HAL
open science

Méthode de scission modulaire et symétries quantiques des graphes non-simplement lacés en théorie de champs comforme.

Esteban Isasi

▶ To cite this version:

Esteban Isasi. Méthode de scission modulaire et symétries quantiques des graphes non-simplement lacés en théorie de champs comforme.. Physique mathématique [math-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2006. Français. NNT : . tel-00393835

HAL Id: tel-00393835
https://theses.hal.science/tel-00393835v1

Submitted on 9 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Esteban Isasi Catalá

pour obtenir le grade de docteur de l'Université de la Méditerranée, spécialité physique théorique, physique mathématique et physique des particules.

Méthode de scission modulaire et symétries quantiques des graphes non-simplement lacés en théorie de champs conforme.

Soutenance prévue le 18 Octobre 2006 devant le jury composé de :

R. Coquereaux	DR au Centre de Physique Théorique	Directeur de thèse.
S. Khoroshkin,	Prof. de l'Institute of Theoretical and Experimental Physics	Membre du jury.
O. Ogievetsky	Prof. à l'Université de la Méditerranée	Président du jury.
E. H. Tahri	Prof. à l'Université Mohammed I	Rapporteur et membre du jury
R. Trinchero	Prof. au Centro Atómico de Bariloche	Rapporteur

Remerciements

Je voudrais, comme il se doit, remercier ici certaines personnes sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour.

Robert Coquereaux, d'abord pour m'avoir accepté comme son étudiant de DEA, pour m'avoir fait confiance, et par la suite pour m'avoir dirigé dans cette thèse. Il a su orienter mes recherces aux bons moments en me faisant découvrir la physique mathématique, ses conseils, sa collaboration et son esprit amical furent précieux et indispensables pour en arriver là, et pour construire un lien qui, j'en suis sûr continuera dans le futur.

Roberto Trinchero, Oleg Ogievetsky ont particulièrement nourrit mes réflexions grâce aux discussions et échanges scientifiques, Hassan Tahri pour m'avoir invité à travailler avec lui au Maroc. Je souhaite exprimer toute ma gratitude envers les membres du jury qui ont bien voulu consacrer à ma thèse une partie de leur temps.

Gil Schieber précieux collaborateur, ami et guide pour toutes les journnées et nuits que nous avons passés à travailler ensemble.

Je mentionne avec plaisir mes chers amis et compagnons inséparables du DEA et de thèse Arnaud, Winston, Julien, Mauricio, l'apport intellectuel et culturel, produit d'innombrables et fructueuses discussions de tous les jours, du repas de midi et demi, les inoubliables voyages que nous avons fait ensemble, le soutien moral qu'ils m'ont offert tout à long de ces quatre années. Particulièrement je remercie Arnaud pour sa contribution directe et essentielle, au bon achèvement de la rédaction de la thèse.

L'ensemble de l'équipe administratif du CPT, la bonne ambiance dégagée de ses bureaux et qui arrivait jusqu'au mien m'a aidé à garder le bon humour.

Pour leurs encouragements constants et leur assistance aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions, je remercie chaleureusement ma famille et ma belle famille. Ils ont su, depuis l'autre coté de l'ocean atlantique, soutenir et encourager ce dificile projet qui a été venir fair mes études en France.

Romy pour m'avoir accueilli et m'avoir ouvert les portes de sa maison aussi chaleureusement sans vraiment me connaître, peu aprés mon arrivée sur Marseille.

Toute mon amour, ma reconnaissance et gratitude à Daniella, ma femme, ma compagne, mon confident et mon soutien ; ma gratitude pour m'avoire autant aidé dans ce projet, mais surtout ma reconnaissance pour avoir eu le courage et la confiance de m'accompagner dans ceci qui a été notre aventure fançaise. Il y a eu tant de difficultés surmontés et tant de choses merveilleuses. Merci pour être lá tous les jours.

Table des matières

Introduction **ix**

1 Symétries quantiques de graphes ADE. **1**

1.1 Notions sur les graphes et graphes ADE. 1

1.1.1 Graphes bi-orientés et leur classification 3

1.2 Produit de représentations irréductibles et graphes $\mathcal{A}$ 4

1.2.1 Cas classique 4

1.2.2 Cas quantique 4

1.2.3 Algèbre de graphe et matrices N_i 6

1.2.4 G comme module sur $\mathcal{A}(G)$: matrices F_i (ou E_a) 7

1.3 La bigèbre de Hopf faible $\mathcal{B}$ associé a un graphe ADE 9

1.3.1 L'espace vectoriel des triangles admissibles. 9

1.3.2 Bigèbre faible $\mathcal{B}$ 12

1.3.3 Projecteurs minimaux centraux, unités et counités 16

1.3.4 Algèbres de caractéres pour $\mathcal{B}$ et $\widehat{\mathcal{B}}$ 17

1.3.5 Cellules d'Ocneanu 18

1.4 Le graphe d'Ocneanu $Oc(G)$ 20

1.4.1 Définition 20

1.4.2 G comme module sur $Oc(G)$: matrices S_x 21

1.5 Relations entre $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ 22

1.5.1 Fonctions de partition 22

1.5.2 $Oc(G)$ comme bi-module sur $A(G)$: matrices W_{ij} et W_{xy} 23

1.5.3 Relations de compatibilité algébrique 24

1.6 Un exemple de symétries quantiques des graphes du système $SU(2)$, les graphe A_2. 26

1.6.1 L'agèbre $(\mathcal{B}, \circ)$ 27

1.6.2 La cogèbre $(\mathcal{B}, \Delta)$ 29

1.6.3 L'algèbre dual $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\circ})$ 31

1.6.4 Algèbre de fusion et algèbre de symétries quantiques 34

1.7 Un exemple de symétries quantiques des graphes du système $SU(3)$, les graphes $\mathcal{A}_1$. 34

2 La méthode de scission modulaire. 47

2.1 Introduction 48

2.2 CFT and graphs 49

2.2.1 Steps of the resolution 50

2.3 From the modular invariant to graphs 51

2.3.1 Determination of toric matrices W_{x0} 51

2.3.2 Determination of double toric matrices W_{xy} 54

2.3.3 Determination of the Ocneanu algebra O_x 55

2.3.4 Determination of the higher ADE graph G 56

2.3.5 Comments 57

2.4 Examples 58

2.4.1 The E_6 case of $\widehat{su}(2)$ 58

2.4.2 The $\mathcal{E}_5$ case of $\widehat{su}(3)$ 60

2.4.3 The $\mathcal{E}_5^*$ case of $\widehat{su}(3)$ 64

2.4.4 The $\mathcal{E}_9$ case of $su(3)$ 66

3 Symétries quantiques et graphes non-simplement lacés. 83

3.1 Considérations générales. 84

3.1.1 Pliage des graphes ADE, fonctions de partition et propriétés modulaires des graphes non-simplement lacés. 84

3.1.2 La méthode de scission modulaire et les symétries quantiques des graphes non-simplement lacés. 87

3.2 Étude explicite des graphes non-simplement lacés de $SU(2)$. 90

3.2.1 Le cas F_4. 90

3.2.2 Le cas B_3. 105

3.2.3 Le cas B_4 112

3.2.4 Le cas général B_n 119

3.2.5 Le cas G_2. 122

3.3 Un exemple non-simplement lacé du système $SU(3)$. 132

Résumé.

Etant donné une algèbre de fusion à un certain niveau et la fonction de partition invariante modulaire pour une théorie de champs conformes correspondante, il existe une équation dite "équation de scission modulaire" traduisant la compatibilité, au niveau de la fonction de partition, entre l'action de l'algèbre de fusion et celle des symétries quantiques (qui sont a priori inconnues). Cette équation due à A. Ocneanu permet, en principe, de construire l'algèbre des symétries quantiques d'une théorie à partir des autres données évoquées plus haut et il est certain que son auteur a utilisé une telle méthode pour obtenir celles associées aux invariants modulaires de type SU2, SU3 et SU4. Cependant, aucun document présentant une technique de résolution de cette équation n'était disponible, sous forme publiée ou non, avant le travail présenté ici.

L'utilisation de la technique de résolution présentée permet, bien entendu, de retrouver les résultats connus concernant les symétries quantiques des théories qui correspondent aux fonctions de partition invariantes modulaire, et qu'on sait associer à des graphes simplement lacés de la famille SU2 (les graphes ADE) ou à leurs généralisations. Elle permet également de déterminer des algèbres de symétries quantiques dans le cadre un peu plus général, dit "non simplement lacé ; dans ce cas, les fonctions de partition ne sont invariantes que par un certain sous groupe du groupe modulaire. Dans la famille SU2, nous avons examiné les cas F_4, B_3, B_4, et G_2. Dans la famille SU3, nous avons examiné le graphe non simplement lacé $\mathcal{F}_5$ qui est un Z_3 quotient de l'exceptionnel simplement lacé $\mathcal{E}_5$ de même niveau. Dans tous les cas, l'espace vectoriel du graphe considéré est lui-même est un module sur l'algèbre de fusion de même niveau, qui est une algèbre de type A (résultat connu, tout au moins pour la série SU2, depuis [34] et [37]). Par contre, ce module, qui est un Z_+ - module, n'est pas "rigide", en ce sens que ses constantes de structure ne vérifient pas la propriété de symétrie usuelle $(F_n)_{ab} = (F_{\overline{n}})_{ba}$, la notation $\overline{n}$ désignant le "dual" (conjugué) de n dans l'algèbre de fusion (pour $SU(2)$, on a $\overline{n} = n$), ce qui est d'ailleurs bien évident puisque ces constantes sont déterminées par la matrice d'adjacence du graphe lui-même, qui, par hypothèse, n'est pas simplement lacé.

Dans les cas ordinaires (simplement lacés), on sait associer, à toute théorie conforme invariante modulaire, deux algèbres en dualité (plus précisément, un groupoide quantique) dont les anneaux de caractères s'identifient à l'algèbre de fusion, d'une part, et à l'algèbre des symétries quantiques, d'autre part. Pour tous les cas non - simplement lacés examinés, nous avons déterminé la décomposition par blocs (il s'agit d'algèbres de dimension finie semi - simples) des deux algèbres qui, pour une situation simplement lacée, devraient avoir la même dimension totale, les deux espaces vectoriels sous jacents étant en dualité. Nous ne nous attendions pas, dans notre cas, à obtenir une structure aussi simple du fait des propriétés inhabituelles des modules, mais il s'avère que l'introduction de facteur correctifs très simples (essentiellement justifiés par l'existence d'une action de groupe finie sur le graphe correspon-

dant) permet d'identifier les dimensions obtenues. Ce travail suggère donc l'existence d'une nouvelle structure algébrique, finalement assez "simple" lié au exemples non-simplement lacés. Nous n'avons pas cherché à aller plus loin dans cette direction, réservant ce travail pour une recherche ultérieure.

Le formalisme mathématique utilisé dans cette thèse est volontairement assez élémentaire. Notre travail pourrait néanmoins être transcrit dans un cadre plus sophistiqué utilisant soit le langage de la théorie des algèbres d'opérateurs, soit encore, et plus facilement sans doute, celui des catégories de fusion (voir [60], [49]). Au niveau physique, les techniques et résultats présentés peuvent être utilisés en théorie de champs conforme, plus particulièrement dans l'analyse des conditions de bord, et dans leurs applications.

Bref résumé.

Le premier objet de cette thèse est de présenter une méthode de résolution pour l'équation de scission modulaire, équation qui permet de déterminer les symétries quantiques d'une théorie de champs conforme. On peut l'utiliser dans le cadre des théories associées aux graphes simplement lacés (les ADE de la famille SU2, ou leurs généralisations) et retrouver ainsi des résultats connus, en particulier la structure des groupoides quantiques associés. Le second objet de cette thèse est d'appliquer cette technique dans le cadre plus général des graphes non simplement lacés afin de déterminer les algèbres de symétries quantiques correspondantes, et d'explorer leurs propriétés. Plusieurs exemples de ce type sont analysés.

Introduction

L'étude des symétries quantiques associées aux graphes de Dynkin et ses généralisations trouve son origine dans leur participation à la classification des théories conformes à deux dimensions proposé par A. Cappelli, C. Itzykson and J.B. Zuber en 1987 [16]. Dans cette classification apparaisent deux séries infinies de graphes : A_n et D_n et trois graphes exceptionnels E_6, E_7 et E_8. Ces graphes constituent un sous-ensemble des graphes de Dynkin (tous les graphes simplement lacés) qui, dans un autre contexte, conduisent à la classification des algèbres de Lie semi-simples. La classification définie par les graphes ADE est telle que chaque fonction de partition d'une théorie de champs conformes avec algèbre de caractères $\hat{su}(2)_\ell$ au niveau ℓ correspond à un graphe ADE de nombre de Coxeter $k = \ell + 2$.

Les travaux de F. Di Francesco et J. B. Zuber [34] ont permis d'élargir cette classification aux théories de type $\hat{su}(3)$. Ils ont proposé une nouvelle liste de graphes généralisant les graphes ADE et qui jouent le même rôle dans la classification. Ces graphes sont appelés les graphes de Di Francesco-Zuber, il sont composés de quatre séries infinies : $\mathcal{A}_n$, son conjugué $\mathcal{A}_n^c$; plus le graphe *orbifold* $\mathcal{D}_n = \mathcal{A}_n/\mathbb{Z}_3$ et son conjugué $\mathcal{D}_n^*$. Il y a aussi sept graphes exceptionnels $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_5/\mathbb{Z}_3$, $\mathcal{D}_9^t$, $\mathcal{D}_9^{t*}$, $\mathcal{E}_{21}$, $\mathcal{E}_9$, et $\mathcal{E}_5/\mathbb{Z}_3$, les deux dernièrs associés à la même fonction de partition.

Les travaux d'A. Ocneanu réalisés dans les années quatre-vingt dix [57], [59] ont changé radicalement cette vision des relations existant entre les propriétés combinatoires des graphes ADE et la classification des fonctions de partition. La structure algébrique qui a été découverte à la base de cette classification est un sujet d'études très intéressant en lui-même, et a donné lieu à des travaux étudiant des aspects qui vont des considérations mathématiques les plus formelles, [28],[6, 7, 8], [11] ; jusqu'à des applications dans differents domaines de la physique théorique, comme les systèmes intégrables et les théories de cordes [38], [29], [67] [69].

La propriété qui se trouve à la base de toute la structure algébrique proposée (et que était déjà mentionné dans [62]) est que les vertex du diagramme A_n engendrent un espace vectoriel sur lequel il est possible de construire une structure d'algèbre finie, associative et commutative. Ces algèbres, appelées algèbres de fusion, sont telles que sa table de multiplication peut-être construite à partir du graphe même : en effet l'algèbre A_n possède un élément neutre et un générateur donnés par les deux premiers vertex à gauche, v_0 et v_1. La multiplication

d'un vertex v_i par le générateur est déterminé par la somme des voisins de v_i. Nous avons : $v_1\, v_i \,=\, v_{i+1} + v_{i-1}$ pour $i < n-1$ et $v_1\, v_i = v_{i-1}$ si $i = n-1$. A partir de la multiplication par le générateur il est alors possible d'écrire chaque vertex du graphe comme un polynôme en v_0 et v_1, et un produit associatif peut être construit. Le produit de l'algèbre A_n a des constants de structures toutes non négatives et entières, c'est à dire que l'algèbre de fusion se comporte comme l'équivalent quantique d'un produit de spins ($SU(2)$ *classical recouplig theory*) qui est codé par le graphe A_∞.

Cette structure d'algèbre peut être étendue à l'espace vectoriel engendré par les vertex de certains graphes de la famille ADE différents des graphes A_n, notamment les graphes D_{2n}, E_6 et E_8. Néanmoins la propriété générale (et fondamentale) que possèdent tous les graphes ADE (et qui s'étend à d'autres types de diagrammes) est que l'espace vectoriel du graphe est toujours un module sur un graphe A_n avec la même norme, noté $\mathcal{A}(G)$.

La construction d'Ocneanu associe à chaque graphe ADE un type particulier de groupoïde quantique $\mathcal{B}$ qui est de dimension finie et peut être construit à partir de l'action de $\mathcal{A}(G)$ sur G d'une manière que nous allons expliquer en détail plus tard. $\mathcal{B}$ est une algèbre semi-simple et une cogèbre cosemi-simple, l'existence d'un coproduit dans l'agèbre $\mathcal{B}$ et son dual permet de décomposer le produit tensoriel de représentations (ou coreprésentations) irréductibles et les décomposer en somme de représentations (coreprésentations) irréductibles. Nous obtenons de cette manière deux algèbres de caractères différentes : la première, dénommée algèbre de fusion de G, coïncide avec l'algèbre de graphe $\mathcal{A}(G)$. La deuxième est une algèbre associative (mais pas nécessairement commutative) de dimension finie dénommé **algèbre de symétries quantiques** $Oc(G)$. L'algèbre de symétries quantiques est générée par deux éléments denotés 1 et $1'$, elle est obtenue avec une base particulière qui est telle que la multiplication de ses éléments par les deux générateurs est codée par un graphe appelé graphe d'Ocneanu $Oc(G)$.

Trois graphes participent à cette construction : G, $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$. Ils sont liés par plusieures proprietés intéressantes parmi lesquelles il est important de remarquer les différents actions de module. Nous avons déjà indiqué que la constructions du groupoïde quantique $\mathcal{B}$ peut se faire à partir de l'action de $\mathcal{A}(G)$ sur G. Il existe aussi une double action d'$\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G) : \mathcal{A}(G) \times Oc(G) \times \mathcal{A}(G) \to Oc(G)$, qu'est compatible avec la multiplication de $Oc(G)$. Cette famille de trois graphes, ou plutôt des algèbre et des modules qui leur correspondent, constituent ce que nous appelerons **symétries quantique de l'invariant modulaire**.

La double action de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$ est codée par une collection de matrices avec entrées entières et non négatives appelées **matrices toriques** $W_{x,y}$. Il existe une matrice torique pour chaque vertex du graphe d'Ocnanu (notés x, y, z), et l'action de bimodule s'écrit :

$$i\, x\, j \;=\; \sum_{y \in Oc(G)} (W_{x,y})_{i,j}\; y$$

Les matrices toriques établissent le lien avec les théories conformes. Nous allons considérer les théories de champs conformes à deux dimensions dont algèbre de symétrie est une algèbre

de courants contenant l'algèbre de Virasoro, plus une algèbre de Lie affine $\hat{su}(2)_\ell$. Les condition de bord sont choisies périodiques et paramétrées par $\tau = w_2/w_1$ où w_1 et w_2 déterminent la périodicité dans les deux directions d'un tore [42], [31]. Du point de vue de la théorie des champs, la fonction de partition code l'ensemble des champs contenus dans la théorie, et doit satisfaire deux conditions fondamentales : a) le contenu en champs codé par la fonction de partition est compatible avec une algèbre de produit d'opérateurs (OPA) et b) la théorie est invariante sous l'action du groupe modulaire. Au niveau ℓ, la fonction de partition de la théorie s'écrit en termes des caractères de l'algèbre affine, avec un contenu en champs codé par une matrice à entrées entières et non négatives $\mathcal{M}$, appelée **l'invariant modulaire**.

$$Z(\tau) = \sum_{i,j=1}^{\ell+1} \chi(\tau)_i \, \mathcal{M}_{ij} \, \bar{\chi}(\tau)_j .$$

L'invariance sous l'action du groupe modulaire peut-être prouvée directement en vérifiant la commutativité de $\mathcal{M}$ avec les matrices représentant les générateurs du groupe modulaire S et T.

L'observation fondamentale est que **l'invariant modulaire coïncide avec la matrice torique associée à l'élément neutre de l'algèbre de symétries quantiques**, c'est à dire nous avons l'identification $\mathcal{M} = W_{0,0}$. Les matrices toriques $W_{x,y}$ associées aux autres vertex du graphe d'Ocneanu ne possèdent pas la propriété d'invariance sous l'action du groupe modulaire, et sont interprétées comme donnant des fonctions de partition pour des théories conformes avec conditions de bord définies par le choix du graphe G et lignes de défauts caractérisées par le couple (x, y) [24], [63].

La structure formelle que nous venons de décrire est bien établie pour les graphes ADE et est suffisamment générale pour permettre à priori une généralisation aux cas $SU(N)$, mais la realisation explicite de $\mathcal{B}$ est un problème complexe qui n'a pas été résolu que pour certains cas très simples, d'autant plus que la liste de graphes de Coxeter-Dynkin généralisés n'est connue que pour les systèmes $SU(3)$ et $SU(4)$.

Nous connaissons explicitement la bigèbre $\mathcal{B}$ pour les cas A_2, A_3 et A_4 [19], [66], [20] et nous savons désormais comment se présentera cette structure pour les cas A_n en général. A titre d'illustration nous allons présenter l'exemple de la bigèbre associée au cas $\mathcal{A}_1$ du système $SU(3)$, ceci permet de montrer quelques similitudes et différences par rapport aux cas $SU(2)$, mais la structure plus générale décrivant les cas $\mathcal{A}_\ell$ du système $SU(3)$ devrait encore être explicitée.

La complexité de la solution formelle de ce problème nous oblige à adopter un point de vue différent permettant d'obtenir des informations sur les différents ingrédients de l'ensemble, sans pourtant être obligés de construire explicitement le grupoïde quantique $\mathcal{B}$. D'un autre coté, l'existence de plusieurs algorithmes, la plupart dus aux travaux de T. Gannon [43] permettent d'obtenir des candidats fournissant des invariants modulaires pour $SU(N)$ quelconque. Ceci suggère de prendre l'invariant modulaire comme point de départ et d'obtenir

à partir de celui-ci des informations sur la structure de $\mathcal{B}$. C'est d'ailleurs ce point de vue qui avait été adopté par A. Ocneanu, et celui sur lequel repose également le travail principal de cette thèse, à savoir, l'étude des méthodes permettant d'explorer les différents exemples et leurs symétries quantiques.

Notre travail est centré sur le développement et l'aplication d'une méthode appelée **méthode de scission modulaire**, permettant d'obtenir à partir d'un invariant modulaire donnée, l'ensemble des matrices toriques, le graphe d'Ocneanu et une réalisation matricielle de l'algèbre des symétries quantiques, sans avoir besoin de construire explicitement le groupoïde $\mathcal{B}$.

Ces résultats permettent, dans la plupart des cas de déterminer explicitement l'algèbre $Oc(G)$ et le graphe de Coxeter G associé à un invariant modulaire. Dans cette approche le graphe G n'est pas considéré comme une donnée de départ, mais fait partie des résultats obtenus par l'aplication de la méthode.

La méthode de scission modulaire consiste à résoudre une équation traduisant la compatibilité de la double action de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$, elle contient les constantes de structure de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ dénotés par N_i, l'invariant modulaire, et les matrices toriques (constantes de structure du bimodule $Oc(G)$ sur $\mathcal{A}(G)$) combinés dans l'ensemble d'équations matricielles :

$$\sum_z (W_{0z})_{i,j}\, W_{z0} = N_i\, \mathcal{M}\, N_j^{tr} \ .$$

Les matrices N_i sont connues puisque elles peuvent être calculés à partir du graphe $\mathcal{A}(G)$, nous avons alors un système d'équations avec des inconnues données par les entrées les matrices toriques $W_{0,z}$ et $W_{z,0}$, ce système est soumis à des contraintes puisqu'on demande que les entrées de $W_{x,y}$ soient des entiers-non négatif. Ces contraintes réduisent suffisamment les degrés de liberté du système pour qu'il soit possible de déterminer l'ensemble complet de matrices toriques.

Un des aspects primordiaux de cette méthode réside dans le fait que elle permet d'explorer le problème des symétries quantiques des invariants modulaires de haut niveaux. Nous avons étudié les cas $\mathcal{E}_5^*$, $\mathcal{E}_9$ et $\mathcal{E}_9/\mathbb{Z}_3$ du système $SU(3)$. Les deux dernier graphes apparaissent comme sous graphes du même graphe d'Ocenanu. Le cas $\mathcal{E}_5^*$ est un exemple oú le graphe lui-même n'apparait pas explicitement dans Oc(G), mais il peut être determiné de manière relativement simple en lui demandant de satisfaire à differentes relations de module.

Un deuxième aspet est l'exploration d'un systèmes de graphes qui n'a pas été étudié jusqu'a présent. En effet il est possible sous certains conditions de construire une restriction d'un invariant modulaire, telle que la compatibilité avec une OPA soit gardée mais où l'invariance modulaire est substituée par l'invariance sous l'action d'un sous-groupe du groupe modulaire [74], [73]. Des exemples de telles restrictions sont obtenues à partir des théories connues en utilisant un quotient par les groupes de symétrie ($\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_3$ dans les cas considérés). Ces quotients donnent origine à des théories associées aux graphes non ADE, plus précisément les

graphes non-simplement lacés B_n, C_n, F_4 et G_2 pour le système $SU(2)$ et ses généralisations pour $SU(3)$.

Partant une matrice modulaire (la fonction de partition) issue d'une telle restriction, la méthode de scission modulaire permet d'explorer les propriétés algébriques qui, éventuellement, amènent à des structures de type "symétries quantiques". L'objectif n'est pas de proposer ou d'étudier une théorie physique de champs conformes associé, mais de regarder comment se généralisent les propriétés et structures algébriques associées aux graphes ADE. Les résultats sont en effet interessants, nous trouvons que des relations similaires aux symétries quantiques des graphes ADE relient les graphes qui aparaissent dans le probléme, ceci indique qu'une structure semblable à la bigébre $\mathcal{B}$ doit exister ici aussi, mais une généralisation est nécessaire pour pouvoir décrire la structure formellement. Il faut remarquer que dans l'étude des matrices modulaires, les graphes de Dynkin non-simplement lacés apparaisent de manière directe ou indirecte comme resultat des calculs.

La structure de la thèse est la suivante : le premier chapitre est dedié à la description de la théorie de groupoïdes quantiques associé aux graphes ADE. Les premiéres sections présentent un résumé des aspect les plus importants de la description de l'espace $\mathcal{B}$ et ses propriétés algébriques. L'objectif etant uniquement de fournir un cadre pour le reste de la thèse. Des études completes de ses aspects peuvent être trouvés dans diverses references [20], [19], [28], [6, 7, 8]. Dans les deux dernières sections nous présentons deux exemples illustrant la construction de $\mathcal{B}$ pour des cas précis. Le premier, purement illustratif, traite le cas A_2 du système $SU(2)$ déjà décrit dans [19]. Nous contruisons pour cette exemple l'espace $\mathcal{B}$ a partir de l'algèbre de graphe A_2, le coproduit et les deux algèbres de caractères associes. Le deuxieme exemple est plus interessant, il s'agit du calcul du cas $\mathcal{A}_1$ du système $SU(3)$. La remarque est que le système de cellules n'est pas formellement connu pour les cas $SU(3)$, et le calcul se fait par analogie auvec le cas $SU(2)$.

Le deuxième chapitre est constitué par l'article *From modular invariant to graphs : the modular splitting method* [47] où est présentée la méthode de scission modulaire. Le papier est organisé comme suit. La première section est dédiée à l'introduction de l'équation de scission modulaire et à une description générale et détaillée de la méthode de résolution. Les sections suivantes sont consacrés a l'illustration de la technique en l'appliquant à trois exemples choisis, en premier lieu nous traitons le cas E_6 du système $SU(2)$, ensuite nous considérons l'étude de trois cas exceptionnels du système $SU(3)$, d'abord le cas $\mathcal{E}_5$ au niveau 5, et le cas module conjugué $\mathcal{E}_5^*$, et enfin l'exemple $\mathcal{E}_9$ au niveau 9.

Dans le troisième chapitre sont présentés les résultats concernant l'explorations des symétries quantiques des graphes non-simplement lacés. Le travail est basé sur les méthodes et résultats de l'exemple F_4 qui est étudié dans [25]. Ce travail est à la fois le premier traitement du cas non-simplement lacé du point de vue des symmetries quantiques, et le cas qui a fourni les bases pour les généralisations.

La première section contient les considérations générales sur les méthodes et résultats

concernant les graphes non-simplement lacés du système $SU(2)$. Obtention des fonctions de partition des graphes non-simplement lacés par restriction de celles des graphes ADE, description de la méthode de scission modulaire adaptée à l'étude des graphes $SU(2)$ non-simplement lacés, résultats généraux. La deuxième section est dédiée à l'étude explicite des exemples du système $SU(2)$, on considère explicitement les cas F_4, B_3, B_4, le cas général B_n et le graphe G_2, dans chaque cas nous calculons l'ensemble des matrices toriques, l'algèbre de symétries quantiques et nous regardons de quelle façon la règle de somme quadratique est modifiée, ce qui donne ainsi une idée sur la structure algébrique qu'il faudrait savoir associer à ce type de graphes. La troisième section contient l'étude d'un cas non-ADE du système $SU(3)$, ce cas est construit comme l'analogue de l'exemple F_4 de $SU(2)$, mais les résultats ne constituent pas une généralisation directe du cas $SU(2)$.

Chapitre 1

Symétries quantiques de graphes ADE.

1.1 Notions sur les graphes et graphes ADE.

Nous commençons par donner la définition d'un graphe et certaines propriétés de base que seront d'importance pour notre travail.

Définition 1 *Nous définissons un* **graphe** G *par la donnée d'un triplet* (V, A, ψ) *tel que :*

- V *est un ensemble non-vide d'éléments* v *appelés vertex,*
- A *est un ensemble non vide d'éléments* ξ *appelés arêtes,*
- ψ *est une fonction qui associe à chaque arc de* G *une paire ordonnée de vertex (non nécessairement distincts) de* G.

Un graphe est dit **fini** si les ensembles V et A sont finis, le nombre de vertex d'un graphe est appelé l'ordre du graphe. Si ξ est un arc, i et j deux vertex tels que $\psi(\xi) = ij$, alors ξ joint le vertex i au vertex j, et nous notons un tel arc ξ_{ij} ou $\vec{ij}$. Nous appelons $s(\xi_{ij}) = i$ la **source** de ξ_{ij} et $r(\xi_{ij}) = j$ l'**extrémité** de ξ_{ij}. Un arc ayant la même source et extrémité est appelé une **boucle**. Un graphe est dit **simple** s'il ne possède pas de boucle et si deux arcs différents ne relient pas la même paire de points ; si le graphe possède des arêtes multiples il est appelle **non-simplement lacé**. Un graphe est dit **bi-orienté** si pour tout arc ξ_{ij} reliant i à j, il existe l'arc inverse ξ_{ji} reliant j à i. Dans le cas contraire, le graphe est dit **orienté**. L'arc ξ_{ij} est représenté par une flèche reliant le vertex i au vertex j. Dans le cas d'un graphe bi-orienté, les deux arcs ξ_{ij} et son inverse sont représentés plus simplement par une seule ligne (non-fléchée) reliant i et j.

Un **chemin élémentaire** est une séquence $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ d'arcs telle que l'extrémité de chaque arc coïncide avec la source de l'arc suivant : $r(\xi_i) = s(\xi_{i+1}), 1 \leq i \leq k-1$. Un graphe est dit **fortement connexe** si pour tout couple de vertex i et j, il existe un chemin élémentaire reliant ces vertex.

Définition 2 *Soit G un graphe à d_G vertex. La* **matrice d'adjacence** *de G est la matrice $d_G \times d_G$ noté $Ad(G)$ ayant comme entrée $Ad(G)_{ij} = n$ s'il existe n arcs ξ_{ij} reliant le vertex i au vertex j, et $Ad(G)_{ij} = 0$ sinon.*

Définition 3 *Une matrice A carrée $(n \times n)$ à entrées dans les entiers non-négatifs est dite* **irréductible** *si et seulement si, pour chaque $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un entier positif k (qui peut dépendre de i et j), tel que $(A^k)_{ij} > 0$.*

Nous avons vu plus haut la définition d'un chemin élémentaire. Il existe une manière très simple de compter le nombre de tels chemins de longueur k fixée.

Théorème 1 *[1] Si Ad est la matrice d'adjacence d'un graphe à n vertex, alors le nombre de chemins élémentaires distincts de longueur k reliant les vertex i et j est égal à $(Ad^k)_{ij}$.*

Puisque, par définition, dans un graphe fortement connecté il existe au moins un chemin reliant tout vertex i à un vertex j, sa matrice d'adjacence est donc irréductible.

Théorème 2 (Perron-Frobenius) *[45] Soit A une matrice carrée irréductible à entrées dans les entiers non négatifs. Alors, il existe une valeur propre β de A telle que :*

- *β est réelle, $\beta > 0$;*
- *β est la plus grande valeur propre de A ;*
- *le vecteur propre correspondant à β est positif*[1]*, et est unique à une constante multiplicative près.*

Ce vecteur-propre est appelé vecteur de Perron-Frobenius, et sera noté P. Il satisfait donc à l'équation suivante :

$$Ad(G)P = \beta P \tag{1.1}$$

Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ une base des vertex du graphe G : puisque la matrice d'adjacence de G est irréductible à entrées dans $\mathbb{N}$, le **Théorème 2** s'applique, et nous définissons l'application μ donnant la composante de Perron-Frobenius des vertex :

$$\begin{aligned} \mu : V(G) &\longmapsto \mathbb{R}^+ \\ i &\longmapsto P(i) \end{aligned}$$

Nous normalisons ce vecteur de telle manière que $\mu(v_1) = 1$, où v_1 est choisi comme étant le vertex[2] ayant la plus petite composante $P(i)$

[1] Toutes ses composantes ont le même signe.

[2] Dans les cas considérés, il n'y aura pas d'ambiguité sur le choix de ce vertex.

1.1.1 Graphes bi-orientés et leur classification

Dans le cas d'un graphe G bi-orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique, et sa norme est alors donnée par :

$$||G|| = ||Ad(G)|| = \max\{|\lambda|, \text{où } \lambda \text{ est valeur propre de } Ad(G)\}$$

Il existe une classification reliant les valeurs possibles de cette norme et son graphe correspondant [45] :

Théorème 3 *Soit A une matrice carrée symétrique à entrée dans les entiers non-négatifs. Alors :*

- $||A|| = 2$ *si et seulement si A est la matrice $(\ell+1)\times(\ell+1)$ d'adjacence de l'un des graphes suivants :*

$$A_\ell^{(1)}(\ell \geq 2), \qquad D_\ell^{(1)}(\ell \geq 4), \qquad E_\ell^{(1)}(\ell = 6,7,8)$$

- $||A|| < 2$ *si et seulement si A est la matrice $(\ell \times \ell)$ d'adjacence de l'un des graphes suivants :*

$$A_\ell(\ell \geq 2), \qquad D_\ell(\ell \geq 4), \qquad E_\ell(\ell = 6,7,8)$$

De plus, $||A|| = \beta = 2\cos(\frac{\pi}{\kappa})$, où κ est par définition le nombre (dual) de Coxeter du graphe. Les autres valeurs propres de A peuvent être exprimés en termes de κ comme $\lambda = 2\cos(\frac{m\pi}{\kappa})$ (possiblement avec multiplicité), où les nombres m sont appelés exposants de Coxeter.

Les graphes définis ci-dessus correspondent aux diagrammes de Dynkin des algèbres de Lie semi-simples simplement lacées (A_ℓ, D_ℓ, E_ℓ) (voir [2],[42]), ou de leur extension affine $(A_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}, E_\ell^{(1)})$ (voir [42]). Insistons sur le fait que nous n'utiliserons pas la notion d'algèbre de Lie ici (le nombre dual de Coxeter par exemple est *défini* à travers la norme du graphe).

Correspondance de Mc-Kay Les vertex des diagrammes affines $(A_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}, E_\ell^{(1)})$ sont en correspondance bi-univoque avec les représentations irréductibles des sous-groupes du groupe $SU(2)$, et la composante de Perron-Frobenius de ces vertex est égale à la dimension des représentations irréductibles (irreps) : c'est la correspondance de Mc-Kay classique [51]. De même, les vertex des diagrammes (A_ℓ, D_ℓ, E_ℓ) peuvent être mis en correspondance avec les irreps de "sous-groupes" ou "modules" associés au groupe quantique $U_q(sl(2))$, avec q racine de l'unité dépendant du niveau ℓ, les composantes de Perron-Frobenius donnant, par définition, les dimensions quantiques de ces irreps (ce ne sont plus des nombres entiers, mais des q-nombres !). C'est l'analogie quantique de la correspondance de Mc-Kay.

1.2 Produit de représentations irréductibles et graphes $\mathcal{A}$

1.2.1 Cas classique

Considérons le groupe $SU(N)$ et ses représentations irréductibles notés par sa dimension i, j, $k \in \text{Irr } SU(N)$. Ce groupe possède $N-1$ représentations fondamentales, en ce sens que les autres représentations irréductibles peuvent être obtenues par tensorialisation puis réduction à partir des fondamentales. Chaque représentation fondamentale donne lieu à un graphe infini, dont les vertex sont labellés par $i \in \text{Irr } SU(N)$ et dont les arcs correspondent à la tensorialisation par la représentation fondamentale.

Par exemple le groupe $SU(2)$ possède une représentation fondamentale, de dimension deux, notée 2, et la décomposition du produit tensoriel d'une irrep $i \in \text{Irr } SU(2)$ par la fondamentale 2 est donnée par la formule suivante (correspondant au couplage d'une particule de spin 1/2 avec une particule de spin $J = (i-1)/2$) :

$$2 \otimes i = i - 1 \oplus i + 1. \tag{1.2}$$

Le résultat de cette décomposition peut être codé dans le graphe A_∞ de $SU(2)$ illustré Fig.1.1.

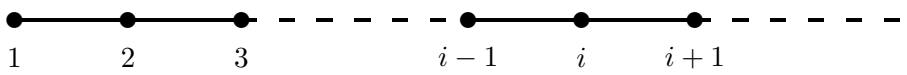


FIG. 1.1 – Graphe A_∞ de $SU(2)$.

Les vertex de ce graphe sont labellés par les irreps $i, j, k \in \text{Irr } SU(2)$, et $2 \otimes i$ se décompose en la somme directe des voisins de i sur le graphe.

Le groupe $SU(3)$ possède deux représentations fondamentales, notées 3 et $\overline{3}$, chacune donnant lieu à un graphe orienté infini $\mathcal{A}_\infty$. Les représentations 3 et $\overline{3}$ étant conjuguées, le graphe correspondant à la tensorialisation par $\overline{3}$ s'obtient en inversant la direction des arcs du graphe correspondant à 3. Le graphe A_∞ de $SU(3)$ correspondant à la représentation 3 est illustré Fig. 1.2. Nous lisons sur le graphe, par exemple : $3 \otimes 3 = \overline{3} \oplus 6$, car il y a un arc reliant 3 à $\overline{3}$ et un arc reliant 3 à 6.

1.2.2 Cas quantique

Les groupes de Lie possèdent en général des déformations quantiques (groupes quantiques), dont un exemple bien connu est fourni par le groupe quantique $U_q(sl(N))$. A q racine de l'unité nous pouvons définir des quotients de Hopf non semi-simples, de dimension finie – génériquement désignés par $u_q(sl(N))$ – à partir du groupe quantique $U_q(sl(N))$: ces groupes quantiques possèdent alors un nombre fini de représentations irréductibles (nous

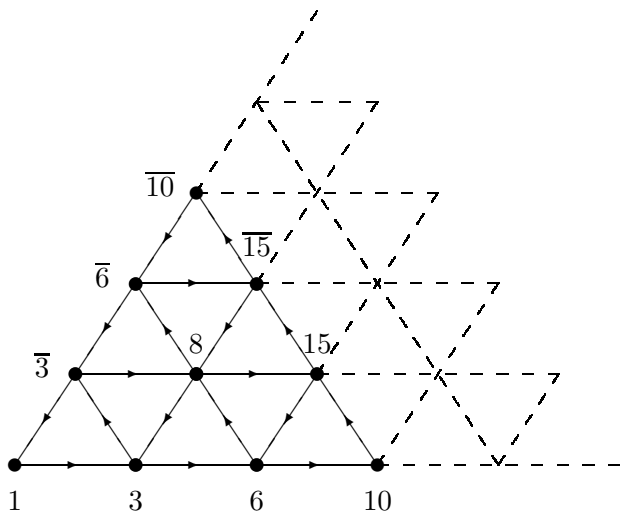


FIG. 1.2 – Graphe $\mathcal{A}_\infty$ de $SU(3)$ pour la représentation 3.

nous intéressons en fait à celles qui sont de q-dimension non-nulle. Nous décidons de noter $SU(N)_\ell = u_q(sl(N))$ pour q racine de l'unité[3] :

$$q^{2(\ell+N)} = q^{2\kappa} = 1, \tag{1.3}$$

où ℓ est le niveau et κ est le nombre de Coxeter généralisé, défini par la relation $\kappa = \ell + N$. De manière analogue au cas classique, nous pouvons associer à chaque représentation fondamentale de $SU(N)_\ell$ un graphe qui s'obtient par troncation (au niveau ℓ) du graphe $\mathcal{A}_\infty$ correspondant.

Ainsi, pour $SU(2)_\ell$ et à la $2(\ell+2)$-ième racine de l'unité, nous obtenons le graphe $\mathcal{A}_\ell = A_{\ell+1}$ de $SU(2)_\ell$. Pour $SU(3)_\ell$ et à la $2(\ell+3)$-ième racine de l'unité, nous obtenons le graphe $\mathcal{A}_\ell$ de $SU(3)_\ell$.

Pour $SU(2)_2$, nous avons $\mathcal{A}_2 = A_3$, ce graphe possède 3 vertex, avec la représentation identité notée par 0 et la fondamentale notée par 1. Pour $SU(3)_4$, le graphe $\mathcal{A}_4$ possède 15 vertex. De manière générale, le graphe $\mathcal{A}_\ell$ de $SU(3)_\ell$ possède $(\ell+1)(\ell+2)/2$ vertex que nous étiquetons par (λ_1, λ_2), avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \ell$. La représentation identité est $(0,0)$ et les deux représentations fondamentales (conjuguées) sont $(1,0)$ et $(0,1)$. Le graphe code la tensorialisation par $(1,0)$ est presenté plus bas, le graphe de tensorialisation par la répresentation fondamentale pour A_3 de $SU(2)$ et $\mathcal{A}_4$ de $SU(3)$ sont représentés dans la Fig. 1.3. Pour $SU(3)$ le diagrame de multiplication par le générateur conjugé est obtenu en inversant la direction des arcs.

[3]Attention : l'index q de u_q est quelquefois noté $q^{1/2}$ dans la littérature.

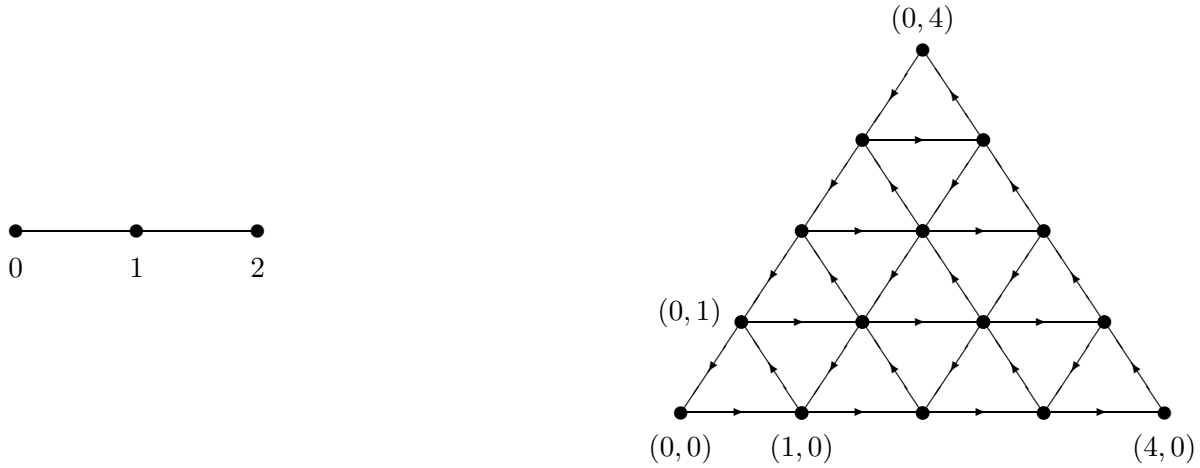


FIG. 1.3 – Les graphes $\mathcal{A}_2$ pour $SU(2)_2$ (3 vertex) et $\mathcal{A}_4$ $SU(3)_4$ (15 vertex).

1.2.3 Algèbre de graphe et matrices N_i

A partir du graphe $\mathcal{A}_\ell$ il est possible de calculer une table de multiplication associative et fermée pour toutes les irreps, rappelons que pour q racine de l'unité le nombre d'irreps est finie. La multiplication de deux irreps est donnée par l'équation suivante :

$$i.j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \, k, \tag{1.4}$$

où $\mathcal{N}_{ij}^k$ sont des nombres entiers non-négatifs (multiplicité de (k) dans $(i).(j)$). Nous appelons cette algèbre l'**algèbre du graphe** $\mathcal{A}_\ell$, algèbre de fusion, ou plus simplement l'algèbre $\mathcal{A}_\ell$.

Exemple du système $SU(2)_\ell$: cas A_3 Nous allons considérer le graphes A_3 du système montré dans la Figure 1.3. Nous savons multiplier par l'identité 0 (puisque c'est l'identité) et par la fondamentale 1 (à l'aide du graphe) :

$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \, , \quad 1 \cdot 1 = 0 \, + \, 2 \, , \quad 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 1 \, . \tag{1.5}$$

En imposant l'associativité, nous construisons la seule multiplication qui n'est pas donnée par le graphe dans cette exemple A_3 :

$$2 \cdot 2 = (1 \cdot 1 - 0) \cdot 2 = 0 + 2 - 2 = 0. \tag{1.6}$$

Nous obtenons ainsi l'algèbre du graphe A_3, qui est l'algèbre commutative et associative ayant comme éléments de l'espace vectoriel les combinaisons linéaires des vertex $\{0, 1, 2\}$, et comme

multiplication :

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	$0+2$	1
2	2	1	0

(1.7)

Nous associons à chaque vertex une matrice N_i, telle que $(N_i)_{jk} = \mathcal{N}_{ij}^k$ donne les constants de structure de l'algèbre. Ces matrices N_i s'obtiennent directement par des formules (1.5) et (1.6) que se généralisent à la formule de récurrence (1.8).

Pour les graphes A_n en général la **formule de récurrence tronquée de** $SU(2)$ est :

$$\left.\begin{array}{rcll} N_0 & = & \mathbb{1}_{n\times n} & \\ N_1 & = & Ad(A_n) & \\ N_1.N_i & = & N_{i-1}+N_{i-2} & \qquad i=2,\dots,n-2 \\ N_1.N_{n-1} & = & N_{n-2} & \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

où $Ad(A_n)$ est la matrice d'adjacence du graphe A_n. Elles forment l'algèbre matricielle du graphe A_n et fournissent une représentation fidèle de l'algèbre de graphe A_n :

$$N_i.N_j = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k\, N_k \;=\; \sum_k (N_i)_{jk}\, N_k \tag{1.9}$$

Pour $SU(3)_\ell$, nous pouvons suivre la même démarche. Connaissant le graphe $\mathcal{A}_\ell$, nous obtenons les matrices d'adjacence $N_{(1,0)}$, $N_{(0,1)}$ et nous pouvons construire l'algèbre du graphe $\mathcal{A}_\ell$, dont une représentation fidèle est donnée par les matrices $N_i = N_{\lambda,\mu}$. Ces matrices s'obtiennent par la **formule de récurrence tronquée de** $SU(3)$:

$$\left.\begin{array}{rcll} N_{\lambda,\mu} & = & 0 & \text{si}\,\lambda<0 \;\text{ ou}\,\mu<0 \\ N_{\lambda,0} & = & N_{1,0}N_{\lambda-1,0}-N_{\lambda-2,1} & \\ N_{\lambda,\mu} & = & N_{1,0}N_{\lambda-1,\mu}-N_{\lambda-1,\mu-1}-N_{\lambda-2,\mu+1} & \text{si}\,\mu\neq 0 \\ N_{0,\lambda} & = & N_{\lambda,0}^T & \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

où N^T désigne la matrice transposée de N.

1.2.4 G comme module sur $\mathcal{A}(G)$: matrices F_i (ou E_a)

Nous considerons maintenant tous les graphes ADE ou de Di Francesco-Zuber. Ils sont notés en général par la lettre G et ses vertex étiquetés en général par les index $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots d_G - 1\}$, bien que cette notation puisse varier en fonction de la configuration du graphe, comme on le verra dans les exemples.

À chaque graphe G de type ADE ou de Di Francecsco-Zuber est associé un graphe de type $\mathcal{A}_n$, noté $\mathcal{A}(G)$, le graphe $\mathcal{A}(G)$ a le même nombre de Coxeter que G (si κ est le nombre de Coxeter de G, alors $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_{\kappa-N}$).

Les vertex de $\mathcal{A}(G)$ forment un espace vectoriel et définissent l'algèbre de graphe $\mathcal{A}_\ell$, les vertex du graphe G forment aussi un espace vectoriel qui est noté lui aussi G (la distinction entre le graphe lui même et l'espace vectoriel généré par ces vertex vient du contexte), nous voulons définir une action de $\mathcal{A}(G)$ sur G,

Propriété 1 *L'espace vectoriel G est un module sur l'algèbre definie par le graphe $\mathcal{A}(G)$, l'action d'$\mathcal{A}(G)$ sur G est comme suit :*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G) \times G &\rightarrow G \\ i.a &= \sum_b \mathcal{F}_{ia}^b \, b, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où les constants de structure $\mathcal{F}_{ia}^b$ sont des entiers non-négatifs.

Ainsi $\mathcal{F}_{ia}^b$ représente la multiplicité du vertex b dans l'action $i.a$. Pour que cette action soit un module bien défini, il faut imposer la compatibilité avec l'associativité :

$$(i \cdot j) \cdot a = i \cdot (j \cdot a) \; . \tag{1.12}$$

Utilisant (1.12), (1.9) et (1.11), et du fait que les vertex de G forment une base de cette espace vectoriel, les coefficients $\mathcal{F}_{ij}^k$ doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\sum_b \mathcal{F}_{ja}^b \, \mathcal{F}_{ib}^c = \sum_k \mathcal{N}_{ij}^k \, \mathcal{F}_{ka}^c \tag{1.13}$$

Il est naturel de poser $0_A \cdot a \; = \; a$ et $1_A.a = \sum_{b:a} b$ (la sommation se fait sur les voisins de a sur le graphe G), alors nous avons $F_0 = \mathbb{1}$, $F_1 = Ad(G)$ et les autres matrices se obtienent à partir des rélatios de recourrence (1.8) ou (1.10). L'action explicite de $\mathcal{A}(G)$ sur G est définie par ces deux relations, en imposant la compatibilité avec la multiplication dans l'algèbre $\mathcal{A}(G)$.

Dans certains cas il est possible définir un produit sur l'espace vectoriel G, qui soit compatible avec l'action de $\mathcal{A}(G)$, de manière à obtenir une algèbre commutative et associative :

$$a.b = \sum_c \mathcal{G}_{ab}^c c, \qquad\qquad \mathcal{G}_{ab}^c \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

où les coefficients $\mathcal{G}_{ab}^c$ sont les constantes de structure de l'algèbre et ils sont vus comme l'analogue de la multiplicité de c dans la décomposition $a \cdot b$ (ce sont des entiers non-négatifs). Quand cette structure multiplicative est bien définie nous disons que le graphe G a **self-fusion**.

Le résultat suivant (concernant les cas ADE) a été premièrement obtenu par Pasquier[62], et les algèbres obtenues sont quelquefois appelées algèbres de Pasquier :

Propriété 2 *Soit G un graphe de type ADE à d_G vertex. Les graphes pour lesquels il est possible de définir un produit satisfaisant les conditions (1.14) sont les graphes A_n, D_{2n}, E_6 et E_8.*

Propriété 3 *[23] Pour le système $SU(3)$ la liste des graphes possedant self-fusion est la suivante : les graphes principaux $\mathcal{A}_\ell$, la série infinie de graphes $\mathcal{D}_n$ pour $n = 0\ mod, 3$, et les trois graphes exceptionnelles $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_9$, $\mathcal{E}_{21}$.*

Dans tous les cas (self-fusion o non) nous pouvons construire une table pour de l'action du graphe principal $\mathcal{A}(G)$ sur G, de dimension $d_A \times d_G$. Cette action est codée par les d_A matrices F_i de dimension $(d_G \times d_G)$ definies comme $(F_i)_{ab} = \mathcal{F}^b_{ia}$. De la propriété de structure de module (1.11) plus la compatibilité avec l'associativité (1.12), il est immédiat de trouver que les matrices F_i satisfont :

$$F_i\ F_j = \sum_k \mathcal{N}^k_{ij} F_k\ , \tag{1.15}$$

elles forment donc une représentation de l'algèbre de fusion de dimension d_G (les matrices N_i forment une représentation de dimension d_A de l'algèbre de fusion). Les matrices F_i satisfont les relations les récurrence (1.8) ou (1.10)(cas $SU(2)$ ou $SU(3)$ respectivement) avec idedntité $F_0 = \mathbb{1}_{d_G \times d_G}$ et générateur $F_1 = Ad(G)$.

1.3 La bigèbre de Hopf faible $\mathcal{B}$ associé a un graphe ADE

A tout graphe de Coxeter-Dymkin généralisé est associé un groupoïde quantique (ou algèbre de Hopf faible) que nous appelons $\mathcal{B}$. La structure générale de ce grupoïde quantique et les algèbres correspondantes ont été obtenus pour tous les graphes des systèmes $SU(2)$, $SU(3)$ et même $SU(4)$ (travaux non publiés d'A. Ocneanu) mais cette structure n'a été totalement explicitée (constants de structure, cellules, etc) que dans les cas $SU(2)$ pour les diagrammes de type A_n [28] [20]. Il a été prouve [57] que toutes ces structures algébriques décrivent également les cas $SU(N)$ (notamment les diagrammes de Di Francesco-Zuber), bien que cette généralisation soit loin d'être évidente. Le résumé que nous allons présenter ne s'applique, en principe, que au cas $SU(2)$, cependant nous incluons des observations permettant la généralisation à un exemple simple du système $SU(3)$. Cette présentation ne prétend pas être une exposition de la façon dont on peut associer un grupoïde quantiques à un graphe de Coxeter généralisé, nous effectuons un survol suffisamment cohérent pour permettre de saisir le contexte dans lequel s'insèrent les chapitres 2 et 3 qui représentent finalement le sujet principal de notre travail.

1.3.1 L'espace vectoriel des triangles admissibles.

Cas $\mathcal{A}_n$ su système $SU(2)$.

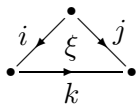
Considérons les représentations irréductibles de $SU(2)_q$ qui sont étiquettées par les vertex d'un graphe A_n du système $SU(2)$. Un triplet $\{i, k, j\}$ est dit admissible si la représentation étiquetée par i apparaît dans la décomposition en somme de représentations irréductibles du produit tensoriel $j \otimes k$. Cette définition est naturelle pur les représentations iredcutibles de

$SU(2)$ (étiquetées par les vertex du graphe $\mathcal{A}_\infty$), ou pour les représentation irréductibles du graphe du groupe quantique $SU(2)_q$, avec q racine de la unité. Mais la définition de la règle déterminant l'ensemble de triplets admissibles peut être donnée sans connaître la structure de groupe (quantique) sous-jacent, en se servant de la règle booléenne d'admissibilité suivante :

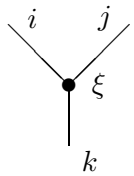
$$(i,k,j)\, mod\, 2 = 0 \wedge\ i+k-j \geq 0 \wedge\ -i+k+j \geq\ 0\ \wedge\ i-k+j\ \wedge\ i+k+j \leq\ 2\kappa-4\ \ .$$

Une manière simple de déterminer les triplets admissibles associés à un graphe A_n peut se faire au travers des matrices de fusion, qu'on peut obtenir facilement à partir de la matrices d'adjacence du graphe, ou de sa table de multiplication. En effet chaque entrée de la table de multiplication du graphe A_n détermine un ou plussieur triplets admissibles, le triplet $\{i,k,j\}$ sera admissible si l'irrep j apparaît dans le résultat du produit $i \cdot k$. Un triplet admissible sera note par ξ^k_{ij} ou par des vecteurs $|\, i \xrightarrow{k} j\,\rangle$, souvent on recourt à la notation représentant ces vecteurs par des triangles ou des vertex a trois arêtes comme suit :

$$\xi^k_{ij} \quad = \quad (i,\, k,\, j) \quad = \quad |\, i \xrightarrow{k} j\,\rangle \quad =$$



$$=$$



(1.16)

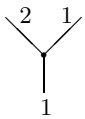
Nous appellerons **triangles admissibles** les triplets admissibles associés au graphe, c'est à dire dans ce contexte on ne considère pas équivalents deux triangles avec les étiquettes permutées. Toutefois, nous remarquons que dans ce cas des graphes A_n, les permutations d'un triangle admissible sont des triangles admissibles. La représentation irréductible de l'arête verticale (étiqueté par k) est appelé la **longueur** du triangle. Les triangles admissibles engendrent un espace vectoriel

$$H\ = \oplus_{i=0}^{\kappa-1}\, H_i\ ,$$

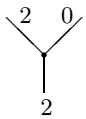
gradué par la longueur des triangles et où chaque sous espace $H_i \cong \mathbb{C}^{\,d_i}$ est engendré par les triangles admissibles ξ^k_{ij} avec k fixe. La dimension d_k de chaque sous-espace H_k, est égale à la somme des entrées de la matrice N_i. Cette propriété peut être vérifié facilement puisque les matrices N_i donnent les constantes de structure de l'algèbre de graphe A_n (voir Propriété 4).

Exemple : cas A_3 système $SU(2)_\ell$ A partir de la table de multiplication (1.7) nous pouvons construire l' espace H_{A_3} de triangles admissibles de A_3. La table de multiplication nous donne par exemple :

$$2 \cdot 1\ =\ 1 \Longrightarrow$$

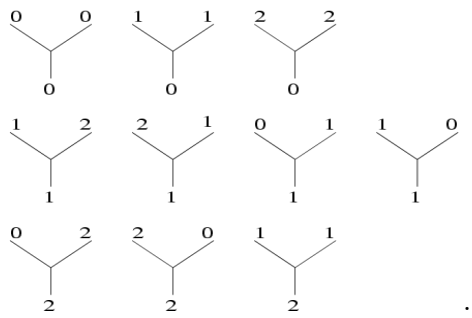


ou encore $\quad 2 \cdot 2\ =\ 0 \Longrightarrow$



.

L'espace vectoriel H_{A_3} est donné par l'ensemble de triangles suivant :



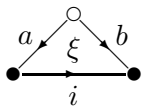
(1.17)

H_{A_3} est un espace vectoriel de dimension 10, avec trois sous-espaces H_0 et H_2 de dimension 3 et H_1 de dimension 4, H_{A_3} est la somme directe de ces trois sous-espaces.

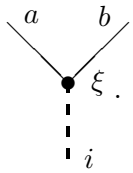
Cas G du système $SU(2)$.

Il y a une généralisation de cette construction quand le diagramme A_n est remplacé par un diagramme ADE quelconque G. Ces diagrammes ne possèdent pas nécessairement la propriété de self-fusion mais, comme nous avons vu le espace vectoriel engendré par les vertex de G est un module sur le graphe associe $\mathcal{A}(G)$. Dans ce cas la table de multiplication $\mathcal{A}(G) \times \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$ est substitué par l'action $\mathcal{A}(G) \times G \to G$ de $\mathcal{A}(G)$ sur G. A partir de cette table nous allons définir des **triangles admissibles généralises** ξ^i_{ab} oú deux index (a et b) sont des vertex du graphe G et la longueur i est un vertex du graphe principal $\mathcal{A}(G)$.

$$\xi^i_{ab} \quad = \quad (a\,,i\,,b) \quad = \quad |\,a \xrightarrow{i} b\,\rangle \quad =$$



$$=$$

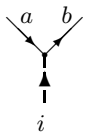


(1.18)

Dans ce cas généralisé il peut y avoir des multiplicité dans les triangles admissibles, ceci correspond a de coefficients plus grands que un dans les entrées de la table de l'action de $\mathcal{A}(G)$ sur G. Pour simplifier la notation nous omettrons ici l'index de multiplicité, mais il faut le tenir en compte pour le traitement des cas particuliers. Nous remarquons aussi les symétries de ces triangles généralisés, si (a, i, b) est un triangle admissible, alors le triangle permuté (b, i, a) est aussi un triangle admissible, cependant, de égale manière que pour le cas A_n, les triangles avec les étiquettes permutées ne sont considérés égaux.

Observation pour le cas $SU(3)$ Nous notons les triangles admissibles des graphes $SU(3)$ par le même symbole $(a\,,i\,,c)$. Dans ce cas la permitation des vertices (même pour les cas $\mathcal{A}_\ell$) ne donne pas des triangles admissibles comme résultat. Dans ce cas la conjugation jue un rôle, si $(a\,,i\,,b)$ est un triangle admissible associé à un graphe $SU(3)$, alors les tiagles

$(\bar{b}\,,i\,,\bar{a})$ et $(b\,,\bar{i}\,,a)$ sont admissibles. Nous répresentons les triangles admissibles $SU(3)$ par des diagrammes de difusion orientés :

$(a,\, i,\, b) \quad =$ 

Définition 4 *Nous définissons l'espace vectoriel H comme l'espace vectoriel des triangles admissibles sur G. H est fini-dimensionnel, gradué par la longueur des triangles i, et donne par la somme :*

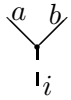
$$H \;=\; \bigoplus_{i\in\mathcal{A}(G)} H_n \;, \tag{1.19}$$

où H_i est l'sous-espace vectoriel engendré par les triangles admissibles de longueur i.

L'ensemble de triangles admissibles $\{\xi^i_{a,b}\}$ constitue une base de H, il existe plusieurs choix naturels pour définir un produit scalaire sur H, une des possibilités consiste à choisir celui pour lequel la base est orthonormée :

$$\langle\, \xi^i_{a,b}\,,\, \xi^{i'}_{a',b'}\,\rangle = \delta_{a\,a'}\;\delta_{b\,b'}\;\delta_{n\,n'} \;\;. \tag{1.20}$$

Propriété 4 *La dimension du sous-espace H_i est $d_i = \sum_{a,b}(F_i)_{a,b}$.*

<u>Démonstration</u> : Les constantes de structure de l'action de $\mathcal{A}(G)$ sur G sont donnes par les matrices F_i, chaque entrée non nulle de la table de multiplication de cette action est donnée par une entrée non nulle de la matrice $(F_i)_{ab}$, et définie un triangle admissible 

alors le nombre total de triangles admissibles pour i fixe est d_i ■.

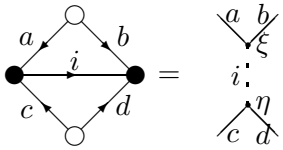
L'espace dual $\widehat{H}$, est un espace vectoriel gradué par la longueur des vecteurs de la base duale $\hat{\xi}^j_{dc}\langle d \xleftarrow{\;j\;} c|\}$, le pairing entre ces deux espaces est par définition :

$$\langle\, d \xleftarrow{\;i\;} c\,|\, a \xrightarrow{\;j\;} b\,\rangle = \;\delta_{a\,c}\;\delta_{b\,d}\;\delta_{i\,j} \tag{1.21}$$

1.3.2 Bigèbre faible $\mathcal{B}$

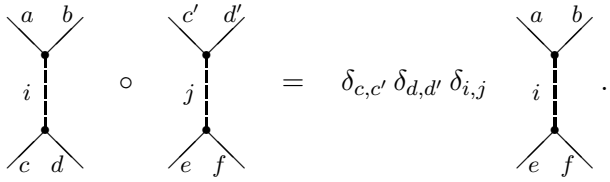
Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{B} = \bigoplus_i End(H_i)$ des endomorphismes des triangles admissibles. $\mathcal{B}$ est un espace gradué par la longueur i de doubles triangles et s'écrit comme $\mathcal{B} = \bigoplus_i\, H_i \otimes \widehat{H}_i$. $\mathcal{B}$ a une base ortonormée forme par de diagrammes de diffusion verticaux :

$$e_I \quad = \quad |\, a \xrightarrow{\;i\;} b\,\rangle\,\langle\, d \xleftarrow{\;i\;} c\,| \quad = \quad = \quad , \tag{1.22}$$



où $(a\,,i\,,b)$ et $(c\,,i\,,d)$ sont des triangles admissibles, et I est le multi-index formé par (ξ,η,i). Cette base permet de définir dans $\mathcal{B}$ un produit associatif (noté $\circ$), donne de manière naturelle par la composition verticale des endomorphismes de la base $\{e_I\}$: $e_{\xi\xi'}(i)\circ e_{\eta\eta'}(j) =$

$\delta_{ij}\ \delta_{\xi'\eta}\ e_{\xi\eta'}(i)$. Ce produit de composition est appelé **produit vertical**, et est représenté par le diagramme suivant :

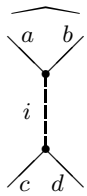


(1.23)

Le produit vertical fait de $(\mathcal{B}, \circ)$ une algèbre semi-simple qui peut être diagonalisée et qui est isomorphe à une somme de blocs matriciels (labellés par i) et agissant sur l'espace vectoriel gradué H.

Considérons maintenant l'espace vectoriel dual $\widehat{\mathcal{B}}$ engendré par la base duale $\hat{e}^I$ et représenté par le diagramme :

$\widehat{e}^I \quad =$



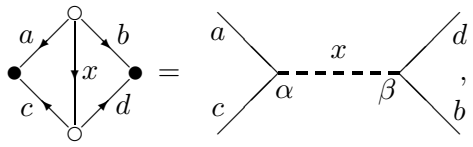
(1.24)

le pairing entre ces deux bases est par définition $\langle \widehat{e}^{\,J}\,,\, e_{\,I}\rangle = \delta^J_I$. Le produit $\circ$ induit un coproduit $\widehat{\Delta}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$ définit par l'action sur les éléments de la base duale comme

$$\langle \widehat{\Delta}\ \hat{e}^{\,J}\,,\, e_{\,I} \otimes e_{\,K}\rangle \ \equiv\ \langle \hat{e}^{\,J}\,,\, e_{\,I} \circ e_{\,K}\rangle\,. \tag{1.25}$$

Nous definissons aussi une deuxième base de l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ noté E^J et représentée par les diagrammes horizontaux

$E^{\,J} \quad =$



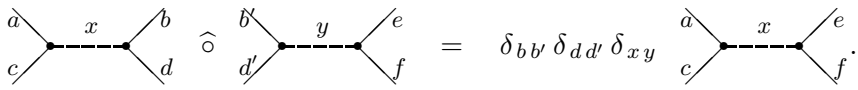
(1.26)

avec le multi index $J = (\alpha, \beta, x)$. $\widehat{\mathcal{B}}$ est gradé par la longueur horizontale et s'écrit comme somme de blocs des sous espace de longueur fixe $\widehat{\mathcal{B}}(G) = \bigoplus_x \widehat{\mathcal{B}}_x$.

La composition des diagrammes horizontaux definit sur $\widehat{\mathcal{B}}(G)$ un produit associatif $E^{\alpha\beta}(x) \,\widehat{\circ}\, E^{\alpha'\beta'}(y) = \delta_{\,xy}\ \delta_{\,\beta\alpha'}\ E^{\alpha\beta'}(x)$ appelé **produit horizontal**[4], et est représenté par

[4]En se servant d'un produit scalaire sur $\mathcal{B}$, par exemple celui associé au produit scalaire sur H définit précédemment, on peut identifier les deux espaces et y faire correspondre au produit vertical sur $\widehat{\mathcal{B}}$ un produit sur $\mathcal{B}$ qu'on appelle produit de convolution.

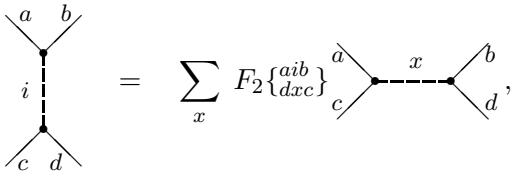
le diagramme suivant :



$$\widehat{\circ} \qquad = \quad \delta_{b\,b'}\,\delta_{d\,d'}\,\delta_{x\,y} \qquad . \tag{1.27}$$

Ce produit fait de $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\circ})$ une algèbre semi-simple isomorphe à une somme de blocs matriciels labellés par un index x et agissant sur l'espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_x V_x$. Les matrices élémentaires (unités matricielles) de chaque bloc x sont les élément de la base E^I.

Le changement de base entre la base dual $\hat{e}^{\,I}$ et la base des diagrammes horizontaux $E^{\,J}$ en $\widehat{\mathcal{B}}(G)$ est définie par un ensemble de coefficients F_2 appelés **Cellules d'Ocneanu** :



$$= \sum_x F_2\{{}^{aib}_{dxc}\} \qquad ,$$

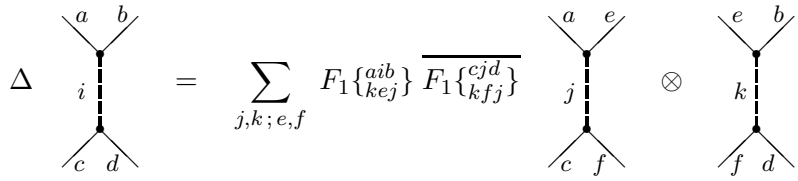
Le pairing entre les deux bases est donne par définition par $\langle\, \hat{e}^{\,I}\,,\, \hat{E}_{\,J} \rangle = F_2{}^{I}_{\;J}$. La definition de la base E^J, et donc de l'algèbre $\widehat{\mathcal{B}}$ est équivalente à la donée des coefficients F_2 qui sera donne plus loin.

Le produit associatif $\widehat{\circ}$ induit dans $\mathcal{B}$ un coproduit Δ coassociatif, faisant de $(\mathcal{B}, \Delta)$ une cogèbre, les deux structures dans $\mathcal{B}$ sont compatibles, c'est-à-dire entre autre que Δ est un homomorphisme $(\mathcal{B}, \circ) \mapsto (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \circ)$:

$$\Delta(u \circ v) = \Delta(u) \circ \Delta(v), \qquad\qquad u, v \in \mathcal{B}. \tag{1.28}$$

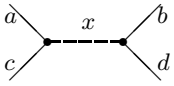
Cette compatibilité n'est pas ni évidente ni automatique, et résulte des propriétrés particulières des coefficients F_2 que nous allons ennoncer plus bas. Ces conditions de compatibilité sont prises dans le sens "faible", c'est à dire $\Delta(\mathbb{1}) \neq \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ mais $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_t \otimes \mathbb{1}_s$ ou nous sous entendons une sommation das le membre de droite. La definition d'un coproduit compatible avec la multiplication dans $\widehat{\mathcal{B}}$ est en fait l'un des dificultés mayeures de la construction explicite de la bigébre.

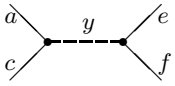
Le coproduit Δ dans $\mathcal{B}$ est codé par un ensemble de coefficients appelés F_1 :

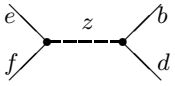


$$= \sum_{j,k\,;\,e,f} F_1\{{}^{aib}_{kej}\}\, \overline{F_1\{{}^{cjd}_{kfj}\}} \qquad \otimes \qquad . \tag{1.29}$$

Le coproduit $\widehat{\Delta}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$ est codé par un ensemble de coefficients appelés F_3 :

$\widehat{\Delta}$ 

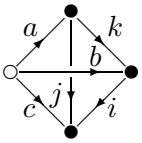
$= \sum_{y,z;e,f} F_3\{{}^{aye}_{zbx}\}\ \overline{F_3\{{}^{cyf}_{zdx}\}}$ 

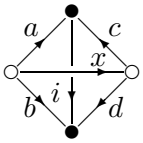
$\otimes$ 

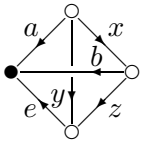
. (1.30)

La compatibilité avec les produits $\circ$ et $\widehat{\circ}$ impose sur l'ensemble de ces coefficients $\{F_1, F_2, F_3\}$ des conditions pour faire de $\mathcal{B}$ (et de son dual $\widehat{\mathcal{B}}$) une bigèbre de Hopf faible. Ces conditions sont décrites par un ensemble d'équations connu sous le nom de "*The Big Pentagon Equation*".

Équations pentagonales Utilisant la représentation diagrammatique des éléments de la base de $\mathcal{B}$ et de $\widehat{\mathcal{B}}$ en termes de triangles duaux, nous pouvons illustrer les coefficients F_1, F_2 et F_3 comme des tétrahèdres :

$F_1\{{}^{ajc}_{ibk}\} =$ 

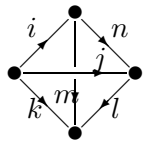
$F_2\{{}^{aib}_{dxc}\} =$ 

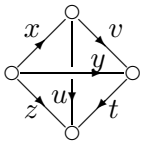
$F_3\{{}^{aye}_{zbx}\} =$ 

La condition de coassociativité du coproduit Δ est vérifiée s'il existe une fonction F_0, illustrée par un tétrahèdre sans vertex $\bigcirc$ telle que l'équation de type pentagonale suivante soit satisfaite :

$$F_0\, F_1\, F_1 \;=\; F_1\, F_1 \qquad (P_1)$$

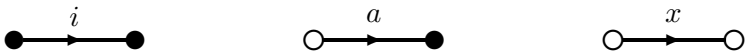
Pour que F_0 satisfasse (P_1) il est aussi nécessaire que F_0 satisfasse une équation pentagonale du type $F_0\, F_0\, F_0 = F_0\, F_0$, notée (P_0). De manière duale, l'associativité du coproduit dans $\widehat{B}$ impose l'existence d'une fonction F_4 illustrée par un tétrahèdre sans vertex $\bullet$, telle qu'elle satisfasse l'équation pentagonale du type $F_4\, F_3\, F_3 = F_3\, F_3$, notée (P_4) ; de même F_4 doit satisfaire une équation du type $F_4\, F_4\, F_4 = F_4\, F_4$, notée (P_5). Les deux fontions F_0 et F_4 sont illustrées par :

$F_0\{{}^{imk}_{ljn}\} =$ 

$F_4\{{}^{xuz}_{tyv}\} =$ 

Enfin, la condition pour que le *pairing* transpose le coproduit de $\mathcal{B}$ en le produit de $\widehat{\mathcal{B}}$ est aussi une équation pentagonale de type $F_2\, F_1\, F_1 = F_2\, F_2$ (P_2). De manière duale, la transposition du produit de $\mathcal{B}$ en le produit de $\widehat{\mathcal{B}}$ implique $F_2\, F_3\, F_3 = F_2\, F_2$ (P_3).

Remarque 1 *Dans ce contexte la nature des indices $\{i, j, k, \cdots\}$; $\{a, b, c, \cdots\}$; $\{x, y, z, \cdots\}$. correspond respectivement à trois types d'arcs orientés :*



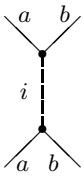
Insistons sur le fait qu'il n'y a pas d'arc reliant $\bullet$ à $\bigcirc$. Alors la notation $\{{}^{\cdots}_{\cdots}\}$ à elle seule suffit sans qu'il soit nécessaire de préciser s'il s'agit de F_0, F_1, F_2, F_3 ou F_4.

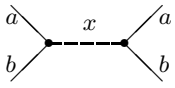
Pour les graphes du système $SU(2)$ les différents coefficients F apparaissent comme des généralisations des symboles de Racah, [20],[28]. Pour le système $SU(3)$ l'orientation des arêtes des graphes font que cette identification demande une généralisation.

La connaissance d'un ensemble $F = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4)$ vérifiant "*The Big Pentagon Equation*" $(P) = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ permet alors de construire toutes les structures d'une bigèbre de Hopf faible [13]. Toutefois, la résolution explicite de toutes les équations et la détermination des différents coefficients pose des problèmes techniques extrêmement complexes.

1.3.3 Projecteurs minimaux centraux, unités et counités

Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des doubles triangles associé au graphe G, et $\widehat{\mathcal{B}}$ son dual. $(\mathcal{B}, \circ)$ et $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\circ})$ sont des algèbres semi-simples et isomorphes à une somme de blocs matricielles labellés par i et x respectivement. Dans $\mathcal{B}$ nous dénotons π_i le projecteur de dimension $d_i \times d_i$ du bloc i, et dans $\widehat{\mathcal{B}}$ nous dénotons ϖ_x le projecteur de dimension $d_x \times d_x$ du blocs x. Les bases e_I et E^J sont les matrices élémentaires des produits respectives, ceci nous amène à définir les projecteurs suivantes :

$\pi_i = \sum_{a,b}$ 

et $\varpi_x = \sum_{a,b}$ 

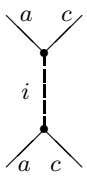
(1.31)

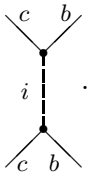
où la sommation est effectuée sur tous les triangles admissibles (a, n, b) ou (a, x, b). Nous pouvons vérifier que ces opérateurs sont bien des projecteurs minimaux centraux puisque a partir des définitions des produits de vertical et horizontal (1.23) et (1.27) il est immédiat que

$$\pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j} \qquad \varpi_x \,\hat{\circ}\, \varpi_y = \delta_{x,y}$$

L'unité dans $\mathcal{B}$ peut-être obtenue immédiatement à partir de cette construction puisque $\mathcal{B}$ est explicitement isomorphe à une somme de blocs matricielles de dimension $d_i \times d_i$, alors nous avons :

$$\mathbb{1} = \sum_i \pi_i \ . \tag{1.32}$$

A partir de cette définition, et en utilisant la équation (1.31) l'action du coproduit Δ sur l'identité est $\Delta\,\mathbb{1} = \sum_c t_c \otimes s_c = \mathbb{1}_t \otimes \mathbb{1}_s$, avec $t_c = \sum_{i,a}$ 

et $s_c = \sum_{i,b}$ 

.

Les vecteurs $\{t_c\}$ et $\{s_c\}$ engendrent respectivement les sous espaces *target* $\mathcal{B}_t$ et *source* $\mathcal{B}_s$, son existence vient de la théorie générale des algèbres de Hopf faibles [14], mais la réalisation

que nous avons présentée est spécifique à exemples associés aux graphes ADE (c'est a dire $SU(2)$)[20]. Elle marche aussi pour l'exemple

De la même manière l'unité dans $\widehat{\mathcal{B}}$ est obtenue comme

$$\mathbb{1} = \sum_x \varpi_x \ , \tag{1.33}$$

puisque $\widehat{\mathcal{B}}$ est isomorphe a une somme de blocs matricielles de dimension $d_x \times d_x$.

La définition de l'unité en $\widehat{\mathcal{B}}$ nous permet de définir la counité ϵ dans $\mathcal{B}$. Dans le cas des algèbres de Hopf la counite et le coproduit sont des homomorphismes, mais pour les groupoïdes quantiques à cause de l'action du coproduit sur l'unité, la condition d'homomorphisme concernant la counité est affaiblie de la façon suivante :

$$\epsilon(\xi \circ \xi') = \epsilon(\xi\, \mathbb{1}_t)\epsilon(\xi'\, \mathbb{1}_s).$$

Explicitement l'action sur les éléments de la base est comme suit :

$$\epsilon(e_I \circ\ e_J) = \sum_c \epsilon(e_I \circ t_c)\epsilon(e_J \circ s_c) \ , \tag{1.34}$$

et est définie comme l'application $\epsilon : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ envoyant les doubles triangles de longueur $i = 0$ a 1 et tous les autres a 0. De manière analogue on peut définir une counité $\hat{\epsilon}$ sur $\widehat{\mathcal{B}}$ dans le sens faible. C'est un'application lineaire à valeurs complexes égale à 1 si $x = 0$ et égale à 0 si non.

Il existe aussi une antipode S dans $\mathcal{B}$ (et $\widehat{S}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$), faisant de $\mathcal{B}$ (et $\widehat{\mathcal{B}}$) une algèbre de Hopf faible ou **grupoïde quantique**. Mais nous n'allons pas approfondir cet aspect d'advantage, le seul commentaire est que dans ce cas aussi les axiomes d'une algèbre de Hopf usuelle sont alors modifiés car ils contiennent les éléments apparaissant dans $\mathbb{1}_s$ et $\mathbb{1}_t$.

1.3.4 Algèbres de caractéres pour $\mathcal{B}$ et $\widehat{\mathcal{B}}$

Les caracteres pour l'algèbre semisimples $(\mathcal{B}, \circ)$ sont les élements $\check{\pi}_i; \in \widehat{\mathcal{B}}$ definies comme

$$\langle \check{\pi}_i, \xi\eta \rangle \ = \ Tr(\pi_i \circ \xi\eta). \tag{1.35}$$

Les caracteres $\check{\pi}_i$ sont des élements de l'agèbre $(\widehat{\mathcal{B}}, \hat{\circ})$ et générent une sous algèbre isomophe à l'algebre $\mathcal{A}(G)$ du graphe associé à G. Le produit est alors donné par

$$\check{\pi}_i \,\hat{\circ}\, \check{\pi}_j \ = \ \mathcal{N}_{i,j}^k\, \check{\pi}_k$$

où les constantes de structure $\mathcal{N}_{i,j}^k$ sont celles de l'équation 1.4.

De la même manière, les caractères de l'algèbre semisimple $(\widehat{\mathcal{B}}, \hat{\circ})$ sont les éléments $\check{\varpi}_x; \in \mathcal{B}$ définis comme

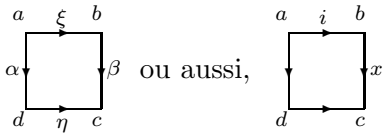
$$\langle \hat{\xi\eta}, \check{\varpi}_x \rangle \ = \ Tr(\hat{\xi\eta} \,\hat{\circ}\, \varpi_x). \tag{1.36}$$

Les caractères $\breve{\varpi}_x$ sont des éléments de l'algèbre $(\mathcal{B}, \circ)$ et engendrent une sous algèbre isomorphe à une algèbre de graphe appelé **algèbre des symétries quantiques** et dénotée $Oc(G)$. L'algèbre de caractères $Oc(G)$ est en général non commutative et a en général deux générateurs, le graphe $Oc(G)$ est composé de deux graphes superposés ayant le même ensemble de vertex, chacun d'entre eux décrivant le graphe de Cayley de la multiplication par le générateur correspondant. Le graphe $\mathcal{A}(G)$ est spécial en ce sens qu'un seul générateur suffit.

1.3.5 Cellules d'Ocneanu

Les systèmes de cellules ont été introduits par Ocneanu dans le contexte de paragroupes et des inclusions de sous-facteurs [55][57] (voir aussi [20]). Ces cellules ont par la suite été reliés à des modèles intégrables définis sur le réseau (analogie avec les poids de Boltzmann [65]).

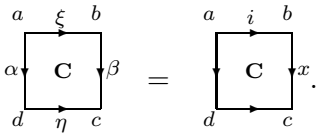
Considérons un graphe de Dynkin G, ses vertex notés $\{a\,, b\,, c\,, \ldots\}$ et soit μ_a la composante de Perron-Frobenius de a (dimension quantique). Soient $\xi = (a, i, b), \eta = (d, i, c), \alpha = (a, x, d), \beta = (b, x, c)$ des triangles admisibles sur G. Une cellule d'Ocneanu est un carré dont les arrêtes horizontales sont labellées par des triangles ξ, η de la même longueur i, et les arrêtes verticales sont labellés par des triangles α, β de longueur x, tels que : $s(\xi) = s(\alpha) = a; r(\xi) = s(\beta) = b; r(\alpha) = s(\eta) = d; r(\eta) = r(\beta) = c$. Ces cellules sont répresentés par les diagrammes suivantes :



(1.37)

Une celulle sera dite **basique** si les triangles qui la composent sont tous de longueur un. Une **connexion** x est une application qui assigne à chaque cellule d'Ocneanu un nombre complexe, et qui doit vérifier certaines conditions rappelées plus loin. Ce nombre complexe coïncide avec la fonction pentagonale F_2 lorsque ξ, η sont des triangles de longueur i et α, β des triangles verticaux de longueur horizontal x, et sera noté :

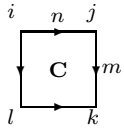
$F_2\{{}^{ai\,b}_{cxd}\}$ =



. (1.38)

Pour A_n $SU(2)$ les coeficients F_0, F_1, F_2, F_2, F_3, F_4 sont egaux parce que tous les index sont codés par le graphe A_n et sont equivalents à les simbols de Racah (voir [20]) . Dan ce cas nous ecrivons simplement

$\{{}^{i\,n\,j}_{kml}\}$ =



, (1.39)

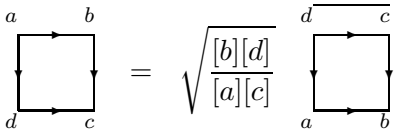
où nous avons les triangles admissible (i, n, j), (k, n, l), (i, m, l) et (k, m, j). Nous remarquons que cet identification implique que les cellules ont les symétries du quadrilatère, c'est a dire

que nous avons les identifications :

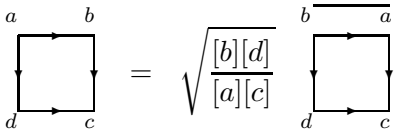
$$\left\{{i\,n\,j \atop k\,m\,l}\right\} = \left\{{n\,k\,l \atop m\,i\,j}\right\} = \left\{{k\,m\,j \atop i\,n\,l}\right\} = \left\{{m\,i\,l \atop n\,k\,j}\right\} = \left\{{n\,i\,j \atop m\,k\,l}\right\} = \left\{{i\,m\,l \atop k\,n\,j}\right\} = \left\{{m\,k\,j \atop n\,i\,l}\right\} = \left\{{k\,n\,l \atop i\,m\,l}\right\}$$

ces propriétés de symétrie ne sont pas satisfaites dans le cas $SU(3)$ comme nous le verrons.

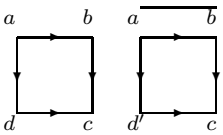
Pour faciliter la lecture, nous n'allons pas écrire explicitement tous les indices. Elles doivent satisfaire les conditions suivantes [20], [55] :



$= \sqrt{\dfrac{[b][d]}{[a][c]}}$ réflexion horizontale (A_1)

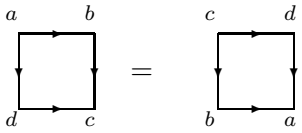


$= \sqrt{\dfrac{[b][d]}{[a][c]}}$ réflexion verticale (A_2)

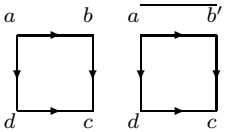
$\sum_b$ 

$= \delta_{d,d'}$ unitarité (A_3)

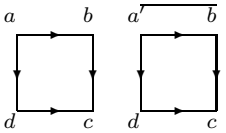
où $\overline{\square}$ est le complexe conjugué de $\square$ et $[v_i]$ est la q-dimension du vertex v_i. Les conditions précédentes impliquent aussi :



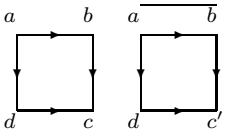
$=$ réflexion diagonale (A_4)

$\sum_d$ 

$= \delta_{b,b'}$ unitarité (A_5)

$\sum_c$ 

$= \sqrt{\dfrac{[b][d]}{[a][c]}}\ \delta_{a,a'}$ unitarité (A_6)

$\sum_a$ 

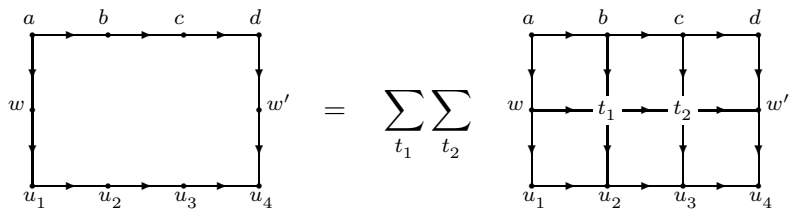
$= \sqrt{\dfrac{[b][d]}{[a][c]}}\ \delta_{c,c'}$ unitarité (A_7)

Pour un système de cellules, les conditions d'unitarité et de réflexions fixent les valeurs possibles des connexions, à une liberté de choix de jauge près. Si $X(a,b,c,d)$ est la valeur d'une cellule – pour une connexion x donnée – satisfaisant les propriétés (A_1, A_2, A_3), alors

$$X'(a,b,c,d) = U(a,d)^* U(d,c)^* X(a,b,c,d) U(a,b) U(b,c), \tag{1.40}$$

avec $U(a,b)^* = U(b,a)$, satisfait aussi ces propriétés [65]. À un choix de jauge près, pour un système de cellules basiques, il existe deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre. Une formule générale pour ces cellules basiques est donnée dans [56] et [20] pour le cas A_n. Dans [20] l'identification des cellules de A_n avec les symbols de Racah est faite explicitement.

La valeur d'une connexion pour des cellules générales s'obtient à partir des valeurs des cellules basiques. Il est plus instructif de présenter un exemple. Considérons une cellule où les chemins horizontaux sont de longueur 3 et les chemins verticaux de longueur 2. On montre que la valeur de la connexion de cette cellule peut s'obtenir à partir de la somme sur toutes les configurations permises pour les vertex intérieurs de la valeur de la connexion de la cellule "remplie", où la valeur d'une connexion pour une cellule "remplie" est donnée par le produit de toutes les cellules basiques qui la composent.



(1.41)

Nous allons voir que cette proprieté des connexions nous permet d'obtenir l'ensemble complet des cellules de l'exemple A_2 $SU(2)$ (mais aussi pour le ca $\mathcal{A}_1$ $SU(3)$) à partir de la valeur ded la connectiondes cellules basiques.

1.4 Le graphe d'Ocneanu $Oc(G)$

1.4.1 Définition

La diagonalisation de $\widehat{\mathcal{B}}$ pour la loi $\hat{\circ}$ donne lieu à des projecteurs minimaux centraux ϖ_x qui, au travers du pairing definie par l'équation (1.36), permet de définir les caractères irréductibles dont la multiplication par la loi $\circ$ est codée par le graphe d'Ocneanu de G.

Algèbre du graphe $Oc(G)$

Les vertex de ces graphes sont notés $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \ldots)$ et nous appelons d_O le nombre de vertex du graphe. Considérons l'espace vectoriel de dimension d_O formé par les vertex du graphe $Oc(G)$. Les éléments $\underline{1}$ et $\underline{1'}$ sont appelés respectivement les générateurs chiraux gauche et droit.

Le graphe d'Ocneanu est la superposition de deux graphes de Cayley de multiplication par les générateurs. La multiplication par le générateur gauche $\underline{1}$ (resp. droit $\underline{1'}$) est donnée par la somme des voisins reliés par une ligne bleue (resp. rouge). De plus, l'élément $\underline{0}$ est considéré comme l'identité pour cette multiplication. Nous avons donc :

$$\underline{0} \,.\, \underline{x} = \underline{x}, \qquad \underline{1} \,.\, \underline{x} = \sum_{\underline{y} - \underline{1}} \underline{y} = \sum_{y} (O_{\underline{1}})_{xy}\, \underline{y}, \qquad \underline{1'} \,.\, \underline{x} = \sum_{\underline{y} \cdots \underline{1'}} \underline{y} = \sum_{y} (O_{\underline{1'}})_{xy}\, \underline{y}. \tag{1.42}$$

où $O_{\underline{1}}$ et $O_{\underline{1}'}$ sont les matrices d'adjacence correspondantes aux générateurs $\underline{1}$ et $\underline{1}'$. À partir de ces données et en imposant l'associativité, il est possible d'étendre la multiplication à tous les vertex de $Oc(G)$. Nous obtenons alors l'algèbre de graphe $Oc(G)$, qui sera aussi notée $Oc(G)$ et dont la multiplication est donnée par :

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, \underline{z} \tag{1.43}$$

où $\mathcal{O}^z_{xy} \in \{0, 1, \ldots\}$ est vu comme la multiplicité de $\underline{z}$ dans $\underline{x}.\underline{y}$. Cette algèbre est appelée l'**algèbre des symétries quantiques** de G. Contrairement aux algèbres de graphes G, les algèbres $Oc(G)$ ne sont pas forcément commutatives.

À chaque vertex $\underline{x}$ du graphe $Oc(G)$ nous associons la matrice $(d_O \times d_O)$ O_x telle que $(O_x)_{zy} = \mathcal{O}^z_{xy}$. Nous avons notamment $O_0 = \mathbb{1}_{s\times s}$ l'identité de l'algèbre et O_1 , $O_{1'}$ les deux générateurs. De la même manière que pour les matrices N_i et F_i, la compatibilité avec le produit (1.43) impose que les matrices O_x donnent une représentation fidèle de l'algèbre $Oc(G)$:

$$O_x\, O_y = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, O_z = \sum_z (O_x)_{zy} O_z\ . \tag{1.44}$$

1.4.2 G comme module sur $Oc(G)$: matrices S_x

Les graphes d'Ocneanu définissent une algèbre de graphe $Oc(G)$. Nous voulons définir une action de $Oc(G)$ sur l'espace vectoriel G :

$$\begin{aligned} Oc(G) \times G &\rightarrow G \\ \underline{x}.a &= \sum_b \mathcal{S}^b_{xa} b \end{aligned} \tag{1.45}$$

telle que les coefficients $\mathcal{S}^b_{xa}$ soient des entiers non-négatifs (ainsi $\mathcal{S}^b_{xa}$ représente la multiplicité de b dans $\underline{x}.a$). Pour que cette action soit bien définie, il faut imposer :

$$(\underline{x}.\underline{y}).a = \underline{x}.(\underline{y}.a) \tag{1.46}$$

Utilisant (1.43) et (1.45), et du fait que les vertex de G sont des éléments linéairement indépendants de l'espace vectoriel, les coefficients $\mathcal{S}^b_{xa}$ doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\sum_b \mathcal{S}^b_{xa} \mathcal{S}^c_{yb} = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy} \mathcal{S}^c_{za} \tag{1.47}$$

Les indices $(a, b, c, \ldots)$ sont réservés pour les vertex de G $(a, b, c = 0, 1, \ldots, d_G - 1)$, et les indices $(x, y, z, \ldots)$ sont réservés pour les s vertex de $Oc(G)$. Du fait que $\underline{1}$ et $\underline{1}'$ sont les générateurs de l'algèbre $Oc(G)$ (l'unité $\underline{0}$ peut aussi s'exprimer à l'aide de $\underline{1}$ et $\underline{1}'$), tout élément $\underline{x}$ de $Oc(G)$ s'exprime comme un polynôme sur $(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1}')$:

$$\underline{x} = Pol_x(\underline{0}, \underline{1}, \underline{1}')$$

Il est donc suffisant de définir l'action de $Oc(G)$ par ses générateurs. L'action explicite de $Oc(G)$ sur G est définie par :

$$\left.\begin{array}{rcl} Oc(G)\times G & \rightarrow & G \\ \underline{0}.a & = & a \\ (\underline{1})^n.a = (\underline{1'})^n.a & = & (1)^n.a \\ (\underline{1}.\underline{1'})^n.a & = & (1.1)^n.a \end{array}\right\} \tag{1.48}$$

À noter que même pour les cas où G ne possède pas *self-fusion*, l'action est bien définie : la multiplication $1.a$ existe toujours (codée par le graphe G, c'est à dire par l'action du générateurdu graphe $\mathcal{A}(G)$). L'action d'un élément quelconque $\underline{x}$ de $Oc(G)$ sur G s'écrit :

$$\underline{x}.a = Pol_x(\underline{0},\underline{1},\underline{1'}).a = Pol_x(0,1,1).a \tag{1.49}$$

Matrices S_x

Introduisons d_O matrices $(d_G \times d_G)$ S_x telles que $(S_x)_{ab} = \mathcal{S}^a_{xb}$. Par la propriété de module de (1.46), les matrices S_x satisfont les relations suivantes :

$$S_x.S_y = \sum_z \mathcal{O}^z_{xy}\, S_z \tag{1.50}$$

Par la définition explicite (1.48) de l'action de $Oc(G)$ sur G , nous avons : $S_0 = \mathbb{1}$, $S_1 = S_{1'} = Ad_G$. Les autres matrices S_x peuvent être obtenues à partir de la connaissance de la réalisation de $Oc(G)$.

1.5 Relations entre $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$

1.5.1 Fonctions de partition

Considérons des théories conformes à deux dimensions avec algèbre affine $\widehat{su}(2)$. Les fonctions de partition d'un système avec deux lignes de défauts x et y – appelées généralisées [63] – définies sur le tore (de paramètre modulaire τ) s'écrivent :

$$\mathcal{Z}_{x|y}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, \widetilde{\mathcal{W}}^{ij}_{xy}\, \overline{\chi}_j(\tau)\ , \tag{1.51}$$

où les $\chi_i(\tau)$ sont les caractères de l'algèbre $\widehat{su}(2)$, et les coefficients $\widetilde{\mathcal{W}}^{ij}_{xy}$ sont des entiers non-négatifs. Le cas sans ligne de défauts (x=y=0) permet d'obtenir l'invariant modulaire $\mathcal{M}$ qui comute avec les générateurs S et T du groupe modulaire ($\mathcal{M}_{ij} = \widetilde{\mathcal{W}}^{ij}_{00}$), et la fonction de partition invariante modulaire s'écrit :

$$\mathcal{Z}(\tau) = \overline{\chi}\, \mathcal{M}\, \chi \tag{1.52}$$

Définissant les matrices $(d_O \times d_O)$ $\widetilde{V}_{ij}$ telles que $(\widetilde{V}_{ij})_{xy} = \widetilde{\mathcal{W}}^{ij}_{xy}$, des conditions de compatibilité [63],[64] imposent que ces matrices doivent satisfaire l'algèbre carrée de fusion :

$$\widetilde{V}_{ij}\ \widetilde{V}_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\ \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\ \widetilde{V}_{i''j''}\ , \tag{1.53}$$

alors que les matrices $\widetilde{V}_{i1}$ et $\widetilde{V}_{1j}$ forment une représentation de l'algèbre de fusion :

$$\widetilde{V}_{i1}\ \widetilde{V}_{i'1} = \sum_{i''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\ \widetilde{V}_{i''1}, \qquad \widetilde{V}_{1j}\ \widetilde{V}_{1j'} = \sum_{j''} \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\ \widetilde{V}_{1j''}. \tag{1.54}$$

La matrice $\widetilde{V}_{11}$ est l'identité, tandis que les matrices $\widetilde{V}_{21}$ et $\widetilde{V}_{12}$ correspondent respectivement aux deux matrices d'adjacence d'un graphe d'Ocneanu $Oc(G)$:

$$\widetilde{V}_{11} = \mathbb{1}_{d_O \times d_O}\ , \qquad \widetilde{V}_{21} = O_1\ , \qquad \widetilde{V}_{12} = O_{1'}\ . \tag{1.55}$$

Ainsi la donnée du graphe d'Ocneanu (des matrices O_1 et $O_{1'}$) permet d'obtenir les matrices $\widetilde{V}_{21}$ et $\widetilde{V}_{12}$, et en utilisant (1.54) puis (1.53) d'obtenir les matrices $\widetilde{V}_{ij}$, et donc les coefficients $\widetilde{\mathcal{W}}^{ij}_{xy}$ qui définissent les fonctions de partition généralisées.

1.5.2 $Oc(G)$ comme bi-module sur $A(G)$: matrices W_{ij} et W_{xy}

Soit G un graphe de type ADE (ou généralisé) et $\mathcal{A}(G)$ l'algèbre du graphe A_n de même nombre de Coxeter. On montre dans tous les cas qu'une action à gauche et à droite de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$ peut être définie. Nous avons :

$$i.x.j = \sum_y \mathcal{W}^{ij}_{xy} y \tag{1.56}$$

où les coeficients $\mathcal{W}^{ij}_{xy}$ sont des nombres entiers non-négatifs. Introduisons alors des matrices $d_O \times d_O$ V_{ij} telles que $(V_{ij})_{xy} = \mathcal{W}^{ij}_{xy}$. La compatibilité avec le produit de l'algèbre de fusion $\mathcal{A}(G)$ est mise en application par la equation

$$i' \cdot (i \cdot x \cdot j) \cdot j' = (i' \cdot i) \cdot x \cdot (j \cdot j')$$

qu'impose aux matrices V_{ij} la relation suivante

$$V_{ij} \cdot V_{i'j'} = \sum_{i'',j''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\ \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\ V_{i''j''} \tag{1.57}$$

Propriété 5 *Les matrices V_{ij} satisfont les relations suivantes :*

1. $V_{i1}\ V_{i'1} = \sum_{i''} \mathcal{N}^{i''}_{ii'}\ V_{i''1}$

   $V_{1j}\ V_{1j'} = \sum_{j''} \mathcal{N}^{j''}_{jj'}\ V_{1j''}$

2. $O_x\, V_{ij} = V_{ij}\, O_x = \sum_y (V_{ij})_{xy}\, O_y$

3. $V_{ij} = \sum_y (V_{ij})_{0y}\, O_y$

Démonstration : La relation (1) est obtenue à partir de (1.57) pour $i = i' = 0$ (j=j'=0). La relation (2) est obtenue en multipliant à gauche et à droite l'équation (1.56) par $\underline{z}$. Et enfin (3) est une conséquence immédiate de (2). ■

Conclusion 1 *Les matrices V_{ij} définies à partir de la structure de bi-module de $Oc(G)$ sur $A(G)$ coïncident avec les matrices $\widetilde{V}_{ij}$ introduites précédemment. Les fonctions de partition généralisées des modèles $\widehat{su}(2)$ s'écrivent donc :*

$$\mathcal{Z}_{x|y}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\, \mathcal{W}^{ij}_{xy} \overline{\chi}_j(\tau). \tag{1.58}$$

où les coefficients $\mathcal{W}^{xy}_{ij}$ sont calculés en explicitant l'action (1.56) de $\mathcal{A}(G)$ sur $Oc(G)$.

Définition 5 *Nous définissons les* **matrices toriques généralisées** *comme les matrices $d_A \times d_A$ données par la relation $(W_{xy})_{i,j} = \mathcal{W}^{ij}_{xy}$.*

Pour $y = 0$ nous obtenons les **matrices toriques** *$W_x = W_{x0}$. Il y a une matrice torique pour chaque vertex du graphe $Oc(G)$*

L'action est bien définie et permet d'obtenir des formules compactes pour les expressions des fonctions de partition invariantes modulaires et généralisées. Nous retrouvons ainsi la classification de Cappelli-Itzykson-Zuber et donnons des formules pour les expressions des fonctions de partition à une et deux lignes de défauts de tous les modèles $\widehat{su}(2)$.

1.5.3 Relations de compatibilité algébrique

La digèbre $\mathcal{B}$: règles de somme (quadratique et linéaire)

$(\mathcal{B}, \circ)$ et $(\widehat{\mathcal{B}}, \hat{\circ})$ sont des algèbres semi simples et nous pouvons donc les diagonaliser. Matriciellement nous pouvons les écrire comme une somme de blocs diagonaux :

$$\mathcal{B} \cong \bigoplus_i L^i \qquad ; \qquad \widehat{\mathcal{B}} \cong \bigoplus_x X^x \tag{1.59}$$

où chaque bloc a la dimension du sous espace $\mathcal{B}_i$ ou $\mathcal{B}_x$ correspondant.

$(\mathcal{B}, \circ)$ **:** Les blocs L^i sont indexés par la longueur i des triangles admissibles. Les projecteurs minimaux centraux dans chaque bloc sont labellés par les vertex du graphe $\mathcal{A}(G)$. Rappelons que l'élément (a, b) de la matrice F_i, pour $i \in \mathcal{A}(G)$, est égal au nombre de triangles admissibles $\{aib\}$. La dimension de chaque bloc L^i est donnée par :

$$d_i = \sum_{a,b \in G} (F_i)_{ab} \tag{1.60}$$

Comme $\mathcal{B} \cong \oplus_i L^i$, la dimension de $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\dim(\mathcal{B}) = \sum_{i \in \mathcal{A}(G)} d_i^2 \tag{1.61}$$

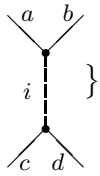
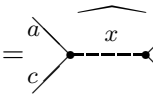
$(\widehat{\mathcal{B}}, \hat{\circ})$ **:** Les blocs X^x sont indexés par le label x. Les projecteurs minimaux centraux de chaque bloc sont labellés par les vertex du graphe $Oc(G)$. En analogie avec le cas précédent, la dimension de chaque bloc X^x est donnée par

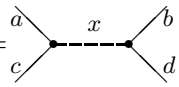
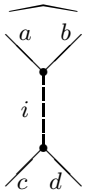
$$d_x = \sum_{a,b \in G} (S_x)_{ab} \tag{1.62}$$

où les matrices S_x déterminnent l'action de $Oc(G)$ sur G (1.45). Comme $\widehat{\mathcal{B}} \cong \oplus_x X^x$, la dimension de $\widehat{\mathcal{B}}$ est donnée par :

$$\dim(\widehat{\mathcal{B}}) = \sum_{x \in Oc(G)} d_x^2 \tag{1.63}$$

Règles de somme Les doubles triangles horizontaux (diagrammes de diffusion verticaux) forment une base e_I de l'espace $\mathcal{B}$. La base dual correspondante $\hat{e}^I$ (représentés par des doubles triangles horizontaux avec un tilde) est une base de l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$. Analoguement l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ est engendré par la base des doubles triangles verticaux E^J, et la base dual $\hat{E}_J$ est une base de l'espace $\mathcal{B}$. Nous avons alors :

$\mathcal{B} =$ *gen* $\{e_I =$  $\} =$ *gen* $\{\widehat{E}_J =$  $\}$

$\widehat{\mathcal{B}} =$ *gen* $\{E^J =$  $\} =$ *gen* $\{\widehat{e}^I =$  $\}$

Nous avons l'égalité suivante (**règle de somme quadratique**) :

$$\dim(\mathcal{B}) = \dim(\widehat{\mathcal{B}}) = \sum_{i \in \mathcal{A}(G)} d_l^2 = \sum_{x \in Oc(G)} d_x^2 \tag{1.64}$$

Une autre relation peut aussi être vérifiée dans la plupart des cas[5], la **règle de somme linéaire** :

$$\sum_{i \in \mathcal{A}(G)} d_l = \sum_{x \in Oc(G)} d_x \tag{1.65}$$

A priori, il n'existe pas de raison d'obtenir une telle relation pour une bigèbre semi-simple.

[5]Dans les cas où cette relation n'est pas satisfaite, on sait la corriger.

Masses quantiques, garphes ADE

Pour un graphe G du systhème $SU(2)$, les composantes du vecteur normalisé de Peron-Frobenius définissent les dimensions quantiques des vertex σ de G : ce sont des nombres quantiques $[n]_q = qdim(\sigma)$. Rappelons que le nombre quantique $[n]_q$ est défini par :

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad q = \exp(\frac{i\pi}{\kappa}), \qquad q^{2\kappa} = 1. \tag{1.66}$$

Ces nombres s'écrivent explicitement :

$$\begin{aligned} \text{n pair} \quad [n]_q &= q + q^{-1} + q^3 + q^{-3} + q^5 + q^{-5} + \ldots + q^{n-1} + q^{-(n-1)} \\ &= 2\cos\left(\tfrac{\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{3\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{5\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{(n-1)\pi}{\kappa}\right) \\ \\ \text{n impair} \quad [n]_q &= 1 + q^2 + q^{-2} + q^4 + q^{-4} + q^6 + q^{-6} + \ldots + q^{n-1} + q^{-(n-1)} \\ &= 1 + 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{4\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{6\pi}{\kappa}\right) + 2\cos\left(\tfrac{(n-1)\pi}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

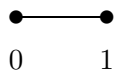
Définition 6 *Pour un graphe G de type ADE à r vertex a, sa* **masse quantique** *$m(G)$ est définie par :*

$$m(G) = \sum_{a \in G} (qdim(a))^2 \tag{1.67}$$

Propriété 6 *Soit un graphe G un graphe ADE ou de Di Francesco-Zuber, et $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$ ses graphes associés. Alors les masses quantiques de $\mathcal{A}(G)$ et de $Oc(G)$ sont égales :*

1.6 Un exemple de symétries quantiques des graphes du système $SU(2)$, les graphe A_2.

Considérons le graphe A_2 du système $SU(2)$, il possède deux vertex que nous allons noter par 0 et 1, ce dernier étant le générateur. Le graphe et sa matrice d'adjacence sont présentés dans la Figure 1.4.



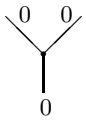
$$\mathcal{G}_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

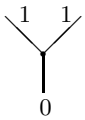
FIG. 1.4 – Le diagramme de Dynkin A_2 et sq matrice d'adjacence

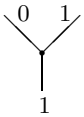
La table de multiplication 2×2 de l'algèbre de graphe A_2 peut être construite a partir de la multiplication par le générateur 1 plus et l'associativité du produit. La table de multiplication de l'algèbre est comme suit :

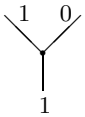
$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	0 .

A partir de cette table de multiplication nous pouvons lire les élements de l'espace vectoriel des triangles admissibles H, qui est engendré par les quatre triangles suivants :

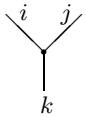
$\mathbf{0} =$ 

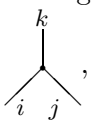
; $\mathbf{1} =$ 

$r =$ 

; $l =$ 

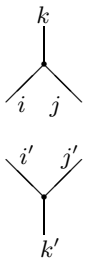
$= \text{ base de } H \ . \qquad (1.68)$

Un élément général de la base de H est le vecteur $|\, i \xrightarrow{k} j \,\rangle =$ 

avec (i, k, j) un triangle admissible du garphe A_2. L'espace dual $\widehat{H}$ est engendré par les vecteurs de la base dual $\langle\, i \xrightarrow{k} j \,| =$ 

, où (i, k, j) est un triangle admissible. La base dual de $\{0, 1, r, l\}$ est noté $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{r}, \hat{l}\}$, les triangles $r = |\, 0 \xrightarrow{1} 1 \,\rangle$ et $l = |\, 1 \xrightarrow{1} 0 \,\rangle$ correspondent a des chemins élémentaires (orientés a droite et à gauche respectivement) sur le graphe A_2 .

Ces deux bases sont duales, et l'action de $\widehat{H}$ sur H est donne par definition comme $\langle\, i \xrightarrow{k} j |\, i' \xrightarrow{k'} j' \,\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'}$. Ce qui correspond de maniere naturalle au collage suivante des triangles de chaque espace :



$= \langle\, i \xrightarrow{k} j |\, i' \xrightarrow{k'} j' \,\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'} \qquad (1.69)$

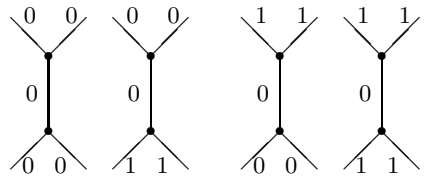
1.6.1 L'agèbre $(\mathcal{B}, \circ)$

Nous allons construire l'espace vectoriel de doubles triangles $\mathcal{B} = End(H) \cong H \otimes \hat{H}$. Il est engendré par la collection de doubles triangles $|\, i \xrightarrow{k} j \,\rangle\langle\, i' \xrightarrow{k} j' \,|$, représenté par des diagramme collés par l'arête donnant la longueur k. $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel gradue par l'index k et s'écrit comme somme des sous-espaces de longueur fixe

$$\mathcal{B} = End(H_0) \oplus End(H_1) = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$$

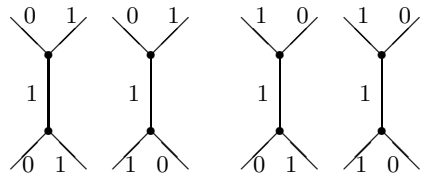
où chaque sous espace est $\mathcal{B}_p \cong H_p \otimes \widehat{H}_p$. La base de $\mathcal{B}$ a la représentation diagrammatique suivante :

$k = 0$



(1.70)

$k = 1$



L'action de l'espace dual $\widehat{H}$ muni à H d'un produit scalaire qui permet d'identifier H avec $\widehat{H}$ Alors $\mathcal{B}$ peut être identifié avec l'espace

$$\mathcal{B} \cong (H_0 \otimes H_0) \oplus (H_1 \otimes H_1).$$

Nous alons noter chaque bloc de la base de $\mathcal{B}$ de manière compacte comme $\mathcal{B}_0 = \{00, 01\ ,\ 10, 11\}$, $\mathcal{B}_1 = \{rr, rl\ ,\ lr, ll\}$,

L'espace vectoriel $\mathcal{B}$ est muni de la structure d'algèbre définie par le **produit vertical** definie par l'équation (1.23). La table ded multiplication de cette algèbre finie est comme suit :

$\circ \nearrow$	00	01	10	11	rr	rl	lr	ll
00	00	01	.	.	.	.	.	.
01	.	.	00	01	.	.	.	.
10	10	11	.	.	.	.	.	.
11	.	.	10	11	.	.	.	.
rr	.	.	.	.	rr	rl	.	.
rl	.	.	.	.	.	.	rr	rl
lr	.	.	.	.	lr	ll	.	.
ll	.	.	.	.	.	.	lr	ll

l'élément neutre du produit de la table précédente est $\mathbb{1} = 00 + 11 + rr + ll$

A partir de la table de multiplication nous pouvons définir les deux projecteurs

$$\pi_0 = 00 + 11 \quad \text{and} \quad \pi_1 = rr + ll\ . \tag{1.71}$$

Ce sont des projecteurs minimaux centraux, ils sont ortogonaux et la somme $\pi_, + \pi_1$ est egale a l'unite. Nous allons définir les ideals $\pi_0\mathcal{B} = \pi_0\mathcal{B}\pi_0$ and $\pi_1\mathcal{B} = \pi_1\mathcal{B}\pi_1$, formant les deux

blocs :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \pi_0\mathcal{B} \quad \text{espace engendre par } \{00, 01, 10, 11\} \\
\mathcal{B}_1 &= \pi_1\mathcal{B} \quad \text{espace engendre par } \{rr, rl, lr, ll\}
\end{aligned}$$

Chaque bloc est de dimension quatre, l'algèbre $\mathcal{B}$ est semi simple et chaque bloc peut être écrit comme matrices complexesde dimension 2×2. Nous allons identifier les éléments de la base $\{00, 01, 10, 11; rr, rl, lr, ll\}$ avec les unités matricielles correspondant aux blocs $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ de la manière suivante :

$$\overset{00}{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)} \quad \overset{01}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)} \quad \overset{rr}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)} \quad \overset{rl}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)},$$

$$\overset{10}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)} \quad \overset{11}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)} \quad \overset{lr}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)} \quad \overset{ll}{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right)}$$

avec cette identification la multiplication matricielle reproduit bien le produit $\circ$.

1.6.2 La cogèbre $(\mathcal{B}, \Delta)$

Nous allons définir sur $\mathcal{B}$ un coproduit compatible avec le produit vertical $\circ$. La de Δ sur $\mathcal{B}$ est moins évidente que celle du produit $\circ$ (rappelons nous que $\circ$ est le produit naturel associé aux diagrammes verticaux). Pour $SU(2)$ la construction du coproduit Δ peut se faire a partir de différents méthodes reposant sur la définition des cellules de Ocneanu, les valeurs des cellules basiques et les propriétés de réflexion et unitarieté (voir equations A_1 a A_7). Ici nous sommes intéressés en montrer la structure générale de $\mathcal{B}$ et nous allons montrer le coproduit explicitement. L'action de Δ sur la base de $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta 00 &= 00 \bigotimes 00 + rr \bigotimes ll & \Delta rr &= 00 \bigotimes rr + rr \bigotimes 11 \\
\Delta 01 &= 01 \bigotimes 01 + rl \bigotimes lr & \Delta rl &= 01 \bigotimes rl + rl \bigotimes 10 \\
\Delta 10 &= 10 \bigotimes 10 + lr \bigotimes rl & \Delta lr &= 10 \bigotimes lr + lr \bigotimes 01 \\
\Delta 11 &= 11 \bigotimes 11 + ll \bigotimes rr & \Delta ll &= 11 \bigotimes ll + ll \bigotimes 00
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Le coproduit est compatible avec la structure de l'algèbre $(\mathcal{B}, \circ)$, c'est a dire l'application Δ est un homomorphisme entre l'espace $\mathcal{B}$ et sont carre tensoriel. Pour le verifier nous considerons la multiplication naturelle dans le espace produit tensoriel, celle-ci est définie comme $(i \otimes j) \circ (m \otimes n) = (i \circ m) \otimes (j \circ n)$, la compatibilité du coproduit avec cette multiplication s'écrit

$$\Delta(i \circ j) = \Delta\, i \circ \Delta\, j \ .$$

Cette propriété est vérifié pour chacune des entrées de la table de multiplication (voir [19]).

A partir de la définition du coproduit nous pouvons calculer le coproduit de la identité

$$\Delta \mathbb{1} = (00 + ll) \otimes (00 + rr) + (rr + 11) \otimes (ll + 11)$$

Il est clais que $\Delta \mathbb{1}$ n'est pas égal à $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$, ceci veut dire que $\mathcal{B}$ ne peut pas être une bigèbre au sens usuel. Néanmoins le résultat antérieur suggère d'écrire le coproduit de l'identité comme

$$\Delta \mathbb{1} = \mathbb{1}_t \otimes \mathbb{1}_s = t_0 \otimes s_0 + t_1 \otimes s_1,$$

où chaque composante est définie de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} t_0 = (00 + ll) & s_0 = (00 + rr) \\ t_1 = (rr + 11) & s_1 = (ll + 11) \end{array}$$

ces éléments constituent la base des sous algèbres *source* $\mathcal{B}_s$ et *target* $\mathcal{B}_t$ que nous avons défini dans la section 1.3.

La counité ϵ doit être telle que le diagramme commutatif usuel soit satisfait, ceci implique que nous avons un système de $4 + 4$ équations que doit être résolu. Les premières quatre équations sont

$$\begin{array}{rclrcl} \epsilon(00)00 + \epsilon(rr)ll & = & 00 & \epsilon(01)01 + \epsilon(rl)lr & = & 01 \\ \epsilon(10)10 + \epsilon(lr)rl & = & 10 & \epsilon(11)11 + \epsilon(ll)rr & = & 11 \end{array}$$

avec pour solution

$$\begin{aligned} \epsilon(00) = \epsilon(01) = \epsilon(10) = \epsilon(11) = 1 \\ \epsilon(rr) = \epsilon(rl) = \epsilon(lr) = \epsilon(ll) = 0 \end{aligned}$$

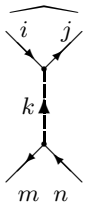
Nous pouvons vérifier, par un calcul direct, que ses solutions satisfont aussi les autres quatre équations. Nous avons alors que $(\mathcal{B}, \circ, \Delta, \mathbb{1}, \epsilon)$ est une bigèbre unitale et counitale dans le sens faible. En effet la counité n'est pas un homomorphisme car l'aplcation est tordue par les élements que apparaisent dans le menbre de droite de $\Delta \mathbb{1}$. Dans le cas présent la condition de compatibilité est modifié comme suit

$$\epsilon(\xi\xi' \circ \eta\eta') = \epsilon(\xi\xi' \mathbb{1}_t)\epsilon(\eta\eta' \mathbb{1}_s)$$

où $\xi\xi'$ et $\eta\eta'$ sont deux elements quelconques de $\mathcal{B}$. Finallement nous allons juste mentionner que l'espace $\mathcal{B}$ a aussi une antipode S définie par l'interchange simultanée des étiquettes en haut et en bas, droite et gauche des diagrammes de diffusion de la base. La condition de compatibilité est prise aussi dans le sens faible [14] [19].

1.6.3 L'algèbre dual $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\circ})$

L'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ est emgendre par la base duale $\left\{\widehat{00}, \widehat{01}, \widehat{10}, \widehat{11}, \widehat{rr}, \widehat{rl}, \widehat{lr}, \widehat{ll}\right\}$, représenté à l'aide des diagrammes verticaux



(1.73)

Le coproduit Δ, définit dans l'espace $\mathcal{B}$, induit un produit $\widehat{\circ}$ dans l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$. Une observation est que cette correspondance est canonique et ne demande pas le choix d'un produit escalier. A partir de la table de comultiplication 1.72 de *Delta* nous trouvons la table de multiplication suivante :

$\widehat{\circ} \nearrow$	$\widehat{00}$	$\widehat{01}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\widehat{rr}$	$\widehat{rl}$	$\widehat{lr}$	$\widehat{ll}$
$\widehat{00}$	$\widehat{00}$	.	.	.	$\widehat{rr}$	.	.	.
$\widehat{01}$	.	$\widehat{01}$	.	.	.	$\widehat{rl}$	.	.
$\widehat{10}$	.	.	$\widehat{10}$	.	.	.	$\widehat{lr}$	.
$\widehat{11}$	.	.	.	$\widehat{11}$	.	.	.	$\widehat{ll}$
$\widehat{rr}$	.	.	.	$\widehat{rr}$	.	.	.	$\widehat{00}$
$\widehat{rl}$	.	.	$\widehat{rl}$	.	.	.	$\widehat{01}$	.
$\widehat{lr}$	.	$\widehat{lr}$	.	.	.	$\widehat{10}$	.	.
$\widehat{ll}$	$\widehat{ll}$	.	.	.	$\widehat{11}$	.		.

avec unité $\widehat{\mathbb{1}} = \widehat{00} + \widehat{01} + \widehat{10} + \widehat{11}$[6].

Les projecteurs minimaux centraux sont aussi déterminés à partir de la table de multipication de $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\circ})$, nous avons :

$$\varpi_0 = \widehat{00} + \widehat{11} \quad \text{and} \quad \varpi_1 = \widehat{01} + \widehat{10}$$

Ces projecteurs sont orthogonaux et sa sommation est égale a la unité $\widehat{\mathbb{1}}$, les deux blocs de dimension 4 sont des idéaux $\varpi_0\widehat{\mathcal{B}} = \{\widehat{00}, \widehat{11}, \widehat{rr}, \widehat{ll}\}$ et $\varpi_1\widehat{\mathcal{B}} = \{\widehat{01}, \widehat{10}, \widehat{rl}, \widehat{lr}\}$.

Nous appelons $\widehat{\mathcal{B}}_0 = \varpi_0\widehat{\mathcal{B}}$, dans ce sous espace les éléments $\widehat{00}$ et $\widehat{11}$ sont des projecteurs, mais $\widehat{rr}$ et $\widehat{ll}$ ne le sont pas. Nous définissons les deux projecteurs supplémentaires : $\widehat{\mathcal{B}}_0 = \widehat{\mathcal{B}}_0 \widehat{\circ} \widehat{00} \oplus \widehat{\mathcal{B}}_0 \widehat{\circ} \widehat{11} = \{\widehat{00}, \widehat{ll}\} \oplus \{\widehat{11}, \widehat{rr}\}$. En termes de matrices le sous espace $\widehat{\mathcal{B}}_0$ correspond au premier bloc (une sous matrice de dimension 2×2), $\widehat{\mathcal{B}}_0 \widehat{\circ} \widehat{00}$ est la première colonne du premier bloc, et $\widehat{\mathcal{B}}_0 \widehat{\circ} \widehat{11}$ est la deuxiéme colonne. Nous avons alors la structure matricielle suivante pour les éléments de $\widehat{\mathcal{B}}_0$

[6] La unite $\widehat{\mathbb{1}}$ pouvait aussi être déterminé à partir de l'expression de la counité ϵ que nous avons done dans la sub secction précédente.

$$\left(\begin{array}{c|c} \widehat{00}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_0\,\widehat{\circ}\,\widehat{00} = \{\widehat{00}\} & \widehat{00}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_0\,\widehat{\circ}\,\widehat{11} = \{\widehat{rr}\} \\ \hline \widehat{11}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_0\,\widehat{\circ}\,\widehat{00} = \{\widehat{ll}\} & \widehat{11}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_0\,\widehat{\circ}\,\widehat{11} = \{\widehat{11}\} \end{array}\right)$$

Nous appelons $\widehat{\mathcal{B}}_1 = \varpi_1\widehat{\mathcal{B}}$, dans ce sous espace les éléments $\widehat{01}$ and $\widehat{10}$ sont des projecteurs, mais le éléments $\widehat{lr}$ and $\widehat{rl}$ ne le sont pas. Nous définissons les deux projecteurs supplémentaires : $\widehat{\mathcal{B}}_1 = \widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{01} \oplus \widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{10} = \{\widehat{01}, \widehat{lr}\} \oplus \{\widehat{10}, \widehat{rl}\}$ En termes de matrices le sous espace $\widehat{\mathcal{B}}_0$ est le deuxième bloc (une sous matrice de dimension 2×2), et $\widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{01}$ correspond à la première colonne de ce bloc ($\widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{10}$ correspond à la deuxième colonne de ce bloc. En termes de matrices, nous avons la structure suivante pour $\widehat{\mathcal{B}}_1$

$$\left(\begin{array}{c|c} \widehat{01}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{01} = \{\widehat{01}\} & \widehat{01}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{10} = \{\widehat{rl}\} \\ \hline \widehat{10}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{01} = \{\widehat{lr}\} & \widehat{10}\,\widehat{\circ}\,\widehat{\mathcal{B}}_1\,\widehat{\circ}\,\widehat{10} = \{\widehat{10}\} \end{array}\right)$$

Nous identifions alors les éléments de la base $\{\widehat{00}, \widehat{01}, \widehat{10}, \widehat{11}, \widehat{rr}, \widehat{rl}, \widehat{lr}, \widehat{ll}\}$ de $\widehat{\mathcal{B}}$ avec les unités matricielles des sous espaces $\widehat{\mathcal{B}}_0$ and $\widehat{\mathcal{B}}_1$ de la manière suivante :

$$\overset{\widehat{00}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad \overset{\widehat{rr}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad \overset{\widehat{01}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad \overset{\widehat{rl}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

$$\overset{\widehat{ll}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 1 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad \overset{\widehat{11}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad \overset{\widehat{lr}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right)} \quad \overset{\widehat{10}}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

Ces calculs montrent que, pour A_2, le dual de la base des unités matricielles du produit $\circ$ dans $\mathcal{B}$ est aussi une base des unités matricielles pour la multiplication $\widehat{\circ}$ dans $\widehat{\mathcal{B}}$, mais cette dernière ne apparaît pas gradée de ma même manière. Cette situation est particulière du cas A_2 (bien que nous allons voir que la situation est la même pour le cas $\mathcal{A}_1$ de $SU(3)$) et ne se vérifie pour les cas de niveau plus haut. Cette propriété peut aussi être interprété en termes des cellules puisque ces dernières ont toutes valeur égal à 1.

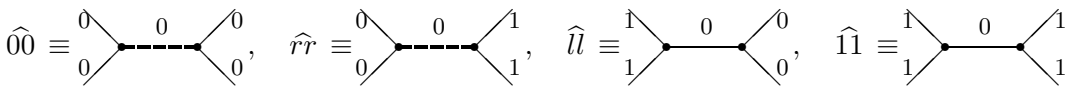
La base des diagrammes horizontaux

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{B}$, nous l'avons définit à partir de $\mathcal{H}$ comme l'espace engendré par les endomorphismes de H. $\mathcal{B}$ est un espace gradué par la longueur $End\,\mathcal{H}^0 \oplus End\,\mathcal{H}^1$, et nous avons determiné les unités matricielles correpondant aux blocs semisimples.

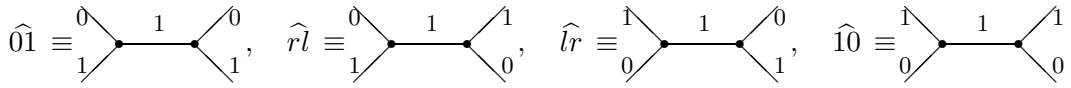
Pour l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ la situation est similaire, mais nous avons commencé à partir d'une base différente, la base dual. La table de multiplication est déterminé par dualité à partir du coproduit dans $\mathcal{B}$, et nous avons trouvé que l'algèbre est composé de deux blocs simples. Alors il est naturel d'écrire $\widehat{\mathcal{B}}$ comme $\widehat{\mathcal{B}} \cong End\,\mathcal{V}^0 \oplus End\,\mathcal{V}^1$ pour un certain espace vectoriel (gradué) $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$. $\mathcal{V}$ est appelé l'espace vectoriel horizontal, et est engendré par les diagrammes

de diffusion horizontaux (doubles triangles verticaux). Les unités matricielles que nous avons construit pour $\widehat{\mathcal{B}}$ sont associés de manière naturelle aux éléments de la base horizontale, et les blocs sont définis par la longueur horizontale $x = 0$ ou 1. La base horizontale est donne par les diagrammes duales suivants :

Diagrammes de difusion de longueur horizontale $x = 0$ (premier bloc) :



Diagrammes de difusion de longueur horizontale $x = 1$ (deuxième bloc) :



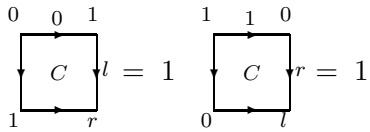
Une remarque est que les arêtes externes de ses graphes sont exactement les mêmes que celles de la base duale, la seule chose ayant change est la gradation qui maintenant est donne par les arêtes internes horizontales étiquetés par x.

Changement de base

Formellement il y a deux types de cellules intervenant dans ce problème, les cellules qui donnant le pairing des unités matricielles de $\widehat{\circ}$ (dans $\widehat{\mathcal{B}}$) avec les unités matricielles de $\circ$ (dans $\mathcal{B}$), et celles donnant respectivement le pairing des deux bases avec ses bases duales. Il s'agit des coefficients F_2, F_0 et F_4 respectivement. Pour le cas A_2 cette distinction n'est pas nécessaire puisque les valeurs numériques et les types de vertex sont les mêmes. Les cellules obéissent les propriétés (A_1) jusqu' (A_7) permettant de déterminer les valeurs des cellules basiques, les autres sont construites par composition verticale ou horizontales. Pour A_2 il est aussi possible de déterminer les valeur des cellules à travers de formules générales [20].

Dans l'aproche que nous présentons ici, les constantes de structure du coproduit dans $\mathcal{B}$, sont considérés comme connues[7]

Dans le cas particulier ded A_2 il y a seulement deux cellules basiques qui sont la réflexion verticale l'une de l'autre (propriété A_2).



[7]En général la difficulté de ce problème conciste précisement en la détermination des constants de structure de Δ (ou de manière équivalente $\hat{\circ}$), la seule méthode connue pour le faire consiste en calculer les cellules basiques et les cellules générales (par composition), et utiliser ces valeur pour déterminer les unité matricielles du produit $\hat{\circ}$ en termes de la base duale de $\widehat{\mathcal{B}}$. Mais ici l'intérêt est de présenter la structure du grupoide quantique de A_2.

1.6.4 Algèbre de fusion et algèbre de symétries quantiques

Nous allons multiplier les projecteurs π avec le produit $\widehat{\circ}$ et les projecteurs ϖ avec le produit $\circ$. A priori ces multiplications ne sont pas définies, pour les faire il nous faut écrire les éléments de la base de $\mathcal{B}$ (ou $\widehat{\mathcal{B}}$) qui apparaissent dans la expression de π (ou ϖ) en termes des éléments de la base duale, comme nous avons explique dans les sections précédentes. Mais dans le cas de A_2 les bases sont identifiés, et nous pouvons oublier cette formalite.

Algèbre de fusion $A(A_2)$ Les opérateurs π_i constituent un système complet de projecteurs minimaux et orthogonaux pour la multiplication $\circ$: $\pi_0 \circ \pi_0 = \pi_0$, $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$, $\pi_0 \circ \pi_1 = \mathbf{0}$, $\pi_0 + \pi_1 = \mathbb{1}$. Ces opérateurs génèrent le centre de $(\mathcal{B}, \circ)$, et nous pouvons vérifier que cet espace est fermé pour le produit $\widehat{\circ}$:

$$\pi_0 \,\widehat{\circ}\, \pi_0 = \pi_0, \quad \pi_0 \,\widehat{\circ}\, \pi_1 = \pi_1, \; \pi_1 \,\widehat{\circ}\, \pi_0 = \pi_1, \; \pi_1 \,\widehat{\circ}\, \pi_1 = \pi_0.$$

L'algèbre associative engendré par les projecteurs π_i est isomorphe à l'algèbre de graphe A_2.

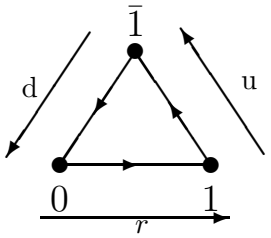
L'algèbre de symmetries quantiques $Oc(A_2)$ Les opérateurs ϖ constituent un système complet de projecteurs minimaux et orthogonaux pour la multiplication $\widehat{\circ}$: $\varpi_0 \,\widehat{\circ}\, \varpi_0 = \varpi_0$, $\varpi_1 \,\widehat{\circ}\, \varpi_1 = \varpi_1$, $\varpi_0 \,\widehat{\circ}\, \varpi_1 = \mathbf{0}$, $\varpi_0 + \varpi_1 = \widehat{\mathbb{1}}$. Ces opérateurs génèrent le centre de $(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\circ})$, et nous pouvons vérifier que cet espace est fermé pour le produit $\circ$:

$$\varpi_0 \circ \varpi_0 = \varpi_0, \quad \varpi_0 \circ \varpi_1 = \varpi_1, \; \varpi_1 \circ \varpi_0 = \varpi_1, \; \varpi_1 \circ \varpi_1 = \varpi_0.$$

L'algèbre associative engendré par les projecteurs π_i est isomorphe à l'algèbre de graphe A_2. En général, pour un graphe G du système ADE l'algèbre obtenue à partir des projecteurs ϖ est différente de $\mathcal{A}(G)$ et correspond à l'algèbre de symétries quantiques codé par le graphe d'Ocneanu $Oc(G)$. Ici ce graphe est le graphe A_2 lui même.

1.7 Un exemple de symétries quantiques des graphes du système $SU(3)$, les graphes $\mathcal{A}_1$.

Considérons le graphe $\mathcal{A}_1$ du système $SU(3)$, il possède trois vertex que nous allons notés par 0, 1 (le générateur) et son conjugué $\bar{1}$. Le graphe et sa matrice d'adjacence sont présentés dans la Figure 1.5, les flèches étiquetés par les lettres r, u, d indiquent les chemins élémentaires sur le graphe, on verra qu'il sont en correspondance avec les triangles admissibles de longueur 1.



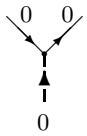
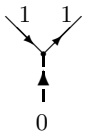
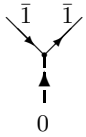
$$Ad(\mathcal{A}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

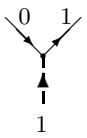
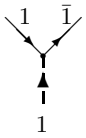
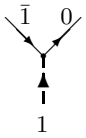
FIG. 1.5 – Le graphe $\mathcal{A}_1$ de $SU(3)$ et sa matrice d'adjacence.

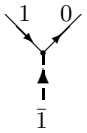
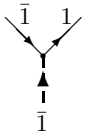
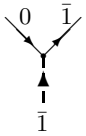
La table de multiplication 3×3 de l'algèbre de graphe $\mathcal{A}_1$ peut être construite a partir de la multiplication par le générateur 1 et en utilisant l'associativité, la table est comme suit :

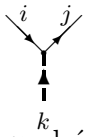
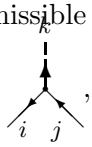
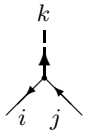
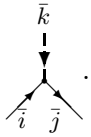
$\cdot$	0	1	$\bar{1}$
0	0	1	$\bar{1}$
1	1	$\bar{1}$	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1.

La conjuguaison est définie par $0^* = 0$ et $1^* = \bar{1}$, la conjuguaison n'étant pas triviale nous sommes obligés de garder l'orientations des arcs dans les diagrammes de difusion ; l'espace vectoriel des triangles admissibles H est engendré par les neuf triangles suivants :

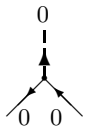
$\mathbf{0} =$  ; $\mathbf{1} =$  ; $\bar{\mathbf{1}} =$ 

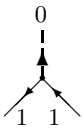
$r =$  ; $u =$  ; $d =$  $=$ base de H . (1.74)

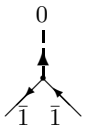
$\bar{r} =$  ; $\bar{u} =$  ; $\bar{d} =$ 

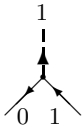
Un élément général de la base de H est le vecteur $|\, i \xrightarrow{k} j \,\rangle =$  avec (i, k, j) un triangle admissible de l'algèbre de garphe $\mathcal{A}_1$. L'espace dual $\widehat{H}$ est engendré par les vecteurs $\langle\, i \xrightarrow{k} j \,| =$  , où (i, k, j) est un triangle admissible. Une observation est que si (i, k, j) est un triangle admissibles, alors $(\bar{i}, \bar{k}, \bar{j})$ est aussi un triangle admissible et nous pouvons choisir entre deux representations pour la base de $\widehat{H}$  ou  . Nous allons noter les

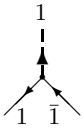
éléments de la base de $\hat{H}$

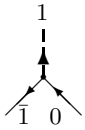
$\hat{\mathbf{0}} =$ 

; $\hat{\mathbf{1}} =$ 

; $\hat{\bar{1}} =$ 

$\hat{r} =$ 

; $\hat{u} =$ 

; $\hat{d} =$ 

$\hat{\bar{r}} =$

; $\hat{\bar{u}} =$

; $\hat{\bar{d}} =$

$= \text{ base de } \widehat{H} \ . \qquad (1.75)$

Cette notation peut paraître peu intuitive, mais elle faciliterai la lecture des doubles triangles une fois definies. Pour l'identifier avec les chemins élémentaires r, u et d il suffit de lire les diagrammes dans le sens inverse des flèches.

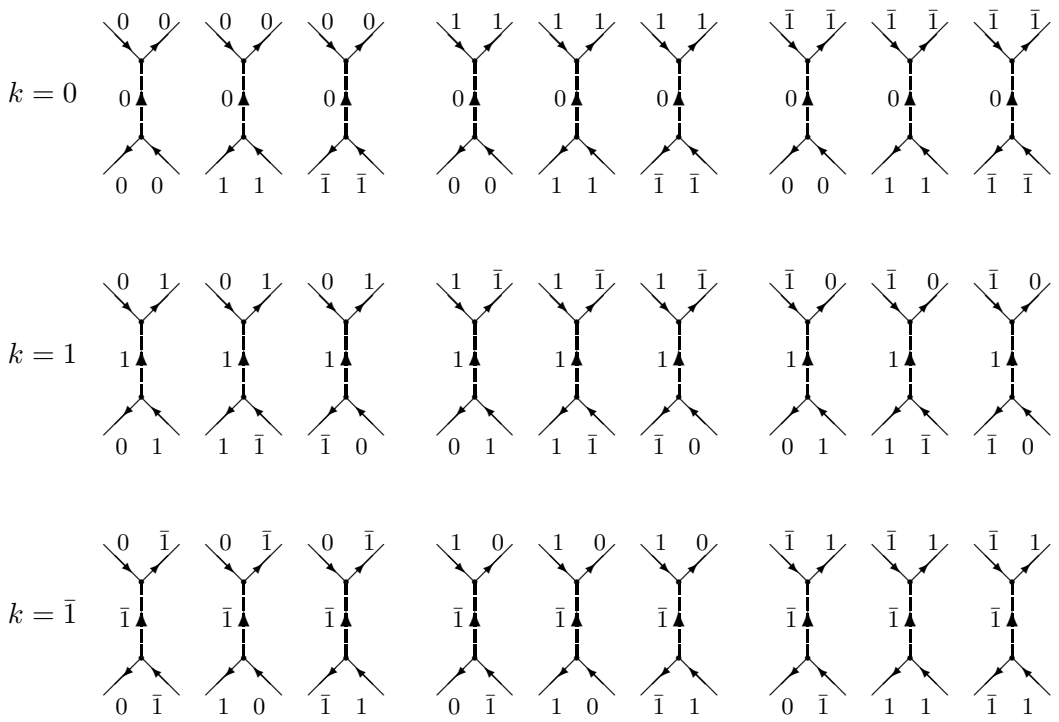
Ces deux bases étant duales nous avons l'action de $\widehat{H}$ sur H donne par definition comme $\langle\, i \xrightarrow{k} j \,|\, i' \xrightarrow{k'} j' \,\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'}$. Ce qui correspond de maniere naturalle au collage suivante des triangles de chaque espace :

$= \langle\, i \xrightarrow{k} j \,|\, i' \xrightarrow{k'} j' \,\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'} \qquad (1.76)$

L'agèbre $(\mathcal{B}, \circ)$ Nous allons maintenant construire l'espace vectoriel de doubles triangles $\mathcal{B} \cong H \otimes \hat{H}$. Il est engendré par la collection de doubles triangles $|\, i \xrightarrow{k} j \,\rangle\langle\, i' \xrightarrow{k} j' \,|$, représenté par des diagramme collés par l'arête donnant la longueur k. $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel gradue par k, il peut être écrit comme somme des sous-espaces de longueur fixe

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_{\bar{1}}$$

ou chaque sous espace est composé des doubles triangles. La base de $\mathcal{B}$ á la représentation diagrammatique suivante :



(1.77)

L'action de $\widehat{H}$ que nous venons de défini plus haut, muni H d'un produit scalaire qui permet d'identifier H avec son dual $\widehat{H}$. Alors $\mathcal{B}$ est identifié avec l'espace

$$H_0 \otimes H_0 \oplus H_1 \otimes H_1 \oplus H_{\bar{1}} \otimes H_{\bar{1}}.$$

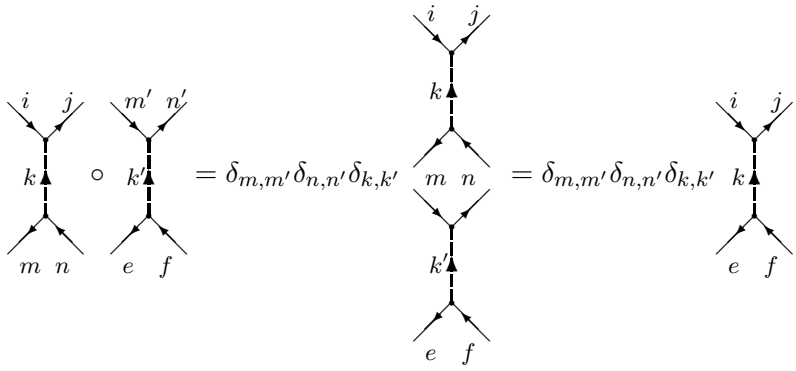
La base de $\mathcal{B}$ peut alors être noté de manière compacte comme suit :

$$\mathcal{B}_0 = \{00, 01, 0\bar{1}\ ,\ 10, 11, 1\bar{1}\ ,\ \bar{1}0, \bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}\}\,,$$

$$\mathcal{B}_1 = \{rr, ru, rd\ ,\ ur, uu, ud\ ,\ dr, du, dd\}\,,$$

$$\mathcal{B}_{\bar{1}} = \left\{\bar{d}\bar{d}, \bar{d}\bar{r}, \bar{d}\bar{u}\ ,\ \bar{r}\bar{d}, \bar{r}\bar{r}, \bar{r}\bar{u}\ ,\ \bar{u}\bar{d}, \bar{u}\bar{r}, \bar{u}\bar{u}\right\}.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{B}$ est muni de la structure d'algèbre définie par un produit associatif que nous appelerons **produit vertical** et qui est definie de la même maniere que pour $SU(2)$. Nottons tout de même que l'orientation des diagrammes, en particulier les diagrammes de l'espace dual H à été choisié de maniere que il soit naturel le colage vertical de doubles triangles.



A partir de cette définition de la multiplication il est évident que le produit des élément de la base que n'ont pas la même longueur est égale à zéro. En nous servant de cette propriété nous avons choisi de présenter la table de multiplication de la base de $\mathcal{B}$ par blocs, en considèrant uniquement les blocs non-nuls :

$\mathcal{B}_0 \circ \mathcal{B}_0$	00	01	$0\bar{1}$	10	11	$1\bar{1}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}\bar{1}$
$\boxed{00}$	00	01	$0\bar{1}$	.	.	.	.	.	.
01	.	.	.	00	01	$0\bar{1}$	.	.	.
$0\bar{1}$	.	.	.	.	.	.	00	01	$0\bar{1}$
10	10	11	$1\bar{1}$	.	.	.	.	.	.
$\boxed{11}$	.	.	.	10	11	$1\bar{1}$	.	.	.
$1\bar{1}$	.	.	.	.	.	.	10	11	$1\bar{1}$
$\bar{1}0$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}\bar{1}$	.	.	.	.	.	.
$\bar{1}1$	.	.	.	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}\bar{1}$	.	.	.
$\boxed{\bar{1}\bar{1}}$	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}\bar{1}$

$= \quad M_0$

$\mathcal{B}_1 \circ \mathcal{B}_1$	rr	ru	rd	ur	uu	ud	dr	du	dd
$\boxed{rr}$	rr	ru	rd	.	.	.	.	.	.
ru	.	.	.	rr	ru	rd	.	.	.
rd	.	.	.	.	.	.	rr	ru	rd
ur	ur	uu	ud	.	.	.	.	.	.
$\boxed{uu}$	.	.	.	ur	uu	ud	.	.	.
ud	.	.	.	.	.	.	ur	uu	ud
dr	dr	du	dd	.	.	.	.	.	.
du	.	.	.	dr	du	dd	.	.	.
$\boxed{dd}$	.	.	.	.	.	.	dr	du	dd

$= \quad M_1$

$\mathcal{B}_{\bar{1}} \circ \mathcal{B}_{\bar{1}}$	$\bar{d}\bar{d}$	$\bar{d}\bar{r}$	$\bar{d}\bar{u}$	$\bar{r}\bar{d}$	$\bar{r}\bar{r}$	$\bar{r}\bar{u}$	$\bar{u}\bar{d}$	$\bar{u}\bar{r}$	$\bar{u}\bar{u}$
$\boxed{\bar{d}d}$	$\bar{d}\bar{d}$	$\bar{d}\bar{r}$	$\bar{d}\bar{u}$	.	.	.	.	.	.
$\bar{d}\bar{r}$	.	.	.	$\bar{d}\bar{d}$	$\bar{d}\bar{r}$	$\bar{d}\bar{u}$	.	.	.
$\bar{d}\bar{u}$	.	.	.	.	.	.	$\bar{d}\bar{d}$	$\bar{d}\bar{r}$	$\bar{d}\bar{u}$
$\bar{r}\bar{d}$	$\bar{r}\bar{d}$	$\bar{r}\bar{r}$	$\bar{r}\bar{u}$	.	.	.	.	.	.
$\boxed{\bar{r}\bar{r}}$	.	.	.	$\bar{r}\bar{d}$	$\bar{r}\bar{r}$	$\bar{r}\bar{u}$	.	.	.
$\bar{r}\bar{u}$	.	.	.	.	.	.	$\bar{r}\bar{d}$	$\bar{r}\bar{r}$	$\bar{r}\bar{u}$
$\bar{u}\bar{d}$	$\bar{u}\bar{d}$	$\bar{u}\bar{r}$	$\bar{u}\bar{u}$	.	.	.	.	.	.
$\bar{u}\bar{r}$	.	.	.	$\bar{u}\bar{d}$	$\bar{u}\bar{r}$	$\bar{u}\bar{u}$	.	.	
$\boxed{\bar{u}\bar{u}}$	.	.	.	.	.	.	$\bar{u}\bar{d}$	$\bar{u}\bar{r}$	$\bar{u}\bar{u}$

$$= \quad M_{\bar{1}}$$

La table de multiplication de l'algèbre $(\mathcal{B}, \circ)$ a alors la forme suivante

$\circ$	$\mathcal{B}_0$	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_{\bar{1}}$
$\mathcal{B}_0$	M_0	$\cdot$	$\cdot$
$\mathcal{B}_1$	$\cdot$	M_1	$\cdot$
$\mathcal{B}_{\bar{1}}$	$\cdot$	$\cdot$	$M_{\bar{1}}$

, (1.78)

Dans chaque bloc M_p les éléments qu'on été dénotés par un cadre sont les composants de l'identité. Comme pour les cas $SU(2)$ l'identité ne forme par partie de la base de $\mathcal{B}$ et s'écrit dans cas présent $\mathbb{1} = 00 + 11 + \bar{1}\bar{1} + rr + uu + dd + \bar{d}\bar{d} + \bar{r}\bar{r} + \bar{u}\bar{u}$.

La coalgèbre $(\mathcal{B}, \Delta)$ Nous allons définir sur $\mathcal{B}$ un coproduit compatible avec le produit vertical $\circ$. Le coproduit Δ munit à l'algèbre $(\mathcal{B}, \circ)$ d'une structure de bigèbre.

La définition du coproduit sur $\mathcal{B}$ est moins évidente que celle du produit $\circ$ (rappelons nous que $\circ$ est le produit naturel associé aux diagrammes verticaux).Pour $SU(2)$ la construction du coproduit Δ peut se faire a partir de différents méthodes reposant sur la définition des cellules de Ocneanu, les valeurs des cellules basiques et les propriétés de réflexion et unitarieté (voir equations A_1 a A_7). Mais pour les cas $SU(3)$ les valeurs des cellules de base ne sont pas calculables à l'aide de formules explicites comme pour $SU(2)$, et nous ne savons pas a priori quelles sont les propriétés (equivalents de la unitarieté el reflexion) que ces cellules doivent satisfaire. Nous pouvons par contre emmetre une hypothèse pour après verifier que les cellules ainsi définies donnet lieu à un coproduit bien définit, c'est a dire qui soit bien un homomorphisme. C'est pour ceci que nous décidons de présenter d'abord le coproduit et ses propriétés explicitement. La valeur des cellules associés et ses propriétés sera donne plus loin.

L'action du coproduit $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ sur la base 1.77 est à priori définie comme suit :

$$
\begin{aligned}
\Delta\, 00 &= 00 \bigotimes 00 + rr \bigotimes \bar{r}\bar{r} + \bar{d}\bar{d} \bigotimes dd & \Delta\, rr &= 00 \bigotimes rr + rr \bigotimes 11 + \bar{d}\bar{d} \bigotimes \bar{u}\bar{u} \\
\Delta\, 01 &= 01 \bigotimes 01 + ru \bigotimes \bar{r}\bar{u} + \bar{d}\bar{r} \bigotimes dr & \Delta\, ru &= 01 \bigotimes ru + ru \bigotimes 1\bar{1} + \bar{d}\bar{r} \bigotimes \bar{u}\bar{d} \\
\Delta\, 0\bar{1} &= 0\bar{1} \bigotimes 0\bar{1} + rd \bigotimes \bar{r}\bar{d} + \bar{d}\bar{u} \bigotimes du & \Delta\, rd &= 0\bar{1} \bigotimes rd + rd \bigotimes 10 + \bar{d}\bar{u} \bigotimes \bar{u}\bar{r} \\
\Delta\, 10 &= 10 \bigotimes 10 + ur \bigotimes \bar{u}\bar{r} + \bar{r}\bar{d} \bigotimes rd & \Delta\, ur &= 10 \bigotimes ur + ur \bigotimes \bar{1}1 + \bar{r}\bar{d} \bigotimes \bar{d}\bar{u} \\
\Delta\, 11 &= 11 \bigotimes 11 + uu \bigotimes \bar{u}\bar{u} + \bar{r}\bar{r} \bigotimes rr & \Delta\, uu &= 11 \bigotimes uu + uu \bigotimes \bar{1}\bar{1} + \bar{r}\bar{r} \bigotimes \bar{d}\bar{d} \\
\Delta\, 1\bar{1} &= 1\bar{1} \bigotimes 1\bar{1} + ud \bigotimes \bar{u}\bar{d} + \bar{r}\bar{u} \bigotimes ru & \Delta\, ud &= 1\bar{1} \bigotimes ud + ud \bigotimes \bar{1}0 + \bar{r}\bar{u} \bigotimes \bar{d}\bar{r} \\
\Delta\, \bar{1}0 &= \bar{1}0 \bigotimes \bar{1}0 + dr \bigotimes \bar{d}\bar{r} + \bar{u}\bar{d} \bigotimes ud & \Delta\, dr &= \bar{1}0 \bigotimes dr + dr \bigotimes 01 + \bar{u}\bar{d} \bigotimes \bar{r}\bar{u} \\
\Delta\, \bar{1}1 &= \bar{1}1 \bigotimes \bar{1}1 + du \bigotimes \bar{d}\bar{u} + \bar{u}\bar{r} \bigotimes ur & \Delta\, du &= \bar{1}1 \bigotimes du + du \bigotimes 0\bar{1} + \bar{u}\bar{r} \bigotimes \bar{r}\bar{d} \\
\Delta\, \bar{1}\bar{1} &= \bar{1}\bar{1} \bigotimes \bar{1}\bar{1} + dd \bigotimes \bar{d}\bar{d} + \bar{u}\bar{u} \bigotimes uu & \Delta\, dd &= \bar{1}\bar{1} \bigotimes dd + dd \bigotimes 00 + \bar{u}\bar{u} \bigotimes \bar{r}\bar{r}
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\, \bar{d}\bar{d} &= 00 \bigotimes \bar{d}\bar{d} + rr \bigotimes uu + \bar{d}\bar{d} \bigotimes \bar{1}\bar{1} \\
\Delta\, \bar{d}\bar{r} &= 01 \bigotimes \bar{d}\bar{r} + ru \bigotimes ud + \bar{d}\bar{r} \bigotimes \bar{1}0 \\
\Delta\, \bar{d}\bar{u} &= 0\bar{1} \bigotimes \bar{d}\bar{u} + rd \bigotimes ur + \bar{d}\bar{u} \bigotimes \bar{1}1 \\
\Delta\, \bar{r}\bar{d} &= 10 \bigotimes \bar{r}\bar{d} + ur \bigotimes du + \bar{r}\bar{d} \bigotimes 0\bar{1} \\
\Delta\, \bar{r}\bar{r} &= 11 \bigotimes \bar{r}\bar{r} + uu \bigotimes dd + \bar{r}\bar{r} \bigotimes 00 \\
\Delta\, \bar{r}\bar{u} &= 1\bar{1} \bigotimes \bar{r}\bar{u} + ud \bigotimes dr + \bar{r}\bar{u} \bigotimes 01 \\
\Delta\, \bar{u}\bar{d} &= \bar{1}0 \bigotimes \bar{u}\bar{d} + dr \bigotimes ru + \bar{u}\bar{d} \bigotimes 1\bar{1} \\
\Delta\, \bar{u}\bar{r} &= \bar{1}1 \bigotimes \bar{u}\bar{r} + du \bigotimes rd + \bar{u}\bar{r} \bigotimes 10 \\
\Delta\, \bar{u}\bar{u} &= \bar{1}\bar{1} \bigotimes \bar{u}\bar{u} + dd \bigotimes rr + \bar{u}\bar{u} \bigotimes 11
\end{aligned}
$$

Une observation est que tous les coefficients dans ce coproduit sont égaux a 1, et que dans chaque cas le coproduit contient tous les termes qui pouvent à priori intervenir par des raisons de concatenation. Δ est compatible avec la structure de l'algèbre $(\mathcal{B}, \circ)$, c'est a dire l'application Δ est un homomorphisme entre l'espace $\mathcal{B}$ et sont carrée tensoriel. Pour le verifier nous considerons la multiplication naturelle dans le espace produit tensoriel, celle-ci est définie comme $(i \otimes j) \circ (m \otimes n) = (i \circ m) \otimes (j \circ n)$, la compatibilité du coproduit Δ avec cette multiplication implique que

$$\Delta(i \circ j) = \Delta\, i \circ \Delta\, j$$

Cette propriété est vérifié pour chaque une des entrées de la table de multiplication (1.78), montrer ces calculs explicitement possède un intérêt limité et occuperait une grade place puisque la table es de dimension 27×27. Nous allons montrer seulement quelques exemples à titre d'illustration :

– $\underline{01 \circ 10 \ = \ 00 \Rightarrow}$

$$\begin{aligned}
\Delta(01 \circ 10) &= 00 \bigotimes 00 + rr \bigotimes \bar{r}\bar{r} + \bar{d}\bar{d} \bigoplus dd \\
\Delta 01 \circ \Delta 10 &= \big(01 \bigotimes 01 + ru \bigotimes \bar{r}\bar{u} + \bar{d}\bar{r} \bigotimes dr\big) \circ \big(10 \bigotimes 10 + ur \bigotimes \bar{u}\bar{r} + \bar{r}\bar{d} \bigotimes rd\big) \\
&= 01 \circ 10 \bigotimes 01 \circ 10 + ru \circ ur \bigotimes \bar{r}\bar{u} \circ \bar{u}\bar{r} + \bar{d}\bar{r} \circ \bar{r}\bar{d} \bigotimes dr \circ rd \\
&= 00 \bigotimes 00 + rr \bigotimes \bar{r}\bar{r} + \bar{d}\bar{d} \bigoplus dd
\end{aligned}$$

– $\underline{ru \circ ur \ = \ rr \Rightarrow}$

$$\begin{aligned}
\Delta(ru \circ ur) &= 00 \bigotimes rr + rr \bigotimes 11 + \bar{d}\bar{d} \bigotimes \bar{u}\bar{u} \\
\Delta ru \circ \Delta ur &= \big(01 \bigotimes ru + ru \bigotimes 1\bar{1} + \bar{d}\bar{r} \bigotimes \bar{u}\bar{d}\big) \circ \big(10 \bigotimes ur + ur \bigotimes \bar{1}1 + \bar{r}\bar{d} \bigotimes \bar{d}\bar{u}\big) \\
&= 01 \circ 10 \bigotimes ru \circ ur + ru \circ ur \bigotimes 1\bar{1} \circ \bar{1}1 + \bar{d}\bar{r} \circ \bar{r}\bar{d} \bigotimes \bar{u}\bar{d} \circ \bar{d}\bar{u} \\
&= 00 \bigotimes rr + rr \bigotimes 11 + \bar{d}\bar{d} \bigotimes \bar{u}\bar{u}
\end{aligned}$$

– $\underline{\bar{r}\bar{u} \circ \bar{u}\bar{d} \ = \ \bar{r}\bar{d} \Rightarrow}$

$$\begin{aligned}
\Delta(\bar{r}\bar{u} \circ \bar{u}\bar{d}) &= 10 \bigotimes \bar{r}\bar{d} + ur \bigotimes du + \bar{r}\bar{d} \bigotimes 0\bar{1} \\
\Delta \bar{r}\bar{u} \circ \Delta \bar{u}\bar{d} &= (1\bar{1} \bigotimes \bar{r}\bar{u} + ud \bigotimes dr + \bar{r}\bar{u} \bigotimes 01) \circ \big(\bar{1}0 \bigotimes \bar{u}\bar{d} + dr \bigotimes ru + \bar{u}\bar{d} \bigotimes 1\bar{1}\big) \\
&= 1\bar{1} \circ \bar{1}0 \bigotimes \bar{r}\bar{u} \circ \bar{u}\bar{d} + ud \circ dr \bigotimes dr \circ ru + \bar{r}\bar{u} \circ \bar{u}\bar{d} \bigotimes 01 \circ 1\bar{1} \\
&= 10 \bigotimes \bar{r}\bar{d} + ur \bigotimes du + \bar{r}\bar{d} \bigotimes 0\bar{1},
\end{aligned}$$

Nous pouvons verifier ces calculs pour chaqu'élement de la base de $\mathcal{B}$, la conclusion est que l'application Δ ainsi définit est un coproduit. Nous pouvons écrire explicitement le coproduit de l'identité á partir de l'action sur les élements de la base :

$$\Delta \mathbb{1} = (00+dd+\bar{r}\bar{r}) \bigotimes (00+rr+\bar{d}\bar{d}) + (rr+11+\bar{u}\bar{u}) \bigotimes (\bar{r}\bar{r}+11+uu) + (\bar{d}\bar{d}+uu+\bar{1}\bar{1}) \bigotimes (dd+\bar{u}\bar{u}+\bar{1}\bar{1}).$$

Il est clair que $\Delta \mathbb{1} \neq \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ et pour cette raisons $(\mathcal{B}, \circ, \Delta)$ ne peut pas être une bigèbre au sens usuel. Néanmoins l'action du coproduit sur l'identité peut être ecrit sous la forme :

$$\Delta \mathbb{1} = \mathbb{1}_t \otimes \mathbb{1}_s = t_0 \otimes s_0 + t_1 \otimes s_1 + t_{\bar{1}} \otimes s_{\bar{1}},$$

où chaque composante est définie comme suit

$$\begin{aligned}
t_0 &= (00 + dd + \bar{r}\bar{r}) & s_0 &= (00 + rr + \bar{d}\bar{d}) \\
t_1 &= (rr + 11 + \bar{u}\bar{u}) & s_1 &= (\bar{r}\bar{r} + 11 + uu) \\
t_{\bar{1}} &= (\bar{d}\bar{d} + uu + \bar{1}\bar{1}) & s_{\bar{1}} &= (dd + \bar{u}\bar{u} + \bar{1}\bar{1})
\end{aligned}$$

ces éléments constituent la base des sous algèbres *source* $\mathcal{B}_s$ et *target* $\mathcal{B}_t$ que nous avons défini dans la section 1.3. Une counité peut aussi être définie dans le sens faible, c'est a dire, il ne s'agit pas d'un homomorphisme (contrairement au cas habituel) car l'application est tordue par les élements qui apparaisent dans le membre de droite de $\Delta \mathbb{1}$. On peut alors vérifier qu'on

a bien a faire à une bigèbre unitale faible. Par ailleurs, on peut aussi définir une antipode (nous ne le ferons pas) et la structure finale est celle d'une algèbre de Hopf faible ou grupoide quantique. il faut prendre en compte dans le diagramme commutatif que le coproduit de la unité est le produit des unités des sous espaces *target* et *itsurce*. La définition de la counite est la suivante :

$$\epsilon(e_I) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } e_I \in \mathcal{B}_0 \\ 0 \text{ si } e_I \in \mathcal{B}_1 \text{ ou } \mathcal{B}_2 \end{cases}$$

qui est d'ailleurs en accord avec le résultat obtenu dans les cas $SU(2)$.

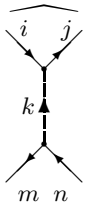
L'algèbre dual $(\widehat{\mathcal{B}}, \hat{\circ})$ L'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ est engendré par la base duale

$$\widehat{\mathcal{B}}_0 = \left\{\widehat{00}, \widehat{01}, \widehat{0\bar{1}} \ , \ \widehat{10}, \widehat{11}, \widehat{1\bar{1}} \ , \ \widehat{\bar{1}0}, \widehat{\bar{1}1}, \widehat{\bar{1}\bar{1}}\right\},$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_1 = \left\{\widehat{rr}, \widehat{ru}, \widehat{rd} \ , \ \widehat{ur}, \widehat{uu}, \widehat{ud} \ , \ \widehat{dr}, \widehat{du}, \widehat{dd}\right\},$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\bar{1}} = \left\{\widehat{\bar{d}\bar{d}}, \widehat{\bar{d}\bar{r}}, \widehat{\bar{d}\bar{u}} \ , \ \widehat{\bar{r}\bar{d}}, \widehat{\bar{r}\bar{r}}, \widehat{\bar{r}\bar{u}} \ , \ \widehat{\bar{u}\bar{d}}, \widehat{\bar{u}\bar{r}}, \widehat{\bar{u}\bar{u}}\right\}.$$

cette base est représenté à l'aide des diagrammes verticaux

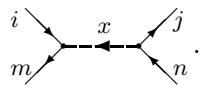


(1.80)

Le coproduit Δ défini dans l'espace $\mathcal{B}$ induit un produit $\hat{\circ}$ dans l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$, la table de multiplication est de dimension 27×27 et nous n'allons pas l'écrire explicitement ici, d'autant que, comme on le verra, il existe une base (la base horizontal) dans laquelle la définition de ce produit est naturelle. Nous allons simplement montrer trois exemples, pour illustrer de ce produit, mais surtout parce que le résultat va nous servir, plus loin, pour définir la valeur des cellules basiques.

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{dr} \otimes \widehat{ru} \, , \, \Delta \bar{u}\bar{d} \rangle &= \langle \widehat{dr} \,\hat{\circ}\, \widehat{ru} \, , \, \bar{u}\bar{d} \rangle \quad \Rightarrow \quad \widehat{dr} \,\hat{\circ}\, \widehat{ru} = \widehat{\bar{u}\bar{d}} \\
\langle \widehat{ru} \otimes \widehat{ud} \, , \, \Delta \bar{d}\bar{r} \rangle &= \langle \widehat{ru} \,\hat{\circ}\, \widehat{ud} \, , \, \bar{d}\bar{r} \rangle \quad \Rightarrow \quad \widehat{ru} \,\hat{\circ}\, \widehat{ud} = \widehat{\bar{d}\bar{r}} \\
\langle \widehat{ud} \otimes \widehat{dr} \, , \, \Delta \bar{r}\bar{u} \rangle &= \langle \widehat{ud} \,\hat{\circ}\, \widehat{dr} \, , \, \bar{r}\bar{u} \rangle \quad \Rightarrow \quad \widehat{ud} \,\hat{\circ}\, \widehat{dr} = \widehat{\bar{r}\bar{u}}
\end{aligned} \tag{1.81}$$

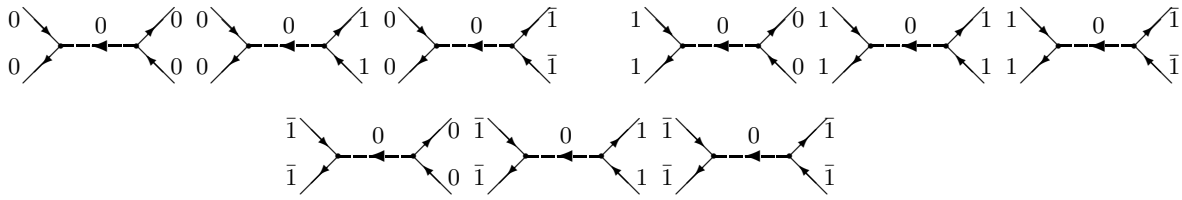
L'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ est engendré par une base différente à la base duale formé de doubles triangles verticaux (diagrammes horizontaux). Cette base horizontal est gradué par une étiquette x donnant la "longueur" horizontale. La représentation diagrammatique des éléments de cette base est donne par des diagrammes de diffusion horizontaux



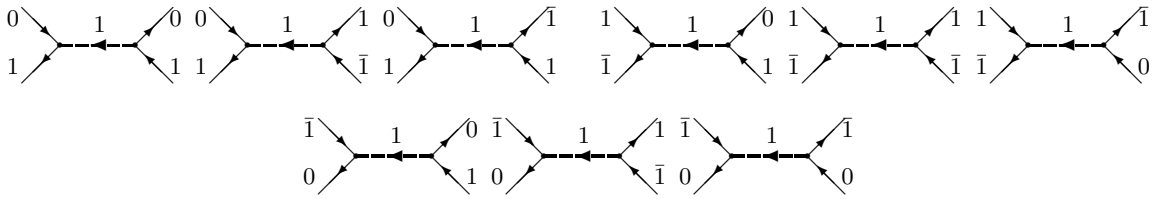
.

où (i, x, m) et (j, x, n) sont des triangles admissibles. $\widehat{\mathcal{B}}$ est gradué par l'index x, et se décompose en trois sous-espaces $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{B}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{B}}_{\bar{1}}$. L'ensemble des éléments de la base horizontale est comme suit :

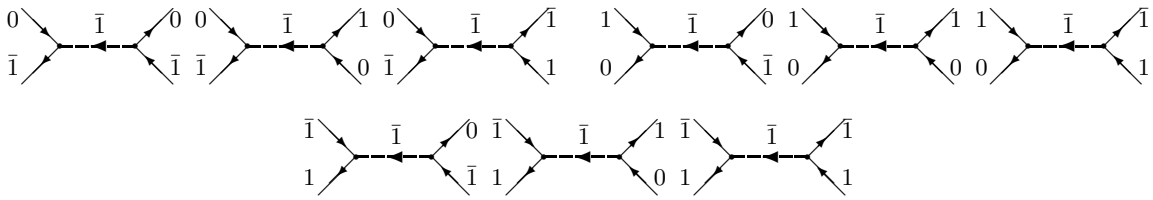
– Base du sous-espace $\widehat{\mathcal{B}}_0$



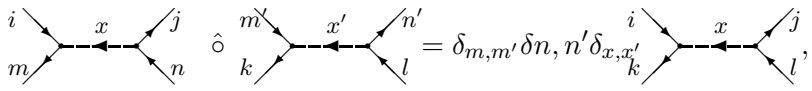
– Base du sous-espace $\widehat{\mathcal{B}}_1$



– Base du sous-espace $\widehat{\mathcal{B}}_{\bar{1}}$



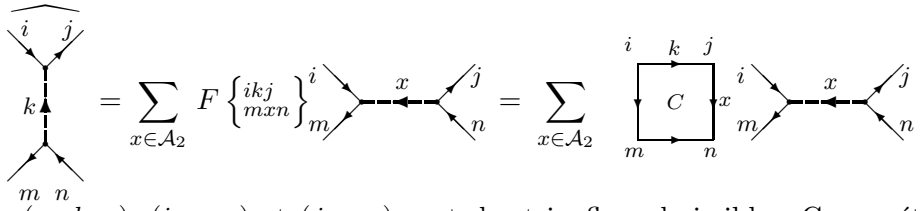
Dans cette base le produit $\hat{\circ}$ (induit par le coproduit Δ) peut-être exprimé de manière naturelle comme la contraction horizontale des élements de la base horizontale.



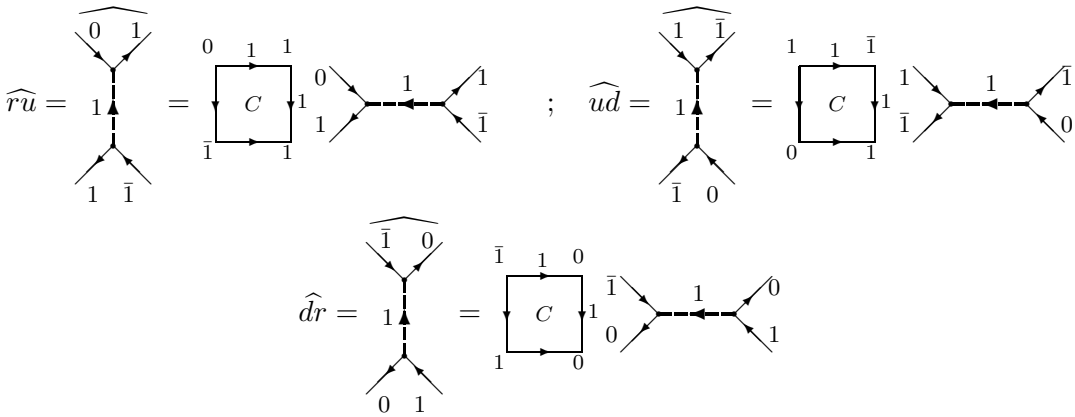
$$= \delta_{m,m'}\delta n, n'\delta_{x,x'} \tag{1.82}$$

Cette multiplication fait de l'espace dual $\mathcal{B}$ une algèbre associative.Pour obtenir la multiplication de l'équation (1.81) nous avons bessoin de faire exprimer les élement de la base dual en termes de la base horizontale, dans notre approximation la comparaison du produit de l'équation (1.82) et celle de léquation (1.81) permettra de fixer la valeur des cellules de base.

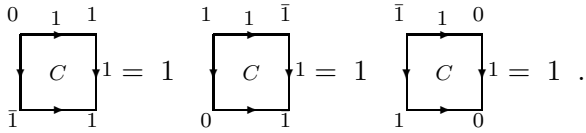
Changement de base Nous appelons les coefficients donnant le changement de base entre la base duale et la base horizontale $F\left\{\begin{smallmatrix} i\,k\,j \\ mxn \end{smallmatrix}\right\}$. La notation suit celle choisie pour le cas $SU(2)$ mais nous choisisons de supprimer le sous-indexde F puisque notre étude $SU(3)$ se limite uniquement au cas $\mathcal{A}$, et pour ces cas tous les coefficients F_i sont les mêmes. Le changement de base dans l'espace dual $\widehat{\mathcal{B}}$ est donné par



où (i,k,j), (m,k,n), (i,x,m) et (j,x,n) sont des trianfles admissibles. Ce cas étant particulièrement simple, nous pouvons calculer les valeurs des cellules basiques à partir des priduits (1.81) et (1.82). Les transformations entre éléments de la base de longueur $i = x = 1$, c'est à dire, les cellules de $SU(3)$ correspondant à des cellules basiques, est comme suit :

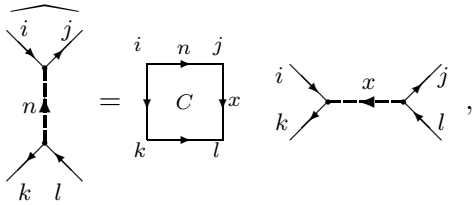


En comparant les produits des diagrammes horizontaux contribuant aux transformations de base précédentes, avec les produits des élément de la base duale illustré dans l'équation 1.81 on trouve :



(1.83)

Nous avons ainsi obtenu la valeur des cellules basiques pour le graphe $\mathcal{A}_1$ de la famille $SU(3)$. En général pour le cas présent le changement de base a la forme suivante

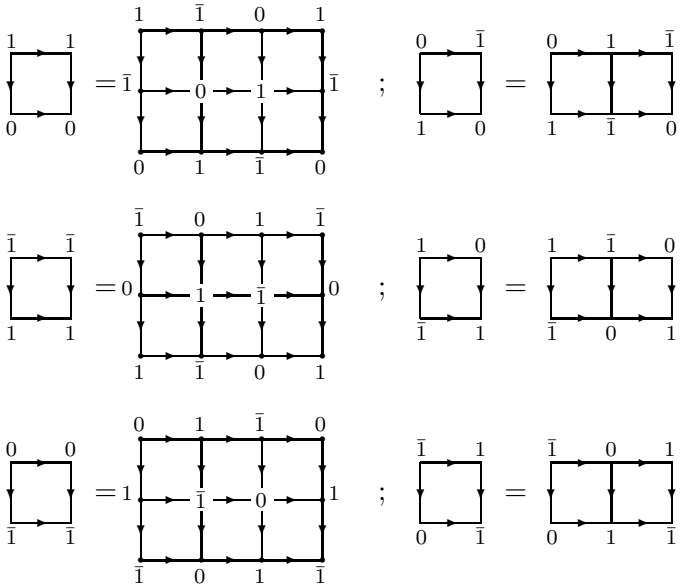


sans sommations dans l'index x. C'est a dire, dans cet exemple il y a un diagramme vertical pour chaque diagramme horizontal (ce qui peut être conclu aprés un'inspection des deux bases), et les valeurs des cellules est toujours un, car les trois cellules basiques sont égales a un.

La méthode choisie pour les déterminer est empirique car nous ne connaissons pas de formule générale donnant la valeur de ces coefficients dans le cas $SU(3)$, même pour les

graphes de type A. D'égale manière nous ne connaissons pas à priori les équivalents des propriétés d'unitarieté et de réflexion des cellules de $SU(2)$, il est d'ailleurs probable qu'en général les propriétés d'unitarieté et réflexion soient différentes dans le cas $SU(3)$, car la prise en compte de l'orientation des arêtes implique que les symétries tétrahédriques (valables pour le cas $SU(2)$) ne sont plus valables.

Les cellules que nous venons de définir ont garde une propriété utile, qu'on peut vérifier explicitement dans ce cas, c'est la construction des cellules générales á partir du collage des cellules basiques. Il est en effet possible de construire chaque cellule en termes de une (et dans se cas simple, une seule) combinaison des trois cellules basiques de la équation (1.83), la con struction est directe et ici nous nous contentons de montrer deux exemples pour illustrer le calcul. Nous avons choisi trois cellules de longueur horizontale 0 et longueur verticale $\bar{1}$, et trois cellules de longueur horizontale $\bar{1}$ et longueur verticale 1 :



(1.84)

Il y a un total de 24 cellules que pouvent être construites directement à partir du changément de base entre la base horizontale et la base verticale, oú au travers du collage des cellules que nous venons de illustrer.

Chapitre 2

La méthode de scission modulaire.

Dans ce chapitre nous présentons la méthode de **scission modulaire**[1] qui permet d'obtenir, à partir d'un invariant modulaire donnée, l'ensemble des matrices toriques, le graphe d'Ocneanu et une réalisation matricielle de l'algèbre des symétries quantiques, sans avoir besoin de construire explicitement le groupoïde $\mathcal{B}$.

Ces résultats permettent, dans la plupart des cas de déterminer explicitement l'algèbre $Oc(G)$ et le graphe de Coxeter G associé à un invariant modulaire. Dans cette approche le graphe G n'est pas considéré comme une donnée de départ, mais fait partie des résultats obtenus par l'application de la méthode.

La méthode permet d'explorer le problème des symétries quantiques des invariants modulaires de haut niveaux, nous allons présenter dans la section 2.4 de ce chapitre la solution explicite des cas $\mathcal{E}_5^*$, $\mathcal{E}_9$ et $\mathcal{E}_9/\mathbb{Z}_3$ du système $SU(3)$. Les deux dernier graphes apparaissent comme sous graphes du même graphe d'Ocenanu. Le cas $\mathcal{E}_5^*$ est un exemple oú le graphe lui-même n'apparaît pas explicitement dans $Oc(G)$, mais il peut être déterminé de manière relativement simple en lui demandant de satisfaire à différentes relations de module.

Nous avons déjà remarqué que la liste de graphes participant à la classification des théories conformes de type $\hat{su}(2)$, $\hat{su}(3)$ et $\hat{su}(4)$ a été présentés par A. Ocneanu[2] en [59], mais le grupoïde quantique $\mathcal{B}$ n'a pas été calculé pour ses exemples à cause de la complexité du problème, c'est une méthode équivalente à la méthode de scission modulaire qu'a été utilisé pour déterminer cette liste de graphes [54], mais cette méthode n'est pas disponible dans la literature.

[1] Le contenu du chapitre est constitué par la publication [47]

[2] Les graphes du système $SU(3)$, appelés de Di Francesco et Zuber on été proposés empiriquement dans [32], mais la liste a été corrigé et un des graphes a été éliminé à partir des résultats de [59]

2.1 Introduction

Following the works of [18], it was shown that to every modular invariant of a 2d CFT one can associate a special kind of quantum groupoïd $\mathcal{B}(G)$, constructed from the combinatorial and modular data [13] of a graph G [23, 7, 25, 27, 10]. This quantum groupoïd $\mathcal{B}(G)$ plays a central role in the classification of 2d CFT, since it also encodes information on the theory when considered in various environments (not only on the bulk but also with boundary conditions and defect lines): the corresponding generalized partition functions are expressed in terms of a set of non-negative integer coefficients that can be determined from associative properties of structural maps of $\mathcal{B}(G)$ [28, 24, 25]. A series of papers [4, 23, 5, 6, 25] present the computations allowing to obtain these coefficients from a general study of the graph G and its quantum symmetries. In this approach, the set of graphs G is taken as an input. For the $\widehat{su}(2)_k$ model, the graphs G are the ADE Dynkin diagram, and for the $\widehat{su}(3)_k$ the Di Francesco-Zuber diagrams. A list of graphs has also been proposed in [20] for the $\widehat{su}(4)_k$ model. For a general $SU(N)$ system, the set of graphs G presents the following pattern. There is always the infinite series of $\mathcal{A}_k$ graphs, which are the truncated Weyl alcoves at some level k of $SU(N)$ irreps. Other infinite series are obtained by orbifolding and conjugation methods, but there are also some exceptional graphs (generalizing the E_6 and E_8 diagrams of the $SU(2)$ series), that can not be obtained in that way (to some extent, the E_7 diagram can be obtained from a careful study of the D_{10} case). One of the purposes of this article is actually to present a method to obtain these graphs.

We start with a modular invariant of a 2d $\widehat{su}(n)_k$ CFT as initial data. Classification of modular invariants is only completed for $n = 2$ and 3, but there exist several algorithms, mostly due to T. Gannon, that allow one to obtain modular invariants up to rather high levels of any affine algebra. By solving the modular splitting equation (to be recalled later), we obtain the coefficients of the generalized partition functions, as well as the quantum symmetries of the graph G, encoded in the Ocneanu graph $Oc(G)$. The graph G itself is then obtained at this stage as a subgraph or a module graph of its own quantum symmetry graph: it appears as a by-product of the computations.

Notice that the determination of the higher ADE graphs G by solving the modular splitting equation seems to be the method followed by A. Ocneanu (see [19]) to obtain the lists of $SU(3)$ and $SU(4)$ graphs presented in [20], but explicitation of his method was never been made available in the literature. The method that we describe here (that incorporates the solution of the modular splitting equation itself) was briefly presented in [8] for the study of the non simply laced diagram F_4, and is presented here in more general grounds.

The paper is organized as follows. In section **2** we review some results of CFT in order to fix our notations, and present the basic steps of the method allowing to solve the modular

splitting equation. Section **3** treats with more technical details of the resolution, making the difference between commutativity or non commutativity of the quantum symmetry algebra. In the last section we analyze some examples in order to illustrate the techniques. First we treat the E_6 modular invariant of the $SU(2)$ family; then two exceptional $SU(3)$ modular invariants at level 5, labelled by the graphs $\mathcal{E}_5$ and $\mathcal{E}_5/3$. The last example is the level 9 exceptional $SU(3)$ modular invariant, which is a special case for two reasons. The first one is that it leads to a non-commutative algebra of quantum symmetries. The second reason is that in the first list of $SU(3)$ graphs proposed in [11], three different graphs were associated to this modular invariant. With the methods presented in this paper, we only find two graphs associated to it, in accordance with the final list of Ocneanu published in [20].

2.2 CFT and graphs

Consider a 2d CFT defined on a torus, where the chiral algebra is an affine algebra $\widehat{su}(n)_k$ at level k. The modular invariant partition function reads

$$\mathcal{Z} = \sum_{i,j} \chi_i \, \mathcal{M}_{ij} \, \overline{\chi_j} \, , \tag{2.1}$$

where χ_i is the character of the element i of the finite set of integrable representations of $\widehat{su}(n)_k$, and where the matrix $\mathcal{M}$ is called the modular invariant: it commutes with the generators $\mathcal{S}$ and $\mathcal{T}$ of the modular group $PSL(2,\mathbb{Z})$. The introduction of boundary conditions (labelled by a, b), defect lines (labelled by x, y) or the combination of both, result in the following generalized partition functions (see [3, 1, 24]):

$$\mathcal{Z}_{a|b} = \sum_i (\mathcal{F}_i)_{ab} \chi_i \tag{2.2}$$

$$\mathcal{Z}_{x|y} = \sum_{i,j} (\mathcal{V}_{ij})_{xy} \chi_i \overline{\chi_j} \tag{2.3}$$

$$\mathcal{Z}_{x|ab} = \sum_i (\mathcal{F}_i \, S_x)_{ab} \, \chi_i \tag{2.4}$$

All coefficients appearing in the above expressions express multiplicities of irreducible representations in the Hilbert space of the corresponding theory and are therefore non-negative integers. They are conveniently encoded in a set of matrices: the annular matrices F_i with coefficients $(\mathcal{F}_i)_{ab}$; the double annular matrices V_{ij} with coefficients $(\mathcal{V}_{ij})_{xy}$ and the dual annular matrices S_x with coefficients $(S_x)_{ab}$. The different set of indices run as $i, j = 0, \ldots, d_I - 1$; $a, b = 0, \ldots, d_G - 1$ and $x, y = 0, \ldots, d_O - 1$. The integer d_I is the number of irreps at the given level k; d_G and d_O are given in terms of the modular invariant $\mathcal{M}$ by $d_G = Tr(\mathcal{M})$ and $d_O = Tr(\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger)$ (see [21, 2, 12]).

Compatibilities conditions – in the same spirit than those defined by Cardy in [3] for boundary conditions – impose relations on the above coefficients (see [22, 24]). Altogether

they read:

$$F_i\, F_{i'} = \sum_{i''} \mathcal{N}_{i\,i'}^{i''}\, F_{i''} \tag{2.5}$$

$$V_{i\,j}\, V_{i'\,j'} = \sum_{i''\,j''} \mathcal{N}_{i\,i'}^{i''}\, \mathcal{N}_{j\,j'}^{j''}\, V_{i''\,j''} \tag{2.6}$$

$$S_x\, S_y = \sum_z \mathcal{O}_{yx}^z\, S_z \tag{2.7}$$

$\mathcal{N}_{i\,j}^k$ are the fusion coefficients describing the tensor product decomposition $i \star j = \sum_k \mathcal{N}_{i\,j}^k\; k$ of representations i and j of $\widehat{su}(n)_k$. They can be encoded in matrices N_i called fusion matrices. $\mathcal{O}_{xy}^z$ are the quantum symmetry coefficients and can be encoded in matrices O_x called quantum symmetry matrices.

The matrices $\{F_i, N_i, O_x, V_{i\,j}, S_x\}$ have non negative integer coefficients: they can be seen as the adjacency matrices of a set of graphs. Knowledge of these graphs helps therefore to the complete determination of the different partition functions. All these coefficients also define (or can be obtained by) structural maps of a special kind of quantum groupoïd [18, 23, 25, 7, 10]. It is not the purpose of this paper to explore those correspondences, nor to study the mathematical aspects of this quantum groupoïd. What we will do here is to determine, taking as initial data the knowledge of the modular invariant $\mathcal{M}$, all the coefficients of the above matrices.

2.2.1 Steps of the resolution

We start with the double fusion equations (2.6), which are matrix equations involving the double annular matrices $V_{i\,j}$, of size $d_O \times d_O$, with coefficients $(V_{i\,j})_{xy}$. Notice that these coefficients can also be encoded in matrices W_{xy}, of size $d_I \times d_I$, with coefficients $(W_{xy})_{i\,j} = (V_{i\,j})_{xy}$. The W_{xy} are called double toric matrices. When no defect lines are present ($x = y = 0$), we must recover the modular invariant of the theory, therefore $W_{00} = \mathcal{M}$. Using the double toric matrices W_{xy}, the set of equations (2.6) read:

$$\sum_z (W_{xz})_{i\,j}\, W_{zy} = N_i\, W_{xy}\, N_j^{tr}\ . \tag{2.8}$$

The successive steps of resolution are the following:

Step 1: toric matrices Setting $x = y = 0$ in (2.8) and using the fact that $W_{00} = \mathcal{M}$ we get:

$$\sum_z (W_{0z})_{i\,j}\, W_{z0} = N_i\, \mathcal{M}\, N_j^{tr}\ . \tag{2.9}$$

This equation was first presented by A. Ocneanu in [20] and is called the **modular splitting equation**. The r.h.s. of (2.9) involves only known quantities, namely the modular invariant $\mathcal{M}$ and the fusion matrices N_i. The l.h.s. involves the set of toric matrices W_{z0} and W_{0z}, that we determine from this equation.

Step 2: double fusion matrices Setting $y = 0$ in (2.8) we get:

$$\sum_z (W_{xz})_{i\,j}\, W_{z0} = N_i\, W_{x0}\, N_j^{tr} \tag{2.10}$$

Once the toric matrices W_{x0} have been determined from Step 1, the r.h.s. of (2.10) then involves only known quantities. Resolution of these equations determine the double toric matrices W_{xy} – and equivalently the double fusion matrices $V_{i\,j}$ – appearing in the l.h.s. of (2.10).

Step 3: Ocneanu graph The double fusion matrices $V_{i\,j}$ are generated by a subset of fundamental matrices V_{f0} and V_{0f}, where f stands for the generators of the fusion algebra (for $SU(n)$ there are $n-1$ fundamental generators). These matrices are the adjacency matrices of a graph called the Ocneanu graph. Its graph algebra is the quantum symmetry algebra, encoded in the set of matrices O_x.

Step 4: higher ADE graph G The higher ADE graph G corresponding to the initial modular invariant $\mathcal{M}$ is recovered at this stage as a module graph of the Ocneanu graph. It may be a subgraph of $Oc(G)$ or an orbifold of one of its subgraphs. One also distinguishes type I cases (also called subgroup or self-fusion cases) and type II cases (also called module or non self-fusion cases).

2.3 From the modular invariant to graphs

We start with a modular invariant $\mathcal{M}$ at a given level k of a $\widehat{su}(n)$ CFT, and the corresponding fusion matrices N_i.

2.3.1 Determination of toric matrices W_{x0}

We compute the set of matrices $K_{i\,j}$ defined by:

$$K_{i\,j} = N_i\, \mathcal{M}\, N_j^{tr}\ . \tag{2.11}$$

The modular splitting equation (2.9) then reads:

$$K_{i\,j} = \sum_{z=0}^{d_O-1} (W_{0z})_{i\,j}\, W_{z0}\ . \tag{2.12}$$

This equation can be viewed as the linear expansion of the matrix $K_{i\,j}$ over the set of toric matrices W_{z0}, where the coefficients of this expansion are the non-negative integers $(W_{0z})_{i\,j}$. The number d_O is the dimension of the Ocneanu quantum symmetry algebra, it is evaluated by $d_O = Tr(\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger)$. The algebra of quantum symmetries comes with a basis (call its elements z) which is special because structure constants of the algebra, in this

basis, are non-negative integers. We introduce the linear map from the space of quantum symmetries to the space of $d_I \times d_I$ matrices defined by $z \mapsto W_{z0}$. This map is not necessarily injective: although elements z of the quantum symmetries are linearly independent, it may not be so for the toric matrices W_{z0} (in particular two distinct elements of the quantum symmetries can sometimes be associated with the same toric matrix). Let us call r the number of linearly independent matrices W_{z0}. Equation (2.12) tells us that each $K_{i\,j}$ (a matrix), defined by (2.11), can be decomposed on the r dimensional vector space spanned by the vectors (matrices) W_{z0}. r can be obtained as follows. From (2.11) we build a matrix K with elements of the form $\mathrm{K}_{\{i\,j\},\{i'\,j'\}}$, which means that each line of K is a flattened[3] matrix $K_{i\,j}$. Then r is obtained as the (line) rank of the matrix K, since the rank gives precisely the maximal number of independent lines of K, therefore the number r of linearly independent matrices W_{z0}. Two cases are therefore to be considered: depending if toric matrices are all linearly independent (the map $z \mapsto W_{z0}$ is injective and $r = d_O$) or not ($r < d_O$).

We also introduce a scalar product in the vector space of quantum symmetries for which the z basis is orthonormal. We consider the squared norm of the element $\sum_z (W_{0z})_{i\,j} z$ and denote it $||K_{i\,j}||^2$. This is an abuse of notation, "justified" by equation (2.12), and in the same way, we shall often talk, in what follows, of the "squared norm of the matrix $K_{i\,j}$", therefore identifying z with W_{z0}, although the linear map is not necessarily an isomorphism. We have the following property:

Propriété 7 *The squared norm of the matrix $K_{i\,j}$ is given by:*

$$||K_{i\,j}||^2 = (K_{i\,j})_{i^*\,j^*} \ . \tag{2.13}$$

Proof: We have:

$$\begin{aligned} ||K_{i\,j}||^2 &= \sum_z |(W_{0z})_{i,j}|^2 \\ &= \sum_z (W_{0z})_{i\,j}\,(W_{z0})_{i^*\,j^*} \\ &= (K_{i\,j})_{i^*\,j^*} \end{aligned}$$

From the first to the second line we used the following property:

$$(W_{0z})_{i\,j} = (W_{z0})_{i^*\,j^*} \tag{2.14}$$

that can be derived from the relation $V_{i^*\,j^*} = (V_{i\,j})^{tr}$, where i^* is the conjugated irrep of i (see [23]). From the second to the third line we use Eq. (2.12) in matrix components. ■

[3]By flattened matrix we mean that if $K_{i\,j} = \begin{pmatrix} a & .. & b \\ .. & .. & .. \\ c & .. & d \end{pmatrix}$, then the flattened matrix is $(a\,..\,b\,..\,..\,..\,c\,..\,d)$.

We now treat the two cases to be considered. Note: an explicit study of all cases seems to indicate that the linear independence (or not) of the toric matrices reflects the commutativity (or not) of the quantum symmetry algebra.

Non-degenerate case $r = d_O$. This happens when all toric matrices W_{z0} are linearly independent. The set of K_{ij} matrices are calculated from the initial data $\mathcal{M}$ and N_i from (2.11). The determination of the toric matrices W_{z0} are recursively obtained from a discussion of the squared norm of matrices K_{ij}, directly obtained from (2.13), which has to be a sum of squared integers.

- Consider the set of linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 1. From (2.12) the solution is that each such matrix is equal to a toric matrix W_{z0}.
- Next we consider the set of linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 2. In this case from (2.12) each such matrix is equal to the sum of two toric matrices. We have three cases: (i) K_{ij} is equal to the sum of two already determined toric matrices (no new information); (ii) it is the sum of an already determined toric matrix and of a new one; (iii) it is equal to the sum of two new toric matrices. To distinguish from cases (ii) and (iii), we calculate the set of differences $K_{ij} - W_i$ where W_i runs into the set of determined toric matrices, and check if the obtained matrix has non-negative integer coefficients: in this case we determine a new toric matrix given by $K_{ij} - W_i$.
- Next we consider the set of linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 3. From (2.12) each such matrix is equal to the sum of three toric matrices. Either (i) K_{ij} is equal to the sum of three already determined toric matrices; (ii) it is equal to the sum of a determined toric matrix and of two new ones; (iii) it is equal to the sum of two already determined matrices and a new one; or (iv) it is equal to the sum of three new toric matrices. We calculate the set of differences $K_{ij} - W_i$ and $K_{ij} - W_i - W_j$ where W_i, W_j runs into the set of determined toric matrices, and check whenever the obtained matrix has non-negative integer coefficients.
- For the set of linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 4 there are two possibilities. Either K_{ij} is the sum of four toric matrices, either it is equal to twice a toric matrix. In the last case, the matrix elements of K_{ij} should be either 0 or a multiple of 2, and the new toric matrix is obtained as $K_{ij}/2$. If not, a similar discussion as the one made for the previous items allows the determination of the new toric matrices.
- The next step is to generalize the previous discussions for higher values of the squared norm, in a straightforward way.

Once the set of toric matrices W_{z0} is determined, we can of course use equation (2.9) to check the results.

Degenerate case $r < d_O$. The integer r may be strictly smaller than d_O: this happens when toric matrices W_{z0} are *not* linearly independent. In order to better illustrate what has to be done in this case, let us treat a "virtual" example. Suppose the dimension of the Ocneanu algebra is $d_O = 3$, and call z_1, z_2, z_3 the basis elements. The corresponding toric matrices are $W_{z_1}, W_{z_2}, W_{z_3}$, and suppose they are not linearly independent. For example let us take $W_{z_3} = W_{z_1} + W_{z_2}$, in this case we have $r = 2 < d_O$. We still use the same scalar product in the algebra of quantum symmetries, and the norm of z_3 is of course 1, but, because of the abuse of langage and notation already made before, we shall say that the "squared norm" of W_{z_3} is equal to 1 (and not 2, of course!). The problem arising from the fact that toric matrices may not be linearly independent, so that the linear expansion (2.12) of $K_{i\,j}$ over the family of toric matrices may be not unique, can be solved by considering the squared norm of $K_{i\,j}$. Continuing with our virtual example, we could hesitate between writing $K_{i\,j} = W_{z_1} + 2W_{z_2}$ or $K_{i\,j} = W_{z_2} + W_{z_3}$, since $W_{z_3} = W_{z_1} + W_{z_2}$. In the first case the corresponding squared norm would be 5, and in the second case it would be 2. In all cases we have met, the knowledge of the squared norm of $K_{i\,j}$ from equation (2.13) is sufficient to bypass the ambiguity and obtain the correct linear expansion. The determination of the toric matrices can then be done step by step, in the same way as we did in the non degenerate case, starting from squared norm 1 to higher values. We refer to the $\widehat{su}(3)$ case at level 9 treated in the next section for more technical details.

2.3.2 Determination of double toric matrices W_{xy}

Once we have determined the toric matrices W_{x0}, we calculate the following set of matrices:

$$K^x_{i\,j} = N_i\, W_{x0}\, N^{tr}_j \tag{2.15}$$

Then equation (2.10) reads:

$$K^x_{i\,j} = \sum_z (W_{xz})_{i\,j} W_{z0}\ . \tag{2.16}$$

This equation can be viewed as the linear expansion of the matrix $K^x_{i\,j}$ over the set of toric matrices W_{z0}, where the coefficients of this expansion are the non-negative integers $(W_{xz})_{i\,j}$, that we want to determine. In the non degenerate case, toric matrices W_{z0} are linearly independent, the decomposition (2.16) is unique and the calculation is straightforward. In the degenerate case, some care has to be taken since toric matrices W_{z0} are not linearly independent: the expansion (2.16) is therefore not unique. Some coefficients may remain free and one needs further information to a complete determination (see next subsection).

The coefficients $(W_{xz})_{i\,j}$ can also be encoded in the double fusion matrices $V_{i\,j}$, that satisfy the double fusion equations (2.6). Setting $j = j' = 0$, $i = i' = 0$ and $i' = j = 0$ respectively

in Eq. (2.6) gives:

$$V_{i0}\,V_{i'0} = \sum_{i''} N_{i\,i'}^{\;i''}\,V_{i''0}\;, \tag{2.17}$$

$$V_{0\,j}\,V_{0\,j'} = \sum_{j''} N_{j\,j'}^{\;j''}\,V_{0\,j''}\;, \tag{2.18}$$

$$V_{i\,j'} = V_{i0}\,V_{0\,j'} = V_{0\,j'}\,V_{i0}\;. \tag{2.19}$$

From Eqs.(2.17) and (2.18), we see that the set of matrices V_{i0} and $V_{0\,i}$ satisfy the fusion algebra. These matrices can therefore be determined using these equations from the subset of matrices V_{f0} and V_{0f}, where f stands for the fundamental generators of the fusion algebra. For $\widehat{su}(2)$, there is one generator $f=1$, while for $\widehat{su}(3)$, there are two conjugated generators $(1,0)$ and $(0,1)$. The determination of double fusion matrices is reduced, by the use of Eqs. (2.17–2.19), to the determination of the generators V_{f0} and V_{0f}. It is therefore sufficient to solve Eq. (2.16) only for the pair of indices $(\,i\,j\,)=(f0)$ and $(\,i\,j\,)=(0f)$, and then use Eqs. (2.17–2.19), which simplifies a lot the computational task.

2.3.3 Determination of the Ocneanu algebra O_x

The matrices V_{f0} and V_{0f} are the adjacency matrices of the Ocneanu graph. We denote $O_{f_L}=V_{f0}$ and $O_{f_R}=V_{0f}$, where f_L and f_R now stands for the left and right generators of the Ocneanu quantum symmetry algebra. For $SU(n)$, there are $n-1$ generators f of the fusion algebra, and therefore $2(n-1)$ generators of the quantum symmetry algebra. The Ocneanu graph is also the Cayley graph of multiplication by these generators. From the multiplication by these generators, we can reconstruct the full table of multiplication of the quantum symmetry algebra (with elements denoted x,y,z)

$$x\,y = \sum_z \mathcal{O}_{xy}^{z}\,z\;. \tag{2.20}$$

This multiplication table is encoded in the "quantum symmetry matrices" O_x, which are the graph algebra matrices of the Ocneanu graph, with coefficients $(O_x)_{yz}=\mathcal{O}_{xy}^{z}$. They satisfy the following relations (take care with the order of indices since the quantum symmetry algebra may be non commutative):

$$O_x\,O_y = \sum_z (O_y)_{xz}\,O_z\;. \tag{2.21}$$

Once the generators $O_{f_L}=V_{f0}$ and $O_{f_R}=V_{0f}$ have been determined from the previous step, all quantum symmetry matrices can be computed from (2.21).

In the degenerate case the determination of the double toric matrices W_{xy} from equation (2.16) is not straightforward, some coefficients being still free. A solution to this problem is provided by an analysis of the structure of the Ocneanu graph itself, since it must satisfy some conjugation and chiral conjugation properties (we refer to the level 9 $\widehat{su}(3)$ example

treated in the next section for further details). Further compatibility conditions have also to be satisfied and can be used to check the results, or to determine the remaining coefficients (for degenerate cases). One of these conditions read [9]:

$$O_x\, V_{i\,j} = V_{i\,j}\, O_x = \sum_z (V_{i\,j})_{xz}\, O_z\ . \tag{2.22}$$

A special case of this equation, for $x = 0$, being:

$$W_{yy'} = \sum_z (O_z)_{yy'}\, W_{0z}\ . \tag{2.23}$$

2.3.4 Determination of the higher ADE graph G

For any $\widehat{su}(n)$ at level k, we can always consider the infinite series of $\mathcal{A}_k$ graphs, which are the truncated Weyl alcoves at level k of $SU(n)$ irreps. Other infinite series are obtained by orbifolding ($\mathcal{D}_k = \mathcal{A}_k/p$) and conjugation ($\mathcal{A}_k^*, \mathcal{D}_k^*$) methods, but there are also some exceptional graphs that can not be obtained in that way. Even after using the fact that graphs have to obey a list of requirements (such as conjugation, N-ality, spectral properties and that G must be an $\mathcal{A}_k$ module) listed in [11], one needed to use some good "computer aided flair" to find them. In this "historical approach", the problem of determining the algebra of quantum symmetries $Oc(G)$ was not addressed and this algebra was even less used as a tool to determine G itself. The procedure described here is different. Starting from the modular invariant, one solves the modular splitting equations (as explained in the previous section) and determines directly the algebra of quantum symmetries $Oc(G)$, without knowing what G itself can be. Then one uses the fact that G should be *both* an $\mathcal{A}_k$ module *and* an $Oc(G)$ module (see comments in [9]). Denoting i an element of the fusion algebra, the first module property reads $i\,a = \sum_b (F_i)_{ab}\, b$, with coefficients encoded by the annular matrices F_i. The associativity property $(\,i\,a)\,b = i\,(a\,b)$ imposes the annular matrices to satisfy the fusion algebra (see Eq.(2.5)). Denoting x an element of the quantum symmetry algebra, the second module property reads $x\,a = \sum_b (S_x)_{ab}\, b$, with coefficients encoded by the dual annular matrices S_x. The associativity property $(x\,a)\,b = x\,(a\,b)$ imposes the dual annular matrices to satisfy the quantum symmetry algebra (see Eq.(2.7)). In some simples cases, G itself appears as a subgraph of the Ocneanu graph, in other cases it appears as a module over the algebra of a particular subgraph. The methods we have described allow for the determination of the graph G even when orbifold and conjugation arguments from the $\mathcal{A}_k$ graphs do not apply (the exceptional cases). It can be used for a general affine algebra $\widehat{g}_k$ at any given level k, once the corresponding modular invariant is known.

In the next section, we present and illustrate this method by using several exceptional examples. In the $su(3)$ family, there are three exceptional graphs with self fusion. They are called $\mathcal{E}_5, \mathcal{E}_9$ and $\mathcal{E}_{21}$. In this paper we have chosen $\mathcal{E}_5$ (a kind of generalization of the

E_6 case of $su(2)$, also treated as a standard example) and $\mathcal{E}_9$. The case of $\mathcal{E}_{21}$ (a kind of generalization of the E_8 case of $su(2)$) is actually very simple to discuss, even simpler than $\mathcal{E}_5$ because it does not admit any non trivial module graph, and we could have described it as well, along the same lines. Results concerning $\mathcal{E}_{21}$ and its quantum symmetries can be found in [6, 25] (in those references, the graph itself is a priori given). The $su(3)$ - analogue of the E_7 case of $su(2)$, which is an exceptional twist of $\mathcal{D}_9$, can also be analysed thank's to the modular splitting formula, of course, but the discussion is quite involved (see [16, 15]). We refer to [26] for a description of an $\widehat{su}(4)$ example. In [8], these methods were applied to a non simply-laced example of the $su(2)$ family, where the initial partition function is not modular invariant (it is invariant under a particular congruence subgroup) and where there is no associated quantum groupoïd.

2.3.5 Comments

All module, associativity and compatibility conditions described here between the different set of matrices follow from properties of the quantum groupoïd $\mathcal{B}(G)$ constructed from the higher ADE graph G [18, 23, 25]. General results have been published on this quantum groupoïd (see [18, 7, 10, 17, 21]). But we are not aware of any definite list of properties that the graphs G should satisfy to obtain the right classification. The strategy adopted here is to take as granted the existence of a quantum groupoïd and its corresponding set of properties, and to derive the graph G as a by-product of the calculations, starting from the only knowledge of the modular invariant. Notice that this seems to be the method adopted by Ocneanu in order to produce his list of $SU(3)$ and $SU(4)$ graphs presented in [20]. One crucial check for the existence of the underlying quantum groupoïd is the existence of dimensional rules:

$$\dim(\mathcal{B}(G)) = \sum_i d_i^2 = \sum_x d_x^2 \ , \tag{2.24}$$

where the dimensions d_i and d_x are calculated from the annular and dual annular matrices: $d_i = \sum_{a,b}(F_i)_{ab}$, $d_x = \sum_{a,b}(S_x)_{ab}$.

The method described in this article allows for the determination of the set of matrices $\{F_i, N_i, O_x, V_{ij}, S_x\}$ and the corresponding graphs. Once the ADE Coxeter graph G has been obtained, and following the works of [4, 5, 25], we can also propose a realization of its quantum symmetry algebra as a particular tensor product of graph algebras. With this realization at hand, the matrices O_x and S_x can be expressed in a much more economic way.

2.4 Examples

2.4.1 The E_6 case of $\widehat{su}(2)$

We start with the $\widehat{su}(2)_{10}$ modular invariant partition function:

$$\mathcal{Z} = |\chi_0 + \chi_6|^2 + |\chi_3 + \chi_7|^2 + |\chi_4 + \chi_{10}|^2 \,, \tag{2.25}$$

where χ_i's are the characters of $\widehat{su}(2)_{10}$ with $0 \leq i \leq 10$. The total number of irreps is $d_{\mathcal{A}} = 11$. The modular invariant matrix $\mathcal{M}$ is read from $\mathcal{Z}$ when the later is written $\mathcal{Z} = \sum_i \chi_i \mathcal{M}_{ij} \bar{\chi}_j$. The fusion matrices are given by the truncated recurrence formulae of SU(2) irreps at level $k = 10$:

$$N_0 = \mathbb{1}_{11} \quad ; \quad N_1 = Ad(\mathcal{A}_{10}) \quad ; \quad N_{i+1} = N_i.N_1 - N_{i-1} \tag{2.26}$$

where $Ad(\mathcal{A}_{10})$ is the adjacency matrix of the graph $\mathcal{A}_{10}$ which is the truncated Weyl alcove of SU(2) irreps at level $k = 10$ (usually called the Dynkin diagram A_{11}).

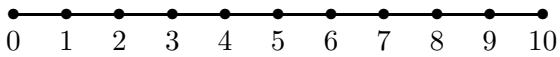


Figure 2.1: The $\mathcal{A}_{10} = A_{11}$ graph.

Determination of toric matrices W_z. Here we repeat the discussion given in [8]. We have $Tr(\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger) = 12$ which gives the dimension of the algebra of quantum symmetries $d_O = 12$. From the knowledge of $\mathcal{M}$ and the fusion matrices N_i we determine all matrices $K_{ij} = N_i \mathcal{M} N_j^{tr}$. We calculate the rank of this family and find $r = 12$. Since $r = d_0$, the toric matrices W_{x0} are linearly independent and form a special basis of this vector space. For each matrix K_{ij} we look at their squared norm given by $||K_{ij}||^2 = (K_{ij})_{ij}$ (conjugation is trivial for $SU(2)$ systems, $i^* = i$).

- For squared norm 1 we have 11 linearly independent matrices K_{ij}, for example

$$K_{0,0} \quad K_{0,1} \quad K_{0,2} \quad K_{0,9} \quad K_{0,10} \quad K_{1,0} \quad K_{1,1} \quad K_{1,2} \quad K_{1,9} \quad K_{1,10} \quad K_{2,0} \,. \tag{2.27}$$

  Each of these matrices define a toric matrix $W_x = W_{x0}$, so we get 11 out of the 12 toric matrices.

- For squared norm 2 we have 19 linearly independent matrices K_{ij}, for example

$$\begin{array}{ccccccccccc} K_{0,3} & K_{0,4} & K_{0,5} & K_{0,6} & K_{0,7} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K_{1,7} \\ K_{3,0} & K_{3,1} & K_{3,9} & K_{3,10} & K_{4,0} & K_{4,1} & K_{4,9} & K_{4,10} & K_{5,0} & \end{array} \tag{2.28}$$

  In this list there are four matrices which are not equal to the sum of two already determined toric matrices, one of them being for instance $K_{0,3}$. They are therefore equal

to the sum of an already determined toric matrix and the last one to be determined. We build the set of matrices $K_{0,3} - W_x$, where W_x runs in the list of determined toric matrices, and search for those which have non-negative integer coefficients. There is only one solution (namely $W_x = K_{1,9}$), and we get the last toric matrix as $K_{0,3} - K_{1,9}$.

- We have therefore determined the set of 12 toric matrices W_x, with $0 \leq x \leq 11$ and we can check our result by an explicit verification of the modular splitting equation (2.9).

Determination of $V_{i\,j}$ Having determined the set of toric matrices W_x, we compute the set of matrices $K^x_{i\,j} = N_i\, W_x\, N^{tr}_j$. For $SU(2)$, all double fusion matrices $V_{i\,j}$ are generated by the two fundamental matrices V_{10} and V_{01}. It is therefore sufficient to calculate the decomposition of K^x_{10} and K^x_{01} on the set of toric matrices from Eq.(2.16) to determine V_{10} and V_{01}. The calculation is straightforward, and choosing a special ordering in the set of indices x the resulting matrices are given by

$$V_{10} = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & .
\end{pmatrix} \qquad
V_{01} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 \\
. & 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & .
\end{pmatrix}$$

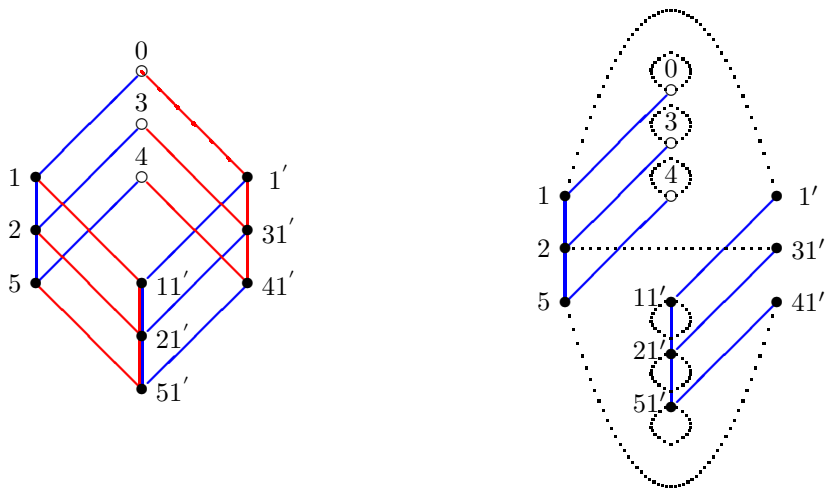


Figure 2.2: The E_6 Ocneanu graph displayed in two alternative ways.

The Ocneanu graph of quantum symmetries The two matrices V_{10} and V_{01} are the adjacency matrices of the graph of quantum symmetries (Ocneanu graph) associated to the

initial modular invariant. The graph is displayed in figure 2.2, where the ordering for the labels[4] of the set of indices x is $\{0,1,2,5,4,3\,,\ 1',11',21',51',41',31'\}$. $O_1 = V_{10}$ is associated to the vertex 1 and encodes the multiplication by this vertex; the corresponding lines are displayed in blue. $O_{1'} = V_{01}$ is associated to the vertex $1'$ and encodes the multiplication by this vertex; the corresponding lines are displayed in red. Vertices 1 and $1'$ are called left and right chiral generators. The multiplication can be extended to the whole vector space spanned by the vertices of the Ocneanu graph. We refer to [25] for explicit expressions for the O_x matrices. There is a chiral conjugation on the graph that permutes the two chiral generators. The chiral operator C satisfies $O_{1'} = C^{-1}\,O_1\,C$. Another way of displaying the Ocneanu graph is to draw only the graph of multiplication by one chiral generator, say 1, and to associate (for example using dashed lines) each vertex with its chiral conjugate. Multiplication of a vertex x by $1'$ is obtained as follows: we start with x, follow the dashed lines to find its chiral conjugate y, then use the multiplication of y by 1, and pull-back using the dashed lines to obtain the result. This alternative way of drawing the Ocneanu graph is displayed at the r.h.s. of figure 2.2.

The Dynkin diagram E_6 The Ocneanu graph of figure 2.2 is made of two copies of the Dynkin diagram E_6. One copy, labelled by vertices $\{0,1,2,5,4,3\}$, is a subalgebra of the quantum symmetry algebra, the other one, labelled by $\{1',11',21',51',41',31'\}$ is only a module. With the method of modular splitting, we see that we find the Dynkin diagram E_6 as a subgraph of the Ocneanu graph. We refer to [4, 25] for expressions of the S_x matrices. Notice that there is a multiplication defined on the vector space spanned by vertices of the E_6 diagram: one says that it is of subgroup type and that E_6 exists not only as a module (over A_{11}) but as a graph algebra. The algebra of quantum symmetries can be realized as the tensor square of the E_6 graph algebra, but the tensor product has to be taken over the subalgebra J spanned by $\{0,3,4\}$: $Oc(E_6) = E_6 \otimes_J E_6$ (for more details see [4, 5, 25]).

2.4.2 The $\mathcal{E}_5$ case of $\widehat{su}(3)$

We start with the $\widehat{su}(3)_5$ modular invariant partition function:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \;&=\; |\chi^5_{(0,0)} + \chi^5_{(2,2)}|^2 + |\chi^5_{(0,2)} + \chi^5_{(3,2)}|^2 + |\chi^5_{(2,0)} + \chi^5_{(2,3)}|^2 && (2.29)\\ &+\; |\chi^5_{(2,1)} + \chi^5_{(0,5)}|^2 + |\chi^5_{(3,0)} + \chi^5_{(0,3)}|^2 + |\chi^5_{(1,2)} + \chi^5_{(5,0)}|^2\,, && (2.30) \end{aligned}$$

where χ^5_i's are the characters of $\widehat{su}(3)_5$, labelled by $i = (\,i_1,\,i_2)$ with $0 \le\ i_1,\,i_2 \le 5,\ i_1 + i_2 \le 5$. The modular invariant matrix $\mathcal{M}$ is read from $\mathcal{Z}$ when the later is written[5] $\mathcal{Z} = \sum_i \chi_i\,\mathcal{M}_{i\,j}\,\bar{\chi}_j$. The number of irreps i is $d_{\mathcal{A}} = 21$. i is also considered as a label taking

[4] We choose the same labelling for the vertices as in [4, 5, 25].

[5] Some authors write instead $\mathcal{Z} = \sum_i \chi_i\,\mathcal{M}_{i\,j^*}\,\bar{\chi}_j$, and therefore some care has to be taken in order to compare results since conjugated cases (in particular figures 2.4 and 2.5) must then be interchanged. Here we follow the convention made in [9].

values on the integers $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$, corresponding to the choice of a certain order on the set of pairs (i_1, i_2). $i = 0 = (0,0)$ is the trivial representation and there are two fundamental irreps $(1,0)$ and $(0,1) = (1,0)^*$, where $(i_1, i_2)^* = (i_2, i_1)$ is the conjugated irrep. $N_{(1,0)}$ is the adjacency matrix of the oriented graph $\mathcal{A}_5$, which is the truncated Weyl alcove of SU(3) irreps at level $k = 5$ (see figure 2.3). The fusion matrix $N_{(0,1)}$ is the transposed matrix of $N_{(1,0)}$ and is the adjacency matrix of the same graph with reversed arrows. Once $N_{(1,0)}$ is known, the other fusion matrices can be obtained from the **truncated recursion formulae of** $SU(3)$ **irreps**, applied for increasing level up to k:

$$\begin{aligned} N_{(i,j)} &= N_{(1,0)}\, N_{(i-1,j)} - N_{(i-1,j-1)} - N_{(i-2,j+1)} \qquad \text{if } j \neq 0 \\ N_{(i,0)} &= N_{(1,0)}\, N_{(i-1,0)} - N_{(i-2,1)} \\ N_{(0,i)} &= (N_{(i,0)})^{tr} \end{aligned} \tag{2.31}$$

where it is understood that $N_{(i,j)} = 0$ if $i < 0$ or $j < 0$.

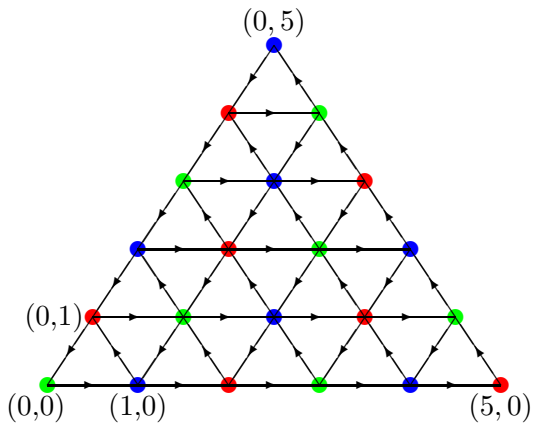


Figure 2.3: The $\mathcal{A}_5$ diagram.

Determination of toric matrices W_{z0} We have $d_O = Tr(\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger) = 24$. The matrices $K_{ij} = N_i\, \mathcal{M}\, N_j^{tr}$ span a vector space of dimension $r = 24$. This is therefore equal to d_O, the toric matrices W_{x0} are linearly independent and form a special basis for this vector space. For each matrix K_{ij} we calculate the squared norm given by $||K_{ij}||^2 = (K_{ij})_{i^* j^*}$.

- For squared norm 1 we have 21 linearly independent matrices K_{ij}, each one being equal to a toric matrix W_{z0}.

- There are 45 linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 2. Some of them are equal to the sum of two already determined toric matrices. For a matrix not satisfying this property, say K_{ab}, we build the set of matrices $K_{ab} - W_x$, where W_x runs into the set of determined toric matrices, and look for those which have non-negative integer

coefficients. This condition is strong enough and leads to only one solution (if K_{ab} is the sum of a determined matrix and a new one). We determine in that way the last three toric matrices.

- We have therefore determined the set of 24 toric matrices W_x, with $0 \leq x \leq 23$ and we can check our result by an explicit verification of the modular splitting equation (2.9).

Determination of V_{ij} Having determined the set of toric matrices W_{x0}, we compute the set of matrices $K^x_{ij} = N_i W_{x0} N^{tr}_j$. For $SU(3)$ cases, all double fusion matrices V_{ij} are generated by the two fundamental matrices $V_{(1,0),(0,0)}$, $V_{(0,0),(1,0)}$ and their transposed $V_{(0,1),(0,0)} = V^{tr}_{(1,0),(0,0)}$, $V_{(0,0),(0,1)} = V^{tr}_{(0,0),(1,0)}$. In order to determine these matrices, it is therefore sufficient to compute the decomposition of $K^x_{(1,0),(0,0)}$ and $K^x_{(0,0),(1,0)}$ on the set of toric matrices W_{x0} using Eq.(2.16). The calculation is straightforward. From the knowledge of the fundamental matrices $V_{(1,0),(0,0)}$, $V_{(0,0),(1,0)}$ and their transposed, all double fusion matrices V_{ij} are recursively calculated from Eqs.(2.17–2.19).

The Ocneanu graph of quantum symmetries The four fundamental matrices explicitly given below, in Eqs.(2.33), are the adjacency matrices of the graph of quantum symmetries (Ocneanu graph) associated to the initial modular invariant. We display in figure 2.4 the graph corresponding to the matrix $V_{(1,0),(0,0)}$ associated to the vertex labelled by $2_1 \otimes 1_0$. $V_{(0,0),(1,0)}$ is associated to the vertex $1_5 \otimes 2_0$, and instead of displaying the corresponding arrows, we display the action of the chiral conjugation C in order to not clutter the figure (warning: see the last footnote). The arrows corresponding to the matrix $V_{(0,1),(0,0)}$, associated to the vertex $2_2 \otimes 1_0$, are obtained by reversing the ones of figure 2.4; for the matrix $V_{(0,0),(0,1)}$, associated to the vertex $1_4 \otimes 2_0$, we use the chiral conjugation and the reversed arrows.

The generalized Dynkin diagram $\mathcal{E}_5$ The graph of figure 2.4 is made of two copies of the generalized Dynkin diagram $\mathcal{E}_5$. The $\mathcal{E}_5$ graph has 12 vertices denoted by $1_i, 2_i$, $i = 0, 1, \ldots, 5$. The unit is 1_0 and the generators are 2_1 and 2_2, the orientation of the graph corresponds to multiplication by 2_1. Conjugation corresponds to the symmetry with respect to the axis passing through vertices 1_0 and 1_3: $1^*_0 = 1_0, 1^*_1 = 1_5, 1^*_2 = 1_4, 1^*_3 = 1_3$; $2^*_0 = 2_3, 2^*_1 = 2_2, 2^*_4 = 2_5$. The $\mathcal{E}_5$ graph determines in a unique way its graph algebra (it is a subgroup graph). The commutative multiplication table is given by:

$$\begin{aligned} 1_i.1_j &= 1_{i+j} \\ 1_i.2_j = 2_i.1_j &= 2_{i+j} \\ 2_i.2_j &= 2_{i+j} + 2_{i+j-3} + 1_{i+j-3} \end{aligned} \qquad i,j = 0,1,\ldots,5 \mod 6 \tag{2.32}$$

From this multiplication table we get the graph algebra matrices G_a associated to the vertices $a \in \mathcal{E}_5$. The one corresponding to the generator 2_1 is the adjacency matrix of the graph. The vector space spanned by vertices of $\mathcal{E}_5$ is a module under the action of vertices of $\mathcal{A}_5$, the

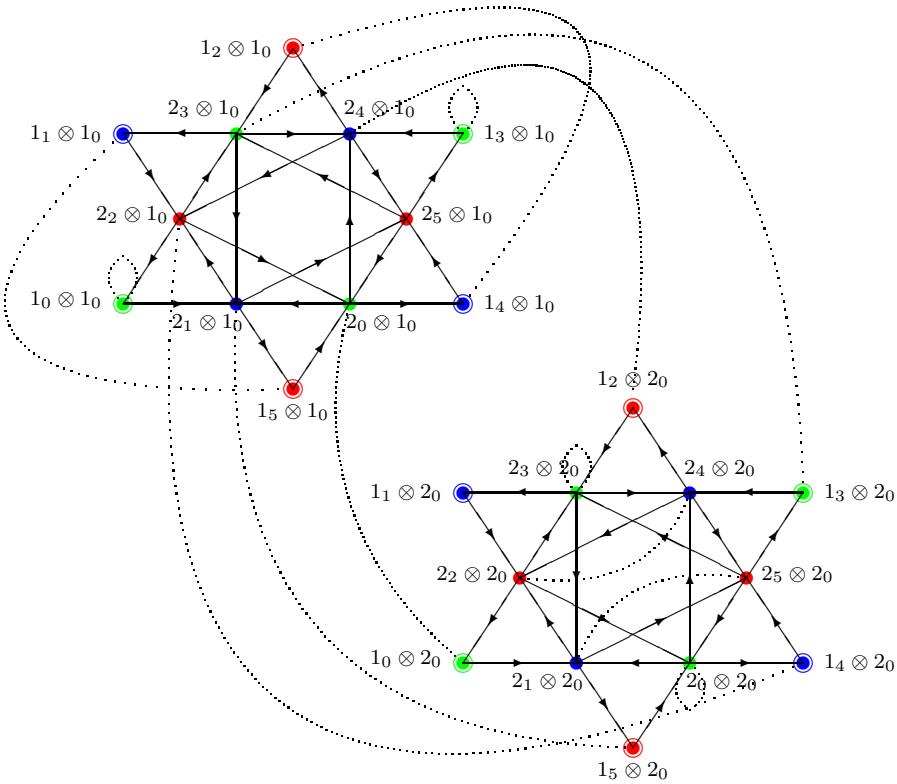


Figure 2.4: Ocneanu graph $Oc(\mathcal{E}_5)$. The two left chiral generators are $2_1 \otimes 1_0$ and $2_2 \otimes 1_0$, the two right chiral generators are $1_5 \otimes 2_0$ and $1_4 \otimes 2_0$.

action being encoded by the annular matrices F_i obtained form the recurrence relation (2.31) with starting point $F_{(0,0)} = \mathbb{1}_{12}$, $F_{(1,0)} = G_{2_1}$ and $F_{(0,1)} = G_{2_2}$.

Choosing a special ordering in the set of indices z of the algebra of quantum symmetries, and using the 12×12 graph algebra matrices G_a of the graph $\mathcal{E}_5$, the fundamental double fusion matrices are given by

$$V_{(1,0),(0,0)} = \left(\begin{array}{c|c} G_{2_1} & \cdot \\ \hline \cdot & G_{2_1} \end{array}\right) \qquad V_{(0,0),(1,0)} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & G_{1_5} \\ \hline G_{1_2} & G_{1_2} + G_{1_5} \end{array}\right)$$
$$V_{(0,1),(0,0)} = \left(\begin{array}{c|c} G_{2_2} & \cdot \\ \hline \cdot & G_{2_2} \end{array}\right) \qquad V_{(0,0),(0,1)} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & G_{1_4} \\ \hline G_{1_1} & G_{1_1} + G_{1_4} \end{array}\right) \tag{2.33}$$

Realization of $Oc(\mathcal{E}_5)$ The algebra of quantum symmetries $Oc(\mathcal{E}_5)$ can be realized as

$$Oc(\mathcal{E}_5) = \mathcal{E}_5 \otimes_J \mathcal{E}_5 \qquad \text{with } a \otimes_J b.c = a.b^* \otimes_J c \qquad \text{for } b \in J = \{1_i\}\ , \tag{2.34}$$

where J is a subalgebra characterized by modular properties (see [6, 25]). The algebra $Oc(\mathcal{E}_5)$ has dimension $12 \times 2 = 24$, and a basis is given by elements $a \otimes_J 1_0$ and $a \otimes_J 2_0$. The

identifications in $Oc(\mathcal{E}_5)$ are given by:

$$\begin{aligned} 1_i \otimes_J 1_j &= 1_{i+j^*} \otimes_J 1_0 \\ 2_i \otimes_J 1_j &= 2_{i+j^*} \otimes_J 1_0 \\ 1_i \otimes_J 2_j = 1_i \otimes_J 1_j.2_0 &= 1_{i+j^*} \otimes_J 2_0 \\ 2_i \otimes_J 2_j = 2_i \otimes_J 1_j.2_0 &= 2_{i+j^*} \otimes_J 2_0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

The chiral conjugation is defined by $(a \otimes_J b)^C = b \otimes_J a$. The left chiral generator is $2_1 \otimes_J 1_0$ and the right chiral generator is $1_0 \otimes_J 2_1 = 1_5 \otimes_J 2_0$. Multiplication in $Oc(\mathcal{E}_5)$ is defined from the multiplication (2.32) of $\mathcal{E}_5$ together with the identifications (2.35), and is encoded by the quantum symmetries matrices O_x. We get:

$$O_{x=a\otimes_J 1_0} = \begin{pmatrix} G_a & . \\ . & G_a \end{pmatrix} \qquad O_{x=a\otimes_J 2_0} = \begin{pmatrix} . & G_a \\ G_a.G_{1_3} & G_a(\mathbb{1} + G_{1_3}) \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

The vector space of $\mathcal{E}_5$ vertices is also a module under the action of vertices of $Oc(\mathcal{E}_5)$ defined by $(a \otimes_J 1_0).b = a.b$ and $(a \otimes_J 2_0).b = a.2_0.b$. The dual annular matrices S_x are given by $S_{x=a\otimes_J 1_0} = G_a$ and $S_{x=a\otimes_J 2_0} = G_{2_0}.G_a$. We check the dimensional rules $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{E}_5)) = \sum_i d_i^2 = \sum_x d_x^2 = 29\,376$.

2.4.3 The $\mathcal{E}_5^*$ case of $\widehat{su}(3)$

We start now with the following $\widehat{su}(3)_5$ modular invariant partition function:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= |\chi^5_{(0,0)} + \chi^5_{(2,2)}|^2 + |\chi^5_{(3,0)} + \chi^5_{(0,3)}|^2 + [(\chi^5_{(0,2)} + \chi^5_{(3,2)}).(\overline{\chi^5_{(2,0)}} + \overline{\chi^5_{(2,3)}}) + \text{h.c.}] \\ &\quad +(\chi^5_{(2,1)} + \chi^5_{(0,5)}).(\overline{\chi^5_{(1,2)}} + \overline{\chi^5_{(5,0)}}) + \text{h.c.}] \,, \end{aligned} \tag{2.37}$$

and compute the modular matrix[6] $\mathcal{M}$. The fusion matrices N_i are the same as in the previous case.

Determination of toric matrices and double fusion matrices We have $d_O = Tr(\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger) = 24$. The matrices $K_{ij} = N_i \mathcal{M} N_j^{tr}$ span a vector space of dimension $r = d_O = 24$. The discussion is the same as in the previous case.

- For squared norm 1 we have 21 linearly independent matrices K_{ij} defining 21 toric matrices W_{z0}.
- There are 45 linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 2 and the last three toric matrices W_{z0} can be obtained.

[6] Same remark as in the last footnote.

Once the toric matrices have been determined, the double fusion matrices are obtained straightforwardly. For the fundamental ones we get:

$$V_{(1,0),(0,0)} = \left(\begin{array}{c|c} G_{2_1} & . \\ \hline . & G_{2_1} \end{array}\right) \qquad V_{(0,0),(1,0)} = \left(\begin{array}{c|c} . & G_{1_1} \\ \hline G_{1_4} & G_{1_1}+G_{1_4} \end{array}\right)$$
$$V_{(0,1),(0,0)} = \left(\begin{array}{c|c} G_{2_2} & . \\ \hline . & G_{2_2} \end{array}\right) \qquad V_{(0,0),(0,1)} = \left(\begin{array}{c|c} . & G_{1_2} \\ \hline G_{1_5} & G_{1_2}+G_{1_5} \end{array}\right) \tag{2.38}$$

The Ocneanu graph of quantum symmetries We display in figure 2.5 the graph corresponding to the matrix $V_{(1,0),(0,0)}$ associated with the vertex labelled by $2_1 \otimes 1_0$. $V_{(0,0),(1,0)}$ is associated with the vertex $1_1 \otimes 2_0$. The algebra of quantum symmetries can be realized as

$$Oc(\mathcal{E}_5^*) = \mathcal{E}_5 \otimes_J \mathcal{E}_5 \qquad \text{with } a \otimes_J b.c = a.b \otimes_J c \qquad \text{for } b \in J = \{1_i\}\ . \tag{2.39}$$

The algebra $Oc(\mathcal{E}_5^*)$ has also dimension $12 \times 2 = 24$ and a basis is given by elements $a \otimes_J 1_0$ and $a \otimes_J 2_0$. The identifications in $Oc(\mathcal{E}_5^*)$ are given by (different from those of $Oc(\mathcal{E}_5)$)

$$\begin{aligned} 1_i \otimes_J 1_j &= 1_{i+j} \otimes_J 1_0 \\ 2_i \otimes_J 1_j &= 2_{i+j} \otimes_J 1_0 \\ 1_i \otimes_J 2_j = 1_i \otimes_J 1_j.2_0 &= 1_{i+j} \otimes_J 2_0 \\ 2_i \otimes_J 2_j = 2_i \otimes_J 1_j.2_0 &= 2_{i+j} \otimes_J 2_0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

The left chiral generator is $2_1 \otimes_J 1_0$ and the right chiral generator is $1_0 \otimes_J 2_1 = 1_1 \otimes_J 2_0$. The algebra $Oc(\mathcal{E}_5^*)$ is isomorphic to $Oc(\mathcal{E}_5)$, the quantum symmetry matrices O_x are still given by (2.36). The difference is in the chiral conjugacy.

The generalized Dynkin diagram $\mathcal{E}_5^* = \mathcal{E}_5/3$ The graph associated to the initial modular invariant (2.37) is a module graph for the Ocneanu graph displayed on figure 2.5. It must therefore be a module graph of the $\mathcal{E}_5$ graph itself: it is obtained as the Z_3-orbifold graph of $\mathcal{E}_5$ (see [14]). We write this module property $a\,\tilde{b} = \sum_{\tilde{c}} (F_a^{\mathcal{E}})_{\tilde{b}\tilde{c}}\,\tilde{c}$, for $a \in \mathcal{E}_5$ and $\tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{E}_5/3$, encoded by the 12 matrices $F_a^{\mathcal{E}}$. From the associative property $(a.b).\tilde{c} = a.(b.\tilde{c})$, these matrices must satisfy the same commutation relations (2.32) as the graph algebra of $\mathcal{E}_5$, and can be recursively calculated from $F_{2_1}^{\mathcal{E}}$, which is the adjacency matrix of the $\mathcal{E}_5/3$ graph displayed on figure 2.6. The $\mathcal{E}_5/3$ graph is also a module over the algebra of quantum symmetries, the action being defined by $(a \otimes_J 1_0).\tilde{b} = a.\tilde{b}$ and $(a \otimes_J 2_0).b = a.2_0.\tilde{b}$. The dual annular matrices S_x are therefore given by $S_{x=a\otimes_J 1_0} = F_a^{\mathcal{E}}$ and $S_{x=a\otimes_J 2_0} = F_{2_0}^{\mathcal{E}}.F_a^{\mathcal{E}}$. We check the dimensional rules $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{E}_5^*)) = \sum_i d_i^2 = \sum_x d_x^2 = 3\,264$.

So both graphs $G = \mathcal{E}_5$ and $\mathcal{E}_5/3$ have the same (isomorphic) algebra $Oc(G)$ of quantum symmetries, but its realization in terms of tensor square of $\mathcal{E}_5$ is different in the two cases, as well as the chiral conjugation, and, of course, its module action on $\mathcal{E}_5$ or on $\mathcal{E}_5/3$.

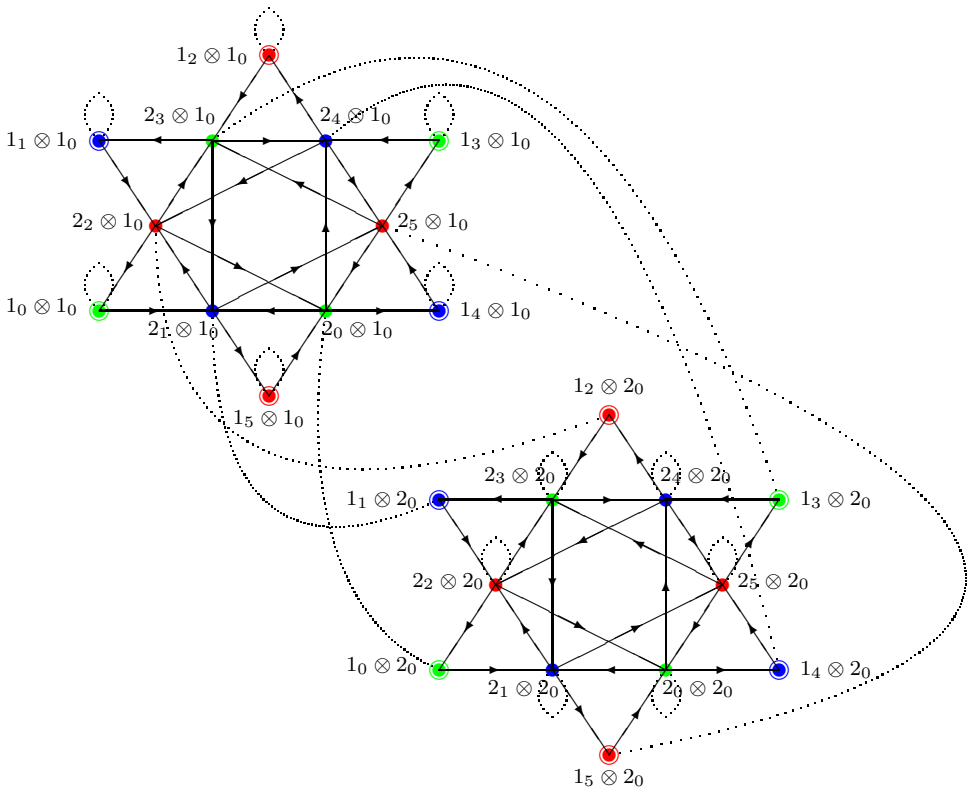


Figure 2.5: Ocneanu graph $Oc(\mathcal{E}_5)^*$. The two left chiral generators are $2_1 \otimes 1_0$ and $2_2 \otimes 1_0$, the two right chiral generators are $1_1 \otimes 2_0$ and $1_2 \otimes 2_0$.

2.4.4 The $\mathcal{E}_9$ case of $su(3)$

We start with the following $\widehat{su}(3)_9$ modular invariant partition function:

$$\mathcal{Z} = |\chi^9_{0,0} + \chi^9_{0,9} + \chi^9_{9,0} + \chi^9_{1,4} + \chi^9_{4,1} + \chi^9_{4,4}|^2 + 2\,|\chi^9_{2,2} + \chi^9_{2,5} + \chi^9_{5,2}|^2 \,, \tag{2.41}$$

where χ^9_i's are the characters of $\widehat{su}(3)_9$, labelled by $i = (\,i_1,\, i_2)$ with $0 \leq\, i_1,\, i_2 \leq 9,\; i_1 + i_2 \leq 9$. The modular invariant matrix is recovered from $\mathcal{Z} = \sum_i \chi_i \mathcal{M}_{i\,j} \overline{\chi}_j$. The number of irreps is $d_{\mathcal{A}} = 55$. The fusion matrix $N_{(1,0)}$ is the adjacency matrix of the $\mathcal{A}_9$ graph, the truncated Weyl alcove of SU(3) irreps at level 9. The other fusion matrices are determined by the recurrence relation (2.32).

Determination of toric matrices W_{z0} We have $d_O = Tr(\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger) = 72$ and therefore an Ocneanu algebra with 72 generators z and also 72 toric matrices W_{z0}. However these toric matrices span a vector space of dimension $r = 45 < 72$, i.e. they are not all linearly independent. For each matrix $K_{i\,j} = N_i \mathcal{M} N_j^{tr}$ we consider its "squared norm" defined by $||K_{i\,j}||^2 = (K_{i\,j})_{i^*\,j^*}$:

- There are 27 matrices $K_{i\,j}$ with squared norm 1, each one defines a toric matrix W_{z0}.

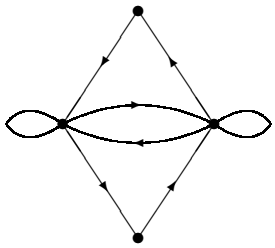


Figure 2.6: The $\mathcal{E}_5^* = \mathcal{E}_5/3$ generalized Dynkin diagram.

- There are 12 linearly independent matrices K_{ij} with squared norm 2, but each one is equal to the sum of two already determined matrices. We don't find any new toric matrix in this family.

- There are 21 linearly independent matrices K_{ij} of squared norm 3, none of them being equal to the sum of three already obtained matrices. Twelve amoung these 21 are equal to the sum of one determined matrix and a matrix having coefficients multiple of 2. A solution leading to squared norm 3 is to define a new toric matrix by dividing by 2 the matrix with coefficients multiple of 2, and adding them to the list with a multiplicity two. From these twelve we obtain actually only eight different toric matrices (because some are obtained more than once), each one coming with multiplicity two. Nine of the 21 matrices have coefficients which are multiple of 3. We define nine new toric matrices by dividing these matrices by 3, each toric matrix obtained in that way appearing with multiplicity 3. At that stage, we have determined $27 + (2 \times 8) + (3 \times 9) = 70$ toric matrices.

- There are 24 linearly independent matrices K_{ij} with squared norm 4, but each one is equal to the sum of four already obtained matrices. We don't recover any new toric matrix. This is also the case for squared norm 5.

- There are 10 linearly independent matrices K_{ij} with squared norm 6. We discard those that can be written as a linear combination of already determined toric matrices, and pick up one of the others, for example K_{ab}. We build the list of matrices $K_{ab} - W_x$, for W_x running into the set of already obtained toric matrices, searching for matrices with non-negative coefficients. With our choice, it is so that K_{ab} is the sum of two times a toric matrix plus a new one which has matrix elements multiple of 2. Dividing the later by 2 and adding it to the list, with multiplicity 2, we get the last toric matrices.

We have indeed therefore determined the 72 toric matrices, 45 (=27+9+8+1) of them being linearly independent, but appearing with multiplicities (27 of multiplicity one, 9 (=8+1) of multiplicity two and 9 of multiplicity three). We can check the result by a direct substitution in the $55 \times 55 = 3025$ matrix equations over non-negative integers (2.12).

Determination of $V_{(1,0),(0,0)}$ and $V_{(0,0),(1,0)}$ We compute the set of matrices $K^x_{i\,j} = N_i W_{x0} N_j^{tr}$ for $\{\,i\,j\} = \{(1,0),(0,0)\}$ and $\{(0,0),(1,0)\}$, and decompose them on the family (not a base) of toric matrices W_{z0} using (2.12). Since the W_{z0} are not linearly independent, the decomposition is not unique, and we introduce some undetermined coefficients. Imposing that they should be non-negative integers allows to fix some of them or to obtain relations between them. More constraints come from the fact that we have $V_{(0,0),(1,0)} = C.V_{(0,0),(1,0)}.C^{-1}$, where C is the chiral operator. Notice that C itself is deduced from the previous relation even if $V_{(0,0),(1,0)}$ and $V_{(0,0),(1,0)}$ still contain free parameters, by using the fact that it is a permutation matrix. Choosing an appropriate order on the set of indices z, we obtain the following structure for $V_{(1,0),(0,0)}$:

$$V_{(1,0),(0,0)} = \begin{pmatrix} Ad(\mathcal{E}_9) & . & . & . & . & . \\ . & Ad(\mathcal{E}_9) & . & . & . & . \\ . & . & Ad(\mathcal{E}_9) & . & . & . \\ . & . & . & Ad(\mathcal{M}_9) & . & . \\ . & . & . & . & Ad(\mathcal{M}_9) & . \\ . & . & . & . & . & Ad(\mathcal{M}_9) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

where $Ad(\mathcal{E}_9)$ and $Ad(\mathcal{M}_9)$ are 12×12 matrices (still containing some unknown coefficients).

The generalized Dynkin diagram $\mathcal{E}_9$ The $Ad(\mathcal{E}_9)$ matrix is the adjacency matrix of the graph $\mathcal{E}_9$ displayed on the l.h.s. of figure 2.7. It possesses a $\mathbb{Z}_3$-symmetry corresponding to the permutation of the three "wings" formed by vertices 0_i, 1_i and 2_i. The undetermined coefficients of the adjacency matrix reflect this symmetry; they are simply fixed once an ordering has been chosen for the vertices (something similar happens for the D_{even} series of the $su(2)$ family).

The vector space of the $\mathcal{E}_9$ graph is a module over the left-right action of the graph algebra of the $\mathcal{A}_9$ graph, encoded by the annular matrices $F_i^{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{A}_9 \times \mathcal{E}_9 \to \mathcal{E}_9 : \quad i \cdot a = a \cdot i = \sum_b (F_i^{\mathcal{E}})_{ab}\, b \qquad\qquad i \in \mathcal{A}_9\ , \quad a, b \in \mathcal{E}_9\ . \tag{2.43}$$

The $F_i^{\mathcal{E}}$ matrices give a representation of dimension 12 of the fusion algebra and are determined from the recursion relation (2.32) with $F^{\mathcal{E}}_{(0,0)} = \mathbb{1}_{12\times 12}$, $F^{\mathcal{E}}_{(1,0)} = Ad(\mathcal{E}_9)$. We notice that fundamental matrices (for instance $F_{(1,0)}$) contain, in this case, elements bigger than 1, however, the "rigidity[7] condition" $(F_i)_{ab} = (F_{i^*})_{ba}$ holds, so that this example is indeed an higher analogue of the ADE graphs, not an higher analogue of the non simply laced cases. Triality and conjugation compatible with the action of $\mathcal{A}_9$ can be defined on the $\mathcal{E}_9$ graph. Triality is denoted by the index $i \in \{0,1,2\}$ in the set of vertices $0_i, 1_i, 2_i$. The conjugation corresponds to the vertical axis going through vertices 0_0 and 3_0: $0_0^* = 0_0, 1_0^* = 2_0, 3_0^* = 3_0$,

[7] We call it that way because of its relation with the theory of rigid categories, see for instance [21]).

$0_1^* = 0_2, 1_1^* = 2_2, 1_2^* = 2_1, 3_1^* = 3_2$. The $\mathbb{Z}_3$-symmetry action on vertices of $\mathcal{E}_9$ is denoted ρ_3. The axis formed by vertices 3_i is invariant under ρ_3 and the symmetry permutes the three wings $\rho_3(0_0) = 1_0$, $\rho_3(1_0) = 2_0$, $\rho_3(2_0) = 0_0$; $\rho_3(0_1) = 1_1$, $\rho_3(1_1) = 2_1$, $\rho_3(2_1) = 0_1$; $\rho_3(0_2) = 1_2$, $\rho_3(1_2) = 2_2$, $\rho_3(2_2) = 0_2$. Once we have fixed the origin of the graph (the vertex 0_0), the graph still possesses a $\mathbb{Z}_2$-symmetry corresponding to the permutation of the two remaining wings, formed by vertices 1_i and 2_i. We denote ρ_2 this operation: $\rho_2(1_i) = 2_i$ and $\rho_2^2 = \mathbb{1}$.

The $\mathcal{E}_9$ graph has also self-fusion: the vector space spanned by its vertices has an associative algebra structure, with non-negative structure constants, compatible with the action of $\mathcal{A}_9$. 0_0 is the unity and the two conjugated generators are 0_1 and 0_2. The graph itself is also the Cayley graph of multiplication by 0_1. Due to the symmetry of the wings of the graph, the knowledge of the multiplication by generators 0_1 and 0_2 is not sufficient to reconstruct the whole multiplication table; we have to impose structure coefficients to be non-negative integers in order to determine a unique solution (see [6, 25]). The whole multiplication table is encoded in the graph algebra matrices G_a, for $a \in \mathcal{E}_9$. We give below the expression for the matrices G_{1_0} and G_{2_0}, the other matrices are defined by $G_{0_0} = \mathbb{1}$, $G_{0_1} = G_{0_2}^{tr} = Ad(\mathcal{E}_9)$, $G_{3_0} = G_{0_1}\, G_{0_2} - G_{0_0}$, $G_{3_2} = G_{3_1}^{tr} = G_{0_1}\, G_{0_1} - G_{0_2}$, $G_{1_1} = G_{2_2}^{tr} = G_{0_1}\, G_{1_0}$, $G_{1_2} = G_{2_1}^{tr} = G_{0_2}\, G_{1_0}$. In the ordered basis $(0_0, 1_0, 2_0, 3_0; 0_1, 1_1, 2_1, 3_1; 0_2, 1_2, 2_2, 3_2)$, G_{1_0} and G_{2_0} are given by

$$G_{1_0} = G_{2_0}^T = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1
\end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Notice that multiplication by 1_0 corresponds to the $\mathbb{Z}_3$ operation: $1_0.a = \rho_3(a)$. The matrix G_{1_0} is the permutation matrix representing the action of the $\mathbb{Z}_3$ operator ρ_3: $(G_{1_0})_{ab} = \delta_{b,\rho_3(a)}$. We have $(G_{1_0})^3 = \mathbb{1}$ and $(G_{1_0})^2 = G_{2_0}$, so G_{2_0} represents the operator $(\rho_3)^2$.

Other aspects and properties of the $\mathcal{E}_9$ graph and of its algebra of quantum symmetries (semi-simple structure of the associated quantum groupoïd, semi-simple structure of $Oc(\mathcal{E}_9)$ itself, quantum dimensions and quantum mass) are presented in [6, 25, 9].

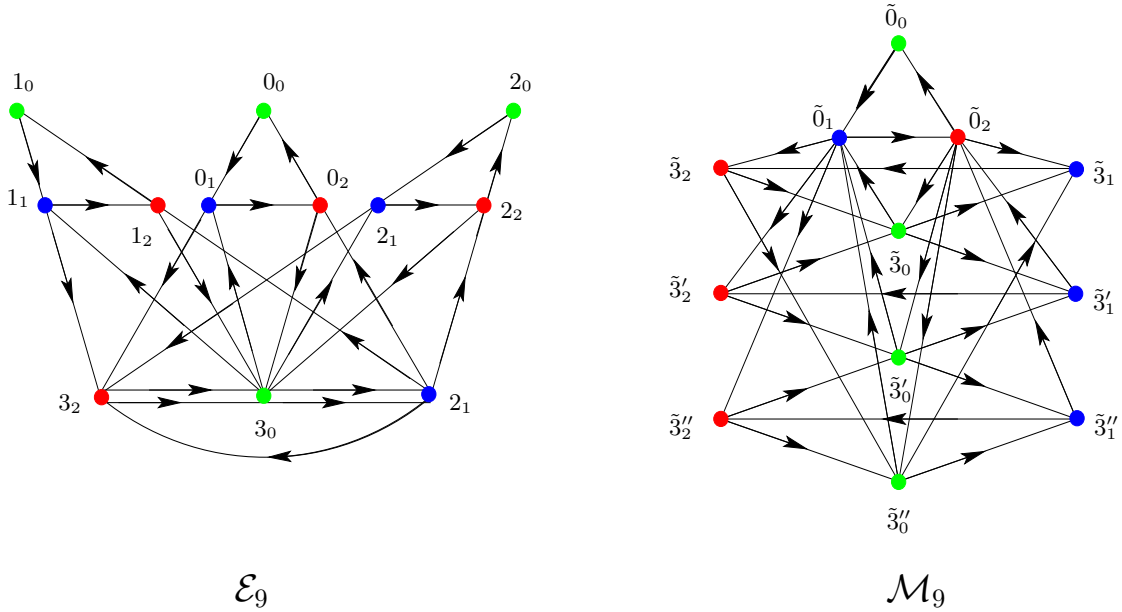


Figure 2.7: The graphs $\mathcal{E}_9$ and $\mathcal{M}_9$

The generalized Dynkin diagram $\mathcal{M}_9$ The matrix $Ad(\mathcal{M}_9)$ is a 12×12 matrix with some unknown coefficients to be determined. Imposing this matrix to be the adjacency matrix of a graph such that the vector space spanned by its vertices is a module over the graph algebras of $\mathcal{A}_9$ *and* of $\mathcal{E}_9$ leads to a unique solution. The graph is displayed on the r.h.s. of figure 2.7 and corresponds to the $\mathbb{Z}_3$-orbifold graph of $\mathcal{E}_9$, denoted $\mathcal{M}_9 = \mathcal{E}_9/3$.

The vector space spanned by vertices of the $\mathcal{M}_9$ graph is a module over the left-right action of the graph algebra of $\mathcal{A}_9$ encoded by the annular matrices $F_i^{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{A}_9 \times \mathcal{M}_9 \to \mathcal{M}_9 : \quad i \cdot \tilde{a} = \tilde{a} \cdot i = \sum_{\tilde{b}} (F_i^{\mathcal{M}})_{\tilde{a}\tilde{b}}\, \tilde{b} \qquad\qquad i \in \mathcal{A}_9\ , \quad \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{M}_9\ . \tag{2.45}$$

The $F_i^{\mathcal{M}}$ matrices give a representation of dimension 12 of the fusion algebra and can be determined from the recursion relation (2.32) with $F^{\mathcal{M}}_{(0,0)} = \mathbb{1}_{12\times 12}$, $F^{\mathcal{M}}_{(1,0)} = Ad(\mathcal{M}_9)$. Triality and conjugation compatible with the action of $\mathcal{A}_9$ can be defined on the $\mathcal{M}_9$ graph. Triality is denoted by the index $i \in \{0,1,2\}$ in the set of vertices $\tilde{a}_i \in \mathcal{M}_9$. The conjugation corresponds to the vertical axis going through vertex $\tilde{0}_0$: $\tilde{0}_0^* = \tilde{0}_0, \tilde{0}_1^* = \tilde{0}_2, \tilde{3}_0^* = \tilde{3}_0$, $\tilde{3}'^{\,*}_0 = \tilde{3}'_0$, $\tilde{3}''^{*}_0 = \tilde{3}''_0, \tilde{3}_1^* = \tilde{3}_2, \tilde{3}'^{\,*}_1 = \tilde{3}'_2, \tilde{3}''^{*}_1 = \tilde{3}''_2$.

The vector space spanned by vertices of $\mathcal{M}_9$ is also a module under the action of the graph algebra of $\mathcal{E}_9$. Here we will distinguish between left and right action. The left action of $\mathcal{E}_9$ is encoded by a set of 12×12 matrices denoted P_i^{ℓ}

$$\mathcal{E}_9 \times \mathcal{M}_9 \to \mathcal{M}_9 : \quad a \cdot \tilde{b} = \sum_{\tilde{c}} (P_a^{\ell})_{\tilde{b}\tilde{c}}\, \tilde{c} \qquad\qquad a \in \mathcal{E}_9\ , \quad \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{M}_9\ . \tag{2.46}$$

The right action of $\mathcal{E}_9$ is defined via the $\mathbb{Z}_2$ operator ρ_2:

$$\tilde{b} \cdot a = \rho_2(a) \cdot \tilde{b} \tag{2.47}$$

and is encoded by a set of 12×12 matrices denoted P^r_a: $\tilde{b} \cdot a = \sum_{\tilde{c}} (P^r_a)_{\tilde{b}\tilde{c}}\, \tilde{c}$ with $P^r_a = P^\ell_{\rho_2(a)}$. The module property $(a \cdot b) \cdot \tilde{c} = a \cdot (b \cdot \tilde{c})$ imposes P^ℓ_a matrices to form a representation of the graph algebra of $\mathcal{E}_9$; they satisfy $P^\ell_a P^\ell_b = \sum_c (G_a)_{bc} P^\ell_c$. Similar relations exist for P^r_a matrices. We can compute the set of matrices P^ℓ_a using the multiplicative structure of $\mathcal{E}_9$. We give below the expression for $P^\ell_{1_0}$ and $P^\ell_{2_0}$, the other matrices being defined by $P^\ell_{0_0} = \mathbb{1}$, $P^\ell_{0_1} = (P^\ell_{0_2})^{tr} = Ad(\mathcal{M}_9)$, $P^\ell_{3_0} = P^\ell_{0_1} P^\ell_{0_2} - P^\ell_{0_0}$, $P^\ell_{3_2} = (P^\ell_{3_1})^{tr} = P^\ell_{0_1} P^\ell_{0_1} - P^\ell_{0_2}$, $P^\ell_{1_1} = (P^\ell_{2_2})^{tr} = P^\ell_{0_1} P^\ell_{1_0}$, $P^\ell_{1_2} = (P^\ell_{2_1})^{tr} = P^\ell_{0_2} P^\ell_{1_0}$. In the ordered basis $(\tilde{0}_0, \tilde{3}_0, \tilde{3}'_0, \tilde{3}''_0; \tilde{0}_1, \tilde{3}_1, \tilde{3}'_1, \tilde{3}''_1; \tilde{0}_2, \tilde{3}_2, \tilde{3}'_2, \tilde{3}''_2)$, $P^\ell_{1_0}$ and $P^\ell_{2_0}$ are given by

$$P^\ell_{1_0} = (P^\ell_{2_0})^{tr} = \begin{pmatrix}
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & .
\end{pmatrix} \tag{2.48}$$

There is also an operator ρ'_3 acting on vertices of the $\mathcal{M}_9$ graph, inherited from the $\mathbb{Z}_3$ symmetry of the $\mathcal{E}_9$ graph through the orbifold procedure. It satisfies the following property:

$$\rho_3(a)\, \tilde{b} = a\, \rho'_3(\tilde{b}) \tag{2.49}$$

We have $1_0\, a = \rho_3(a)$, so $\rho'_3(\tilde{a}) = 1_0\, \tilde{a}$. It is defined by $\rho'_3(\tilde{0}_i) = \tilde{0}_i$, $\rho'_3(\tilde{3}_i) = \tilde{3}'_i$, $\rho'_3(\tilde{3}'_i) = \tilde{3}''_i$, $\rho'_3(\tilde{3}''_i) = \tilde{3}_i$, for $i = 0, 1, 2$. The matrix $P^\ell_{1_0}$ is therefore the permutation matrix representing the action of the $\mathbb{Z}_3$ operator ρ'_3. We have $(P^\ell_{1_0})^3 = \mathbb{1}$ and $(P^\ell_{1_0})^2 = P^\ell_{2_0}$, so $P^\ell_{2_0}$ represents the operator $(\rho'_3)^2$.

The vector space $\mathcal{E}_9 \oplus \mathcal{M}_9$ We define the vector space $H = \mathcal{E}_9 \oplus \mathcal{M}_9$, and we want to define (this will be used later) an associative product on H with the following structure:

$\nearrow$	$\mathcal{E}_9$	$\mathcal{M}_9$
$\mathcal{E}_9$	$\mathcal{E}_9$	$\mathcal{M}_9$
$\mathcal{M}_9$	$\mathcal{M}_9$	$\mathcal{E}_9$

We define the following multiplications:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_9 \times \mathcal{E}_9 \to \mathcal{E}_9 \quad &: \quad a\,b = \sum_c (G_a)_{bc}\, c \\
\mathcal{E}_9 \times \mathcal{M}_9 \to \mathcal{M}_9 \quad &: \quad a\,\tilde{b} = \sum_{\tilde{c}} (P^{\ell}_a)_{\tilde{b}\tilde{c}}\, \tilde{c} \\
\mathcal{M}_9 \times \mathcal{E}_9 \to \mathcal{M}_9 \quad &: \quad \tilde{b}\,a = \sum_{\tilde{c}} (P^{r}_a)_{\tilde{b}\tilde{c}}\, \tilde{c} \\
\mathcal{M}_9 \times \mathcal{M}_9 \to \mathcal{E}_9 \quad &: \quad \tilde{a}\,\tilde{b} = \sum_c (H_{\tilde{a}})_{\tilde{b}c}\, c.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

The associativity property on H reads $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$; $a\,(b\,\tilde{c}) = (a\,b)\,\tilde{c}$; $a\,(\tilde{b}\,c) = (a\,\tilde{b})\,c$; $\tilde{a}\,(b\,c) = (\tilde{a}\,b)\,c$; $a\,(\tilde{b}\,\tilde{c}) = (a\,\tilde{b})\,\tilde{c}$; $\tilde{a}\,(b\,\tilde{c}) = (\tilde{a}\,b)\,\tilde{c}$; $\tilde{a}\,(\tilde{b}\,c) = (\tilde{a}\,\tilde{b})\,c$; $\tilde{a}\,(\tilde{b}\,\tilde{c}) = (\tilde{a}\,\tilde{b})\,\tilde{c}$, and induce a set of relations between matrices G_a, P^{ℓ}_a, P^{r}_a and H_a. In order to satisfy them, the unique solution for coefficients of the H_c matrices is given by:

$$(H_c)_{\tilde{a}\tilde{b}} = (P^{\ell}_{\rho_2(c)})_{\tilde{a}^*\tilde{b}} = (P^{r}_c)_{\tilde{a}^*\tilde{b}}\ . \tag{2.51}$$

The Ocneanu algebra of quantum symmetries and a realization The matrix $V_{(1,0),(0,0)}$ is the adjacency matrix of the left chiral part of the Ocneanu graph. The graph is composed of six subgraphs, three copies of the $\mathcal{E}_9$ graph and three copies of the $\mathcal{M}_9$ graph, as showed on figure 2.8. We label the vertices as follows: $x = a \otimes 0_i$ with $a, 0_i \in \mathcal{E}_9$ and $i = 0,\ 1,\ 2$ for vertices of $\mathcal{E}_9$-type subgraphs and $x = \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i$ with $\tilde{a}, \tilde{3}_i \in \mathcal{M}_9$ and $i = 0,\ 1,\ 2$ for vertices of $\mathcal{M}_9$-type subgraphs. The matrix $V_{(1,0),(0,0)}$ corresponds to the multiplication by the left chiral generator $0_1 \otimes 0_0$. The matrix $V_{(0,0),(1,0)}$ is the adjacency matrix of the right chiral part of the Ocneanu graph $Oc(\mathcal{E}_9)$, and corresponds to the multiplication by the right chiral generator $0_0 \otimes 0_1$. The dashed lines in the graph corresponds to the chiral operator C. We have $V_{(0,0),(1,0)} = C V_{(1,0),(0,0)} C^{-1}$. The multiplication by $0_0 \otimes 0_1$ is obtained as follows. We start with x, apply C, multiply the result by $0_1 \otimes 0_0$, and apply $C^{-1} = C$. From matrices $V_{(1,0),(0,0)}$ and $V_{(0,0),(1,0)}$ all others $V_{i\,j}$ (hence also the double toric matrices W_{xy}) are calculated straightforwardly using equations (2.17–2.19).

From the multiplication by chiral left and right generators $0_1 \otimes 0_0$ and $0_0 \otimes 0_1$ (and their conjugate) we reconstruct the multiplication table of $Oc(\mathcal{E}_9)$. As for the graph matrices of $\mathcal{E}_9$, the calculation is not straightforward, but imposing non-negative integer coefficients leads to a unique solution. The result is encoded in the 72 quantum symmetry matrices O_x of dimension 72×72.

Realization of the quantum symmetry algebra In order to have a compact (readable) description of these matrices and the multiplicative structures of the algebra of quantum symmetries, we propose the following realization of the algebra of quantum symmetries:

$$Oc = \text{“}\mathcal{E}_9 \otimes_{\mathbb{Z}_3} \mathcal{E}_9\text{”} \doteq (\mathcal{E}_9 \otimes_\rho \mathcal{E}_9) \oplus (\mathcal{M}_9 \otimes_\rho \mathcal{M}_9)\ , \tag{2.52}$$

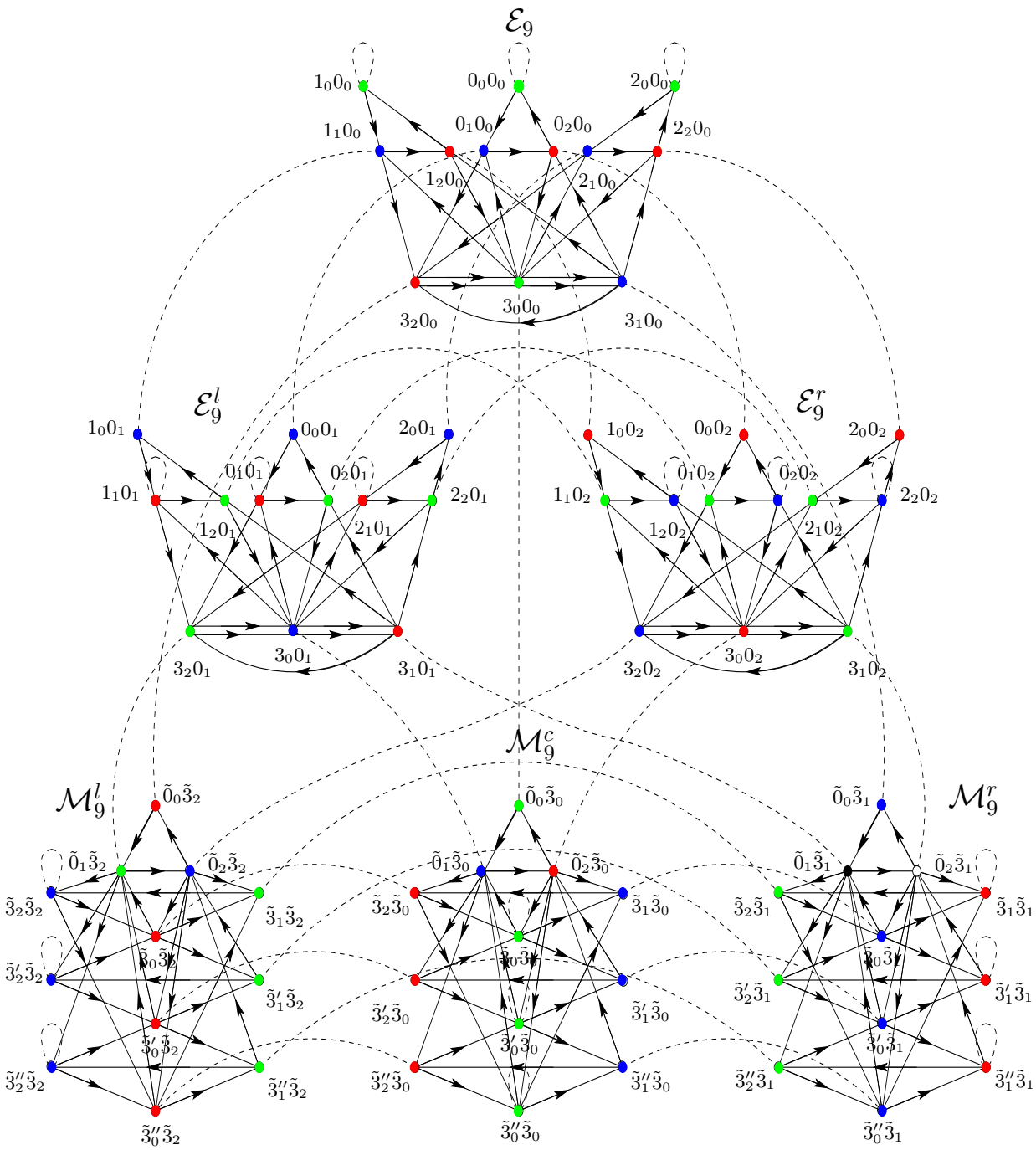


Figure 2.8: The Ocneanu graph $Oc(\mathcal{E}_9) = Oc(\mathcal{M}_9)$. The two left chiral generators are $0_1 \otimes 0_0$ and $0_2 \otimes 0_0$, the two right chiral generators are $0_0 \otimes 0_1$ and $0_0 \otimes 0_2$. The tensor product $a \otimes b$ is denoted with the shorthand notation ab.

where the notation $\otimes_\rho$ means that the tensor product is quotiented using the $\mathbb{Z}_3$ symmetry of graphs $\mathcal{E}_9$ and $\mathcal{M}_9$ in the following way. A basis of the quantum symmetry algebra is given by elements $\{a \otimes 0_i\,,\, \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i\}$ for $i = 0, 1, 2$. The other elements of $\mathcal{E}_9 \otimes \mathcal{E}_9$ and $\mathcal{M}_9 \otimes \mathcal{M}_9$ are identified with basis elements $\{a \otimes 0_i\,,\, \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i\}$ using the $\mathbb{Z}_3$ symmetry operators ρ_3 and ρ_3' of graphs $\mathcal{E}_9$ and $\mathcal{M}_9$ and the induction-restruction rules between the two graph algebras, as follows:

$$
\begin{aligned}
&\bullet \quad a \otimes 1_i &&= a \otimes 1_0 \cdot 0_i \;=\; 1_0 \cdot a \otimes 0_i \;=\; \rho_3(a) \otimes 0_i && (2.53)\\
&\bullet \quad a \otimes 2_i &&= a \otimes 2_0 \cdot 0_i \;=\; 2_0 \cdot a \otimes 0_i \;=\; (\rho_3)^2(a) \otimes 0_i && (2.54)\\
&\bullet \quad a \otimes 3_i &&= \sum_{\tilde{a}} (E_{\tilde{0}_0})_{a\tilde{a}}\, \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i && (2.55)\\
&\bullet \quad \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i' &&= \tilde{a} \otimes 1_0 \cdot \tilde{3}_i = 1_0 \cdot \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i = \rho_3'(\tilde{a}) \otimes \tilde{3}_i && (2.56)\\
&\bullet \quad \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i'' &&= \tilde{a} \otimes 2_0 \cdot \tilde{3}_i = 2_0 \cdot \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i = (\rho_3')^2(\tilde{a}) \otimes \tilde{3}_i && (2.57)\\
&\bullet \quad \tilde{a} \otimes \tilde{0}_i &&= \sum_{a} (E^{tr}_{\tilde{0}_0})_{\tilde{a},a}\; a \otimes 0_i && (2.58)
\end{aligned}
$$

Here the matrix $E_{\tilde{0}_0}$ encodes the branching rules $\mathcal{E}_9 \hookrightarrow \mathcal{M}_9$ (obtained from matrices P^ℓ implementing the $\mathcal{E}_9$ (left) action on $\mathcal{M}_9$ as follows: $(E_{\tilde{b}})_{a\tilde{c}} = (P^\ell_a)_{\tilde{b}\tilde{c}}$). Explicitely, we have:

$$
E_{\tilde{0}_0} = \begin{pmatrix}
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{lcl}
0_0 & \hookrightarrow & \tilde{0}_0 \\
1_0 & \hookrightarrow & \tilde{0}_0 \\
2_0 & \hookrightarrow & \tilde{0}_0 \\
3_0 & \hookrightarrow & \tilde{3}_0 + \tilde{3}_0' + \tilde{3}_0'' \\
0_1 & \hookrightarrow & \tilde{0}_1 \\
1_1 & \hookrightarrow & \tilde{0}_1 \\
2_1 & \hookrightarrow & \tilde{0}_1 \\
3_1 & \hookrightarrow & \tilde{3}_1 + \tilde{3}_1' + \tilde{3}_1'' \\
0_2 & \hookrightarrow & \tilde{0}_2 \\
1_2 & \hookrightarrow & \tilde{0}_2 \\
2_2 & \hookrightarrow & \tilde{0}_2 \\
3_2 & \hookrightarrow & \tilde{3}_2 + \tilde{3}_2' + \tilde{3}_2''
\end{array}
\qquad (2.59)
$$

The multiplication of the basis generators $\{a \otimes 0_i\,,\, \tilde{a} \otimes \tilde{3}_i\}$ is then naturally defined using the multiplication rules (2.50) and the projections (2.53–2.58). We introduce the matrices R^r defined from the right action of $\mathcal{E}_9$ on $\mathcal{M}_9$: $\tilde{b}\, a = \sum_{\tilde{c}} (P^r_a)_{\tilde{b}\tilde{c}}\, \tilde{c} = \sum_{\tilde{c}} (R^r_{\tilde{b}})_{a\tilde{c}}\, \tilde{c}$. It can be seen that the algebra $Oc(\mathcal{E}_9)$ is non commutative and isomorphic with the direct sum of 9 copies of 2×2 matrices and 36 copies of the complex numbers. With our parametrisation,

the quantum symmetry matrices read:

$$
\begin{aligned}
O_{a\otimes 0_0} &= \begin{pmatrix} G_a & . & . & . & . & . \\ . & G_a & . & . & . & . \\ . & . & G_a & . & . & . \\ . & . & . & P_a^\ell & . & . \\ . & . & . & . & P_a^\ell & . \\ . & . & . & . & . & P_a^\ell \end{pmatrix} \\
O_{a\otimes 0_1} &= \begin{pmatrix} . & G_a & . & . & . & . \\ . & . & G_a & . & . & G_a\,E_0 \\ G_a & . & . & G_a\,E_0 & . & . \\ . & P_a^\ell\,E_0^{tr} & . & . & P_a^\ell\,(\mathbb{1}+P_{1_0}^\ell) & . \\ . & . & P_a^\ell\,E_0^{tr} & . & . & P_a^\ell \\ . & . & . & P_a^\ell\,(\mathbb{1}+P_{2_0}^\ell) & . & . \end{pmatrix} \\
O_{a\otimes 0_2} &= \begin{pmatrix} . & . & G_a & . & . & . \\ G_a & . & . & G_a\,E_0 & . & . \\ . & G_a & . & . & G_a\,E_0 & . \\ . & . & P_a^\ell\,E_0^{tr} & . & . & P_a^\ell\,(\mathbb{1}+P_{1_0}^\ell) \\ . & . & . & P_a^\ell\,(\mathbb{1}+P_{2_0}^\ell) & . & . \\ . & P_a^\ell\,E_0^{tr} & . & . & P_a^\ell & . \end{pmatrix} \\
O_{\tilde{a}\otimes\tilde{3}_0} &= \begin{pmatrix} . & . & . & R_{\tilde{a}}^r & . & . \\ . & R_{\tilde{a}}^r\,E_0^{tr} & . & . & R_{\tilde{a}}^r(\mathbb{I}+P_{1_0}^\ell) & . \\ . & . & R_{\tilde{a}}^r E_0^{tr} & . & . & R_{\tilde{a}}^r(\mathbb{1}+P_{1_0}^\ell) \\ H_{\overline{a}} & . & . & 2(H_{\tilde{a}}E_0) & . & . \\ . & H_{\tilde{a}}(\mathbb{1}+G_{1_0}) & . & . & H_{\tilde{a}}E_0 & . \\ . & . & H_{\tilde{a}}(\mathbb{1}+G_{1_0}) & . & . & H_{\tilde{a}}E_0 \end{pmatrix} \\
O_{\tilde{a}\otimes\tilde{3}_1} &= \begin{pmatrix} . & . & . & . & R_{\tilde{a}}^r & . \\ . & . & R_{\tilde{a}}^r\,E_0^{tr} & . & . & R_{\tilde{a}}^r \\ . & . & . & R_{\tilde{a}}^r(\mathbb{1}+P_{2_0}^\ell) & . & . \\ . & H_{\tilde{a}}(\mathbb{1}+G_{2_0}) & . & . & H_{\tilde{a}}\,E_0 & . \\ . & . & H_{\tilde{a}} & . & . & H_{\tilde{a}}\,E_0 \\ H_{\tilde{a}} & . & . & H_{\tilde{a}}\,E_0 & . & . \end{pmatrix} \\
O_{\tilde{a}\otimes\tilde{3}_2} &= \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & R_{\tilde{a}}^r \\ . & . & . & R_{\tilde{a}}^r(\mathbb{1}+P_{2_0}^\ell) & . & . \\ . & R_{\tilde{a}}^r\,E_0^{tr} & . & . & R_{\tilde{a}}^r & . \\ . & . & H_{\tilde{a}}(\mathbb{1}+G_{2_0}) & . & . & H_{\tilde{a}}\,E_0 \\ H_{\tilde{a}} & . & . & H_{\tilde{a}}\,E_0 & . & . \\ . & H_{\tilde{a}} & . & . & H_{\tilde{a}}\,E_0 & . \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

Triality t is well defined on this algebra: $t(a_i \otimes 0_j) = t(\tilde{a}_i \otimes \tilde{3}_j) = i + j\,(\mathrm{mod}3)$. The left chiral subalgebra (by definition the algebra generated by the left chiral generator $0_1 \otimes 0_0$) is $L = \{a \otimes 0_0\}$. The right chiral subalgebra (generated by $0_0 \otimes 0_1$) is $R = \{0_0 \otimes a\}$. With the projections (2.53-2.58), R correspondonds to the set of elements $\{0_0 \otimes 0_0, 1_0 \otimes 0_0, 2_0 \otimes 0_0, \tilde{0}_0 \otimes \tilde{3}_0, 0_0 \otimes 0_1, 1_0 \otimes 0_1, 2_0 \otimes 0_1, \tilde{0}_0 \otimes \tilde{3}_1, 0_0 \otimes 0_2, 1_0 \otimes 0_2, 2_0 \otimes 0_2, \tilde{0}_0 \otimes \tilde{3}_2\}$. The ambichiral subalgebra (by definition the intersection of L and R) is $A = \{0_0 \otimes 0_0, 1_0 \otimes 0_0, 2_0 \otimes 0_0\}$. The chiral operation C on the basis elements is defined by $C(u \otimes v) = (v \otimes u)$, for $u, v \in H = \mathcal{E}_9 \oplus \mathcal{M}_9$ (and using the projections (2.53-2.58)). The self-dual elements obey $C(u) = u$, they are the

ones in figure 2.8 which are connected to themselves by the dashed line. A-elements are, in particular, self-dual.

One modular invariant and two graphs Starting from the modular invariant (2.41), we obtain the set of toric matrices W_{x0}, double fusion matrices $V_{i\,j}$ and quantum symmetry matrices O_x, together with the corresponding Ocneanu graph. By an analysis of the later, it clearly appears that there are two graphs that are modules under the quantum symmetry algebra, the $\mathcal{E}_9$ and $\mathcal{M}_9$ graphs. Using the realization of the quantum symmetry algebra described above, the action is defined by:

$$Oc \times \mathcal{E}_9 \to \mathcal{E}_9 \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (a \otimes 0_i)\,.\,b & = & a\,.\,0_i\,.\,b \\ (\tilde{a} \otimes \tilde{3}_i)\,.\,b & = & \tilde{a}\,.\,\tilde{3}_i\,.\,b \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} S^{\mathcal{E}}_{x=a\otimes 0_i} & = & G_{0_i}\,G_a \\ S^{\mathcal{E}}_{x=\tilde{a}\otimes\tilde{3}_i} & = & R_{\tilde{3}_i}\,H_{\tilde{a}} \end{array} \right. \tag{2.61}$$

$$Oc \times \mathcal{M}_9 \to \mathcal{M}_9 \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (a \otimes 0_i)\,.\,\tilde{b} & = & a\,.\,0_i\,.\,\tilde{b} \\ (\tilde{a} \otimes \tilde{3}_i)\,.\,\tilde{b} & = & \tilde{a}\,.\,\tilde{3}_i\,.\,\tilde{b} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} S^{\mathcal{M}}_{x=a\otimes 0_i} & = & P^{\ell}_{0_i}\,P^{\ell}_{a} \\ S^{\mathcal{M}}_{x=\tilde{a}\otimes\tilde{3}_i} & = & R_{\tilde{3}_i}\,H_{\tilde{a}} \end{array} \right. \tag{2.62}$$

We have therefore two quantum groupoïds associated with the initial modular invariant, constructed from the graphs $\mathcal{E}_9$ and $\mathcal{M}_9$. Setting $d^{\mathcal{E}}_i = \sum_{a,b}(F^{\mathcal{E}}_i)_{ab}$, $d^{\mathcal{E}}_x = \sum_{a,b}(S^{\mathcal{E}}_x)_{ab}$, $d^{\mathcal{M}}_i = \sum_{a,b}(F^{\mathcal{M}}_i)_{ab}$, $d^{\mathcal{M}}_x = \sum_{a,b}(S^{\mathcal{M}}_x)_{ab}$, we check the dimensional rules:

$$\dim(\mathcal{B}(\mathcal{E}_9) \;=\; \sum_i (d^{\mathcal{E}}_i)^2 = \sum_x (d^{\mathcal{E}}_x)^2 = 518\,976\ . \tag{2.63}$$

$$\dim(\mathcal{B}(\mathcal{M}_9) \;=\; \sum_i (d^{\mathcal{M}}_i)^2 = \sum_x (d^{\mathcal{M}}_x)^2 = 754\,272\ . \tag{2.64}$$

The rejected diagram In the first list of $SU(3)$-type graphs presented by Di Francesco and Zuber in [11], there were three graphs associated with the modular invariant (2.41): $\mathcal{E}_9$, $\mathcal{M}_9$ and another one, displayed on figure 2.9. This graph was later rejected by Ocneanu in [20], because some required cohomological property (written in terms of values for triangular cells) was not fullfilled. In other words, this graph gives rise to a module over the ring of $\mathcal{A}_9$, with the right properties, but the underlying category does not exist. Using our methods, this graph does not appear either. The reason is that it should be a module over the quantum symmetry algebra, but this is not the case: we can try to define such an action on this graph, but there is no solution when we impose the coefficients to be non-negative integers. In other words, imposing that a graph should define both a module over $\mathcal{A}$ and a module over Oc, with the expected non-negativity properties, amounts to impose, at least for the members of the $su(3)$ family, that both the module condition over $\mathcal{A}$ (only), together with the self - cell condition, should be satisfied. The methods described here provide therefore also powerful checks for graphs that are candidates to be described by quantum groupoïds associated with modular invariants.

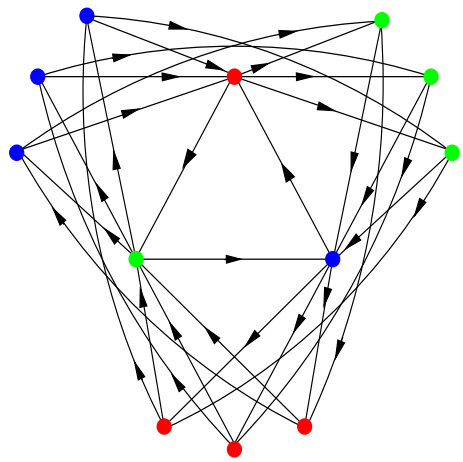


Figure 2.9: The rejected Di Francesco-Zuber graph.

Final Comment The Ocneanu graphs displayed in this paper ($Oc(E_6)$, $Oc(\mathcal{E}_5)$, $Oc(\mathcal{E}_9)$) have been first obtained by Ocneanu himself. For instance those associated with members of the $su(3)$ family were displayed on posters during the Bariloche conference (2000) but the full list never appeared in print. Several techniques [6, 25] allow one to recover some of them from the knowledge of the Di Francesco - Zuber diagrams. The present paper actually emerged from our wish to obtain the Ocneanu graphs $Oc(G)$ (and the graphs G themselves, of course) from the only data provided by the modular invariant.

Acknowledments The authors wish to thank R. Coquereaux for his suggestions, guidance, and help. G. Schieber was supported by a fellowship of Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) and of FAPERJ.

Bibliography

[1] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. Petkova, J.-B. Zuber, *Boundary Counditions in Rational Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B579** (2000) 707–773.

[2] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors* , CMP 210 (2000), 733–784.

[3] J. L. Cardy, *Boundary conditions, fusions rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 581–596.

[4] R. Coquereaux, *Notes on the quantum tetrahedron*, hep-th/0011006, Moscow Math. J. vol2, n1, Jan.-March (2002), 1–40.

[5] R. Coquereaux, G. Schieber, *Twisted partition functions for ADE boundary conformal field theories and Ocneanu algebras of quantum symmetries*, hep-th/0107001, J. of Geom. and Phys. 781, (2002), 1-43.

[6] R. Coquereaux, G. Schieber, *Determination of quantum symmetries for higher ADE systems from the modular T matrix*. hep-th/0203242, J.Math.Phys. 44 (2003) 3809-3837.

[7] R. Coquereaux, R. Trinchero, *On quantum symmetries of ADE graphs*, Advances in Theor. and Math. Phys., volume **8** issue 1 (2004), hep-th/0401140.

[8] R. Coquereaux, E. Isasi, *On quantum symmetries of the non-ADE graph F_4*, Adv. in Theo. Math. Phys. **8** (2004) 955-985, hep-th/0409201.

[9] R. Coquereaux, D. Hammaoui, G. Schieber, E. H. Tahri, *Comments about quantum symmetries of $SU(3)$ graphs*, J. of Geom. and Phys., in press,

[10] R. Coquereaux, *Racah - Wigner quantum 6j Symbols, Ocneanu Cells for A_N diagrams, and quantum groupoïds*, hep-th/0511293.

[11] P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *SU(N) Lattice integrable models associated with graphs*, Nucl. Phys **B338** (1990) 602–646; *$SU(N)$ Lattice Integrable Models and Modular Invariance*, Recents Developments in Conformal Field Theories, Trieste Conference (1989), S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin, J.-B. Zuber eds., World Scientific (1990).

[12] D. E. Evans, D. R. Pinto, *Subfactor realization of modular invariants*, Commun. Math. Phys. **237** (2003) 309–363.

[13] T. Gannon, *Modular data: the algebraic combinatorics of conformal field theory*, math.QA/0103044.

[14] D. Hammaoui, G. Schieber, E.H. Tahri, *Higher Coxeter graphs associated to affine su*(3) *modular invariants*, J. of Physics **A 38** (2005) 8259–8286.

[15] D. Hammaoui, G. Schieber, E.H. Tahri, *Quantum symmetries of the higher Coxeter graphs associated to affine su*(3) *modular invariants*, in preparation.

[16] D. Hammaoui, PhD thesis, Université Mohamed I, Oujda.

[17] A. Kirillov Jr, V. Ostrik, *On q-analog of McKay correspondence and ADE classification of sl*$^{(}$2) *conformal field theories*, math.QA/0101219.

[18] A. Ocneanu, *Paths on Coxeter diagrams: from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors*, notes taken by S. Goto, Fields Institute Monographs (Rajarama Bhat et al eds, AMS, 1999). Same title: talks given at the Centre de Physique Théorique, Luminy, Marseille, 1995.

[19] A. Ocneanu, *Higher Coxeter systems*, Talk given at MSRI, http://www.msri.org/publications/ln/msri/2000/subfactors/ocneanu.

[20] A. Ocneanu, *The Classification of subgroups of quantum SU(N)*, Lectures at Bariloche Summer School 2000, Argentina, AMS Contemp. Math. **294**, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.

[21] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, math.QA/0111139.

[22] V.B. Petkova, J.-B. Zuber, *From CFT's to Graphs*, Nucl Phys. **B463** (1996) 161–193; *Conformal field theory and graphs*, Talk given at the 21st Intern. Coll. on Group Theor. Methods in Physics, Goslar, Germany, July 1996, hep-th/9701103.

[23] V.B. Petkova, J.B. Zuber, *The many faces of Ocneanu cells*, Nucl. Phys. **B603** (2001) 449–496, hep-th/0101151.

[24] V.B. Petkova, J.-B. Zuber, *Generalised twisted partition functions*, Phys. Lett. **B504** (2001) 157–164, hep-th/0011021.

[25] G. Schieber, *L'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu et la classification des systèmes conformes à 2D*, PhD thesis (available in french and in portuguese, UP (Marseille) and UFRJ (Rio de Janeiro), Sept. 2003, math-ph/0411077.

[26] G. Schieber, *Bimodule structure and quantum symmetries: an exceptional affine su(4) example* in preparation.

[27] R. Trinchero, *Quantum symmetries of faces models and the double triangle algebra*, hep-th/0501140.

[28] J.-B. Zuber, *CFT, BCFT, ADE and all that*, Lectures at Bariloche Summer School, Argentina, Jan. 2000, AMS Contemp. Math. **294**, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.

Chapitre 3

Symétries quantiques et graphes non-simplement lacés.

Il est possible dans certains cas de construire des restrictions sur le contenu des champs d'une théorie telles que la compatibilité avec une OPA soit maintenuee, mais où l'invariance modulaire de la fonction de partition est rremplacée par l'invariance sous l'action d'un sous-groupe du groupe modulaire [74][72][73]. Des exemples de ses restrictions sont furnies par les théories pour lequels le graphe correspondant est issu d'un quotient par les groupes de symétrie $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_3$. Ces quotients donnent naissance à des théories associées aux graphes non ADE, plus précisément aux graphes non-simplement lacés B_n, C_n, F_4 et G_2 pour les théories $su(2)$ et leurs généralisations pour les théories $su(3)$.

Partant d'un candidat pour une fonction de partition, écrite en termes des éléments de l'algèbre de caractères de $\hat{su}(n)_\ell$ au niveau ℓ, la méthode de scission modulaire décrite dans la section prcédente permet d'explorer les propriétés algébriques qui, éventuellement, cconduissent à des structures de type "symétries quantiques". On sait déjà, pour des raissons très générales, qu'il ne sera pas possible d'associer, aux exemples non simplement lacés, des grupoïdes quantiques, comme ceux que nous avons succintement décrits antérieurement. Mais on peut néanmoins étudier explicitement ce type de modèles, determiner la structure de ce qui devrait être leur algèbre de syméetris quantiques, et analyser ce qui change par rapport à la situation simplement lacée. Outre l'interêt mathématique de ces activités exploratoires, il fauit signaler que les modèles considérés peuvent apparaître dans plusieurs domaines de la physique, comme les théories des super cordes, les théories des branes ou les systèmes intégrables.

Dans ce chapitre, sont présentés les résultats de cette explorations des symétries quantiques pour les graphes non-simplement lacés. Le travail est basé sur les méthodes et les résultats de l'exemple F_4 qui est étudié dans [25], cette dernièer référence est à la fois le premier traitement d'un cas non-simplement lacé, et le cas grâce auquel l'auteur a pu généralisation de la méthode de scission modulaire aux graphes du système $SU(3)$.

La première section contient des considérations générales sur les méthodes et résultats concernant les graphes non-simplement lacés du système $SU(2)$. Nous décrivons la métode d'obtention des fonctions de partition des graphes non-simplement lacés par restriction de celles des graphes ADE, la méthode de scission modulaire adaptée à l'étude des graphes $SU(2)$ non-simplement lacés et finalemnt les résultats généraux. La deuxième section est dédiée à l'étude explicite des exemples du système $SU(2)$; on considère explicitement les cas F_4, B_3, B_4, le cas général B_n et le graphe G_2. Dans chaque cas nous calculons l'ensemble des matrices toriques, l'algèbre de symétries quantiques et on explore de quelle façon la règle de somme quadratique doit être modifiée. La troisième section contient l'étude d'un cas non-simplement lacé du système $SU(3)$ ce cas est construit comme l'analogue de l'exemple F_4 de $SU(2)$, mais les résultats ne constituent pas une généralisation directe du cas $SU(2)$, principalement à cause du caractère orienté des graphes de $SU(3)$ et du fait que les multiples liens sont déjà présents dans les graphes de Di Francesco Zuber.

3.1 Considérations générales.

3.1.1 Pliage des graphes ADE, fonctions de partition et propriétés modulaires des graphes non-simplement lacés.

La donnée de départ est l'invariant modulaire d'un graphe ADE. Dans notre approche, la fonction de partition d'un graphe non-simplement lacé ($\mathcal{G}$) est obtenue comme la restriction (en contenu de caractères) de la fonction de partition d'un graphes ADE de même norme que $\mathcal{G}$. La restriction étant telle que les caractères gardés sont étiquetés par les exposants du graphe non-simplement lacé en question. Ce nouveau pseudo-invariant modulaire est alors pris comme candidat que on doit pouvoir associér aux symétries quantiques d'un graphe non simplement lacé.

Pour comprendre cette restriction, on va considèrer le mécanisme de construction des graphes non simplement lacés à partir du pliage des graphes ADE. La Figure 3.1 illustre l'action des groupes finis $\mathbb{Z}_2$ et $\mathbb{Z}_3$ sur des différents graphes ADE de $SU(2)$. Le quotient d'un graphe ADE (noté G) par le groupe fini approoprié donne origine à un graphe non-simplement lacé $\mathcal{G}$. Ainsi le graphe F_4 de nombre de Coxeter 12 provient du quotient par $\mathbb{Z}_2$ du graphe exceptionnel E_6, le graphe G_2 est le quotient par $\mathbb{Z}_3$ du graphe D_4, la série B_n de nombre de Coxeter $2n$ est associée au quotient par $\mathbb{Z}_2$ des graphes A_{2n-1}, et les graphes C_n sont construits à partir de quotients par $\mathbb{Z}_2$ des graphes D_{n+1}.

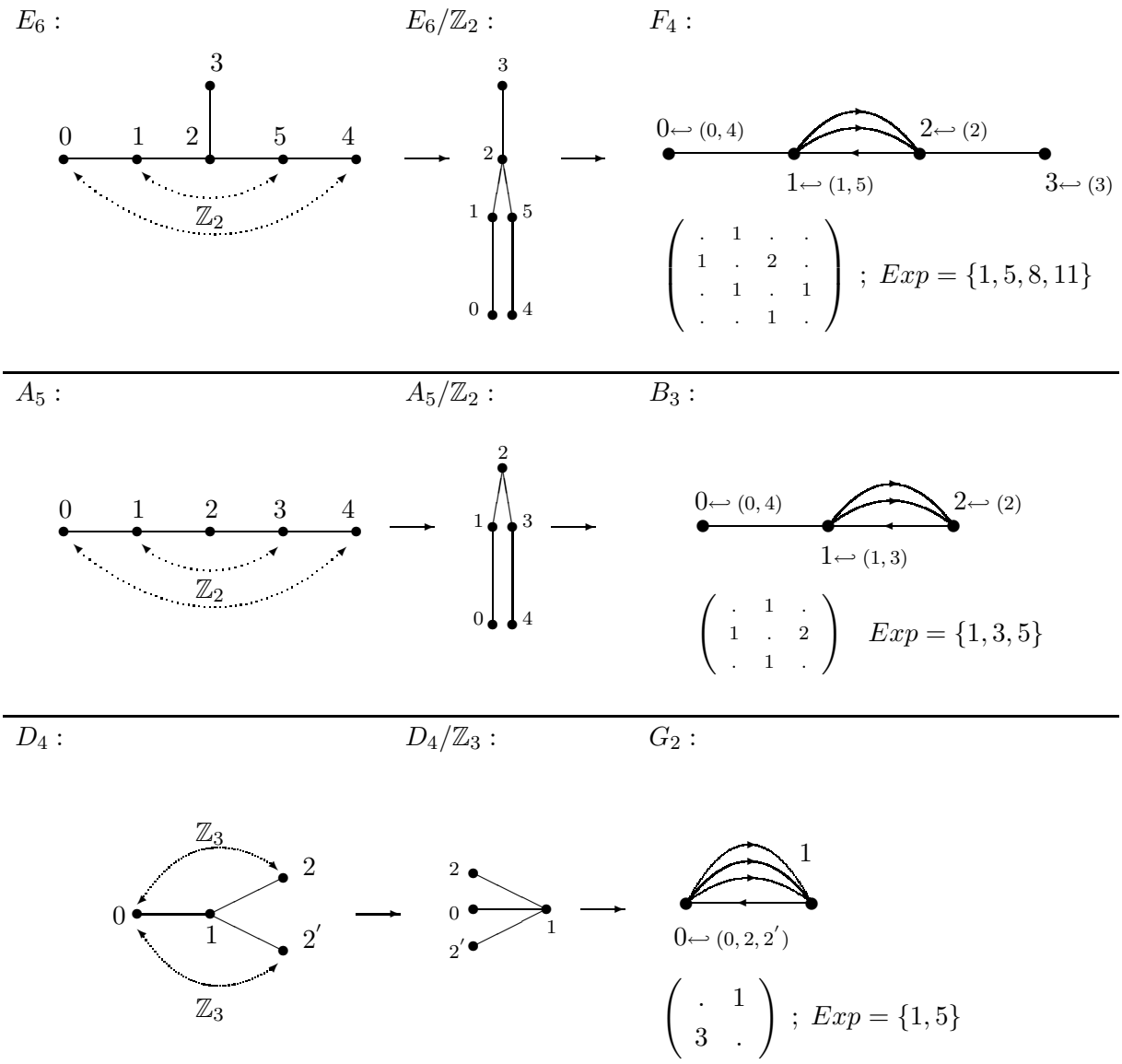


FIG. 3.1 – Pliages $\mathbb{Z}_2$ et $\mathbb{Z}_3$ des graphes ADE de $SU(2)$.

Chaque vertex du graphe plié est étiqueté par les vertex du graphe G identifiés par l'action du groupe (label à gauche), il est aussi étiqueté par le nouveau label correspondant à l'ordre des vertex dans la matrice d'adjacence (label à droite).

Les flèches en lignes pointillées indiquent l'action du groupe sur les vertex du graphe G, les points sans flèches sont les vertex invariants. Le lien entre la série des graphes présentés dans la Figure 3.1 et les graphes de Dynkin-Coxeter est fournie par la matrice de Cartan [45] [2]. En terme de matrices d'adjacence, les matrices de Cartan des graphes de la Figure 3.1 sont données par la relation

$$C = 2\mathbb{1} - Ad(\mathcal{G}).$$

Si $\mathcal{G}$ est un graphe no simplement lacé, construit comme un cocient du graphe ADE G, alors les entrées le la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ est donne par la equation suivante

$$Ad(\mathcal{G})_{ij} = \frac{\text{nombre d'arêtes de } G \text{ liant } i \text{ à } j}{\text{nombre vertex de } G \text{ identifiées au vertex } j}.$$

(nous faisons référence aux vertex du graphe G identifiés par l'action de A)

Notons que les matrices obtenues ne sont pas symètriques, et c'est d'ailleurs là que réside la différence fondamentale avec le cas simplement lacé (pour le cas du système $Su(2)$). Les caractères du graphe $\mathcal{G}$ forment un sous-ensemble de l'ensemble des caractères du graphe ADE, la fonction de partition associée au graphe non-simplement lacé est alors la restriction de la fonction de partition du graphe G aux caractères étiquetés par les exposants du graphe non-simplement lacé. Ces exposants sont aussi listés dans la Figure 3.1. Notons que dans la procedure conduisant à l'obtention des graphes non-simplement lacés (par exemple B_3 à partir de A_5), nous n'avons pas dupliqué le point fixe de la transformation (le vertex 2 de A_5). Le dédoublement du vertex fixe nous ramène aux cas orbifolds simplement lacés (par example D_4 à partir de A_5 à la place de B_3). Cette rémarque peut également être généralisé au cas des graaphes de type $SU(3)$.

Propriétés modulaires. La fonction de partition d'un graphe non-simplement lacé construit par un quotient d'un graphe ADE est invariante uniquement sous l'action d'un sous-groupe de congruence de type $\Gamma_0(2)$ ou $\Gamma_0(3)$ du groupe modulaire. Le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ est le groupe de matrices 2×2 suivant

$$\Gamma(N) \supset \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, , \{a, b, c, d\} \in \mathbb{Z}, \quad c = 0 \, mod(N) \;\text{ et } ad - bc = 1 \right\}$$

où $\Gamma(N)$ est le sous groupe de congruence principal du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$. $\Gamma_0(N)$ a deux générateurs, le générateur de groupe modulaire T et l'opérateur $(S^{-1}T^{-N}S)$ qui agit sur le paramètre complexe τ comme suit (rappelons que $S : \tau \to -\frac{1}{\tau}$, et $T : \tau \to \tau + 1$)

$$(S^{-1}T^{-N}S) : \tau \to \frac{\tau}{1 + N\,\tau}.$$

L'action de T et $S^{-1}T^{-N}S$ sur les caractères $\chi_i(\tau)$ peut-être calculée à travers la dépendance dans le paramètre τ, ou de manière matricielle en utilisant la représentation de Hurwitz-Verlinde de la dimention adécuate des générateurs S et T.

Comme pour les graphes ADE, la fonction de partition de $\mathcal{G}$ s'écrit

$$Z = \sum_{i\,j \in \, exp(\mathcal{G})} \bar{\chi}_i(\tau)\, M_{i\,j} \chi_i(\tau) \tag{3.1}$$

La matrice M est appelée la *matrice modulaire* (et non plus l'invariant modulaire). L'invariance de la fonction de partition par $\Gamma_0(N)$ peut-être vérifiée simplement par les relations de commutation

$$[M, T] = 0 \quad , \quad [M, (S^{-1}T^{-N}S)] = 0$$

3.1.2 La méthode de scission modulaire et les symétries quantiques des graphes non-simplement lacés.

L'analyse de l'équation de scission modulaire appliquée à une matrice modulaire associée à un graphe non-simplement lacé exige des modifications de l'analyse de la décomposition des matrices $K_{i,j}$ en termes des matrices toriques $W_{x,0}$ et $W_{0,x}$.

Une première observation est que la correspondance entre $Tr(MM^\dagger)$ et la dimension de l'algèbre de symétries quantiques n'est plus satisfaite. Nous ne connaissons pas à priori, combien de noeuds a le graphe de symétries quantiques, et par conséquent comment décomposer les matrices toriques quand il y a multiplicité.

Cette première observation n'est pas déconnectée de la deuxième puisque cette dernière concerne l'interprétation de la multiplicité des matrices toriques. On considère l'équation de scission modulaire (2.9) pour un cas ADE avec multiplicité (une matrice torique est associée à plus d'un point du graphe $Oc(G)$). L'index $\hat{z}$ désigne ces matrices toriques différentes, tandis que l'index z étiquette les vertex du graphe de symétries quantiques. Dû à la multiplicité des matrices toriques nous avons la relation $\hat{z} \leq z$ et l'équation de scission modulaire peut s'écrire comme suit

$$K_{i\,j} = \Sigma_{\hat{z}} n_{\hat{z}} (W_{0,\hat{z}})_{i\,j} W_{\hat{z},0}$$

où $n_{\hat{z}}$ est la multiplicité de la matrice $W_{\hat{z},0}$. Il faut souligner que la somme ici est faite sur les matrices toriques et non sur les noeuds du graphe de symétries quantiques comme dans l'équation (2.9).

Toujours pour les cas ADE il a été montré [57] que l'entrée $(W_{z0})_{i\,j}$ d'une matrice torique donne le nombre de chemins essentiels entre l'origine du graphe $Oc(G)$ et le vertex z (le pair d'index $(i,\, j)$ indique le nombre de pas effectués dans chaque partie chiral du graphe). Puisque le graphe est simplement lacé, le nombre de chemins en sens retour doit être égal au nombre en sens aller, d'où la relation $W_{z,0} = W_{0,z}$.

Pour un graphe non-simplement lacé cette même interprétation des matrices toriques amène à considérer les coefficients n_z d'une manière différente. Un graphe non-simplement lacé peut-être associé à un graphe de symétries quantiques non-simplement lacé, dans ce cas le nombre des chemins essentiels allant de l'origine à un point z ne est pas forcément le même que le nombre de chemins essentiels dans le sens opposé. Dans ce cas, en admettant que les matrices toriques donnent un comptage des chemins essentiels sur $Oc(\mathcal{G})$, la relation suivante est consistante avec notre interprétation :

$$(W_{0,\hat{z}})_{i\,j} = n_{\hat{z}} (W_{\hat{z},0})_{i^*\,j^*}. \tag{3.2}$$

L'équation (2.13) permettant de calculer la norme de $K_{i\,j}$ s'écrit maintenant :

$$(K_{i\,j})_{i^*\,j^*} = \sum_{\hat{z}} n_{\hat{z}} \left|(W_{0,\hat{z}})_{i\,j}\right|^2. \tag{3.3}$$

L'analyse de la décomposition des matrices K_{ij} en fonction de sa norme reste inchangée, sauf pour les matrices K_{ij} divisibles par une constante $n_{\hat{z}} \geq 2$. Ces matrices ne seront plus considérés comme la somme de n_x matrices égales (multiplicité) mais comme une seule matrice torique satisfaisant la relation (3.2). Avec cet interprétation la dimension de l'algèbre de symétries quantiques est égale au nombre de matrices toriques différents, l'équation de scission modulaire redevient simplement

$$K_{ij} = \sum_{z \in Oc(\mathcal{G})} (W_{0,z})_{ij} W_{z,0}.$$

Comme la dimension de l'algèbre de symétries quantiques n'est pas connue à priori, il ne nous est pas possible de déterminer laquelle parmi ces deux interprétations donne une solution compatible avec une généralisation des structures de Hopf faibles apparaissant dans les cas ADE. En conséquence, pour les graphes non-simplement lacés qui conduisent à une solution de l'équation de scission modulaire incluant des coefficients n_x plus grands que un, deux possibilités seront étudiées :

- La solution incluant des multiplicités de matrices toriques (comment dans le cas ADE) est associée a un graphe d'Ocneanu simplement lacé. Le graphe non-simplement lacé $\mathcal{G}$ associé à la matrice modulaire est dans ce cas un module sur le graphe $Oc(\mathcal{G})$. $Oc(\mathcal{G})$ est toujours l'union de deux graphes chiraux sur le même ensemble de vertex, avec deux matrices d'adjacence (une pour chaque partie chiral) notées $V_{1,0}$ et $V_{0,1}$. S'il y a des coefficients $n_z \geq 2$, les matrice d'adjacence $V_{1,0}$ et $V_{0,1}$ ne sont pas totalement fixées par l'équation de scission modulaire généralisée[1]. Le choix des coefficients libres correspond à un choix d'ordre des vertex non-discernables de $Oc(\mathcal{G})$.
- La solution considérant valable la relation 3.2 résulte dans certains cas des graphes de symétrie quantiques non-simplement lacés (c'est le cas des exemples F_4 et G_2). Dans ce cas les matrices d'adjacence $V_{1,0}$ et $V_{0,1}$ n'ont pas de coefficients indéterminés. Si le graphe de symétries quantiques est effectivement non-simplement lacé, un graphe de Coxeter-Dynkin non-simplement lacé de même norme que $\mathcal{G}$ (pas forcement $\mathcal{G}$ lui même) apparaît comme sous graphe module de $Oc(\mathcal{G})$.

Le graphe $Oc(\mathcal{G})$ est le graphe de Cayley de la multiplication par les générateurs, et ces vertex forment l'algèbre des symétries quantiques $Oc(\mathcal{G})$. Les matrices à coefficients O_x, définies par les constantes de structure de l'algèbre, forment une représentation de l'algèbre de symétries quantiques.

Actions de module et règle de somme quadratique. Dans le système ADE la bigèbre $\mathcal{B}$ est la structure formelle qui donne origine à toutes les proprietés algébriques (notamment

[1]En général la solution de l'équation de scission modulaire n'est pas unique, mais une seule de ses solutions est compatible avec un graphe de symétries quantiques fournissant une algèbre de graphe et un module sur le graphe G. Notre discution dans ce paragraphe se limite à ce type dde solutions.

les propriétés de module et algèbre de graphe) liant les trois graphes : G, $\mathcal{A}(G)$ et $Oc(G)$. On a vu dans le premier cchapitre que cette théorie est bien établie (bien qu'elle n'ait été explicitée que pour quelques exemples ADE très simples) [19],[20][28], mais pour les graphes non-simplement lacés elle n'existe pas. Cependant dans chaque exemple non-simplement lacé nous avons observé les propriétés fondamentales qui suggèrent de l'existence de $\mathcal{B}$, qui constituerait une généralisation de la structure de grupoïde quantique généralement associé aux graphes simplement lacés.

- Tout d'abord $Oc(G)$ "existe", en ce sens que nous pouvons le détermineer n résolvant les équations de scission mmodulaire.
- $\mathcal{G}$ est un module sur $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, l'action de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{G}$ est codée par les matrices à entrées entiers-positif F_i. Ces matrices forment une représentation $d_{\mathcal{G}} \times d_{\mathcal{G}}$ de l'algèbre commutative $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ de type A usuelle.
- $\mathcal{G}$ est un module sur $Oc(\mathcal{G})$, l'action de $Oc(\mathcal{G})$ est codée par les matrices d'entrées entiers-positif S_x. Ces matrices forment une représentation de dimension $d_{\mathcal{G}}$ de l'algèbre $Oc(\mathcal{G})$.
- $Oc(\mathcal{G})$ est un bimodule sur $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ dont les constantes de structure sont les matrices toriques à entrées entières non négatives, et la condition de compatibilité est l'équation de scission modulaire.

Par conntre la régles de somme quadratique, qui résulte de l'existence des deux structures d'algèbres sur deux espaces vectoriels isomorphes, doit être corrigée par des facteurs entiers très simples. Il est en effet intéressant d'explorer les règles de somme vérifiées par les familles de graphes $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et $Oc(\mathcal{G})$. Ceci permet de suggérer certaines propriétés pour la structure formelle qu'on devvrait pouvoir associer aux graphes non-simplement lacés. Les dimensions de type $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et $Oc(\mathcal{G})$ sont calculées par les relations usuelles

$$d_i = \sum_{a,b\in\mathcal{G}} (F_i)_{ab} \quad , \quad d_z = \sum_{a,b\in\mathcal{G}} (S_z)_{ab}.$$

Les relations entre les sommes des carrés des dimensions de type $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et de type $Oc(\mathcal{G})$ dépendent de l'interprétation donné au coefficient n_x.

- Si n_x correspond à la multiplicité des matrices toriques, et si notre graphe de symétries quantiques est (exclusivement) simplement lacé, alors

$$\sum_{x\in Oc(\mathcal{G})} d_x^2 = \mathcal{N} \times \sum_{i\in\mathcal{A}(\mathcal{G})} d_i^2. \tag{3.4}$$

- Si n_x correspond au coefficient dans l'équation (3.2), et si notre graphe de symétries quantiques admets des sous graphes non-simplement lacé, alors

$$\sum_{x\in Oc(\mathcal{G})} \frac{1}{n_x} d_x^2 = \mathcal{N} \times \sum_{i\in\mathcal{A}(\mathcal{G})} d_i^2 \tag{3.5}$$

où le facteur $\mathcal{N}$ est le nombre d'éléments du groupe fini $\mathbb{Z}_{\mathcal{N}}$ qui intervient dans la construction de $\mathcal{G}$ à partir du graphe ADE G.

En conclusion la règle de somme quadratique usuelle marche presque. Les candidats pour les deux algèbres de caractères associés aux deux structures multiplicatives semi-simples sur les deux algèbres qui doivennt remplacer $\mathcal{B}$, sont respectivement l'algèbre $Oc(\mathcal{G})$ et la somme directe de deux copies de l'algèbre de graphe $\mathcal{A}(\mathcal{G})$. Le facteur $\frac{1}{n_x}$ qui apparaît dans l'équation (3.5) est naturel, du fait de la présence, dans la base de l'algèbre de symétries quantiques, d'éléments z avec deux longueurs, correspondant aux racines longues et courtes du graphe non-simplement lacé.

Commentaires sur les exemples $SU(3)$. Pour la construction des exemples non-simplement lacés du système $SU(3)$ on ne peut pas utilisr l'information apportée par les exposants de Dynkin des graphes en question, puisque les graphes eux-mêmes ne sont pas à priori connus (certains candidats sont proposés [72][73]). Pour cette raison l'étude du pliage des graphes $SU(2)$ est utilisée pour fournir des constructions analogues dans le système $SU(3)$. Par exemple, on observe est que dans la restriction de la fonction de partition de E_6 qui mène à la fonction de partition de F_4, on a gardé uniquement les caractères associés à des vertex de E_6 qui sont envoyés au vertex "0" du nouveau graphe, lorsqu'on prend le quotient par $\mathbb{Z}_2$.

Pour obtenir une matrice modulaire qui nous serve de point de départ , et qui puisse être associé à un graphe non simplement lacé de $SU(3)$ nous procéderons en ne gardant que les caractères reliès à l'identité lorqu'on effectue le quotient par le groupe discret approprié : le graphe $\mathcal{E}_5$ de la famille $SU(3)$ est un analogue du graphe E_6, nous noterons ainsi le graphe quotient par $\mathcal{F}_5$.

3.2 Étude explicite des graphes non-simplement lacés de $SU(2)$.

Pour les cas $SU(2)$, les graphes non-simplement lacés cherchés sont connues : F_4, G_2, B_n et C_n . Ceci signifie qu'on connaît les propriétés du graphe de Coxeter $\mathcal{G}$ que sera associé à une fonction de partition restreinte.

3.2.1 Le cas F_4.

Le cas F4 a été le premier à être traité parmi les cas non-simplement lacés, le graphe et sa matrice d'adjacence sont montrés dans la Figure 3.1, la norme du graphe est $\beta = \cos(\frac{\pi}{\kappa})$ avec nombre de Coxeter $\kappa = 12$, F_4 a donc même nombre de Coxeter que les graphes A_{11} D_7 et E_6. Les exposants du graphe sont $\{1, 5, 7, 11\}$, ils forment un sous-ensemble des exposants du graphe E_6 qui sont les suivantes $\{1, 4, 5, 7, 8, 11\}$. Le graphe F_4 est obtenu par le pliage $\mathbb{Z}_2$ du graphe E_6, comme est illustré dans la Figure 3.1. L'action du groupe sur les vertex de E_6 est définie par l'automorphisme $\mathbb{Z}_2$ comme suit

$$A(2) = 2 \quad ; \quad A(3) = 3$$

$$A(0) = 4 \quad ; \quad A(4) = 0 \quad ; \quad A(1) = 5 \quad ; \quad A(5) = 1. \tag{3.6}$$

Considérons la fonction de partition invariante modulaire du graphe exceptionnel E_6, $Z_{E_6} = |\chi_0 + \chi_6|^2 + |\chi_3 + \chi_7|^2 + |\chi_4 + \chi_{10}|^2$, la restriction de cette fonction de partition aux caractères étiquetés par les exposants de F_4 est la suivante :

$$Z_{F_4} = |\chi_0 + \chi_6|^2 + |\chi_4 + \chi_{10}|^2 . \tag{3.7}$$

Nous prenons cette nouvelle fonction de partition comme point de départ pour l'étude des symétries quantiques du graphe non simplement lacé correspondant.

Pour étudier ses propriétés modulaires, les fonctions de partition Z_{E_6} et Z_{F_4} sont écrites en termes des trois caractères généralisés $\lambda_1 = \chi_0 + \chi_6$, $\lambda_2 = \chi_3 + \chi_7$ et $\lambda_3 = \chi_4 + \chi_{10}$. L'action de l'opérateur S, dans la représentation de Hurwitz-Verlinde, de dimension 11, peut s'obtenir à partir des matrices de fusion, ou à partir de la table des caractères (quantiques) associés au graphe A_{11}. Cetteaction, qui correspond à la transformation $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\to \tfrac{1}{2}\left(\lambda_1 + i_3\right) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, i_2 \\ \lambda_2 &\to \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_3 - \lambda_1\right) \\ \lambda_3 &\to \tfrac{1}{2}\left(\lambda_1 + i_3\right) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\lambda_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'action de l'opérateur T est diagonale et bien connue. L'invariance de Z_{E_6} sous l'action du groupe modulaire est immédiate à partir des transformations précedantess pour S et T. On peut vérifier que la fonction de partition Z_{F_4} est invariante sous l'action des transformations $T : \tau \to \tau + 1$ et $S^{-1}T^{-2}S : \tau \longrightarrow \frac{\tau}{2\tau+1}$ qui génèrent le sous-groupe de congruence du groupe modulaire $\Gamma_0(2)$.

En écrivant la fonction de partition Z_{F_4} sous la forme (3.1) nous obtenons la matrice modulaire de de dimension 11 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

L'invariance sous l'action de $\Gamma_0(2)$ peut aussi être vérifié en constatant que la matrice (3.9) commute avec les matrices de la représentation de dimension 11 des générateurs de $\Gamma_0(2)$ $S^{-1}T^{-2}S$ et T.

Scission Modulaire Le membre gauche de l'équation (3.1.2) définit une famille de 121 matrices K_{ij} de dimension 11×11, l'espace vectoriel engendré par ces matrices a dimension $r = 20$. La décomposition des matrices K_{ij} sur une base de matrices à entrées entières positives et avec des coefficients entiers positif est la suivante :

- **Norme 1 :** Les matrices $K_{0,0}$, $K_{0,1}$, $K_{0,2}$, $K_{0,9}$, $K_{0,10}$, $K_{1,0}$, $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,9}$, $K_{1,10}$, $K_{2,0}$, $K_{2,1}$ sont de norme carrée égale à 1. Elles définissent 12 matrices toriques comme suit : $W_{0,0} = K_{0,0}$, $W_{1,0} = K_{0,1}$, $W_{2,0} = K_{0,2}$, $W_{4,0} = K_{0,9}$, $W_{5,0} = K_{0,10}$, $W_{6,0} = K_{1,0}$, $W_{7,0} = K_{1,1}$, $W_{8,0} = K_{1,2}$, $W_{10,0} = K_{1,9}$, $W_{11,0} = K_{1,10}$, $W_{12,0} = K_{2,0}$, $W_{13,0} = K_{2,1}$.
  Observation : L'ordre choisie est arbitraire, dans le cas présent il correspond à une présentation des matrices d'adjacence du graphe de symétries quantiques diagonales par blocks. Cette ordre n'est pas connue d'avance.
- **Norme 2 :** Il y a cinq matrices de norme deux : $K_{0,3}$, $K_{1,3}$, $K_{2,2}$, $K_{3,0}$, $K_{3,1}$. Quatre de ces cinq matrices se décomposent comme la somme de deux matrices toriques dont une matrice est déjà connue, et l'autre est une nouvelle matrice torique. Ces nouvelles matrices toriques sont données par les équations suivantes :

$$W_{3,0} = K_{0,3} - W_{4,0} \quad ; \quad W_{9,0} = K_{1,3} - W_{10,0}$$

$$W_{16,0} = K_{3,0} - W_{11,0} \quad ; \quad W_{17,0} = K_{3,1} - W_{10,0}$$

  La cinquième matrice, $K_{2,2}$, se décompose en une matrice torique qui apparaît avec coefficient deux dans l'équation de scission modulaire $\hat{W}_{14,0} = \frac{1}{2}K_{2,2}$.
- **Norme 3 :** Il y a deux matrices de norme carrée égale à trois, ces matrices se décomposent en somme de deux matrices toriques dont une est déjà connue et l'autre est une nouvelle matrice qui apparaît avec coefficient deux. Ces nouvelles matrices toriques sont donnés par les équations suivantes :

$$\hat{W}_{15,0} = \frac{1}{2}\left(K_{2,3} - W_{13,0}\right) \quad ; \quad \hat{W}_{18,0} = \frac{1}{2}\left(K_{3,2} - W_{8,0}\right).$$

- **Norme 5 :** Il y a finalement une matrice de norme carrée égale à cinq $K_{3,3}$, elle définit une matrice torique qui apparaît avec coefficient deux dans la décomposition :

$$\hat{W}_{19,0} = \frac{1}{2}\left(K_{3,3} - W_{7,0} - W_{9,0} - W_{17,0}\right).$$

En établissant de cette manière l'ensemble des 20 matrices toriques, dont 4 matrices de multiplicité deux identifiées par la notation $\hat{W}_{x,0}$, nous obtenons leurs expressions formelles :

$$W_{0\ ,0} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad W_{5\ ,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{7\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 2 & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}
\qquad
W_{10,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 2 & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

$$\hat{W}_{14,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}
\qquad
\hat{W}_{19,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

$$W_{1\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & .
\end{pmatrix}
\qquad
W_{2\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & .
\end{pmatrix}$$

$$W_{3\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & .
\end{pmatrix}
\qquad
W_{4\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & .
\end{pmatrix}$$

$$W_{8\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 2 & . & 2 & . & 2 & . & 2 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}
\qquad
W_{9\ ,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 2 & . & . & . & 2 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

$$\hat{W}_{15,0} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix},$$

plus les identifications suivantes

$$W_{6,0} = (W_{1,0})^T; \quad W_{12,0} = (W_{2,0})^T; \quad W_{16,0} = (W_{3,0})^T; \quad W_{11,0} = (W_{4,0})^T$$
$$W_{13,0} = (W_{8,0})^T \quad W_{17,0} = (W_{9,0})^T \quad \hat{W}_{18,0} = (\hat{W}_{15,0})^T.$$

La notation $\hat{W}_{x,0}$ identifie les matrices toriques apparaissant avec coefficient 2 dans l'expansion des $K_{i\,j}$. Les matrices $W_{0,0}, W_{5,0}, W_{7,0}, W_{10,0}, \hat{W}_{14,0}, \hat{W}_{19,0}$ sont symétriques (auto-duale), parmi elles il y a deux matrices, $W_{0,0}$ et $W_{5,0}$, correspondant aux vertex ambichiraux de l'algèbre de symétries quantiques.

Le graphe d'Ocneanu et l'algèbre de symétries quantiques.

Le fait qu'il y ait quatre matrices toriques avec un coefficient n_z égal à deux implique que il y a deux candidats pour l'algèbre de symétries quantiques, comme on l'a déjà expliqué dans les section 3.1.

S1. <u>Première solution</u>[2] : Nous postulons la relation $W_{0,z} = n_z W_{z,0}$, on peut alors oublier la distinction $\hat{W}$ et écrire l'ensemble complet des matrices toriques :

$$W_{z,0} = n_z W_{0,z} \text{ avec } \begin{cases} n_z = 1 \text{ pour } z = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,16,17\} \\ n_z = 2 \text{ pour } z = \{14,15,19,18\} \end{cases}$$

La dimension de l'algèbre de symétries quantiques est $d_O = 20$, la solution de l'équation (2.10) pour la paire d'index $(\,i,\,j)$ fixes à $(1,0)$ et $(0,1)$ donne les deux générateurs chiraux V_{10} et V_{01}, qui, dans l'ordre que nous avons choisi pour les matrices toriques, ont la forme suivante :

$$V_{10} = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 2 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 2 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & .
\end{pmatrix}$$

[2]Cette solution est décrite en détail dans l'article publié : [25]

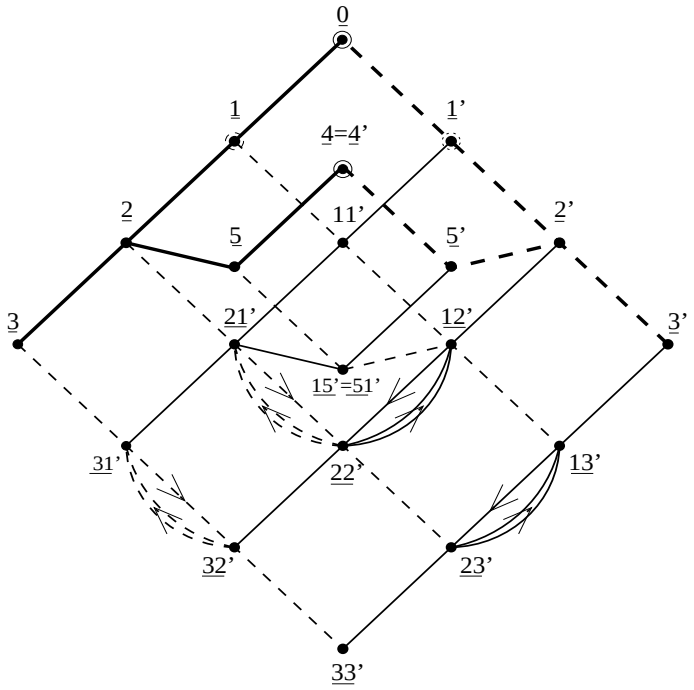


FIG. 3.2 – Graphe d'Ocneanu de F_4 (solution non-simplement lacé)

$$V_{01} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont les matrices d'adjacence du graphe $Oc(F_4)$, à partir de la structure de la matrice V_{10} nous identifions facilement quatre blocs, deux blocs correspondants à des sous-graphes de type E_6, et deux blocs correspondants à des sous-graphes de type F_4.

Le graphe de symétries quantiques est illustré Figure3.2, il est formé par l'union de deux graphes chiraux (un en bleu et un en rouge) ayant le même ensemble de vertex. Chaque graphe chiral est composé par l'union de quatre sous-graphes disjoints : deux graphes de type E_6 (notés E et e), et deux graphes de type F_4 (notés F et f), chaque graphe chiral est obtenu à partir de l'autre en effectuant une symétrie autour de l'axe vertical formé par les vertex ambi-chiraux.

Les vertex du graphe d'Ocneanu sont les élément de la base de l'algèbre de symétries quantiques, cette algèbre est générée par deux générateurs dénotés par $\underline{1}$ et $\underline{1}'$. La partie chirale gauche (en bleue) est le graphe de Cayley de la multiplication des éléments de $Oc(F_4)$ par le générateur $\underline{1}$ (correspondant à la matrice V_{10}). La partie chirale droite (en rouge) est le graphe de Cayley de la multiplication par le générateur $\underline{1}'$ (correspondant à la matrice V_{01}). Pour chaque graphe chiral le premier sous graphe (de type E_6) est une sous-algèbre de graphe appelé la **sous algèbre chirale**. La sous algèbre chirale gauche est engendrée par les vertex $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{5}, \underline{4}, \underline{3}\}$ et est générée par $\underline{1}$. La sous algèbre chirale droite est engendrée par les vertex $\{\underline{0}, \underline{1}', \underline{2}', \underline{5}', \underline{4}', \underline{3}'\}$ et est générée par $\underline{1}'$.

Considerons le graphe chiral gauche. Le deuxième sous graphe de type E_6 (noté e) est engendré par les vertex $\{\underline{1}', \underline{11}', \underline{21}', \underline{51}', \underline{5}', \underline{31}'\}$, il constitue un module sur la sous algèbre chirale gauche E. Les troisième et quatrième sous graphes, notés F et f, sont engendrés par les ensembles de vertex $\{\underline{32}', \underline{22}', \underline{12}', \underline{2}'\}$ et $\{\underline{33}', \underline{23}', \underline{13}', \underline{3}'\}$ respectivement, ces sous-graphes sont aussi des modules de type F_4 sur la sous algèbre chirale gauche.

Grâce à la symétrie présente entre la partie chirale gauche et droite, nous savons que la structure est identique pour le graphe chiral droit.

L'algèbre de symétries quantiques est donnée par $Oc(F_4) = E_6 \otimes_J E_6$, où $\otimes_J$ est le produit tensoriel pris sur la sous-algèbre $J = gen\{\underline{0}, \underline{4}\}$. Les vertex du graphe d'Ocneanu sont étiquettés comme $x = \underline{a}b' = a \otimes_J b$. Le produit tensoriel $\otimes_J$ comprend les identifications suivantes $a * u \otimes_J b = a \otimes_J u * b$ pour tout $u \in J$. Alors les vingt éléments de la base de $Oc(F_4)$ sont :

$$\underline{0} = \underline{0} \otimes_J 0 = \underline{4} \otimes_J \underline{4} = \underline{0}$$

$$\underline{1} \otimes_J \underline{0} = \underline{5} \otimes_J \underline{4} = \underline{1} \qquad \underline{0} \otimes_J \underline{1} = \underline{4} \otimes_J \underline{5} = \underline{1}'$$

$$\underline{2} \otimes_J \underline{0} = \underline{2} \otimes_J \underline{4} = \underline{2} \qquad \underline{0} \otimes_J \underline{2} = \underline{4} \otimes_J \underline{2} = \underline{2}'$$

$$\underline{3} \otimes_J \underline{0} = \underline{3} \otimes_J \underline{4} = \underline{3} \qquad \underline{0} \otimes_J \underline{3} = \underline{4} \otimes_J \underline{3} = \underline{3}'$$

$$\underline{5} \otimes_J \underline{0} = \underline{1} \otimes_J \underline{4} = \underline{5} \qquad \underline{0} \otimes_J \underline{5} = \underline{4} \otimes_J \underline{1} = \underline{5}'$$

$$\underline{4} \otimes_J \underline{0} = \underline{0} \otimes_J \underline{4} = \underline{4}$$

$$\underline{1} \otimes_J \underline{1} = \underline{5} \otimes_J \underline{5} = \underline{11}'$$

$$\underline{5} \otimes_J \underline{1} = \underline{1} \otimes_J \underline{5} = \underline{15}'$$

$$\underline{2} \otimes_J \underline{1} = \underline{2} \otimes_J \underline{5} = \underline{21}' \qquad \underline{1} \otimes_J \underline{2} = \underline{5} \otimes_J \underline{2} = \underline{12}'$$

$$\underline{2} \otimes_J \underline{2} = \underline{22}'$$

$$\underline{3} \otimes_J \underline{1} = \underline{3} \otimes_J \underline{5} = \underline{31}' \qquad \underline{1} \otimes_J \underline{3} = \underline{5} \otimes_J \underline{3} = \underline{13}'$$

$$\underline{3} \otimes_J \underline{2} = \underline{32}' \qquad \underline{2} \otimes_J \underline{3} = \underline{23}'$$

$$\underline{3} \otimes_J \underline{3} = \underline{33}'$$

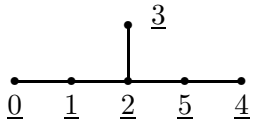
où la représentation graphique de la table précédante permet d'identifier les vertex gauches, droites et ambichiraux.

Le produit obtenu dans $Oc(F_4)$ peut s'écrire comme $(a \otimes_J b)(c \otimes_J b) = ac \otimes_J bd$ où ab est le produit de l'algèbre de graphe E_6 (voir table 3.3), la table de multiplication par blocs de

l'algèbre de symétries quantiques est illustrée ci-dessous :

$\times$	E	e	F	f
E	E	e	F	f
e	e	$E+F$	$e+f$	F
F	F	$e+f$	$E+F$	e
f	f	F	e	E

où chaque bloc E, e, F ou f permet d'indiquer la table de multiplication de l'action de E_6 sur chaque sous graphe.



$\longleftrightarrow$

$*$	$\underline{0}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{5}$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{5}$
$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{0}+\underline{4}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{1}+\underline{5}$	$\underline{2}$
$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$\underline{5}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{5}$	$\underline{0}+\underline{2}$	$\underline{1}+\underline{3}+\underline{5}$	$\underline{2}+\underline{4}$
$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{1}+\underline{5}$	$\underline{2}$	$\underline{1}+\underline{3}+\underline{5}$	$\underline{0}+\underline{2}+\underline{2}+\underline{4}$	$\underline{1}+\underline{3}+\underline{5}$
$\underline{5}$	$\underline{5}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}+\underline{4}$	$\underline{1}+\underline{3}+\underline{5}$	$\underline{0}+\underline{2}$

FIG. 3.3 – Table de multiplication de E_6

Une représentation matricielle de dimension 20×20 de l'algèbre de symétries quantiques est donnée par les matrices O_x. Ces matrices sont les constantes de structure de l'algèbre (voir [25]) et elles peuvent être calculées à partir des relations de récurrence du graphe $Oc(F_4)$ comme suit :

$$
\begin{array}{|l|l|l|l|}
O_0 = \mathbb{I}_{11} & O_{\underline{1'}} = V_{01} & & \\
O_1 = V_{10} & O_{\underline{11'}} = O_{\underline{1}} \cdot O_{\underline{1}} & O_{\underline{2'}} = O_{\underline{1'}}^2 - O_{\underline{0}} & O_{\underline{3'}} = O_{\underline{2'}}.O_{\underline{1'}} - O_{\underline{1'}} - O_{\underline{5'}} \\
O_{\underline{2}} = O_{\underline{1}}^2 - O_{\underline{0}} & O_{\underline{21'}} = O_{\underline{2}} \cdot O_{\underline{1'}} & O_{\underline{12'}} = O_{\underline{2'}} \cdot O_{\underline{1}} & O_{\underline{13'}} = O_{\underline{3'}} \cdot O_{\underline{1}} \\
O_{\underline{4}} = O_{\underline{1}}^4 - 4O_{\underline{1}}^2 + 2O_{\underline{0}} & O_{\underline{31'}} = O_{\underline{3}} \cdot O_{\underline{1'}} & O_{\underline{22'}} = O_{\underline{12'}} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{2'}} & O_{\underline{23'}} = O_{\underline{13'}} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{3'}} \\
O_{\underline{5}} = O_{\underline{1}} \cdot O_{\underline{4}} & O_{\underline{15'}} = O_{\underline{5}} \cdot O_{\underline{1'}} & O_{\underline{32'}} = O_{\underline{22'}} \cdot O_{\underline{1}} - 2O_{\underline{12'}} & O_{\underline{33'}} = O_{\underline{23'}} \cdot O_{\underline{1}} - 2O_{\underline{13'}} \\
O_{\underline{3}} = O_{\underline{2}}.O_{\underline{1}} - O_{\underline{5}} - O_{\underline{1}} & O_{\underline{5'}} = O_{\underline{5}} \cdot O_{\underline{1'}} & & \\
\end{array}
$$

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions. Le graphe non-simplement lacé F_4 apparaît explicitement comme sous graphe du graphe de symétries quantiques que nous venons de présenter. Nous avons en effet deux graphes de type F_4 qui apparaissent formulés comme sous-graphes du graphe d'Ocneanu, ils sont des modules sous l'action du graphe principal A_{11} et ils sont des modules sous l'action de E_6 comme nous pouvons le voir dans la table de multiplication.

L'action de A_{11} sur F_4 est donnée par les matrices F_i, définies par les relations de récurrence du graphe A_{11} avec générateur $F_1 = Ad(F_4)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_4$. Nous obtenons ainsi l'ensemble de 11 matrices suivantes

$$\begin{array}{ccc} F_0 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} & F_1 = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix} & F_2 = \begin{pmatrix} . & . & 2 & . \\ . & 2 & . & 2 \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 1 & . & . \end{pmatrix} \\ F_3 = \begin{pmatrix} . & 1 & . & 2 \\ 1 & . & 4 & . \\ . & 2 & . & 1 \\ 1 & . & 1 & . \end{pmatrix} & F_4 = \begin{pmatrix} 1 & . & 2 & . \\ . & 3 & . & 2 \\ 1 & . & 3 & . \\ . & 1 & . & 1 \end{pmatrix} & F_5 = \begin{pmatrix} . & 2 & . & . \\ 2 & . & 4 & . \\ . & 2 & . & 2 \\ . & . & 2 & . \end{pmatrix}, \end{array} \tag{3.10}$$

plus les identifications $F_i = F_{10-i}$ pour $i = 6, \ldots, 10$.

F_4 est aussi un module sur le graphe $Oc(F_4)$, l'action sur F_4 est codée par les matrices S_x. Ce sont des matrices de dimension 4×4 formant une représentation de dimension 4 de l'algèbre de symétries quantiques. Les matrices S_x peuvent être calculées par deux méthodes différentes : une première méthode considère le fait que les matrices S_x forment une représentation de l'algèbre de symétries quantiques, elles pouvent alors être calculées en utilisant les relations de récurrence des matrices O_x, avec les générateurs chiraux $S_{\underline{1}} = S_{\underline{1'}} = Ad(F_4)$.

La deuxième méthode considère la réalisation de $Oc(F_4)$ comme produit de algèbres E_6, plus le fait que le sous graphe f est un module sur la sous-algèbre E_6. L'action de E sur le sous graphe f est codée par les six matrices :

$$s_0^f = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad s_1^f = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad s_2^f = \begin{pmatrix} . & . & 2 & . \\ . & 2 & . & 2 \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 1 & . & . \end{pmatrix} \quad s_3^f = \begin{pmatrix} . & . & . & 2 \\ . & . & 2 & . \\ . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

avec les identifications $s_4^f = s_1^f$, $s_5^f = s_0^f$. L'action d'un élément $x = a \otimes_J b$ sur un élément du graphe f est codé par les matrices $S_x = s_a s_b$ où $x = a \otimes_J b$. La liste de matrices donnant l'action de $Oc(F_4)$ sur F_4 se présente comme suit :

$$\begin{array}{ccc} S_{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} & S_{\underline{1}} = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix} & S_{\underline{2}} = \begin{pmatrix} . & . & 2 & . \\ . & 2 & . & 2 \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 1 & . & . \end{pmatrix} \\ S_{\underline{3}} = \begin{pmatrix} . & . & . & 2 \\ . & . & 2 & . \\ . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix} & S_{\underline{11'}} = \begin{pmatrix} 1 & . & 2 & . \\ . & 3 & . & 2 \\ 1 & . & 3 & . \\ . & 1 & . & 1 \end{pmatrix} & S_{\underline{21'}} = \begin{pmatrix} . & 2 & . & 2 \\ 2 & . & 6 & . \\ . & 3 & . & 2 \\ 1 & . & 2 & . \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.11}$$

plus les identifications :

$$\begin{array}{lcl} S_{\underline{4}} = \frac{1}{2} S_{\underline{33'}} = S_{\underline{0}} & ; & S_{\underline{5}} = S_{\underline{1'}} = S_{\underline{5'}} = \frac{1}{2} S_{\underline{32'}} = \frac{1}{2} S_{\underline{23'}} = S_{\underline{1}} \\ S_{\underline{31'}} = S_{\underline{2'}} = S_{\underline{13'}} = S_{\underline{2}} & ; & S_{\underline{3'}} = S_{\underline{3}} \\ S_{\underline{15'}} = \frac{1}{2} S_{\underline{22'}} = S_{\underline{11'}} & ; & S_{\underline{12'}} = S_{\underline{21'}}. \end{array} \tag{3.12}$$

Règle de somme quadratique. La liste de dimensions des blocs simples des algèbres A_{11} et $Oc(F_4)$ est :

$$d_i = \{4, 7, 10, 13, 14, 14, 14, 13, 10, 7, 4\},$$

$$d_x = \{4, 7, 10, 6, 7, 4, 7, 14, 20, 10, 14, 7, 10, 20, 28, 14, 6, 10, 14, 8\}.$$

La somme des dimensions des blocs de type A_{11} donne comme résultat $\sum_{i \in A_{11}} d_i^2 = 1256$. Cette somme vaut la moitié des dimension du même type pour le graphe E_6, ce qui est attendue puisque F_2 est un pliage $\mathbb{Z}_2$ du graphe E_6. La relation entre la somme des dimensions carrées s'écrit donc :

$$\sum_{x \in Oc(F_4)} \frac{1}{n_x} d_x^2 = 2 \times \sum_{i \in A_{11}} d_i^2 = 2512$$

où le facteur est $n_x = 2$ pour $x = \{\underline{22'}, \underline{32'}, \underline{23'}, \underline{33'}\}$, et $n_x = 1$ pour tous les autres points de $Oc(F_4)$. Le facteur global 2 est dûe au fait que F_4 est un $\mathbb{Z}_2$ pliage du graphe E_6, en correspondance avec l'étude générale des cas $SU(2)$ présentée dans líntroduction.

Plus de détails sur les méthodes de calculs, et les différentes structures de cette solution des symétries quantiques peuvent être regardées dans l'article original de la solution du cas F_4 [25].

S2. Deuxième solution : Nous admettons la relation $W_{z,0} = W_{0,z}$ avec multiplicités. Considérons maintenant une solution à l'équation de *scission modulaire* pour laquelle les matrices toriques satisfont la relation (2.14), mais ces matrices apparaissent avec multiplicité deux pour certains vertex. La conjugaison dans $SU(2)$ est triviale dû au fait que la relation (2.14) est simplement $W_{z,0} = W_{0,z}$ pour $z =\in Oc(F_4)$. Les matrices toriques différentes sont les mêmes que nous avons déjà calculée, elles définissent un ensemble de 20 matrices toriques auquelles nous rajoutons aussi les identifications determinées par la valeur de la multiplicité n_4, ainsi :

$$W_{14\epsilon,0} = W_{14,0} = \hat{W}_{14,0} \quad W_{15\epsilon,0} = W_{15,0} = \hat{W}_{15,0},$$

$$W_{18\epsilon,0} = W_{18,0} = \hat{W}_{18,0} \quad W_{19\epsilon,0} = W_{19,0} = \hat{W}_{19,0}.$$

La dimension de l'algèbre de symétries quantiques est $d_O = 24$, les générateurs chiraux V_{10} et V_{01} (en choisissant un ordre approprié pour les vertex z) ont la forme explicite, écrite ci-dessous :

$$V_{10} = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & .
\end{pmatrix}$$

$$V_{01} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

Les deux matrices que nous venons de présenter sont les matrices d'adjacence des parties chirales gauche et droite du graphe $Oc(F_4)$, la structure de V_{10} montre clairement quatre blocs correspondants à des matrices d'adjacence des sous-graphes E_6. Le graphe de symétries quantiques est un graphe bipartite avec deux générateurs chiraux $\underline{1}$ et $\underline{1}'$ associés aux matrices V_{10} et V_{01} respectivement. Chaque partie chirale est formée par quatre graphes E_6, le premier étant une sous algèbre de graphe E_6 et les trois autres étant des modules sous l'action de la sous-algèbre E_6. Nous notons chacun de ces sous-graphes comme suit : E pour le graphe sous-algèbre, et e^1, e^2 et e^3 pour chacun des graphes modules. Le graphe de symétries quantiques est illustré Figure 3.4, avec le graphe chiral gauche indiqué par les lignes bleues, et le graphe chiral droite indiqué par les lignes rouges. La notation correspond à la même notation utilisée pour la solution non-simplement lacée $z = a \dot{\otimes} b = \underline{ab}'$ avec z un index du graphe d'Ocneanu courant entre 1 et 20, et a et b des vertex du graphe E_6. A ces vingt vertex nous rajoutons les quatre vertex dégénérés :

$$13\epsilon = 0 \dot{\otimes} 2\epsilon = \underline{2}'\epsilon \quad , \quad 14\epsilon = 1 \dot{\otimes} 2\epsilon = \underline{12}'\epsilon$$

$$18\epsilon = 0 \dot{\otimes} 3\epsilon = \underline{3}'\epsilon \quad , \quad 19\epsilon = 1 \dot{\otimes} 3\epsilon = \underline{13}'\epsilon$$

La partie chirale gauche est le graphe de Cayley de la multiplication des éléments de $Oc(F_4)$ par le générateur $\underline{1}$ (correspondant à la matrice V_{10}). Les quatre sous graphes sont donnés par les ensembles des vertex : $E = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{5}, \underline{4}\}$, $e^1 = \{\underline{1}', \underline{11}', \underline{21}', \underline{31}', \underline{51}', \underline{41}'\}$, $e^2 = \{\underline{32}', \underline{22}', \underline{12}', \underline{2}', \underline{22\epsilon}', \underline{32\epsilon}'\}$, $e^3 = \{\underline{33}', \underline{23}', \underline{13}', \underline{3}', \underline{23\epsilon}', \underline{33\epsilon}'\}$.

Les deux graphes modules e^2 et e^3 sont spéciaux pour deux raisons. D'abord les deux branches (identiques par $\mathbb{Z}_2$) sont non-distinguables puisqu'elles sont étiquetés par les vertex dégénérés : $\underline{22}', \underline{22}'\epsilon$, $\underline{32}', \underline{32}'\epsilon$, $\underline{23}', \underline{23}'\epsilon$ et $\underline{33}', \underline{33}'\epsilon$ (voir Fig.3.4). Cette caractéristique implique la nécessité de fixer un troisième générateur ($\underline{22}$ par exemple) pour pouvoir séparer les deux branches, et résoudre les relations de récurence de l'algèbre de symétries quantiques. La deuxième observation importante est que les deux graphes modules e^2 et e^3 sont inversés par rapport aux graphes E et e^1, cette inversion est implémenté par la transformaation P que l'on défini dans les equations 3.13 et la Figure 3.5.

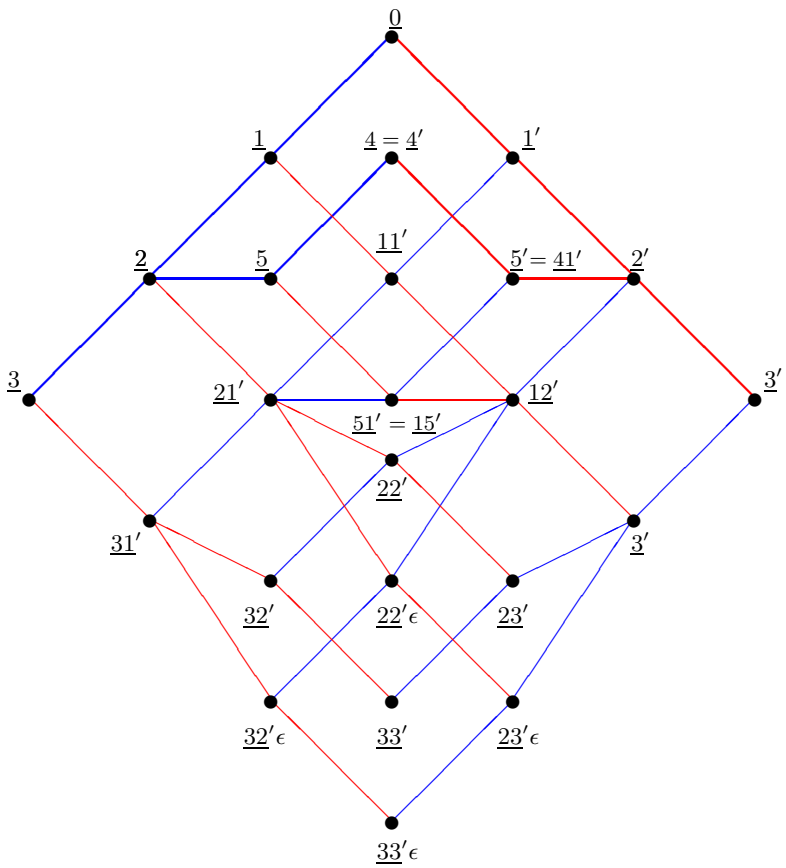


FIG. 3.4 – Graphe d'Ocneanu de F_4 (solution simplement lacé)

La partie chirale droite (en rouge) est le graphe de Cayley de la multiplication par le

générateur $\underline{1}'$ (correspondant à la matrice V_{01}). Le graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical définit par les huit vertex ambichiraux : $\{\underline{0}, \underline{4}, \underline{11}', \underline{51}', \underline{22}', \underline{22\epsilon}', \underline{33}', \underline{33\epsilon}'\}$. Dû à cette symétrie, les propriétés du côté chiral droit sont équivalentes à celles que nous vennons de décrire pour le côté gauche.

Les générateurs V_{10} et V_{01}, et les équations (2.17), (2.18), (2.19) permettant de calculer automatiquement l'ensemble de matrices de double fusion $V_{i\,j}$. Les matrices toriques it twistées W_{xy} sont données par la relation $(V_{i\,j})_{xy} = (W_{xy})_{i\,j}$.

La table de multiplication de l'algèbre de symétries quantiques a la structure suivante :

$\times$	E	e_1	e_2	e_3
E	E	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$E + P(e_2)$	$e_3 + P(e_1)$	$A(e_2)$
e_2	e_2	$e_3 + P(e_1)$	$E + P(e_2)$	$A(e_1)$
e_3	e_3	$A(e_2)$	$A(e_1)$	E

où chaque bloc E ou e_i est une table de multiplication 6×6 de type E_6 (voir table (3.3)) sur les vertex du graphe module correspondant. L'application A est l'automorphisme $\mathbb{Z}_2$ du graphe E_6 dans le sous-graphe correspondant, qui agit comme nous le signalons dans la Figure 3.1 et dans les equations 3.2.1.

L'application P est la transformation qui renverse le graphe E_6 autour d'un axe horizontal comme nous l'illustrons Figure 3.5. Cette transformattion a comme conséquence l'inversion des sous-graphes e_2 et e_3 par rapport aux sous graphes E et e_1 que nous avons déjà remarqué.

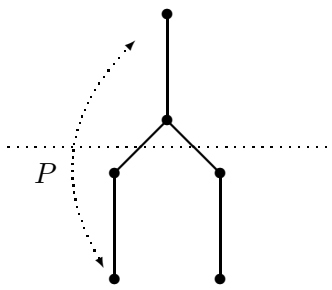


FIG. 3.5 – Action de la transformation P sur le graphe E_6.

Explicitement l'action de P sur les vertex des sous-graphes modules est donnée par :

$$
\begin{array}{lll}
e_1 : & e_2 : & e_3 : \\
P(\underline{1}') = P(\underline{5}') = \underline{31}' & P(\underline{32}') = P(\underline{32\epsilon}') = \underline{2}' & P(\underline{33}') = P(\underline{33\epsilon}') = \underline{3}' \\
P(\underline{11}') = P(\underline{51}') = \underline{21}' & P(\underline{22}') = P(\underline{22\epsilon}') = \underline{12}' & P(\underline{23}') = P(\underline{23\epsilon}') = \underline{13}' \\
P(\underline{31}') = \underline{1}' + \underline{5}' & P(\underline{2}') = \underline{32}' + \underline{32\epsilon}' & P(\underline{3}') = \underline{33}' + \underline{33\epsilon}' \\
P(\underline{21}') = \underline{21}' + \underline{51}' & P(\underline{12}') = \underline{22}' + \underline{22\epsilon}' & P(\underline{13}') = \underline{23}' + \underline{23\epsilon}'.
\end{array}
\tag{3.13}
$$

Une représentation matricielle de dimension 24×24 de l'algèbre de symétries quantiques est donnée par les matrices O_x. Ces matrices sont calculées à partir des relations de récurrence fournies par le graphe $Oc(F_4)$, en se servant des générateurs $O_{\underline{1}} = V_{10}$ et $O'_{\underline{1}} = V_{01}$. La non-discernabilité des vertex dégénérés des graphes e_2 et e_3 demande l'introduction d'un troisième générateur qui sépare les deux branches du graphe, ce générateur $O_{\underline{22}'}$ est calculé à partir de la relation (4), **Proprieté 5** (Chapitre I) qui donne le système d'équations :

$$
W_{\underline{22}',y} = \sum_{z \in Oc(F_4)} \left(O_{\underline{22}'}\right)_{z,y} W_{z,\underline{0}} \quad \text{for} \quad y \in Oc(F_4).
$$

Ce système de 24 équations (et 24^2 inconnues) doit obéir aux conditions suivantes : a)positivité et intégralité des entrées des matrices, b) l'invariance sous l'action de l'opérateur chiral C qui envoie le graphe chiral droit sur le graphe chiral gauche ($V_{10}C \cdot V_{01} \cdot C^{-1}$ avec $C^2 = 1$), sont suffisantes pour déterminer le nouveau générateur

$$
O_{\underline{22}'} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & 2 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 2 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}.
$$

Les relations de récurrence permettant de déterminer les constants de structure de l'algèbre

$Oc(F_4)$ sont définies dans les expressions suivantes :

$O_0 = \mathbb{I}_{11}$	$O_{\underline{1}'} = V_{01}$		$O_{\underline{3}'} = O_{\underline{2}'}.O_{\underline{1}'} - O_{\underline{1}'} - O_{\underline{5}'}$
$O_1 = V_{10}$	$O_{\underline{11}'} = O_{\underline{1}} \cdot O_{\underline{1}}$	$O_{\underline{2}'} = O_{\underline{1}'}^2 - O_{\underline{0}}$	$O_{\underline{13}'} = O_{\underline{12}'} \cdot O_{\underline{1}'} - O_{\underline{11}'}$
$O_{\underline{2}} = O_{\underline{1}}^2 - O_{\underline{0}}$	$O_{\underline{21}'} = O_{\underline{2}} \cdot O_{\underline{1}'}$	$O_{\underline{12}'} = O_{\underline{2}'} \cdot O_{\underline{1}}$	$O_{\underline{23}'} = \mathbf{O}_{\underline{22}'} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{21}'}$
$O_{\underline{4}} = O_{\underline{1}}^4 - 4O_{\underline{1}}^2 + 2O_{\underline{0}}$	$O_{\underline{31}'} = O_{\underline{3}} \cdot O_{\underline{1}'}$	$O_{\underline{22\epsilon}'} = O_{\underline{12}'} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{2}'} - \mathbf{O}_{\underline{22}'}$	$O_{\underline{23\epsilon}'} = O_{\underline{22\epsilon}'} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{21}'}$
$O_{\underline{5}} = O_{\underline{1}} \cdot O_{\underline{4}}$	$O_{\underline{15}'} = O_{\underline{5}} \cdot O_{\underline{1}'}$	$O_{\underline{32}'} = \mathbf{O}_{\underline{22}'} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{12}'}$	$O_{\underline{33}'} = O_{\underline{32}'} \cdot O_{\underline{1}'} - O_{\underline{31}'}$
$O_{\underline{3}} = O_{\underline{2}}.O_{\underline{1}} - O_{\underline{5}} - O_{\underline{1}}$	$O_{\underline{5}'} = O_{\underline{5}} \cdot O_{\underline{1}'}$	$O_{\underline{32\epsilon}'} = O_{\underline{22\epsilon}'} \cdot O_{\underline{1}} - O_{\underline{12}'}$	$O_{\underline{33\epsilon}'} = O_{\underline{32\epsilon}'} \cdot O_{\underline{1}'} - O_{\underline{31}'}$

où nous avons marqué en noir les équations où participe le générateur $O_{\underline{22}'}$.

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions. Dans cette réalisation des symétries quantiques associées à la fonction de partition Z_{F_4} le graphe non-simplement lacé F_4 n'apparaît pas explicitement comme sous graphe du graphe des symétries quantiques. Le graphe de Dynkin est associé à la famille de graphes de norme $2cos(\frac{\pi}{12})$ parce qu'il est un module sur les graphes A_{11}, E_6 et le graphe de symétries quantiques $Oc(F_4)$ de la Figure 3.4.

L'action de A_{11} sur F_4 est implémentée par les matrices F_i. Ce sont des matrices de dimension 3 définies par les relations de récurrence du graphe A_{11} avec générateur $F_1 = Ad(F_4)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_4$. On obtient l'ensemble de 11 matrices présentés dans l'équation 3.10.

L'action de $Oc(F_4)$ sur F_4 est codée par les matrices S_x, ce sont des matrices de dimension 4×4 formant une représentation de dimension 4 de l'algèbre de symétries quantiques. Elles peuvent être calculés en utilisant les relation de récurrence des matrices O_x, avec les générateur chiraux donnés les matrices $S_{\underline{1}} = S_{\underline{1}'} = Ad(F_4)$ plus le générateur extra pour départager les branches non-discernables des graphes e_2 et e_3 qui est donné par la matrice

$$S_{\underline{22}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice S_{14} est calculée en se servant de la relation (qu'on peut trouver à partir du graphe)

$$\underline{1}'^2\, \underline{22}'^2 - \underline{1}'^2\, \underline{1} - \underline{1}'^2 - \underline{22}' = 0.$$

La liste de matrices donnant l'action de $Oc(F_4)$ sur F_4 est la même que celle qui a été montré pour la réalisation non-simplement lacé de l'algèbre de symétries quantiques equation 3.11. Dans le cas présent la multiplicité prends en compte les facteurs $\frac{1}{2}$, et les identifications devienent :

$$\mathbf{S}_{\underline{33\epsilon}'} = S_{\underline{33}'} = S_{\underline{4}} = S_{\underline{0}} \quad ; \quad \mathbf{S}_{\underline{23\epsilon}'} = S_{\underline{23}'} = \mathbf{S}_{\underline{32\epsilon}'} = S_{\underline{32}'} = S_{\underline{5}'} = S_{\underline{5}} = S_{\underline{1}'} = S_{\underline{1}};$$

$$S_{\underline{31}'} = S_{\underline{2}'} = S_{\underline{13}'} = S_{\underline{2}} \quad ; \quad S_{\underline{3}'} = S_{\underline{3}};$$

$$S_{\underline{15}'} = S_{\underline{22}'} = \mathbf{S}_{\underline{22\epsilon}'} = S_{\underline{11}'} \quad ; \quad S_{\underline{12}'} = S_{\underline{21}'};$$

où les matrices qui apparaisent à cause de la multiplicité sont marquées en noir.

Règle de somme quadratique. La liste de dimensions des blocs simples des algèbres A_{11} et $Oc(F_4)$ sont las suivantes

$$d_i = \{4, 7, 10, 13, 14, 14, 14, 13, 10, 7, 4\},$$

$$d_x = \{4, 7, 10, 7, 4, 6, 7, 14, 20, 14, 7, 10, 7, 14, 20, 14, 7, 10, 4, 7, 10, 7,\ 4, 6\}.$$

La somme des dimensions des blocs de type A_{11} donne comme résultat $\sum_{i\in A_{11}} d_i^2 = 1256$. On observe que cette valeur est la moitié de la dimension du même type pour le graphe E_6, ce qui est attendu, puisque F_2 est un pliage $\mathbb{Z}_2$ du graphe E_6. La relation entre la somme des dimensions carrés n'a plus les facteurs $\frac{1}{2}$ qui apparaisaient, pour la première solution analysée dans les termes correspondant des vertex dégénérés

$$\sum_{x\in Oc(F_4)} d_x^2 = 2 \times \sum_{i\in A_{11}} d_i^2 = 2512.$$

On note que la valeur de la somme est la même que dans la réalisation non simplement lacée, le facteur global 2 est toujours du au fait que F_4 est un $\mathbb{Z}_2$ *pliage* du graphe E_6.

3.2.2 Le cas B_3.

Le cas B_3 est le plus petit des graphes non-simplement lacés du systéme $SU(2)$. La norme du graphe est $\beta = 2cos(\frac{\pi}{\kappa})$ avec $\kappa = 6$, B_3 est associé aux graphes A_5 et D_4. Les exposants du graphe sont $\{1, 3, 5\}$, ils sont un sous-ensemble des exposants du graphe A_5 qui sont les suivantes : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Le graphe B_3 est obtenu par un pliage $\mathbb{Z}_2$ de A_5 comme illustré dans la Figure 3.1. L'action de $\mathbb{Z}_2$ sur les vertex de A_5 est

$$A(0) = 4 \quad ; \quad A(1) = 3 \quad ; \quad A(2) = 2.$$

Considèrons la fonction de partition invariante modulaire associée au graphe A_5.

$$Z_{A_5} = |\chi_0|^2 + |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_3|^2 + |\chi_4|^2 . \tag{3.14}$$

La restriction de cette fonction de partition aux caractères étiquetés par les exposants de B_3 est

$$Z_{B_3} = |\chi_0|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_4|^2 . \tag{3.15}$$

Cette nouvelle fonction de partition est le point de départ pour l'etude des symétries quantiques d'un nouveau cas non-ADE. La nouvelle fonction de partition $\mathbb{Z}_{F_4}$ peut s'écrire comme dans l'équation 3.1 en se servant de la matrice modulaire :

$$M_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.16}$$

Les proprietés modulaires de la nouvelle fonction de partition pouvent être déterminées facilement en utilisant la représentation 5×5 des générateurs du groupe modulaire S et T

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\mathbf{i}\pi}{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{\mathbf{I}\pi}{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\mathbf{i}\pi}{6}} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

A partir de ces expressions, on vérifie les relations de commutation

$$\left[S^{-1}T^{-2}S, M\right] = 0 \quad \text{et} \quad [T, M] = 0,$$

qui implique que Z_{B_3} est invariante sous l'action du sous-groupe de congruence $\Gamma_0(2)$.

Scission Modulaire. Le membre gauche de l'équation (3.1.2) donne une famille de 25 matrices K_{ij} de dimension 5×5, l'espace vectoriel engendré par ces matrices a dimension $r = 9$. La décomposition des matrices K_{jk} sur une base de matrices toriques satisfaisant l'équation de scission modulaire est comme suit :

- **Norme 1** : Les matrices $K_{0,0}, K_{0,1}, K_{0,1}, K_{0,3}, K_{0,4}, K_{1,0}, K_{1,4}$ sont de norme carré 1, elles déffinisent les 7 matrices toriques : $W_{0,0} = K_{0,0}, W_{1,0} = K_{0,1}, W_{2,0} = K_{0,1}, W_{3,0} = K_{0,3}, W_{4,0} = K_{0,4}, W_{8,0} = K_{1,0}, W_{6,0} = K_{1,4}$
- **Norme 2** : Il y a quatre matrices de norme carre égal à deux : $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$ et $K_{2,2}$, elles se décomposent chacune en une somme de deux matrices toriques. Les matrices $K_{1,2}$ et $K_{2,2}$ ne sont pas l.i. et se décomposent comme la somme de deux matrices déjà connues

  $$K_{1,2} = W_{6,0} + W_{8,0} \quad K_{2,2} = W_{1,0} + W_{3,0}. \tag{3.18}$$

  Les deux matrices $K_{1,1}$ et $K_{1,3}$ ce décomposent chacune en somme de deux nouvelles matrices dont une est déjà connue, cela définie alors 3 nouvelles matrices toriques, $W_{5,0}$, $W_{7,0}$ et $W_{9,0}$.

  $$K_{1,1} = W_{7,0} + W_{9,0} \quad ; \quad K_{1,3} = W_{7,0} + W_{5,0}. \tag{3.19}$$

  La forme explicite de ces trois nouvelles matrices est donnée dans la liste de matrices toriques présenté plus bas.
- **Norme 3** : Il y a une matrice de norme carré égale à trois $K_{2,3}$, cette matrice est la somme de trois matrices toriques déjà connues

  $$K_{2,3} = W_{0,0} + W_{2,0} + W_{4,0} \tag{3.20}$$

La décomposition 3.19 parait peut naturelle parce qu'on a déterminé auparavant que la dimension de l'espace généré par les matrices K_{jk} est 9. La relation de dépendance entre les matrices est $W_{7,0} = W_{5,0} + W_{9,0}$. Du point de vue de la base de l'espace des K_{uk} la

matrice $W_{7,0}$ est superflue, mais la definition des matrices toriques dépend aussi de l'équation de scission modulaire qui fixe, à travers de la norme, le nombre de matrices qui interviennent dans la décomposition de chaque matrice $K_{j\,k}$. La décomposition 3.19 est la décomposition minimale qui répond à la condition de norme carrés égale à deux.

On a ainsi trouvé l'ensemble des matrices toriques $W_{x,0}$, les matrices $W_{0,x}$ sont définies par $W_{0,x} = W_{x,0}$. Avec ces deux ensembles de matrices l'équation de *scission modulaire* est vérifiée. La forme explicite de ces matrices est la suivante

$$W_{0,0} = M$$

$$W_{1,0} = W_{8,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad W_{2,0} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{3,0} = W_{6,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \end{pmatrix} \quad W_{4,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{7,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad W_{5,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{9,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Le graphe d'Ocneanu et l'algèbre des symétries quantiques.

La dimension de l'algèbre de symétries quantiques est $d_O = 10$, la solution de l'équation (2.10) pour les paires d'indices (i, j) égales à $(0,1)$ et $(1,0)$ donne les deux générateurs chiraux V_{10} et V_{01} respectivement. Dans l'ordre que l'on a choisi pour les matrices toriques ces générateurs ont la forme suivante :

$$V_{10} = \left(\begin{array}{c|c} Ad(A_5) & \cdot \\ \hline \cdot & Ad(A_5) \end{array}\right) \quad V_{01} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & Ad(A_5) \\ \hline Ad(A_5) & \cdot \end{array}\right) \tag{3.21}$$

$$Ad(A_5) = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{pmatrix}$$

où $Ad(A_5)$ est la matrice d'adjacence du graphe A_5. Ces deux matrices sont les matrices d'adjacence des parties chirales gauches et droites du graphe d'Ocneanu qui est présenté Figure 3.6.

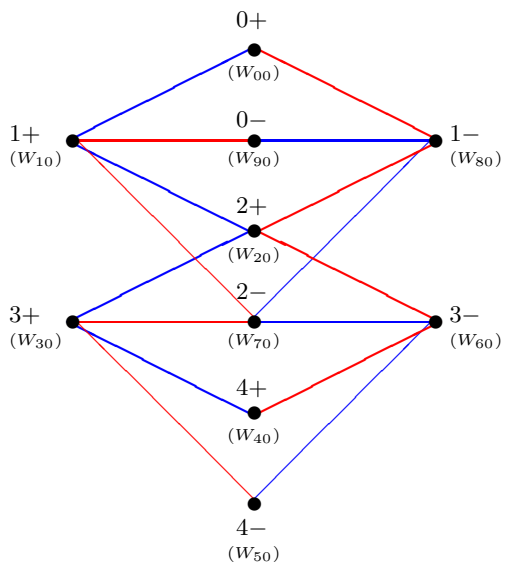


FIG. 3.6 – Graphe d'Ocneanu de B_3

Chaque graphe chiral est composé par l'union de deux sous-graphes disjoints de type A_5, chaque graphe chiral est obtenu à partir de l'autre en effectuant une symétrie autour de l'axe vertical formé par les vertex ambi-chiraux. Les vertex du graphe de Ocneanu sont les élément de la base de l'algèbre de symétries quantiques, cette algèbre est générée par deux générateurs dénotés par $1+$ et $1-$. La partie chirale gauche (en bleue) est le graphe de Cayley de la multiplication des éléments de $Oc(F_4)$ par le générateur $1+$ (correspondant à la matrice V_{10}). La partie chirale droite (en rouge) est le graphe de Cayley de la multiplication par le générateur $1-$ (correspondant à la matrice V_{01}). Pour chaque graphe chiral le premier sous graphe (de type A_5) est une sous-algèbre de graphe appelé la **sous algèbre chirale**. La sous algèbre chirale gauche est engendrée par les vertex $\{0+, 1+, 2+, 3+, 4+\}$ et est générée par $1+$. La sous algèbre chirale droite est engendrée par les vertex $\{0+, 1-, 2+, 3-, 4+\}$ et est générée par $1-$. Le deuxième sous graphe de type A_5 est engendré par les vertex $\{0-, 1-, 2-, 3-, 4-\}$, il constitue un module sur la sous algèbre chirale gauche.

Grâce à la symétrie présente entre la partie chirale gauche et droite, nous savons que la structure est identique pour le graphe chiral droite.

L'algèbre de symétries quantiques est réalisée comme $Oc(B_3) = A_5 \rtimes \mathbb{Z}_2$, les labels de la

Figure 3.6 correspondent à la notation des éléments de la base $i\pm$ où i dénote les vertex du graphe A_5. L'identification entre les notations est la suivante $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \rightarrow \{0+,1+,2+,3+,4+,4-,3-,2-,1-,0-\}$. Le produit dans $Oc(B_3)$ est défini comme

$$\begin{aligned} (\,i,+) \circ (\,j,+) &= (\,i\,j,+) \qquad (\,i,+) \circ (\,j,-) = (\,i\,j,-) \\ (\,i,-) \circ (\,j,+) &= (\,i(\,j),-) \quad (\,i,-) \circ (\,j,-) = (\,i(\,j),+) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Une représentation 10×10 de l'algèbre de symétries quantiques est donnée en par les matrices O_x qui sont calculées à partir des deux générateurs $O_1 = V_{10}$ et $O_8 = V_{01}$, l'unité $O_{(0,+)}$, et le génerateur extra $O_{(0,-)} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & \mathbb{I}_5 \\ \hline \mathbb{I}_5 & \cdot \end{array}\right)$.

Cette dernière est calculée en se servant de la relation $W_{(1,-),x} = \sum_{y \in Oc(B_3)} (O_{1,-})_{xy} W_{y,(0,+)}$, la multiplication par les générateurs est codée par le graphe et permet de calculer les matrices O_x comment suis :

$$\begin{aligned} O_{(2,\pm)} &= O_{(1,\pm)} O_{(1,\pm)} - O_{(0,\pm)} \\ O_{(3,\pm)} &= O_{(1,\pm)} O_{(1,\pm)} O_{(1,\pm)} - 2O_{(1,\pm)} \\ O_{(4,\pm)} &= O_{(1,\pm)} O_{(1,\pm)} O_{(1,\pm)} O_{(1,\pm)} - O_{(1,\pm)} + O_{(0,\pm)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Les matrices O_x pouvent être exprimées de manière compacte à partir des matrices de fusion de A_5.

$$O_{(\,i,+)} = \left(\begin{array}{c|c} N_i & \cdot \\ \hline \cdot & N_i \end{array}\right) \quad O_{(\,i,-)} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & N_i \\ \hline N_i & \cdot \end{array}\right) \tag{3.24}$$

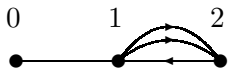
ces matrices fournissent les constantes de structure de l'algèbre de symétries quantiques, et satisfont la relation 1.44.

Chaque partie chirale est composée par l'union de deux graphes disjoints de type A_5 : $\{0+,1+,2+,3+,4+\} \cup \{0-,1+,2-,3+,4-\}$ pour le sous graphe chiral gauche et $\{0+,1-,2+,3-,4+\} \cup \{0-,1-,2-,3-,4-\}$. Les sous-graphes $\{0+,1+,2+,3+,4+\}$ et $\{0+,1-,2+,3-,4+\}$ sont sous-algèbres de graphe de type A_5 notes. Les sous-graphes $\{0-,1-,2-,3-,4-\}$ et $\{0-,1-,2-,3-,4-\}$ sont un sous-graphe module sur le respective (gauche ou droit) algèbre de graphe A_5. La table de multiplication peut être construite à partir de la table de multiplication de A_5, et la réalisation de l'algèbre $Oc(B_3)$.

$\times$	A_5	a_5
A_5	A_5	a_5
a_5	a_5	A_5

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions.

Contrairement au cas précédant, le graphe B_3 n'apparaît pas explicitement parmi les sous-graphes qui composent le graphe de symétries quantiques, mais on sait que le graphe non simplement lacé B_3 est le troisième de la série de cinq graphes de nombre de Coxeter six dans la série $SU(2)$. Les quatre autres graphes sont le graphe A_5 lui même, le graphe orbifold D_4 et les graphes non simplement lacé G_2. Le graphe B_3 et sa matrice d'adjacence sont montrés Figure 3.7



$$Ad(B_3) = \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 1 & . & 1 \\ . & 2 & . \end{pmatrix}$$

FIG. 3.7 – Le graphe de Coxeter B_3 et sa matrice d'adjacence $Ad(B_3)$

B_3 est un module à droite et à gauche sur A_5, l'action de A_5 sur B_3 est codée par les constantes de structure $(F_i)_{ab}$ où a et b sont des vertex de B_3. Les matrices F_i sont des matrices de dimension 3×3 obtenues à partir des relations de récurrence codées par le graphe A_5, avec générateur $F_1 = Ad(B_3)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_3$.

$$F_0 = F_4 = \mathbb{I}_3; \quad F_1 = F_3 = Ad(B_3); \quad F_2 F_1^2 - F_0 = \begin{pmatrix} . & . & 1 \\ . & 2 & . \\ 2 & . & 1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

B_3 est un module sur le graphe $Oc(B_3)$, l'action de $Oc(B_3)$ sur B_3 est codée par les constantes de structure $(S_x)_{ab}$. Les matrices S_x sont des matrices de dimension 3×3, et sont calculées à partir des relations de récurrence codées par le graphe $Oc(B_3)$ (deux copies des relations de récurrence du graphe A_5) avec générateurs chiraux $S_{1+} = S_{1-} = Ad(B_3)$ et unités $S_{0+} = S_{0-} = \mathbb{I}_3$. Mais les matrices S_x peuvent être aussi obtenues à partir de la réalisation de l'algèbre des symétries quantiques. En effet l'action à gauche $(\,i, \pm)\, a = \sum_{b \in B_3} (S_{i\pm})_{ba} b$ est obtenue de manière naturelle

$$(\,i, +)\, a = \, i\, a = \sum_{b \in B_3} (F_i)_{ba}\, b \Rightarrow S_{i+} = F_i \tag{3.26}$$

$$(\,i, -)\, a = \, i\, a = \sum_{b \in B_3} (F_i)_{ba}\, b \Rightarrow S_{i-} = F_i \tag{3.27}$$

Règle de somme quadratique. De manière similaire que pour le cas F_4 nous appellons d_i et d_x les analogues des dimensions des blocs simples associés au graphe B_3. La liste des dimensions des blocs de type i et x est respectivement

$$d_i = \{3, 5, 6, 5, 3\}$$

$$d_x = \{3, 5, 6, 5, 3, 3, 5, 6, 5, 3\}$$

La somme des dimensions carrées donne comme résultat $\sum_{x \in Oc(B_3)} d_x^2 = 2 \times \sum_{i \in A_5} d_i^2 = 208$

Contrairement au cas F_4, et en accord avec le fait qu'il n'y a pas de double liens dans le graphe d'Ocneanu, il n'est pas nécessaire d'introduire des valeurs $\frac{1}{2}$ dans certains des dimensions des blocs de type x. On verra par la suite comment ces facteurs apparaissent dès que les graphes non simplement lacés apparaissent explicitement dans le graphe des symétries quantiques.

Règle de somme linéaire. Encore en analogie au cas ADE et au cas non simplement lacé F_4, on étudie la somme linéaire des dimensions d_i et d_x. On trouve que $\sum_{x \in Oc(B_3)} d_x = 2 \times \sum_{i \in A_5} d_i = 44$.

Résultat qui est à nouveau consistent avec ceux obtenus préalablement.

Autres actions de modules associés. Comme on l'a remarqué dans les paragraphes précédents, la famille des graphes de nombre de Coxeter 6 est particulièrement riche parce qu'elle comporte cinq graphes A_5, D_4, B_3, C_3 et G_2 dont trois sont des graphes non simplement lacés. L'identification de la fonction de partition Z_{B_3} avec le graphe non simplement lacé B_3 a été établie grâce aux relations de module avec le graphe principal A_5 et le graphe de symétries quantiques $Oc(B_3)$ qui a été construit à partir de Z_{B_3}. Mais il s'avère que ce cas est spécial aussi parce que les autres deux graphes liés D_4 et G_2 sont aussi des modules sur A_5 et $Oc(B_3)$.

L'action de A_5 sur ces deux graphes est donnée de manière naturelle par les matrices F_i qu'on sait bien définies puisque le nombre de Coxeter est le même. Les matrices F_i sont des matrices de dimension 4×4 ou 2×2 et l'on peut les calculer de la manière standard à partir des relations de récurrence du graphe A_5. Les générateurs sont alors $F_1^{D4} = Ad(D_4)$ et $F_1^{G_2} = Ad(G_2)$. La forme explicite de ces matrices est déjà bien connue [66],[26], et est pour le cas G_2 présentée dans la prochaine section de ce chapitre. Les dimensions et la règle de somme quadratique sont les suivantes

$$d_i^{D_4} = \{4, 6, 8, 6, 4\} \Rightarrow \sum_{i \in A_5} (d_i^{D_4})^2 = 168$$

$$d_i^{G_2} = \{2, 4, 4, 4, 2\} \Rightarrow \sum_{i \in A_5} (d_i)^2 = 56$$

L'action de $Oc(B_3)$ sur D_4 et G_2 est codée par les matrices $S_x^{D_4}$ et $S_x^{G_2}$. Ce sont des matrices de dimension 4×4 et 2×2 respectivement, et elles sont calculées à partir des

relations de récurrence codées par le graphe $Oc(B_3)$ de la même manière que pour le cas B_3 mais avec générateurs chiraux $S^{D_4}_{1+} = S^{D_4}_{1-} = Ad(D_4)$ et $S^{G_2}_{1+} = S^{G_2}_{1-} = Ad(G_2)$ respectivement.

La forme explicite de ces matrices pour le cas D_4 est

$$S^{D_4}_{0+} = S^{D_4}_{4+} = S^{D_4}_{4-} = S^{D_4}_{0-} = \mathbb{I}_4; \quad S^{D_4}_{1+} = S^{D_4}_{3+} = S^{D_4}_{3-} = S^{D_4}_{1-} = Ad(D_4);$$

$$S^{D_4}_{2+} = S^{D_4}_{2-} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & 1 \\ . & 2 & . & . \\ 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & . \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

La forme explicite de ces matrices pour le cas G_2 est

$$S^{G_2}_{0+} = S^{G_2}_{4+} = S^{G_2}_{4-} = S^{G_2}_{0-} = \mathbb{I}_4; \quad S^{G_2}_{1+} = S^{G_2}_{3+} = S^{G_2}_{3-} = S^{G_2}_{1-} = Ad(G_2);$$

$$S^{G_2}_{2+} = S^{G_2}_{2-} = \begin{pmatrix} 2 & . \\ . & 2 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Les dimensions et la règle de somme quadratique sont les suivantes

$$d^{D_4}_x = \{4,6,8,6,4,4,6,8,6,4\} \Rightarrow \sum_{i\in A_5} (d^{D_4}_i)^2 = 336$$
$$d^{G_2}_i = \{2,4,4,4,2,2,4,4,4,2\} \Rightarrow \sum_{i\in A_5} (d_i)^2 = 112$$

On voit dans chacun de ces cas la relation $\sum_x (d_x)^2 = 2\times\sum_i (d_i)^2$, on pourrait alors être amené à considérer les symétries quantiques associées à la fonction de partition Z_{B_3} comme celles liées à n'importe quel graphe de la famille de graphes de $SU(2)$ avec $\kappa = 6$, particulièrement si on considère les résultats obtenus dans la section suivante, où on trouve que le graphe B_3 apparaît explicitement dans le graphe d'Ocneanu associé au graphe G_2.

3.2.3 Le cas B_4

On considère la fonction de partition invariante modulaire associée au graphe principal A_7.

$$Z_{A_7} = |\chi_0|^2 + |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_3|^2 + |\chi_4|^2 + |\chi_5|^2 + |\chi_6|^2 \tag{3.30}$$

Le nombre de Coxeter de A_7 est $\kappa = 8$ et son niveau est $l = 6$. La représentation 7×7 des générateurs du groupe modulaire S et T a la forme suivante :

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi & 1 & \varphi & \frac{1}{\sqrt{2}} & \xi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & . & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varphi & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\xi & -1 & -\xi & \frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi \\ 1 & . & -1 & . & 1 & . & -1 \\ \varphi & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\xi & 1 & -\xi & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & . & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \xi & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \varphi & -1 & \varphi & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \xi \end{pmatrix}$$

et $T = diag\left(e^{\frac{-3\,i}{16}\,\pi},\, 1,\, e^{\frac{5\,i}{16}\,\pi},\, e^{\frac{3\,i}{4}\,\pi},\, e^{\frac{-11\,i}{16}\,\pi},\, 1,\, e^{\frac{13\,i}{16}\,\pi}\right)$ où $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. L'action du générateur S sur les combinaisons appropriées des entrées du vecteur de caractères de l'algèbre fusion χ est comme suit

$$\chi_0 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_6 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}(\chi_2+\chi_4) + \sqrt{2+\sqrt{2}}(\chi_0+\chi_6)\right)$$

$$\chi_1 + \chi_3 + \chi_5 \to \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})(\chi_0-\chi_6) - (1-\sqrt{2})(\chi_2+\chi_4)\right)$$

Les exposants modulaires du graphe A_7 sont montrés Figure (3.1), avec l'identification $\mathbb{Z}_2$ qui donne origine de manière empirique au B_4. Les exposant qui sont bien définis sur le graphe orbifold sont les correspondants aux vertex 0, 2 4 et 6. Cela permet de proposer une fonction de partition

$$Z_{B_3} = |\chi_0|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_4|^2 + |\chi_6|^2 \tag{3.31}$$

qu'on notera avec le sous-index B_4 puisque les entrées diagonales de l'invariant modulaire

$$M_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

correspondent aux exposants du graphe B_4. La fonction de partition Z_{B_4} est invariante sous l'action du même sous-groupe de congruence $\Gamma_0(2)$ que pour le cas B_3.

Scission Modulaire. Le membre de gauche de l'équation (3.1.2) donne une famille de 49 matrices $K_{i\mu}$ de dimension 7×7. L'espace vectoriel engendré par cet ensemble de matrices est de dimension $r = 13$. On s'attend à avoir une algèbre de symétries quantiques de dimension plus grande que 13 puisque B_4 est un graphe non simplement lacé. Le calcule des matrices toriques à partir de la norme des matrices $K_{i\mu}$ se fait comme suit

- **Norme 1 :** Les matrices $K_{0,0}, K_{0,1}, K_{0,2}, K_{0,3}, K_{0,4}, K_{0,5}, K_{0,6}, K_{1,0}, K_{1,6}, , K_{3,2}$ sont de norme 1 et donnent 10 matrices toriques $W_{x,0}$ comme suit $W_{0,0} = K_{0,0}$, $W_{1,0} = K_{0,1}$, $W_{2,0} = K_{0,2}$, $W_{3,0} = K_{0,3}$, $W_{4,0} = K_{0,4}$, $W_{5,0} = K_{0,5}$, $W_{6,0} = K_{0,6}$, $W_{12,0} = K_{1,0}$, $W_{8,0} = K_{1,6}$, $W_{10,0} = K_{3,2}$.
- **Norme 2 :** Il y a sept matrices de norme deux $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{1,4}$, $K_{1,5}$, $K_{2,2}$ et , $K_{2,6}$. Ce sont de matrices de norme 2 elles se décomposent donc chacune en une somme de deux matrices toriques.

  Les matrices $K_{1,2}$, $K_{1,4}$, $K_{2,2}$ et $K_{2,6}$ ne sont pas l.i. et se décomposent comme la somme de deux matrices déjà connues

$$K_{1,2} = W_{10,0} + W_{12,0} \quad K_{1,4} = W_{10,0} + W_{8,0} \tag{3.33}$$

$$K_{2,2} = W_{1,0} + W_{3,0} \quad K_{2,6} = W_{5,0} + W_{3,0} \tag{3.34}$$

Les trois matrices $K_{1,1}$, $K_{1,3}$ et $K_{1,5}$ se décomposent chacune en une combinaison linéaire de 4 nouvelles matrices toriques.

$$K_{1,1} = W_{13,0} + W_{11,0} \quad K_{1,3} = W_{11,0} + W_{9,0} \quad K_{1,5} = W_{7,0} + W_{9,0} \tag{3.35}$$

La forme explicite de ces trois nouvelles matrices est donnée dans la liste de matrices toriques présentée dans la table suivante.

– **Norme 3 :** Il y a quatre matrices de norme carré égale à trois $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{2,5}$ et $K_{3,4}$ elles sont la somme de trois matrices toriques déjà connues

$$K_{2,3} = W_{0,0} + W_{2,0} + W_{4,0} \quad K_{2,4} = W_{1,0} + W_{3,0} + W_{5,0} \tag{3.36}$$

$$K_{2,5} = W_{2,0} + W_{4,0} + W_{6,0} \quad K_{3,4} = W_{8,0} + W_{10,0} + W_{12,0} \tag{3.37}$$

– **Norme 4 :** Il y a une matrice de norme carré égale à quatre, $K_{3,5}$, cette matrice est la somme de trois matrices toriques déjà connues

$$K_{3,5} = W_{7,0} + W_{9,0} + W_{11,0} + W_{13,0} \tag{3.38}$$

On a de cette façon définie 14 matrices toriques, les matrices $W_{0,x}$ sont égales aux matrices $W_{x,0}$, et cet ensemble de matrices toriques satisfait l'équation de *scission modulaire*. La forme explicite de ces matrices est la suivante

$$W_{0,0} = M$$

$$W_{1,0} = W_{12,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad W_{2,0} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{3,0} = W_{10,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix} \quad W_{4,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{5,0} = W_{8,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad W_{6,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{7,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad W_{9,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{11,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad W_{13,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Le graphe d'Ocneanu et l'agèbre des symétries quantiques.

Le graphe d'Ocneanu a dimension $d_O = 14$. A partir de la solution de l'équation (2.10) pour les pairs d'indexes (i, μ) égal à $(0, 1)$ et $(1, 0)$ on obtient les deux générateurs chiraux V_{10} et V_{01} respectivement qui, dans l'ordre qu'on a choisi pour les matrices toriques, ont la forme suivante

$$V_{10} = \left(\begin{array}{c|c} Ad(A_7) & \cdot \\ \hline \cdot & Ad(A_7) \end{array}\right) \quad V_{01} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & Ad(A_7) \\ \hline Ad(A_7) & \cdot \end{array}\right) \tag{3.39}$$

ou

$$Ad(A_7) = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix}$$

est la matrice d'adjacence du graphe A_7. Ces deux matrices sont les matrices d'adjacence des parties chirales gauches et droites du graphe d'Ocneanu qui est présentée Figure 3.8.

A partir des matrices $V_{00} = \mathbb{I}$, V_{10} et V_{01}, les équations (2.17), (2.18) et (2.19) permettent de récupérer de manière automatique les matrices de double fusion V_{ij}, et ces dernières donnent les matrices toriques twistées W_{xy}.

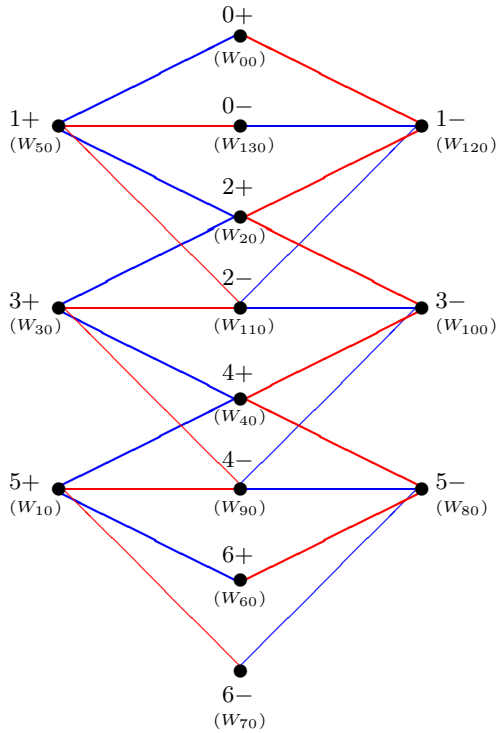


FIG. 3.8 – Graphe d'Ocneanu de B_4

L'algèbre des symétries quantiques est réalisée comme $Oc(B_4) = A_7 \rtimes \mathbb{Z}_2$, les étiquettes de la Figure 3.8 correspondent à la notation de la base $(i, \pm)$ où i est un vertex du graphe A_7, l'identification entre la notation des matrices toriques et celle correspondante à la réalisations est naturellement

$$x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \to \{0+,1+,2+,3+,4+,5+,6+,6-,5-,4-,3-,2-,1-,0-\}$$

Le produit dans $Oc(B_4)$ est défini comme pour B_3 par les équations (3.22), avec i qui parcourt maintenant les vertex de A_7. Une représentation 7×7 de l'algèbre de symétries quantiques est donnée en termes des matrices O_x qui peuvent être calculés de façon similaire au cas B_3 à partir des deux générateurs $O_1 = V_{10}$ et $O_{11} = V_{01}$, de l'unité $O_0 = \mathbb{I}_{14}$ et la multiplication par les générateurs codés par le graphe. Elles sont exprimées à partir de des matrices de fusion de A_7,

$$O_{(i,+)} = \left(\begin{array}{c|c} N_i & \cdot \\ \hline \cdot & N_i \end{array}\right) \quad O_{(i,-)} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & N_i \\ \hline N_i & \cdot \end{array}\right) \tag{3.40}$$

Ces matrices fournissent les constantes de structure de l'algèbre des symétries quantiques, et satisfont la relation 1.44.

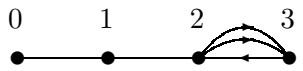
Chaque partie chirale est composée par l'union de deux graphes disjoints de type A_7. Le premier $A_7^L = \{0+,1+,2+,3+,4+\}$ ou $A_7^R = \{0+,1-,2+,3-,4+\}$ est une sous-algèbre de graphe de type A_7. Le deuxième $a_7^L = \{0-,1-,2-,3-,4-\}$ ou $a_7^R = \{0-,1+,2-,3+,4-\}$

est un sous-graphe module sur le graphe respectif A_7, où les super indices L et R dénotent la sous algèbre chirale gauche et droite respectivement. La table de multiplication est exprimée en termes de la table de multiplication de A_7.

$\times$	A_7	a_7
A_7	A_7	a_7
a_7	a_7	A_7

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions.

Le graphe B_4 n'apparaît pas explicitement parmi les sous-graphes qui composent le graphe de symétries quantiques, mais on sait que le graphe non simplement lacé B_4 est un module à droite et à gauche sur A_7 et un module sur $Oc(B_4)$. Le graphe B_4 et sa matrice d'adjacence sont montrés dans la Figure 3.9.



$$Ad(B_4) = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 2 & . \end{pmatrix}$$

FIG. 3.9 – Le graphe de Coxeter B_4 et sa matrice d'adjacence $Ad(B_4)$

L'action de A_7 sur B_4 est codée par des constantes de structure $(F_i)_{ab}$ ou a et b sont des vertex de B_4. Les matrices F_i sont des matrices de dimension 4×4 obtenues à partir des relations de récurrence codées par le graphe A_7

$$F_i = F_1.F_{i-1} - F_{i-2} \text{ pour } 2 \leq i \leq 6$$

avec générateur $F_1 = Ad(B_4)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_4$. La forme explicite de ces matrices est la suivante

$$F_0 = F_6 = \mathbb{I}_4; \qquad F_1 = F_5 = Ad(B_4)$$

$$F_2 = F_4 = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & 1 \\ 1 & . & 2 & . \\ . & 2 & . & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & 2 & . \\ . & 2 & . & 1 \\ 2 & . & 2 & . \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

L'action de $Oc(B_4)$ sur B_4 est codée par les constantes de structure $(S_x)_{ab}$, ce sont des matrices de dimension 4×4, calculées à partir des relations de récurrence codées par le graphe $Oc(B_4)$ avec générateurs chiraux $S_{1+} = S_{1-} = Ad(B_4)$ et unités $S_{0+} = S_{0-} = \mathbb{I}_4$. Comme

pour le cas B_3 ces matrices S_x peuvent être aussi obtenues à partir de la réalisation de l'algèbre de symétries quantiques. L'action à gauche $(i,\pm)\,a = \sum_{b\in B_3}(S_{i\pm})_{ba}b$ est définie de manière naturelle par les relations

$$(i,+)\,a \equiv i\,a = \sum_{b\in B_4}(F_i)_{ba}\,b \Rightarrow S_{i+} = F_i \tag{3.42}$$

$$(i,-)\,a \equiv i\,a = \sum_{b\in B_4}(F_i)_{ba}\,b \Rightarrow S_{i-} = F_i \tag{3.43}$$

Règle de somme quadratique. De manière similaire aux cas F_4 et B_3 nous appellons d_i et d_x les analogues des dimensions des blocs simples associés au graphe B_4. La liste des dimensions des blocs de type i et x est respectivement

$$d_i = \{4,7,9,10,9,7,4\}$$

$$d_x = \{4,7,9,10,9,7,4,4,7,9,10,9,7,4\}$$

La somme des dimensions carrés donne

$$\sum_{x\in Oc(B_3)} d_x^2 = 2\times\sum_{i\in A_5} d_i^2 = 784$$

grâce au fait qu'il n'y a pas de double liens dans le graphe d'Ocneanu, il n'est pas nécessaire d'introduire des facteurs $\frac{1}{2}$ dans certaines des dimensions des blocs de type x.

Règle de somme linéaire. Encore en analogie avec les cas ADE, on étudie la somme linéaire des dimensions d_i et d_x. On trouve

$$\sum_{x\in Oc(B_3)} d_x = 2\times\sum_{i\in A_5} d_i = 100$$

résultat qui est à nouveau consistent avec ceux obtenus préalablement.

Autres actions des modules associés. De la même façon que dans l'exemple précédant l'identification de la fonction de partition Z_{B_4} avec le graphe non simplement lacé B_4 est établie grâce aux relations de module à droite et à gauche sur le graphe principal A_7 et le graphe de symétries quantiques $Oc(B_4)$ qui a été construit à partir de Z_{B_4}. Mais de manière similaire au cas B_3, il s'avère que le graphe de la famille de nombre de Coxeter huit, D_5, est aussi un module sur A_7 et $Oc(B_4)$.

L'action de A_7 sur D_5 est donnée de la manière naturelle par les matrices F_i qu'on sait bien définies puisque le nombre de Coxeter est le même. Dans ce cas, les matrices F_i ont dimension 5×5 et sont calculés à partir des relations de récurrence du graphe A_7 avec générateur $F_1^{D5} = Ad(D_5)$. La forme explicite de ces matrices est déjà bien connue [66],[26]. La règle de somme quadratique est comme suit

$$d_i^{D_5} = \{5, 8, 11, 12, 11, 8, 5\} \Rightarrow \sum_{i \in A_5} (d_i^{D_4})^2 = 564$$

L'action de $Oc(B_4)$ sur D_5 est codée par les matrices $S_x^{D_5}$. Ce sont des matrices de dimension 5×5 calculées à partir des relations de récurrence du graphe $Oc(B_4)$ avec générateurs chiraux $S_{1+}^{D_5} = S_{1-}^{D_5} = Ad(D_5)$. La forme explicite de ces matrices est

$$S_{0+}^{D_5} = S_{0-}^{D_5} = \mathbb{I}_5; \quad S_{1+}^{D_5} = S_{5+}^{D_5} = S_{5-}^{D_5} = S_{1-}^{D_5} = Ad(D_5);$$

$$S_{3+}^{D_5} = S_{3-}^{D_5} = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & 2 & . & . \\ . & 2 & . & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . & . \end{pmatrix} \qquad S_{6+}^{D_5} = S_{6-}^{D_5} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

$$S_{2+}^{D_5} = S_{4+}^{D_5} = S_{4-}^{D_5} = S_{2-}^{D_5} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & . & 2 & . & . \\ . & 1 & . & . & 1 \\ . & 1 & . & 1 & . \end{pmatrix}$$

Les dimensions et la règle de somme quadratique est la suivante

$$d_x^{D_4} = \{5, 8, 11, 12, 11, 8, 5, 5, 8, 11, 12, 11, 8, 5\} \Rightarrow \sum_{i \in A_5} (d_i^{D_4})^2 = 1128$$

On voit que la relation $\sum_x (d_x)^2 = 2 \times \sum_i (d_i)^2$ est satisfaite. On pourrait alors être amené à considérer les symétries quantiques associées à la fonction de partition Z_{B_4} comme celles liées à n'importe quel graphe de la famille de graphes de $SU(2)$ avec $\kappa = 8$. La notation B_4 reste le meilleur choix parce que D_5 a déjà été associée à un groupoide quantique, et parce que les exposants de B_4 coïncident avec les entrées diagonales non zéro de la matrice M_{B_4}.

3.2.4 Le cas général B_n

[3] On considère la fonction de partition invariante modulaire associée au graphe principal $A_{(2n-1)}$.

$$Z_{A_{(2n-1)}} = |\chi_0|^2 + |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 + \cdots + |\chi_{2(n-1)}|^2 \tag{3.45}$$

La nombre de Coxeter est $\kappa = 2n$ et le niveau est $l = 2(n-1)$. L'action du générateur S sur le vecteur caractère de l'algèbre de fusion sur la combinaison des caractères $\chi_0 + \chi_2 + \cdots + \chi_4$ est

[3] Les résultats consignes ici se basent sur un étude de plusieurs cas particuliers. Nous n'avons pas effectué la démonstration formelle des propriétés énonces pour le cas générique B_n

envoyé dans une combinaison linéaire de ces mêmes exposants, on propose une sous-function de partition que l'on notera avec le sous-index B_n puisque les entrées diagonales de l'invariant modulaire correspondent aux exposants du graphe B_n.

$$Z_{B_n} = |\chi_0|^2 + |\chi_2|^2 + \cdots + \left|\chi_{2(n-1)}\right|^2 \qquad M_{B_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

La fonction de partition Z_{B_n} est invariante sous l'action du sous-groupe de congruence du groupe modulaire $\Gamma_0(2)$ généré par les deux matrices T et $S^{-1}T^{-2}S$.

Matrices Toriques. Le membre de gauche de l'équation (3.1.2) donne une famille de $(2n-1)^2$ matices $K_{i\,j}$ de dimension $(2n-1)\times(2n-1)$. L'espace vectoriel engendré par cet ensemble de matrices est de dimension $r = 2\times(2n-1)-1$, et la dimension de l'algèbre de symétries quantiques est $dimOc(B_n) = 2\times(2n-1)$

$$W_{0,0} = MW_{x,y} = Equacionesacorregir!!$$

Le graphe d'Ocneanu et l'algèbre de symétries quantiques.

Les deux générateurs chiraux du graphe de Ocneanu V_{10} et V_{01} toriques on la forme suivante

$$V_{10} = \left(\begin{array}{c|c} Ad(A_{2n-1}) & \cdot \\ \hline \cdot & Ad(A_{2n-1}) \end{array}\right) \quad V_{01} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & Ad(A_{2n-1}) \\ \hline Ad(A_{2n-1}) & \cdot \end{array}\right) \tag{3.47}$$

ou $Ad(A_{2n-1})$ est la matrice d'adjacence du graphe A_{2n-1}. Ces deux matrices sont les matrices d'adjacence du graphe d'Ocneanu, qui est présenté Figure 3.10.

L'algèbre de symétries quantiques est realisée comme $Oc(B_n) = A_{2n-1} \rtimes \mathbb{Z}_2$, les labels de la Figure 3.10 correspondent à la notation des éléments de la base $i\pm$, ou i dénote les vertex du graphe A_{2n-1}. Le produit dans $Oc(B_n)$ est défini comme

$$\begin{aligned} (i,+)\circ(j,+) &= (i\,j,+) \qquad (i,+)\circ(j,-) = (i\,j,-) \\ (i,-)\circ(j,+) &= (i(j),-) \quad (i,+)\circ(j,-) = (i(j),+) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Les matrices O_x que donnent les constants de structure de $Oc(B_n)$ sont exprimées en termes des matrices de fusion de A_{2n-1}.

$$O_{(i,+)} = \left(\begin{array}{c|c} N_i & \cdot \\ \hline \cdot & N_i \end{array}\right) \quad O_{(i,-)} = \left(\begin{array}{c|c} \cdot & N_i \\ \hline N_i & \cdot \end{array}\right) \tag{3.49}$$

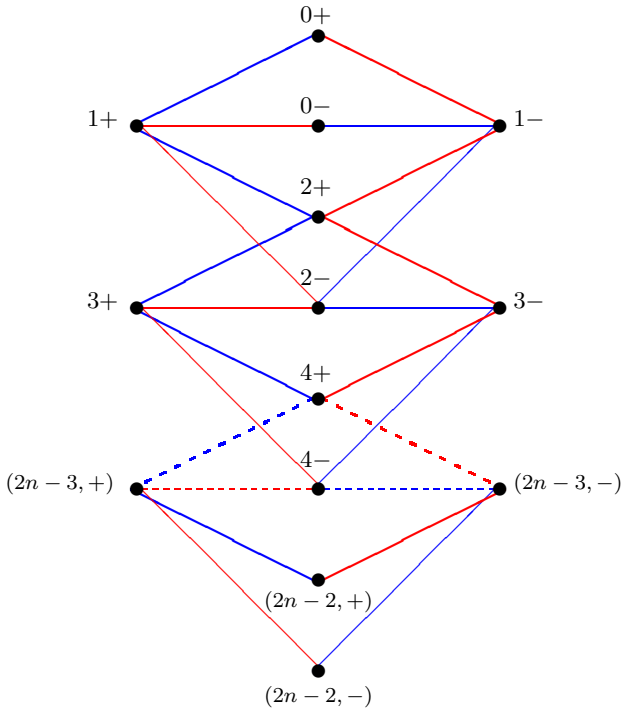


FIG. 3.10 – Graphe d'Ocneanu de B_n

Le graphe de symétries quantiques est le graphe de Cayley de la multiplication par le générateur gauche et droit, chaque partie chirale est composée par l'union de deux graphes disjoints de type A_{2n-1}. Le premier A_{2n-1} est une sous-algébre du graphe $Oc(B_n)$. Le deuxième a_{2n-1} est un sous-graphe module sur A_{2n-1}. La table de multiplication est construite à partir de la table de multiplication de A_{2n-1}.

$\times$	A_{2n-1}	a_{2n-1}
A_{2n-1}	A_{2n-1}	a_{2n-1}
a_{2n-1}	a_{2n-1}	A_{2n-1}

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions.

Le graphe B_n n'apparaî t pas explicitement parmi les sous- graphes qui composent le graphe de symétries quantiques, mais B_n est un module à droite et à gauche sur A_{2n-1} et $Oc(B_n)$. Le graphe B_n et sa matrice d'adjacence sont motnrées la Figure 3.11

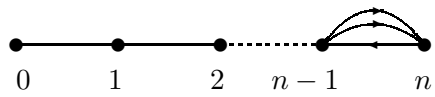


FIG. 3.11 – Le graphe de Coxeter B_n.

L'action de A_{2n-1} sur B_n est codée par les matrices F_i obtenues à partir des relations de récurrence du graphe A_{2n-1}, avec générateur $F_1 = Ad(B_n)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_n$.

$$F_0 = \mathbb{I}_n; \quad F_1 = Ad(B_n); \quad F_n = F_1 F_{n-1} - F_{n-2} \quad n \geq 2 \tag{3.50}$$

L'action de $Oc(B_n)$ sur B_n est codée par les matrices S_x calculées à partir des relations de récurrence du graphe $Oc(B_n)$ (deux copies des relation de récurence du graphe A_{2n-1}) avec générateurs chiraux $S_{1+} = S_{1-} = Ad(B_3)$ et unités $S_{0+} = S_{0-} = \mathbb{I}_3$. Ou a partir de la réalisation de l'algèbre des symétries quantiques :

$$(\,i,+)\,a \equiv \,i\,a = \sum_{b \in B_3} (F_i)_{ba}\, b \Rightarrow S_{i+} = F_i \tag{3.51}$$

$$(\,i,-)\,a \equiv \,i\,a = \sum_{b \in B_3} (F_i)_{ba}\, b \Rightarrow S_{i-} = F_i \tag{3.52}$$

Règle de somme quadratique et linéaire. Les listes des dimensions des blocs de type i et x sont

$$d_i = \{n,\, n+(n-1),\, \cdots, n+(n-1)+(n-2)\cdots+1,\, \cdots, n+(n-1),\, n\}$$

$$d_x = \{n,\, n+(n-1), \cdots,\, n+(n-1),\, n,\, n,\, n+(n-1), \cdots,\, n+(n-1),\, n\}$$

A partir de ces listes, il est évident que les règles de somme quadratique et linéaire satisfont

$$\sum_{x \in Oc(B_3)} d_x^2 = 2 \times \sum_{i \in A_5} d_i^2$$

$$\sum_{x \in Oc(B_3)} d_x = 2 \times \sum_{i \in A_5} d_i$$

sans avoir besoin d'introduire les coefficients $\frac{1}{2}$.

3.2.5 Le cas G_2.

On considère maintenant la fonction de partition invariante modulaire associée au graphe de nombre de Coxeter six,

$$Z_{D_4} = |\chi_0 + \chi_4|^2 + 2\,|\chi_2|^2 \tag{3.53}$$

Cette fonction de partition est définie par l'invariant modulaire diagonale par bocs M_{D_4}. On considère une restriction de cet invariant modulaire qui est invariant sous l'action du sous-groupe de congruence du groupe modulaire $\Gamma^0(3)$.

$$M_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

L'invariance de la sous-fonction de partition générée par cette matrice modulaire sous l'action du $\Gamma^0(3)$ est vérifié par la commutation de M_{G_2} avec la représentation de dimension 5 de ces deux générateurs T et $S^{-1}T^{-3}S$. Le sous-index G_2 est choisie parce que les entrées diagonales de la matrice modulaire coïncident avec les exposants du du graphe de Dynking non-simplement lacé G_2.

Scission Modulaire. Le membre gauche de l'équation (3.1.2) donne une famille de 25 matrices $K_{i\,j}$ de dimension 5×5. L'espace vectoriel engendré par cet ensemble de matrices est de dimension $r = 9$. G_2 est un graphe non-simplement lacé et pour cela on s'attend à ce que la dimension de l'algébre des symétries quantiques soit plus grande que r.

- **Norme 1 :** Les matrices $K_{0,0}, K_{0,1}, K_{1,0}, K_{1,1}$ sont de norme 1 et donnent 4 matrices torique $W_{x,0}$ comment suit $W_{0,0} = K_{0,0}, W_{1,0} = K_{0,1}, W_{3,0} = K_{1,0}, W_{4,0} = K_{1,1}$
- **Norme 2 :** Il y a quatre matrices de norme deux : $K_{0,2}$, $K_{1,2}$, $K_{2,0}$ et $K_{2,1}$. Ce sont des matrices avec des entrées multiples de deux. Cela veut dire que chaque matrice se décompose en somme de deux fois la même matrice torique que l'on note $\hat{W}_{x,0}$. Ainsi on a $\hat{W}_{2,0} = \frac{1}{2}K_{0,2}$, $\hat{W}_{5,0} = \frac{1}{2}K_{1,2}$, $\hat{W}_{6,0} = \frac{1}{2}K_{2,0}$ et $\hat{W}_{7,0} = \frac{1}{2}K_{7,0}$
- **Norme 4 :** Il y a une matrice de norme quatre $K_{2,2}$. Cette matrice a des entrées multiples de quatre, elle se décompose donc en quatre fois la même matrice torique $\hat{W}_{8,0} = \frac{1}{4}K_{2,2}$.

On définit de cette manière neuf matrices toriques différentes que l'on présente explicitement

$$W_{0,0} = M$$

$$W_{1,0} = W_{3,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad \hat{W}_{2,0} = \hat{W}_{6,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \end{pmatrix}$$

$$W_{4,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad \hat{W}_{5,0} = \hat{W}_{7,0}^{tr} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\hat{W}_{8,0} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

La notation $\hat{W}_{x,0}$ identifie les matrices qui apparaisent avec multiplicité plus grande que 1 dans la décomposition d'une matrice $K_{i\,j}$. Comme pour le cas F_4, l'équation de *Scission Modulaire* est satisfaite en rajoutant à droite, la multiplicité qui correspond à chaque matrice torique, on a ainsi pour le cas G_2

$$\left(N_i^{tr}\, M\, N_j\right) = \sum_{x\in\{0,3,4\}} (W_{x,0})_{\,i\,j} W_{x,0} + \sum_{x\in\{2,5,6,7\}} \mathbf{2}(\hat{W}_{x,0})_{\,i\,j} \hat{W}_{x,0} + \mathbf{4}(\hat{W}_{8,0})_{\,i\,j} \hat{W}_{8,0} \tag{3.55}$$

Les coefficients deux et quatre sont interprétés de deux manières différentes :

- La première interprétation consiste à définir $W_{0,x} = 2 \times W_{x,0}$ pour $x \in \{2,5,6,7\}$, $W_{0,8} = 4 \times W_{8,0}$ et $W_{0,x} = W_{x,0}$ pour $x \in \{1,2,4\}$. Dans ce cas on a une algèbre de symétries quantiques de dimension $dimOc = 9$, et le graphe d'Ocneanu est composé par des graphes non simplement lacées.
- La deuxieme interprétation consiste à considérer que les matrices $W_{0,x}$ sont égales aux matrices $W_{x,0}$ pour tous les vertex, et les coefficients sont dûes à la multiplicité des matrices $\hat{W}_{x,0}$. On a alors une algèbre de symétries quantiques de dimension $dimOc = 16$ avec les matrices toriques $\hat{W_{2,0}}$, $\hat{W_{5,0}}$, $\hat{W_{6,0}}$, $\hat{W_{7,0}}$ associées chacune à deux vertex du graphe d'Ocneanu et la matrice $\hat{W_{8,0}}$ associée à quatre vertex de ce graphe.

Le graphe d'Ocneanu et l'agèbre des symétries quantiques.

S1. Première solution : $\hat{W}_{0,z} = 2\hat{W}_{z,0}$. On considère d'abord le cas ou l'algébre des symétries quantiques est de $dimOc = 9$, le graphe d'Ocneanu a donc neuf points, les solutions de (2.10) pour les paires $(i,\, j)$ égal à $(0,1)$ et à $(1,0)$ donnent les deux générateurs chiraux V_{10} et V_{01} respectivement qui, dans l'ordre choisi pour les matrices toriques, ont la forme suivante :

$$V_{10} = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 2 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad V_{01} = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & 2 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & 2 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & 2 \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

Ces deux matrices sont les matrices d'adjacence des parties chirales gauche et droite du graphe d'Ocneanu. Ce dernier est montré Figure (3.12). A partir des matices $V_{00} = \mathbb{I}$, V_{10} et

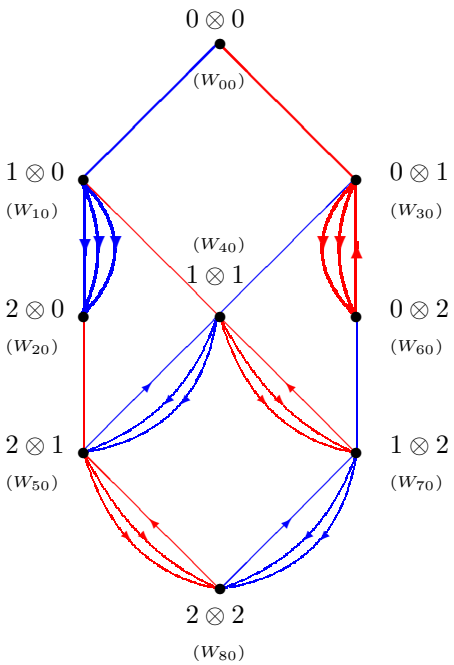


FIG. 3.12 – Graphe d'Ocneanu de G_2, à neuf points.

V_{01}, les équations (2.17), (2.18) et (2.19) permettent de récupérer de manière automatique les matrices de double fusion $V_{i\,j}$, et à partir des matrices toriques twistées W_{xy}.

L'algébre de symétries quantiques est réalisée comme $Oc(G_2) = B_3 \otimes B_3$. Les étiquettes de la Figure 3.12 correspondent à la notation des éléments de la base $a \otimes b$, où a et b dénotent les vertex du graphe B_3. L'identification entre les notations est la suivante

$x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0\otimes 0, 1\otimes 0, 2\otimes 0, 0\otimes 1, 1\otimes 1, 2\otimes 1, 0\otimes 2, 1\otimes 2, 2\otimes 2\}$.

Le produit dans $Oc(G_2)$ est défini par $(a\otimes b)\,(c\otimes d) = a\,c\otimes b\,d = (G_a)_{ec}(G_b)_{fd}(e\otimes f)$ où les matrices G_a sont les constantes de structure du graphe B_3.

Une représentation 9×9 de l'algèbre des symétries quantiques est donnée par les matrices O_x qui sont calculées à partir des relations de récurence du graphe $Oc(G_2)$ et en termes des deux générateurs $O_{1\otimes 0} = V_{10}$ et $O_{0\otimes 1} = V_{01}$ comme suit

$$\begin{array}{l|l} O_{2\otimes 0} = (O_{1\otimes 0})^2 - O_{0\otimes 0} & O_{1\otimes 1} = O_{1\otimes 0}O_{0\otimes 1} \\ O_{2\otimes 1} = (O_{1\otimes 0})^2\, O_{0\otimes 1} - O_{0\otimes 1} & O_{0\otimes 2} = (O_{0\otimes 1})^2 - O_{0\otimes 0} \\ O_{1\otimes 2} = (O_{0\otimes 1})^2\, O_{1\otimes 0} - O_{1\otimes 0} & O_{2\otimes 2} = (O_{1\otimes 0})^2\,(O_{0\otimes 1})^2 - (O_{0\otimes 1})^2 \end{array} \tag{3.57}$$

Elles peuvent être exprimées de manière compacte à partir des matrices de fusion de A_5.

$$O_{(a\otimes 0)} = \left(\begin{array}{c|c|c} G_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & G_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & G_a \end{array}\right) \quad O_{(a\otimes 1)} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & G_a & \cdot \\ \hline G_a & \cdot & 2\,G_a \\ \hline \cdot & G_a & \cdot \end{array}\right) \quad O_{(a\otimes 2)} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & 2\,G_a \\ \hline \cdot & 2\,G_a & \cdot \\ \hline G_a & \cdot & G_a \end{array}\right) \tag{3.58}$$

Ces matrices fournissent les constantes de structure de l'algébre de symétries quantiques.

Chaque partie chirale est composée par l'union de trois copies disjointes du graphe B_3. La première $B^l = \{0\otimes 0, 1\otimes 0, 2\otimes 0\}$, ou $B^r = \{0\otimes 0, 0\otimes 1, 0\otimes 2, 1\otimes 2\}$, est une sous-algébre de graphe B_3. La deuxième et la troisième copie : $b_1^l = \{0\otimes 1, 1\otimes 1, 2\otimes 1\}$, ou $b_1^r = \{1\otimes 0, 1\otimes 1, 1\otimes 2\}$, et $b_2^l = \{0\otimes 2, 1\otimes 2, 2\otimes 2\}$, ou $b_1^r = \{2\otimes 0, 2\otimes 1, 2\otimes 2\}$ sont des sous-modules sur la sous-algèbre B_3 respective. Les super indices l et r dénotent la sous algèbre chirale gauche et droite respectivement. La table de multiplication peut être construite à partir de la table de multiplication de B_3.

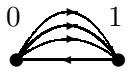
$\times$	B	b_1	b_2
B	B	b_1	b_2
b_1	b_1	$B+b_2$	b_1
b_2	b_2	b_1	$B+b_2$

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions. Le graphe G_2 n'apparaît pas explicitement parmi les sous-graphes qui composent le graphe de symétries quantiques, mais G_2 est un module à droite et à gauche sur A_5 et sur l'agèbre de symétries queantiques $Oc(G_2)$. Le graphe G_2 et sa matrice de adjacence sont montrés Figure 3.13

L'action de A_5 sur G_2 est codée par les matrices F_i obtenues à partir des relations de récurrence codées par le graphe A_5, avec générateur $F_1 = Ad(G_2)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_3$.

$$F_0 = F_4 = \mathbb{I}_2; \quad F_1 = F_3 = Ad(G_2); \quad F_2 = 2\times \mathbb{I}_2 \tag{3.59}$$

L'action de $Oc(G_2)$ sur G_2 est codée par les matrices S_x. Ce sont des matrices 2×2 donnant une représentation de l'algébre des symétries quantiques. Les matrices S_x pouvent



$$Ad(G_2) = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 3 & . \end{pmatrix}$$

FIG. 3.13 – Le graphe de Coxeter B_3 et sa matrice d'adjacence $Ad(B_3)$

.

être calculées par deux méthodes différentes : une première méthode considére le fait que les matrices S_x forment une représentation de l'algébre des symétries quantiques. Elles peuvent être calculées en utilisant les relation de récurrence des matrices O_x, à partir des générateurs chiraux $S_{1\otimes 0} = S_{0\otimes 1} = Ad(G_2)$, où $Ad(G_2)$ est la matrice d'adjacence de G_2. On utilisera alors les relations (3.57) pour calculer les matrices S_x.

La deuxième méthode utilise la réalisation de $Oc(G_2)$. L'action de $Oc(G_2)$ sur le graphe G_2 est donnée normalement par

$$x\,p = (a \otimes b)\,p \equiv a\,(b\,p)$$

où a et b indiquent les vertex du graphe B_3 et p les vertex du graphe G_2. On se sert de l'action du graphe B_3 sur le graphe G_2. Cette dernière est bien définie et est codée par les trois matrices :

$$s_0^g = \begin{pmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{pmatrix} \quad s_1^g = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 3 & . \end{pmatrix} \quad s_2^g = \begin{pmatrix} 2 & . \\ . & 2 \end{pmatrix}$$

Les matrices S_x sont définies alors comme $S_x = s_a^g s_b^g$ où $x = a \otimes_J b$. La liste des matrices donnant l'action de $Oc(G_2)$ sur G_2 est la suivante

$$S_{0\otimes 0} = \begin{pmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{pmatrix} \quad S_{1\otimes 0} = S_{0\otimes 1} = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 3 & . \end{pmatrix} \quad S_{2\otimes 0} = S_{0\otimes 2} = \begin{pmatrix} 2 & . \\ . & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_{1\otimes 1} = \begin{pmatrix} 3 & . \\ . & 3 \end{pmatrix} \quad S_{2\otimes 1} = S_{1\otimes 2} = \begin{pmatrix} . & 2 \\ 6 & . \end{pmatrix} \quad S_{2\otimes 2} = \begin{pmatrix} 4 & . \\ . & 4 \end{pmatrix}$$

Règle de somme quadratique. La liste des dimensions des blocs simples des algèbres A_5 et $Oc(G_2)$ sont les suivantes

$$d_i = \{2, 4, 4, 4, 2\}$$

$$d_x = \{2, 4, 4, 4, 6, 8, 4, 8, 8\}$$

La somme des dimensions des blocs de type A_5 donne comme résultat $\sum_{i\in A_{11}} d_i^2 = 56$. On observe que cette valeur est le tiers de la dimension du même type pour le graphe D_4, ce qui est attendue puisque G_2 est le pliage $\mathbb{Z}_3$ du graphe D_4. La relation entre la somme des

dimensions carrés est la suivante

$$\sum_{x\in Oc(G_2)} \frac{1}{n_x} d_x^2 = 3 \times \sum_{i\in A_5} d_i^2 = 168$$

où le facteur n_x est égal à 2 pour $x = \{2\otimes 0, 0\otimes 2, 2\otimes 1, 1\otimes 2\}$, $n_{2\otimes 2} = 4$ et est égal à 1 pour tous les autres. C'est à dire que l'on introduit un facteur égal au coefficient du vertex x. Le facteur global 3 correspond au fait que G_2 est un $\mathbb{Z}_3$ *pliage* du graphe D_4.

S2. Deuxième solution : $W_{z,0} = W_{0,z}$ plus multiplicités.

On considère maintenant une solution à l'équation de *scission modulaire* dans laquelle les matrices toriques satisfont la relation (2.14), mais ces matrices apparaissent avec multiplicité. La conjugaison dans $SU(2)$ est triviale, et donc la relation (2.14) est simplement $W_{z,0} = W_{0,z}$. Les matrices toriques sont les mêmes huit matrices que l'on a déjà calculé pour G_2, mais elles apparaissent avec repetitions.

$$W_{2,0} = W_{2\epsilon,0} = \hat{W}_{2,0} \quad W_{5,0} = W_{5\epsilon,0} = \hat{W}_{5,0}$$

$$W_{6,0} = W_{6\epsilon,0} = \hat{W}_{6,0} \quad W_{7,0} = W_{7\epsilon,0} = \hat{W}_{7,0}$$

$$W_{8,0} = W_{8\epsilon,0} = W_{8\epsilon\epsilon,0} = W_{8\epsilon\epsilon\epsilon,0} = \hat{W}_{8,0}$$

La dimension de l'algébre des symétries quantiques est $d_O = 16$, les générateurs chiraux V_{10} et V_{01} (en choisissant un ordre approprié pour les vertex z) ont la forme explicite suivante :

$$V_{10} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & .
\end{pmatrix}$$

$$V_{01} = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont les matrices d'adjacence des parties chirales gauche et droite du nuveau graphe $Oc(G_2)$. La structure de V_{10} montre clairement quatre blocs correspondant à des matrices d'adjacence des sous-graphes D_4. Le graphe de symétries quantiques est un graphe bipartite avec deux générateurs chiraux que l'on note $1\otimes 0$ et $0\otimes 1$. Ils sont associés aux matrices V_{10} et V_{01} respectivement. Chaque partie chirale est formée par quatre sous-graphes D_4, le premier est une sous-algèbre de graphe D_4 et les trois autres sont des modules sous l'action du premier. On notera chacun de ces sous-graphes comme suit : D pour le graphe sous-algèbre, et d_1, d_2 et d_3 pour chacun des sous-graphes module. Le graphe de symétries quantiques est montré Figure 3.14, avec le graphe chiral gauche indiqué par les lignes bleues, et le graphe chiral droit indiqué par les lignes rouges.

La réalisation de l'algébre de symétries quantiques est donnée $Oc(G_2) = D_4 \otimes D_4$. La notation du graphe correspond à cette réalisation oú chaque vertex est noté $z = a \dot{\otimes} b$ avec z un index du graphe d'Ocneanu courant dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 2\epsilon, 3, 4, 5, 5\epsilon, 6, 7, 8, 8\epsilon, 6\epsilon, 7\epsilon, 9\epsilon\epsilon, 9\epsilon\epsilon\epsilon\}$, et a et b des vertex du graphe D_4 $\{0,\ 1,\ 2,\ 2'\}$ (voir Figure 3.1).

Les quatre sous-graphes du graphe chiral gauche sont donnés par les ensembles de vertex suivants :

$$D = \{0\otimes 0, 1\otimes 0, 2\otimes 0, 2'\otimes 0\} \quad d_1 = \{0\otimes 1, 1\otimes 1, 2\otimes 1, 2'\otimes 1\}$$

$$d_2 = \{0\otimes 2, 1\otimes 2, 2\otimes 2, 2'\otimes 2\} \quad d_2' = \{0\otimes 2', 1\otimes 2', 2\otimes 2', 2'\otimes 2'\}$$

La partie chirale droite (en rouge) est le graphe de Cayley de la multiplication par le générateur $\underline{1}'$ (correspondant à la matrice V_{01}).

Les générateurs V_{10} et V_{01} et les équations (2.17), (2.18), (2.19) permettent de calculer automatiquement l'ensemble des matrices de double fusion $V_{i\,j}$. Les matrices toriques twistées W_{xy} sont données par la réalisation $(V_{i\,j})_{xy} = (W_{xy})_{i\,j}$.

Chaque sous graphe D_4 a deux vertex non discernables (symétriques par $\mathbb{Z}_2$ du graphe D_4). Cette caractéristique implique que pour résoudre les relations de récurrence de l'algébre de

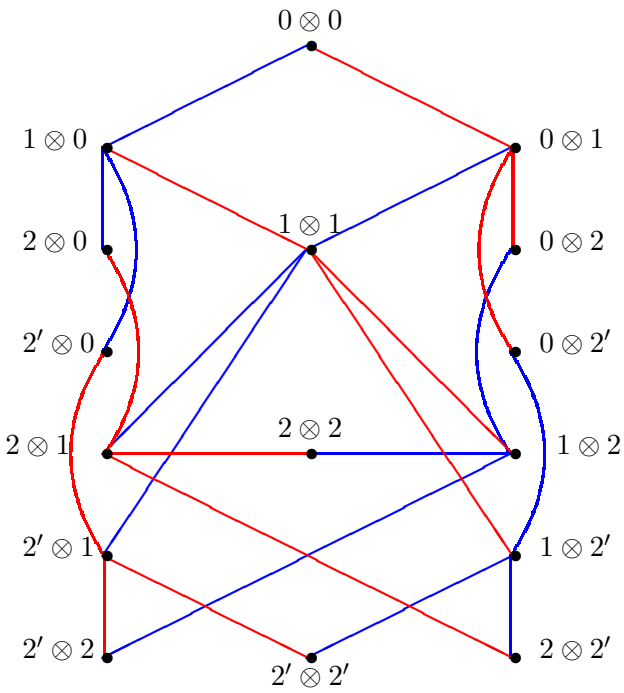


FIG. 3.14 – Graphe d'Ocneanu de G_2, a seize points.

symétries quantiques, on a besoin de trois générateurs suplementaires, $2 \otimes 0$, $2 \otimes 2$ et $2' \otimes 2'$, pour pouvoir séparer les deux branches de chaque graphe D_4. Une représentation 16×16 de l'algèbre de symétries quantiques est donnée par les matrices O_x qui sont calculées à partir des relations de récurence du graphe $Oc(G_2)$. Pour effectuer ce calcul, nous avons bessoin des deux générateurs $O_{1\otimes 0} = V_{10}$ et $O_{0\otimes 1} = V_{01}$, l'identité $O_{0\otimes 0}$, et les trois matrices $O_{2\otimes 0}$, $O_{2\otimes 2}$, $O_{2'\otimes 2'}$. Ces derniers sont calcules a partir de equations suivantes. La **Proprieté 5** (Chapitre 1) indique que chaque matrice doit satisfaire l'équation

$$W_{x,y} = \sum_z (O_x)_{z,y}\, W_{0,z}\ .$$

A partir du graphe, nous pouvons lire que les matrices $O_{2\otimes 0}$, $O_{2\otimes 2}$, $O_{2'\otimes 2'}$ doivent satisfaire les équations

$$\begin{array}{l|l|l}
O_{2\otimes 0} \cdot O_{1\otimes 0} = O_{1\otimes 0} & O_{2\otimes 2} \cdot O_{0\otimes 1} = O_{2\otimes 1} & O_{2'\otimes 2'} \cdot O_{0\otimes 1} = O_{2'\otimes 1} \\
O_{2'\otimes 0} = (O_{1\otimes 0})^2 - O_{2\otimes 0} - O_{0\otimes 0} & O_{2\otimes 2'} = O_{0\otimes 1} \cdot O_{2\otimes 1} - O_{2\otimes 2} - O_{2\otimes 0} & O_{2'\otimes 2} = O_{0\otimes 1} \cdot O_{2'\otimes 1} - O_{2'\otimes 2'} - O_{2'\otimes 0} \\
O_{2\otimes 0} \cdot O_{1\otimes 0} = O_{1\otimes 0} & O_{2\otimes 2'} \cdot O_{0\otimes 1} = O_{2\otimes 1} & O_{2'\otimes 2} \cdot O_{0\otimes 1} = O_{2'\otimes 1}
\end{array} \tag{3.60}$$

Ce systèmes d'équations plus la contraite d'avoir des matrices avec des entrées entières et positives, est sufisante pour déterminer les trois générateus supplementaires. Nottons que la solution de ces équations implique automatiquement que nous avons aussi les matrices $O_{2'\otimes 0}$, $O_{2'\otimes 2'}$ et $O_{2'\otimes 2'}$. Les autres matrices s'obtiennent directement à partir des rélations de récourence du graphe.

Le produit dans $Oc(G_2)$ est défini par $(a \otimes b)\,(c \otimes d) = a\,c \otimes b\,d = (G_a)_{ec}(G_b)_{fd}(e \otimes f)$ où les matrices G_a sont les constants de structure du graphe D_4. Ceci permet d'écrire les matrices O_x de manière compacte

$$O_{(a\otimes 0)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} G_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & G_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & G_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & G_a \end{array}\right) \quad O_{(a\otimes 1)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdot & G_a & \cdot & \cdot \\ \hline G_a & \cdot & G_a & G_a \\ \hline \cdot & G_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & G_a & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

$$O_{(a\otimes 2)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \cdot & G_a & \cdot \\ \hline \cdot & G_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & G_a & \cdot \\ \hline G_a & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \quad O_{(a\otimes 2')} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & G_a \\ \hline \cdot & G_a & \cdot & \cdot \\ \hline G_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & G_a & \cdot \end{array}\right) \tag{3.61}$$

La table de multiplication peut être construite à partir de la table de multiplication de B_3.

$\times$	D	d_1	d_2	$d_{2'}$
D	D	d_1	d_2	$d_{2'}$
d_1	d_1	$D + d_2 + d_{2'}$	d_1	d_1
d_2	d_2	d_1	b_2'	D
$d_{2'}$	$d_{2'}$	d_1	D	d_2

où chaque bloc a la forme d'une table de multiplication de D_4 mais avec les vertex correspondant au bloc.

$\times$	0	1	2	$2'$
0	0	1	2	$2'$
1	1	$0 + 2 + 2'$	1	1
2	2	1	$2'$	0
$2'$	$2'$	1	0	2

Le graphe de Coxeter généralisé, modules et dimensions. Le graphe G_2 n'apparaît pas explicitement parmi les sous-graphes qui composent le graphe de symétries quantiques, mais G_2 est un module à droite et à gauche sur A_5 et sur l'agèbre de symétries queantiques $Oc(G_2)$. Le graphe G_2 et sa matrice de adjacence sont montrées Figure 3.13 L'action de A_5 sur G_2 est codée par les matrices F_i obtenues à partir des relations de récurrence codée par le graphe A_5, avec générateur $F_1 = Ad(G_2)$ et unité $F_0 = \mathbb{I}_3$.

$$F_0 = F_4 = \mathbb{I}_2; \quad F_1 = F_3 = Ad(G_2); \quad F_2 = 2 \times \mathbb{I}_2 \tag{3.62}$$

L'action de $Oc(G_2)$ sur G_2 est codée par les matrices S_x. Ce sont des matrices de dimension 2×2 calculées en utilisant les relation de récurrence des matrices O_x, à partir des générateurs chiraux $S_{1\otimes 0} = S_{0\otimes 1} = Ad(G_2)$, oú $Ad(G_2)$ est la matrice d'adjacence de G_2. On utilisera alors les equation (3.60) pour calculer les matrices S_x. On trouve

$$S_{0\otimes 0} = \begin{pmatrix} 1 & . \\ . & 1 \end{pmatrix} \quad S_{1\otimes 0} = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 3 & . \end{pmatrix} \quad S_{1\otimes 1} = \begin{pmatrix} 3 & . \\ . & 3 \end{pmatrix}$$

et nous avons

$$S_{0\otimes 0} = S_{2\otimes 0} = S_{2'\otimes 0} = S_{0\otimes 2} = S_{0\otimes 2'} = S_{2\otimes 2'} = S_{2'\otimes 2}\,.$$

$$S_{1\otimes 0} = S_{0\otimes 1} = S_{2\otimes 1} = S_{2'\otimes 1} = S_{1\otimes 2'} = S_{1\otimes 2}\,.$$

$$S_{1\otimes 1} = S_{2\otimes 2} = S_{2'\otimes 2'}\,.$$

Règle de somme quadratique. Les dimensions des blocs simples des algèbres A_5 et $Oc(G_2)$ sont les suivantes

$$d_i = \{2, 4, 4, 4, 2\}$$

$$d_x = \{2, 4, 2, 2, 4, 6, 4, 4, 2, 4, 2, 2, 2, 4, 2, 2\}$$

La somme des dimensions des blocs de type A_5 donne $\sum_{i\in A_{11}} d_i^2 = 56$. On observe que cette valeur est le tiers de la dimension du même type pour le graphe D_4, ce qui est attendu puisque G_2 est le pliage $\mathbb{Z}_3$ du graphe D_4. La relation entre la somme des dimensions carrés est

$$\sum_{x\in Oc(G_2)} d_x^2 = 3 \times \sum_{i\in A_5} d_i^2 = 168 \ .$$

3.3 Un exemple non-simplement lacé du système $SU(3)$.

Dans le système de graphes $SU(3)$ on retrouve des graphes non simplement lacés parmi les graphes ADE, on peut considérer par exemple le graphe $\mathcal{E}_9$ étudie dan le Chapitre II . Ces graphes sont associes aux fonctions de partiton invariant modulaire de type $SU(3)$ qu'on connais déjà. On s'intéresse à un groupe de fonctions de partiton données par une restriction d'un invariant modulaire de type $SU(3)$, qui amènerait, par analogie avec les cas $SU(2)$ qu'on vient de présenter, à une fonction de partiton invariante sous l'action d'un sous-groupe de congruence de $SL(2, \mathbb{Z})$.

On considére le graphe exceptionnel $\mathcal{E}_5$, ce graphe a plusieurs symétries, notament l'invariance sous l'action de Z_3 et Z_6 qui correspond à des rotations de $2\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ autour du centre du graphe. L'étude des "pliages" des graphes de type $SU(3)$ simplement lacés par une symétrie a été traité dans ([72]). Ici on considèrée l'étude d'une restriction de l'invariant modulaire $\mathcal{E}_5$ du pont de vue des symétries quantiques. On considère un graphe non-simplement lacé (obtenu par pliage) qu'on notera $F_{\mathcal{E}_5}$.

Ce graphe est défini par le pliage du graphe $\mathcal{E}_5$ par l'automorphisme suivante ;

$$\sigma(1_i) = 1_{i+3\ mod 6}$$

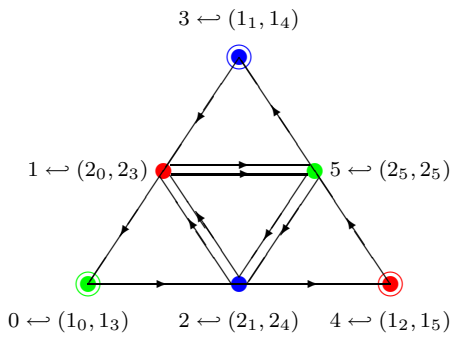


FIG. 3.15 – The $\mathcal{F}_{\mathcal{E}_5}$ diagramme.

$$\sigma(2_i) = 2_{i+3\ mod 6}$$

Restriction de l'invariant modulaire. On considère les restrictions de la fonction de partition $Z_{\mathcal{E}_5}$ qui sont invariants sous l'action d'un sous-groupe de congruence de type $\Gamma_0(n)$. On trouve deux restrictions possibles

$$Z = \|\chi_{00} + \chi_{22}\|^2 + \|\chi_{30} + \chi_{03}\|^2$$

invariante sous l'action du groupe de congruence $\Gamma_0(3)$, par analogie avec le processus suivi pour définir les symétries quantiques du graphe F_4 dans le système $SU(2)$. L'invariance de Z_F sous l'action du sous-groupe $\Gamma_0(3)$ peut être vérifié explicitement en regardant que la matrice modulaire associe

$$M = \begin{pmatrix}
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix} \tag{3.63}$$

commuté avec les générateurs T^2 et $S^{-1}T^{-3}S$, ou S et T sont des représentations de dimension 11×11 des générateurs du groupe modulaire. données par les équations

Scission Modulaire Dans $SU(3)$ les vertex du graphe principal $\mathcal{A}_5$ sont étiqueés par des pair ordonnés (i_1, i_2) avec $0 \leq i_{1;2} \leq 5$ et $i_1 + i_2 \leq 5$. Pour simplifier la notation on va a introduire un index de position $i,\ j, \cdots \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ donnant la position d'un pair $(i_1\, i_2)$ comme

$$i = i_1 + 6\, i_2 \quad \text{pour}$$

Le membre gauche de la équation (3.1.2) définit une famille de 441 matrices $K_{i\,j}$ de dimension 21×21, l'espace vectoriel engendré ces matrices a dimension $r = 72$.

On considère la décomposition des matrices $K_{i\,j}$ sur une base de matrices à entrées entieres non négatives avec de coefficients entiers également non négatif. La décomposition des 421 matrices définies par la matrice modulaire de $F_{\mathcal{E}_5}$ est la suivante

- **Norme 1** Il y a 63 matrices $K_{i,j}$ de norme carré égale à 1. La liste présentée à continuation donne la valeur des indexes des matrices de norme 1 :

  $\bullet(i,0),(i,1),(i,2),(i,10),(i,14),(i,15),(i,16),(i,19),(i,20)$ pour $i = \{0,1,2,15,16,20\}$

  $\bullet(i,0),(i,15),(i,20)$ pour $i = \{10,14,19\}$

  Ces matrices de norme 1 définissent 63 matrices toriques comme suit

  $$W_{z_{i\,j},0} = K_{i,j}$$

  avec $z_{i\,j} = pos(i,\ j)$ ou pos indique la position du pair d'index (i, j) dans la liste des 72 paires d'indices.
- **Norme 2** Il y a 9 matrices de norme deux : $K_{0,3}$, $K_{0,5}$, $K_{0,6}$, $K_{3,0}$, $K_{3,15}$, $K_{3,20}$, $K_{5,0}$, $K_{5,15}$, $K_{5,20}$. Ces neuf matrices se décomposent comme la somme de deux matrices toriques dont une matrice est déjà connue et une nouvelle matrice torique. Ceci définit les matrices toriques suivantes :

  $$W_{3,0} = K_{0,3} - K_{0,14} \quad ; \quad W_{4,0} = K_{0,5} - K_{0,10} \quad ; \quad W_{5,0} = K_{0,6} - W_{0,19}$$

  $$W_{30,0} = K_{3,0} - K_{14,0} \quad ; \quad W_{31,0} = K_{3,15} - K_{14,15} \quad ; \quad W_{32,0} = K_{3,20} - K_{14,20}$$

  $$W_{33,0} = K_{5,0} - K_{10,0} \quad ; \quad W_{34,0} = K_{5,15} - K_{10,15} \quad ; \quad W_{35,0} = K_{5,20} - K_{10,20}$$

On obtient de cette manière un ensemble de 72 matrices toriques. L'ensemble des paires d'indices détreminant des matrices toriques est :

$\bullet(i,0),(i,1),(i,2),(i,10),(i,14),(i,15),(i,16),(i,19),(i,20)$ pour $i = \{0,1,2,15,16,20\}$

$\bullet(i,0),(i,15),(i,20)$ pour $i = \{3,5,10,14,19\}$

$\bullet(0,3),(0,5),(0,6)$

Les indices apparaissa dans l'ordre correspondant au graphe des symétries quantiques Figure 3.3 est l'ordre des paires $(i,\ j)$ définit par les relations :

$$(i,\ j) \leq (i,\ j')\ sii\ j \leq j' \quad \text{et} \quad (i,\ j) \leq (i,'\ j)\ sii\ i \leq i'$$

Contrairement au cas F_4 (considéré comme l'analogue de $SU(2)$), il n'y a pas de matrices apparaissant plus d'une fois dans la décomposition d'une matrice $K_{i\,j}$. C'est à dire qu'il n'y a pas de matices avec multiplicité, ou satisfaisant la relation (3.2). Les matrices $W_{0,z}$ sont reliées aux matrices $W_{z,0}$ par la relation habituel $(W_{0,z})_{i\,j} = (W_{z,0})_{i^*\,j^*}$. L'ensemble complet des matrices toriques est trop grand pour être montré ici, mais tous les détails pour les calculer directement à partir de la matrice modulaire de $F_{\mathcal{E}_5}$ sont expliquès dans les paragraphes précédents. Certaines propriété méritent d'être remarquées : Les matrices $W_{0,0}$, $W_{5,0}$, $W_{13,0}$, $W_{15,0}$, $W_{23,0}$, $W_{25,0}$, $W_{31,0}$, $W_{35,0}$, $W_{47,0}$, $W_{57,0}$, $W_{58,0}$, $W_{71,0}$ sont symétriques, elles correspondent a des vertex réels ou auto-conjugés du graphe d'Ocneanu de $F_{\mathcal{E}_5}$. D'autre part les relations suivantes déterminent les vertex reliés par l'opérateur chiral C.

$$W_{1,0} = W^{tr}_{12,0} \quad ; \quad W_{2,0} = W^{tr}_{21,0} \quad ; \quad W_{3,0} = W^{tr}_{30,0} \quad ; \quad W_{4,0} = W^{tr}_{33,0} \quad ; \quad W_{6,0} = W^{tr}_{36,0}$$

$$W_{7,0} = W^{tr}_{39,0} \quad ; \quad W_{8,0} = W^{tr}_{42,0} \quad ; \quad W_{9,0} = W^{tr}_{51,0} \quad ; \quad W_{10,0} = W^{tr}_{60,0} \quad ; \quad W_{11,0} = W^{tr}_{63,0}$$

$$W_{14,0} = W^{tr}_{22,0} \quad ; \quad W_{16,0} = W^{tr}_{24,0} \quad ; \quad W_{17,0} = W^{tr}_{43,0} \quad ; \quad W_{18,0} = W^{tr}_{52,0} \quad ; \quad W_{19,0} = W^{tr}_{54,0}$$

$$W_{20,0} = W^{tr}_{63,0} \quad ; \quad W_{26,0} = W^{tr}_{44,0} \quad ; \quad W_{27,0} = W^{tr}_{53,0} \quad ; \quad W_{28,0} = W^{tr}_{55,0} \quad ; \quad W_{29,0} = W^{tr}_{65,0}$$

$$W_{32,0} = W^{tr}_{34,0} \quad ; \quad W_{37,0} = W^{tr}_{45,0} \quad ; \quad W_{38,0} = W^{tr}_{66,0} \quad ; \quad W_{40,0} = W^{tr}_{46,0} \quad ; \quad W_{41,0} = W^{tr}_{67,0}$$

$$W_{48,0} = W^{tr}_{56,0} \quad ; \quad W_{49,0} = W^{tr}_{61,0} \quad ; \quad W_{50,0} = W^{tr}_{68,0} \quad ; \quad W_{59,0} = W^{tr}_{69,0} \quad ; \quad W_{62,0} = W^{tr}_{70,0}$$

L'opérateur C est définie par la matrice $C_{x,y} = 1$ si $W_{x,0} = W^{tr}_{y,0}$ et zéro sinon. C est l'opérateur envoyant un vertex de l'algébre chirale droite (gauche) dans son conjugué par rapport à la chiralité de l'agèbre chirale gauche (droite).

Le graphe d'Ocneanu et l'algèbre de symétries quantiques.

La dimension de l'algèbre des symétries quantiques est $d_O = 72$. La solution de l'équation (2.10) pour la paire d'index $(\,i,\,j)$ fixés à $(1,0)$ ou $(0,1)$ [4] donne les deux matrices d'adjacence (droite et gauche) du graphe d'Ocneanu V_{10} et V_{01}. En choisissant un ordre adéquat des matrices $W_{z,0}$, la forme explicite de la matrice V_{10} est

[4] En utilisant l'étiquettage habituel pour les graphes $SU(3)$ ceci correspond a :
$(\,i\,j) = (1,0) \rightarrow (\,i_1,\,i_2) = (1,0)\,(\,j_1,\,j_2) = (0,0)$ et $(\,i\,j) = (0,1) \rightarrow (\,i_1,\,i_2) = (0,0),\,(\,j_1,\,j_2) = (1,0)$

$$V_{10} = \begin{pmatrix} Ad(\mathcal{E}_5) & . & . & . & . & . \\ . & Ad(\mathcal{E}_5) & . & . & . & . \\ . & . & Ad(\mathcal{E}_5) & . & . & . \\ . & . & . & Ad(\mathcal{E}_5) & . & . \\ . & . & . & . & Ad(\mathcal{E}_5) & . \\ . & . & . & . & . & Ad(\mathcal{E}_5) \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

où la matrice $Ad(\mathcal{E}_5)$ est la matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{E}_5$

$$Ad(\mathcal{E}_5) = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

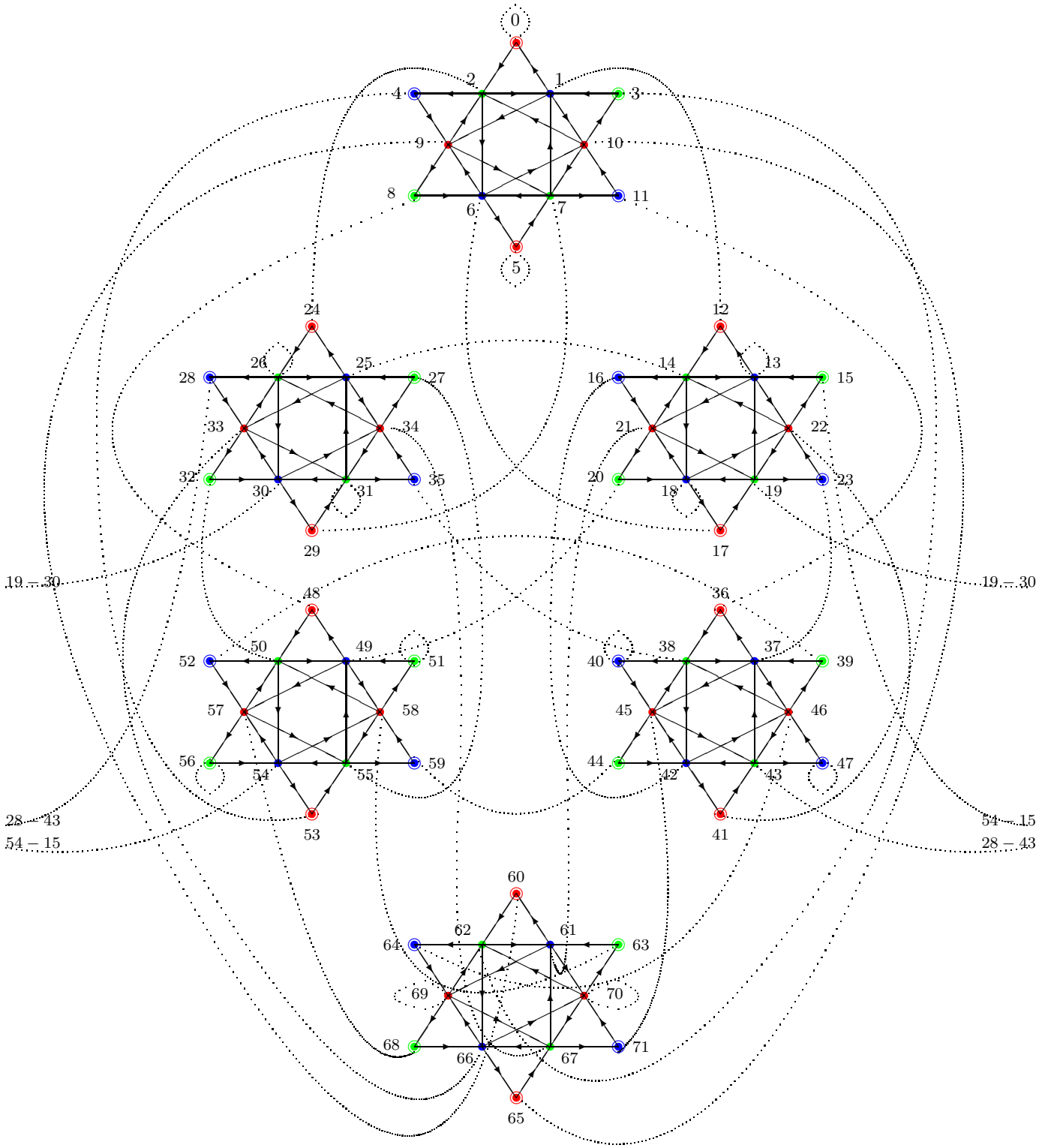


FIG. 3.16 – Le graphe d'Ocneanu associé au graphe non-simplement lacé $Oc(F\mathcal{E}_5)$.

Le générateur chiral droite peut s'écrire

$$V_{01} = C^{-1} V_{10} C$$

Dans la Figure 3.3 est présenté la partie chirale gauche du graphe des symétries quantiques, les lignes pointillés représentent l'action de l'opérateur chiral C sur les vertex du graphe. Dans l'ordre choisi, les matrices d'adjacence V_{10} et V_{01} correspondent aux générateurs droite et gauche de l'algébre des symétries quantique

$$O_2 = V_{10} \text{ pour le générateur chiral gauche et}$$

$$O_{24} = V_{o1} \text{ pou le générateur chiral droite .}$$

Les deux générateurs conjugués[5] sont : $O_1 = V_{10}^{tr}$ et $O_{12} = V_{01}^{tr}$

Dans la Figure 3.3 on reconnaît six sous-graphes de type $\mathcal{E}_5$. Le premier ($0 \leq z \leq 11$) est une sous-algèbre de graphe de type $\mathcal{E}_5$. Les autres cinq sous graphes sont des modules de la sous algèbre $\mathcal{E}_5$. La partie chirale droite est le graphe de Cayley de la multiplication par le générateur O_{24}, l'action de ce générateurs sur les vertex du graphes (donc le graphe chiral droite) peut être determinée à travers l'action de l'opérateur chiral C comme

$$O_{24} \cdot O_x = C^{-1} O_x C$$

A l'aide de ce graphe d'Ocneanu, des générateurs V_{10} et V_{01} et des équations (2.17), (2.18), (2.19) on peut obtenir automatiquement l'ensemble des matrices $V_{i\,j}$, ou de façon équivalente les matrices toriques twistées W_{xy}, qui sont données par la relation $(V_{i\,j})_{xy} = (W_{xy})_{i\,j}$.

[5]Rappelons que la conjugaison dans les graphes $SU(3)$ est donnée par $(i_1\, i_2)^* = (i_2, i_1)$, et que les générateurs conjugués sont les matrices d'adjacence du graphe avec les flèches renversées.

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse est centre sur le développement d'une technique de résolution de l'équation de scission modulaire. La solution de cette équation nous permet de calculer de manière relativement simple les symetries quantiques d'un invariant modulaire, c'est a dire : l'ensemble des matrices toriques, le graphe d'Ocneanu et une réalisation matricielle de l'algèbre des symétries quantiques $Oc(G)$. Dans la plupart des cas nous pouvons aussi determiner l'algèbre $Oc(G)$ et le graphe de Coxeter G associé. La méthode est telle que nous ne avons pas besoin de construire explicitement le groupoïde quantique $\mathcal{B}$, les résultats de cette recherche permetent d'obtenir, de manière indirecte, des informations utiles sur cette structure du grupiode quantique $\mathcal{B}$.

Dans ce travail nous avons présenté la de manière détaille de la méthode de scission modulaire, en remarquant particulierement les différences existantes entre le cas commutative et le cas non commutative, ainsi que les particulaites des cas du système $SU(2)$ et du système $SU(3)$. Nous avons montré explicitement la solution du problemme pour une serie d'exemples, parmi ces exemples nous trouvons, bien sur, certains cas déjà connues que on servi principalement pour illustrer la technique, mais nous avons aussi traite explicitement des cas dont la resolution n'était pas disponible dans la literature jusqu'a maintenant (même si les résultats finals étaient connus). Parmi ces derniérs exemples nous remarquons en particulier les problèmes $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_5/3$ et $\mathcal{E}_9$ du sytème $SU(3)$, pour ce dernier cas nous avons motré de une part que il est associé a une algèbre de symétries quantiques non commutative, ce qui mène a la solution la plus complexe du probleme de scission modulaire, et en deuxième lieu que cet invariant modulaire est associé à deux graphes $\mathcal{E}_9$ et $\mathcal{E}_9/3$. Avec la méthode de scission modulaire nous n'avons pas retrouve le troisieme graphe qui avait été éliminé par d'A. Ocneanu. Ceci est une évidence de que les résultats sont en accord avec la structure de groupoïde quantique que nous avons decrit briefment dans le premier chapitre.

Nous avons aussi exploré le cadre plus général des graphes non simplement lacé. Dans ce cas la méthode de scission modulaire nous a permis d'examiné les cas F_4, B_3, B_4, et G_2 du systéme $SU(2)$. Dans la famille SU3, nous avons examiné le graphe non simplement lacé $\mathcal{F}_5$ qui est un Z_3 quotient de l'exceptionnel simplement lacé $\mathcal{E}_5$ de même niveau. Dans tous les

cas, l'espace vectoriel du graphe considéré est lui-même un module sur l'algèbre de fusion de même niveau, qui est une algèbre de type A (résultat connu, tout au moins pour la série $SU2$). Par contre, ce module, qui est un Z_+-module, n'est pas "rigide", en ce sens que ses constantes de structure ne vérifient pas la propriété de symétrie usuelle $(F_n)_{ab} = (F_{\overline{n}})_{ba}$, la notation $\overline{n}$ désignant le "dual" (conjugué) de n dans l'algèbre de fusion (pour $SU(2)$, on a $\overline{n} = n$), ce qui est d'ailleurs bien évident puisque ces constantes sont déterminées par la matrice d'adjacence du graphe lui-même, qui, par hypothèse, n'est pas simplement lacé.

Dans les cas ordinaires (simplement lacés), on sait associer, à toute théorie conforme invariante modulaire, deux algèbres en dualité (plus précisément, un groupoide quantique) dont les algèbres de caractères s'identifient à l'algèbre de fusion, d'une part, et à l'algèbre des symétries quantiques, d'autre part. Pour tous les cas non - simplement lacés examinés, nous avons déterminé la décomposition par blocs (il s'agit d'algèbres de dimension finie semi - simples) des deux algèbres qui, pour une situation simplement lacée, devraient avoir la même dimension totale, les deux espaces vectoriels sous jacents étant en dualité. Dans le cas non simplement lacé nous n'avons pas obtenu une structure aussi simple du fait des propriétés inhabituelles des modules, mais il s'avère que l'introduction de facteur correctifs très simples (essentiellement justifiés par l'existence d'une action de groupe finie sur le graphe correspondant) permet d'identifier les dimensions obtenues. Ce travail suggère donc l'existence d'une nouvelle structure algébrique, finalement assez "simple" lié au exemples non-simplement lacés.

L'exploration de cette structure formelle associé aux graphes non-simplement lacés constitue une direction de travail a développer dans le futur. L'étude de la structure algèbrique (type gruoide quantique) associé aux cas non simplement lacés de plus bas niveau, (B_3, B_4 ou G_3), parait être un problème que nous pourrions aborder de manière empirique comme on l'a fait pour le cas $\mathcal{A}_1$ de $SU(3)$. Dans ce dernier, comme pour les ecemples non simplement lacés, nous ne comptions pas avec une definition bien étalie des cellules de diferent types. Une definition "à la main" pourrait être proposé pour introduir un coproduit compatible avec la multiplication de l'espace des doubles triangles pour, ensuite, étudier les propriétés algébriques del objet résultalt par dualité.

Autre direction de travail consiste en explorer, avec notre point de vue, les differents applications à la physique théorique que ce formalisme poirrait avoir. Des travaux faisant mention à structure de grupoide quantique associé aux graphes ADE est déjà apparue dans plusieurs travaux (en particulier [67], [29], [69]). Mais nous n'avons pas cherché à aller plus loin dans cette direction, réservant ce travail pour une recherche ultérieure.

Bibliographie

[1] G. Aldon, J. M. Mény, L. Xavier, *Introduction à la théorie des graphes.* CRDP Académie de Lyon, 2005.

[2] H. Bacry,*Lectures on group theory and particle theory*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1977.

[3] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. Petkova, J.-B. Zuber, *On the classification of Bulk and Boundary Conformal Field Theories*, Phys. Lett. **B444** (1998) 163–166.

[4] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. Petkova, J.-B. Zuber, *Boundary Counditions in Rational Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B579** (2000) 707–773.

[5] V. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algebra.* The Macmillan Company, 1967.

[6] Bockenhauer, Jens and Evans, David E., *Modular invariants, graphs and alpha-induction for nets of subfactors. I*, Commun. Math. Phys. , **197** (1998) 361-386, hep-th/9801171.

[7] Bockenhauer, Jens and Evans, David E., *Modular invariants, graphs and alpha-induction for nets of subfactors. II*, Commun. Math. Phys. , **200** (1999) 57-103, hep-th/9805023.

[8] Bockenhauer, Jens and Evans, David E., *Modular invariants, graphs and alpha-induction for nets of subfactors. III*, Commun. Math. Phys. , **205** (1999) 183-228, hep-th/9812110.

[9] J. Böckenhauer, D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors I*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 361–386 ; *II*, Commun. Math. Phys. **200** (1999) 57–103 ; *III*, Commun. Math. Phys. **205** (1999) 183–200.

[10] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487.

[11] Bockenhauer, Jens and Evans, David E., *On alpha induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. , **208** (1999) 429-487, math.oa/9904109.

[12] Bockenhauer, Jens and Evans, David E. and Kawahigashi, Yasuyuki, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. , **210** (2000) 733-784, math.oa/9907149.

[13] G. Böhm, K. Szlachányi, *A coassociative $C^\star$ quantum group with non-integral dimensions*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 437–456.

[14] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, *Weak Hopf Algebras I. Integral theory and $C^\star$ structure*, J. Algebra **221** (1999) 385–438.

[15] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Modular invariant partition functions in two dimensions*, Nucl. Phys. **B280** (1987) 445–465.

[16] A.Cappelli, C.Itzykson and J. B. Zuber, *The ADE classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Comm. Math. Phys. **13** (1987) 1.

[17] R. Coquereaux, *Classical and quantum polyhedra : A fusion graph algebra point of view*, Lectures given at the Karpacz Winter School 2001, AIP Conf. Proc. **589** (2001) 181–203.

[18] R. Coquereaux, *Notes on the quantum tetrahedron*, hep-th/0011006, Moscow Math. J. vol2, n1, Jan.-March, (2002) 1-40,

[19] R. Coquereaux, *The A_2 Ocneanu quantum groupoidï*, hep-th/0311151, Contemporary Mathematics, **376** (2005).

[20] R. Coquereaux, *Racah-Wigner quantum 6j Symbols, Ocneanu Cells for A_N diagrams and quantum grupoids*, hep-th/0511293, (2006).

[21] R. Coquereaux, A. O. Garcia, R. Trinchero, *Hopf stars, twisted Hopf stars and scalar products on quantum spaces*, J. Geom. Phys., **36** (2000) 25–59 , math-ph/9904037.

[22] R. Coquereaux, A. O. Garcia, *On bialgebras associated with paths and essential paths on ADE graphs*, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. **2** (2005) 441-466, math-ph/0411048.

[23] R. Coquereaux, D. Hammaoui, G. Schieber, E.H. Tahri*Comments about quantum symmetries of SU(3) graphs*, math-ph/0508002.

[24] R. Coquereaux, M. Huerta *Torus structure on graphs and twisted partition functions for minimal and affine models*, J. of Geom. and Phys., **48, 4** (2003) 580-634, hep-th/0301215.

[25] R. Coquereaux, E. Isasi, *On quantum symmetries os the non-ADE graph F_4*, Adv. Theor. Math. Phys. , **8**, (2005), 955-985, hep-th/0409201.

[26] R. Coquereaux, G. Schieber, *Twisted partition functions for ADE boundary conformal field theories and Ocneanu algebras of quantum symmetries*, hep-th/0107001, J. of Geom. and Phys. **781** (2002) 1-43.

[27] R. Coquereaux, G. Schieber, *Determination of quantum symmetries for higher ADE systems from the modular T matrix*, J.Math.Phys. 44 (2003) 3809-3837, hep-th/0203242.

[28] R. Coquereaux, R. Trinchero, *On Quantum symmetries of ADE graphs*, Advances in Theor. and Math. Phys. , **8, 1**, (2004) , hep-th/0401140.

[29] C. H. Chui, C. Mercat, W. Orrick and P. A. Pearce, *Integrable Lattice Realizations of Conformal Twisted Boundary Conditions*, Phys.Lett. B517 (2001) 429-435, hep-th/0106182.

[30] C. H. Chui, C. Mercat, P. A. Pearce, *Integrable and conformal twisted boundary conditions for sl(2) A-D-E lattice models*, J. Phys., A36, (2003) 2623-2662, hep-th/0210301.

[31] P. Di Francesco, P. Matthieu, D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1997.

[32] F. Di Francesco, J.-B. Zuber, *SU(N) Lattice integrable models associated with graphs*, Nucl. Phys **B338**, (1990), 602-646.

[33] P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *SU(N) Lattice integrable models associated with graphs*, Nucl. Phys **B338** (1990) 602–646 ; *SU(N) Lattice Integrable Models and Modular Invariance*, Recents Developments in Conformal Field Theories, Trieste Conference (1989), S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin, J.-B. Zuber eds., World Scientific (1990).

[34] P. Di Francesco, J.-B. Zuber, *In Recent Developments in Conformal Field Theories*, Trieste Conference 1989, S. Randjbar-Daemi, E Sezgin and J.-B. Zuber eds, World Scientific 1990 ;
P. Di Francesco, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 407-500.

[35] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, *Modular invariance and the fusion algebra*, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **5B** (1998) 87–97.

[36] B. Dubrovin, *Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group*, hep-th/9303152, SISSA-29/93/FM.

[37] P. Etingof, M. Kovanof, *Representations of tensor categories and Dynkin diagrams*,nt.Math.Res.Not. , **5** (1995) 235-247, hep-th/9408078.

[38] D. E. Evans, *Critical Phenomena, modular invariants and operator algebras*, (2002), math.oa/0204281.

[39] D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Quantum symmetries on operator algebras*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[40] D. E. Evans, P. R. Pinto, *Subfactor realisation of modular invariants*, Commun. Math. Phys. , **237** (2003) 309-363, math.oa/0309174.

[41] D. E. Evans, P. R. Pinto, *Modular invariance and the fusion algebra*, (2003), math.oa/0309175.

[42] J. Fuchs, *Affine Lie algebras and quantum groups*, Cambridge, 1992.

[43] T. Gannon, *The Classification of affine su(3) modular invariants*, Comm. Math. Phys. 161, 233-263 (1994).

[44] T. Gannon, *Modular data : the algebraic combinatorics of conformal field theory*, math.QA/0103044.

[45] F. M. Goodman, F. R. Vaughan Jones ; Pierre De La, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras* , Springer-Verlag New York, (1989).

[46] A. Hurwitz, *Über endliche Gruppen, welche in der Theory der elliptischen Transzendenten auβtraten* ; Math. Annalen **27** (1886) 183-233.

[47] E. Isasi, Gil Schieber *From modular invariants to graphs : the modular splitting method*, math-ph/0609064.

[48] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Two-dimensional conformal invariant theories on a torus*, Nucl. Phys. **B275** (1986) 580–616.

[49] A. Kirillov, V. Ostrik, *On a q-analog of the McKay correspondence and the ADE classification of $\hat{sl}_2$ conformal fienld theories*, (2001), math.QA/0101219.

[50] F. Martin, E. Royer, *Formes modulaires pour la trascendance*,Universitè Blaise Pascal and Universitè Paul Valéry.

[51] J. McKay, *Graphs, singularities, and finite groups*, In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, volume 37 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 183–186. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[52] G. Moore, N. Seiberg, *Naturality in conformal field theory*, Nucl. Phys. **B313** (1989) 16–40.

[53] G. Moore, N. Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **123** (1989) 177–254.

[54] A. Ocneanu, private communication.

[55] A. Ocneanu, *Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras*, Operator algebras and Appl., Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., **136**, Cambridge Univ. Press (1988) 119–172.

[56] A. Ocneanu, (Lecture Notes written by Y. Kawahigashi), *Quantum Symmetry, Differential Geometry of Finite Graphs and Classification of Subfactors*, Univ. of Tokyo Seminar Notes (1990).

[57] A. Ocneanu, *Paths on Coxeter diagrams : from Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors*, notes taken by S. Goto, Fields Institute Monographs (Rajarama Bhat et al eds, AMS, 1999). Same title : talks given at the Centre de Physique Théorique, Luminy, Marseille, 1995.

[58] A. Ocneanu, *Higher Coxeter systems*, Talk given at MSRI, http ://www.msri.org/publications/ln/msri/2000/subfactors/ocneanu.

[59] A. Ocneanu, *The Classification of subgroups of quantum SU(N)*, Lectures at Bariloche Summer School, Argentina, Jan.2000, AMS Contemporary Mathematics 294, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.

[60] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, Transformation Groups, **8, 2**, (2003) 177206, math.QA/0111139.

[61] V. Pasquier, *Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl.Phys. **B285** (1987) 162–172.

[62] V. Pasquier, *Operator content of the ADE lattice models*, J. Phys. **A 20** (1987) 5707–5717.

[63] V.B. Petkova, J.B. Zuber, *Generalized twisted partition functions*, hep-th/0011021, Phys. Lett. B504 (2001) 157-164. e-Print Archive : hep-th/0011021

[64] V.B. Petkova and J.-B. Zuber, *The many faces of Ocneanu cells*, hep-th/0101151, Nucl. Phys. **B 603** (2001) 449.

[65] P. Roche, *Ocneanu cell calculus and integrable lattice models*, Commun. Math. Phys. **127** (1990) 395–424.

[66] G. Schieber, *L'algèbre des symétries quantiques d'Ocneanu et la classification des systèmes conformes à 2D*, PhD thesis (available in French and in Portuguese), UP (Marseille) and UFRJ (Rio de Janeiro). Sept. 2003.

[67] N. Sousa, A. N. Schellekens, *Orientation matters for NIMreps*, Nucl. Phys. **B653** (2003) 339-368, hep-th/0210014.

[68] G. S. Stewart. *Introduction to matrix computations.* Academic Press, 1973.

[69] R. Trinchero, *Symmetries of faces models and the double triangle algebra*, (2005), hep-th/0501140 .

[70] M. Toshitsune. *Modular Forms.* Springer, 1992.

[71] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2-D Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. B300,360-376,(1988).

[72] J. B. Zuber, *Generalized Dynkin diagrams and root systems and their folding*, Presented at YITP International Workshop on Recent Developments in QCD and Hadron Physics, Kyoto, Japan, 16-18 Dec 1996. Published in Kyoto 1996, *Topological field theory, primitive forms and related topics* 453-493, hep-th/9707046

[73] J. B. Zuber, *Graphs and reflection groups*, Commun.Math.Phys., **179** 265-294, (1996), hep-th/9507057

[74] J.-B. Zuber, *On Dubrovin topological field theories*, hep-th/9312209, Mod. Phys. Lett. A9 (1994)749-760.

[75] J.-B. Zuber, *CFT, BCFT, ADE and all that*, Lectures at Bariloche Summer School, Argentina, Jan. 2000, AMS Contemp. Math. **294**, R. Coquereaux, A. García and R. Trinchero eds.