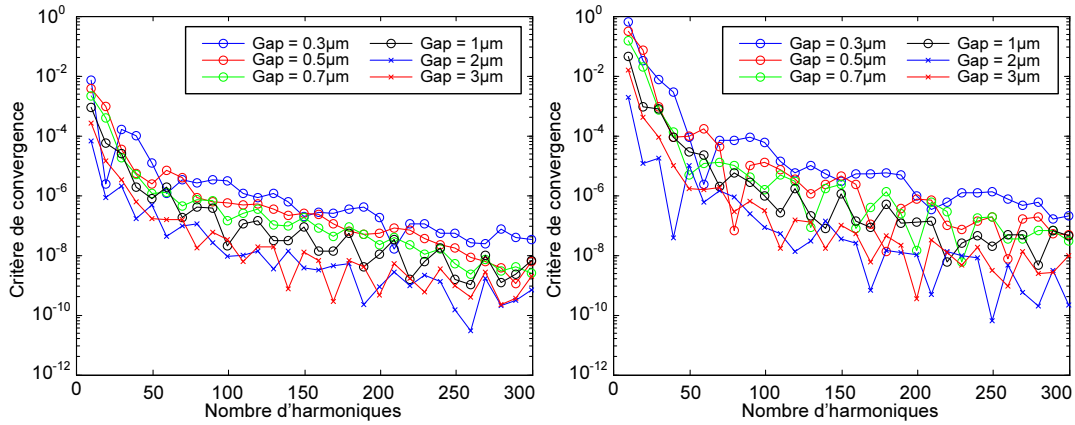


FIG. 2.38 – Convergence des parties imaginaires des indices effectifs des modes  $TE_0$  et  $TM_0$

Nous constatons des oscillations plus marquées pour les grands gaps. Pour les mêmes raisons que précédemment, moins la structure est fuyante, plus la convergence est instable.

### 2.5.3.2 Comparaison à la méthode modale analytique

Dans cette partie, nous voulons vérifier si nous sommes capables de modéliser n'importe quelle taille de gap avec l'AFMM. Dans le cas d'un gap invariant en  $\theta$ , nous pouvons comparer les résultats de l'AFMM avec la méthode modale analytique précédente. Les valeurs sont données à 200 harmoniques. Le rayon de courbure est  $50 \mu\text{m}$  et la largeur du guide est  $4 \mu\text{m}$ . Nous considérons les modes  $TE_0$ ,  $TM_0$ ,  $TE_2$  et  $TM_2$ . Les tableaux suivants présentent les résultats de l'étude.

Gap ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $TE_0$		partie imaginaire $TE_0$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
0.3	1.694840	1.694907	$7.7902 \cdot 10^{-3}$	$7.9043 \cdot 10^{-3}$
0.5	1.694901	1.694943	$4.0189 \cdot 10^{-3}$	$4.0325 \cdot 10^{-3}$
0.7	1.695061	1.695075	$2.2198 \cdot 10^{-3}$	$2.2157 \cdot 10^{-3}$
1	1.695304	1.695305	$9.8841 \cdot 10^{-4}$	$9.8293 \cdot 10^{-4}$
2	1.695728	1.695728	$1.2717 \cdot 10^{-4}$	$1.2780 \cdot 10^{-4}$
3	1.695877	1.695876	$5.8779 \cdot 10^{-5}$	$5.8684 \cdot 10^{-5}$

Gap ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $TM_0$		partie imaginaire $TM_0$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
0.3	1.694339	1.694407	$7.7247 \cdot 10^{-3}$	$7.8355 \cdot 10^{-3}$
0.5	1.694106	1.694140	$4.0343 \cdot 10^{-3}$	$4.0483 \cdot 10^{-3}$
0.7	1.694088	1.694104	$2.2672 \cdot 10^{-3}$	$2.2633 \cdot 10^{-3}$
1	1.694206	1.694207	$1.0395 \cdot 10^{-3}$	$1.0338 \cdot 10^{-3}$
2	1.694547	1.694547	$1.4809 \cdot 10^{-4}$	$1.4882 \cdot 10^{-4}$
3	1.694696	1.694695	$7.5097 \cdot 10^{-5}$	$7.4926 \cdot 10^{-5}$



Gap ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $\text{TE}_2$		partie imaginaire $\text{TE}_2$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
0.3	1.597239	1.597388	$1.0817 \cdot 10^{-2}$	$1.0790 \cdot 10^{-2}$
0.5	1.599462	1.599487	$7.2660 \cdot 10^{-3}$	$7.2097 \cdot 10^{-3}$
0.7	1.601542	1.601521	$5.5220 \cdot 10^{-3}$	$5.4903 \cdot 10^{-3}$
1	1.604372	1.604348	$4.4916 \cdot 10^{-3}$	$4.5054 \cdot 10^{-3}$
2	1.618307	1.618115	$1.2228 \cdot 10^{-2}$	$1.2341 \cdot 10^{-2}$
3	1.648200	1.648217	$3.2374 \cdot 10^{-3}$	$3.2207 \cdot 10^{-3}$

Gap ( $\mu\text{m}$ )	partie réelle $\text{TM}_2$		partie imaginaire $\text{TM}_2$	
	analytique	AFMM	analytique	AFMM
0.3	1.596711	1.596951	$1.2949 \cdot 10^{-2}$	$1.2893 \cdot 10^{-2}$
0.5	1.598780	1.598820	$9.1554 \cdot 10^{-3}$	$9.0635 \cdot 10^{-3}$
0.7	1.600851	1.600818	$7.2122 \cdot 10^{-3}$	$7.1605 \cdot 10^{-3}$
1	1.603800	1.603761	$6.0161 \cdot 10^{-3}$	$6.0377 \cdot 10^{-3}$
2	1.617943	1.617576	$1.4750 \cdot 10^{-2}$	$1.4941 \cdot 10^{-2}$
3	1.648032	1.648049	$3.6682 \cdot 10^{-3}$	$3.6444 \cdot 10^{-3}$

Nous constatons que les deux méthodes donnent des résultats similaires. Les parties réelles présentent un écart relatif maximal de  $2 \cdot 10^{-4}$  entre les deux méthodes. Les parties imaginaires présentent un écart relatif maximal de  $10^{-2}$ . En effet, nous avons vu que l'AFMM était comparable à la méthode modale analytique pour des parties imaginaires d'indice effectif plus élevées que  $10^{-8}$  en valeur absolue.

Concernant les modes fondamentaux  $\text{TE}_0$  et  $\text{TM}_0$ , le gap agit principalement sur la partie imaginaire de l'indice effectif et ne modifie que très peu la partie réelle. En revanche, les autres modes voient leur indice effectif modifié par l'approche du guide plan. Un phénomène de couplage a lieu entre le guide droit et le guide plan et le gap peut être considéré comme une cavité résonante. Ce point est important pour la suite du document.

La figure 2.31 présente l'évolution des parties imaginaires des indices effectifs des deux premiers modes en fonction du gap pour un rayon de  $80 \mu\text{m}$ . Le calcul a été effectué à 200 harmoniques.

Nous constatons que le mode fondamentale  $\text{TE}_0$  fuit moins que le deuxième mode  $\text{TE}_1$ . Nous constatons les modes  $\text{TM}_i$  et  $\text{TE}_i$  ont des comportements similaires. Nous remarquons le phénomène de résonance pour les deuxièmes modes tandis que le mode fondamental est comparativement peu affecté. Nous constatons enfin que la résonance est comparable suivant la polarisation. Nous pouvons comprendre que ces phénomènes de résonance peuvent apparaître sur le mode fondamental si le rayon de courbure est trop faible.

## 2.6 Conclusion

Nous avons mis au point un modèle de simulation d'une structure courbe basé sur l'AFMM. Ce modèle peut tenir compte du couplage avec un guide plan. L'approche de ce guide plan peut être discrétisée afin de simuler une approche quasi-continue. Le modèle donne des résultats cohérents avec les méthodes existantes tant au niveau du guide courbe simple qu'au niveau

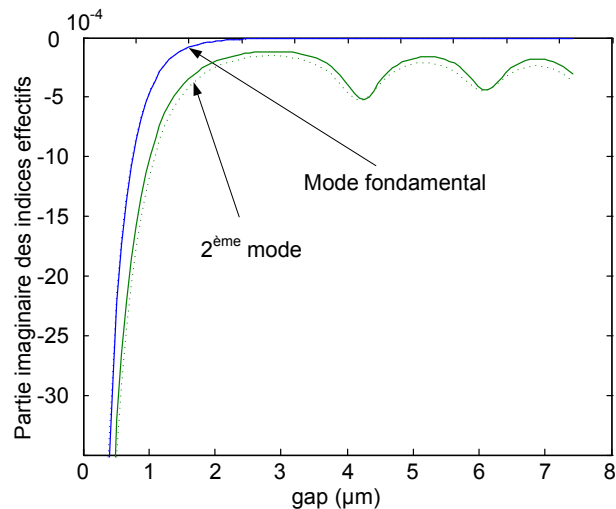


FIG. 2.39 – Evolution des parties imaginaires des indices en fonction du gap pour les modes  $TE_i$  (ligne pleine) et  $TM_i$  (ligne en pointillés)

du couplage avec le guide plan. Nous avons mis en évidence les phénomènes de couplage qui peuvent intervenir lors de l'ajout du guide plan. Nous avons vu que le mode fondamental du guide courbe fuit d'une part en fonction du rayon, d'autre part, en fonction du gap entre le guide courbe et le guide plan. Enfin, nous avons vu que le mode fondamental subit peu les effets de résonance due à l'approche du guide plan à comparer avec les autres modes.

## 2.7 Perspectives

Nous avons vu que l'ajout des PMLs anisotropes modifie le milieu de simulation. En effet, les parties imaginaires des indices effectifs sont modifiées par leurs présences. Le modifications des PMLs anisotropes par des PMLs à coordonnées réelles ou complexes [81] pourrait atténuer cette influence. En effet, celles-ci sont plus efficace pour simuler une structure ouverte et pourrait donc prendre en compte l'augmentation de l'indice de réfraction due au passage dans le plan conforme.

Nous avons comparé les résultats obtenus avec des résultats issus de simulation FDTD avec un maillage cartésien. La comparaison de la mise en cascade n'a pas encore été réalisée. Aussi, il serait intéressant de comparer la méthode avec une FDTD dont le maillage est cylindrique. Le MIT a mis à disposition une FDTD (MEEP [29]) pouvant simuler la structure dans un maillage cylindrique. Une comparaison pourrait être ainsi réalisée en prenant en compte l'évolution du gap.



# Chapitre 3

## Modélisation et performances du spectromètre

Dans le chapitre précédent, nous avons mis au point une méthode numérique pour modéliser la structure courbe qui est un élément central du spectromètre. Nous avons déterminé l'influence des paramètres de cette structure (monomodicité, approche du guide plan) à prendre en compte pour la suite. La figure (3.1) présente les schémas à gauche, du spectromètre dans sa globalité et, à droite, la structure courbe modélisée précédemment. Le spectromètre est composé d'une jonction Y qui permet de séparer le flux lumineux en deux parties. Chaque partie fuit ensuite grâce aux structures courbes modélisées dans le chapitre précédent. Les faisceaux se propagent alors vers les détecteurs et interfèrent entre eux. Les interférences sont non localisées, c'est-à-dire, qu'elles sont observables partout dans le guide plan, à partir d'une certaine distance de la structure courbe.

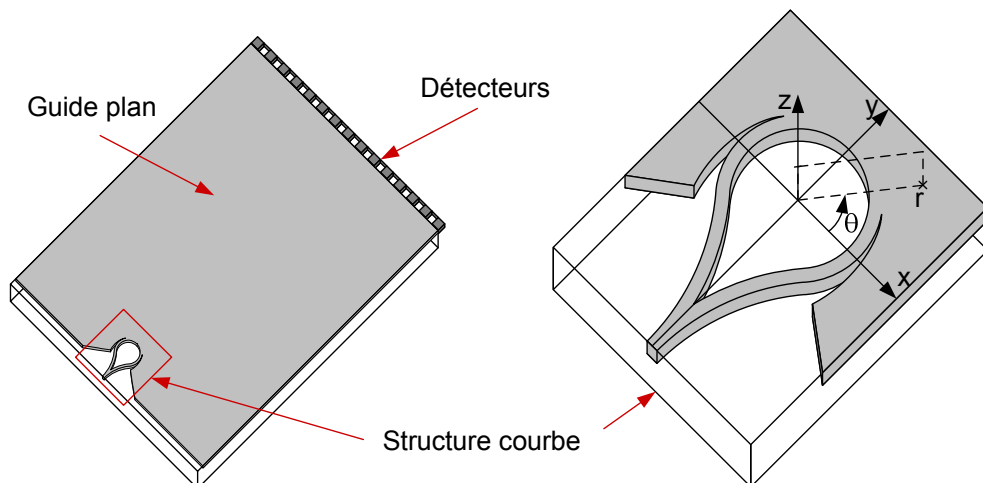


FIG. 3.1 – Schéma du spectromètre dans sa globalité à gauche et schéma de la structure courbe à droite

Ce chapitre présente le modèle complet du spectromètre. Dans un premier temps, nous simplifions la structure à trois dimensions en une structure à deux dimensions en utilisant la méthode de l'indice effectif [37]. Nous décrivons ensuite le cheminement de la lumière jusqu'à la

structure courbe.

Afin d'obtenir le champ lointain qui atteint les détecteurs, nous utilisons l'intégrale d'Helmholtz Kirchhoff que nous détaillerons. De cette méthode, nous obtenons des critères sur la bande spectrale que le spectromètre pourra mesurer. Dans cette partie, nous montrons l'importance du mode fondamental de la structure courbe et la nécessité de n'exciter que ce mode. Nous décrivons ensuite un modèle de fuite qui nous permet d'obtenir un profil d'intensité arbitraire sur les détecteurs. De cette partie, nous obtenons la résolution du spectromètre. Compte tenue de la géométrie cylindrique du système, nous proposons une intégrale de Fourier adaptée au spectromètre afin d'obtenir le spectre du signal.

Enfin, nous donnons les performances théoriques attendues.

Pour la modélisation du spectromètre, nous utilisons les paramètres liés à la technologie d'échange d'ions sur substrat de verre faisant intervenir les ions argent  $\text{Ag}^+$  et  $\text{Na}^+$  dont le contraste d'indice est typiquement 0,08. Cette technologie est détaillée dans la partie expérimentale 4.

### 3.1 Modélisation du système précédent la structure courbe

Dans cette partie, nous décrivons la modélisation de l'acheminement du signal, de l'excitation du guide d'entrée jusqu'à la structure courbe.

#### 3.1.1 Profil d'indice de réfraction

Les profils d'indice de réfraction obtenus par la méthode d'échange d'ions sont dit profil à diffusion. En effet, les ions implantés se diffusent à l'intérieur du substrat et cette diffusion est régie par les lois de Fick. Dans certaines conditions il a été montré [82–84] que le profil de concentration  $c$  des ions implantés dans le substrat de verre en fonction de la profondeur  $z$  du substrat peut se mettre sous la forme suivante :

$$c(z) = c_{\text{surf}} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{Dt}} \right), \quad (3.1)$$

où  $c_{\text{surf}}$  est la concentration des ions à la surface du substrat de verre,  $D$  la constante de diffusion des ions dans le verre,  $t$  le temps d'échange et  $\operatorname{erfc}$  la fonction erreur complémentaire définie par la relation suivante :

$$\operatorname{erfc}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_q^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (3.2)$$

La figure 3.2 donne l'allure de cette concentration  $c$  en fonction de la profondeur  $z$  du substrat de verre. Sur cette figure, nous avons représenté la fonction en escalier présentant la même aire que l'aire développée par la fonction  $c$ .

Pour modéliser la structure, nous avons fait l'approximation que les ions se sont entièrement diffusés avant la distance effective de diffusion  $d_{\text{eff}}$  définie par la quantité  $2\sqrt{Dt}$  et ce de façon

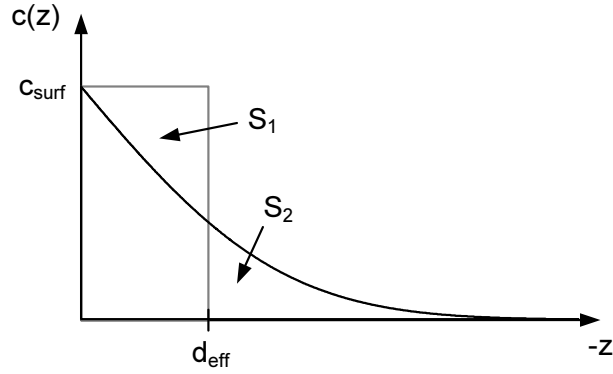


FIG. 3.2 – Représentation schématique de la concentration des ions dans le verre et de la structure à saut d'indice équivalente

homogène. Cette approximation concerne la diffusion dans la profondeur pour la réalisation du guide plan.

Pour réaliser un guide, un masque est utilisé afin de cibler la zone où nous désirons que l'échange ait lieu. Il nous faut alors tenir compte de la diffusion à l'écart de l'ouverture du masque de taille  $w_0$ . Il a été montré [85] que dans cette même approximation, les ions se diffusent sur une distance effective  $w = w_0 + d_{\text{eff}}$ , c'est-à-dire, une distance  $d_{\text{eff}}$  de chaque côté de l'ouverture du masque. La figure 3.3 représente le guide tenant compte de ces approximations.

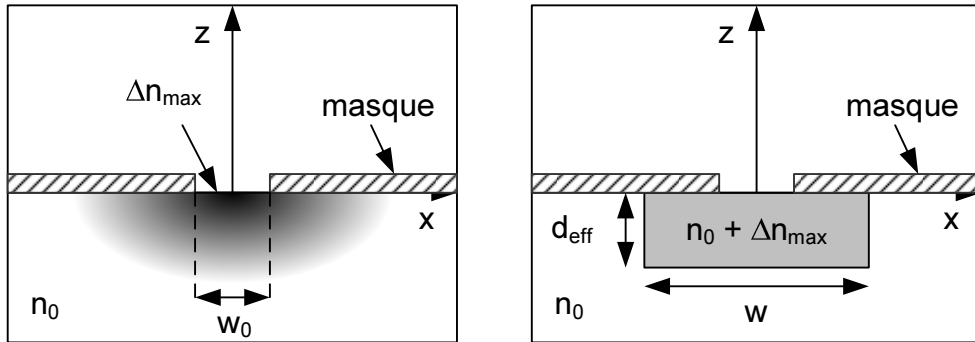


FIG. 3.3 – Schéma de l'approximation du guide à diffusion d'indice de réfraction

La répartition d'indice de réfraction dans le verre selon cette approximation a pour fonction :

$$n(z, x) = n_0 + \Delta n_{\text{max}} \Pi(z, x), \quad (3.3)$$

où  $n_0$  est l'indice de réfraction du substrat,  $\Delta n_{\text{max}}$  est le contraste d'indice à la surface du verre qui a subi l'échange d'ion et  $\Pi(z, y)$  est la fonction porte définie par :

$$\Pi(z, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |z| < d_{\text{eff}} \text{ et } |x| < w = w_0 + d_{\text{eff}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3.4)$$

Pour des raisons qui sont expliquées à la partie 3.2.7, nous cherchons à obtenir des guides monomodes pour des longueurs d'onde autour de 1550 nm. Un temps d'échange  $t = 5$  min nous

donne une profondeur effective  $d_{\text{eff}} = 1.26 \mu\text{m}$ . Compte tenu de la diffusion, la largeur du guide est  $w = w_0 + d_{\text{eff}}$  où l'ouverture du masque est  $w_0 = 1 \mu\text{m}$  et sa profondeur est  $d_{\text{eff}}$ . La figure 3.4 présente les dimensions et les indices de réfraction du guide droit avec cette approximation. À gauche nous avons représenté le guide droit en trois dimensions et à droite sa section transverse en  $y = 0$ .

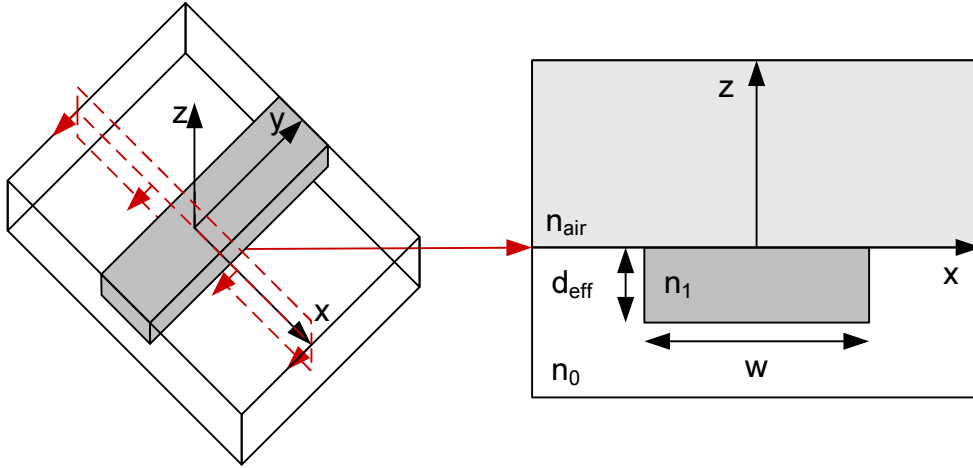


FIG. 3.4 – Schéma du guide à saut d'indice

Le guide a un indice de réfraction  $n_1 = n_0 + \Delta n_{\text{max}} = 1,595$  entouré d'un matériau d'indice de réfraction  $n_0 = 1,595$  et de l'air d'indice de réfraction 1. La profondeur de guide est  $d_{\text{eff}} = 1,26 \mu\text{m}$  et sa largeur est  $w = 2,26 \mu\text{m}$ .

### 3.1.2 Méthode de l'indice effectif

Dans le chapitre précédent, nous avons modélisé une structure en deux dimensions. La structure que nous étudions ici est une structure en trois dimensions. Nous utilisons la méthode de l'indice effectif [86] pour séparer le problème en deux problèmes à une et deux dimensions.

Reprenons les équations de Maxwell introduites dans le chapitre précédent :

$$\nabla \wedge \mathcal{E} = -\frac{\partial \mu \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \wedge \mathcal{H} = \frac{\partial \varepsilon \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Le calcul est mené pour la polarisation TE, celui pour la polarisation TM est similaire. Nous avons vu que la connaissance de la composante  $E_z$  du champ permet de déterminer les autres composantes  $H_r$  et  $H_\theta$ . Nous supposons que les variables  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  sont séparables. La composante verticale du champ électrique peut alors s'exprimer  $E_z = E_z(r, \theta)Z(z)e^{j\omega t}$ . En considérant un milieu linéaire, homogène, isotrope sans charge ni courant et en combinant les équations (3.5) et (3.6), nous obtenons l'équation d'Helmholtz :

$$\nabla^2 E_z + k_0 n^2 E_z = 0,$$

où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le vecteur d'onde. En utilisant la formule du Laplacien en coordonnées cylindriques, nous obtenons :

$$Z(z) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right) + E_z(r, \theta) \left( \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \right) - k_0 n^2 E_z(r, \theta) Z(z) = 0.$$

En introduisant  $n_{\text{eff}z}$  dans l'équation précédente et en séparant la partie dépendante de  $z$  et la partie dépendante de  $r$  et  $\theta$ , nous obtenons le système d'équation :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \theta)}{\partial \theta^2} + k_0 n_{\text{eff}z}^2 E_z(r, \theta) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k_0 (n_i^2 - n_{\text{eff}z}^2) Z(z) = 0. \quad (3.8)$$

La figure 3.5 schématise ces deux dernières équations. A gauche, nous avons représenté la structure en trois dimensions, au milieu la structure plane correspondant à la première équation (3.7) et à droite la section perpendiculaire à l'axe de propagation en  $\theta$  correspondant à la deuxième équation (3.8).

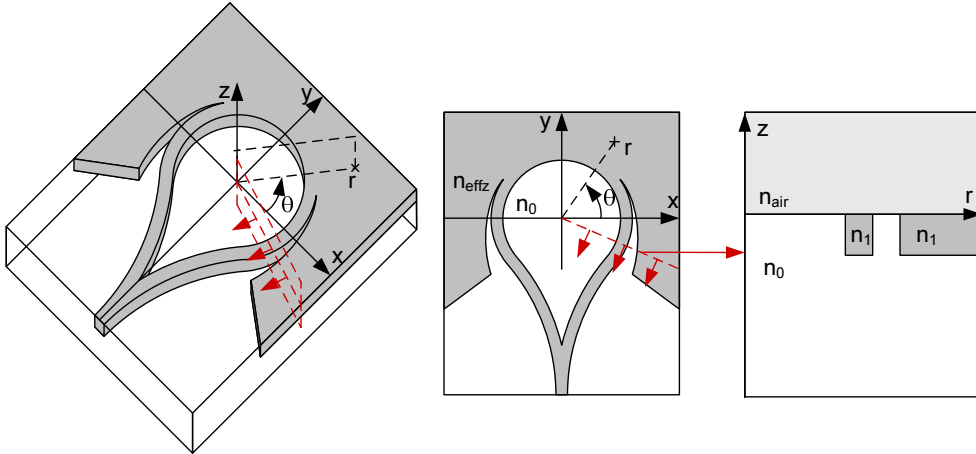


FIG. 3.5 – Schéma de la décomposition du problème en trois dimensions

Nous retrouvons donc l'équation résolue dans le chapitre précédent 2.3.1 et l'équation de propagation d'un guide plan selon  $z$  [37]. En toute rigueur, l'indice effectif de propagation  $n_{\text{eff}z}$  dépend de la longueur d'onde, aussi, il faudrait le calculer pour chaque longueur d'onde. Comme nous gardons l'indice  $n_0$  du verre constant selon la longueur d'onde, nous gardons aussi l'indice effectif  $n_{\text{eff}z}$  constant. Autrement dit, nous gardons le contraste d'indice constant en fonction de la longueur d'onde. Cet indice est calculé pour une longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  et  $n_{\text{eff}z} \approx 1,550$ .

Le guide ainsi obtenu est monomode à une longueur d'onde de  $1,55 \mu\text{m}$ , son indice effectif de propagation est  $1.537076$  dans le cas TE ( $1.536735$  dans le cas TM). Le guide reste monomode pour les deux polarisations pour une longueur d'onde minimale de  $1,48 \mu\text{m}$ .



### 3.1.3 Jonction-Y

La jonction-Y permet de séparer le flux lumineux entre le guide d'injection et la structure courbe. Nous expliquons ici le fonctionnement de cet élément. La figure 3.6 représente les différentes parties d'une jonction-Y : le guide d'injection d'où vient la lumière guidée, une zone de transition adiabatique et les guides de sorties.

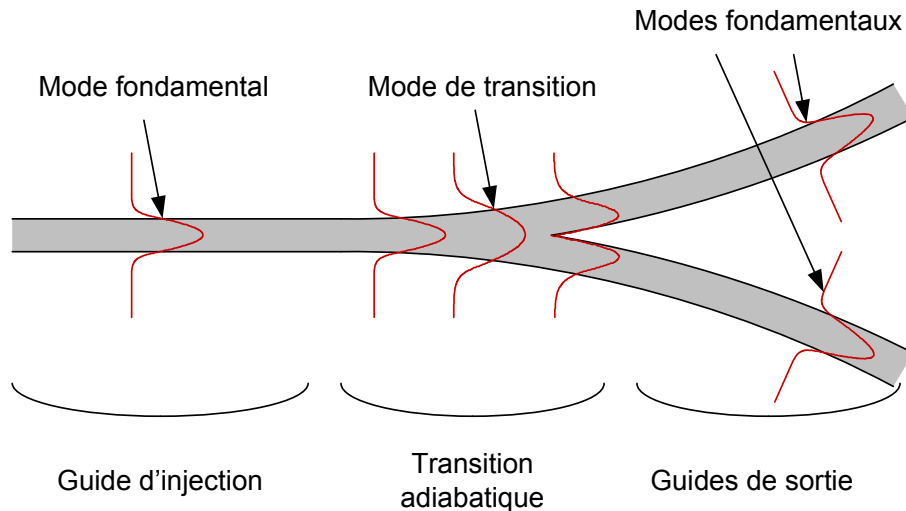


FIG. 3.6 – Schéma de fonctionnement de la jonction-Y

Sur cette figure, nous avons représenté, à gauche, l'allure de la puissance portée par le mode fondamental du guide droit d'injection. Ce mode se propage dans le guide jusqu'à la zone de transition adiabatique. Dans cette zone, le guide s'élargit lentement avec un angle de déviation de  $1^\circ$  sur une longueur  $L_j = 635 \mu\text{m}$  jusqu'au double de la largeur du guide. Cette distance est suffisamment longue pour que le mode s'élargisse de façon adiabatique, autrement dit, sans perdre d'énergie. Le mode, suffisamment large, se couple alors dans chaque guide de sortie. Si  $P_0$  correspond à la puissance dans le guide d'injection, nous retrouvons idéalement  $\frac{P_0}{2}$  dans chaque guide de sortie.

Ici, la jonction est réalisée en considérant deux arcs de rayon 2 mm. Pour un tel rayon, la partie réelle de l'indice effectif du mode fondamental du guide courbe est 1.537962 en polarisation TE et sa partie imaginaire est inférieure à  $10^{-8}$  en valeur absolue. Nous confondons par la suite ce guide courbe avec un guide droit, en résumé, nous négligeons la courbure de 2 mm.

### 3.1.4 Guide en S

Afin de guider la lumière issue de la jonction-Y vers la structure courbe, nous utilisons un guide en S. La figure 3.7 présente à gauche les guides en S et à droite la géométrie d'un guide en S. Sur cette figure, le guide droit d'injection, la jonction-Y, les guides en S et la structure courbe sont représentés.

Sur cette figure, le point  $B$ , ainsi que l'angle  $\theta_0$ , correspondent au début de la zone de fuite dans le guide plan. Le rayon de la structure courbe est constant et égal  $R$ .

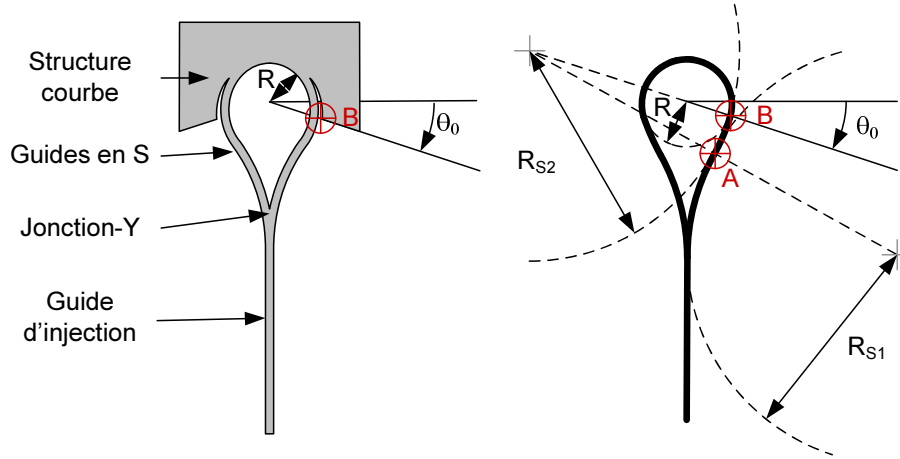


FIG. 3.7 – Schéma des guides en S

La construction géométrique a été réalisée pour éviter toute discontinuité. Sur le schéma de droite de la figure 3.7, les cercles de rayons  $R_{S1}$  et  $R_{S2}$  sont tangents et leur intersection est au point A. Le rayon  $R_{S1}$  correspond au rayon de 2 mm précédemment introduit, nous prenons la même valeur pour  $R_{S2}$ . Les cercles de rayon  $R$  et  $R_{S2}$  sont tangents et leur intersection est au point B. C'est le rayon  $R$  qui détermine la fuite de la lumière. Cette construction nous permet de choisir arbitrairement le rayon  $R < R_{S2}$  et l'angle  $\theta$ . Nous pouvons montrer que le choix de l'angle  $\theta_0$  est limité par la géométrie et l'angle limite est donnée par la relation suivante :

$$|\theta_0| < \theta_{\text{lim}} = \arccos\left(\frac{R_{S1}}{R_{S1} + R}\right). \quad (3.9)$$

Comme précédemment et compte tenu du grand rayon des guides en S, ces guides sont assimilés à des guides droits à l'entrée de la structure courbe. La structure courbe est alors excitée et la lumière fuit lors de sa propagation dans le guide courbe de rayon  $R$ . Afin d'obtenir l'intensité détectée sur les détecteurs en fonction de l'évolution du champ dans la structure courbe, il nous faut modéliser ce champ électromagnétique au loin. C'est ce que nous proposons dans la partie suivante.

## 3.2 Modélisation des interférences en champ lointain

Dans cette partie, nous détaillons le modèle utilisé pour simuler le champ lointain sur les détecteurs à partir de celui simulé dans la structure courbe. Afin de modéliser la propagation du champ, une méthode généralement utilisée est l'intégration des équations d'Helmholtz-Kirchhoff scalaires [87]. Aussi, nous décrivons dans un premier temps le théorème associé à ces intégrales. Nous l'appliquons ensuite à la simulation du champ lointain à partir du champ simulé dans la structure courbe.

### 3.2.1 Introduction à la théorie de la diffraction

A la fin du dix-septième siècle, Christiaan Huygens propose un principe de propagation de la lumière sous forme d'ondelettes. Considérant une source de lumière principale comme schématisée à la figure 3.8.

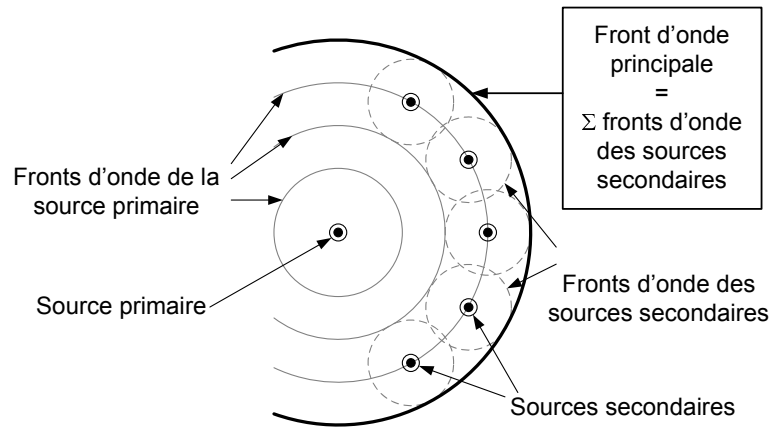


FIG. 3.8 – Schéma du principe de Huygens-Fresnel

Chaque élément du front d'onde issu de cette source principale peut être considéré à son tour comme une source secondaire. Le front d'onde total résultant de la propagation est alors la somme des fronts d'onde issus de chacune de ces sources secondaires. Ce principe a été mis en équation par Fresnel au début du dix-neuvième siècle et prend ainsi le nom de principe de Huygens-Fresnel.

Ce même siècle, Kirchhoff propose le théorème intégrale de Helmholtz-Kirchhoff qui donne la valeur du champ à l'intérieur d'un volume  $V$  en connaissant sa valeur sur la surface fermée  $S$  de ce même volume. Dans cette partie, nous détaillons ce théorème pour l'appliquer à notre cas.

### 3.2.2 Théorème intégrale de Helmholtz-Kirchhoff

Considérons un milieu linéaire, homogène, isotrope, non-magnétique, sans source ni courant d'indice de réfraction  $n$  contenu dans un volume fermé  $V$ . L'équation d'Helmholtz de ce milieu est obtenue à partir des équations de Maxwell 2.3 et 2.4. En considérant les harmoniques temporelles des champs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire, leur dépendance en  $e^{j\omega t}$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde, nous obtenons :

$$\Delta\psi + k_0 n \psi = 0, \quad (3.10)$$

où  $\psi$  est la composante  $E_z$  du champ électrique dans le cas TE ou la composante  $H_z$  du champ magnétique dans le cas TM et  $k = k_0 n$  où  $k_0$  est le vecteur d'onde dans le vide. Nous continuons le calcul pour le cas TE, celui pour le cas TM est similaire. Cette équation est définie pour tout le volume  $V$  sauf à sa surface  $S$  où nous connaissons sa valeur. La deuxième identité de

Green énonce que pour deux champs scalaires  $f$  et  $g$  de classe  $C^2$  sur  $V$ , nous avons la relation suivante :

$$\oint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dv. \quad (3.11)$$

Cette identité est valable en trois dimensions. Comme nous sommes dans un problème plan, nous ramenons cette identité au cas en deux dimensions. Sur la figure 3.9 nous pouvons voir le problème posé à gauche en trois dimensions et à droite le même problème ramené à deux dimensions.

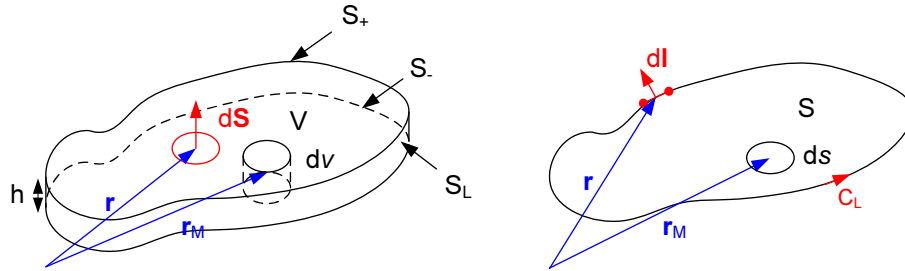


FIG. 3.9 – Schéma à trois (à gauche) et à deux dimensions (à droite) de l'intégrale d'Helmholtz-Kirchhoff

Sur cette figure, nous nous intéressons d'abord à la partie de gauche. Le volume  $V$  est l'union des surfaces  $S_+$ ,  $S_-$ , qui sont les surfaces hautes et basses, et de  $S_L$  qui est la surface latérale. Les surfaces  $S_+$  et  $S_-$  sont identiques et elles sont séparées d'une distance  $h$ . Les éléments de surface  $d\mathbf{S}$  repéré par  $\mathbf{r}$  et de volume  $dv$  repéré par  $\mathbf{r}_M$  correspondent aux variables d'intégration respectivement des membres de gauche et de droite de l'équation 3.11.

Lorsque nous passons au problème en deux dimensions, schématisé à droite sur la figure 3.9, nous faisons tendre  $h$  vers 0. En posant  $dv = hds$  où  $ds$  est l'élément de la surface  $S = S_+ = S_-$  et  $d\mathbf{S} = h d\mathbf{l}$  où  $d\mathbf{l}$  est l'élément du contour  $C_L$ , l'identité (3.11) se simplifie en :

$$\oint_{C_L} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) ds. \quad (3.12)$$

Définissons  $f$  comme étant le champ  $E_z$  que nous cherchons à déterminer et  $g$  la fonction de Green solution de l'équation d'Helmholtz dont l'expression en un point  $\mathbf{r}_M$  :

$$g(\mathbf{r}) = H_0^{(2)}(k \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|),$$

où  $H_0^{(2)}$  est la fonction de Hankel du deuxième ordre et  $k$  est le vecteur d'onde dans le milieu. Les champs  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation d'Helmholtz (3.10). La fonction  $g$  présente une singularité en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M$ . En résolvant cette singularité, nous montrons en annexe G que la valeur de la composante  $E_z$  du champ électrique en un point  $\mathbf{r}_M$  à l'intérieur de la surface  $S$  s'exprime :

$$4iE_z(\mathbf{r}_M) = -k \oint_{C_L} E_z(\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} - \oint_{C_L} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \nabla E_z(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.13)$$

Cette intégrale est l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff. Connaissant la valeur du champ  $E_z$  sur le contour  $C_L$ , nous pouvons déterminer à partir de cette intégrale le champ  $E_z$  au point  $\mathbf{r}_M$ .

### 3.2.3 Application à la structure

Nous avons détaillé l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff dans le cas général, nous l'appliquons maintenant à notre structure. Nous devons définir une surface contenue dans un contour fermé. La figure 3.10 décrit le domaine d'application du théorème. Sur cette figure, nous avons représenté les contours  $C_A$ ,  $C_B$  et  $C_C$  dont l'union constitue le contour fermé.

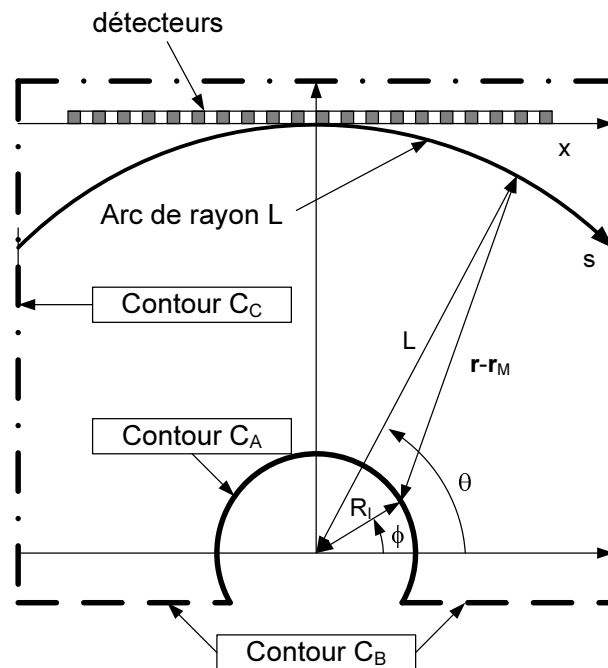


FIG. 3.10 – Schéma d'application de l'intégrale d'Helmholtz-Kirchhoff

Sur cette figure, nous avons fait apparaître les détecteurs repérés par la variable  $x$  ainsi que l'arc de rayon  $L$  repéré par la variable  $s$ . Cet arc est important pour la suite.

En utilisant le modèle de la structure courbe développé au chapitre 2, nous pouvons calculer le champ électromagnétique sur le contour  $C_A$ .

Comme nous cherchons à faire fuir la lumière vers les détecteurs, nous supposons que le champ est nul sur le contour  $C_B$ . Le contour  $C_C$  est projeté à l'infini et nous supposons que le champ s'annule à l'infini. Enfin, nous supposons que les détecteurs n'interagissent pas avec la propagation, autrement dit, que les détecteurs absorbent l'ensemble de la lumière.

Sur la figure 3.10 nous avons représenté les notations utilisées pour le calcul. Les sources sont repérées par les coordonnées polaires  $(R_I, \phi)$  et nous cherchons à calculer le champ au point  $(L, \theta)$  en coordonnées polaires. Le calcul détaillé en annexe G.2 nous donne l'expression du champ  $E_z$  au point  $(L, \theta)$  :

$$E_z(L, \theta) = -\frac{kR_I}{4j} \int_{\phi=\phi_0}^{\phi=\phi_1} E_z(R_I, \phi) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|) \frac{R_I - L \cos(\phi - \theta) d\phi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|} \quad (3.14)$$

$$-\frac{R_I}{4j} \int_{\phi=\phi_0}^{\phi=\phi_1} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|) \frac{\partial E_z}{\partial r}(R_I, \phi) d\phi, \quad (3.15)$$

$$\text{où } |\mathbf{r}-\mathbf{r}_M| = \sqrt{R_I^2 + L^2 - 2R_IL \cos(\phi - \theta)}.$$

### 3.2.4 Modélisation du champ lointain

Dans le cas où nous observons le champ lointain, nous pouvons appliquer certaines approximations. Pour de grands arguments  $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M| \gg 1$ , nous pouvons utiliser les approximations asymptotiques des fonctions de Hankel [40]. Les approximations asymptotiques des fonctions de Hankel sont données par les relations suivantes :

$$H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|}} e^{-j(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M| - \frac{1}{4}\pi)}, \quad (3.16)$$

$$H_1^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|}} e^{-j(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M| - \frac{3}{4}\pi)}. \quad (3.17)$$

De plus, pour une observation à une distance grande devant le rayon d'intégration  $L \gg R_I$ , nous nous retrouvons dans l'approximation de Fresnel. Ainsi, les termes d'amplitudes  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M|$  se simplifient en  $L$  et les termes de phase se développent au premier ordre  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_M| \approx L - R \cos(\phi - \theta)$ . Le calcul est détaillé à l'annexe G.2.2. Finalement, l'expression de la composante  $E_z$  du champ électrique lointain est alors :

$$E_z(L, \theta) = A(L)B(\theta), \quad (3.18)$$

où

$$A(L) = \frac{R_I}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kL}} e^{-jkL + j\frac{1}{4}\pi},$$

$$B(\theta) = k \int_{\phi=\phi_0}^{\phi=\phi_1} E_z(R_I, \phi) \cos(\phi - \theta) e^{jk.R_I \cos(\phi - \theta)} d\phi$$

$$+ j \int_{\phi=\phi_0}^{\phi=\phi_1} \frac{\partial E_z}{\partial r}(R_I, \phi) e^{jk.R_I \cos(\phi - \theta)} d\phi.$$

Dans cette formule, le terme  $B(\theta)$  est indépendant de la distance  $L$ . Ce terme représente l'état de phase et d'amplitude de la composante  $E_z$  du champ électrique au niveau du rayon d'intégration  $R_I$ .

Le terme  $A(L)$  rend compte de la propagation des ondes de l'arc d'intégration de rayon  $R_I$  à la distance  $L$  du centre de la structure courbe. Ce terme traduit l'état de phase de l'onde ainsi que son amplitude en  $L$ . Autrement dit, les plans de phase du champ issus de la structure courbe sont concentriques, le centre commun étant le centre de la structure courbe.

Nous pouvons alors comprendre que la ligne de détecteurs repérée par la variable  $x$  n'est pas un plan de phase de l'onde issue de la structure courbe. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

### 3.2.5 Lien avec la transformée de Fourier

Dans l'expression du champ lointain 3.18, le terme  $B(\theta)$  fait apparaître des transformées de Fourier selon l'angle  $\phi$ . Nous pouvons le constater en utilisant la formule [40] faisant intervenir des fonctions de Bessel :

$$e^{j\rho \cos(\phi-\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} i^n J_n(\rho) e^{jn(\phi-\theta)}. \quad (3.19)$$

L'expression 3.18 du terme  $B(\theta)$  devient :

$$B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[ \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} g(\theta, R_I, \phi) e^{jn\phi} d\phi \right] i^n J_n(kR_I) e^{-jn\theta}, \quad (3.20)$$

où

$$g(\theta, R_I, \phi) = kE_z(R_I, \phi) \cos(\phi - \theta) + j \frac{\partial E_z}{\partial r}(R_I, \phi). \quad (3.21)$$

Nous faisons apparaître les termes de la décomposition en série de Fourier de la fonction  $g$ . Ce dernier point nous donne l'échantillonnage nécessaire pour le calcul numérique du champ lointain.

### 3.2.6 Echantillonnage des modes propres

Nous avons vu au chapitre 2.4.2.1 que plusieurs types de modes se propagent dans la structure courbe : les modes à fuites, les modes évanescents et les modes résonants dans les PMLs. Ces modes sont caractérisés par leur indice effectif de propagation  $n_q$ . L'évolution du champ  $E_z(R_I, \phi)$  selon  $\phi$  sur l'arc de rayon  $R_I$  du mode  $q$  peut s'exprimer :

$$E_z(R_I, \phi) \approx e^{-jn_q k_0 R_I \phi}, \quad (3.22)$$

où  $n_q$  est l'indice de propagation du mode  $q$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le vecteur d'onde dans le vide,  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide et  $R$  est le rayon de courbure.

Les modes résonants dans les PMLs sont peu excités lors de la propagation dans la zone de simulation et n'ont pas d'existence déterminante dans cette zone. Ils ne risquent donc pas d'être pris en compte par cette méthode de propagation et de perturber la simulation.

Les modes évanescents ont des indices effectifs dont la partie réelle est faible, ce qui correspond à une fréquence spatiale d'oscillation faible dans la propagation selon  $\theta$ . Leur partie imaginaire étant élevée, leur puissance décroît vite lors de la propagation dans le guide courbe, ces modes n'ont donc qu'une courte existence. Ces modes ont une amplitude importante à l'écart du guide courbe.

Les modes à fuites sont les modes dont nous cherchons le champ lointain. Leurs indices de propagation ont des parties réelles élevées comparées aux modes évanescents. Aussi, l'échantillonnage est fixé par rapport à leur fréquence spatiale de propagation en  $\theta$ .

Lors de l'excitation par le mode fondamental d'un guide droit, les principaux modes excités sont les modes à fuites, les modes évanescents sont peu excités. Nous prendrons donc comme critère d'échantillonnage un minimum de deux points par période de propagation :

$$\text{Re}\{n\}_{\text{MAX}} k_0 R_I 2\Delta\phi \leq 2\pi, \quad (3.23)$$

où  $\text{Re}\{n\}_{\text{MAX}}$  est le maximum des parties réelles des indices effectifs de propagation des modes à prendre en compte. Ceci nous donne le pas d'échantillonnage nécessaire pour la description du champ sur l'arc d'intégration  $R_I$  :

$$\Delta\phi \leq \frac{\lambda}{\text{Re}\{n\}_{\text{MAX}} 2R_I}. \quad (3.24)$$

### 3.2.7 Images des interférences sur les détecteurs

Nous revenons à l'expression du champ lointain 3.18 calculée dans la partie 3.2.4. Dans cette partie, nous raisonnons sur les arcs concentriques correspondant aux plans de phase.

Nous remarquons que pour une observation lointaine de la structure courbe, la champ  $E_z(L, \theta) = A(L)B(\theta)$  décrit sur l'arc de rayon  $L$  est à variables  $L$  et  $\theta$  séparables. Cela signifie que le champ  $E_z(L_2, \theta)$  sur l'arc de rayon  $L_2$  peut s'exprimer en fonction du champ  $E_z(L_1, \theta)$  sur l'arc de rayon  $L_1$  par la relation suivante :

$$E_z(L_2, \theta) = \frac{A(L_2)}{A(L_1)} E_z(L_1, \theta). \quad (3.25)$$

Autrement dit, le champ  $E_z(L, \theta)$  s'étend au fur et à mesure que l'observation est lointaine et l'étendue du champ  $E_z(L_2, \theta)$  est supérieure à celle du champ  $E_z(L_1, \theta)$  d'un facteur d'agrandissement  $\frac{L_2}{L_1}$ .

Afin d'expliquer les interférences obtenues sur l'arc de rayon  $L$ , nous adoptons une vision simplifiée de la propagation. Selon cette vision de la propagation et pour une distance  $L$  grande devant le rayon  $R$  de la structure courbe, le champ  $E_z(L, \theta)$  peut être vu comme proportionnel au champ  $E_z(R, \theta)$  dans le guide selon la relation suivante :

$$E_z(L, \theta) = \frac{A(L)}{A(R)} E_z(R, \theta). \quad (3.26)$$



Nous considérons un guide courbe de rayon  $R$  où la fuite de lumière est faible, c'est-à-dire, que la partie imaginaire de l'indice effectif des modes est négligeable. Nous utilisons deux champs électriques propagatif de composante  $E_{z1}(R, \theta)$  et contra-propagatif de composante  $E_{z2}(R, \theta)$  de même amplitude. Ces champs sont monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda$  d'excitation et ont le même indice effectif réel de propagation  $n_q$ . De plus, ces champs sont en phase respectivement en  $\theta = \theta_0$  et  $\theta = \pi - \theta_0$ , c'est-à-dire, que l'excitation est symétrique par rapport à  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Le champ  $E_z(R, \theta)$  résultant de la somme des champs  $E_{z1}(R, \theta)$  et  $E_{z2}(R, \theta)$  est donnée par la relation approximative :

$$E_z(R, \theta) \approx 2E_z(R) e^{j\omega t} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} n_q R (\frac{\pi}{2} - \theta_0)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_q R (\theta - \frac{\pi}{2})\right). \quad (3.27)$$

Où  $\omega$  est la pulsation de l'onde. Nous faisons apparaître une onde stationnaire dans le guide courbe par l'apparition du terme en cosinus. D'après la relation 3.26, le champ  $E_z(L, \theta)$  est proportionnel au champ  $E_z(R, \theta)$ . Considérons maintenant l'abscisse curviligne  $s$  de l'arc de rayon  $L$  définie par  $s = (\frac{\pi}{2} - \theta)L$ . Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , l'abscisse  $s$  est nulle et correspond à l'intersection de l'arc de rayon  $L$  et de l'axe de symétrie de la structure courbe. Le champ  $E_z(L, \theta)$  est donné par la relation :

$$E_z(L, \theta) \propto \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_q R \frac{s}{L}\right). \quad (3.28)$$

Supposons que l'intensité  $I(L, s)$  est, ici, proportionnelle au module du champ au carré, celle-ci peut alors s'exprimer par la relation :

$$I(L, s) \propto \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} n_q R \frac{s}{L}\right)}{2}. \quad (3.29)$$

Cette relation fait apparaître la figure d'interférence des deux champ  $E_{z1}(R, \theta)$  et  $E_{z2}(R, \theta)$  du guide courbe. Nous remarquons que les franges d'interférence selon  $s$  ont une période de  $\frac{\lambda L}{2n_q R}$  proportionnelle à la longueur d'onde  $\lambda$ . Cela signifie que nous avons agrandi la période des interférences initialement de  $\frac{\lambda}{2n_q}$  d'un facteur  $\frac{L}{R}$ .

Nous définissons le facteur  $\eta$  par la relation suivante :

$$\eta = \frac{2n_q R}{L}, \quad (3.30)$$

où  $L$  est la distance d'observation des franges d'interférences,  $R$  est le rayon de courbure de la structure courbe et  $n_q$  est l'indice de propagation du mode fondamental. En considérant le nombre d'onde  $\sigma$  défini par l'inverse de la longueur d'onde  $\lambda$ , la relation (3.29) devient :

$$I(L, s) \propto \frac{1 + \cos(2\pi\sigma\eta s)}{2}. \quad (3.31)$$

Nous faisons ainsi apparaître une modulation de l'intensité en cosinus selon l'abscisse curviligne  $s$ . Cette modulation est caractérisée par le facteur  $\eta$ .

Sur la figure 3.11, nous avons représenté la structure courbe d'où est issu le champ d'interférence. Nous avons aussi représenté l'allure de ce champ sur les arcs de rayons  $L_1$  et  $L_2$ .

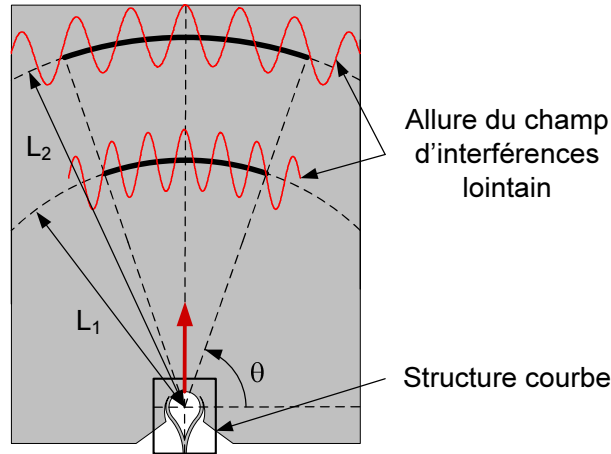


FIG. 3.11 – Schéma de l'effet d'agrandissement du champ d'interférences

Sur cette figure, nous voyons que la figure d'interférences semblent venir de la structure courbe. La période des franges d'interférences semblent bien augmenter au fur et mesure qu'elles s'écartent de la structure courbe.

La fréquence spatiale des interférences est donnée par la relation  $\eta\sigma$ . Autrement dit, la période des interférences est donnée par la relation  $\frac{\lambda}{\eta}$ . Ainsi, en modifiant le facteur  $\eta$ , il est possible alors de suffisamment échantillonner les périodes des interférences et ainsi, de déterminer la longueur d'onde  $\lambda$  du signal émis en effectuant un transformée de Fourier en cosinus de la figure d'interférences.

A terme, l'intensité sera détectée par des photodétecteurs placés à une distance  $L$  du centre de la structure courbe. Au centre de ces détecteurs, les interfranges sont identiques à celle de l'arc de rayon  $L$ . Compte tenu de la géométrie, les interfranges détectées vont s'agrandir en s'éloignant du centre. Ainsi, la période des interfranges est minimale au centre des détecteurs.

Nous en déduisons les critères suivants :

- Il nous faut faire fuir la lumière selon un seul mode sous peine d'avoir plusieurs figures d'interférences pour une longueur d'onde d'excitation. La partie réelle de ce mode est primordiale car elle doit rester constante le long de la propagation dans le guide courbe et ceci en présence du guide plan. Comme nous l'avons vu lors de la modélisation de la structure courbe au chapitre 2.5.3.2, la partie réelle du mode fondamental est peu sensible à la présence du guide plan. Ainsi, c'est ce mode que nous cherchons à faire fuir.
- Les franges d'interférences doivent être suffisamment grandes pour nous permettre de les échantillonner. Notons  $\Delta x$  la période d'un photodétecteur. Selon le critère de Schannon, la période d'échantillonnage  $\Delta x$  des détecteurs doit être 2 fois plus petite que les interfranges que nous cherchons à détecter. Ces critères nous donnent la longueur d'onde minimale que nous pourrions détecter. Si nous voulons détecter une longueur d'onde minimale  $\lambda_{\min}$

qui correspond à un nombre d'onde maximale  $\sigma_{\max}$ , le pas d'échantillonnage  $\Delta x$  des détecteurs doit satisfaire la relation suivante :

$$\frac{1}{\eta\sigma_{\max}} = \frac{1}{\eta}\lambda_{\min} \geq 2\Delta x. \quad (3.32)$$

Pour la caractérisation d'un signal dans l'infrarouge proche, nous nous fixons une longueur d'onde minimale  $\lambda_{\min}$  d'excitation de l'ordre de  $1,35 \mu\text{m}$ . La partie réelle de l'indice effectif de propagation est de l'ordre de 1.5 dans le verre et nous cherchons à produire des interférences à une distance d'environ 4 cm. Nous choisissons une période de photodétecteurs  $\Delta x = 25 \mu\text{m}$  qui est la valeur typiques des photodétecteurs en InGaAs. D'après la relation (3.30) du facteur  $\eta$ , ces critères nous donnent un rayon de courbure  $R$  donné par la relation :

$$R \leq \frac{L\lambda_{\min}}{4\Delta xn_q} = 360\mu\text{m}. \quad (3.33)$$

Nous nous fixons un rayon de courbure  $R = 300 \mu\text{m}$  pour la suite.

### 3.2.8 Conclusion

Dans cette partie, nous avons mis au point un modèle qui nous permet d'obtenir le champ électromagnétique sur les détecteurs à partir du champ simulé dans la structure courbe. Par une vision simplifiée de la propagation, nous avons déterminé des critères pour la conception du spectromètre pour son application dans le domaine du proche infra rouge.

Nous avons vu au chapitre 1.1.4.2 que la résolution du spectromètre est donnée par le nombre de modulations détectées, autrement dit, par le nombre de franges d'interférences détectées. Afin d'optimiser l'instrument, toute la lumière qui fuit du guide courbe doit être détectée. Il nous faut donc étudier la possibilité de diriger l'intensité sur les détecteurs. C'est ce que nous proposons dans la prochaine partie.

## 3.3 Modèle de fuite et optimisation de la structure courbe

Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence l'effet d'agrandissement des interférences de la figure d'interférence obtenue sur un arc de rayon  $L$  centré sur la structure courbe. Dans cette partie, nous développons un modèle de fuite qui nous permettra d'obtenir un profil d'intensité arbitraire sur les détecteurs.

### 3.3.1 Modèle de fuite

Nous cherchons dans cette section, un modèle simple nous permettant de paramétrer la variation du gap afin d'obtenir un profil d'intensité relativement constant sur les détecteurs. Nous savons, par les études réalisées au chapitre 2.5.3.2, que la partie imaginaire de l'indice

effectif du mode fondamental dépend de la distance entre le guide courbe et le guide plan. Par la suite, nous utiliserons le terme *gap* pour désigner cette distance. Afin d'optimiser la fuite de ce mode, nous commençons par chercher une évolution particulière de la partie imaginaire de l'indice effectif en fonction de l'angle  $\theta$  de propagation. Dans un deuxième temps, nous relierons l'évolution de la partie imaginaire de l'indice effectif au *gap*.

D'après les études menées au chapitre 2, la composante  $E_{z0}$  du mode fondamentale du guide courbe dans le cas de la polarisation TE peut s'exprimer par la relation suivante :

$$E_{z0}(r, \theta) = \mathcal{E}_0(r, \theta) e^{-jk_0 R n(\theta)(\theta - \theta_0)}, \quad (3.34)$$

où  $k_0$  est le vecteur d'onde,  $n$  est l'indice effectif de propagation du mode fondamental et  $R$  le rayon de courbure. L'indice effectif de propagation est une fonction de  $\theta$ . Nous avons vu au chapitre 2.5.3.2 que  $n$  dépend du *gap*, et plus précisément, que la partie réelle est peu modifiée par la présence du guide plan. Aussi, nous pouvons décomposer  $n(\theta) \approx n_r + jn_i(\theta)$  où  $n_r$  et  $n_i$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $n$ . La puissance  $P_g$  portée par ce mode est donnée par la relation :

$$P_g(\theta) = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{r=+\infty} E_{z0}(r, \theta) H_{r0}^*(r, \theta) dr. \quad (3.35)$$

A partir des équations (2.22) du chapitre 2, nous pouvons exprimer  $H_{r0}^*(r, \theta)$  en fonction de  $E_{z0}(r, \theta)$ . La puissance s'exprime alors :

$$P_g(\theta) = \frac{k_0 n_r R}{2\omega\mu_0} \left( \int_{r=0}^{r=+\infty} \frac{\mathcal{E}_0(r, \theta) \mathcal{E}_0^*(r, \theta)}{r} dr \right) e^{2k_0 R n_i(\theta)(\theta - \theta_0)}. \quad (3.36)$$

Nous voyons apparaître la norme du mode à fuite qui a fait l'objet de travaux [88] ainsi que la décroissance de la puissance guidée en fonction de la partie imaginaire  $n_i$ . Si nous posons que la puissance de ce mode est  $P_0$  au début de la fuite en  $\theta = \theta_0$ , nous pouvons alors exprimer la puissance guidée du mode fondamental par la relation :

$$P_g(\theta) = P_0 e^{2k_0 R n_i(\theta)(\theta - \theta_0)} = P_0 e^{\alpha(\theta)}, \quad (3.37)$$

où  $P_0$  est la puissance initialement couplée sur le mode fondamental de la structure courbe en  $\theta = \theta_0$ . Pour plus de clarté, nous introduisons le terme  $\alpha(\theta)$  qui est l'argument de la fonction exponentielle. Cette expression (3.37) sera d'autant plus vraie que l'intégrale de l'équation précédente (3.36) reste constante suivant  $\theta$ . Nous cherchons ici à relier  $n_i$  avec le profil d'intensité désiré sur les détecteurs. En première approximation, nous supposons que la fuite de l'énergie est tangentielle au guide. La figure 3.12 schématise à gauche la structure courbe où la fuite de lumière à l'angle  $\theta$  est représentée par une flèche.

Sur cette figure, nous avons représenté, à droite, la direction de fuite vers la ligne de détecteurs symbolisée par la droite  $Ox$ . Cette ligne de détecteurs est située à une distance  $L$  du centre

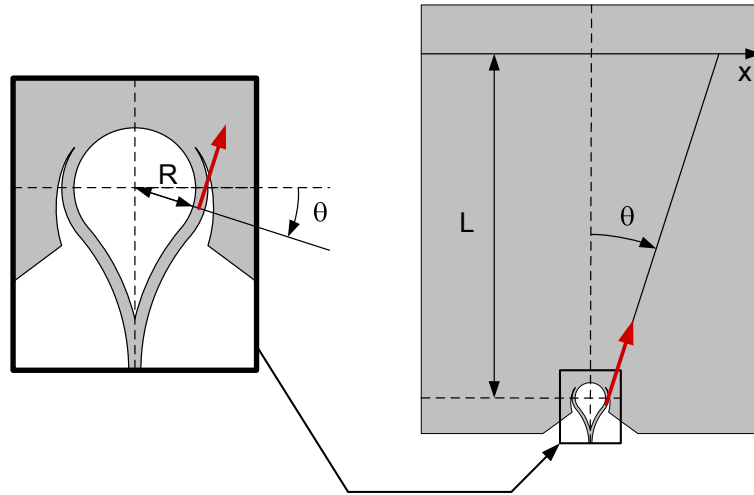


FIG. 3.12 – Schéma du modèle de fuite de la structure courbe

de courbure. Nous supposons que la lumière qui a fuit à l'angle  $\theta$  se dirige vers le point  $x$  de la ligne de détecteurs où  $x$  est défini par la relation suivante :

$$x = -(L + R) \tan \theta + \frac{R}{\cos \theta}.$$

Dans le cas extrême où nous cherchons à faire fuir la lumière sur une zone de l'ordre de  $L$ , à savoir la distance entre les détecteurs et le centre de la structure courbe, l'angle  $\theta$  sera, au maximum, de l'ordre de,  $\frac{\pi}{4}$ . Le terme  $\cos \theta$  varie alors entre 1 et  $\cos \frac{\pi}{4} \approx 0.7$  et nous pouvons alors, au premier ordre, le considérer constant et égal à 1. L'angle  $\theta$  peut alors s'exprimer :

$$\theta \approx -\arctan\left(\frac{x}{L}\right). \quad (3.38)$$

Nous cherchons à faire fuir la lumière hors de la structure courbe. Nous appelons  $P_g(\theta)$  la puissance guidée dans la structure courbe à l'angle  $\theta$  et  $P_r(\theta)$  la puissance rayonnée par unité d'angle. Nous pouvons écrire la relation :

$$P_g(\theta + d\theta) - P_g(\theta) = -P_r(\theta)d\theta.$$

En développant au premier ordre la fonction  $P_g(\theta + d\theta)$ , nous obtenons l'expression de la puissance rayonnée  $P_r$  fuyant du guide :

$$P_r(\theta) = -\frac{\partial P_g}{\partial \theta}. \quad (3.39)$$

Si nous considérons le début de la fuite en  $\theta = \theta_0$ , nous pouvons écrire la relation :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} P_r(\phi) d\phi = -[P_g(\phi)]_{\theta_0}^{\theta} = P_g(\theta_0) - P_g(\theta) = P_0 - P_g(\theta). \quad (3.40)$$

Enfin, comme nous fixons une étendue fixe de l'ordre de la largeur de la barrette des photodétecteurs, nous cherchons à faire fuir l'ensemble de la puissance du guide avant  $\theta = \theta_1$ , ainsi :

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} P_r(\phi) d\phi = P_0 - P_g(\theta_1) \approx P_0. \quad (3.41)$$

Des expressions (3.37) et (3.40), nous obtenons l'expression de la dérivée  $\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$  en fonction du profil de la puissance rayonnée par unité d'angle  $P_r$  :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(\theta) = -\frac{\partial P_g}{\partial \theta}(\theta) \frac{1}{P_g(\theta)} = \frac{-P_r(\theta)}{P_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} P_r(\phi) d\phi}. \quad (3.42)$$

Enfin, en reprenant la définition du terme  $\alpha$  de la relation (3.37), nous obtenons l'évolution de la partie imaginaire  $n_i$  de l'indice effectif du mode fondamental :

$$n_i(\theta) = \frac{1}{2k_0 R(\theta - \theta_0)} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-P_r(\psi)}{P_0 - \int_{\theta_0}^{\psi} P_r(\phi) d\phi} d\psi. \quad (3.43)$$

Ainsi, en imposant un profil  $P_r(x)$  sur les détecteurs et en utilisant le changement de variable 3.38, la formule (3.43) nous permet d'obtenir l'évolution  $n_i$  correspondante.

Pour une efficacité optimale de l'instrument, nous cherchons à concentrer toute la puissance sur les détecteurs. En vue de ne pas limiter la visibilité de l'instrument et d'obtenir la meilleure résolution possible, le profil de puissance idéal est un profil carré. Nous cherchons donc un profil carré mais celui-ci pose néanmoins un problème. En effet, la discontinuité aux bords de la fonction carré va entraîner une discontinuité dans l'évolution de  $n_i$ . Pour palier ce problème, nous plaçons une évolution linéaire au niveau de la discontinuité. Nous avons schématisé le profil de puissance rayonnée à la figure 3.13 où nous faisons apparaître cette évolution linéaire.

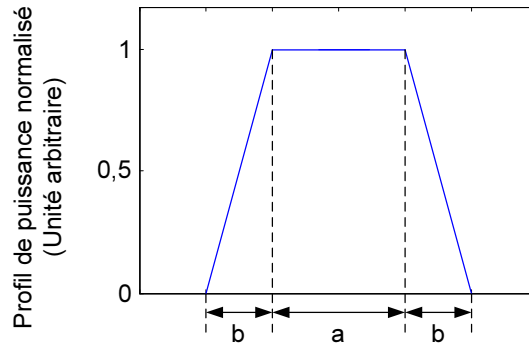


FIG. 3.13 – Schéma du profil de puissance rayonnée recherché sur les détecteurs

Sur cette figure,  $a$  désigne la longueur de la barrette des détecteurs et  $b$  la longueur de la décroissance linéaire du profil de puissance rayonnée. Pratiquement, la formule (3.43) est déterminée numériquement. Nous donnons une allure de cette fonction pour un rayon de  $R =$

500  $\mu\text{m}$ . Nous cherchons à obtenir un profil de puissance rayonnée constant sur la largeur de détection  $a = 2,5$  cm avec une décroissance linéaire fixée par le paramètre  $b = \frac{a}{30}$ . Les détecteurs sont situés à une distance  $L = 4$  cm de la boucle de rayon  $R$ . Ce profil de puissance rayonné est représenté à gauche sur la figure 3.14. Pour ce profil, les angles de début de fuite  $\theta_0$  et de fin de fuite  $\theta_1$  sont respectivement  $-22,5^\circ$  et  $24,1^\circ$ . La variation de  $n_i$  correspondante est représentée à droite sur la figure 3.14.

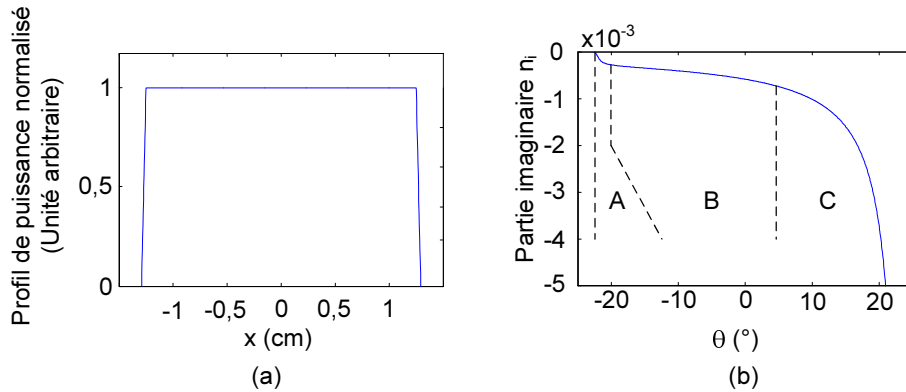


FIG. 3.14 – Profil de puissance rayonnée par unité d’angle désirée sur les détecteurs à gauche et évolution de  $n_i$  correspondant à droite pour un rayon  $R = 500$   $\mu\text{m}$

Sur le graphique d’évolution de la partie imaginaire, nous remarquons trois zones principales. La première zone A correspond au début de la fuite : le profil d’intensité croît linéairement, ainsi la fuite est de plus en plus forte. La deuxième zone B correspond à une fuite relativement constante : le profil d’intensité est constant. Enfin, la dernière partie C qui correspond à la fin de la fuite : la puissance dans le guide doit diminuer jusqu’à zéro et la partie imaginaire de l’indice tend vers  $-\infty$ .

Il suffit alors de relier l’évolution de la partie imaginaire  $n_i$  de l’indice effectif du mode fondamental en fonction du gap pour obtenir un profil de puissance rayonné arbitraire  $P_r(x)$ .

### 3.3.2 Evolution de l’indice effectif du mode fondamental

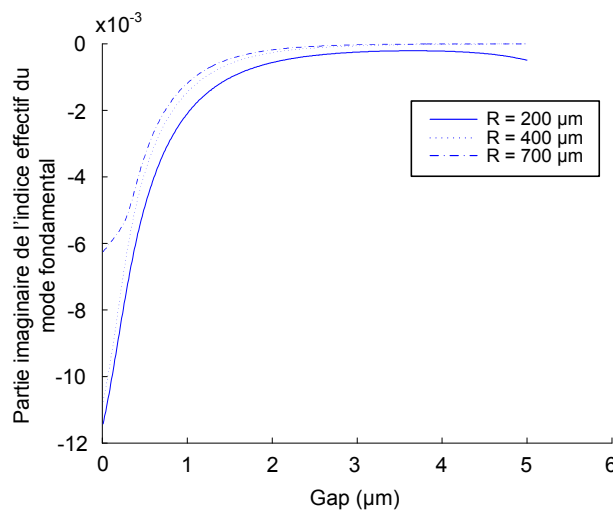
Nous connaissons maintenant l’évolution de la partie imaginaire  $n_i$  de l’indice effectif de propagation du mode fondamental pour obtenir un profil de puissance rayonnée arbitraire  $P_r$  sur les détecteurs. Nous cherchons maintenant à relier cette partie imaginaire  $n_i$  à la variation du gap. Pour ceci, nous avons utilisé le modèle de structure courbe exposé au chapitre 2. L’évolution de la partie imaginaire de l’indice effectif du mode fondamental a été simulée pour des rayons de 200  $\mu\text{m}$  à 800  $\mu\text{m}$  et pour des gaps de 0.01  $\mu\text{m}$  à 5  $\mu\text{m}$ . Les paramètres propres à la simulation sont résumés dans le tableau 3.1

Nous avons vu au chapitre 2.5.3.1 qu’un nombre plus important d’harmoniques est nécessaire pour la convergence des indices effectifs dans le cas de petits gaps. En effet, plus le motif est de petite taille, plus il faut d’harmoniques pour obtenir une bonne représentation dans l’espace de Fourier. Nous avons vu à la figure 3.14 que la partie imaginaire diminue rapidement lorsque l’angle  $\theta$  approche l’angle de fin de fuite  $\theta_1$ . Aussi, la principale partie du champ aura

Largeur du guide	2.26 $\mu\text{m}$
Nombre d'harmoniques	200
PML gauche	2 $\mu\text{m}$
PML droite	2 $\mu\text{m}$
coefficient d'absorption	1 - j
zone à gauche du guide	6 $\mu\text{m}$
zone à droite du guide	10 $\mu\text{m}$ - gap

TAB. 3.1 – Paramètres de simulation pour l'évolution de  $n_i$  en fonction du gap

fuit avant d'atteindre cette zone. La figure 3.15 présente la variation de la partie imaginaire du mode fondamental en fonction du gap pour des rayons  $R = 200, 400$  et  $700 \mu\text{m}$ .

FIG. 3.15 – Evolution de la partie imaginaire de l'indice effectif du mode fondamental en fonction du gap pour des rayons de 200, 400 et 700  $\mu\text{m}$ 

Sur cette figure, nous constatons que plus le rayon est grand, plus le guide plan doit être proche du guide courbe pour faire fuir le mode fondamental. Pour un rayon  $R = 200 \mu\text{m}$ , nous constatons que l'évolution de la partie imaginaire n'est pas monotone et qu'elle diminue après 3,8  $\mu\text{m}$ . Ceci met en évidence l'effet de résonance entre le guide courbe et le guide plan abordé lors de la partie 2.5.3.2. Un rayon plus grand que 200  $\mu\text{m}$  est donc nécessaire. Enfin, nous constatons que pour un rayon  $R = 700 \mu\text{m}$ , la partie imaginaire a tendance à remonter pour les faibles gaps. Comme la fuite est relativement élevée pour cette valeur du gap, cela ne nous gênera pas pour la suite.

Connaissant la variation de cette partie imaginaire en fonction du gap, nous pouvons relier la variation du gap au profil d'intensité désiré sur les détecteurs.

### 3.3.3 Evolution du gap pour un profil d'intensité arbitraire

En reliant l'évolution du gap avec la partie imaginaire de l'indice effectif du mode fondamental du guide courbe, nous déterminons l'évolution optimale du gap pour obtenir le profil



d'intensité désiré. Nous donnons un exemple d'évolution dans le même cas qu'à la partie 3.3.1 pour des rayons  $R = 200, 400$  et  $700 \mu\text{m}$ . La figure 3.16 expose les variations de gap simulées pour une étendue  $a = 2,5 \text{ cm}$  sur les détecteurs.

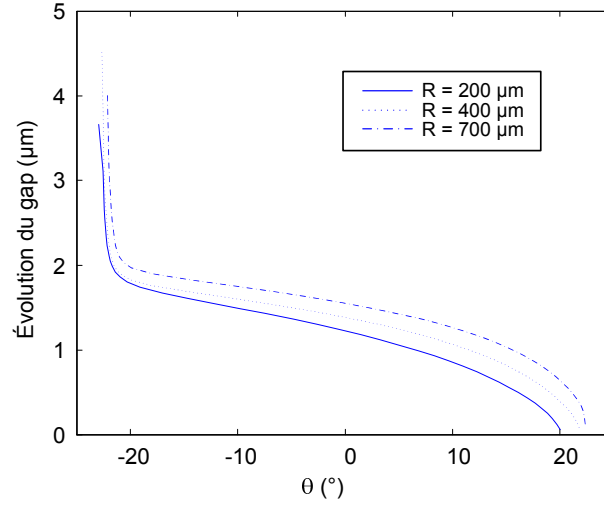


FIG. 3.16 – Evolution de la partie imaginaire de l'indice effectif du mode fondamental en fonction du gap pour des rayons de 200, 400 et  $700 \mu\text{m}$

Sur cette figure, nous retrouvons les trois zones abordées à la figure 3.14 : une zone de variation rapide au début de la fuite, un palier et une deuxième zone de variation rapide jusqu'à un gap nul. Nous pouvons remarquer que plus le rayon est grand, plus le gap du palier est élevé. En effet, plus le rayon est grand, plus la longueur de l'arc est grande et plus la fuite doit être étalée.

### 3.3.4 Expression du profil d'intensité sur les détecteurs

Dans la partie précédente, nous avons déterminé l'évolution optimale du gap afin d'obtenir un profil d'intensité arbitraire sur les détecteurs. A la partie 3.2.4, nous avons déterminé une formule nous permettant de calculer la composante  $E_z$  du champ électrique sur les détecteurs à partir du champ simulé par l'AFMM. Il nous faut maintenant relier l'intensité  $I$  sur les détecteurs à la composante  $E_z$ .

Considérons une onde électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  dans un milieu homogène, linéaire et isotrope. La puissance véhiculée par cette onde est caractérisée par son vecteur de Poynting. L'intensité est définie comme étant la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. Comme nous sommes en régime harmonique, cette intensité est liée à la partie réelle du vecteur de Poynting. Ce dernier a pour expression :

$$\pi = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \}, \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \{ (-E_z H_y^*) \mathbf{e}_x + (E_z H_x^*) \mathbf{e}_y \}. \quad (3.45)$$

L'intensité détectée par les détecteurs est selon la direction  $y$ . Aussi, nous ne nous intéressons qu'au deuxième terme. La relation entre la composante  $H_x$  du champ magnétique et la composante  $E_z$  du champ électrique est :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_x. \quad (3.46)$$

La composante  $\Pi_y$  du vecteur de Poynting s'exprime alors :

$$\Pi_y = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left( -\frac{j}{\omega\mu_0} E_z \frac{\partial E_z^*}{\partial y} \right) \right\}. \quad (3.47)$$

En considérant que l'onde se dirige principalement vers les détecteurs, le vecteur de propagation  $\mathbf{k}$  peut s'exprimer :

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y \approx k_y \mathbf{e}_y. \quad (3.48)$$

La dérivation par rapport à  $y$  de la composante  $E_z$  du champ électrique revient à un produit par le terme  $-jk_y \approx -jk$  et la composante  $\Pi_y$  du vecteur de Poynting a pour expression :

$$\Pi_y = \frac{n}{Z_0} |E_z|^2, \quad (3.49)$$

où  $n$  est l'indice du milieu et  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  est l'impédance caractéristique du vide. L'intensité  $I$  sur les détecteurs est alors obtenue par la moyenne temporelle de la composante  $\Pi_y$  du vecteur de Poynting. L'intensité a pour expression :

$$I = \langle \Pi_y \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \Pi_y \} = \frac{n}{2Z_0} |E_z|^2. \quad (3.50)$$

Si nous considérons maintenant l'interférence entre les deux composantes des champs électriques  $E_{z1}$  et  $E_{z2}$  issus de chacun des bras de la structure courbe, l'intensité résultante de leur somme a pour expression :

$$I = \frac{n}{2Z_0} |E_{z1} + E_{z2}|^2. \quad (3.51)$$

Nous avons maintenant la formule nous donnant l'intensité sur les détecteurs. Ceci nous permet de simuler les profils d'interférences.

Largeur du guide	2.26 $\mu\text{m}$
Longueur d'onde	1.55 $\mu\text{m}$
Indice de coeur	1.550
Indice de substrat	1.515
Rayon	300 $\mu\text{m}$
zone à gauche du guide	6 $\mu\text{m}$
zone à droite du guide	12 $\mu\text{m}$ (sans le gap)
Nombre de sections	60
Nombre d'harmoniques	100
coefficient d'absorption des PMLs	1 - j
taille de la PML de gauche	2 $\mu\text{m}$
taille de la PML de droite	2 $\mu\text{m}$

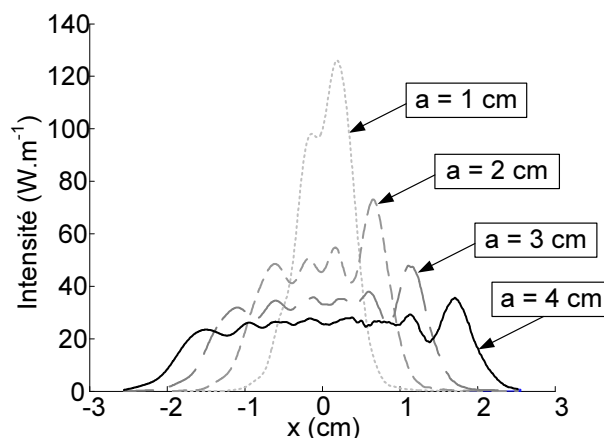
TAB. 3.2 – Paramètres de simulation pour l'évolution de  $n_i$  en fonction du gap

### 3.3.5 Résultats

#### 3.3.5.1 Étendue du champ

Nous avons implémenté l'intégrale de Helmholtz-Kirchhoff (3.18) introduit dans la partie 3.2 sous Matlab®. En utilisant le modèle de fuite introduite dans la partie 3.3.1, nous avons optimisé l'évolution du gap pour obtenir un profil arbitraire d'intensité sur les détecteurs. Le tableau 3.2 résume les paramètres utilisés pour les simulations de la structure courbe.

Nous cherchons à obtenir des profils d'intensité concentrés sur la largeur  $a$  des détecteurs. Le rayon de courbure est  $R = 300 \mu\text{m}$  et les détecteurs sont à une distance  $L = 4 \text{ cm}$ . Le modèle ne produisant pas des profils d'intensité centrés, nous les centrons en modifiant l'angle  $\theta_0$  de début de fuite. La figure 3.17 présente les résultats pour différentes largeurs  $a$  de profil visées. Seul le bras droit de la structure courbe est excité. La longueur d'onde d'excitation est  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  et la puissance est 1 W.

FIG. 3.17 – Intensité sur les détecteurs issue du bras droit de la structure courbe en fonction de  $x$  pour des largeurs  $a$  visées de 1, 2, 3 et 4 cm à une distance  $L$  de 4 cm

Nous constatons que la largeur à mi-hauteur est cohérente pour chaque largeur  $a$  visée. Nous

constatons également des oscillations du champ sur le profil d'intensité. Ces oscillations sont dues à l'excitation inévitable d'autres modes dans la structure courbe.

Nous revenons sur l'approximation de la puissance détectée introduite à la partie 3.3.4. La puissance détectée sur la ligne des détecteurs se calcule en intégrant l'intensité par rapport à  $x$ . Pour une puissance de 1 W d'excitation, la puissance calculée avec l'approximation est de 1 W contre une valeur de 0,994 W sans l'approximation. Nous en concluons que l'approximation est valide d'une part et que pratiquement toute la puissance se dirige bien vers les détecteurs d'autre part.

### 3.3.5.2 Phénomène de battement

Au chapitre 2.4.5, nous avons mis en évidence le phénomène de battement entre les modes de la structure courbe. Nous avons effectué les mêmes étapes d'optimisation de la fuite pour un guide de largeur  $w = 4 \mu\text{m}$ . Le guide droit de même largeur est multimode d'indices effectifs 1,5437 et 1,5265. Sur la figure 3.18, nous représentons les intensités issues du bras droit pour une largeur visée de  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ mm}$  et pour les deux guides de largeur  $w = 4 \mu\text{m}$  et  $w = 2,26 \mu\text{m}$ .

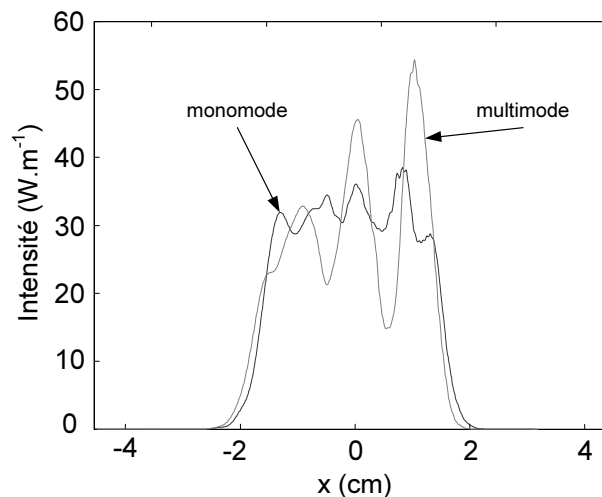


FIG. 3.18 – Intensité sur les détecteurs issue du bras droit de la structure courbe en fonction de  $x$  pour des largeurs de guide  $w = 4 \mu\text{m}$  et  $w = 2,26 \mu\text{m}$  à une distance  $L$  de 4 cm

Sur cette figure, nous constatons que le phénomène de battement est plus marqué pour le guide multimode. L'intensité est moins constante sur les détecteurs que pour le guide monomode. Nous concluons que le profil d'intensité est optimal pour un guide monomode.

### 3.3.5.3 Profil d'intensité en fonction du rayon

Nous avons fixé les évolutions de gap à une longueur d'onde  $\lambda = 1550 \text{ nm}$  pour des rayons  $R = 300, 500$  et  $700 \mu\text{m}$ . La largeur du guide est  $w = 2,26 \mu\text{m}$ . Sur la figure 3.19, nous représentons les intensités issues du bras droit pour une largeur visée de  $a = 2,5 \text{ cm}$ ,  $b = 0,8 \text{ mm}$  et pour les trois rayons à une longueur d'onde  $\lambda = 1500 \text{ nm}$ .

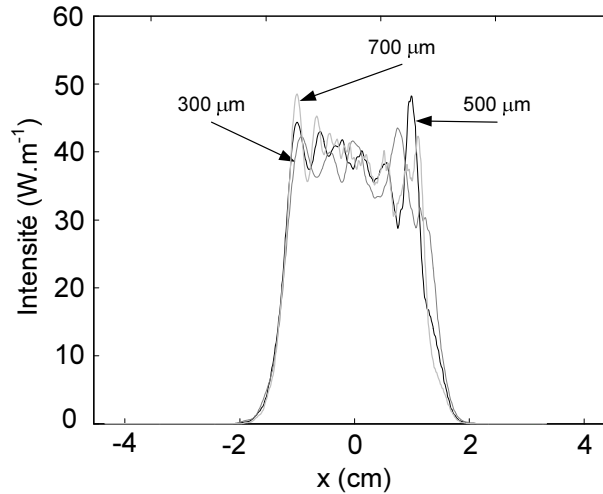


FIG. 3.19 – Intensité sur les détecteurs issue du bras droit de la structure courbe en fonction de  $x$  pour les rayons  $R = 300, 500$  et  $700 \mu\text{m}$  et  $w = 2,26 \mu\text{m}$  à une distance  $L$  de  $4 \text{ cm}$  à  $\lambda = 1500 \text{ nm}$

Sur cette figure, nous constatons que la largeur visée est relativement bien restituée et ce pour les trois rayons. Nous remarquons aussi que la présence d'un nombre plus important d'oscillations pour les grands rayons. En effet, la fuite sur les grands rayons a lieu sur une plus grande distance et le champ a plus "le temps" d'osciller. Nous concluons que le modèle de fuite est valide et ce pour les rayons supérieurs à  $300 \mu\text{m}$ .

#### 3.3.5.4 Profil d'interférence

Le profil d'interférence en intensité est obtenu en sommant le champ électrique avec son symétrique par rapport à  $x = 0$ . La figure 3.20 présente le profil d'interférence pour une largeur de détecteurs  $a = 1,5 \text{ cm}$  pour un signal monochromatique de longueur d'onde  $1,55 \mu\text{m}$ . Nous avons représenté à droite le profil d'interférence et à gauche des agrandissements sur la zone centrale et sur une zone extérieure.

Tout d'abord, nous constatons un contraste maximal sur pratiquement toute la figure d'interférences. Nous constatons bien un agrandissement des franges d'interférences. Celles-ci sont de l'ordre de  $67 \mu\text{m}$  au centre des détecteurs, ce qui correspond bien à un agrandissement de  $\frac{L}{2n_q R} \approx 44$ . Nous constatons également que les franges d'interférences s'agrandissent lorsque nous nous écartons du centre des détecteurs. Celles-ci sont de l'ordre de  $72 \mu\text{m}$  à  $1 \text{ cm}$  du centre des détecteurs. Ceci s'explique par la géométrie de la propagation du champ et sera détaillé dans la prochaine partie 3.4.

#### 3.3.5.5 Résolution du spectromètre

En introduction, nous avons vu que la résolution  $\delta\sigma$  se déduit du nombre de modulations détectables. Ceci nous mène à la définition suivante de la résolution : le nombre de modulations que nous pouvons mesurer est le nombre de modulations présentes sur l'arc qui intercepte le centre des détecteurs. Si nous appelons  $x_{\text{max}}$  la distance sur laquelle nous mesurons la figure

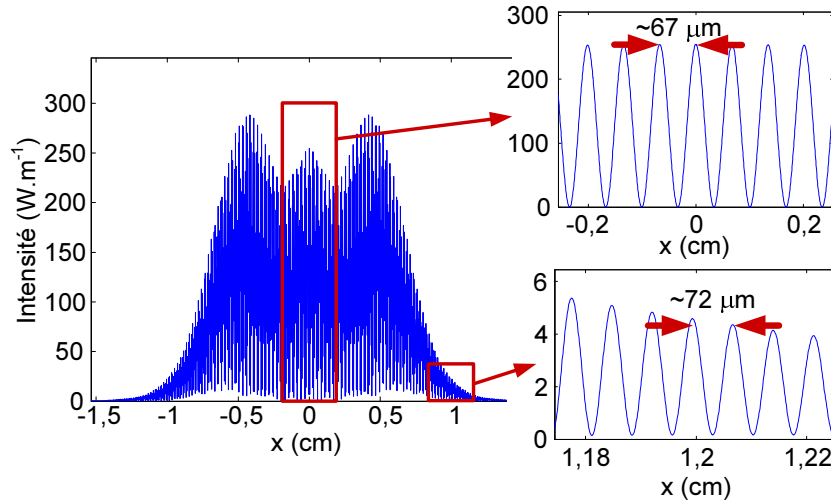


FIG. 3.20 – Profil d'interférence en intensité sur les détecteurs pour une largeur visée de 1,5 cm à une distance  $L$  de 4 cm

d'interférence et  $s_{\max}$  la distance de l'arc correspondante, nous définissons la résolution du spectromètre par la relation suivante :

$$\delta\sigma = 2\eta \frac{0.6}{s_{\max}}, \quad (3.52)$$

où

$$s_{\max} = 2L \arctan\left(\frac{x_{\max}}{2L}\right). \quad (3.53)$$

### 3.3.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté le modèle permettant de simuler la figure d'interférence obtenue sur les détecteurs. Nous avons montré que la structure courbe est capable d'étaler la puissance selon un profil arbitraire. Le modèle de fuite nous permet ceci et une fonction trapèze a pour le moment été implémentée. D'autre fonction peuvent être utilisées comme une fonction compensant, par exemple, les pertes par propagation dans le guide plan.

Nous avons montré que les interfranges obtenues sont agrandies d'un facteur d'environ  $\frac{L}{n_q R}$  où  $L$  est la distance entre les détecteurs et la structure courbe,  $R$  est le rayon de courbure et  $n_q$  est la partie réelle de l'indice effectif de propagation du mode fondamental. Enfin, nous avons soulevé un problème lié à l'évolution de ces franges d'interférences en s'éloignant du centre des détecteurs. Enfin, nous avons déterminé une formule nous donnant la résolution du spectromètre. Nous nous proposons maintenant de calculer le spectre du signal à partir de ce profil d'interférence.

## 3.4 Traitement du profil d'intensité - obtention du spectre

Dans la partie précédente, nous avons modélisé le profil d'interférence obtenu sur les détecteurs. Dans cette partie, nous détaillons la méthode utilisée pour obtenir le spectre du signal à

partir de ce profil d'interférence. Nous commençons par donner le lien entre l'intensité détectée et la densité spectrale de puissance du signal. Nous proposons alors une méthode pour obtenir la densité spectrale de puissance pour une source particulière. Dans la partie précédente 3.3.5.4, nous avons soulevé le problème lié à l'évolution des franges d'interférences lorsque nous nous éloignons du centre des détecteurs. Nous proposons alors une intégrale de Fourier nous permettant de mieux restituer la densité spectrale. Enfin, nous donnons des résultats sur la simulation du spectromètre en considérant des spectres arbitraires et nous concluons sur les performances du spectromètre.

### 3.4.1 Lien entre l'intensité détectée et la densité spectrale

Nous avons vu à la partie 3.2.7 que le spectromètre opère un agrandissement sur les franges d'interférences et plus exactement, une diminution de leur fréquence spatiale d'un facteur  $\eta$ . Dans cette même partie, nous avons mis en évidence la modulation de l'intensité  $I$  par un terme en cosinus. L'intensité de la figure d'interférence détectée sur les photodétecteurs à une distance  $L$  du centre de la structure courbe pour un signal monochromatique de nombre d'onde  $\sigma$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$I(\sigma, x) = P_1 |U_1(x)|^2 + P_2 |U_2(x)|^2 + 2\sqrt{P_1 P_2} U_1(x) U_2(x) \cos(2\pi\eta\sigma s(x)), \quad (3.54)$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les puissances des champs électriques issus des bras respectivement droit et gauche de la structure courbe. Les amplitudes réelles  $U_1(x)$  et  $U_2(x)$  correspondent aux profils spatiaux de répartition de la puissance selon  $x$  sur le plan des détecteurs et sont normées par la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U_i(x)|^2 dx = 1. \quad (3.55)$$

La figure (3.21) représente l'allure des amplitudes réelles  $U_1(x)$  et  $U_2(x)$  issues des bras respectivement droit et gauche pour une longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ .

Sur cette figure, nous constatons que ces enveloppes varient lentement comparés à la période des interférences qui est de l'ordre de la dizaine de  $\mu\text{m}$ .

Nous nous mettons dans le cas où la jonction-Y introduite à la partie 3.1.3 induit des puissances  $P_1$  et  $P_2$  égales à  $\frac{P_0}{2}$ . L'expression (3.54) de l'intensité  $I(\sigma, x)$  pour une excitation monochromatique devient alors :

$$I(\sigma, x) = \frac{P_0}{2} \left( |U_1(x)|^2 + |U_2(x)|^2 + 2U_1(x)U_2(x) \cos(2\pi\eta\sigma s(x)) \right). \quad (3.56)$$

Cette formule nous donne l'intensité détectée pour un signal monochromatique de nombre d'onde  $\sigma$ . Dans le cas où l'excitation est un signal polychromatique, c'est-à-dire, contenant plusieurs nombres d'onde, il nous faut considérer une répartition spectrale de puissance  $B(\sigma)$ . L'intensité  $I(x)$  obtenue sur les détecteurs par l'excitation du signal polychromatique est donnée par l'expression suivante :

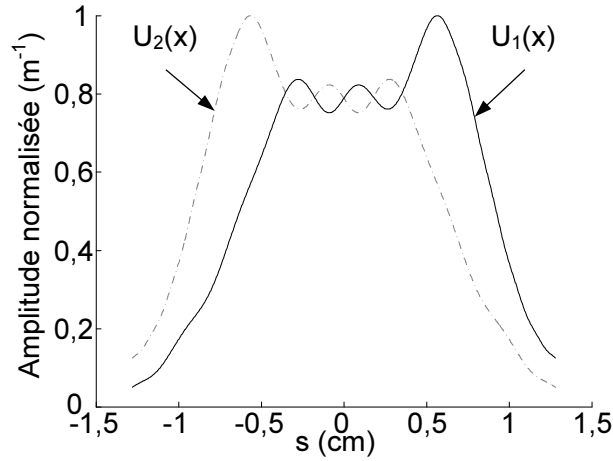


FIG. 3.21 – Amplitudes des intensités issues des bras gauche (en pointillés) et droit (en trait plein) de la structure courbe sur les détecteurs

$$I(x) = \int_{\sigma=0}^{+\infty} \frac{B(\sigma)}{2} \left( |U_1(x)|^2 + |U_2(x)|^2 + 2U_1(x)U_2(x) \cos(2\pi\eta s(x)) \right) d\sigma. \quad (3.57)$$

En toute rigueur, les enveloppes  $U_1(x)$ ,  $U_2(x)$  dépendent du nombre d'onde de l'excitation. Dans ce premier traitement, nous les considérons indépendantes du nombre d'onde. Si nous considérons que les enveloppes  $U_1(s)$  et  $U_2(s)$  ne dépendent pas du nombre d'onde  $\sigma$ , nous pouvons écrire la relation suivante :

$$I(x) = \frac{(|U_1(x)|^2 + |U_2(x)|^2)}{2} \int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) d\sigma + U_1(x)U_2(x) \int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\eta s(x)) d\sigma. \quad (3.58)$$

L'expression de l'intensité sur les détecteurs fait donc apparaître un premier terme donnant la puissance du signal sur les détecteurs  $\int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) d\sigma$  ainsi qu'un deuxième terme donnant une transformée de Fourier en cosinus. Le produit d'enveloppe  $U_1(x)U_2(x)$  est directement lié au contraste  $C$  dont l'expression est la suivante :

$$C(x) = \frac{2U_1(x)U_2(x)}{|U_1(x)|^2 + |U_2(x)|^2}. \quad (3.59)$$

Dans cette expression, nous remarquons que si les enveloppes  $U_1(x)$  et  $U_2(x)$  sont suffisamment constantes sur la largeur des photodétecteurs, le contraste  $C$  se rapproche de 1. Dans ce cas optimal, la relation qui lie l'intensité détectée  $I(x)$  et la transformée de Fourier en cosinus du spectre  $B(\sigma)$  est la suivante :

$$I(x) = \int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) d\sigma + \int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\eta s(x)) d\sigma. \quad (3.60)$$



Nous retrouvons alors une expression similaire à l'expression (1.10) abordée dans le chapitre 1.1.5.

La différence réside dans la variable de modulation en cosinus. En effet, dans les expressions (3.58) et (3.60), nous voyons que la transformée de Fourier en cosinus fait apparaître la variable  $s$  et non la variable  $x$ . Or l'intensité est exprimée selon la variable  $x$ . Nous pouvons alors comprendre que la transformée de Fourier de l'intensité selon la variable  $x$  ne peut nous restituer convenablement le spectre. Ceci nous mène à la définition d'une transformée de Fourier adaptée.

### 3.4.2 Motivations et énoncé de la transformée de Fourier adaptée

Comme nous l'avons vu dans la partie 3.3.5, le champ lointain  $E_z(L, \theta)$  à une distance  $L$  donnée peut être vu comme l'image du champ dans la structure courbe  $E_z(R, \theta)$  qui a subi un agrandissement caractérisé par le facteur  $\eta$ . Dans notre cas, nous observons le champ  $E_z(L(\theta(x)), \theta(x))$  sur les détecteurs repérés par la coordonnée  $x$  et ce champ dépend de  $x$ . La figure 3.22 présente une illustration de cette distance. Sur cette figure, nous avons représenté les détecteurs, repérés par la coordonnée  $x$ , la distance  $L$  des détecteurs centrés par rapport à l'axe de symétrie de la structure courbe. Nous avons aussi représenté l'arc  $C_d$  tangent aux détecteurs en  $x = 0$  et dont le centre de courbure est le même que celui de la structure courbe. Cet arc est repéré par la coordonnée curviligne  $s$ .

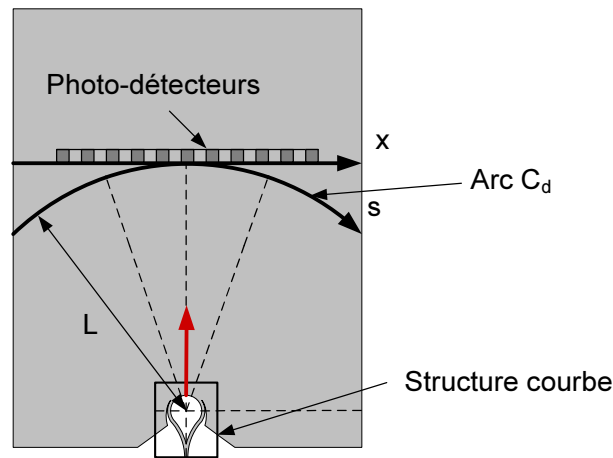


FIG. 3.22 – Schéma des axes considérés pour la transformée de Fourier adaptée

Si nous appliquons une transformée de Fourier à la figure d'interférence  $I_x$  simulée sur les détecteurs, c'est à dire, par rapport à la variable  $x$ , nous obtenons un spectre de la variable  $\sigma_x$  contenant la variation de la période d'interférences. Cette transformée de Fourier  $F_x$  a pour expression :

$$F_x(\sigma_x) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} I_x(x) e^{2j\pi\sigma_x x} dx, \quad (3.61)$$

où  $\sigma_x$  est la fréquence spatiale de la figure d'interférence selon  $x$ .

Nous avons vu à la partie 3.2.7 que l'image des interférences issues du guide courbe est sur l'arc  $C_d$ . Aussi, nous pouvons simuler la figure d'interférence  $I_s$  sur cet arc. En considérant que la figure d'interférences est limitée, c'est-à-dire qu'elle est nulle au-delà d'un intervalle  $[s_{\min}, s_{\max}]$ , nous pouvons en calculer la transformée de Fourier  $F_s$  selon la variable  $s$ . Cette transformée de Fourier a pour expression :

$$F_s(\sigma_s) = \int_{s=s_{\min}}^{s=s_{\max}} I_s(s) e^{2j\pi\sigma_s s} ds, \quad (3.62)$$

où  $\sigma_s$  est la fréquence spatiale de la figure d'interférence selon  $s$ .

Nous appliquons les transformées de Fourier (3.61) et (3.62) aux figures d'interférences simulées respectivement sur les détecteurs et sur l'arc  $C_d$ . Le signal dont nous cherchons le spectre est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ . Les valeurs absolues de ces transformées de Fourier en fonction de la fréquence spatiale  $\sigma_x = \sigma_s$  sont données sur le graphique 3.23. Nous représentons à gauche, la partie en basses fréquences spatiales et à droite, la partie en hautes fréquences spatiales correspondant à la période des interférences.

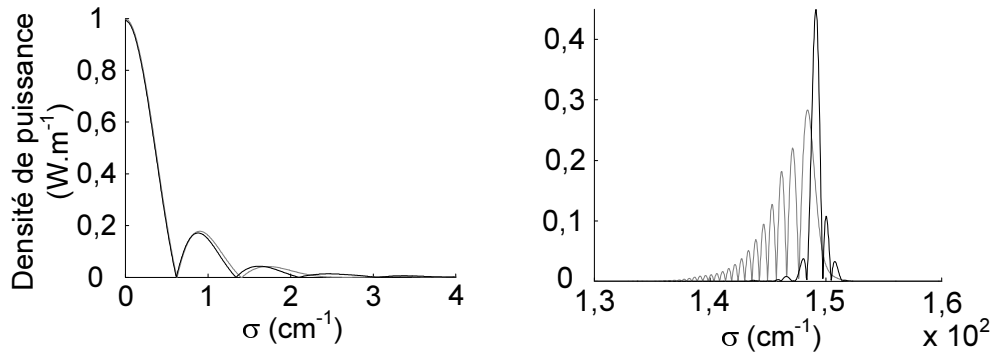


FIG. 3.23 – Comparaison des transformées de Fourier selon  $x$  en gris et selon  $s$  en noir

Sur ce graphique, nous constatons que la transformée de Fourier (3.62) selon  $s$  nous donne bien un pic correspondant à la période des interférences. Les lobes secondaires visibles sont dus au produit d'enveloppes  $2U_1U_2$  de la figure d'interférences. La transformée de Fourier (3.61) selon  $x$ , quant à elle, rend compte de la variation de la période des interférences, autrement dit, de la variation de sa fréquence spatiale.

En pratique, nous mesurons l'intensité  $I_x$  de la figure d'interférence sur les détecteurs et nous ne pouvons pas mesurer le champ d'interférence  $I_s$  sur l'arc  $C_d$ . Nous proposons donc un changement de variable dans l'expression de la transformée de Fourier (3.62) selon  $s$ . Nous partons de la transformée de Fourier (3.62) selon  $s$  que nous appliquons à la figure d'interférences  $I_x(x(s))$  selon  $x(s)$ . Cette transformée de Fourier a pour expression :

$$F_s(\sigma_s) = \int_{s=s_{\min}}^{s=s_{\max}} I_x(x(s)) e^{2j\pi\sigma_s s} ds. \quad (3.63)$$

Nous posons le changement de variable  $s = L \arctan\left(\frac{x}{L}\right)$ , l'expression (3.63) devient :

$$F_s(\sigma_s) = \int_{x=-x_{\max}}^{x=+x_{\max}} I_x(x(s)) e^{2j\pi\sigma_s L \arctan(\frac{x}{L})} \frac{1}{1 + (\frac{x}{L})^2} dx. \quad (3.64)$$

En pratique, l'intensité de la figure d'interférence est échantillonnée sur les détecteurs. Nous considérons un échantillonnage ponctuel de période  $\Delta x$  sur les détecteurs. Nous posons  $x = n\Delta x$  pour  $n \in \llbracket -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rrbracket$  où  $N$  est le nombre de détecteurs. L'échantillonnage de la figure d'interférence a pour effet de périodiser le spectre sur l'axe des fréquences spatiales  $\sigma_x$  selon  $x$ . Selon  $\sigma_s$ , il est répété mais pas proprement dit périodisé. Cela dit, la fréquence spatiale  $\sigma_s$  de repliement de spectre est la même que  $\sigma_x = \frac{1}{2\Delta x}$ , où  $\Delta x$  est le pas d'échantillonnage de l'intensité  $I_x$  de la figure d'interférences. Nous avons vu en introduction que la largeur des détecteurs a pour effet d'atténuer le spectre calculé pour les hautes fréquences spatiales. Nous ne tenons ici pas compte de cet effet. La discrétisation de la transformée de Fourier adaptée (3.64) devient alors :

$$F(\sigma_s) = \Delta x \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{n=+\frac{N}{2}} I_x(n\Delta x) \frac{e^{2j\pi\sigma_s L \arctan(\frac{n\Delta x}{L})}}{1 + (\frac{n\Delta x}{L})^2}. \quad (3.65)$$

Nous comparons maintenant le spectre obtenu à partir de la transformée de Fourier adaptée avec celui obtenu à partir du signal sur l'arc  $C_d$ . Le signal dont nous cherchons le spectre est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ . L'échantillonnage de la figure d'interférence est effectuée sur 1024 points espacés de  $25 \mu\text{m}$ . Les modules de ces transformées de Fourier en fonction de la fréquence spatiale  $\sigma_s$  sont données sur le graphique 3.24. Nous représentons à gauche, la partie en basses fréquences spatiales et à droite, la partie en hautes fréquences correspondant à la période des interférences.

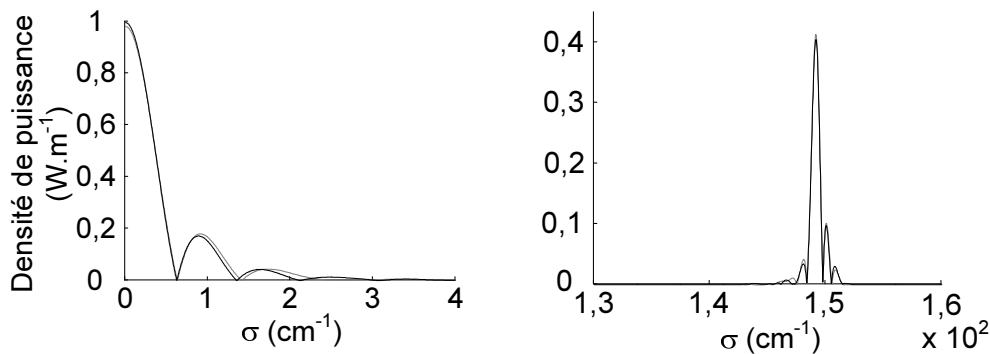


FIG. 3.24 – Comparaison des transformées de Fourier adaptée selon  $x$  en gris et selon  $s$  en noir

Sur ce graphique, nous constatons une bonne similitude en basse fréquence ainsi qu'autour du pic correspondant à la fréquence spatiale des franges d'interférences.

Nous en concluons que la transformée de Fourier (3.65) est a priori adaptée à notre problème et améliore la reconstitution du spectre. Nous nous proposons maintenant de l'appliquer au modèle du spectromètre pour étudier la restitution du spectre du signal à analyser.

### 3.4.3 Calibration en nombre d'onde

Nous avons vu dans la partie 3.4.1 que la modulation de l'intensité de la figure d'interférences est modulée par un cosinus faisant intervenir le facteur  $\eta$ . La détermination de ce facteur  $\eta$  nous permet de calibrer le spectromètre. C'est ce que nous proposons dans cette partie.

Afin d'obtenir le facteur  $\eta$ , nous appliquons la transformée de Fourier adaptée directement à l'intensité  $I$  détectée sur les photodétecteurs pour différents nombres d'onde  $\sigma$  d'excitation. Nous rappelons l'expression de l'intensité :

$$I(x) = \frac{(|U_1(x)|^2 + |U_2(x)|^2)}{2} \int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) d\sigma + U_1(x)U_2(x) \int_{\sigma=0}^{+\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\eta\sigma(x)) d\sigma. \quad (3.66)$$

En opérant la transformée de Fourier adaptée à l'intensité  $I$  nous obtenons deux composantes principales dans l'espace des fréquences spatiales  $\sigma_i$ . Une composante en basses fréquences correspondant à l'enveloppe principale du signal et une composante en haute fréquence correspondant à la distribution de Dirac convolué par le produit d'enveloppe.

La calibration consiste à repérer, pour un nombre d'onde d'excitation  $\sigma$  donné, la fréquence spatiale  $\sigma_i$  du maximum du pic de dirac convolué au produit d'enveloppe  $U_1(x)U_2(x)$ . Notons que ce dernier point peut provoquer une erreur de calibration, un traitement consistant à s'affranchir du produit d'enveloppe  $U_1(x)U_2(x)$  permettrait de lever cette erreur.

La calibration a été effectuée pour une structure courbe de rayon de courbure  $R = 300 \mu\text{m}$  et à une distance  $L = 4 \text{ cm}$ . La figure 3.25 présente les résultats de calibration. Sur cette figure nous avons représenté la fréquence spatiale de la figure d'interférence en fonction de la longueur d'excitation par des croix, et la régression linéaire par un trait plein.

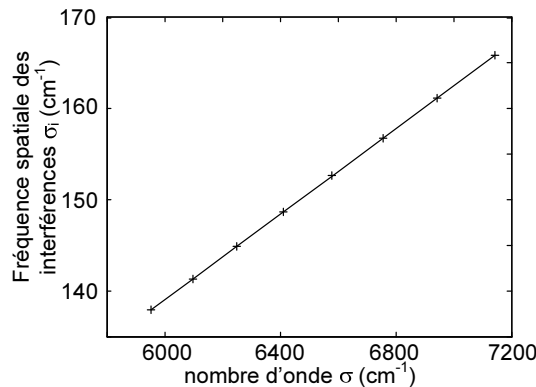


FIG. 3.25 – Correspondance entre la fréquence spatiale de la figure d'interférence

La régression linéaire pour cette simulation par l'expression suivante :

$$\sigma_i = \eta\sigma = (0.0234\sigma - 1.731)\text{cm}^{-1}. \quad (3.67)$$

Cette relation fait apparaître un offset. Elle peut être due au fait que  $\eta$  n'est pas constant suivant le nombre d'onde  $\sigma$ . Ceci peut être expliqué par la relation donnée au facteur  $\eta$  que nous rappelons :

$$\eta = \frac{2n_q(\lambda)R}{L}. \quad (3.68)$$

Dans cette relation, nous voyons apparaître l'indice effectif de propagation. Cet indice effectif dépend de la longueur d'onde d'excitation, c'est à dire de  $\sigma$ . Autrement dit, ce spectromètre dépend a priori de la dispersion du guide courbe et nous sommes sur un zone de nombres d'onde où la relation est linéaire. La transformée de Fourier à appliquer alors au spectre est donnée par la relation suivante :

$$F(\sigma) = \Delta x \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{n=+\frac{N}{2}} I_x(n\Delta x) \frac{e^{2j\pi\sigma\eta(\sigma)L\arctan\left(\frac{n\Delta x}{L}\right)}}{1 + \left(\frac{n\Delta x}{L}\right)^2}, \quad (3.69)$$

où  $\sigma$  est cette fois le nombre d'onde du spectre à restituer et  $\eta(\sigma)$  est donnée par la régression linéaire (3.67).

Nous avons déterminé le facteur  $\eta$  et calibré le spectromètre. Nous pouvons maintenant simuler la restitution d'un spectre.

### 3.4.4 Simulation d'un interférogramme et restitution du spectre

Afin de simuler la figure d'interférence produite par le spectromètre, nous simulons les figure d'interférences  $I(\sigma, s)$  pour différentes valeurs du nombre d'onde  $\sigma$ . La puissance injectée dans chaque bras est 0,5 W, ce qui produit des figures d'interférences dont la puissance est 1 W sur le plan des photodétecteurs. Nous construisons ensuite la figure d'interférence en sommant les intensités de chaque figure d'interférence sur le spectre que nous cherchons à simuler. La figure d'interférence  $I$  pour un spectre  $B(\sigma)$  est donnée par la relation :

$$I(x) = \int_{\sigma=0}^{\sigma=+\infty} B(\sigma) \frac{I(\sigma, s)}{P_0(\sigma)} d\sigma. \quad (3.70)$$

Pratiquement, les figures d'interférences sont calculées tous les 1 nm, la somme est effectuée numériquement. C'est à dire que nous sectionnons le spectre en tranche de  $\delta\sigma$  autour du nombre d'onde  $\sigma$  correspondant à la figure d'interférence. Nous pondérons la figure d'interférence par l'intégrale du spectre dans cette tranche. Enfin nous sommons les figures d'interférences ainsi pondérées. Une fois sommée, nous lui appliquons la transformée de Fourier adaptée pour en obtenir le spectre. Cette approche n'est certes pas rigoureuse car elle ne prend pas en compte le produit d'enveloppes ni la puissance des figures d'interférences. Elle permet néanmoins d'obtenir une idée de la reconstruction du spectre. L'exemple est donnée pour deux gaussiennes centrées en  $\lambda_1 = 1550$  nm et  $\lambda_2 = 1610$  nm de largeurs à mi-hauteur respectivement de 40 et 30 nm. La figure 3.26 présente à droite la figure d'interférence produite sur les détecteurs et à

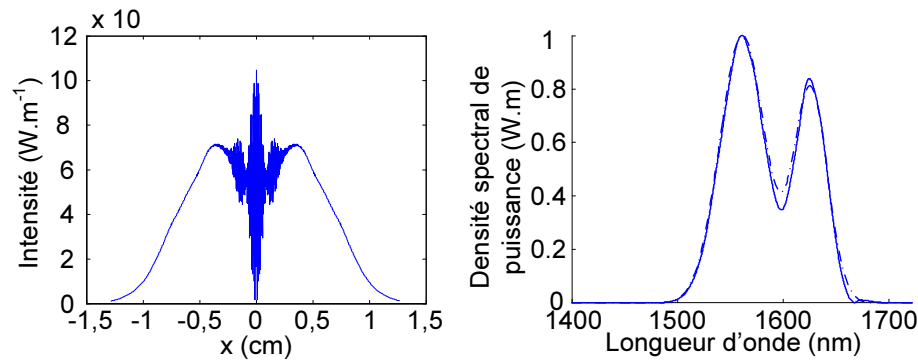


FIG. 3.26 – Exemple de figure d'intensité sur les détecteurs à gauche et spectre d'excitation normalisé (en pointillés) et spectre reconstitué et normalisé (en trait plein)

gauche la superposition du spectre d'excitation et du spectre restitué. Le maximum des spectres est ramené à l'unité afin de pouvoir les comparer.

Nous constatons un reconstitution relativement fidèle. La mauvaise estimation autour de 1600 nm doit être due à la convolution avec le produit d'enveloppe. Ceci entraîne une erreur de densité de puissance de 8 % à 1600 nm. Un traitement prenant en compte ce produit d'enveloppe devrait améliorer la restitution du spectre. En effet, en prenant en compte le produit d'enveloppe, autrement dit, le contraste, nous atténuons l'effet des lobes secondaires sur la reconstitution du spectre. Cette restitution serait, à priori, plus précise.

### 3.4.5 Simulation de la résolution

Nous avons vu que la reconstitution du spectre est sensible au contraste  $C$ . Une méthode pour atténuer cette influence est de modifier les paramètres de la structure courbe afin obtenir des enveloppes les plus constantes possibles sur les détecteurs. Cette étude nous donnera la résolution maximale que peut atteindre ce spectromètre. Comme nous l'avons vu en introduction, cette configuration nous donne la résolution la plus haute avec, comme compromis, des lobes secondaires élevés. Nous modifions ainsi les paramètres  $a$  et  $b$  du modèle de fuite afin d'étendre les enveloppes  $U_1$  et  $U_2$  sur toute la largeur de photodétecteurs. Pour cette simulation, les paramètres  $a$  et  $b$  ont été fixés respectivement à 3 cm et à 1 mm. Dans cette configurations, 83 % de la puissance initiale atteint les détecteurs. Nous appliquons la transformée de Fourier adaptée directement sur les figures d'interférences.

La figure 3.27 présente le spectre simulé d'un signal monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 1550$  nm.

Sur cette figure, nous retrouvons une fonction proche d'un sinus cardinal dont les lobes secondaires sont plus élevées. Les lobes secondaires d'un sinus cardinal sont à 21,7 % du pic principal alors que les lobes sont ici à 25 %. Des lobes parasites supplémentaires apparaissent autour du pic correspondant à la longueur d'onde. Ceci peut venir du produit d'enveloppe et peut être gênant pour distinguer des pics relativement proches. Aussi, une étude plus approfondie consistant à prendre en compte le contraste  $C$  est nécessaire. Compte tenu de cette remarque, nous continuons l'étude de résolution.

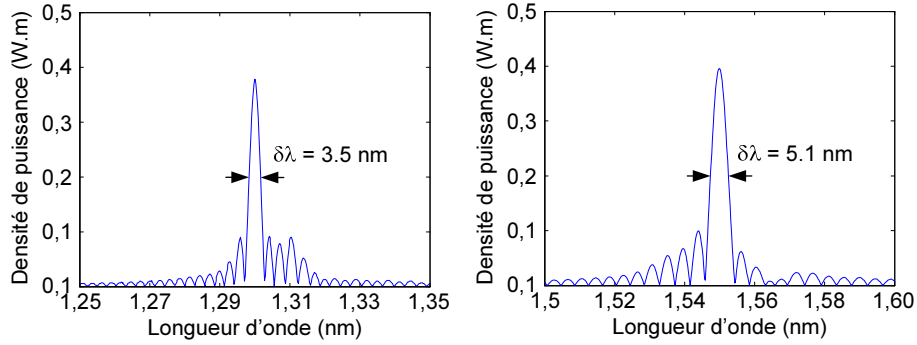


FIG. 3.27 – Simulation du spectre d'un signal monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 1300$  nm à droite et  $\lambda = 1550$  nm à gauche

La largeur à mi-hauteur du lobe principal nous donne la résolution atteinte par le spectromètre. Pour  $\lambda = 1550$  nm et  $1300$  nm, nous obtenons une résolution en longueur d'onde respectivement de  $\delta\lambda = 5,1$  nm et  $3,4$  nm.

Nous rappelons la formule introduite dans la partie 3.3.5 nous donnant la résolution en fonction des paramètres du spectromètre :

$$\delta\sigma = 2\eta \frac{0.6}{s_{\max}} = \frac{0.6L}{n_q R s_{\max}}, \quad (3.71)$$

où

$$s_{\max} = 2L \arctan\left(\frac{x_{\max}}{2L}\right). \quad (3.72)$$

L'indice effectif du mode fondamental du guide courbe est d'environ  $1,54$  aux deux longueurs d'onde. Cette formule nous donne des résolutions approchées de  $5$  et  $3,5$  nm aux longueurs d'onde  $1550$  et  $1300$  nm. Nous en concluons que la formule approchée nous donne une bonne estimation des résolutions attendues.

### 3.4.6 Simulation de la gamme de longueur d'onde

Dans cette partie, nous montrons les limites de la gamme de longueur d'onde du spectromètre.

Nous nous proposons de mettre en évidence cette longueur d'onde minimale avec un rayon  $R = 300$   $\mu\text{m}$  et une distance  $L = 4$  cm. La période d'échantillonnage des détecteurs est  $p_e = 25$   $\mu\text{m}$ , ce qui correspond à une fréquence spatiale d'échantillonnage de  $\frac{1}{2p_e} = 200$   $\text{cm}^{-1}$ . Les graphiques de la figure 3.28 montre l'évolution des pics correspondant aux fréquences spatiales de la figure d'interférence pour des longueurs d'onde de  $1200$  nm,  $1170$  nm et  $1100$  nm.

Sur cette figure, nous remarquons l'effet de la transformée de Fourier adaptée sur le pic d'ordre 2 du spectre. L'étendue observée de ce pic est due à la fonction arc tangente utilisée comme changement de variable. Cette transformée de Fourier ne corrige le spectre, à priori, qu'à l'ordre de 1. Nous remarquons que la limite de repliement a bien lieu à la moitié de la

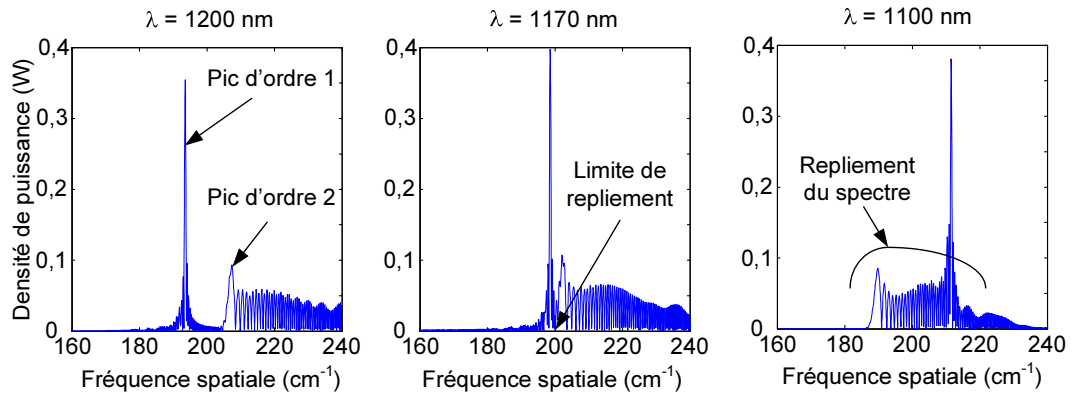


FIG. 3.28 – Graphique de la gamme de longueur d’onde, spectres des figures d’interférences pour les longueurs d’onde 1200 nm, 1170 nm et 1100 nm

fréquence d’échantillonnage. Ce repliement a lieu pour une longueur d’onde comprise entre 1160 et 1170 nm.

Nous avons vu à la partie 3.2.7 que la longueur d’onde minimale détectable est donnée par la relation suivante :

$$\lambda_{\min} = 2\eta\Delta x = \frac{4n_q R \Delta x}{L}, \quad (3.73)$$

où  $n_q$  est l’indice effectif du mode fondamentale,  $R$  est le rayon de courbure,  $p_e$  est le pas d’échantillonnage et  $L$  est la distance des détecteurs au centre de la structure courbe. L’indice effectif du mode fondamental du guide courbe est d’environ 1,54 au deux longueurs d’onde. La formule nous donne une longueur d’onde minimale  $\lambda_{\min}$  approchées de 1150 nm. Nous en concluons que la formule approchée sous estime la longueur d’onde minimale détectable.

La réponse en puissance du spectromètre correspond à la variation de la hauteur des pics obtenus par la transformée de Fourier adaptée en fonction de la longueur d’onde. La figure 3.29 présente la réponse en puissance du spectromètre sur la gamme de longueur d’onde 1170 nm à 1700 nm dans la même configuration que précédemment. 1700 nm correspondant à la longueur d’onde maximale détectable des barrettes de photodétecteurs en InGaAs. Sur cette figure, nous avons représenté la puissance correspondant au maximum des pics obtenus par la transformée de Fourier adaptée.

Sur cette figure, nous constatons que la puissance relativement est constante à 20 % près sur la gamme de longueurs d’onde de 1170 nm à 1700 nm. Nous remarquons une décroissance pour les faibles longueurs d’onde. Ce point reste relativement intéressant car il peut rendre la calibration en puissance plus aisée.

### 3.5 Performances attendues

Dans cette partie, nous résumons les performances en résolution et en gamme de longueur d’onde du spectromètre. Le graphique 3.30 résume les performances théoriques attendues concernant les gammes de longueurs d’onde et les résolutions. Nous utilisons ici les formules



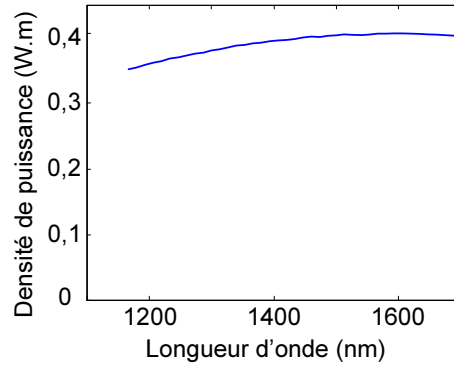


FIG. 3.29 – Graphique de la réponse en puissance sur la gamme de longueur d'onde de 1170 nm à 1700 nm

approchées précédemment vérifiées. Nous avons vu à la partie 3.3.5.3 que la fuite est tout aussi contrôlable à des rayons supérieurs à 300  $\mu\text{m}$ , les formules peuvent aussi s'appliquer.

Les performances ont été calculées pour le cas où nous détectons la figure d'interférence à une distance  $L = 4$  cm du centre de la structure courbe avec une barrette de photodecteurs de 1024 éléments de 25  $\mu\text{m}$  de période. L'indice effectif  $n_q$  est 1.54. Sur cette figure, nous avons représenté à droite, la courbe donnant les longueurs d'onde minimales théoriquement atteignables ainsi que la résolution correspondante pour des rayons de 300  $\mu\text{m}$  à 500  $\mu\text{m}$ . A droite, nous avons représenté les résolutions atteignables pour différentes longueurs d'onde dans la même gamme de rayons.

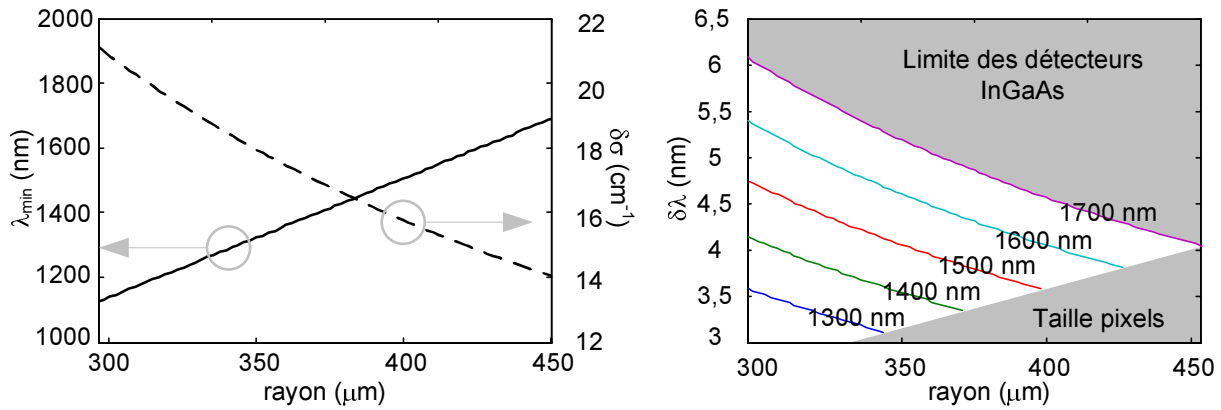


FIG. 3.30 – Graphique des performances théoriques attendues en fonction du rayon  $R$  concernant la longueur d'onde minimale détectable  $\lambda_{\text{min}}$  (en trait plein) et la résolution en nombre d'onde  $\delta\sigma$  (en pointillés) à gauche et concernant les résolutions attendues en longueur d'onde  $\delta\lambda$  à droite.

Sur ce graphique, nous remarquons qu'un compromis doit être fait entre la résolution et la plage de longueurs d'onde souhaitée. En effet, plus le rayon  $R$  est grand, meilleur est la résolution, mais moins la plage de longueur d'onde est grande. Par exemple, pour un rayon  $R = 300$   $\mu\text{m}$ , nous obtenons une gamme de longueurs d'onde élevée de 1300 nm à 1700 nm avec un compromis sur la résolution spectrale  $\delta\lambda = 3,5$  nm à 1300 nm. Pour une meilleure résolution, il faut augmenter le rayon  $R$  et ainsi restreindre la gamme de longueur d'onde.

## 3.6 Conclusion et Perspectives

### 3.6.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé l'ensemble du spectromètre. Nous avons introduit un modèle de fuite. Celui-ci, combiné à la connaissance de l'évolution des indices effectifs de la structure, nous a permis d'obtenir une évolution du gap afin d'obtenir un profil particulier de l'intensité sur les détecteurs. L'obtention des figures d'interférences nous a permis d'estimer les performances théoriques de ce spectromètre.

### 3.6.2 Perspectives

Le modèle de fuite développé prend en compte une fonction trapèze. D'autres fonctions peuvent être utilisées pour, par exemple, compenser les pertes de propagation dans le guide plan.

L'obtention du spectre à partir des figures d'interférences n'est pas encore optimale. Un traitement consistant à prendre en compte le produit d'enveloppes, autrement dit, le contraste, permettrait d'obtenir une meilleure reconstitution du spectre. Ceci permettra de valider les résolutions attendues. Des travaux similaires ont été effectués [89, 90] permettant d'obtenir une meilleure reconstitution. Cette étude pourra aussi étudier les limites de la transformée de Fourier adaptée.



# Chapitre 4

## Validation expérimentale

Dans les chapitres précédents, nous avons modélisé le spectromètre dans sa globalité, à savoir, depuis l'excitation par un signal de spectre quelconque jusqu'au traitement de données nous permettant de retrouver ce spectre. Nous proposons, dans ce chapitre, de vérifier expérimentalement ce nouveau concept de spectromètre.

### 4.1 Réalisation du guide optique

Afin d'obtenir un spectromètre compact et intégrable, nous avons choisi de le réaliser en optique intégrée. Il existe plusieurs technologies permettant de réaliser des guides optiques. Nous donnons une liste non-exhaustive de ces technologies avant de détailler la technologie d'optique intégrée sur verre par échange ionique.

#### 4.1.1 Silicon-On-Insulator (SOI)

Les guides sur SOI [91, 92] permettent d'obtenir des guides optiques à fort confinement ( $\Delta n \approx 2$ ), c'est-à-dire, présentant un fort contraste d'indice de réfraction. Le fort confinement de la lumière est intéressant car il permet de réaliser des courbures fortes et ainsi de rendre plus compact le composant. Le processus de réalisation de ces guides est similaire à celui des puces en microélectronique. Ce dernier point permet une très bonne intégration des fonctions optiques dans les composants en microélectronique. Le point faible de cette technologie est le couplage de lumière à l'intérieur des guides. En effet, le fort contraste d'indice entraîne des pertes dues aux réflexions de Fresnel lors de l'injection et à la mauvaise adaptation des champs fibre-guide.

#### 4.1.2 Ecriture par laser femtoseconde

Des techniques d'écriture par laser femtosecondes sont aussi utilisées pour la réalisation de guide optiques dans les substrats de verre [93] et dans les polymères [94]. Un objectif de microscope permet de focaliser le faisceau d'un laser sur un point particulier à l'intérieur de ce substrat. Afin de délivrer suffisamment de puissance, le laser est pulsé. Au point d'impact, la nature du verre ou du polymère est changée et un contraste d'indice est localement créé.

Comme le laser peut être focalisé dans le substrat, cette méthode permet la réalisation de guides optiques en trois dimensions. Néanmoins, le contraste d'indice de réfraction ainsi généré atteint des valeurs relativement faibles pour notre application ( $\Delta n \approx 10^{-2}$  [95]).

### 4.1.3 Echange ionique

L'optique intégrée sur verre par échange ionique est une méthode qui a vu le jour en 1972 suite aux travaux de T. Izawa et H. Nakagome [6]. En 1973, les travaux de TG Giallorenzi [96] ont mené aux premiers résultats de l'échange d'ions faisant intervenir les ions argent  $\text{Ag}^+$ . Le principe repose sur la modification locale de la concentration d'ions présents dans le verre.

### 4.1.4 Généralités sur le verre

Le verre est un matériau amorphe, c'est-à-dire, un réseau désordonné dans sa globalité, mais localement ordonné. Les éléments qui le composent sont des oxydes du type  $\text{A}_m\text{O}_n$  où A est un ion et O est l'élément oxygène. Ces éléments sont classés en trois catégories :

- Les formateurs de réseau sont les éléments nécessaires à la formation du matériau vitreux et ils peuvent à eux seuls former le réseau. Leur forte énergie de liaison assure la cohésion du réseau. Parmi les principaux éléments formateurs de réseaux, nous pouvons citer le silicium Si, le bore B, le phosphore P, le germanium Ge et l'arsenic As. Dans le cas du silicium, par exemple, l'oxyde correspondant est la silice  $\text{SiO}_2$ . La cohésion du réseau est alors assurée par les liaisons Si-O-Si.
- Les modificateurs de réseaux permettent, entre autre, la diminution du point de fusion du matériau amorphe et la diminution de la viscosité. Parmi les modificateurs de réseaux nous pouvons citer certains alcalins comme le lithium Li, le sodium Na, le potassium K, le rubidium Rb et le césium Cs, certains métaux de transition comme l'argent Ag et certains métaux pauvres comme le thallium Tl. L'adjonction, par exemple, d'un alcalin Na,  $\text{Na}_2\text{O}$  sous sa forme oxyde, dans le réseau de silice transforme un élément O pontant en élément non pontant. Certaines liaisons Si-O-Si deviennent alors des liaisons Si-O-2Na-O-Si. Les liaisons O-Na sont à très faible énergie et sont facilement cassable par élévation de température.
- Les intermédiaires de réseaux ne sont ni formateurs de réseaux, ni modificateurs de réseaux. Ils s'intègrent au réseau par substitution des éléments formateurs. Ils permettent de modifier certaines propriétés du verre comme par exemple la résistance mécanique. Parmi ces intermédiaires, nous pouvons citer l'aluminium Al, le fer Fe, le titane Ti, le nickel Ni ou le zinc Zn.

### 4.1.5 Echange ionique

Considérons un bain de sel de nitrate  $\text{BNO}_3$  fondu à une température suffisamment élevée ( $300^\circ$  à  $500^\circ$ ) où  $\text{B}^+$  est un cation. Considérons un verre d'oxyde de silice  $\text{SiO}_2$  contenant un modificateur de réseaux  $\text{A}^+$  sous sa forme ionique et supposons que ce verre ne contient pas le cation  $\text{B}^+$ . En plongeant le verre dans le bain de sel fondu, un déséquilibre se crée entre

les deux milieux suivant la différence de concentration des cations dans chacun des milieux. La température permet de rendre mobile les cations  $A^+$  qui sortent alors du matériau vitreux remplacés par les cations  $B^+$ . La figure 4.1 schématise cet échange.

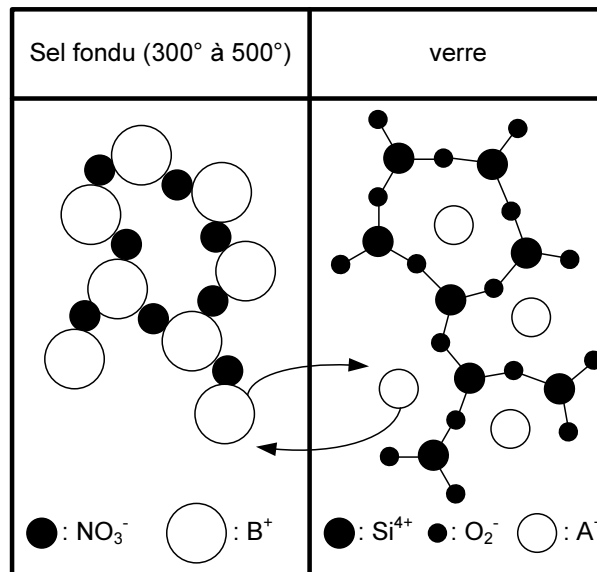


FIG. 4.1 – Représentation schématique de l'échange des cations  $B^+$  du sel fondu avec les cations  $A^+$  du verre

Ce phénomène modifie la concentration des ions  $B^+$  dans la profondeur du verre selon les lois de Fick. En 1942 [97, 98], une loi empirique reliant la concentration des ions dans le verre et l'indice de réfraction correspondant a été proposée. Celle-ci est détaillée dans la partie 3.1.1 de la modélisation du spectromètre. Ainsi, cet échange d'ions modifie localement l'indice de réfraction du verre. Plusieurs modificateurs de réseaux ont fait l'objet d'étude [84] depuis les travaux T. Izawa et H. Nakagome en 1972. Le tableau 4.1 recense les différents modificateurs disponibles à l'IMEP-LAHC avec leurs caractéristiques principales.

Couples d'ions	$\Delta n$	remarques
$K^+/Na^+$	0,009	fortes contraintes mécaniques
$Ag^+/Na^+$	0,1	formation d'agrégat à la surface
$Tl^+/Na^+$	0,1	très toxique

TAB. 4.1 – Comparaison de différents couple d'ions pour l'échange d'ions

L'échange d'ions faisant intervenir les ions potassium  $K^+$  ne nous donne pas le contraste d'indice de réfraction nécessaire pour une bonne compacité des structures. En effet, pour un contraste d'indice de 0,009, le mode à fuite que nous cherchons à contrôler dans la structure courbe a une perte beaucoup trop forte pour des rayons inférieurs à 3 mm. Ceci nous obligerait à repousser les détecteurs à une distance d'environ 40 cm. L'échange faisant intervenir les ions Thallium fournit un contraste d'indice de réfraction pouvant atteindre 0,13 [99]. Mais les ions Thallium sont toxiques et l'installation disponible au laboratoire était momentanément hors d'usage. L'échange d'ions faisant intervenir les ions argent  $Ag^+$  offre un contraste d'indice de

réfraction de 0,08 [100] et a été largement prospecté par les travaux de Davide Bucci [101]. Cet échange a l'inconvénient de laisser des agrégats d'argent de tailles nanométriques à la surface du verre augmentant les pertes par propagation dans le verre. Néanmoins, ces pertes sont importantes pour des longueurs d'onde inférieures à 800 nm, or nous travaillons à des longueurs d'onde plus élevées.

Nous utilisons donc des paramètres similaires pour la réalisation des composants. Les composants ont été réalisés sur des substrats de verre GO14 d'une composition adaptée à l'échange d'ions  $\text{Ag}^+/\text{Na}^+$ . Afin de cibler les zones où l'échange ionique doit avoir lieu, nous utilisons un masque particulier que nous avons conçu durant cette thèse. Nous nous proposons maintenant de décrire les parties importantes de ce masque.

## 4.2 Réalisation des composants

Dans cette partie, nous décrivons le processus de réalisation des composants. A partir d'une première version du modèle développé au chapitre 3, nous avons mis en évidence l'importance de la monomodicité des guides réalisés. Nous expliquons donc les choix adoptés pour la conception du masque. Nous décrivons enfin les évolutions du gap adoptées pour la conception du masque.

### 4.2.1 Réalisation des guides

Le principe de réalisation des guides d'onde en optique intégrée sur verre repose sur la modification locale de l'indice de réfraction. L'échange d'ions permet de modifier ce contraste. Afin de cibler cet échange, un masque d'alumine est déposé sur le substrat de verre. La figure 4.2 résume les principales étapes de la réalisation des guides optiques sur substrat de verre.

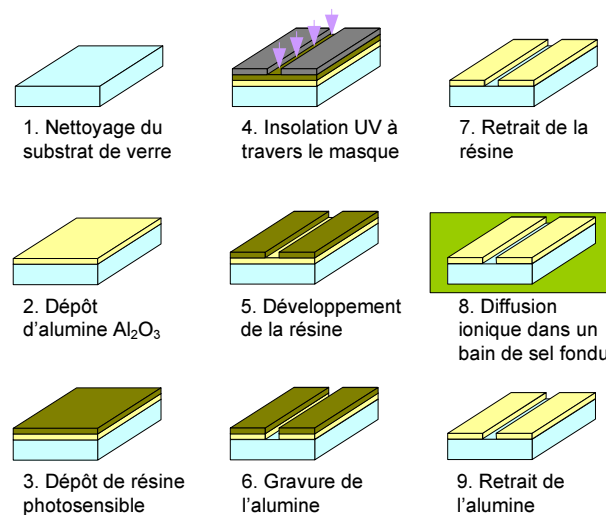


FIG. 4.2 – Etapes de réalisation des composants en optique intégrée sur verre

Après un nettoyage du substrat (étape 1), le dépôt d'alumine  $\text{Al}_2\text{O}_3$  de 40 nm est effectué sur le substrat de verre par une méthode de pulvérisation cathodique (étape 2). Ce dépôt est réalisé

sous une faible pression de  $10^{-6}$  mbar et à une température de  $200^{\circ}\text{C}$  sous enceinte oxygénée.

Une résine photosensible est ensuite déposée sur le substrat (étape 3) et recuite dans un four à  $90^{\circ}\text{C}$  pendant 30 minutes. Elle est insolée à travers le masque (étape 4). Elle est ensuite développée (étape 5) et elle subit un dernier recuit avant la gravure du masque. La gravure du masque d'alumine (étape 6) est réalisée par attaque humide à l'acide orthophosphorique à une température de  $70^{\circ}\text{C}$  pendant 1 minute. Enfin la résine est retirée au "remove" (étape 7).

Le masque d'alumine étant déposé sur le substrat, nous pouvons opérer l'échange ionique (étape 8). Un mélange de nitrate d'argent  $\text{AgNO}_3$  et nitrate de sodium  $\text{NaNO}_3$  est réalisé à 20 % molaire en  $\text{AgNO}_3$ . Ce mélange est placé dans un récipient et mis dans un four à une température de  $360^{\circ}\text{C}$ . Après stabilisation de la température du mélange, le substrat de verre y est plongé pendant un temps déterminé (5, 6 et 8 minutes). Les échantillons sont ensuite sortis du four et nettoyés.

Les échantillons sont enfin découpés et les arêtes sont polies afin d'optimiser le couplage d'entrée et de sortie.

### 4.2.2 Monomodicité du guide

Au chapitre 3.3.5.2, nous avons soulevé le problème du battement de modes dans la structure courbe. Nous en avons conclu que le guide doit être monomode. Aussi, des mesures de monomodicité ont été effectuées sur des guides droits pour une ouverture de masque de  $1\ \mu\text{m}$ . Le tableau 4.2 présente les longueurs d'onde de coupures des 2<sup>èmes</sup> modes en polarisation TE et TM.

temps d'échange	$\lambda_{c\text{TE}_2}$	$\lambda_{c\text{TM}_2}$
3	1240	1190
4	1320	1280
5	1350	1320
6	1420	1380
8	1560	1510

TAB. 4.2 – longueurs d'onde de coupure des 2<sup>èmes</sup> modes

Pour obtenir des guides monomodes à la longueur d'onde  $1500\ \text{nm}$ , nous avons donc choisi une ouverture de masque de  $1\ \mu\text{m}$  et des temps d'échange inférieurs à 6 minutes. Un composant a été réalisé à un temps d'échange de 8 minutes pour mettre en évidence l'effet de la bimodalité.

Les ouvertures des guides ont une largeur de  $1\ \mu\text{m}$ . Les jonctions-Y et les guides en S permettant l'injection dans la structure courbe sont définies comme introduites au chapitre 3.1, à savoir, par des guides de  $2\ \text{mm}$  de rayon de courbure. La structure courbe est définie par un guide en boucle ainsi que l'approche du guide plan.

### 4.2.3 Évolution du gap

Du premier modèle du spectromètre, nous avons obtenu des paramètres concernant les rayons de courbure de la structure courbe et les évolutions du gap. Ce masque contient des



structures courbes de rayon de courbure  $R$  de 350  $\mu\text{m}$ , 500  $\mu\text{m}$  et 700  $\mu\text{m}$ . La distance  $G$  entre le guide courbe et le guide plan est une fonction de l'angle  $\theta$ . La première version du modèle du spectromètre nous a mené à une évolution de  $G$  en  $\sqrt{\theta}$ . Cette évolution prend en compte une fuite progressive de la lumière le long de la propagation dans la structure courbe. Un des paramètres important est la valeur du gap au début de la fuite. Nous avons donc conçu des structures avec des gaps de départ différents. Cette évolution est définie sur le masque par la fonction :

$$G(\theta) = G_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}}\right) + G_1 \sqrt{\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}}, \quad (4.1)$$

où  $G_0$  est la largeur du gap au départ de fuite en  $\theta_0$ ,  $G_1$  est la largeur du gap après la fin de la fuite en  $\theta_1$ . Compte tenu de la diffusion des ions  $\text{Ag}^+$  dans le substrat de verre, après diffusion, la largeur du gap effective s'annule au niveau de  $G_1$ . Cette valeur est fixée à 1,5  $\mu\text{m}$ . Le tableau 4.3 regroupe les paramètres des spectromètres réalisés.

N°de boucle	$R$ ( $\mu\text{m}$ )	$\theta_0$ ( $^\circ$ )	$\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\theta_1 - \theta_0$ ( $^\circ$ )	$G_0$ ( $\mu\text{m}$ )
1	350	-9	14	23	4
2	350	-9	14	23	6
3	350	-9	14	23	8
4	350	-9	14	23	10
5	700	-11	20	31	4
6	700	-11	20	31	6
7	700	-11	20	31	8
8	700	-11	20	31	10
9	500	-9	14	23	4
10	500	-9	14	23	6
11	500	-9	14	23	8
12	500	-9	14	23	10

TAB. 4.3 – paramètres des boucles 1 à 12

La figure 4.3 présente l'évolution du gap le long de l'angle  $\theta$  pour un rayon  $R$  de 350  $\mu\text{m}$ .

Sur ce graphique, nous remarquons une variation rapide du gap au début de la fuite puis une variation plus lente afin d'opérer une fuite progressive et d'obtenir un profil d'intensité relativement constant sur les détecteurs. Ces paramètres ont été choisis pour obtenir des franges d'interférences à une distance de 4 cm du centre de courbure.

Les arêtes de sortie des premiers composants ont été découpées et polies à une distance  $L = 2,1$  cm car les premières coupes faisaient apparaître des défauts.

Ces composants ont été ensuite caractérisés. Nous nous proposons maintenant de décrire les méthodes de caractérisation et les résultats obtenus.

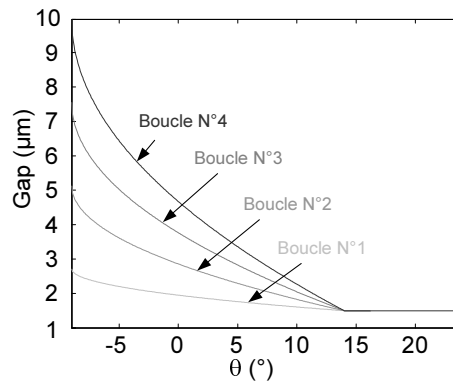


FIG. 4.3 – Evolution du gap le long de la propagation en  $\theta$  pour le rayon de courbure  $R = 350 \mu\text{m}$

### 4.3 Banc de caractérisation en champ proche

Afin de caractériser les composants réalisés, deux bancs de caractérisation optique ont été adaptés. Dans cette partie, nous proposons de décrire le banc de caractérisation en champ proche et d'exposer les résultats des caractérisations.

#### 4.3.1 Description du banc de caractérisation

Un premier banc a été adapté à l'IMEP-LAHC pour caractériser les structures dans le domaine infra rouge. La figure 4.4 expose le banc de mesure dans sa globalité.

Un signal de spectre fin est émis par un laser accordable (Tunics) dans la plage de longueurs d'onde 1500 à 1630 nm. Le signal est acheminé vers un atténuateur par une fibre optique monomode à 1500 nm. Il est ensuite dirigé vers l'échantillon par une fibre optique. Des micropositionneurs permettent l'injection du signal dans l'échantillon. La structure est ensuite excitée. Les franges d'interférences sont mesurées sur l'arête de sortie du composant. Un objectif  $\times 10$  d'ouverture numérique 0,25 permet de faire l'image de ces franges sur une caméra adaptée pour l'infra rouge (SU320MS-1.7RT 320x256 pixels,  $25\mu\text{m} \times 25\mu\text{m}$ ).

La caméra est connectée à un ordinateur qui permet l'acquisition des données via le logiciel LabView® de National Instrument. Nous avons développé un programme permettant de mesurer les franges d'interférence par fenêtre successives et de reconstruire l'ensemble de la figure d'interférence. Pour chaque longueur d'onde d'excitation, la figure d'interférence est mesurée et ceci avec un pas de 10 nm en longueur d'onde. La mesure s'effectue sur une fenêtre de 275 pixels, le nombre de point par interfrange est environ 6. L'erreur faite lors de l'assemblage de chaque fenêtre est estimée à  $\pm 1$  pixel.

L'étalonnage du dispositif a été réalisé par un programme de suivi de franges développé sur ce même logiciel lors de cette thèse. Un pixel correspond à  $2,25 \mu\text{m} \pm 1,5 \%$  à la longueur d'onde 1500 nm. Un léger réglage de focalisation est nécessaire lors des mesures lorsque la longueur d'onde d'excitation est modifiée. Celle-ci ne doit à priori pas modifier l'agrandissement sur la plage de longueur d'onde 1500 à 1630 nm. Pour la mesure de chaque fenêtre, nous mesurons le fond, c'est-à-dire, sans excitation, et les franges d'interférences. Pour chaque fenêtre,

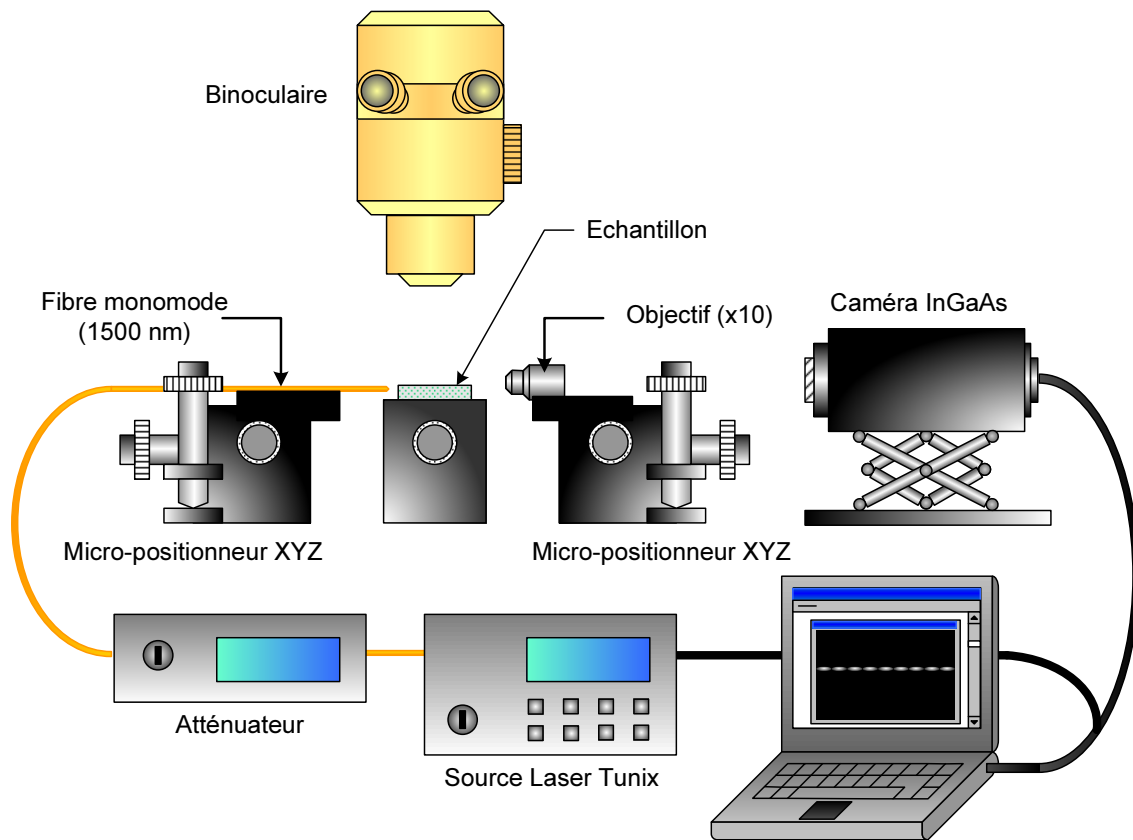


FIG. 4.4 – Schéma du banc de caractérisation en champ proche

10 mesures sont prises et sont moyennées.

### 4.3.2 Profils d'interférences

Nous mesurons des étendues de champ comprises entre 6 mm et 8 mm pour les structures de rayons  $R = 350$  et  $500 \mu\text{m}$ . Suivant la valeur de départ du gap, nous observons différentes variations du contraste. La figure 4.5 présente les figures d'interférences pour la structure  $R = 350 \mu\text{m}$ , réalisées avec un temps d'échange de 6 minutes et pour une longueur d'onde d'excitation de  $1550 \text{ nm}$ . Nous représentons les profils d'interférences attendus avec le modèle du spectromètre développé au chapitre 3. Sur cette figure, nous avons fait apparaître une estimation des enveloppes mesurées issues de chaque bras. En effet, le décalage de pixels dû aux fenêtres de mesures rend difficile l'extraction du contraste ainsi que des enveloppes.

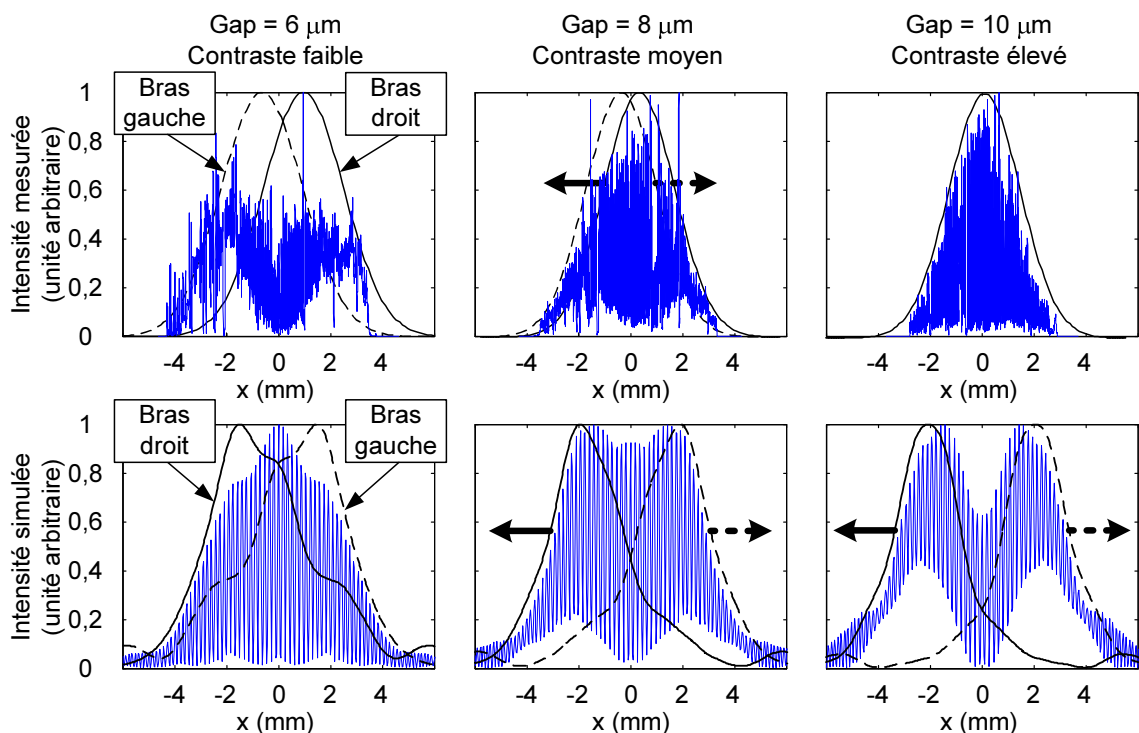


FIG. 4.5 – Figures d'interférences mesurées et simulées pour un rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , 6 minutes d'échange, pour des gap de départ  $G_0 = 6, 8$  et  $10 \mu\text{m}$ , les courbes pleines représentent les intensités issues du bras droit (trait plein) et du bras gauche (pointillés)

Concernant les mesures, nous constatons un très bon contraste des franges d'interférences. Ce contraste est meilleur pour des gaps de départ  $G_0$  grands ou les faisceaux issus de chaque bras se croisent le mieux. Pour des gaps de départ faible, la lumière fuit plus vite lors de la propagation dans la structure courbe, ainsi, les faisceaux issus de chaque bras ne se croisent pas de façon optimale. Mais le composant a été coupé à une distance de  $2,1 \text{ cm}$  et ces faisceaux devraient se croiser pour une distance plus grande.

Concernant le modèle, les profils simulés sont relativement proche des résultats pratiques. Nous constatons néanmoins que celui-ci prévoit un croisement des faisceaux optimal pour des

gaps plus faibles. Sur la figure 4.5 concernant les intensités simulées, nous constatons que les enveloppes se croisent pour un gap de 6  $\mu\text{m}$  et qu'elles ont tendance à s'écarter du centre pour des gaps plus grands. Les paramètres du modèle (contraste d'indice, distance effective de diffusion) nécessitent des ajustements. Dans le modèle AFMM développé au chapitre 2, nous prenons en compte une variation à saut d'indice de réfraction. Ce modèle peut prendre en compte un profil d'indice de réfraction du type profil de diffusion. Aussi, une étude approfondie du profil d'indice de réfraction dans le cas de l'échange ionique  $\text{Ag}^+ / \text{Na}^+$  serait intéressante.

D'autre part, nous remarquons que l'intensité mesurée diminue en s'écartant du maximum central. Ceci peut être dû aux pertes par propagation dans le guide plan. Le modèle de fuites développé au chapitre 3.3 peut être adapté pour tenir compte de ces pertes.

Afin d'observer la variation du contraste en fonction de la longueur d'onde, nous présentons les résultats de mesures pour différentes longueurs d'onde et pour différents temps d'échanges. La figure 4.6 présente les figures d'interférences pour les structures de rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , de gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et des temps d'échange de 6 et 8 minutes.

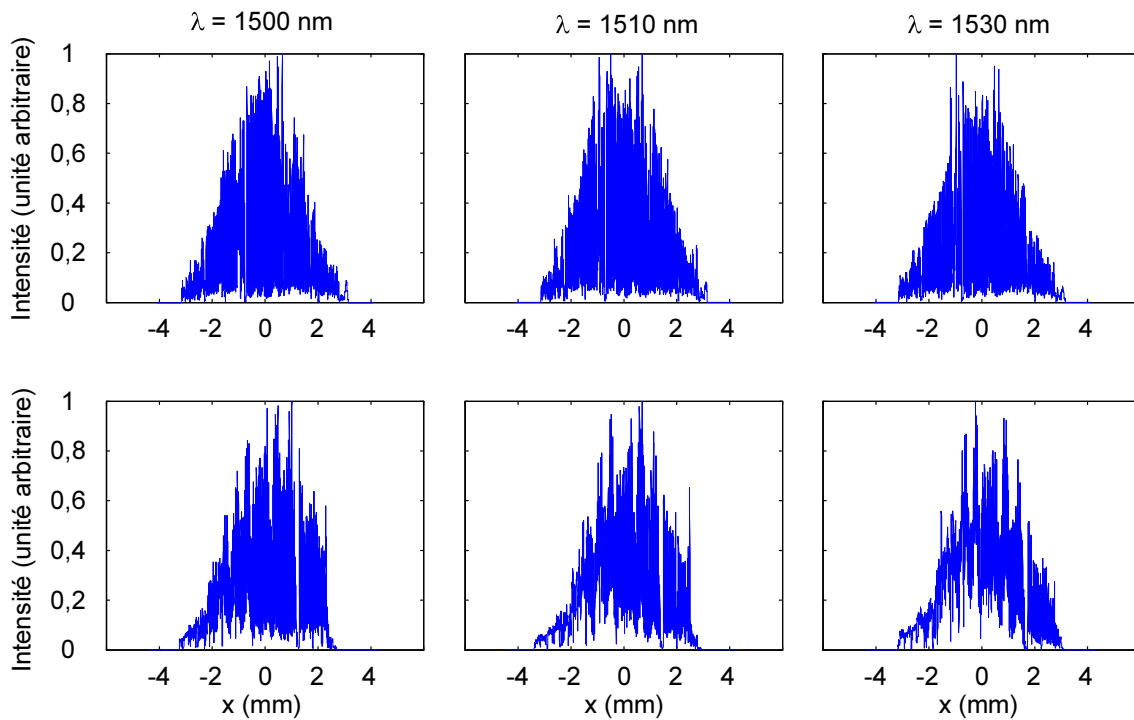


FIG. 4.6 – Figures d'interférences pour un rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , de gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$ , pour des temps d'échange de 6 minutes et 8 minutes, pour les longueurs d'onde 1500, 1510 et 1520 nm

Nous constatons que le contraste est peu sensible à la longueur d'onde pour les échantillons réalisés à un temps d'échange  $t = 6$  minutes. En revanche, nous constatons une nette dégradation du contraste pour un temps d'échange plus long  $t = 8$  minutes. Le changement de contraste n'est pas symétrique, il ne vient donc pas de la modification des enveloppes due à la fuite de lumière. Cette dégradation peut être due à un déséquilibre de la jonction-Y entraîné par la bimodalité du guide. En effet, les guides créés par un échange plus long deviennent multimodes. La transition adiabatique de la jonction-Y décrite à la partie 3.1.3 ne mène pas le mode fondamental de façon

assez lente vers la séparation. Nous pouvons conclure sur l'importance de la monomodécité du guide courbe.

### 4.3.3 Transformée de Fourier

Nous effectuons maintenant les premiers traitements pour obtenir les spectres des signaux à partir des profils d'interférences. Quelque soit la longueur d'onde d'excitation, les profils présentent les mêmes défauts. Nous centrons donc les profils en repérant ces défauts. Pour chaque longueur d'onde, nous soustrayons la composante continue des profils d'interférences et nous appliquons les deux transformées de Fourier introduites au chapitre 3.4.2. La figure 4.7 présente les transformées de Fourier des profils d'interférences ainsi traités.

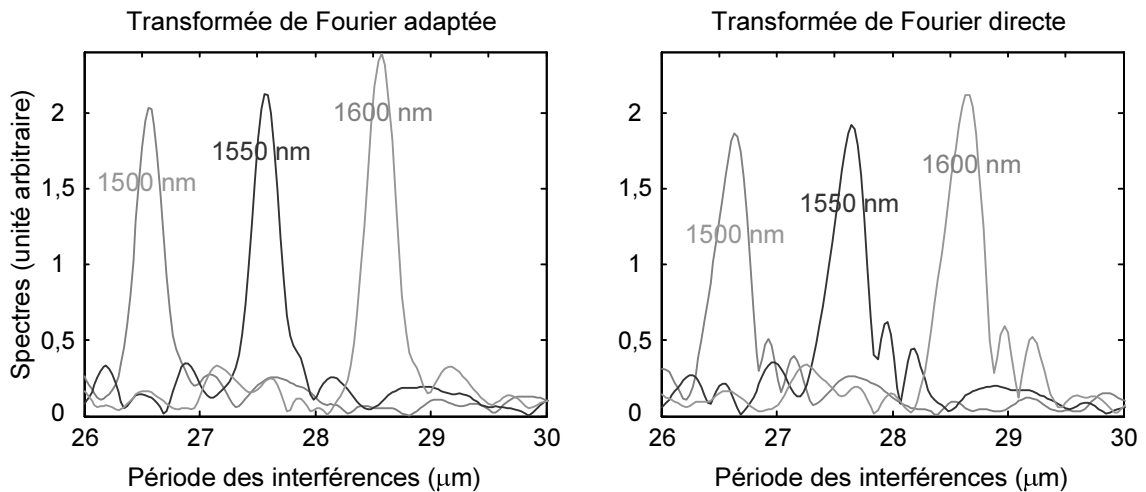


FIG. 4.7 – Comparaison des transformées de Fourier adaptée et directe sur les figures d'interférence de la structure de rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , de gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$ , pour un temps d'échange de 6 minutes, pour les longueurs d'onde 1500, 1550 et 1600 nm

Nous remarquons que les transformées de Fourier adaptées des profils d'interférences sont bien des pics relativement symétriques. En revanche, comme nous l'avons introduit au chapitre 3.4.2, la transformée de Fourier directe présente des pics correspondant à la variation de la période d'interférence sur les détecteurs. Nous validons ainsi l'amélioration de la restitution du spectre monochromatique par la transformée de Fourier adaptée.

D'autre part, nous mesurons un interfrange de  $26,5 \mu\text{m}$  à 1500 nm pour la structure de rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ . Afin d'obtenir des interfranges détectables par une barrette de photodétecteurs, par exemple  $25 \mu\text{m}$  de période, il nous faut considérer un guide plan de distance  $L$  plus grand. Pour la structure de rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , en supposant une évolution linéaire de l'interfrange en fonction de la distance  $L$ , la figure d'interférence produite par une excitation de longueur d'onde de 1500 nm sera détectable pour une distance de guide plan d'environ 4 cm.

Une vérification expérimentale permettra de valider cette possibilité d'échantillonnage.

### 4.3.4 Calibration en nombre d'onde

Nous avons vu au chapitre 3.4.3 que nous attendions une réponse linéaire des fréquences spatiales des interférences en fonction du nombre d'onde d'excitation. Pour étudier la réponse de l'instrument en nombre d'onde, nous effectuons la transformée de Fourier adapté des signaux d'intensité mesurés par la caméra et nous repérons le maximum de chaque pic en intensité pour chaque nombre d'onde d'excitation. Ce traitement a pour but de ramener les pics observés à leur nombre d'onde ou longueur d'onde d'excitation en vue d'obtenir les résolutions. La figure 4.8 donne les graphiques pour les rayons  $R = 300$  et  $500 \mu\text{m}$ , de gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et pour des temps d'échange  $t = 6$  minutes.

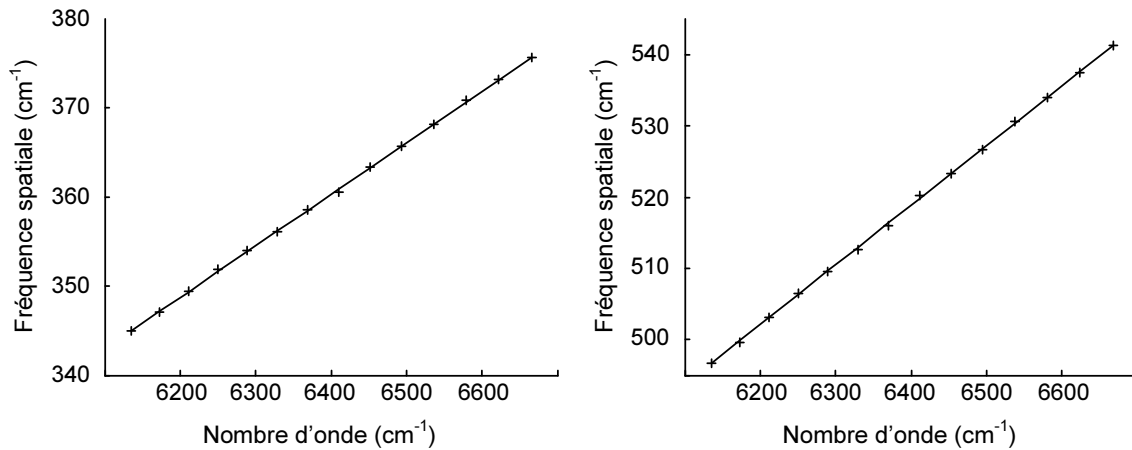


FIG. 4.8 – fréquence spatiales des interférences mesurées pour les structures  $R = 350$  à gauche et  $500 \mu\text{m}$  à droite,  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et  $t = 6$  minutes. Les points de mesures sont représentés par des croix, la régression linéaire est représentée en trait plein

Nous constatons une très bonne linéarité concernant la réponse en longueur d'onde. Comme nous l'avons vu au chapitre 3.2.7, l'instrument opère un agrandissement des franges d'interférences, autrement dit, une diminution de la fréquence spatiale des interférences caractérisée par le facteur  $\eta_R$ . Une régression linéaire est donc effectuée sur les courbes de la figure 4.8 afin d'en extraire le facteur  $\eta_R$ . Les relations qui lient les fréquences spatiales issues de la mesure des interférences  $\sigma_{iR}$  aux nombres d'ondes d'excitation  $\sigma_0$  sont les suivantes :

$$\sigma_{i350} = (\eta_{350}\sigma_0 - 8,71) \text{ cm}^{-1}, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{i500} = (\eta_{500}\sigma_0 - 18,48) \text{ cm}^{-1}, \quad (4.3)$$

où  $\eta_{350} = 0,0576$  et  $\eta_{500} = 0,0839$ . Nous retrouvons les offsets abordés à la partie 3.4.3. Néanmoins, la focalisation du système est légèrement modifiée et peut jouer sur les pentes et les offsets des relations de calibration.

Cette calibration nous permet néanmoins d'interpréter les spectres obtenus, ce que nous proposons dans la partie suivante.

### 4.3.5 Comparaison des résolutions spectrales

Lors de l'introduction, nous avons vu que la résolution du spectromètre est liée au nombre de franges détectées. Les mesures effectuées sur les structures de rayon  $R = 350$  et  $500 \mu\text{m}$  donnent les mêmes étendues d'interférences. L'agrandissement des interfranges effectué par le rayon  $R = 500 \mu\text{m}$  est plus petit que celui effectué par le rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ . Aussi, la structure de rayon  $R = 500 \mu\text{m}$  présente, pour une même longueur d'onde, plus de modulations et ainsi une meilleure résolution. La figure 4.9 rend compte de cette différence de résolution. Cette figure présente les spectres obtenus pour des rayons de  $350 \mu\text{m}$  et de  $500 \mu\text{m}$  pour les longueurs d'onde 1500, 1550 et 1600 nm. Ces spectres ont été calibrés en nombre d'onde par les relations (4.2) et (4.3) et nous avons effectué les transformées de Fourier adaptées des signaux.

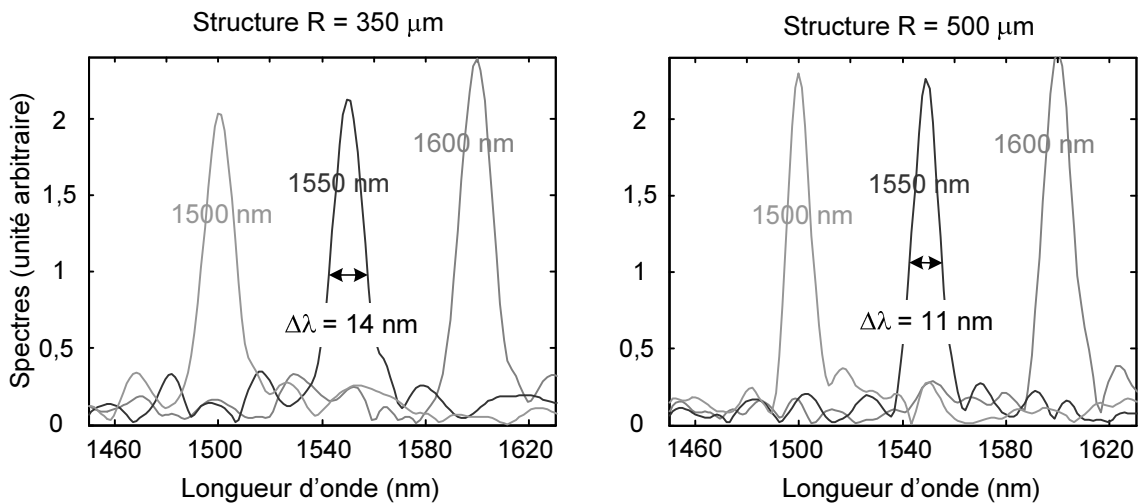


FIG. 4.9 – Comparaison des spectres obtenus pour les rayons  $R = 350$  et  $500 \mu\text{m}$  pour un gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et un temps d'échange  $t = 6$  minutes

Nous mesurons une résolution d'environ 14 nm pour la structure à  $R = 350 \mu\text{m}$  et une résolution d'environ 11 nm pour la structure à  $R = 500 \mu\text{m}$ . Selon l'étude menée au chapitre 3.5, nous attendions des résolutions de l'ordre de 9 nm et 7 nm pour les rayons respectivement  $R = 350 \mu\text{m}$  et  $500 \mu\text{m}$ .

Cette différence de résolution peut être due à plusieurs causes. La figure 4.10 présente une zone de la figure d'interférences obtenue avec le rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , de gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et de temps d'échange  $t = 6$  minutes.

Sur cette figure, nous remarquons une zone correspondant à un défaut et il n'y a pas de franges d'interférences. Ceci a pour effet de diminuer le nombre de modulations mesurables et ainsi, baisser la résolution du spectre calculé. Les erreurs de reconstitution ont pour effet de modifier la période de certaines franges. Aussi, lors du calcul du spectre, certaines franges voient leur période diminuer ou augmenter. Lors du calcul du spectre, ces franges participent à l'élargissement du pic et, de fait, à la diminution de la résolution. Enfin une mauvaise interprétation des modulations entraîne une mauvaise reconstruction du spectre.

Afin de résoudre ces problèmes et d'atteindre la résolution théorique, les arêtes doivent être parfaitement polies, les reconstitutions des fenêtres de franges doivent être plus précises et une



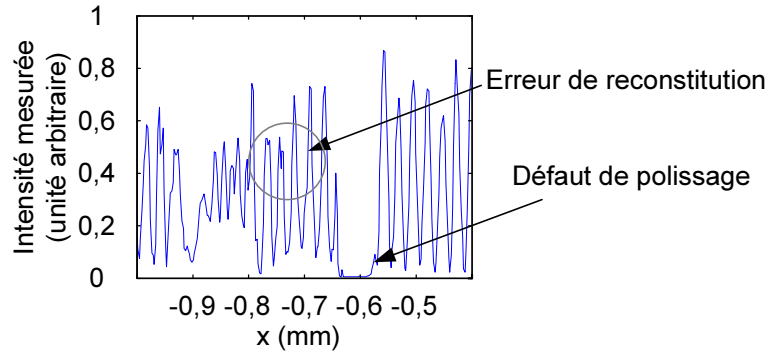


FIG. 4.10 – Défauts sur la figure d’interférences obtenue avec le rayon  $R = 350 \mu\text{m}$ , pour un gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et un temps d’échange  $t = 6$  minutes

meilleure interprétation des modulations doit être effectuée.

### 4.3.6 Réponse en puissance

Nous regardons maintenant l’écart en puissance entre les différents signaux monochromatiques obtenus. Cette étude n’est que qualitative car la calibration en puissance demande un traitement complet et des tests supplémentaires sur des échantillons connus.

Pour chaque longueur d’onde d’excitation, nous normalisons l’intensité détectée par la puissance émise. La figure 4.11 présente l’ensemble des spectres obtenus pour des signaux d’excitation monochromatique de longueurs d’onde allant de 1500 à 1630 nm tous les 10 nm. La transformée de Fourier adaptée a été utilisée pour obtenir ces spectres. Comme cette transformée n’est pas symétrique, c’est-à-dire, qu’elle nécessite un centre pour être appliquée, les figures d’interférences ont été rassemblées par repérage des défauts des arêtes. Le centre des interférences a été estimé commun à toutes les figures d’interférences pour ce calcul. La figure présente les résultats pour les structures de rayons  $R = 350$  et  $500 \mu\text{m}$ , de gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et de temps d’échange  $t = 6$  minutes.

Nous constatons un écart relatif maximal de 16 % de réponse en puissance pour la structure de rayon  $R = 350 \mu\text{m}$  et 30 % pour la structure de rayon  $R = 500 \mu\text{m}$ . Enfin, nous mesurons un rapport signal à bruit minimal de 8.2 dB pour la structure de rayon  $R = 350 \mu\text{m}$  et de 9.8 dB pour la structure de rayon  $R = 500 \mu\text{m}$ .

Notons que le rapport signal à bruit est dépendant de plusieurs paramètres. Parmi ces bruits, nous pouvons citer le bruit lié à la source Tunic et le bruit de détection de la caméra. Ces bruits n’ont pas encore été estimés. Une mauvaise interprétation des modulations ainsi que l’erreur de raccord des fenêtres de franges diminuent le rapport signal à bruit.

### 4.3.7 Conclusion sur les mesures en champ proche

Dans cette partie, nous avons montré le fonctionnement du spectromètre en signal monochromatique. Nous avons estimé une longueur de guide plan d’environ 4 cm nécessaire pour détecter les figures d’interférences à une longueur d’onde de 1500 nm pour la structure de rayon  $R = 350$ . Nous avons montré que la relation entre le nombre d’onde d’émission et la fréquence

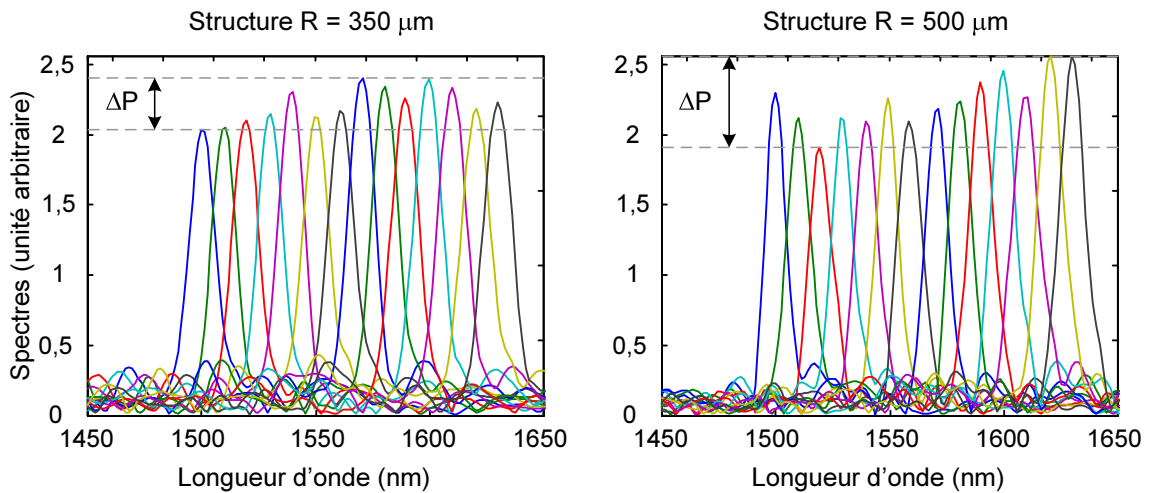


FIG. 4.11 – Réponses en puissance des structures de rayons  $R = 350$  et  $500 \mu\text{m}$  pour un gap de départ  $G_0 = 10 \mu\text{m}$  et un temps d'échange  $t = 6$  minutes

spatiale des interférences est linéaire sur la plage de nombre d'onde de  $6100 \text{ cm}^{-1}$  à  $6700 \text{ cm}^{-1}$  qui correspond à la plage de longueur d'onde  $1500$  à  $1630 \text{ nm}$ . Nous avons mesuré des résolutions de  $14 \text{ nm}$  et  $11 \text{ nm}$  pour les structures de rayons de courbure  $R = 300$  et  $500 \mu\text{m}$ . Nous avons mesuré un rapport signal sur bruit de  $8.2 \text{ dB}$  et une réponse en puissance constante à  $16 \%$  près dans le cas du rayon de  $350 \mu\text{m}$ . Nous avons soulevé les problèmes liés à la reconstruction des fenêtres de franges d'interférences mesurées et aux défauts sur les arêtes du composants. La résolution et le rapport signal à bruit peuvent être améliorés en résolvant ces problèmes.

## 4.4 Banc de caractérisation en dispersion

Un deuxième banc a été adapté au Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire de Grenoble. Cette caractérisation a pour but de tester le composant sur sa plage de longueur d'onde. Nous avons effectué un premier calcul approximatif de restitution d'un spectre continu.

### 4.4.1 Description du banc de caractérisation

La figure 4.12 schématise le banc de caractérisation en dispersion.

Un signal de spectre large est utilisé et injecté à l'entrée du composant par une fibre optique. Les structures sont excitées. Un montage de deux lentilles permet de faire l'image de la face de sortie du composant sur une caméra ( $256 \times 256$  pixels). La face de sortie est placée à la distance focale ( $25 \text{ mm}$ ) de la première lentille. La deuxième lentille est placée à la distance focale ( $125 \text{ mm}$ ) de la caméra. Le montage permet une mesure en dispersion grâce à un réseau par réflexion. Lors des mesures en dispersion, ce réseau est positionné entre les deux lentilles. La résolution du réseau et la taille des détecteurs ( $40 \times 40 \mu\text{m}^2$ ) de la caméra nous permet d'obtenir une résolution spectrale verticale de  $10 \text{ nm}$  par pixel. La caméra est refroidie à l'azote liquide pour diminuer le bruit thermique de mesure. Enfin des filtres correspondant aux bandes J ( $1000$

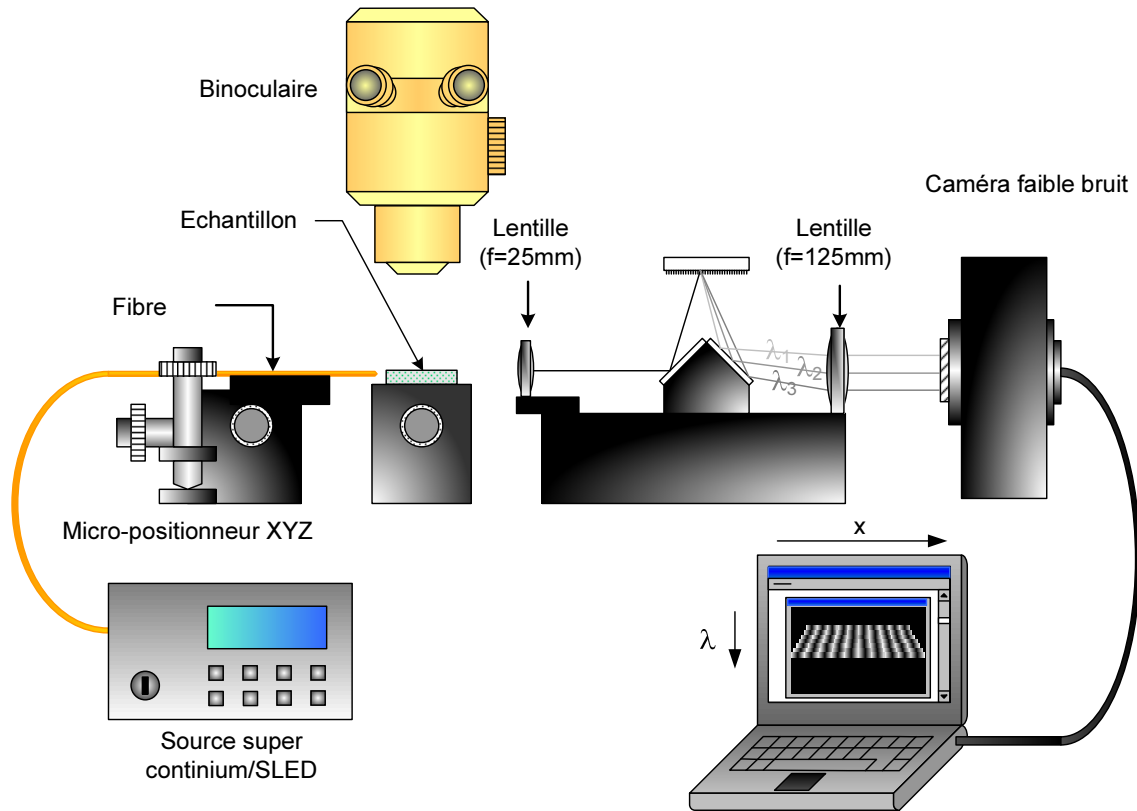


FIG. 4.12 – Schéma du banc de caractérisation en dispersion

nm à 1300 nm), H (1400 nm à 1900 nm) ou K (1800 à 2100 nm) sont placés devant la caméra pour diminuer le bruit de grenaille des détecteurs.

Les sources disponibles sont une source KOHERAS super continuum présentant un spectre constant sur une large bande et une source laser fine de longueur d'onde centrale 1523 nm.

Le chromatisme du système nous oblige à régler la focalisation du système suivant la bande spectrale d'excitation. La taille des détecteurs et le grandissement (x5) réalisé par le système de lentille correspond à un échantillonnage des franges de période spatiale  $w = 8 \mu\text{m}$ . Ceci a pour effet de dégrader le contraste d'un facteur sinc ( $\pi\sigma w$ ) où  $\sigma$  est la période spatiale des franges d'interférences. La focalisation a pour effet, quant à elle, de changer le facteur d'agrandissement suivant la zone spectrale observée. De plus, le réseau par réflexion peut présenter un angle d'écart avec les lignes verticales du détecteur. Lorsque le réseau est bien réglé, chaque ligne de détecteur correspond à une longueur d'onde donnée. Lorsque le réseau présente un angle d'écart, la ligne correspondante à une longueur d'onde se retrouve sur plusieurs lignes de détecteurs à la fois. Un traitement de données est alors nécessaire pour obtenir les franges d'interférences correctes sur toute la plage de longueur d'onde. Nous ne nous occuperons pas de ce traitement ici.

#### 4.4.2 Gamme spectrale

Les mesures en dispersion ont été effectuées sur les bandes J, H et K. La figure 4.13 présente les franges d'interférences obtenues sur cette gamme spectrale. Ces franges sont observées sur

une largeur d'environ 2 mm.

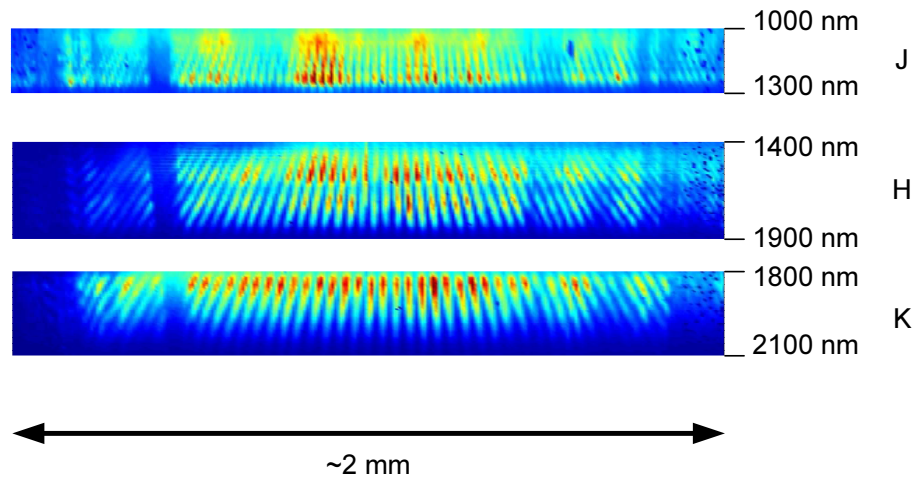


FIG. 4.13 – Franges d'interférence observées en dispersion sur les bandes J, H et K

Nous constatons que les franges d'interférences sont obtenues sur la largeur spectrale 1 à 2  $\mu\text{m}$ . Ces franges d'interférences évoluent bien en fonction de la longueur d'onde d'excitation. Nous mesurons des contrastes maximaux approximativement de 38 % pour la bande J, 65 % pour la bande H et 65 % pour la bande K. Dans cette expérience, la largeur des détecteurs est plus grande que dans l'expérience précédente et le contraste chute. Les interfranges sont plus faibles dans la bande J, ce qui explique la différence de contraste avec les autres bandes H et K.

#### 4.4.3 restitution de la transmission spectrale du filtre H

Dans cette partie, nous nous proposons d'obtenir la transmission spectrale du filtre H utilisé à partir de la mesure des franges d'interférences sans l'élément dispersif. Notons que ce traitement ne prend pas en compte la correction de phase due à l'angle que fait le réseau avec les lignes verticales de détecteurs. Aussi, ce calcul est approximatif.

La première phase consiste à calibrer le spectromètre en longueur d'onde. Nous connaissons le pas en longueur d'onde sur les détecteurs qui est 10 nm par pixel. Cette valeur nous donne la pente de la calibration en longueur d'onde. Nous effectuons la mesure des franges d'interférences obtenue par l'excitation d'un laser monochromatique de longueur d'onde connue 1523 nm. Cette mesure a été effectuée dans les mêmes conditions d'agrandissement optique que les mesures des franges dispersées de la bande H. Nous faisons alors correspondre la période des interférences obtenue par le laser avec une des lignes de la mesure des franges dispersées de la bande H. Cette dernière phase nous donne la calibration en longueur d'onde.

La figure 4.14 représente les franges d'interférences dispersées de la bande H ainsi que l'estimation du spectre de transmission du filtre H. Cette estimation a été réalisée en considérant que la transmission est bien représentée. En considérant que le réseau ne fait pas d'angle avec les lignes verticales des détecteurs chaque ligne horizontale de la figure 4.14 représente la transmission du filtre selon chaque longueur d'onde. Nous sommes donc pour chaque ligne la

puissance détectée par les pixels de cette même ligne. Nous obtenons ainsi une estimation du spectre de transmission.

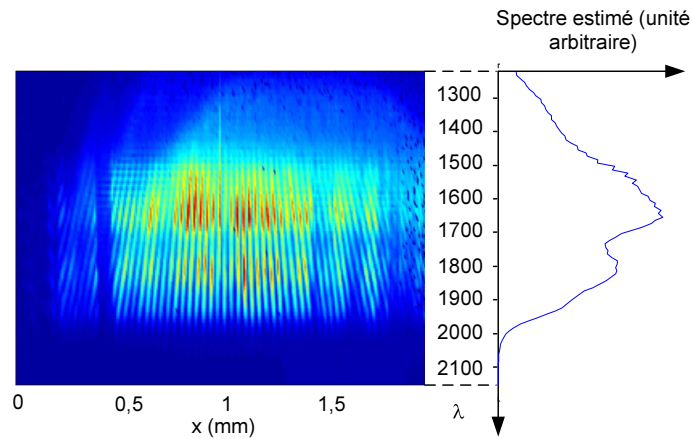


FIG. 4.14 – Franges dispersées de la bande H et estimation du spectre de transmission du filtre H

En appliquant une transformée de Fourier à chacune des figure d'interférences, nous repérons le maximum du pic correspondant à la fréquence spatiale  $\sigma_i$  des interférences. La figure 4.15 représente la fréquence spatiale  $\sigma_i$  des interférences en fonction du nombre d'onde d'excitation  $\sigma_0$ .

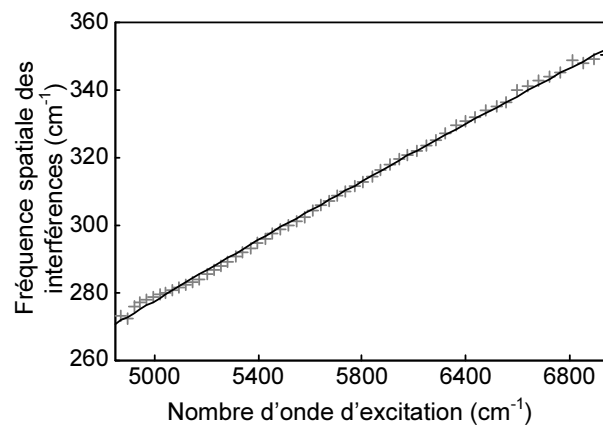


FIG. 4.15 – Fréquence spatiale des interférences en fonction du nombre d'onde d'excitation (croix) et la régression linéaire (trait plein)

Nous obtenons, comme précédemment, une réponse relativement linéaire dont la régression linéaire est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{i350} = (\eta_{i350}\sigma_0 - 61.76) \text{ cm}^{-1}, \quad (4.4)$$

où  $\eta_{350} = 0.0432$ . Nous constatons une nette différence de calibration avec le montage précédent 4.3. Cette différence est a priori due au décalage du réseau par rapport aux lignes des détecteurs.

Enfin, nous appliquons la transformée de Fourier corrigée par la relation (4.4) aux franges d'interférences non dispersées ainsi que la calibration. La figure d'interférence a été apodisée par une fenêtre de Blackman exacte [13]. La figure 4.16 représente le spectre d'excitation en ligne pleine, le spectre reconstruit en pontillés ainsi que la transformée de Fourier rapide représenté par des croix.

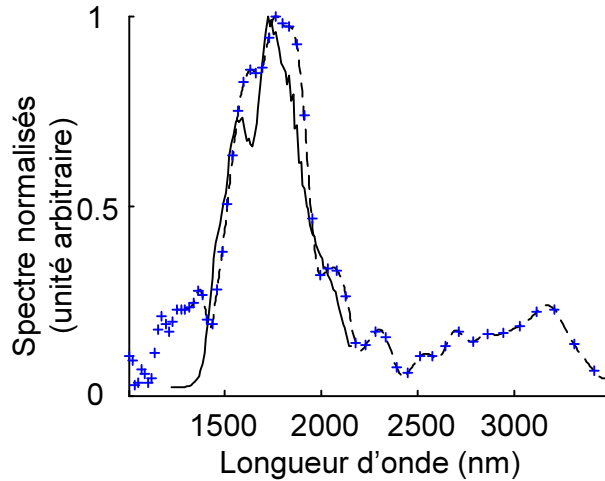


FIG. 4.16 – Spectres de transmission de la bande H reconstruction par transformée de Fourier

Nous constatons une reconstitution approximative du spectre en transmission de la bande H. Ceci peut être dû au décalage du réseau par rapport aux lignes de détecteurs qui estime mal la période des interférences réelles en sortie du composant. D'autre part, seules quelques franges d'interférences sont mesurées ce qui diminue la résolution. Enfin, la largeur sur laquelle nous mesurons les franges d'interférences ne nous permet pas de juger l'intérêt de la transformée de Fourier adaptée.

#### 4.4.4 Conclusion sur les mesures en dispersion

Dans cette partie, nous avons montré que les franges d'interférences sont observables sur la bande spectrale de 1 à 2  $\mu\text{m}$ . Nous avons proposé une méthode afin de reconstituer le spectre à partir de ses franges d'interférences dispersées. Le bruit des photodétecteurs sont néanmoins fortement atténués par le refroidissement pour le bruit thermique et par les filtres pour le bruit grenaille. L'ajout de la barrette de photodétecteurs nous permettra de valider cette gamme de longueur d'onde.

## 4.5 Conclusion et perspectives

### 4.5.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré expérimentalement le concept du spectromètre. Nous avons effectué des premières mesures sur les structures. Nous avons validé l'amélioration apportée par la transformée de Fourier adaptée. Nous avons mesuré une résolution spec-

trale de 11 nm dans les cas des structures à 500  $\mu\text{m}$  de rayon de courbure et 14 nm dans le cas des structures à 350  $\mu\text{m}$ . Nous avons montré que les interférences sont observables sur une largeur spectrale de 1000 nm à 2000 nm. Enfin, nous avons proposé un méthode de restitution du spectre à partir de ses franges d'interférences dispersées.

### 4.5.2 Perspectives

Une étude plus approfondie doit être menée sur la perte par propagation dans le guide plan. En effet, plus le détecteur est loin du centre, plus la lumière qu'il capte parcourt un distance plus grande dans le guide plan, et plus les pertes sont importantes. Ainsi, la considération de ces pertes est nécessaire si nous voulons étendre le champ sur une grande largeur de détecteurs. Le modèle de fuite développé au chapitre 3.3 peut tout à fait tenir compte de ces pertes pour le dessin de nouvelles structures courbes.

Nous avons vu que le modèle du spectromètre développé au chapitre 3 présente des écarts avec les mesures réalisées. Les paramètres utilisés (contraste d'indice, distance effective de diffusion) dans ce modèle peuvent être ajustés. De plus, la prise en compte d'un profil d'indice de réfraction du type diffusion dans le modèle développé est tout à fait envisageable.

L'ajout de la barrette de photodecteurs achèvera la caractérisation complète du spectromètre. Il existe plusieurs type de barrettes de photodétecteurs sur le marché dont les tailles vont des 0,56 cm à 2,56 cm avec des périodes de 20 et 25  $\mu\text{m}$  capable de détecter dans le proche infra-rouge (900 nm à 1700 nm).

Enfin, le masque ne contient, pour le moment, que des structure de rayons, au minimum, 350  $\mu\text{m}$ . L'étude de boucles de rayons plus petits est tout à fait envisageable. La gamme spectrale analysable serait ainsi plus grande.

# Conclusion Générale

## Conclusion

Durant cette thèse, nous avons développé le modèle complet du spectromètre LLIFTS.

Pour ceci, avons développé, au chapitre 2, une méthode numérique pour modéliser une structure courbe basée sur l'AFMM appliquée dans le plan conforme exponentiel. Nous avons comparé ce modèle à des modèles existants au niveau d'un guide simple. La comparaison a donné des bons résultats. Pour l'instant seuls des guides à faible contraste d'indice de réfraction ont été étudiés. Mais il est fort possible que cette méthode soit valable avec des plus forts confinements. Ce modèle permet de prendre en compte une évolution arbitraire et quasi-continue de l'approche d'un guide plan. Nous avons pu isoler les problèmes liés à la monomodicité du guide courbe induisant des phénomènes de battement. Nous avons ainsi conclu l'intérêt de concentrer la fuite sur le mode fondamental. Ce modèle permet de fournir des résultats assez rapidement et mérite d'être approfondi.

Nous avons ensuite adapté le théorème intégrale de Helmholtz-Kirchhoff pour modéliser le champ lointain issu de la structure courbe. Cette adaptation combinée à un modèle de fuite nous a permis d'obtenir un profil d'intensité arbitraire sur les détecteurs. Nous avons proposé une méthode de restitution du spectre d'un signal émis à l'entrée de l'instrument. Cette restitution nous a amené à développer une transformée de Fourier adaptée à notre problème. Ainsi, nous avons pu montrer le principe de fonctionnement du spectromètre et nous avons pu en donner les performances théoriques attendues.

Enfin, une première réalisation et une première caractérisation ont été effectuées. Nous avons pu mesurer des résolutions en longueurs d'onde de 11 et 14 nm à la longueur d'onde de 1550 nm. Nous avons pu observer les figures d'interférences sur une gamme large de longueurs d'onde de 1000 nm à 2000 nm. Nous avons donc un composant réel et exploitable. Ce composant est compact, intégrable et sans parties mobiles. Les résultats pratiques tant en résolution spectrale qu'en gamme de longueurs d'onde sont encourageants pour continuer le développement du spectromètre LLIFTS.



# Perspectives

## Modélisation

Au chapitre 2, nous avons développé un modèle de structure courbe utilisant des PMLs anisotropes. Ces PMLs perturbent le milieu et entraînent un écart sur les parties imaginaires en comparaison avec la méthode modale analytique. Des PMLs plus élaborées, comme les PMLs à transformée de coordonnées réelles ou complexes pourraient améliorer ce point. Ce modèle de structure courbe n'a pas encore été comparé en prenant en compte une cascade de sections. Aussi, il serait intéressant de mener cette comparaison. Le MIT a mis à disposition une FDTD en coordonnées cylindriques (MEEP [29]) qui pourrait servir de méthode de comparaison.

Au chapitre 3, nous avons modélisé l'ensemble du spectromètre. Nous avons vu qu'il était nécessaire de traiter les données en prenant en compte le signal d'enveloppe, ou autrement dit, le contraste des franges d'interférences. Ceci permettrait de vérifier la limite de validité de la transformée de Fourier adaptée.

La comparaison du modèle développé aux chapitres 2 et 3 avec les mesures du chapitre 4 a donné des résultats relativement proches mais pas encore assez précis. L'approximation du guide canal par la méthode de l'indice effectif semble être la cause de cette différence. Aussi, l'étude de la distribution d'indice obtenue par l'échange  $\text{Ag}^+/\text{Na}^+$  pourrait compléter le modèle de la structure courbe afin d'optimiser de nouvelles structures.

## Réalisation et caractérisation

Au chapitre 4, nous avons mené une première réalisation et une première caractérisation du composant. Ces premières mesures nous ont permis d'estimer une distance de guide plan nécessaire pour pouvoir détecter un signal à une longueur d'onde de 1500 nm. Il sera donc intéressant de réaliser de nouveaux échantillons avec un guide plan plus long. Ainsi, le test d'une barrette de photodétecteurs est tout à fait envisageable pour un premier développement d'un premier prototype commercial.

Dans ce même chapitre, nous avons décrit et utilisé un banc de mesure développé à l'IMEP-LAHC. Pour ce banc, nous avons développé un programme de raccords de fenêtre afin de mesurer les figures d'interférences en sortie du composant optique. Celui-ci présentent quelques faiblesses dont un décalage entre les fenêtres raccordées. Ceci a pour effet de rendre le traitement de donnée difficile. Il serait donc intéressant de concevoir un banc adapté. Un contrôle de position de l'objectif plus précis, comme un moteur pas-à-pas, permettrait d'améliorer le protocole de mesure.

L'échange  $\text{Ag}^+/\text{Na}^+$  semble provoquer des pertes du signal par propagation dans le guide plan. Si nous voulons élargir le contraste des franges en arête de sortie du composant, il serait intéressant d'étudier ces pertes. Il est possible de diminuer ces pertes par un traitement supplémentaire. La conception d'un nouveau masque comportant des demi-boucles pourrait permettre d'étudier la réponse d'un seul bras ainsi que les pertes de lumière induites par le trajet dans le guide plan.

Le phénomène de fuite de la structure courbe peut être analysé de manière plus précise.

Le SNOM (Scanning Near Field Optical Microscope) est un instrument qui permet une réelle mesure du champ proche à la surface du verre. Une cartographie du champ au niveau de la structure courbe permettrait de mieux comprendre ce phénomène de fuite. Le LNIO (Laboratoire de Nanotechnologie et Instrumentation Optique) à Troyes détient un tel instrument et une collaboration sur ce projet serait très intéressante.

Enfin, l'ajout d'une barrette de détecteurs semble être la prochaine étape pour réaliser un premier prototype commercial.

## **Vers un instrument complet**

Nous avons vu au chapitre 3 de la modélisation du spectromètre que la connaissance du contraste permettrait de résoudre les problèmes liés à la résolution. Nous avons vu au chapitre 4 que des défauts peuvent apparaître sur l'arête de sortie du composant. Ces défauts agissent sur le contraste des figures d'interférences. Dans sa configuration actuelle, le spectromètre ne nous permet pas d'obtenir aisément ce contraste. Nous proposons deux manières de procéder pour intégrer au LLIFTS le moyen de mesurer ce contraste et ainsi d'atteindre les résolutions théoriques.

### **Intégration de demi-boucles annexes**

Le premier consiste à ajouter à chaque demi-boucle, une demi-boucle annexe excitable seule. Ainsi, l'enveloppe des faisceaux de chacun des bras peut être enregistrée par les détecteurs et une opération de déconvolution peut améliorer la restitution du spectre et augmenter les performances.

### **Variation d'indice**

Le deuxième consiste à ajouter une électrode sur l'un des bras de la structure courbe. En appliquant une variation de température localisée, le contraste d'indice est modifié et le signal parcourant le bras en question est déphasé. Un signal suffisamment monochromatique est injecté dans le spectromètre. Pour différentes valeurs de ce déphasage, l'intensité est enregistrée. Un traitement de données de type détection synchrone peut alors être effectué afin d'extraire le contraste.



# Bibliographie

- [1] M. WOLF, M. FERRARI et V. QUARESIMA : Progress of near-infrared spectroscopy and topography for brain and muscle clinical applications. *Journal of Biomedical Optics*, 12:062104, 2007.
- [2] D. BRIAND, O. MANZARDO, N.F. de ROOIJ, J. HILDENBRAND et J. WOLLENSTEIN : Gas Detection using a Micromachined FTIR Spectrometer. *Sensors, 2007 IEEE*, pages 1364–1367, 2007.
- [3] LF DE ALENCAR FIGUEIREDO, F. DAVRIEUX, G. FLIEDEL, JF RAMI, J. CHANTE-REAU, M. DEU, B. COURTOIS et C. MESTRES : Development of NIRS Equations for Food Grain Quality Traits through Exploitation of a Core Collection of Cultivated Sorghum. *J. Agric. Food Chem*, 54(22):8501–8509, 2006.
- [4] G. REICH : Near-infrared spectroscopy and imaging : Basic principles and pharmaceutical applications. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 57(8):1109–1143, 2005.
- [5] B. JIANG et YD HUANG : Noncontact analysis of the fiber weight per unit area in prepreg by near-infrared spectroscopy. *Analytica Chimica Acta*, 616(1):103–108, 2008.
- [6] T. IZAWA, H. NAKAGOME et T. KIMURA : Optical waveguides formed by electrically induced migration of ions in glass plates. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 8(6): 545–546, Jun 1972.
- [7] D. ABBOTT : The Biographical dictionary of scientists. *New York : P. Bedrick Books, 1984.*, 1984.
- [8] GR KIRCHHOFF et R. BUNSEN : Chemical Analysis by Spectrum Observation. *Phil. Mag*, 20:89–98, 1860.
- [9] M. BORN et E. WOLF : *Principles of optics*. Pergamon Press New York, 1975.
- [10] D.A. NAYLOR et M.K. TAHIC : Apodizing functions for Fourier transform spectroscopy. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(11):3644–3648, 2007.
- [11] C. E. SHANNON : A mathematical theory of communication. *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 5(1):3–55, 2001.
- [12] Takayuki OKAMOTO, Satoshi KAWATA et Shigeo MINAMI : Fourier transform spectrometer with a self-scanning photodiode array. *Appl. Opt.*, 23(2):269–273, 1984.
- [13] F. COTTET : *Traitement des signaux et acquisition de données*. Dunod, 1997.
- [14] Omar MANZARDO, Roland MICHAELY, Felix SCHÄDELIN, Wilfried NOELL, Thomas OVERSTOLZ, Nico De ROOIJ et Hans Peter HERZIG : Miniature lamellar grating interferometer based on silicon technology. *Opt. Lett.*, 29(13):1437–1439, 2004.

- [15] Omar MANZARDO, Felix SHADELIN, Wilfried NOELL, Nicolaas F. de ROOIJ et Hans Peter HERZIG : Infrared mems-based lamellar grating spectrometer. *In Hakan UREY et Ayman EL-FATATRY, éditeurs : MEMS, MOEMS, and Micromachining*, volume 5455, pages 1–8. SPIE, 2004.
- [16] G. BOER, P. RUFFIEUX, T. SCHARF, P. SEITZ et R. DÄNDLIKER : Compact Liquid-Crystal-Polymer Fourier-Transform Spectrometer. *Applied Optics*, 43(11):2201–2208, 2004.
- [17] Y.Q. LU, C. WONG et S.T. WU : A liquid crystal-based Fourier optical spectrum analyzer. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 16(3):861–863, 2004.
- [18] Y. LU, F. DU, Y.H. WU et S.T. WU : Liquid-Crystal-Based Fourier Optical Spectrum Analyzer without Moving Parts. *Japanese Journal of Applied Physics*, 44(1A):291–293, 2005.
- [19] M. SASAKI, X. MI et K. HANE : Standing wave detection and interferometer application using a photodiode thinner than optical wavelength. *Applied Physics Letters*, 75:2008, 1999.
- [20] D. KNIPP, H. STIEBIG, S.R. BHALOTRA, E. BUNTE, H.L. KUNG et D.A.B. MILLER : Silicon-based micro-fourier spectrometer. *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 52(3):419–426, Mar 2005.
- [21] J. FERRAND, G. CUSTILLON, S. KOCHTCHEEV, S. BLAIZE, A. MORAND, G. LEBLOND, P. BENECH, P. ROYER, P. KERN et E. LE COARER : A SWIFTS operating in visible and near-infrared. *In Proceedings of SPIE*, volume 7010, page 701046. SPIE, 2008.
- [22] E. le COARER, S. BLAIZE, P. BENECH, I. STEFANON, A. MORAND, G. LERONDEL, G. LEBLOND, P. KERN, J.M. FEDELI et P. ROYER : Wavelength-scale stationary-wave integrated Fourier-transform spectrometry. *Nature Photonics*, 1:473–478, 2007.
- [23] A. BRANDENBURG et R. HENNINGER : Integrated optical Young interferometer. *Applied Optics*, 33(25/1), 1994.
- [24] A. BRANDENBURG : Differential refractometry by an integrated-optical Young interferometer. *Sensors & Actuators : B. Chemical*, 39(1-3):266–271, 1997.
- [25] Isabelle Schanen DUPORT, Pierre BENECH et Roger RIMET : New integrated-optics interferometer in planar technology. *Applied Optics*, 33(25):5954–5958, 1994.
- [26] Matthieu NANNINI, Philippe NERIN, Pierre BENECH et Isabelle SCHANEN-DUPORT : Multiaxial beam combiner for optical coherence tomography. *Optical Engineering*, 42(1):75–79, 2003.
- [27] Kane YEE : Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 14(3): 302–307, May 1966.
- [28] Artem V. BORISKIN, Svetlana V. BORISKINA, Anthony ROLLAND, Ronan SAULEAU et Alexander I. NOSICH : Test of the fdtd accuracy in the analysis of the scattering

- resonances associated with high- $q$  whispering-gallery modes of a circular cylinder. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(5):1169–1173, 2008.
- [29] MDavid ROUNDY : Meep, <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/meep>, Septembre, 19th 2008.
- [30] H. APITHY, Y. BOUSLIMANIET et H. HAMAM : Simulation methods in optical propagation. *Electrical and Computer Engineering, Canadian Journal of*, 30(1):39–48, Winter 2005.
- [31] M. D. FEIT et Jr. J. A. FLECK : Light propagation in graded-index optical fibers. *Applied Optics*, 17(24):3990–3998, 1978.
- [32] Y. CHUNG et N. DAGLI : An assessment of finite difference beam propagation method. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 26(8):1335–1339, Aug 1990.
- [33] J. YAMAUCHI, J. SHIBAYAMA et H. NAKANO : Modified finite-difference beam propagation method based on the generalized douglas scheme for variable coefficients. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 7(6):661–663, Jun 1995.
- [34] Y. TSUJI, M. KOSHIBA et T. TANABE : A wide-angle beam propagation method based on a finite element scheme. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 33(2):1544–1547, Mar 1997.
- [35] G. Ronald HADLEY : Wide-angle beam propagation using pade approximant operators. *Optics Letters*, 17(20):1426, 1992.
- [36] Zhen HU et Ya Yan LU : Computing optimal waveguide bends with constant width. *J. Lightwave Technol.*, 25(10):3161–3167, 2007.
- [37] D. MARCUSE : *Theory of Dielectric Waveguides*. Quantum Electronics principles and applications, 2nd edition édition, 1991.
- [38] K. R. HIREMATH, M. HAMMER, R. STOFFER, L. PRKNA et J. CTYROKÝ : Analytic approach to dielectric optical bent slab waveguides. *Optical and Quantum Electronics*, 37(1):37–61, 2005.
- [39] A. MORAND, K. PHAN-HUY, Y. DESIERES et P. BENECH : Analytical study of the microdisk's resonant modes coupling with a waveguide based on the perturbation theory. *Lightwave Technology, Journal of*, 22(3):827–832, 2004.
- [40] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Table*. Courier Dover Publications, 1965.
- [41] M. HEIBLUM et J. HARRIS : Analysis of curved optical waveguides by conformal transformation. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 11(2):75–83, Feb 1975.
- [42] S.C.M. LIDGATE, P. SEWELL et T.M. BENSON : Conformal mapping : Limitations for waveguide bend analysis. *Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings*, 149(5):262–266, Sep 2002.
- [43] Chang-Min KIM, Young-Moon KIM et Woo-Kyung KIM : Leaky modes of circular slab waveguides : modified airy functions. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 8(6):1239–1245, Nov/Dec 2002.

- [44] R. T. DECK, Mirko MIRKOV et B. G. BAGLEY : Determination of bending losses in rectangular waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 16(9):1703, 1998.
- [45] P. BIENSTMAN, E. SIX, A. ROELENS, M. VANWOLLEGHEM et R. BAETS : Calculation of bending losses in dielectric waveguides using eigenmode expansion and perfectly matched layers. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 14(2):164–166, Feb 2002.
- [46] P. BIENSTMAN et R. BAETS : Optical modelling of photonic crystals and vcsels using eigenmode expansion and perfectly matched layers. *Optical and Quantum Electronics*, 33(4):327–341, April 2001.
- [47] M. NEVIERE, M. CADILHAC et R. PETIT : Applications of conformal mappings to the diffraction of electromagnetic waves by a grating. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on [legacy, pre-1988]*, 21(1):37–46, 1973.
- [48] K. KNOP : Rigorous diffraction theory for transmission phase gratings with deep rectangular grooves. *J. Opt. Soc. Am.*, 68(9):1206–1210, 1978.
- [49] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Coupled-wave analysis of reflection gratings. *Appl. Opt.*, 20(2):240–244, 1981.
- [50] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am.*, 71(7):811–818, 1981.
- [51] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(10):1385–1392, 1982.
- [52] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Three-dimensional vector coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(9):1105–1112, 1983.
- [53] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction—e-mode polarization and losses. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(4):451–455, 1983.
- [54] W. E. BAIRD, M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Diffraction characteristics of planar absorption gratings. *Applied Physics B Photophysics Laser Chemistry*, 32:15–20, septembre 1983.
- [55] M. G. MOHARAM et T. K. GAYLORD : Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(11):1780–1787, 1986.
- [56] E. N. GLYTSIS et T. K. GAYLORD : Rigorous three-dimensional coupled-wave diffraction analysis of single and cascaded anisotropic gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(11):2061, 1987.
- [57] Philippe LALANNE et G. Michael MORRIS : Highly improved convergence of the coupled-wave method for tm polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(4):779, 1996.
- [58] G. GRANET et B. GUIZAL : Efficient implementation of the coupled-wave method for metallic lamellar gratings in tm polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(5):1019, 1996.
- [59] Lifeng LI : Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(5):1024, 1996.
- [60] Philippe LALANNE et Eric SILBERSTEIN : Fourier-modal methods applied to waveguide computational problems. *Opt. Lett.*, 25(15):1092–1094, 2000.

- [61] S.F. HELFERT et R. PREGLA : Finite difference expressions for arbitrarily positioned dielectric steps in waveguide structures. *Lightwave Technology, Journal of*, 14(10):2414–2421, Oct 1996.
- [62] K. C. CHANG, V. SHAH et T. TAMIR : Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles. *J. Opt. Soc. Am.*, 70(7):804, 1980.
- [63] Z.S. SACKS, D.M. KINGSLAND, R. LEE et Jin-Fa LEE : A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 43(12):1460–1463, Dec 1995.
- [64] Eric SILBERSTEIN, Philippe LALANNE, Jean-Paul HUGONIN et Qing CAO : Use of grating theories in integrated optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(11):2865–2875, 2001.
- [65] Jean Paul HUGONIN et Philippe LALANNE : Perfectly matched layers as nonlinear coordinate transforms : a generalized formalization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(9):1844–1849, 2005.
- [66] P. LALANNE et J.P. HUGONIN : Bloch-wave engineering for high-q, small-v microcavities. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 39(11):1430–1438, Nov. 2003.
- [67] Ph. LALANNE, J. P. HUGONIN et J. M. GÉRARD : Electromagnetic study of the quality factor of pillar microcavities in the small diameter limit. *Applied Physics Letters*, 84(23):4726–4728, 2004.
- [68] G. LECAMP, P. LALANNE, J.P. HUGONIN et J.-M. GERARD : Energy transfer through laterally confined bragg mirrors and its impact on pillar microcavities. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 41(10):1323–1329, Oct. 2005.
- [69] Andrea ARMAROLI, Alain MORAND, Pierre BENECH, Gaetano BELLANCA et Stefano TRILLO : Three-dimensional analysis of cylindrical microresonators based on the aperiodic fourier modal method. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(3):667–675, 2008.
- [70] M. PALAMARU et Ph. LALANNE : Photonic crystal waveguides : Out-of-plane losses and adiabatic modal conversion. *Applied Physics Letters*, 78(11):1466–1468, 2001.
- [71] Ph. LALANNE et H. BENISTY : Out-of-plane losses of two-dimensional photonic crystals waveguides : Electromagnetic analysis. *Journal of Applied Physics*, 89(2):1512–1514, 2001.
- [72] Benoît CLUZELL, Loïc LALOUAT, Philippe VELHA, Emmanuel PICARD, David PEYRADE, Jean-Claude RODIER, Thomas CHARVOLIN, Philippe LALANNE, Frédérique de FERNEL et Emmanuel HADJI : A near-field actuated optical nanocavity. *Opt. Express*, 16(1):279–286, 2008.
- [73] G. LECAMP, J. P. HUGONIN et P. LALANNE : Theoretical and computational concepts for periodic optical waveguides. *Opt. Express*, 15(18):11042–11060, 2007.
- [74] C. SAUVAN, P. LALANNE et J.P. HUGONIN : Tuning holes in Photonic Crystal nanocavities. *Nature*, 429(1), 2004.
- [75] A.-L. BAUDRION, J.-C. WEEBER, A. DEREUX, G. LECAMP, P. LALANNE et S. I. BOZHEVOLNYI : Influence of the filling factor on the spectral properties of plasmonic crystals. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 74(12):125406, 2006.



- [76] P. LALANNE, JP HUGONIN, M. BESBES et P. BIENSTMAN : Reply : The response of nanostructured surfaces in the near field. *Nature Physics*, 2(12):792, 2006.
- [77] P. LALANNE et JP HUGONIN : Interaction between optical nano-objects at metallo-dielectric interfaces. *Nature Physics*, 2(8):551–556, 2006.
- [78] Lifeng LI : Use of fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(9):1870–1876, 1996.
- [79] M. G. MOHARAM, Eric B. GRANN, Drew A. POMMET et T. K. GAYLORD : Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(5):1068–1076, 1995.
- [80] Lifeng LI : Multilayer modal method for diffraction gratings of arbitrary profile, depth, and permittivity. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(12):2581–2591, 1993.
- [81] Peter BIENSTMAN et Roel BAETS : Advanced boundary conditions for eigenmode expansion models. *Optical and Quantum Electronics*, 34(5):523–540, 2002.
- [82] J.E. BROQUIN : *Etude de guides d'ondes dopés terres rares en optique intégrée sur verre en vue de réaliser un amplificateur optique*. Thèse de doctorat, I.N.P.G., 1997.
- [83] T. LANG : *Etude des effets de polarisation dans des guides d'optique intégrée sur verre. Application : convertisseur de polarisation*. Thèse de doctorat, I.N.P.G., 1997.
- [84] R.V. RAMASWAMY et R. SRIVASTAVA : Ion-exchanged glass waveguides : a review. *Lightwave Technology, Journal of*, 6(6):984–1000, Jun 1988.
- [85] F. GARDILLOU : *Etude et réalisation de structures hybrides actives/passives en optique intégrée sur verre*. Thèse de doctorat, I.N.P.G., 2005.
- [86] RM KNOX et PP TOULIOS : Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range. *In Proc. Symp. Submillimeter Waves*, pages 497–516, 1970.
- [87] J.W. GOODMAN : *Introduction To Fourier Optics*. Roberts & Co, 2005.
- [88] L. PRKNA, M. HUBALEK et J. CTYROKY : Vectorial eigenmode solver for bent waveguides based on mode matching. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 16(9):2057–2059, Sept. 2004.
- [89] David G. WINTERS, Philip SCHLUP et Randy A. BARTELS : Highly achromatic fourier-transform spectrometer. *Opt. Express*, 15(3):1361–1368, 2007.
- [90] T. HARIMOTO, Y. TAKEUCHI et M. FUJITA : Curve-fitting method for pure spectrum measurement of femtosecond laser pulses by a pinhole pair. *Optics Express*, 13(15):5689–5693, 2005.
- [91] B. JALALI, S. YEGNANARAYANAN, T. YOON, T. YOSHIMOTO, I. RENDINA et F. COPPINGER : Advances in silicon-on-insulator optoelectronics. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 4(6):938–947, Nov/Dec 1998.
- [92] B. JALALI et S. FATHPOUR : Silicon photonics. *J. Lightwave Technol*, 24:4600–4615, 2006.
- [93] Weijia YANG, Costantino CORBARI, Peter G. KAZANSKY, Koichi SAKAGUCHI et Isabel C. CARVALHO : Low loss photonic components in high index bismuth borate glass by femtosecond laser direct writing. *Opt. Express*, 16(20):16215–16226, 2008.

- [94] H. MA, AKY JEN et L.R. DALTON : Polymer-Based Optical Waveguides : Materials, Processing, and Devices. *Advanced Materials*, 14(19):1339–1365, 2002.
- [95] A. PALEARI, E. FRANCHINA, N. CHIODINI, A. LAURIA, E. BRICCHI et P. G. KAZANSKY :  $\text{SnO}_2$  nanoparticles in silica : Nanosized tools for femtosecond-laser machining of refractive index patterns. *Applied Physics Letters*, 88(13):131912, 2006.
- [96] TG GIALLORENZI, EJ WEST, R. KIRK, R. GINTHER et RA ANDREWS : Optical waveguides formed by thermal migration of ions in glass. *Appl. Opt.*, 12(6):1240–1245, 1973.
- [97] Maurice L. HUGGINS : The dispersion of silicate glasses as a function of composition. *J. Opt. Soc. Am.*, 30(11):514–518, 1940.
- [98] Maurice L. HUGGINS, Kuan Han SUN et Dotothy O. DAVIS : The dispersion of silicate glasses as a function of composition. ii. *J. Opt. Soc. Am.*, 32(11):635–648, 1942.
- [99] Janet JACKEL : High- $\Delta n$  optical waveguides in  $\text{LiNbO}_3$  : Thallium-lithium ion exchange. *Applied Physics Letters*, 37(8):739–741, 1980.
- [100] D. BUCCI, J. GRELIN, E. GHIBAUDO et J.-E. BROQUIN : Realization of a 980-nm/1550-nm pump-signal (de)multiplexer made by ion-exchange on glass using a segmented asymmetric y-junction. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 19(9):698–700, May1, 2007.
- [101] D. BUCCI : *Mise au point d'un duplexeur pompe/signal à base de guides segmentés en optique intégrée sur verre*. Thèse de doctorat, I.N.P.G., 2006.



# Annexe A

## Équations d'Helmholtz dans le plan conforme

Nous détaillons ici les calculs effectués pour le passage des équations régissant l'évolution des champs électromagnétiques du plan  $(r, \theta)$  au plan conforme  $(u, v)$ . La modélisation est une modélisation en deux dimensions.

### A.1 Équations dans le plan $(r, \theta)$

Nous considérons la propagation d'une onde électromagnétique dans la plan composée des champs électromagnétiques  $(\mathbf{E}(r, \theta)e^{-i\omega t}, \mathbf{H}(r, \theta)e^{-i\omega t})$  de pulsation  $\omega$  dans un milieu anisotrope. Nous introduisons les tenseurs de permittivité relative  $[\epsilon_r]$  et de perméabilité magnétique relative  $[\mu_r]$  définis par :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{rz} \end{bmatrix}, \quad [\mu_r] = \begin{bmatrix} \mu_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Dans ce milieu, l'onde se propage selon les équations de Maxwell :

$$\text{div}([\epsilon_r] \epsilon_0 \mathbf{E}) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{div}([\mu_r] \mu_0 \mathbf{H}) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = j\omega [\mu_r] \mu_0 \mathbf{H}, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = -j\omega [\epsilon_r] \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (\text{A.5})$$

Ces équations (A.4) et (A.5) exprimées dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  donnent, dans les cas TE et TM, les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}r} \left( \frac{\partial r H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \\ H_r = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \\ H_\theta = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{cases} H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rz}r} \left( \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \right) \\ E_r = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rr}r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \\ E_\theta = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{r\theta}} \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

où  $(E_z, E_r, E_\theta)$  et  $(H_z, H_r, H_\theta)$  sont les composantes des champs électromagnétiques  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  et sont des fonctions des variables  $(r, \theta)$ .

## A.2 Transformation conforme

Nous considérons la transformation conforme  $W = R \ln \left( \frac{Z}{R} \right)$  qui peut se noter sous la forme du changement de variable  $g$  défini par :

$$g : (u, v) \rightarrow (r, \theta) = \left( R e^{\frac{u}{R}}, \frac{v}{R} \right). \quad (\text{A.8})$$

Notons que dans ce changement de variables, la variable  $u = R \ln \frac{r}{R}$  ne dépend que de  $r$  et la variable  $v = R\theta$  ne dépend que de  $\theta$ . Dans les calculs qui suivent, leurs dérivées apparaissent. Ces dérivées sont données par les relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial R \ln \frac{r}{R}}{\partial u} = \frac{R}{r}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial R\theta}{\partial \theta} = R. \quad (\text{A.10})$$

Nous ne détaillons le calcul de passage dans le plan conforme que pour la polarisation TE, le calcul pour la polarisation TM étant similaire.

## A.3 Cas de la polarisation TE

Nous cherchons à exprimer le système d'équations (A.6) dans le plan conforme  $(u, v)$ . Nous définissons les images des champs électromagnétiques, des permittivité et perméabilité relatives dans le plan conforme par les relations :

$$\begin{aligned} E_z^c(u, v) &= E_z(r, \theta) & \epsilon_{rr}^c(u, v) &= \epsilon_{rr}(r, \theta) \\ H_r^c(u, v) &= H_r(r, \theta) & \mu_{rr}^c(u, v) &= \mu_{rr}(r, \theta) \\ H_\theta^c(u, v) &= H_\theta(r, \theta) & \mu_{r\theta}^c(u, v) &= \mu_{r\theta}(r, \theta) \end{aligned}. \quad (\text{A.11})$$

Nous posons que les fonctions  $\epsilon_{rr}$ ,  $\mu_{rr}$  et  $\mu_{r\theta}$  ne dépendent que de  $r$  et donc les fonctions  $\epsilon_{rr}^c$ ,  $\mu_{rr}^c$  et  $\mu_{r\theta}^c$  dans le plan conforme ne dépendent donc que de  $u$ .

Nous détaillons les calculs effectués pour le passage du système d'équations (A.6) dans le plan conforme.

La première équation du système (A.6) est la suivante :

$$E_z(r, \theta) = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}r} \left( \frac{\partial r H_\theta}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}(r, \theta) \right). \quad (\text{A.12})$$

Le premier terme de l'équation (A.12) se calcule de la façon suivante :

$$\frac{\partial r H_\theta}{\partial r} = H_\theta + r \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \quad (\text{A.13})$$

$$= H_\theta^c + r \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{A.14})$$

$$= H_\theta^c + r \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} \frac{R}{r} \quad (\text{A.15})$$

$$= H_\theta^c + R \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u}. \quad (\text{A.16})$$

Le deuxième terme de l'équation (A.12) se calcule de la façon suivante :

$$\frac{\partial H_r}{\partial \theta} = \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (\text{A.17})$$

$$= R \frac{\partial H_r^c}{\partial v}. \quad (\text{A.18})$$

L'équation (A.12) s'exprime alors dans le plan conforme de la façon suivante :

$$E_z^c = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c R e^{\frac{u}{R}}} \left( H_\theta^c + R \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} - R \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \right). \quad (\text{A.19})$$

La deuxième équation du système (A.6) :

$$H_r = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta}, \quad (\text{A.20})$$

s'exprime dans le plan conforme de la façon suivante :

$$H_r^c = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c R e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (\text{A.21})$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c R e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} R \quad (\text{A.22})$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v}. \quad (\text{A.23})$$

La troisième équation du système (A.6) :

$$H_\theta = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad (\text{A.24})$$

s'exprime dans le plan conforme de la façon suivante :

$$H_\theta^c = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \frac{R}{r} \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u}. \quad (\text{A.28})$$

Les équations (A.19), (A.23) et (A.28) se groupent pour donner le système d'équation :

$$\begin{cases} E_z^c = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \left( \frac{1}{R} H_\theta^c + \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} - \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \right) \\ H_r^c = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \\ H_\theta^c = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \end{cases}. \quad (\text{A.29})$$

En combinant les 3 équations du système A.29, nous obtenons :

$$j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}} E_z^c = \frac{1}{R} \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$- \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$-\omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}} E_z^c = \frac{1}{R} \frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$-\omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}} E_z^c = \frac{1}{R} \frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{e^{\frac{u}{R}}} \right) \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \quad (\text{A.33})$$

$$+ \frac{1}{e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$-\omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}} E_z^c = \frac{1}{R} \frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} - \frac{1}{R e^{\frac{u}{R}}} \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \quad (\text{A.35})$$

$$+ \frac{1}{e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$-\omega^2\epsilon_0\mu_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}} E_z^c = \frac{1}{e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \right). \quad (\text{A.37})$$

Nous obtenons finalement l'équation d'Helmholtz pour la polarisation TE dans le plan conforme  $(u, v)$  :

$$k_0^2 \epsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} E_z^c + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2} = 0, \quad (\text{A.38})$$

où  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ .

## A.4 Cas de la polarisation TM

Par un calcul similaire et en considérant les fonctions dans le plan conforme  $(u, v)$  :

$$\begin{aligned} H_z^c(u, v) &= H_z(r, \theta) & \mu_{rr}^c(u, v) &= \mu_{rr}(r, \theta) \\ E_r^c(u, v) &= E_r(r, \theta) & \epsilon_{rr}^c(u, v) &= \epsilon_{rr}(r, \theta) \\ E_\theta^c(u, v) &= E_\theta(r, \theta) & \epsilon_{r\theta}^c(u, v) &= \epsilon_{r\theta}(r, \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Nous obtenons le système d'équations pour la polarisation TM :

$$\begin{cases} H_z^c = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \left( \frac{\partial E_r^c}{\partial v} - \frac{1}{R} E_\theta^c - \frac{\partial E_\theta^c}{\partial u} \right) \\ E_r^c = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_z^c}{\partial v} \\ E_\theta^c = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_z^c}{\partial u} \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Ce système nous donne l'équation d'Helmholtz pour la polarisation TM dans le plan conforme  $(u, v)$  :

$$k_0^2 \mu_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} H_z^c + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\epsilon_{r\theta}^c} \frac{\partial H_z^c}{\partial u} \right) + \frac{1}{\epsilon_{rr}^c} \frac{\partial^2 H_z^c}{\partial v^2} = 0, \quad (\text{A.41})$$

où  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ .





# Annexe B

## Produit de Fourier et produit inverse

### B.1 Rappel des produits de Fourier

Nous avons vu au chapitre (2.3.3) que le produit de Fourier  $h$  de deux fonctions  $f$  et  $g$  continues revient au produit matriciel de type 1 suivant :

$$\bar{h} = \llbracket g \rrbracket \bar{f}, \quad (\text{B.1})$$

où  $\bar{h}$  et  $\bar{f}$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier des fonctions  $h$  et  $f$  est  $\llbracket g \rrbracket$  est la matrice de Toeplitz des coefficients de Fourier de la fonction  $g$ . Ce produit est valable dans le cas où les fonctions ne présentent pas de discontinuités communes. Or, dans notre cas, nous utilisons des fonctions qui peuvent présenter des discontinuités communes. Aussi, la projection des équations d'Helmholtz dans l'espace de Fourier doit suivre certaines règles. Ces règles ont été regroupées par Lifeng Li [78] pour certains cas de fonctions discontinues. Dans le cas où les fonctions  $f$  et  $g$  présentent des discontinuités communes et que leur produit  $h$  est continu, il est montré [78] que le produit de Fourier ne converge pas uniformément. Dans ce cas, nous devons utiliser le produit inverse de type 2 défini par la relation suivante :

$$\bar{h} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ g \end{array} \right]^{-1} \bar{f}. \quad (\text{B.2})$$

Il nous faut donc étudier l'équation d'Helmholtz que nous voulons projeter dans l'espace de Fourier afin de déterminer lequel des produits de type 1 ou 2 il faut appliquer lors de la projection de cette équation.

### B.2 Application des règles

Pour commencer, nous reformulons le système d'équations (A.29) dans le cas TE exprimé dans le plan conforme  $(u, v)$  sous une forme plus adéquate afin d'appliquer les règles formulées au-dessus.

Le système d'équations (A.29) est le suivant :

$$\begin{cases} E_z^c &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \left( \frac{1}{R} H_\theta^c + \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} - \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \right) \\ H_r^c &= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \\ H_\theta^c &= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Ce système fait apparaître les champs, les permittivités et perméabilités du problème. Nous savons que les composantes  $E_z^c, H_\theta^c$  du champ électromagnétique ainsi que leur dérivées premières et secondes par rapport à  $v$  sont continues sur la zone de simulation. Nous savons que les permittivités et perméabilités relatives sont discontinues sur la zone de simulation. Nous savons que les fonctions  $e^{\frac{u}{R}}$  et  $e^{\frac{2u}{R}}$  sont discontinues sur les bords de la zone de simulation et n'ont pas de discontinuités en commun avec les permittivités et perméabilités relatives. Ce dernier point est important car la convergence sera plus lente à cause de la discontinuité des fonction exponentielles. Comme cette discontinuité a lieu dans les PMLs, nous espérons que la convergence ne sera pas affectée.

Nous reformulons donc le système pour mieux utiliser ces informations :

$$\begin{cases} E_z^c &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \left( \frac{1}{R} H_\theta^c + \frac{\partial H_\theta^c}{\partial u} - \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \right) \\ H_r^c &= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \\ H_\theta^c &= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{cases} E_z^c &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c} \frac{\partial H_\theta^c e^{\frac{u}{R}}}{\partial u} - \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \\ H_r^c &= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} \\ H_\theta^c &= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{cases} H_\theta^c &= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \\ \frac{1}{j} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} &= -\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}} H_r^c \\ \frac{1}{j} \frac{\partial H_r^c}{\partial v} &= -\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c E_z^c e^{\frac{u}{R}} + \frac{e^{-\frac{u}{R}}}{j} \frac{\partial}{\partial u} \left( H_\theta^c e^{\frac{u}{R}} \right) \\ -\frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2} &= -\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}} \frac{1}{j} \frac{\partial H_r^c}{\partial v} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{cases} H_\theta^c &= \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \\ \frac{1}{j} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} &= -\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}} H_r^c \\ \frac{1}{j} \frac{\partial H_r^c}{\partial v} &= -\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c E_z^c e^{\frac{u}{R}} + \frac{e^{-\frac{u}{R}}}{j} \frac{\partial}{\partial u} \left( H_\theta^c e^{\frac{u}{R}} \right) \\ -\frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2} &= -\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}} \left( -\omega\epsilon_0\epsilon_{rz}^c e^{\frac{u}{R}} E_z^c - \frac{e^{-\frac{u}{R}}}{\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\mu_{r\theta}^c} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) \right) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Ce qui nous donne le système d'équations suivant :

$$H_\theta^c = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{j} \frac{\partial E_z^c}{\partial v} = -\omega\mu_0\mu_{rr}^c e^{\frac{u}{R}} H_r^c \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{j} \frac{\partial H_r^c}{\partial v} = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rz}^c E_z^c e^{\frac{u}{R}} + \frac{e^{-\frac{u}{R}}}{j} \frac{\partial}{\partial u} \left( H_\theta^c e^{\frac{u}{R}} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$-\frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2} = \mu_{rr}^c \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( e^{\frac{u}{R}} \frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + k_0^2 \varepsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} E_z^c \right). \quad (\text{B.11})$$

Appliquons maintenant les règles évoquées par Lifeng Li [78] énoncées précédemment :

- l'équation (B.8) nous donne que, sachant que  $H_\theta^c$  est partout continue, les fonctions  $\frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}}$  et  $\frac{\partial E_z^c}{\partial u}$  sont discontinues aux interfaces du guide.  $\frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u}$  est donc un produit de type 2, il faudra considérer matrice de Toeplitz inverse  $\left[ \left[ \mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}} \right] \right]^{-1}$  des coefficients de Fourier de la fonction  $\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}$ .
- la fonction  $\varepsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}}$  est discontinue aux interfaces et la fonction  $E_z^c$  est continu partout.  $\varepsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} E_z^c$  est donc un produit de type 1.
- l'équation (B.11) nous donne que, sachant que la fonction  $-\frac{\partial^2 E_z^c}{\partial v^2}$  est partout continue, les fonctions  $\mu_{rr}^c$  et  $\left( \frac{\partial}{\partial u} \left( e^{\frac{u}{R}} \frac{1}{\mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial E_z^c}{\partial u} \right) + k_0^2 \varepsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} E_z^c \right)$  sont discontinues aux interfaces. Le produit de ces fonctions est donc un produit de type 2, il faudra considérer la matrice de Toeplitz inverse  $\left[ \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^c} \right] \right]^{-1}$  des coefficients de Fourier de la fonction  $\frac{1}{\mu_{rr}^c}$ .

Compte tenu de ces règles et en utilisant les règles de calcul énoncé au chapitre 2.3.3, l'équation d'Helmholtz (B.11) dans le cas TE s'exprime dans l'espace de Fourier de la façon suivante :

$$-\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} = \left[ \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^c} \right] \right]^{-1} \left( K \left[ \left[ e^{\frac{u}{R}} \right] \right] \left[ \left[ \mu_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}} \right] \right]^{-1} K + k_0^2 \left[ \left[ \varepsilon_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \right] \right] \right) \bar{s}, \quad (\text{B.12})$$

où les termes  $\llbracket \cdot \rrbracket$  sont les matrices de Toeplitz associées aux décompositions de Fourier des différentes fonctions de permittivités et perméabilités relatives, le terme  $\bar{s}$  est le vecteur associé à la décomposition de Fourier de la composante  $E_z^c$  du champ électrique dans le plan conforme, la matrice  $K$  est la matrice diagonale dont le  $(p, p)$ -ième élément est  $j\gamma p$  et  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ .

Le calcul dans le cas TM est similaire. Nous obtenons l'équation suivante :

$$-\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial v^2} = \left[ \left[ \frac{1}{\varepsilon_{rr}^c} \right] \right]^{-1} \left( K \left[ \left[ e^{\frac{u}{R}} \right] \right] \left[ \left[ \varepsilon_{r\theta}^c e^{\frac{u}{R}} \right] \right]^{-1} K + k_0^2 \left[ \left[ \mu_{rz}^c e^{\frac{2u}{R}} \right] \right] \right) \bar{s}, \quad (\text{B.13})$$

où les termes  $\llbracket \cdot \rrbracket$  sont les matrices de Toeplitz associées aux décompositions de Fourier des différentes fonctions de permittivités et perméabilités relatives, le terme  $\bar{s}$  est le vecteur associé à la décomposition de Fourier de la composante  $H_z^c$  du champ électrique dans le plan conforme, la matrice  $K$  est la matrice diagonale dont le  $(p, p)$ -ième élément est  $j\gamma p$  et  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ .



# Annexe C

## Perfectly Matched Layer

Nous exposons ici le détail de la définition des PMLs anisotropes. Les PMLs sont des couches qui ont pour but d'absorber le champ électromagnétique et de ne produire aucune réflexion à l'interface entre elles et le milieu où se propage le champ. Nous les définissons de façon à ce qu'elles absorbent le champ dans une seule direction. Aussi, dans les PMLs, les permittivités électriques et perméabilités magnétiques doivent être des tenseurs pour considérer l'anisotropie et doivent présenter des éléments complexes pour l'absorption du champ.

L'ajout de ces PMLs s'effectue dans le plan conforme  $(u, v)$ . Dans notre cas, la distribution de permittivité relative est exponentielle selon  $u$ . Nous considérons que cette distribution est localement constante autour de l'interface entre le milieu de simulation et les PMLs. Nous notons  $\epsilon^c$  et  $\mu^c$  les permittivité et perméabilité relative de la zone de simulation et  $[\epsilon^c]_{PML}$  et  $[\mu^c]_{PML}$  celles de la PML.

Nous considérons les équations de Maxwell dans un milieu sans charge ni courant :

$$\operatorname{div}([\epsilon^c]_{PML} \mathcal{E}^c) = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\operatorname{div}([\mu^c]_{PML} \mathcal{H}^c) = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$\operatorname{rot}(\mathcal{E}^c) = -j\omega [\mu^c]_{PML} \mathcal{H}^c, \quad (\text{C.3})$$

$$\operatorname{rot}(\mathcal{H}^c) = -j\omega [\epsilon^c]_{PML} \mathcal{E}^c. \quad (\text{C.4})$$

Nous considérons les tenseurs permittivités électriques et perméabilités magnétiques des PMLs :

$$[\epsilon^c]_{PML} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_r^c & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\theta^c & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z^c \end{bmatrix}, \quad [\mu^c]_{PML} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_r^c & 0 & 0 \\ 0 & \mu_\theta^c & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z^c \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Afin de ne produire aucune réflexion à l'interface entre le milieu que nous cherchons à simuler et les PMLs, il nous faut adapter l'impédance des deux milieux. Ainsi, il faut faire correspondre les impédances intrinsèques  $Z_i = \frac{\mu_i}{\epsilon_i}$  entre le milieu de simulation et les PMLs. Cette condition se traduit sous la forme de l'équation suivante :

$$\frac{[\boldsymbol{\varepsilon}^c]_{PML}}{\boldsymbol{\varepsilon}^c} = \frac{[\boldsymbol{\mu}^c]_{PML}}{\boldsymbol{\mu}^c}. \quad (\text{C.6})$$

Nous pouvons alors poser :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^c]_{PML} = \boldsymbol{\varepsilon}^c [\Lambda] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

$$[\boldsymbol{\mu}^c]_{PML} = \boldsymbol{\mu}^c [\Lambda] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\text{div}([\Lambda] \boldsymbol{\mathcal{E}}^c) = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$\text{div}([\Lambda] \boldsymbol{\mathcal{H}}^c) = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^c) = -j\omega\mu_0 [\Lambda] \boldsymbol{\mathcal{H}}^c, \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^c) = -j\omega\varepsilon_0 [\Lambda] \boldsymbol{\mathcal{E}}^c. \quad (\text{C.12})$$

Exprimons les solutions générales des équations de Maxwell pour les champs  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  et  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^c = \mathbf{E}_0^c e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}^c - \omega t)}, \quad (\text{C.13})$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^c = \mathbf{H}_0^c e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}^c - \omega t)}. \quad (\text{C.14})$$

Compte tenu de des expressions de  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  et  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  les équations d'Helmholtz deviennent :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0^c = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0^c = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0^c = \omega\mu_0 [\Lambda] \mathbf{H}_0^c, \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0^c = -\omega\varepsilon_0 [\Lambda] \mathbf{E}_0^c. \quad (\text{C.18})$$

Considérons le changement de variable :

$$\mathbf{E}_0'^c = [\Lambda]^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}_0^c, \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{H}_0'^c = [\Lambda]^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}_0^c, \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{abc}} [\Lambda]^{\frac{1}{2}} \mathbf{k}. \quad (\text{C.21})$$

Compte tenu de ce changement de variable, les équations d'Helmholtz deviennent :

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}'_0{}^c = 0, \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{H}'_0{}^c = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{k}' \wedge \mathbf{E}'_0{}^c = \omega \mu_0 \mathbf{H}'_0{}^c, \quad (\text{C.24})$$

$$\mathbf{k}' \wedge \mathbf{H}'_0{}^c = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}'_0{}^c. \quad (\text{C.25})$$

Les deux premières équations entraînent que  $\mathbf{k}'$  est normal à  $\mathbf{H}'_0$  et  $\mathbf{E}'_0$ . Les deux autres équations nous donnent alors la relation de dispersion suivante :

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = k_0'^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = k_0. \quad (\text{C.26})$$

Or

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{abc}} [\Lambda]^{1/2} \mathbf{k}, \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{abc}} \left( \sqrt{a} k_u \mathbf{e}_u + \sqrt{b} k_v \mathbf{e}_v + \sqrt{c} k_z \mathbf{e}_z \right), \quad (\text{C.28})$$

et

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = \frac{a k_u^2}{abc} + \frac{b k_v^2}{abc} + \frac{c k_z^2}{abc}, \quad (\text{C.29})$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = \frac{k_u^2}{bc} + \frac{k_v^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab}. \quad (\text{C.30})$$

Ce qui nous donne l'équation de dispersion suivante :

$$k_0 = \frac{k_u^2}{bc} + \frac{k_v^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab}. \quad (\text{C.31})$$

Dont les solutions sont :

$$k_u = k_0 \sqrt{bc} \cos \theta, \quad (\text{C.32})$$

$$k_v = k_0 \sqrt{ac} \sin \theta \sin \phi, \quad (\text{C.33})$$

$$k_z = k_0 \sqrt{ab} \sin \theta \cos \phi. \quad (\text{C.34})$$

Mettons-nous à l'interface entre les deux milieux dans la section plane correspondant à  $z = 0$  qui correspond à  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Le composante de  $k_0$  se simplifie en :

$$k_u = k_0 \sqrt{bc} \cos \theta, \quad (\text{C.35})$$

$$k_v = k_0 \sqrt{ac} \sin \theta, \quad (\text{C.36})$$

$$k_z = 0. \quad (\text{C.37})$$



A l'interface des deux milieux et dans le cas de la polarisation TE, les champs incidents, réfléchis et transmis ont pour expressions :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = E_0 e^{-jk_0(\cos\theta_i u + \sin\theta_i v)} \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.38})$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = R^{TE} E_0 e^{-jk_0(\cos\theta_r u + \sin\theta_r v)} \cos\phi_r \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.39})$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = T^{TE} E_0 e^{-jk_0(\sqrt{bc}\cos\theta_t u + \sqrt{ac}\sin\theta_t v)} \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.40})$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-jk_0(\cos\theta_i u + \sin\theta_i v)} (\sin\phi_i \mathbf{e}_u - \cos\phi_i \mathbf{e}_v), \quad (\text{C.41})$$

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = R^{TE} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-jk_0(\cos\theta_r u + \sin\theta_r v)} (\sin\phi_r \mathbf{e}_u - \cos\phi_r \mathbf{e}_v), \quad (\text{C.42})$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = T^{TE} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-jk_0(\sqrt{bc}\cos\theta_t u + \sqrt{ac}\sin\theta_t v)} \left( \sqrt{\frac{c}{a}} \sin\phi_t \mathbf{e}_u - \sqrt{\frac{c}{b}} \cos\phi_t \mathbf{e}_v \right), \quad (\text{C.43})$$

où  $R^{TE}$  et  $T^{TE}$  sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la polarisation TE.

En considérant la continuité des composantes tangentielles des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  à l'interface  $u = 0$  et en  $v = 0$  nous obtenons les relations :

$$1 + R^{TE} = T^{TE}, \quad (\text{C.44a})$$

$$\cos\phi_i + R^{TE} \cos\phi_r = T^{TE} \sqrt{\frac{c}{b}} \cos\phi_t. \quad (\text{C.44b})$$

Et en considérant que l'équation de continuité du champ électrique en  $u = 0$  :

$$e^{-jk_0 \sin\theta_i v} + R^{TE} e^{-jk_0 \sin\theta_r v} = T^{TE} e^{-jk_0 \sqrt{ac} \sin\theta_t v} \quad (\text{C.45})$$

doit être vrai quelque soit  $v$ , nous obtenons la relation :

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r = \sqrt{ac} \sin\theta_t. \quad (\text{C.46})$$

Les PMLs que nous désirons doivent absorber le champ électromagnétique et ne rien réfléchir dans la zone de simulation, d'où les valeurs des coefficients  $R^{TE} = 0$  et  $T^{TE} = 1$  qui vérifie bien l'équation (C.44a).

L'équation (C.46) nous donne :

$$ac \sin^2 \theta_t = \sin^2 \theta_i, \quad (\text{C.47})$$

$$ac (1 - \cos^2 \theta_t) = 1 - \cos^2 \theta_i. \quad (\text{C.48})$$

$$(\text{C.49})$$

Et compte tenu de l'équation (C.44b) nous obtenons :

$$ac \left( 1 - \frac{b}{c} \cos^2 \theta_i \right) = 1 - \cos^2 \theta_i \quad (\text{C.50})$$

$$\cos^2 \theta_i (1 - ab) = 1 - ac. \quad (\text{C.51})$$

Cette équation doit être valable pour tout les angles d'incidence  $\theta_i$ . Autrement dit, les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent vérifier les relations :

$$ab = 1 \text{ et } ac = 1. \quad (\text{C.52})$$

Que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\alpha = a^{-1} = b = c. \quad (\text{C.53})$$

Pour résumer, le milieu anisotrope a pour permittivité et perméabilités relatives :

$$\frac{[\epsilon^c]_{PML}}{\epsilon^c} = \frac{[\mu^c]_{PML}}{\mu^c} = [\Lambda] = \begin{bmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (\text{C.54})$$



## Annexe D

# Expression des champs normaux à la propagation

Dans cette partie, nous détaillons les calculs menés pour la détermination champs normaux à la propagation selon  $v$  dans le plan conforme. Nous établissons des formules reliant ces différents champs dans l'espace de Fourier. La détermination de ces champs est nécessaire pour la détermination de l'expression du taux de transmission détaillé à l'annexe E ainsi qu'à la mise en cascade des sections détaillée au chapitre 2.5.1.

Nous calculons donc les relations qui lient les composantes  $H_r^{c[t]}$  et  $E_z^{c[t]}$  du champ électromagnétique dans le cas TE et les composantes  $E_r^{c[t]}$  et  $H_z^{c[t]}$  du champ électromagnétique dans le cas TM.

### D.1 Cas de la polarisation TE

Le champ magnétique  $H_r^{c[t]}$  d'une section  $t$  se détermine à partir du champ  $E_z^{c[t]}$  de la même section  $t$  grâce à la deuxième relation du système (2.27) que nous rappelons :

$$H_r^{c[t]} = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}}\frac{\partial E_z^{c[t]}}{\partial v}. \quad (\text{D.1})$$

Notons que selon règles introduite dans à la partie 2.3.4, le produit de Fourier est applicable. D'après les règles de calcul exposé au chapitre 2.3.3, l'expression du vecteur  $\overline{u^{[t]}}$  des coefficients de Fourier de la composante  $H_r^{c[t]}$  du champ magnétique s'exprime de la manière suivante :

$$\overline{u^{[t]}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]}e^{\frac{u}{R}}} \right] \frac{\partial}{\partial v} (\overline{s^{[t]}}). \quad (\text{D.2})$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 2.3.7 L'expression du vecteur  $\overline{s^{[t]}}$  des coefficients de Fourier de  $E_z^{c[t]}$  dans l'espace de Fourier est :

$$\overline{s^{[t]}} = W\overline{s_W^{[t]}} = W \left( P_{v_t}^{+[t]}\overline{s_W^{+[t]}} + P_{v_t}^{-[t]}\overline{s_W^{-[t]}} \right), \quad (\text{D.3})$$

où les matrices  $P_{v_t}^{+[t]}$  et  $P_{v_t}^{-[t]}$  sont les matrices diagonales de propagation dont les  $(q, q)$ -ièmes éléments sont respectivement  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$  et  $e^{+jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$  et où  $n_q^{[t]}$  est l'indice effectif du mode  $q$  de la section  $[t]$ .

La dérivée selon  $v$  du vecteur  $\bar{s}$  s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial v} (\bar{s}^{[t]}) = W^{[t]} \frac{\partial}{\partial v} \left( \bar{s}_W^{[t]} \right) \quad (\text{D.4})$$

$$= W^{[t]} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( P_{v_0}^{+[t]} \bar{s}_W^{+[t]} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( P_{v_0}^{-[t]} \bar{s}_W^{-[t]} \right) \right). \quad (\text{D.5})$$

La dérivée selon  $v$  de la matrice diagonale de propagation  $P_{v_0}^{+[t]}$  est une matrice diagonale. Le  $(q, q)$ -ième élément de cette matrice est  $e^{-jn_q^{[t]}k_0(v-v_t)}$ . Ainsi, nous dérivons tous les termes de ma diagonale par rapport à la variable  $v$ . Nous obtenons ainsi l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( P_{v_0}^{+[t]} \right) = -jk_0 \Lambda^{[t]} P_{v_0}^{+[t]}, \quad (\text{D.6})$$

où  $\Lambda^{[t]}$  est la matrice diagonale dont le  $(q, q)$ -ième élément est l'indice effectif de propagation  $n_q^{[t]}$ . Nous obtenons la même expression au signe près pour dérivée de la matrice  $P_{v_0}^{-[t]}$ . Nous obtenons donc pour la dérivée du vecteur  $\bar{s}^{[t]}$  l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial v} (\bar{s}^{[t]}) = jk_0 W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( -P_{v_0}^{+[t]} \bar{s}_W^{+[t]} + P_{v_0}^{-[t]} \bar{s}_W^{-[t]} \right). \quad (\text{D.7})$$

Compte tenu des relations (D.2) et (D.7), le vecteur  $\bar{u}^{[t]}$  des coefficients de Fourier de la composante  $H_r^{c[t]}$  du champ magnétique s'exprime de la façon suivante :

$$\bar{u}^{[t]} = \frac{k_0}{\omega \mu_0} \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]} e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( P_{v_0}^{+[t]} \bar{s}_W^{+[t]} - P_{v_0}^{-[t]} \bar{s}_W^{-[t]} \right). \quad (\text{D.8})$$

## D.2 Cas de la polarisation TM

Le champ magnétique  $E_r^{c[t]}$  d'une section  $t$  se détermine à partir du champ  $H_z^{c[t]}$  de la même section  $t$  grâce à la deuxième relation du système (2.28) que nous rappelons :

$$E_r^c = \frac{1}{j\omega \epsilon_0 \epsilon_{rr}^c e^{\frac{u}{R}}} \frac{\partial H_z^c}{\partial v}. \quad (\text{D.9})$$

Le calcul du vecteur  $\bar{u}^{[t]}$  des coefficients de Fourier de la composante  $E_r^{c[t]}$  du champ électrique est similaire à celui dans le cas TE et ceci à un signe près et en remplaçant la permittivité

du vide  $\epsilon_0$  avec la perméabilité de vide  $\mu_0$ . L'expression de  $\overline{u^{[t]}}$  est donnée par la relation suivante :

$$\overline{u^{[t]}} = -\frac{k_0}{\omega\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_{rr} e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( P_{v0}^{+[t]} \overline{s_W^{+[t]}} - P_{v0}^{-[t]} \overline{s_W^{-[t]}} \right). \quad (\text{D.10})$$



# Annexe E

## Expression du taux de transmission

Dans cette annexe, nous détaillons les calculs menés pour la détermination du taux de transmission du champ se propageant dans le guide courbe vers les modes guidés du guide droit de sortie.

Nous rappelons l'expression du vecteur de Poynting :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*. \quad (\text{E.1})$$

La puissance du champ sur la section  $Or$  à un point  $\theta$  de la propagation est :

$$P(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \boldsymbol{\pi}(r, \theta) \cdot \mathbf{u}_\theta dr \right\} \quad (\text{E.2})$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*)(r, \theta) \cdot \mathbf{u}_\theta dr \right\}. \quad (\text{E.3})$$

### E.1 Cas de la polarisation TE

Dans le cas de la polarisation TE, la puissance  $P_{i,j}$  croisée entre deux modes  $i$  et  $j$  a pour expression :

$$P_{i,j}(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} E_{zi}(r, \theta) H_{rj}^*(r, \theta) dr \right\}, \quad (\text{E.4})$$

où  $E_{zi}$  est la composante selon  $z$  du champ électrique du mode  $i$  et  $H_{rj}^*(r, \theta)$  est la composante selon  $r$  du champ magnétique du mode  $j$ . Nous opérons un changement de variable dans l'intégrale afin d'obtenir l'expression dans le plan conforme. L'expression la puissance croisée devient :

$$P_{i,j}(v) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} E_{zi}^c(u, v) H_{rj}^{c*}(u, v) e^{\frac{u}{k}} du \right\}. \quad (\text{E.5})$$

En utilisant la relation (D.1), nous obtenons :



$$P_{i,j}(v) = -\frac{1}{2}\text{Re} \left\{ \frac{1}{j\omega\mu_0} \int_0^{-\infty} E_{z_i}^c(u,v) \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c(u)} \frac{\partial E_{z_j}^c}{\partial v}(u,v) \right)^* du \right\}. \quad (\text{E.6})$$

Si une des deux fonctions  $E_{z_i}^c(u,v)$  ou  $E_{z_j}^c(u,v)$  n'existe que dans la zone de simulation et est suffisamment faible en amplitude sur les bords de la zone simulation, en approximation, nous pouvons restreindre l'intégrale (E.6) à l'intervalle  $\Delta u$ . Cette approximation est valide pour les modes guidés d'un guide droit. La puissance  $P_{i,j}$  peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$P_{i,j}(v) = -\frac{1}{2}\text{Re} \left\{ \frac{1}{j\omega\mu_0} \int_{\Delta u} E_{z_i}^c(u,v) \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c(u)} \frac{\partial E_{z_j}^c}{\partial v}(u,v) \right)^* du \right\}. \quad (\text{E.7})$$

Nous pouvons alors y reconnaître l'intégrale de Fourier :

$$P_{i,j}(v) = -\frac{1}{2}\text{Re} \left\{ \frac{1}{j\omega\mu_0} \Delta u \left( \frac{1}{\Delta u} \int_{du} E_{z_i}^c(u,v) \left( \frac{1}{\mu_{rr}^c(u)} \frac{\partial E_{z_j}^c}{\partial v}(u,v) \right)^* du \right) \right\} \quad (\text{E.8})$$

$$P_{i,j}(v) = -\frac{1}{2}\text{Re} \left\{ \frac{\Delta u}{j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) | \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_j}{\partial v}(v) \rangle \right\}, \quad (\text{E.9})$$

où les termes  $\bar{s}_i$  et  $\bar{s}_j$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier des composantes  $E_{z_i}^c$  et  $E_{z_j}^c$  des champs électriques des modes  $i$  et  $j$  dans le plan conforme  $(u,v)$ . Pour la suite et pour plus de clarté, nous abandonnons la notations de la partie réelle  $\text{Re} \{ \}$ .

Dans cette expression,  $\langle \bar{f} | \bar{g} \rangle$  désigne le produit scalaire des composantes des vecteurs  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  défini par :

$$\langle \bar{f} | \bar{g} \rangle = \sum_p f_p g_p^*. \quad (\text{E.10})$$

Dans notre cas, les modes propres de la structure courbe ne s'annulent pas sur les bords de la zone de simulation. Ainsi, si nous ne considérons que ces modes, nous ne pouvons pas restreindre l'intégrale (E.6) au domaine de simulation. Cela dit, nous pouvons restreindre l'intégrale (E.6) cherchons à calculer le couplage des modes propres sur les modes d'un guide droit en entrée ou en sortie si celui-ci est bien représenté dans la zone de simulation.

De plus, si le guide droit d'entrée ou de sortie est multimode, les modes guidés sont orthonormaux entre eux, c'est à dire, que leurs produits croisés au sens de Poynting (E.6) sont nuls pour  $i \neq j$  et vaut 1 pour  $i = j$ . Si la zone de simulation  $\Delta u$  est suffisamment large pour décrire tous les modes, l'orthonormalité est conservée et nous pouvons restreindre l'intégrale (E.6) au domaine  $\Delta u$  de simulation.

Regardons maintenant le couplage du guide courbe avec un guide droit en sortie. Considérons un champ électrique quelconque de composante  $E_z^c$  dans la zone de simulation du guide courbe. Ce champ peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux champs : une partie correspondant au champ qui se couple au modes guidés du guide droit et une partie rayonnée. Dans

l'espace de Fourier, ce champ a pour représentation le vecteur  $\bar{s}$  de ses composantes de Fourier. Ce vecteur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\bar{s} = \bar{s}_t + \bar{s}_a, \quad (\text{E.11})$$

où  $\bar{s}_t$  correspond au vecteur des composantes de Fourier du champ couplé au modes guidés du guide droit et  $\bar{s}_a$  correspond au vecteur des composantes de Fourier du champ couplé aux autres modes du guide droit. Nous pouvons écrire :

$$\bar{s}_t = \sum_j T_j \bar{s}_j, \quad (\text{E.12})$$

où les  $\bar{s}_i$  sont les vecteurs des composantes de Fourier des modes guidés du guide droit et le facteurs  $T_i$  est le coefficient de transmission en amplitude du champ du guide courbe au mode guidé  $i$  du guide droit. Dans le cas du champ transmis, nous ne tenons compte que des termes propagatifs. En tenant compte de la relation (E.9), la puissance totale portée par le champ peut s'écrire de la façon suivante :

$$P(v) = -\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}}{\partial v}(v) \rangle \quad (\text{E.13})$$

$$P(v) = -\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \left\langle \left( \sum_i T_i \bar{s}_i(v) + \bar{s}_a(v) \right) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial (\sum_j T_j \bar{s}_j(v) + \bar{s}_a(v))}{\partial v}(v) \right\rangle. \quad (\text{E.14})$$

Dans cette expression, nous remarquons que nous opérons plusieurs produits scalaires. En supposant que l'orthonormalité est conservée, les produits scalaires faisant intervenir les modes guidés  $\bar{s}_i$  et les autres modes  $\bar{s}_a$  s'annulent. Il ne reste alors que les termes suivants :

$$P(v) = -\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \left\langle \sum_i T_i \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \sum_j T_j \bar{s}_j(v)}{\partial v}(v) \right\rangle \quad (\text{E.15})$$

$$-\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_a(v) | \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_a}{\partial v}(v) \rangle. \quad (\text{E.16})$$

Nous obtenons donc un premier terme faisant intervenir les modes guidés et un deuxième terme faisant intervenir les autres modes. En considérant l'orthonormalité des modes guidés, le premier terme se simplifie. L'expression de la puissance  $P(v)$  est la suivante :

$$P(v) = -\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \sum_i T_i \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial T_i \bar{s}_i(v)}{\partial v}(v) \rangle - \frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_a(v) | \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_a}{\partial v}(v) \rangle \quad (\text{E.17})$$

$$= -\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \sum_i T_i T_i^* \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_i(v)}{\partial v}(v) \rangle - \frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_a(v) | \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_a}{\partial v}(v) \rangle \quad (\text{E.18})$$

$$= P_t(v) + P_a(v). \quad (\text{E.19})$$

Dans cette formule, nous remarquons deux termes : l'un est lié à la puissance transmise  $P_t(v)$  au modes guidés du guide droit, l'autre est liée à la puissance transmise  $P_a(v)$  aux autre modes. Comme les modes  $i$  du guide droit sont normés, nous pouvons poser que :

$$-\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_i(v)}{\partial v} \rangle = 1. \quad (\text{E.20})$$

Et l'expression de la puissance  $P(v)$  devient :

$$P(v) = \sum_i |T_i|^2 + P_a(v). \quad (\text{E.21})$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer le coefficient  $T_i$  de transmission en amplitude. Pour cela nous regardons le produit scalaire entre un mode guidé  $i$  et le champ total donné par la relation suivante :

$$\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}}{\partial v} \rangle = \frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_t}{\partial v} \rangle \quad (\text{E.22})$$

$$= \frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_t + \bar{s}_a}{\partial v} \rangle \quad (\text{E.23})$$

$$= \frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \sum_j T_j \bar{s}_j}{\partial v} \rangle \quad (\text{E.24})$$

$$= \sum_j T_j^* \frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_j}{\partial v} \rangle. \quad (\text{E.25})$$

Comme nous avons supposé les modes guidés orthonormaux, l'expression se simplifie :

$$\frac{\Delta u}{2j\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) \cdot \frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_t}{\partial v} \rangle = T_i^*. \quad (\text{E.26})$$

Selon les calculs effectués dans la partie précédente D.1 et en ne tenant compte que du champ propagatif, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu_{rr}^c} \frac{\partial \bar{s}_t}{\partial v} = -jk_0 \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]} e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( P_{v_0}^{+[t]} \overline{s_{Wt}^{+[t]}} \right). \quad (\text{E.27})$$

Ce qui nous donne finalement pour le taux de transmission en amplitude la relation suivante

$$T_i^* = -\frac{k_0 \Delta u}{2\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) | \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]} e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( P_{v_0}^{+[t]} \overline{s_{Wt}^{+[t]}} \right) \bar{s}_t \rangle. \quad (\text{E.28})$$

La puissance transmise  $P_t(v)$  aux modes du guide droit en sortie a donc finalement pour expression :

$$P_t(v) = \sum_i |T_i|^2 = \sum_i \left| \frac{k_0 \Delta u}{2\omega\mu_0} \langle \bar{s}_i(v) | \left[ \frac{1}{\mu_{rr}^{c[t]} e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( P_{v_0}^{+[t]} \overline{s_{Wt}^{+[t]}} \right) \right|^2. \quad (\text{E.29})$$

## E.2 Cas de la polarisation TM

Le calcul de puissance transmise dans le cas TM est similaire au calcul précédent. La puissance transmise  $P_t(\nu)$  aux modes du guide droit en sortie est donnée par la relation suivante :

$$P_t(\nu) = \sum_i |T_i|^2 = \sum_i \left| \frac{k_0 \Delta u}{2\omega \epsilon_0} \langle \bar{s}_i(\nu) | \left[ \frac{1}{\epsilon_{rr}^{[t]} e^{\frac{u}{R}}} \right] W^{[t]} \Lambda^{[t]} \left( P_{\nu_0}^{+[t]} \overline{s_{\text{wt}}^{+[t]}} \right) \rangle \right|^2. \quad (\text{E.30})$$



# Annexe F

## Formalisme de l'algorithme en matrice-S

Nous détaillons, dans cette section, les calculs menés pour mettre en place la formulation matricielle du problème. Nous adoptons l'algorithme en matrice-S décrit par Lifeng Li [59].

### F.1 Détermination des relations d'entrée et sortie d'une section

Nous cherchons ici à exprimer les vecteurs d'amplitude des modes propres de sortie  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t+1]}}$  et  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t]}}$  d'une section  $[t]$  en fonction des vecteurs d'amplitude des modes propres d'entrée  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t]}}$  et  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t+1]}}$  de la même section  $[t]$ . Ces calculs sont identiques en TE et en TM à condition de bien considérer les espaces propres de chaque polarisation. Nous partons du système suivant :

$$\begin{cases} W^{[t+1]} \left( \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t+1]}} + P^{[t+1]} \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t+1]}} \right) = W^{[t]} \left( P^{[t]} \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t]}} + \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t]}} \right) \\ V^{[t+1]} \left( \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t+1]}} - P^{[t+1]} \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t+1]}} \right) = V^{[t]} \left( P^{[t]} \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t]}} - \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t]}} \right) \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Et nous considérons la formulation :

$$\begin{pmatrix} \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t+1]}} \\ \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t]}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{++}^{[t]} & r_{+-}^{[t]} \\ r_{-+}^{[t]} & t_{--}^{[t]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t]}} \\ \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t+1]}} \end{pmatrix} = b^{[t]} \begin{pmatrix} \overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t]}} \\ \overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t+1]}} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.2})$$

où les matrices  $t_{++}^{[t]}$ ,  $r_{+-}^{[t]}$ ,  $r_{-+}^{[t]}$  et  $t_{--}^{[t]}$  sont les matrices de réflexion et de transmission des modes propagatifs et contra-propagatifs de la section  $t$ .

#### F.1.1 Détermination des matrices $t_{++}^t$ et $r_{+-}^t$

Dans un premier temps, nous cherchons les matrices  $t_{++}^t$  et  $r_{+-}^t$ , c'est-à-dire, à exprimer les vecteurs  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t+1]}}$  en fonction des vecteurs  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{+[t]}}$  et  $\overline{s_{\mathbf{W}}^{-[t+1]}}$ . Le système (F.2) nous donne :

$$\begin{cases} W^{[t+1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} + W^{[t+1]} P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} = W^{[t]} P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + W^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}} \\ V^{[t+1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} - V^{[t+1]} P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} = V^{[t]} P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} - V^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}} \end{cases}, \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{cases} W^{[t+1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} - W^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}} = W^{[t]} P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} - W^{[t+1]} P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \\ V^{[t+1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} + V^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}} = V^{[t]} P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + V^{[t+1]} P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{cases}. \quad (\text{F.4})$$

En multipliant la première équation par  $W^{[t]-1}$ , la deuxième par  $V^{[t]-1}$  et sommant ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left( W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right) \overline{s_W^{+[t]}} \\ &= \left( W^{[t]-1} W^{[t]} + V^{[t]-1} V^{[t]} \right) P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} \\ & \quad + \left( -W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right) P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$= 2P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + \left( -W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right) P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.6})$$

Dont nous pouvons extraire les matrices  $t_{++}^t$  et  $r_{+-}^t$  recherchées :

$$t_{++}^t = 2 \left( W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right)^{-1} P^{[t]} \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{aligned} r_{+-}^t &= \left( W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right)^{-1} \\ & \quad \left( -W^{[t]-1} W^{[t+1]} + V^{[t]-1} V^{[t+1]} \right) P^{[t+1]}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

### F.1.2 Détermination des matrices $r_{-+}^t$ et $t_{--}^t$

Nous cherchons maintenant les matrices  $r_{-+}^t$  et  $t_{--}^t$ , c'est-à-dire, à exprimer le vecteur  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$  en fonction des vecteurs  $\overline{s_W^{+[t]}}$  et  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$ . Le système (F.2) nous donne :

$$\begin{cases} W^{[t+1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} - W^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}} = W^{[t]} P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} - W^{[t+1]} P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \\ V^{[t+1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} + V^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}} = V^{[t]} P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + V^{[t+1]} P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{cases}. \quad (\text{F.9})$$

En multipliant la première équation par  $-W^{[t+1]-1}$ , la deuxième par  $V^{[t+1]-1}$  et sommant ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left( W^{[t+1]-1} W^{[t]} + V^{[t+1]-1} V^{[t]} \right) \overline{s_W^{+[t]}} \\ &= \left( -W^{[t+1]-1} W^{[t]} + V^{[t+1]-1} V^{[t]} \right) P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} \\ & \quad + \left( W^{[t+1]-1} W^{[t+1]} + V^{[t+1]-1} V^{[t+1]} \right) P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$$= \left( -W^{[t+1]-1} W^{[t]} + V^{[t+1]-1} V^{[t]} \right) P^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + 2P^{[t+1]} \overline{s_W^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.11})$$

Dont nous pouvons extraire les matrices  $r_{-+}^t$  et  $t_{--}^t$  recherchées :

$$r_{-+}^{[t]} = \left( W^{[t+1]-1}W^{[t]} + V^{[t+1]-1}V^{[t]} \right)^{-1} \left( -W^{[t+1]-1}W^{[t]} + V^{[t+1]-1}V^{[t]} \right) P^{[t]}, \quad (\text{F.12})$$

$$t_{--}^{[t]} = 2 \left( W^{[t+1]-1}W^{[t]} + V^{[t+1]-1}V^{[t]} \right)^{-1} P^{[t+1]}. \quad (\text{F.13})$$

### F.1.3 Résumé de la formulation matricielle

Pour résumer, la formulation matricielle est :

$$\begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t+1]}} \\ \overline{s_W^{-[t]}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{++}^{[t]} & r_{+-}^{[t]} \\ r_{-+}^{[t]} & t_{--}^{[t]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix} = b^{[t]} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.14})$$

où les matrices  $t_{++}^t$ ,  $r_{+-}^t$ ,  $r_{-+}^t$  et  $t_{--}^t$  s'expriment :

$$t_{++}^{[t]} = 2 \left( W^{[t]-1}W^{[t+1]} + V^{[t]-1}V^{[t+1]} \right)^{-1} P^{[t]}, \quad (\text{F.15})$$

$$r_{+-}^{[t]} = \left( W^{[t]-1}W^{[t+1]} + V^{[t]-1}V^{[t+1]} \right)^{-1} \left( -W^{[t]-1}W^{[t+1]} + V^{[t]-1}V^{[t+1]} \right) P^{[t+1]}, \quad (\text{F.16})$$

$$r_{-+}^{[t]} = \left( W^{[t+1]-1}W^{[t]} + V^{[t+1]-1}V^{[t]} \right)^{-1} \left( -W^{[t+1]-1}W^{[t]} + V^{[t+1]-1}V^{[t]} \right) P^{[t]}, \quad (\text{F.17})$$

$$t_{--}^{[t]} = 2 \left( W^{[t+1]-1}W^{[t]} + V^{[t+1]-1}V^{[t]} \right)^{-1} P^{[t+1]}. \quad (\text{F.18})$$

## F.2 Détermination des relations d'entrée et sortie du système

Nous cherchons maintenant à exprimer les vecteurs d'amplitude des modes propres de sortie  $\overline{s_W^{+[t+1]}}$  et  $\overline{s_W^{-[0]}}$  du système en fonction des vecteurs d'amplitude des modes propres d'entrée  $\overline{s_W^{+[0]}}$  et  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$ . Nous partons du système (F.14) et nous cherchons la formulation :

$$\begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t+1]}} \\ \overline{s_W^{-[0]}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{++}^{[t]} & R_{+-}^{[t]} \\ R_{-+}^{[t]} & T_{--}^{[t]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[0]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix} = B^{[t]} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[0]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.19})$$

où les matrices  $T_{++}^{[t]}$ ,  $R_{+-}^{[t]}$ ,  $R_{-+}^{[t]}$  et  $T_{--}^{[t]}$  sont les matrices de réflexion et transmission globales du système des  $t$  sections.

Nous cherchons à déterminer les matrices  $T_{++}^{[t]}$ ,  $R_{+-}^{[t]}$ ,  $R_{-+}^{[t]}$  et  $T_{--}^{[t]}$ . Nous partons des 6 équations suivantes obtenues des deux systèmes (F.14) et (F.19) :



$$\overline{s_W^{+[t+1]}} = t_{++}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + r_{+-}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.20a})$$

$$\overline{s_W^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.20b})$$

$$\overline{s_W^{+[t+1]}} = T_{++}^{[t]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.20c})$$

$$\overline{s_W^{-[0]}} = R_{-+}^{[t]} \overline{s_W^{+[0]}} + T_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t]}}, \quad (\text{F.20d})$$

$$\overline{s_W^{+[t]}} = T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t]}}, \quad (\text{F.20e})$$

$$\overline{s_W^{-[0]}} = R_{-+}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + T_{--}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t]}}. \quad (\text{F.20f})$$

### F.2.1 Détermination des matrices $T_{++}^{[t]}$ et $R_{+-}^{[t]}$

Dans un premier temps, nous cherchons les matrices  $T_{++}^{[t]}$  et  $R_{+-}^{[t]}$ , c'est-à-dire, à exprimer le vecteur  $\overline{s_W^{+[t+1]}}$  en fonction des vecteurs  $\overline{s_W^{+[0]}}$  et  $\overline{s_W^{-[t+1]}}$ . Des équations (F.20e) et (F.20b), nous obtenons :

$$\overline{s_W^{+[t]}} = T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t]}}, \quad (\text{F.21})$$

$$\overline{s_W^{+[t]}} = T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} \left( r_{-+}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right), \quad (\text{F.22})$$

$$\overline{s_W^{+[t]}} = T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.23})$$

$$\left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right) \overline{s_W^{+[t]}} = T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.24})$$

Compte tenu de l'équation (F.20a) que nous remanions :

$$\overline{s_W^{+[t+1]}} = t_{++}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} + r_{+-}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.25})$$

$$t_{++}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} = \overline{s_W^{+[t+1]}} - r_{+-}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.26})$$

$$t_{++}^{[t]} \overline{s_W^{+[t]}} = \overline{s_W^{+[t+1]}} - r_{+-}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.27})$$

$$\overline{s_W^{+[t]}} = t_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} - t_{++}^{[t-1]} r_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.28})$$

Nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} & \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right) \left( t_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[t+1]}} - t_{++}^{[t-1]} r_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right) \\ &= T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

$$\left( t_{++}^{[t]-1} \overline{s_W^{+[t+1]}} - t_{++}^{[t]-1} r_{+-}^{[t]-1} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right) = \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.30})$$

$$+ \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.31})$$

$$\left( t_{++}^{[t]-1} \overline{s_W^{+[t+1]}} - t_{++}^{[t]-1} r_{+-}^{[t]-1} \overline{s_W^{-[t+1]}} \right) = \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.32})$$

$$+ \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.33})$$

$$t_{++}^{[t]-1} \overline{s_W^{+[t+1]}} = \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.34})$$

$$+ \left( \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} + t_{++}^{[t]-1} r_{+-}^{[t]-1} \right) \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.35})$$

$$\overline{s_W^{+[t+1]}} = t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.36})$$

$$+ \left( t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} + r_{+-}^{[t]-1} \right) \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.37})$$

$$\overline{s_W^{+[t+1]}} = t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.38})$$

$$+ \left( t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} + r_{+-}^{[t]-1} \right) \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.39})$$

Dont nous pouvons extraire les matrices  $T_{++}^{[t]}$  et  $R_{+-}^{[t]}$  recherchés :

$$T_{++}^{[t]} = t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]} \quad (\text{F.40})$$

$$R_{+-}^{[t]} = \left( t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} + r_{+-}^{[t]-1} \right) \quad (\text{F.41})$$

## F.2.2 Détermination des matrices $R_{-+}^{[t]}$ et $T_{--}^{[t]}$

Nous cherchons les matrices  $R_{-+}^{[t]}$  et  $T_{--}^{[t]}$ , c'est-à-dire, à exprimer le vecteur  $\vec{s}_W^{-[0]}$  en fonction des vecteurs  $\vec{s}_W^{+[0]}$  et  $\vec{s}_W^{-[t+1]}$ . Des équations (F.20e) et (F.20b), nous obtenons :

$$\overline{s_W^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} \left( T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t]}} \right) + t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.42})$$

$$\overline{s_W^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \overline{s_W^{-[t]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.43})$$

$$\left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right) \overline{s_W^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}} \quad (\text{F.44})$$

$$\overline{s_W^{[t]}} = \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.45})$$

Que nous substituons dans l'équation (F.20f) :

$$\overline{s_W^{+[0]}} = R_{-+}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + T_{--}^{[t-1]} \overline{s_W^{[t]}}, \quad (\text{F.46})$$

$$\overline{s_W^{+[0]}} = R_{-+}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} + T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.47})$$

$$+ T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.48})$$

$$\overline{s_W^{+[0]}} = \left( R_{-+}^{[t-1]} + T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \right) \overline{s_W^{+[0]}} \quad (\text{F.49})$$

$$+ T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} t_{--}^{[t]} \overline{s_W^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.50})$$

Dont nous pouvons extraire les matrices  $R_{-+}^{[t]}$  et  $T_{--}^{[t]}$  recherchés :

$$R_{-+}^{[t]} = R_{-+}^{[t-1]} + T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]}, \quad (\text{F.51})$$

$$T_{--}^{[t]} = T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} t_{--}^{[t]}. \quad (\text{F.52})$$

### F.2.3 Résumé de la formulation matricielle

Pour résumer, la formulation matricielle est :

$$\begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[t+1]}} \\ \overline{s_W^{+[0]}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{++}^{[t]} & R_{+-}^{[t]} \\ R_{-+}^{[t]} & T_{--}^{[t]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[0]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix} = B^{[t]} \begin{pmatrix} \overline{s_W^{+[0]}} \\ \overline{s_W^{-[t+1]}} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.53})$$

où les matrices

$$T_{++}^{[t]} = t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} T_{++}^{[t-1]}, \quad (\text{F.54})$$

$$R_{+-}^{[t]} = \left( t_{++}^{[t]} \left( I - R_{+-}^{[t-1]} r_{-+}^{[t]} \right)^{-1} R_{+-}^{[t-1]} t_{--}^{[t]} + r_{+-}^{[t-1]} \right), \quad (\text{F.55})$$

$$R_{-+}^{[t]} = R_{-+}^{[t-1]} + T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]}, \quad (\text{F.56})$$

$$T_{--}^{[t]} = T_{--}^{[t-1]} \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} t_{--}^{[t]}, \quad (\text{F.57})$$

avec

$$B^{[1]} = b^{[1]} = \begin{pmatrix} t_{++}^{[1]} & r_{+-}^{[1]} \\ r_{-+}^{[1]} & t_{--}^{[1]} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.58})$$

### F.3 Expression des amplitudes des modes propres

Pour la détermination le vecteur d'amplitudes des modes propres contra-propagatif, nous nous servons encore une fois des relations (F.20b) et (F.20e) :

$$\overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{+[t]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.59})$$

$$\overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} \left( T_{++}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{+[0]}} + R_{+-}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} \right) + t_{--}^{[t]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.60})$$

$$\overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{+[0]}} + r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t+1]}}, \quad (\text{F.61})$$

$$\left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right) \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} = r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{+[0]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t+1]}}. \quad (\text{F.62})$$

Pour obtenir la relation du vecteur  $\overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}}$  en fonction des vecteurs  $\overline{s_{\mathbb{W}}^{+[0]}}$  et  $\overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t+1]}}$  :

$$\overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}} = \left( I - r_{-+}^{[t]} R_{+-}^{[t-1]} \right)^{-1} \left( r_{-+}^{[t]} T_{++}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{+[0]}} + t_{--}^{[t]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t+1]}} \right). \quad (\text{F.63})$$

Puis nous déterminons le vecteur  $\overline{s_{\mathbb{W}}^{+[t]}}$  des modes propres propagatifs de la même section en utilisant la relation matricielle (F.14) :

$$\overline{s_{\mathbb{W}}^{+[t]}} = t_{++}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{+[t-1]}} + r_{+-}^{[t-1]} \overline{s_{\mathbb{W}}^{-[t]}}. \quad (\text{F.64})$$



# Annexe G

## Théorème de Helmholtz-Kirchhoff dans le plan

Dans ce chapitre, nous adaptons le théorème d'Helmholtz-Kirchhoff afin de l'appliquer dans le guide plan.

### G.1 Théorème d'Helmholtz-Kirchhoff

Soit  $f$  et  $g$  deux champs scalaires du vecteur  $\mathbf{r}$  intégrables sur un volume  $W$ . Pour un volume  $V$  inclus dans le volume  $W$ , défini par une surface fermée  $S$ , le théorème de Green s'exprime :

$$\oiint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV. \quad (\text{G.1})$$

Afin de se ramener au problème dans le plan, nous décomposons la surface fermée  $S$  en trois surfaces ouvertes : une surface latérale  $S_L$ , une surface haute  $S_+$  et une surface basse  $S_-$ , nous posons que le volume  $V = hS_+$  et l'élément de surface  $d\mathbf{S}_L = h d\mathbf{l}$  comme le décrit la figure G.1.

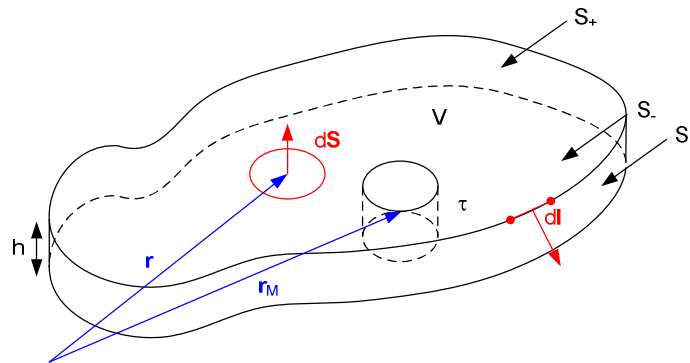


FIG. G.1 – Schéma du domaine d'application du théorème

En reprenant l'équation (G.1) et en l'appliquant à la nouvelle structure, nous obtenons l'équation :

$$\iint_{S_+} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}_+ + \iint_{S_-} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}_- \quad (\text{G.2})$$

$$+ \iint_{S_L} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}_L = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV. \quad (\text{G.3})$$

En tenant compte des simplifications, nous obtenons :

$$\iint_{S_+} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}_+ + \iint_{S_-} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}_- \quad (\text{G.4})$$

$$+ \int_{C_L} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot h d\mathbf{l} = \iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) h dS_+, \quad (\text{G.5})$$

où  $C_L$  est le contour orienté de la surface  $S$ . Les surfaces ouvertes  $S_+$  et  $S_-$  étant exactement opposées, l'équation se simplifie en :

$$\int_{C_L} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot h d\mathbf{l} = \iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) h dS_+. \quad (\text{G.6})$$

Nous simplifions par  $h$ , nous renommons la surface  $S_+$  en  $S$ . Nous obtenons l'expression du théorème de Green appliqué au cas décrit par la figure G.2 :

$$\oint_{C_L} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dS. \quad (\text{G.7})$$

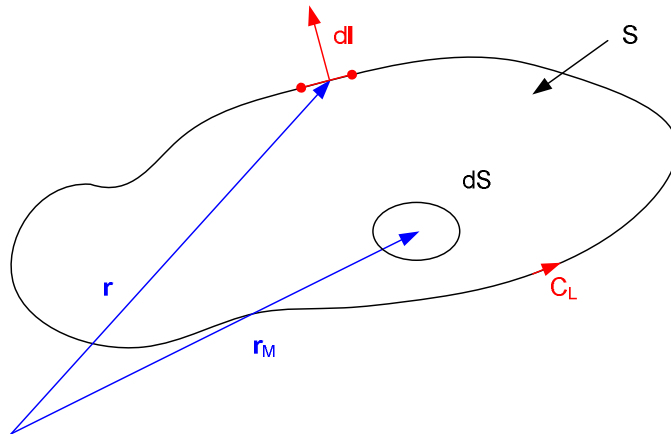


FIG. G.2 – Schéma du domaine d'application du théorème de Green plan 2D

Dans notre cas 2D, les solutions harmoniques de l'équation d'onde sont des fonctions du type cylindrique centrées au point  $\mathbf{r}_M$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :

$$g(\mathbf{r}) = H_0^{(2)}(k \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|). \quad (\text{G.8})$$

Nous calculons  $\nabla^2 g$  pour  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_M$ . Comme  $g$  est une solution de l'équation d'onde, nous pouvons directement écrire :

$$\nabla^2 g = -k^2 g. \quad (\text{G.9})$$

La fonction  $g$  présente une singularité au point  $\mathbf{r}_M$ . Pour la déterminer, nous calculons l'intégrale de  $\nabla^2 g$  à l'intérieur d'un disque de rayon  $\varepsilon$  que nous ferons tendre vers 0 comme le montre la figure G.3.

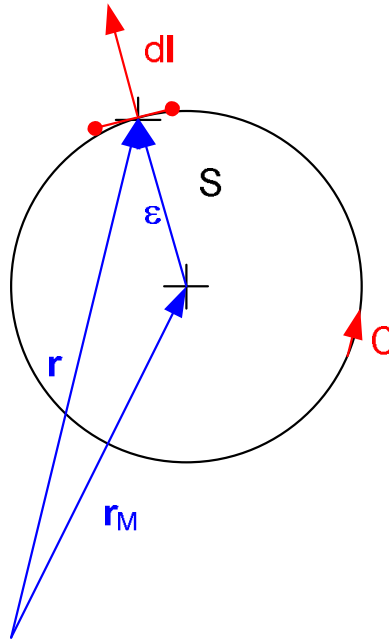


FIG. G.3 – Schéma du calcul pour le point de singularité

Nous pouvons alors écrire l'intégrale  $I$  autour du point de singularité  $\mathbf{r}_M$  :

$$I(\varepsilon) = \iint_S \nabla^2 g dS = \oint_C \nabla g \cdot d\mathbf{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} -kH_1^{(2)}(k \cdot \varepsilon) \varepsilon d\theta = -k\varepsilon H_1^{(2)}(k \cdot \varepsilon) 2\pi. \quad (\text{G.10})$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, nous obtenons la valeur de  $I$  :

$$I(\varepsilon) = -2\pi k \varepsilon H_1^{(2)}(k \cdot \varepsilon) \rightarrow -2\pi \left( -\frac{2j}{\pi} \right) = 4j. \quad (\text{G.11})$$

Nous pouvons écrire :



$$\nabla^2 g = -k^2 g + 4i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M), \quad (\text{G.12})$$

où  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)$  est la distribution de Dirac.

Nous revenons maintenant au volume  $V$  introduit au début du chapitre. Nous considérons que ce volume est homogène et sans obstacle. Nous supposons que l'onde  $f$  monochromatique de fréquence  $\omega$  est solution de l'équation d'onde. Nous avons alors :

$$\nabla^2 f = -\left(\frac{\omega}{v_f}\right)^2 f = -k^2 f, \quad (\text{G.13})$$

où  $v_f$  est la vitesse de l'onde  $f$  dans le milieu. Compte tenu des expressions de  $f$  (G.13) et de  $g$  (G.12), l'équation de Green (G.7) devient :

$$\iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dS = \iint_S (f(\mathbf{r}) (-k^2 g(\mathbf{r}) + 4i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)) \quad (\text{G.14})$$

$$-g(\mathbf{r}) (-k^2 f(\mathbf{r}))) dS, \quad (\text{G.15})$$

$$\iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dS = 4j \iint_S f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) dS, \quad (\text{G.16})$$

$$\iint_S (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dS = 4jf(\mathbf{r}_M). \quad (\text{G.17})$$

Le terme de gauche peut s'exprimer :

$$\oint_{C_L} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_L} (f\nabla g) \cdot d\mathbf{l} - \oint_{C_L} (g\nabla f) \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{G.18})$$

Dont nous calculons l'élément :

$$\nabla g \cdot d\mathbf{l} = \nabla \left( H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \right) \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{G.19})$$

$$\nabla g \cdot d\mathbf{l} = -H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \nabla (k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{G.20})$$

$$\nabla g \cdot d\mathbf{l} = -kH_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{G.21})$$

$$\nabla g \cdot d\mathbf{l} = -kH_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|}. \quad (\text{G.22})$$

Nous obtenons au final l'expression du théorème d'Helmholtz-Kirchhoff dans le cas 2D :

$$4if(\mathbf{r}_M) = -k \oint_{C_L} f H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} - \oint_{C_L} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \nabla f \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{G.23})$$

Cette expression nous permet d'obtenir le champ scalaire  $f$  en un point  $\mathbf{r}_M$  à l'intérieur d'un cercle fermé  $C_L$  à condition de connaître sa valeur sur tout ce cercle.

## G.2 Application à la structure courbe

Dans cette partie, nous appliquons la formule (G.23) à notre structure. Nous cherchons à modéliser le champ électromagnétique sur un arc de rayon  $L$  à partir du champ présent sur l'arc d'intégration de rayon  $R_I$ . Ces arcs ont le même centre. Le champ sur l'arc de rayon  $R_I$  est modélisé par le modèle AFFM développé au chapitre 2.

Nous considérons un arc de détecteurs de rayon  $L$  et de même centre que l'arc d'intégration de rayon  $R_I$ . Cet arc de détecteurs est décrit par le vecteur  $\mathbf{r}_M$  qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$  et dont la norme est constante et égale à  $L$ . La figure G.4 résume les notations employées.

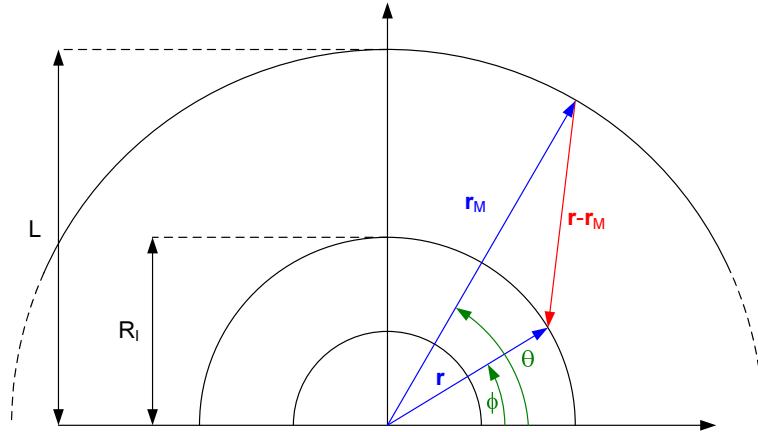


FIG. G.4 – Schéma de la structure

Rappelons la formule (G.23) précédemment déterminée :

$$4If(\mathbf{r}_M) = -k \oint_{C_L} f H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \quad (\text{G.24})$$

$$- \oint_{C_L} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \nabla f \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{G.25})$$

Exprimons les différents vecteurs  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_M$  et  $d\mathbf{l}$  :

$$\mathbf{r} = R_I \mathbf{u}_r, \quad (\text{G.26})$$

$$\mathbf{r}_M = L \mathbf{u}_{r_M}, \quad (\text{G.27})$$

$$d\mathbf{l} = -R_I d\phi \mathbf{u}_r. \quad (\text{G.28})$$

Exprimons  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|$  :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \quad (\text{G.29})$$

$$= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_M + \mathbf{r}_M \cdot \mathbf{r}_M \quad (\text{G.30})$$

$$= (R_I \mathbf{u}_r) \cdot (R_I \mathbf{u}_r) - 2(R_I \mathbf{u}_r) \cdot (L \mathbf{u}_{r_M}) + (L \mathbf{u}_{r_M}) \cdot (L \mathbf{u}_{r_M}) \quad (\text{G.31})$$

$$= R_I^2 + L^2 - 2R_I L \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{r_M}, \quad (\text{G.32})$$

où

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{r_M} = (\cos(\phi)\mathbf{u}_x + \sin(\phi)\mathbf{u}_y) \cdot (\cos(\theta)\mathbf{u}_x + \sin(\theta)\mathbf{u}_y) \quad (\text{G.33})$$

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{r_M} = \cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta) \quad (\text{G.34})$$

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{r_M} = \cos(\phi - \theta). \quad (\text{G.35})$$

Ce qui donne finalement :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| = \sqrt{R_I^2 + L^2 - 2R_IL\cos(\phi - \theta)}. \quad (\text{G.36})$$

Exprimons  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot d\mathbf{l}$  :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{r}_M \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{G.37})$$

$$= (R_I\mathbf{u}_r) \cdot (-R_I d\phi \mathbf{u}_r) - (L\mathbf{u}_{r_M}) \cdot (-R_I d\phi \mathbf{u}_r) \quad (\text{G.38})$$

$$= -R_I^2 d\phi \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r + R_IL d\phi \mathbf{u}_{r_M} \cdot \mathbf{u}_r \quad (\text{G.39})$$

$$= -R_I^2 d\phi + R_IL d\phi \cos(\phi - \theta) \quad (\text{G.40})$$

$$= R_I(-R_I + L\cos(\phi - \theta)) d\phi. \quad (\text{G.41})$$

Exprimons  $\nabla f \cdot d\mathbf{l}$  :

$$\nabla f \cdot d\mathbf{l} = \left( \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi)\mathbf{u}_r + \frac{1}{R_I} \frac{\partial f}{\partial \phi}(R_I, \phi)\mathbf{u}_\phi \right) \cdot (-R_I d\phi \mathbf{u}_r) \quad (\text{G.42})$$

$$\nabla f \cdot d\mathbf{l} = \left( \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi)\mathbf{u}_r \right) \cdot (-R_I d\phi \mathbf{u}_r) \quad (\text{G.43})$$

$$\nabla f \cdot d\mathbf{l} = -R_I \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) d\phi. \quad (\text{G.44})$$

Compte tenu de ces expressions, compte tenu du fait qu'il y a du champ seulement sur l'arc et compte tenu du sens d'intégration du contour  $C_L$ , la formule (G.23) devient :

$$4j f(L, \theta) = -k \int_{\phi=\pi}^{\phi=0} f(R_I, \phi) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{R_I(-R_I + L\cos(\phi - \theta)) d\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \quad (\text{G.45})$$

$$- \int_{\phi=\pi}^{\phi=0} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \left( -R_I \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) \right) d\phi. \quad (\text{G.46})$$

Nous obtenons l'expression du champ  $f$  au point  $\mathbf{r}_M$  :

$$f(L, \theta) = -\frac{kR_I}{4j} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} f(R_I, \phi) H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{R_I - L\cos(\phi - \theta) d\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \quad (\text{G.47})$$

$$- \frac{R_I}{4j} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) d\phi, \quad (\text{G.48})$$

où  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| = \sqrt{R_I^2 + L^2 - 2R_IL\cos(\phi - \theta)}$ . Cette formule est valable partout dans le demi-espace  $y > 0$  défini hors du demi-disque d'intégration.

### G.2.1 Approximation des fonctions de Hankel

Pour de grands arguments, à savoir  $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \gg 1$ , nous pouvons simplifier les fonctions de Hankel par leur formes asymptotiques :

$$H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|}} e^{-j(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| - \frac{1}{4}\pi)}, \quad (\text{G.49})$$

$$H_1^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|}} e^{-j(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| - \frac{3}{4}\pi)}. \quad (\text{G.50})$$

L'expression du champ devient alors :

$$\begin{aligned} f(L, \theta) &= -\frac{kR_I}{4j} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} f(R_I, \phi) \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|}} e^{-j(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| - \frac{3}{4}\pi)} \frac{R_I - L \cos(\phi - \theta) d\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \\ &\quad - \frac{R_I}{4j} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|}} e^{-j(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| - \frac{1}{4}\pi)} \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) d\phi, \\ f(L, \theta) &= -\frac{kR_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} f(R_I, \phi) \frac{e^{-j(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| - \frac{3}{4}\pi)} R_I - L \cos(\phi - \theta) d\phi}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \\ &\quad - \frac{R_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{e^{-j(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| - \frac{1}{4}\pi)} \partial f}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} \partial r}(R_I, \phi) d\phi. \end{aligned}$$

### G.2.2 Approximation sur la distance des détecteurs

Si la ligne de détecteurs est suffisamment loin du cercle d'intégration, c'est-à-dire,  $L \gg R_I$  nous pouvons faire l'approximation :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| = L \sqrt{1 + \frac{R_I^2}{L^2} - 2 \frac{R_I}{L} \cos(\phi - \theta)} \quad (\text{G.51})$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \approx L \left( 1 - \frac{R_I}{L} \cos(\phi - \theta) \right) \quad (\text{G.52})$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \approx L - R_I \cos(\phi - \theta). \quad (\text{G.53})$$

Nous pouvons faire l'approximation  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| \approx L$  dans les termes d'amplitude. En revanche, nous ne pouvons pas faire cette approximation dans le terme de phase sous peine de perdre l'information liée à l'intégration. La formule devient alors :

$$\begin{aligned}
f(L, \theta) &= -\frac{kR_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} f(R_I, \phi) \frac{e^{-j(k(L-R_I \cos(\phi-\theta))-\frac{3}{4}\pi)}}{\sqrt{L}} \frac{R_I - L \cos(\phi-\theta)}{L} d\phi \\
&\quad - \frac{R_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{e^{-j(k(L-R_I \cos(\phi-\theta))-\frac{1}{4}\pi)}}{\sqrt{L}} \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) d\phi, \\
f(L, \theta) &= \frac{kR_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi kL}} e^{-jkL+j\frac{3}{4}\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} f(R_I, \phi) e^{jk.R_I \cos(\phi-\theta)} \cos(\phi-\theta) d\phi \\
&\quad - \frac{R_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi kL}} e^{-jkL+j\frac{1}{4}\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) e^{jkR_I \cos(\phi-\theta)} d\phi.
\end{aligned}$$

Si nous remanions l'expression précédente, nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
f(L, \theta) &= -\frac{R_I}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi kL}} e^{-jkL+j\frac{1}{4}\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \left( -f(R_I, \phi) jk e^{jk.R_I \cos(\phi-\theta)} \cos(\phi-\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) e^{jkR_I \cos(\phi-\theta)} d\phi \right), \\
f(L, \theta) &= \frac{R_I}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kL}} e^{-jkL+j\frac{1}{4}\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \left( f(R_I, \phi) k \cos(\phi-\theta) + j \frac{\partial f}{\partial r}(R_I, \phi) \right) e^{jk.R_I \cos(\phi-\theta)} d\phi.
\end{aligned}$$

Que nous notons sous la forme plus compacte :

$$f(L, \theta) = A(L) \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} g(\theta, R_I, \phi) e^{jk.R_I \cos(\phi-\theta)} d\phi. \quad (\text{G.54})$$



## RESUME

L'analyse spectrale optique permet l'étude de la composition chimique des matériaux par l'interaction entre la matière et le rayonnement. Ces dernières années, la spectrométrie dans le domaine du proche infrarouge s'est considérablement développée pour satisfaire des besoins dans les domaines comme la médecine, de la détection de gaz ou encore l'industrie des polymères.

Dans cette thèse nous nous sommes intéressé à un nouveau concept de spectromètre de Fourier statique faisant intervenir une structure de guide optique planaire courbe fuyante. Un modèle électromagnétique de cette structure courbe a été développé pour dimensionner le spectromètre. Ce modèle est basé sur une méthode de décomposition dans le domaine de Fourier, associée à une transformation conforme et utilisant des couches absorbantes.

Les premiers spectromètres ont été réalisés en optique intégrée sur verre et caractérisés. Des résolutions spectrales de 11 nm et 14 nm ont été mesurées. Ces résultats sont encourageants pour continuer le développement du spectromètre.

---

TITLE : Study and realization of a compact spectrometer in glass integrated optics

---

## ABSTRACT

Optical spectrum analysis enables the study of materials chemical composition through matter and radiation interaction. In recent years, spectrometry in the near infrared has been developed to meet needs in areas such as medicine, gas detection and polymer industry.

In this thesis, a new concept of static Fourier transform spectrometer using a leaky bent optical waveguide structure is investigated. An electromagnetic model of this structure has been developed in order to design the spectrometer. This model is based on a modal Fourier decomposition applied in the conformal mapping and is implemented using absorbing layers.

First spectrometers have been realized using glass integrated optics and have been characterized. Spectral resolutions of 11 nm and 14 nm have been measured. These results are encouraging to carry on further the development of this spectrometer.

---

SPECIALITE : Optique et Radiofréquences

---

## MOTS-CLES :

Spectrométrie de Fourier, Spectromètre compact, Modélisation électromagnétique, Guide courbe, Théorie rigoureuse des modes couplés, Couches parfaitement absorbantes, Plan conforme, Optique intégrée sur verre

---

Institut de Microélectronique Electromagnétisme et Photonique et le Laboratoire  
d'Hyperfréquences et de Caractérisation  
INP Grenoble – Minatec, 3 parvis Louis Néel, BP 257, 38 016 Grenoble Cedex, FRANCE