



**HAL**  
open science

# Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques.

Thomas Galié

► **To cite this version:**

Thomas Galié. Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT: . tel-00395593

**HAL Id: tel-00395593**

**<https://theses.hal.science/tel-00395593v1>**

Submitted on 15 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED386)

Spécialité

*Mathématiques appliquées*

Présentée par

**Thomas GALIÉ**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS 6**

Sujet de la thèse :

**Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides.  
Application aux écoulements diphasiques.**

Organisme d'accueil :

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE  
Centre de Saclay

Soutenue publiquement le mardi 31 mars 2009

devant le jury composé de :

<b>Grégoire ALLAIRE</b>	Examineur
<b>Annalisa AMBROSO</b>	Encadrante CEA
<b>Christophe BERTHON</b>	Rapporteur
<b>Christophe CHALONS</b>	Encadrant Universitaire
<b>Jean-Marc HERARD</b>	Rapporteur
<b>Yvon MADAY</b>	Directeur de thèse
<b>Frédéric NATAF</b>	Examineur
<b>Jacques SEGRE</b>	Examineur



**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED386)

Spécialité

*Mathématiques appliquées*

Présentée par

**Thomas GALIÉ**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS 6**

Sujet de la thèse :

**Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides.  
Application aux écoulements diphasiques.**

Organisme d'accueil :

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE  
Centre de Saclay

Soutenue publiquement le mardi 31 mars 2009

devant le jury composé de :

<b>Grégoire ALLAIRE</b>	Examineur
<b>Annalisa AMBROSO</b>	Encadrante CEA
<b>Christophe BERTHON</b>	Rapporteur
<b>Christophe CHALONS</b>	Encadrant Universitaire
<b>Jean-Marc HERARD</b>	Rapporteur
<b>Yvon MADAY</b>	Directeur de thèse
<b>Frédéric NATAF</b>	Examineur
<b>Jacques SEGRE</b>	Examineur



---

## Remerciements

---

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadrante de thèse, Annalisa Ambroso. Durant ces trois années passées au CEA, elle a su m'orienter dans les bonnes directions et répondre avec patience à toutes mes questions grâce à ses explications claires et détaillées. Je souhaite donc vraiment la remercier pour son enthousiasme permanent, sa gentillesse ainsi que ses compétences scientifiques.

Je remercie ensuite Christophe Chalons et Frédéric Coquel. Le premier a joué le rôle de second encadrant de thèse. Ses conseils et ses réponses à mes interrogations m'ont permis de bien avancer tout au long de mes travaux. Le second a apporté bon nombre d'idées et de solutions improbables à des problèmes que je pensais insolubles. Il a su me communiquer sa passion des mathématiques appliquées et de la simulation numérique. Je tiens donc à les remercier tous les deux, tant pour leurs qualités humaines que scientifiques.

Je remercie également les autres participants au groupe de travail du Laboratoire Jacques Louis Lions qui sont, par ordre alphabétique : Benjamin Boutin, Edwige Godlewski, Frédéric Lagoutière, Pierre-Arnaud Raviart, Jacques Segré et Nicolas Seguin.

Je tiens aussi à remercier Christophe Berthon et Jean-Marc Hérard pour avoir rapporté ma thèse. Leur remarques et suggestions m'ont permis d'améliorer le présent manuscrit. Je remercie Yvon Maday, Grégoire Allaire et Frédéric Nataf d'avoir accepté de faire partie du jury pour ma soutenance de thèse.

Je tiens à remercier aussi tous les membres et thésards du LETR pour m'avoir si bien accueilli. Je pense en particulier à Daniel Caruge, chef du SFME, ainsi que Eric Royer, chef du LETR, qui ont permis que cette thèse se déroule dans de parfaites conditions au sein des locaux du LETR. J'adresse un merci spécial à Gloria Faccanoni. J'ai partagé mon bureau durant ces trois années avec elle et chaque jour a été un plaisir. Je tiens aussi à la remercier pour son aide très précieuse en  $\LaTeX$ , qui m'a permis de gagner un temps infini.

Enfin, mes derniers remerciements vont à ma famille, à qui je dédie ce travail, à savoir mes parents qui m'ont épaulé durant ces trois ans ainsi que mon frère Mathieu, ma soeur Claire, ma nièce Victoria et mon beau-frère Yves. J'adresse enfin un grand merci à Sophia pour m'avoir supporté pendant ma thèse.



---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art et premières contributions</b>	<b>11</b>
1.1 Préliminaires sur le couplage interfacial de modèles . . . . .	11
1.1.1 Couplage de systèmes hyperboliques de lois de conservation avec des fermetures différentes . . . . .	14
1.1.2 Couplage de systèmes hyperboliques de lois de conservation de tailles différentes . . . . .	17
1.2 Application au couplage en dynamique des gaz . . . . .	18
1.2.1 Approximation numérique du problème de couplage . . . . .	20
1.2.2 Couplage conservatif : approche par relaxation . . . . .	21
1.2.3 Couplage non conservatif : approche double-flux . . . . .	27
1.2.4 Résultats numériques . . . . .	29
1.3 Application au couplage de deux modèles de mélange . . . . .	41
1.3.1 Le modèle HEM . . . . .	43
1.3.2 Le modèle HRM . . . . .	44
1.3.3 Conditions de couplage . . . . .	46
1.3.4 Approche numérique . . . . .	47
1.3.5 Résultats numériques . . . . .	50
<b>2 Couplage interfacial avec terme source mesure</b>	<b>53</b>
2.1 Présentation du problème de couplage . . . . .	53
2.1.1 Description du problème EDP . . . . .	53
2.1.2 Approximation numérique . . . . .	57
2.2 Méthodes pour le couplage . . . . .	58



2.2.1	Méthode à deux problèmes de Riemann . . . . .	58
2.2.2	Approche par relaxation . . . . .	60
2.3	Résultats . . . . .	71
2.3.1	Couplage conservatif . . . . .	72
2.3.2	Couplage non conservatif . . . . .	72
2.4	Extension au cas non isentropique . . . . .	77
2.4.1	Approche par relaxation : résolution du problème de Riemann . . . . .	78
2.4.2	Résultats numériques . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Calcul d'un terme source optimal</b>	<b>85</b>
3.1	Optimisation sous contraintes . . . . .	85
3.1.1	Définition du problème . . . . .	86
3.1.2	Contrainte sur le débit de masse (I) . . . . .	88
3.1.3	Contrainte sur le débit de masse (II) . . . . .	91
3.1.4	Contrainte de perte de conservation maximale . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions</b>	<b>95</b>
4.1	Le modèle bifluide à deux pressions . . . . .	96
4.1.1	Considérations analytiques . . . . .	98
4.1.2	Étude du problème de Riemann . . . . .	101
4.2	Approche par relaxation . . . . .	106
4.2.1	Considérations analytiques . . . . .	108
4.2.2	Étude du problème de Riemann . . . . .	111
4.3	Approximation numérique . . . . .	120
4.3.1	Approche par relaxation . . . . .	120
4.3.2	Résolution du problème de Riemann . . . . .	122
4.4	Résultats numériques . . . . .	128
4.4.1	Pressions hors équilibre . . . . .	128
4.4.2	Équilibres des pressions . . . . .	131
<b>5</b>	<b>Couplage d'un modèle bifluide à deux pressions avec un modèle de drift-flux</b>	<b>139</b>
5.1	Dérivation formelle du modèle de drift-flux . . . . .	140
5.1.1	Présentation des deux modèles . . . . .	141
5.1.2	Adimensionnement des équations du modèle bifluide à deux pressions . . . . .	144
5.1.3	Écriture des équations de mélange . . . . .	146
5.1.4	Obtention de la loi de Drift . . . . .	151
5.1.5	Exemple d'application : écoulement à bulles soumis à la gravité . . . . .	154
5.2	Approximation numérique du problème de couplage . . . . .	155
5.2.1	Résolution du modèle bifluide . . . . .	157
5.2.2	Méthode numérique avec décentrement des termes sources . . . . .	159

## TABLE DES MATIÈRES

---

5.3	Résultats numériques . . . . .	166
5.3.1	Tube à choc . . . . .	167
5.3.2	Colonne à bulle . . . . .	168
5.3.3	Injection de bulles . . . . .	174
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>185</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>189</b>
<b>Publications</b>		<b>197</b>
I.	Numerical Coupling of Two-Phase Flows . . . . .	201
II.	Interface model via prescribed local flux balance . . . . .	215
III.	Relaxation and numerical approximation of a two fluid two pressure model . . .	231
IV.	The drift-flux asymptotic limit of barotropic two-phase two-pressure models . . .	271



---

# Introduction générale

---

La recherche d'un meilleur rendement et d'une sûreté optimale des centrales nucléaires en France est depuis longtemps un enjeu industriel majeur. La modélisation et la simulation numérique jouent à ce titre un rôle clé. Elles permettent la compréhension et la prédiction des phénomènes physiques mis en jeu au sein d'un réacteur nucléaire et sont un complément important, à moindre coût, à l'expérimentation.

Le parc nucléaire français est composé en grande partie par des réacteurs à eau sous pression. La figure 1 en représente, de manière simplifiée, le fonctionnement. Le réacteur peut se diviser en trois parties principales : le circuit primaire, le circuit secondaire et le circuit de refroidissement. Le circuit primaire est associé au processus de chauffage du fluide caloporteur qui est, dans ce cas, l'eau. Il s'agit d'un circuit fermé qui se situe dans une enceinte de confinement. On y trouve la cuve qui contient le cœur du réacteur nucléaire où la réaction en chaîne se produit. Le combustible nucléaire est assemblé sous forme de crayons et des barres de contrôle permettent de gérer le taux de réaction nucléaire. L'eau présente est chauffée à une température de l'ordre de 300 °C mais reste sous la forme liquide grâce à un pressuriseur assurant une pression dans le circuit d'environ 150 bar. Cette eau chaude circule ensuite dans le générateur de vapeur permettant l'échange de la chaleur emmagasinée avec de l'eau froide à l'état liquide. Le générateur de vapeur fait partie du circuit secondaire. L'eau froide qui y est présente est donc chauffée jusqu'à l'état vapeur. Cette vapeur chaude va alors entraîner des turbines reliées à des alternateurs et l'énergie mécanique est ainsi transformée en électricité. Enfin, la même vapeur est recondensée en eau liquide par contact avec l'eau du circuit de refroidissement puis recircule dans le générateur de vapeur.

Nous voyons donc, par cette description simplifiée, que de nombreux phénomènes physiques entrent en jeu au cours du processus de production d'électricité. Des écoulements diphasiques eau-vapeur évoluent dans quasiment toutes les parties de la centrale dont, entre autres, le circuit primaire auquel on va s'intéresser plus particulièrement. Au Laboratoire des Études Thermiques

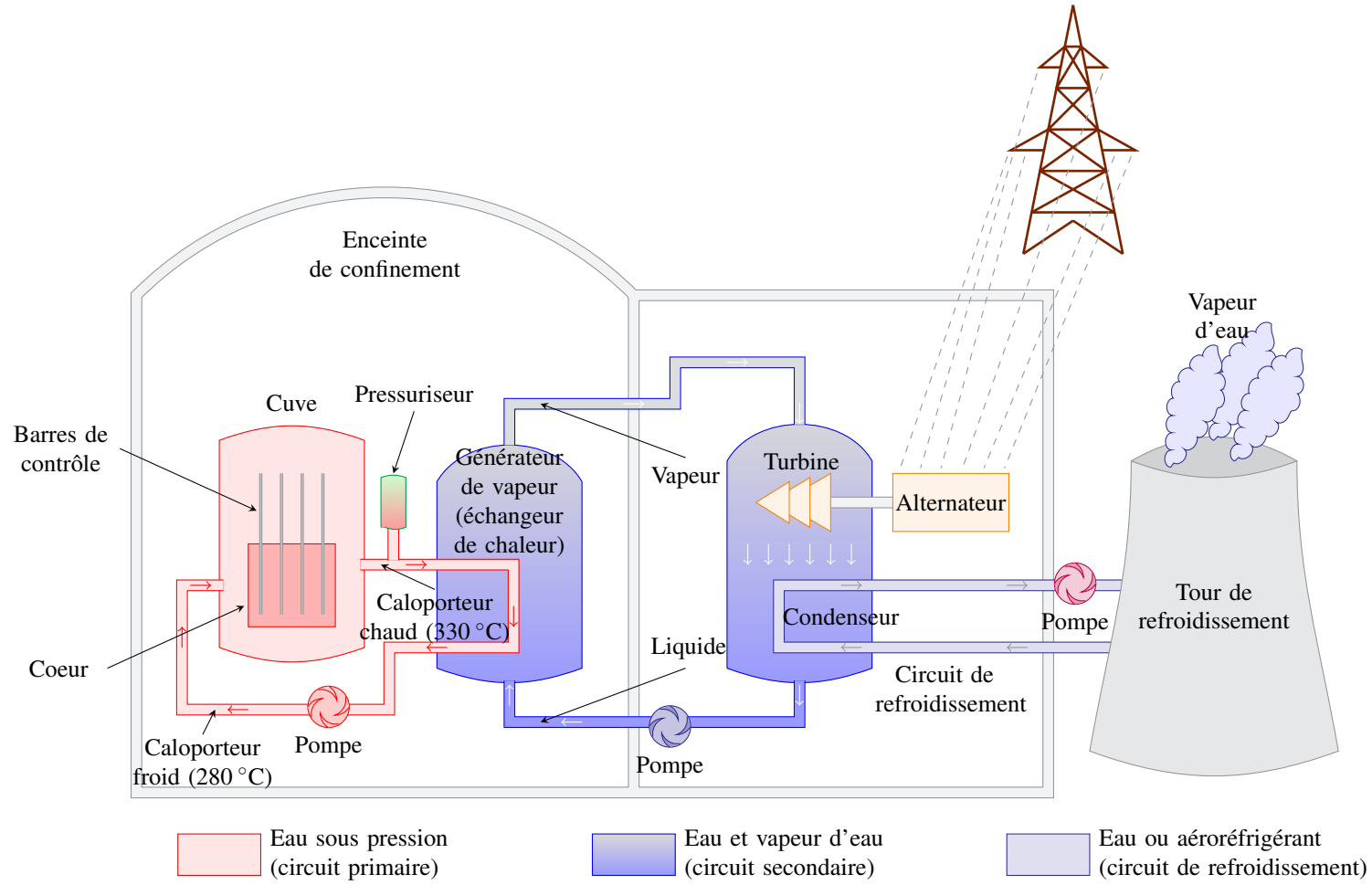


FIGURE 1 – Schéma simplifié d'un réacteur nucléaire à eau sous pression

des Réacteurs (LETR) du Commissariat à l'Énergie Atomique de Saclay (CEA), où j'ai effectué ma thèse, plusieurs outils informatiques sont développés et améliorés dans le but de simuler ces écoulements. Parmi les logiciels scientifiques disponibles au LETR, on peut tout d'abord citer FLICA4 utilisé principalement pour la simulation des écoulements diphasiques dans le coeur du réacteur nucléaire. Le modèle mathématique qui y est discrétisé et résolu numériquement est du type modèle de mélange à quatre équations en milieux poreux. Un modèle de mélange, comme son nom l'indique, représente l'évolution du fluide grâce à des équations de conservation écrites sur les grandeurs physiques associées au mélange que constituent les deux phases. Le modèle est complété par une fermeture algébrique exprimant l'équilibre cinématique entre ces deux phases. Un autre code de calcul, nommé OVAP, est toujours en cours de développement au LETR. Son architecture est hautement orientée objet et est dédiée à la simulation des écoulements diphasiques. Différents modèles de mélange sont implémentés ainsi que des modèles multichamps qui permettent de décrire plus finement la dynamique des écoulements à plusieurs phases (eau liquide, eau vapeur, gouttes...) via des lois de conservation sur les grandeurs physiques caractéristiques comme la masse ou la quantité de mouvement de chaque phase<sup>1</sup>. Parmi les formulations multichamps, le modèle dit bifluide standard à une pression est très souvent utilisé pour la représentation des écoulements diphasiques eau-vapeur. Contrairement au modèle de mélange de FLICA4, tout les déséquilibres entre les phases sont pris en compte. Le code de calcul CATHARE du CEA est également basé sur la résolution numérique de ce modèle bifluide. En plus de cette formulation, le logiciel CATHARE considère une homogénéisation des équations dont l'échelle des volumes élémentaires est de l'ordre du mètre. Ceci permet de réaliser une simulation du circuit primaire dans sa globalité sur un maillage d'environ mille cellules. Les codes CATHARE et FLICA4 restent à ce jour des logiciels de référence pour la simulation des écoulements diphasiques dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire puisqu'ils bénéficient de validations expérimentales.

Mes travaux de thèse ont été financés par le CEA dans le cadre du projet NEPTUNE. L'objectif principal de ce projet, auquel participent le CEA, EDF, l'IRSN, ainsi que AREVA-NP, est la modélisation et la simulation numérique d'une centrale nucléaire dans son ensemble. Pour cela, plusieurs codes de calcul sont disponibles. Comme nous venons de le voir sur les exemples de FLICA4 et de CATHARE, les logiciels sont en général basés sur des modélisations mathématiques différentes selon la composante du réacteur qui est considérée. Pour effectuer une simulation globale, le domaine d'étude en espace est alors subdivisé en sous domaines séparés par des interfaces fixes et minces. Les codes de calcul sont alors couplés au travers de ces interfaces, dites interfaces de couplage, pour permettre l'échange d'informations. Ce type de simulation a déjà été réalisé mais les résultats obtenus ont soulevé des questions importantes : quelles informations doit-on échanger au niveau de l'interface de couplage ? Quelle est alors l'influence du choix des informations transmises sur les résultats ? Pour répondre à ces questions, l'idée amorcée dans le projet NEPTUNE est d'étudier le problème du couplage entre les modèles et non les codes. En effet, la

---

1. L'usage du terme lois de conservation est ici abusif puisque certaines équations d'évolution contiennent des termes non conservatifs.

problématique centrale dans le couplage entre ces différents codes est qu'ils reposent sur des formulations d'écoulements diphasiques différentes. L'approche qu'on appelle par la suite *couplage interfacial de modèles* consiste donc à utiliser des modèles différents séparés par des interfaces fixes et parfaitement minces pour représenter l'évolution d'un écoulement.

Une collaboration entre le CEA et le Laboratoire Jacques Louis Lions a vu le jour il y a environ cinq ans pour étudier le problème du couplage interfacial entre des modèles provenant de la dynamique des fluides multiphasiques. Un groupe de travail dédié s'est ainsi formé et se réunit une fois par semaine au LJLL<sup>2</sup>. Il est composé de : Annalisa Ambroso (CEA Saclay), Christophe Chalons (Paris 7), Frédéric Coquel (CNRS-Paris 6), Frédéric Lagoutière (Paris 6), Edwige Godlewski (Paris 6), Pierre-Arnaud Raviart (Paris 6) et Nicolas Seguin (Paris 6). Parmi les problématiques abordées par ce groupe de travail, on peut citer : la formulation de différentes conditions de transmission pour le cas général du couplage entre deux systèmes hyperboliques de lois de conservation ; l'étude du couplage entre deux systèmes de la dynamique des gaz possédant des lois de pression différentes ; le couplage interfacial entre deux modèles de mélange d'écoulements diphasiques... Au cours de mes trois années de doctorat, j'ai participé à ce groupe de travail et contribué à différentes études. Ma thèse est donc dédiée à l'étude de différents cas de couplage interfacial de modèles. Plusieurs schémas numériques et conditions aux limites pour ces problèmes seront également présentés et analysés. Les trois premiers chapitres peuvent être regroupés dans une première partie qui traitera de deux cas de couplage ainsi que de la formulation et la résolution d'un nouveau type de conditions aux limites basées sur l'ajout d'un terme source mesure dans les équations. La seconde partie s'intéresse à un cas plus complexe : le couplage entre un modèle à description fine et un modèle plus grossier. L'étude de ce problème sera précédée de la mise au point d'un schéma numérique pour le modèle fin. La suite de cette introduction reprend les grandes lignes de chaque chapitre.

## Chapitre 1

Ce premier chapitre présente tout d'abord la problématique du couplage dans un cadre général. Nous y faisons notamment un état de l'art non exhaustif et décrivons deux types de problème de couplage interfacial auxquels on s'intéresse dans toute la suite du manuscrit. Le premier est le couplage de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation identiques mais possédant des fermetures différentes. Le second porte sur le couplage de deux systèmes de tailles différentes et où le système de plus petite taille est la limite formelle du plus grand dans le régime asymptotique d'un paramètre de relaxation que l'on précisera.

Ensuite, le couplage de base entre deux systèmes d'équations de la dynamique des gaz compressibles mais possédant des lois de pression différentes est étudié. On considère le cas monodi-

---

2. Adresse web : <http://www.ann.jussieu.fr/groupes/cea/>

mensionnel, c'est-à-dire que le problème peut s'écrire

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p_\alpha) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p_\alpha u) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t > 0, \end{cases}$$

où  $\rho$ ,  $u$ ,  $\rho E = \rho \frac{u^2}{2} + \rho \varepsilon$  et  $\varepsilon \equiv \varepsilon(\tau, s)$  sont respectivement la densité, la vitesse, l'énergie totale et l'énergie interne du fluide. Les variables  $\tau = 1/\rho$  et  $s$  dénotent le covolume et l'entropie du fluide. L'interface de couplage est située en  $x = 0$  et les lois de pression  $p_\alpha \equiv p_\alpha(\tau, s)$  sont définies de la manière suivante :

$$p_\alpha(\rho, s) = \begin{cases} p_L(\tau, s), & \text{si } x < 0, \\ p_R(\tau, s), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

L'objectif de cette étude est de définir le problème en  $x = 0$ . L'idée est de mettre au point plusieurs conditions de couplage. Pour cela on reprendra des travaux déjà réalisés par le groupe de travail du LJLL : la condition dite « couplage par flux » consiste à imposer le continuité du flux physique sur l'interface de couplage ; la condition dite « couplage par état » impose en revanche la continuité d'un jeu de variables physiques donné de part et d'autre de l'interface. Ces deux conditions de transmission seront reprises et une nouvelle condition de couplage par état (basée sur la continuité de l'enthalpie du système) sera également étudiée.

Dans une deuxième section, on aborde le cas du couplage de deux modèles d'écoulements diphasiques. Ces modèles, appelées respectivement HEM (pour *Homogeneous Equilibrium Model*) et HRM (pour *Homogeneous Relaxation Model*), décrivent l'évolution du fluide à l'aide de lois de conservation sur les grandeurs de mélange. On parle alors de modèles de mélange. Les deux modèles sont également qualifiés d'*homogènes* au sens où la cinématique qu'ils décrivent suppose l'égalité  $u_1 = u_2 = u$  avec  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u$  respectivement les vitesses de la phase 1, de la phase 2 et du mélange. Le modèle HEM, définit dans le demi-espace des  $x$  négatifs, s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^E(\rho, \varepsilon)) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p^E(\rho, \varepsilon)u) = 0, \quad x < 0, t > 0, \end{cases}$$

où  $\rho$ ,  $u$ ,  $E = \frac{u^2}{2} + \varepsilon$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la densité, la vitesse, l'énergie totale et l'énergie interne du mélange diphasique. La loi de pression est notée  $p^E(\rho, \varepsilon)$  et s'écrit sous l'hypothèse de l'équilibre des pressions, des températures et des potentiels chimiques entre les deux phases.



Concernant le modèle HRM, défini dans le demi-espace des  $x$  positifs, il s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t m_1 + \partial_x(m_1 u) = \lambda(m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^R(\rho, \varepsilon, m_1)) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p^R(\rho, \varepsilon, m_1)u) = 0, \quad x > 0, t > 0, \end{cases}$$

où on a noté  $m_1$  et  $m_1^*$  respectivement la masse partielle de la phase indicée 1 et la masse partielle à saturation (i.e. lorsque l'équilibre thermodynamique entre les deux phases est atteint) de la phase 1. Le paramètre  $\lambda$  est assimilable à la fréquence de relaxation de la masse partielle  $m_1$ . Autrement dit, l'équilibre thermodynamique du fluide diphasique après changement de phase est atteint en un temps caractéristique  $1/\lambda$ . L'équilibre instantané des potentiels chimiques entre les phases n'est donc pas considéré à la différence du modèle HEM. En revanche les équilibres instantanés des pressions et des températures sont supposés dans les deux modèles. On verra dans l'étude du couplage entre ces deux systèmes que les lois de pression sont thermodynamiquement compatibles au sens où l'égalité suivante est vérifiée :

$$p^R(\rho, \varepsilon, m_1^*(\rho)) = p^E(\rho, \varepsilon).$$

Autrement dit, lorsque les deux phases sont à saturation, les deux modèles coïncident. Pour la résolution du problème de couplage entre ces deux modèles, l'interface étant toujours mince et fixée en  $x = 0$ , on reprendra la même démarche que dans le cas des équations d'Euler : les conditions de couplage par flux et par état seront adaptées dans le cas présent du couplage interfacial où les systèmes d'équations n'ont pas le même nombre d'équations.

## Chapitre 2

Le second chapitre est consacré à l'étude numérique d'une nouvelle condition de couplage introduite dans le cas des équations d'Euler avec des lois de pression différentes. L'idée ici est d'écrire le problème de couplage de manière globale en espace et muni d'une condition de transmission modélisée par la présence, au niveau de l'interface (toujours en  $x = 0$ ), d'un terme source mesure dans les équations. Le problème étudié s'écrit donc dans la forme contractée suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

où le vecteur des flux est défini par

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{cases} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}), & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u})$  correspondent respectivement aux inconnues et aux flux physiques du système des équations d'Euler pour un écoulement compressible isentropique et muni de la fermeture  $p_\alpha$  avec  $\alpha = L, R$ . Le terme  $\mathcal{M}(t)$  est le poids, dépendant du temps, associé au terme source mesure et il est supposé, dans ce chapitre, connu. L'objectif sera de proposer des stratégies numériques pour la résolution de ce problème de couplage. En particulier, on essaiera de mettre au point des schémas numériques, basés sur des approches de type volumes finis, ayant la bonne propriété de restaurer le terme source mesure au niveau discret. On s'attachera également à préserver les solutions dites équilibres c'est-à-dire vérifiant

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, t > 0, \end{cases}$$

et telles que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}(t), \quad t > 0.$$

Nous proposerons deux méthodes dont l'une sera basée sur un schéma par relaxation des termes de pression. L'avantage de cette approche est de disposer d'une écriture explicite de la solution du problème de Riemann pour le problème de couplage écrit plus haut. Dans la dernière partie du chapitre, nous présenterons l'extension de cette dernière méthode au cas du couplage entre les équations d'Euler avec énergie c'est-à-dire dans une configuration non isentropique.

### Chapitre 3

Dans ce chapitre, le problème de couplage du chapitre 2 est repris à la différence que l'on ne suppose plus le poids  $\mathcal{M}(t)$  comme connu. On propose alors une méthode pour déterminer un poids dynamiquement en temps selon différentes motivations (conservation stricte de certaines grandeurs, continuité d'un jeu de variables...). Pour cela, on considère un problème d'optimisation sous contraintes. Plus précisément, une fonctionnelle convexe  $\mathcal{J}$  dépendante de  $\mathcal{M}(t)$  est construite et minimisée sur un espace d'existence du poids, convexe et non vide, noté  $\mathcal{D}_{adm}$ . On se donne alors la fonctionnelle convexe suivante

$$\mathcal{J} : \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{adm} \mapsto \mathcal{J}(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}.$$

Considérant la résolution discrète du problème de couplage du chapitre précédent dans le cas des équations d'Euler isentropiques, on résout alors à chaque itération en temps le problème d'optimisation sous contraintes :

trouver un terme source optimal  $\mathcal{M}^o \in \mathcal{D}_{adm}$  tel que

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}^o) \leq \mathcal{J}(\mathcal{M}), \quad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{adm}.$$

L'avantage de cette approche est d'avoir, d'une part, existence et unicité d'un argument minimisant la fonctionnelle et, d'autre part, d'être libre de construire toute fonctionnelle sous la condition de convexité de celle-ci sur le domaine  $\mathcal{D}_{adm}$ . Différentes fonctionnelles seront construites, selon les contraintes à imposer, et des résultats numériques viendront illustrer l'efficacité de la méthode.

## Chapitre 4

Le chapitre 4 traite de l'approximation numérique d'un modèle bifluide à deux vitesses et deux pressions. Ce travail, à caractère purement numérique, précède l'étude d'un cas de couplage (dans le chapitre 5 qui suit) entre ce modèle et un modèle de mélange. Il existe différentes formulations pour les modèles bifluides à deux pressions selon la forme supposée de certains termes de fermeture. Ces termes correspondent aux interactions entre les phases et sont appelés pression et vitesse interfaciale, l'adjectif interfacial faisant référence à l'interface séparant les deux fluides non miscibles (précisons que le modèle en question résulte de moyennes spatiales et que donc l'interface est également moyennée). Le modèle bifluide auquel on s'intéresse est la version isentropique du modèle de Baer-Nunziato développé à l'origine dans le cas d'écoulements de grains solides réactifs au sein d'un gaz. Le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = \lambda_p (p_1 - p_2), \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases}$$

où on a noté  $\alpha_k, \rho_k, u_k$  et  $p_k \equiv p_k(\rho_k)$  pour  $k = 1, 2$  respectivement le taux de présence, la densité, la vitesse et la pression de la phase  $k$  avec de plus  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Le terme  $\lambda_p$  est le coefficient de relaxation en pression. Notons que la vitesse interfaciale présente dans la première équation est celle de la phase 2 qui est considérée, dans notre étude, comme la phase dispersée. La pression interfaciale est prise égale à la pression de la phase 1, c'est-à-dire la phase continue. L'originalité de ce type de modèle, dans le cadre des écoulements diphasiques eau-vapeur, est de disposer d'une loi de pression par phase alors que le modèle bifluide standard dont nous avons parlé précédemment considère l'équilibre mécanique des deux phases.

La difficulté principale dans le traitement numérique de ce système est la présence de termes non conservatifs  $\pm p_1 \partial_x \alpha_1$ . On utilise tout d'abord la méthode par relaxation en pression, c'est-à-dire que l'on résout dans un premier temps la partie convective d'un sur-modèle hors équilibre où les nouvelles variables remplacent les deux lois de pression. Dans un second temps, un traitement des termes non conservatifs est réalisé via une estimation a priori des masses de Dirac correspondantes concentrées sur l'onde de transport de la fraction  $\alpha_1$ . Le schéma numérique résultant aura la bonne propriété de préserver les discontinuités de contact pures du système initial.

## Chapitre 5

Le chapitre 5 est dédié à l'étude du couplage entre le modèle bifluide à deux pressions du chapitre précédent et un modèle de mélange dit de drift-flux. Ce modèle de mélange est comparable au modèle homogène de relaxation (HRM) mais ne présuppose pas du caractère homogène de la cinématique du fluide diphasique au sens où les vitesses des deux phases ne sont pas considérées comme égales. Cette hypothèse provient du régime d'écoulement qui est usuellement considéré lorsqu'on utilise un modèle de drift : un écoulement dispersé, ou à bulles, soumis à la gravité. Il en résulte que le modèle de drift est similaire au modèle HRM à une perturbation près sur la vitesse relative de l'écoulement  $u_r = u_2 - u_1$ . Le modèle de drift-flux s'écrit, dans le cas isentropique et lorsque le fluide est soumis à des forces extérieures  $f_1$  et  $f_2$ ,

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho u Y + \rho Y(1-Y)u_r) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \rho Y(1-Y)u_r^2) = \rho(1-Y)f_1(\mathbf{u}) + \rho Y f_2(\mathbf{u}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases}$$

où on a noté  $\rho, Y, u$  et  $\mathbf{u} = (\rho, \rho Y, \rho u)$  respectivement la densité du mélange, la vitesse du mélange, la concentration de la phase 2 et le vecteur des inconnues du système. Ces variables de mélange sont liées aux grandeurs caractéristiques de chaque phase par les relations :

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, & \rho u &= \alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2, \\ \rho Y &= \alpha_2 \rho_2, & p &= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \end{aligned}$$

où les différentes variables indicées  $k = 1, 2$  correspondent aux définitions données dans le résumé du chapitre précédent. La vitesse relative  $u_r$  est donnée par une fermeture algébrique de la forme

$$u_r = \Phi(\mathbf{u}).$$

On appelle couramment cette égalité la *loi de drift* et la forme de la fonction  $\Phi$  dépend de la topologie de l'écoulement. Celle-ci est en général donnée par des lois de corrélation provenant de l'expérience. Pour fermer complètement le système, les variables  $(p, \alpha_2)$  sont données par la résolution du sous-système suivant :

$$\begin{cases} p = p_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2)), \\ p_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2)) = p_2(\rho Y/\alpha_2). \end{cases}$$

Pour le problème de couplage de ce modèle avec le modèle bifluide à deux pressions du chapitre précédent, on fera appel à la technique dite du *modèle père* : celle-ci consiste en une méthode du type prédicteur-correcteur, similaire au schéma par relaxation. Il s'agit de formuler le problème de couplage *via* un seul et unique modèle sur tout le domaine en espace et de procéder en deux étapes de résolution numérique : une première prend en compte les termes convectifs ainsi que les

termes sources du système père et la seconde projette les variables physiques résultantes sur les différents équilibres pris en compte par les deux modèles. Cette méthode nécessite d'être validée au niveau continu, en d'autres termes il faudra vérifier que le modèle de drift-flux peut être dérivé de manière formelle à partir du modèle père et des différents retours à l'équilibre. Ceci sera l'objet de la première section du chapitre. Le point important de cette étude est que le modèle de drift sera dérivé dans le cas de forces extérieures  $f_1$  et  $f_2$  quelconques et que l'on aboutira à une forme générale de la fonction  $\Phi$ . Une méthode numérique adaptée de l'approche par relaxation pour le modèle bifluide à deux pressions du chapitre 4 est ensuite présentée : on considère, dans le nouveau schéma, le décentrement des termes sources associés à la relaxation des vitesses des phases. Enfin, on montrera des résultats numériques pour le couplage des deux modèles, bifluide et drift, dans une dernière partie.

---

## État de l'art et premières contributions

---

Au début de mon doctorat, une première étude préliminaire m'a permis de me familiariser avec la problématique du couplage interfacial de modèles. Je me suis intéressé à différents cas de couplage abordés dans la littérature et principalement ceux provenant de publications du groupe de travail du LJLL. La première section de ce chapitre est consacrée à une étude bibliographique et une présentation formelle du couplage. La seconde section concerne le cas du couplage de deux modèles de la dynamique des gaz. J'ai repris les grandes lignes et orientations des travaux du groupe de travail déjà réalisés à ce sujet. Je me suis attaché essentiellement à une description du problème axée sur la formulation numérique des différentes méthodes. Dans la seconde section, je reprends également des travaux menés par le groupe de travail concernant le couplage entre deux modèles de mélange d'écoulements diphasiques de tailles différentes. Ceci m'a permis de tester une nouvelle condition de couplage, basée sur la continuité de l'enthalpie imposée au niveau de l'interface de couplage, et d'apporter ainsi une première contribution qui figure dans un article de conférence. Des résultats numériques viendront illustrer cette présentation.

### 1.1 Préliminaires sur le couplage interfacial de modèles

La modélisation et la simulation du comportement physique d'un système complexe nécessite souvent de subdiviser celui-ci en des sous-systèmes dont les représentations mathématiques sont plus simples ou moins coûteuses en temps de calcul. On peut ainsi retrouver la problématique du couplage interfacial dans des domaines très variés : citons par exemple la simulation d'écoulements turbulents dans [81], [82], [83] où les auteurs couplent une modélisation RANS avec un modèle plus fin du type LES. La compréhension des trafics routiers dans [46], [47] (entre autres) fait également intervenir des méthodes de couplage de modèles lorsque des routes ayant chacune

leur propre modélisation se rejoignent à des intersections. La simulation numérique des échanges entre océan et atmosphère dans [77] est un autre exemple de couplage interfacial. Dans le cas d'un problème de la cinétique des gaz, pour des raisons de coût de calcul, certaines parties de l'espace sont modélisées avec un nombre de Knudsen propre. Le nombre de Knudsen est associé au libre parcours moyen des particules d'un fluide et permet donc de déterminer le régime d'écoulement en terme de continuité du milieu. L'article [73] étudie le problème de couplage entre les équations de Boltzmann et les équations d'Euler : l'auteur met au point différentes conditions de couplage basées sur la continuité des flux physiques ou des moments au niveau d'une interface mince. Une étude similaire est menée dans [36], à la différence que les auteurs proposent des conditions de couplage *via* une interface épaissie. La simulation d'écoulements diphasiques, où l'interface de couplage est en mouvement et représente l'interface entre les deux phases, fait intervenir également des méthodes de couplage interfacial comme dans [2] et [41]. Tous ces exemples de couplage de modèles proviennent de motivations tout aussi variées. L'étude du couplage océan-atmosphère prend en compte des considérations physiques : les modèles représentant atmosphère et océan sont radicalement différents. Dans d'autres applications, les raisons du couplage de modèles peuvent être liées au temps de calcul d'une simulation comme c'est le cas pour le couplage cinétique/fluide. Il est parfois indispensable d'utiliser des modèles décrivant des échelles moins fines pour certaines parties de l'objet d'étude.

Dans le cadre du projet NEPTUNE, nous avons vu que le recours au couplage interfacial provient d'une problématique sous-jacente qui est le couplage de codes basés sur des modèles différents. Divers travaux de couplage de modèles ont déjà été réalisés à ce sujet. On peut citer tout d'abord le couplage entre un modèle d'écoulement en milieu libre et un modèle d'écoulement en milieu poreux [61]. Dans [63], les auteurs couplent deux modèles d'Euler isentropiques dont les représentations en espace diffèrent : un modèle en une dimension d'espace est utilisé pour le domaine (représentant un canal) à gauche de l'interface de couplage, et un modèle en deux dimensions est utilisé dans le domaine (représentant un réservoir) à droite de l'interface pour simuler l'écoulement provenant du canal. Nous voyons sur cet exemple que les systèmes d'équations aux dérivées partielles considérés peuvent avoir un nombre d'équations différent. Cette différence peut provenir de dimensions d'espace différentes mais également de la finesse de description des phénomènes physiques. Pour les écoulements diphasiques, par exemple, les systèmes de plus grande taille décriront plus finement les déséquilibres (thermodynamiques, mécaniques ou cinématiques) entre les phases par l'intermédiaire d'équations aux dérivées partielles supplémentaires. Les systèmes de taille moindre supposent (*a contrario*) certains de ces phénomènes à l'équilibre, remplaçant ainsi les équations d'évolution par des fermetures algébriques. Dans ce cas, les modèles sont dits *hiérarchisés*. Citons pour ce type de couplage les travaux dans [14]. Les modèles couplés sont les modèles de mélange d'écoulements diphasiques homogènes HEM et HRM dont nous avons parlé dans l'introduction. Les auteurs utilisent pour le couplage un modèle d'interface, également appelé *modèle père*, dont on peut retrouver l'idée dans [56]. Enfin, une problématique similaire se retrouve dans [62] qui traite du couplage entre le modèle HRM et un modèle bifluide. Le modèle

bifluide, contrairement aux modèles de mélange, considère la dynamique propre des phases par l'intermédiaire d'équations d'évolution écrites pour chaque phase. La finesse de description est donc supérieure et les auteurs emploient également un modèle père à l'interface de couplage. Pour une description plus complète et détaillée de ces travaux, nous renvoyons le lecteur à [65].

Comme nous venons de le dire, la technique du modèle père est une des méthodes pour coupler des modèles hiérarchisés. La formulation numérique résultante est similaire à une approche du type prédicteur-correcteur comme pour les schémas numériques par relaxation dont nous parlons plus loin. Dans le cas du couplage de deux systèmes de lois de conservation, l'utilisation du modèle d'interface permet l'approximation numérique d'un seul et unique flux (celui du modèle père) à l'interface de couplage. Ceci aboutit à une formulation purement conservative c'est-à-dire que le principe de conservation des équations considérées n'est pas violé. D'autres travaux sur ce type de condition sont étudiées, notamment par le groupe de travail du LJLL. Prenons comme premier exemple l'étude du couplage de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de même taille mais possédant des fermetures différentes. Le cas scalaire est traité dans [52] et le cas des systèmes dans [53]. Dans ce cas de couplage, la condition de transmission strictement conservative fait apparaître une difficulté importante : respecter les solutions stationnaires associées à chaque modèle. En effet, en raison de la différence de fermeture entre les deux modèles, une solution stationnaire pour le modèle de gauche et le modèle de droite ne l'est plus pour le modèle père. Les auteurs proposent alors une méthode de couplage préservant la continuité de certaines variables (et non des flux) à l'interface *via* une condition de bord pour chaque système. Il en résulte un contrôle des solutions stationnaires mais une perte de conservation globale. L'approche est donc non conservative. Toujours dans le cadre de la collaboration entre le CEA et le LJLL, d'autres études sur ce type de couplage ont été réalisées. Tout d'abord le travail dans [30] s'intéresse à la résolution du problème de Riemann associé au couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz possédant des lois d'états différentes de part et d'autre de l'interface. Les auteurs étudient l'existence et l'unicité de solutions pour plusieurs conditions de transmission. Une approche numérique sur ce même problème est proposée dans [9] ainsi que [13]. Des stratégies discrètes y sont mises au point pour la résolution du problème de couplage muni d'une part de la condition de couplage conservative puis de la seconde approche non conservative. Le cas de la dynamique des gaz en coordonnées Lagrangiennes est abordé dans [12]. Citons également les études de [21] et [20] où l'interface n'est plus infiniment mince mais artificiellement épaissie. Le couplage entre les modèles HEM et HRM est également étudié dans [10], où les auteurs adaptent les deux méthodes de couplage, conservative et non conservative, à ce problème où les deux modèles sont hiérarchisés et donc de tailles différentes. Enfin, l'ouvrage [22] aborde le couplage entre une loi de conservation scalaire et son système de relaxation associé.



### 1.1.1 Couplage de systèmes hyperboliques de lois de conservation avec des fermetures différentes

Nous allons considérer dans un premier temps le couplage interfacial de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de même taille mais possédant des fermetures différentes. D'une part, ceci nous permet d'introduire les deux méthodes de base du couplage que nous utilisons dans toute la suite du manuscrit et, d'autre part, ce type de problème correspond à des cas d'applications : le cas du passage d'un écoulement en milieu libre à un milieu poreux [20], [61], par exemple. Un autre exemple est d'origine numérique : les codes de calcul disponibles au CEA et EDF sont basés sur les tables thermodynamiques de l'eau. Ces tables sont en général différentes d'un code à l'autre. Il est alors intéressant de considérer le cas du couplage de deux modèles identiques mais possédant des fermetures différentes. Concernant la théorie et le formalisme sur les systèmes hyperboliques de lois de conservation, on peut retrouver de nombreuses références dans la littérature comme les ouvrages détaillés [51], [76] ou encore [86]. L'application à la mécanique des fluides compressibles est aussi présentée dans [1]. Ici, notre étude est restreinte au cas monodimensionnel. Nous notons de manière classique le vecteur des inconnues  $\mathbf{u} : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{u}(x, t) \in \Omega$  où l'espace  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  est l'espace des états associé. Le domaine d'étude  $\mathbb{R}$  est séparé en deux par une interface fixe et infiniment mince située en  $x = 0$ . La différence des fermetures implique l'écriture de deux flux différents à gauche et à droite de l'interface qui sont notés  $\mathbf{f}_\alpha : \mathbf{u}(x, t) \in \Omega \mapsto \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^p$  avec  $\alpha = L, R$ . Le problème de couplage ainsi obtenu est exprimé par les équations suivantes :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0, \quad (1.1a)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x > 0, t > 0. \quad (1.1b)$$

Ce problème de couplage est étudié dans [52] pour le cas scalaire et dans [53] dans le cas des systèmes. Le cas du couplage de deux systèmes d'Euler avec des lois d'état différentes de part et d'autre de l'interface est étudié dans [9] et [13]. Les auteurs s'intéressent aux conséquences numériques que différentes conditions de transmission entraînent. Nous présenterons l'exemple des équations d'Euler dans la suite de ce chapitre.

Toute la problématique du couplage réside dans la définition de conditions de couplage à l'interface en  $x = 0$ . Dans le cas présent, ce problème revient à écrire une définition appropriée des flux évalués sur les traces à gauche et à droite de l'interface. Deux idées peuvent être utilisées pour résoudre un tel problème. La première est appelée *approche globalement conservative*. Cette méthode consiste à considérer un unique système de lois de conservation sur tout le domaine. Ceci implique en particulier que les flux sur les traces de l'interface de couplage sont égaux. La seconde méthode est dite *approche non conservative*. Les problèmes (1.1a) et (1.1b) sont raccordés via une condition de bord et nous verrons que l'implication immédiate est que l'égalité du cas précédent n'est plus respectée.

### Approche globalement conservative

L'approche globalement conservative, que nous appellerons aussi *couplage par flux* dans la suite du manuscrit, consiste à considérer le problème de couplage (1.1a) et (1.1b) comme un seul et unique système de lois de conservation sur tout le domaine en espace. L'écriture établie dans [53] est ici choisie : le système global est défini par l'équation

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.2)$$

où on a noté

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{cases} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}), & x < 0, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}), & x > 0. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité, qui suppose une condition d'entropie supplémentaire, d'une solution pour un tel problème ont été démontrées pour le cas scalaire dans [15]. Dans le système (1.2), l'interface de couplage peut être interprétée comme une discontinuité stationnaire à travers laquelle les flux sont continus. En effet, en écrivant les relations de Rankine-Hugoniot à la traversée de cette onde, on a

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) - \mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) = \mathbf{0}, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

où les états  $\mathbf{u}(0^-, t)$  et  $\mathbf{u}(0^+, t)$  sont respectivement les traces à gauche et à droite de l'interface. Il est ainsi clair que la formulation proposée est strictement conservative puisque les flux physiques évalués respectivement sur les traces à gauche et à droite de l'interface sont égaux.

**Remarque 1.1.** Une autre écriture équivalente pour le modèle global en espace est utilisée dans [56] et [62]. Le système d'interface, ou modèle père, est dans ces articles :

$$\begin{cases} \partial_t \gamma = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, \gamma(x)) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \gamma(x)) = (1 - \gamma(x))\mathbf{f}_L(\mathbf{u}) + \gamma(x)\mathbf{f}_R(\mathbf{u})$  et où  $\gamma$  est ici la fonction de Heaviside c'est-à-dire

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Ce système global possède une valeur propre supplémentaire nulle et donc associée à un champ linéairement dégénéré. La structure de la solution du problème de Riemann associé à ce modèle père comporte donc une onde de discontinuité de contact stationnaire en  $x = 0$ .

La remarque que l'on vient de faire sous-entend donc la possibilité de résonance entre valeurs propres : le système (1.4) n'est plus nécessairement diagonalisable lorsqu'une valeur propre associée à un champ vraiment non linéaire devient nulle ou recouvre la valeur zéro. Ce problème

est aussi présent dans l'écriture du modèle global (1.2). Cependant nous verrons que, sous certaines hypothèses sur le régime d'écoulement, cette difficulté supplémentaire n'apparaît pas dans les applications qui nous intéressent.

### Approche non conservative

L'approche non conservative que nous appelons aussi *couplage par état* où encore *v-couplage*, revient à imposer une condition de bord sur l'interface de couplage pour les deux problèmes (1.1a) et (1.1b). Plus précisément, cette condition au bord est une condition de type Dirichlet au sens faible. La méthode du couplage par état consiste à utiliser cette condition de Dirichlet pour assurer la continuité du vecteur d'inconnues  $\mathbf{u}$  à travers l'interface :

$$\mathbf{u}(0^-, t) = \mathbf{u}(0^+, t), \quad t > 0. \quad (1.5)$$

Notons que ceci implique, en général,

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) \neq \mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)), \quad t > 0.$$

La méthode entraîne donc a priori une perte de conservation globale.

Pour des motivations d'ordre physique, il est parfois préférable de limiter, voire contrôler, les pertes de conservation de certaines grandeurs. À ce titre, assurer la continuité d'un vecteur de variables données  $\mathbf{v}$  plutôt que celle des variables conservatives  $\mathbf{u}$  peut être plus pertinent. Introduisons pour cela deux  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes  $\Theta_\alpha : \mathbf{u} \in \Omega \mapsto \mathbf{v} = \Theta_\alpha(\mathbf{u}) \in \Omega_{\mathbf{v}}$  avec  $\alpha = L, R$ . Nous cherchons maintenant à imposer l'égalité suivante :

$$\Theta_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \Theta_R(\mathbf{u}(0^+, t)),$$

au sens faible, soit

$$\mathbf{v}(0^-, t) = \mathbf{v}(0^+, t), \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Ainsi la condition (1.5) devient un cas particulier de (1.6) où les changements de variables  $\Theta_\alpha$  sont les applications identités. Etant données les différentes géométries que peuvent avoir les caractéristiques de chaque problème de part et d'autre de l'interface, l'égalité (1.6) s'avère être souvent trop forte. Dans [30], [52] et [53] les auteurs affaiblissent cette condition. Pour cela, ils introduisent les espaces associés aux solutions admissibles de cette égalité. Plus précisément, ces espaces correspondent aux traces à gauche et à droite des solutions respectivement du problème de Riemann pour le système de gauche (1.1a) et de droite (1.1b). Nous ne détaillons pas ces considérations et nous concentrons dans la suite sur la formulation numérique de cette condition de couplage.

**Remarque 1.2.** *L'écriture (1.2) est correcte pour le cas d'un couplage par flux. En revanche, dans le cas du couplage par état, cette formulation n'est plus vérifiée. En effet, comme il a déjà été précisé, le couplage par état implique, en général,  $\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) \neq \mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t))$ . Le modèle global*

pourrait ainsi s'écrire :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

où  $\mathcal{M}(t) = \mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$ . Ce type de problème est étudié dans [5] et fait l'objet du second chapitre. Pour l'instant nous choisissons de ne pas écrire de formulation globale dans le cas d'un couplage non conservatif. Les pertes de conservation exprimées par le poids dépendant du temps  $\mathcal{M}(t)$  seront mises en évidence uniquement de manière numérique concernant ce premier chapitre.

### 1.1.2 Couplage de systèmes hyperboliques de lois de conservation de tailles différentes

Ici nous nous intéressons au couplage de modèles de tailles différentes. Nous nous concentrons plus précisément sur des modèles prenant en compte des échelles de temps différentes. Les finesses de description associées sont donc différentes et, comme nous l'avons dit dans l'introduction, les modèles sont alors dit hiérarchisés. Nous considérons toujours le problème dans le cas monodimensionnel et le domaine en espace  $\mathbb{R}$  est séparé en deux par une interface fixe et infiniment mince située en  $x = 0$ . Le problème de couplage s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u})) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0, \quad (1.7a)$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \\ \partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{cases} \quad \text{pour } x > 0, t > 0. \quad (1.7b)$$

Détaillons cette écriture. Le modèle de gauche, c'est-à-dire pour  $x < 0$ , est représenté par un système de lois de conservation dont le vecteur des inconnues est noté  $\mathbf{u} : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{u}(x, t) \in \Omega_{\mathbf{u}}$ . Le modèle suppose un état d'équilibre supplémentaire (par exemple thermodynamique, mécanique ou cinématique) par rapport au modèle de droite. Cet équilibre est représenté par la dépendance du flux vis à vis des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}^{eq} : \mathbf{u}(x, t) \in \Omega_{\mathbf{u}} \mapsto \mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u}) \in \Omega_{\mathbf{v}}$ .

Concernant le modèle de droite, un état d'équilibre est supposé atteint en un temps caractéristique  $1/\lambda$ . Cette relaxation est représentée par un autre système d'équations sur le vecteur  $\mathbf{v} : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{v}(x, t) \in \Omega_{\mathbf{v}}$  et dont le flux est noté  $\mathbf{g}$  et dépend des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . On note  $\mathcal{R}$  le terme source de relaxation et l'équilibre  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$  est atteint dans le régime asymptotique  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Ainsi dans ce régime, après avoir divisé par  $\lambda$  de chaque côté, le système d'équations aux dérivées partielles sur le vecteur  $\mathbf{v}$  est remplacé par la relation  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Cet équilibre est équivalent à une fermeture algébrique que l'on écrit sous la forme  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}^{eq}(\mathbf{u})$  où  $\tilde{\mathbf{v}}^{eq} : \mathbf{u}(x, t) \in \Omega_{\mathbf{u}} \mapsto \tilde{\mathbf{v}}^{eq}(\mathbf{u}) \in \Omega_{\mathbf{v}}$ . Dans la pratique, il est possible que ce régime asymptotique pour le modèle de droite ne soit pas compatible avec l'état d'équilibre exprimé par  $\mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u})$  pour le modèle de gauche. Nous devons ainsi distinguer les deux possibilités suivantes.

### Cas d'un régime asymptotique compatible

Dans le cas d'un régime asymptotique dit compatible, nous avons :

$$\mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{v}}^{eq}(\mathbf{u}).$$

Ce type de couplage a été étudié dans [7] et [10] où les auteurs couplent deux modèles de mélange homogène d'écoulements diphasiques. Ils adaptent pour cela les deux méthodes précédemment exposées à ce cas de couplage. Ce couplage est repris dans la dernière section. Rappelons aussi que l'ouvrage [22] traite du couplage entre une loi de conservation scalaire et son modèle de relaxation associé.

### Cas d'un régime asymptotique non compatible

Pour le cas d'un régime asymptotique non compatible, les équilibres sont différents c'est-à-dire :

$$\mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u}) \neq \tilde{\mathbf{v}}^{eq}(\mathbf{u}).$$

Le problème de couplage dans le régime  $\lambda \rightarrow +\infty$  pourrait alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u})) &= \mathbf{0}, & \text{pour } x < 0, t > 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}^{eq}(\mathbf{u})) &= \mathbf{0}, & \text{pour } x > 0, t > 0, \end{aligned}$$

et donc en particulier nous avons :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{eq}(\mathbf{u})) \neq \mathbf{f}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}^{eq}(\mathbf{u})).$$

Dans ce cas, ceci reviendrait au couplage de deux systèmes de lois de conservation avec des fermetures différentes. Nous ne considérons pas ce type de couplage pour l'instant. Dans ce chapitre, seule la possibilité d'un régime asymptotique compatible est retenue.

Dans les deux sections suivantes, des cas d'applications sont exposés. D'une part, le couplage de deux systèmes d'Euler en une dimension est abordé. Les différentes méthodes de couplage seront exprimées sous la forme discrète et des résultats numériques de cas tests viendront illustrer les propriétés de chaque méthode. D'autre part, dans la dernière section, nous nous concentrons sur le cas du couplage de deux modèles d'écoulements diphasiques de taille différente. Les modèles considérés ont des finesses de description différentes mais tendent vers un régime asymptotique compatible.

## 1.2 Application au couplage en dynamique des gaz

Dans cette section, un exemple d'application au cas du couplage de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de même taille mais avec des fermetures différentes est présenté.

Ce cas de couplage a été étudié dans [9] et [13] où les auteurs montrent les conséquences sur le plan numérique de différentes conditions de transmission. La présentation que je suis reprend les grandes lignes et orientations de ces travaux. Le formalisme dans ces articles nous sera utile par la suite. Je vais essentiellement axer ma description sur l'aspect numérique du couplage. Pour l'instant, nous considérons donc le système des équations d'Euler en une dimension d'espace. Notons  $\rho$  la densité du fluide,  $\tau = 1/\rho$  le covolume,  $u$  la vitesse,  $\varepsilon \equiv \varepsilon(\tau, s)$  l'énergie interne où on a noté  $s$  l'entropie du fluide et  $\rho E$  l'énergie totale qui est donnée par la relation

$$\rho E = \rho \frac{u^2}{2} + \rho \varepsilon.$$

Le système s'écrit sous la forme de trois équations de conservation : la première exprime la conservation de la masse du fluide, la seconde celle de la quantité de mouvement et la dernière celle de l'énergie totale, soit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p u) = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t,$$

où  $p \equiv p(\tau, s)$  est la pression du fluide et est supposée vérifier les conditions suivantes

$$\begin{cases} p(\tau, s) > 0, \\ \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_s (\tau, s) = -\rho^2 c^2 < 0, \\ \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right)_s (\tau, s) > 0, \end{cases} \quad \forall \tau > 0, s \in \mathbb{R}.$$

Plus précisément, la première propriété assure la positivité de la pression, la seconde la positivité de la vitesse du son  $c \equiv c(\tau, s)$  en coordonnées Eulériennes<sup>1</sup> et la troisième la stricte convexité des courbes isentropes<sup>2</sup>. Ces hypothèses posées, le système des équations d'Euler écrit plus haut est strictement hyperbolique sur l'espace des états

$$\Omega = \{\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E) \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, u \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$$

et admet les trois valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1(\mathbf{u}) = u - c < \lambda_2(\mathbf{u}) = u < \lambda_3(\mathbf{u}) = u + c.$$

De plus, le 1-champ et le 3-champ sont vraiment non linéaires alors que le 2-champ est linéairement dégénéré. Pour plus de détails sur la théorie des écoulements compressibles on renvoie le

---

1. L'hypothèse garantit également la stricte hyperbolicité du système des équations d'Euler.

2. Cette supposition entraîne la stricte convexité des flux physiques et permet de déterminer la nature des différents champs associés aux valeurs propres du système.

lecteur à, entre autres, l'ouvrage [1]. Le problème de couplage interfacial que nous étudions s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0, \quad (1.8a)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x > 0, t > 0. \quad (1.8b)$$

Ici, la différence des fermetures s'exprime par des lois d'état différentes de part et d'autre de l'interface de couplage. Plus précisément, en notant  $p \equiv p_\alpha(\tau, s)$  avec  $\alpha = L, R$  les lois de pressions correspondantes, le vecteur des flux est :

$$\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_\alpha \\ \rho E u + p_\alpha u \end{pmatrix} \quad \alpha = L, R.$$

Le paragraphe suivant présente une formulation d'approximation numérique de type volumes finis pour ce problème de couplage.

### 1.2.1 Approximation numérique du problème de couplage

Dans cette section, nous présentons le formalisme pour la résolution numérique du problème de couplage (1.8a) et (1.8b). Nous reprenons la méthodologie des auteurs de [9] et [13]. Nous utilisons pour cela une méthode classique volumes finis ([1], [51], [76] [86]). Plus précisément, on considère un pas de temps  $\Delta t$  et un pas d'espace  $\Delta x$ . Le domaine en espace  $\mathbb{R}$  est subdivisé en cellules d'interfaces  $x_j = j\Delta x$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et notées  $C_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}[$ . Les centres des cellules sont données par  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$ . Les temps discrets sont notés  $t^n = n\Delta t$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On introduit ensuite les grandeurs approchées suivantes :

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{u}(x, t^n) dx,$$

$$(\mathbf{g}_\alpha)_j^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}(x_j, t)) dt, \quad \alpha = L, R.$$

Nous cherchons à chaque pas de temps  $t^n$  une fonction constante par morceaux  $\mathbf{u}_{\Delta x} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n)$  qui est une approximation de la solution  $\mathbf{u}$  du problème (1.8a) à gauche et (1.8b) à droite, de telle sorte que :

$$\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n) = \mathbf{u}_{j+1/2}^n \quad \text{pour } x \in C_{j+1/2}.$$

En intégrant les équations des systèmes (1.8a) et (1.8b), nous sommes amenés à définir cette solution approchée au temps  $t^{n+1}$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1} &= \mathbf{u}_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_L)_j^n - (\mathbf{g}_L)_{j-1}^n), \quad \text{pour } j \leq 0, \\ \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} &= \mathbf{u}_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}_R)_j^n), \quad \text{pour } j \geq 0. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous construisons les flux numériques  $(\mathbf{g}_\alpha)_j^n$  pour  $\alpha = L, R$  à partir de flux numériques à deux points c'est-à-dire qu'on a  $(\mathbf{g}_\alpha)_j^n = \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{u}_{j-1/2}^n, \mathbf{u}_{j+1/2}^n)$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ . Les fonctions flux numériques  $\mathbf{g}_L$  et  $\mathbf{g}_R$  sont respectivement deux approximations des flux physiques  $\mathbf{f}_L$  et  $\mathbf{f}_R$  obtenues, par exemple, par un solveur de Riemann exact ou approché. A chaque itération, les pas en espace et en temps sont liés par la condition de Courant-Friedrich-Levy suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left| \lambda_i(\mathbf{u}_{j+1/2}^n) \right|, i = 1, 2, 3 \right\} \leq C, \quad (1.9)$$

où  $C \leq \frac{1}{2}$  est le nombre de Courant et est une constante strictement positive (pour plus de détails sur les conditions CFL nous renvoyons le lecteur à [51], par exemple). Dans le cas du couplage, la formulation est la même pour les états dans les cellules à gauche et à droite de l'interface de couplage soit pour  $j = 0$  : les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  correspondent à l'approximation des flux exacts  $\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$  et  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t))$  sur l'interface de couplage et dépendent de la condition de transmission imposée. Dans la section 1.1.1, deux méthodes ont été présentées : le couplage par flux et le couplage par état. Dans le cas de la première méthode, l'égalité des flux physiques  $\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$  et  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t))$  doit être restaurée au niveau discret, c'est-à-dire que l'on veut  $(\mathbf{g}_R)_0^n = (\mathbf{g}_L)_0^n$ . Cette égalité ne sera naturellement pas respectée dans le cas d'un couplage non conservatif. Les deux sections qui suivent présentent les deux méthodes pour évaluer ces flux numériques.

### 1.2.2 Couplage conservatif : approche par relaxation

Cette section décrit la résolution numérique du problème de couplage (1.1a) et (1.1b) associé à la condition de transmission du couplage par flux. Plus précisément, on veut évaluer les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  dans l'approximation du problème suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.10)$$

où le flux du modèle global  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, x)$  correspond à la loi d'état  $p(\tau, s, x)$  définie par :

$$p(\rho, s, x) = \begin{cases} p_L(\tau, s), & x < 0, \\ p_R(\tau, s), & x > 0. \end{cases}$$

La méthode que l'on présente pour la résolution de ce problème a été développée dans [11] avant le commencement de ma thèse. Elle est basée sur une approche par relaxation du problème (1.10).



Les méthodes d'approximation numérique basées sur les approches par relaxation ont été très étudiées dans la littérature. Citons par exemple [32] et [71]. Dans [71], les auteurs proposent de linéariser un système hyperbolique de lois de conservation en rajoutant, pour chaque équation du système, une équation d'évolution sur une nouvelle inconnue. Un terme source de relaxation est présent dans chacune de ces équations de telle sorte que le système de relaxation obtenu converge formellement vers le système initial. Des schémas d'approximation sont ensuite employés pour la résolution du système de relaxation. Il est montré, dans les mêmes travaux, que ces schémas convergent bien, dans la limite vers zéro du terme source de relaxation, vers des solveurs pour le système initial. Le livre [19] présente également différentes méthodes par relaxation appliquées à la dynamique des gaz.

L'approche par relaxation ici utilisée provient des travaux [28], [29], [35] et [34]. L'ouvrage [27] la décrit également de manière détaillée. Dans le contexte du système des équations d'Euler, la méthode applique le même principe que [71] mais seulement aux nonlinéarités fortes du système. Pour cela, après un changement en coordonnées Lagrangiennes du système initial, le terme de pression qui apparaît dans une des équations est linéarisé à la manière de [71]. Nous verrons que le système de relaxation qui résulte, après retour en coordonnées Eulériennes, est linéairement dégénéré. Les vraies nonlinéarités du système d'Euler initial n'apparaissent plus. Le modèle de relaxation ainsi obtenu contient une équation aux dérivées partielles supplémentaire qui décrit l'évolution d'une nouvelle variable  $\pi$  appelé aussi pression de relaxation. Le système de relaxation approchant le modèle équilibre (1.10) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}, x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.11)$$

où on a noté

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho \pi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho E u + \pi u \\ \rho \pi u + a^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho(p(\tau, s, x) - \pi) \end{pmatrix}.$$

Le paramètre  $\lambda$  détermine la fréquence de retour à l'équilibre du modèle de relaxation vers le modèle équilibre. Plus précisément, en divisant la dernière équation par  $\lambda$ , on a formellement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \pi = p(\tau, s, x).$$

Pour garantir la stabilité de ce processus de retour à l'équilibre, traduit par la limite ci-dessus, le coefficient strictement positif  $a$  doit vérifier la condition de Whitham c'est-à-dire :

$$a > \max_{\rho} \{ \rho c(\tau, s, x) \}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

où  $c(\tau, s, x)$  est la vitesse du son associée à la loi de pression du système global (1.10). Le modèle

de relaxation (1.11) est défini sur l'espace des états :

$$\Omega^r = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^4, \rho > 0, u \in \mathbb{R}, E > 0, \pi \in \mathbb{R}\}.$$

Il est important de noter que la pression de relaxation  $\pi$  étant assujettie à sa propre loi d'évolution, le problème de couplage dans le système (1.11) apparaît dorénavant dans le terme source de relaxation. Nous voyons donc l'intérêt de cette approche par relaxation : le flux du système (1.11) ne dépend plus de la variable en espace  $x$ . Pour le modèle convectif associé, la discontinuité stationnaire due au couplage n'existe plus. Nous verrons dans la suite de l'exposé que cette propriété importante nous permet d'assurer l'égalité stricte entre les deux flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ .

Concernant les propriétés mathématiques du système du premier degré extrait de (1.11), notons qu'il est hyperbolique sur l'espace des états  $\Omega^r$  et admet pour valeurs propres :

$$\lambda_1^r(\mathbf{U}) = u - a\tau < \lambda_2^r(\mathbf{U}) = \lambda_3^r(\mathbf{U}) = u < \lambda_4^r(\mathbf{U}) = u + a\tau,$$

De plus les champs associés à ces valeurs propres sont tous linéairement dégénérés. Afin d'avancer la solution approchée constante par morceaux  $\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n)$  au temps  $t^{n+1}$  et donc en particulier calculer les flux numériques à l'interface de couplage, nous procédons en deux étapes.

### Première étape : résolution du système hors équilibre

Lors de ce premier pas, nous résolvons le système de relaxation (1.11) hors équilibre c'est-à-dire avec  $\lambda = 0$ . Nous cherchons donc à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t \in (t^n, t^{n+1/2}), \\ \mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^n), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.13)$$

avec

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^n) = (\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n), (\rho\pi)_{\Delta x}(x, t^n))^T$$

et où  $(\rho\pi)_{\Delta x}(x, t^n)$  est pris à l'équilibre. Plus précisément on pose

$$(\rho\pi)_{\Delta x}(x, t^n) = \rho_{\Delta x}(x, t^n) p(\tau_{\Delta x}(x, t^n), s_{\Delta x}(x, t^n), x).$$

Sous la condition CFL suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left| \lambda_i^r(\mathbf{U}_{j+1/2}^n) \right|, i = 1, 2, 3, 4 \right\} \leq C, \quad (1.14)$$

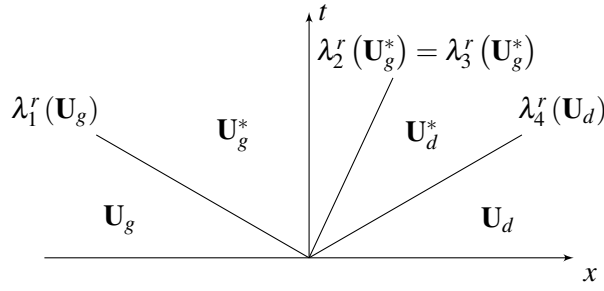


FIGURE 1.1 – Structure générale de la solution du problème de Riemann (1.15)

la solution de (1.13) est une succession de problèmes de Riemann. Etant donnés deux états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$ , nous cherchons donc à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.15)$$

Les champs associés aux valeurs propres étant tous linéairement dégénérés, la solution de ce problème de Riemann ne comporte que des discontinuités de contact. Dans les applications qui nous intéressent, les écoulements au sein d'un réacteur nucléaire à eau pressurisée, les vitesses des ondes acoustiques sont proches de la vitesse du son dans le fluide. Autrement dit on a :  $|u| \ll c$  où  $c$  est la vitesse du son dans le fluide. Grâce à la condition de Whitham (1.12) on a donc nécessairement  $|u| \ll a\tau$ . La structure générale de la solution du problème de Riemann est représentée sur la figure 1.1. La proposition suivante donne l'expression des états intermédiaires.

**Proposition 1.1.** *Soient deux états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  appartenant à l'espace des états  $\Omega^r$ . Alors il existe une unique solution autosemblable, notée  $\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ , du problème de Riemann (1.15). Celle-ci est de la forme suivante :*

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_g^*, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_g^*), \\ \mathbf{U}_d^*, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_d^*) < \frac{x}{t} < \lambda_4^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_d, & \lambda_4^r(\mathbf{U}_d) < \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (1.16)$$

où les états intermédiaires  $\mathbf{U}_g^* = (\rho_g^*, \rho_g^* u^*, \rho_g^* E_g^*, \rho_g^* \pi^*)^T$  et  $\mathbf{U}_d^* = (\rho_d^*, \rho_d^* u^*, \rho_d^* E_d^*, \rho_d^* \pi^*)^T$  sont

donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{1}{2}(u_g + u_d) - \frac{1}{2a}(\pi_d - \pi_g), \\
 \tau_g^* &= \tau_g + \frac{1}{a}(u^* - u_g), \\
 \tau_d^* &= \tau_d + \frac{1}{a}(u_d - u^*), \\
 \pi^* &= \frac{1}{2}(\pi_g + \pi_d) - \frac{a}{2}(u_d - u_g), \\
 E_g^* &= E_g - \frac{1}{a}(\pi^* u^* - \pi_g u_g), \\
 E_d^* &= E_d - \frac{1}{a}(\pi_d u_d - \pi^* u^*),
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Les formules sur les états intermédiaires sont obtenues en utilisant la propriété de continuité des vitesses d'ondes (cas des discontinuités de contact). Tout d'abord, la relation  $\lambda_2^r(\mathbf{U}_g^*) = \lambda_2^r(\mathbf{U}_d^*)$  nous donne immédiatement  $u_g^* = u_d^* = u^*$ . D'autre part, on écrit les relations de Rankine-Hugoniot appliquées à l'équation de conservation de la quantité de mouvement de part et d'autre de deux états successifs, c'est-à-dire :

$$-\lambda_i^r(\mathbf{U})\llbracket \rho u \rrbracket + \llbracket \rho u^2 + \pi \rrbracket = 0, \quad (1.17)$$

pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . Pour  $i = 2$ , l'équation (1.17) donne  $\pi_g^* = \pi_d^* = \pi^*$ . Ensuite, avec  $i = 1$  et  $i = 4$  et en utilisant le fait que  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*)$  et que  $\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) = \lambda_4^r(\mathbf{U}_d^*)$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 -\lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*)\rho_g^* u^* + \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)\rho_g u_g + (\rho_g^*(u^*)^2 + \pi^* - \rho_g u_g^2 - \pi_g) &= 0, \\
 -\lambda_4^r(\mathbf{U}_d)\rho_d u_d + \lambda_4^r(\mathbf{U}_d^*)\rho_d^* u^* + (\rho_d u_d^2 + \pi_d - \rho_d^*(u^*)^2 - \pi^*) &= 0,
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$a u^* - a u_g + \pi^* - \pi_g = 0, \quad (i)$$

$$-a u_d + a u^* + \pi_d - \pi^* = 0. \quad (ii)$$

Ainsi, la formule sur  $u^*$  est obtenue en faisant l'opération (i+ii) et la formule sur  $\pi^*$  en faisant (i-ii). Les relations  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*)$  et  $\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) = \lambda_4^r(\mathbf{U}_d^*)$  conduisent aux expressions respectivement des variables  $\tau_g^*$  et  $\tau_d^*$ , c'est-à-dire :

$$u_g - a \tau_g = u^* - a \tau_g^*,$$

$$u_d + a \tau_d = u^* + a \tau_d^*.$$

Enfin, la grandeur  $E_g^*$  est déterminée grâce à la relation de Rankine-Hugoniot sur l'équation de l'énergie totale de part et d'autre de l'onde de discontinuité de contact associée à la valeur propre

$\lambda_1^r(\mathbf{U}_g)$ . On utilise également le fait que  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*)$ . La relation s'écrit :

$$-\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) \llbracket \rho E \rrbracket_g^* + \llbracket \rho E u + \pi u \rrbracket_g^* = 0,$$

qui est équivalent à :

$$-\lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*) \rho_g^* E_g^* + \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) \rho_g E_g + (\rho_g^* E_g^* u^* + \pi^* u^* - \rho_g E_g u_g - \pi_g u_g) = 0,$$

avec  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*) = u^* - a\tau_g^*$  et  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = u_g - a\tau_g$ . Après simplification, l'équation ci-dessus donne l'expression de la variable  $E_g^*$ . On procède de la même façon pour  $E_d^*$  en raisonnant sur l'onde extrême  $\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) = \lambda_4^r(\mathbf{U}_d^*)$ .  $\square$

Avant la deuxième étape de la résolution, on donne l'expression de la projection  $\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t)$  sur chaque cellule du maillage de la solution du problème (1.13). Tout d'abord, étant donnée la résolution du problème de Riemann de part et d'autre de deux cellules successives, il est clair que l'on a

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathcal{W} \left( \frac{x - x_j}{t}; \mathbf{U}_{j-1/2}^n, \mathbf{U}_{j+1/2}^n \right),$$

pour tout  $(x, t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . On définit alors la solution discrète  $\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t)$  au temps intermédiaire  $t^{n+1/2}$  via la moyenne

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1/2}) := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx, \quad x \in C_{j+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

### Deuxième étape : retour à l'équilibre

Dans le deuxième pas, les variables du modèle de relaxation sont ramenées à l'équilibre. Pour cela, on résout le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}, x), & x \in \mathbb{R}, t \in (t^{n+1/2}, t^{n+1}), \\ \mathbf{U}(x, t^{n+1/2}) = \mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1/2}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dans le régime  $\lambda \rightarrow +\infty$ . En divisant par  $\lambda$ , il est donc équivalent de poser

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1}) = (\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^{n+1}), (\rho \pi)_{\Delta x}(x, t^{n+1}))^T,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^{n+1}) &= \left\{ \left[ \mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1/2}) \right]_{i=1,2,3} \right\}, \\ (\rho \pi)_{\Delta x}(x, t^{n+1}) &= \rho_{\Delta x}(x, t^{n+1/2}) p \left( \tau_{\Delta x}(x, t^{n+1/2}), s_{\Delta x}(x, t^{n+1/2}), x \right), \end{aligned}$$

où  $[\mathbf{v}]_i$  correspond à la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{v}$ .

**Proposition 1.2.** *L'approche par relaxation préserve la continuité des flux numériques sur l'interface de couplage, c'est-à-dire :*

$$(\mathbf{g}_L)_0^n = (\mathbf{g}_R)_0^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

*Démonstration.* La preuve est immédiate. En effet en considérant, dans les deux étapes de résolution, la définition de  $\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1/2})$  d'une part puis celle de  $\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^{n+1})$  d'autre part, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_L)_0^n &:= \left[ \mathbf{F} \left( \mathscr{W} \left( 0^-; \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{+1/2}^n \right) \right) \right]_{i=1,2,3}, \\ (\mathbf{g}_R)_0^n &:= \left[ \mathbf{F} \left( \mathscr{W} \left( 0^+; \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{+1/2}^n \right) \right) \right]_{i=1,2,3}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  sont égaux aux trois premières composantes des flux de Godunov correspondants. Étant données les géométries d'ondes dans la solution du problème du Riemann et le fait que ces flux de Godunov sont, par construction, continus sur chaque interface, alors il résulte que l'égalité (1.18) est vérifiée et que l'approche est bien strictement conservative.  $\square$

### 1.2.3 Couplage non conservatif : approche double-flux

Nous étudions dans cette section la méthode du couplage non conservatif et des différents choix de variables possibles à transmettre au travers de l'interface de couplage. Rappelons en effet l'objectif initial de cette approche. La motivation est de contrôler les solutions stationnaires du problème de couplage. Pour cela, on impose la continuité d'un vecteur de variables  $\mathbf{v}$  à travers l'interface grâce à une condition au bord de type Dirichlet pour les problèmes (1.8a) et (1.8b). Nous avons introduit pour cela deux applications définissant un changement de variables quelconque  $\Theta_\alpha$  pour  $\alpha = L, R$ . On impose ainsi, dans la mesure du possible, l'égalité suivante :

$$\Theta_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \Theta_R(\mathbf{u}(0^+, t)), \quad (1.19)$$

soit

$$\mathbf{v}(0^-, t) = \mathbf{v}(0^+, t), \quad t > 0.$$

Rappelons que, cette égalité étant trop forte, elle a été affaiblie dans [30], [52] et [53] sur la base de deux ensembles des traces à gauche et à droite de l'interface des solutions admissibles du problème de Riemann respectivement pour la fermeture du domaine de gauche et pour la fermeture du domaine de droite. La formulation discrète choisie pour cette méthode est relativement plus simple. Elle repose sur la méthode à double-flux développée dans [9] et [13] où les auteurs généralisent au cas du couplage la méthode dite *Ghost-Fluid* de [2] et [41]. La méthode *Ghost-Fluid* est une méthode très utilisée pour simuler des écoulements multi-constituants avec suivi d'interface via une fonction level-set. Pour calculer les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ , les auteurs de [9] et [13]

définissent deux états fictifs  $(\bar{\mathbf{u}})_{+1/2}$ ,  $(\bar{\mathbf{u}})_{-1/2}^n$  dépendant du choix des variables dont la continuité est assurée. Les flux numériques sont ensuite donnés de la manière suivante :

$$(\mathbf{g}_L)_0^n := \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \bar{\mathbf{u}}_{+1/2}^n), \quad (1.20)$$

$$(\mathbf{g}_R)_0^n := \mathbf{g}_R(\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{+1/2}^n). \quad (1.21)$$

Les états fictifs  $(\bar{\mathbf{u}})_{+1/2}^n$  et  $(\bar{\mathbf{u}})_{-1/2}^n$  sont définis grâce aux applications  $\Theta_L$ ,  $\Theta_R$  et l'équation (1.19), c'est-à-dire :

$$(\bar{\mathbf{u}})_{+1/2}^n := \Theta_L^{-1} \left\{ \Theta_R \left( \mathbf{u}_{+1/2}^n \right) \right\},$$

$$(\bar{\mathbf{u}})_{-1/2}^n := \Theta_R^{-1} \left\{ \Theta_L \left( \mathbf{u}_{-1/2}^n \right) \right\}.$$

Dans cette section, nous proposons d'assurer la continuité de trois différents vecteurs de variables et donnons pour chacun les définitions des applications  $\Theta_\alpha$ ,  $\alpha = L, R$ , associées.

– Continuité de  $(\rho, \rho u, \rho E)$  :

$$\Theta_L((\rho, \rho u, \rho E)) := (\rho, \rho u, \rho E),$$

$$\Theta_R((\rho, \rho u, \rho E)) := (\rho, \rho u, \rho E).$$

– Continuité de  $(\rho, \rho u, p)$  :

$$\Theta_L((\rho, \rho u, \rho E)) := (\rho, \rho u, p_L(\tau, s)),$$

$$\Theta_R((\rho, \rho u, \rho E)) := (\rho, \rho u, p_R(\tau, s)),$$

où l'entropie est donnée par  $s \equiv s(\tau, E - u^2/2)$ .

– Continuité de  $(\rho, \rho u, h)$  où  $h = \varepsilon + p/\rho$  est l'enthalpie du fluide :

$$\Theta_L((\rho, \rho u, \rho E)) := (\rho, \rho u, (E - u^2/2) + p_L(\tau, s)/\rho),$$

$$\Theta_R((\rho, \rho u, \rho E)) := (\rho, \rho u, (E - u^2/2) + p_R(\tau, s)/\rho),$$

où  $s \equiv s(\tau, E - u^2/2)$ .

Le dernier choix de variable (en enthalpie) correspond à la première contribution apportée au début de cette thèse. On voit que les flux (1.20) et (1.21) ne seront pas égaux, en général, et que la méthode n'est pas conservative. Dans le cas du couplage par état en variables  $(\rho, \rho u, \rho E)$ , les composantes du flux en impulsion et en énergie totale ne seront pas continues à travers l'interface en raison de la différence des lois de pressions des problèmes (1.8a) et (1.8b) et donc, par suite, dans (1.20) et (1.21). L'approche n'est donc ni conservative en impulsion, ni en énergie. Pour s'en convaincre, détaillons un rapide calcul fait dans [9]. Considérons le problème de couplage (1.8a)

et (1.8b) muni de la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \rho(x, 0) &= \rho^0, \\ u(x, 0) &= u^0, \\ E(x, 0) &= E^0, \end{cases}$$

avec  $\rho^0 > 0$ ,  $u^0$  et  $E^0 > 0$  des constantes non nulles. En dehors de l'interface, la solution d'un tel problème de Cauchy est un profil uniforme stationnaire. Comme nous forçons la continuité de ces trois variables à l'interface, il en résulte que le profil sur ces grandeurs est uniforme stationnaire également en  $x = 0$  et donc sur tout le domaine en espace. Concernant la conservation de l'impulsion, intégrons l'équation associée sur le compact  $[-a, a] \times [0, T]$  avec  $a > 0$  et  $T > 0$  :

$$\zeta_{\rho u} = \int_{-a}^a ((\rho u)(x, T) - (\rho u)(x, 0)) dx + \int_0^T ((\rho u^2 + p)(a, t) - (\rho u^2 + p)(-a, t)) dt.$$

Le premier terme est nul car la composante  $\rho u$  est continue à l'interface. Dans le second terme, seul subsiste le terme en pression qui est discontinu de part et d'autre de l'interface. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \zeta_{\rho u} &= \int_0^T ((p_R(\rho^0, \varepsilon^0) - p_L(\rho^0, \varepsilon^0)) dt, \\ &= [p_R(\rho^0, \varepsilon^0) - p_L(\rho^0, \varepsilon^0)] T. \end{aligned}$$

Nous obtenons que  $\zeta_{\rho u}$  est non nul et fonction linéaire de  $T$ . L'impulsion n'est donc pas conservée. Les mêmes calculs montrent la non conservation de l'énergie totale  $\rho E$ . *A contrario*, dans le cas du couplage par flux, la conservation serait stricte pour toutes les variables. En revanche, le profil stationnaire ne serait plus respecté (en raison de l'incompatibilité des fermetures). Concernant la transmission en  $(\rho, \rho u, p)$ , les flux en masse et impulsion sont continus puisque la continuité de la pression est assurée. En revanche le flux en énergie totale n'est pas continu. Les mêmes considérations sur la transmission en  $(\rho, \rho u, h)$  impliquent la perte de conservation en impulsion uniquement. En effet, grâce à la relation  $\rho E + p = \rho \frac{u^2}{2} + \rho h$ , le flux en énergie totale est continu à travers l'interface de couplage.

#### 1.2.4 Résultats numériques

Nous présentons maintenant différents cas tests numériques. Ces tests correspondent à différents problèmes de Riemann pour les équations (1.8a) et (1.8b). Plus précisément, l'interface est toujours située en  $x = 0$  et la condition initiale s'écrit :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_g, & x < 0, \\ \mathbf{u}_d, & x > 0, \end{cases}$$



où les états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont deux états constants. Notre but est de comparer les deux méthodes, le couplage par flux et le couplage par état, et de tester également pour le couplage par état différents jeux de transmission (précisément les trois que nous avons proposés). Le domaine d'étude est restreint à l'intervalle  $[-0.5, 0.5]$ . La loi d'état est du type gaz parfait polytropique, c'est-à-dire qu'elle s'écrit en variables  $(\tau, \varepsilon)$

$$p_\alpha(\tau, \varepsilon) = (\gamma_\alpha - 1)\varepsilon/\tau, \quad \alpha = L, R, \quad (1.22)$$

où  $\gamma_\alpha$  sont les coefficients adiabatiques dans le domaine de gauche et de droite et  $\varepsilon \equiv \varepsilon(\tau, s)$ . On prend pour tous les cas tests  $\gamma_L = 1.4$  et  $\gamma_R = 1.6$ . Le nombre de cellules est  $N = 200$  et la nombre de Courant  $C$  dans l'équation (1.9) est égal à 0.5.

### Profil uniforme en pression

Nous considérons tout d'abord un profil uniforme en densité, vitesse et pression sur tout le domaine. Les conditions initiales sont données dans le tableau 1.1. Les résultats pour le couplage par flux sont représentés sur la figure 1.2. Concernant le couplage par état, la transmission en variables conservatives  $(\rho, \rho u, \rho E)$  est représentée sur la figure 1.3 ; la figure 1.4 montre les résultats pour la transmission en variables primitives  $(\rho, \rho u, p)$  et enfin sur la figure 1.5 se trouve le couplage par état en variables  $(\rho, \rho u, h)$ . Le temps final de la simulation est 0.12. Parmi les résultats montrés, on donne aussi la perte de conservation relative en fonction du temps de la simulation. Pour la perte de conservation relative en masse, celle-ci est notée  $\zeta_\rho^m$  à l'itération  $m$  et est définie de la manière suivante :

$$\zeta_\rho^m = \frac{\sum_{j=-N/2}^{N/2-1} (\rho_{j+1/2}^{n+1} - \rho_{j+1/2}^n) + \sum_{n=0}^m \left( (\rho u)_{N/2-1/2}^n - (\rho u)_{-N/2+1/2}^n \right)}{\sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \rho_{j+1/2}^{n+1}},$$

où  $j = -N/2$  et  $j = N/2 - 1$  correspondent à la première et la dernière cellule. Les autres pertes de conservation relatives sont calculées selon la même formule où on remplace les termes en  $\rho$  et  $(\rho u)$  respectivement par les autres composantes du vecteur des variables conservatives et du vecteur des flux.

	$g$	$d$
$\rho$	1.6	1.6
$u$	0.8	0.8
$p$	2.35	2.35

TABLE 1.1 – Profil uniforme en pression - conditions initiales

Dans le cas du couplage par flux, les résultats montrent bien que le profil uniforme n'est pas

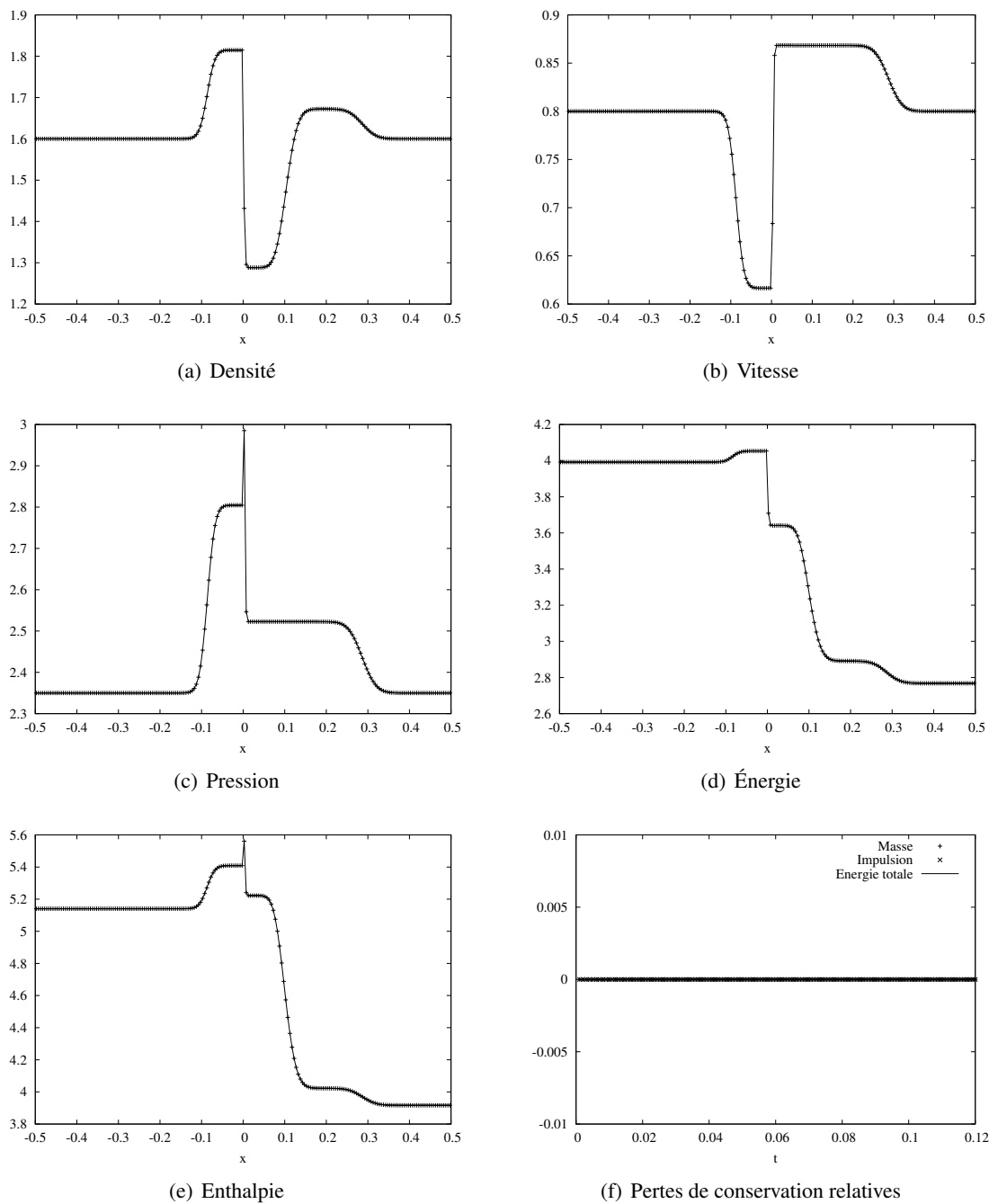


FIGURE 1.2 – Profil uniforme en pression - résultats pour le couplage par flux

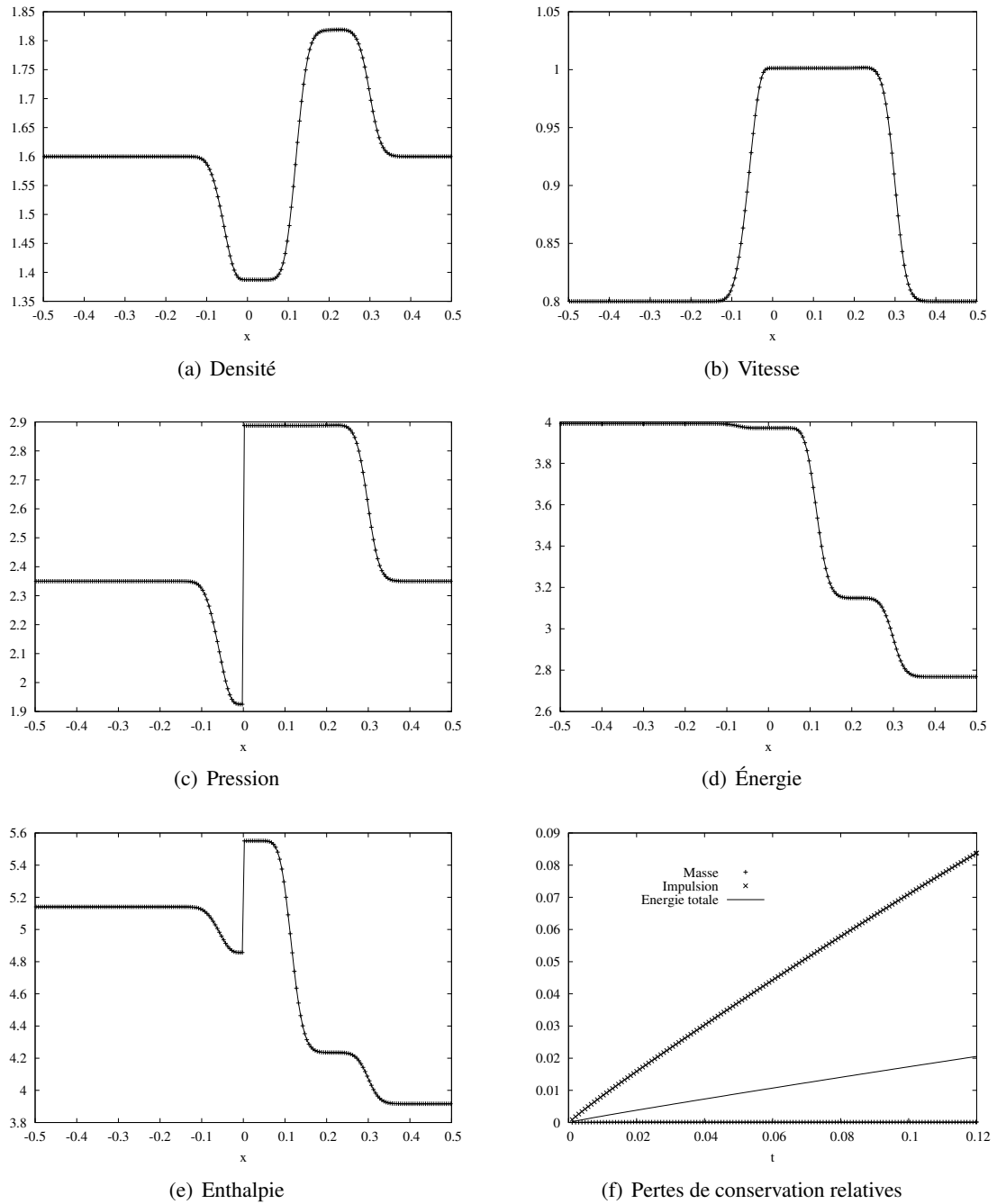


FIGURE 1.3 – Profil uniforme en pression - résultats pour le couplage par état en  $(\rho, \rho u, \rho E)$

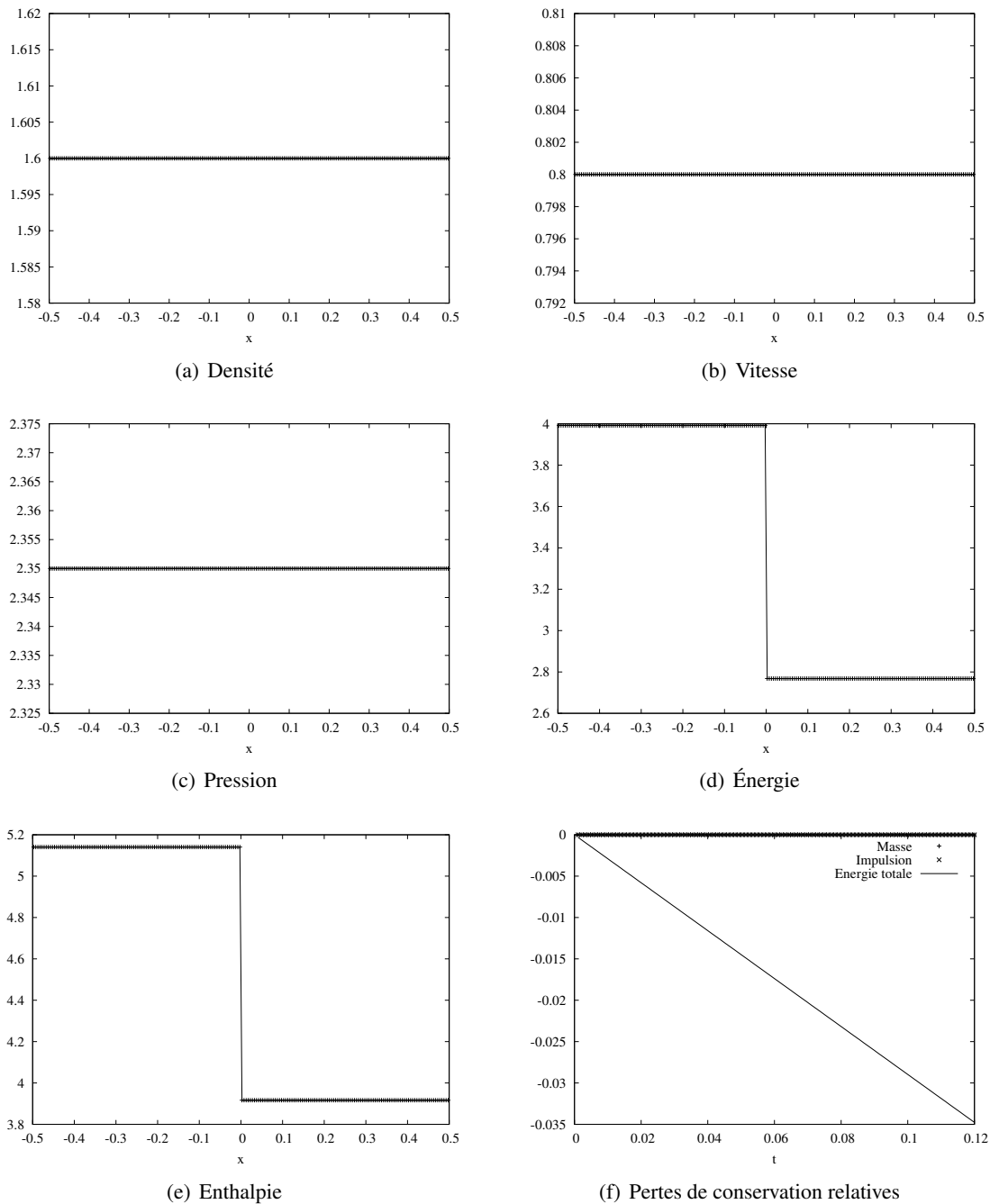


FIGURE 1.4 – Profil uniforme en pression - résultats pour le couplage par état en  $(\rho, \rho u, p)$

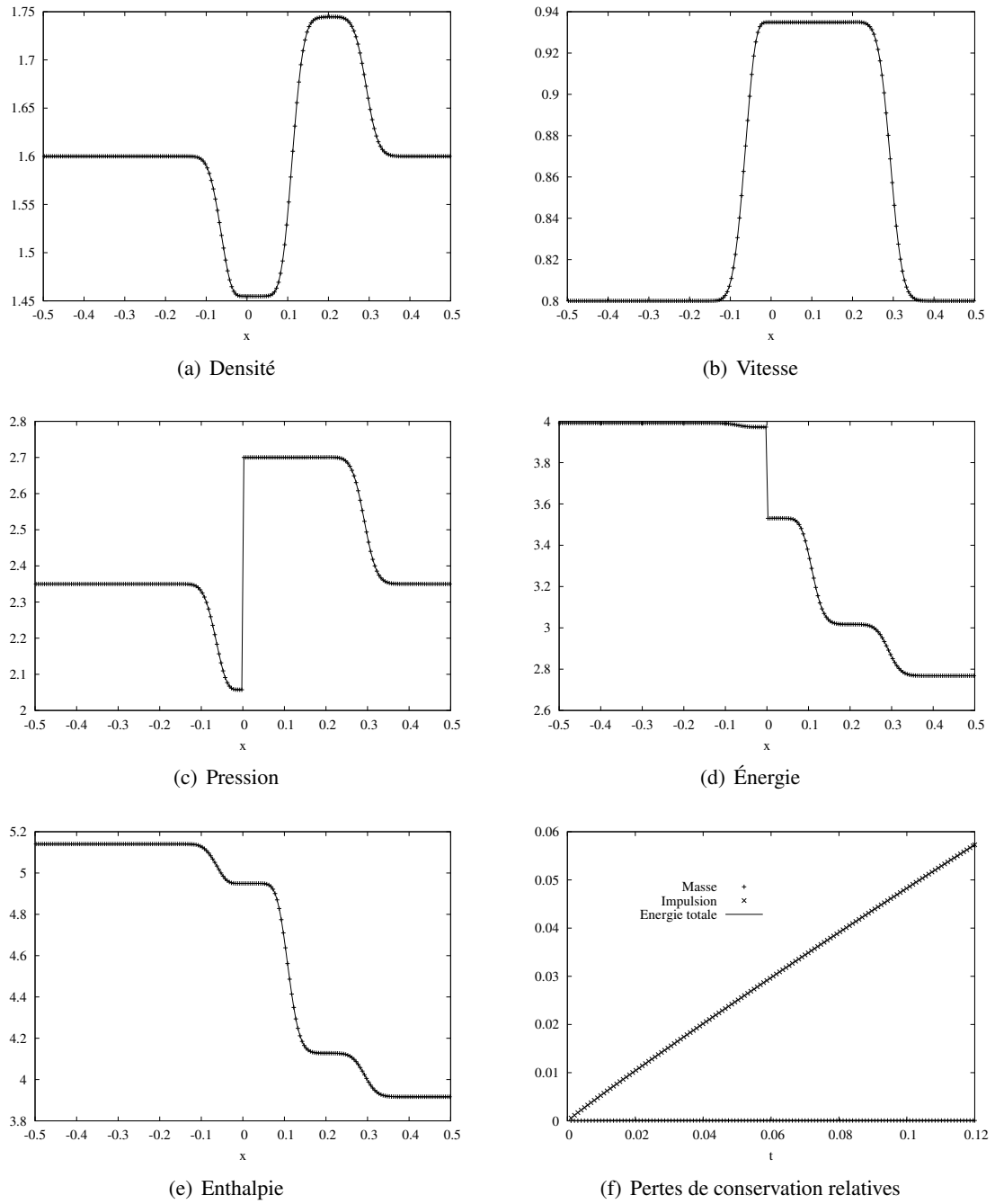


FIGURE 1.5 – Profil uniforme en pression - résultats pour le couplage par état en  $(\rho, \rho u, h)$

respecté : des ondes acoustiques de vitesse négative pour le domaine de gauche et positive pour le domaine de droite sont générées à l'interface. En revanche, au regard de la perte de conservation relative sur la masse, impulsion et énergie, la méthode est bien strictement conservative<sup>3</sup>. En plus des ondes acoustiques, on peut remarquer la présence de plusieurs points (ici deux) entre les deux profils instationnaires à gauche et à droite de l'interface de couplage. Des simulations en temps plus long nous montrent que ces points persistent. Cette épaisseur numérique de l'interface s'apparente à un phénomène de couche limite artificielle bien visible sur le profil en pression avec un point remontant au-dessus du profil des deux ondes. Nous verrons dans le prochain chapitre comment éliminer ce phénomène. Sur la figure 1.4, on remarque l'intérêt de la méthode du couplage par état en variables primitives : le profil uniforme de toutes les grandeurs est respecté. Cependant, comme cela était prévisible, la figure présentant la perte de conservation relative nous montre bien que l'énergie n'est pas conservée. Celle-ci est constante au cours des itérations et ceci en raison de la définition de  $\zeta$  qu'on a précédemment donnée. Les deux autres choix de transmission confirment les remarques faites dans la section précédente : le couplage par état en variables conservatives sur la figure 1.3 n'est pas conservatif en impulsion et en énergie. La méthode préserve la continuité du profil en énergie, ce qui n'est pas le cas pour le profil de pression qui n'est plus uniforme par construction de la méthode. La transmission en enthalpie de la figure 1.5 nous amène aux mêmes considérations excepté pour la perte de conservation relative qui reste non nulle uniquement en impulsion. Le profil en enthalpie est bien continu à l'interface de couplage.

### Tube à choc

Le deuxième test que nous présentons est un tube à choc. Les conditions initiales pour ce cas test sont données dans le tableau 1.2. Les résultats sont représentés au temps final 0.15.

	$g$	$d$
$\rho$	1.6	1.4
$u$	0.8	0.8
$p$	2.35	2.1

TABLE 1.2 – Tube à choc - conditions initiales

Les figures 1.6, 1.7, 1.8 et 1.9 montrent respectivement les résultats obtenus avec le couplage par flux, le couplage par état en variables conservatives, en variables primitives et en enthalpie. Comme dans le cas du profil uniforme, la méthode du couplage par flux fait apparaître des ondes acoustiques à l'interface de couplage mais reste strictement conservative. Par construction, la méthode du couplage par état en variables primitives restaure un profil continu pour toutes les variables concernées. En revanche, l'énergie totale n'est pas conservée. Les méthodes de couplage par état en variables conservatives et en enthalpie présentent des profils assez proches : si on compare les résultats avec ceux du couplage par état en variables primitives, ils diffèrent par une onde

---

3. Les valeurs obtenues sont égales au zéro machine.

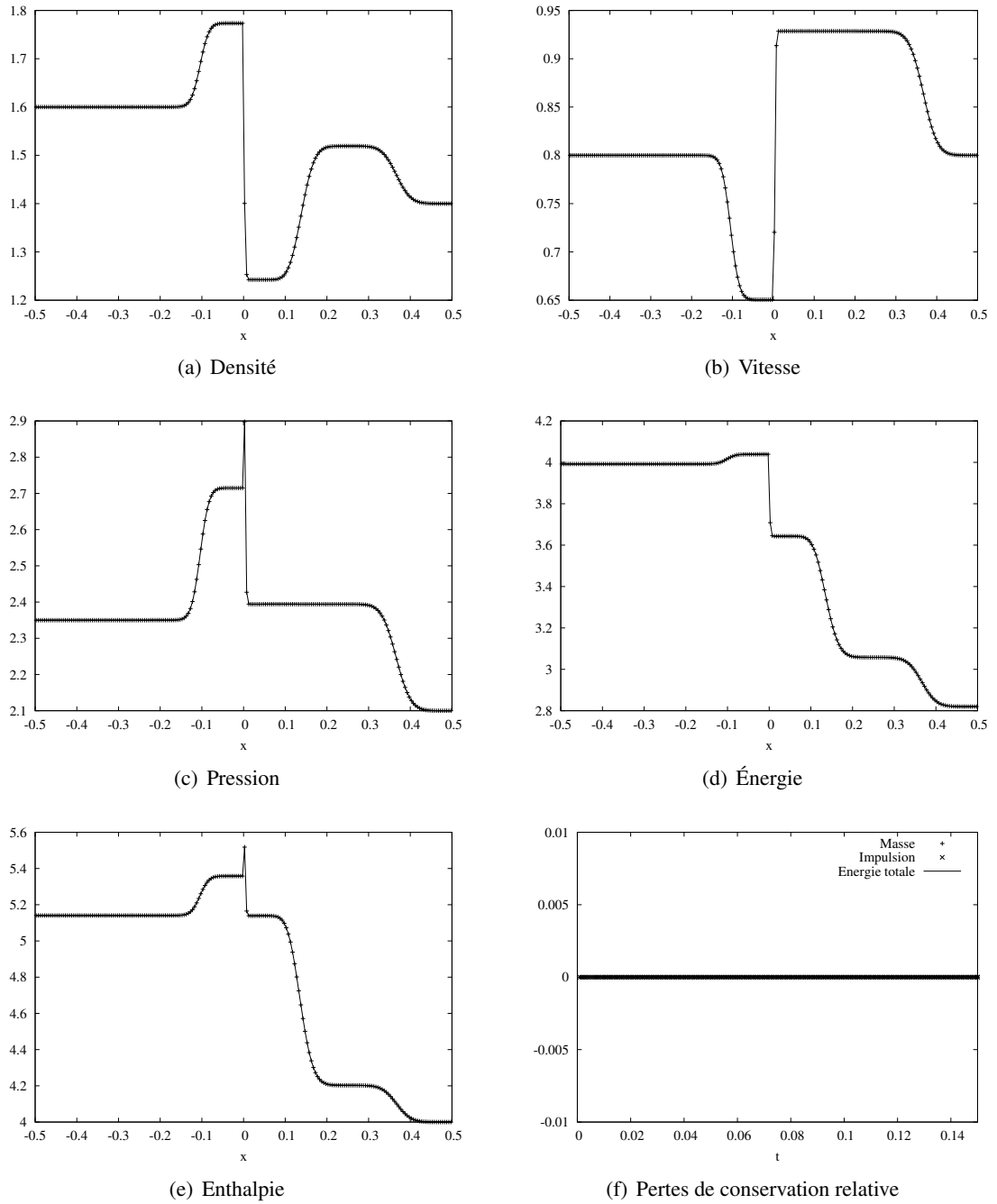


FIGURE 1.6 – Tube à choc - résultats pour le couplage par flux

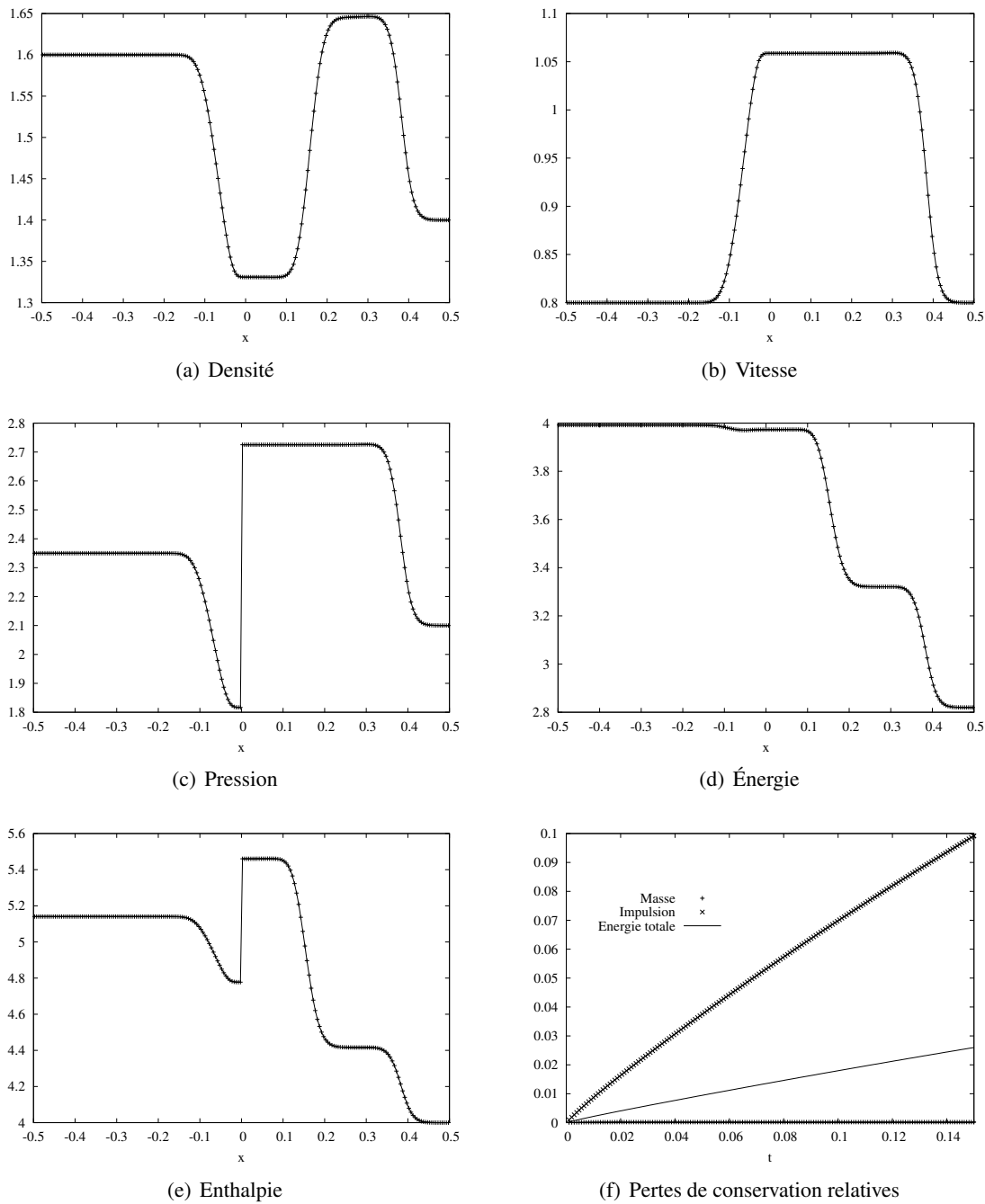


FIGURE 1.7 – Tube à choc - résultats pour le couplage par état en  $(\rho, \rho u, E)$



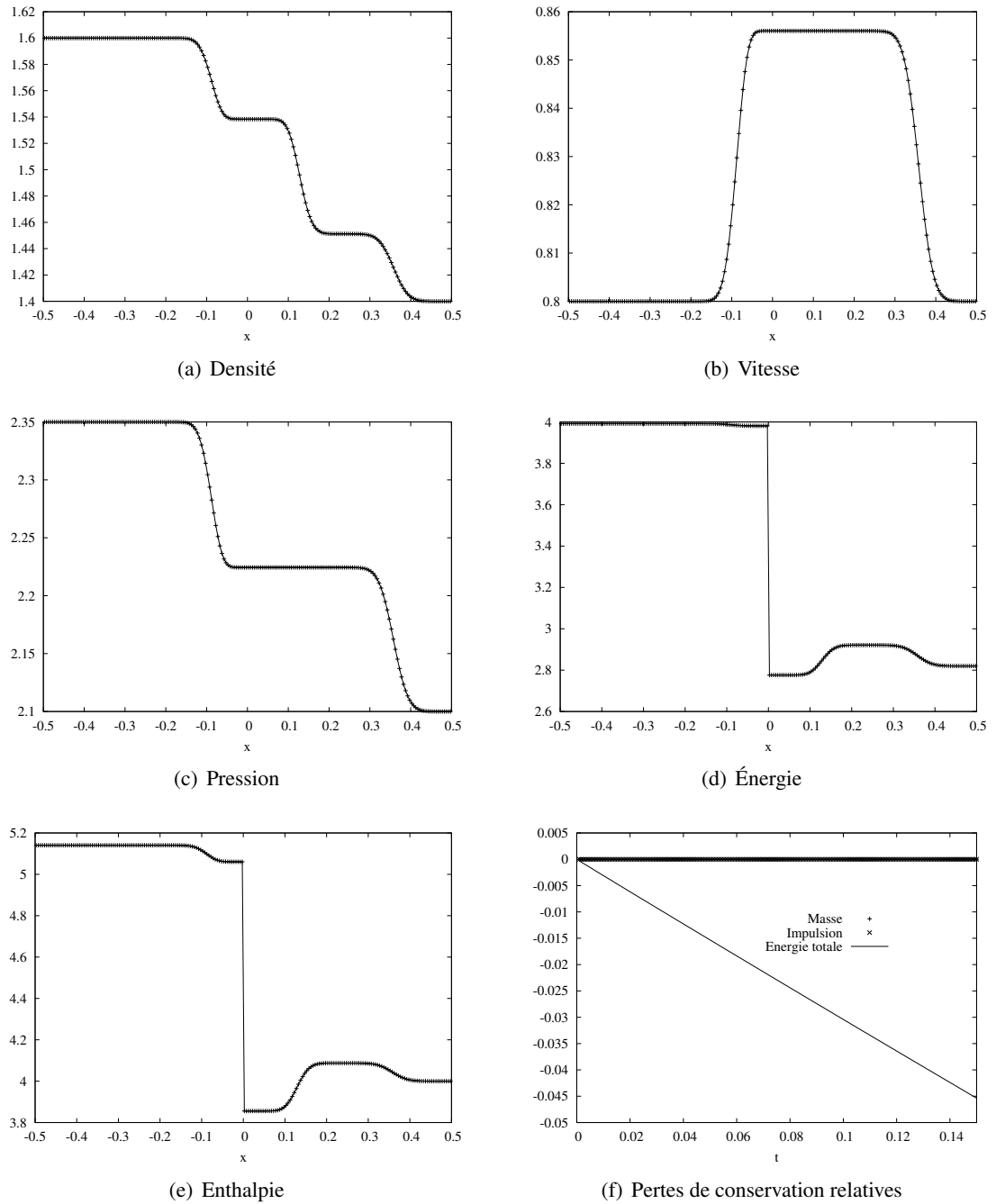


FIGURE 1.8 – Tube à choc - résultats pour le couplage par état en  $(\rho, \rho u, p)$

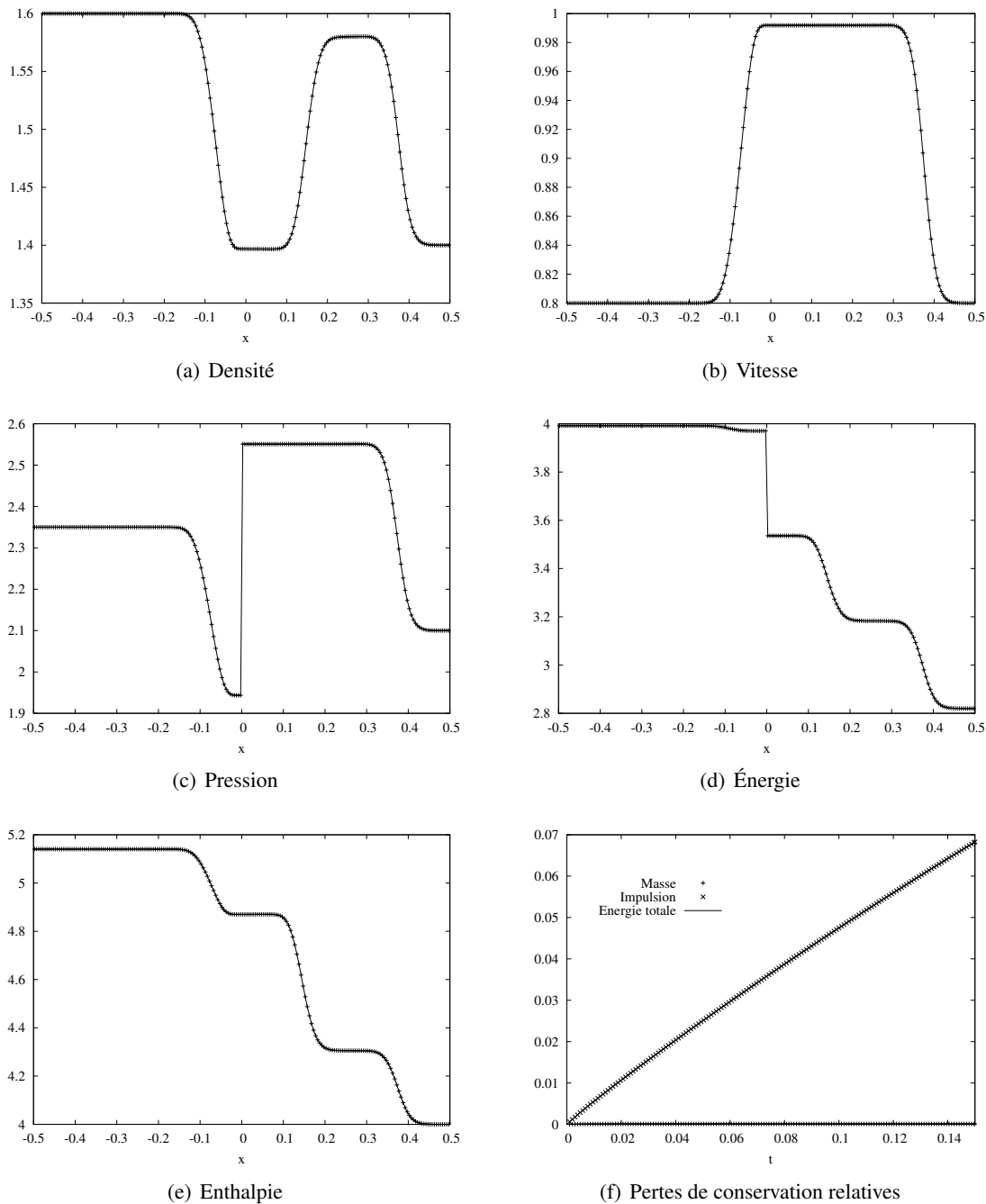


FIGURE 1.9 – Tube à choc - résultats pour le couplage par état en  $(\rho, \rho u, h)$

acoustique générée à l'interface de couplage. D'autre part, les pertes de conservation relatives sont conformes à nos attentes.

### 1.3 Application au couplage de deux modèles de mélange

La présente section décrit un exemple de couplage de modèles de tailles différentes. Elle est basée sur l'article de conférence [7] auquel j'ai participé. Ma contribution concerne l'utilisation de la méthode de couplage par état en enthalpie. J'ai ainsi apporté des résultats numériques supplémentaires à l'étude qui avait déjà été réalisée par les autres auteurs. Mon propos va donc s'appuyer plus particulièrement sur cet article. Je présenterai à la fin de la section les résultats numériques correspondants.

Les deux modèles que nous considérons proviennent de la physique des écoulements diphasiques et décrivent différemment les états thermodynamiques de chaque phase. En particulier, les systèmes d'équations associés sont hiérarchisés au sens où les échelles de temps qui sont prises en compte dans chacun des modèles sont différentes. Comme il a été décrit dans la première section, le régime asymptotique correspondant à la relaxation d'une échelle de temps vers l'autre peut ne pas être compatible. Cependant, ceci n'est pas l'objet des travaux que nous présentons. Dans notre cas, le régime asymptotique associé à la description la plus fine converge formellement vers le modèle de taille moindre. L'écriture de notre problème, en une dimension d'espace, est la suivante :

$$\partial_t \mathbf{u}^E + \partial_x \mathbf{f}^E(\mathbf{u}^E) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0, \quad (1.23a)$$

$$\partial_t \mathbf{u}^R + \partial_x \mathbf{f}^R(\mathbf{u}^R) = \mathbf{S}^R(\mathbf{u}^R), \quad \text{pour } x > 0, t > 0. \quad (1.23b)$$

Le modèle associé à (1.23a) est appelé modèle HEM (pour *Homogeneous Equilibrium Model*) et est représenté par un système de lois de conservation sur le vecteur d'inconnues  $\mathbf{u}^E : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{u}^E(x, t) \in \Omega^E$  où  $\Omega^E$  est l'espace des états associé. Le flux correspondant est  $\mathbf{f}^E : \mathbf{u}^E(x, t) \in \Omega^E \mapsto \mathbf{f}^E(\mathbf{u}^E) \in \mathbb{R}^3$ . De l'autre côté de l'interface, toujours située en  $x = 0$ , le modèle (1.23b) se nomme modèle HRM (pour *Homogeneous Relaxation Model*) dont l'inconnue est le vecteur  $\mathbf{u}^R : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{u}^R(x, t) \in \Omega^R$  et le flux est  $\mathbf{f}^R : \mathbf{u}^R(x, t) \in \Omega^R \mapsto \mathbf{f}^R(\mathbf{u}^R) \in \mathbb{R}^4$ . Le système n'est pas sous la forme d'un système de lois de conservation en raison du terme source  $\mathbf{S}^R : \mathbf{u}^R(x, t) \in \Omega^R \mapsto \mathbf{S}^R(\mathbf{u}^R) \in \mathbb{R}^4$ . Ce terme source exprime la relaxation du modèle en temps fini vers le modèle équilibre (1.23a). Le régime asymptotique que nous considérons est ainsi compatible. Rappelons que ce problème de couplage a été étudié dans [14] où les auteurs utilisent un modèle père à l'interface. D'autres travaux sont présentés dans [7] et [10] où les méthodes de couplage par flux et de couplage par états avec différentes variables transmises sont adaptées.

Les deux modèles traités sont des modèles dits de mélange, c'est-à-dire qu'ils considèrent la dynamique du mélange constitué par les deux phases et non pas la dynamique de celles-ci de manière distincte. Ce type de modèle est étudié dans [25], [26] ainsi que [40]. Les auteurs s'intéressent à la problématique du changement de phase et utilisent pour cela un modèle de mélange muni d'une définition adéquate de la loi d'état. Les ouvrages [24] et [40] expliquent de manière plus détaillée ces différentes démarches. On peut également citer l'ouvrage [70] pour d'autres

approches des modèles de mélange.

Avant une description plus complète de ces deux modèles, nous introduisons les variables de chaque phase  $\rho_\alpha$ ,  $\varepsilon_\alpha$ ,  $p_\alpha$  et  $T_\alpha$  qui correspondent respectivement la densité, l'énergie interne, la pression et la température de la phase  $\alpha = 1, 2$ . L'entropie  $\eta_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)$  est définie à une constante près par les relations de Gibbs provenant du second principe de la thermodynamique :

$$\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha}(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = \frac{1}{T_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)}, \quad \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \rho_\alpha}(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = -\frac{p_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)}{\rho_\alpha^2 T_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)}.$$

Notons également  $z \in [0, 1]$  le paramètre qui localise les deux phases et qui est égal à 1 dans la phase 1 et 0 dans la phase 2. Nous définissons maintenant les variables de mélange dont l'évolution est décrite par les deux modèles. Notons  $\rho$ ,  $\varepsilon$  et  $p$  respectivement la densité, l'énergie interne et la pression du mélange qui sont données de la manière suivante :

$$\begin{cases} \rho = z\rho_1 + (1-z)\rho_2, \\ \rho\varepsilon = z\rho_1\varepsilon_1 + (1-z)\rho_2\varepsilon_2, \\ p = zp_1(\rho_1, \varepsilon_1) + (1-z)p_2(\rho_2, \varepsilon_2). \end{cases}$$

Les vitesses des phases sont considérées comme identiques et égales à la vitesse du mélange fluide notée  $u$ . La première hypothèse faite est l'égalité des températures entre les deux phases. Plus précisément, la température du mélange  $T$  est donnée comme :

$$T = T_1(\rho_1, \varepsilon_1) = T_2(\rho_2, \varepsilon_2).$$

Nous considérons de plus que les deux phases se comportent comme des gaz parfaits, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} p_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha\varepsilon_\alpha \\ T_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = \frac{\varepsilon_\alpha}{C_{v,\alpha}}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2,$$

où les coefficients adiabatiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tels que  $1 < \gamma_2 < \gamma_1$  sans perte de généralité. Enfin les capacités calorifiques  $C_{v,1}$  et  $C_{v,2}$  sont supposées constantes et égales soit :

$$C_v = C_{v,1} = C_{v,2} > 0.$$

Cette dernière hypothèse a également été proposée dans [24],[25], [26] ainsi que [70]. Elle permet de simplifier certains calculs que nous précisons par la suite. Ainsi avec les égalités écrites précédemment, nous avons

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = C_v T.$$

Enfin, en intégrant les relations de Gibbs il vient, à une constante près :

$$\eta_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = C_{v,\alpha} \ln \frac{p_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)}{\rho_\alpha^{\gamma_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Les hypothèses communes aux deux modèles ayant été posées, nous abordons maintenant une description plus précise de chacun d'entre eux.

### 1.3.1 Le modèle HEM

En plus de l'hypothèse d'isothermalité entre les phases, le modèle HEM considère les équilibres mécanique et thermodynamique. Ceci se traduit par l'égalité des pressions  $p_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon)$  et l'égalité des énergie libres de Gibbs  $g_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon) = \varepsilon + p_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon)/\rho_\alpha - \eta_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon)T_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon)$  des phases. On a donc :

$$\begin{cases} p_1(\rho_1, \varepsilon) = p_2(\rho_2, \varepsilon), \\ g_1(\rho_1, \varepsilon) = g_2(\rho_2, \varepsilon). \end{cases} \quad (1.24)$$

Les deux équations ci-dessus aboutissent à deux solutions notées  $\rho_1^*$  et  $\rho_2^*$  données par :

$$\rho_1^* = \frac{1}{e} \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} \quad \text{et} \quad \rho_2^* = \frac{1}{e} \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}. \quad (1.25)$$

Ces variables sont appelées densités à saturation des phases correspondantes. Les formules obtenues sont relativement simples grâce à l'hypothèse d'égalité entre les capacités calorifiques. Néanmoins, il est possible de calculer les densités à saturation même lorsque  $C_{v,1} \neq C_{v,2}$ . Ce dernier choix étant fait dans [40], les calculs ne sont pas exposés pour ce cas. Notons de plus que comme nous avons choisi  $\gamma_2 < \gamma_1$  alors  $\rho_1^* < \rho_2^*$ . Il s'en suit que la densité du mélange, qui s'écrit maintenant  $\rho = z\rho_1^* + (1-z)\rho_2^*$ , est définie sur l'intervalle  $[\rho_1^*, \rho_2^*]$ . En dehors de l'intervalle  $[\rho_1^*, \rho_2^*]$ , on peut donc considérer que seulement une des deux phases est présente. Ceci amène à la définition de la loi de pression du modèle HEM notée  $p^E(\rho, \varepsilon)$  :

$$p^E(\rho, \varepsilon) = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho\varepsilon & \text{si } 0 < \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)\rho_1^*\varepsilon = (\gamma_2 - 1)\rho_2^*\varepsilon & \text{si } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ (\gamma_2 - 1)\rho\varepsilon & \text{si } \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (1.26)$$

Maintenant munis d'une loi d'état, nous pouvons écrire le système d'équations en une dimension d'espace associé au modèle :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^E) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E + p^E)u = 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $\rho E$  est l'énergie totale du mélange et est donnée par :

$$\rho E = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho u^2.$$

Le système d'équations consiste donc en l'écriture de trois lois de conservation sur la densité, l'impulsion et l'énergie totale du mélange. Avec les notations précédemment introduites, ceci correspond à  $\mathbf{u}^E = (\rho, \rho u, \rho E)$  et  $\mathbf{f}^E(\mathbf{u}^E) = (\rho u, \rho u^2 + p^E, \rho E u + p^E u)$ . La définition de loi d'état du modèle HEM (1.26) implique que l'application  $p^E$  est seulement  $\mathcal{C}^0$  lorsque  $\rho = \rho_1^*$  ou  $\rho = \rho_2^*$ . Le système HEM est cependant strictement hyperbolique sur l'espace des états

$$\Omega^E = \{\mathbf{u}^E \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, u \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\},$$

et admet les trois valeurs propres distinctes ordonnées :

$$\lambda_1(\mathbf{u}^E) = u - c^E < \lambda_2(\mathbf{u}^E) = u < \lambda_3(\mathbf{u}^E) = u + c^E,$$

où  $c^E \equiv c^E(\rho, \varepsilon)$  est la vitesse du son du modèle HEM dont le carré s'écrit

$$(c^E(\rho, \varepsilon))^2 = \begin{cases} \gamma_1(\gamma_1 - 1)\varepsilon & \text{si } 0 < \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)^2 \frac{(\rho_1^*)^2}{\rho^2} \varepsilon = (\gamma_2 - 1)^2 \frac{(\rho_2^*)^2}{\rho^2} \varepsilon & \text{si } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ \gamma_2(\gamma_2 - 1)\varepsilon & \text{si } \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (1.28)$$

De plus, le champ associé à la valeur propre  $\lambda_2$  est linéairement dégénéré. La vitesse du son étant discontinue pour  $\rho = \rho_1^*$  ou  $\rho = \rho_2^*$ , les champs associés aux valeurs propres  $\lambda_1(\mathbf{u}^E)$  et  $\lambda_3(\mathbf{u}^E)$  peuvent présenter une perte de vraie non linéarité. Il en suit la possibilité de développer des solutions non classiques pour le problème de Riemann associé. Nous ne développons pas ce sujet et nous renvoyons le lecteur à [75] pour plus de détails sur la théorie des solutions non classiques.

### 1.3.2 Le modèle HRM

Le modèle homogène de relaxation considère uniquement l'équilibre ménanique, c'est-à-dire l'égalité des pressions entre les phases soit :

$$p_1(\rho_1, \varepsilon) = p_2(\rho_2, \varepsilon),$$

ou encore :

$$(\gamma_1 - 1)\rho_1 = (\gamma_2 - 1)\rho_2.$$

Contrairement au modèle HEM, les densités des phases dans la zone de mélange ne sont plus constantes. La relation algébrique donnant les valeurs des densités à saturation est ici remplacée par une équation aux dérivées partielles du premier ordre supplémentaire représentant l'évolution

de la masse partielle  $m_1 = z\rho_1$  de la phase 1. Cette masse partielle est relaxée à une fréquence finie  $\lambda$  vers une valeur d'équilibre  $m_1^*(\rho) = z^*(\rho)\rho_1^*$  où  $z^*(\rho)$  correspond à la valeur de la variable  $z$  à l'équilibre thermodynamique exprimé par l'égalité  $g_1(\rho_1, \varepsilon) = g_2(\rho_2, \varepsilon)$ . Comme nous avons  $\rho = z\rho_1 + (1-z)\rho_2$ , il vient donc :

$$z = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

De plus, si les phases sont à l'équilibre thermodynamique alors  $\rho = z^*\rho_1^* + (1-z^*)\rho_2^*$ . Ainsi, la définition naturelle pour  $m_1^*(\rho)$  est la suivante :

$$m_1^*(\rho) = \begin{cases} \rho & \text{si } 0 < \rho \leq \rho_1^*, \\ \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*} \rho_1^* & \text{si } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ 0 & \text{si } \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (1.29)$$

La relation  $p = zp_1(\rho_1, \varepsilon) + (1-z)p_2(\rho_2, \varepsilon)$  définit la loi d'état suivante pour le modèle HRM :

$$p = p^R(\rho, \varepsilon, m_1) = ((\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)(\rho - m_1)) \varepsilon, \quad (1.30)$$

et qui vérifie la condition de compatibilité avec le modèle HEM, c'est-à-dire :

$$p^R(\rho, \varepsilon, m_1^*(\rho)) = p^E(\rho, \varepsilon). \quad (1.31)$$

Nous pouvons maintenant donner le système d'équations associé au modèle HRM. Celui-ci s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t m_1 + \partial_x(m_1 u) = \lambda(m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p^R) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E + p^R)u = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Avec les notations précédentes, on a donc  $\mathbf{u}^R = (m_1, \rho, \rho u, \rho E)$ ,  $\mathbf{f}^R(\mathbf{u}^R) = (m_1 u, \rho u, \rho u^2 + p^R, \rho E u + p^R u)$  et  $\mathbf{S}^R(\mathbf{u}^R) = (\lambda(m_1^*(\rho) - m_1), 0, 0, 0)$ . Le modèle HRM est hyperbolique sur l'espace des états

$$\Omega^R = \{\mathbf{u}^R \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, 0 < m_1 < \rho, u \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\},$$

et admet pour valeurs propres :

$$\lambda_1(\mathbf{u}^R) = u - c^R < \lambda_2(\mathbf{u}^R) = \lambda_3(\mathbf{u}^R) = u < \lambda_4(\mathbf{u}^R) = u + c^R,$$

où  $c^R \equiv c^R(\rho, \varepsilon, m_1)$  est la vitesse du son associée et définie de la manière suivante :

$$(c^R(\rho, \varepsilon, m_1))^2 = B(m_1, \rho)(1 + B(m_1, \rho))\varepsilon,$$



où  $B(m_1, \rho) = ((\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)(\rho - m_1))/\rho$ . Les premier et quatrième champs sont vraiment non linéaires et le second et le troisième sont linéairement dégénérés.

### 1.3.3 Conditions de couplage

Dans cette section, les différentes conditions de transmission sont décrites. Pour cela, les méthodes de couplage dans le cas des systèmes de même taille présentées dans la section précédente vont être adaptées. Rappelons tout d'abord que le problème de couplage s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t \mathbf{u}^E + \partial_x \mathbf{f}^E(\mathbf{u}^E) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0, \quad (1.33a)$$

$$\partial_t \mathbf{u}^R + \partial_x \mathbf{f}^R(\mathbf{u}^R) = \mathbf{S}^R(\mathbf{u}^R), \quad \text{pour } x > 0, t > 0. \quad (1.33b)$$

Nous définissons également les conditions initiales associées à ce problème :

$$\mathbf{u}^E(x, 0) = \mathbf{u}_0^E(x), \quad x < 0,$$

$$\mathbf{u}^R(x, 0) = \mathbf{u}_0^R(x), \quad x > 0,$$

où  $\mathbf{u}_0^E \in \Omega^E$  et  $\mathbf{u}_0^R \in \Omega^R$  sont donnés. Il reste à préciser une condition de couplage entre les traces de la solution à l'interface de couplage c'est-à-dire entre les états notés  $\mathbf{u}^E(0^-, t)$  et  $\mathbf{u}^R(0^+, t)$ . Cette condition de couplage va être établie dans le cadre d'une méthode numérique classique à pas fractionnaires. Plus précisément, dans une première étape les solutions associées aux parties convectives des deux systèmes d'équations HEM et HRM sont approchées *via* une méthode du type volumes finis donnée. C'est dans cette première étape de convection que les conditions de couplage seront appliquées. Ainsi, on pose dans l'instant  $\mathbf{S}^R(\mathbf{u}^R) \equiv \mathbf{0}$ . Ce terme source est ensuite pris en compte dans la seconde étape d'approximation par splitting (pour le modèle HRM).

### Couplage par flux

Pour mettre au point une approche strictement conservative, nous reprenons la méthodologie développée dans [7] et [10]. Grâce à la condition de compatibilité (1.31), dans le régime asymptotique  $\lambda = +\infty$  le modèle HRM converge formellement vers le modèle HEM. Nous pouvons ainsi définir le système global suivant :

$$\begin{cases} \partial_t m_1 + \partial_x(m_1 u) = \mu(x)(m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E + p)u = 0, \end{cases} \quad \text{où } p = p^R(\rho, \varepsilon, m_1), \quad (1.34)$$

pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  et avec

$$\mu(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ce modèle global est formellement équivalent au modèle HEM pour  $x < 0$  et au modèle HRM pour  $x > 0$  (avec  $\mathbf{S}^R(\mathbf{u}^R) \equiv \mathbf{0}$ ). La solution de ce modèle satisfait de plus la conservation stricte de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. On peut réinterpréter ce modèle comme la condition d'égalité entre le flux  $\mathbf{f}^E(\mathbf{u}^E(0^-, t))$  et les trois dernières composantes du flux  $\mathbf{f}^R(\mathbf{u}^R(0^+, t))$  pour tout  $t > 0$ .

### Couplage par état

La condition de couplage par état que nous avons présentée dans la section précédente est ici adaptée. Nous cherchons toujours à imposer la continuité de certaines variables à travers l'interface en  $x = 0$ . Considérons dans un premier temps que nous voulons imposer la continuité des variables conservatives  $\rho$ ,  $\rho u$  et  $\rho E$  sur l'interface de couplage. Nous procédons pour cela en deux étapes :

- en  $x = 0$ , le modèle (1.33a) est complété par une condition de bord de type Dirichlet donnée par les trois dernières composantes de  $\mathbf{u}^R(0^+, t)$  ;
- en  $x = 0$ , le modèle (1.33b) est complété par une condition de bord de type Dirichlet donnée par le vecteur  $(m_1^*(\rho(0^-, t)), \mathbf{u}^E(0^-, t))$ .

Ces conditions ne sont pas restreintes au cas des variables conservatives. Nous verrons dans la section numérique que la continuité d'autres variables pourra être imposée. En particulier, deux autres jeux de variables vont être utilisés (les mêmes que dans la section précédente) : les variables  $(\rho, \rho u, p)$  et les variables  $(\rho, \rho u, p + \varepsilon/\rho)$ .

### 1.3.4 Approche numérique

Nous procédons maintenant à l'approche numérique du problème de couplage entre (1.33a) et (1.33b). Nous utilisons la formulation classique des volumes finis et, pour l'instant, des schémas numériques à trois points. Les notations sont identiques à la section précédente concernant la discrétisation des variables en espace et en temps. Nous cherchons ainsi à définir les approximations suivantes :

$$\left( (\mathbf{u}^E)_j^n \right)_{j \leq 0, n \geq 0} \in \Omega^E,$$

et

$$\left( (\mathbf{u}^R)_j^n \right)_{j \geq 0, n \geq 0} \in \Omega^R,$$

des solutions  $\mathbf{u}^E$  et  $\mathbf{u}^R$  au temps discret  $t^n = n\Delta t$  et au centre des mailles  $C_{j+1/2}$ . La formulation numérique dans chaque domaine est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^E)_{j-1/2}^{n+1} &= (\mathbf{u}^E)_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}^E)_j^n - (\mathbf{g}^E)_{j-1}^n), \quad j \leq 0, \\ (\mathbf{u}^R)_{j+1/2}^{n+1} &= (\mathbf{u}^R)_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}^R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}^R)_j^n), \quad j \geq 0, \end{aligned}$$

où on a de plus

$$(\mathbf{g}^E)_j^n = \mathbf{g}^E((\mathbf{u}^E)_{j-1/2}^n, (\mathbf{u}^E)_{j+1/2}^n), \quad (\mathbf{g}^R)_j^n = \mathbf{g}^R((\mathbf{u}^R)_{j-1/2}^n, (\mathbf{u}^R)_{j+1/2}^n). \quad (1.35)$$

En dehors de tout couplage (pour  $j < 0$  et  $j > 0$ ), les flux  $\mathbf{g}^E(\cdot, \cdot)$  et  $\mathbf{g}^R(\cdot, \cdot)$  sont deux flux numériques obtenus via un solveur à deux points classique (rappelons à ce titre les ouvrages [1], [51], [76] ainsi que [86]). A l'interface, c'est-à-dire pour  $j = 0$ , nous devons donner une définition des flux numériques  $(\mathbf{g}^E)_0^n$  et  $(\mathbf{g}^R)_0^n$  en fonction de la condition de couplage que nous voulons imposer. Ceci est l'objet des deux paragraphes suivants.

### Couplage par flux

Nous commençons par définir les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  dans le cas du couplage par flux. Pour cela, nous utilisons le modèle global (1.34). Les flux numériques sont calculés par une méthode à deux pas : la première étape résout le modèle avec  $\mu = 0$  et la seconde étape prend en compte le terme source. Sans détailler ces deux étapes, nous pouvons donner une expression directe des flux numériques. En effet, définissons dans un premier temps :

$$(\mathbf{u}^{E,*})_{-1/2}^n := (m_1^*(\rho_{-1/2}^n), (\mathbf{u}^E)_{-1/2}^n),$$

alors le flux associé au modèle HRM est défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{g}^R)_0^n := \mathbf{g}^R((\mathbf{u}^{E,*})_{-1/2}^n, (\mathbf{u}^R)_{+1/2}^n), \quad (1.36)$$

et le flux associé au modèle HEM :

$$((\mathbf{g}^E)_0^n)^{(i)} := ((\mathbf{g}^R)_0^n)^{(i+1)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.37)$$

où la notation  $(\mathbf{v})^{(i)}$  correspond à la  $i$ -ème composante du vecteur  $\mathbf{v}$ . La méthode est ainsi strictement conservative en masse, impulsion et énergie totale.

### Couplage par état

La méthode numérique que nous proposons est également basée sur une approche double-flux comme dans la section précédente. Nous devons donc définir deux états fictifs  $(\bar{\mathbf{u}}^E)_{+1/2}^n \in \Omega^E$  and

$(\bar{\mathbf{u}}^R)^n_{-1/2} \in \Omega^R$ . Les flux numériques à l'interface de couplage sont alors définis comme :

$$(\mathbf{g}^E)_0^n := \mathbf{g}^E((\mathbf{u}^E)^n_{-1/2}, (\bar{\mathbf{u}}^E)^n_{+1/2}), \quad (1.38)$$

$$(\mathbf{g}^R)_0^n := \mathbf{g}^R((\bar{\mathbf{u}}^R)^n_{-1/2}, (\mathbf{u}^R)^n_{+1/2}). \quad (1.39)$$

Selon les variables que nous cherchons à transmettre, les états fictifs vont être différents. On introduit pour cela les changements de variables  $\Theta^E : \Omega^E \mapsto \mathbb{R}^3$  et  $\Theta^R : \Omega^R \mapsto \mathbb{R}^4$  de telle sorte que si l'on veut assurer la continuité de variables données, nous imposons dans la mesure du possible :

$$(\Theta^E(\mathbf{u}^E(0^-, t)))^{(i)} = (\Theta^R(\mathbf{u}^R(0^-, t)))^{(i+1)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.40)$$

Ainsi, nous définissons les deux états fictifs grâce aux relations suivantes :

$$(\bar{\mathbf{u}}^E)^n_{+1/2} := (\Theta^E)^{-1} \left\{ \left( \Theta^R \left( (\mathbf{u}^R)^n_{+1/2} \right) \right)^{(2,3,4)} \right\}, \quad (1.41)$$

$$(\bar{\mathbf{u}}^R)^n_{-1/2} := (\Theta^R)^{-1} \left\{ \left( m_1^*(\rho^n_{-1/2}), \Theta^E \left( (\mathbf{u}^E)^n_{-1/2} \right) \right) \right\}. \quad (1.42)$$

Comme nous l'avons énoncé plus haut, trois changements de variables sont considérés et nous donnons pour chacun les définitions des applications  $\Theta^E$  et  $\Theta^R$  :

– Continuité de  $(\rho, \rho u, \rho E)$  :

$$\begin{aligned} \Theta^E[(\rho, \rho u, \rho E)] &:= (\rho, \rho u, \rho E), \\ \Theta^R[(m_1, \rho, \rho u, \rho E)] &:= (m_1, \rho, \rho u, \rho E). \end{aligned}$$

– Continuité de  $(\rho, \rho u, p)$  :

$$\begin{aligned} \Theta^E[(\rho, \rho u, \rho E)] &:= (\rho, \rho u, p^E(\rho, E - u^2/2)), \\ \Theta^R[(m_1, \rho, \rho u, \rho E)] &:= (m_1, \rho, \rho u, p^R(\rho, E - u^2/2, m_1)). \end{aligned}$$

– Continuité de  $(\rho, \rho u, h = \varepsilon + p/\rho)$  où  $h$  est l'enthalpie :

$$\begin{aligned} \Theta^E[(\rho, \rho u, \rho E)] &:= (\rho, \rho u, p^E(\rho, E - u^2/2)/\rho + (E - u^2/2)), \\ \Theta^R[(m_1, \rho, \rho u, \rho E)] &:= (m_1, \rho, \rho u, (E - u^2/2) + p^R(\rho, E - u^2/2, m_1)/\rho). \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente, le dernier changement de variables (en enthalpie) constitue une contribution apportée dans le cadre de cette thèse. La méthode de couplage préserve, dans la mesure du possible la continuité des variables choisies. Il est important de rappeler que, en général, les flux numériques (1.38) et (1.39) ne sont pas égaux. La méthode n'est donc pas conservative.

### 1.3.5 Résultats numériques

Cette dernière partie présente les résultats numériques obtenus pour un cas test du type profil uniforme. Le domaine en espace est restreint  $[-0.5, 0.5]$ . Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} x \in (-0.5, 0), \quad \mathbf{u}^E(x, 0) &= (\rho^0, u^0, \rho((u^0)^2/2 + \varepsilon^E(\rho^0, p^0))), \\ x \in (0, +0.5), \quad \mathbf{u}^R(x, 0) &= (\rho^0, u^0, \rho((u^0)^2/2 + \varepsilon^R(\rho^0, p^0, m_1^0)), m_1^0), \end{aligned}$$

où  $\rho^0 = 1$ ,  $u^0 = -1/2$ ,  $p^0 = 1$  et  $m_1^0 = 1$ . Les coefficients adiabatiques sont  $\gamma_1 = 1.6$  et  $\gamma_2 = 1.4$ . Ce choix entraîne que les densités à saturation sont  $\rho_1^* \approx 0.6131$  et  $\rho_2^* \approx 0.9197$  et que donc on a  $m_1^0 \neq m_1^*(\rho^0)$ . La densité, la vitesse et la pression étant constants sur tout le domaine en espace, seule la méthode de couplage par état en variables  $(\rho, u, p)$  est censée préserver le profil uniforme. La simulation est représentée au temps final  $t = 0.2$  et avec  $\lambda = 0$  pour le modèle HRM. Le nombre de cellules est 500 et le nombre de Courant est 0.4. Le schéma numérique employé est une méthode à cinq points du type Lagrange-Projection dont une description peut être trouvée dans [37] et plus en détails dans l'ouvrage [74]. La particularité de ce schéma est qu'il est d'ordre un en espace mais est *anti-diffusif*. Comme nous avons proposé dans la section sur la formulation numérique des schémas à trois points, le choix d'un schéma à cinq points doit être brièvement discuté. En dehors de tout couplage, le calcul reste standard et expliqué dans les références que nous venons de donner. Concernant les flux numériques « liés » à l'interface de couplage, le calcul des flux  $(\mathbf{g}^E)_0^n$  et  $(\mathbf{g}^R)_0^n$  est insuffisant. En effet, dans ce cas les relations (1.35) deviennent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}^E)_j^n &:= \mathbf{g}^E((\mathbf{u}^E)_{j-3/2}^n, (\mathbf{u}^E)_{j-1/2}^n, (\mathbf{u}^E)_{j+1/2}^n, (\mathbf{u}^E)_{j+3/2}^n), \\ (\mathbf{g}^R)_j^n &:= \mathbf{g}^R((\mathbf{u}^R)_{j-3/2}^n, (\mathbf{u}^R)_{j-1/2}^n, (\mathbf{u}^R)_{j+1/2}^n, (\mathbf{u}^R)_{j+3/2}^n). \end{aligned}$$

Ainsi, les flux numériques  $(\mathbf{g}^E)_{-2}^n$ ,  $(\mathbf{g}^R)_{-1}^n$  et  $(\mathbf{g}^E)_{+1}^n$ ,  $(\mathbf{g}^R)_{+2}^n$  doivent également être évalués en prenant en compte la condition de couplage choisie.

Les figures 1.10, 1.11, 1.12 et 1.13 représentent respectivement la densité, la vitesse, la pression et la fraction de vapeur  $m_1/\rho$ . Sur les figures 1.10, 1.11 et 1.12, on peut voir que la méthode de couplage par état en  $(\rho, \rho u, p)$  préserve exactement la densité, la vitesse et la pression constants à travers l'interface de couplage. Les trois autres méthodes font apparaître des ondes acoustiques et des états intermédiaires artificiels. De plus, le couplage par état en  $(\rho, \rho u, \rho E)$  et  $(\rho, \rho u, \varepsilon + p/\rho)$  n'assure pas la continuité de la densité et de la vitesse contrairement à ce qui pouvait être attendu. Ceci est dû au fait que, puisque l'on a  $m_1^0 \neq m_1^*(\rho_0)$ , les lois d'état sont différentes de part et d'autre de l'interface de couplage. L'autre point important se remarque sur la figure 1.13. Une zone de mélange apparaît dans la gauche du domaine  $x < 0$  correspondant au modèle HEM dans le cas du couplage par état en  $(\rho, \rho u, \rho E)$  et  $(\rho, \rho u, \varepsilon + p/\rho)$ .

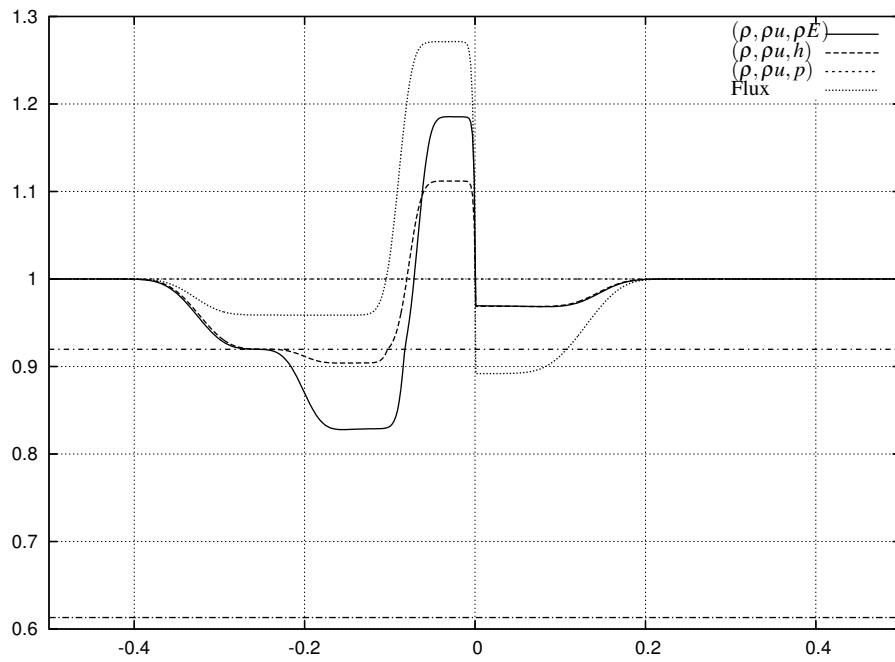


FIGURE 1.10 – Densité  $\rho$  pour les différentes conditions de couplage

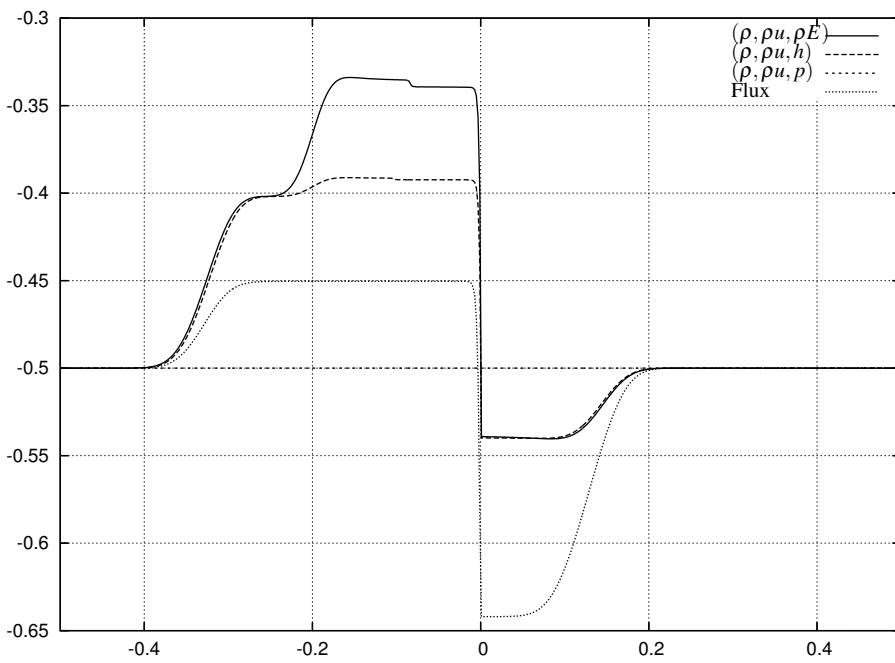


FIGURE 1.11 – Vitesse  $u$  pour les différentes conditions de couplage

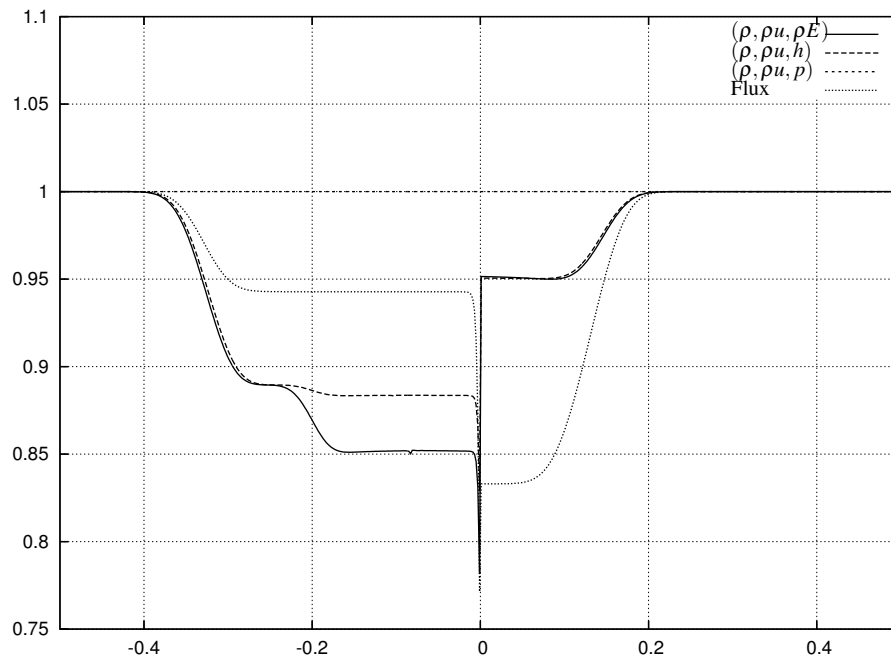


FIGURE 1.12 – Pression  $p$  pour les différentes conditions de couplage

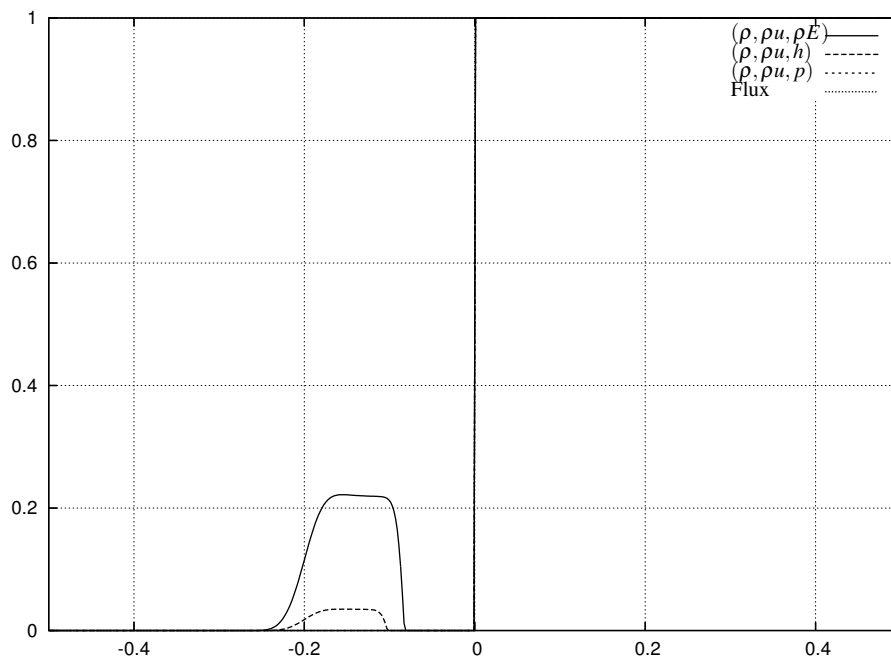


FIGURE 1.13 – Fraction de vapeur  $z$  pour les différentes conditions de couplage

---

## Couplage interfacial avec terme source mesure

---

Le couplage interfacial entre deux modèles possédant des lois de pression différentes a fait apparaître, dans le premier chapitre, deux méthodes : le couplage par flux et le couplage par état. Les résultats obtenus ont montré que respecter le caractère conservatif des modèles couplés n'était pas compatible avec la préservation des profils uniformes en pression. Afin de contrôler au mieux ces deux aspects très importants, nous proposons ici de modéliser les conditions de transmission par le rajout d'un terme source mesure agissant exactement sur l'interface de couplage. Il en résulte alors une difficulté majeure qui est le développement de schémas numériques capables de prendre en compte un tel terme source singulier. Ce chapitre présente donc, dans le cadre d'un couplage de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation, deux méthodes numériques permettant de restaurer au mieux la présence de ce terme source mesure.

### 2.1 Présentation du problème de couplage

#### 2.1.1 Description du problème EDP

Nous considérons le problème de couplage interfacial de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation. Les deux modèles sont basés sur les équations d'Euler pour un écoulement compressible d'un fluide que nous supposons non visqueux et hors de tout champ de force. Ce système d'équations est composé de trois équations de conservation : une pour la masse du fluide dont la densité est notée  $\rho$  puis une seconde pour l'impulsion du fluide  $\rho u$ , où  $u$  représente la vitesse du fluide. La troisième et dernière équation exprime la conservation de l'énergie totale, mais ne sera pas prise en compte dans ce chapitre. En effet, dans le cas des équations d'Euler, les ondes d'entropie sont déplacées à la vitesse du fluide. Il en résulte que celles-ci sont découplées du reste



de la structure en ondes de l'écoulement. De plus, rappelons que ces mêmes équations sont invariantes par rotation dans tout référentiel Galiléen. Ainsi, nous nous intéressons dans cette première section aux équations d'Euler pour un gaz barotrope en une dimension d'espace. L'écoulement devient donc isentropique et l'équation sur l'énergie n'a plus besoin d'être écrite. L'extension au cas avec énergie sera abordé dans la dernière section de ce chapitre.

La variable en espace est notée  $x \in \mathbb{R}$  et celle en temps  $t > 0$ . Le domaine d'étude en espace  $\mathbb{R}$  est séparé en deux, en  $x = 0$ , par une interface fictive infiniment mince. Notons maintenant  $\tau = 1/\rho$  le covolume du fluide. Notre problème de couplage consiste à considérer deux lois d'états différentes de part et d'autre de l'interface de couplage : ces lois de pression sont notées  $p_L(\tau)$  pour  $x < 0$  et  $p_R(\tau)$  pour  $x > 0$ . Les équations qui résultent de ce couplage s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x < 0, t > 0, \quad (L)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour } x > 0, t > 0, \quad (R)$$

où on a noté

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_\alpha(\tau) \end{pmatrix} \quad \text{pour } \alpha = L, R.$$

Nous introduisons également la condition initiale suivante :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les lois d'états  $p_\alpha$  sont telles que  $p_\alpha(\tau) > 0$ ,  $p'_\alpha(\tau) < 0$  et  $p''_\alpha(\tau) > 0$  pour tout  $\tau > 0$  et avec  $\alpha = L, R$ . Les systèmes à gauche et à droite de l'interface sont donc strictement hyperboliques sur l'espace des états :

$$\Omega = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \rho > 0, u \in \mathbb{R}\}.$$

Chacun des deux systèmes possède deux champs caractéristiques vraiment non linéaires et les valeurs propres associées à ces deux champs sont notées  $\lambda_\alpha^\pm(\mathbf{u})$  et sont données par :

$$\lambda_\alpha^\pm(\mathbf{u}) = u \pm c_\alpha(\tau),$$

pour  $\alpha = L, R$  et où on a noté  $c_\alpha(\tau) = \tau \sqrt{-p'_\alpha(\tau)}$  la vitesse du son du fluide.

**Remarque 2.1.** Nous devons préciser que les écoulements que nous étudions sont subsoniques. Cela signifie que la vitesse du fluide est toujours plus faible que la vitesse du son. En particulier on a  $|u| < c_\alpha(\tau)$  pour  $\alpha = L, R$ . Ce type de régime correspond bien à nos motivations dans le cadre d'écoulements au sein d'un réacteur nucléaire à eau pressurisée.

On peut écrire maintenant le problème de Cauchy pour ce couplage dans une forme condensée

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où on a noté

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{cases} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}), & x < 0, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}), & x > 0. \end{cases}$$

Remarquons que le problème (2.1) n'est pour l'instant pas défini en  $x = 0$ . Aucune information n'est donnée et notre premier objectif est de définir des conditions de transmission appropriées. Le chapitre précédent a exposé les méthodes déjà existantes pour ce type de problème. Le couplage par flux consisterait à écrire le problème (2.1) sur tout l'espace  $\mathbb{R}$ . Le modèle obtenu serait ainsi complètement conservatif mais tout profil uniforme en pression ne pourrait pas être préservé. À l'inverse, le couplage par état permettrait de garder ces mêmes profils uniformes mais le caractère conservatif du modèle global serait perdu. Ces pertes de conservation ont été mises en évidence de manière numérique. Au niveau continu, nous pouvons les modéliser par le rajout, dans le terme source des équations, d'un poids localisé sur l'interface de couplage. Il en résulte une application dépendant du temps  $t \mapsto \mathcal{M}(t)$  dont la définition reste encore à donner. Le problème (2.1), écrit maintenant sur tout le domaine  $\mathbb{R}$ , devient :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\delta_{x=0}$  est la mesure de Dirac en  $x = 0$ . L'intérêt d'une telle modélisation est de contrôler à la fois les pertes de conservation et l'influence du couplage sur les profils en pression.

Ce type de problème a déjà fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. On peut citer tout d'abord le travail de [38] qui présente l'analyse d'une loi de conservation munie d'un terme source singulier ainsi que son approximation numérique *via* un schéma de Godunov. La modélisation est similaire à la nôtre et correspond à un problème de sédimentation de particules solides dans un liquide. D'autres travaux s'intéressent à l'étude de lois de conservation munies de flux discontinus et de termes sources non conservatifs. Une telle formulation provient initialement de la modélisation d'un écoulement fluide dans une tuyère à section variable. Ce problème s'écrit généralement, dans le cas scalaire,

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u, a) &= g(u, a) \partial_x a, \\ \partial_t a &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{aligned}$$

avec pour condition initiale les états constants suivants :

$$(u, a)(x, 0) = \begin{cases} (u_L, a_L), & x < 0, \\ (u_R, a_R), & x > 0. \end{cases}$$

Ici, le terme non conservatif ne peut pas être défini en un sens faible et lorsqu'on représente le problème via la méthode des caractéristiques, le terme source se comporte comme une masse de Dirac concentrée en  $x = 0$ . En plus de cela, la particularité de ce système est la perte d'hyperbolicité lorsqu'une des valeurs propres associée à un champ vraiment non linéaire s'annule (ou recouvre la valeur zéro). Ce phénomène s'appelle usuellement la résonance. Notons que nous ne traiterons pas ce cas pathologique dans notre travail en raison de la remarque 2.1. Les premiers travaux à ce sujet concernent la résolution du problème de Riemann au voisinage de la résonance sans présence du terme non conservatif et ont été développés dans [66]. Le cas avec terme non conservatif, comme écrit ci-dessus, est abordé dans [57] ainsi que dans [50]. Nous voyons donc que la résolution de notre problème concerne des applications autres que le couplage interfacial. Cette étude peut aussi s'avérer utile pour la prise en compte de pertes de charge singulières sur une interface séparant un milieu libre d'un milieu poreux.

Nous devons maintenant donner une définition au poids  $\mathcal{M}(t)$ . Cette définition prend forme en écrivant un bilan entre les flux gauche et droit évalués respectivement sur les traces à gauche et à droite de l'interface. En intégrant l'équation du système (2.2) de part et d'autre de l'interface de couplage, nous obtenons :

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \mathcal{M}(t), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{u}(0^-, t)$  et  $\mathbf{u}(0^+, t)$  sont respectivement les états traces à gauche et à droite de l'interface. Avec cette définition, il est trivial de remarquer que dans le cas d'un couplage strictement conservatif, c'est-à-dire utilisant la méthode du couplage par flux, on a  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) = \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$  et donc le poids  $\mathcal{M}(t)$  devient nul pour tout  $t > 0$ . *A contrario*, une méthode de couplage par état avec transmission d'un jeu de variables quelconque donne lieu à un poids non nul. Nous décidons d'imposer :

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_p(t) \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

afin de respecter la conservation stricte de la masse. Le terme  $\mathcal{M}_{\rho u}(t)$  est un poids agissant sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Dans la suite du chapitre, cette valeur sera considérée comme connue. Nous expliquerons, dans le chapitre suivant, comment il nous est possible de calculer ce poids afin de garantir certaines caractéristiques de l'écoulement. En particulier, ce paramètre peut être réglé de façon à respecter les profils d'écoulements uniformes en pression.

Notre objectif est double. D'une part, il est impératif de bien prendre en compte ces nouvelles conditions de couplage. Autrement dit nous devons assurer une bonne approximation de l'équa-

tion (2.3) à l'aide de méthodes numériques efficaces. D'autre part, nous porterons une attention particulière à préserver les solutions dites « équilibres » du problème (2.2). Ce type de solution est introduit dans la définition suivante.

**Définition 2.1.** Soit  $\mathcal{M}$  un poids constant en temps et  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$  deux états constants appartenant à  $\Omega$  tels que

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Alors la fonction définie par

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, t > 0, \end{cases}$$

est appelée une solution équilibre pour le problème (2.2).

### 2.1.2 Approximation numérique

Nous introduisons dans cette section les notations pour la résolution numérique du problème (2.2). On considère de manière classique un pas de temps  $\Delta t$  et un pas d'espace  $\Delta x$ . Le domaine en espace  $\mathbb{R}$  est subdivisé en cellules d'interface  $x_j = j\Delta x$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et notées  $C_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1})$ . Les centres des cellules sont donc  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$ . Les temps discrets sont notés  $t^n = n\Delta t$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On introduit ensuite les valeurs moyennes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+1/2}^n &\approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{u}(x, t^n) dx, \\ (\mathbf{g}_\alpha)_j^n &\approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u})(t, x_j) dt, \quad j \in \mathbb{Z}, \alpha = L, R. \end{aligned}$$

Nous cherchons à chaque pas de temps  $t^n$  une fonction constante par morceaux  $x \mapsto \mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n)$  qui est une approximation de la solution  $\mathbf{u}$  du problème (2.2) de telle sorte que :

$$\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n) = \mathbf{u}_{j+1/2}^n \quad \text{pour } x \in C_{j+1/2}.$$

Pour cela on utilise une formulation volumes finis classique en intégrant les équations du système (2.2). On obtient ainsi :

$$\mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_L)_j^n - (\mathbf{g}_L)_{j-1}^n), \quad j \leq 0, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}_R)_j^n), \quad j \geq 0, \quad (2.6)$$

où, sans perte de généralité, les grandeurs  $(\mathbf{g}_\alpha)_j^n$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha = L, R$ , sont calculées à partir de flux numériques à deux points, c'est-à-dire qu'on a  $(\mathbf{g}_\alpha)_j^n = \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{u}_{j-1/2}^n, \mathbf{u}_{j+1/2}^n)$ . Les formules de ces flux  $\mathbf{g}_L$  et  $\mathbf{g}_R$  sont respectivement deux approximations des flux physiques  $\mathbf{f}_L$  et  $\mathbf{f}_R$  obtenues, par exemple, par un solveur de Riemann. Les pas en espace et en temps sont liés par une condition CFL standard. Les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  correspondent à l'approximation des flux exacts

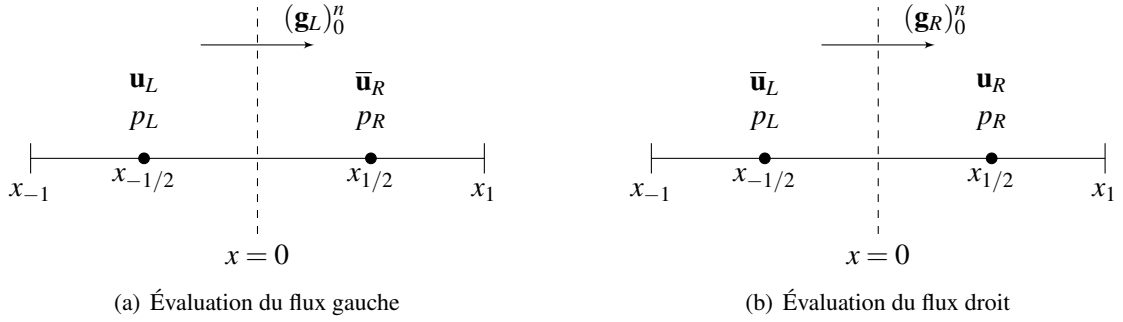


FIGURE 2.1 – Principe de la méthode à deux problèmes de Riemann

$\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$  et  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t))$  à l'interface de couplage. Leur définition doit être reliée au poids  $\mathcal{M}(t)$  et ils seront évalués afin de réaliser une bonne approximation de la condition de couplage (2.3) à chaque temps  $t^n$ , soit :

$$(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n \approx \mathcal{M}^n, \quad (2.7)$$

où on a posé

$$\mathcal{M}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{M}(t) dt, \quad n \geq 0. \quad (2.8)$$

## 2.2 Méthodes pour le couplage

### 2.2.1 Méthode à deux problèmes de Riemann

La première méthode que nous présentons ici consiste à résoudre deux problèmes de Riemann distincts. Plus précisément, considérons au temps  $t^n$  les deux états constants au centre des cellules à gauche et à droite de l'interface de couplage  $\mathbf{u}_{-1/2}^n$  et  $\mathbf{u}_{1/2}^n$ , et notons-les respectivement  $\mathbf{u}_L$  et  $\mathbf{u}_R$ . Le flux  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  (respectivement  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ ) va être déterminé grâce à un solveur de Riemann quelconque en fonction de l'état gauche  $\mathbf{u}_L$  (resp. droit  $\mathbf{u}_R$ ) et d'un état fictif droit noté  $\bar{\mathbf{u}}_R$  (resp. gauche  $\bar{\mathbf{u}}_L$ ). Ceci est représenté schématiquement sur la figure 2.1. Le terme source singulier  $\mathcal{M}^n$  dans l'approximation (2.7) va être pris en compte dans l'étape de reconstruction de ces états fictifs.

Afin d'être consistant avec l'approximation (2.7), l'état reconstruit  $\bar{\mathbf{u}}_R$  est défini par l'égalité suivante :

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\bar{\mathbf{u}}_R) = \mathcal{M}^n. \quad (2.9)$$

Ainsi ce nouvel état est reconstruit *via* la résolution d'un système de deux équations non linéaires à deux inconnues. Nous discutons plus loin de sa résolution et des conditions d'existence et d'unicité d'une solution. Remarquons que cet état dépend maintenant de l'état droit  $\mathbf{u}_R$  et du poids  $\mathcal{M}^n$ . Muni d'un tel état reconstruit, le flux numérique  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  est donné par :

$$(\mathbf{g}_L)_0^n = \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_L, \bar{\mathbf{u}}_R).$$

De manière symétrique, afin d'évaluer le flux  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ , on considère l'état gauche  $\mathbf{u}_L$  et l'état fictif

$\bar{\mathbf{u}}_L$  reconstruit de tel sorte que l'on ait le système d'équations :

$$\mathbf{f}_R(\bar{\mathbf{u}}_L) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}^n, \quad (2.10)$$

où  $\bar{\mathbf{u}}_L$  est maintenant une fonction de  $\mathbf{u}_L$  et de  $\mathcal{M}^n$ . Le flux  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  est déterminé de la même façon que précédemment :

$$(\mathbf{g}_R)_0^n = \mathbf{g}_R(\bar{\mathbf{u}}_L, \mathbf{u}_R).$$

**Remarque 2.2.** *Les états  $\mathbf{u}_L$  et  $\mathbf{u}_R$  étant fixés, les deux systèmes de deux équations non linéaires à deux inconnues définis par les égalités (2.9) et (2.10) admettent chacun soit zéro, soit une ou deux solutions selon l'amplitude de  $\|\mathcal{M}^n\|$ . Dans nos applications, ces données sont telles que pour deux flux  $\mathbf{f}_L$  et  $\mathbf{f}_R$  suffisamment proches il y a existence de deux solutions : une subsonique et une supersonique. Reprenant les considérations de la remarque 2.1, nous ne portons attention qu'à la solution subsonique.*

Comme il a été dit précédemment, la préservation du caractère équilibre des solutions est primordiale dans le choix de construction de la méthode. La proposition suivante établit cette propriété pour la méthode à deux problèmes de Riemann.

**Proposition 2.1.** *Soit deux états constants  $\mathbf{u}_-$  et  $\mathbf{u}_+$  dans l'espace des états  $\Omega$  et un poids constant  $\mathcal{M}$  tels que :*

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_-) = \mathcal{M}. \quad (2.11)$$

*Alors les états reconstruits  $\bar{\mathbf{u}}_-$  et  $\bar{\mathbf{u}}_+$  solutions subsoniques des deux systèmes d'équations non linéaires suivants*

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_L(\bar{\mathbf{u}}_+) = \mathcal{M}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{f}_R(\bar{\mathbf{u}}_-) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_-) = \mathcal{M}, \quad (2.13)$$

*existent et vérifient*

$$\mathbf{g}_L(\mathbf{u}_-, \bar{\mathbf{u}}_+) = \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_-), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{g}_R(\bar{\mathbf{u}}_-, \mathbf{u}_+) = \mathbf{f}_R(\mathbf{u}_+). \quad (2.15)$$

*La méthode à deux problèmes de Riemann préserve ainsi les solutions équilibre du problème (2.2).*

*Démonstration.* En utilisant l'équation (2.11) dans les égalités (2.12) et (2.13), on obtient

$$\mathbf{f}_L(\bar{\mathbf{u}}_+) = \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_-),$$

$$\mathbf{f}_R(\bar{\mathbf{u}}_-) = \mathbf{f}_R(\mathbf{u}_+).$$

Comme nous nous concentrons sur les solutions subsoniques, les deux équations ci-dessus ont

chacune une seule solution, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_+ &= \mathbf{u}_-, \\ \bar{\mathbf{u}}_- &= \mathbf{u}_+.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que les relations (2.14) et (2.15) sont vérifiées.  $\square$

## 2.2.2 Approche par relaxation

Dans cette section nous présentons une deuxième méthode numérique, basée sur un modèle de relaxation, pour approcher le problème (2.1). Comme dans le premier chapitre pour le couplage conservatif par relaxation, nous considérons un sur-modèle d'EDP associé aux systèmes d'équations à coupler. Celui-ci s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}, x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t > 0, \quad (2.16)$$

où on a noté

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \pi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho \pi u + a^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(p(\tau, x) - \pi) \end{pmatrix},$$

et

$$p(\tau, x) = \begin{cases} p_L(\tau), & x < 0, \\ p_R(\tau), & x > 0. \end{cases}$$

La nouvelle variable  $\pi$  est la pression de relaxation et le paramètre  $\lambda$  détermine la fréquence de retour à l'équilibre du modèle de relaxation vers le modèle équilibre. Plus précisément on a formellement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \pi = p(\tau, x).$$

Le système d'équations du modèle de relaxation (2.16) est strictement hyperbolique sur l'espace des états

$$\Omega^r = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3, \rho > 0, u \in \mathbb{R}, \pi \in \mathbb{R}\},$$

et possède trois valeurs propres réelles distinctes ordonnées

$$\lambda_1^r(\mathbf{U}) = u - a\tau < \lambda_2^r(\mathbf{U}) = u < \lambda_3^r(\mathbf{U}) = u + a\tau. \quad (2.17)$$

Nous devons donner une définition du nouveau système (2.16) en  $x = 0$ . Nous introduisons ainsi les mêmes conditions de transmission par le rajout d'un terme source mesure, c'est-à-dire

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}) + \tilde{\mathcal{M}}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.18)$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{M}}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}(t) \\ \mathcal{M}_{\rho\pi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \\ \mathcal{M}_{\rho\pi}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Le poids additionnel  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  correspond à la condition de couplage introduite pour l'équation de conservation en  $\rho\pi$ . Pour l'instant, comme pour  $\mathcal{M}_{\rho u}$ , nous considérons la valeur de ce nouveau poids comme étant connue pour tout  $t > 0$ . Le poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  peut être considéré en fait comme un degré de liberté supplémentaire pour la condition de couplage imposée : il est possible de le définir de manière à ce que l'approche par relaxation préserve les solutions d'équilibre. Nous abordons ce point plus loin. Pour faire avancer la solution approchée constante par morceaux,  $\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n)$  au temps  $t^{n+1}$ , nous procédons en deux étapes.

### Première étape : résolution du système hors équilibre

Lors de ce premier pas, nous résolvons le système de relaxation (2.18) hors équilibre c'est-à-dire avec  $\lambda = 0$  et pour  $t \in (t^n, t^{(n+1)-})$ . On cherche donc à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \widetilde{\mathcal{M}}(t^n) \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t \in (t^n, t^{(n+1)-}), \\ \mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^n), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.20)$$

avec

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^n) = (\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^n), (\rho\pi)_{\Delta x}(x, t^n))^T,$$

et où  $(\rho\pi)$  vérifie la condition d'équilibre

$$(\rho\pi)_{\Delta x}(x, t^n) = \rho_{\Delta x}(x, t^n) p(\tau_{\Delta x}(x, t^n), x). \quad (2.21)$$

Sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ |\lambda_i^r(\mathbf{U}_{j+1/2}^n)|, i = 1, \dots, 3 \right\} \leq C, \quad (2.22)$$

où  $C \leq \frac{1}{2}$  est une constante strictement positive, le problème (2.20) définit une succession de problèmes de Riemann. Sans introduction de couplage, le problème de Riemann à résoudre entre deux états successifs est standard et se résume à la résolution que nous avons exposée dans la section 1.2.2 : en termes d'ondes, l'équation sur l'énergie étant découplée du reste du système de relaxation dans le cas du premier chapitre, la résolution du problème de Riemann est ici similaire. Les champs associés aux valeurs propres (2.17) sont tous linéairement dégénérés et la solution du problème de Riemann ne comporte que des discontinuités de contact. Toujours dans le cas sans couplage, la structure de la solution du problème de Riemann fait intervenir des états



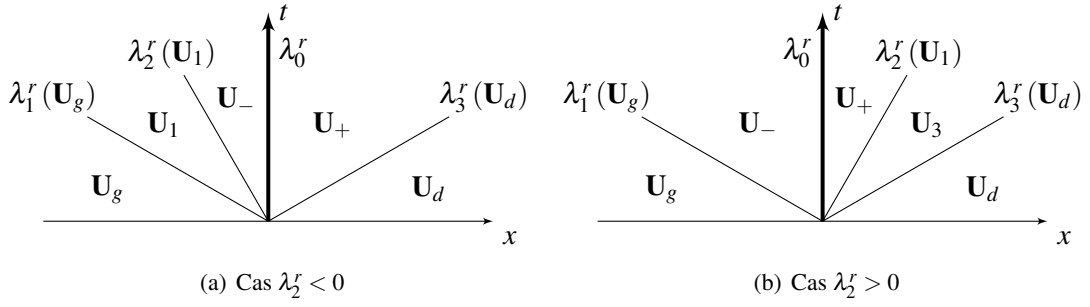


FIGURE 2.2 – Structure de la solution du problème de Riemann (2.23)

intermédiaires donnés par les variables suivantes (dont nous aurons besoin par la suite) :

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{1}{2}(u_g + u_d) - \frac{1}{2a}(\pi_d - \pi_g), \\
 \pi^* &= \frac{1}{2}(\pi_g + \pi_d) - \frac{a}{2}(u_d - u_g), \\
 \tau_g^* &= \frac{1}{a}(u^* - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)), \\
 \tau_d^* &= \frac{1}{a}(\lambda_3^r(\mathbf{U}_d) - u^*).
 \end{aligned}$$

Ce résultat a déjà été démontré (voir section 1.2.2).

Le problème de Riemann qui nous intéresse dans l'immédiat est celui localisé de part et d'autre de l'interface de couplage. Pour simplifier les notations, dans la suite nous notons le poids discret  $\widetilde{\mathcal{M}}(t^n)$  dans le terme source comme  $\widetilde{\mathcal{M}}(t)$ . Considérons deux états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$ . Nous cherchons donc à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \widetilde{\mathcal{M}}(t) \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.23)$$

La présence du terme source local  $\widetilde{\mathcal{M}}(t)$  dans le problème (2.23) change la résolution classique du problème de Riemann pour le système de relaxation hors équilibre. Ce terme fait apparaître une discontinuité de contact stationnaire (c'est-à-dire de vitesse nulle) supplémentaire que nous notons  $\lambda_0^r$  en  $x = 0$ . Ainsi, contrairement au cas sans couplage, les états intermédiaires ne sont plus continus au travers de l'interface  $x = 0$ . Dans le cas d'un écoulement subsonique, deux structures d'ondes doivent être considérées, comme cela est représenté sur la figure 2.2. Dans le cas où  $\lambda_2^r(\mathbf{U}) < 0$ , les états intermédiaires sont successivement notés  $\mathbf{U}_g$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_-$ ,  $\mathbf{U}_+$  et  $\mathbf{U}_d$  (voir figure 2.2(a)). En revanche, si  $\lambda_2^r(\mathbf{U}) > 0$  les états sont  $\mathbf{U}_g$ ,  $\mathbf{U}_-$ ,  $\mathbf{U}_+$ ,  $\mathbf{U}_3$  et  $\mathbf{U}_d$  (voir figure 2.2(b)). Pour déterminer les différents états intermédiaires, nous allons énoncer la prochaine proposition qui résout le problème de Riemann dans ces deux cas. Les états gauche et droit  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  étant fixés, la figure 2.2 correspond à des valeurs arbitraires des poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho \pi}$ . C'est pourquoi, afin

de respecter les deux structures en ondes, ces deux poids doivent être définis dans un espace particulier dont nous donnons maintenant la définition.

**Définition 2.2.** L'espace  $\mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est appelé domaine d'admissibilité des paramètres  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$ .

L'expression de ce domaine d'admissibilité est liée au respect de la structure de la solution du problème de Riemann. D'une part, les deux poids doivent respecter la structure subsonique de la solution. D'autre part, les états intermédiaires sont contraints à rester définis dans l'espace des états  $\Omega^r$ . En particulier, les densités associées à ces états doivent rester strictement positives. Avant de résoudre le problème de Riemann (2.23) nous pouvons écrire les relations de Rankine-Hugoniot de part et d'autre de la discontinuité stationnaire qui sont valables quelle que soit la structure d'ondes considérée :

$$\begin{aligned} (\rho u)_+ - (\rho u)_- &= 0, \\ (\rho u^2 + \pi)_+ - (\rho u^2 + \pi)_- &= \mathcal{M}_{\rho u}, \\ (\rho \pi u + a^2 u)_+ - (\rho \pi u + a^2 u)_- &= \mathcal{M}_{\rho\pi}. \end{aligned}$$

La première égalité définit le débit de masse  $m$  à travers l'interface :

$$m = \rho_- u_- = \rho_+ u_+. \quad (2.24)$$

Concernant les deux dernières relations ci-dessus, il est équivalent d'écrire :

$$m(u_+ - u_-) + (\pi_+ - \pi_-) = \mathcal{M}_{\rho u}, \quad (2.25)$$

$$m(\pi_+ - \pi_-) + a^2(u_+ - u_-) = \mathcal{M}_{\rho\pi}. \quad (2.26)$$

**Proposition 2.2.** Soient deux états constants subsoniques  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  dans  $\Omega^r$ . Alors il existe un espace  $\mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \mathcal{D}_{adm}^-(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \cup \mathcal{D}_{adm}^+(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ , où  $\mathcal{D}_{adm}^-$  et  $\mathcal{D}_{adm}^+$  sont deux ouverts convexes non vides disjoints, tel que pour toute paire  $(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ , la fonction notée

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}), \quad (2.27)$$

et définie de la manière suivante

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_1, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_1), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_1) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r, \\ \mathbf{U}_+, & \lambda_0^r < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \end{cases} \quad \text{si } (\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}^-, \quad (2.28)$$

et

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r, \\ \mathbf{U}_+, & \lambda_0^r < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_3), \\ \mathbf{U}_3, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_3) < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_d). \end{cases} \quad \text{si } (\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}^+, \quad (2.29)$$

est l'unique solution auto-semblable subsonique du problème de Riemann (2.23). On a de plus, dans le cas où  $(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}^-$  :

$$m = \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a^2u^*}{2a^2\tau_d^*}, \quad u_1 = u_-, \quad \tau_1 = \tau_g - \frac{1}{a}(u_g - u_-), \quad \pi_1 = \pi_-, \quad (2.30)$$

et dans le cas où  $(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}^+$  :

$$m = \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a^2u^*}{2a^2\tau_g^*}, \quad u_3 = u_+, \quad \tau_3 = \tau_d + \frac{1}{a}(u_d - u_+), \quad \pi_3 = \pi_+. \quad (2.31)$$

Les états traces sont donnés par les relations suivantes :

$$u_- = u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}}{2a(a-m)}, \quad \tau_- = \frac{u_-}{m}, \quad \pi_- = \pi^* - \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}}{2(a-m)}, \quad (2.32)$$

$$u_+ = u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}}{2a(a+m)}, \quad \tau_+ = \frac{u_+}{m}, \quad \pi_+ = \pi^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}}{2(a+m)}. \quad (2.33)$$

*Démonstration.* Nous démontrons dans un premier temps le calcul des états intermédiaires uniquement dans le cas où  $(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}^-$ . Le cas où  $(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) \in \mathcal{D}_{adm}^+$  est symétrique. On se concentre donc sur une structure en ondes correspondant à la définition 2.28 (voir figure 2.2(a)). En utilisant le fait que  $\lambda_2^r(\mathbf{U}_1) = \lambda_2^r(\mathbf{U}_-)$  (cas d'une discontinuité de contact) on a immédiatement  $u_1 = u_-$ . Il s'ensuit que la relation  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_1)$  c'est-à-dire  $u_g - a\tau_g = u_- - a\tau_1$  entraîne que  $\tau_1 = \tau_g - \frac{1}{a}(u_g - u_-)$ . D'autre part, les relations de Rankine-Hugoniot sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement de part et d'autre des discontinuités de contact s'écrivent :

$$-\lambda_i^r(\mathbf{U})[\rho u] + [\rho u^2 + \pi] = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pour  $i = 2$ , l'équation nous donne  $\pi_1 = \pi_-$ . Concernant les cas  $i = 1$  et  $i = 3$ , en utilisant le fait que  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_1)$  et  $\lambda_3^r(\mathbf{U}_d) = \lambda_3^r(\mathbf{U}_+)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\lambda_1^r(\mathbf{U}_1)\rho_1 u_- + \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)\rho_g u_g + (\rho_1 u_-)^2 + \pi_- - \rho_g u_g^2 - \pi_g &= 0, \\ -\lambda_3^r(\mathbf{U}_d)\rho_d u_d + \lambda_3^r(\mathbf{U}_+)\rho_+ u_+ + (\rho_d u_d^2 + \pi_d - \rho_+ u_+^2 - \pi_+) &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} a(u_- - u_g) + (\pi_- - \pi_g) &= 0, \\ a(u_+ - u_d) + (\pi_d - \pi_+) &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux dernières égalités, ajoutées aux relations (2.25) et (2.26) définissent un système linéaire de quatre équations en les quatre inconnues  $(u_+, u_-, \pi_+, \pi_-)$ . Le déterminant associé à ce système est non nul et la résolution nous donne bien les formules (2.32) et (2.33).

Pour obtenir maintenant la formule sur  $m$ , on procède comme suit. On écrit tout d'abord grâce à la formule sur  $u_+$  :

$$2a(a+m)(u_+ - u^*) = a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}. \quad (2.34)$$

Remarquons que, par la relation  $\lambda_3^r(\mathbf{U}_+) = \lambda_3^r(\mathbf{U}_d)$ , on a après multiplication par  $\rho_+$ , que  $m+a = \lambda_3^r(\mathbf{U}_d)\rho_+$  et par suite :

$$(a+m)u_+ = \lambda_3^r(\mathbf{U}_d)\rho_+u_+ = \lambda_3^r(\mathbf{U}_d)m.$$

En réinjectant ceci dans l'équation (2.34), on a :

$$2a(\lambda_3^r(\mathbf{U}_d) - u^*)m = a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a^2u^*,$$

qui, grâce à la définition de la variable  $\tau_d^*$ , n'est autre que la formule sur  $m$  donnée en (2.30).

Même munies des expressions des états intermédiaires, rappelons que celles-ci doivent être compatibles avec nos objectifs : garder une structure d'écoulement subsonique et respecter l'appartenance des variables à l'espace des états  $\Omega^r$ , en d'autres termes assurer la positivité des densités intermédiaires. Ces motivations vont nous permettre de démontrer les propriétés des espaces  $\mathcal{D}_{adm}^-$  et  $\mathcal{D}_{adm}^+$ . Nous nous concentrons dans un premier temps sur l'espace  $\mathcal{D}_{adm}^-$ .

– **Positivité de  $\tau_1$**

Remarquons que cette condition s'écrit :

$$\tau_1 = \tau_g - \frac{1}{a}(u_g - u_-) > 0,$$

soit après multiplication par  $a > 0$  :

$$u_- > u_g - a\tau_g$$

qui n'est autre que la condition d'ordonnancement  $\lambda_1^r < \lambda_2^r$ . En utilisant les formules précédentes, on a :

$$u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}}{2a(a-m)} > \lambda_1^r.$$

En remarquant dans un premier temps que

$$a - m = -\frac{1}{2a^2\tau_d^*} (a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a^2 \underbrace{(u^* - a\tau_d^*)}_{=2u^* - \lambda_3^r}),$$

on obtient

$$-2a^2(2u^* - \lambda_3^r)(\lambda_1^r - u^*) < (\lambda_1^r - (2u^* - \lambda_3^r))a\mathcal{M}_{\rho u} + (\lambda_1^r - \lambda_3^r)\mathcal{M}_{\rho\pi}. \quad (2.35)$$

– **Ordonnement**  $u_- < 0$

Il est ici équivalent d'écrire :

$$u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}}{2a(a-m)} < 0,$$

c'est-à-dire après quelques calculs :

$$-2a^2u^*(2u^* - \lambda_3^r) < (2u^* - \lambda_3^r)a\mathcal{M}_{\rho u} + \lambda_3^r\mathcal{M}_{\rho\pi}. \quad (2.36)$$

– **Positivité de  $\tau_-$ , ordonnancement  $\lambda_3^r(\mathbf{U}_+) > 0$  et positivité de  $\tau_+$**

La première condition est équivalente à  $\frac{u_-}{m} > 0$  c'est-à-dire :  $m < 0$ . La seconde condition s'écrit  $u_+ + a\tau_+ > 0$  et grâce à la troisième, en multipliant par  $\rho_+$  cette inégalité, on obtient  $m + a > 0$ . Le paramètre  $m$  doit donc vérifier l'encadrement :

$$-a < m < 0,$$

soit en utilisant la formule (2.30) sur  $m$  :

$$-2a^2\lambda_3^r < a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} < -2a^2u^*. \quad (2.37)$$

Reprenons maintenant l'inégalité de gauche associée à l'encadrement (2.37) ci-dessus et multiplions-la par  $(-\lambda_1^r)$  qui est une grandeur positive :

$$2a^2\lambda_3^r\lambda_1^r < -\lambda_1^ra\mathcal{M}_{\rho u} - \lambda_1^r\mathcal{M}_{\rho\pi}.$$

En additionnant cette dernière inégalité à (2.35) puis en inversant le sens du résultat, on a

$$(2u^* - \lambda_3^r)a\mathcal{M}_{\rho u} + \lambda_3^r\mathcal{M}_{\rho\pi} < -2a^2(2\lambda_1^r(\lambda_3^r - u^*) + u^*(2u^* - \lambda_3^r)). \quad (2.38)$$

Ainsi, les inégalités (2.36) et (2.38) définissent l'encadrement suivant :

$$-2a^2u^*(2u^* - \lambda_3^r) < (2u^* - \lambda_3^r)a\mathcal{M}_{\rho u} + \lambda_3^r\mathcal{M}_{\rho\pi} < -2a^2(2\lambda_1^r(\lambda_3^r - u^*) + u^*(2u^* - \lambda_3^r)). \quad (2.39)$$

L'espace  $\mathcal{D}_{adm}^-$  est donc défini par les deux encadrements (2.37) et (2.39), plus précisément on a :

$$\mathcal{D}_{adm}^- = \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho \pi}) \in \mathbb{R}^2; \\ -2a^2 \lambda_3^r < a \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho \pi} < -2a^2 u^*, \\ -2a^2 u^* (2u^* - \lambda_3^r) < (2u^* - \lambda_3^r) a \mathcal{M}_{\rho u} + \lambda_3^r \mathcal{M}_{\rho \pi} < -2a^2 (2\lambda_1^r (\lambda_3^r - u^*) + u^* (2u^* - \lambda_3^r)) \end{array} \right\}. \quad (2.40)$$

(i<sup>-</sup>)

(ii<sup>-</sup>)

Concernant  $\mathcal{D}_{adm}^+$ , les calculs sont symétriques. On obtient comme définition de cet espace :

$$\mathcal{D}_{adm}^+ = \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho \pi}) \in \mathbb{R}^2; \\ -2a^2 u^* < a \mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho \pi} < -2a^2 \lambda_1^r, \\ -2a^2 u^* (2u^* - \lambda_1^r) < (2u^* - \lambda_1^r) a \mathcal{M}_{\rho u} - \lambda_1^r \mathcal{M}_{\rho \pi} < -2a^2 (2\lambda_3^r (\lambda_1^r - u^*) + u^* (2u^* - \lambda_1^r)) \end{array} \right\}. \quad (2.41)$$

(i<sup>+</sup>)

(ii<sup>+</sup>)

Les propriétés d'ouverture et de convexité sont immédiates. Afin de montrer que les deux espaces sont disjoints, nous allons écrire un encadrement sur le poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  pour chacun d'eux. Dans un premier temps, on effectue l'opération  $(-\lambda_3^r i^- + ii^-)$  (notons que la grandeur  $-\lambda_3^r$  est négative et que donc l'encadrement  $(i^-)$  est inversé par multiplication) :

$$-2a^2 u^* 2(u^* - \lambda_3^r) < 2(u^* - \lambda_3^r) a \mathcal{M}_{\rho u} < -2a^2 (u^* - \lambda_3^r) (-2\lambda_1^r + 2u^* + \lambda_3^r).$$

De plus, on a  $(u^* - \lambda_3^r) = -a\tau_d^* < 0$ . On peut donc simplifier l'inégalité ci-dessus pour obtenir :

$$-2a^2 \left( -\lambda_1^r + u^* + \frac{\lambda_3^r}{2} \right) < a \mathcal{M}_{\rho u} < -2a^2 u^*. \quad (2.42)$$

Dans un second temps, on effectue le calcul  $(-\lambda_1^r i^+ + ii^-)$  et après des simplifications similaires au cas précédent on a

$$-2a^2 u^* < a \mathcal{M}_{\rho u} < 2a^2 \left( \lambda_3^r - u^* - \frac{\lambda_1^r}{2} \right). \quad (2.43)$$

Les deux encadrements (2.42) et (2.43) nous montrent bien que les deux ensembles sont disjoints. □

**Remarque 2.3.** L'ensemble associé à  $\bar{\mathcal{D}}_{adm}^- \cap \bar{\mathcal{D}}_{adm}^+$  est réduit au point  $(-2au^*, 0)$ . En ce point, la

solution du problème de Riemann correspond à

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < 0, \\ \mathbf{U}_+, & 0 < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \end{cases} \quad \text{si } (\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = (-2au^*, 0),$$

avec

$$\begin{aligned} u_- = 0, & \quad \tau_- = \tau_g - \frac{u_g}{a}, & \quad \pi_- = \pi^* + au^*, \\ u_+ = 0, & \quad \tau_+ = \tau_d + \frac{u_d}{a}, & \quad \pi_+ = \pi^* - au^*. \end{aligned}$$

Avant la deuxième étape de la résolution, on donne l'expression de la projection  $\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t)$  sur chaque cellule du maillage de la solution du problème (2.20). Tout d'abord, étant donnée la résolution du problème de Riemann dans deux cellules successives, il est clair que l'on a

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathcal{W}\left(\frac{x-x_j}{t}; \mathbf{U}_{j-1/2}^n, \mathbf{U}_{j+1/2}^n, (\mathcal{M}_{\rho u})_j^n, (\mathcal{M}_{\rho\pi})_j^n\right),$$

pour tout  $(x, t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . Ici, on a écrit les poids  $((\mathcal{M}_{\rho u})_j^n, (\mathcal{M}_{\rho\pi})_j^n)$  comme étant définis de la manière suivante

$$\left((\mathcal{M}_{\rho u})_j^n, (\mathcal{M}_{\rho\pi})_j^n\right) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } j \neq 0, \\ (\mathcal{M}_{\rho u}(t^n), \mathcal{M}_{\rho\pi}(t^n)) & \text{si } j = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

On définit alors la solution discrète  $\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t)$  au temps intermédiaire  $t^{(n+1)-}$  via la moyenne

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{(n+1)-}) := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx, \quad x \in C_{j+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

### Deuxième étape : retour à l'équilibre

La solution obtenue après la première étape convective est la projection  $\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1-})$ . Dans le deuxième pas, les variables du modèle de relaxation sont ramenées à l'équilibre. On résout donc le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (t^{n+1-}, t^{n+1}) \\ \mathbf{U}(x, t^{n+1-}) = \mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1-}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dans le régime  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Il est donc équivalent de poser

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1}) = (\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^{n+1}), (\rho\pi)_v(x, t^{n+1}))^T$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^{n+1}) &= \mathbf{u}_{\Delta x}(x, t^{n+1-}) \\ (\rho\pi)_{\Delta x}(x, t^{n+1}) &= \rho_{\Delta x}(x, t^{n+1-}) p(\tau_{\Delta x}(x, t^{n+1-}), x).\end{aligned}$$

**Remarque 2.4.** Si on considère les deux étapes définissant l'approche par relaxation, les flux numériques  $(\mathbf{g}_L)_j^n$  et  $(\mathbf{g}_R)_j^n$  dans les formules de mises à jour (2.5) et (2.6) sont donnés par les flux de Godunov suivants :

$$(\mathbf{g}_L)_j^n = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \end{pmatrix} \left( \mathcal{W} \left( (j\Delta x)^-; \mathbf{U}_{j-1/2}^n, \mathbf{U}_{j+1/2}^n, (\mathcal{M}_{\rho u})_j^n, (\mathcal{M}_{\rho\pi})_j^n \right) \right), \quad (2.45)$$

$$(\mathbf{g}_R)_j^n = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \end{pmatrix} \left( \mathcal{W} \left( (j\Delta x)^+; \mathbf{U}_{j-1/2}^n, \mathbf{U}_{j+1/2}^n, (\mathcal{M}_{\rho u})_j^n, (\mathcal{M}_{\rho\pi})_j^n \right) \right), \quad (2.46)$$

pour  $j \in \mathbb{Z}$  et où les poids  $((\mathcal{M}_{\rho u})_j^n, (\mathcal{M}_{\rho\pi})_j^n)$  proviennent de la définition (2.44).

### Solutions équilibre

Étant donné un poids  $\mathcal{M} = (0, \mathcal{M}_{\rho u})$ , nous cherchons maintenant une définition du poids

$$\tilde{\mathcal{M}} = (0, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi})$$

telle que l'approche par relaxation préserve les solutions équilibre du problème (2.2). Plus précisément, nous allons exprimer le poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  en fonction du poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  pour réaliser cette propriété. Nous énonçons et démontrons ainsi la propriété suivante.

**Proposition 2.3.** Soient les états constants subsoniques  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  appartenant à  $\Omega$  et un poids  $\mathcal{M} = (0, \mathcal{M}_{\rho u})$  tels que l'équation (2.4) soit vérifiée. Définissons le débit de masse à travers l'interface  $m^e := m^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u})$  selon la formule suivante

$$m^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + 2au^*}{a(\tau_g^* + \tau_d^*)}, \quad (2.47)$$

ainsi que le poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e := \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u})$  donné par

$$\mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = m^e(\mathcal{I}_d - \mathcal{I}_g) \quad (2.48)$$

où on a noté  $\mathcal{I}_g = p_L(\tau_g) + a^2\tau_g$ ,  $\mathcal{I}_d = p_R(\tau_d) + a^2\tau_d$ . Alors la méthode par relaxation munie du poids  $\tilde{\mathcal{M}} = (0, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}^e)$  préserve les solutions équilibre.

*Démonstration.* Tout d'abord, la définition (2.48) du poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  nous donne bien la formule du nouveau débit de masse  $m^e$  à l'interface et ce, grâce aux relations (2.30) et (2.31). Considérons



une solution équilibre, c'est-à-dire une solution  $\mathbf{u}(x, t)$  telle que

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, t > 0, \end{cases}$$

et vérifiant

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}, \quad (2.49)$$

avec  $\mathcal{M} = (0, \mathcal{M}_{\rho u})$ . Nous devons montrer qu'une fois le processus de relaxation effectué, la solution est préservée. Selon les formules des flux (2.45) et (2.46), on doit donc avoir

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, t > 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0, t > 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Plus précisément, grâce aux formules (2.30) et (2.31) il faut que  $\mathbf{U}_- = \mathbf{U}_L$  et  $\mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_R$ . Ces deux dernières égalités sont l'objet de la démonstration. Tout d'abord, l'égalité (2.49) donne

$$\begin{aligned} \rho_R u_R &= \rho_L u_L, \\ \rho_R u_R^2 + p_R(\tau_R) - \rho_L u_L^2 - p_L(\tau_L) &= \mathcal{M}_{\rho u}. \end{aligned}$$

La deuxième équation est équivalente à

$$\mathcal{M}_{\rho u} = \rho_R u_R (u_R - u_L) + (p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L))$$

que nous réinjectons dans la formule de  $m^e$  :

$$m^e = \frac{\rho_R u_R (u_R - u_L) + (p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L)) + 2a u^*}{a(\tau_L^* + \tau_R^*)}.$$

Or comme on a  $u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2a}(p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L))$  et  $a(\tau_L^* + \tau_R^*) = (u_R - u_L) + a(\tau_L + \tau_R)$ , ceci donne finalement :

$$m^e = \rho_R u_R,$$

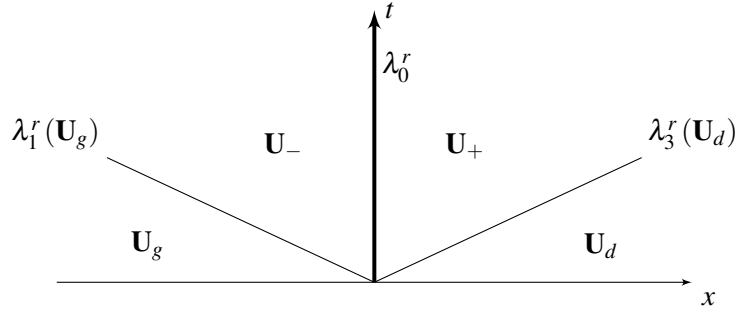


FIGURE 2.3 – Structure générale de la solution du problème de Riemann (2.23) munie du terme source mesure  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$

et donc  $m^e = \rho_L u_L$ . Concernant l'état  $u_-$ , le calcul est similaire :

$$\begin{aligned}
 u_- &= u_* + \frac{a(m^e(u_R - u_L) + p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L)) - m^e(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L)}{2a(a - m^e)} \\
 &= \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2a}(p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L)) + \frac{a(m^e(u_R - u_L) + p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L)) - m^e(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L)}{2a(a - m^e)} \\
 &= \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{am^e(u_R - u_L) - m^e(a^2\tau_R - a^2\tau_L)}{2a(a - m^e)} \\
 &= \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{m^e(u_R - u_L) - a(m^e\tau_R - m^e\tau_L)}{2(m^e - a)} \\
 &= u_L.
 \end{aligned}$$

Les calculs sont similaires pour les autres variables. □

**Remarque 2.5.** Notons que l'ajout du terme source  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  dans l'approche par relaxation modifie la structure de la solution du problème de Riemann (2.23). En effet, l'onde de transport de vitesse  $\lambda_2^r(\mathbf{U}) = u$  est maintenant « transparente » au sens où  $\tau_- = \tau_1$  et  $\tau_+ = \tau_3$ . On représente sur la figure 2.3 la nouvelle solution du problème de Riemann munie du poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$ .

## 2.3 Résultats

Nous présentons dans cette section des résultats provenant de simulations numériques basées sur les deux méthodes décrites. Deux valeurs de  $\mathcal{M}_{\rho u}$  sont considérées dans les tests qui vont suivre. Les conditions initiales sont de type tube à choc. Les deux états constants  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont donnés par :

$$\mathbf{u}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{u}_g & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{u}_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec

	$g$	$d$
$\rho$	2	1
$u$	0.90526676	0

La loi de pression est  $p_\alpha(\tau) = \tau^{-\gamma_\alpha}$ . Les coefficients adiabatiques sont  $\gamma_L = 1.4$  pour le domaine de gauche et  $\gamma_R = 1.6$  pour le domaine de droite. Le nombre de points du maillage est 200 et la constante CFL est  $C = 0.5$ . Le domaine en espace est restreint à l'intervalle  $[-0.5, 0.5]$  et les conditions aux limites sont du type Neumann.

### 2.3.1 Couplage conservatif

Nous illustrons dans ce test le comportement des deux méthodes que nous avons présentées dans le cas d'un couplage strictement conservatif c'est-à-dire où on a  $\mathcal{M} = (0, 0)$  dans le problème de couplage (2.2). Dans un premier temps, nous prenons également  $\widetilde{\mathcal{M}} = (0, 0, 0)$  dans l'approche par relaxation. Ceci revient donc à la méthode par relaxation exposée dans le premier chapitre. La méthode est donc censée ne pas préserver les solutions équilibre. On remarque sur les figures 2.4 et 2.5 que les résultats fournis par les deux méthodes sont quasi similaires. La méthode à deux problèmes de Riemann ainsi que l'approche par relaxation mettent en exergue l'onde acoustique due au couplage réfléchi vers la gauche après le passage du profil de matière à travers l'interface. La différence remarquable entre les deux méthodes réside dans la discontinuité du couplage située en  $x = 0$ . Alors que pour la méthode à deux problèmes de Riemann celle-ci est parfaitement raide, *a contrario* l'approche par relaxation non équilibre fait apparaître un profil discret. En particulier, on remarque la présence d'un point dans la discontinuité. Ce phénomène s'apparente à un phénomène de type couche limite. D'autre part, les figures 2.9(a) et 2.10(a) représentent sur le même graphique la valeur de la composante d'impulsion du vecteur  $(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n$  et la valeur exacte du poids  $\mathcal{M}_{\rho u}^n$  (c'est-à-dire zéro strictement) en fonction du temps. Comme nous l'attendions, l'approche par relaxation restaure de manière exacte cette valeur alors que la méthode à deux problèmes de Riemann le fait après quelques itérations en temps. Cette dernière remarque reste mineure puisque le bilan des flux converge très rapidement vers la bonne valeur.

La figure 2.6 montre les résultats obtenus par l'approche par relaxation avec le poids  $\widetilde{\mathcal{M}} = (0, 0, \mathcal{M}_{\rho\pi}^e)$  avec  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  donné par l'équation (2.48) dans la proposition 2.3. Par construction, le profil discret de la discontinuité dont nous parlions précédemment a totalement disparu. Ceci nous montre bien l'avantage d'une telle approche. D'autre part, précisons que cette seconde méthode restaure également de manière exacte le poids  $\mathcal{M}_{\rho u}^n$ .

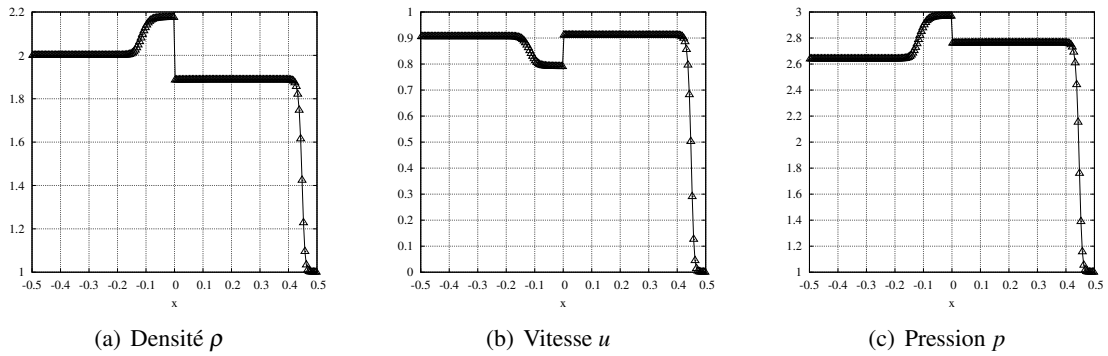
### 2.3.2 Couplage non conservatif

Dans ce cas test, la valeur du poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  est choisie afin d'imposer la continuité des traces des états à gauche et à droite de l'interface de couplage en  $x = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{u}(t, 0^-) = \mathbf{u}(t, 0^+)$ . Cette

valeur, dont nous discuterons dans le prochain chapitre, est précisément :

$$\mathcal{M}_{\rho u}^n = 0.354404, \quad n > 0.$$

Dans l'approche par relaxation, nous prenons  $\tilde{\mathcal{M}} = (0, \mathcal{M}_{\rho u}^n, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u}^n))$ . Les figures 2.7 et 2.8 comparent les solutions numériques obtenues par les deux stratégies. L'onde stationnaire du couplage est parfaitement raide dans les deux cas, ce qui était prévisible. La continuité des variables primitives est également remarquable sur les graphiques. Les profils sont similaires entre les deux méthodes. Enfin, concernant les figures 2.9(b) et 2.10(b), de la même manière que précédemment, par construction, la méthode de relaxation restaure exactement le poids théorique imposé alors qu'il faut quelques pas en temps pour la méthode à deux problèmes de Riemann.

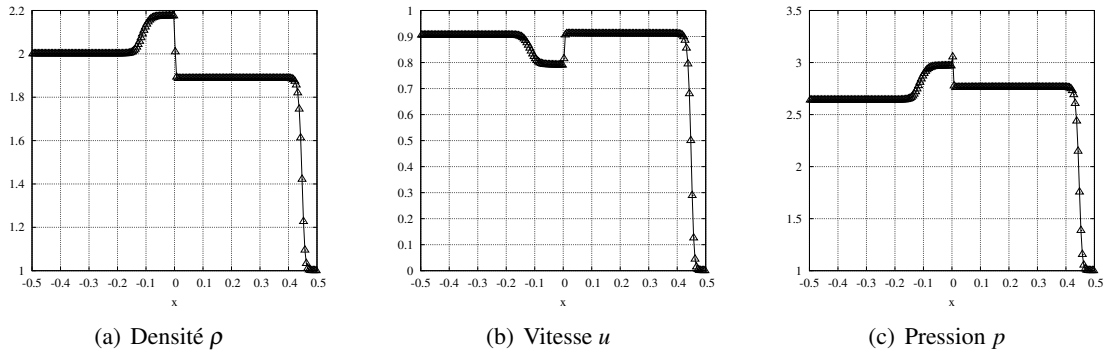


(a) Densité  $\rho$

(b) Vitesse  $u$

(c) Pression  $p$

FIGURE 2.4 – Couplage conservatif - Méthode à deux problèmes de Riemann

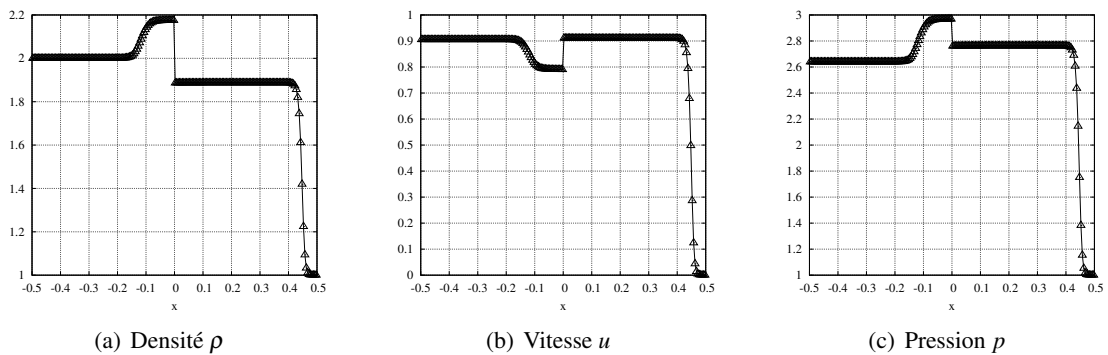


(a) Densité  $\rho$

(b) Vitesse  $u$

(c) Pression  $p$

FIGURE 2.5 – Couplage conservatif - Approche par relaxation



(a) Densité  $\rho$

(b) Vitesse  $u$

(c) Pression  $p$

FIGURE 2.6 – Couplage conservatif - Approche par relaxation avec le poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$

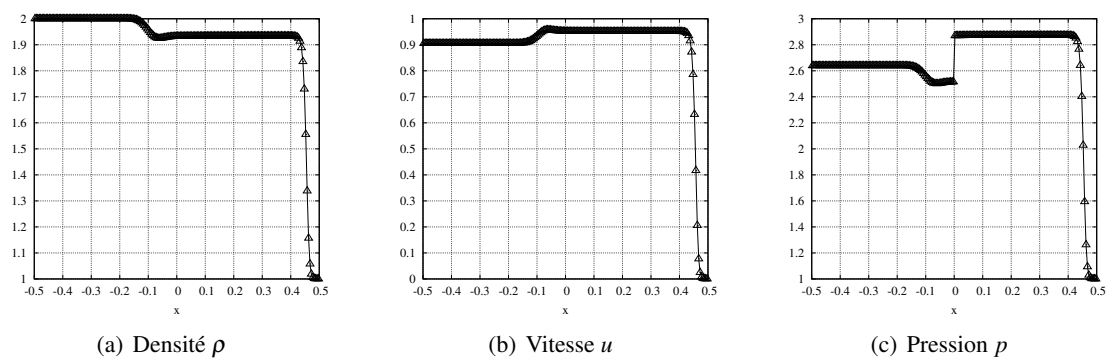


FIGURE 2.7 – Couplage non conservatif - Méthode à deux problèmes de Riemann

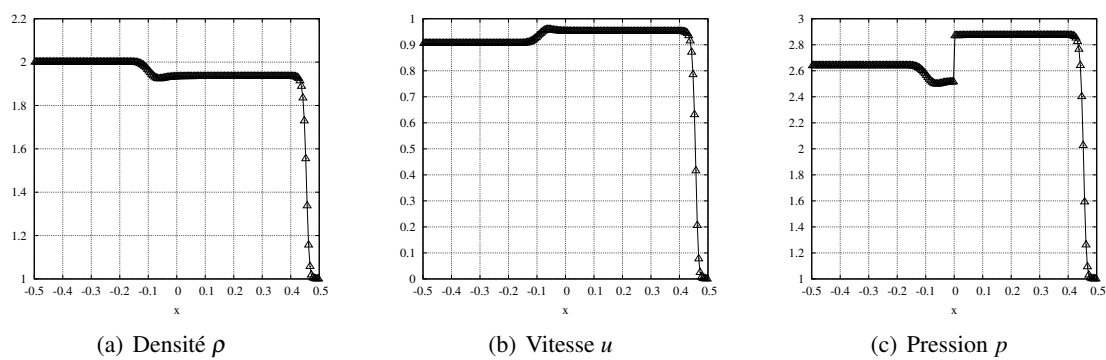


FIGURE 2.8 – Couplage non conservatif - Approche par relaxation

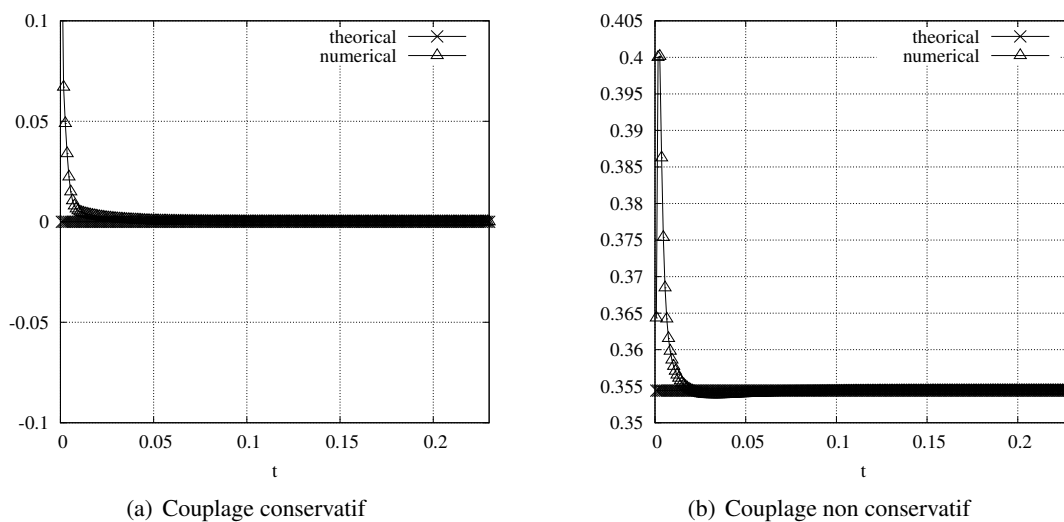


FIGURE 2.9 – Comparaison entre la valeur numérique du saut d'impulsion à l'interface et la valeur exacte du poids - Méthode à deux problèmes de Riemann

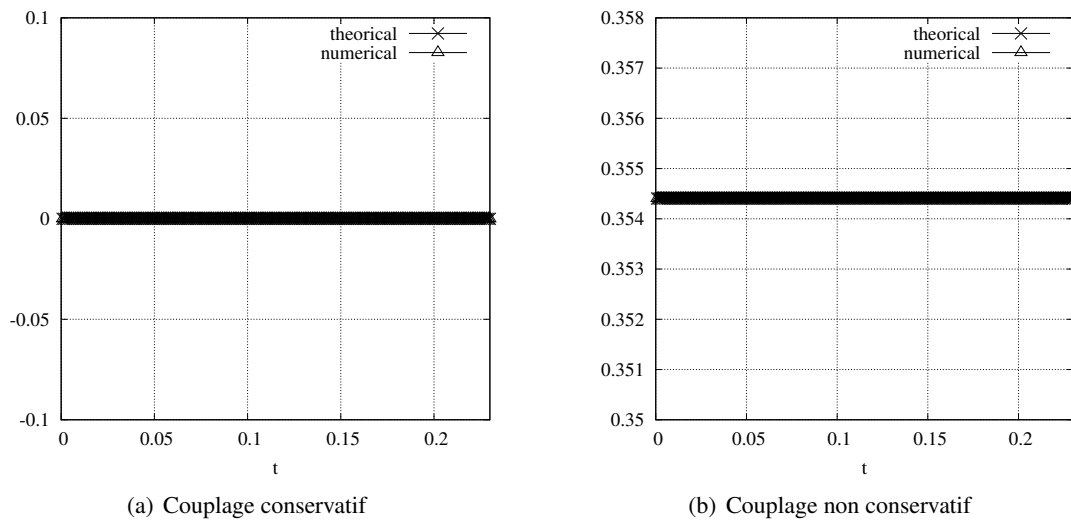


FIGURE 2.10 – Comparaison entre la valeur numérique du saut d'impulsion à l'interface et la valeur exacte du poids - Approche par relaxation

## 2.4 Extension au cas non isentropique

Nous allons maintenant étendre le problème de couplage étudié dans la section précédente au cas d'un écoulement non isentropique. On note  $\tau = 1/\rho$  le covolume du fluide et  $s$  l'entropie. Les équations de la dynamique des gaz sont complétées par l'équation de conservation de l'énergie totale

$$\rho E = \rho \frac{u^2}{2} + \rho \varepsilon,$$

où  $\varepsilon \equiv \varepsilon(\tau, s)$  est l'énergie interne du fluide. Le problème de Cauchy, associé au couplage de deux systèmes d'équations de la dynamique des gaz possédant des fermetures différentes, s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \quad (2.51)$$

où les différents vecteurs sont dorénavant définis comme

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p(\tau, s, x) \\ \rho E u + p(\tau, s, x) u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \\ \mathcal{M}_{\rho E}(t) \end{pmatrix},$$

avec

$$p(\tau, s, x) = \begin{cases} p_L(\tau, s), & \text{si } x < 0, \\ p_R(\tau, s), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{u}$  est défini sur l'espace des états

$$\Omega = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \rho > 0, u \in \mathbb{R}, E > 0\}$$

et les lois de pressions  $p_L$  et  $p_R$  sont supposées vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p_\alpha(\tau, s) > 0, \\ \left( \frac{\partial p_\alpha}{\partial \tau} \right)_s (\tau, s) = -\rho^2 c_\alpha^2 < 0, & \forall \rho > 0, s \in \mathbb{R}, \alpha = L, R, \\ \left( \frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial \tau^2} \right)_s (\tau, s) > 0, \end{cases}$$

où  $c_\alpha \equiv c_\alpha(\tau, s)$  est la vitesse du son. Le vecteur des termes sources  $\mathcal{M}(t)$  est défini de tel sorte que le principe de conservation de la masse est strictement respecté au travers de l'interface de couplage. *A contrario*, la quantité de mouvement et l'énergie totale ne seront pas strictement conservées dans notre problème de couplage : les poids  $\mathcal{M}_{\rho u}(t)$  et  $\mathcal{M}_{\rho E}(t)$  sont imposés sur l'interface et permettent de piloter l'influence du couplage sur l'écoulement. Ces deux termes sources sont considérés pour l'instant comme connus.

Nous présentons ici uniquement l'extension de l'approche par relaxation décrite dans le cas



isentropique et ceci pour deux raisons. D'une part, la méthode à deux problèmes de Riemann se révèle être relativement plus compliquée que dans la section précédente : la présence de l'équation de conservation sur l'énergie totale ne nous permet pas d'assurer l'unicité d'une solution pour les relations (2.9) et (2.10). D'autre part, l'approche par relaxation munie du terme source équilibre  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  possède des propriétés plus intéressantes : respect des solutions équilibres, valeur du poids exactement restaurée ou encore discontinuité due au couplage parfaitement raide au niveau numérique. Concernant la description complète de l'approche par relaxation, on réfère le lecteur à la section précédente. L'ajout de l'équation d'évolution de l'énergie ne change pas la technique par splitting pour résoudre numériquement le problème de couplage. En revanche, la résolution du problème de Riemann est évidemment différente. La prochaine section détaille cette résolution.

### 2.4.1 Approche par relaxation : résolution du problème de Riemann

L'approche par relaxation développée dans la section précédente est ici quasiment inchangée. La seule étape qui est modifiée concerne la résolution du problème de Riemann. Le principe de l'approximation numérique par relaxation des équations d'Euler (avec énergie) a été détaillée dans le premier chapitre. On rappelle donc que le système de relaxation pour les équations d'Euler s'écrit, en dehors de tout couplage :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + \pi u) = 0, \\ \partial_t(\rho \pi) + \partial_x(\rho \pi u + a^2 u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{cases}$$

Ce système est de plus hyperbolique sur l'espace des états

$$\Omega^r = \{\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E, \rho \pi) \in \mathbb{R}^4; \rho > 0, u \in \mathbb{R}, E > 0, \pi \in \mathbb{R}\}$$

et admet les valeurs propres suivantes

$$\lambda_1^r(\mathbf{U}) = u - a\tau < \lambda_2^r(\mathbf{U}) = u < \lambda_3^r(\mathbf{U}) = u + a\tau,$$

où la valeur propre  $\lambda_2^r$  est double. La présence de l'équation en  $\rho E$  dans le système ci-dessus a donc augmenté la multiplicité de la valeur propre associée au transport du fluide à la vitesse  $u$ . Ceci implique en particulier que la structure de la solution du problème de Riemann correspondant est la même que dans le cas d'un écoulement isentropique. L'équation en  $\rho E$  est donc totalement découplée du reste du système de relaxation et les états intermédiaires en  $(\rho, u, \pi)$  dans la solution du problème de Riemann restent inchangés.

On considère donc la première partie de l'approche par relaxation de la section précédente. Au

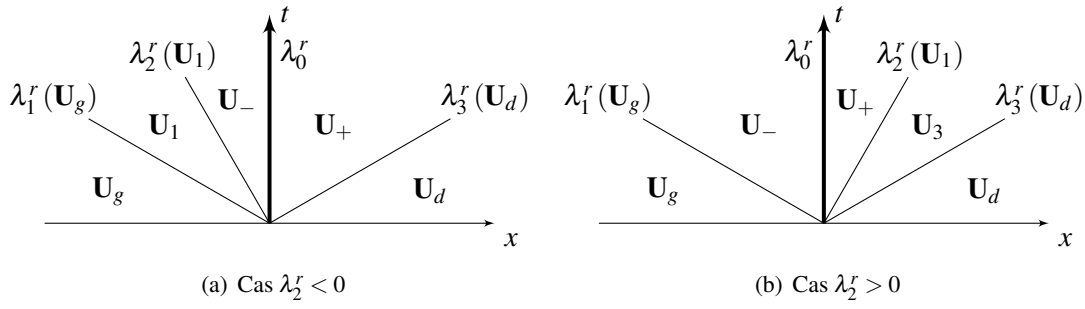


FIGURE 2.11 – Structure de la solution du problème de Riemann (2.52)

cours de cette étape, on est amené à résoudre le problème de Riemann suivant

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathcal{M}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.52)$$

où on a noté les vecteurs

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho \pi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho E u + \pi u \\ \rho \pi u + a^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u} \\ \mathcal{M}_{\rho E} \\ \mathcal{M}_{\rho \pi}(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) \end{pmatrix}.$$

Les états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  correspondent aux deux vecteurs des cellules du maillage de part et d'autre de l'interface de couplage à l'itération courante. Le terme source  $\mathcal{M}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d)$  est défini par les poids en quantité de mouvement et énergie  $\mathcal{M}_{\rho u} \equiv \mathcal{M}_{\rho u}(t^n)$  et  $\mathcal{M}_{\rho E} \equiv \mathcal{M}_{\rho E}(t^n)$  au temps discret  $t^n$  ainsi que par le poids préservant les solutions équilibre

$$\mathcal{M}_{\rho \pi}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = m^e(\mathcal{I}_d - \mathcal{I}_g), \quad (2.53)$$

où  $m^e \equiv m^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u})$  est le débit de masse équilibre associé à cette définition. Selon la remarque (2.5), la définition (2.53) du poids équilibre  $\mathcal{M}_{\rho \pi}^e$  entraîne que les variables  $(\rho, u, \pi)$  sont continues de part et d'autre de la caractéristique de vitesse  $u$ . Cependant, comme l'équation en  $\rho E$  a augmenté la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_2^r$  associée à cette même caractéristique, il est nécessaire d'étudier les relations de saut appliquées à l'équation de conservation de l'énergie totale. La structure de la solution du problème de Riemann est représentée sur la figure 2.11. On donne maintenant la proposition suivante.

**Proposition 2.4.** Soient deux états constants subsoniques  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  dans  $\Omega^r$ . Les termes source  $\mathcal{M}_{\rho u}$ ,  $\mathcal{M}_{\rho E}$  sont supposés connus et  $\mathcal{M}_{\rho \pi}^e$  est défini selon la formule (2.53). Alors la fonction notée

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E}),$$

définie de la manière suivante :

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E}) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_1, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_1), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_1) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r, \\ \mathbf{U}_+, & \lambda_0^r < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \end{cases} \quad \text{si } m^e < 0,$$

et

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E}) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r, \\ \mathbf{U}_+, & \lambda_0^r < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_3), \\ \mathbf{U}_3, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_3) < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_d). \end{cases} \quad \text{si } m^e > 0,$$

est l'unique solution auto-semblable subsonique du problème de Riemann (2.52). De plus, le débit de masse à l'interface est donné par

$$m^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + 2au^*}{a(\tau_g^* + \tau_g^*)}$$

et les états traces de la solution sont

$$\begin{aligned} u_- &= u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}^e}{2a(a - m^e)}, & \tau_- &= \frac{u_-}{m^e}, & \pi_- &= \pi^* - \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}^e}{2(a - m^e)}, \\ u_+ &= u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}^e}{2a(a + m^e)}, & \tau_+ &= \frac{u_+}{m^e}, & \pi_+ &= \pi^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}^e}{2(a + m^e)}. \end{aligned}$$

Enfin, dans le cas où  $m^e < 0$ , les états intermédiaires en énergie sont

$$E_1 = E_g - \frac{1}{a}(\pi_- u_- - \pi_g u_g) \quad E_- = E_+ + \llbracket \pi \tau \rrbracket_-^+ - \frac{\mathcal{M}_{\rho E}}{m^e}, \quad E_+ = E_d - \frac{1}{a}(\pi_d u_d - \pi_+ u_+), \quad (2.54)$$

et dans le cas où  $m^e > 0$  :

$$E_- = E_g - \frac{1}{a}(\pi_- u_- - \pi_g u_g) \quad E_+ = E_- - \llbracket \pi \tau \rrbracket_-^+ + \frac{\mathcal{M}_{\rho E}}{m^e}, \quad E_3 = E_d - \frac{1}{a}(\pi_d u_d - \pi_+ u_+). \quad (2.55)$$

*Démonstration.* L'équation de conservation de l'énergie totale étant découplée du reste du système par relaxation, les formules des états intermédiaires en  $(\tau, u, \pi)$  et du débit de masse  $m^e$  résultent des mêmes calculs que dans le cas isentropique. Concernant les états intermédiaires en énergie dans les formules (2.54) et (2.55), ils sont simplement donnés par les relations de Rankine-

Hugoniot de part et d'autre de chaque onde. On démontre le cas où  $m^e < 0$  (le cas  $m^e > 0$  étant symétrique). Les relations de saut s'écrivent en dehors de l'interface de couplage :

$$-\lambda_i^r(\mathbf{U})\llbracket\rho E\rrbracket + \llbracket\rho Eu + \pi u\rrbracket = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.56)$$

Avec  $i = 1$  on obtient, après avoir rappelé que  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_1)$ , la formule sur  $E_1$  dans (2.54). Lorsque  $i = 2$ , on a d'une part  $u_1 = u_-$  et la relation de saut (2.56) aboutit à  $\pi_1 = \pi_-$ . Pour  $i = 3$  et toujours par continuité des vitesses d'ondes de part et d'autre d'une discontinuité de contact, c'est-à-dire  $\lambda_3^r(\mathbf{U}_+) = \lambda_3^r(\mathbf{U}_d)$ , on obtient la formule sur  $E_3$ . Enfin, au niveau de l'interface de couplage, la relation de saut s'écrit :

$$\llbracket\rho Eu + \pi u\rrbracket_-^+ = \mathcal{M}_{\rho E}.$$

Sachant que, par définition,  $m^e = \rho_- u_- = \rho_+ u_+$ , on obtient facilement la formule de l'état intermédiaire  $E_-$ . □

**Remarque 2.6.** *Il est important de noter que, à partir des résultats de la section précédente, le problème de Riemann est facilement résolu explicitement du fait du découplage de l'équation sur l'énergie. En revanche, concernant l'expression des domaines d'admissibilité des poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho E}$ , l'extension n'est pas évidente. En effet, les états intermédiaires en énergie dépendent des poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho E}$ . Afin de respecter la structure subsonique de la solution, la positivité des densités intermédiaires et la positivité des énergies intermédiaires, il est ainsi nécessaire de déterminer les nouveaux domaines d'admissibilités pour les deux poids. Ces calculs, non triviaux, n'ont pas été finalisés dans le cadre de la présente thèse.*

Le problème de Riemann étant explicitement résolu, l'approche par relaxation préservant les solutions équilibres peut-être employée pour l'approximation numérique du problème de couplage (2.51). La section suivante est consacrée à quelques résultats numériques.

## 2.4.2 Résultats numériques

Cette section présente des résultats numériques du problème de couplage des équations d'Euler avec énergie et terme source mesure. Le cas test est le profil uniforme en densité, vitesse et pression déjà étudié dans la section 2 du chapitre 1. Rappelons que les conditions initiales sont du type problème de Riemann, c'est-à-dire que le vecteur des inconnues  $\mathbf{u}(x, t)$  est donné au temps  $t = 0$  par

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_g, & x < 0, \\ \mathbf{u}_d, & x > 0. \end{cases}$$

Les états constants  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont donnés dans le tableau 2.1. Le domaine d'étude est restreint à  $x \in [-0.5, 0.5]$  et la loi d'état est celle d'un gaz parfait polytropique c'est-à-dire, exprimée en

variables  $(\rho, \varepsilon)$  :

$$p_\alpha(\tau, \varepsilon) = (\gamma_\alpha - 1)\varepsilon/\tau, \quad \alpha = L, R,$$

où  $\gamma_\alpha$  sont les coefficients adiabatiques dans le domaine de gauche et de droite avec  $\gamma_L = 1.4$  et  $\gamma_R = 1.6$ . Le nombre de cellules du test est  $N = 200$ , le nombre de Courant  $C = 0.5$  et le temps final  $T = 0.12$ .

	$g$	$d$
$\rho$	1.6	1.6
$u$	0.8	0.8
$p$	2.35	2.35

TABLE 2.1 – Profil uniforme en pression - conditions initiales

Pour le calcul du terme source  $\mathcal{M}$ , on utilise la simple méthode suivante. Considérons au temps  $t^n$  la solution discrète dans les cellules de part et d'autre de l'interface donnée par les états constants  $\mathbf{u}_{-1/2}^n$  et  $\mathbf{u}_{1/2}^n$ . Les flux numériques correspondant à une condition de couplage par état avec une transmission en variables données sont calculés. On les note

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_L)_0^n &:= \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n), \\ (\mathbf{g}_R)_0^n &:= \mathbf{g}_R(\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{1/2}^n), \end{aligned}$$

où les états  $\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n$  et  $\bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n$  sont les états fictifs donnés en fonction de la transmission choisie. Dans notre cas test, on décide de prendre la transmission en variables  $(\rho, u, p)$ . On renvoie le lecteur à la section 1.2.3 pour plus de précisions quant à la détermination des états fictifs  $\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n$  et  $\bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n$ . Ensuite, le terme source discret  $\mathcal{M}^n$  au temps  $t^n$  est évalué de la manière suivante :

$$\mathcal{M}^n = \alpha((\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n), \quad \alpha \in (0, 1).$$

L'intérêt de cette méthode simple est, d'une part, de tirer avantage de l'approche par relaxation préservant les solutions équilibres via l'ajout du poids  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$ . D'autre part, le coefficient  $\alpha \in (0, 1)$  nous permet de passer continûment d'une condition de couplage par flux strictement conservative à une condition de couplage par état non conservative et imposant la continuité d'un jeu de variables (ici  $\rho, u$  et  $p$ ).

Les résultats numériques de ce cas test sont présentés sur la figure 2.12. Nous avons tracé la densité  $\rho$ , la vitesse  $u$ , la pression  $p$  ainsi que les différentes pertes de conservation relatives en masse, impulsion et énergie. Pour chaque variable et perte de conservation, nous avons affiché les résultats dans les cas où  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 0.9$  et  $\alpha = 1$ . Les résultats obtenus montrent bien l'intérêt de l'utilisation de la méthode avec terme source mesure. Lorsque des ondes acoustiques sont générées de part et d'autre de l'interface, c'est-à-dire pour les cas où  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 0.9$ , la discontinuité de chaque variable due au couplage est parfaitement mince. Dans le chapitre 1, le couplage conservatif pour ce cas test avait révélé la présence de points quasi-stationnaires de part

au niveau de l'interface de couplage. Cet effet « couche limite » est ici annihilé.

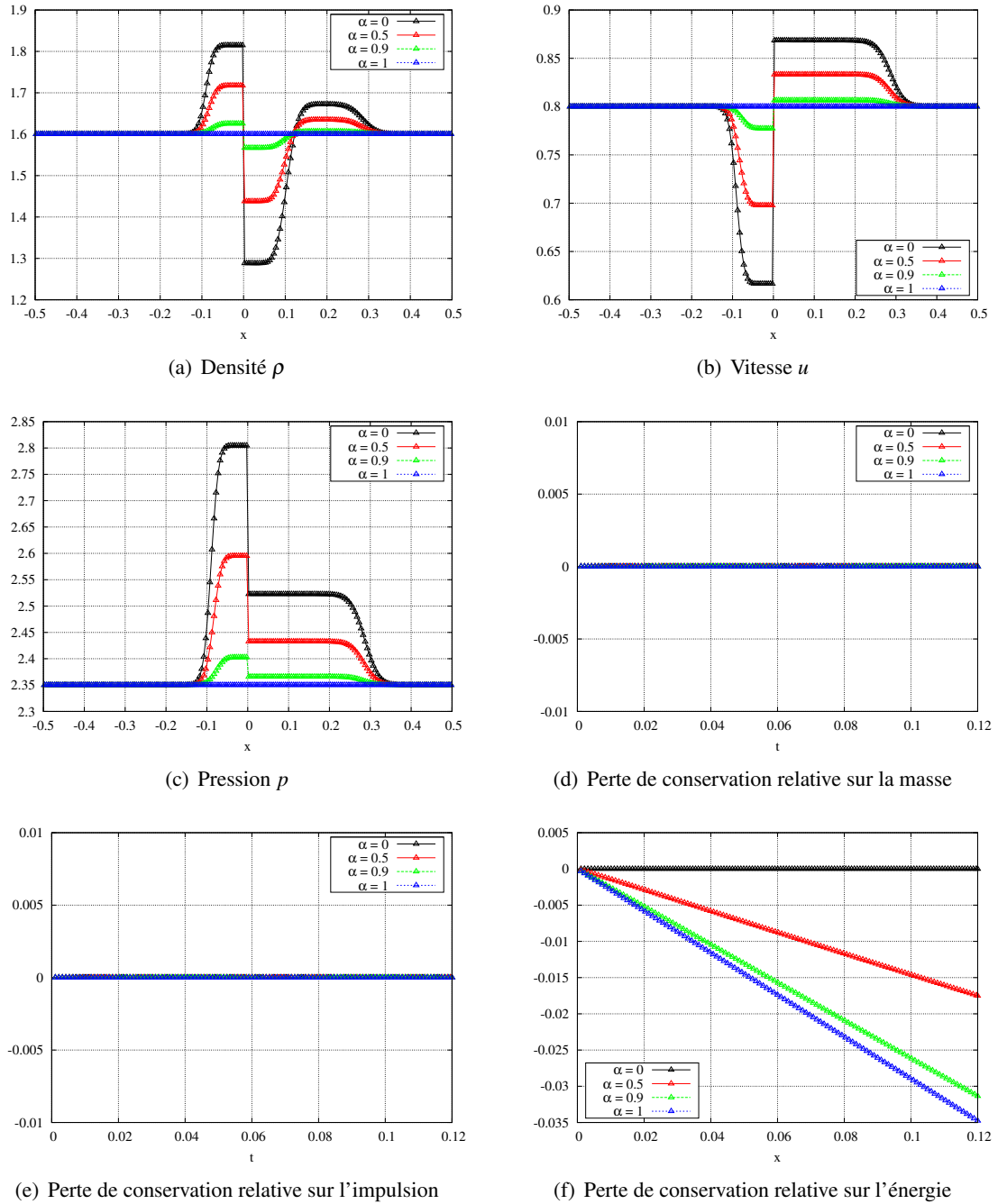


FIGURE 2.12 – Profil uniforme en pression : résultats numériques

---

## Calcul d'un terme source optimal

---

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié des nouvelles conditions de couplage basées sur l'ajout d'un terme source mesure localisé sur l'interface de couplage. Ce terme source, associé à un poids dépendant du temps noté  $\mathcal{M}(t)$ , a été supposé connu. L'objectif de ce nouveau chapitre est de proposer une méthode pour le calcul dynamique en temps d'un poids répondant à différents critères. Nous modéliserons ces critères à l'aide d'un problème simple d'optimisation sous contraintes, comme par exemple des pertes de conservation maximales sur certaines grandeurs physiques à ne pas dépasser. Nous reprenons ici la méthode par relaxation développée pour le cas des équations d'Euler isentropiques. L'avantage est de disposer de l'écriture complète du domaine d'admissibilité pour le poids  $\mathcal{M}_{pu}$  en quantité de mouvement. Différents types de contraintes seront imposés à titre d'exemples non restrictifs. Nous présenterons, pour chacun des cas, des tests numériques.

### 3.1 Optimisation sous contraintes

On reprend dans un premier temps le problème du couplage entre deux systèmes d'équations d'Euler isentropiques munis de fermetures différentes. Rappelons à ce titre que le domaine d'étude en espace  $x \in \mathbb{R}$  est séparé en deux sous-espaces  $x < 0$  et  $x > 0$ . Les conditions de couplage sur l'interface  $x = 0$  sont représentées par l'ajout d'un terme source mesure dans les équations. Le problème de couplage ainsi défini s'écrit de la façon suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.1)$$



où on a noté  $\mathbf{u} = (\rho, \rho u)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p(\tau, x))$ ,  $\mathcal{M}(t) = (0, \mathcal{M}_{\rho u}(t))$  et avec

$$p(\tau, x) = \begin{cases} p_L(\tau), & x < 0, \\ p_R(\tau), & x > 0, \end{cases}$$

où  $\tau = 1/\rho$  est le covolume du fluide. On renvoie le lecteur au début du chapitre précédent pour les différentes hypothèses sur les lois de pression ainsi que les propriétés du système d'Euler. Nous avons vu également dans les résultats numériques que la valeur du terme source mesure en quantité de mouvement  $\mathcal{M}_{\rho u}$  influence le comportement de l'écoulement (continuité de certaines grandeurs, conservation stricte). Cette valeur a été considérée comme connue puis calibrée et fixée à une constante dans les simulations numériques du chapitre précédent. Des deux méthodes numériques qui ont été proposées, nous nous concentrons ici sur l'approche par relaxation préservant les solutions équilibre. L'intérêt est d'avoir des formules explicites dans la résolution du problème de Riemann pour le système de relaxation ainsi qu'un domaine d'admissibilité convexe non vide pour le terme source. La méthode du calcul dynamique en temps d'un terme source optimal sera basée sur la minimisation d'une fonctionnelle convexe sur cet espace et ce, sous différentes contraintes à imposer. C'est pourquoi nous parlons dans la suite d'un problème d'optimisation sous contraintes. La nature et le nombre de ces contraintes ne sont pas limités et nous donnerons à titre d'exemple trois fonctionnelles correspondant à différentes contraintes.

### 3.1.1 Définition du problème

Le schéma par relaxation consiste à résoudre, à chaque itération et entre deux cellules successives, un problème de Riemann approché. Plus précisément, considérons la formulation discrète du problème de couplage (3.1) (voir section (2.1.2)), la mise à jour des inconnues au temps discret suivant est subdivisée en deux étapes : une première étape de prédiction consistant à utiliser un schéma de Godunov pour le système de relaxation (2.16), puis une seconde étape de correction où la projection sur la variété d'équilibre est réalisée. La première étape de prédiction prend en compte le terme source singulier représentant le couplage. On se focalise donc uniquement sur cette étape. Reprenant les notations de la discrétisation du problème de couplage du chapitre précédent, on considère au pas de temps  $t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , les deux états discrets  $\mathbf{u}_{-1/2}^n = \mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_{1/2}^n = \mathbf{u}_d$  de part et d'autre de l'interface de couplage et on résout le problème de Riemann pour le système de relaxation

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathcal{M}^e \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \pi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho \pi u + a^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u} \\ \mathcal{M}_{\rho \pi}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) \end{pmatrix},$$

et où les états  $\mathbf{U}_g = (\mathbf{u}_g, \rho_g \pi_g)$  et  $\mathbf{U}_d = (\mathbf{u}_d, \rho_d \pi_d)$  sont définis par la condition d'équilibre

$$\pi_g = p_L(\tau_g) \quad \text{et} \quad \pi_d = p_R(\tau_d). \quad (3.3)$$

Le poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  correspond au poids  $\mathcal{M}_{\rho u}(t)$  du problème (3.1) à l'itération courante. Concernant le poids  $\mathcal{M}_{\rho \pi}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u})$ , sa forme provient de la propriété du schéma à préserver les solutions équilibre. Plus précisément, en rappelant que le débit de masse à l'interface s'écrit dans ce cas

$$m^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + 2au^*}{a(\tau_g^* + \tau_d^*)}, \quad (3.4)$$

le poids préservant les solutions équilibres est alors donné par

$$\mathcal{M}_{\rho \pi}^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = m^e(\mathcal{I}_d - \mathcal{I}_g), \quad (3.5)$$

avec  $\mathcal{I} = \pi + a^2 \tau$ . Avec la condition d'équilibre (3.3), on a donc que  $\mathcal{I}_g = p_L(\tau_g) + a^2 \tau_g$  et  $\mathcal{I}_d = p_R(\tau_d) + a^2 \tau_d$ .

Nous avons vu, toujours dans le chapitre précédent, que la définition du poids équilibre  $\mathcal{M}_{\rho \pi}^e$  implique que la solution du problème de Riemann (3.2) n'est plus composée que de deux discontinuités de contact de vitesses  $u - a\tau$  et  $u + a\tau$  ainsi que de la discontinuité de contact stationnaire associée au couplage. Les états intermédiaires sont  $\mathbf{U}_g$ ,  $\mathbf{U}_-$ ,  $\mathbf{U}_+$  et  $\mathbf{U}_d$ . D'autre part le domaine d'admissibilité du poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$ , permettant de respecter la structure subsonique de la solution du problème de Riemann ainsi que la positivité des densités et énergies intermédiaires, s'écrit dans ce cas :

$$\mathcal{D}_{adm} = \{ \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathbb{R}; -a(\lambda_3^r(\mathbf{U}_d) - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)) < \mathcal{M}_{\rho u} + 2au^* < a(\lambda_3^r(\mathbf{U}_d) - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)) \}. \quad (3.6)$$

Notons que ce domaine peut-être écrit de manière équivalente sur le débit de masse  $m^e$  en utilisant la formule (3.4), c'est-à-dire

$$-a < m^e(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) < a. \quad (3.7)$$

L'idée du calcul d'un terme source optimal que nous proposons est de minimiser une fonctionnelle convexe donnée  $\mathcal{I}$  sur le domaine d'admissibilité. L'intérêt est que, ce dernier étant également convexe, l'existence et l'unicité d'un minimum sont alors immédiates. Cette fonctionnelle sera construite afin de respecter les contraintes sur l'écoulement que l'on veut imposer. On donne ainsi la définition suivante.

**Définition 3.1.** Soit la fonctionnelle convexe

$$\mathcal{J} : \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm} \mapsto \mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}) \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

donnée. On définit le Problème d'Optimisation sous Contraintes comme suit :

Trouver un terme source optimal  $\mathcal{M}_{\rho u}^o \in \mathcal{D}_{adm}$  tel que

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}^o) \leq \mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}), \forall \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm}. \quad (P.O.C)$$

Cette définition aboutit à la méthode suivante. Considérons le problème de couplage (3.1) résolu par le schéma par relaxation préservant les solutions équilibre. A chaque itération au niveau de l'interface de couplage, on résout le (P.O.C) via une méthode simple de recherche d'un minimum : le domaine d'admissibilité  $\mathcal{D}_{adm}$  étant une droite, on subdivise celle-ci en  $N$  points et on détermine ainsi, de manière approchée, le poids  $\mathcal{M}_{\rho u}^o$ . Une fois ce poids obtenu, on résout le problème de Riemann (3.2) muni du poids  $\mathcal{M}_{\rho u}^o$ .

Nous allons donner maintenant plusieurs exemples de fonctionnelles correspondant à différentes contraintes à respecter dans le problème de couplage. Evidemment, la définition d'une fonctionnelle ne se limite pas aux prochains paragraphes et la nature de celle-ci dépend des critères utilisateurs.

### 3.1.2 Contrainte sur le débit de masse (I)

Considérons le problème suivant. Une onde pure provenant du domaine à gauche de l'interface de couplage se déplace vers la droite puis impacte et traverse l'interface. On peut décider alors d'imposer dynamiquement en temps le critère suivant : le débit de masse à l'interface  $m^e$  doit être aussi proche que le débit de masse à l'interface  $m^{(L,L)}$  donné par la résolution du problème de Riemann entre les états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  et munie de la thermodynamique du domaine de gauche  $p_L$ . Notre objectif est d'observer (lorsqu'une onde majoritaire évolue dans le domaine) l'influence de la valeur du débit de masse de cette onde au niveau de l'interface de couplage. En termes mathématiques, on écrit la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}) = \kappa \left( \frac{m^e(\mathcal{M}_{\rho u}) - m^{(L,L)}}{m^{(L,L)}} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{M}_{\rho u}}{a^2 \tau_g} \right)^2, \quad \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm}. \quad (3.9)$$

Le paramètre indépendant du temps  $\kappa > 0$  permet de contrôler l'amplitude du premier terme. Le second terme doit être vu comme  $(\mathcal{M}_{\rho u} - 0)^2$  c'est-à-dire que l'on force le terme source à être le plus proche de zéro afin de minimiser les pertes de conservation. Cependant, lorsque  $\kappa \gg 0$ , ce dernier terme est négligeable et l'égalité  $m^e(\mathcal{M}_{\rho u}) = m^{(L,L)}$  est imposée à un reste près. Les dénominateurs des deux termes correspondent à un adimensionnement de la fonctionnelle.

**Remarque 3.1.** En toute rigueur, nous devrions écrire les dépendances en  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  des différents termes ainsi que pour la fonctionnelle. Par soucis de simplification des notations, on omet

volontairement cette dépendance.

Pour mieux comprendre maintenant ce choix de fonctionnelle, nous avons effectué une simulation numérique d'un 2-choc pur démarrant en  $x = -0.25$  se déplaçant vers la droite du domaine et impactant l'interface. Le (P.O.C) est résolu dynamiquement en temps : à chaque itération, le domaine d'admissibilité  $\mathcal{D}_{adm}$  est maillé en  $N = 10000$  points et on détermine, grâce à une recherche simple d'un minimum, le poids  $\mathcal{M}_{\rho u}^o$ . Ce dernier est ensuite utilisé dans l'étape de prédiction de la méthode par relaxation. Le nombre de cellules sur le domaine en espace est ici de 1000 et le temps final de la simulation est  $T = 0.3$ . Les conditions initiales du test sont les mêmes que pour le chapitre précédent. La simulation est réalisée pour trois valeurs différentes de  $\kappa$ . Sur ces trois figures, on a tracé respectivement le profil de la densité (a) en espace et les pertes de conservation relatives en masse (b) et en quantité de mouvement (c) au cours du temps.

Dans le cas de la figure 3.1, nous avons  $\kappa = 0$  c'est-à-dire que la fonctionnelle définie en (3.9) ne comprend plus que le second terme associé à la contrainte  $\mathcal{M}_{\rho u} = 0$ . En d'autres termes, cela revient à effectuer un couplage conservatif ou couplage par flux, déjà étudié précédemment. Les résultats de la figure 3.1 confirment cette attente : le profil de la densité est similaire à celui obtenu dans le chapitre 2 dans le cas où  $\mathcal{M}_{\rho u}$  avait été fixé comme étant nul. On observe ainsi au passage du 2-choc pur, une onde réfléchie vers la gauche du domaine. La discontinuité du profil de part et d'autre de l'interface reste parfaitement raide et ceci grâce à la propriété du schéma par relaxation, munie du poids équilibre  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$ , de préserver les solutions équilibres. La perte de conservation relative en masse reste nulle (au zéro machine près), ce qui était logiquement attendu. En revanche, s'agissant de la perte de conservation relative en quantité de mouvement, les valeurs relevées au cours du temps deviennent non nulles contrairement à nos prédictions : ceci est dû à la méthode de recherche du minimum de  $\mathcal{J}$  qui n'est pas exacte. Cependant, il est tout à fait envisageable de calculer le gradient de cette fonctionnelle pour d'obtenir une formule explicite de  $\mathcal{M}_{\rho u}^o$ . Pour des raisons de simplifications de notre exposé, nous choisissons de ne pas réaliser ces calculs.

La figure 3.2 nous montre les mêmes résultats mais dans le cas où  $\kappa = 5.9$ . Cette valeur n'a pas été trouvée grâce à une analyse mathématique de la fonctionnelle mais a été calibrée directement grâce aux simulations. Dans ce cas, on remarque que le profil sur la densité a été modifié par rapport aux résultats précédents. En particulier, l'onde qui était réfléchie dans le domaine de gauche dans le cas du couplage conservatif ci-dessus est annulée. L'intérêt de ce test ici est de montrer qu'il est tout à fait possible de mettre au point une fonctionnelle et d'en calibrer les paramètres pour obtenir une solution dite « intermédiaire » entre un couplage purement conservatif et un couplage non conservatif assurant la continuité d'un jeu de variables à l'interface.

Enfin, la figure 3.3 nous montre le même cas test mais pour  $\kappa = +\infty$ . En réalité, l'« infini » au sens de l'arithmétique informatique est fixé à une valeur finie très supérieure à 1 et de telle sorte que, dans la fonctionnelle (3.9), le second terme est négligeable devant le premier. Les résultats numériques nous montrent, pour la densité en particulier, que cela revient à réaliser un couplage

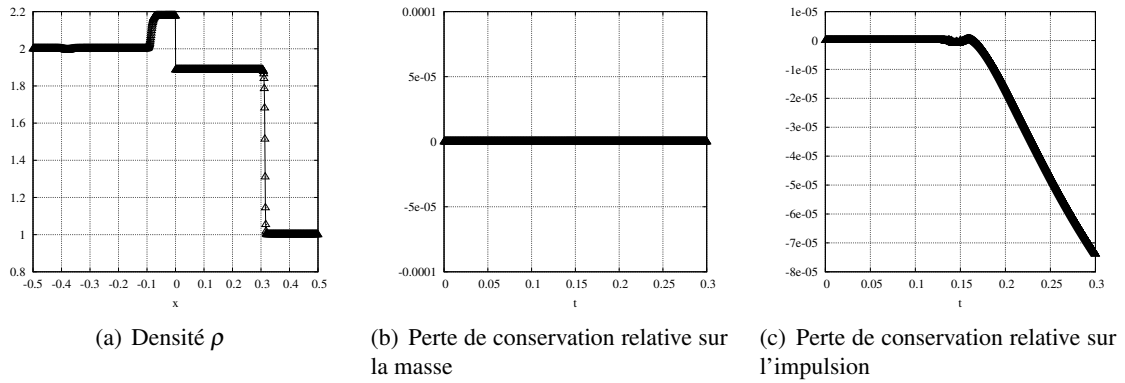


FIGURE 3.1 – Contraintes sur le débit de masse (I) pour un 2-choc pur :  $\kappa = 0$

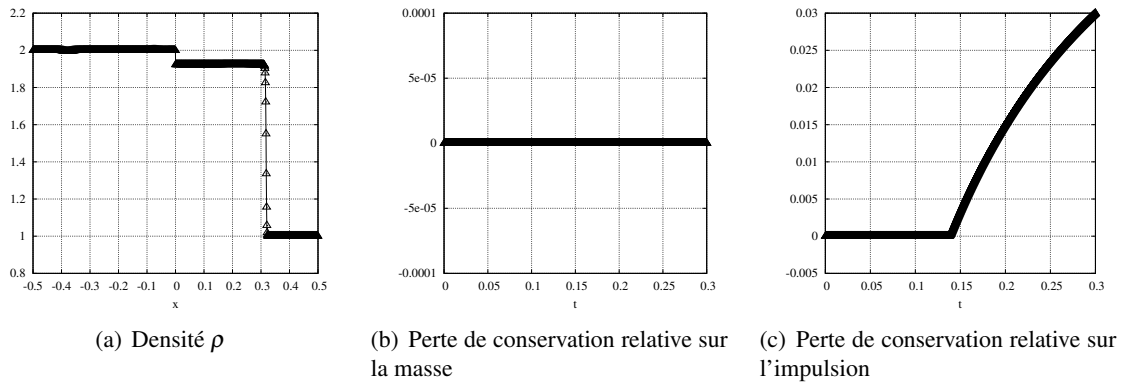


FIGURE 3.2 – Contraintes sur le débit de masse (I) pour un 2-choc pur :  $\kappa = 5.9$

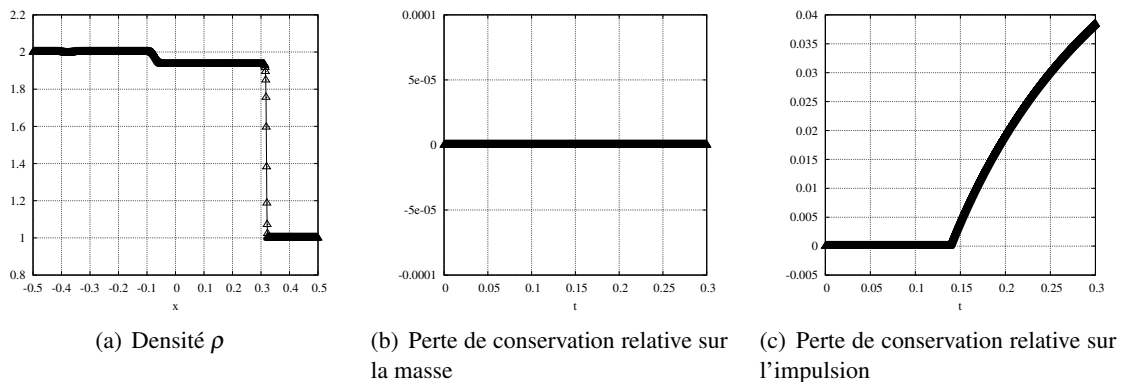


FIGURE 3.3 – Contraintes sur le débit de masse (I) pour un 2-choc pur :  $\kappa = \infty$

par état en variable  $(\rho, u)$  c'est-à-dire qu'on assure la continuité de la densité et de la vitesse de part et d'autre de l'interface de couplage.

### 3.1.3 Contrainte sur le débit de masse (II)

On considère maintenant le problème inverse. Une onde pure de vitesse négative provenant de la droite du domaine vient impacter puis traverser l'interface de couplage. En considérant la contrainte similaire sur le débit de masse du problème précédent, on écrit la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}) = \kappa \left( \frac{m^e(\mathcal{M}_{\rho u}) - m^{(R,R)}}{m^{(R,R)}} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{M}_{\rho u}}{a^2 \tau_d} \right)^2, \quad \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm}. \quad (3.10)$$

où  $m^{(R,R)}$  représente le débit de masse à l'interface dans la résolution du problème de Riemann entre les états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  et munie de la thermodynamique du domaine de droite  $p_R$ . Soit alors le cas test suivant : une 1-détente pure initialisée en  $x_0 = 0.25$  de vitesse négative évolue de la droite vers la gauche du domaine d'étude. Les conditions initiales sont, comme pour le cas du 2-choc pur, du type Riemann c'est-à-dire que l'on a :

$$\mathbf{u}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{u}_g & \text{si } x < x_0, \\ \mathbf{u}_d & \text{si } x > x_0, \end{cases}$$

où les états constants  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  correspondent aux valeurs données dans le tableau ci-dessous.

	$g$	$d$
$\rho$	1	0.9
$u$	0	0.13118746

Dans les mêmes conditions que le cas précédent où cette fois le temps final est  $T = 0.5$  on observe l'influence du paramètre  $\kappa$ .

La figure 3.4 présente les résultats pour  $\kappa = 0$  et montrent le même phénomène de réflexion d'onde que le cas test précédent, si ce n'est que l'onde réfléchie va vers la droite du domaine. L'erreur de conservation relative en quantité de mouvement n'est pas nulle pour la même raison qu'auparavant : notre méthode de minimisation de la fonctionnelle n'est pas exacte. Ensuite, les résultats de ce test sont présentés pour  $\kappa = 0.1$  sur la figure 3.5. Comme précédemment, une valeur intermédiaire pour  $\kappa$  a été calibrée en fonction de la simulation. L'impact sur l'écoulement est l'atténuation de l'onde réfléchie. Enfin, le cas  $\kappa = +\infty$  est également effectué et montré sur la figure 3.6. Cela revient toujours à faire un couplage par état en  $(\rho, u)$  comme le montrent les résultats.

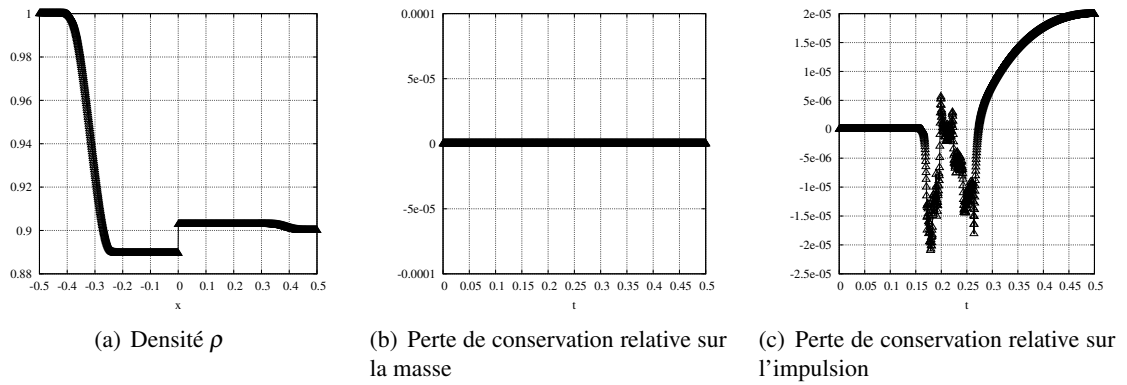


FIGURE 3.4 – Contraintes sur le débit de masse (II) pour une 1-détente pure pure :  $\kappa = 0$

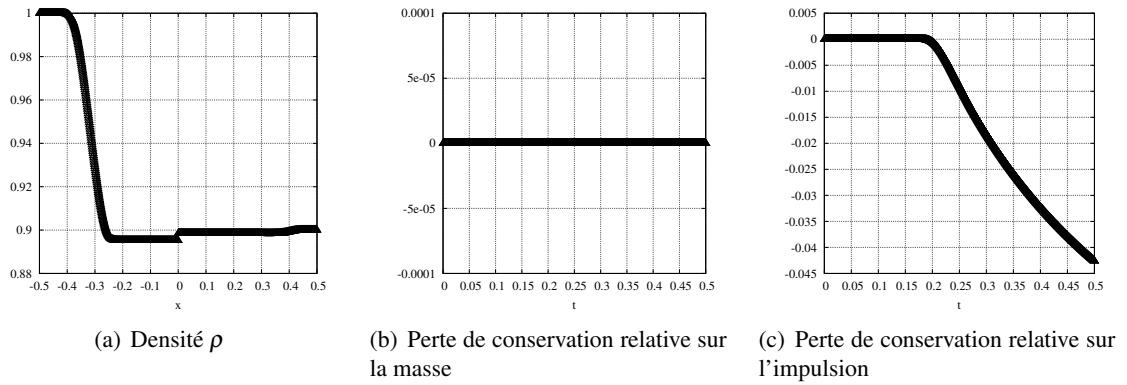


FIGURE 3.5 – Contraintes sur le débit de masse (II) pour une 1-détente pure :  $\kappa = 0.1$

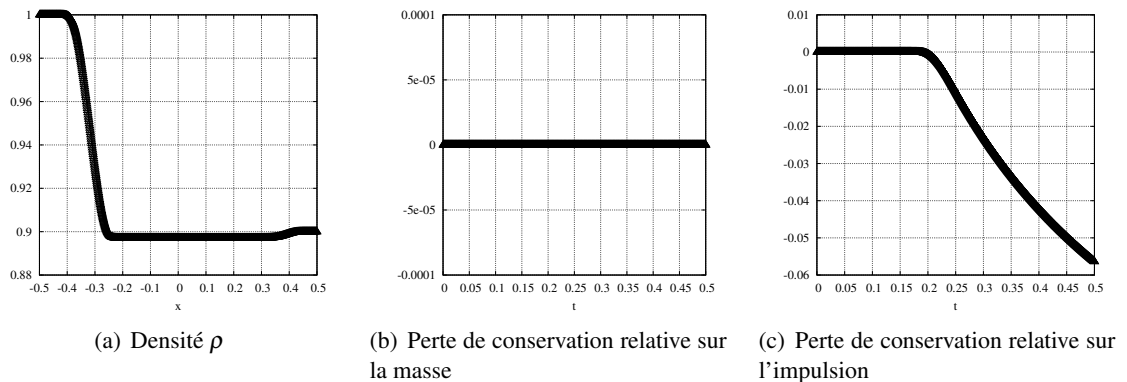


FIGURE 3.6 – Contraintes sur le débit de masse (II) pour une 1-détente pure :  $\kappa = \infty$

### 3.1.4 Contrainte de perte de conservation maximale

Les deux premières fonctionnelles que nous venons de construire dépendent fortement des données du problème. En effet, elles ont été définies en fonction du cas test considéré (en l'occurrence une onde majoritaire se propageant dans le domaine). Nous allons maintenant proposer un second type de fonctionnelle convexe indépendante des conditions initiales. Elle est basée sur des motivations portant sur la perte de conservation en quantité de mouvement. Étant donné le problème de couplage étudié, on cherche ici une fonctionnelle capable de restaurer dynamiquement un poids sur l'interface n'excédant pas, en valeur absolue, un poids positif donné dit chargement de tolérance  $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol}$ . Pour cela, on écrit la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}_{\rho u}) = \kappa \left[ \left( |\mathcal{M}_{\rho u}| - \mathcal{M}_{\rho u}^{tol} \right)_+ \right]^2 + \left( \mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho u}^T \right)^2, \quad \mathcal{M}_{\rho u} \in \mathcal{D}_{adm}, \quad (3.11)$$

où on a noté

$$a_+ = \frac{a + |a|}{2}.$$

Le paramètre  $\kappa \gg 1$  est cette fois donné et fixé. Le terme  $\mathcal{M}_{\rho u}^T$  correspond au poids obtenu par une condition de couplage par état classique en  $(\rho, u)$  (où la lettre  $T$  est pour « transmis »). Commentons maintenant l'écriture de cette fonctionnelle. Au cours de la résolution du (P.O.C), le premier terme est évalué. Si celui-ci est non nul, alors, le paramètre  $\kappa$  étant fixé à une valeur grande en comparaison des autres termes, la minimisation de ce premier terme dans la fonctionnelle sera forcée. Ceci équivaut à  $|\mathcal{M}_{\rho u}| = \mathcal{M}_{\rho u}^{tol}$  à un reste près. Dans le cas où le premier terme est nul, alors le terme source est inférieur à la valeur maximale et l'égalité  $\mathcal{M}_{\rho u} = \mathcal{M}_{\rho u}^T$  sera forcée.

Nous reprenons le cas test du 2-choc pur démarrant en  $x = -0.25$  se déplaçant vers la droite du domaine. Le test est réalisé pour trois valeurs différentes de  $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol}$  constantes en temps. La figure 3.7 présente les résultats dans le cas où  $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol} = 0.01$ . La densité (a), la valeur au cours des itérations de  $|\mathcal{M}_{\rho u}|$  (b) et la perte de conservation relative (c) y sont respectivement représentées. On remarque que, cette première valeur étant relativement proche de zéro, cela revient au couplage par flux à une perte de conservation relative près de l'ordre de  $10^{-4}$ . Notons également, sur la figure (b), que la valeur du poids appliquée n'excède jamais la valeur de tolérance. La figure 3.8 présente le cas où  $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol} = 0.275$ . On retrouve des résultats similaires au cas des fonctionnelles précédentes : l'onde réfléchie vers la gauche est annulée. Le poids  $\mathcal{M}_{\rho u}$  respecte également la condition que l'on s'était fixée : ne pas dépasser la valeur seuil 0.275. Enfin, la figure 3.9 correspond toujours à la même simulation mais pour  $\mathcal{M}_{\rho u}^{tol} = \mathcal{M}_{\rho u}^T$ , c'est-à-dire que le poids de tolérance est dynamique en temps et égal à une valeur correspondante au couplage par état. Le profil de densité est continu comme on l'attendait et la valeur de tolérance n'est jamais dépassée.

**Remarque 3.2.** *La valeur du poids de tolérance est ici calibrée grâce aux simulations numériques. Il est en outre tout à fait possible, dans le cas d'un cas test dimensionné, de déterminer les valeurs caractéristiques de ce poids à l'aide d'une table de pertes de charges.*



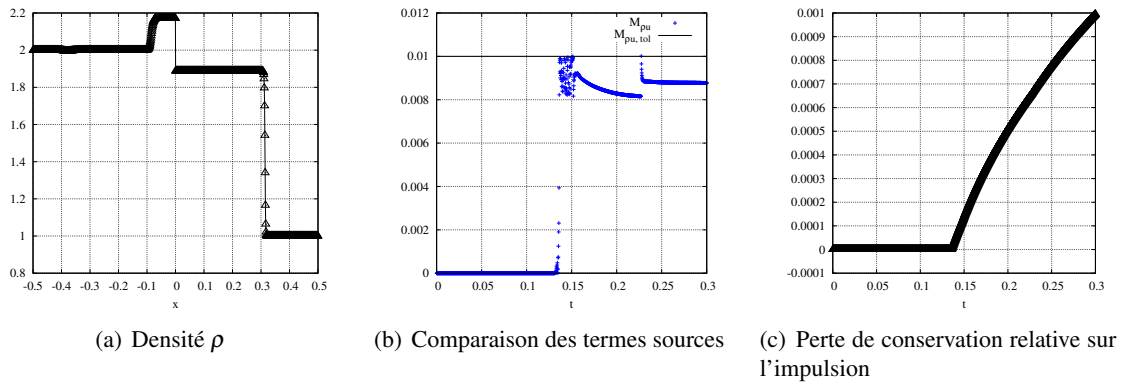


FIGURE 3.7 – Contrainte de perte de conservation maximale avec  $\mathcal{M}_{\rho u}^{\text{tol}} = 0.01$

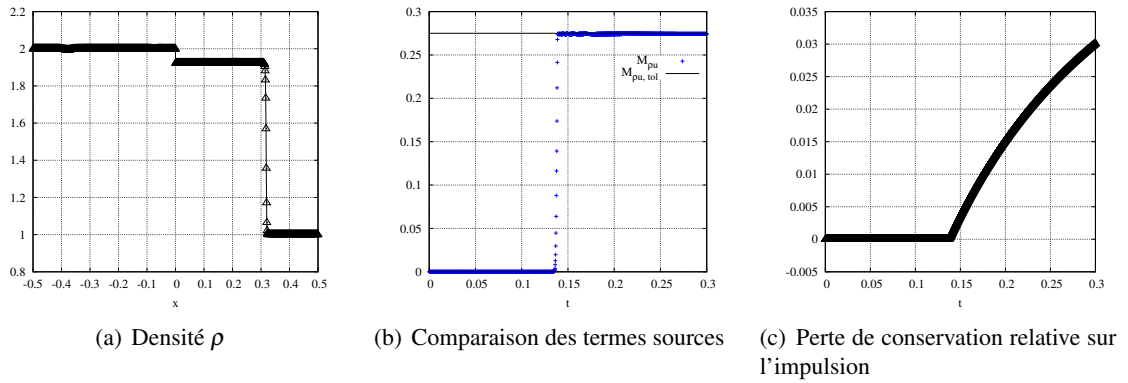


FIGURE 3.8 – Contrainte de perte de conservation maximale avec  $\mathcal{M}_{\rho u}^{\text{tol}} = 0.275$

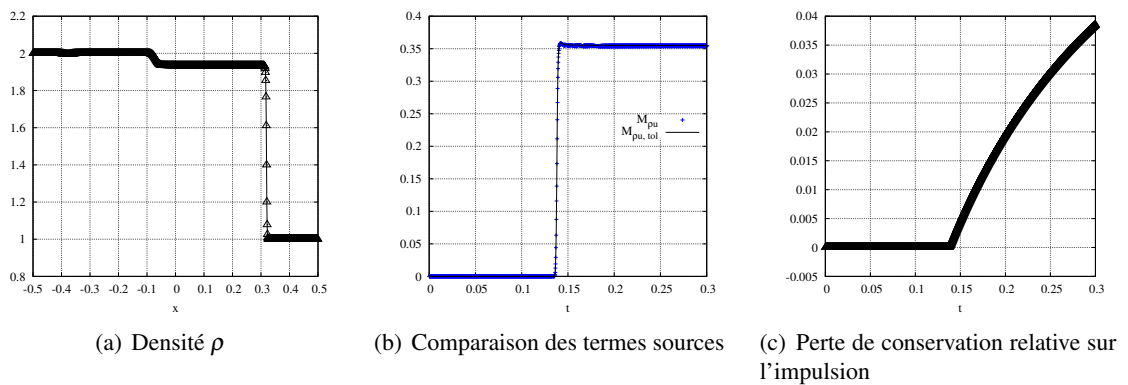


FIGURE 3.9 – Contrainte de perte de conservation maximale avec  $\mathcal{M}_{\rho u}^{\text{tol}} = \mathcal{M}_{\rho u}^T$

---

## Relaxation et approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions

---

Ce chapitre est dédié à l'étude d'une méthode par relaxation pour l'approximation numérique d'un modèle bifluide à deux pressions. Le travail, qui est ici présenté, a été amorcé au cours de la seconde année de ma thèse dans l'optique du couplage interfacial entre un modèle bifluide et un modèle de mélange. Ce cas de couplage est abordé dans le dernier chapitre et nous verrons qu'une des difficultés sera la prise en compte de termes sources raides dans les équations du système bifluide. On proposera alors de décentrer ces termes sources, c'est-à-dire qu'ils seront inclus dans le traitement de la partie convective du système. Nous devons donc pour cela disposer d'un schéma numérique, basé sur un solveur de Riemann approché, efficace et adapté pour réaliser ce décentrement.

Les modèles bifluides sont utilisés pour la simulation des écoulements diphasiques et la complexité des systèmes d'équations qui y sont associés rend leur approche numérique ardue : un nombre d'équations important, des non linéarités fortes dues aux termes de pression, la possibilité de résonance du système et enfin la présence de termes non conservatifs. L'approche par relaxation que nous utilisons est basée sur celle des chapitres précédents : les vraies non linéarités du système sont approchées par des champs linéairement dégénérés. Cependant, nous verrons que la présence des termes non conservatifs ne permet pas de donner des formules explicites pour la solution du problème de Riemann du système de relaxation. Nous proposerons donc quelques modifications dans la méthode, basées d'une part sur les considérations faites dans le chapitre 2 et, d'autre part, sur une estimation *a priori* des termes non conservatifs.

## 4.1 Le modèle bifluide à deux pressions

Les modèles bifluides à deux pressions connaissent un intérêt croissant ces dernières années pour la simulation des écoulements diphasiques. La première formulation se retrouve dans [17] et une première étude mathématique dans [16]. Citons également, entre autres, les études de [3], [33], [45] ainsi que [48] et [49]. Il n'existe pas de formulation unique pour les modèles bifluides. Dans le cas d'un écoulement à deux phases non miscibles, ils sont dérivés, en général, *via* des moyennes statistiques des équations locales instantanées (voir [17] pour la dérivation d'un modèle bifluide à deux pressions et [18] pour un modèle bifluide à une pression). Le formalisme bifluide considère donc à une échelle mésoscopique la dynamique propre de chaque phase grâce à des équations d'évolution écrites pour chacune d'elle. L'originalité des modèles à deux pressions est de considérer une loi de pression par phase. Les deux phases en présence sont alors en déséquilibre mécanique (contrairement au modèle à une pression) et le système est fermé par une équation d'évolution supplémentaire sur le taux de présence d'une des phases. L'autre particularité est que, en plus d'une partie convective classique, le système d'équations fait intervenir des termes d'échange entre les phases. Ces termes n'ont pas de modélisation unique : il existe ainsi différentes formulations des modèles bifluides.

Nous considérons ici un écoulement diphasique dont les deux phases sont indicées par les numéros 1 et 2. Les fractions (ou taux de présence moyens) associées sont notées  $\alpha_k$ , avec  $k = 1, 2$ . Ces deux variables vérifient la condition de saturation suivante :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad (4.1)$$

qui constitue une première fermeture algébrique pour le système d'équations du modèle bifluide à deux pressions. Dans ce travail, nous nous plaçons dans un cadre monodimensionnel. La densité de la phase  $k$  est notée  $\rho_k$  et la vitesse  $u_k$ . L'écoulement est considéré comme isentropique : les lois d'état s'écrivent  $p_k \equiv p_k(\rho_k)$  et on suppose que pour tout  $\rho_k > 0$ ,  $k = 1, 2$ , on a  $p_k(\rho_k) > 0$ ,  $p'_k(\rho_k) = c_k^2 > 0$ , où  $c_k \equiv c_k(\rho_k)$  est la vitesse du son dans la phase  $k$ , et  $p''_k(\rho_k) > 0$ . Le modèle consiste à écrire, pour chaque phase  $k = 1, 2$ , une équation d'évolution de la masse partielle  $\alpha_k \rho_k$  et une équation d'évolution de l'impulsion partielle  $\alpha_k \rho_k u_k$ . Ces équations (aux nombre de quatre) sont complétées par une équation de transport sur les fractions phasiques. La partie convective associée au système bifluide s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_I \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_I \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_I \partial_x \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  et où  $u_I$  et  $p_I$  sont respectivement la vitesse interfaciale et la pression interfaciale

dans le fluide et dépendent des autres inconnues. La première équation exprime le fait que les profils de taux de présence moyens sont advectés à la vitesse  $u_I$ . Notons en effet que cette équation de transport sur  $\alpha_1$  peut être écrite de manière équivalente sur la fraction  $\alpha_2$  en raison de la condition de saturation (4.1). D'autre part, les termes non conservatifs  $p_I \partial_x \alpha_1$ , qui représentent le transfert de quantité de mouvement entre les phases, couplent les deux phases entre elles au sens où, si ceux-ci s'annulent, c'est-à-dire si  $\partial_x \alpha_1 = 0$ , alors le système se réduit à deux systèmes d'Euler indépendants puisqu'on a dans ce cas  $\partial_t \alpha_1 = 0$  et donc  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \text{cste}$ .

De nombreuses fermetures pour les termes de transfert interfacial existent. Les auteurs dans [3] proposent de prendre la vitesse interfaciale égale à la vitesse du centre de masse et la pression interfaciale comme la pression du mélange diphasique. Citons également la thèse [85] où la vitesse et la pression interfaciales sont définies comme une combinaison convexe respectivement des vitesses et pressions des deux phases. D'autres formulations sont possibles mais nous ne les détaillons pas ici. Pour une étude très complète du système, on renvoie le lecteur à la thèse [60] qui présente des résultats de simulations numériques dans le cas de plusieurs fermetures. Dans ce chapitre, nous considérons la forme des termes de transfert interfacial correspondante au modèle (non isentropique) de *Baer-Nunziato* [17]. Plus précisément, vitesse et pression interfaciales sont données par les égalités suivantes :

$$u_I := u_2, \quad (4.2)$$

$$p_I := p_1. \quad (4.3)$$

Dans la modélisation de Baer-Nunziato, les deux phases 1 et 2 sont respectivement le gaz et les grains solides. L'écoulement est donc composé d'une phase continue (1) et une phase dispersée (2). Dans le contexte de notre étude, les écoulements diphasiques au sein d'un réacteur nucléaire à eau sous pression, la topologie d'écoulement que nous considérons est similaire : l'eau est présente majoritairement et la vapeur est caractérisée par des inclusions<sup>1</sup> assimilables à des grains au sein de la phase continue. Il est ainsi valable, d'un point de vue purement physique, de considérer la vitesse de l'interface entre les deux phases comme étant celle de la phase dispersée et de même la pression d'interface comme la pression de la phase continue. Notons de plus que ce choix précis de fermetures, dans le cas du modèle avec énergies de Baer-Nunziato, entraîne l'existence d'un couple entropie-flux d'entropie pour le système. La notion de modèle bifluide isentropique a cependant un sens, comme nous le verrons plus loin.

**Remarque 4.1.** *Dans le cadre plus général d'un écoulement non isentropique, les auteurs de [33] et [45] proposent comme modélisation des termes de transfert interfacial :*

$$\begin{aligned} u_I &= \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \\ p_I &= \mu(\beta) p_1 + (1 - \mu(\beta)) p_2, \end{aligned}$$

---

1. Le terme inclusions fait référence à des bulles ayant différentes formes.

où  $\beta \in [0, 1]$  et  $\mu(\beta) \in [0, 1]$ . Le coefficient  $\mu$  dépend de plus des températures des deux phases, plus précisément il vérifie

$$\mu = \frac{T_2(1 - \beta)}{T_1\beta + T_2(1 - \beta)},$$

où on a noté  $T_k$  la température de la phase  $k$ . Ce choix permet d'assurer l'existence d'un couple entropie-flux d'entropie pour le système et entraîne de plus la linéaire dégénérescence du champ associé au transport du taux de vide  $\alpha_1$ . Remarquons que notre choix peut découler de cette fermeture. En effet, si on suppose que, dans le cas d'un écoulement isentropique par phase, on a  $T_1 = T_2$  alors le fait de poser  $\beta = 0$  entraîne que  $\mu(\beta) = 1$  et par suite  $u_I = u_2$  et  $p_I = p_1$ .

On note dans la suite  $\tau_k = \frac{1}{\rho_k}$  le covolume de la phase  $k$  puis  $e_k$ ,  $E_k$  et  $h_k$  respectivement l'énergie interne, l'énergie spécifique et l'enthalpie de la phase  $k$ . Ces trois dernières variables sont données par les relations suivantes :

$$e'_k(\rho_k) = \frac{p_k(\rho_k)}{\rho_k^2}, \quad E_k(\rho_k) = \frac{u_k^2}{2} + e_k, \quad h_k(\rho_k) = e_k(\rho_k) + \frac{p_k(\rho_k)}{\rho_k}, \quad k = 1, 2. \quad (4.4)$$

Le système peut maintenant se réécrire sous la forme contractée

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.5)$$

où on a noté le vecteur des inconnues

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ \alpha_k \rho_k u_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Ce dernier est défini sur l'espace des états

$$\Omega = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^5; \alpha_1 \in (0, 1), \rho_k > 0, k = 1, 2\}.$$

Enfin, les fonctions  $\mathbf{f} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^5$  et  $\mathbf{c} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5$  s'écrivent

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_2 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ -p_1 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ p_1 \partial_x \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.1.1 Considérations analytiques

Dans cette section, nous rappelons quelques propriétés du système bifluide à deux pressions déjà établies dans la littérature. Nous commençons par énoncer la proposition suivante.

**Proposition 4.1.** *Le système (4.5) admet les cinq valeurs propres réelles suivantes :*

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= u_2, \\ \lambda_1 &= u_1 - c_1, \quad \lambda_2 = u_1 + c_1, \\ \lambda_3 &= u_2 - c_2, \quad \lambda_4 = u_2 + c_2,\end{aligned}$$

et est hyperbolique sur l'espace des états  $\Omega$  si et seulement si  $\lambda_0 \neq \lambda_p$  pour  $p = 1, 2$ . De plus, les champs associés aux valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,4}$  sont vraiment non linéaires et le champ associé à la valeur propre  $\lambda_0$  est linéairement dégénéré.

*Démonstration.* Ce résultat a été démontré dans [45], [85] pour le cas plus général d'un écoulement non isentropique. On peut tout d'abord réécrire le problème dans sa forme quasi-linéaire, soit :

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

et quelques rapides calculs nous donnent

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \chi_1 & c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\chi_2 & 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix}$$

où on a noté  $\chi_k = (p_k - p_1) - \rho_k c_k^2$  pour  $k = 1, 2$ . La diagonalisation de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  nous donne les valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=0,\dots,4}$ . Si on suppose que  $\lambda_0 \neq \lambda_p$ ,  $p = 1, 2$ , alors la matrice associée aux vecteurs propres à droite est inversible et est donnée par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1 u_2}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)} & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\frac{\chi_2}{(\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_0)} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{\chi_2 u_2}{(\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_0)} & 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat ainsi que la nature de chaque champ proviennent de calculs classiques que nous ne détaillons pas ici.  $\square$

Notons que la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  n'est plus inversible lorsque  $\lambda_0 = \lambda_p$ ,  $p = 1, 2$ . Le système est faiblement hyperbolique. Ce phénomène est nommé *résonance*. Dans nos applications, nous nous intéressons aux écoulements subsoniques de telle sorte que nous assurons toujours  $u_1 \neq u_2 \pm c_2$ . La résonance entre valeurs propres ne sera donc pas ici étudiée. Dans la suite de ce chapitre, nous appellerons une onde associée au 0-champ une «  $\lambda_0$ -discontinuité de contact » ou encore une *onde de couplage*.

La proposition suivante donne l'existence d'un couple entropie-flux d'entropie pour le système bifluide. Ce résultat a déjà été démontré dans [45] mais nous sera utile par la suite.

**Proposition 4.2.** Notons  $\eta(\mathbf{u}) = \sum_k \alpha_k \rho_k E_k$  et  $G(\mathbf{u}) = \sum_k (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k u_k)$ . Le couple  $(\eta, G)$  est un couple entropie-flux d'entropie pour le système (4.5).

*Démonstration.* Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse d'un écoulement régulier. En multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase  $k$  par  $u_k$ , on peut écrire

$$\partial_t \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} \right) + \partial_x \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} u_k \right) + u_k \partial_x (\alpha_k p_k) - u_k p_k \partial_x \alpha_k = 0. \quad (4.6)$$

Cette équation fait apparaître la variation temporelle de l'énergie cinétique  $\alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2}$  de la phase  $k$ . Il s'agit maintenant de déterminer l'équation vérifiée par le terme  $\alpha_k \rho_k e_k$ . Le deuxième principe de la thermodynamique pour la phase  $k$  nous dit que

$$T_k \mathcal{D} s_k = \mathcal{D} e_k + p_k \mathcal{D} \tau_k,$$

avec  $\mathcal{D}$  un opérateur différentiel quelconque. L'écoulement étant isentropique, le terme de gauche dans l'équation ci-dessus s'annule et on a

$$\mathcal{D} e_k = -p_k \mathcal{D} \tau_k.$$

En posant  $\mathcal{D} = (\partial_t + u_k \partial_x)$  il est ainsi trivial d'écrire

$$\partial_t e_k + u_k \partial_x e_k = -p_k (\partial_t \tau_k + u_k \partial_x \tau_k). \quad (4.7)$$

Recherchons maintenant l'équation vérifiée par  $\tau_k$ . En développant l'équation de conservation de la masse pour la phase  $k$ , on écrit

$$\alpha_k (\partial_t \rho_k + \partial_x (\rho_k u_k)) + \rho_k (\partial_t \alpha_k + u_k \partial_x \alpha_k) = 0.$$

Le terme  $\partial_t \alpha_k$  est remplacé par le terme de dérivée en espace en utilisant l'équation de transport sur  $\alpha_k$ . Après division par  $\alpha_k$  on obtient donc

$$\partial_t \rho_k + u_k \partial_x \rho_k + \rho_k \partial_x u_k + \frac{\rho_k}{\alpha_k} (u_k - u_2) \partial_x \alpha_k = 0.$$

On multiplie ensuite par  $-\frac{1}{\rho_k^2}$  :

$$\partial_t \tau_k + u_k \partial_x \tau_k - \tau_k \partial_x u_k - \frac{1}{\alpha_k \rho_k} (u_k - u_2) \partial_x \alpha_k = 0, \quad (4.8)$$

puis par  $-p_k$  et grâce à l'équation (4.7) nous avons

$$\partial_t e_k + u_k \partial_x e_k + p_k \tau_k \partial_x u_k + \frac{p_k}{\alpha_k \rho_k} (u_k - u_2) \partial_x \alpha_k = 0.$$

Il est donc équivalent, toujours sous l'hypothèse d'un écoulement régulier et en multipliant dans la dernière équation par  $\alpha_k \rho_k$ , d'écrire

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k e_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k e_k u_k) + \alpha_k p_k \partial_x u_k + p_k (u_k - u_2) \partial_x \alpha_k = 0. \quad (4.9)$$

On somme les équations (4.6) et (4.9) et on obtient :

$$\partial_t \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} + \alpha_k \rho_k e_k \right) + \partial_x \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} + \alpha_k \rho_k e_k u_k + \alpha_k p_k \right) u_k + (p_k (u_k - u_2) - u_k p_1) \partial_x \alpha_k = 0.$$

En sommant maintenant cette dernière équation sur  $k = 1, 2$ , on remarque que le terme non conservatif résultant de cette somme s'annule et donc nous avons finalement

$$\partial_t \eta + \partial_x G = 0.$$

Le couple  $(\eta, G)$  est donc bien un couple entropie-flux d'entropie pour le système (4.5).  $\square$

#### 4.1.2 Étude du problème de Riemann

On considère maintenant le problème de Riemann pour le modèle bifluide à deux pressions isentropique par phase (4.5). Soient deux états constants  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  appartenant à l'espace des états  $\Omega$ . Le problème de Riemann s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_g, & x < 0, \\ \mathbf{u}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.10)$$

La proposition 4.1 donne les valeurs propres du système ainsi que la nature des champs associés. Nous pouvons donc en déduire la structure générale du problème de Riemann (4.10). Dans le cas d'un écoulement subsonique, celle-ci est représentée sur la figure 4.1. La solution est composée d'une part de deux ondes acoustiques de vitesses  $u_k - c_k$ ,  $k = 1, 2$ , qui peuvent être des chocs ou des détente pour chacune des phases. Ces ondes séparent les deux états constants  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_-$ . D'autre part, la  $\lambda_0$ -discontinuité de contact ou onde de couplage, qui exprime le transport de la fraction  $\alpha_1$  (et donc également  $\alpha_2$ ), sépare les états  $\mathbf{u}_-$  et  $\mathbf{u}_+$ . Enfin, les ondes acoustiques de vitesses  $u_k + c_k$ ,  $k = 1, 2$ , sont associées à des champs vraiment non linéaires et sont donc aussi soit des chocs, soit des détente. Elles séparent les états intermédiaires  $\mathbf{u}_+$  et  $\mathbf{u}_d$ . De part et d'autre de l'onde de couplage, le taux de présence est constant et prend à gauche et à droite les valeurs respectives  $\alpha_{1g}$  et  $\alpha_{1d}$ . Dans le cas où  $\alpha_1$  est constant, les produits non conservatifs présents dans le système



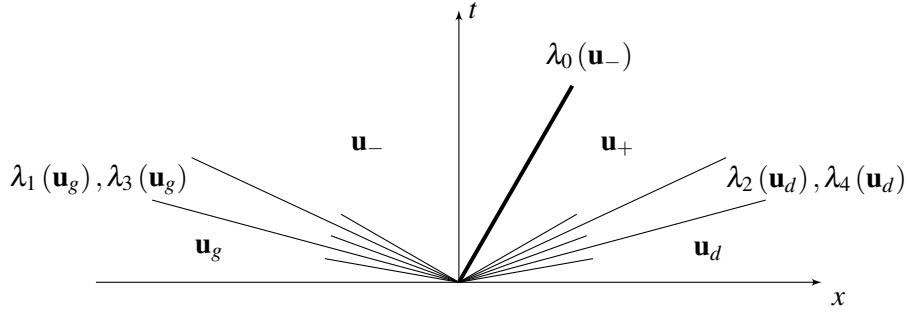


FIGURE 4.1 – Structure générale de la solution du problème de Riemann (4.10) dans le cas d'un écoulement subsonique

d'équations s'annulent. Le modèle bifluide à deux pressions se réduit donc, en dehors de cette discontinuité de contact, à deux systèmes d'Euler indépendants pour chaque phase c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_k + \partial_x(\rho_k u_k) = 0, \\ \partial_t(\rho_k u_k) + \partial_x(\rho_k u_k^2 + p_k) = 0, \quad k = 1, 2, \end{cases}$$

dès que  $\frac{x}{t} < \lambda_0(\mathbf{u})$  ou  $\frac{x}{t} > \lambda_0(\mathbf{u})$ . La résolution du problème de Riemann dans le cas où  $\alpha_{1g} = \alpha_{1d}$  est donc triviale. Le cas où  $\alpha_{1g} \neq \alpha_{1d}$  reste encore non résolu de manière explicite. Nous voyons que les difficultés sont liées à la présence de champs vraiment non linéaires d'une part, de contributions non conservatives d'autre part (à cela s'ajoute le cas de la résonance mais nous ne le traitons pas).

Le problème de Riemann pour le modèle bifluide à deux pressions a déjà fait l'objet de nombreuses études : dans [84], par exemple, les auteurs proposent un algorithme itératif pour déterminer une solution approchée et mettent au point un solveur de type Godunov d'ordre un puis d'ordre supérieur. Pour l'instant, au lieu de tenter de résoudre le problème de Riemann de manière directe, nous allons considérer dans cette section les conditions de connexions entre deux états constants,  $\mathbf{u}_-$  et  $\mathbf{u}_+$ , par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact. Nous allons utiliser pour cela les relations de saut de Rankine-Hugoniot. Dans un premier temps, notons  $u_2 := u_{2-} = u_{2+}$  la vitesse de l'onde de couplage. Comme les produits non conservatifs agissent uniquement sur la caractéristique associée à cette onde, le système d'équations (4.5) du modèle bifluide peut se réécrire :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) = \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) = -\mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) \delta_{x-u_2 t}, \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $\mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$  représente la contribution non conservative en quantité de mouvement de la phase

1 et, au signe près, de la phase 2. La fonction  $\delta_{x-u_2t}$  est la mesure de Dirac en  $x - u_2t$ .

**Remarque 4.2.** Dans le cas de solutions régulières du système (4.5), l'équation sur l'impulsion de la phase 1 peut s'écrire :

$$\alpha_1 \rho_1 (\partial_t u_1 + u_1 \partial_x u_1) + \partial_x (\alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = 0,$$

soit après division par  $\alpha_1 \rho_1$  :

$$\partial_t u_1 + \partial_x \frac{u_1^2}{2} + \tau_1 \partial_x p_1 = 0. \quad (4.12)$$

Reprenons le second principe de la thermodynamique pour la phase  $k$  :

$$T_k \mathcal{D} s_k = \mathcal{D} e_k + p_k \mathcal{D} \tau_k$$

et posons  $\mathcal{D} = \partial_x$ . On a donc l'équation suivante

$$\partial_x e_1 + p_1 \partial_x \tau_1 = 0.$$

On additionne cette dernière relation à (4.12) pour obtenir

$$\partial_t u_1 + \partial_x \left( \frac{u_1^2}{2} + e_1 \right) + \tau_1 \partial_x p_1 + p_1 \partial_x \tau_1 = 0,$$

soit au final l'équation de conservation suivante :

$$\partial_t u_1 + \partial_x \left( \frac{u_1^2}{2} + h_1 \right) = 0. \quad (4.13)$$

On est maintenant en mesure de formuler la définition suivante.

**Définition 4.1.** Considérons deux états  $\mathbf{u}_-$  et  $\mathbf{u}_+$  constants appartenant à  $\Omega$ . Ces états sont dits joints par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact admissible si et seulement si

$$\begin{cases} u_2 := u_{2-} = u_{2+}, & (4.14a) \\ m := \alpha_{1-} \rho_{1-} (u_{1-} - u_2) = \alpha_{1+} \rho_{1+} (u_{1+} - u_2), & (4.14b) \\ m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1+} p_{1+} (\rho_{1+}) - \alpha_{1-} p_{1-} (\rho_{1-})) = \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+), & (4.14c) \\ \alpha_{2+} p_2 (\rho_{2+}) - \alpha_{2-} p_2 (\rho_{2-}) = -\mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+), & (4.14d) \\ \frac{m^2}{2\alpha_{1-}^2 \rho_{1-}^2} + h(\rho_{1-}) = \frac{m^2}{2\alpha_{1+}^2 \rho_{1+}^2} + h(\rho_{1+}). & (4.14e) \end{cases}$$

Cette définition est établie en considérant dans un premier temps la continuité de la vitesse d'une onde de discontinuité de contact de part et d'autre de sa caractéristique (première relation (4.14a)). Les trois relations de saut (4.14b), (4.14c) et (4.14d) qui suivent proviennent de l'application simple des relations de Rankine-Hugoniot, de part et d'autre la  $\lambda_0$ -discontinuité de contact, sur les équations du système bifluide dans la nouvelle forme (4.11). Enfin, la dernière relation

(4.14e) est obtenue également grâce aux relations de Rankine-Hugoniot, cette fois appliquées sur l'équation (4.13).

Maintenant munis de cette définition, nous cherchons à savoir si, étant donné un état  $\mathbf{u}_- \in \Omega$ , il existe un état  $\mathbf{u} \in \Omega$  tel que les relations (4.14) soient vérifiées avec  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+$ . Nous proposons ici une démarche quelque peu différente : se donnant un état  $\mathbf{u}_- \in \Omega$  et une fraction  $\alpha_{1+} \in (0, 1)$ , on se demande s'il est possible de trouver un état  $\mathbf{u} = (\alpha_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^t \in \Omega$  de tel sorte que  $\alpha_1 = \alpha_{1+}$  et que les relations (4.14) soient vérifiées avec  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+$ . Nous donnons dans un premier temps le lemme suivant.

**Lemme 4.1.** *Soit  $\mathbf{u}_- \in \Omega$  un état constant et  $\alpha_1$  une fraction constante dans  $(0, 1)$ . Supposons que la loi de pression  $p_1$  est telle que*

$$\begin{cases} p_1(\rho_1) > 0, p_1'(\rho_1) > 0, p_1''(\rho_1) > 0 \text{ pour tout } \rho_1 > 0, \\ \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} p_1(\rho_1) = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} p_1'(\rho_1) = 0, \quad \lim_{\rho_1 \rightarrow +\infty} p_1(\rho_1) = \lim_{\rho_1 \rightarrow +\infty} p_1'(\rho_1) = +\infty. \end{cases} \quad (4.15)$$

Alors nous avons les résultats suivants :

(i) la fonction  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  définie comme

$$f(\rho_1) = \frac{m^2}{2\alpha_1^2 \rho_1^2} + h_1(\rho_1)$$

est telle qu'il existe un unique point sonique  $\rho_1^s \geq 0$  vérifiant

$$\left( \frac{m}{\alpha_1 \rho_1^s c_1(\rho_1^s)} \right)^2 = 1,$$

et est strictement décroissante (respectivement croissante) dans  $(0, \rho_1^s]$  (resp.  $[\rho_1^s, +\infty)$ );

(ii) les espaces  $\mathcal{S}^{sub}$  et  $\mathcal{S}^{sup}$  définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_1) &= \left\{ \rho_1 > 0, \quad \text{tel que} \quad \left( \frac{m}{\alpha_1 \rho_1 c_1(\rho_1)} \right)^2 < 1 \right\}, \\ \mathcal{S}^{sup}(\mathbf{u}_-, \alpha_1) &= \left\{ \rho_1 > 0, \quad \text{tel que} \quad \left( \frac{m}{\alpha_1 \rho_1 c_1(\rho_1)} \right)^2 > 1 \right\}, \end{aligned}$$

où  $m = \alpha_1 - \rho_{1-}(u_{1-} - u_{2-})$ , sont donnés de façon équivalente :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_1) &= \{ \rho_1 > 0, \quad \text{tel que} \quad \rho_1 > \rho_1^s \}, \\ \mathcal{S}^{sup}(\mathbf{u}_-, \alpha_1) &= \{ \rho_1 > 0, \quad \text{tel que} \quad \rho_1 < \rho_1^s \}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Tout d'abord, en reprenant la définition de l'enthalpie (4.4), on a

$$f'(\rho_1) = \frac{\alpha_1^2 \rho_1^2 p_1'(\rho_1) - m^2}{\alpha_1^2 \rho_1^3}.$$

Le signe de  $f'(\rho_1)$  est ainsi donné par le signe de la fonction  $\rho_1 \mapsto \alpha_1^2 \rho_1^2 p_1'(\rho_1) - m^2 = \alpha_1^2 \rho_1^2 c_1^2(\rho_1) - m^2$ . Il est alors immédiat, par les conditions (4.15), que cette fonction est négative (respectivement positive) sur  $(0, \rho_1^s]$  (resp.  $[\rho_1^s, \infty)$ ), où  $\rho_1^s > 0$  est l'unique point sonique où la fonction s'annule. Ce point est défini par

$$\left( \frac{m}{\alpha_1 \rho_1^s c_1(\rho_1^s)} \right)^2 = 1.$$

Par suite, pour tout  $\rho_1 > 0$ , l'inégalité  $\rho_1 > \rho_1^s$  (respectivement  $\rho_1 < \rho_1^s$ ) est équivalente à l'inégalité  $\alpha_1^2 \rho_1^2 c_1^2(\rho_1) > m^2$  (resp.  $\alpha_1^2 \rho_1^2 c_1^2(\rho_1) < m^2$ ).  $\square$

Les adjectif *subsonique*, *sonique* and *supersonique* dans ce lemme proviennent du fait que, pour tout  $\rho_1 > 0$ , la grandeur

$$\frac{m}{\alpha_1 \rho_1 c_1(\rho_1)}$$

peut être vu comme le rapport entre la vitesse de la phase 1 dans le référentiel de l'onde de couplage (de vitesse  $u_2$ ) et la vitesse du son  $c_1$ . On appelle également cette grandeur le nombre de *Mach relatif*.

**Théorème 4.1.** *Soit  $\mathbf{u}_-$  un état constant dans  $\Omega$  et  $\alpha_{1+}$  une fraction constante dans  $(0, 1)$ . Supposons que  $\mathbf{u}_-$  soit subsonique au sens où  $\rho_{1-}$  appartient à l'espace  $\mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$ . Alors, sous les hypothèses (4.15) et pourvu que la grandeur  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  soit suffisamment petite, il existe un unique point subsonique  $\rho_{1+} \in \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$  tel que l'équation (4.14e) soit vérifiée. Si de plus on a*

$$-m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1-} p_1(\rho_{1-}) - \alpha_{1+} p_1(\rho_{1+})) + \alpha_{2-} p_2(\rho_{2-}) > 0, \quad (4.16)$$

avec  $u_{1+}$  défini grâce à l'équation (4.14b), alors on peut définir un unique  $\rho_{2+} > 0$  telle que l'équation (4.14c) soit vérifiée. En d'autres termes, on peut trouver un unique état subsonique  $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+}) \in \Omega$  connecté à  $\mathbf{u}_-$  par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact.

*Démonstration.* Nous devons tout d'abord prouver que l'équation (4.14e) peut-être résolue dans l'espace  $\mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$ . Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme  $f_+(\rho_{1+}) = f_-(\rho_{1-})$  avec

$$f_+(\rho_1) = \frac{m^2}{2\alpha_{1+}^2 \rho_1^2} + h_1(\rho_1), \quad f_-(\rho_1) = \frac{m^2}{2\alpha_{1-}^2 \rho_1^2} + h_1(\rho_1),$$

et où  $m = \alpha_{1-} \rho_{1-} (u_{1-} - u_{2-})$ . L'état  $\mathbf{u}_-$  est supposé subsonique au sens où  $\rho_{1-} \in \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$ . Si la grandeur  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  est suffisamment petite, il est clair, par définition de  $\mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$ , que  $\mathbf{u}_-$  est aussi subsonique au sens où  $\rho_{1-} \in \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1-})$ . Alors  $\rho_{1-}$  est l'unique solution de  $f_-(\rho_1) = f_-(\rho_{1-})$  avec  $\rho_1 \in \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1-})$  puisque  $f_-$  est strictement croissante sur cet ensemble (voir le lemme précédent). La proximité de  $\alpha_{1-}$  et  $\alpha_{1+}$  implique également la proximité des fonctions  $f_-$  and  $f_+$ , et par suite l'existence et l'unicité de  $\rho_{1+}$  tel que  $f_+(\rho_{1+}) = f_-(\rho_{1-})$  avec  $\rho_{1+} \in \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$ . Définissons maintenant  $u_2 = u_{2+} = u_{2-}$  et  $u_{1+} = u_2 + m/\alpha_{1+} \rho_{1+}$  grâce aux équations (4.14a) et (4.14b). Il reste à prouver, sous l'hypothèse (4.16), que l'équation (4.14d) est bien posé en  $\rho_{2+}$ . Pour cela, il suffit de substituer l'expression de la contribution non conservative

donnée par l'équation (4.14c) et d'écrire l'équation (4.14d) comme :

$$p_2(\rho_{2+}) = \frac{-m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1-} p_1(\rho_{1-}) - \alpha_{1+} p_1(\rho_{1+})) + \alpha_{2-} p_2(\rho_{2-})}{\alpha_{2+}}.$$

Sous l'hypothèse (4.16) et en raison de l'inversibilité de loi d'état  $p_2$ , cette équation admet une unique solution  $\rho_{2+} > 0$ .  $\square$

## 4.2 Approche par relaxation

Afin de mettre au point un solveur de Riemann approché pour le système bifluide, nous proposons dans ce chapitre d'adapter la méthode par relaxation utilisée dans les chapitres précédents. Rappelons que cette approche consiste à construire un solveur de Riemann exact pour un modèle approché. Nous construisons ce dernier en ayant pour objectif de s'affranchir des non linéarités fortes du système initial. Plus précisément, les champs vraiment non linéaires relatifs à la propagation des ondes acoustiques vont être remplacés par des champs linéairement dégénérés. Considérons tout d'abord l'équation de conservation de la masse de la phase  $k$  écrite dans la forme suivante :

$$\alpha_k \partial_t \rho_k - \rho_k u_2 \partial_x \alpha_k + \alpha_k u_k \partial_x \rho_k + \rho_k \partial_x \alpha_k u_k = 0,$$

et multiplions la par  $\rho_k p'_k$  :

$$\alpha_k \rho_k \partial_t p_k - \rho_k^2 p'_k u_2 \partial_x \alpha_k + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x p_k + \rho_k^2 p'_k \partial_x \alpha_k u_k = 0. \quad (4.17)$$

L'approche par relaxation consiste à remplacer la loi de pression, responsable des non linéarités fortes, par une nouvelle variable notée  $\pi_k$ ,  $k = 1, 2$  dite pression de relaxation de la phase  $k$  et assujétie à sa propre loi d'évolution :

$$\alpha_k \rho_k \partial_t \pi_k - a_k^2 u_2 \partial_x \alpha_k + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x \pi_k + a_k^2 \partial_x \alpha_k u_k = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k), \quad (4.18)$$

où  $a_k^2$  est une constante strictement positive et  $\lambda$  est appelée fréquence de relaxation des pressions. Avant de discuter plus en détail de ces deux coefficients, commentons l'obtention de cette équation d'évolution. Tout d'abord, il est trivial de remarquer l'analogie avec l'EDP (4.17) vérifiée par la loi de pression  $p_k$ . Les différences entre les deux proviennent d'une part de la présence du coefficient  $a_k^2$  dans la seconde alors que dans la première on a  $\rho_k^2 p'_k = \rho_k^2 c_k^2$  qui est assimilable à la vitesse du son en coordonnées Lagrangiennes. Entre les deux équations, il y a eu donc un processus de linéarisation de la loi de pression en figeant la vitesse du son Lagrangienne *via* la nouvelle constante  $a_k$ . D'autre part, la seconde différence réside dans la présence dans l'équation (4.18) en  $\pi_k$  d'un terme source de relaxation des pressions. Si on divise par  $\lambda$  dans cette même équation, remarquons que l'on a alors formellement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \pi_k = p_k. \quad (4.19)$$

La stabilité de ce processus dit de retour à l'équilibre est assurée sous une condition sur le coefficient  $a_k$  dont nous avons déjà parlé dans les chapitres précédents. Il s'agit ici de la condition de Whitham par phase qui s'écrit :

$$a_k > \max_{\rho_k} [\rho_k c_k(\rho_k)], \quad k = 1, 2. \quad (4.20)$$

L'équation (4.18) peut se réécrire

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k \pi_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k \pi_k u_k + a_k^2 \alpha_k u_k) - a_k^2 u_k \partial_x \alpha_k = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k). \quad (4.21)$$

Nous pouvons maintenant définir le système de relaxation associé au modèle bifluide à deux pressions (4.5) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) - \pi_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) - a_1^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = \lambda \alpha_1 \rho_1 (p_1 - \pi_1), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) + \pi_1 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 \pi_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2) + a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = \lambda \alpha_2 \rho_2 (p_2 - \pi_2), \end{cases}$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ . Le système peut s'écrire sous une forme contractée. Tout d'abord, nous définissons le vecteur des inconnues

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ \alpha_k \rho_k u_k \\ \alpha_k \rho_k \pi_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

qui est défini sur l'espace des états

$$\Omega^r = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^7; \alpha_1 \in (0, 1), \rho_k > 0, \pi_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2\}.$$

Le système est équivalent à l'écriture suivante :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.22)$$

avec

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_2 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ -\pi_1 \partial_x \alpha_1 \\ -a_1^2 u_2 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ \pi_1 \partial_x \alpha_1 \\ a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \rho_1 (p_1 - \pi_1) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \rho_2 (p_2 - \pi_2) \end{pmatrix}.$$

**Remarque 4.3.** Il est possible d'exprimer les équations en  $\pi_k$ ,  $k = 1, 2$  à l'aide d'autre variable de relaxation. Définissons ainsi le covolume de relaxation  $\mathcal{F}_k$  lié à l'inconnue  $\pi_k$  par la fermeture

$$\pi_k(\tau_k, \mathcal{F}_k) := p_k(1/\mathcal{F}_k) + a_k^2(\mathcal{F}_k - \tau_k), \quad k = 1, 2. \quad (4.23)$$

En injectant cette définition dans l'équation d'évolution (4.18) vérifiée par  $\pi_k$  on a

$$\left( -\frac{p'_k(1/\mathcal{F}_k)}{\mathcal{F}_k^2} + a_k^2 \right) \alpha_k \rho_k (\partial_t \mathcal{F}_k + u_k \partial_x \mathcal{F}_k) = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k) \quad (4.24)$$

soit

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{F}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{F}_k u_k) = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k) \left( \frac{\mathcal{F}_k^2}{-p'_k(1/\mathcal{F}_k) + a_k^2 \mathcal{F}_k^2} \right). \quad (4.25)$$

De l'équation (4.24), on peut en déduire que la variable  $\mathcal{F}_k$ , définie par l'égalité

$$\mathcal{F}_k := p_k(1/\mathcal{F}_k) + a_k^2 \mathcal{F}_k = \pi_k + a_k^2 \tau_k, \quad (4.26)$$

suit la loi d'évolution :

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{F}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{F}_k u_k) = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k). \quad (4.27)$$

#### 4.2.1 Considérations analytiques

Nous commençons par donner les propriétés du système d'équations du modèle de relaxation.

**Proposition 4.3.** Le système du premier ordre extrait de (4.22) c'est-à-dire :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.28)$$

également appelé système de relaxation hors équilibre, admet les cinq valeurs propres suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_0^r &= u_2, \\ \lambda_1^r &= u_1 - a\tau_1, \quad \lambda_2^r = u_1 + a\tau_1, \\ \lambda_3^r &= u_2 - a\tau_2, \quad \lambda_4^r = u_2 + a\tau_2, \\ \lambda_5^r &= u_1,\end{aligned}$$

où la valeur propre  $\lambda_0^r$  est double. De plus le système est hyperbolique sur l'espace des états  $\Omega^r$  dès que  $\lambda_0 \neq \lambda_p$  pour  $p = 1, 2, 5$  et les champs associés à ces valeurs propres sont tous linéairement dégénérés.

*Démonstration.* On note le vecteur  $\mathbf{V} = (\alpha_1, \rho_1, u_1, \rho_2, u_2, \pi_1, \pi_2)^T$ . De la même manière que précédemment, on écrit le problème dans sa forme quasi-linéaire

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{B}(\mathbf{V}) \partial_x \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

où

$$\mathbf{B}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_1 u_1 - \rho_1 u_2}{\alpha_1} & u_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & \rho_2 & 0 & 0 \\ \frac{\pi_2 - \pi_1}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & \frac{1}{\rho_2} \\ \frac{a_1^2 (u_1 - u_2)}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & \frac{a_1^2}{\rho_1} & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2^2}{\rho_2} & 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Des calculs rapides nous permettent d'obtenir le polynôme caractéristique  $\mathcal{P}(t)$  de cette matrice :

$$\mathcal{P}(t) = (u_1 - t)(u_2 - t)^2 \left( (u_2 - t)^2 - \frac{a_2^2}{\rho_2^2} \right) \left( (u_1 - t)^2 - \frac{a_1^2}{\rho_1^2} \right)$$

dont les racines sont bien les valeurs propres données dans l'énoncé de la proposition. La multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda_0$  est maintenant de deux. La nouvelle valeur propre par rapport au système initial est  $\lambda_5^r$ . Si on suppose que  $\lambda_0^r \neq \lambda_p^r$  pour  $p = 1, 2, 5$  alors la matrice des



vecteurs propres à droite est bien définie et inversible :

$$\mathbf{R}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_1(\lambda_5^r - \lambda_0^r)^2}{\alpha_1(\lambda_0^r - \lambda_1^r)(\lambda_0^r - \lambda_2^r)} & 0 & -\frac{1}{a_1 \tau_1^2} & \frac{1}{a_1 \tau_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_1^2 \tau_1^2 (\lambda_5^r - \lambda_0^r)}{\alpha_1(\lambda_0^r - \lambda_1^r)(\lambda_0^r - \lambda_2^r)} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a_2 \tau_2^2} & \frac{1}{a_2 \tau_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{a_1^2 (\lambda_5^r - \lambda_0^r)^2}{\alpha_1 \rho_1 (\lambda_0^r - \lambda_1^r) (\lambda_0^r - \lambda_2^r)} & 0 & -a_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi_1 - \pi_2}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces résultats ainsi que la nature linéaire dégénérée des champs s'obtiennent après quelques manipulations classiques que nous ne détaillerons pas.  $\square$

**Proposition 4.4.** Notons  $\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k = \alpha_k \rho_k \left( \frac{u_k^2}{2} + e_k(1/\mathcal{T}_k) + \frac{\pi_k^2(\mathfrak{v}_k, \mathcal{T}_k) - p_k^2(1/\mathcal{T}_k)}{2a_k^2} \right)$  l'énergie totale de relaxation de la phase  $k$ . Le couple  $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  défini par  $\mathcal{U} = \sum_k \alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k$  et  $\mathcal{F} = \sum_k (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k + \alpha_k \pi_k) u_k$  est un couple entropie-flux d'entropie pour le système (4.22).

*Démonstration.* Dans cette démonstration, nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement régulier. Tout d'abord, après multiplication par  $u_k$  de l'équation de conservation de l'impulsion de la phase  $k$ , on obtient :

$$\partial_t \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} \right) + \partial_x \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} u_k \right) + u_k \partial_x (\alpha_k \pi_k) - u_k \pi_1 \partial_x \alpha_k = 0,$$

soit

$$\partial_t \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} \right) + \partial_x \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} u_k \right) + \partial_x (\alpha_k \pi_k u_k) - \alpha_k \pi_k \partial_x u_k - u_k \pi_1 \partial_x \alpha_k = 0. \quad (4.29)$$

L'équation (4.21) en  $\pi_k$  est maintenant multipliée par  $\frac{\pi_k}{a_k^2}$  :

$$\frac{\pi_k}{a_k^2} (\partial_t (\alpha_k \rho_k \pi_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \pi_k u_k)) + \alpha_k \pi_k \partial_x u_k + \pi_k (u_k - u_2) \partial_x \alpha_k = \lambda \alpha_k \rho_k \frac{\pi_k}{a_k^2} (p_k - \pi_k),$$

soit donc

$$\partial_t \left( \alpha_k \rho_k \frac{\pi_k^2}{2a_k^2} \right) + \partial_x \left( \alpha_k \rho_k \frac{\pi_k^2}{2a_k^2} u_k \right) + \alpha_k \pi_k \partial_x u_k + \pi_k (u_k - u_2) \partial_x \alpha_k = \lambda \alpha_k \rho_k \frac{\pi_k}{a_k^2} (p_k - \pi_k). \quad (4.30)$$

On pose  $\phi_k$  une fonction de  $\mathcal{T}_k$  quelconque et régulière. Grâce à l'équation (4.25) en  $\mathcal{T}_k$ , il vient de manière immédiate que

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \phi_k(\mathcal{T}_k)) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k \phi_k(\mathcal{T}_k)) = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k) \left( \frac{\mathcal{T}_k^2}{-p_k'(1/\mathcal{T}_k) + a_k^2 \mathcal{T}_k^2} \right) \phi_k'(\mathcal{T}_k). \quad (4.31)$$

On additionne maintenant les équations (4.29), (4.30) et (4.31) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} + \alpha_k \rho_k \left( \frac{\pi_k^2}{2a_k^2} + \phi_k(\mathcal{T}_k) \right) \right) + \partial_x \left( \alpha_k \rho_k \frac{u_k^2}{2} + \left( \frac{\pi_k^2}{2a_k^2} + \phi_k(\mathcal{T}_k) \right) + \alpha_k \pi_k \right) u_k \\ + (\pi_k u_k - \pi_k u_2 - u_k \pi_1) \partial_x \alpha_k = \lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k) \left[ \frac{\pi_k}{a_k^2} + \left( \frac{\mathcal{T}_k^2}{-p'_k(1/\mathcal{T}_k) + a_k^2 \mathcal{T}_k^2} \right) \phi'_k(\mathcal{T}_k) \right]. \end{aligned}$$

Afin d'être consistant avec le couple entropie-flux d'entropie du modèle à l'équilibre, on impose à la fonction  $\phi_k$  de vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{\pi_k^2(\tau_k, \mathcal{T}_k^{eq})}{2a_k^2} + \phi_k(\mathcal{T}_k^{eq}) = e_k(\rho_k),$$

avec  $\mathcal{T}_k^{eq} = \tau_k$  et par suite  $\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k^{eq}) = p_k(\rho_k)$ . Ceci revient à prendre :

$$\phi_k(\mathcal{T}_k) = e_k(1/\mathcal{T}_k) - \frac{p_k^2(1/\mathcal{T}_k)}{2a_k^2}.$$

On obtient ainsi l'expression de l'énergie totale de relaxation  $\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k$  de la phase  $k$  :

$$\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k = \alpha_k \rho_k \left( \frac{u_k^2}{2} + e_k(1/\mathcal{T}_k) + \frac{\pi_k^2(\tau_k, \mathcal{T}_k) - p_k^2(1/\mathcal{T}_k)}{2a_k^2} \right).$$

Notons ensuite que  $\phi'_k(\mathcal{T}_k) = -\frac{p_k(1/\mathcal{T}_k)}{a_k^2} \left( -\frac{p'_k(1/\mathcal{T}_k)}{\mathcal{T}_k^2} + a_k^2 \right)$ . On a donc

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k + \alpha_k \pi_k) u_k + (\pi_k (u_k - u_2) - u_k \pi_1) \partial_x \alpha_k = -\lambda \alpha_k \rho_k (p_k - \pi_k)^2 / a_k^2.$$

Remarquons maintenant que le terme source de l'équation ci-dessus est négatif et ainsi, si on somme sur  $k$  cette dernière équation, les termes non conservatifs s'annulent et on a finalement :

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1 + \alpha_2 \rho_2 \mathcal{E}_2) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1 + \alpha_1 \pi_1) u_1 + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{E}_2 + \alpha_2 \pi_2) u_2 \leq 0.$$

Le couple  $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est donc un couple entropie-flux d'entropie pour le système de relaxation (4.22).  $\square$

#### 4.2.2 Étude du problème de Riemann

Nous étudions maintenant le problème de Riemann associé au système de relaxation (4.22) hors-équilibre c'est-à-dire avec  $\lambda = 0$ . Notons  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  deux états constants. Le problème de Riemann pour le système (4.22) hors-équilibre s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.32)$$

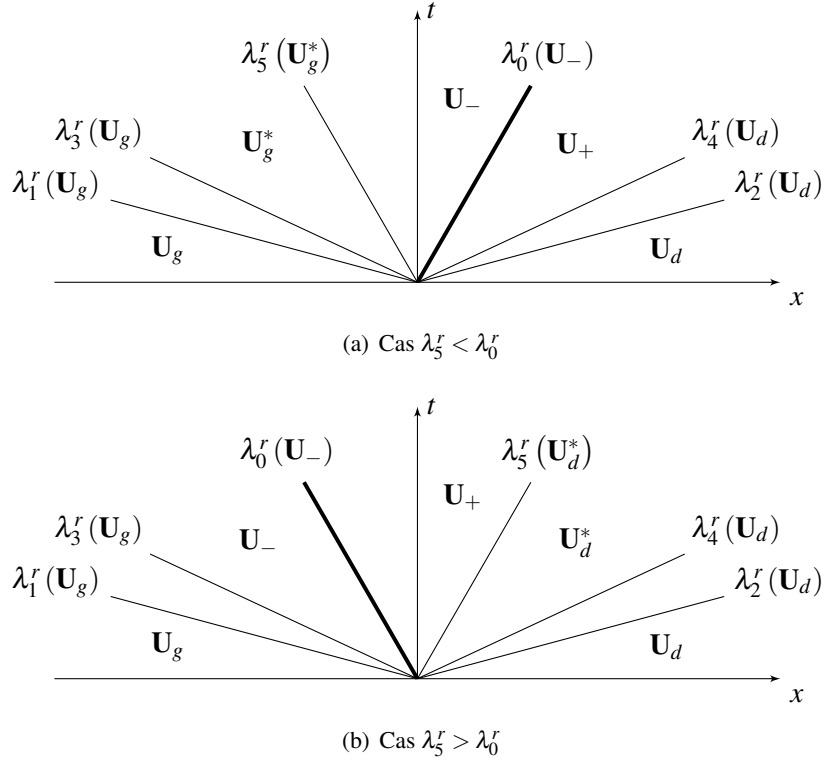


FIGURE 4.2 – Structure générale de la solution du problème de Riemann (4.32) dans le cas d'un écoulement subsonique

Avec la proposition 4.3, nous pouvons représenter sur la figure 4.2 la structure de la solution de ce problème de Riemann. Les champs associés aux valeurs propres étant tous linéairement dégénérés, la solution de ce problème de Riemann est composée de discontinuités de contact. Les ondes acoustiques extrêmes du problème de Riemann pour le système initial sont maintenant des discontinuités de contact de vitesses  $u_k - a_k \tau_k$  et  $u_k + a_k \tau_k$ . Dans le cas où  $\lambda_5^r < \lambda_0^r$  (voir figure 4.2(a)), les états intermédiaires sont notés  $\mathbf{U}_g$ ,  $\mathbf{U}_g^*$ ,  $\mathbf{U}_-$ ,  $\mathbf{U}_+$  et  $\mathbf{U}_d$ . Dans le cas où  $\lambda_5^r > \lambda_0^r$  (voir figure 4.2(b)), les états intermédiaires sont  $\mathbf{U}_g$ ,  $\mathbf{U}_-$ ,  $\mathbf{U}_+$ ,  $\mathbf{U}_d^*$  et  $\mathbf{U}_d$ . Comme pour le modèle bifluide initial, de part et d'autre de la  $\lambda_0$ -discontinuité de contact, la fraction de la phase 1 prend les valeurs constantes  $\alpha_{1g}$  et  $\alpha_{1d}$ . Il en résulte que les produits non conservatif  $\pi_1 \partial_x \alpha_1$  s'annulent et le modèle de relaxation se réduit à deux systèmes de relaxation indépendants pour le système d'Euler à savoir

$$\begin{cases} \partial_t \rho_k + \partial_x (\rho_k u_k) = 0, \\ \partial_t (\rho_k u_k) + \partial_x (\rho_k u_k^2 + \pi_k) = 0, \\ \partial_t (\rho_k \pi_k) + \partial_x (\rho_k \pi_k u_k + a_k^2 u_k) = 0 \quad k = 1, 2, \end{cases}$$

dès que  $\frac{x}{t} < \lambda_0(\mathbf{U})$  ou  $\frac{x}{t} > \lambda_0(\mathbf{U})$ . Le cas  $\alpha_{1g} = \alpha_{1d}$  est donc immédiat à résoudre. Lorsque  $\alpha_{1g} \neq \alpha_{1d}$ , le problème de Riemann s'avère toujours difficile à résoudre de manière explicite. En effet, même si les champs vraiment non linéaires du système initial ont été transformés en champs linéairement dégénérés, les termes non conservatifs agissent toujours sur la caractéristique

de l'onde de couplage. Ceci entraîne en particulier que les états de part et d'autre de l'onde de couplage sont mis en relation via une équation non linéaire. Avant de s'étendre sur ce point, nous procédons comme dans la section précédente : étant donné un état constant subsonique  $\mathbf{U}_-$  et une fraction constante  $\alpha_{1+}$ , nous cherchons un état constant subsonique  $\mathbf{U}$  connecté à  $\mathbf{U}_-$  par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact et tel que  $\alpha_1 = \alpha_{1+}$ . Dans un premier temps, on note la vitesse de l'onde de couplage

$$u_2 := u_{2-} = u_{2+},$$

et on réécrit le système sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) = \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+) \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) = \mathcal{M}_{\rho \pi}(\mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+) \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) = -\mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+) \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \pi_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2) + a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

où  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho \pi}$  représentent les contributions non conservatives respectivement de l'équation de la quantité de mouvement de la phase 1 (et de la phase 2 au signe près) et de l'équation en  $\alpha_1 \rho_1 \pi_1$ . Dans ce système, l'équation de bilan sur  $\alpha_1 \rho_1 \pi_1$  a été modifiée par rapport à ce qui avait été proposé dans (4.22). Cette modification est motivée par la volonté d'annuler la force de l'onde associée à la valeur propre  $\lambda_5^r$ , ce qui nous permettra de démontrer plus loin les propriétés du schéma par relaxation. En effet, cette valeur propre est absente pour le système équilibre (4.5).

**Remarque 4.4.** De la même manière que précédemment pour l'équation (4.12), on a dans le cas de solutions régulières du système (4.22) hors équilibre :

$$\partial_t u_1 + \partial_x \frac{u_1^2}{2} + \tau_1 \partial_x \pi_1 = 0.$$

De plus comme  $\partial_x \mathcal{S}_1 = \partial_x \pi_1 + a_1^2 \partial_x \tau_1$  par la définition (4.26) pour  $k = 1$ , on a

$$\tau_1 \partial_x \pi_1 = \tau_1 \partial_x \mathcal{S}_1 - a_1^2 \partial_x \frac{\tau_1^2}{2},$$

puis en réinjectant ceci dans l'équation précédente, on obtient :

$$\partial_t u_1 + \partial_x \left( \frac{u_1^2 - a_1^2 \tau_1^2}{2} \right) + \tau_1 \partial_x \mathcal{S}_1 = 0. \quad (4.34)$$

Maintenant muni de cette nouvelle EDP et de l'écriture du système précédente, on formule la définition suivante.

**Définition 4.2.** *Considérons deux états  $\mathbf{U}_-$  et  $\mathbf{U}_+$  constants. Ces états sont dits joints par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact admissible si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \equiv u_{2-} = u_{2+}, \end{array} \right. \quad (4.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \equiv \alpha_{1-}\rho_{1-}(u_{1-} - u_2) = \alpha_{1+}\rho_{1+}(u_{1+} - u_2), \end{array} \right. \quad (4.35b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1+}\pi_{1+} - \alpha_{1-}\pi_{1-}) = \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+), \end{array} \right. \quad (4.35c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2+}\pi_{2+} - \alpha_{2-}\pi_{2-} = -\mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+), \end{array} \right. \quad (4.35d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\mathcal{S}_{1+} - \mathcal{S}_{1-}) = 0, \end{array} \right. \quad (4.35e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2}{2\alpha_{1-}^2\rho_{1-}^2} - \frac{a_1^2}{2\rho_{1-}^2} = \frac{m^2}{2\alpha_{1+}^2\rho_{1+}^2} - \frac{a_1^2}{2\rho_{1+}^2}. \end{array} \right. \quad (4.35f)$$

L'égalité (4.35a) provient trivialement de la continuité de la vitesse de la  $\lambda_0$ -discontinuité de contact. Concernant les trois équations qui suivent (4.35b), (4.35c) et (4.35d), elles sont obtenues grâce aux relations de saut appliquées respectivement à la seconde, la troisième et la sixième équation du système (4.33) de part et d'autre de la  $\lambda_0$ -discontinuité de contact. La relation (4.35e) s'écrit après avoir appliqué les relations de Rankine-Hugoniot à l'équation (4.27) avec  $k = 1$  et  $\lambda = 0$  (rappelons que nous étudions le problème de Riemann pour le système de relaxation hors équilibre). Enfin, l'équation (4.35f) provient des relations de saut pour l'équation (4.34) précédemment établie.

Notons que les équations (4.35a) et (4.35b) sont identiques aux relations (4.14a) et (4.14b). Les relations (4.35c) et (4.35d) sont également similaires : les nouvelles variables  $\pi_1$  and  $\pi_2$  remplacent les termes en pression. L'équation supplémentaire est l'équation (4.35e) et est associée au transport de  $\mathcal{S}_1$  par la discontinuité de contact de vitesse  $\lambda_5$  (voir équation (4.27) avec  $k = 1$ ). Cette variable est donc continue de part et d'autre de l'onde de couplage d'où la relation de saut (4.35e). On peut remarquer que l'équation (4.35f) est une équation non linéaire mais celle-ci s'avère simplifiée par rapport à l'équation (4.14e) au sens où les non linéarités sont moins fortes. On donne le théorème suivant.

**Théorème 4.2.** *Soit  $\mathbf{U}_-$  un état constant dans  $\Omega^r$  et  $\alpha_{1+}$  une fraction constante dans  $(0, 1)$ . Supposons que  $\mathbf{U}_-$  est un état subsonique au sens où*

$$\left( \frac{m}{\alpha_{1+}a_1} \right)^2 < 1. \quad (4.36)$$

*Alors, si la grandeur  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  est suffisamment petite, il existe un unique point subsonique  $\rho_{1+}$  telle que l'équation (4.35f) est vérifiée. Il est explicitement donné par*

$$\rho_{1+} = \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{\alpha_{1+}a_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{m}{\alpha_{1-}a_1}\right)^2 - 1}} \rho_{1-}. \quad (4.37)$$

De plus, si pour tout  $\pi_{2+}$  on a

$$-m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1-}\pi_{1-} - \alpha_{1+}\pi_{1+}) + \alpha_{2-}\pi_{2-} - \alpha_{2+}\mathcal{I}_{2+} < 0, \quad (4.38)$$

avec  $u_{1+}$  défini par l'équation (4.35b) et  $\pi_{1+}$  grâce à la relation (4.35e), alors on peut définir un unique  $\rho_{2+} > 0$  telle que l'équation (4.35c) est vérifiée. Celui-ci est donné explicitement par

$$\tau_{2+} = \frac{1}{\rho_{2+}} = -\frac{-m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1-}\pi_{1-} - \alpha_{1+}\pi_{1+}) + \alpha_{2-}\pi_{2-} - \alpha_{2+}\mathcal{I}_{2+}}{\alpha_{2+}a_2^2}. \quad (4.39)$$

Nous pouvons donc trouver un unique état  $\mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_+(\mathbf{U}_-, \alpha_{1+}) \in \Omega^r$  tel que  $\mathbf{U}_-$  et  $\mathbf{U}_+$  sont liés par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact.

*Démonstration.* Cette proposition est relativement plus simple à démontrer étant données les formules linéarisées (4.35). Tout d'abord, l'état  $\mathbf{U}_-$  est supposé subsonique au sens où l'inégalité (4.36) est vérifiée. Il est équivalent d'écrire :

$$-1 < \frac{m}{\alpha_{1+}a_1} < 1.$$

Si on a de plus que la grandeur  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  est suffisamment petite, alors on peut conclure que

$$-1 < \frac{m}{\alpha_{1-}a_1} < 1.$$

Il est alors facile de vérifier que l'unique solution  $\rho_{1+} > 0$  de l'équation (4.35f) est donnée par la formule (4.37). Ensuite on peut définir  $u_2 = u_{2+} = u_{2-}$  puis  $u_{1+} = u_2 + m/\alpha_{1+}\rho_{1+}$  et enfin  $\pi_{1+} = \pi_{1-} + a_1^2(\tau_{1-} - \tau_{1+})$  grâce respectivement aux équations (4.35a), (4.35b) et (4.35e). En réinjectant l'expression de la contribution non conservative donnée par la relation (4.35d), il est aisé de remarquer que sous la condition (4.38), l'unique solution  $\rho_{2+} > 0$  de l'équation (4.35c) est explicitement donnée par la relation (4.39).  $\square$

Afin de compléter la description de l'approche par relaxation et pour mettre au point une méthode numérique basée sur un solveur de Riemann exact pour le système de relaxation, nous allons énoncer un théorème qui donne la solution du problème de Riemann *sous des hypothèses faites a priori*. Plus précisément, nous allons nous affranchir dans un premier temps de la relation non linéaire (4.35f) pour établir des formules explicites des états intermédiaires. La résolution complète du problème sera proposée dans la section suivante sur la description de la méthode numérique. Nous y proposerons plusieurs stratégies de résolution : la première sera basée sur un algorithme itératif et la seconde sur des modifications apportées aux contributions non conservatives  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$ . Nous allons supposer ici que nous connaissons à priori ces contributions non conservatives. L'intérêt est que, muni d'une telle écriture, on peut résoudre explicitement le problème de Riemann (4.32) en reprenant la méthodologie du chapitre 2 dans lequel nous avons traité de la relaxation des équations d'Euler munies d'un terme source singulier.

**Remarque 4.5.** Dans le théorème qui suit, nous postulons la connaissance à priori des contributions non conservatives, mais également du signe du débit de masse relatif  $m$  à l'interface.

**Théorème 4.3.** Soient deux états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  dans  $\Omega^r$ . Supposons les contributions non conservatives  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  ainsi que le signe de  $m$  comme connus. Alors il existe une unique solution auto-semblable

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} (x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}),$$

du problème de Riemann (4.32). Celle-ci vérifie, d'une part :

$$\alpha_1(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \begin{cases} \alpha_{1g} & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \alpha_{1d} & \text{si } \lambda_0^r(\mathbf{U}_-) < \frac{x}{t}, \end{cases}$$

puis, pour la phase 2 :

$$\mathbf{U}_2(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{cases} \mathbf{U}_{2g}, & \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_{2-}, & \lambda_3^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \mathbf{U}_{2+}, & \lambda_0^r(\mathbf{U}_+) < \frac{x}{t} < \lambda_4^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_{2d}, & \frac{x}{t} > \lambda_4^r(\mathbf{U}_d), \end{cases}$$

où les états intermédiaires sont donnés par les relation suivantes :

$$u_2 = \frac{2a_2(\alpha_2 u_2)^* - \mathcal{M}_{\rho u}}{a_2(\alpha_{2g} + \alpha_{2d})}, \quad \begin{cases} u_{2-} = u_2, \rho_{2-} = \frac{a_2}{u_2 - \lambda_3^r(\mathbf{U}_g)}, \pi_{2-} = \pi_{2g} - a_2(u_2 - u_{2g}), \\ u_{2+} = u_2, \rho_{2+} = \frac{a_2}{\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) - u_2}, \pi_{2+} = \frac{\alpha_{2-}\pi_{2-} - \mathcal{M}_{\rho u}}{\alpha_{2+}}, \end{cases} \quad (4.40)$$

avec

$$(\alpha_2 u_2)^* = \frac{1}{2}(\alpha_{2g} u_{2g} + \alpha_{2d} u_{2d}) - \frac{1}{2a_2}(\alpha_{2d} \pi_{2d} - \alpha_{2g} \pi_{2g}).$$

D'autre part, concernant la phase 1, la solution est :

$$\mathbf{U}_1(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{cases} \mathbf{U}_{1g}, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_{1g}^*, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_5^r(\mathbf{U}_g^*), \\ \mathbf{U}_{1-}, & \lambda_5^r(\mathbf{U}_g^*) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \mathbf{U}_{1+}, & \lambda_0^r(\mathbf{U}_+) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_{1d}, & \frac{x}{t} > \lambda_2^r(\mathbf{U}_d), \end{cases} \quad \text{si } m < 0,$$

$$\mathbf{U}_1(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}) = \begin{cases} \mathbf{U}_{1g}, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_{1-}, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \mathbf{U}_{1+}, & \lambda_0^r(\mathbf{U}_+) < \frac{x}{t} < \lambda_5^r(\mathbf{U}_d^*), \\ \mathbf{U}_{1d}^*, & \lambda_5^r(\mathbf{U}_d^*) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_{1d}, & \frac{x}{t} > \lambda_2^r(\mathbf{U}_d), \end{cases} \quad \text{si } m > 0,$$

$$\begin{cases} u_{1-} = \frac{a_1 \mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a_1(a_1(\alpha_1 u_1)^* - m u_1^*)}{2a_1(a_1 \alpha_{1g} - m)}, & \rho_{1-} = \frac{m}{\alpha_{1g}(u_{1-} - u_2)}, \\ u_{1+} = \frac{a_1 \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a_1(a_1(\alpha_1 u_1)^* + m u_1^*)}{2a_1(a_1 \alpha_{1d} + m)}, & \rho_{1+} = \frac{m}{\alpha_{1d}(u_{1+} - u_2)}, \\ \pi_{1-} = \frac{-a_1 \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2(a_1(\alpha_1 \pi_1)^* - m \pi_1^*)}{2(a_1 \alpha_{1g} - m)}, \\ \pi_{1+} = \frac{a_1 \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2(a_1(\alpha_1 \pi_1)^* + m \pi_1^*)}{2(a_1 \alpha_{1d} + m)}, \end{cases} \quad (4.41)$$

avec :

$$\begin{cases} u_1^* & = \frac{1}{2}(u_{1g} + u_{1d}) - \frac{1}{2a_1}(\pi_{1d} - \pi_{1g}), \\ \pi_1^* & = \frac{1}{2}(\pi_{1g} + \pi_{1d}) - \frac{a_1}{2}(u_{1d} - u_{1g}), \\ (\alpha_1 u_1)^* & = \frac{1}{2}(\alpha_{1g} u_{1g} + \alpha_{1d} u_{1d}) - \frac{1}{2a_1}(\alpha_{1d} \pi_{1d} - \alpha_{1g} \pi_{1g}), \\ (\alpha_1 \pi_1)^* & = \frac{1}{2}(\alpha_{1g} \pi_{1g} + \alpha_{1d} \pi_{1d}) - \frac{a_1}{2}(\alpha_{1d} u_{1d} - \alpha_{1g} u_{1g}). \end{cases}$$

De plus, dans le cas d'une structure en onde correspondante à  $m < 0$ , on a :

$$u_{1g}^* = u_{1-}, \rho_{1g}^* = \frac{a_1}{u_{1-} - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)}, \pi_{1g}^* = \pi_{1-}, m = \frac{a_1 \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a_1^2((\alpha_1 u_1)^* - u_2 \alpha_{1d})}{2a_1(\lambda_2^r(\mathbf{U}_d) - u_1^*)}. \quad (4.42)$$

et dans le cas où  $m > 0$  :

$$u_{1d}^* = u_{1+}, \rho_{1d}^* = \frac{a_1}{\lambda_2^r(\mathbf{U}_d) - u_{1+}}, \pi_{1d}^* = \pi_{1+}, m = \frac{a_1 \mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi} + 2a_1^2((\alpha_1 u_1)^* - u_2 \alpha_{1g})}{2a_1(u_1^* - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g))}. \quad (4.43)$$



*Démonstration.* Nous commençons par la phase 2 en écrivant les relations de Rankine-Hugoniot sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$-\lambda_i^r(\mathbf{U})[\alpha_2 \rho_2 u_2] + [\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2] = 0, \quad i = 3, 4,$$

c'est-à-dire en développant et après avoir rappelé la continuité des vitesses des ondes extrêmes soit  $\lambda_3^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_3^r(\mathbf{U}_-)$  et  $\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) = \lambda_4^r(\mathbf{U}_+)$  :

$$\begin{aligned} -\lambda_3^r(\mathbf{U}_-) \alpha_{2g} \rho_{2-} u_2 + \lambda_3^r(\mathbf{U}_g) \alpha_{2g} \rho_{2g} u_{2g} + (\alpha_{2g} \rho_{2-} u_2^2 + \alpha_{2g} \pi_{2-} - \alpha_{2g} \rho_{2g} u_{2g}^2 - \alpha_{2g} \pi_{2g}) &= 0, \\ -\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) \alpha_{2d} \rho_{2d} u_{2d} + \lambda_4^r(\mathbf{U}_+) \alpha_{2d} \rho_{2+} u_2 + (\alpha_{2d} \rho_{2d} u_{2d}^2 + \alpha_{2d} \pi_{2d} - \alpha_{2d} \rho_{2+} u_2^2 - \alpha_{2d} \pi_{2+}) &= 0. \end{aligned}$$

Après simplifications, elles deviennent

$$\begin{cases} a_2(u_2 - u_{2g}) + (\pi_{2-} - \pi_{2g}) = 0, \\ a_2(u_{2d} - u_2) - (\pi_{2d} - \pi_{2+}) = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

La relation de Rankine-Hugoniot (4.35d) et les équations (4.44) définissent un système linéaire de trois équations sur les trois inconnues  $(u_2, \pi_{2-}, \pi_{2+})$ . Le déterminant de la matrice associée est non nul. En effet, en raison des hypothèses faites précédemment (condition de Whitham et positivité des fractions des phases), on a

$$\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_{2g} & \alpha_{2d} \end{vmatrix} = a_2(\alpha_{2g} + \alpha_{2d}) \neq 0.$$

Le système admet donc une seule et unique solution qui correspond bien aux relations (4.40). Concernant les inconnues  $\rho_{2+}$  et  $\rho_{2-}$ , leurs expressions résultent de la continuité des vitesses des discontinuités de contact extrêmes. Les inconnues associées à la phase 2 sont donc explicitement connues en fonction de la contribution non-conservative  $\mathcal{M}_{\rho u}$ .

Pour la résolution de la phase 1, le principe est le même que la démonstration du chapitre 2 sur le couplage avec terme source mesure. En effet, maintenant la phase 2 explicitement résolue, il nous reste à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) = \mathcal{M}_{\rho u} \delta_{x-u_1 t}, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) = \mathcal{M}_{\rho \pi} \delta_{x-u_1 t}. \end{cases}$$

On s'intéresse au cas  $m < 0$ . Dans un premier temps, la continuité de la vitesse  $\lambda_5^r(\mathbf{U})$  de part et d'autre de la caractéristique de l'onde entraîne  $u_{1g}^* = u_{1-}$ . Les relations de Rankine Hugoniot pour cette même caractéristique appliquées à l'équation en  $\alpha_1 \rho_1 \pi_1$  nous donne  $\pi_{1g}^* = \pi_{1-}$ . Maintenant, on écrit les relations de Rankine-Hugoniot pour l'équation de la quantité de mouvement de la

phase 1 sur les ondes extrêmes c'est-à-dire :

$$-\lambda_i^r(\mathbf{U})[[\alpha_1 \rho_1 u_1]] + [[\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1]] = 0, \quad i = 1, 2,$$

soit :

$$\begin{cases} a_1(u_{1-} - u_{1g}) + (\pi_{1-} - \pi_{1g}) = 0, \\ a_1(u_{1+} - u_{1d}) + (\pi_{1d} - \pi_{1+}) = 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

On applique les mêmes relations de saut à la traversée de l'onde  $\lambda_0$  pour l'équation en  $\alpha_1 \rho_1 \pi_1$  ce qui donne :

$$m(\pi_{1+} - \pi_{1-}) + a_1^2(\alpha_{1d}u_{1+} - \alpha_{1g}u_{1-}) = \mathcal{M}_{\rho\pi}. \quad (4.46)$$

Considérant alors les équations (4.35c), (4.45) et (4.46), on obtient un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues qui sont  $(u_{1+}, u_{1-}, \pi_{1+}, \pi_{1-})$ . Le déterminant associé à ce système est non nul puisque l'on a

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & -1 & 0 \\ a_1^2 \alpha_{1d} & -a_1^2 \alpha_{1g} & m & -m \\ m & -m & \alpha_{1d} & -\alpha_{1g} \end{vmatrix} = 2a_1^2 \alpha_{1g} m - 2a_1^2 \alpha_{1d} m - 2a_1 m^2 + 2a_1^2 \alpha_{1g} \alpha_{1d} \\ = 2a_1(a_1 \alpha_{1g} - m)(a_1 \alpha_{1d} + m).$$

L'unique solution de ce système est donc écrite *via* les relations (4.41). D'autre part, la variable  $\rho_{1g}^*$  résulte simplement de la condition de continuité  $\lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = \lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*)$ . Enfin, pour le débit de masse relatif  $m$ , on écrit tout d'abord la condition de continuité  $\lambda_2^r(\mathbf{U}_+) = \lambda_2^r(\mathbf{U}_d)$  c'est-à-dire

$$\rho_{1+} = \frac{a_1}{\lambda_2^r(\mathbf{U}_d) - u_{1+}}.$$

On réinjecte ensuite cette expression dans la définition  $m := \alpha_{1d} \rho_{1+} (u_{1+} - u_2)$  puis on remplace  $u_{1+}$  par son expression en (4.41). Ces calculs sont laissés au lecteur ainsi que le cas où  $m > 0$  qui est analogue.  $\square$

Nous voyons que, dans ce résultat, il nous reste encore deux inconnues à déterminer qui sont les contributions non conservatives  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$ . Cependant, deux relations de saut n'ont pas encore été utilisées : l'équation (4.35e) et l'équation non linéaire (4.35f). Dans la section qui suit sur la description discrète de la méthode, nous allons mettre au point différentes stratégies à l'aide de ces deux relations et des différents théorèmes établis.

### 4.3 Approximation numérique

On s'intéresse dans cette section à l'approximation numérique du problème de Cauchy pour le modèle bifluide à deux pressions isentropique par phase c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \end{cases} \quad (4.47)$$

Nous allons utiliser pour cela l'approche par relaxation décrite dans la section précédente. Les notations utilisées sont classiques : on note  $\Delta t$  et  $\Delta x$  respectivement les pas de temps et d'espace. Le rapport de ces deux grandeurs est noté  $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . On considère également le maillage composé des cellules  $C_j$ , avec  $j \in \mathbb{Z}$ , d'interfaces  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  et de centre  $x_j = j\Delta x$ . On cherche à chaque pas de temps  $t^n = n\Delta t$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , une solution approchée noté  $x \mapsto \mathbf{u}_\nu(x, t^n)$  constante par morceaux prenant comme valeur sur chaque cellule  $\mathbf{u}_j^n$ . Autrement dit, on a :

$$\mathbf{u}_\nu(x, t^n) = \mathbf{u}_j^n \quad \forall x \in C_j, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Au temps  $t = 0$ , le vecteur  $\mathbf{u}_j^0$  dans chaque cellule  $j$  est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}_0(x) dx, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

#### 4.3.1 Approche par relaxation

Nous décrivons maintenant la méthode numérique basée sur l'approche par relaxation pour définir  $\mathbf{u}_\nu(\cdot, t^{n+1})$  à partir de  $\mathbf{u}_\nu(\cdot, t^n)$ . Comme dans les chapitres précédents la technique employée est basée sur une méthode de splitting pour le système de relaxation (4.22) : dans une première étape on considère les effets convectifs associés au modèle puis, dans une seconde étape, les termes sources de retour à l'équilibre seront pris en compte. On définit tout d'abord la fonction constante par morceaux  $x \mapsto \mathbf{U}_\nu(x, t^n)$  à chaque pas de temps  $t^n$  :

$$\mathbf{U}_\nu(x, t^n) = \begin{pmatrix} (\alpha_1)_j^n \\ (\mathbf{U}_1)_j^n \\ (\mathbf{U}_2)_j^n \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{U}_k)_j^n = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_k)_j^n \\ (\alpha_k \rho_k \pi_k)_j^n \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Au temps  $t = 0$ , la fonction  $\mathbf{U}_\nu(x, t^0)$  est à l'équilibre c'est-à-dire que l'on a :

$$(\pi_k)_j^0 = p_k((\rho_k)_j^0), \quad k = 1, 2, j \in \mathbb{Z}.$$

Nous décrivons maintenant les deux étapes de résolution.

**Premier pas : partie convective**

Dans cette première étape, on résout le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t \in [t^n, t^{(n+1)-}], \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_v(x, t^n), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La fonction  $x \mapsto \mathbf{U}_v(x, t^n)$  étant constante par morceaux, ce problème est une succession de problèmes de Riemann indépendants sous la condition de stabilité :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_j \{ |\lambda_i^r(\mathbf{U}_j^n)|, i = 0, \dots, 5 \} \leq \frac{1}{2}. \quad (4.48)$$

On doit donc résoudre une famille de problème de Riemann (4.32) où les états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  correspondent aux états de deux cellules successives du maillage. La solution obtenue après la résolution de tous ces problèmes de Riemann s'écrit

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathcal{W} \left( \frac{x - x_{j+1/2}}{t}; \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n, (\mathcal{M}_{\rho u})_{j+1/2}^n, (\mathcal{M}_{\rho \pi})_{j+1/2}^n \right),$$

pour tout  $(x, t) \in [x_j, x_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$  et où  $(\mathcal{M}_{\rho u})_{j+1/2}^n$  et  $(\mathcal{M}_{\rho \pi})_{j+1/2}^n$  représentent les contributions non conservatives associées à la solution du problème de Riemann dont les conditions initiales sont définies par les états gauche et droit  $\mathbf{U}_j^n$  et  $\mathbf{U}_{j+1}^n$ . Nous définissons ensuite la solution constante par morceaux sur chaque cellule  $C_j$  au temps  $t^{n+1-}$  grâce à la projection suivante :

$$\mathbf{U}_v(x, t^{(n+1)-}) := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx \quad (4.49)$$

pour tout  $x \in C_j$  avec  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Deuxième pas : relaxation**

Dans cette seconde étape, il s'agit de résoudre au temps  $t^{n+1}$  l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}), & x \in \mathbb{R}, t \in (t^{n+1-}, t^{n+1}) \\ \mathbf{U}(x, t^{(n+1)-}) = \mathbf{U}_v(x, t^{n+1-}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dans le régime asymptotique  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Il est alors équivalent de poser

$$\mathbf{U}_v(x, t^{n+1}) = \begin{pmatrix} (\alpha_1)_j^{n+1} \\ (\mathbf{U}_1)_j^{n+1} \\ (\mathbf{U}_2)_j^{n+1} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{U}_k)_j^{n+1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_k)_j^{n+1} \\ (\alpha_k \rho_k \pi_k)_j^{n+1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

avec

$$\begin{cases} (\alpha_1)_j^{n+1} = (\alpha_1)_j^{n+1/2}, \\ (\mathbf{u}_k)_j^{n+1} = (\mathbf{u}_k)_j^{n+1/2} \\ (\pi_k)_j^{n+1} = p_k((\rho_k)_j^{n+1}), \quad k = 1, 2. \end{cases}$$

### 4.3.2 Résolution du problème de Riemann

Dans la description de la méthode, nous devons donc résoudre un problème de Riemann entre deux cellules successives et ce à chaque itération. On reprend donc ici les notations de la section précédente, à savoir que l'on considère deux états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  correspondant aux états de deux cellules successives à une itération donnée et on tente de résoudre le problème de Riemann (4.32). Nous en avons proposé dans la section précédente une résolution partielle au sens où nous avons fait des hypothèses *a priori*. Il manque donc, pour compléter la résolution, des informations concernant les contributions non conservatives et le signe de  $m$ . Pour y remédier, les deux paragraphes suivants décrivent différentes stratégies. En complément de notre description de ces méthodes, on renvoie le lecteur à l'article correspondant [6], rédigé au cours de la présente thèse.

#### Méthode itérative

Nous proposons tout d'abord une méthode itérative. Rappelons que, dans le théorème 4.3, les relations (4.35e) et (4.35f) n'ont pas été utilisées. Ici, la première nous sert à exprimer la contribution  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  en fonction des états gauche et droit et de la contribution  $\mathcal{M}_{\rho u}$ . Reprenons pour cela l'équation (4.46) et effectuons le rapide calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\rho\pi} &= m[\pi_1]_{-}^{+} + a_1^2[\alpha_1 u_1]_{-}^{+} \\ &= m[\pi_1]_{-}^{+} + a_1^2(\alpha_{1d}u_{1+} - \alpha_{1g}u_{1-}) \\ &= m[\pi_1]_{-}^{+} + a_1^2(m(\tau_{1+} - \tau_{1-}) + (\alpha_{1d} - \alpha_{1g})u_2) \\ &= m[\mathcal{S}_1]_{-}^{+} + a_1^2 u_2 (\alpha_{1d} - \alpha_{1g}), \end{aligned} \tag{4.50}$$

et grâce à l'équation (4.35e), on a que  $[\mathcal{S}_1]_{-}^{+} = 0$  et par suite

$$\mathcal{M}_{\rho\pi} := \mathcal{M}_{\rho\pi}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}) = a_1^2 u_2 (\alpha_{1d} - \alpha_{1g}). \tag{4.51}$$

Il manque désormais deux informations : la contribution non conservative  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et le signe du débit  $m$ . La contribution s'obtient grâce à une résolution itérative sur l'équation non linéaire (4.35f) : on réinjecte dans cette relation les formules des états intermédiaires  $\mathbf{U}_-$  et  $\mathbf{U}_+$ , qui sont fonctions des états gauche et droit et de  $\mathcal{M}_{\rho u}$ , obtenues dans le théorème 4.3. On obtient alors un polynôme de degré quatre en  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et qui diffère selon le signe de  $m$ . Pour connaître maintenant le signe du débit, on fait le raisonnement suivant : pour une grandeur  $|\alpha_{1d} - \alpha_{1g}|$  suffisamment petite, le signe de  $m$  est le même que dans le cas où  $\alpha_{1d} := \alpha_{1g}$  (cas dit *découplé* explicitement résolu). On définit

alors l'algorithme de résolution du problème de Riemann suivant.

```

1  m0 = calcul_m_cas_decouplé;
2  Si (m0 < 0)
3    Mrhou = newton_cas_m_negatif();
4    calcul_solution_pbRiemann_cas_m_negatif(u2, u1+, ..., m);
5    si (m > 0) aller_à 7;
6  sinon
7    Mrhou = newton_cas_m_positif();
8    calcul_solution_pbRiemann_cas_m_positif(u2, u1+, ..., m);
9    si (m < 0) aller_à 3;
10 fin si

```

La fonction dite *Newton* fait, comme son nom l'indique, appel à une méthode itérative de Raphson-Newton avec comme valeur d'initialisation  $\mathcal{M}_{pu}^0 = 0$  (cas découplé). Le critère de précision sur l'erreur relative exigé pour la convergence est de l'ordre de  $10^{-9}$ . Commentons maintenant les lignes 5 et 9 de l'algorithme. Ceci est en fait une modification ajoutée lors de tests numériques. On remarque que, à données initiales fixées, pour des grandeurs  $|\alpha_{1d} - \alpha_{1g}|$  excédant un certain seuil, le signe de  $m$  n'est plus le même que celui du débit dans le cas où  $\alpha_{1d} := \alpha_{1g}$ . Dans ce cas, le choix fait n'est pas le bon mais converge tout de même vers une valeur dont le signe est correct. D'où les deux lignes d'ajout dans l'algorithme. Nous appelons cette méthode numérique « *Relax-exact* » dans la section sur les résultats numériques.

### Préservation des discontinuités de contact pures

La méthode itérative que nous venons de définir n'est pas totalement satisfaisante : d'une part elle fait appel à un algorithme où on postule le signe du débit de masse relatif et d'autre part on peut remarquer que toute  $\lambda_0$ -discontinuité de contact isolée du système initial ne sera pas préservée. En effet, si on considère deux états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  correspondant aux états de deux cellules successives pour le système bifluide initial et qu'on suppose que ceux-ci sont séparés par une onde de couplage pure, alors la solution du problème de Riemann (4.32) avec comme condition initiale  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  ne consiste pas *nécessairement* en une onde de couplage pure. Commentons en détail ce point important.

Selon la description précédente de la méthode numérique on a la définition suivante :

$$\mathbf{U}_{g,d} = \begin{pmatrix} (\alpha_1)_{g,d} \\ (\mathbf{U}_1)_{g,d} \\ (\mathbf{U}_2)_{g,d} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{U}_k)_{g,d} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_k)_{g,d} \\ (\alpha_k \rho_k \pi_k)_{g,d} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \quad (4.52)$$

avec

$$(\pi_k)_{g,d} = p_k((\rho_k)_{g,d}), \quad (4.53)$$

que l'on appelle également condition d'équilibre : la condition initiale pour chaque problème de

Riemann du système de relaxation est construite en considérant l'équilibre des pressions entre  $\pi_k$  et  $p_k$  pour  $k = 1, 2$ . Ainsi, si les états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont séparés par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact pure, c'est-à-dire que les relations de saut du théorème 4.1 sont vérifiées, alors les états  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  vérifient les relations de saut du théorème 4.2 sauf, *en général*, les relations (4.35e) et (4.35f). Ils ne sont donc pas séparés par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact pure. Il y a deux raisons à cela. Reprenons tout d'abord l'équation (4.35e) qui nous dit que

$$\mathcal{I}_{1g} = \mathcal{I}_{1d}$$

ou encore

$$\pi_{1g} + a_1^2 \tau_{1g} = \pi_{1d} + a_1^2 \tau_{1d}.$$

Étant donnée la condition d'équilibre des états  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  écrite plus haut, on a donc

$$p_1(\rho_{1g}) + a_1^2 \tau_{1g} = p_1(\rho_{1d}) + a_1^2 \tau_{1d}.$$

La loi de pression  $p_1$  est convexe, on peut donc en déduire que

$$\rho_{1g} = \rho_{1d}$$

qui n'est pas une relation inconditionnelle pour connecter les deux états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  par une onde de couplage pure c'est-à-dire vérifier les conditions de saut du théorème 4.1. Ainsi, on décide de modifier la contribution non conservative  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  en posant dans un premier temps :

$$\llbracket \mathcal{I}_1 \rrbracket_-^+ = \mathcal{I}_{1d} - \mathcal{I}_{1g}, \quad (4.54)$$

ce qui amène, selon le calcul (4.50), à définir la contribution non conservative suivante :

$$\mathcal{M}_{\rho\pi}^e = m(\mathcal{I}_{1d} - \mathcal{I}_{1g}) + a_1^2 u_2 (\alpha_{1d} - \alpha_{1g}). \quad (4.55)$$

La seconde raison provient, comme nous l'avons dit, de la différence entre les équations (4.14e) et (4.35f) et en particulier le fait que si les états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  vérifient la relation (4.14e) alors les états  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  ne vérifient pas forcément la relation (4.35f). Si on transforme ces deux équations en équations non linéaires sur les contributions non conservatives, ceci peut s'exprimer par le fait que l'on a

$$\mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) \neq \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d),$$

en général. De ces considérations, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

**Proposition 4.5.** *Soient deux états constants subsoniques  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  appartenant à  $\Omega$  et séparés par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact pure. Alors la solution du problème de Riemann suivante*

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho\pi}^e) \quad (4.56)$$

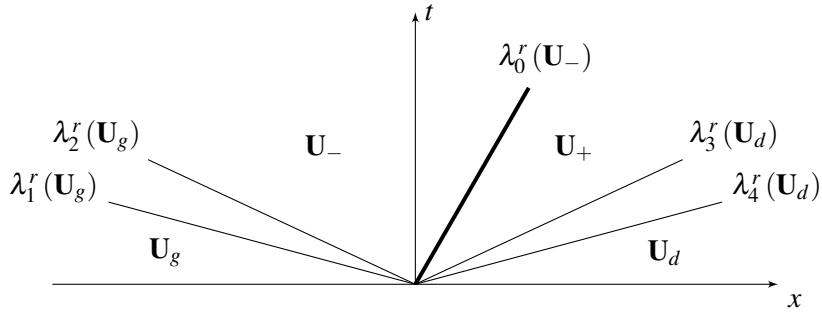


FIGURE 4.3 – Structure générale de la solution du problème de Riemann (4.32) munie de la contribution non conservative  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  dans le cas d'un écoulement subsonique

où

$$\mathcal{M}_{\rho u}^e := \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) \quad (4.57)$$

consiste en une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact isolée. De plus, le débit de masse à l'interface est donné par la relation

$$m^e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) = \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + a_1(2(\alpha u)_* - u_2(\alpha_{1g} + \alpha_{1d}))}{\lambda_2^r(\mathbf{U}_d) - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)}, \quad (4.58)$$

et on a également :

$$\rho_{1-} = \rho_{1g}^* \quad \text{et} \quad \rho_{1+} = \rho_{1d}^*. \quad (4.59)$$

*Démonstration.* La formule (4.58) s'obtient en injectant l'expression de  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  dans les expressions (4.42) et (4.43) dans les deux cas  $m < 0$  et  $m > 0$ . Concernant les égalités (4.59), elles résultent des considérations faites précédemment : comme on a imposé  $[\mathcal{S}_1]_-^+ = \mathcal{S}_{1d} - \mathcal{S}_{1g}$ , ceci implique que  $\mathcal{S}_1$  est maintenant continue de part et d'autre de l'onde de vitesse  $\lambda_5^r$ . Comme  $\pi_1$  l'est aussi et qu'on a, par définition,  $\mathcal{S}_1 = \pi_1 + a_1^2 \tau_1$  alors la densité  $\rho_1$  de la phase 1 est aussi continue. En réalité, ce choix particulier entraîne que cette onde est « transparente » et on peut alors représenter la nouvelle structure de la solution du problème de Riemann sur la figure 4.3.  $\square$

Grâce à cette dernière proposition et à la modification des contributions non conservatives, nous avons obtenu une formulation explicite de la solution du problème de Riemann pour le système de relaxation dans le cas de deux états séparés par une onde de couplage pure.

Il reste cependant un dernier point à aborder : connaître les contributions lorsque les états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont deux états quelconques. On va ainsi chercher, de manière naturelle, une estimation de la contribution  $\mathcal{M}_{\rho u}^e$  consistante avec la proposition précédente. Pour cela, on va considérer l'état  $\mathbf{u}_g$  d'une cellule du maillage puis reconstruire l'unique état  $\mathbf{u}_+(\mathbf{u}_g, \alpha_{1d})$  selon le théorème 4.1. Remarquons que pour cette étape de reconstruction, on doit utiliser une méthode itérative pour résoudre l'équation non linéaire (4.14e). La même opération est réalisée en considérant l'état  $\mathbf{u}_d$  et en reconstruisant l'état  $\mathbf{u}_-(\mathbf{u}_d, \alpha_{1g})$ . Ensuite, on détermine la contribution non conservative de



la manière suivante :

$$\mathcal{M}_{\rho u}^e := \begin{cases} \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_g, \alpha_{1d})) & \text{si } \|\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_g, \alpha_{1d})\| < \|\mathbf{u}_-(\mathbf{u}_d, \alpha_{1g}) - \mathbf{u}_d\|, \\ \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{u}_-(\mathbf{u}_d, \alpha_{1g}), \mathbf{u}_d) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.60)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. Remarquons que ce choix est consistant avec la définition (4.57). Une telle méthode nous permet donc de préserver de manière exacte les discontinuités de contact pures associées au modèle initial. Il nécessite en outre l'utilisation d'un algorithme de Newton, par exemple, pour reconstruire les états fictifs. Dans la section sur les résultats numériques, la méthode par relaxation munie des contributions  $(\mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$  sera appelée « *Relax(1)* ».

**Remarque 4.6.** Une deuxième possibilité est de considérer l'état  $\mathbf{U}_g$  associé au modèle de relaxation dans le problème de Riemann (4.32) et de reconstruire l'état  $\mathbf{U}_+(\mathbf{U}_g, \alpha_{1d})$  grâce au théorème 4.2. L'autre étape consiste à faire de même avec l'état  $\mathbf{U}_d$  puis de reconstruire l'état  $\mathbf{U}_-(\mathbf{U}_d, \alpha_{1g})$ . On détermine ensuite la contribution non conservative comme :

$$\mathcal{M}_{\rho u}^r := \begin{cases} \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_+(\mathbf{U}_g, \alpha_{1d})) & \text{si } \|\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_+(\mathbf{U}_g, \alpha_{1d})\| < \|\mathbf{U}_-(\mathbf{U}_d, \alpha_{1g}) - \mathbf{U}_d\|, \\ \mathcal{M}_{\rho u}(\mathbf{U}_-(\mathbf{U}_d, \alpha_{1g}), \mathbf{U}_d) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.61)$$

L'intérêt de la méthode est ici de connaître explicitement l'état reconstruit. Il n'y a plus d'étape itérative à réaliser et le coût CPU en est ainsi diminué. L'inconvénient est que les  $\lambda_0$ -discontinuités de contact pure ne seront plus préservées. Nous appelons dans la suite la méthode numérique basée sur l'approche par relaxation munie du choix  $(\mathcal{M}_{\rho u}^r, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$  la méthode « *Relax(2)* ».

Nous terminons cette section en énonçant les différentes propriétés de précision et de stabilité de la méthode par relaxation munie des contributions non conservatives  $(\mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$ .

**Proposition 4.6.** (Solution du problème de Riemann  $(x, t) \mapsto \mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$ )

Soient  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  deux états constants dans  $\Omega$ , et soient  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  les deux états équilibres définis par (4.52) et (4.53).

(i) Conservativité. La solution du problème de Riemann  $\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$  satisfait les trois (respectivement quatre) lois de conservation si  $\alpha_{1g}$  est différent de (resp. égal à)  $\alpha_{1d}$  :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_1 \pi_1 + \alpha_2 \pi_2) = 0, \end{cases}$$

resp.

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, les masses partielles des deux phases et la quantité de mouvement totale du fluide (respectivement les quantités de mouvement des deux phases) sont strictement conservées lorsque  $\alpha_{1g} \neq \alpha_{1d}$  (resp. lorsque  $\alpha_{1g} = \alpha_{1d}$ ).

(ii)  $L^1$ -stabilité. Pourvu que les paramètres  $a_1 = a_1(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d)$  et  $a_2 = a_2(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d)$  sont choisis suffisamment grands selon la condition (4.20), la solution du problème de Riemann  $\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$  appartient à l'espace des états  $\Omega^r$ .

(iii) Onde de couplage. Supposons que  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont joints par une onde de couplage pure du système initial (4.5), i.e. les relations de saut du théorème 4.1 sont vérifiées. Alors, la solution du problème de Riemann  $\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$  est exacte au sens où elle consiste en une onde de couplage pure séparant les états  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  et se propageant à la vitesse  $u_{2g} = u_{2d}$ .

*Démonstration.* (i) Par construction de la méthode, ces lois de conservation sont bien respectées. (ii) On doit ici vérifier que  $\alpha_k(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \in (0, 1)$  et  $\rho_k(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) > 0$  avec  $k = 1, 2$  pour tout  $(x, t)$ ,  $t > 0$ . La première condition est évidente puisque  $\alpha_k$  évolue selon une équation de transport et est égale soit à  $\alpha_{kg}$  soit à  $\alpha_{kd}$ . Concernant le second point, grâce au théorème 4.3, on sait que les signes des densités  $\rho_{1-}, \rho_{1+}, \rho_{2-}$  et  $\rho_{2+}$  sont respectivement les mêmes que les signes de  $u_{1-} - \lambda_1^r(\mathbf{U}_g)$ ,  $\lambda_2^r(\mathbf{U}_d) - u_{1+}$ ,  $u_2 - \lambda_3^r(\mathbf{U}_g)$  et  $\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) - u_2$ . Il est donc clair, par définition des valeurs propres  $\lambda_p^r$ ,  $p = 1, \dots, 4$ , que ces quantités sont nécessairement positives pour des valeurs suffisamment grandes de  $a_1$  et  $a_2$  (notons aussi que  $u_{1\pm}$  et  $u_2$  restent bornés dans ce cas).

(iii) Ce résultat découle du discours effectué précédemment sur la préservation des ondes de couplage pures. En effet, les contributions  $\mathcal{M}_{\rho u}^e$  et  $\mathcal{M}_{\rho \pi}^e$  ont été construites de manière à préserver les ondes de couplage pures du système initial. Ainsi, dans ce cas précis, la solution du problème de Riemann pour le système de relaxation muni de ces contributions non conservatives dites « équilibrées » dégénère bien vers une onde de couplage pure de vitesse  $u_{2g} = u_{2d}$ .  $\square$

**Remarque 4.7.** Dans la pratique et selon la condition (4.20), les paramètres  $a_1 = a_1(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d)$  et  $a_2 = a_2(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d)$  sont définis de sorte que

$$a_k(\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_d) > \max(\rho_{kg} c_k(\rho_{kg}), \rho_{kd} c_k(\rho_{kd})), \quad k = 1, 2.$$

On peut maintenant formuler le théorème suivant sur l'approche par relaxation.

**Théorème 4.4. (L'approche par relaxation)** L'approche par relaxation munie des contributions  $(\mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e)$  possède les propriétés suivantes.

- (i) Conservativité. L'approche est toujours strictement conservative en  $\alpha_k \rho_k$ ,  $k = 1, 2$  et en  $\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2$ , mais aussi en  $\alpha_k \rho_k u_k$ ,  $k = 1, 2$  si  $\alpha_{1j}$  est constant pour tout  $j$ ;
- (ii)  $L^1$ -stabilité. Les solutions restent dans l'espace des états pourvu que les paramètres  $a_k = a_k(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})$ ,  $k = 1, 2$  soient choisis suffisamment grands pour tout  $j$ ;
- (iii) (Onde de couplage) : capture exactement les ondes de couplage isolées du système initial.

**Remarque 4.8.** Étant donnée la procédure de moyenne (4.49), notons que seules les ondes de couplage isolées et stationnaires seront exactement restaurées par la méthode.

**Remarque 4.9.** La propriété (i) fait référence aux variables qui évoluent via une formule de mise à jour sous une forme conservative du temps  $t^n$  au temps  $t^{(n+1)-}$ . Plus généralement, en utilisant la formule de Green et grâce à la définition (4.49), on a la formule de mise à jour sous une forme non conservative :

$$\mathbf{U}_j^{n+1-} = \mathbf{U}_j^n - \nu(\mathbf{g}_{j+1/2}^- - \mathbf{g}_{j-1/2}^+) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{U}_\nu(x, t)) \partial_x \mathbf{U}_\nu(x, t) dx dt,$$

avec

$$\mathbf{g}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{F}\left(\mathcal{W}(((j+1/2)\Delta x)^\pm; \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n, (\mathcal{M}_{\rho u}^e)_{j+1/2}, (\mathcal{M}_{\rho \pi}^e)_{j+1/2})\right).$$

En particulier, les variables dont les équations d'évolution ne contiennent pas de termes non conservatifs sont bien traitées dans une formule de mise à jour conservative.

## 4.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons des résultats de simulations numériques du modèle bifluide à deux pressions isentropique par phase. Pour chaque test, nous comparons quatre méthodes différentes que nous notons *Rusanov*, *Relax-exact*, *Relax(1)*, *Relax(2)*. Le nom *Rusanov* correspond à une version non conservative du schéma de Rusanov dont on peut trouver la description en détails dans [45]. Nous proposons deux types de simulations. Tout d'abord, le système sans terme source est simulé. Cette partie est relatée dans la sous-section « Pressions hors équilibre ». Ensuite, dans une seconde partie appelée « Équilibre des pressions », nous rajoutons un terme source raide de relaxation sur les pressions des phases dans l'équation sur le taux de présence  $\alpha_1$ .

### 4.4.1 Pressions hors équilibre

Dans cette étude, les lois de pressions des phases sont du type gaz parfaits c'est-à-dire

$$p_k(\rho_k) = A_k \rho_k^{\gamma_k}, \quad k = 1, 2, \quad (4.62)$$

où  $\gamma_k$  est le coefficient adiabatique de la phase  $k$  et  $A_k$  est une constante qui dépend de l'entropie du gaz associé à la phase  $k$ . Nous prendrons dans les tests qui suivent cette constante égale à  $10^5$  pour  $k = 1, 2$  et de plus on choisit  $\gamma_1 = 1.4$  et  $\gamma_2 = 1.2$ . Le maillage est composé de 200 cellules. Les tests sont effectués sur le domaine  $[0, 20]$  et les conditions de bord sont du type Neumann. Enfin les conditions initiales sont le problème de Riemann

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_g & \text{si } x < 10, \\ \mathbf{u}_d & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

### Onde de couplage stationnaire pure

Ce premier cas test considère un état gauche  $\mathbf{u}_g$  et une fraction à droite  $\alpha_{1d}$  donnés dans le tableau 4.1. Grâce au théorème 4.1, l'état droit est reconstruit comme  $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_g, \alpha_{1d})$ . Rappelons que pour résoudre alors l'équation (4.14e), on doit faire appel à un algorithme itératif (Newton en l'occurrence). Comme nous avons choisi dans ce test  $u_{2g} = 0$ , alors on a (grâce à la relation (4.14a))  $u_2 := u_{2g} = u_{2d} = 0$ . Il s'en suit que les deux états  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont séparés par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact stationnaire pure. Ceci va nous permettre de comparer les différentes méthodes et leur aptitude à préserver de telles solutions.

	Unité	$g$	$d$
$\alpha_1$	-	0.8	0.2
$p_1$	$10^5$ Pa	1.25	$p_1(\rho_{1d})$
$p_2$	$10^5$ Pa	1.25	$p_2(\rho_{2d})$
$u_1$	m/s	50	$u_{1d}$
$u_2$	m/s	0	$u_{2d}$

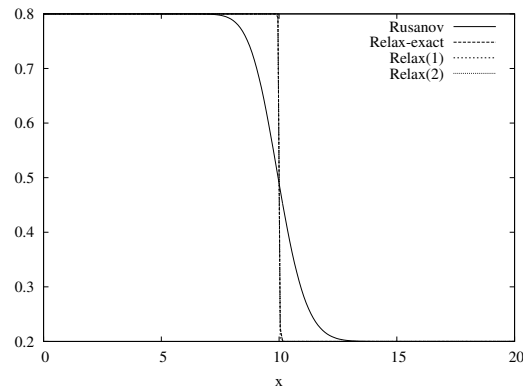
TABLE 4.1 – Onde de contact pure : conditions initiales

Les résultats de la simulation avec les différents solveurs sont donnés au temps final  $t = 0.02$  s sur la figure 4.4. Ces résultats sont conformes avec nos attentes : seul le solveur *Relax(1)* préserve exactement la discontinuité en  $x = 10$  m c'est-à-dire que la vitesse de la phase 2 reste nulle. Les autres méthodes basées sur l'approche par relaxation diffusent légèrement le profil. Le schéma de Rusanov est encore beaucoup plus diffusif.

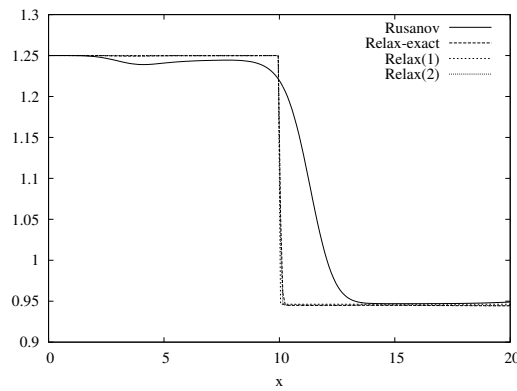
Ce test montre bien que l'utilisation du couple de contributions non conservatives ( $\mathcal{M}_{\rho u}^e, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e$ ) pour la méthode *Relax(1)* permet de capturer de manière exacte les ondes de couplage isolées. La méthode *Relax-exact* étant basée sur la méthode itérative pour déterminer explicitement la solution du problème de Riemann avec les contributions ( $\mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho \pi}$ ) (c'est-à-dire les « vraies » contributions initiales dans le système de relaxation) nous donne en revanche des solutions approchées. D'autre part, concernant la méthode *Relax(2)*, comme nous l'avons remarqué à la fin de la section précédente, le couple de contributions non conservatives utilisé est ( $\mathcal{M}_{\rho u}^r, \mathcal{M}_{\rho \pi}^e$ ). En d'autres termes, la contribution  $\mathcal{M}_{\rho u}^r$  n'est pas consistante lorsque deux états constants sont séparés par une onde de couplage isolée : son estimation fait en effet appel aux formules de saut pour le système de relaxation qui sont différentes de celles pour le système initial. Notons cependant que les erreurs numériques de ces deux dernières méthodes sont très faibles comparées au schéma de Rusanov.

### Onde de couplage en mouvement

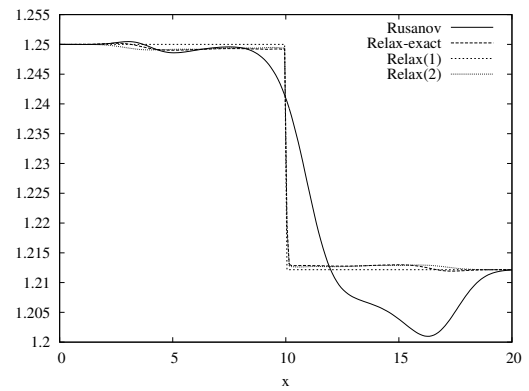
Les conditions initiales de ce cas test sont données dans le tableau 4.2. Les données sont toutes constantes sur le domaine sauf la fraction  $\alpha_1$ . Dans une telle configuration, comme nous avons  $p_1 = p_2$  et  $u_1 = u_2$ , alors les deux états  $\mathbf{u}_g$  and  $\mathbf{u}_d$  vérifient les relations de saut (4.14) avec  $m = 0$ . Autrement dit, les deux états sont séparés par une  $\lambda_0$ -discontinuité de contact pure de



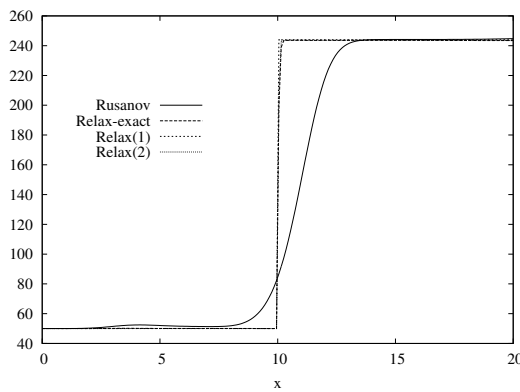
(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



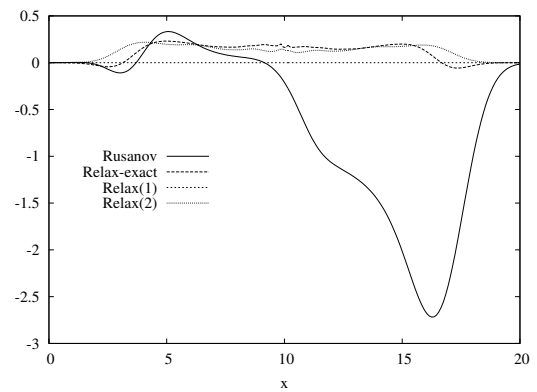
(b) Pression  $p_1$  ( $10^5$  Pa)



(c) Pression  $p_2$  ( $10^5$  Pa)



(d) Vitesse  $u_1$  (m/s)



(e) Vitesse  $u_2$  (m/s)

FIGURE 4.4 – Onde de contact pure stationnaire : résultats numériques

vitesse  $u_2 = 50$  m/s.

	Unité	$g$	$d$
$\alpha_1$	-	0.8	0.2
$p_1$	$10^5$ Pa	1.25	1.25
$p_2$	$10^5$ Pa	1.25	1.25
$u_1$	m/s	50	50
$u_2$	m/s	50	50

TABLE 4.2 – Onde de couplage en mouvement : conditions initiales

Les résultats sont tracés au temps final  $t = 0.05$  s sur la figure 4.5. On peut facilement remarquer que les profils uniformes sont conservés par toutes les méthodes. Notons aussi que les solveurs basés sur l’approche par relaxation donnent des profils similaires pour la fraction  $\alpha_1$ . Ceux-ci sont beaucoup moins diffusés que ceux obtenus avec le schéma de Rusanov.

### Tube à choc

Les conditions initiales de ce test du type tube à choc sont données dans le tableau 4.3. Les

	Unité	$g$	$d$
$\alpha_1$	-	0.8	0.2
$p_1$	$10^5$ Pa	1.5	1.0
$p_2$	$10^5$ Pa	1.5	1.0
$u_1$	m/s	50	50
$u_2$	m/s	5	5

TABLE 4.3 – Tube à choc : conditions initiales

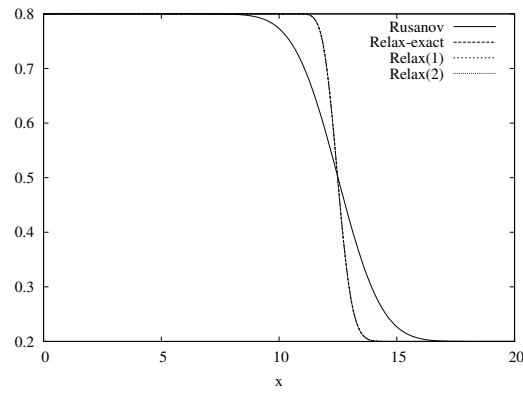
résultats, obtenus au temps final  $t = 0.01$  s, sont tracés sur la figure 4.6. Les solveurs basés sur l’approche par relaxation aboutissent à des résultats similaires. Ceux-ci sont, encore une fois, moins diffusifs que le schéma de Rusanov.

### 4.4.2 Équilibres des pressions

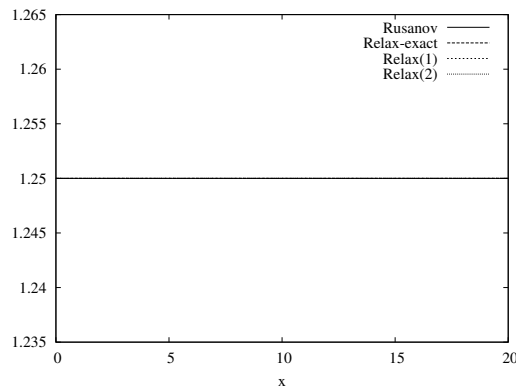
Dans cette section, nous décidons de rajouter un terme source raide de relaxation des pressions des phases dans l’équation de transport sur la fraction  $\alpha_1$ . Plus précisément, on se donne une fréquence de relaxation des pressions entre les deux phases notée  $\lambda_p$  et on réécrit la première équation dans le système comme

$$\partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = \lambda_p (p_1(\rho_1) - p_2(\rho_2)). \quad (4.63)$$

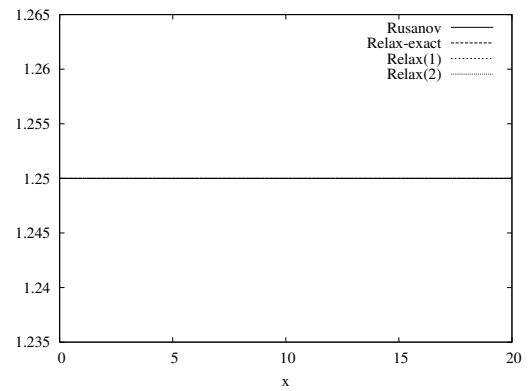
On étudie dans les tests qui suivent le régime asymptotique  $\lambda_p \rightarrow +\infty$  de sorte que l’équation (4.63) est équivalente, formellement, à la fermeture algébrique  $p_1(\rho_1) = p_2(\rho_2)$ . Numériquement,



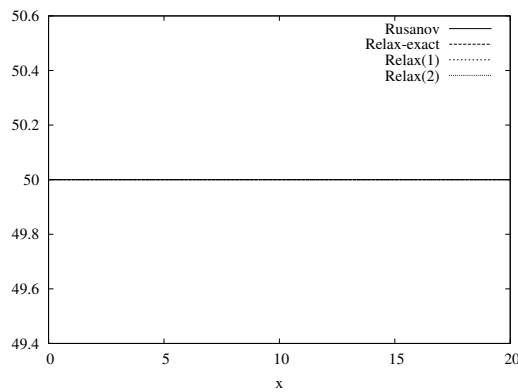
(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



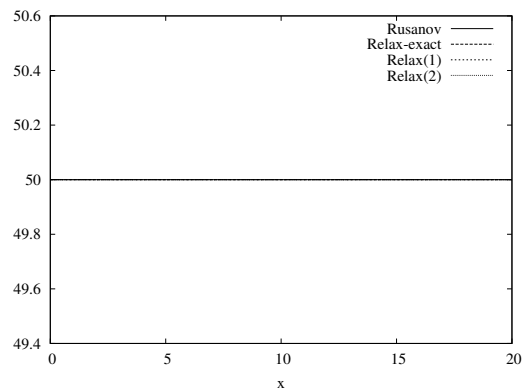
(b) Pression  $p_1$  ( $10^5$  Pa)



(c) Pression  $p_2$  ( $10^5$  Pa)

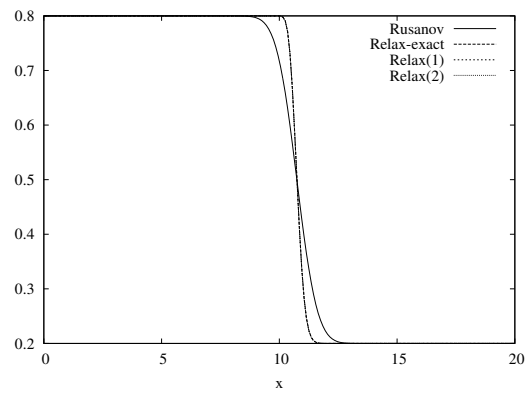


(d) Vitesse  $u_1$  (m/s)

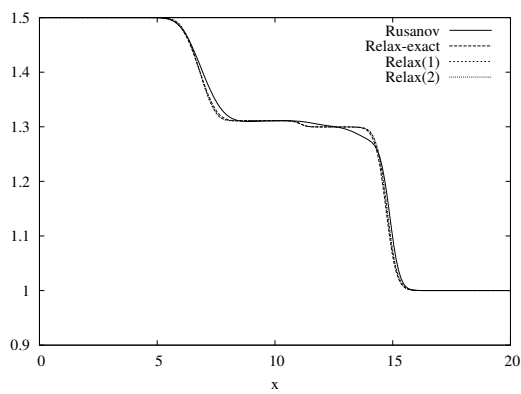


(e) Vitesse  $u_2$  (m/s)

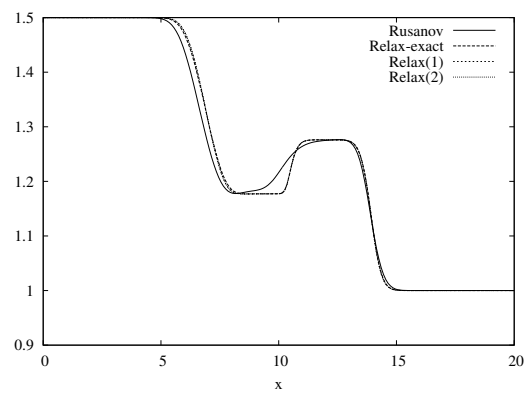
FIGURE 4.5 – Onde de couplage en mouvement : résultats numériques



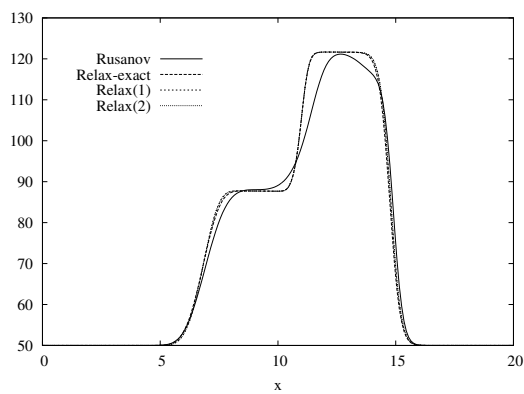
(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



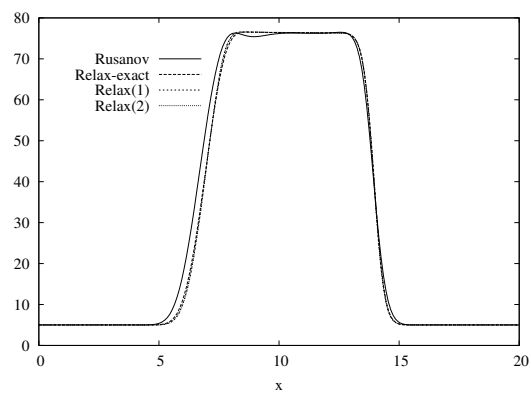
(b) Pression  $p_1$  ( $10^5$  Pa)



(c) Pression  $p_2$  ( $10^5$  Pa)



(d) Vitesse  $u_1$  (m/s)



(e) Vitesse  $u_2$  (m/s)

FIGURE 4.6 – Tube à choc : résultats numériques



cette relaxation instantanée des pressions est réalisée via une méthode de splitting.

Dans une première étape, on considère la solution discrète  $\mathbf{u}_v(x, t^n)$  au temps  $t^n$ . On résout alors la partie convective du système sur tout le domaine en espace grâce à un des solveurs de Riemann et on note la solution  $\mathbf{u}_v(x, t^{n,1})$ . Ensuite, la seconde étape consiste à obtenir la solution  $\mathbf{u}_v(x, t^{n+1})$  au temps  $t^{n+1}$  en posant :

$$\begin{aligned} (\alpha_k \rho_k)_j^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k)_j^{n,1}, \\ (\alpha_k \rho_k u_k)_j^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k u_k)_j^{n,1}, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

et en déterminant la fraction  $(\alpha_1)_j^{n+1}$  grâce à la résolution sur chaque cellule de l'équation

$$p_1 \left( \frac{(\alpha_1 \rho_1)_j^{n+1}}{(\alpha_1)_j^{n+1}} \right) - p_2 \left( \frac{(\alpha_2 \rho_2)_j^{n+1}}{1 - (\alpha_1)_j^{n+1}} \right) = 0. \quad (4.64)$$

Les équations d'état de l'eau et de l'air issues de l'article [78] sont utilisées ici. Elles sont données de la manière suivante

$$p_k = c_k^2 (\rho_k - \rho_k^0), \quad k = 1, 2,$$

où les constantes  $c_k$  et  $\rho_k^0$  sont respectivement la vitesse du son et la densité de référence de la phase  $k$ . Les valeurs de ces constantes sont données dans le tableau 4.4.

	$c_k$ (m/s)	$\rho_k^0$ (kg/m <sup>3</sup> )
Air (1)	$\sqrt{10^5}$	0
Eau (2)	1000	999.9

TABLE 4.4 – Constantes de l'équation d'état issues de [78]

L'équation (4.64) munie de ces lois d'état peut être ainsi résolue explicitement. La fraction  $(\alpha_1)_j^{n+1}$  vérifie alors :

$$(\alpha_2)_j^{n+1} = 1 - (\alpha_1)_j^{n+1} = \frac{-\psi_2 - \sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3}}{2\psi_1}, \quad (4.65)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c_2^2 \rho_2^0 - c_1^2 \rho_1^0, \\ \psi_2 &= -c_2^2 ((\alpha_2 \rho_2)_j^{n+1} + \rho_2^0) + c_1^2 (-(\alpha_1 \rho_1)_j^{n+1} + \rho_1^0), \\ \psi_3 &= c_2^2 (\alpha_2 \rho_2)_j^{n+1}. \end{aligned}$$

### Tube à choc à grande vitesse relative

Ce cas test provient de l'article [78]. La longueur du domaine est maintenant 100 m et les conditions initiales sont telles que

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_g & \text{si } x < 50, \\ \mathbf{u}_d & \text{si } x > 50, \end{cases}$$

avec  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  donnés dans le tableau 4.5. La solution est approchée sur un maillage composé de 1000 cellules et les conditions aux bords sont toujours du type Neumann.

	Unité	$g$	$d$
$\alpha_1$	-	0.29	0.30
$p$	$10^5$ Pa	2.65	2.65
$u_1$	m/s	65	50
$u_2$	m/s	1	1

TABLE 4.5 – Tube à choc à grande vitesse relative : conditions initiales

Les résultats sont tracés au temps final  $t = 0.1$  s sur la figure 4.7. Ceux-ci sont bien similaires à ceux obtenus dans [78] avec un schéma d'ordre un.

### Robinet de Ransom

Le robinet de Ransom est un cas-test industriel monodimensionnel classique dans la simulation d'écoulements diphasiques et est décrit en détail dans [80]. Celui-ci consiste en un écoulement d'eau et d'air dans un tube vertical de longueur 12 m et de diamètre 1 m soumis à la gravité. À la température  $T = 50$  °C, on considère un écoulement d'eau (phase 2) rentrant en haut du tube en  $x = 0$  m avec les conditions d'entrée données dans le tableau 4.6. L'extrémité du tube en  $x = 12$  m est ouverte et soumise à la pression atmosphérique  $p = 10^5$  Pa (conditions de sortie). L'entrée du tube en  $x = 0$  m est fermée à l'air (phase 1), *i.e.*

$$u_1(x = 0, t) = 0.$$

Les conditions initiales sur le domaine sont données égales aux conditions d'entrée. Dans ce test, la gravité a été ajoutée aux forces extérieures et l'équation d'évolution de la quantité de mouvement de la phase  $k$  s'écrit maintenant :

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + p_k(\rho_k)) - p_1(\rho_1) \partial_x \alpha_k = \alpha_k \rho_k g, \quad k = 1, 2.$$

Concernant la méthode numérique, le terme source  $\alpha_k \rho_k g$  est pris en compte dans la seconde étape du splitting via une méthode explicite centrée. Les conditions de bord en entrée sont fixées, tandis que pour les conditions de bords en sortie on résout un demi-problème de Riemann au sens de

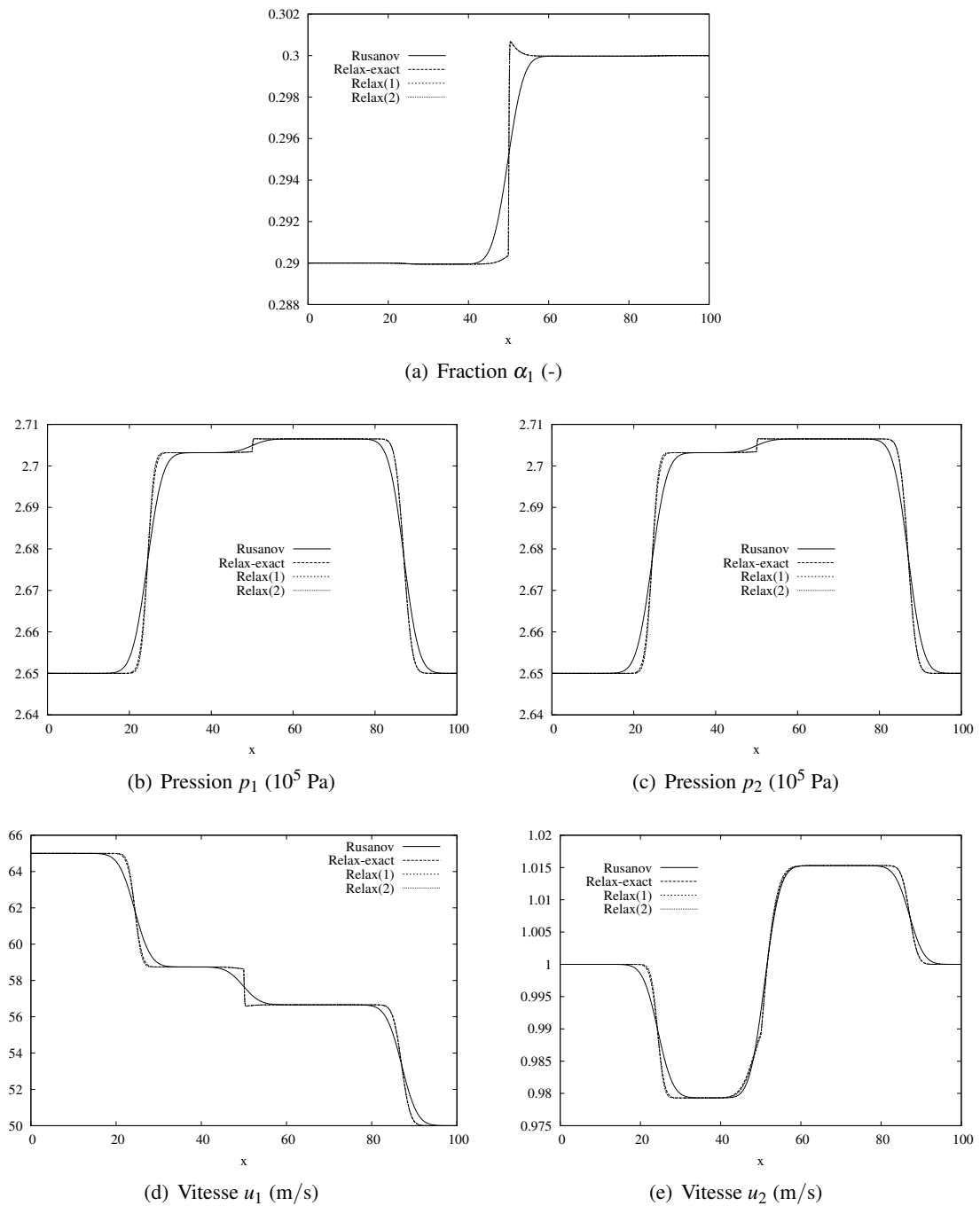


FIGURE 4.7 – Tube à choc à grande vitesse relative : résultats numériques

Dubois [39]. En raison des effets de gravité, un jet liquide mince va se former. Classiquement, on

	Unité	Entrée	Sortie
$\alpha_1$	-	0.2	-
$p$	$10^5$ Pa	1.0	1.0
$u_1$	m/s	0	-
$u_2$	m/s	10	-

TABLE 4.6 – Robinet de Ransom : conditions initiales

trace une solution de référence correspondante à la solution d'un modèle approché :

$$\partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2^2) = \alpha_2 \rho_2 g,$$

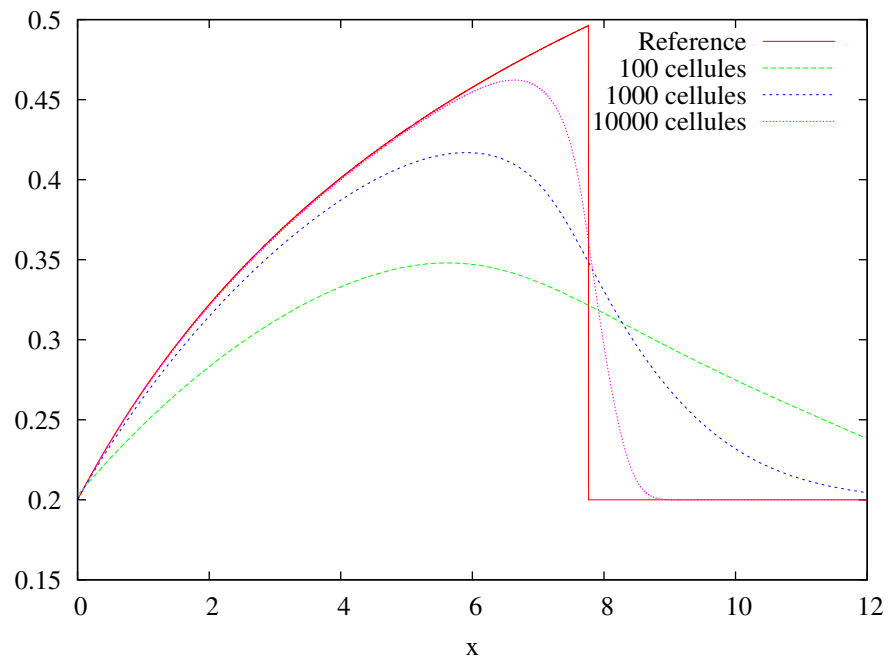
dont la solution analytique pour la fraction d'air  $\alpha_1$  est :

$$\alpha_1(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_2^0 u_2^0}{\sqrt{2gx + (u_2^0)^2}}, & \text{si } x \leq u_2^0 t + \frac{1}{2}gt^2, \\ 1 - \alpha_2^0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

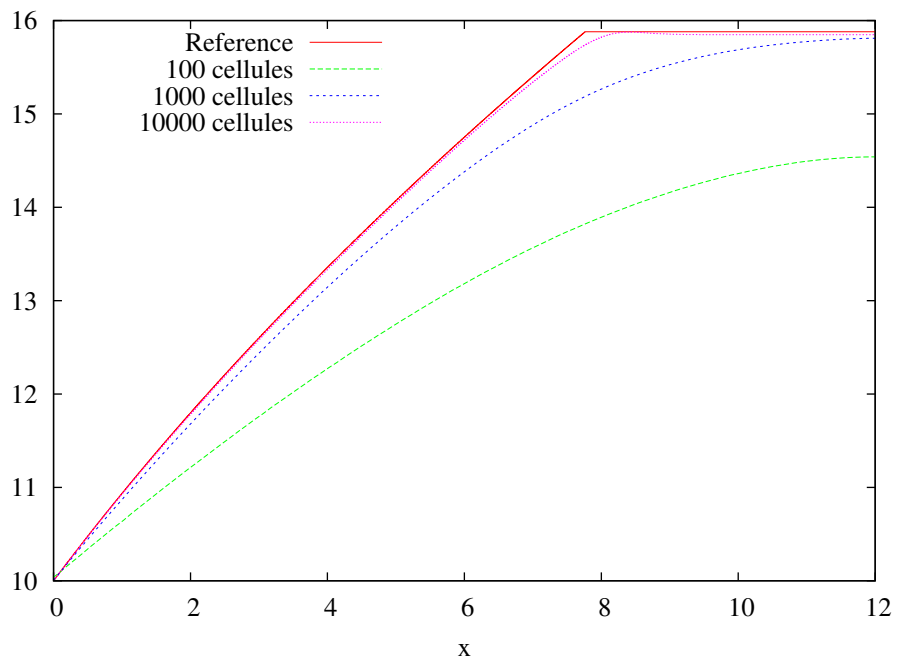
où  $\alpha_2^0 = \alpha_2(x, t = 0)$  et  $u_2^0 = u_2(x, t = 0)$ . Pour la vitesse de l'eau on a :

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \sqrt{(u_2^0)^2 + 2gx}, & \text{si } x \leq u_2^0 t + \frac{1}{2}gt^2, \\ u_2^0 + gt, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les résultats numériques avec le schéma *Relax(2)* sont tracés sur la figure 4.8 pour différents maillages. En effet, les autres solveurs par relaxation donnent des résultats identiques. Les résultats obtenus sont similaires à ceux de [78] avec un schéma d'ordre un pour le système bifluide à deux pressions et une relaxation instantée en pression.



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



(b) Vitesse  $u_2$  (m/s)

FIGURE 4.8 – Robinet de Ransom : résultats numériques

---

## Couplage interfacial d'un modèle bifluide à deux pressions avec un modèle de drift-flux

---

L'objectif de ce chapitre est l'étude du couplage interfacial entre le modèle bifluide à deux pressions du chapitre précédent et un modèle dit de drift-flux (ou flux de dérive). Le modèle de drift considère l'évolution des grandeurs physiques associées au mélange que constitue le fluide diphasique. C'est donc un modèle de mélange. L'échelle de description est moins fine que pour un modèle bifluide. Le travail pionnier de Zuber et Findlay dans [88] montre l'obtention de ce type de modèles. On peut prendre aussi l'exemple de [58] où les auteurs établissent un modèle de drift à partir des équations d'évolution du système bifluide à une pression. Comme pour le modèle homogène de relaxation (ou HRM, voir chapitre 1), le modèle de drift-flux considère l'équilibre des pressions entre les phases. La différence entre les deux modèles porte sur l'équilibre des vitesses des phases. Dans le cas du modèle HRM, cet équilibre est traduit par l'égalité entre les deux vitesses. Le modèle de drift-flux est, en revanche, non homogène c'est-à-dire que les vitesses des phases ne sont pas supposées égales. L'équilibre cinématique est donné par une fermeture algébrique sur la vitesse relative appelée *loi de drift* du type

$$u_r = u_2 - u_1 = \Phi(\mathbf{u}), \quad (5.1)$$

où  $u_r$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $\mathbf{u}$  sont respectivement la vitesse relative, les vitesses des phases 1 et 2 et le vecteur des inconnues du système. La formulation de cette fermeture intervient lorsque l'écoulement diphasique est soumis à un champ de forces telles que la gravité. La forme de la fonction  $\Phi$  dépend de la topologie de l'écoulement et des forces en présence et est généralement obtenue empiriquement. Dans le cas du modèle HRM, on a donc  $\Phi = 0$ .

Comme dans les cas de couplage abordés précédemment, nous allons subdiviser le domaine en espace en deux par une interface infiniment mince et suivre l'évolution d'un écoulement diphasique *via* la représentation du modèle bifluide dans le premier domaine et la représentation drift-flux dans le second. Nous choisissons ici le cadre unidimensionnel c'est pourquoi le domaine du modèle bifluide sera donné par le sous-espace  $x < 0$  et celui du modèle de drift par  $x > 0$ . Les conditions de couplage que nous utiliserons dans ce travail reprennent le principe de la technique du modèle d'interface ou modèle père. Dans [62], les auteurs étudient le problème du couplage entre le modèle bifluide standard à une pression et le modèle HRM. Concernant le modèle bifluide standard à une pression, l'ouvrage [79] en présente une analyse détaillée et exhaustive. Dans le cas du couplage [62], les auteurs utilisent la technique du modèle père consistant à formuler le problème de couplage *via* un seul modèle global sur tout le domaine en espace. Le modèle père, dans l'étude en question, est basé sur une formulation bifluide à deux pressions et deux vitesses. L'idée permet, au niveau discret, de calculer des flux numériques de manière unique sur chaque interface des cellules. A cette première étape convective succède alors une étape de relaxation vers les différents équilibres pris en compte par les modèles. Dans le cas de [62], il s'agit d'une relaxation instantanée en pression pour le domaine du modèle bifluide standard à une pression, et de relaxation instantanée en pression et vitesse pour le domaine du modèle HRM. La méthode s'apparente donc à un schéma du type prédicteur-correcteur par analogie avec le schéma par relaxation utilisé dans les chapitres précédents. On voit donc qu'il est indispensable, pour s'assurer de la stabilité des différents processus de retour à l'équilibre, de montrer la convergence au niveau continu du modèle père vers les deux modèles à coupler.

A la différence du travail de [62], le modèle homogène auquel on s'intéresse présente une dynamique plus complexe au sens de la fermeture (5.1). La dérivation de ce modèle à partir d'un modèle père plus fin nécessite de prendre en compte cette fermeture dans une forme la plus générale. Dans la première section, on s'intéresse à cette dérivation formelle du modèle de drift à partir du modèle bifluide à deux pressions. Ce dernier est le modèle père que nous utilisons dans la suite de notre travail. Ensuite, nous présentons dans la seconde section la technique de couplage du modèle père plus en détail ainsi que la méthode numérique qui sera employée pour la résolution discrète du problème. L'approche sera basée sur le schéma par relaxation développé dans le chapitre précédent et d'un décentrement des termes sources raides associés au retour à l'équilibre des vitesses des phases. Enfin, nous exposerons des résultats numériques dans la troisième et dernière partie.

## 5.1 Dérivation formelle du modèle de drift-flux à partir du modèle bifluide à deux pressions

Dans cette section, notre propos suit la démarche de l'article [8]. Dans ce travail, les auteurs établissent le lien formel entre un modèle bifluide à deux pressions et un modèle de drift dans le cas d'un écoulement isentropique multidimensionnel et en présence de changement de phase. Pour

cela, une analyse asymptotique du modèle bifluide est effectuée dans un régime d'écoulement où les termes source de relaxation (portant sur les pression et vitesse relatives) présents dans les équations sont très grands devant les autres termes. Dans le travail [72], une analyse de ce type est réalisée : l'auteur écrit l'équation vérifiée par la vitesse relative après quelques calculs sur les équations du modèle bifluide standard à une pression. Des simplifications basées sur les hypothèses concernant la raideur du terme source de relaxation en vitesse permettent l'écriture d'une équation différentielle ordinaire en espace qui est alors résolue numériquement et confrontée à une simulation sur le modèle standard. Les résultats obtenus montrent des profils de vitesse relative similaires. Une telle idée peut également se retrouver dans [59] où les auteurs dérivent un modèle de drift sur le même principe par un développement de Chapman-Enskog. Ils obtiennent ainsi une fermeture différentielle sur la vitesse relative entre les phases en présence qui s'apparente à une loi du type Darcy puisque faisant intervenir le gradient de pression du mélange. Les auteurs proposent en plus une méthode numérique pour le modèle asymptotique obtenu et confrontent les résultats à des simulations avec le modèle de drift. Dans notre étude, l'originalité de l'approche, issue de [8], est une étape supplémentaire à l'obtention de la fermeture différentielle sur la vitesse relative. Cette étape consiste à suivre l'évolution du fluide en coordonnées Lagrangiennes en temps grands. Ceci nous permettra d'obtenir une fermeture d'ordre zéro sur la vitesse relative, ce qui correspond bien aux formulations habituelles des modèles de drift-flux.

### 5.1.1 Présentation des deux modèles

Commençons tout d'abord par définir le cadre formel de l'étude ainsi que les deux systèmes d'équations à coupler.

Concernant le modèle bifluide, nous reprenons la formulation des grandeurs interfaciales de l'écoulement correspondant au modèle de Baer-Nunziato (voir chapitre 4) : la vitesse de l'interface est prise égale à celle de la phase dispersée et la pression interfaciale est celle de la phase continue. Précisons que notre exposé n'est pas restreint à ce type particulier de fermeture. Dans l'article [8], une forme plus générale de ces termes est utilisée. Le cas multidimensionnel avec prise en compte des termes de transfert de masse est également traité. Nous considérons ici le cas monodimensionnel sans changement de phase, sans perte de généralité. Le modèle de Baer-Nunziato est un modèle bifluide à deux pressions c'est-à-dire qu'on considère une loi de pression par phase. Le système est fermé par une équation d'advection sur le taux de présence des phases. On note le vecteur des inconnues

$$\mathbf{u} = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_2 \rho_2 u_2)^T,$$

où  $\alpha_k, \rho_k, u_k$  sont respectivement les fraction, densité et vitesse de la phase  $k = 1, 2$  avec  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Le vecteur des inconnues  $\mathbf{u}$  est défini sur l'espace de états

$$\Omega^B = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^5; \alpha_1 \in (0, 1), \rho_k > 0, k = 1, 2 \},$$



et le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = \Theta(\mathbf{u})(p_1 - p_2), \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha_1 \rho_1 f_1(\mathbf{u}) + \Lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha_2 \rho_2 f_2(\mathbf{u}) - \Lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \end{cases} \quad (5.2)$$

pour  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Les lois de pression  $p_k \equiv p_k(\rho_k)$  sont supposées vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} p'_k(\rho_k) &> 0, \quad \forall \rho_k > 0, \\ \lim_{\rho_k \rightarrow 0} p_k(\rho_k) &= 0, \quad \lim_{\rho_k \rightarrow \infty} p_k(\rho_k) = +\infty, \end{aligned} \quad (5.3)$$

de sorte que  $p_k$  est une fonction inversible. Nous considérons ici la phase 1 comme la phase continue et la phase 2 comme la phase dispersée. Dans l'équation d'advection en  $\alpha_1$ , le terme source est un terme de relaxation en pression dont nous avons parlé à la fin du chapitre précédent. Ici, nous allons considérer un temps caractéristique de relaxation des pressions fini et dont l'ordre de grandeur sera déterminé par le terme dépendant des inconnues  $\Theta(\mathbf{u})$ . Concernant maintenant les termes  $\alpha_k \rho_k f_k(\mathbf{u})$ , nous savons que  $f_k$  représente un champ de forces extérieures quelconque (comme la gravité par exemple) pour  $k = 1, 2$ . Le terme  $\Lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1)$  exprime la force de traînée, appelée aussi frottement interfacial, entre la phase dispersée (phase  $k = 2$ ) et la phase continue (phase  $k = 1$ ). Il s'agit donc d'un terme de relaxation entre les vitesses des phases et qui, de plus, est quadratique sur la vitesse relative  $u_2 - u_1$ . La fréquence de retour à l'équilibre des deux vitesses est donnée par le terme  $\Lambda(\mathbf{u})$ . Notons enfin que les équations que nous avons écrites dans le système (5.2) sont considérées dans leurs formes adimensionnées. Nous nous étendons plus loin sur ce point.

Concernant maintenant le modèle de drift-flux, il est en général utilisé pour les écoulements à bulles soumis à la gravité. C'est un modèle de mélange, comme les modèles HEM et HRM, c'est-à-dire décrivant l'évolution du fluide diphasique par l'intermédiaire de variables de mélange. L'hypothèse principale pour la dérivation de ce modèle est l'équilibre des pressions et des vitesses entre les phases. Soit

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho} \tilde{Y}, \tilde{\rho} \tilde{u}), \quad (5.4)$$

le vecteur d'inconnues où on a noté  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{u}$  respectivement la densité du mélange, la concentration de la phase 2 et la vitesse du mélange. On a de plus  $\tilde{\rho} \tilde{Y} = \tilde{\alpha} \tilde{\rho}_2$  où on a noté  $\tilde{\alpha}$  la fraction moyenne et  $\tilde{\rho}_2$  la densité de la phase 2. L'espace des états admissibles pour ce vecteur est noté

$$\Omega^D = \{ \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3; \tilde{\rho} > 0, (\tilde{\rho} \tilde{Y} / \tilde{\rho}) \in (0, 1) \}. \quad (5.5)$$

Le système d'équations du modèle de drift-flux s'écrit, dans le cadre général où le fluide est soumis

à des champs de forces  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$ ,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \partial_x(\tilde{\rho} \tilde{u}) = 0, \\ \partial_t(\tilde{\rho} \tilde{Y}) + \partial_x(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{Y} + \tilde{\rho} \tilde{Y}(1 - \tilde{Y}) \tilde{u}_r) = 0, \\ \partial_t(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \partial_x(\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{p} + \tilde{\rho} \tilde{Y}(1 - \tilde{Y}) \tilde{u}_r^2) = \tilde{\rho}(1 - \tilde{Y}) \tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\rho} \tilde{Y} \tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{u}}), \end{cases} \quad (5.6)$$

où la loi de pression  $\tilde{p} \equiv \tilde{p}(\tilde{\rho})$  est donnée par la résolution du sous-système

$$\begin{cases} \tilde{p} = \tilde{p}_1(\tilde{\rho}(1 - \tilde{Y})/(1 - \tilde{\alpha})), \\ \tilde{p}_1(\tilde{\rho}(1 - \tilde{Y})/(1 - \tilde{\alpha})) = \tilde{p}_2(\tilde{\rho} \tilde{Y}/\tilde{\alpha}). \end{cases} \quad (5.7)$$

Les inconnues dans ce sous-système sont  $(\tilde{p}, \tilde{\alpha}) \in (0, +\infty) \times (0, 1)$ . Les lois de pression  $\tilde{p}_k(\tilde{\rho}_k)$  sont données et supposées vérifier

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_k(\tilde{\rho}_k) &> 0, \quad \forall \tilde{\rho}_k > 0, \\ \lim_{\tilde{\rho}_k \rightarrow 0} \tilde{p}_k(\tilde{\rho}_k) &= 0, \quad \lim_{\tilde{\rho}_k \rightarrow \infty} \tilde{p}_k(\tilde{\rho}_k) = +\infty. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le système est fermé *via* la loi de drift similaire à l'équation (5.1) qu'on écrit maintenant

$$\tilde{u}_r = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (5.9)$$

où  $\tilde{\Phi}$  détermine la loi de drift. Cette fonction dépend uniquement des inconnues et non pas de leurs dérivées. Elle est en générale écrite *via* des corrélations provenant de l'expérience. Dans le cas du modèle de dérive d'Ishii, dans [64], la loi de drift dépend de la topologie de l'écoulement et donc plus particulièrement de la forme des bulles (écoulements à bulles ou en film annulaire, par exemple). Pour des exemples précis de lois de fermeture, nous renvoyons le lecteur à [67] et [64].

D'autre part, la forme de  $\tilde{\Phi}$  détermine la stricte convexité, ou non, du flux conservatif et de ce fait la nature des différents champs. Ce type d'étude est fait dans [87] par exemple. Dans le même ouvrage, l'auteur note que la structure mathématique du modèle de dérive dégénère vers le modèle HRM lorsque la vitesse  $u_r$  tend vers zéro. Le modèle de drift-flux peut être alors considéré comme une perturbation du modèle HRM, perturbation s'exprimant comme un terme de reste d'ordre un sur la vitesse relative. Enfin, l'hyperbolicité du modèle, défini par (5.6), (5.7) et (5.9) est assurée sous la condition

$$\frac{\tilde{u}_r}{\tilde{c}} \ll 1,$$

où la vitesse  $\tilde{c} = \sqrt{\tilde{p}'(\tilde{\rho})}$  est la vitesse du son du mélange. Cette hypothèse est couramment admise pour les écoulements eau-vapeur ascendants verticaux dans un réacteur nucléaire à eau sous pression (typiquement dans le coeur ou encore le générateur de vapeur) : en temps très courts, la force de gravité tend à s'équilibrer avec la force de traînée. Cet équilibre force de flottabilité/force de traînée implique en particulier que la vitesse relative  $u_r$  est d'autant plus proche de zéro que le temps de relaxation caractéristique du retour à l'équilibre, qu'on note  $\varepsilon$ , est petit. Nous nous

plaçons donc dans ce régime d'écoulement dans la suite. La forme adimensionnée des équations nous permet de formuler les différents coefficients de relaxation dans le système bifluide (5.2) sous la forme

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \frac{\lambda(\mathbf{u})}{\varepsilon^2}, \quad (5.10)$$

où  $\lambda(\mathbf{u}) \approx \mathcal{O}(1)$  est le coefficient de relaxation provenant de l'adimensionnement des équations. L'élévation au carré du temps caractéristique correspond à la forme quadratique de la force de traînée sur la vitesse relative. Concernant la relaxation des pressions, on écrit

$$\Theta(\mathbf{u}) = \frac{\theta(\mathbf{u})}{\varepsilon^2}, \quad (5.11)$$

où  $\theta(\mathbf{u}) \approx \mathcal{O}(1)$  est le coefficient de relaxation adimensionné. Dans ce cas, le temps de relaxation des pressions est également d'ordre deux sur  $\varepsilon$ . Ceci provient du fait que le temps caractéristique de relaxation des pressions est en général beaucoup plus court que le temps de relaxation des vitesses.

**Remarque 5.1.** Dans le cas d'un écoulement dispersé eau-vapeur, l'ordre de grandeur du temps de relaxation des pressions correspond au temps de parcours des ondes acoustiques au sein de la phase dispersée. Ceci motive notre choix d'élévation au carré du paramètre  $\varepsilon$  dans la formule (5.11). On renvoie à [67] pour plus de détails sur les temps caractéristiques de relaxation dans ce type d'écoulement.

### 5.1.2 Adimensionnement des équations du modèle bifluide à deux pressions

Afin de mieux comprendre la correspondance dimensionnée-adimensionnée ainsi que les formules écrites en (5.10) et (5.11), on propose de détailler l'obtention du système adimensionné (5.2) à partir des équations dimensionnées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\bar{t}} \bar{\alpha}_1 + \bar{u}_2 \partial_{\bar{x}} \bar{\alpha}_1 = \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{u}})(\bar{p}_1 - \bar{p}_2), \\ \partial_{\bar{t}}(\bar{\alpha}_1 \bar{p}_1) + \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha}_1 \bar{p}_1 \bar{u}_1) = 0, \\ \partial_{\bar{t}}(\bar{\alpha}_1 \bar{p}_1 \bar{u}_1) + \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha}_1 \bar{p}_1 \bar{u}_1^2 + \bar{\alpha}_1 \bar{p}_1) - \bar{p}_1 \partial_{\bar{x}} \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 \bar{p}_1 \bar{f}_1(\bar{\mathbf{u}}) + \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}) |\bar{u}_2 - \bar{u}_1| (\bar{u}_2 - \bar{u}_1), \\ \partial_{\bar{t}}(\bar{\alpha}_2 \bar{p}_2) + \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha}_2 \bar{p}_2 \bar{u}_2) = 0, \\ \partial_{\bar{t}}(\bar{\alpha}_2 \bar{p}_2 \bar{u}_2) + \partial_{\bar{x}}(\bar{\alpha}_2 \bar{p}_2 \bar{u}_2^2 + \bar{\alpha}_2 \bar{p}_2) + \bar{p}_2 \partial_{\bar{x}} \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2 \bar{p}_2 \bar{f}_2(\bar{\mathbf{u}}) - \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}) |\bar{u}_2 - \bar{u}_1| (\bar{u}_2 - \bar{u}_1). \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Les variables munies des barres représentent les mêmes grandeurs physiques mais dont les valeurs sont dimensionnées. On introduit les constantes d'adimensionnement

$$L, T, \alpha^0, \rho_1^0, u_1^0, p_1^0, \rho_2^0, u_2^0, p_2^0,$$

qui sont respectivement la longueur, le temps, le taux de présence des phases, les densités, vitesses et pressions des phase 1 et 2 de référence, ou caractéristiques, de l'écoulement. De cette manière, les variables dimensionnées du système ci-dessus peuvent s'exprimer en fonction de ces constantes

d'adimensionnement et des variables du système adimensionné (5.2) en écrivant simplement :

$$\begin{cases} \bar{x} = Lx, & \bar{t} = Tt, \\ \bar{\alpha}_1 = \alpha^0 \alpha_1, & \bar{\rho}_1 = \rho_1^0 \rho_1, \quad \bar{u}_1 = u_1^0 u_1, \quad \bar{p}_1 = p_1^0 p_1, \\ \bar{\alpha}_2 = \alpha^0 \alpha_2, & \bar{\rho}_2 = \rho_2^0 \rho_2, \quad \bar{u}_2 = u_2^0 u_2, \quad \bar{p}_2 = p_2^0 p_2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Etant donné que dans les écoulements que l'on considère les vitesses phasiques sont sensiblement du même ordre, on peut dans premier temps simplifier les écritures ci-dessus en posant :

$$u_1^0 = u_2^0 = u^0. \quad (5.14)$$

Maintenant munie des écritures (5.13) et (5.14), le système (5.12) peut s'écrire maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^0}{T} \partial_t \alpha_1 + \frac{u^0 \alpha^0}{L} u_2 \partial_x \alpha_1 = \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{u}})(p_1^0 p_1 - p_2^0 p_2), \\ \frac{\alpha^0 \rho_1^0}{T} \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \frac{\alpha^0 \rho_1^0 u^0}{L} \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \frac{\alpha^0 \rho_1^0 u^0}{T} \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \frac{\alpha^0 \rho_1^0 (u^0)^2}{L} \partial_x \left( \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \frac{p_1^0}{\rho_1^0 (u^0)^2} \alpha_1 p_1 \right) \\ \quad - \frac{\alpha^0 p_1^0}{L} p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha^0 \rho_1^0 \alpha_1 \rho_1 \bar{f}_1(\bar{\mathbf{u}}) + (u^0)^2 \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \frac{\alpha^0 \rho_2^0}{T} \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \frac{\alpha^0 \rho_2^0 u^0}{L} \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \frac{\alpha^0 \rho_2^0 u^0}{T} \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \frac{\alpha^0 \rho_2^0 (u^0)^2}{L} \partial_x \left( \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \frac{p_2^0}{\rho_2^0 (u^0)^2} \alpha_2 p_2 \right) \\ \quad + \frac{\alpha^0 p_1^0}{L} p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha^0 \rho_2^0 \alpha_2 \rho_2 \bar{f}_2(\bar{\mathbf{u}}) - (u^0)^2 \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1). \end{array} \right.$$

On remarque que pour obtenir les mêmes termes convectifs dans les systèmes (5.2) et (5.12), nous devons choisir :

$$p_1^0 = \rho_1^0 (u^0)^2 \quad \text{et} \quad p_2^0 = \rho_2^0 (u^0)^2.$$

Le même raisonnement sur les grandeurs  $f_1$ ,  $f_2$  et  $\Lambda$  dans les termes sources des équations de la quantité de mouvement nous amène à poser

$$\rho_1^0 = \rho_2^0 = \rho^0,$$

ce qui implique alors  $p_1^0 = p_2^0 = \rho^0(u^0)^2$ . En précisant également que  $T = \frac{L}{u^0}$ , le système ci-dessus devient alors,

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = \frac{L\rho^0(u^0)^2}{\alpha^0 u^0} \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{u}})(p_1 - p_2), \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha_1 \rho_1 \frac{\alpha^0 \rho^0 L}{\alpha^0 \rho^0 (u^0)^2} \bar{f}_1(\bar{\mathbf{u}}) + \frac{L(u^0)^2}{\alpha^0 \rho^0 (u^0)^2} \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 = \alpha_2 \rho_2 \frac{\alpha^0 \rho^0 L}{\alpha^0 \rho^0 (u^0)^2} \bar{f}_2(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{L(u^0)^2}{\alpha^0 \rho^0 (u^0)^2} \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1). \end{cases}$$

Les deux systèmes (5.2) et (5.12) sont équivalents si on pose :

$$\Theta(\mathbf{u}) = \frac{L\rho^0 u^0}{\alpha^0} \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{u}}), \quad (5.15)$$

$$f_k(\mathbf{u}) = \frac{L}{(u^0)^2} \bar{f}_k(\bar{\mathbf{u}}), \quad \text{pour } k = 1, 2, \quad (5.16)$$

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \frac{L}{\alpha^0 \rho^0} \bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}}). \quad (5.17)$$

L'intérêt de détailler ces calculs d'adimensionnement est de pouvoir raisonner sur les grandeurs physiques dimensionnées et sur le paramètre  $\varepsilon$  dans le même temps. Ceci sera en particulier le cas lorsque nous présenterons les résultats numériques pour le couplage interfacial où les grandeurs seront dimensionnées et que nous feront varier le temps  $\varepsilon$ .

### 5.1.3 Ecriture des équations de mélange

Afin de dériver formellement un modèle de drift à partir du système d'équations (5.2), nous devons réécrire celui-ci dans une formulation du type mélange. On introduit tout d'abord les variables de mélange suivantes :

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, & \rho u &= \alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2, & \rho Y &= \alpha_2 \rho_2, \\ u_r &= u_2 - u_1, & p &= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, & p_r &= p_2 - p_1, \end{aligned} \quad (5.18)$$

où  $\rho$ ,  $u$ ,  $Y$ ,  $u_r$ ,  $p$  et  $p_r$  sont respectivement la densité moyenne, la vitesse moyenne, le titre massique de la phase 2, la vitesse relative, la pression moyenne et enfin la pression relative. Les relations ci-dessus impliquent de manière immédiate

$$u = (1 - Y)u_1 + Y u_2.$$

Nous cherchons à établir les différentes équations d'évolution du mélange en fonction de ces nouvelles variables. On note dans un premier temps le nouveau vecteur des inconnues

$$\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho u, u_r, p_r)^T. \quad (5.19)$$

### Equation de conservation de la densité du mélange

Après sommation des deux équations de conservation des masses de chaque phase, on obtient :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0. \quad (5.20)$$

### Equation de conservation de la densité de la phase 2

L'équation de conservation de la masse de la phase 2 peut s'écrire, à l'aide des variables de mélange précédemment introduites :

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y u_2) = 0.$$

En observant que

$$\begin{aligned} \rho Y u_2 &= \rho Y [u_2 + Y u_2 - Y u_2 + (1 - Y) u_1 - (1 - Y) u_1], \\ &= \rho Y [u + (1 - Y)(u_2 - u_1)] \end{aligned}$$

on obtient l'équation de conservation de la masse de la phase 2, soit

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y u + \rho Y(1 - Y)u_r) = 0. \quad (5.21)$$

### Equation de conservation de la quantité de mouvement du mélange

La somme des deux équations d'évolution de la quantité de mouvement des deux phases nous donne :

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + p) = \rho(1 - Y)f_1 + \rho Y f_2.$$

Par le calcul

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2 &= \rho(1 - Y)u_1^2 + \rho Y u_2^2 \\ &= \rho [(1 - Y)u_1^2 + Y u_2^2 + u^2 - u^2] \\ &= \rho u^2 + \rho [(1 - Y)u_1^2 + Y u_2^2 - ((1 - Y)u_1 + Y u_2)^2] \\ &= \rho u^2 + \rho Y [u_1^2 + u_2^2 - 2(1 - Y)u_1 u_2 - Y u_1^2 - Y u_2^2] \\ &= \rho u^2 + \rho Y(1 - Y)u_r^2, \end{aligned}$$

l'équation de conservation de l'impulsion du mélange s'écrit :

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \rho Y(1 - Y)u_r^2) = \rho(1 - Y)f_1 + \rho Y f_2. \quad (5.22)$$

### Equation d'évolution de la vitesse relative

On cherche maintenant à obtenir l'équation d'évolution de la vitesse relative  $u_r$  entre les deux phases. Considérons les équations d'évolution des quantités de mouvement des phases 1 et 2. Celles-ci peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 + \partial_x \frac{u_1^2}{2} + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} \partial_x (\alpha_1 p_1) - \frac{p_1}{\alpha_1 \rho_1} \partial_x \alpha_1 &= f_1 + \frac{\Lambda(\mathbf{u})}{\alpha_1 \rho_1} |u_r| u_r, \\ \partial_t u_2 + \partial_x \frac{u_2^2}{2} + \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} \partial_x (\alpha_2 p_2) - \frac{p_2}{\alpha_2 \rho_2} \partial_x \alpha_2 &= f_2 - \frac{\Lambda(\mathbf{u})}{\alpha_2 \rho_2} |u_r| u_r\end{aligned}$$

En soustrayant la première équation à la deuxième, nous obtenons :

$$\partial_t u_r + \partial_x \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_2} \partial_x p_2 - \frac{1}{\rho_1} \partial_x p_1 - \frac{p_2 - p_1}{\alpha_2 \rho_2} \partial_x \alpha_1 = f_2 - f_1 - \frac{\Lambda(\mathbf{u})}{\rho Y (1 - Y)} |u_r| u_r.$$

Le terme quadratique sur les vitesses des phases se transforme de la manière suivante :

$$\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{1}{2} ((u_2 - u_1)^2 + 2u_1 u_2 - 2u_1^2).$$

Or nous avons que

$$\begin{aligned}2u_1 u_2 - 2u_1^2 &= 2(uu_2 + Yu_1 u_2 - Yu_2^2) - 2(uu_1 + Yu_1^2 - Yu_2 u_1) \\ &= 2u(u_2 - u_1) - 2Y(u_2^2 - 2u_1 u_2 + u_1^2),\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = uu_r + \frac{1}{2} (1 - 2Y) u_r^2.$$

Ensuite les termes de pression deviennent :

$$\frac{1}{\rho_2} \partial_x (p + p_2 - p) - \frac{1}{\rho_1} \partial_x (p + p_1 - p) = \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \partial_x p + \frac{1}{\rho_2} \partial_x (p_2 - p) - \frac{1}{\rho_1} \partial_x (p_1 - p),$$

et de plus

$$\begin{aligned}p_2 - p &= (1 - \alpha_2) p_2 - \alpha_1 p_1 = \alpha_1 (p_2 - p_1) = \alpha_1 p_r, \\ p_1 - p &= (1 - \alpha_1) p_1 - \alpha_2 p_2 = \alpha_2 (p_1 - p_2) = -\alpha_2 p_r.\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'équation sur la vitesse relative :

$$\begin{aligned}\partial_t u_r + u_r \partial_x u + u \partial_x u_r + \partial_x \left( \frac{1}{2} - Y \right) u_r^2 + \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \partial_x p + \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} \partial_x p_r \\ - \left( \frac{1}{\rho Y} + \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) p_r \partial_x \alpha_1 = f_2 - f_1 - \frac{\Lambda(\mathbf{u})}{\rho Y (1 - Y)} |u_r| u_r.\end{aligned}\tag{5.23}$$

### Equation d'évolution de la pression relative

Les équations de conservation des masses peuvent se récrire

$$\begin{aligned}\alpha_1 \partial_t \rho_1 + \rho_1 \partial_t \alpha_1 + \alpha_1 u_1 \partial_x \rho_1 + \rho_1 (\alpha_1 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x \alpha_1) &= 0, \\ \alpha_2 \partial_t \rho_2 + \rho_2 \partial_t \alpha_2 + \alpha_2 u_2 \partial_x \rho_2 + \rho_2 (\alpha_2 \partial_x u_2 - u_2 \partial_x \alpha_1) &= 0.\end{aligned}$$

En divisant par  $\alpha_k$  et en multipliant par  $p'_k$  dans les deux équations pour  $k = 1, 2$ , on a :

$$\begin{aligned}\partial_t p_1 + \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} \partial_t \alpha_1 + u_1 \partial_x p_1 + \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} (\alpha_1 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x \alpha_1) &= 0, \\ \partial_t p_2 + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} \partial_t \alpha_2 + u_2 \partial_x p_2 + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} (\alpha_2 \partial_x u_2 - u_2 \partial_x \alpha_1) &= 0.\end{aligned}$$

Ensuite, en remarquant que  $\partial_t \alpha_1 = -\partial_t \alpha_2 = -u_2 \partial_x \alpha_1 - \Theta(\mathbf{u}) p_r$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\partial_t p_1 - \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} (u_2 \partial_x \alpha_1 + \Theta(\mathbf{u}) p_r) + u_1 \partial_x p_1 + \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} (\alpha_1 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x \alpha_1) &= 0, \\ \partial_t p_2 + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} (u_2 \partial_x \alpha_1 + \Theta(\mathbf{u}) p_r) + u_2 \partial_x p_2 + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} (\alpha_2 \partial_x u_2 - u_2 \partial_x \alpha_1) &= 0,\end{aligned}$$

soit

$$\partial_t p_1 - \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} u_2 \partial_x \alpha_1 + u_1 \partial_x p_1 + \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} (\alpha_1 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x \alpha_1) = \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} \Theta(\mathbf{u}) p_r, \quad (i)$$

$$\partial_t p_2 + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} u_2 \partial_x \alpha_1 + u_2 \partial_x p_2 + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} (\alpha_2 \partial_x u_2 - u_2 \partial_x \alpha_1) = -\frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} \Theta(\mathbf{u}) p_r. \quad (ii)$$

On effectue maintenant le calcul (ii-i) pour obtenir après quelques simplifications

$$\partial_t p_r + \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} u_r \partial_x \alpha_1 + \underbrace{u_2 \partial_x p_2 - u_1 \partial_x p_1}_A + \underbrace{p'_2 \rho_2 \partial_x u_2 - p'_1 \rho_1 \partial_x u_1}_B = -\left( \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} \right) \Theta(\mathbf{u}) p_r.$$

Les termes  $A$  et  $B$  vont être décomposés de telle sorte que seules des dérivées partielles sur les nouvelles variables de mélange et le taux de présence  $\alpha_1$  apparaissent. Pour le premier terme,



nous avons :

$$\begin{aligned}
 A &:= u_2 \partial_x p_2 - u_1 \partial_x p_1 \\
 &= (\alpha_1 + \alpha_2) u_2 \partial_x p_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) u_1 \partial_x p_1 \\
 &= \alpha_1 u_2 \partial_x p_2 - \alpha_2 u_1 \partial_x p_1 + \alpha_2 u_2 \partial_x p_2 - \alpha_1 u_1 \partial_x p_1 \\
 &= \underbrace{(\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1)}_{(\cdot)} \partial_x p_r + \alpha_1 u_2 \partial_x p_1 - \alpha_2 u_1 \partial_x p_2 + \alpha_2 u_2 \partial_x p_2 - \alpha_1 u_1 \partial_x p_1 \\
 &= (\cdot) \partial_x p_r + \alpha_1 u_2 \partial_x p_1 - \alpha_2 u_1 \partial_x p_2 + u_2 \partial_x \alpha_2 p_2 - u_2 p_2 \partial_x \alpha_2 - u_1 \partial_x \alpha_1 p_1 + u_1 p_1 \partial_x \alpha_1 \\
 &= (\cdot) \partial_x p_r + \alpha_1 u_2 \partial_x p_1 - \alpha_2 u_1 \partial_x p_2 + u_r \partial_x p - u_2 \partial_x \alpha_1 p_1 + u_1 \partial_x \alpha_2 p_2 + u_2 p_2 \partial_x \alpha_1 + u_1 p_1 \partial_x \alpha_1 \\
 &= (\cdot) \partial_x p_r + u_r \partial_x p - u_2 p_1 \partial_x \alpha_1 - u_1 p_2 \partial_x \alpha_1 + u_2 p_2 \partial_x \alpha_1 + u_1 p_1 \partial_x \alpha_1,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire après simplification

$$A = (\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1) \partial_x p_r + u_r \partial_x p + p_r u_r \partial_x \alpha_1.$$

Concernant le terme  $B$ , on observe que

$$\begin{aligned}
 B &:= p'_2 \rho_2 \partial_x u_2 - p'_1 \rho_1 \partial_x u_1 \\
 &= p'_2 \rho_2 [(1-Y) \partial_x u_2 + Y \partial_x u_2] - p'_1 \rho_1 [(1-Y) \partial_x u_1 + Y \partial_x u_1] \\
 &= p'_2 \rho_2 [(1-Y) \partial_x u_2 + \partial_x u - \partial_x (1-Y) u_1 - u_2 \partial_x Y] - p'_1 \rho_1 [\partial_x u - u_1 \partial_x (1-Y) - \partial_x Y u_2 + Y \partial_x u_1] \\
 &= (p'_2 \rho_2 - p'_1 \rho_1) \partial_x u - (p'_2 \rho_2 u_2 + p'_1 \rho_1 u_1) \partial_x Y \\
 &\quad + p'_2 \rho_2 [(1-Y) \partial_x u_2 - \partial_x (1-Y) u_1] + p'_1 \rho_1 [\partial_x Y u_2 - Y \partial_x u_1]
 \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$B = (p'_2 \rho_2 - p'_1 \rho_1) (\partial_x u - u_r \partial_x Y) + (Y p'_1 \rho_1 + (1-Y) p'_2 \rho_2) \partial_x u_r.$$

L'équation d'évolution de la pression relative est donc :

$$\begin{aligned}
 \partial_t p_r + u_r \partial_x p + (p'_2 \rho_2 - p'_1 \rho_1) (\partial_x u - u_r \partial_x Y) + (Y p'_1 \rho_1 + (1-Y) p'_2 \rho_2) \partial_x u_r \\
 + (\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1) \partial_x p_r + \left( \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} + p_r \right) u_r \partial_x \alpha_1 = - \left( \frac{p'_1 \rho_1}{\alpha_1} + \frac{p'_2 \rho_2}{\alpha_2} \right) \Theta(\mathbf{u}) p_r. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Reprenant les équations (5.20), (5.21), (5.22), (5.23) et (5.24) précédemment obtenues, on peut maintenant écrire le modèle bifluide dans les nouvelles variables  $\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho u, u_r, p_r)^T$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho u Y + \rho Y(1-Y)u_r) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho(u^2 + p + \rho Y(1-Y)(u_r)^2)) = \rho(1-Y)f_1 + \rho Y f_2, \\ \partial_t u_r + u_r \partial_x u + u \partial_x u_r + \partial_x((1/2 - Y)(u_r)^2) + (1/\rho_2 - 1/\rho_1)\partial_x p + \rho/(\rho_1 \rho_2)\partial_x p_r \\ \quad - (1/(\rho Y) + 1/\rho_1 - 1/\rho_2)p_r \partial_x \alpha_1 = f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{v})|u_r|u_r/(\varepsilon^2 \rho Y(1-Y)), \\ \partial_t p_r + u_r \partial_x p + (p'_2 \rho_2 - p'_1 \rho_1)(\partial_x u - u_r \partial_x Y) + (Y p'_1 \rho_1 + (1-Y)p'_2 \rho_2)\partial_x u_r \\ \quad + (\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1)\partial_x p_r + (p'_1 \rho_1/\alpha_1 + p_r)u_r \partial_x \alpha_1 = -(p'_1 \rho_1/\alpha_1 + p'_2 \rho_2/\alpha_2)\theta(\mathbf{v})p_r/\varepsilon^2. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

#### 5.1.4 Obtention de la loi de Drift

Les équations de mélange correspondantes au modèle bifluide à deux pressions maintenant établies, nous allons procéder à une analyse asymptotique de ce système. Pour cela, la limite vers zéro du paramètre de relaxation  $\varepsilon$  dans les équations de mélange du nouveau système (5.25) est étudiée. Cette première analyse nous permettra d'obtenir une fermeture sur la vitesse relative faisant intervenir le gradient de pression. Une seconde analyse nous donnera une fermeture d'ordre zéro.

**Proposition 5.1.** *Dans le régime  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , les solutions du modèle bifluide à deux pressions (5.2) vérifient, à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près, le système d'équations*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho u Y + \rho Y(1-Y)u_r) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p + \rho Y(1-Y)u_r^2) = \rho(1-Y)f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v}), \end{array} \right. \quad (5.26)$$

avec

$$|u_r|u_r = \varepsilon^2 \frac{\rho Y(1-Y)}{\lambda(\mathbf{v})} \left( f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) + \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \partial_x p \right), \quad (5.27)$$

et où les variables  $(p, \alpha_2)$  sont données par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2)), \\ p_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2)) = p_2(\rho Y/\alpha_2). \end{array} \right. \quad (5.28)$$

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient en effectuant un développement de Chapman-Enskog (voir [31]). Plus précisément, dans le régime  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , les termes sources de relaxation des pressions et

vitesses deviennent raides et on peut alors écrire :

$$u_r = u_r^0 + \varepsilon u_r^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.29)$$

$$p_r = p_r^0 + \varepsilon p_r^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.30)$$

où les termes  $u_r^0$ ,  $u_r^1$ ,  $p_r^0$  et  $p_r^1$  sont respectivement appelés correcteurs à l'ordre zéro et à l'ordre un des vitesses et de pression relatives. On reprend dans un premier temps les troisième et quatrième équations du système (5.25) que l'on multiplie par  $\varepsilon^2$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left[ \partial_t u_r + u_r \partial_x u + u \partial_x u_r + \partial_x \left( (1/2 - Y)(u_r)^2 \right) + (1/\rho_2 - 1/\rho_1) \partial_x p + \rho / (\rho_1 \rho_2) \partial_x p_r \right. \\ \left. - (1/(\rho Y) + 1/\rho_1 - 1/\rho_2) p_r \partial_x \alpha_1 \right] = \varepsilon^2 (f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v})) - \lambda(\mathbf{v}) |u_r| u_r / (\rho Y (1 - Y)), \\ \varepsilon^2 \left[ \partial_t p_r + u_r \partial_x p + (p'_2 \rho_2 - p'_1 \rho_1) (\partial_x u - u_r \partial_x Y) + (Y p'_1 \rho_1 + (1 - Y) p'_2 \rho_2) \partial_x u_r \right. \\ \left. + (\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1) \partial_x p_r + (p'_1 \rho_1 / \alpha_1 + p_r) u_r \partial_x \alpha_1 \right] = -(p'_1 \rho_1 / \alpha_1 + p'_2 \rho_2 / \alpha_2) \theta(\mathbf{v}) p_r. \end{aligned}$$

En effectuant la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  et en réinjectant les développements (5.29) et (5.30), on obtient trivialement

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\mathbf{v}) |u_r^0| u_r^0 / (\rho Y (1 - Y)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ 0 &= -(p'_1 \rho_1 / \alpha_1 + p'_2 \rho_2 / \alpha_2) \theta(\mathbf{v}) p_r^0 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

ce qui implique en particulier

$$\begin{aligned} u_r^0 &= 0, \\ p_r^0 &= 0. \end{aligned}$$

Les expressions (5.29) et (5.30) peuvent donc se simplifier de la manière suivante :

$$u_r = \varepsilon u_r^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.31)$$

$$p_r = \varepsilon p_r^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.32)$$

On recommence alors l'analyse, cette fois à l'ordre un, en injectant les expressions ci-dessus dans les équations correspondantes. Concernant l'équation sur la vitesse relative on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[ \partial_t u_r^1 + u_r^1 \partial_x u + u \partial_x u_r^1 + \varepsilon \partial_x \left( (1/2 - Y)(u_r^1)^2 \right) + \rho / (\rho_1 \rho_2) \partial_x p_r^1 - (1/(\rho Y) + 1/\rho_1 - 1/\rho_2) p_r^1 \partial_x \alpha_1 \right] \\ + (1/\rho_2 - 1/\rho_1) \partial_x p = f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{v}) |u_r^1| u_r^1 / (\rho Y (1 - Y)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.33)$$

qui, à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , nous donne

$$|u_r^1| u_r^1 = \frac{\rho Y (1 - Y)}{\lambda(\mathbf{v})} \left( f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) + \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \partial_x p \right). \quad (5.34)$$

Enfin, pour l'équation sur  $p_r$ , l'étude est encore plus simple puisqu'il suffit de multiplier par  $\varepsilon$  de part et d'autre pour avoir

$$\varepsilon \left[ \partial_t p_r + u_r \partial_x p + (p'_2 \rho_2 - p'_1 \rho_1) (\partial_x u - u_r \partial_x Y) + (Y p'_1 \rho_1 + (1 - Y) p'_2 \rho_2) \partial_x u_r + (\alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1) \partial_x p_r + (p'_1 \rho_1 / \alpha_1 + p_r) u_r \partial_x \alpha_1 \right] = -(p'_1 \rho_1 / \alpha_1 + p'_2 \rho_2 / \alpha_2) \theta(\mathbf{v}) p_r^1 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

La limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  nous amène immédiatement à écrire

$$p_r^1 = 0. \quad (5.35)$$

En réinjectant ces expressions dans les développements (5.31) et (5.32) on abouti alors aux fermetures (5.27) et (5.28).  $\square$

**Remarque 5.2.** Dans l'équation en  $\rho u$  du système (5.26), le flux physique contient un terme quadratique en  $u_r$  qui est donc d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Dans les modèles physiques les plus visités dans les applications, ce terme est dans la pratique gardé.

Nous venons donc d'obtenir une fermeture différentielle sur la vitesse relative et ce dans le cas général de champs de forces extérieures quelconques  $f_1$  et  $f_2$ . La formule (5.27) fait intervenir le terme de gradient de pression ce qui s'apparente ainsi à une loi de Darcy. Comme nous l'avons précisé précédemment, pour dériver un modèle de drift complet, nous devons obtenir une fermeture d'ordre zéro sur les dérivées des différentes inconnues. Pour cela, nous allons étudier le régime de l'écoulement permanent. Plus précisément, il s'agit de la limite en temps grands du système (5.26).

Introduisons dans un premier temps les changements de variables en coordonnées Lagrangiennes :

$$D_t = \partial_t + u \partial_x, \quad \partial_y = \frac{1}{\rho} \partial_x.$$

**Remarque 5.3.** Selon la remarque (5.2), le terme en  $u_r$  présent dans le flux physique de l'équation en  $\rho u$  est d'ordre deux en  $\varepsilon$ . Dans le cas de notre analyse en temps grands, il n'est donc pas nécessaire de le prendre en compte.

En reprenant ce changement de variables pour le système (5.26) ainsi que la remarque (5.3), on a

$$\begin{cases} D_t \tau - \partial_y u = 0, \\ D_t Y + \partial_y (\rho Y (1 - Y) u_r) = 0, \\ D_t u + \partial_y p = (1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + Y f_2(\mathbf{v}). \end{cases}$$

Afin d'analyser les solutions en temps grands, on définit le changement d'échelle  $s = \varepsilon t$ . Le sys-

tème précédent en coordonnées Lagrangiennes s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \varepsilon D_s \tau - \partial_y u = 0, \\ \varepsilon D_s Y + \varepsilon \partial_y (\rho Y (1 - Y) u_r^1) = 0, \\ \varepsilon D_s u + \partial_y p = (1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + Y f_2(\mathbf{v}). \end{cases}$$

Le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  nous donne ainsi :

$$\begin{cases} \partial_y u = 0, \\ D_s Y + \partial_y (\rho Y (1 - Y) u_r^1) = 0, \\ \partial_y p = (1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + Y f_2(\mathbf{v}). \end{cases}$$

La dernière équation ci-dessus nous donne l'expression du gradient de pression en coordonnées Lagrangiennes soit, après retour en coordonnées Eulériennes :

$$\partial_x p = \rho(1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v}). \quad (5.36)$$

On obtient donc une nouvelle fermeture sur le gradient de pression que l'on réinjecte dans la relation (5.27) pour finalement obtenir :

$$|u_r| u_r = \varepsilon^2 \frac{\rho Y (1 - Y)}{\lambda(\mathbf{v})} \left( f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) + \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) (\rho(1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v})) \right). \quad (5.37)$$

Le système (5.26) muni de cette dernière fermeture (5.37) sur  $u_r$  ainsi que (5.28) sur le taux de présence de la phase 2 et la pression du mélange constitue le modèle de drift standard pour un écoulement isentropique sans changement de phase. Dans la suite, on notera cette nouvelle fermeture sous la forme :

$$u_r = \Phi(\mathbf{u}). \quad (5.38)$$

Précisons que la dépendance en  $\mathbf{u}$  est équivalente à celle en  $\mathbf{v}$  à un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme près (voir transformations (5.18)).

### 5.1.5 Exemple d'application : écoulement à bulles soumis à la gravité

Afin de mieux comprendre le lien entre la fermeture (5.37), que nous venons d'obtenir, et la loi de drift du modèle de drift-flux (5.6), (5.7) et (5.9), nous prenons l'exemple d'un écoulement à bulles ascendant dans une conduite verticale et soumis à la gravité. Ce type de configuration se rencontre couramment en thermohydraulique des réacteurs à eau sous pression, en particulier lorsque l'on considère l'écoulement du fluide caloporteur dans le coeur du réacteur. Nous cherchons donc, dans ce cas précis, à connecter les deux fonctions  $\Phi$  et  $\tilde{\Phi}$ . Rappelons que la phase continue, c'est-à-dire l'eau dans cet exemple, est indicée 1 et la phase dispersée, ou les bulles de vapeur, est notée 2. On a donc  $\rho_2 \ll \rho_1$ . Les seules forces considérées se réduisent aux termes de

gravité pour chaque phase soit  $f_1 = f_2 = -g$ .

Selon [68], la force de traînée dans le modèle bifluide à deux pressions (5.2) peut être définie de la manière suivante

$$\Lambda(\mathbf{u})|u_r|u_r = \frac{3}{8R_D}\alpha_2\rho_1C_D(\mathbf{u})|u_r|u_r,$$

où  $R_D$  est le rayon des bulles (supposé constant) et  $C_D$  le coefficient de traînée. Dans une telle configuration d'écoulement, Ishii et Zuber [69] proposent la formule suivante

$$C_D(\mathbf{u}) = \frac{4R_D}{3}(\alpha_1)^{-\vartheta}\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\sigma},$$

où  $\sigma$  est la tension de surface et la constante  $\vartheta$  représente le rapport entre les viscosités dynamiques des deux phases. Ceci aboutit alors à écrire la formule

$$\Lambda(\mathbf{u})|u_r|u_r = \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_1)^{-\vartheta}\rho_1\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g/\sigma}|u_r|u_r,$$

dont on peut alors facilement déduire le terme  $\Lambda$ . D'autre part, dans le cas où  $f_1 = f_2 = -g$ , l'équation (5.37) se réduit à

$$\Lambda(\mathbf{u})|u_r|u_r = \alpha_1\alpha_2(\rho_1 - \rho_2)g.$$

En raison de la configuration de l'écoulement, on a  $u_1 \leq u_2$  et ce qui implique alors  $\Lambda(\mathbf{u}) \geq 0$ . En identifiant les deux dernières équations, nous pouvons déduire la forme de la vitesse relative soit

$$u_r = \sqrt{2}\left(\frac{\sigma(\rho_1 - \rho_2)g}{(\rho_1)^2}\right)^{1/4}(\alpha_1)^{(1+\vartheta)/2}.$$

Cette définition correspond bien à une fermeture hydrodynamique classique  $\tilde{u}_r = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}})$  pour les modèles de drift-flux (voir par exemple [58] et [64]).

Notre analyse maintenant effectuée, nous allons nous intéresser à la résolution numérique du problème de couplage. La section suivante présente la formulation discrète du problème : la technique du modèle père est présentée ainsi qu'une adaptation de la méthode numérique du chapitre précédent avec un décentrement des termes sources liés à la relaxation des vitesses.

## 5.2 Approximation numérique du problème de couplage

On considère un écoulement sur  $\mathbb{R}$  décrit par le modèle bifluide (5.2) pour  $x < 0$  et par le modèle de drift-flux (5.26), (5.28), (5.37) pour  $x > 0$ . Nous prenons dans les deux cas, pour simplifier,  $f_1 = f_2 = -g$ . Par la suite, nous décrivons un algorithme que nous avons utilisé pour calculer les solutions couplées de ce problème.

On considère ici la discrétisation du problème de couplage sur le domaine en espace  $x \in \mathbb{R}$  et en temps  $t > 0$ . On subdivise le premier en  $N$  cellules  $C_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  de longueur constante  $\Delta x$ . On a donc  $x_j = j\Delta x$ . Rappelons que l'interface de couplage est située en

$x_0 = 0$ . Le domaine temporel est discrétisé en intervalles notés  $[t^n, t^{n+1}]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de longueur  $\Delta t$ . Les pas d'espace et de temps sont reliés par une condition CFL dont nous discutons plus loin. Nous raisonnons ici au sens des volumes finis c'est pourquoi on considère à chaque pas de temps  $t^n$  et dans chaque maille  $C_{j+1/2}$  des valeurs constantes discrètes des vecteurs des inconnues pour chaque système d'équations : pour  $j < 0$ , le vecteur constant  $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$  correspond à la solution approchée du modèle bifluide à deux pressions et pour  $j > 0$  le vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n$  à la solution discrète du modèle de drift-flux.

Pour calculer la solution couplée nous utilisons les résultats de [8] que nous avons exposés dans la section 5.1. Dans [8], nous avons montré comment la solution du modèle drift-flux peut être interprétée comme la limite de la solution du modèle bifluide. Nous allons donc calculer dans un premier temps la solution bifluide sur le domaine entier et, en un deuxième temps, nous relaxons la solution vers sa limite drift-flux sur le demi-domaine droit. Cette procédure réalise automatiquement le couplage entre les deux modèles à l'interface  $x = 0$  et est similaire à la technique du modèle père ou modèle d'interface qu'on peut retrouver dans [62] et [65]. Dans [62], les auteurs couplent un modèle bifluide à une pression et un modèle HRM assimilable au modèle de drift sans forces extérieures. La méthode se décline dans ce cas en deux étapes : dans une première, le modèle bifluide à deux pressions muni des différents termes sources est simulé sur l'ensemble du domaine *via* une méthode à pas fractionnaires ou un schéma avec termes sources décentrés. Ensuite, la seconde étape du calcul consiste à relaxer les pressions des phases dans le domaine du modèle bifluide à une pression et les pressions et les vitesses des phases dans le domaine du modèle HRM. La conservation de la quantité de mouvement totale du fluide est dans le même temps respectée. L'intérêt d'une telle méthode est d'une part sa relative simplicité et, d'autre part, le fait qu'un seul flux numérique est calculé sur l'interface de couplage (celui du modèle bifluide à deux pressions), ce qui s'apparente ainsi à une condition du type couplage par flux.

Notre problème de couplage diffère ici par le modèle de mélange que l'on veut coupler : la présence de forces extérieures entraîne que l'équilibre des vitesses est donné par la loi de drift (5.37). Ainsi, la résolution numérique du problème de couplage à chaque pas de temps s'effectue en plusieurs étapes.

### Première étape

On considère la solution discrète  $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$  sur tout le domaine en espace c'est-à-dire pour  $j \in \mathbb{Z}$ . Cette solution coïncide avec la solution discrète du modèle bifluide (5.2) pour  $j < 0$ . Par contre, pour  $j > 0$ , il est nécessaire de relever la solution discrète  $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho}\tilde{Y}, \tilde{\rho}\tilde{u})_{j+1/2}^n$  du modèle de

drift-flux avec l'opérateur de relèvement

$$\mathcal{R}\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^n = \mathbf{u}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \end{pmatrix}_{j+1/2}^n, \quad (5.18)$$

$\mathcal{R}$  étant l'inverse du  $\mathcal{C}_1$ -difféomorphisme défini par le changement de variable (5.18).

### Deuxième étape

La seconde étape consiste à déterminer la solution  $\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1-}$  du modèle bifluide (5.2) au pas de temps suivant pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . Cette étape est elle-même subdivisée en plusieurs pas. Nous la décrivons en détail dans la sous section 5.2.1.

### Troisième étape

La solution au temps  $t^{n+1}$  sur le demi-domaine de gauche  $\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1}$  est donnée par

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1-}, \quad \forall j < 0. \quad (5.39)$$

La solution discrète du modèle de drift-flux sur le demi-domaine de droite  $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1}$  est calculée à partir de  $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1-}$  en imposant la relation (5.37) ainsi que la conservation des masses partielles et de la quantité de mouvement totale, ce qui donne :

$$\begin{cases} (\tilde{\alpha}_1)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_1)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\rho}_1)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_1 \rho_1)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{\alpha}_2 \tilde{\rho}_2)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_2 \rho_2)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1)_{j+1/2}^{n+1-} + (\tilde{\alpha}_2 \tilde{\rho}_2 \tilde{u}_2)_{j+1/2}^{n+1-} = (\alpha_1 \rho_1 u_1)_{j+1/2}^{n+1-} + (\alpha_2 \rho_2 u_2)_{j+1/2}^{n+1-}, \\ (\tilde{u}_r)_{j+1/2}^n = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1-}). \end{cases} \quad (5.40)$$

Le vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1}$  est ensuite écrit en utilisant les relations (5.18).

**Remarque 5.4.** La solution approchée  $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1}$  pour  $j > 0$  calculée par cette méthode correspond à une relaxation finie en pression. Elle approche donc le modèle de drift-flux (5.26) à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près de manière consistante avec le développement établi dans la section 5.1. On envisage à terme de développer un solveur spécifiquement dédié au drift-flux dans la partie droite.

#### 5.2.1 Résolution du modèle bifluide

Nous décrivons ici la méthode utilisée dans la deuxième étape de l'algorithme de couplage pour résoudre le système bifluide (5.2). Nous rappelons que les termes sources dans (5.2) corres-



pondent à des échelles de relaxation différentes. Ceci nous a conduit à un traitement différent de ces termes sources. Nous avons donc utilisé la stratégie à pas fractionnaires détaillée ci-dessous.

**Première étape : convection et relaxation en vitesse ( $t^n \rightarrow t^{n,c}$ )**

Dans cette première étape, on considère la solution discrète  $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et on résout le système

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_1 \partial_x \alpha_1 = \Lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2) + p_1 \partial_x \alpha_1 = -\Lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_2 - u_1), \end{cases}$$

avec une méthode de décentrement des termes sources que nous décrivons dans la section 5.2.2. Ceci aboutit à la solution discrète que l'on note  $\mathbf{u}_{j+1/2}^{n,c}$ .

**Deuxième étape : relaxation en pression ( $t^{n,c} \rightarrow t^{n,p}$ )**

On prend en compte dans cette étape le seul terme source raide de relaxation en pression. Plus précisément, nous résolvons le système d'EDO

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 = \Theta(\mathbf{u})(p_1 - p_2), \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) = 0, \quad k = 1, 2 \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \quad t \in [t^{n,c}, t^{n,p}]. \end{cases}$$

Les deux dernières équations ci-dessus sont triviales et impliquent que les masses partielles  $(\alpha_k \rho_k)$  et les vitesses des phases  $u_k$  pour  $k = 1, 2$  sont constantes au cours de cette étape. L'algorithme que nous utilisons pour résoudre la première EDO est simplement basé sur une approche implicite. Plus précisément, l'écriture semi-discrète de la méthode est la suivante :

$$\alpha_1^{n,p} = \alpha_1^{n,c} + \Delta t \Theta(\mathbf{u}^{n,c}) \left[ p_1 \left( \frac{(\alpha_1 \rho_1)^{n,c}}{\alpha_1^{n,p}} \right) - p_2 \left( \frac{(\alpha_2 \rho_2)^{n,c}}{1 - \alpha_1^{n,p}} \right) \right].$$

Etant données les hypothèses (5.3) sur les lois de pressions  $p_1$  et  $p_2$ , on détermine l'unique solution  $\alpha_1^{n,p}$  de cette équation grâce à un algorithme de Raphson-Newton.

**Troisième étape : forces extérieures** ( $t^{n,p} \rightarrow t^{n+1-}$ )

Les forces extérieures sont prises en compte par une méthode explicite centrée classique. En d'autres termes, on résout le système d'EDO

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) = 0, \quad k = 1, 2 \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) = \alpha_k \rho_k f_k(\mathbf{u}), \quad k = 1, 2, t \in [t^{n,p}, t^{n+1-}]. \end{cases}$$

Les deux premières EDO sont triviales. La troisième est résolue selon l'écriture discrète suivante :

$$u_k^{n+1-} = u_k^{n,p} + \Delta t f_k(\mathbf{u}^{n,p}), \quad k = 1, 2.$$

**5.2.2 Méthode numérique avec décentrement des termes sources**

La présente section décrit une méthode numérique, basée sur le schéma par relaxation du chapitre précédent, pour résoudre le modèle bifluide à deux pressions muni des termes sources de relaxation en vitesse. L'approche que nous utilisons reprend les idées développées dans [4] ainsi que [42] et [43]. Citons également l'article [23] fondateur sur ce type de méthode. Le même type d'approche a été utilisé dans [44] ainsi que [54] et [55]. L'idée de ces différents travaux est de prendre en compte le (ou les) terme(s) source(s) des équations à résoudre dans une seule et unique étape (contrairement au splitting). Si on prend l'exemple d'un solveur de Riemann standard, les flux numériques correspondant à l'étape convective du schéma sont calculés à chaque interface du maillage. La méthode à pas fractionnaires consiste ensuite à prendre en compte les termes sources éventuels en raisonnant au centre des mailles. Le fait d'inclure ces termes sources dans la première étape amène donc à les évaluer aux interfaces. C'est pourquoi on parle de décentrement des termes sources. A l'origine, ce type de méthode a été développée en raison de l'incapacité des schémas à pas fractionnaires à prendre en compte, sur des maillages grossiers, l'état d'équilibre des solutions en régime stationnaire lorsque des termes sources raides sont présents. Nous choisissons ici de décentrer les termes sources relatifs aux relaxation des vitesses uniquement.

Dans le cas de notre solveur de Riemann approché établi dans le chapitre précédent, pour déterminer la valeur d'un terme source sur l'interface entre les cellules on utilise la technique illustrée dans [23]. Celle-ci consiste à mettre le terme source en question sous la forme d'une nouvelle variable dans le système, assujettie à sa propre loi d'évolution (une équation de transport). Ainsi, on introduit dans un premier temps la variable  $\chi$  qui est définie de la manière suivante :

$$\partial_x \chi = \frac{\lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1| (u_1 - u_2)}{\alpha_1 \rho_1 (u_1 - u_2)} = \frac{\lambda(\mathbf{u}) |u_2 - u_1|}{\alpha_1 \rho_1}, \quad (5.41)$$

et dont l'équation d'évolution est une équation de transport à la vitesse  $u_2$ , i.e.

$$\partial_t \chi + u_2 \partial_x \chi = 0,$$

ou encore, d'après la loi de conservation sur la masse partielle  $\alpha_2\rho_2$  :

$$\partial_t(\alpha_2\rho_2\chi) + \partial_x(\alpha_2\rho_2\chi u_2) = 0. \quad (5.42)$$

Dans un problème de Riemann, la variable  $\chi$  est donc constante de part et d'autre de l'onde de vitesse  $u_2$ .

La partie convective du modèle bifluide, maintenant munie de cette nouvelle variable, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t\alpha_1 + u_2\partial_x\alpha_1 = 0, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1) = 0, \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1u_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1^2 + \alpha_1p_1) - p_1\partial_x\alpha_1 + \frac{m}{\varepsilon^2}\partial_x\chi = 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2u_2) = 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2u_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2u_2^2 + \alpha_2p_2) + p_1\partial_x\alpha_1 - \frac{m}{\varepsilon^2}\partial_x\chi = 0, \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2\chi) + \partial_x(\alpha_2\rho_2\chi u_2) = 0, \end{array} \right. \quad (5.43)$$

pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ . On rappelle que

$$m = \alpha_1\rho_1(u_1 - u_2)$$

est le débit de masse relatif.

**Remarque 5.5.** *Le choix de la normalisation par  $m = \alpha_1\rho_1(u_1 - u_2)$  du terme de traînée dans l'expression (5.41) permet de ne pas avoir à recourir à la liste complète des invariants de Riemann pour définir les produits non conservatifs  $\pm \frac{m}{\varepsilon^2}\partial_x\chi$  dans les équations d'évolution des quantités de mouvement partielles  $\alpha_k\rho_ku_k$  du système (5.43). Rappelons en effet qu'à la traversée de l'onde de vitesse  $u_2$  portant la discontinuité en  $\chi$  dans un problème de Riemann, la relation de Rankine-Hugoniot appliquée à l'équation  $\partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1) = 0$  impose la continuité de  $m$ . Les produits non conservatifs  $\pm \frac{m}{\varepsilon^2}\partial_x\chi$  sont donc définis comme le produit d'une constante par le saut de  $\chi$  à la traversée de l'onde de vitesse  $u_2$ .*

### Approche par relaxation

Pour établir un schéma numérique avec décentrement des termes sources de relaxation en vitesses, nous proposons dans un premier temps d'utiliser l'approche par relaxation mise au point

dans le chapitre précédent. Dans le cas présent, le système de relaxation s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) - \pi_1 \partial_x \alpha_1 + \frac{m}{\varepsilon^2} \partial_x \chi = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) - a_1^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = \zeta \alpha_1 \rho_1 (p_1 - \pi_1), \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) + \pi_1 \partial_x \alpha_1 - \frac{m}{\varepsilon^2} \partial_x \chi = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \pi_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2) + a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = \zeta \alpha_2 \rho_2 (p_2 - \pi_2), \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \chi) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \chi u_2) = 0, \end{cases}$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ . Rappelons que le paramètre  $\zeta$  est la fréquence de relaxation du système vers le modèle bifluide et que l'on a formellement

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \pi_k = p_k,$$

sous la condition de stabilité

$$a_k > \max_{\rho_k} [\rho_k c_k(\rho_k)], \quad k = 1, 2. \quad (5.44)$$

Rappelons également que l'approche par relaxation est basée sur une méthode à pas fractionnaires : un schéma de Godunov est utilisé pour la partie convective du système de relaxation, puis on résout sur chaque cellule le système d'EDO associé au second pas et qui prend en compte les termes sources de relaxation dans le régime formel  $\zeta \rightarrow +\infty$ . Nous ne détaillons pas cette description discrète puisqu'elle est similaire à ce qui a été exposé dans le chapitre précédent. On s'intéresse plus particulièrement à la résolution du problème de Riemann qui devient différente en raison de l'introduction de la nouvelle variable  $\chi$ .

### Résolution du problème de Riemann

Considérons le problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5.45)$$

où nous avons défini le vecteur des inconnues

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \chi \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ \alpha_k \rho_k u_k \\ \alpha_k \rho_k \pi_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

sur l'espace des états

$$\Omega^r = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^8; \alpha_1 \in (0, 1), \rho_k > 0, \pi_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \chi \in \mathbb{R}\}.$$

Les vecteurs des flux conservatifs et non conservatifs sont

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \chi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_2 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ -\pi_1 \partial_x \alpha_1 \\ -a_1^2 u_2 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ \pi_1 \partial_x \alpha_1 \\ a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la solution de ce problème de Riemann comportait uniquement des discontinuités de contact de vitesses respectives  $u_k - c_k$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_k + c_k$  pour  $k = 1, 2$ . La valeur propre  $u_2$  est maintenant double. En effet, la nouvelle variable  $\chi$  est transportée à la vitesse  $u_2$ . D'autre part, et de manière analogue au chapitre précédent, les produits non conservatifs étant définis sur l'onde de couplage de vitesse  $u_2$ , le système peut donc s'écrire de la manière suivante

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) = \mathcal{M}'_{\rho u} \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) = \mathcal{M}^e_{\rho \pi} \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) = (-\mathcal{M}_{\rho u} + \frac{m}{\varepsilon^2} \llbracket \chi \rrbracket) \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \pi_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \pi_2 u_2 + a_2^2 \alpha_2 u_2) + a_2^2 u_2 \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 \chi) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 \chi u_2) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{M}'_{\rho u} = \mathcal{M}_{\rho u} - \frac{m}{\varepsilon^2} \llbracket \chi \rrbracket, \quad (5.46)$$

et

$$\mathcal{M}_{\rho\pi}^e = m(\mathcal{I}_{1d} - \mathcal{I}_{1g}) + a_1^2 u_2 (\alpha_{1d} - \alpha_{1g}). \quad (5.47)$$

Les termes  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $[\chi]$  restent encore à définir. Concernant le terme  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$ , il contient la modification apportée dans le chapitre précédent. Rappelons que cette modification permet de préserver les ondes de couplage du système initial et rend l'onde de vitesse  $u_1$  « transparente », en d'autres termes les variables  $\rho_1$  et  $\pi_1$  sont continues à travers cette caractéristique. Nous suivons la même démarche que dans le chapitre précédent : on résout le problème de Riemann explicitement en supposant les contributions non conservatives  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $[\chi]$  comme connues à priori.

**Théorème 5.1.** *Soient deux états constants  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_d$  dans  $\Omega^r$ . Supposons les contributions non conservatives  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $[\chi]$  connues. Alors il existe une unique solution auto-semblable*

$$\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, [\chi]) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \chi \end{pmatrix} (x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, [\chi])$$

du problème de Riemann (5.45) munie de la contribution (5.47). D'une part, cette solution vérifie

$$\alpha_1(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \begin{cases} \alpha_{1g} & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \alpha_{1d} & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \end{cases}$$

et

$$\mathbf{U}_2(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, [\chi]) = \begin{cases} \mathbf{U}_{2g}, & \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_{2-}, & \lambda_3^r(\mathbf{U}_g) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \mathbf{U}_{2+}, & \lambda_0^r(\mathbf{U}_+) < \frac{x}{t} < \lambda_4^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_{2d}, & \frac{x}{t} > \lambda_4^r(\mathbf{U}_d), \end{cases}$$

où les états intermédiaires sont donnés par les relation suivantes :

$$\begin{cases} u_{2-} = u_2, \rho_{2-} = \frac{a_2}{u_2 - \lambda_3^r(\mathbf{U}_g)}, \pi_{2-} = \pi_{2g} - a_2(u_2 - u_{2g}), \\ u_{2+} = u_2, \rho_{2+} = \frac{a_2}{\lambda_4^r(\mathbf{U}_d) - u_2}, \pi_{2+} = \frac{\alpha_{2-}\pi_{2-} - \mathcal{M}_{\rho u}}{\alpha_{2+}}, \end{cases} \quad (5.48)$$

avec

$$u_2 = \frac{(2a_2(\alpha_{2u_2})^* - \mathcal{M}_{\rho u})(\lambda_2^r - \lambda_1^r) + 2(a_1(\alpha_{1u_1})^* + a_2(\alpha_{2u_2})^*)[\chi]/\varepsilon^2}{a_2(\alpha_{2g} + \alpha_{2d})(\lambda_2^r - \lambda_1^r) + (a_2(\alpha_{2g} + \alpha_{2d}) + a_1(\alpha_{1g} + \alpha_{1d}))[\chi]/\varepsilon^2}, \quad (5.49)$$

et

$$\begin{cases} (\alpha_1 u_1)^* &= \frac{1}{2}(\alpha_{1g} u_{1g} + \alpha_{1d} u_{1d}) - \frac{1}{2a_1}(\alpha_{1d} \pi_{1d} - \alpha_{1g} \pi_{1g}), \\ (\alpha_2 u_2)^* &= \frac{1}{2}(\alpha_{2g} u_{2g} + \alpha_{2d} u_{2d}) - \frac{1}{2a_2}(\alpha_{2d} \pi_{2d} - \alpha_{2g} \pi_{2g}). \end{cases}$$

D'autre part, concernant la phase 1, la solution s'écrit :

$$\mathbf{U}_1(x/t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d, \mathcal{M}_{\rho u}, \llbracket \chi \rrbracket) = \begin{cases} \mathbf{U}_{1g}, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_g), \\ \mathbf{U}_{1-}, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_g^*) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r(\mathbf{U}_-), \\ \mathbf{U}_{1+}, & \lambda_0^r(\mathbf{U}_+) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_d), \\ \mathbf{U}_{1d}, & \frac{x}{t} > \lambda_2^r(\mathbf{U}_d), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} u_{1-} &= \frac{a_1 \mathcal{M}'_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho \pi}^e + 2a_1(a_1(\alpha_1 u_1)^* - m u_1^*)}{2a_1(a_1 \alpha_{1g} - m)}, & \rho_{1-} &= \frac{m}{\alpha_{1g}(u_{1-} - u_2)}, \\ u_{1+} &= \frac{a_1 \mathcal{M}'_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho \pi}^e + 2a_1(a_1(\alpha_1 u_1)^* + m u_1^*)}{2a_1(a_1 \alpha_{1d} + m)}, & \rho_{1+} &= \frac{m}{\alpha_{1d}(u_{1+} - u_2)}, \\ \pi_{1-} &= \frac{-a_1 \mathcal{M}'_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho \pi}^e + 2(a_1(\alpha_1 \pi_1)^* - m \pi_1^*)}{2(a_1 \alpha_{1g} - m)}, \\ \pi_{1+} &= \frac{a_1 \mathcal{M}'_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho \pi}^e + 2(a_1(\alpha_1 \pi_1)^* + m \pi_1^*)}{2(a_1 \alpha_{1d} + m)}, \end{cases} \quad (5.50)$$

et où le débit de masse  $m$  vérifie :

$$m = \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + a_2(\alpha_{2g} + \alpha_{2d})u_2 - 2a_2(\alpha_2 u_2)^*}{\llbracket \chi \rrbracket / \varepsilon^2}. \quad (5.51)$$

*Démonstration.* La présence du terme  $\frac{m}{\varepsilon^2} \llbracket \chi \rrbracket$  modifie la solution du problème de Riemann munie de la contribution  $\mathcal{M}_{\rho \pi}^e$  par rapport au chapitre précédent. Tout d'abord, les relations de Rankine-Hugoniot sur les ondes extrêmes pour l'équation en  $\alpha_2 \rho_2 u_2$  conduisent aux deux égalités :

$$\begin{cases} a_2(u_2 - u_{2g}) + (\pi_{2-} - \pi_{2g}) = 0, \\ a_2(u_{2d} - u_2) + (\pi_{2d} - \pi_{2+}) = 0. \end{cases} \quad (5.52)$$

Les mêmes relations de saut appliquées de part et d'autre de l'onde de couplage nous donnent :

$$\alpha_{2d} \pi_{2+} - \alpha_{2g} \pi_{2-} = -\mathcal{M}_{\rho u} + \frac{m}{\varepsilon^2} \llbracket \chi \rrbracket. \quad (5.53)$$

Nous voyons que la présence du débit  $m$  implique la recherche d'une autre relation liant  $u_2$  et  $m$ .

Pour cela rappelons l'expression des valeurs propres extrêmes pour la phase 1 qui sont

$$\begin{cases} \lambda_1^r(\mathbf{U}_g) = u_{1-} - a_1 \tau_{1-}, \\ \lambda_2^r(\mathbf{U}_d) = u_{1+} + a_2 \tau_{1+}, \end{cases} \quad (5.54)$$

ainsi que les définitions du débit de masse  $m$  à travers l'onde de couplage :

$$\begin{cases} \alpha_{1g}(u_{1-} - u_2) = m \tau_{1-}, \\ \alpha_{1d}(u_{1+} - u_2) = m \tau_{1+}. \end{cases} \quad (5.55)$$

On écrit ensuite la relation de Rankine-Hugoniot pour l'équation de quantité de mouvement de la phase 1 de part et d'autre de l'onde de couplage :

$$m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1d}\pi_{1+} - \alpha_{1g}\pi_{1-}) + \frac{m}{\varepsilon^2} \llbracket \chi \rrbracket = \mathcal{M}_{\rho u}.$$

Or selon les égalités (5.54) et (5.55), on a

$$\begin{aligned} m(\lambda_2^r - \lambda_1^r) &= m(u_{1+} - u_{1-}) + a_1 m(\tau_{1+} - \tau_{1-}) \\ &= \mathcal{M}_{\rho u} - (\alpha_{1d}\pi_{1+} - \alpha_{1g}\pi_{1-}) + a_1 \alpha_{1g}(u_{1-} - u_2) + a_1 \alpha_{1d}(u_{1+} - u_2) - \frac{m}{\varepsilon^2} \llbracket \chi \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Rappelons maintenant que, en dehors de l'onde de couplage, le système est réduit à deux systèmes de relaxation par phase indépendants. Ainsi, si on écrit les relations de Rankine-Hugoniot de part et d'autre de l'onde  $\lambda_1(\mathbf{U}_L) = \lambda_1(\mathbf{U}_-)$  pour l'équation en  $\alpha_1 \rho_1 \pi_1$ , on obtient

$$\llbracket \pi_1 \rrbracket_L^- + a_1 \llbracket u_1 \rrbracket_L^- = 0.$$

On utilise cette dernière relation dans l'équation (5.56) pour obtenir une seconde équation liant  $u_2$  et  $m$  c'est-à-dire :

$$m \left( \lambda_2^r - \lambda_1^r + \frac{\llbracket \chi \rrbracket}{\varepsilon^2} \right) + a_1 u_2 (\alpha_{1g} + \alpha_{1d}) = \mathcal{M}_{\rho u} + \alpha_{1g}(a_1 u_{1g} + \pi_{1g}) + \alpha_{1d}(a_1 u_{1d} - \pi_{1d}). \quad (5.57)$$

Les équations (5.52), (5.53) et (5.57) définissent un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues qui sont  $(u_2, m, \pi_{2-}, \pi_{2+})$  et dont le déterminant est non nul pourvu que  $a_1$  et  $a_2$  soient suffisamment grands (hypothèses naturelles selon la condition (5.44)). La phase 2 étant ainsi complètement résolue, il reste à exprimer la solution pour la phase 1. Le principe est le même que la démonstration du chapitre précédent puisqu'il nous reste à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) = \mathcal{M}'_{\rho u} \delta_{x-u_2 t}, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \pi_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \pi_1 u_1 + a_1^2 \alpha_1 u_1) = \mathcal{M}^e_{\rho \pi} \delta_{x-u_2 t}. \end{cases}$$



Ce type de système avec terme source mesure est donc résolu de manière explicite pour donner les formules (5.50).  $\square$

Maintenant que nous avons résolu le problème de Riemann de manière explicite en fonction des contributions  $\mathcal{M}_{\rho u}$  et  $[[\chi]]$ , il reste à connaître ces deux dernières grandeurs. Concernant le saut  $[[\chi]]$ , nous évaluons celui-ci simplement en nous basant sur la formule (5.41) de sa dérivée en espace. Comme on est amené dans notre méthode à résoudre le problème de Riemann (5.45) de part et d'autre de deux cellules successives, dont la longueur est constante et égale au pas  $\Delta x$ , on pose ainsi

$$\begin{aligned} [[\chi]] &= \chi_d - \chi_g \\ &= \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\lambda_g |u_r|_g}{(\alpha_1 \rho_1)_g} + \frac{\lambda_d |u_r|_d}{(\alpha_1 \rho_1)_d} \right). \end{aligned}$$

Sur la base du même raisonnement, on définit la contribution non conservative  $\mathcal{M}_{\rho u}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{M}_{\rho u} = - \left( \frac{(\pi_1)_g + (\pi_1)_d}{2} \right) ((\alpha_1)_d - (\alpha_1)_g).$$

Ceci conclut la description de la méthode numérique avec décentrement des termes sources de relaxation en vitesse.

### 5.3 Résultats numériques

Cette section présente des résultats numériques de plusieurs cas tests de couplage interfacial entre le modèle bifluide à deux pressions et le modèle de drift. Tout d'abord, précisons les conditions de ces tests. Nous considérons un domaine en espace donné par  $x \in [-0,5; 0,5]$ . Le modèle bifluide est simulé dans la partie  $x < 0$  et le modèle de dérive dans la partie  $x > 0$ . La technique de couplage employée est celle décrite au début de la section précédente.

Nous nous plaçons dans des conditions de température et pression proches de celles d'un réacteur en fonctionnement nominal. Afin d'avoir une bonne représentation du fluide diphasique eau et vapeur, on utilise une loi d'état du type gaz raides c'est-à-dire que l'on a :

$$p_k(\rho_k) = A_k(\gamma_k - 1)\rho_k^{\gamma_k} - P_{k,\infty}, \quad \text{pour } k = 1, 2,$$

où les coefficients  $A_k$ ,  $\gamma_k$  et  $P_{k,\infty}$  ont des valeurs constantes données dans le tableau 5.1. Les valeurs de ces constantes sont calibrées de telle manière que, à pressions  $p_1 = p_2 = 150$  bar et températures  $T_1 = T_2 = 342.16$  °C, les densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  correspondent respectivement aux densités de l'eau et la vapeur à saturation c'est-à-dire  $\rho_1^* = 603.52\text{kg/m}^3$  et  $\rho_2^* = 96.727\text{kg/m}^3$ . Notons que pour la phase 2, la loi d'état correspond en réalité à un gaz parfait. Les champs de forces sont réduits à la gravité  $f_1 = f_2 = -g$ . Les valeurs des différents paramètres de relaxation sont précisées selon le cas test.

Coefficient	Unité	Valeur ( $k = 1$ )	Valeur ( $k = 2$ )
$A_k$	$\text{Pa} \cdot (\text{kg}/\text{m}^3)^{-\gamma_k}$	$1.346 \times 10^{-4}$	62268
$\gamma_k$	-	4.1	1.4
$P_{k,\infty}$	$10^5 \text{ Pa}$	900	0

TABLE 5.1 – Gaz raides : valeurs des constantes

Enfin, concernant les paramètres  $\lambda(\mathbf{u})$  et  $\theta(\mathbf{u})$  dans les relations (5.10) et (5.11), on décide de prendre  $\lambda(\mathbf{u}) = \theta(\mathbf{u}) = 1$ . Comme nous travaillons en variables dimensionnées dans tous les cas tests, les coefficients de relaxation correspondant  $\bar{\Lambda}(\bar{\mathbf{u}})$  et  $\bar{\Theta}(\bar{\mathbf{u}})$  sont déduits à partir des formules (5.15) et (5.17) avec les constantes d'adimensionnement adéquates. La valeur de  $\varepsilon^2$  sera précisée selon le cas test.

### 5.3.1 Tube à choc

Ce premier cas test est un tube à choc démarrant dans le domaine du modèle bifluide. Plus précisément, les conditions initiales sont données par

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} \mathbf{u}_g, & \text{si } x < x_0 \\ \mathbf{u}_d, & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (5.58)$$

où  $x_0 = -0.375$ . Les vecteurs  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_d$  sont donnés dans le tableau 5.2. Le taux de vide est de 0.03, ce qui correspond à des valeurs caractéristiques d'un coeur de REP en régime nominal. Les vitesses sont initialisées à zéro et les pressions des deux phases sont hors équilibre. La simulation est réalisée pour différentes valeurs de  $\varepsilon^2$ . Le temps final de chaque simulation est  $T = 5.10^{-4}\text{s}$  et les conditions aux limites sont du type Neumann. On trace le taux de présence  $\alpha_1$ , la pression moyenne  $p$  et la vitesse moyenne  $u$ . Sur chaque graphique correspondant, on compare les solutions obtenues sur tout le domaine avec le modèle bifluide à deux pressions (notée « bifluide » sur les graphiques), le modèle de drift-flux (« drift ») et le problème de couplage entre les deux modèles (« couplage »).

	Unité	$g$	$d$
$\alpha_1$	-	0.97	0.97
$p_1$	$10^5 \text{ Pa}$	155	155
$p_2$	$10^5 \text{ Pa}$	150	150
$u_1$	m/s	0	0
$u_2$	m/s	0	0

TABLE 5.2 – Tube à choc : conditions initiales

Les résultats pour  $\varepsilon^2 = 10^{-4}$  sont présentés sur la figure 5.1 pour 100 et 1000 points. On remarque dans un premier temps que les courbes des variables de mélange, densité  $\rho$  et vitesse

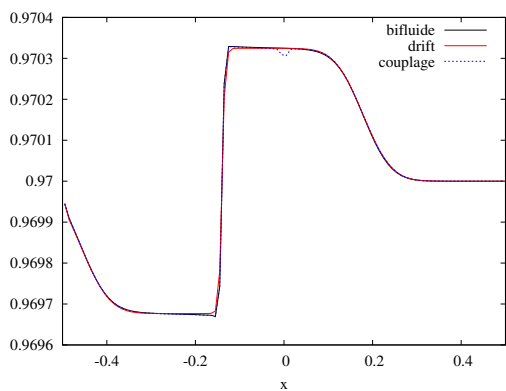
$u$ , sont très proches entre les trois simulations c'est-à-dire bifluide, drift et couplage. En raison des conditions initiales où les pressions sont hors équilibre, deux ondes acoustiques se propagent vers la gauche et la droite du domaine. Il en résulte que, en raison des termes de relaxation en pression, le profil de la fraction  $\alpha_1$  montre également deux ondes extrêmes ainsi qu'une onde de discontinuité de contact située en  $x_0$ . Cette onde met beaucoup plus de temps à se développer puisque sa vitesse est égale à la vitesse  $u_2$ . On note, toujours sur le profil de la fraction  $\alpha_1$  et concernant la solution du couplage, la présence d'un état intermédiaire se développant au niveau de l'interface de couplage en  $x = 0$ . Cet état n'est pas encore visible car il s'agit en réalité d'une discontinuité de contact de vitesse  $u_2$  se développant. Afin de mieux comprendre d'où provient ce phénomène, on regarde la simulation à un temps plus court : sur la figure 5.2, nous avons représenté la même simulation à  $T = 2.5 \times 10^{-4}$ s pour les variables  $\alpha_1$  et  $u_2$  et pour 1000 points. On se rend mieux compte sur cette figure que, en raison du couplage, la vitesse  $u_2$  qui est la vitesse de transport de la fraction  $\alpha_1$  présente un légère discontinuité : à gauche l'équilibre force de traînée/force de gravité n'est pas encore atteint pour le modèle bifluide alors qu'à droite la vitesse relative  $u_r$  suit la loi de drift. En temps longs, les deux modèles convergent vers la même solution et on pourrait remarquer que l'état développé tend à disparaître. Pour s'en assurer, au lieu d'effectuer la même simulation en temps très long, nous préférons diminuer la valeur de  $\varepsilon^2$ . Notons toutefois que la solution du couplage se comporte globalement très bien : les profils dans le domaine bifluide restent très proches de la solution bifluide et ceux du domaine de drift sont également similaires à la solution du modèle de drift.

La figure 5.3 présente le même cas test mais pour  $\varepsilon^2 = 10^{-5}$ . L'onde de discontinuité de contact qui apparaît sur le profil de la fraction  $\alpha_1$  au niveau de l'interface de couplage est de plus faible amplitude. Ceci est évidemment dû au fait que, le temps de relaxation  $\varepsilon$  étant plus proche de zéro, les deux modèles à coupler représentent formellement une dynamique d'autant plus proche. C'est ce qu'on peut remarquer au niveau numérique sur ces courbes. Concernant les autres grandeurs,  $\rho$  et  $u$ , les différences entre les courbes ne sont plus discernables.

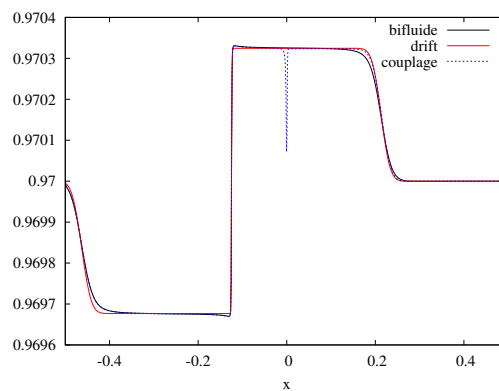
Enfin, la figure 5.4 montre les résultats pour  $\varepsilon^2 = 10^{-6}$ . Les deux modèles à coupler sont alors encore plus proches et l'état qui se développait dans les deux simulations précédentes sur le profil du taux de présence de l'eau a presque disparu.

### 5.3.2 Colonne à bulle

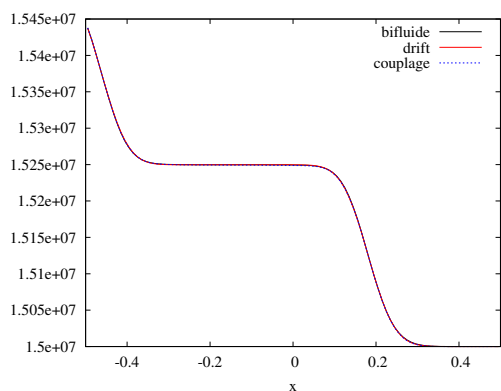
On considère maintenant le cas test suivant. Un écoulement diphasique dispersé ascendant entre dans le domaine en  $x = -0.5$  où les pressions et vitesses phasiques sont fixées. La sortie du domaine est en  $x = 0.5$  et la pression, seulement, est également fixée. Sous l'effet majoritaire de la force de traînée, la gravité (dirigée toujours vers les  $x$  négatifs) tend à s'équilibrer avec le gradient de pression entre l'entrée et la sortie. Les vitesses phasiques tendent alors vers l'équilibre donné par la loi de drift, équilibre atteint sur une distance d'autant plus courte en espace que le temps de  $\varepsilon^2$  relaxation est proche de zéro. Les conditions de bord en entrée sont fixées tandis que pour les conditions de bord en sortie, on résout un demi-problème de Riemann au sens de Dubois [39],



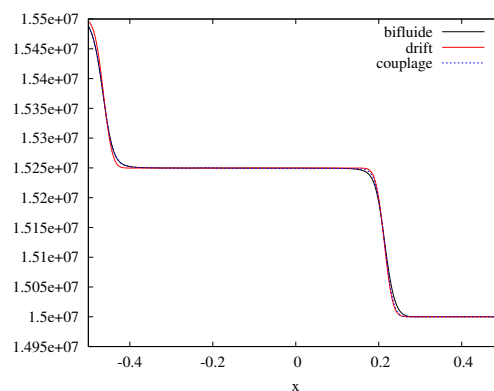
(a) Fraction  $\alpha_1$  (-) : 100 points



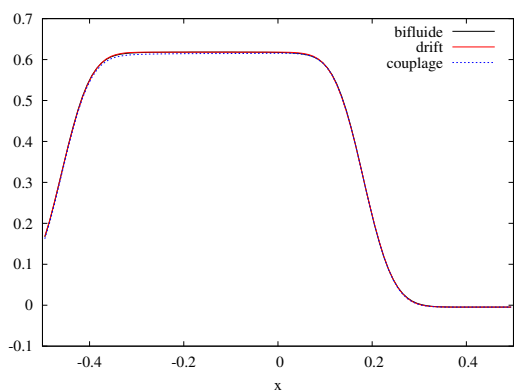
(b) Fraction  $\alpha_1$  (-) : 1000 points



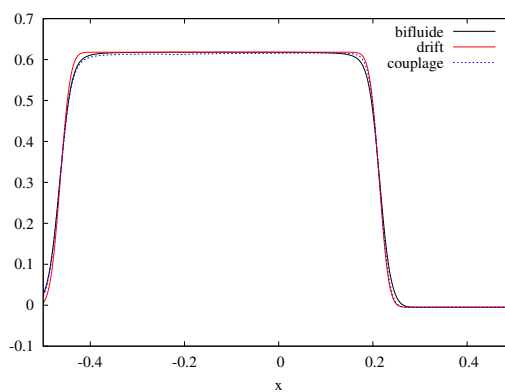
(c) Pression moyenne  $p$  ( Pa ) : 100 points



(d) Pression moyenne  $p$  ( Pa ) : 1000 points

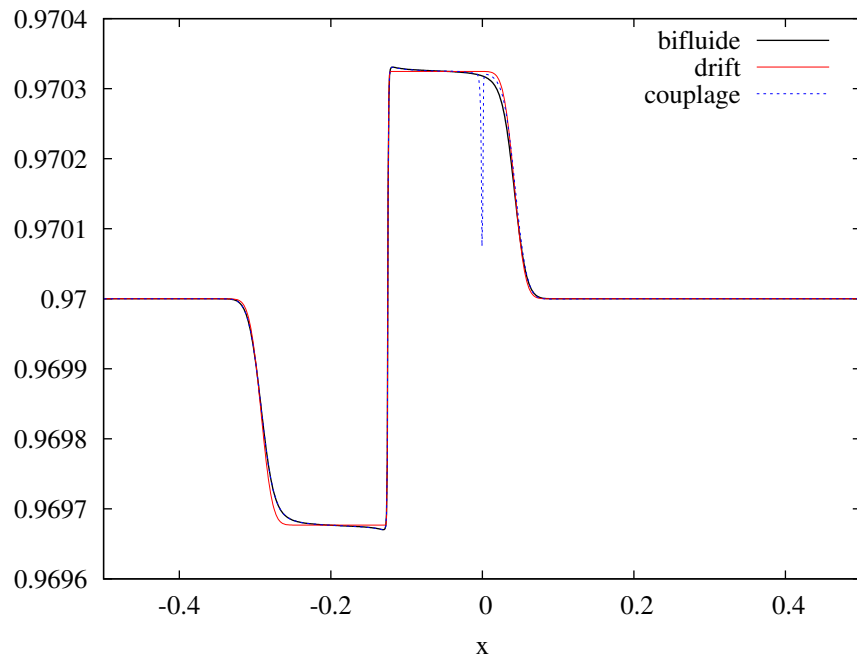


(e) Vitesse moyenne  $u$  ( m/s ) : 100 points

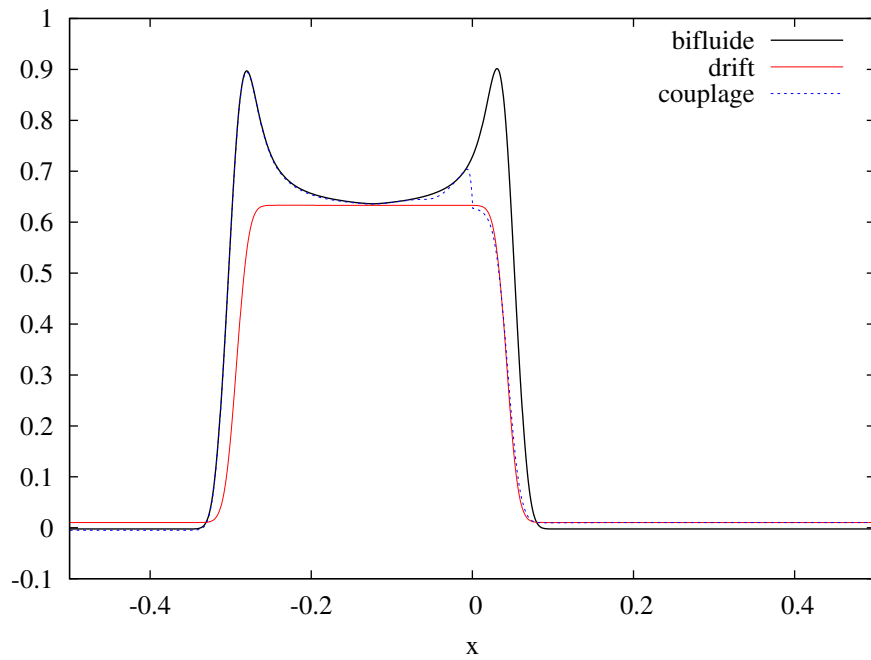


(f) Vitesse moyenne  $u$  ( m/s ) : 1000 points

FIGURE 5.1 – Tube à choc : résultats numériques avec  $\varepsilon^2 = 10^{-4}$

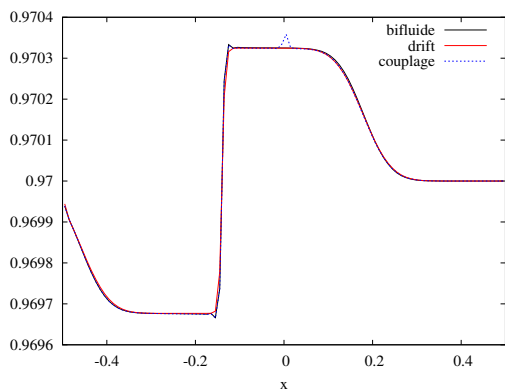


(a) Fraction  $\alpha_1$  (-) : 1000 points

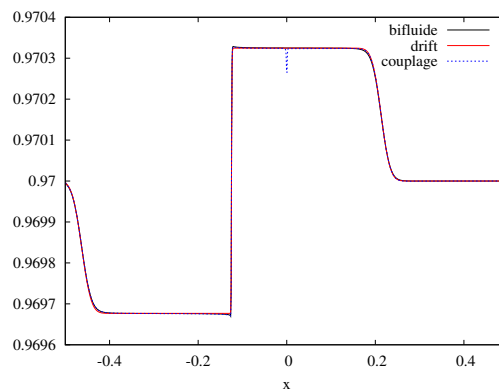


(b) Vitesse  $u_2$  (m/s) : 1000 points

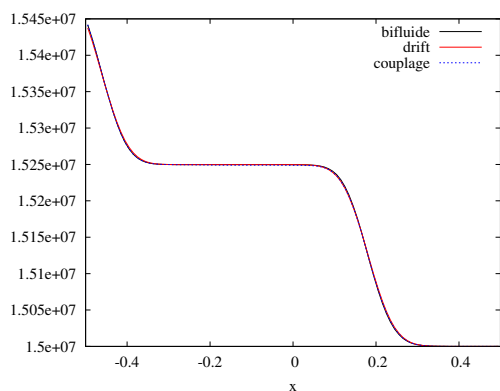
FIGURE 5.2 – Tube à choc : résultats numériques avec  $\varepsilon^2 = 10^{-4}$  à  $T = 2.5 \times 10^{-4}$ s



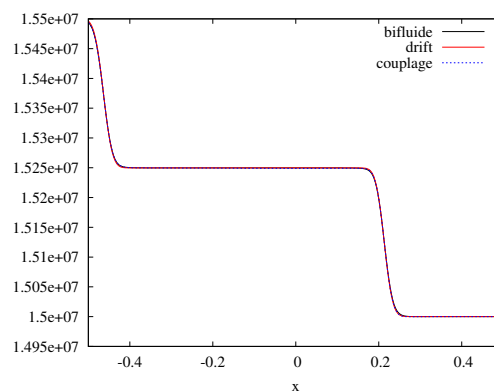
(a) Fraction  $\alpha_1$  (-) : 100 points



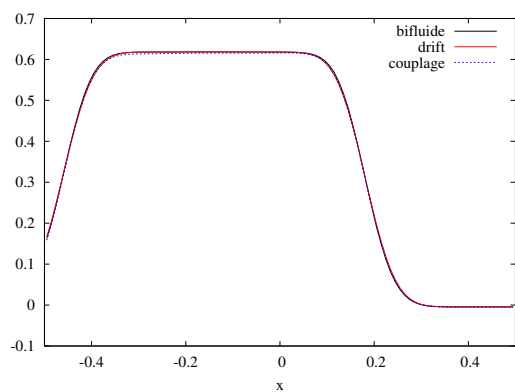
(b) Fraction  $\alpha_1$  (-) : 1000 points



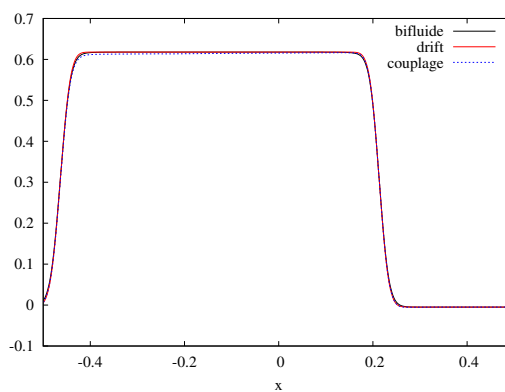
(c) Pression moyenne  $p$  ( Pa ) : 100 points



(d) Pression moyenne  $p$  ( Pa ) : 1000 points



(e) Vitesse moyenne  $u$  ( m/s ) : 100 points



(f) Vitesse moyenne  $u$  ( m/s ) : 1000 points

FIGURE 5.3 – Tube à choc : résultats numériques avec  $\varepsilon^2 = 10^{-5}$

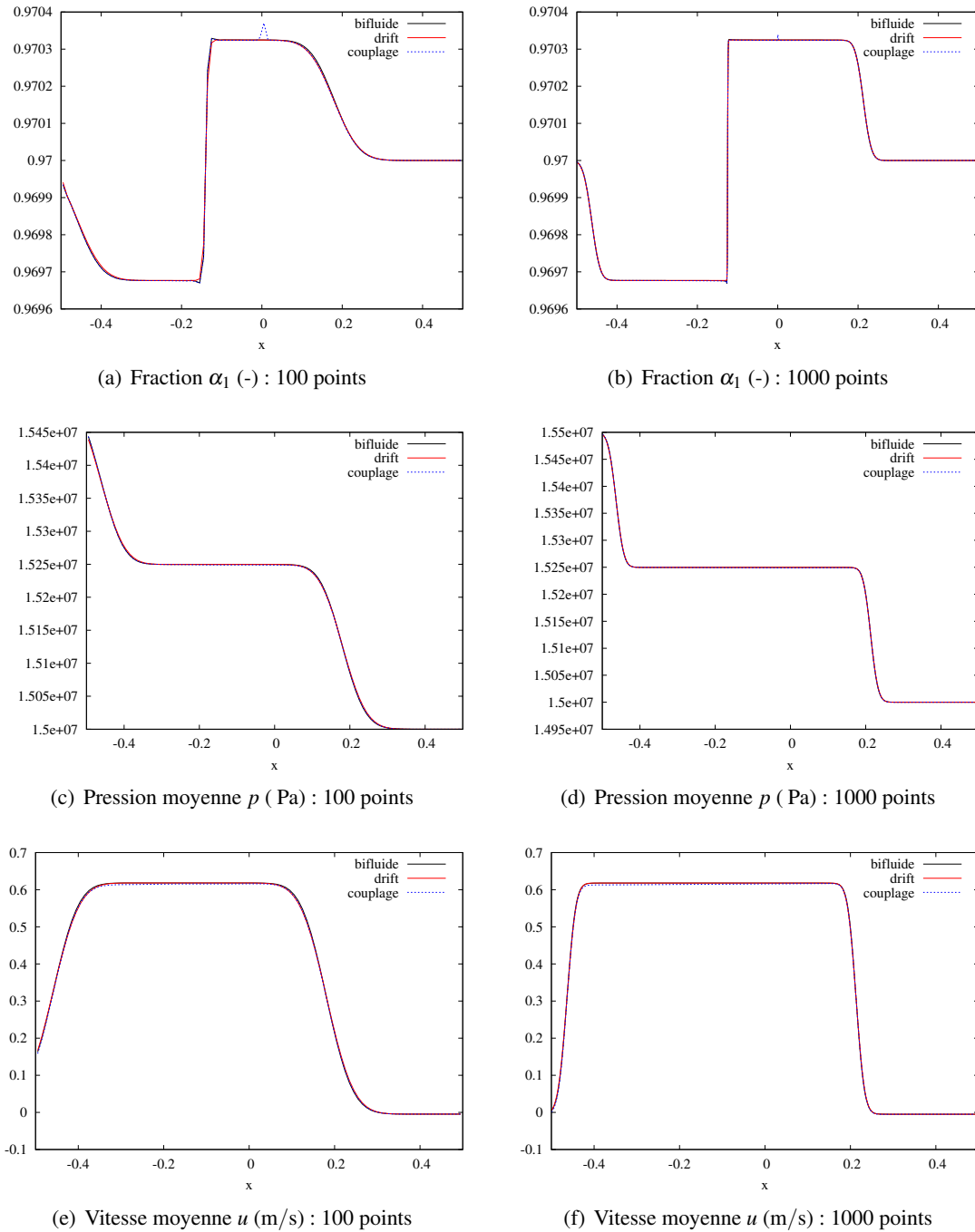


FIGURE 5.4 – Tube à choc : résultats numériques avec  $\epsilon^2 = 10^{-6}$

comme pour le cas test du Robinet de Ransom dans le chapitre précédent. Le tableau 5.3 donne les valeurs des différentes variables en entrée et en sortie du domaine. Les conditions initiales sont les mêmes que les données en entrée sauf pour la pression qui est égale à la pression en sortie. Le nombre de cellules est de 100. On trace les profils de la fraction  $\alpha_1$ , la pression du mélange  $p$  et la vitesse relative  $u_r$  pour les solutions du modèle bifluide, de drift et pour le couplage. Sur chaque figure, on visualise les résultats à  $T = 5 \times 10^{-3}$ s et  $T = T_{sta}$ . Le temps  $T_{sta}$  définit le temps où la solution du problème est stationnaire. L'écoulement est considéré comme stationnaire lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\max_{j,p} \left\{ \frac{\left| \left[ \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} \right]_p - \left[ \mathbf{u}_{j+1/2}^n \right]_p \right|}{\left| \left[ \mathbf{u}_{j+1/2}^n \right]_p \right|} \right\} < 10^{-9}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

où  $[\mathbf{u}]_p$  est la  $p^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{u}$  correspondant aux inconnues du modèle père.

	Unité	Entrée	Sortie
$\alpha_1$	-	0.97	-
$p$	$10^5$ Pa	155	150
$u_1$	m/s	5	-
$u_2$	m/s	15	-

TABLE 5.3 – Colonne à bulle : conditions initiales

Les résultats de ce cas test sont présentés dans un premier temps pour  $\varepsilon^2 = 10^{-1}$ . La figure 5.5 montre le profil de la fraction  $\alpha_1$  pour les deux temps de la simulation où  $T_{sta} \approx 0.283$ s. On remarque le même phénomène que précédemment : au temps intermédiaire, où l'écoulement est encore instationnaire et que l'équilibre n'a pas encore été atteint, une onde est générée au niveau de l'interface de couplage. Au temps  $T_{sta}$  où la solution est considérée comme numériquement stationnaire, le profil en  $\alpha_1$  de la solution couplée est sensiblement identique à la solution du modèle bifluide sauf sur quelques mailles de part et d'autre de l'interface de couplage. *A contrario*, la solution du drift est éloignée. Ceci est principalement dû à la valeur de  $\varepsilon^2$  prise volontairement grande. En effet, dans ce cas, la courbe correspondante au déséquilibre gravité/gradient de pression, qui s'apparente à un phénomène de couche limite, est alors d'autant plus grande et étalée en espace. Il est donc normal que le profil en  $\alpha_1$  donné par le modèle de drift soit éloigné de celui du modèle bifluide : ce phénomène hors équilibre n'est pas pris en compte dans le modèle de dérive et la solution drift sur cette grandeur ne peut pas être considérée comme un solution de référence. Le modèle bifluide représentant cette dynamique plus finement, il est d'autant plus satisfaisant de remarquer que la solution du couplage reste proche de la solution bifluide. La figure 5.6 présente les mêmes résultats mais pour la pression du mélange  $p$ . On remarque pour le temps intermédiaire quelques différences, tout à fait acceptables, entre les trois courbes. Pour le temps  $T_{sta}$ , on note encore une fois que la solution du couplage est plus proche de la solution bifluide. Enfin, concernant



la vitesse relative  $u_r$ , la figure 5.7 nous montre les trois solutions aux différents temps finaux de calcul. Au temps intermédiaire, et contrairement aux deux autres grandeurs précédentes, le profil est quasiment similaire à la solution bifluide et drift sur les domaines correspondants et ce, par construction de la méthode du modèle père que nous avons décrite dans la section précédente. A chaque itération, la solution du modèle père pour les  $x > 0$  est projetée sur l'équilibre donné par la loi de drift. En revanche, au temps  $T_{sta}$ , il existe une légère différence entre les trois courbes de part et d'autre de l'interface. On peut expliquer cela par les conditions aux limites : nous résolvons trois problèmes différents au sens où les modèles sont différents et que les conditions aux limites restent dans le même temps inchangées. Chaque problème, bifluide, drift et couplage admet donc une réponse différente à ces conditions aux limites.

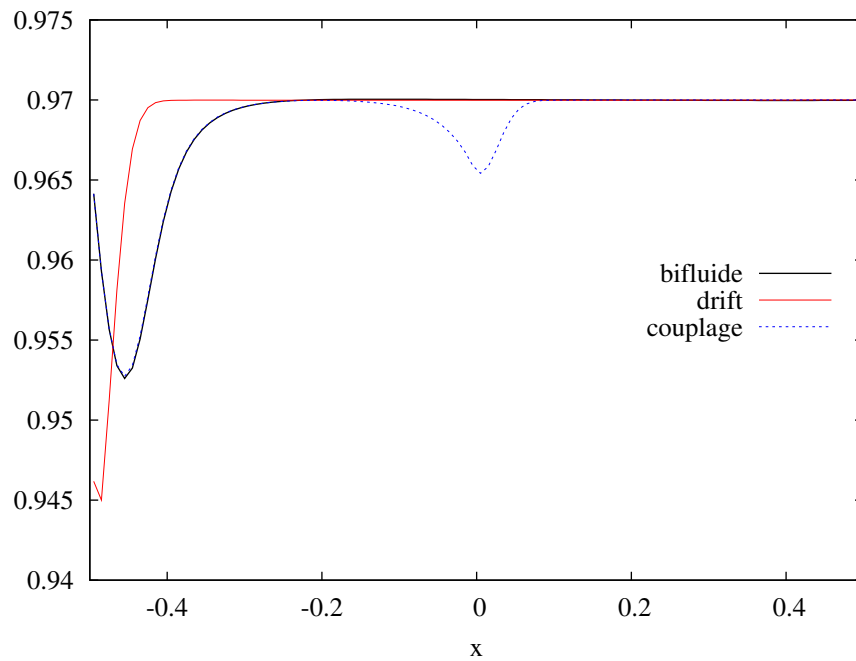
Le temps caractéristique de relaxation est maintenant  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ , ce qui correspond physiquement à une valeur plus probable et caractéristique de ce type d'écoulement dans un réacteur nucléaire à eau sous pression. Le temps intermédiaire est  $T_{sta} \approx 0.237s$ . La figure 5.8 montre les différents profils de la fraction  $\alpha_1$ . On remarque tout d'abord que l'onde générée au niveau de l'interface de couplage est d'une amplitude beaucoup plus faible que dans le cas précédent. Ceci s'explique par la valeur de  $\varepsilon^2$  qui est plus proche de zéro. L'équilibre est donc atteint plus rapidement en espace. Il suffit pour s'en convaincre d'observer la couche limite dont nous parlions précédemment qui est moins étalée en espace. Lorsque l'écoulement stationnaire est établi, le profil de la solution du couplage se rapproche des deux autres solutions. Cela est peut être moins remarquable pour la pression de mélange  $p$  sur la figure 5.9. En revanche, le profil de la vitesse relative sur la figure 5.10 montre bien que les solutions des trois problèmes, bifluide, drift et couplage convergent sensiblement vers la même solution.

### 5.3.3 Injection de bulles

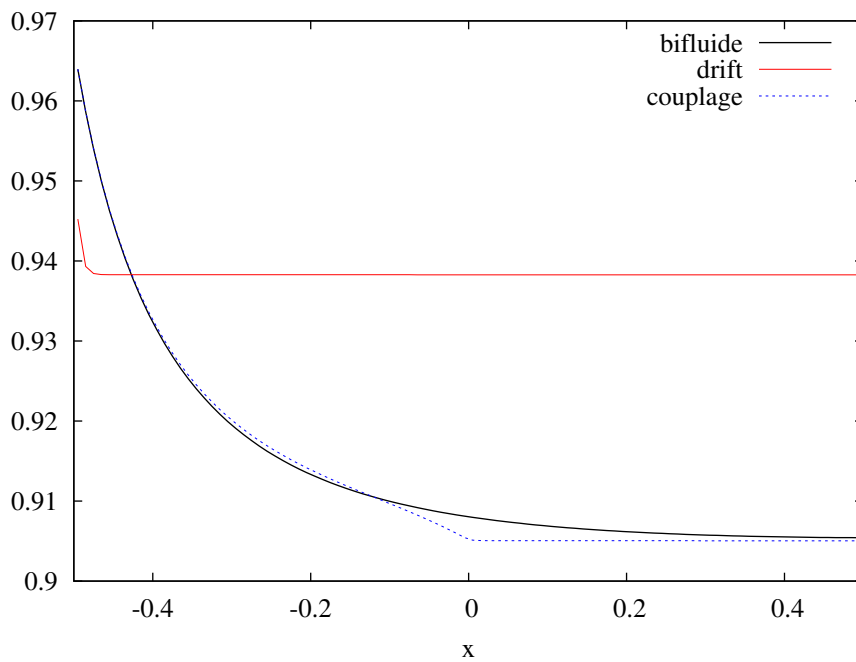
Ce dernier cas test est basé sur les résultats obtenus dans le cas de la colonne à bulles. L'idée est ici de démarrer la simulation avec comme conditions initiales les résultats de l'écoulement stationnaire de la colonne à bulles. Des bulles sont alors injectées dans le domaine de la manière suivante : la valeur de la fraction  $\alpha_1$  sur la première interface du domaine est initialisée à la valeur  $\alpha_1 = 0.7$  pour  $t < 0.255s$ . Lorsqu'on atteint un temps supérieur, alors la fraction de l'eau revient à la valeur  $\alpha_1 = 0.97$ .

On prend le cas  $\varepsilon^2 = 10^{-1}$  dans un premier temps. Le temps final de la simulation est  $T = 0.31s$ . On montre les profils de la fraction  $\alpha_1$ , la pression de mélange  $p$  et la vitesse relative  $u_r$ . Nous remarquons que le créneau en  $\alpha_1$  injecté en  $x = -0.5$  traverse l'interface de couplage sans apparition de phénomènes (comme une onde réfléchi par exemple) qui pourraient polluer l'écoulement. Ceci s'explique par le fait que la simulation a été démarrée une fois l'équilibre flottabilité/force de traînée établi. Dans ce cas, les deux modèles à coupler sont formellement identiques, toujours à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près, ce qui implique en particulier que le couplage s'avère alors « transparent ».

Enfin, nous reprenons les résultats de la colonne à bulles dans le cas où  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ . Les bulles

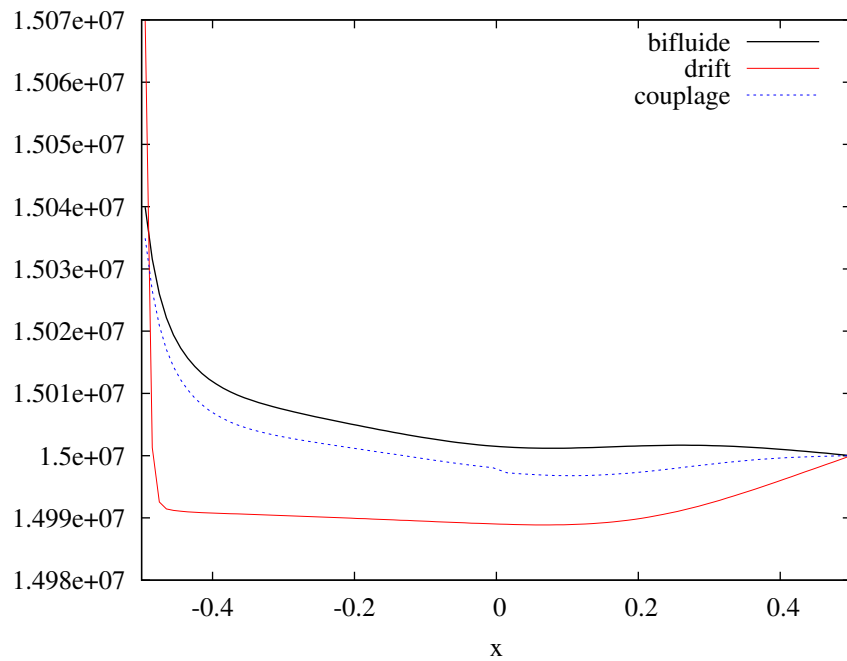


(a)  $T = 5 \times 10^{-3} \text{s}$

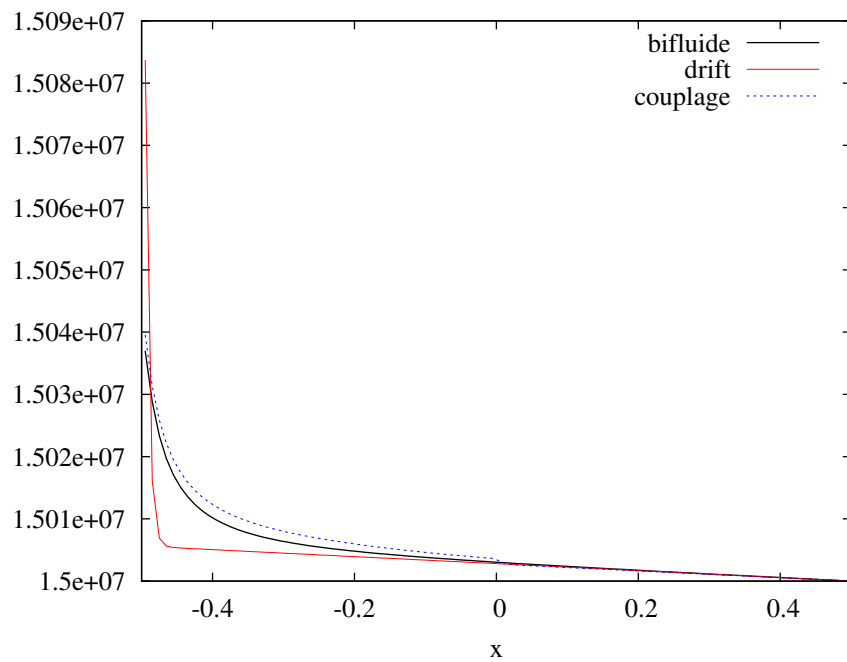


(b)  $T = T_{sta}$

FIGURE 5.5 – Colonne à bulle : résultats numériques pour  $\alpha_1$  avec  $\varepsilon^2 = 10^{-1}$

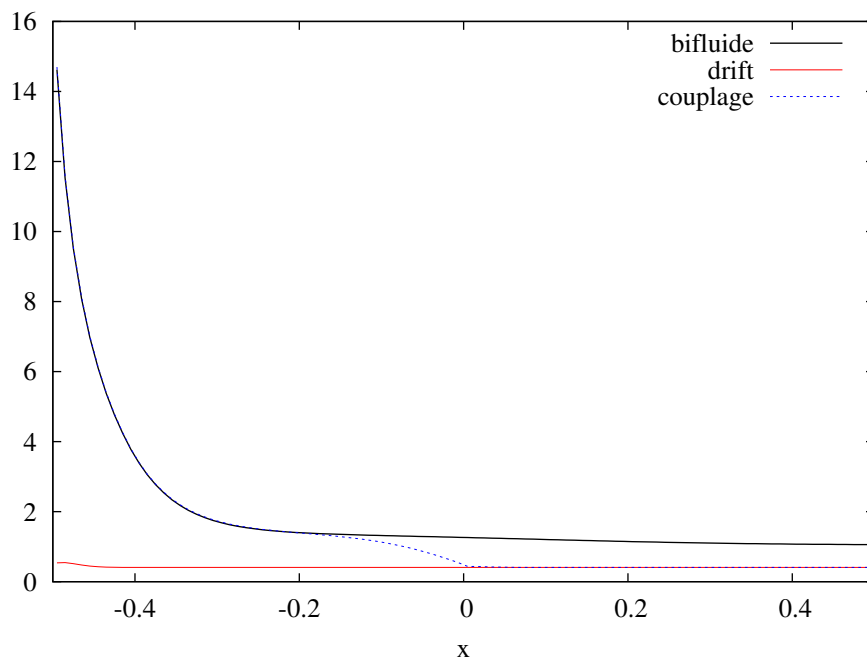


(a)  $T = 5 \times 10^{-3} \text{s}$

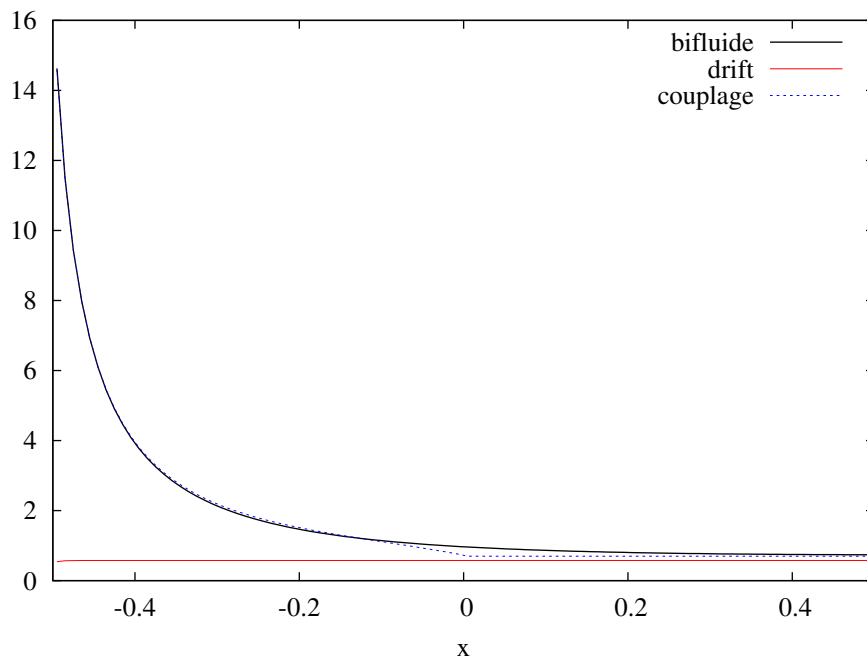


(b)  $T = T_{sta}$

FIGURE 5.6 – Colonne à bulle : résultats numériques pour  $p$  (Pa) avec  $\varepsilon^2 = 10^{-1}$

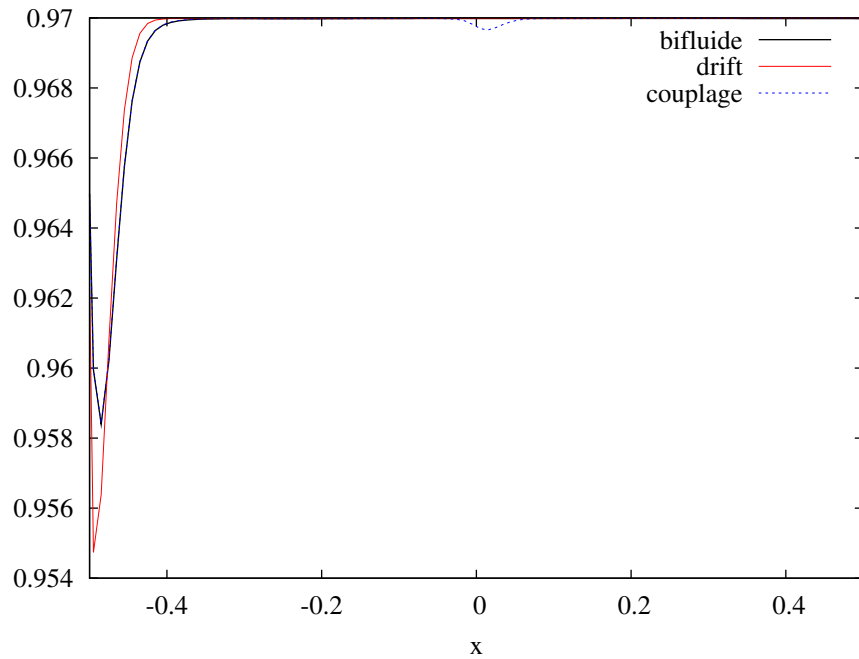


(a)  $T = 5 \times 10^{-3}$ s

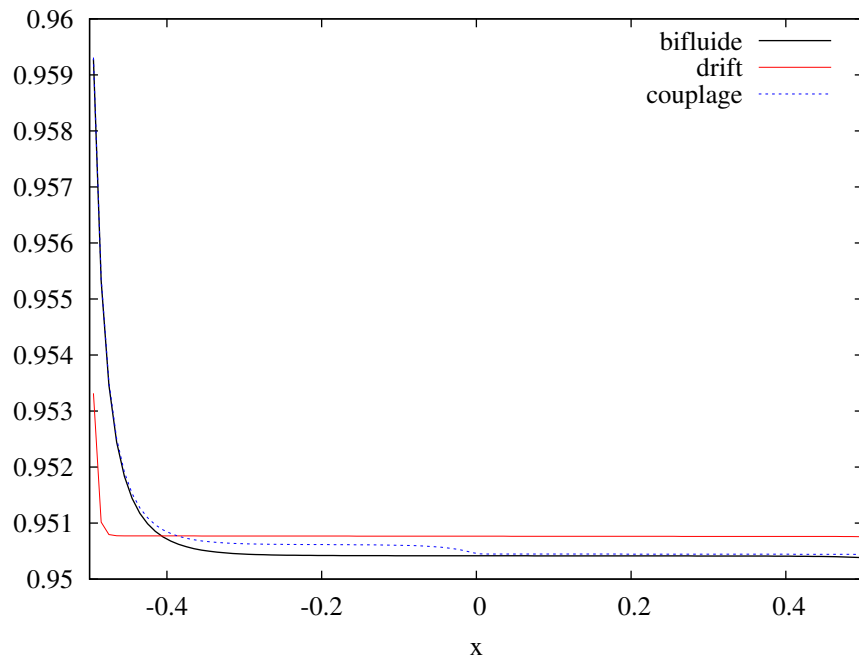


(b)  $T = T_{sta}$

FIGURE 5.7 – Colonne à bulle : résultats numériques pour  $u_r$  (m/s) avec  $\varepsilon^2 = 10^{-1}$

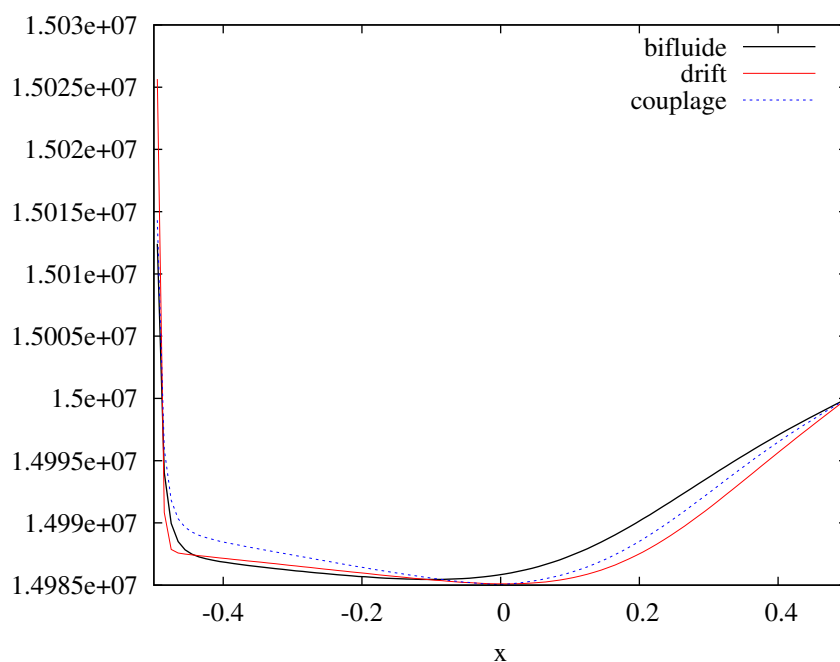


(a)  $T = 5 \times 10^{-3} \text{s}$

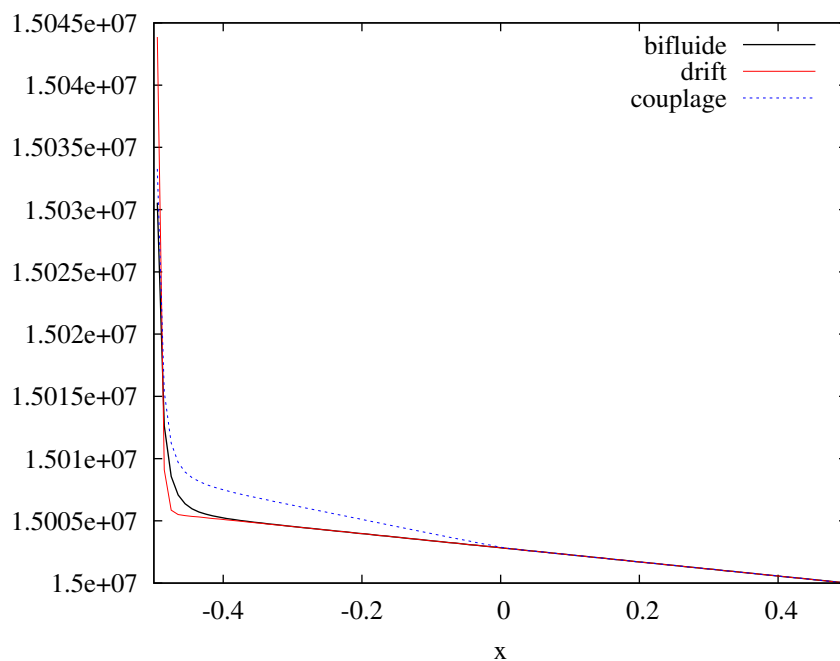


(b)  $T = T_{sta}$

FIGURE 5.8 – Colonne à bulle : résultats numériques pour  $\alpha_1$  avec  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$

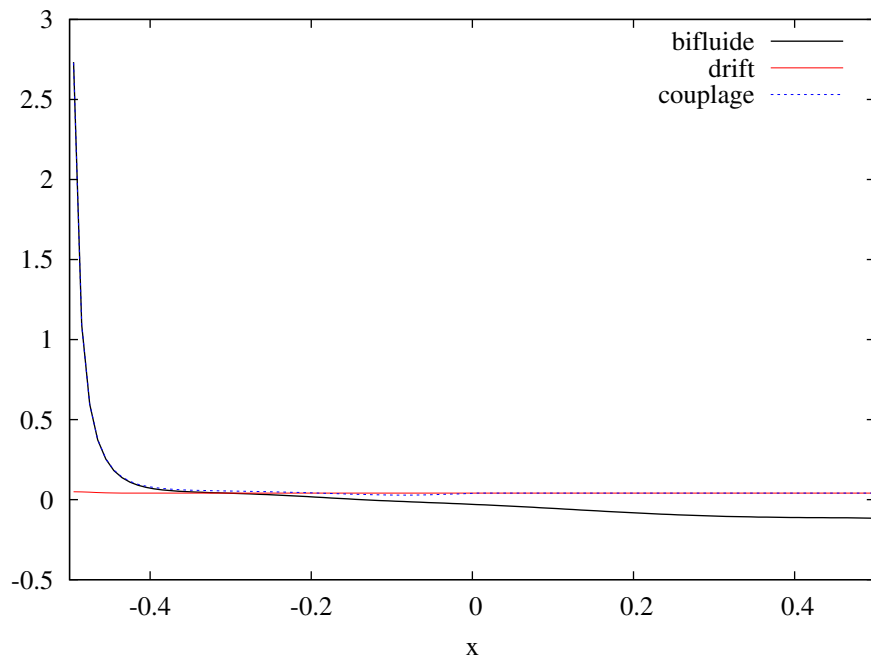


(a)  $T = 5 \times 10^{-3}$ s

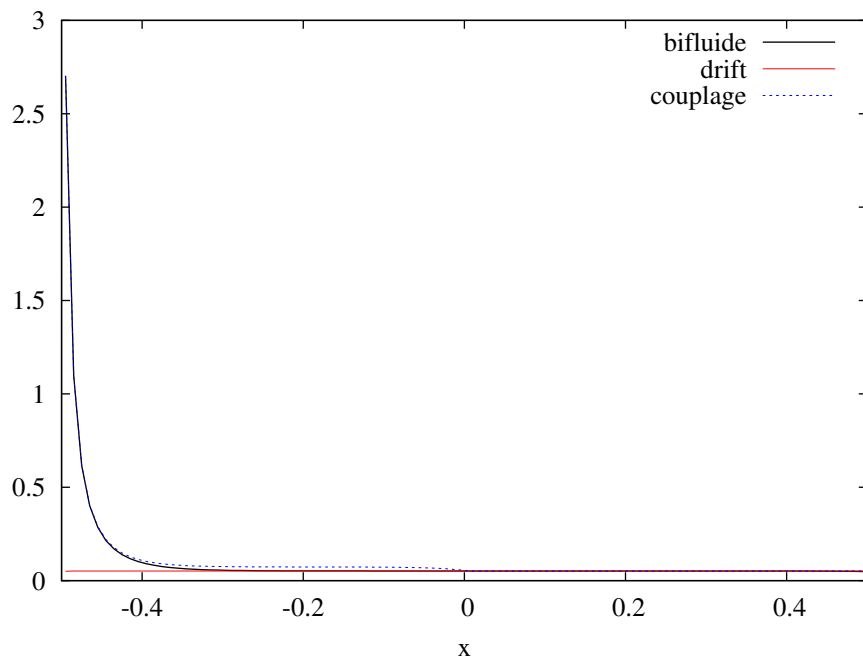


(b)  $T = T_{sta}$

FIGURE 5.9 – Colonne à bulle : résultats numériques pour  $p$  ( Pa) avec  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$

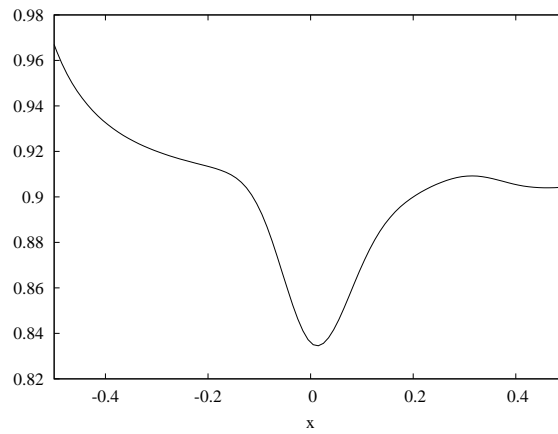


(a)  $T = 5 \times 10^{-3} \text{s}$

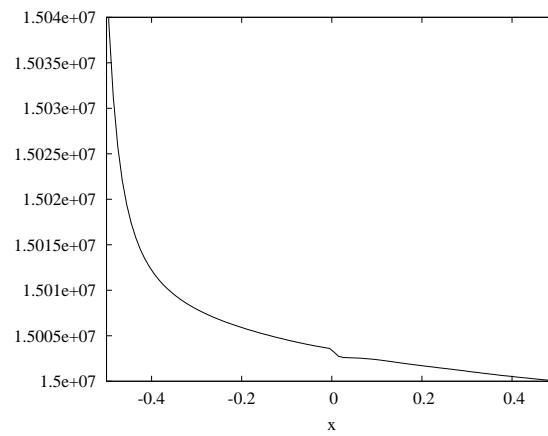


(b)  $T = T_{sta}$

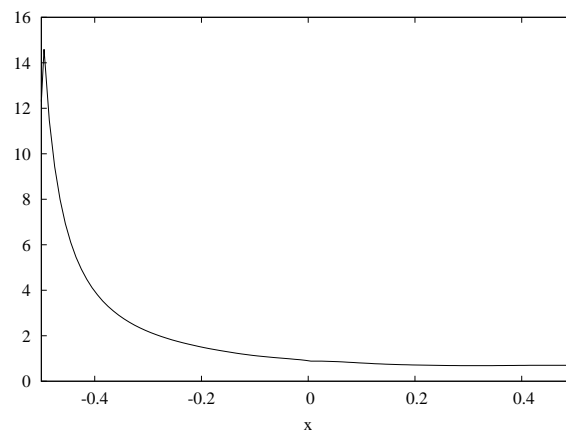
FIGURE 5.10 – Colonne à bulle : résultats numériques pour  $u_r$  (m/s) avec  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



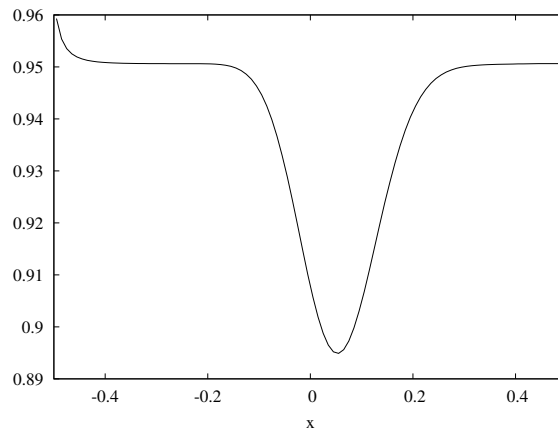
(b) Pression  $p$  (Pa)



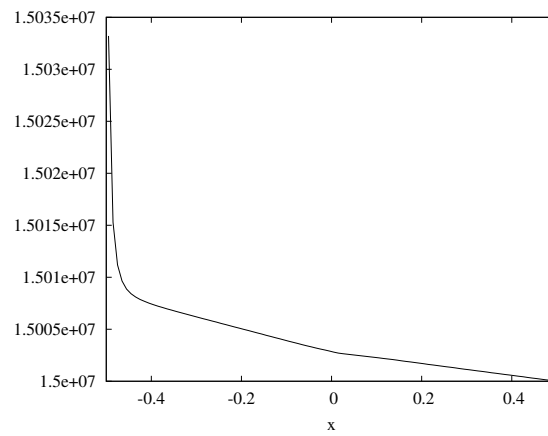
(c) Vitesse relative  $u_r$  (m/s)

FIGURE 5.11 – Injection de bulles : résultats numériques pour le couplage avec  $\varepsilon^2 = 10^{-1}$

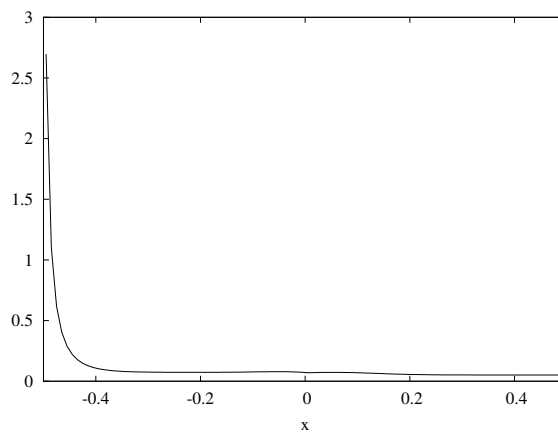




(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



(b) Pression  $p$  (Pa)



(c) Vitesse relative  $u_r$  (m/s)

FIGURE 5.12 – Injection de bulles : résultats numériques pour le couplage avec  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$

sont injectées de la même façon et le temps final de la simulation est maintenant  $T = 0.34\text{s}$ . Les résultats de la simulation pour le couplage sont représentés sur la figure 5.12. Dans ce cas, les modèles représentent une dynamique d'autant plus proche que  $\varepsilon^2$  a été pris proche de zéro. Les résultats nous amène à formuler les mêmes remarques que précédemment : les différents profils ne sont pas perturbés lorsque le créneau traverse l'interface de couplage.



---

## Conclusion et perspectives

---

Les différents travaux que j'ai rapportés dans ce manuscrit ont montré que, pour coupler des codes de calcul basés sur des modélisations différentes, l'approche du couplage interfacial de modèles était indispensable. La problématique est cependant complexe et nécessite d'être comprise en profondeur pour pouvoir simuler un écoulement dans le circuit primaire, avec différentes représentations mathématiques des écoulements diphasiques selon la composante qui est considérée. C'est dans cet objectif que nous avons proposé plusieurs méthodes offrant différentes possibilités intéressantes.

Tout d'abord, nous avons étudié, grâce à deux problèmes de couplage, deux conditions de transmission : la formulation conservative ou couplage par flux, consistant en l'écriture d'un modèle global ou modèle père, et celle non conservative ou couplage par état, imposant une condition aux limites pour chaque problème. La première condition a pour avantage de respecter le principe de conservation des équations étudiées en ne calculant qu'un seul et unique flux à l'interface, celui du modèle père. Cependant, elle s'est révélée incapable de capturer les profils uniformes des variables physiques et d'assurer plus particulièrement leur continuité au travers de l'interface de couplage. La seconde condition de transmission permet d'imposer la continuité de différents jeux de grandeurs physiques comme la pression ou l'enthalpie, ces multiples choix donnant une certaine souplesse dans le couplage mais des pertes de conservation inévitables. A ce titre, nous avons proposé ensuite une nouvelle condition de couplage par l'ajout d'un terme source mesure dans les équations localisé sur l'interface de couplage. L'intérêt d'une telle formulation est d'englober les deux conditions de couplage précédentes dans les poids correspondant et d'être capable de passer continuellement d'une méthode purement conservative à une méthode non conservative. L'autre propriété de la méthode, grâce à l'approche par relaxation proposée, est de préserver les solutions équilibre du problème de couplage et d'annihiler les phénomènes de couche limite autour de l'interface de couplage. Après ce travail, une méthode par optimisation sous contraintes

a été décrite afin de déterminer une valeur du poids, dynamique en temps, associée à certaines motivations comme des pertes de conservation maximales induites par le couplage.

Dans un second temps, toujours dans une optique de couplage de modèles, nous avons établi un nouveau schéma numérique pour le modèle bifluide à deux vitesses et deux pressions basé sur une modélisation des termes de transfert interfacial du type Baer-Nunziato. La méthode a été construite par une approche par relaxation des pressions des deux phases et une estimation des termes sources non conservatifs sur les ondes de transport des taux de présence des phases. Une modification de la contribution non conservative dans l'équation sur la pression hors équilibre a été introduite, permettant ainsi de préserver les ondes de discontinuité de contact du système initial. Le schéma numérique a montré un très bon comportement dans les différentes simulations et cas tests réalisés. Une fois cette méthode mise au point, nous avons pu nous intéresser au couplage entre ce même modèle bifluide et le modèle de mélange non homogène de dérive, qui suppose l'équilibre des vitesses *via* une fermeture algébrique sur la vitesse relative de l'écoulement. La dérivation de ce modèle à partir du modèle bifluide, plus fin, a été réalisée dans le cas général de champs de forces quelconques. Ensuite, nous avons présenté une adaptation de la méthode numérique par relaxation pour prendre en compte des termes sources raides, en particulier ceux correspondant à la relaxation des vitesses des phases. Les termes sources ont été décentrés et calculés au niveau des interfaces des cellules du maillage afin d'être pris en compte dans le traitement de la partie convective du système. La technique de couplage entre les deux modèles employée était basée sur le modèle d'interface aboutissant alors au calcul d'un unique flux à l'interface de couplage. Comme nous l'attendions, les résultats numériques ont montré que la méthode ne pouvait assurer la continuité à l'interface de certains profils, en particulier ceux associés aux taux de présence moyens. La raison première était que, par construction de la méthode, les vitesses des phases sont à l'équilibre dans la partie du modèle de drift et non équilibrées pour le domaine du modèle bifluide. L'onde de transport générée au niveau de l'interface de couplage disparaissait cependant au cours des simulations, en temps grands, lorsque les deux modèles convergeaient vers une description de la dynamique de l'écoulement similaire. Dans ce régime en temps grands (mais non stationnaire), la technique de couplage a montré toute son efficacité en étant quasiment transparente.

Les méthodes que nous avons mises au point pourront être, par la suite, utilisées dans les logiciels scientifiques simulant les écoulements dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire à eau sous pression. La technique du modèle père, pour le cas du couplage interfacial entre le modèle bifluide et le modèle de drift, est tout à fait envisageable pour des simulations d'écoulements diphasiques dans le coeur. Certains calculs, dans le cadre du projet Neptune, font appel à un code système comme CATHARE du CEA pour effectuer un calcul préliminaire sur l'ensemble du circuit primaire. Les résultats obtenus sont ensuite réinjectés comme conditions aux limites d'entrée et de sortie du coeur pour un calcul à l'échelle du composant comme avec le code FLICA également développé au CEA, par exemple. L'utilisation de la technique du modèle père permettrait ainsi un échange de données dynamique en temps, autrement dit le code système et le code composant peuvent être couplés en espace grâce au solveur du modèle père sur une ou même plusieurs in-

terfaces de couplage qui seraient à définir. Le cas en plusieurs dimensions d'espace est également envisageable si on considère que les maillages entre les deux problèmes sont conformes et que l'interface est définie par des interfaces communes entre les mailles des deux discrétisations. Ceci est une hypothèse usuelle lorsque l'on fait du couplage de modèles et permet d'avoir une interface de couplage quasi unidimensionnelle. Ainsi, les méthodes que l'on a proposées pourront être facilement étendues.



---

## Bibliographie

---

- [1] R. ABGRALL et H. GUILLARD : *Modélisation numérique des fluides compressibles*. Series in Applied Mathematics, 5. Gauthier-Villars, Paris ; North-Holland, Amsterdam, 2001. (Cité aux pages 14, 20 et 48.)
- [2] R. ABGRALL et S. KARNI : Computations of compressible multifluids. *J. Comput. Phys.*, 169(2):594–623, 2001. (Cité aux pages 12 et 27.)
- [3] R. ABGRALL et R. SAUREL : A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows. *J. Comput. Phys.*, 150:425–467, 1999. (Cité aux pages 96 et 97.)
- [4] A. AMBROSO, B. BOUTIN, C. CHALONS, F. COQUEL, T. GALIÉ, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : Construction de schémas de type godunov pour les systèmes hyperboliques avec terme source. *Laboratoire J.-L. Lions, Preprint R08003*, 2008. (Cité à la page 159.)
- [5] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL et T. GALIÉ : Interface Model Coupling via Prescribed Local Flux Balance. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA paper 2007-3822, 2007, <http://www.aiaa.org>. (Cité à la page 17.)
- [6] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL et T. GALIÉ : Relaxation and Numerical Approximation of a Two-Fluid Two-Pressure Model. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, accepté*, 2008, <http://www.esaim-m2an.org>. (Cité à la page 122.)
- [7] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, T. GALIÉ, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : Numerical Coupling of Two-Phase Flows. In S. P. BEIJING, éd. : *Recent Progress in Scientific Computing*, p. 168–178, 2007. (Cité aux pages 18, 41 et 46.)
- [8] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, T. GALIÉ, E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : The Drift-Flux Asymptotic Limit of Barotropic Two-Phase Two-Pressure Models. *Commun. Math. Sci.*, 6(2):521–529, 2008. (Cité aux pages 140, 141 et 156.)



- [9] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, J.-M. HÉRARD, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : Coupling of Multiphase Flow Models. *Proceedings of the 11th international meeting on nuclear thermal-hydraulics (NURETH11)*, Avignon, 2005. (Cité aux pages 13, 14, 19, 20, 27 et 28.)
- [10] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : The Coupling of Homogeneous Models for Two-Phase Flows. *Int. J. Finite Volumes*, 4(1):1–39, 2007. <http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/>. (Cité aux pages 13, 18, 41 et 46.)
- [11] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : A Relaxation Method for the Coupling of Systems of Conservation Laws. In S. B. HEIDELBER, éd. : *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*, p. 947–954, 2008. (Cité à la page 21.)
- [12] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : Coupling of General Lagrangian Systems. *Math. Comp.*, 77:909–941, 2008. (Cité à la page 13.)
- [13] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART : Couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz. *17ème congrès français de mécanique*, Troyes, 2005. (Cité aux pages 13, 14, 19, 20 et 27.)
- [14] A. AMBROSO, J.-M. HÉRARD et O. HURISSE : A Method to Couple HEM and HRM Two-Phase Flow Models. *Computers and Fluids*, Accepté, 2007. (Cité aux pages 12 et 41.)
- [15] E. AUDUSSE et B. PERTHAME : Uniqueness for a Scalar Conservation Law with Discontinuous Flux via Adapted Entropies. Rap. tech. 5261, Inria Research Report, 2004. (Cité à la page 15.)
- [16] M. BAER et P. EMBID : Mathematical Analysis of a Two-Phase Continuum Mixture Theory. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 4(4):279–312, 1992. (Cité à la page 96.)
- [17] M. BAER et R. NUNZIATO : A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 12(6):861–889, 1986. (Cité aux pages 96 et 97.)
- [18] A. BERGERON, P. FILLION, D. GALLO et E. ROYER : Flica4 v1.8 modèles physiques. Rap. tech. SFME/LETR/RT/02-005/A, CEA Saclay, 2005, non accessible. (Cité à la page 96.)
- [19] F. BOUCHUT : *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-Balanced Schemes for Sources*. Frontiers in Mathematics series, Birkhäuser, 2004, ISBN 3-7643-6665-6, site internet : <http://www.springer.com/birkhauser/mathematics/book/978-3-7643-6665-0>. (Cité à la page 22.)
- [20] B. BOUTIN : Couplage de systèmes de lois de conservation scalaires par une régularisation de Dafermos. Mémoire de D.E.A., Paris, 2005. (Cité aux pages 13 et 14.)

- [21] B. BOUTIN, F. COQUEL et E. GODLEWSKI : Dafermos Regularization for the Interface Coupling of Conservation Law. In S. B. HEIDELBER, éd. : *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*, p. 567–575, 2008. (Cité à la page 13.)
- [22] F. CAETANO : *Sur certains problèmes de linéarisation et de couplage pour les systèmes hyperboliques non linéaires*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, soutenue à Paris, France, le 12 Décembre 2007. (Cité aux pages 13 et 18.)
- [23] P. CARGO et A.-Y. LEROUX : Un schéma équilibre adapté au modèle d’atmosphère avec termes de gravité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(1):73–76, 1994. (Cité à la page 159.)
- [24] F. CARO : *Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, soutenue à Palaiseau, France, le 24 Novembre 2004. (Cité aux pages 41 et 42.)
- [25] F. CARO, F. COQUEL, D. JAMET et S. KOKH : Phase Change Simulation for Isothermal Compressible Two-Phase Flows. *AIAA Comp. Fluid Dynamics Conference*, AIAA paper 2005-4697, 2005, <http://www.aiaa.org>. (Cité aux pages 41 et 42.)
- [26] F. CARO, F. COQUEL, D. JAMET et S. KOKH : A Simple Finite-Volume Method for Compressible Isothermal Two-Phase Flows Simulation. *Int. J. Finite Volumes*, 3(1), 2006. <http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/>. (Cité aux pages 41 et 42.)
- [27] C. CHALONS : *Bilans d’entropie discrets dans l’approximation numérique des chocs non classiques. Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2D et à quelques systèmes visco-capillaires*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, soutenue à Palaiseau, France, le 25 Novembre 2002. (Cité à la page 22.)
- [28] C. CHALONS et F. COQUEL : Navier-Stokes Equations with Several Independent Pressure Laws and Explicit Predictor-Corrector Schemes. *Numer. Math.*, 101(3):451–478, 2005. (Cité à la page 22.)
- [29] C. CHALONS et J. COULOMBEL : Relaxation Approximation of the Euler Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *accepté*. (Cité à la page 22.)
- [30] C. CHALONS, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : The Interface Coupling of the Gas Dynamics Equations. *Quart. Appl. Math.*, *Accepté*. (Cité aux pages 13, 16 et 27.)
- [31] S. CHAPMAN et T. COWLING : *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*. 3rd Edition, Cambridge Univ. Press, 1970. (Cité à la page 151.)
- [32] G.-Q. CHEN, C. D. LEVERMORE et T.-P. LIU : Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Relaxation Terms and Entropy. *Comm. Pure Appl. Math*, 48(7):787–830, 1995. (Cité à la page 22.)
- [33] F. COQUEL, T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : Closure Laws for a Two-Fluid Two-Pressure Model. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 334(I):927–932, 2002. (Cité aux pages 96 et 97.)

- [34] F. COQUEL, E. GODLEWSKI, B. PERTHAME, A. IN et P. RASCLE : Some New Godunov and Relaxation Methods for Two-Phase Flow Problems. *Godunov methods (Oxford, 1999)*, 48(7):179–188, 2001. (Cité à la page 22.)
- [35] F. COQUEL et B. PERTHAME : Relaxation Energy and Approximate Riemann Solvers for General Pressure Laws in Fluid Dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6):2223–2249, 1998. (Cité à la page 22.)
- [36] P. DEGOND et S. JIN : A Smooth Transition Model Between Kinetic and Diffusion Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42:2671–2687, 2005. (Cité à la page 12.)
- [37] B. DESPRÉS : Lagrangian Systems of Conservation Laws. *Numer. Math.*, 89(1):99–134, 2001. (Cité à la page 50.)
- [38] S. DIEHL : On Scalar Conservation Laws with Point Source and Discontinuous Flux Function. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:1425–1451, 1995. (Cité à la page 55.)
- [39] F. DUBOIS et P. G. LEFLOCH : Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *J. Differential Equations*, 71(1):93–122, 1988. (Cité aux pages 137 et 168.)
- [40] G. FACCANONI : *Etude d'un modèle fin de changement de phase. Contribution à l'étude de la crise d'ébullition*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, soutenue à Palaiseau, France, le 21 Novembre 2008. (Cité aux pages 41 et 43.)
- [41] R. FEDKIW, T. ASLAM, B. MERRIMAN et S. OSHER : A Non-Oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method). *J. Comput. Phys.*, 152:457–492, 1999. (Cité aux pages 12 et 27.)
- [42] G. GALLICE : Schémas équilibre et solveurs de riemann simples entropiques pour des systèmes hyperboliques avec termes source. application à la dynamique des gaz avec gravité. *Preprint MAB LRC*, 02-05, 2002. (Cité à la page 159.)
- [43] G. GALLICE : Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 334(8):713–716, 2002. (Cité à la page 159.)
- [44] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD, O. HURISSE et A.-Y. LEROUX : Well Balanced Schemes Versus Fractional Step Method for Hyperbolic Systems with Source Terms. *Calcolo*, 43(4): 217–251, 2006. (Cité à la page 159.)
- [45] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : Numerical Modeling of Two-Phase Using the Two-Fluid Two-Pressure Approach. *M3AS*, 14(5):663–700, 2004. (Cité aux pages 96, 97, 99, 100 et 128.)
- [46] M. GARAVELLO et B. PICCOLI : *Traffic Flow in Networks*. AIMS book series, 2006. (Cité à la page 11.)
- [47] M. GARAVELLO et B. PICCOLI : Traffic Flow on a Road Network Using the Aw-Rascle Model. *Comm. Partial Differential equations*, 31(1–3):243–275, 2006. (Cité à la page 11.)

- [48] S. GAVRILYUK et R. SAUREL : Mathematical and Numerical Modeling of Two-Phase Compressible Flows with Micro-Inertia. *J. Comput. Phys.*, 175:326–360, 2002. (Cité à la page 96.)
- [49] J. GLIMM, D. SALTZ et D. SHARP : Two Phase Flow Modelling of a Fluid Mixing Layer. *J. Fluid Mech.*, 378:119–143, 1999. (Cité à la page 96.)
- [50] P. GOATIN et P. G. LEFLOCH : The Riemann Problem For a Class of Resonant Hyperbolic Systems of Balance Laws. *Ann. I. H. Poincaré*, AN 21:881–902, 2004. (Cité à la page 56.)
- [51] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART : *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer Verlag, 1996. (Cité aux pages 14, 20, 21 et 48.)
- [52] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART : The numerical Interface Coupling of Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws. I. The Scalar Case. *Numer. Math.*, 97(1):81–130, 2004. (Cité aux pages 13, 14, 16 et 27.)
- [53] E. GODLEWSKI, K.-C. L. THANH et P.-A. RAVIART : The numerical Interface Coupling of Nonlinear Hyperbolic Systems of Conservation Laws. II. The Case of Systems. *Math. Model. Numer. Anal.*, 39(4):649–692, 2005. (Cité aux pages 13, 14, 15, 16 et 27.)
- [54] L. GOSSE : A Well-Balanced Scheme Using Non-Conservative Products Designed for Hyperbolic Systems of Conservation Laws with Source Terms. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 11:339–365, 2001. (Cité à la page 159.)
- [55] L. GOSSE : Localization Effects and Measure Source Terms in Numerical Schemes for Balance Laws. *Math. Comput.*, 71(238):553–582, 2002. (Cité à la page 159.)
- [56] J.-M. GREENBERG et A.-Y. LEROUX : A Well-Balanced Scheme for the Numerical Processing of Source Terms in Hyperbolic Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):1–16, 1996. (Cité aux pages 12 et 15.)
- [57] J. M. GREENBERG, A.-Y. LEROUX, R. BARAILLE et A. NOUSSAIR : Analysis and Approximation of Conservation Laws with Source Terms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34:1980–2007, 1997. (Cité à la page 56.)
- [58] O. GRÉGOIRE et M. MARTIN : Derivation of a Well-Posed and Multidimensional Drift-Flux Model for Boiling Flows. *CRAS Mécanique*, 333:459–466, 2005. (Cité aux pages 139 et 155.)
- [59] H. GUILLARD et F. DUVAL : A Darcy Law for The Drift Velocity in a Two-Phase Flow Model. *J. Comput. Phys.*, 224(1):288–313, 2005. (Cité à la page 141.)
- [60] V. GUILLEMAUD : *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions*. Thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille 1, soutenue à Saclay, France, le 27 mars 2007. (Cité à la page 97.)
- [61] J.-M. HÉRARD : Schemes to Couple Flows Between Free and Porous Medium. AIAA paper 2005-4861, 2005, <http://www.aiaa.org>. (Cité aux pages 12 et 14.)

- [62] J.-M. HÉRARD et O. HURISSE : Couplage interfacial d'un modèle homogène et d'un modèle bifluide. Rap. tech. H-I81-2006-04691-FR, EDF-DRD, 2006. (Cité aux pages 12, 15, 140 et 156.)
- [63] J.-M. HÉRARD et O. HURISSE : Coupling Two and One-Dimensionnal Unsteady Euler Equations Through a Thin Interface. *Computers and Fluids*, 36(4):651–666, 2007. (Cité à la page 12.)
- [64] T. HIBIKI et M. ISHII : One-Dimensionnal Drift-Flux Model and Constitutive Equations for Relative Motion Between Phases in Various Two-Phase Flow Regimes. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 46:4935–4948, 2003. (Cité aux pages 143 et 155.)
- [65] O. HURISSE : *Couplage interfacial instationnaire de modèles diphasiques*. Thèse de doctorat, Université Aix Marseille 1, soutenue à Marseille, France, le 16 Décembre 2006. (Cité aux pages 13 et 156.)
- [66] E. ISAACSON et B. TEMPLE : Non Linear Resonance in Systems of Conservation Laws. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(5):1260–1278, 1992. (Cité à la page 56.)
- [67] M. ISHII : *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975. (Cité aux pages 143 et 144.)
- [68] M. ISHII et K. MISHIMA : Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nuclear Engrg*, 82(2-3):107–126, 1984. (Cité à la page 155.)
- [69] M. ISHII et N. ZUBER : Drag coefficient and relative velocity in bubbly droplet, or particulate flows. *AIChE J.*, 25:843–855, 1979. (Cité à la page 155.)
- [70] S. JAOUEN : *Etude mathématique et numérique de stabilité pour des modèles hydrodynamiques avec transition de phase*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, soutenue à Paris, France, le 22 Novembre 2001. (Cité aux pages 41 et 42.)
- [71] S. JIN et Z. XIN : The Relaxation Schemes for Systems of Conservation Laws in Arbitrary Space Dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48:235–276, 1995. (Cité à la page 22.)
- [72] C. JOSEPH-AUGUSTE : Analyse des fermetures interfaciales d'un modèle diphasique et propositions de modèles. Mémoire de D.E.A., Institut Galilée, 2006. (Cité à la page 141.)
- [73] A. KLAR : Domain Decomposition for Kinetic Problems with Nonequilibrium States. *Eur. J. Mech./B Fluids*, 15:203–216, 1996. (Cité à la page 12.)
- [74] F. LAGOUTIÈRE : *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, soutenue à Paris, France, le 7 Décembre 2000. (Cité à la page 50.)
- [75] P. G. LEFLOCH : *Hyperbolic Systems of Conservation Laws : the Theory of Classical and Nonclassical Shock Waves*. E.T.H Lecture Notes Series, Birkhäuser, 2002. (Cité à la page 44.)
- [76] R. J. LEVEQUE : *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. (Cité aux pages 14, 20 et 48.)

- [77] V. MARTIN : *Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour des équations de l'océanographie*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, soutenue à Paris, le 15 Décembre 2003. (Cité à la page 12.)
- [78] S. T. MUNKEJORD : Comparison of Roe-Type Methods for Solving the Two-Fluid Model with and without Pressure Relaxation. *Computers and Fluids*, 36:1061–1080, 2007. (Cité aux pages 134, 135 et 137.)
- [79] M. NDJINGA : *Quelques aspects de modélisation et d'analyse des systèmes issus de écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, France, 2007. (Cité à la page 140.)
- [80] V. RANSOM : Numerical Benchmark Tests. *Multiphase Science and Technology*, 3:465–473, 1987. (Cité à la page 135.)
- [81] J. U. SCHLUTER : Consistent Boundary Conditions for Integrates RANS/LES Simulations : LES Inflow Conditions. AIAA paper 2003-3971, 2003, <http://www.aiaa.org>, see also <http://www.stanford.edu/group/cits>. (Cité à la page 11.)
- [82] J. U. SCHLUTER, H. PITSCH et P. MOIN : Consistent Boundary Conditions for Integrated RANS/LES Simulations : LES Outflow Conditions. AIAA paper 2002-3121, 2002, <http://www.aiaa.org>, see also <http://www.stanford.edu/group/cits>. (Cité à la page 11.)
- [83] J. U. SCHLUTER, X. WU, E. V. D. WEIDE, S. HAHN, J. ALONSO et H. PITSCH : Multi-Code Simulations : a Generalized Coupling Approach. AIAA paper 2005-4997, 2005, <http://www.aiaa.org>, see also <http://www.stanford.edu/group/cits>. (Cité à la page 11.)
- [84] D. SCHWENDEMAN, C. W. WAHLE et A. K. KAPILA : The Riemann Problem and a High-Resolution Godunov Method for a Model of Compressible Two-Phase Flow. *J. Comput. Phys.*, 212:490–526, 2006. (Cité à la page 102.)
- [85] N. SEGUIN : *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille 1, soutenue à Marseille le, 22 novembre 2002. (Cité aux pages 97 et 99.)
- [86] E. F. TORO : *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : a Practical Introduction*. Springer, 1999. (Cité aux pages 14, 20 et 48.)
- [87] I. TOUMI : *Etude du problème de Riemann et construction de schémas numériques type Godunov multidimensionnels pour des modèles d'écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, soutenue à Paris, France, 1989. (Cité à la page 143.)
- [88] N. ZUBER et J. A. FINDLAY : Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems. *J. Heat Transfer*, 68:453–468, 1965. (Cité à la page 139.)



# **Publications**





---

## Publications

---

Les différentes participations à des publications sont présentées ici. On donne dans un premier temps un rapide descriptif ainsi que les références des travaux. Les articles dans leur forme originale sont ensuite concaténés.

### **Numerical Coupling of Two-Phase Flows**

Ce premier acte de congrès a été écrit dans le cadre du groupe de travail du Laboratoire Jacques-Louis Lions sur le couplage de modèles d'écoulement diphasiques. Le travail qui est présenté porte sur l'étude du couplage entre le modèle HEM et le modèle HRM (voir chapitre 1). Les différentes informations relatives à ce papier sont données ci-dessous.

<i>Auteurs</i>	A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, T. Galié, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart et N. Seguin
<i>Titre</i>	Numerical coupling of two-phase flows
<i>Livre</i>	Recent Progress in Scientific Computing
<i>Référence</i>	Science Press Beijing
<i>Pages</i>	168-178
<i>Année</i>	2007

### **Interface model via prescribed local flux balance**

La publication en question a été réalisée pour la 18<sup>ème</sup> Conférence AIAA CFD (25-28 Juin 2007, Miami, Floride). Le travail porte sur le couplage interfacial de modèle en présence d'un terme source mesure (voir chapitre 2).

---

*Auteurs* A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel et T. Galié  
*Titre* Interface model via prescribed local flux balance  
*Référence* AIAA paper 2007-3822  
*Editeur* American Institute of Aeronautics and Astronautics  
*Pages* -  
*Année* 2007

### **Relaxation and numerical approximation of a two fluid two pressure diphasic model**

Le présent article concerne la méthode par relaxation pour un système bifluide à deux pressions (voir chapitre 4). Le travail a été soumis il y a quelques mois donc toujours dans l'attente d'être accepté.

*Auteurs* A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel et T. Galié  
*Titre* Relaxation and numerical approximation of a two fluid two pressure diphasic model  
*Référence* -  
*Editeur* M2AN  
*Pages* -  
*Année* Accepté, 2008

### **The drift-flux asymptotic limit of barotropic two-phase two-pressure models**

L'article traite de la limite formelle du système bifluide à deux pressions vers le modèle de dérive (voir chapitre 5).

*Auteurs* A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, T. Galié, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart et N. Seguin  
*Titre* The drift-flux asymptotic limit of barotropic two-phase two-pressure models  
*Référence* Volume 6, No. 2  
*Editeur* Communications in Mathematical Sciences (CMS)  
*Pages* p. 521-529  
*Année* 2008

---

# Numerical Coupling of Two-Phase Flows

A. Ambroso<sup>1</sup>, C. Chalons<sup>2</sup>, F. Coquel<sup>3</sup>, T. Galié<sup>1,4</sup>, E. Godlewski<sup>4</sup>, F. Lagoutière<sup>2</sup>, P.-A. Raviart<sup>3</sup> and N. Seguin<sup>4</sup>

<sup>1</sup>CEA-Saclay, F-91191 Gif-Sur-Yvette, France

<sup>2</sup>Université Paris 7-Denis Diderot, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, F-75005 France

<sup>3</sup>CNRS, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, F-75005 France

<sup>4</sup>Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, F-75005 France

## 1 Introduction

This paper deals with the numerical coupling of two models of compressible homogeneous two-phase flows, through an fixed interface, located at  $x = 0$ . The space domain is separated in two regions,  $D^- := \mathbb{R}_-^*$  and  $D^+ := \mathbb{R}_+^*$ , in which the flow is governed by different systems of PDEs. The model in  $D^-$  (respectively in  $D^+$ ) is indexed by  $L$  (resp. by  $R$ ) and the global problem takes the following form:

$$\partial_t \mathbf{u}_L + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = 0, \quad t > 0, x \in D^-, \quad (\text{L})$$

$$\partial_t \mathbf{u}_R + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) = \mathbf{s}_R(\mathbf{u}_R), \quad t > 0, x \in D^+, \quad (\text{R})$$

with appropriate initial conditions. Though both models aim at represent the same physical phenomenon, they can be different. Such a situation often occurs when two codes with different models and solvers are used to simulate two continguous parts of a flow.

Here, the two models govern a flow of water, which can be present under its vapor form or in under its liquid form. Moreover, both models takes into account for phase transition. The models we consider belong to the class of homogeneous models: the mixture of vapor and liquid water follows the

compressible non isothermal Euler equations. The difference between the models (L) and (R) comes from their thermodynamic law which describes the phase transition.

For the model (L), the thermodynamic equilibrium (i.e. the equality of temperatures, pressures and chemical potentials) is assumed to be fulfilled for every  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D^-$ . Hence, the phenomenon of phase transition is completely involved in the equation of state of the fluid. Several models of equation of state can be used, the most popular being the one proposed by Van der Waals at the end of the 19th century. Here, we use a simpler one, proposed for instance in [10] and [4], which has the advantage to provide a hyperbolic system of PDEs. This model is called the *Homogeneous Equilibrium Model* (HEM).

For the model (R), only the thermal and mechanical equilibria are instantaneously verified (i.e. the equality of temperatures and pressures), whereas the difference of the chemical potentials is assumed to vanish only when  $t \rightarrow \infty$ . This behaviour is modeled by a PDE for the mass fraction of the vapor phase, which involves a relaxation term based on the difference of the chemical potentials. This relaxation term vanishes when the thermodynamic equilibrium is obtained. This model is referred as the *Homogeneous Relaxation Model* (HRM).

We will suppose here that HEM is the formal limit of HRM, when the relaxation process becomes instantaneous. In spite of the thermodynamical compatibility of the models, their coupling is not obvious as soon as the flow is not at thermodynamical equilibrium in the domain of HRM, that is  $D^+$ . Indeed, it is easy to show that different solutions to the coupling problem (L-R) can be obtained according to the model of coupling we impose at the interface  $x = 0$  (see [3]). The models of coupling that we investigate here differ by their properties:

- conservation of mass, momentum and total energy,
- conservation of mass, momentum and ability to keep unchanged unsteady contact discontinuities,
- continuity of density, momentum and total energy at the coupling interface,
- conservation of mass and total energy and continuity of the specific enthalpy at the coupling interface.

Moreover, since both models are hyperbolic systems, these coupling conditions must be understood in a weak sense (in the same way as boundary conditions, see [2] and [6]). For the theoretical point of view, we refer to [8] and [7].

The aim of this paper is to propose some numerical methods of coupling, in the frame of Finite Volume schemes, in agreement with the models of coupling mentioned above. In fact, two class of methods are presented. The first one allow us to obtain a conservative numerical method for mass, momentum and total energy and is based on the use of an extended model and of a relaxation method. The other one may be seen as an adaptation of the numerical methods presented in [9] and in [1]. This method enables us to approximate several models of coupling, giving at the numerical level the weak continuity of some variables. Note that all these numerical methods of coupling are independent from the numerical schemes used in each domain, only the numerical fluxes at the interface are modified.

In the second section of this paper are presented the two models, HEM and HRM, and their main properties. The next section deals with the numerical methods of coupling and their ability to approximate the models of coupling. The last section is devoted to numerical results, allowing to compare the behaviour of the different numerical methods.

## 2 Governing equations

We detail in this section the two models we aim at coupling, HEM and HRM, and the mathematical problem of coupling.

### 2.1 The Homogeneous Equilibrium Model

This model describes a two-phase flow, composed by water under its vapor (phase 1) or its liquid form (phase 2). This mixture is governed by the following set of PDEs:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x \rho u &= 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) &= 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p)u &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $\rho$ ,  $u$  and  $p$  respectively denote the density, the velocity and the pressure of the mixture, and the total energy  $E$  is the sum of the specific energy and

the kinetic energy:  $E = \varepsilon + u^2/2$ . We will use in the following the condensed form (L), where  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{f}_L$  find a clear definition from system (1). Since the thermodynamical equilibrium is assumed to be instantaneously fulfilled, the whole thermodynamical behaviour is involved in the definition of the equation of state. Here, we use the model developed in [10] and in [4], which leads to the following definition of the pressure:

$$p = p^{HEM}(\rho, \varepsilon) := \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho\varepsilon & \text{if } \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)\rho_1^*\varepsilon & \text{if } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ (\gamma_2 - 1)\rho\varepsilon & \text{if } \rho \geq \rho_2^*, \end{cases} \quad (2)$$

where the two adiabatic coefficients  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  verify  $1 < \gamma_2 < \gamma_1$  and where the two constant densities  $\rho_1^*$  and  $\rho_2^*$  are defined by

$$\rho_1^* = \frac{1}{e} \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} \quad \text{and} \quad \rho_2^* = \frac{1}{e} \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}.$$

Note that  $(\gamma_1 - 1)\rho_1^* = (\gamma_2 - 1)\rho_2^*$ . This pressure law is only  $\mathcal{C}^0$  when the density is equal to  $\rho_1^*$  or  $\rho_2^*$ . Nonetheless, this system is hyperbolic over the set

$$\Omega^{HEM} := \{ \mathbf{u}_L := (\rho, \rho u, \rho E) \in \mathbb{R}^3 / \rho > 0, \rho \neq \rho_1^*, \rho \neq \rho_2^*, \varepsilon > 0 \}$$

and the eigenvalues associated with the system (1) are

$$\lambda_1(\mathbf{u}_L) = u - c^{HEM}(\mathbf{u}_L) < \lambda_2(\mathbf{u}_L) = u < \lambda_3(\mathbf{u}_L) = u + c^{HEM}(\mathbf{u}_L),$$

where the sound speed  $c^{HEM}$  is defined by

$$(c^{HEM}(\mathbf{u}_L))^2 := \begin{cases} \gamma_1(\gamma_1 - 1)\varepsilon & \text{if } 0 < \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)^2(\rho_1^*)^2\varepsilon/\rho^2 & \text{if } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ \gamma_2(\gamma_2 - 1)\varepsilon & \text{if } \rho \geq \rho_2^*. \end{cases}$$

Let us also emphasize that, due to the definition (2) of the pressure law  $p^{HEM}$ , the first and the third fields can be composed of multiple waves [11].

## 2.2 The Homogeneous Relaxation Model

This model includes a relaxation term which comes from the difference of the chemical potentials of the liquid phase and of the vapor phase. Defining  $m_1$

as the partial density of the vapor, the homogeneous relaxation model reads

$$\begin{aligned} \partial_t m_1 + \partial_x m_1 u &= \lambda_0 (m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho u &= 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) &= 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p) u &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\lambda_0$  is the relaxation parameter and  $m_1^*$  the equilibrium partial density of vapor, defined by

$$m_1^*(\rho) = \begin{cases} \rho, & \text{if } \rho \leq \rho_1^*, \\ \rho_1^* \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*}, & \text{if } \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ 0, & \text{if } \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (4)$$

The equilibrium  $m_1 = m_1^*$  is equivalent to the equality of the chemical potentials. The equation of state is now

$$p = p^{HRM}(\rho, \varepsilon, m_1) := ((\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)(\rho - m_1))\varepsilon \quad (5)$$

and verifies the compatibility relation with HEM:

$$p^{HRM}(\rho, \varepsilon, m_1^*(\rho)) = p^{HEM}(\rho, \varepsilon), \quad \forall \rho > 0, \forall \varepsilon > 0. \quad (6)$$

(This model corresponds to the model (R), with clear definitions of  $\mathbf{u}_R$ ,  $\mathbf{f}_R$  and  $\mathbf{s}_R$ .) This model is hyperbolic over the set

$$\Omega^{HRM} := \{\mathbf{u} := (m_1, \rho, \rho u, \rho E) \in \mathbb{R}^4 / \rho > 0, 0 < m_1 < \rho, \varepsilon > 0\}.$$

The eigenvalues of the differential part of the system are

$$\lambda_1(\mathbf{u}_R) = u - c^{HRM}(\mathbf{u}_R) < \lambda_2(\mathbf{u}_R) = \lambda_3(\mathbf{u}_R) = u < \lambda_4(\mathbf{u}_R) = u + c^{HRM}(\mathbf{u}_R),$$

where the sound speed  $c^{HRM}$  is

$$(c^{HRM}(\mathbf{u}_R))^2 := B(m_1, \rho)(1 + B(m_1, \rho))\varepsilon,$$

with  $B(m_1, \rho) = ((\gamma_1 - 1)m_1 + (\gamma_2 - 1)(\rho - m_1))/\rho$ . Note that if  $\lambda_0 = 0$ , this model is a classical multicomponent model, with the isobaric-isothermal closure.



### 2.3 The models of coupling

We focus now on the mathematical modeling of the coupling problem at  $\{x = 0\}$ . Independently of the model of coupling, the problem is composed by the two systems

$$\partial_t \mathbf{u}_L + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = 0, \quad t > 0, x \in D^-, \quad (\text{L})$$

$$\partial_t \mathbf{u}_R + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) = \mathbf{s}_R(\mathbf{u}_R), \quad t > 0, x \in D^+, \quad (\text{R})$$

and by the initial conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L(x, 0) &= \mathbf{u}_L^0(x), & x \in D^-, \\ \mathbf{u}_R(x, 0) &= \mathbf{u}_R^0(x), & x \in D^+, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $\mathbf{u}_L^0 \in \Omega^{HEM}$  and  $\mathbf{u}_R^0 \in \Omega^{HRM}$  are given. It remains to specify the model of coupling at the interface, that is the connection between  $\mathbf{u}_L(0^-, t)$  and  $\mathbf{u}_R(0^+, t)$ , which are the traces of the solution at the interface of coupling. In order to simplify the presentation, suppose in the following that  $\mathbf{s}_R \equiv 0$ .

#### 2.3.1 The flux coupling

We present first a model of coupling leading to solutions whose mass, momentum and total energy are conserved. Using the compatibility relation (6), we can define the global system

$$\begin{aligned} \partial_t m_1 + \partial_x m_1 u &= \mu(x)(m_1^*(\rho) - m_1), \\ \partial_t \rho + \partial_x \rho u &= 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) &= 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p)u &= 0, \\ p &= p^{HRM}(\rho, \varepsilon, m_1), \end{aligned} \quad (8)$$

for  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , with

$$\mu(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

This global model is formally equivalent to HEM in  $D^-$  and to HRM in  $D^+$ . Besides, its solutions fulfill the conservation of mass, momentum and total energy. Such a model can be interpreted as imposing the equality between  $\mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L(0^-, t))$  and the three last components of  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R(0^-, t))$ , for all  $t > 0$ .

### 2.3.2 The intermediate state coupling

Here, the intermediate state coupling lies on some variables that we try to maintain constant through the interface  $\{x = 0\}$ . The mathematical framework has been defined in [8] and [7]. Assume first of all that we would like to impose the continuity of  $\rho$ ,  $\rho u$  and  $\rho E$  through the coupling interface. The model developed in [7] may be roughly resumed as follows in our problem:

- In  $x = 0$ , the model (L) is supplemented by a Dirichlet boundary condition given by three last components of  $\mathbf{u}_R(0^+, t)$ .
- In  $x = 0$ , the model (R) is supplemented by a Dirichlet boundary condition given by  $\mathbf{u}_L(0^-, t)$  and  $m_1^*(\rho(0^-, t))$ .

Since we are dealing with hyperbolic systems, these boundary conditions must be understood in a weak way (which is not precised here, see [6], [7] and [3] for more details). Therefore, as soon as possible, the continuity of  $\rho$ ,  $\rho u$  and  $\rho E$  is achieved.

This method is not restricted to the conservative variables, the extension to different variables is quite natural. Instead of imposing the conservative variables at each boundary, other variables are provided as boundary conditions.

Three different sets of variables are tested:  $(\rho, \rho u, \rho E)$ ,  $(\rho, \rho u, p)$  and  $(\rho, \rho u, \varepsilon + p)$ . When the continuity of the transmitted variable is achieved, note that the associated solution is conservative in:  $\rho$  for the first coupling,  $\rho$  and  $\rho u$  for the second coupling,  $\rho$  and  $\rho E$  for the last coupling.

## 3 Numerical methods of coupling

We present now different numerical methods, enabling to approximate the different strategies of coupling defined above. We restrict to the frame of Finite Volume methods and, in order to symplify the presentation, only three-point schemes are considered. Let  $\Delta x$  and  $\Delta t$  be the space step and the time step. Let us note the cells of the mesh  $C_{j+1/2} = (j\Delta x, (j+1)\Delta x)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . We aim at define the approximations

$$((\mathbf{u}_L)_{j-1/2}^n)_{j \leq 0, n > 0} \in \Omega^{HRM}, \quad (9)$$

and

$$((\mathbf{u}_R)_{j+1/2}^n)_{j \geq 0, n > 0} \in \Omega^{HRM}, \quad (10)$$

of the solutions  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$ . We assume that the numerical schemes in each domain are given:

$$(\mathbf{u}_L)_{j-1/2}^{n+1} = (\mathbf{u}_L)_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_L)_j^n - (\mathbf{g}_L)_{j-1}^n), \quad j < 0, n > 0, \quad (11)$$

$$(\mathbf{u}_R)_{j+1/2}^{n+1} = (\mathbf{u}_R)_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{g}_R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}_R)_j^n), \quad j > 0, n > 0, \quad (12)$$

where

$$(\mathbf{g}_L)_j^n = \mathbf{g}_L((\mathbf{u}_L)_{j-1/2}^n, (\mathbf{u}_L)_{j+1/2}^n), \quad (\mathbf{g}_R)_j^n = \mathbf{g}_R((\mathbf{u}_R)_{j-1/2}^n, (\mathbf{u}_R)_{j+1/2}^n) \quad (13)$$

where  $\mathbf{g}_L(.,.)$  and  $\mathbf{g}_R(.,.)$  are two classical numerical fluxes. Therefore, in order to compute  $(\mathbf{u}_L)_{-1/2}^n$  and  $(\mathbf{u}_R)_{+1/2}^n$ , we must define the numerical fluxes at the interface of coupling:  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ .

### 3.1 The numerical flux coupling

We first focus on defining the numerical fluxes  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  related to the flux coupling.

These numerical fluxes are computed using the global system (8), using a two-step approximation: the first step consists in solving the PDE part of (8) (i.e. system (8) with  $\mu \equiv 0$ ) while the second step consists in the approximation of the source term. More precisely, let us define

$$(\mathbf{u}_L^*)_{-1/2}^n := (m_1^*(\rho_{-1/2}^n), (\mathbf{u}_L)_{-1/2}^n),$$

then, using the previous two-step algorithm, we may finally obtain

$$(\mathbf{g}_R)_0^n := \mathbf{g}_R((\mathbf{u}_L^*)_{-1/2}^n, (\mathbf{u}_R)_{-1/2}^n) \quad (14)$$

and

$$((\mathbf{g}_L)_0^n)^{(i)} := ((\mathbf{g}_R)_0^n)^{(i+1)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

where the notation  $(\mathbf{v})^{(i)}$  denotes the  $i$ -th component of the vector  $\mathbf{v}$ . By construction, this method is conservative with respect to the mass, momentum and total energy.

### 3.2 The numerical intermediate state coupling

The numerical method we propose is similar to the numerical methods proposed in [9] and [1]. The cornerstone of this method is the use of two fictitious states,  $(\overline{\mathbf{u}}_L)_{+1/2}^n \in \Omega^{HEM}$  and  $(\overline{\mathbf{u}}_R)_{-1/2}^n \in \Omega^{HRM}$ . Then, the numerical fluxes at the interface are defined by

$$(\mathbf{g}_L)_0^n := \mathbf{g}_L((\mathbf{u}_L)_{-1/2}^n, (\overline{\mathbf{u}}_L)_{+1/2}^n), \quad (16)$$

$$(\mathbf{g}_R)_0^n := \mathbf{g}_R((\overline{\mathbf{u}}_R)_{-1/2}^n, (\mathbf{u}_R)_{+1/2}^n). \quad (17)$$

According to the coupling we want to obtain, the definition of the two fictitious states will be different.

Assume that the theoretical intermediate state coupling (and thus the Dirichlet boundary conditions) is defined with the help of two changes of variable  $\phi_L : \Omega^{HEM} \mapsto \mathbb{R}^3$  and  $\phi_R : \Omega^{HRM} \mapsto \mathbb{R}^4$ , such that we would like to obtain the following coupling condition:

$$\phi_L[\mathbf{u}_L(0^-, t)]^{(i)} = \phi_R[\mathbf{u}_R(0^-, t)]^{(i+1)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Therefore, the two fictitious states are given by

$$(\overline{\mathbf{u}}_L)_{+1/2}^n := \phi_L^{-1}[(\phi_R[(\mathbf{u}_R)_{+1/2}^n])^{(2,3,4)}] \quad (19)$$

$$(\overline{\mathbf{u}}_R)_{-1/2}^n := \phi_R^{-1}[(m_1^*(\rho_{-1/2}^n), \phi_L[(\mathbf{u}_L)_{-1/2}^n])]. \quad (20)$$

Here, we use three different couples of change of variable  $(\phi_L, \phi_R)$ , according to the coupling model we want to prescribe:

- Continuity of  $(\rho, \rho u, \rho E)$ :

$$\begin{aligned} \phi_L[(\rho, \rho u, \rho E)] &:= (\rho, \rho u, \rho E), \\ \phi_R[(m_1, \rho, \rho u, \rho E)] &:= (m_1, \rho, \rho u, \rho E). \end{aligned}$$

- Continuity of  $(\rho, \rho u, p)$ :

$$\begin{aligned} \phi_L[(\rho, \rho u, \rho E)] &:= (\rho, \rho u, p^{HEM}(\rho, E - u^2/2)), \\ \phi_R[(m_1, \rho, \rho u, \rho E)] &:= (m_1, \rho, \rho u, p^{HRM}(\rho, E - u^2/2, m_1)). \end{aligned}$$

- Continuity of  $(\rho, \rho u, p + \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \phi_L[(\rho, \rho u, \rho E)] &:= (\rho, \rho u, p^{HEM}(\rho, E - u^2/2) + (E - u^2/2)), \\ \phi_R[(m_1, \rho, \rho u, \rho E)] &:= (m_1, \rho, \rho u, p^{HRM}(\rho, E - u^2/2, m_1) + (E - u^2/2)). \end{aligned}$$

This numerical method of coupling aims at providing, whenever possible, the continuity of the suitable variables. Nonetheless, since two different numerical fluxes are used at the coupling interface, the global method cannot be strictly conservative, even if the coupling model imposes the continuity of the flux of a variable.

## 4 Numerical results

The numerical fluxes  $\mathbf{g}_L$  and  $\mathbf{g}_R$  which are used here are those associated with a Lagrange-Projection scheme (see for instance [5] for a description of this scheme).

As noted before, if the flow is at equilibrium in  $D^+$ , the global model is formally HEM. Therefore, all the coupling models and all the numerical methods of coupling provide the same solution. That's why we choose in the following test case to initialize  $m_1$  and  $\rho$  in  $D^+$  such that  $m_1 \neq m_1^*(\rho)$ . The initial condition is the following:

$$\begin{aligned} x \in (-1/2, 0), \quad \mathbf{u}_L(x, 0) &= (\rho^0, u^0, \rho((u^0)^2/2 + \varepsilon^{HEM}(\rho^0, p^0))), \\ x \in (0, +1/2), \quad \mathbf{u}_R(x, 0) &= (\rho^0, u^0, \rho((u^0)^2/2 + \varepsilon^{HRM}(\rho^0, p^0, m_1^0)), m_1^0), \end{aligned}$$

with  $\rho^0 = 1$ ,  $u^0 = -1/2$ ,  $p^0 = 1$  and  $m_1^0 = 1$ . The adiabatic coefficients are  $\gamma_1 = 1.6$  and  $\gamma_2 = 1.4$ , so that  $\rho_1^* \approx 0.6131$  and  $\rho_2^* \approx 0.9197$  and thus  $m_1^0 \neq m_1^*(\rho^0)$ . Moreover, since the density, the velocity and the pressure are constant in the whole domain  $(-1/2, +1/2)$ , the intermediate state coupling based on the variable  $(\rho, u, p)$  must let the initial data unchanged.

The different numerical results are plotted at  $t = 0.2$  and with  $\lambda_0 = 0$  for HRM. The mesh is uniform and composed of 500 cells and the Courant number is 0.4.

In Figs. 1, 2, 3 and 4 are respectively plotted the density, the velocity, the pressure and the fraction of vapor (i.e.  $m_1/\rho$ ). It can be seen in Figs. 1, 2 and 3 that the coupling based on  $(\rho, \rho u, p)$  exactly preserves the density, the velocity and the pressure constant. The three other coupling methods introduce waves and intermediate states. Besides, the coupling methods based on  $(\rho, \rho u, \rho E)$  and  $(\rho, \rho u, \varepsilon + p)$  do not provide a solution with the appropriate variable continuous at the interface. This is of course due to the fact that  $m_1^0 \neq m_1^*(\rho^0)$ , since the thermodynamic law is different on each part of the interface of coupling.

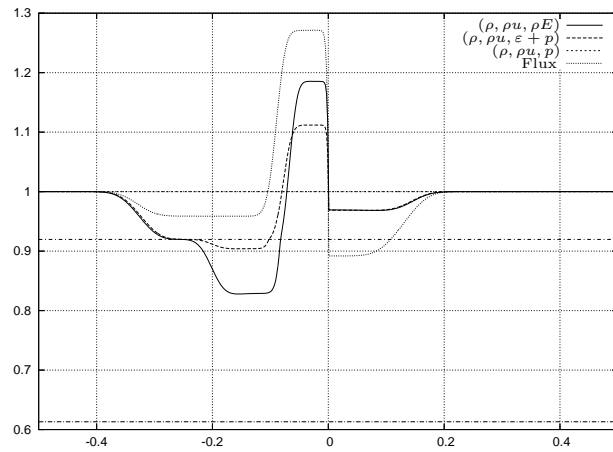


Figure 1: Density  $\rho$  with the different coupling methods.

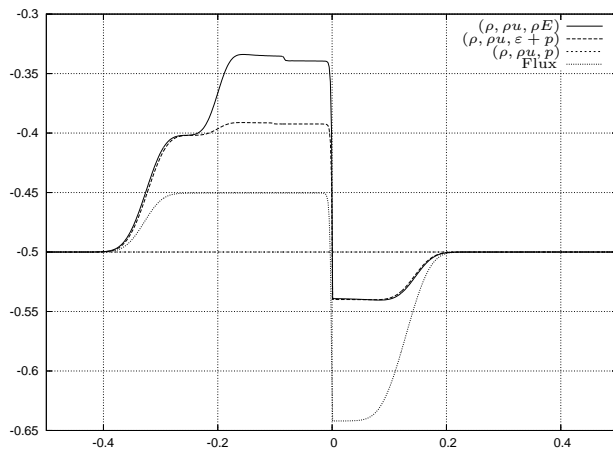


Figure 2: Velocity  $u$  with the different coupling methods.

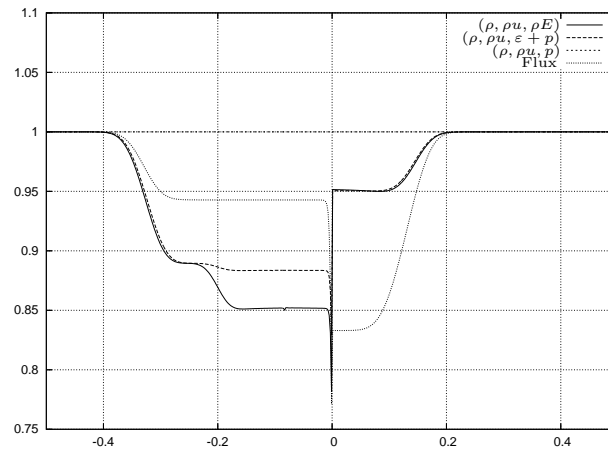


Figure 3: Pressure  $p$  with the different coupling methods.

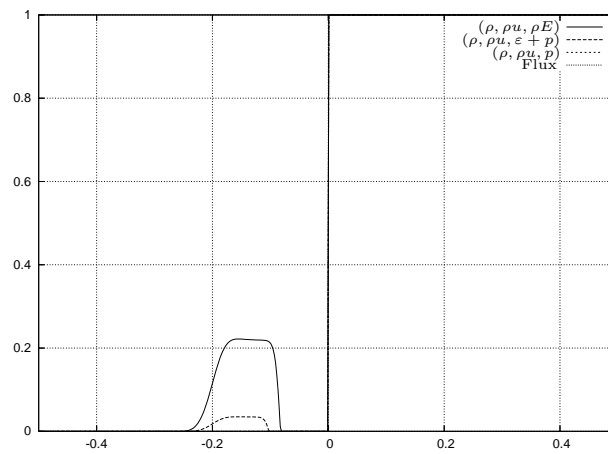


Figure 4: Fraction of vapor  $m_1/\rho$  with the different coupling methods.

It is also worth noting that the solutions provided by the coupling methods based on  $(\rho, \rho u, \rho E)$  and  $(\rho, \rho u, \varepsilon + p)$  contain a mixture zone in  $D^-$  (see Fig. 4). Note also in Fig. 3 that the two latter coupling methods and the flux coupling make a boundary layer appear at the interface of coupling.

It has been shown by this simple numerical example that the solutions provided by the coupling of two different models strongly depend on the model of coupling which is used at the interface of coupling.

## References

- [1] R. Abgrall and S. Karni. Computations of compressible multifluids. *J. Comput. Phys.*, 169(2):594–623, 2001.
- [2] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9):1017–1034, 1979.
- [3] F. Caetano. *In preparation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, France, 2006.
- [4] F. Caro, F. Coquel, D. Jamet, and S. Kokh. A simple finite-volume method for compressible isothermal two-phase flows simulation. *Int. J. Finite Volumes*, 3(1), 2006.
- [5] B. Després. Lagrangian systems of conservation laws. *Numer. Math.*, 89(1):99–134, 2001.
- [6] F. Dubois and P. LeFloch. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, 71(1):93–122, 1988.
- [7] E. Godlewski, K.-C. Le Thanh, and P.-A. Raviart. The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. II. The case of systems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(4):649–692, 2005.
- [8] E. Godlewski and P.-A. Raviart. The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. I. The scalar case. *Numer. Math.*, 97(1):81–130, 2004.



- [9] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):1–16, 1996.
- [10] S. Jaouen. *Étude mathématique et numérique de stabilité pour des modèles hydrodynamiques avec transition de phase*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, France, 2001.
- [11] B. Wendroff. The Riemann problem for materials with nonconvex equations of state. II. General flow. *J. Math. Anal. Appl.*, 38:640–658, 1972.

---

# Interface model coupling via prescribed local flux balance

Thomas Galié\* and Annalisa Ambroso†

*CEA, Gif-sur-Yvette, 91191, France*

Christophe Chalons‡

*Université Paris Diderot, Paris, F-75005, France*

Frédéric Coquel§

*Université Pierre et Marie Curie-Paris6, Paris, F-75005, France*

**This paper presents two methods for coupling two different models. Each of these models is based on the equations of gas dynamics in Eulerian coordinates for a one-dimensional barotropic gas. The two models are separated on the domain by a thin interface and differ for their equation of state. In order to control the coupling conditions, we choose to add a local source term in the system describing the complete model.**

## I. Introduction

In many industrial applications, the mathematical description of complex systems often needs to be divided in few sub-systems either to simplify the problem or to reduce computation times. This is the case in nuclear applications for example, where the coolant flow in the primary circuit can be described by different models in the components of the circuit. Then one may have to couple these codes in order to get a simulation tool for the whole system. To allow for the coupling of codes, the idea is to look for compatible boundary conditions on the interface between the models.

The problem of interface coupling of systems in fluid dynamics has recently received attention. In<sup>9</sup> and<sup>8</sup> the authors study theoretical and numerical methods to couple two hyperbolic systems of conservation laws at a fixed interface. In<sup>9</sup> it is shown that we cannot preserve the continuity of the solution at the interface and impose conservativity of the coupled model at the same time. In<sup>1</sup> the authors pointed out that a uniform profile cannot always be preserved if the conservativity of the coupled model is respected. On the other hand, they developed some new numerical techniques in order to couple two gas dynamic equation systems for a one dimensional polytropic ideal gas in Eulerian coordinates. The two systems have different adiabatic coefficient so that the momentum flux and the energy flux are discontinuous at the interface. The methods given in<sup>1</sup> as expected, broke out at least the conservation of energy if a uniform profile for the pressure is imposed. In<sup>11</sup> a system that models a free medium is coupled with a porous one. A study of the coupling of multidimensional systems can be found in<sup>12</sup> where one 1D-model is coupled with a 2D-model. Finally, we can refer the reader to<sup>2</sup>, <sup>4</sup> and<sup>12</sup> for examples of coupling between multiphase flow models.

In this paper, we analyze the problem of the coupling of two models for the flow of a barotropic gas in one space dimension. The PDE's describing the flow are the same, but the equations of state on each subdomain are different. We propose to model the coupling conditions by a local source term concentrated at the interface. The model is presented in section II. In section III, we describe two methods to compute the solution of the coupled model: the first one is based on the resolution of two Riemann problems and

---

\*PhD student, Centre de Saclay, DM2S/SFME/LETR.

†Research scientist, Centre de Saclay, DM2S/SFME/LETR.

‡Assistant professor, Université Paris Diderot and UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions.

§CNRS researcher, Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions.

the second one uses a relaxation model approach. In section IV, we compare numerical results for these two methods.

## II. Presentation of the coupling problem

### II.A. Statement of the PDE problem

We consider the flow of a barotropic gas in one dimension. We denote  $x \in \mathbb{R}$  the space variable whereas  $t > 0$  denotes time. The space domain  $\mathbb{R}$  is separated by a thin interface  $\mathcal{I}$  located at  $x = 0$ . The system is described on each side of the interface by the equations of gas dynamics but with different equations of state so that the pressure law  $p(\tau)$ , where  $\tau$  is the specific volume, differs across the interface and shifts from  $p_L(\tau)$  for  $x < 0$  to  $p_R(\tau)$  for  $x > 0$ . Thus, we write the coupling problem as:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x < 0, \tag{1}$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

where

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_\alpha(\tau) \end{pmatrix} \quad \text{for } \alpha = L, R, \quad \text{and } \tau = \frac{1}{\rho}$$

and with the initial conditions

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

The unknowns are the density of the fluid  $\rho$  and the velocity of the fluid  $u$ . Pressure laws  $p_\alpha(\tau)$  with  $\alpha = L, R$  are assumed to obey  $p'_\alpha(\tau) < 0$  and  $p''_\alpha(\tau) > 0$  for all  $\tau > 0$ : namely the left and right systems in Eqs. (1) and (2) are strictly hyperbolic over the following natural phase space:

$$\omega = \{\mathbf{u} = (\rho, \rho u) \in \mathbb{R}^2, \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

The characteristic fields of the two systems are genuinely nonlinear and each one has two eigenvalues respectively given by

$$\lambda_\alpha^\pm(\mathbf{u}) = u \pm c_\alpha(\tau), \quad c_\alpha(\tau) = \tau \sqrt{-p'_\alpha(\tau)}, \quad \alpha = L, R. \tag{5}$$

If we write our coupling problem in a condensed form, we get, provided that  $x \neq 0$ :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{cases} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}), & x < 0, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}), & x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Notice that no information is given on  $x = 0$ . The whole problem of coupling consists in defining these conditions. Finding coupling conditions has been studied in<sup>1</sup> for the coupling of two gas dynamic equations for a polytropic ideal gas with discontinuous pressure law. In this work, the authors give different methods to couple the two systems. One, by a relaxation approach with a so-called color function,<sup>1</sup> computes one flux at the interface and the result is the strictly conservativity of the method. The other coupling method<sup>1</sup> is based on the resolution of two independent problems on the left and on the right. Two boundary conditions have to be set and two fluxes at the interface calculated. This method is no longer conservative as the two fluxes are not in general equal, but it allows to compute solutions with uniform pressure profiles.

Motivated by these observations, we propose in this paper a new approach which consists in a global problem where the coupling conditions are given by imposing a measure valued load on the interface. By measure valued we mean that the load is concentrated on  $x = 0$ . The coupling model take the following form:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{7}$$

where  $\delta_{x=0}$  is the Dirac delta function in  $x = 0$ . The required definition of the time dependant weight  $\mathcal{M}(t)$  actually models the coupling conditions to be prescribed at the interface  $x = 0$  in System (6). Indeed, being given a suitable definition of the weight  $\mathcal{M}(t)$ , solving the coupling Problem (7) amounts to find a solution  $\mathbf{u}(x, t)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  of System (6) subject to the following coupling conditions at  $x = 0$ :

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \mathcal{M}(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

where  $\mathbf{u}(0^+, t)$  and  $\mathbf{u}(0^-, t)$  respectively denote the left and right trace at the interface  $x = 0$  of the solution  $\mathbf{u}$  at time  $t$ . For instance, considering the case of a conservative coupling (i.e.  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) = \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$ ), one must obviously require the weight  $\mathcal{M}(t)$  to identically vanish. By contrast, general transmission conditions<sup>3</sup> result in a non conservative coupling and thus give birth to non zero weights  $\mathcal{M}(t)$ . In the present work, we focus ourselves on weights under the form:

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_\rho(t) \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0, \quad (9)$$

in order to preserve the conservation of the density  $\rho$  which is a fundamental physical property in our applications. Such problems have been studied in<sup>6</sup> and<sup>10</sup> for example. The pressure drop law  $\mathcal{M}_{\rho u}(t)$  must be prescribed according to the Physics. Typical values of  $\mathcal{M}_{\rho u}(t)$  are discussed in<sup>7</sup> and their influence on the flow.

The main goal of the present work is to derive efficient numerical methods for the approximation of the solution of the coupling Problem (7). Away from the interface, this problem boils down to a well-known conservative problem. Here the difficulty is to enforce for validity the coupling condition (8). With this in mind, we will require the exact capture of the equilibrium solutions introduced in the next definition.

**Definition.** Let  $\mathcal{M}$  be a constant weight and  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$  two constant states in  $\omega$  such that

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}, \quad (10)$$

then the function

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

is called an equilibrium solution for Problem (7).

## II.B. General numerical standpoint

In a first time, let us introduce the numerical notations. We note  $\Delta t$  the time step,  $\Delta x$  the space step and  $\nu = \Delta t / \Delta x$  their ratio. The interfaces of the cells are in  $x_j = j\Delta x$  for  $j \in \mathbb{Z}$  and intermediate times are  $t^n = n\Delta t$  for  $n \in \mathbb{N}$ . We now seek at each time  $t^n$  a piecewise constant approximate solution  $x \rightarrow \mathbf{u}_\nu(x, t^n)$  of the solution  $\mathbf{u}$  of Problem (7):

$$\mathbf{u}_\nu(x, t^n) = \mathbf{u}_{j+1/2}^n \quad \text{for } x \in C_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}).$$

At  $t = 0$  we set from (3)

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{u}_0(x) dx, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

We use, without restriction, a 3-point finite-volume method to compute the updating of the discrete solution  $\mathbf{u}_\nu(x, t^n)$ :

$$\mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j-1/2}^n - \nu((\mathbf{g}_L)_j^n - (\mathbf{g}_L)_{j-1}^n), \quad j \leq 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{u}_{j+1/2}^n - \nu((\mathbf{g}_R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}_R)_j^n), \quad j \geq 0, \quad (12)$$

where:

$$\begin{aligned}(\mathbf{g}_L)_j^n &= \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_{j-1/2}^n, \mathbf{u}_{j+1/2}^n), \\ (\mathbf{g}_R)_j^n &= \mathbf{g}_R(\mathbf{u}_{j-1/2}^n, \mathbf{u}_{j+1/2}^n).\end{aligned}$$

The numerical fluxes,  $\mathbf{g}_L$  and  $\mathbf{g}_R$ , are respectively two Riemann approximations (obtained for instance from two approximate Riemann solvers) of the physical fluxes  $\mathbf{f}_L$  and  $\mathbf{f}_R$ . The coefficient  $\nu$  is chosen by a classical CFL restriction. The numerical flux  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  (respectively  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ ) corresponds to the exact flux  $\mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t))$  (resp.  $\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t))$ ) at the interface. Their definition must be related to the prescribed weight  $\mathcal{M}(t)$  and they will be derived in order to provide a good approximation of the coupling Condition (8) at each time  $t^n$ :

$$(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n \cong \mathcal{M}^n, \quad \mathcal{M}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{M}(t) dt, \quad n > 0. \quad (13)$$

In the next section, we describe two methods to compute the numerical fluxes  $(\mathbf{g}_{L,R})_0^n$  in a way to obtain Eq. (13).

### III. Methods for coupling

#### III.A. Two-Riemann problem method

The first method we present consists in solving two distinct Riemann problems, respectively labelled by  $L$  and  $R$  at the interface  $x = 0$  so as to define the numerical fluxes  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ . In order to define  $(\mathbf{g}_L)_0^n$ , we propose to handle the weight in the approximate Formula (13) when defining a ghost state  $\mathbf{u}^L(\mathbf{u}_{1/2}^n, \mathcal{M}^n)$  as the solution of:

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_{1/2}^n) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}^L(\mathbf{u}_{1/2}^n, \mathcal{M}^n)) = \mathcal{M}^n. \quad (14)$$

Equipped with such a solution, we define:

$$(\mathbf{g}_L)_0^n = \mathbf{g}_L(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \mathbf{u}^L(\mathbf{u}_{1/2}^n, \mathcal{M}^n)). \quad (15)$$

In a symmetric way, to define  $(\mathbf{g}_R)_0^n$ , the weight  $\mathcal{M}^n$  is addressed when solving for the ghost state  $\mathbf{u}^R(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \mathcal{M}^n)$  the next system of equations:

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}^R(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \mathcal{M}^n)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_{-1/2}^n) = \mathcal{M}^n, \quad (16)$$

so as to introduce

$$(\mathbf{g}_R)_0^n = \mathbf{g}_R(\mathbf{u}^R(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \mathcal{M}^n), \mathbf{u}_{1/2}^n). \quad (17)$$

Due to the strict convexity of each of the pressure law  $p_\alpha$ ,  $\alpha = L, R$ , it can be seen that the nonlinear algebraic Problems (14) and (16) to be solved admit either zero, or two solutions depending on the amplitude of  $\|\mathcal{M}^n\|$ , the states  $\mathbf{u}_{-1/2}^n$  and  $\mathbf{u}_{1/2}^n$  being fixed. In practice, the left and right fluxes  $\mathbf{f}_L$  and  $\mathbf{f}_R$  do not depart too much so that expected values of the weight generically yield two solutions for each problem: namely a subsonic and a supersonic solution.

Motivated by our multiphase flow applications, we always choose the subsonic solutions. The following statement assesses the validity of the so-called two-Riemann problem method.

**Lemma 1.** *Let be given two constant states  $\mathbf{u}_-$  and  $\mathbf{u}_+$  in  $\omega$  and a constant weight  $\mathcal{M}$  such that:*

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_-) = \mathcal{M}. \quad (18)$$

*Then the solution  $\mathbf{u}^L(\mathbf{u}_R, \mathcal{M})$  of Eq. (14) (respectively  $\mathbf{u}^R(\mathbf{u}_L, \mathcal{M})$  of Eq. (16)) exists and yields the next identities:*

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_L(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}^L(\mathbf{u}_+, \mathcal{M})) &= \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_-), \\ \mathbf{g}_R(\mathbf{u}^R(\mathbf{u}_-, \mathcal{M}), \mathbf{u}_+) &= \mathbf{f}_R(\mathbf{u}_+).\end{aligned}$$

*The two-Riemann problem method (14), (15) and (16), (17) thus preserves stationary solutions of the coupling Problem (7).*

*Proof.* At first we evaluate the states  $\mathbf{u}^L$  and  $\mathbf{u}^R$ ; they are the unique subsonic solutions of

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_R(\mathbf{u}^+) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}^L(\mathbf{u}^+, \mathcal{M})) &= \mathcal{M}, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}^R(\mathbf{u}^-, \mathcal{M})) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}^-) &= \mathcal{M}. \end{aligned}$$

By using Eq. (18), we have

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}^L(\mathbf{u}^+, \mathcal{M})) &= \mathbf{f}_L(\mathbf{u}^-), \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}^R(\mathbf{u}^-, \mathcal{M})) &= \mathbf{f}_R(\mathbf{u}^+). \end{aligned}$$

□

### III.B. A Relaxation model approach

In this section, we propose a coupling method based on a Relaxation approach for the approximation of the hyperbolic system (7). We refer the reader to<sup>5</sup> and<sup>14</sup> for general discussions on the Relaxation approach in the approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Our discussion is divided in two subsections. At first, we will show how to solve the Riemann problem for the Relaxation model associated to the coupling problem in the case of the conservative coupling model (i.e. when  $\mathcal{M}(t)$  completely vanishes in Problem (7)). Then, the second subsection will treat the case of the non-conservative coupling problem (i.e. with  $\mathcal{M}(t) \neq 0$ ) that is the approximation by the Relaxation model of Problem (7).

#### III.B.1. Conservative coupling by the Relaxation method

We begin this section by writing the coupling Cauchy Problem (6) closed by condition  $\mathcal{M}(t) = 0$ , with initial data  $\mathbf{u}_0(x)$ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\tau, x)) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (19)$$

where

$$p(\tau, x) = \begin{cases} p_L(\tau), & x < 0, \\ p_R(\tau), & x > 0. \end{cases}$$

The consequence of System (19) is the equality of the physical fluxes evaluated on the traces of the interface:

$$\rho u(0^-, t) = \rho u(0^+, t), \quad (20)$$

$$(\rho u^2 + p_L(\tau))(0^-, t) = (\rho u^2 + p_R(\tau))(0^+, t). \quad (21)$$

We propose to approximate the solutions of Problem (6) by means of the following Relaxation system

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\lambda + \partial_x(\rho u)_\lambda = 0, \\ \partial_t(\rho u)_\lambda + \partial_x(\rho u^2 + \pi)_\lambda = 0, \\ \partial_t(\rho \pi)_\lambda + \partial_x(\rho \pi u + a^2 u)_\lambda = \lambda \rho_\lambda (p(\tau, x) - \pi)_\lambda, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (22)$$

where  $a$  is a free parameter that we will discuss later on. The relaxation approach consists in smoothing the strong nonlinearities of the initial system by replacing it with a new system. In this model, the pressure law is replaced by a new unknown noted here  $\pi_\lambda$ . Observe that the solutions of the original model are formally restored when considering infinite values of the relaxation parameter  $\lambda > 0$ , since we have formally

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \pi_\lambda = p(\tau, x),$$

from the last PDE in System (22). However it is known<sup>14</sup> that to prevent the relaxation procedure from instabilities in the regime of large  $\lambda \gg 1$ , the free parameter  $a > 0$  in System (22) has to be chosen so as to meet

$$a^2 > \max_{\tau} (-p'_L(\tau), -p'_R(\tau)) \quad (23)$$

for all  $\tau$  under consideration. This condition is called the *Whitham condition*. It guarantees the stability of the Relaxation model. The Eqs. (20) and (21) become in the relaxation model:

$$\begin{aligned}(\rho u)_\lambda(0^-, t) &= (\rho u)_\lambda(0^+, t), \\ (\rho u^2 + \pi)_\lambda(0^-, t) &= (\rho u^2 + \pi)_\lambda(0^+, t).\end{aligned}$$

We now write System (22) in a condensed form like for Problem (7) (for the sake of simplicity we decide not to write the subscript  $\lambda$  in the following):

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{S}(\mathbf{U}, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{24}$$

with

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \pi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho \pi u + a^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(p(\tau, x) - \pi) \end{pmatrix}.$$

We now define the new space  $\Omega$  of states  $\mathbf{U}$ :

$$\Omega = \{\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho \pi) \in \mathbb{R}^3, \rho > 0, \rho u \in \mathbb{R}, \rho \pi \in \mathbb{R}\}. \tag{25}$$

System (24) is strictly hyperbolic for all  $\mathbf{U} \in \Omega$  and for all  $a$ . We describe now the numerical resolution of Problem (19) by means of System (22). Consider the discrete solution  $\mathbf{u}_\nu(x, t^n)$  of Problem (19) at time  $t^n$ . Let us remind that it is a piecewise constant function taking constant values on each cell  $C_{j+1/2}^n$ . The evolution of this solution at time  $t^{n+1}$  is made in two steps.

**First step: time evolution** ( $t^n \rightarrow t^{n+1-}$ )

During the first step, we want to solve for  $t \in [0, \Delta t]$ ,  $\Delta t$  small enough,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_\nu(x, t^n), \end{cases} \tag{26}$$

with

$$\mathbf{U}_\nu(x, t^n) = (\mathbf{u}_\nu(x, t^n), (\rho \pi)_\nu(x, t^n))^T \tag{27}$$

and where  $\rho \pi$  is at equilibrium that is we have

$$(\rho \pi)_\nu(x, t^n) = \rho(x, t^n) p(\tau_\nu(x, t^n), x).$$

Under an appropriate CFL restriction, the solution of (26) is a succession of Riemann problems. The system has three increasingly arranged eigenvalues:

$$\lambda_1(\mathbf{U}) = u - a\tau, \quad \lambda_2(\mathbf{U}) = u, \quad \lambda_3(\mathbf{U}) = u + a\tau. \tag{28}$$

The fields of this system are all linearly degenerate, so that the solution of the Riemann problem contains only contact discontinuities. More precisely, consider  $\mathbf{U}_L$  and  $\mathbf{U}_R$  two values of successive cells and solve

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{29}$$

The structure of the solution for Problem (29) is easy to get (see Figure (1)): this self-similar solution we denote  $\mathcal{W}(x/t; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  is composed of four constant states  $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_L^*, \mathbf{U}_R^*$  and  $\mathbf{U}_R$  systematically separated by discontinuities with velocity  $\sigma_i, i = \{1, 2, 3\}$ . The contact discontinuities are moving with the velocity  $\sigma_i$

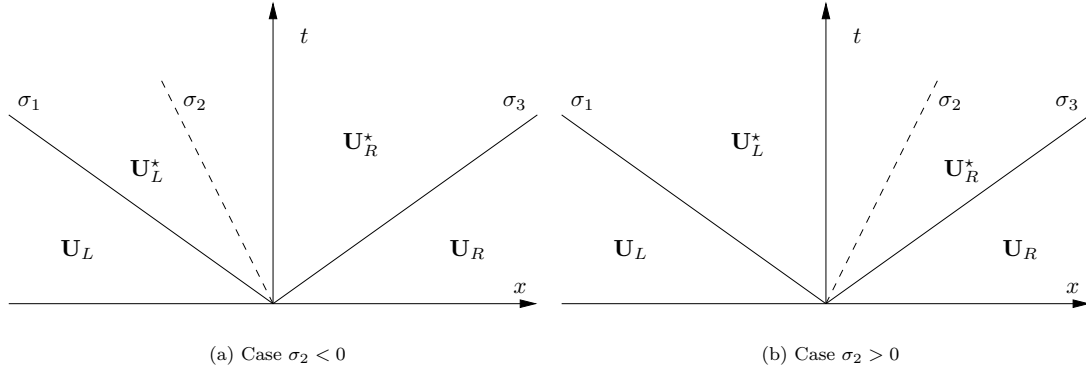


Figure 1. Solution of the Riemann problem for the conservative coupling relaxation model

of each field so we have:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \lambda_1(\mathbf{U}_L) = \lambda_1(\mathbf{U}_L^*), \\ \sigma_2 &= \lambda_2(\mathbf{U}_L^*) = \lambda_2(\mathbf{U}_R^*), \\ \sigma_3 &= \lambda_3(\mathbf{U}_R^*) = \lambda_3(\mathbf{U}_R).\end{aligned}$$

Using now the Rankine-Hugoniot relations and the equations above leads easily<sup>5</sup> to the expressions of the intermediate states  $\mathbf{U}_L^*$  and  $\mathbf{U}_R^*$ . They are obtained from:

$$\tau_L^* = \tau_L + \frac{1}{a}(u^* - u_L), \quad (30)$$

$$\tau_R^* = \tau_R + \frac{1}{a}(u_R - u^*), \quad (31)$$

$$u^* = u_L^* = u_R^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2a}(\pi_R - \pi_L), \quad (32)$$

$$\pi^* = \pi_L^* = \pi_R^* = \frac{1}{2}(\pi_L + \pi_R) - \frac{a}{2}(u_R - u_L). \quad (33)$$

The updating of the discrete states is determined by using a classical three-point Godunov method. More precisely, the numerical flux at each interface is equal to the physical flux of the Relaxation model evaluated on the left (or right) trace given by the resolution of the Riemann problem. One can notice by the Relations (30)-(33), that the intermediate states do not contain the pressure law inhomogeneity. This one only appears in the initial condition (27) and we have

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(0^-, t)) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(0^+, t)),$$

where  $\mathbf{U}(0^-, t)$  and  $\mathbf{U}(0^+, t)$  are the traces of the solution at the interface. We thus have the continuity of the fluxes for the relaxation method.

### Second step: relaxation ( $t^{n+1-} \rightarrow t^{n+1}$ )

The solution obtained after this convective step is noted  $\mathbf{U}_\nu(x, t^{n+1-})$ . In the second step, we solve the following system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0 \\ \partial_t (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho \pi) = \lambda(\rho - \pi), \end{cases}$$

with  $\lambda \rightarrow +\infty$  and initial condition given by the solution of the first step  $\mathbf{U}_\nu(x, t^{n+1-})$ . Finally the discrete solution  $\mathbf{u}_\nu(x, t^{n+1})$  corresponds to

$$\mathbf{U}_\nu(x, t^{n+1}) = (\mathbf{u}_\nu(x, t^{n+1}), (\rho\pi)_\nu(x, t^{n+1}))^T$$



with

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\nu(x, t^{n+1}) &= \mathbf{u}_\nu(x, t^{n+1-}) \\ (\rho\pi)_\nu(x, t^{n+1}) &= \rho(x, t^{n+1-})p(\tau_\nu(x, t^{n+1-}), x). \end{aligned}$$

To summarize this paragraph, we give the detailed form of the numerical fluxes  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  entering Eqs. (11) and (12). At time  $t^n$ , being given the states  $\mathbf{u}_{-1/2}^n$  and  $\mathbf{u}_{1/2}^n$ , we define  $\mathbf{U}_{-1/2}^n = (\mathbf{u}_{-1/2}^n, \rho_{-1/2}^n p_L(\tau_{-1/2}^n))$  and  $\mathbf{U}_{1/2}^n = (\mathbf{u}_{1/2}^n, \rho_{1/2}^n p_R(\tau_{1/2}^n))$  according to Eq. (27). The required fluxes  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  are recovered from the first two components of  $\mathbf{F}(\mathcal{W}(0^+; \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{1/2}^n))$  setting

$$(\mathbf{g}_L)_0^n = (\mathbf{g}_R)_0^n = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \end{pmatrix} (\mathcal{W}(0^+; \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{1/2}^n)). \quad (34)$$

### III.B.2. Non conservative coupling by the Relaxation method

The presence of the local source term  $\mathcal{M}\delta_{x=0}$  in Problem (7) changes the resolution of the Riemann problem in the Relaxation system. In order to keep the same numerical method, based on the Relaxation model and the corresponding Godunov method to evaluate the flux on the interface, we have to express the new intermediate states of the solution of the Riemann problem. These states, and in particular the traces on the left and right of the interface depend explicitly on the measure load. We write now the new Riemann problem (29) with the local source term:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \widetilde{\mathcal{M}}(t)\delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (35)$$

where  $\widetilde{\mathcal{M}}(t)$  is built from  $\mathcal{M} = (0, \mathcal{M}_{\rho u}(t))$  in Problem (7) when setting

$$\widetilde{\mathcal{M}}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}(t) \\ \mathcal{M}_{\rho\pi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}_{\rho u}(t) \\ \mathcal{M}_{\rho\pi}(t) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Here, the additional weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  acting on the last equation of System (22) seems arbitrary but actually must be given a precise non zero definition for the exact capture of equilibrium solutions of the original coupling Problem (7) (see Proposition (1) below).

Let us briefly comment the structure of the self-similar solution of the relaxation coupling Problem (35). In comparison with the last paragraph, an additional wave with zero speed - the so-called standing wave - has to be dealt with. This supplementary wave accounts for the source term  $\widetilde{\mathcal{M}}(t)$  concentrated at  $x = 0$  and yields the traces of the solution of System (35) to obey

$$(\rho u)_+ - (\rho u)_- = 0, \quad (37)$$

$$(\rho u^2 + \pi)_+ - (\rho u^2 + \pi)_- = \mathcal{M}_{\rho u}, \quad (38)$$

$$(\rho\pi u + a^2 u)_+ - (\rho\pi u + a^2 u)_- = \mathcal{M}_{\rho\pi}. \quad (39)$$

In agreement with our multiphase flow motivation, we will only address the case of fully subsonic self-similar solutions of System (35): namely the left and right traces of the Riemann solutions are subsonic. Hence, the typical pattern of the self-similar solutions under consideration is displayed in Figure (2). Observe that the expected self-similar solution of System (35) does depend not only on the given data  $\mathbf{U}_L$ ,  $\mathbf{U}_R$  but also on the two prescribed weights  $\mathcal{M}_{\rho u}$  and  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$ . The left and right states  $\mathbf{U}_L$  and  $\mathbf{U}_R$  being fixed, arbitrary values of the weights may result in a wave pattern distinct from the one depicted in Figure (2). Their values must thus be conveniently monitored in order to fit with this expected waves structure. In that aim, it turns to be convenient to reexpress the weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  as a function of the weight  $\mathcal{M}_{\rho u}$  and the mass flux:

$$m = \rho_- u_- = \rho_+ u_+, \quad (40)$$

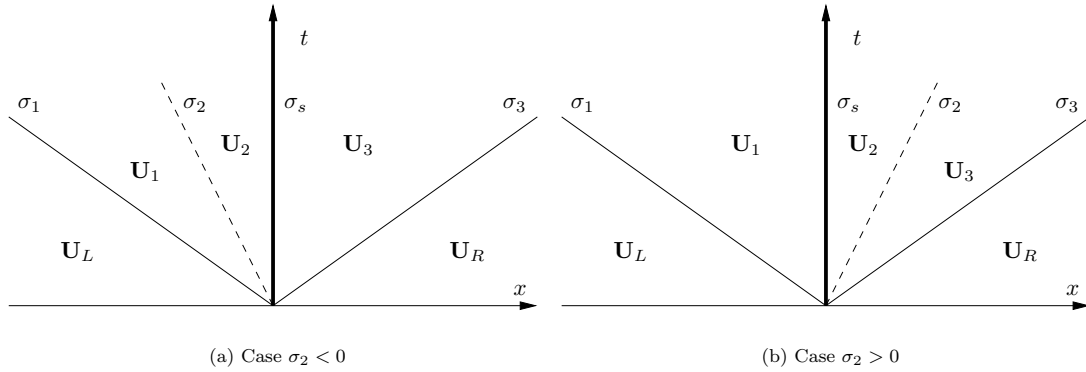


Figure 2. Solution of the coupled Riemann problem with the local term  $\mathcal{M}(t)$  for the convection system of the relaxation model

at the interface:

$$\mathcal{M}_{\rho\pi} = \mathcal{M}_{\rho\pi}(m, \mathcal{M}_{\rho u}; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R), \quad (41)$$

which we will write  $\mathcal{M}_{\rho\pi}(m, \mathcal{M}_{\rho u})$  for short. The next statement<sup>7</sup> is then in order:

**Proposition 1.** *Let be given two subsonic states  $\mathbf{U}_L$  and  $\mathbf{U}_R$  in  $\Omega^2$ , then there exists a non empty bounded convex domain  $\mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \subset \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{\mathcal{M}_{\rho u}}$  such that for any given pair  $(m, \mathcal{M}_{\rho u}) \in \mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  there exists an unique self-similar subsonic solution we denote  $\mathcal{W}(x/t; m, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  of Problem (35) with weight  $\widetilde{\mathcal{M}} = (0, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho\pi}(m, \mathcal{M}_{\rho u}))$ .*

In this paper, we only pay attention to specific definitions of  $\widetilde{\mathcal{M}}$  in Eq. (36) from the given  $\mathcal{M}$  in Problem (7) such that equilibrium solutions of Problem (7) are exactly restored by the relaxation procedure. More precisely, two states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  in  $\omega$  being given as a solution of:

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}, \quad (42)$$

for some  $\mathcal{M} = (0, \mathcal{M}_{\rho u})$ ,  $\mathcal{M}_{\rho u} \in \mathbb{R}$ , then define  $\mathbf{U}_L = (\mathbf{u}_L, \rho_L p_L(\tau_L))$  and  $\mathbf{U}_R = (\mathbf{u}_R, \rho_R p_R(\tau_R))$ , the mass flux  $m$  in Eq. (40) must be properly defined such that the solution  $\mathcal{W}(x/t; m, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  of Problem (35) writes:

$$\mathcal{W}(x/t; m, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0. \end{cases} \quad (43)$$

In other words, the initial data of Problem (35) is nothing but the solution. Restricting such a solution to its two first components restores the next function

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \quad (44)$$

This function is just the expected equilibrium solution of Problem (7). The next statement provides the relevant definition of the required mass flux  $m$ :

**Proposition 2.** *Let be given  $(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  in  $\omega^2$  and  $\mathcal{M}_{\rho u} \in \mathbb{R}$  such that Eq. (42) holds with  $\mathcal{M} = (0, \mathcal{M}_{\rho u})$ . Let us define:*

$$m_e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + 2au^*(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)}{a(\tau_L^*(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) + \tau_R^*(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R))}, \quad (45)$$

where the mapping  $\tau_L^*$ ,  $\tau_R^*$  and  $u^*$  have been defined in Eqs. (30), (31) and (32). Then the solution  $\mathcal{W}(x/t; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R), \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  coincides with the initial data  $\mathbf{U}_0(x) = \mathbf{U}_L = (\mathbf{u}_L, \rho_L p_L(\tau_L))$  if  $x < 0$  and  $\mathbf{U}_R = (\mathbf{u}_R, \rho_R p_R(\tau_R))$  if  $x > 0$ . The definition (45) of the mass flux  $m$  thus preserves the equilibrium solutions of Problem (7).

We conclude when detailing the definition of the three intermediate states  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  and  $\mathbf{U}_3$  involved in the waves patterns depicted in Figure (2). In this aim, it is convenient to consider the left and right traces of the self-similar solution  $\mathcal{W}(x/t; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R), \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  singled out in the above statement at the interface, which we denote respectively  $\mathbf{U}_- = \mathcal{W}(0^-; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R), \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  and  $\mathbf{U}_+ = \mathcal{W}(0^+; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R), \mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ . Observe that  $m_e \equiv m_e(\mathcal{M}_{\rho u}, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  (which we write  $m_e(\mathcal{M}_{\rho u})$  for short) in (45) verifies  $m_e < 0$  as soon as  $\sigma_2 < 0$  and  $m_e > 0$  whenever  $\sigma_2 > 0$ . With these solutions, observe that in Figure (2(a)) with  $\sigma_2 < 0$ , we have  $\mathbf{U}_- = \mathbf{U}_2$  and  $\mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_3$  while by contrast in Figure (2(b)) with  $\sigma_2 > 0$ , we have  $\mathbf{U}_- = \mathbf{U}_1$  and  $\mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_2$ . Equipped with the definition of the mass flux (45), let us introduce

$$\mathcal{M}_{\rho\pi}^e(m_e(\mathcal{M}_{\rho u}), \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = m_e(\mathcal{M}_{\rho u})(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L), \quad (46)$$

where we have set  $\mathcal{I}_R = p_R(\tau_R) + a^2\tau_R$  and  $\mathcal{I}_L = p_L(\tau_L) + a^2\tau_L$  which we write for short  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u})$ . Then the left and right traces  $\mathbf{U}_-$  and  $\mathbf{U}_+$  at  $x = 0$  of the self-similar solution displayed in Figure (2) are recovered from:

$$u_- = u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u})}{2a(a - m_e(\mathcal{M}_{\rho u}))}, \quad \tau_- = \frac{u_-}{m_e(\mathcal{M}_{\rho u})}, \quad \pi_- = \pi^* - \frac{2a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u})}{2(a - m_e(\mathcal{M}_{\rho u}))}, \quad (47)$$

$$u_+ = u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u})}{2a(a + m_e(\mathcal{M}_{\rho u}))}, \quad \tau_+ = \frac{u_+}{m_e(\mathcal{M}_{\rho u})}, \quad \pi_+ = \pi^* + \frac{2a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u})}{2(a + m_e(\mathcal{M}_{\rho u}))}, \quad (48)$$

as soon as  $m_e(\mathcal{M}_{\rho u}) \neq 0$ . If  $m_e(\mathcal{M}_{\rho u})$  vanishes, then  $\mathbf{U}_- = \mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_L^*$  if  $u^* > 0$  and  $\mathbf{U}_- = \mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_R^*$  otherwise (see Figure (2)). Then to conclude, we need to define  $\mathbf{U}_3$  in the case  $m_e(\mathcal{M}_{\rho u}) > 0$  (i.e.  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_-, \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_+$ ) by:

$$u_3 = u_+, \quad \tau_3 = \tau_R + \frac{1}{a}(u_R - u_+), \quad \pi_3 = \pi_+, \quad (49)$$

and  $\mathbf{U}_1$  in the case  $m_e(\mathcal{M}_{\rho u}) < 0$  (i.e.  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_-, \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_+$ ) by:

$$u_1 = u_-, \quad \tau_1 = \tau_L - \frac{1}{a}(u_L - u_-), \quad \pi_1 = \pi_-. \quad (50)$$

To summarize the expected numerical fluxes entering Eqs. (11) and (12) are recovered as follow. At time  $t^n$ , being given the states  $\mathbf{u}_{-1/2}^n$  and  $\mathbf{u}_{1/2}^n$ , we define  $\mathbf{U}_{-1/2}^n = (\mathbf{u}_{-1/2}^n, \rho_{-1/2}^n p_L(\tau_{-1/2}^n))$  and  $\mathbf{U}_{1/2}^n = (\mathbf{u}_{1/2}^n, \rho_{1/2}^n p_R(\tau_{1/2}^n))$  according to Eq. (27). Then from the value of  $\mathcal{M}^n = (0, \mathcal{M}_{\rho u}^n = \mathcal{M}_{\rho u}(t^n))$  in (7) we define  $\widetilde{\mathcal{M}}^n = (0, \mathcal{M}_{\rho u}^n, \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u}^n))$  with  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u}^n)$  in (46). The solution  $\mathcal{W}(x/t; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}^n), \mathcal{M}_{\rho u}^n, \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{1/2}^n)$  of (35) being deduced from the formulae (47) to (48) we have:

$$(\mathbf{g}_L)_0^n = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \end{pmatrix} \left( \mathcal{W}(0^-; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}^n), \mathcal{M}_{\rho u}^n, \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{1/2}^n) \right), \quad (51)$$

$$(\mathbf{g}_R)_0^n = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \end{pmatrix} \left( \mathcal{W}(0^+; m_e(\mathcal{M}_{\rho u}^n), \mathcal{M}_{\rho u}^n, \mathbf{U}_{-1/2}^n, \mathbf{U}_{1/2}^n) \right). \quad (52)$$

## IV. Results

We present in this section results from numerical simulations based on the methods we propose. In the next test cases, two distinct cases of values for  $\mathcal{M}_{\rho u}$  are considered. The initial condition for the flow are of Riemann type. The two constant states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  under consideration are given by:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{u}_R & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

with

	$L$	$R$
$\rho$	2	1
$u$	$u_L$	0

where

$$u_L = u_R + \sqrt{(p_R(\tau_R) - p_L(\tau_L))(\tau_L - \tau_R)}, \quad \tau_R < \tau_L.$$

The pressure law is  $p_\alpha(\tau) = \tau^{-\gamma_\alpha}$ . The adiabatic coefficients are  $\gamma_L = 1.4$  for the left domain and  $\gamma_R = 1.6$  for the right domain. The number of mesh points is 200 and the space domain is the interval  $[-0.5, 0.5]$ . The CFL constant is set to 0.5.

#### IV.A. Conservative coupling $\mathcal{M} \equiv (0, 0)$

The purpose of the present benchmark is to illustrate the behavior of the numerical methods we have introduced to approximate the solution of Problem (7) in the conservative setting: i.e. with  $\mathcal{M} = (0, 0)$ . We show that the two-Riemann problem method and the relaxation strategy described in Section (III) yield discrete solutions in a fairly good agreement despite some minor discrepancies may be reported. Discrete solutions are compared on Figures (3) and (4). We observe that the approximate solution obtained by the two-Riemann problem approach exhibits a perfectly sharp discontinuity at the interface while the relaxation approach described in Section (III) displays a discrete profile with one intermediate point resulting in a slight overshoot in the pressure distribution. To go further, Figures (8(a)) and (9(a)) display the component of impulsion of difference  $(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n$  in its time history and the value  $\mathcal{M}_{\rho u}^n$  (that is here strictly zero). As expected from its design principle, the relaxation approach yields an exact balance  $(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n = 0$  at each time step. The two-Riemann problem approach achieves this exact balance after a few time steps but departure from the expected cancellation stays fairly admissible.

Figure (5) shows the results achieved by the relaxation approach described in Section (III.B.2) with  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathcal{M}_{\rho u})$  given in (46) choosing  $\mathcal{M}_{\rho u} \equiv 0$ . Notice that the present method differs from the first relaxation strategy described in Section (III.B.1) since  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e(0) \neq 0$  in general. The benefit of this second approach clearly stays in the capture of a perfectly sharp standing wave at the interface. Let us stress that this second method exactly restores by construction the identity  $(\mathbf{g}_R)_0^n = (\mathbf{g}_L)_0^n$ .

#### IV.B. Non conservative coupling

In this test case, the value of  $\mathcal{M}_{\rho u}$  is chosen so as to enforce the continuity of the traces of the exact Riemann solution in Problem (7) at  $x = 0$ ; namely  $\mathbf{u}(0^-, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mathbf{u}(0^+, \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ . It can be seen<sup>7</sup> that the expected value is given by:

$$\mathcal{M}_{\rho u}^n = 0.354404, \quad n > 0.$$

Figures (6) and (7) compare the discrete solutions obtained by the two-Riemann problem approach and the relaxation strategy. The discrete standing waves are quite comparable. Then Figures (8(b)) and (9(b)) display the component of impulsion of the difference  $(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n$  and the exact value of  $\mathcal{M}_{\rho u}^n$  used here. Again by construction such a difference is strictly equal to the prescribed weight at all time steps in the relaxation strategy while it takes few time steps in the two-Riemann problem method.

### Acknowledgments

This work fits in a joint research program between CEA Saclay and Laboratoire Jacques Louis Lions Université Pierre et Marie Curie Paris6, on coupling methods for multiphase flows. This work was partially supported by the NEPTUNE project, funded by CEA, EDF, IRSN and AREVA-NP.

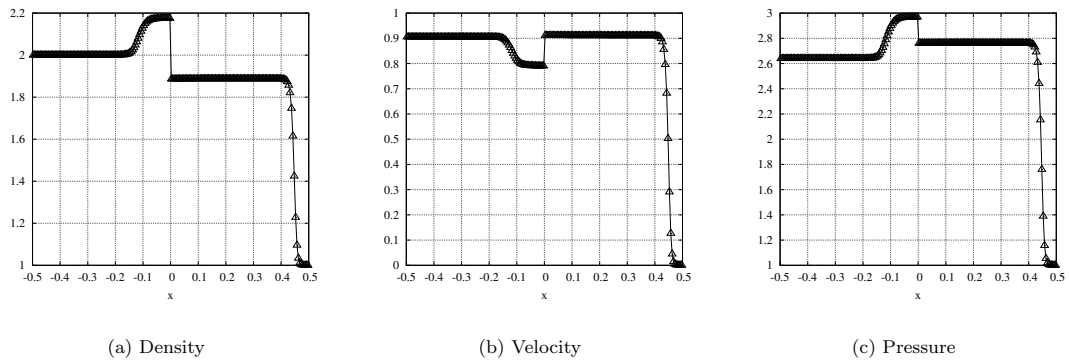


Figure 3. Conservative coupling; results for the two-Riemann problem method.

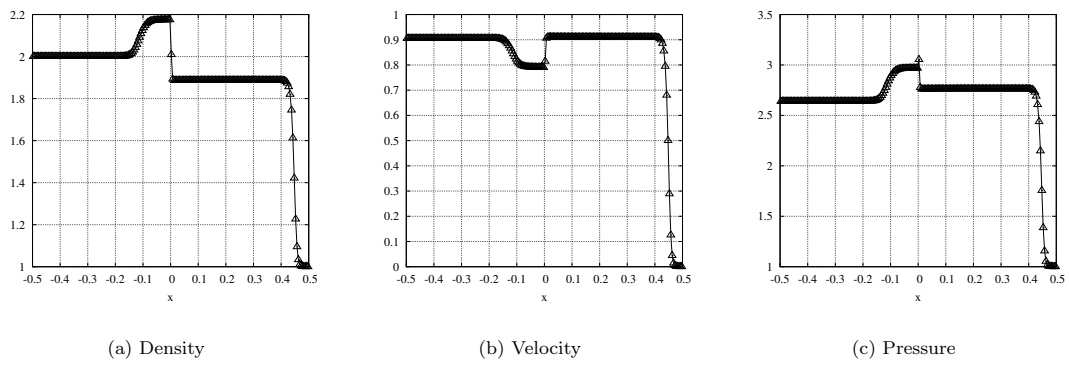


Figure 4. Conservative coupling; results for the Relaxation approach.

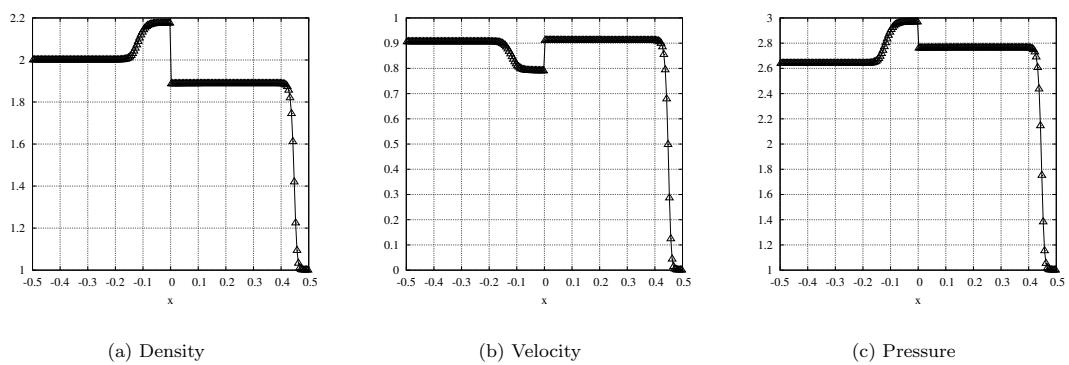


Figure 5. Conservative coupling; results for the Relaxation approach with weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$ .

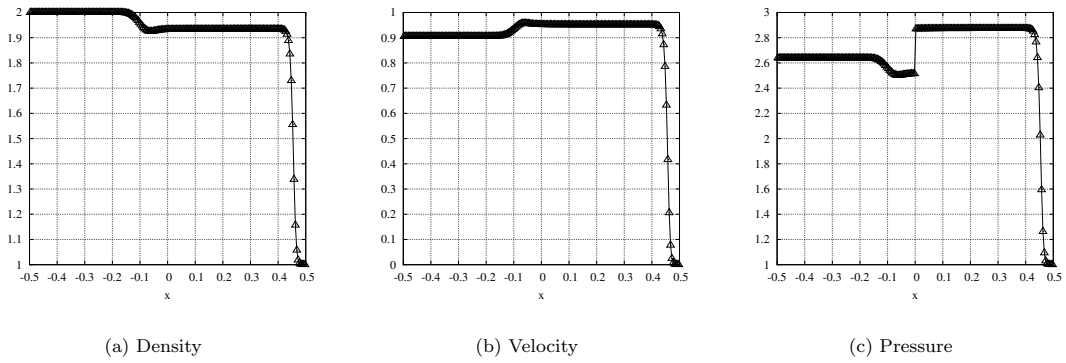


Figure 6. Non conservative coupling: results for the two-Riemann problem method.

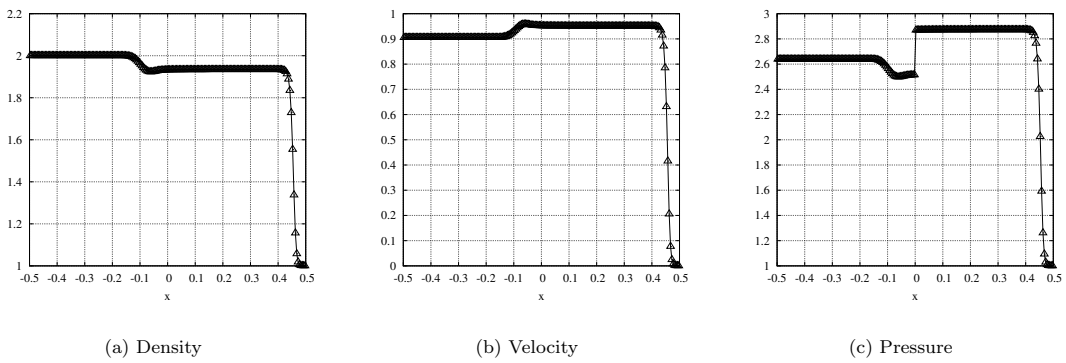


Figure 7. Non conservative coupling: results for the Relaxation approach.

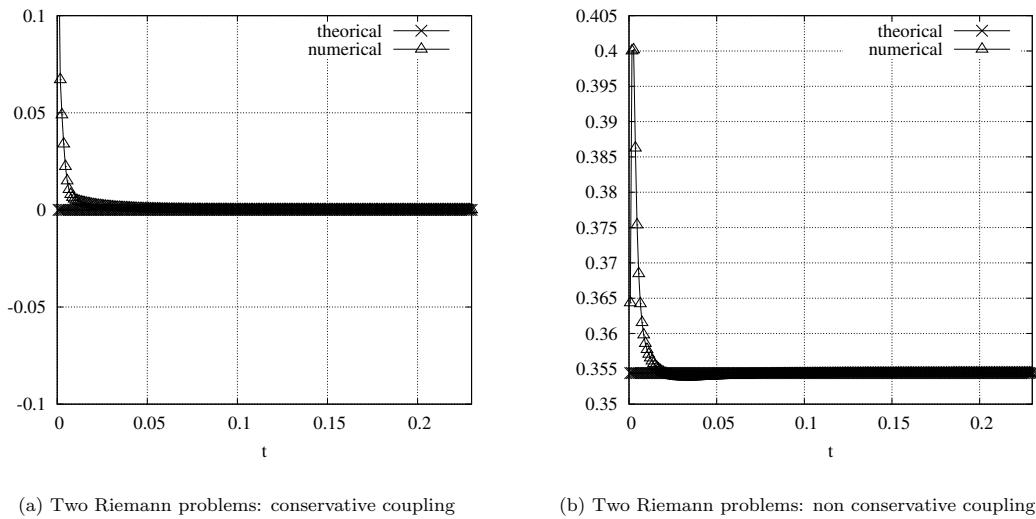
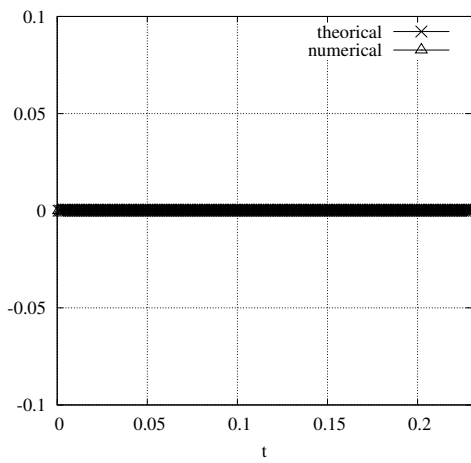
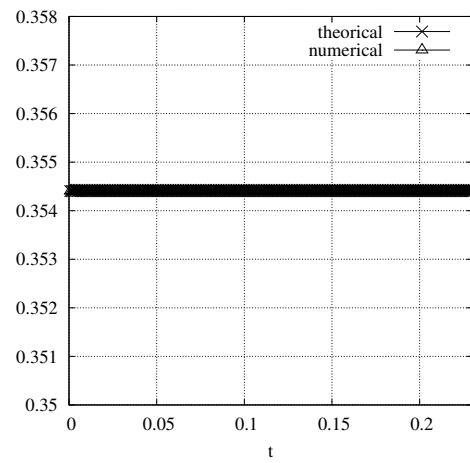


Figure 8. Comparison between the numerical value of the impulsion flux jump at the interface and the real weight value for the two-Riemann problem approach.



(a) Relaxation approach: conservative coupling



(b) Relaxation approach: non conservative coupling

Figure 9. Comparison between the numerical value of the impulsion flux jump at the interface and the real weight value for the relaxation approach.

## References

- <sup>1</sup>Ambroso, A., Chalons, C., Coquel, F., Godlewski, E., Lagoutiere, F., Raviart, Seguin, N., P.-A., and Hérard, J.-M., “Coupling of multiphase flow models,” *proceedings of Nureth11*, 2005.
- <sup>2</sup>Ambroso, A., Chalons, C., Coquel, F., Godlewski, E., Lagoutiere, F., Raviart, P.-A., and Seguin, N., “The coupling of homogeneous models for two-phase flows,” *Int. J. Finite Volumes*, Vol. 4(1), 2007, pp. 1–39.
- <sup>3</sup>Ambroso, A., Chalons, C., Coquel, F., Godlewski, E., Lagoutiere, F., Raviart, P.-A., and Seguin, N., “Extension of interface coupling to general coupling Lagrangian systems,” *Accepted for publication in Math. Com.*, 2007.
- <sup>4</sup>Ambroso, A., Hérard, J.-M. and Hurisse, O., “A method to couple HEM and HRM two-phase flow models,” *Submitted*, 2006.
- <sup>5</sup>Chalons, C., *Bilans d’entropie discrets dans l’approximation numérique des chocs non classiques. Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2D et à quelques systèmes visco-capillaires*, Ph.D. thesis, Ecole polytechnique, France, 2002.
- <sup>6</sup>Diehl, S., “On scalar conservation laws with point source and discontinuous flux function,” *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 26, 1995, pp. 1425–1451.
- <sup>7</sup>Galié, T., *Couplage interfacial de modèles pour la thermo-hydraulique des réacteurs*, Ph.D. thesis, In preparation.
- <sup>8</sup>Godlewski, E., Le Thanh, K.-C., and Raviart, P.-A., “The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. II. The case of systems,” *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, Vol. 39(4), 2005, pp. 649–692.
- <sup>9</sup>Godlewski, E. and Raviart, P.-A., “The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. I. The scalar case,” *Numer. Math.*, Vol. 97(1), 2004, pp. 81–130.
- <sup>10</sup>Greenberg, J. M., Roux, A. Y. L., Baraille, R., and Noussair, A., “Analysis and approximation of conservation laws with source terms,” *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 34, 1997, pp. 1980–2007.
- <sup>11</sup>Hérard, J.-M., “Schemes to couple flows between free and porous medium,” *proceedings of AIAA*, 2005, pp. 2005–4861.
- <sup>12</sup>Hérard, J.-M. and Hurisse, O., “Coupling two and one-dimensional models through a thin interface,” *proceedings of AIAA*, 2005, pp. 2005–4718.
- <sup>13</sup>Hérard, J.-M. and Hurisse, O., “Boundary conditions for the coupling of two-phase flow models,” *Submitted for contribution to the 18<sup>th</sup> AIAA CFD conference*.
- <sup>14</sup>Jin, S. and Xin, Z., “The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions,” *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 48, 1995, pp. 235–276.





**RELAXATION AND NUMERICAL APPROXIMATION OF A TWO-FLUID  
TWO-PRESSURE DIPHASIC MODEL**ANNALISA AMBROSO<sup>1</sup>, CHRISTOPHE CHALONS<sup>2</sup>, FRÉDÉRIC COQUEL<sup>3</sup> AND THOMAS  
GALIÉ<sup>4</sup>

**Abstract.** This paper is concerned with the numerical approximation of the solutions of a two-fluid two-pressure model used in the modelling of two-phase flows. We present a relaxation strategy for easily dealing with both the nonlinearities associated with the pressure laws and the nonconservative terms that are inherently present in the set of convective equations and that couple the two phases. In particular, the proposed approximate Riemann solver is given by explicit formulas, preserves the natural phase space, and exactly captures the coupling waves between the two phases. Numerical evidences are given to corroborate the validity of our approach.

**1991 Mathematics Subject Classification.** 76T10, 35L60, 76M12.

...

## INTRODUCTION

In this paper, we are interested in the numerical approximation of the solutions of a two fluid two pressure diphasic model. That kind of model has gained interest in the recent years for the modelling and computation of two phase flows. It was first formulated in Baer & Nunziato [6] and its mathematical properties have been first addressed in Embid & Baer [18]. This model was subsequently studied in Kapila *et al.* [27], Glimm *et al.* [22], Abgrall & Saurel [33], Gavriluk & Saurel [21], Gallouët, Hérard & Seguin [20], Coquel, Gallouët, Hérard & Seguin [14]. It treats each phase as a separate fluid meaning that each phase  $k$  has its own density  $\rho_k$ , velocity  $u_k$  and pressure  $p_k$  with  $k = 1, 2$ . In particular, the velocity and pressure nonequilibria between the phases are not neglected.

In the case of a barotropic flow (the pressure is for each phase a function of the density only), the basic set of convective equations is composed of the classical partial differential equations governing the mass  $\alpha_k \rho_k$  and the momentum  $\alpha_k \rho_k u_k$ . Here  $\alpha_k$  is the volume fraction of phase  $k$  and the two fluids are non-miscible, which implies  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . The coupling between the two phases is made by two nonconservative terms  $p_I \partial_x \alpha_k$ ,  $k = 1, 2$  involving the interfacial pressure  $p_I$  in the momentum equations, whereas  $\alpha_k$  evolves according to its

*Keywords and phrases:* Two-phase flows, two-fluid two-pressure model, hyperbolic systems, finite volume methods, relaxation schemes, Riemann solvers

<sup>1</sup> DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France, annalisa.ambroso@cea.fr

<sup>2</sup> Université Paris 7-Denis Diderot and UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, F-75005 France and DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France, chalons@math.jussieu.fr

<sup>3</sup> Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 7598 LJLL, Paris, F-75005 France and CNRS, UMR 7598 LJLL, Paris, F-75005 France, coquel@ann.jussieu.fr

<sup>4</sup> DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France,

own equation. More precisely, it is advected with the interfacial velocity  $u_I$ . Several choices for  $u_I$  and  $p_I$  can be found in the literature. Here we choose to set

$$u_I = u_2, \quad p_I = p_1(\rho_1) \quad (1)$$

following [6], [21], [14]. This closure was first proposed for modelling a fluid-solid interface in a detonation model, but it applies also to our case of a liquid-vapor interface provided that one of the phases is *dispersed*, *i.e.* its concentration is small. Other closure laws has been proposed for fluid-fluid models, see for instance [33]. We refer the reader to Gallouët *et al.* [20] for a comprehensive study of general closure laws concerning  $u_I$  and  $p_I$ . Relations (1) ensure that the void fraction wave is linearly degenerate. Source terms like gravity force and pressure relaxation will be added in the equations in the numerical part of the paper to simulate typical two phase problems. The problem of the relaxation of the fluid velocities is not addressed here. We study that problem in [5].

Importantly, the model under consideration admits systematically five real eigenvalues and is seen to have a basis of right eigenvectors, at least in the context of subsonic flows. From a mathematical viewpoint, this flow regime expresses that some of the eigenvalues do not coincide and is completely relevant in the nuclear energy industry framework which motivates this work. The hyperbolicity property makes the two-fluid two-pressure approach very attractive in comparison to models using an equilibrium pressure assumption ( $p = p_1 = p_2$ ) since the latter do not necessarily admit real eigenvalues in all situations.

The resolution of the proposed system is certainly not easy, for two main reasons. The first one comes from the (possibly) strong nonlinearities associated with the pressure laws  $p_k$ ,  $k = 1, 2$ . In order to overcome this difficulty, we propose in this work a numerical scheme which is based on a relaxation approach. The idea is to approximate at the discrete level the solutions of the system (the so-called equilibrium system) by those of a suitable extended first order system with singular perturbation (the so-called relaxation system). See for instance Jin & Xin [26], Chalons & Coquel [12], Coquel *et al.* [16], Chalons & Coulombel [13]. This relaxation system has the property of being nonlinear hyperbolic with only linearly degenerate characteristic fields, which makes the numerical resolution of the equilibrium system easier.

The second difficulty stems from the presence of the nonconservative terms  $p_I \partial_x \alpha_k$ ,  $k = 1, 2$  which implies that the (equilibrium) system does not admit any equivalent conservation form in general. Of course, these nonconservative terms vanish in the very particular situation in which  $\alpha_k$  is locally constant and the structure becomes the one of two conservative and decoupled two by two Euler systems. In the general case, the choice (1), by ensuring that the void fraction wave is linearly degenerate, allows to give sense to the nonconservative terms. By contrast with nonconservative products appearing in shocks ([30], [31]), nonconservative products propagated by contact discontinuities do not depend on the underlying viscous phenomena. With this respect, discrete solutions do not depend on numerical viscosity (Guillemaud [25]). Difficulties may arise but they are linked with the appearance of resonance phenomena (Andrianov and Warnecke [4], Andrianov [2]...). In this context, we derive in this work an approximate Riemann solver so as to preserve in the best possible way the contact discontinuity  $u_I$  associated with the initial system, and this is achieved by a particular treatment of the nonconservative products in the relaxation system. We prove that the proposed Riemann solver is conservative for the mass of each phase and for the total momentum, and that it captures exactly the  $u_I$ -contact discontinuities associated with the original system. In addition, it is given by fully explicit formulas and is stable in the  $L^1$  sense (*i.e.* it preserves the natural phase space).

One may find in the literature several quite recent papers devoted to the numerical resolution of two-fluid two-pressure models and the question of how to discretize the nonconservative terms. Most of them deal with the non barotropic case. Actually, the literature is large on this subject and we do not claim that the following discussion is exhaustive. We refer in particular to the numerous works quoted in the references we mention. A first group of works is due to Saurel and collaborators. Saurel & Abgrall in [33] and Andrianov *et al.* in [3] for instance (see also Saurel & Lemetayer [36] for a multidimensional framework) take into account the nonconservative terms by means of a *free streaming* physical condition associated with uniform velocity and pressure profiles. The discretization technique of [33] is improved by the same authors in [1] in an original

way. It consists in averaging some approximations of the pure phase Euler equations at the microscopic level instead of, as it is more usual, approximating the averaged multiphase flow equations. Their goal is to account for the volume fraction variations inside the shock relations in presence of source terms. In Andrianov and Warnecke [4] and Schwendeman *et al.* [37], the common objective is to get exact solutions for the Riemann problem of the model. The approach is *inverse* in [4] in the sense that the initial left and right states are obtained as function of the intermediate states of the solution. On the contrary, a *direct* iterative approach is used in [37] leading to exact solutions of the Riemann problem for any initial left and right states. Another *direct* approach to construct theoretical solutions is proposed in Castro & Toro [11]. In this work the authors propose to solve the Riemann problem approximately assuming that all the nonlinear characteristic fields are associated with rarefaction waves. Finally, all these (approximate or exact) solutions are used to develop a Godunov-type method. At last, other finite volumes methods have been used. For instance in Gallouët *et al.* [20] (see also Guillemaud [25]), the approximation of the convective terms of the system is based on the Rusanov scheme (Rusanov [35]) and the so-called VFRoe-ncv scheme (Buffard *et al.* [10]), these strategies being adapted to the nonconservative framework. In Munkejord [29] and Karni *et al.* [28], the author use Roe-type schemes.

The outline of the paper is as follows. Section 1 introduces some notations, gives the governing equations of the two-fluid two-pressure model and states its basic properties. Section 2 characterizes the admissible contact discontinuities associated with the coupling wave  $u_I$ . The next two sections are devoted to the relaxation approximation of the two-fluid two-pressure model and follow the same lines. Section 3 thus describes the relaxation system and gives its basic properties whereas section 4 proposes a characterization of the corresponding admissible  $u_I$ -contact discontinuities. At last, section 5 describes the approximate Riemann solver and the relaxation scheme, and section 6 is devoted to numerical experiments.

To conclude this introduction, let us mention that this work falls within the scope of a joint research program on the coupling of multiphase flow models between CEA-Saclay and Laboratoire Jacques-Louis Lions<sup>1</sup> In the short term, the objective of the working group is to couple a two-fluid two-pressure model and a drift-flux model.

## 1. GOVERNING EQUATIONS

In one space dimension, the convective part of the model under consideration in this paper reads:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_1 + u_I \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t \alpha_1 \rho_1 u_1 + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1(\rho_1)) - p_I \partial_x \alpha_1 = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 u_2 + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2(\rho_2)) + p_I \partial_x \alpha_1 = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

It takes the following condensed form:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>See <http://www.ann.jussieu.fr/groupes/cea/>

where  $t$  is the time and  $x$  is the space variable. The unknown vector  $\mathbf{u}$  is defined by

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{with } \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \end{pmatrix},$$

and  $\alpha_1$ ,  $\rho_1$  and  $u_1$  (respectively  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ ,  $\rho_2$  and  $u_2$ ) represent the volume fraction, the density and the velocity of the phase 1 (resp. of the phase 2). This vector is expected to belong to the following natural phase space

$$\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_2 \rho_2 u_2)^t \in \mathbb{R}^5 \text{ such that } 0 < \alpha_k < 1 \text{ and } \rho_k > 0 \text{ for } k = 1, 2\}.$$

The functions  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^5$  and  $\mathbf{c} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{5 \times 5}$  are such that

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1(\rho_1) \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2(\rho_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_I \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ -p_I \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ p_I \partial_x \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

where the pressure laws  $p_k$ ,  $k = 1, 2$  are given smooth functions such that  $p_k(\rho_k) > 0$ ,  $p'_k(\rho_k) > 0$ ,  $p''_k(\rho_k) + \frac{2}{\rho_k} p'_k(\rho_k) > 0$ ,  $\lim_{\rho_k \rightarrow 0} p_k(\rho_k) = 0$  and  $\lim_{\rho_k \rightarrow \infty} p_k(\rho_k) = +\infty$ . The proposed interfacial velocity  $u_I$  and pressure  $p_I$  are

$$u_I = u_2, \quad p_I = p_1(\rho_1), \quad (5)$$

which corresponds to a particular choice of the closures proposed for instance in [20], [25]. Since the fluid is adiabatic, the internal energies  $e_k$ , are defined by

$$de_k(\rho_k, s_k) = -\frac{p_k(\rho_k)}{\rho_k^2} d\rho_k + T ds_k = -\frac{p_k(\rho_k)}{\rho_k^2} d\rho_k,$$

which gives

$$e'_k(\rho_k) = \frac{p_k(\rho_k)}{\rho_k^2}. \quad (6)$$

The total energies  $E_k$  and the enthalpies  $h_k$  of each phase are given by the following relations

$$E_k(\mathbf{u}_k) = \frac{1}{2} u_k^2 + e_k(\rho_k), \quad h_k(\rho_k) = e_k(\rho_k) + \frac{p_k(\rho_k)}{\rho_k}, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

The sound speeds are given by

$$c_k = \sqrt{p'_k(\rho_k)}, \quad k = 1, 2.$$

The following proposition holds.

**Proposition 1.** For all vector  $\mathbf{u}$  in the phase space  $\Omega$ , system (3) admits the following five real eigenvalues

$$\begin{aligned} \lambda_0(\mathbf{u}) &= u_2, \\ \lambda_1(\mathbf{u}) &= u_1 - c_1, & \lambda_2(\mathbf{u}) &= u_1 + c_1, \\ \lambda_3(\mathbf{u}) &= u_2 - c_2, & \lambda_4(\mathbf{u}) &= u_2 + c_2, \end{aligned} \tag{8}$$

and is hyperbolic on  $\Omega$  (the corresponding right eigenvectors span  $\mathbb{R}^5$ ) as soon as  $u_2 \neq u_1 \pm c_1$ . Moreover, the characteristic fields associated with  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,4}$  are genuinely nonlinear, whereas the characteristic field associated with  $\lambda_0$  is linearly degenerate.

**Proof.** This result has already been stated in [29] in the barotropic case (in the case of the full system, see Baer & Nunziato [6]). For the sake of completeness, we briefly recall the main ingredients of its proof. First, classical manipulations on system (3) show that it can be recast in the following quasi-linear form

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \tag{9}$$

where the coefficient matrix  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  is given by

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \chi_1 & c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\chi_2 & 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

with

$$\chi_k = (p_k - p_I) - \rho_k c_k^2, \quad k = 1, 2.$$

Recall that  $u_I = u_2$  in this paper. The eigenvalues (8) are easily obtained using a block decomposition of matrix (10).

Then, provided that  $u_2 \neq u_1 \pm c_1$ , (that is  $\lambda_0 \neq \{\lambda_i\}_{i=1,\dots,4}$ ), the right eigenvector matrix  $\mathbf{R}$  is found to be invertible and given by

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1 u_2}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0)} & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\frac{\chi_2}{(\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_0)} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{\chi_2 u_2}{(\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_0)} & 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

At last, easy calculations give the sort of the characteristic fields associated with  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,4}$  (genuinely nonlinear) and  $\lambda_0$  (linearly degenerate).

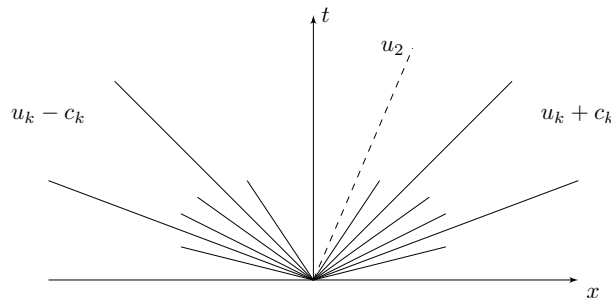


FIGURE 1. General structure in the subsonic regime of the Riemann solution associated with (3).

We note that system (3) is not always hyperbolic. When  $u_2 = u_1 \pm c_1$ , the coefficient matrix  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  is no longer diagonalizable and the system becomes resonant. This is known to generate important difficulties ([32], [23]) but such a situation will not be addressed in the present work. In fact, we are mainly interested in subsonic flows so that the restriction  $u_2 \neq u_1 \pm c_1$  will be always satisfied in practice.

Note also that the characteristic field associated with the wave  $\lambda_0$  between the two phases is linearly degenerate. This is a consequence of the particular choice (5) (see again [20], [25] for more details).

## 2. JUMP RELATIONS ACROSS A CONTACT DISCONTINUITY

Solving the Riemann problem associated with (3) for the following initial data

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_- & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{u}_+ & \text{if } x > 0 \end{cases} \tag{11}$$

turns out to be a difficult question. The main point in this study is the large number of characteristic speeds (five, see the previous proposition) and the possible occurrence of resonance. However, the general structure of a Riemann solution to (3)-(11) is made of shock and rarefaction waves associated with eigenvalues  $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,4}$  and a contact discontinuity associated with  $\lambda_0$ , see Figure 1 in the case of subsonic flows ( $u_k - c_k \ll u_2 \ll u_k + c_k$ ,  $k = 1, 2$ ). From the first equation in system (3), the void fractions  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are constant on the left and on the right of the latter  $\lambda_0$ -discontinuity and in these regions, system (3) consists of two independent Euler systems for the two phases 1 and 2. That is why the  $\lambda_0$ -discontinuity is often called the coupling wave between phases 1 and 2. Note that due to the nonlinearities of the pressure laws  $p_k = p_k(\rho_k)$ ,  $k = 1, 2$ , the intermediate states which separate the five simple waves in such a Riemann solution are difficult to determine, at least in the general situation  $\alpha_{1-} \neq \alpha_{1+}$  (if  $\alpha_{1-} = \alpha_{1+}$ , the intermediate states follow from classical considerations on the two independent Euler systems for the two phases, see for instance [24]).

Therefore, instead of trying to solve the full Riemann problem (3)-(11), in this section we focus our attention on particular solutions made of only two constant states ( $\mathbf{u}_-$  and  $\mathbf{u}_+$ ) separated by a contact discontinuity propagating with characteristic speed  $\lambda_0 = u_{2-} = u_{2+}$ , namely the contact or coupling wave. Recall that this characteristic speed is related to a linearly degenerate field with the consequence that the non conservative product  $u_2 \partial_x \alpha_1$  is well defined in (4) ( $u_2$  remains continuous even if  $\alpha_1$  presents a discontinuity, see also [20]). Then, in order to characterize such (admissible) solutions, four independent jump relations, or equivalently four independent  $\lambda_0$ -Riemann invariants, have to be found. We first remark that system (3) is clearly made of two conservation laws, the other partial differential equations being non conservative. At this stage, no more

than two Rankine-Hugoniot jump relations can thus be obtained. The next statement provides two additional conservation laws satisfied by the smooth solutions of (3), eventually leading to a full set of jump relations.

**Proposition 2.** *Smooth solutions of (3) obey the following two conservation laws*

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_1\rho_1u_1 + \alpha_2\rho_2u_2) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1^2 + \alpha_2\rho_2u_2^2 + \alpha_1p_1(\rho_1) + \alpha_2p_2(\rho_2)) = 0, \\ \partial_tu_1 + \partial_x\left(\frac{1}{2}u_1^2 + h_1(\rho_1)\right) = 0. \end{cases}$$

**Proof.** The proposed equations follow from classical manipulations on system (3) and definitions (6), (7). These are left to the reader.

The above relations hold true in the weak sense for solutions presenting contact discontinuities (see for instance [24]). We thus use the additional Rankine-Hugoniot jump relations provided by these two conservation laws to establish the following theorem.

**Definition 1.** *Let  $\mathbf{u}_-$  and  $\mathbf{u}_+$  be two constant states in  $\Omega$ . These states can be joined by an admissible  $\lambda_0$ -contact discontinuity if and only if the following jump relations hold :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 := u_{2-} = u_{2+}, \\ m := \alpha_{1-}\rho_{1-}(u_{1-} - u_2) = \alpha_{1+}\rho_{1+}(u_{1+} - u_2), \\ mu_{1-} + \alpha_{1-}p_1(\rho_{1-}) + \alpha_{2-}p_2(\rho_{2-}) = mu_{1+} + \alpha_{1+}p_1(\rho_{1+}) + \alpha_{2+}p_2(\rho_{2+}), \\ \frac{m^2}{2\alpha_{1-}^2\rho_{1-}^2} + h_1(\rho_{1-}) = \frac{m^2}{2\alpha_{1+}^2\rho_{1+}^2} + h_1(\rho_{1+}). \end{array} \right. \quad (12)$$

In such a situation, the speed of propagation of the discontinuity is given by  $u_2$ .

Now it is a natural question to wonder whether being given a state  $\mathbf{u}_- \in \Omega$  there exists a state  $\mathbf{u} \in \Omega$  such that (12) holds with  $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}$ . Actually, for the forthcoming developments, we prefer to answer to this question in a slightly different way, namely we show that being given  $\mathbf{u}_- \in \Omega$  and  $\alpha_{1+} \in (0, 1)$ , it is possible to find a state  $\mathbf{u} = (\alpha_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^t \in \Omega$  such that  $\alpha_1 = \alpha_{1+}$  and (12) holds with  $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}$ .

First, we define the *subsonic* set

$$\mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_1) = \left\{ \rho_1 > 0 \quad \text{such that} \quad \left( \frac{m}{\alpha_1\rho_1c_1(\rho_1)} \right)^2 < 1 \right\}$$

In order to justify the terminology *subsonic*, let us underline that for all  $\rho_1 > 0$  the quantity

$$\left( \frac{m}{\alpha_1\rho_1c_1(\rho_1)} \right)$$

can actually be seen as the ratio of the velocity of fluid 1 in the frame of the linearly degenerate wave of speed  $u_2$ :  $u_1 - u_2$  (by definition  $m = \alpha_1\rho_1(u_1 - u_2)$ ) and the sound speed  $c_1(\rho_1)$ . We are now in position to prove the following result.



**Theorem 1.** *Let  $\mathbf{u}_-$  be a constant state in  $\Omega$  and  $\alpha_{1+}$  a constant void fraction in  $(0, 1)$ . Assume that  $\mathbf{u}_-$  is a subsonic state in the sense that  $\rho_{1-}$  belongs to  $\mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$ . Assume moreover that the pressure law  $p_1$  fulfills*

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(\rho_1) > 0, \quad p_1'(\rho_1) > 0, \quad p_1''(\rho_1) > 0 \quad \text{for all } \rho_1 > 0, \\ \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} p_1(\rho_1) = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} p_1'(\rho_1) = 0, \\ \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} p_1(\rho_1) = \lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} p_1'(\rho_1) = +\infty. \end{array} \right.$$

*Then, provided that  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  is sufficiently small, there exists a unique state  $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+}) \in \Omega$  such that  $\rho_{1+} \in \mathcal{S}^{sub}(\mathbf{u}_-, \alpha_{1+})$  and the jump relations (12) are satisfied.*

The proof of this result is classical and is given, for instance, in [19].

It is important to notice that the set of equations (12) is nonlinear, and subject to a proximity assumption on the void fractions to be well posed. The next section shows how to deal easily with the nonlinearities by introducing a relaxation approximation of (3).

### 3. RELAXATION APPROXIMATION

The aim of this section is to propose a suitable relaxation approximation of system (3). For that, we start from the fact that the nonlinearities of (12) are closely related to the nonlinearities of the pressure laws  $\rho_k \mapsto p_k(\rho_k)$ . In the spirit of [26], [16], [12], we then consider an enlarged system with two additional scalar unknown quantities associated with two linearizations  $\Pi_k$  of the pressure laws  $p_k$ . The point is to modify the pressure laws in the convective part of (3) in order to get a quasilinear enlarged system, and to move their main nonlinearities in a stiff relaxation term. This relaxation procedure is based on the idea that solutions of the original system (3) are formally recovered as the limit of the solutions of the proposed enlarged system with relaxation source term in the regime of an infinite relaxation coefficient (see for instance [13]).

As a relaxation approximation of (3), we propose the following system of balance laws :

$$\partial_t \mathbf{v}^\varepsilon + \partial_x \mathbf{g}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) + \mathbf{d}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \partial_x \mathbf{v}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{R}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

where, by omitting the superscripts  $\varepsilon$  to ease notations, the unknown vector reads

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{with } \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \end{pmatrix},$$

whereas the functions  $\mathbf{g}$  and  $\mathbf{d}$  are such that

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \Pi_1 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \Pi_2 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2 u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_I \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ -\Pi_I \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ \Pi_I \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

The relaxation term  $\mathcal{R}(\mathbf{v})$  is defined by

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \rho_1 (\tau_1 - \mathcal{T}_1) \\ \alpha_2 \rho_2 (\tau_2 - \mathcal{T}_2) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Here,  $\mathcal{T}_1$  and  $\Pi_1$  (respectively  $\mathcal{T}_2$  and  $\Pi_2$ ) can be understood as relaxations associated with the specific volume  $\tau_1 = 1/\rho_1$  (respectively  $\tau_2 = 1/\rho_2$ ) and the pressure  $p_1$  (respectively  $p_2$ ), and we set

$$\Pi_k = p_k(1/\mathcal{T}_k) + a_k^2(\mathcal{T}_k - \tau_k), \quad k = 1, 2,$$

for some constants  $a_1$  and  $a_2$  precised just below. These relaxation quantities  $\mathcal{T}_k$  and  $\Pi_k$  are expected to converge towards the corresponding equilibrium ones  $\tau_k$  and  $p_k$  in the regime of an infinite relaxation rate  $\lambda$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). However, in order to prevent the relaxation system (13) from instabilities in the regime of large values of  $\lambda$  ( $\lambda \gg 1$ ), the free parameters  $a_k$  must be such that

$$a_k > \rho_k c_k(\rho_k), \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

for all the  $\rho_k$  under consideration. This condition is the so-called Whitham condition (see for instance [12], [9] and the references therein). We also refer the reader to [7], [8] for another relaxation approximation of system (3). Of course, the proposed interfacial velocity  $u_I$  and pressure  $\Pi_I$  are naturally defined when setting

$$u_I = u_2, \quad \Pi_I = \Pi_1,$$

in perfect analogy with the choice (5) for system (3).

The main interest of this relaxation system lies in the linear degeneracy property of its characteristic fields, unlike system (3), see Proposition 1. More precisely, the following statement holds.

**Proposition 3.** *For all vector  $\mathbf{v}$  in the phase space  $\Omega^r$  defined by*

$$\Omega^r = \{(\alpha_1, \alpha_1\rho_1, \alpha_1\rho_1u_1, \alpha_2\rho_2, \alpha_2\rho_2u_2, \alpha_1\rho_1\mathcal{T}_1, \alpha_2\rho_2\mathcal{T}_2)^t \in \mathbb{R}^7 \text{ such that } 0 < \alpha_k < 1 \text{ and } \rho_k > 0 \text{ and } \mathcal{T}_k > 0 \text{ for } k = 1, 2\},$$

the first order system extracted from (13), namely

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{v}) + \mathbf{d}(\mathbf{v})\partial_x \mathbf{v} = 0, \tag{17}$$

admits the following six real eigenvalues

$$\begin{aligned} \lambda_0^r(\mathbf{v}) &= u_2, \\ \lambda_1^r(\mathbf{v}) &= u_1 - a_1\tau_1, & \lambda_2^r(\mathbf{v}) &= u_1 + a_1\tau_1, \\ \lambda_3^r(\mathbf{v}) &= u_2 - a_2\tau_2, & \lambda_4^r(\mathbf{v}) &= u_2 + a_2\tau_2, \\ \lambda_5^r(\mathbf{v}) &= u_1, \end{aligned} \tag{18}$$

and is hyperbolic (the corresponding right eigenvectors span  $\mathbb{R}^7$ ) over  $\Omega^r$  as soon as  $u_2 \neq u_1 \pm a_1\tau_1$ . Moreover, all the characteristic fields associated with  $\{\lambda_i^r\}_{i=1,\dots,5}$  are linearly degenerate.

**Proof.** We only propose a sketch of the proof of this result which follows from cumbersome but not difficult calculations.

First, and unlike Proposition 1, we found more pleasant to recast the first order system extracted from (13) when considering the new vector  $\mathbf{w}$  defined by  $\mathbf{w} = (\alpha_1, \rho_1, u_1, \rho_2, u_2, \Pi_1, \Pi_2)$  as a main unknown. We then arrive at

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{B}(\mathbf{w})\partial_x \mathbf{w} = 0,$$

with

$$\mathbf{B}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_1 u_1 - \rho_1 u_2}{\alpha_1} & u_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Pi_1 - \Pi_I}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & u_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 \\ \frac{\rho_2 u_2 - \rho_2 u_2}{\alpha_2} & 0 & 0 & u_2 & \rho_2 & 0 & 0 \\ \frac{\Pi_2 - \Pi_I}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & \frac{1}{\rho_2} \\ \frac{a_1^2(u_1 - u_2)}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & \frac{a_1^2}{\rho_1} & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ \frac{a_2^2(u_2 - u_2)}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2^2}{\rho_2} & 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Easy calculations allow to obtain the characteristic polynomial  $\mathcal{P}(\mu)$  of this square matrix :

$$\mathcal{P}(\mu) = (u_1 - \mu)(u_2 - \mu)^2 \left( (u_2 - \mu)^2 - \frac{a_2^2}{\rho_2^2} \right) \left( (u_1 - \mu)^2 - \frac{a_1^2}{\rho_1^2} \right),$$

and then the expected eigenvalues  $\lambda_k^r$ ,  $k = 0, \dots, 5$  in (18). Note that the multiplicity of  $\lambda_0^r$  is now two. Provided that  $u_2 \neq \lambda_k^r$ ,  $k = 1, 2$  the following matrix of the associated right eigenvectors is well-defined and invertible

$$\mathbf{R}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_1(\lambda_5^r - \lambda_k^0)^2}{\alpha_1(\lambda_0^r - \lambda_1^r)(\lambda_0^r - \lambda_2^r)} & 0 & -\frac{1}{a_1\tau_1^2} & \frac{1}{a_1\tau_1^2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_1^2\tau_1^2(\lambda_5^r - \lambda_k^0)}{\alpha_1(\lambda_0^r - \lambda_1^r)(\lambda_0^r - \lambda_2^r)} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a_2\tau_2^2} & \frac{1}{a_2\tau_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_1^2(\lambda_5^r - \lambda_k^0)^2}{\alpha_1\rho_1(\lambda_0^r - \lambda_1^r)(\lambda_0^r - \lambda_2^r)} & 0 & -a_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

It is then a classical matter to see that all the characteristic fields are in this case linearly degenerate.

We note that the convective system associated with (13) admits one more characteristic speed  $u_1$  in comparison with (3) (see Proposition 1). This one is clearly associated with the proposed equation for  $\mathcal{T}_1$ . In addition, the characteristic speed  $u_2$  is of course still present but now gets a second order multiplicity due to the equation for  $\mathcal{T}_2$ . The other speeds  $\lambda_k^r$ ,  $k = 1, \dots, 4$  are nothing but linearizations of  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  ( $a_1$  and  $a_2$  have the dimension of two Lagrangian sound speeds).

#### 4. JUMP RELATIONS ACROSS A CONTACT DISCONTINUITY FOR THE RELAXATION SYSTEM

In spite of the fact that all the characteristic fields associated with (17) are linearly degenerate, it turns out that the corresponding Riemann problem is rather involved, as shown in [19]. Generally speaking, the consequence is that the Riemann solution associated with (17) is not given by an explicit formula.

As in section 2, our objective here is then to characterize the admissible contact discontinuities associated with  $\lambda_0 = u_2$  and separating two constant states  $\mathbf{v}_-$  and  $\mathbf{v}_+$  in  $\Omega^r$ . We follow the same procedure. Namely, we first complete the four conservation laws already present in (13) by deriving two additional partial differential equations satisfied by the smooth solutions of system (13). Then, by means of the usual Rankine-Hugoniot jump relations, we propose a full set of conditions for such a solution to be admissible.

**Proposition 4.** *Smooth solutions of (17) obey the following two partial differential equations*

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_1\rho_1u_1 + \alpha_2\rho_2u_2) + \partial_x(\alpha_1\rho_1u_1^2 + \alpha_2\rho_2u_2^2 + \alpha_1\Pi_1 + \alpha_2\Pi_2) = 0, \\ \partial_tu_1 + \partial_x\frac{u_1^2 - a_1^2\tau_1^2}{2} + \tau_1\partial_xI_1 = 0, \end{cases}$$

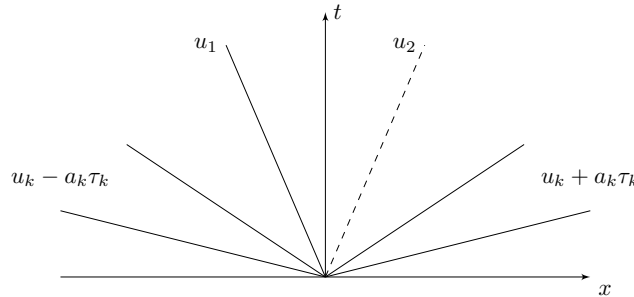


FIGURE 2. General structure in the subsonic regime of the Riemann solution associated with (17).

where we have set  $I_1 = p_1(1/\mathcal{T}_1) + a_1^2 \mathcal{T}_1$ .

**Proof.** The proposed equations follow from classical manipulations on system (17).

We first notice that among these two additional equations, only one is under conservation form. However, we will see in the following statement that  $\mathcal{T}_1$  (and thus  $I_1$ ) is seen to be constant across the contact associated with  $\lambda_0$  (in the absence of resonance with  $u_1$ ). Therefore the non conservative product  $\tau_1 \partial_x I_1$  cancels and the second equation actually provides an additional conservation law. We then easily get the following definition, comparable with Definition 1.

**Definition 2.** Let  $\mathbf{v}_-$  and  $\mathbf{v}_+$  be two constant states in  $\Omega^r$ . These states can be joined by an admissible  $\lambda_0$  contact discontinuity if and only if the following jump relations hold :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 := u_{2-} = u_{2+}, \\ m := \alpha_{1-} \rho_{1-} (u_{1-} - u_2) = \alpha_{1+} \rho_{1+} (u_{1+} - u_2), \\ m u_{1-} + \alpha_{1-} \Pi_{1-} + \alpha_{2-} \Pi_{2-} = m u_{1+} + \alpha_{1+} \Pi_{1+} + \alpha_{2+} \Pi_{2+}, \\ m \mathcal{T}_{1-} = m \mathcal{T}_{1+}, \\ \frac{m^2}{2\alpha_{1-}^2 \rho_{1-}^2} - a_1^2 \frac{\tau_{1-}^2}{2} = \frac{m^2}{2\alpha_{1+}^2 \rho_{1+}^2} - a_1^2 \frac{\tau_{1+}^2}{2}. \end{array} \right. \quad (19)$$

In such a situation, the speed of propagation of the discontinuity is given by  $u_2$ .

It is worth noticing that the first two equations in (19) and (12) are identical, while the third are similar in the sense that  $\Pi_1$  and  $\Pi_2$  play the part of linearized pressure laws. On the contrary, and thanks to the proposed relaxation approximation, the last equation in (19) is significantly simplified (*i.e.* less non linear) in comparison to the last equation in (12). We seek now to obtain a result analogous to Theorem 1.

**Theorem 2.** Let  $\mathbf{v}_-$  be a constant state in  $\Omega^r$  and  $\alpha_{1+}$  a constant void fraction in  $(0, 1)$ . Assume that  $\mathbf{v}_-$  is a subsonic state in the sense that

$$\left( \frac{m}{\alpha_{1+} a_1} \right)^2 < 1. \quad (20)$$

Then, provided that  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  is sufficiently small, there exists a unique subsonic point  $\rho_{1+}$  such that the last equation in (19) holds true. It is explicitly given by

$$\rho_{1+} = \sqrt{\frac{\frac{m}{\alpha_{1+}a_1} - 1}{\frac{m}{\alpha_{1-}a_1} - 1}} \rho_{1-}. \quad (21)$$

Moreover, if we get for any given  $\mathcal{T}_{2+}$

$$-m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1-}\Pi_{1-} - \alpha_{1+}\Pi_{1+}) + \alpha_{2-}\Pi_{2-} - \alpha_{2+}I_{2+} < 0, \quad (22)$$

with  $I_2 = p_2(1/\mathcal{T}_2) + a_2\mathcal{T}_2$ , and  $u_{1+}$  defined by the second equation in (19), then we can define uniquely  $\rho_{2+} > 0$  such that the third equation in (19) holds true. It is explicitly given by

$$\tau_{2+} = \frac{1}{\rho_{2+}} = -\frac{-m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1-}\Pi_{1-} - \alpha_{1+}\Pi_{1+}) + \alpha_{2-}\Pi_{2-} - \alpha_{2+}I_{2+}}{\alpha_{2+}a_2^2} \quad (23)$$

and we thus can find a unique state  $\mathbf{v}_+ = \mathbf{v}_+(\mathbf{v}_-, \alpha_{1+}) \in \Omega^r$  so that the jump relations (19) are satisfied.

**Proof.** This theorem is not difficult to establish thanks to the linearized formulas (19). First of all, the state  $\mathbf{v}_-$  is assumed to be subsonic in the sense of inequality (20), which is equivalent to

$$-1 < \frac{m}{\alpha_{1+}a_1} < 1.$$

Provided that  $|\alpha_{1+} - \alpha_{1-}|$  is sufficiently small, we also have

$$-1 < \frac{m}{\alpha_{1-}a_1} < 1.$$

Then, it is easily checked that the unique solution  $\rho_{1+} > 0$  of the last equation in (19) is given by the *well-defined* formula (21). Defining  $u_2 = u_{2+} = u_{2-}$  and  $u_{1+} = u_2 + m/\alpha_{1+}\rho_{1+}$  according to the first two equations in (19), it is easy to see that under (22) the unique solution  $\rho_{2+} > 0$  of the third equation in (19) is explicitly given by (23).

**Remark 1.** In the context of the proposed relaxation approximation,  $\rho_{2+}$  is now explicitly given.

## 5. NUMERICAL APPROXIMATION

In this section, we propose to derive a numerical scheme for approximating the weak solutions of the following initial value problem associated with system (3) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \end{cases} \quad (24)$$

Of course, the proposed relaxation system (13) is going to be used. Let us first introduce some notations. In what follows,  $\Delta t$  and  $\Delta x$  are respectively the time and space steps that we assume to be constant for simplicity. We also set  $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  and define both the mesh interfaces  $x_{j+1/2} = j\Delta x$  for  $j \in \mathbb{Z}$ , and the intermediate times  $t^n = n\Delta t$  for  $n \in \mathbb{N}$ . As usual in the context of finite volume methods, the approximate solution  $x \mapsto \mathbf{u}_\nu(x, t^n)$  is assumed to be constant at each time  $t^n$  in cells  $\mathcal{C}_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  and the corresponding values are called  $\mathbf{u}_j^n$ . Therefore, we have

$$\mathbf{u}_\nu(x, t^n) = \mathbf{u}_j^n \quad \text{for all } x \in \mathcal{C}_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

At time  $t = 0$ , we use the initial condition  $\mathbf{u}_0$  provided in (24) to define the sequence  $(\mathbf{u}_j^0)$  as follows :

$$\mathbf{u}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}_0(x) dx, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

### 5.1. The relaxation method

Let us now briefly describe the two-step splitting technique associated with the relaxation system (13) in order to define  $\mathbf{u}_\nu(\cdot, t^{n+1})$  from  $\mathbf{u}_\nu(\cdot, t^n)$ . Such a strategy is very classical in the context of relaxation methods and proposes to first treat the convective part of (13), and then to take into account the relaxation source term. We first introduce the piecewise constant approximate solution  $x \mapsto \mathbf{v}_\nu(x, t^n)$  at each time  $t^n$  of system (13)

$$\mathbf{v}_j^n = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j^n \\ (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1)_j^n \\ (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2)_j^n \end{pmatrix}.$$

At time  $t = 0$ , function  $x \mapsto \mathbf{v}_\nu(x, t^0)$  is set at equilibrium, which means

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1)_j^0 = (\alpha_1)_j^0 \quad \text{and} \quad (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2)_j^0 = (\alpha_2)_j^0.$$

The two steps are defined as follows.

*Step 1 : Evolution in time ( $t^n \rightarrow t^{n+1-}$ )*

In this first step, the following Cauchy problem is numerically solved for small times  $t \in [0, \Delta t]$  :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{v}) + \mathbf{d}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_\nu(x, t^n). \end{cases} \quad (25)$$

Since  $x \mapsto \mathbf{v}_\nu(x, t^n)$  is piecewise constant, the exact solution of (25) is theoretically obtained by glueing together the solutions of the Riemann problems set at each interface  $x_{j+1/2}$  provided that  $\Delta t$  is such that

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\mathbf{v}} \{ |\lambda_i^r(\mathbf{v})|, \text{quadi} = 0, \dots, 5 \} \leq \frac{1}{2}, \quad (26)$$

for all the  $\mathbf{v}$  under consideration. More precisely

$$\mathbf{v}_\nu(x, t) = \mathbf{v}_r\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{t}; \mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1}^n\right) \quad \text{for all } (x, t) \in [x_j, x_{j+1}] \times [0, \Delta t], \quad (27)$$

where  $(x, t) \mapsto \mathbf{v}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  denotes the exact self-similar solution of the Riemann problem

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{v}) + \mathbf{d}(\mathbf{v}) \partial_x \mathbf{v} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^{+,*} \\ \mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

for  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  given in the phase space  $\Omega^r$ .

Note that these exact Riemann solutions are difficult to calculate as already explained at the beginning of Section 4. Therefore some approximate Riemann solutions  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  of (28) are expected to be

used in practice, giving rise to a natural approximate solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_\nu(x, t)$  of (25). This issue is going to be discussed in detail in the next subsection.

In order to define a piecewise constant approximate solution on each cell  $\mathcal{C}_j$  at time  $t^{n+1-}$ , we then propose the following classical averaging procedure of  $x \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_\nu(x, \Delta t)$  :

$$\mathbf{v}_j^{n+1-} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j^{n+1-} \\ (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1)_j^{n+1-} \\ (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2)_j^{n+1-} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{v}}_\nu(x, \Delta t) dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (29)$$

*Step 2 : Relaxation ( $t^{n+1-} \rightarrow t^{n+1}$ )*

In this second step, we propose to solve at time  $t^n + \Delta t$  the ordinary differential equations

$$\partial_t \mathbf{v}^\lambda = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}^\lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

in the asymptotic regime  $\lambda \rightarrow \infty$ . As initial condition, we take the function  $x \mapsto \mathbf{v}_\nu(x, t^{n+1-})$  obtained at the end of the first step and defined by

$$\mathbf{v}_\nu(x, t^{n+1-}) = \mathbf{v}_j^{n+1-} \quad \text{for all } x \in \mathcal{C}_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Using the definition (15) of the relaxation source term  $\mathcal{R}$ , this clearly amounts to set

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j^{n+1} \\ (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1)_j^{n+1} \\ (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2)_j^{n+1} \end{pmatrix},$$

with  $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^{n+1-}$  and  $(\mathcal{T}_k)_j^{n+1} = (\tau_k)_j^{n+1}$  *i.e.*

$$(\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1)_j^{n+1} = (\alpha_1)_j^{n+1-}, \quad (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2)_j^{n+1} = (\alpha_2)_j^{n+1-}.$$

This completes the description of the two-step relaxation method.

## 5.2. The approximate Riemann solution $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$

Our objective in this section is to detail the Riemann solver  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  associated with (28) for any given  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  in the phase space  $\Omega^r$ , and implicitly used in the update formula (29). According to the previous subsection, the initial states  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  are assumed to be at equilibrium, *i.e.* such that

$$\mathbf{v}_{L,R} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{L,R} \\ (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1)_{L,R} \\ (\alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2)_{L,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{L,R} \\ \alpha_{1L,R} \\ \alpha_{2L,R} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

with  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  in  $\Omega$ .

As already discussed in Section 4, the exact Riemann solution to (28) is not explicitly known given two different void fractions  $\alpha_{1L}$  and  $\alpha_{1R}$ . To lessen computational costs in the numerical procedure, we then decide



not to compute it exactly but to use a suitable approximate Riemann solution. In fact, the proposed approximate Riemann solver turns out to be an exact Riemann solver but associated with a simpler system.

Let us briefly discuss the derivation of such a system. We have observed in the previous paragraph that (28) is easy to deal with when  $\alpha_{1L} = \alpha_{1R}$ . The reason is that in this very particular case, the non conservative product  $\Pi_I \partial_x \alpha_1$  is known *a priori* (is zero in fact) and, in some sense, no longer enters the resolution of the Riemann problem. Recall that this nonconservative product acts on the contact only, while its mass  $\langle \Pi_I \partial_x \alpha_1 \rangle$  represents (to within a sign) the jump of  $\alpha_2 \Pi_2$  between the right and left states of the discontinuity<sup>2</sup>. Indeed, if  $u_2^*$  denotes the speed of propagation of the contact, the Rankine-Hugoniot jump relations applied to the fifth equation in (13) (with  $\lambda = 0$ ) give

$$-u_2^*[\alpha_2 \rho_2 u_2] + [\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \Pi_2] + \langle \Pi_I \partial_x \alpha_1 \rangle = 0,$$

that is (recall that  $u_2$  is continuous across the contact and equals  $u_2^*$ )

$$\langle \Pi_I \partial_x \alpha_1 \rangle = -[\alpha_2 \Pi_2].$$

The value  $[\alpha_2 \Pi_2]$  of this jump depends on the left and right initial states  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  but note that by the equilibrium property (31), it can also be understood as a given function of  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$ . We thus have :

$$\Pi_I \partial_x \alpha_1 = -[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \delta_{x-u_2^* t}.$$

Following the same idea, we propose not to find the exact value  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ , *i.e.* not to consider it as an unknown, but to guess it *a priori* in order to facilitate the resolution of the Riemann problem. In other words, we replace the actual value  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  with an estimation  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  of the jump of  $\alpha_2 \Pi_2$  across the contact. This degree of freedom may be put in touch with the relative flexibility in the discretization of nonconservative products associated with linearly degenerate characteristic fields (see for instance [25]).

We are thus led to introduce the following system :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \partial_x \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{v}}) = -\tilde{\mathbf{d}}(\tilde{\mathbf{v}}) \partial_x \tilde{\mathbf{v}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

with

$$\tilde{\mathbf{d}}(\tilde{\mathbf{v}}) \partial_x \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} u_I \partial_x \alpha_1 \\ 0 \\ +\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \delta_{x-u_2^* t} \\ 0 \\ -\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \delta_{x-u_2^* t} \\ -m(\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L}) \delta_{x-u_2^* t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>The jump of a quantity  $X$  between the right and left states of a discontinuity is noted  $[X]$  in the following.

The vectors  $\tilde{\mathbf{v}}$  and  $\mathbf{g}$  are kept unchanged, namely

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \Pi_1 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \Pi_2 \\ \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \mathcal{T}_2 u_2 \end{pmatrix}.$$

On the contrary, we remark from the sixth equation in (32) that  $\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1$  no longer evolves according to the original conservation law

$$\partial_t \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 + \partial_x \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1 = 0$$

across the contact, which would mean  $m[\mathcal{T}_1] = 0$  using the notations of Definition 2. If the relative mass flux  $m \neq 0$ , this would imply the continuity of  $\mathcal{T}_1$  ( $[\mathcal{T}_1] = 0$ ). Instead, we now impose

$$\partial_t \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 + \partial_x \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1 = m(\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L}) \delta_{x-u_2^* t}.$$

We thus have  $[\mathcal{T}_1] = (\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L})$  across the contact. The reason of such a modification is motivated by the validity of the accuracy property stated in Proposition 5 and Theorem 4 below. Additional explanations will be given in Remark 5 (Subsection 5.3). Another objective of this term is to make trivial the  $\lambda_5^+$ -discontinuity in the resolution of the Riemann problem (see Theorem 3 below). Recall indeed that the eigenvalue  $\lambda_5^+ = u_1$  is not present in the equilibrium system (3) (see Proposition 1).

**Remark 2.** *The eigenvalues of system (32) are the same than the ones of system (17). Moreover, all its characteristic fields are linearly degenerate.*

*On the  $\lambda_0$ -contact discontinuity, the first two relations in (19) still hold <sup>3</sup>:*

$$u_2 := u_{2-} = u_{2+},$$

$$m := \alpha_{1-} \rho_{1-} (u_{1-} - u_2) = \alpha_{1+} \rho_{1+} (u_{1+} - u_2).$$

Therefore, the parameter  $m$  is well defined in  $\tilde{\mathbf{d}}(\tilde{\mathbf{v}})$ .

For this section to be completed, it remains now to give both the definition of  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  and the Riemann solution associated with (32). This is the objective of the next two paragraphs.

**Estimation of  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  across the contact.** This part is devoted to the definition of  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ . Recall that this quantity aims at providing a relevant approximation of the actual jump  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  across the contact in the solution of (28). For the sake of accuracy, we would like this approximate value to be exact when  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  can actually be joined by an admissible contact, *i.e.* when  $\mathbf{u}_- = \mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_R$  are such that jump relations (12) associated with the equilibrium system (3) are satisfied. With this in mind, we first propose to define from  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  two reconstructed states  $\bar{\mathbf{u}}_L$  and  $\bar{\mathbf{u}}_R$  such that

<sup>3</sup>The subscripts  $-$  and  $+$  refer to the states on each side of the discontinuity.

$\bar{\mathbf{u}}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  on the one hand and  $\mathbf{u}_L$  and  $\bar{\mathbf{u}}_R$  on the other hand can be joined by an admissible contact. In other words, and using the proposed notation in Theorem 1, we set

$$\bar{\mathbf{u}}_L = \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_R, \alpha_{1L}) \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{u}}_R = \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_L, \alpha_{1R}). \tag{33}$$

At this stage, these two admissible contact discontinuities provide us with two possible choices of  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ , namely  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = (\alpha_2 \Pi_2)(\bar{\mathbf{u}}_R) - (\alpha_2 \Pi_2)(\mathbf{u}_L)$  and  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = (\alpha_2 \Pi_2)(\mathbf{u}_R) - (\alpha_2 \Pi_2)(\bar{\mathbf{u}}_L)$ . Of course, we note that if  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  are joined by an admissible contact, we have  $\bar{\mathbf{u}}_L = \mathbf{u}_L$  and  $\bar{\mathbf{u}}_R = \mathbf{u}_R$  so that both possibilities coincide with the exact jump  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ . In the general case, we propose the following natural choice

$$\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \begin{cases} (\alpha_2 \Pi_2)(\bar{\mathbf{u}}_R) - (\alpha_2 \Pi_2)(\mathbf{u}_L) & \text{if } d(\mathbf{u}_R, \bar{\mathbf{u}}_R) \leq d(\bar{\mathbf{u}}_L, \mathbf{u}_L), \\ (\alpha_2 \Pi_2)(\mathbf{u}_R) - (\alpha_2 \Pi_2)(\bar{\mathbf{u}}_L) & \text{if } d(\mathbf{u}_R, \bar{\mathbf{u}}_R) > d(\bar{\mathbf{u}}_L, \mathbf{u}_L), \end{cases}$$

where  $d(., .)$  denotes the Euclidean distance function. Actually this choice criterion doesn't seem to play an important role: in the numerical tests we performed, no difference can be spotted if one estimate is preferred to the other (see Fig 9).

**Remark 3.** *In this section  $\alpha_{1L} \neq \alpha_{1R}$  is assumed. It is however worth noticing from a continuity point of view that if  $\alpha_{1L} = \alpha_{1R}$  we have by definition  $\bar{\mathbf{u}}_L = \mathbf{u}_R$  and  $\bar{\mathbf{u}}_R = \mathbf{u}_L$ , and then  $\overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = 0$  as expected.*

**The Riemann solution**  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ . We now give the Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  of

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \partial_x \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{v}}) = -\tilde{\mathbf{d}}(\tilde{\mathbf{v}}) \partial_x \tilde{\mathbf{v}}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^{+,*} \\ \mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{34}$$

with  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  in the phase space  $\Omega^r$ .

Before stating the corresponding theorem, let us briefly discuss this issue and more precisely the proposed admissibility criterion for defining the contact discontinuities. Recall that, by Definition 2 any admissible contact discontinuity of the original relaxation system (17) (with  $\lambda = 0$ ) should satisfy the five jump relations (19). We now deal with the new system (32) that proposes to impose two relations across these discontinuities, namely the jumps of  $\mathcal{T}_1$  and  $\alpha_2 \Pi_2$  according to

$$m[\mathcal{T}_1] = m(\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L}) \quad \text{and} \quad [\alpha_2 \Pi_2] = \overline{[\alpha_2 \Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R).$$

These relations modify the definition of an admissible contact (19). We recall that the first two equations in (19) still hold. We suggest to keep on imposing the conservation of momentum and then we define:

**Definition 3.** *A  $\lambda_0$  contact discontinuity of the modified relaxation system (32), separating two constant states  $\mathbf{v}_-$  and  $\mathbf{v}_+$  such that  $\alpha_{1-} \neq \alpha_{1+}$  and propagating with speed  $u_2$ , is said to be admissible if and only if the*

following jump relations hold:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 := u_{2-} = u_{2+}, \\ m := \alpha_{1-}\rho_{1-}(u_{1-} - u_2) = \alpha_{1+}\rho_{1+}(u_{1+} - u_2), \\ mu_{1-} + \alpha_{1-}\Pi_{1-} + \alpha_{2-}\Pi_{2-} = mu_{1+} + \alpha_{1+}\Pi_{1+} + \alpha_{2+}\Pi_{2+}, \\ m(\mathcal{T}_{1+} - \mathcal{T}_{1-}) = m(\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L}), \\ \alpha_{2+}\Pi_{2+} - \alpha_{2-}\Pi_{2-} = \overline{[\alpha_2\Pi_2]}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R). \end{array} \right. \quad (35)$$

Before stating the main result of this part, we need to precise how to chose the two constants  $a_1$  and  $a_2$ .

**Theorem 3.** Let  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  be two constant states in  $\Omega^r$  at equilibrium (i.e. (31) holds true) and such that  $\alpha_{1L} \neq \alpha_{1R}$ . Moreover, let the free parameters  $a_k$ ,  $k = 1, 2$  to be chosen large enough to satisfy the following inequalities on one hand

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^r(\mathbf{v}_L) < u_{1-}, \quad u_2 < \lambda_2^r(\mathbf{v}_R), \\ \lambda_1^r(\mathbf{v}_L) < u_2, \quad u_{1+} < \lambda_2^r(\mathbf{v}_R), \\ \lambda_3^r(\mathbf{v}_L) < u_2 < \lambda_4^r(\mathbf{v}_R) \end{array} \right. \quad (36)$$

and the following simplified Whitham condition on the other hand

$$a_k(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) > \max(\rho_{kL}c_k(\rho_{kL}), \rho_{kR}c_k(\rho_{kR})), \quad k = 1, 2. \quad (37)$$

Then, the self-similar weak solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  of (34) that presents an admissible  $\lambda_0$  contact discontinuity in the sense of Definition 3 is such that

$$\tilde{\mathbf{v}}_r(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \alpha_1\rho_1\mathcal{T}_1 \\ \alpha_2\rho_2\mathcal{T}_2 \end{pmatrix} (x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R),$$

where first, the main functions  $(x, t) \mapsto \mathbf{u}_1(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  and  $(x, t) \mapsto \mathbf{u}_2(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  exhibit two intermediate constant states :

$$\mathbf{u}_1(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{cases} \mathbf{u}_{1L} & \text{if } \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{v}_L), \\ \mathbf{u}_{1-} & \text{if } \lambda_1^r(\mathbf{v}_L) < \frac{x}{t} < u_2, \\ \mathbf{u}_{1+} & \text{if } u_2 < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{v}_R), \\ \mathbf{u}_{1R} & \text{if } \frac{x}{t} > \lambda_2^r(\mathbf{v}_R), \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_2(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{cases} \mathbf{u}_{2L} & \text{if } \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{v}_L), \\ \mathbf{u}_{2-} & \text{if } \lambda_3^r(\mathbf{v}_L) < \frac{x}{t} < u_2, \\ \mathbf{u}_{2+} & \text{if } u_2 < \frac{x}{t} < \lambda_4^r(\mathbf{v}_R), \\ \mathbf{u}_{2R} & \text{if } \frac{x}{t} > \lambda_4^r(\mathbf{v}_R), \end{cases}$$

and then,

$$X(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{cases} X_L & \text{if } x < u_2t, \\ X_R & \text{if } x > u_2t, \end{cases} \quad \text{for } X = \alpha_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2.$$

In these formulas,  $u_2$  denotes the speed of propagation of the contact associated with  $\lambda_0^r$  and satisfies

$$u_2 = u_{2-} = u_{2+}.$$

Defining  $u_*$  and  $(\alpha u)_*$  by

$$\begin{cases} u_* = \frac{1}{2}(u_{1L} + u_{1R}) - \frac{1}{2a_1}(\Pi_{1R} - \Pi_{1L}), \\ (\alpha u)_* = \frac{1}{2}(\alpha_{1L}u_{1L} + \alpha_{1R}u_{1R}) - \frac{1}{2a_1}(\alpha_{1R}\Pi_{1R} - \alpha_{1L}\Pi_{1L}), \end{cases}$$

the four intermediate states

$$\mathbf{u}_{1\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 u_{1\pm} \end{pmatrix}_{\pm}, \quad \mathbf{u}_{2\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 u_{2\pm} \end{pmatrix}_{\pm},$$

are characterized by

$$\begin{cases} u_2 = \frac{\alpha_{2L}\lambda_3^r(\mathbf{v}_L) + \alpha_{2R}\lambda_4^r(\mathbf{v}_R)}{\alpha_{2L} + \alpha_{2R}} + \frac{\alpha_{2L}I_{2L} - \alpha_{2R}I_{2R}}{a_2(\alpha_{2L} + \alpha_{2R})} + \frac{[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)}{a_2(\alpha_{2L} + \alpha_{2R})} \\ \tau_{2-} := \frac{1}{\rho_{2-}} = \frac{u_2 - \lambda_3^r(\mathbf{v}_L)}{a_2}, \quad \tau_{2+} := \frac{1}{\rho_{2+}} = \frac{\lambda_4^r(\mathbf{v}_R) - u_2}{a_2}, \end{cases}$$

$$I_{2L} = p_2(1/\mathcal{T}_{2L}) + a_2^2 \mathcal{T}_{2L}, \quad I_{2R} = p_2(1/\mathcal{T}_{2R}) + a_2^2 \mathcal{T}_{2R},$$

and, setting

$$\begin{aligned} m &:= \alpha_{1L}\rho_{1-}(u_{1-} - u_2) = \alpha_{1R}\rho_{1+}(u_{1+} - u_2) \\ &= \frac{-[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) + a_1(2(\alpha u)_* - u_2(\alpha_{1L} + \alpha_{1R}))}{\lambda_2^r(\mathbf{v}_R) - \lambda_1^r(\mathbf{v}_L)}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_{1-} = \frac{-a_1[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) - \mathcal{M}_{\Pi} + 2a_1(a_1(\alpha u)_* - mu_*)}{2a_1(a_1\alpha_{1L} - m)}, \quad \tau_{1-} = \frac{u_{1-} - \lambda_1^r(\mathbf{v}_L)}{a_1}, \\ u_{1+} = \frac{-a_1[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) + \mathcal{M}_{\Pi} + 2a_1(a_1(\alpha u)_* + mu_*)}{2a_1(a_1\alpha_{1R} + m)}, \quad \tau_{1+} = \frac{\lambda_2^r(\mathbf{v}_R) - u_{1+}}{a_1}, \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{\Pi} = m(I_{1R} - I_{1L}) + a_1^2 u_2(\alpha_{1R} - \alpha_{1L}),$$

$$I_{1L} = p_1(1/\mathcal{T}_{1L}) + a_1^2 \mathcal{T}_{1L}, \quad I_{1R} = p_1(1/\mathcal{T}_{1R}) + a_1^2 \mathcal{T}_{1R}.$$

The proof of this result is given in Appendix 1.

**Remark 4.** We underline that, by definition of the phase space  $\Omega^r$ , the volume fraction  $\alpha_1 \neq \{0, 1\}$ . Moreover, since the free parameters  $a_k$ ,  $k = 1, 2$  are chosen to guarantee that (36) hold, we get that  $\rho_{1-}$ ,  $\rho_{2-}$ ,  $\rho_{1+}$  and  $\rho_{2+}$  are necessarily positive.

### 5.3. Stability and accuracy properties of the relaxation method

The aim of this section is to give some interesting accuracy and stability properties of the proposed relaxation method. Their validity naturally relies on similar properties satisfied by the approximate Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ , and allow to validate our approach from a theoretical point of view. The next section will be devoted to numerical experiments.

We begin by collecting the main properties of the approximate Riemann solution.

**Proposition 5. (The Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ )** Let  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  be two constant states in  $\Omega$ , and let  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  be the two corresponding equilibrium states defined by (31).

(i) (Conservativity) : The Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  satisfies the following three conservation laws if  $\alpha_{1L} \neq \alpha_{1R}$  :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x \alpha_1 \rho_1 u_1 = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 + \partial_x \alpha_2 \rho_2 u_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2) = 0, \end{cases}$$

and the following four conservation laws when  $\alpha_{1L} = \alpha_{1R}$  :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 \rho_1 + \partial_x \alpha_1 \rho_1 u_1 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \Pi_1) = 0, \\ \partial_t \alpha_2 \rho_2 + \partial_x \alpha_2 \rho_2 u_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \Pi_2) = 0. \end{cases}$$

In other words, the mass and momentum of both phases evolve according to natural conservation laws when expected.

(ii) ( $L^1$  stability) : Provided that the free parameters  $a_1 = a_1(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  and  $a_2 = a_2(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  are chosen sufficiently large according to (36) and to (37), the Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  belongs to  $\Omega^r$ .

(iii) (Solid contact discontinuity) : Assume that  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  can be joined by an admissible contact discontinuity of the equilibrium system (3), i.e. are such that the jump relations (12) hold. Then, the approximate Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  is exact in the sense that it consists of an isolated contact discontinuity separating  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  and propagating with speed  $u_{2L} = u_{2R}$ .

**Proof.** (i) This is true by construction, see indeed systems (32).

(ii) We have to check that  $\alpha_k(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \in (0, 1)$  and  $\rho_k(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) > 0$  with  $k = 1, 2$  and for all  $(x, t)$ ,  $t > 0$ . The first point is obvious since  $\alpha_k$  evolves according to a transport equation and then equals either  $\alpha_{kL}$  or  $\alpha_{kR}$ . Concerning the second point, we know by Theorem 3 that the sign of the densities  $\rho_{1-}$ ,  $\rho_{1+}$ ,  $\rho_{2-}$  and  $\rho_{2+}$  are respectively the same as the sign of  $u_{1-} - \lambda_1^r(\mathbf{v}_L)$ ,  $\lambda_2^r(\mathbf{v}_R) - u_{1+}$ ,  $u_2 - \lambda_3^r(\mathbf{v}_L)$  and  $\lambda_4^r(\mathbf{v}_R) - u_2$ . It is then clear by definition of the eigenvalues  $\lambda_l^r$ ,  $l = 1, \dots, 4$  that these quantities are necessarily positive for large values of  $a_1$  and  $a_2$  (note that  $u_{1\pm}$  and  $u_2$  remain bounded in this regime).

(iii) To prove this accuracy property, it is sufficient by uniqueness of the Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$

to verify that the discontinuity separating  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  and propagating with speed  $u_{2L} = u_{2R}$  is admissible in the sense of Definition 3. The fourth equation of (35) is trivially satisfied. The equilibrium property (31) implies  $\mathcal{T}_{1L} = \tau_{1L}$  and  $\mathcal{T}_{1R} = \tau_{1R}$ , but also  $\Pi_{1L} = p_1(\rho_{1L})$  and  $\Pi_{1R} = p_1(\rho_{1R})$ . Invoking the jump relations (12), the first three equations in (35) are then also immediate. The last equation follows from the fact that  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \alpha_{2R} \Pi_{2R} - \alpha_{2L} \Pi_{2L}$  since  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  are joined by an admissible contact.

**Remark 5.** *It is important to notice at this stage that the accuracy property (iii) would not be satisfied if the original conservation law  $\partial_t \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 + \partial_x \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1 = 0$  had been retained in system (32). Indeed, the fourth equation in (35) would read in this case  $m \mathcal{T}_{1L} = m \mathcal{T}_{1R}$  that is  $m \tau_{1L} = m \tau_{1R}$  by the equilibrium property (31). This relation is of course false in general for  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  such that the jump relations (12) hold.*

The results of Proposition 5 then easily apply to get the following theorem giving the main properties satisfied by the relaxation method described in Section 5.1. Recall that the latter is based on the classical averaging procedure (29) of the juxtaposition of Riemann solutions  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1})$  (Step 1), followed by an instantaneous relaxation that only modifies the relaxation quantities  $\mathcal{T}_{1j}$  and  $\mathcal{T}_{2j}$  (Step 2).

**Theorem 4. (The relaxation method)** *The relaxation method described in Section 5.1 :*

- (i) *(Conservativity) : is always conservative on  $\alpha_k \rho_k$ ,  $k = 1, 2$  and  $\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2$ , but also on  $\alpha_k \rho_k u_k$ ,  $k = 1, 2$  if  $\alpha_{1j}$  is constant for all  $j$ .*
- (ii) *( $L^1$  stability) : provides numerical solutions that remain in the phase space provided that the free parameters  $a_k = a_k(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})$ ,  $k = 1, 2$  are chosen sufficiently large according to (36) and to (37), for all  $j$ .*
- (iii) *(Solid contact discontinuity) : captures exactly the stationary admissible contact discontinuities of the equilibrium system (3).*

**Remark 6.** *Due to the averaging procedure (29), it is usual that only the stationary admissible contact discontinuity may be exactly computed.*

**Remark 7.** *Property (i) gives the variables that are updated with a conservative formula from time  $t^n$  to time  $t^{n+1-}$  in the relaxation method. More generally, and using Green's formula, we easily get from (29) and (34) the following non conservative update formula*

$$\mathbf{v}_j^{n+1-} = \mathbf{v}_j^n - \nu(\mathbf{g}_{j+1/2}^- - \mathbf{g}_{j-1/2}^+) - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \tilde{\mathbf{d}}(\tilde{\mathbf{v}}_\nu(x, t)) \partial_x \tilde{\mathbf{v}}_\nu(x, t) \quad dx \quad dt, \quad (38)$$

$$\text{with } \mathbf{g}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{v}}_r(0^\pm; \mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1}^n)).$$

*We recover in particular that the variables associated with a zero component in the non conservative product are treated in conservation form.*

#### 5.4. A natural cheaper relaxation method

The explicit knowledge of the Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(x/t, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  given in Theorem 3 relies on the first computation of  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ . In order to define the reconstructed states  $\bar{\mathbf{u}}_L$  and  $\bar{\mathbf{u}}_R$  in (33), this one necessitates twice the resolution of the nonlinear system (12) associated with a contact of the equilibrium system (3). A natural modification leading to a cheaper strategy consists in performing the reconstruction procedure when using the jump relations (19) associated with the relaxation system (13). Recall indeed that the former leads to explicit formulas (see Theorem 2).

The consequence of such a modification is the loss of the accuracy property (iii) in Proposition 5 and Theorem 4 above. Indeed, the new reconstructed states  $\bar{\mathbf{u}}_L$  and  $\bar{\mathbf{u}}_R$  are in this case (generally) different from  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  when these states can be joined by an admissible contact of system (3) (i.e. satisfy (12)). Then  $[\alpha_2 \Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  is no longer exact.

Note however that systems (12) and (19) lead to the same solution in the asymptotic regime of relative Mach

numbers  $\frac{m^2}{\alpha_{1-}^2 \rho_{1-}^2}$  and  $\frac{m^2}{\alpha_{1+}^2 \rho_{1+}^2}$  tending to zero. Indeed, we first get  $\rho_{1-} = \rho_{1+}$  for both systems, then  $\mathcal{T}_{1-} = \mathcal{T}_{1+} = \tau_{1+}$  by the equilibrium property in (19), so that the first three equations eventually coincide in (12) and (19). This justifies the proposed modification in the context of subsonic flows of interest in this paper.

## 6. NUMERICAL EXPERIMENTS

This section is devoted to numerical simulations of the two fluid two pressure diphasic model. For each test we compare four different Riemann solvers that we label *Rusanov*, *Relax-exact*, *Relax(1)*, *Relax(2)*.

*Rusanov* denotes a non conservative version of the Rusanov scheme which is explained in detail in [20]. The other solvers are based on the relaxation approach we presented. The first one, labeled *Relax-exact* uses the exact Riemann solution  $(x, t) \mapsto \mathbf{v}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  in formula (29). We recall that this implies to solve a fourth-order polynomial which is achieved by an iterative algorithm (see [19]).

The last two schemes use the approximate Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_r(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  and correspond to two different estimations of the term  $\Pi_1 \partial_x \alpha_1$ . The method labeled *Relax(1)* estimates this term via the jump conditions (12) of the initial diphasic model (3).

The other (cheaper) method labeled *Relax(2)* uses an estimation via the jump conditions of the relaxation model (13) with  $\lambda = 0$  and is explained in subsection 5.4.

Two kinds of simulations are proposed. The first one referred to as 'pressures out of equilibrium' focuses on system (3) without any extra source term. On the contrary, the second one referred to as 'pressure equilibrium' takes into account an additional pressure relaxation source term between phases 1 and 2 in the first equation of system (3).

### 6.1. Pressures out of equilibrium

Here, by the sake of simplicity, we consider the following equations of state:

$$p_k(\rho_k) = A_k \rho_k^{\gamma_k}, \quad k = 1, 2, \tag{39}$$

which means that the two phases are isentropic. We note  $\gamma_k$  the adiabatic coefficient of phase  $k$  and  $A_k$  a constant depending on the entropy of the fluid. Actually,  $A_k$  is computed on the basis of a reference state:  $A_k = \frac{p_{k0}}{\rho_{k0}^{\gamma_k}}$ . We consider a case where the coefficient  $A_k$  takes the constant value of  $10^5 \text{Pa} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\right)^{\gamma_k}$ , for  $k = 1, 2$  and we choose  $\gamma_1 = 1.4$  and  $\gamma_2 = 1.2$ . Computations are performed on 200 cells. Initial conditions correspond to shock tube test cases:

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{if } x < 10, \\ \mathbf{u}_R & \text{if } x > 10. \end{cases}$$

#### 6.1.1. Pure stationary contact

In this first test case, we consider a left state  $\mathbf{u}_L$  and a right void fraction  $\alpha_{1R}$  given in Table 1. Using the notations of Definition 1 we set the right state as  $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_+(\mathbf{u}_L, \alpha_{1R})$ . Numerical values of the remaining variables result from a resolution (for instance with a Newton algorithm) of system (12). Since the velocity of the left state is chosen to be zero, we have that the velocity of the right state is equal to zero. Thus, the two states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  are separated by a stationary  $\lambda_0$ -contact discontinuity. This choice allows us to observe how each method preserves numerically such a solution. Results for the two phases are displayed at final time 0.02 s on Figures 3 and 4. In agreement with Theorem 4 above, the relaxation solver *Relax(1)* provides a perfectly sharp discontinuity at  $x = 10$  m while the two other relaxation methods slightly diffuse the profile. The Rusanov scheme is even more diffusive. In particular, one can easily notice on Figure 4(b) that only *Relax(1)* exactly preserves the stationary profile of velocity  $u_2$ . The other solvers yield non uniform discrete solutions.



	Unity	$L$	$R$
$\alpha_1$	-	0.8	0.2
$p_1$	$10^5$ Pa	1.25	$p_1(\rho_{1R})$
$p_2$	$10^5$ Pa	1.25	$p_2(\rho_{2R})$
$u_1$	m/s	50	$u_{1R}$
$u_2$	m/s	0	$u_{2R}$

TABLE 1. Pure stationary contact - initial conditions

This test case illustrates numerically the importance of the term  $m(\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L})\delta_{x-u_2^*t}$  added in (32) in the equation associated with  $\alpha_1\rho_1\mathcal{T}_1$ . Recall that this term is responsible for the approximate Riemann solution  $(x, t) \mapsto \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}(\frac{x}{t}; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  to be exact when an isolated contact discontinuity is considered. Indeed, the *Relax(1)* method provides an exact solution. In contrast, the *Relax-exact* method which does not take into account this modification leads to an approximate solution.

The failure of the *Relax(2)* solver has a different origin. This one actually takes into account the additional term  $m(\mathcal{T}_{1R} - \mathcal{T}_{1L})\delta_{x-u_2^*t}$  in (32) but is based on an estimation of the non conservative term  $[\alpha_2\Pi_2](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  via approximate jump conditions (19), instead of (12). This explains the non exact capture of the solution (see subsection 5.4).

However, note that the errors are significantly smaller for the last two relaxation methods than for the Rusanov scheme.

### 6.1.2. Moving contact discontinuity

The initial conditions of this test case are given in Table 2. Data are constant except for the void fraction  $\alpha_1$ . Since we have  $p_1 = p_2 = 1.25 \times 10^5$  Pa and  $u_1 = u_2 = 50$  m/s, the two states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  verify the jump conditions (12) with  $m = 0$ . In other terms, the two states are separated by a pure moving  $\lambda_0$ -contact discontinuity of velocity  $u_2 = 50$  m/s. The results are plotted at time 0.05 s on Figures 5 and 6. We can easily

	Unity	$L$	$R$
$\alpha_1$	-	0.8	0.2
$p_1$	$10^5$ Pa	1.25	1.25
$p_2$	$10^5$ Pa	1.25	1.25
$u_1$	m/s	50	50
$u_2$	m/s	50	50

TABLE 2. Moving contact - initial conditions

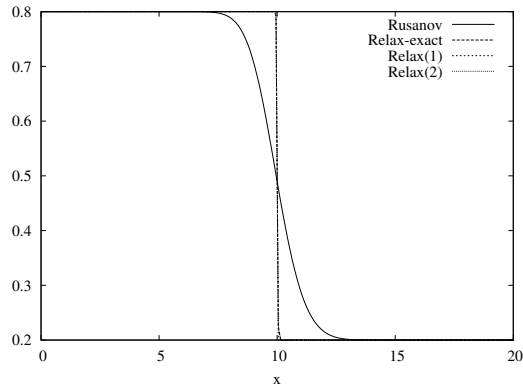
notice that uniform profiles are preserved by all the methods. On the other hand, one checks that relaxation-based solvers yield similar results for the void fraction profile on Figure 5. They are obviously much less diffusive than the Rusanov scheme.

### 6.1.3. General shock tube test

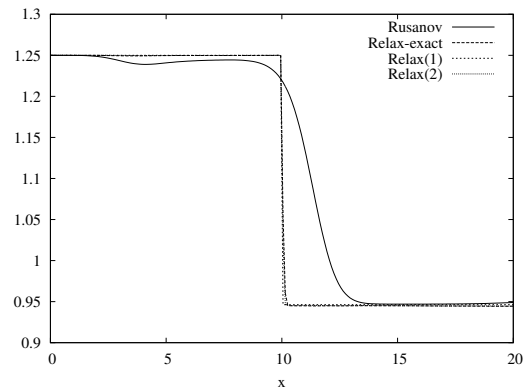
Initial conditions of this shock tube test are given in Table 3. Results of this simulation are displayed at final time 0.01 s on Figures 7 and 8. All the solvers based on the relaxation approach give similar results. Again, one may remark that the relaxation approach is much less diffusive than the *Rusanov* method.

A second simulation is shown in Fig. 9 and corresponds to a general shock tube test, where we compare results obtained using the two different estimates of  $[\alpha_2\Pi_2]$  presented above. For fine meshes (400 cells here), no difference can be spotted.

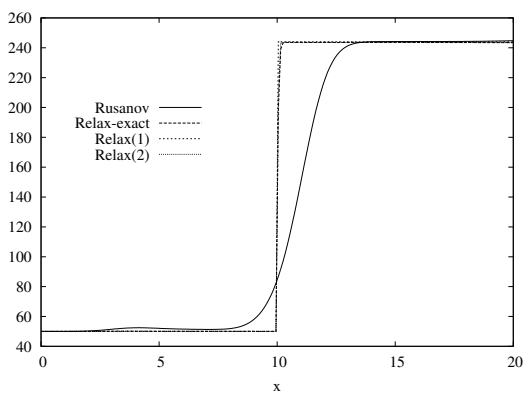
TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



(b) Pressure  $p_1$  ( $10^5$  Pa)



(c) Velocity  $u_1$  (m/s)

FIGURE 3. Pure stationary contact - numerical results for phase 1

TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER

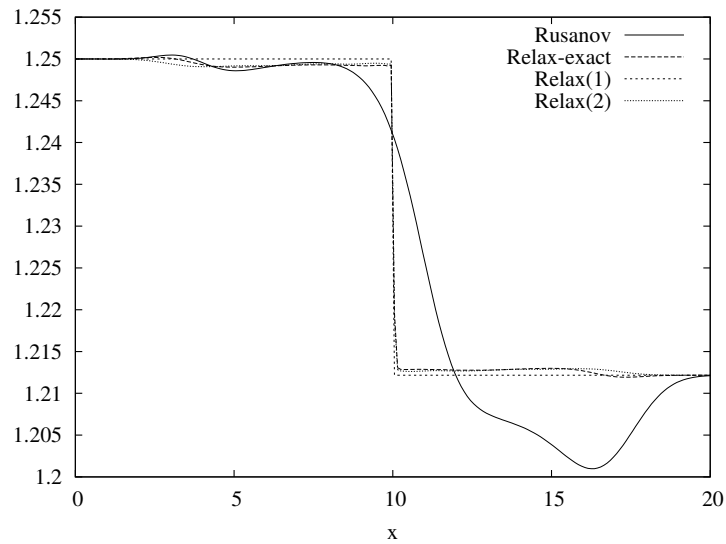
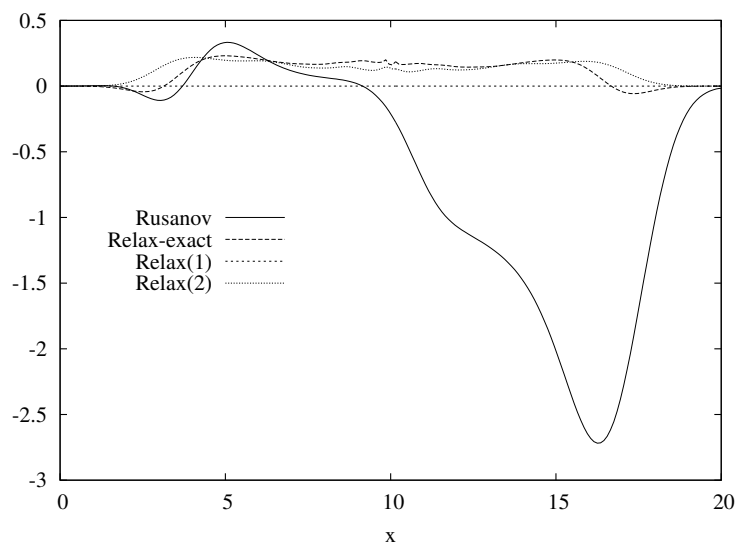
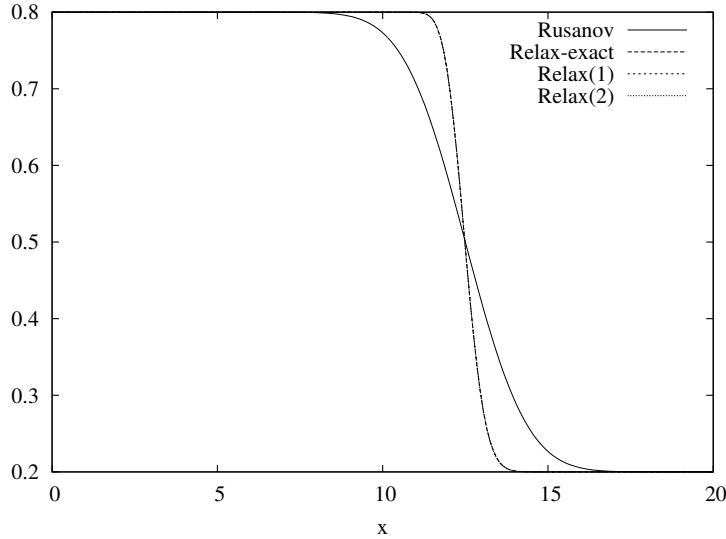
(a) Pressure  $p_2$  ( $10^5$  Pa)(b) Velocity  $u_2$  (m/s)

FIGURE 4. Pure stationary contact - numerical results for phase 2



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)

FIGURE 5. Moving contact (1/2)

	Unity	$L$	$R$
$\alpha_1$	-	0.8	0.2
$p_1$	$10^5$ Pa	1.5	1.0
$p_2$	$10^5$ Pa	1.5	1.0
$u_1$	m/s	50	50
$u_2$	m/s	5	5

TABLE 3. General shock tube test - initial conditions

### 6.2. Pressure equilibrium

We want to solve in this section system (3) with the presence of an additional pressure relaxation source term in the first equation. More precisely, given  $\varepsilon_p > 0$  the pressure relaxation time between the two phases, this equation becomes

$$\partial_t \alpha_1 + u_2 \partial_x \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_p} (p_1(\rho_1) - p_2(\rho_2)). \quad (40)$$

We are interested in the asymptotic regime  $\varepsilon_p \rightarrow 0$ , so that equation (40) equivalently recasts, at least formally,  $p_1(\rho_1) = p_2(\rho_2)$ . Numerically, this instantaneous pressure relaxation is done via a two step splitting method detailed in the following.

First, consider the approximate solution  $\mathbf{u}_\nu(x, t^n)$  at time  $t^n$ . We solve the convective part of the system on the whole space domain thanks to one of the proposed Riemann solvers and note the resulting approximate solution

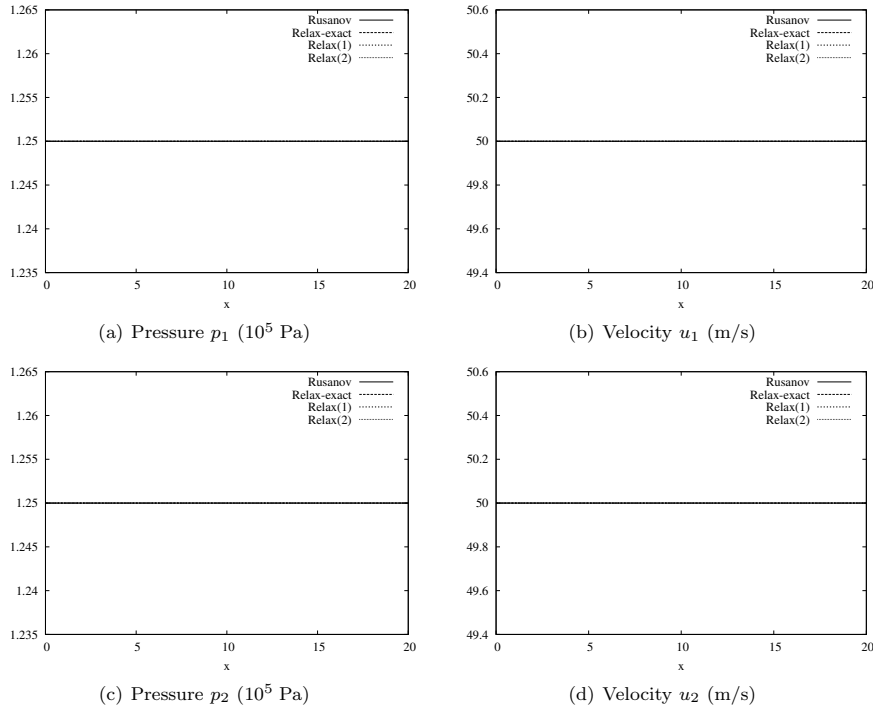


FIGURE 6. Moving contact discontinuity (2/2)

$\mathbf{u}_\nu(x, t^{n,1})$ . Then the solution  $\mathbf{u}_\nu(x, t^{n+1})$  at time  $t^{n+1}$  is obtained by setting

$$\begin{aligned} (\alpha_k \rho_k)_j^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k)_j^{n,1}, \\ (\alpha_k \rho_k u_k)_j^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k u_k)_j^{n,1}, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

and resolving on each cell the following equation:

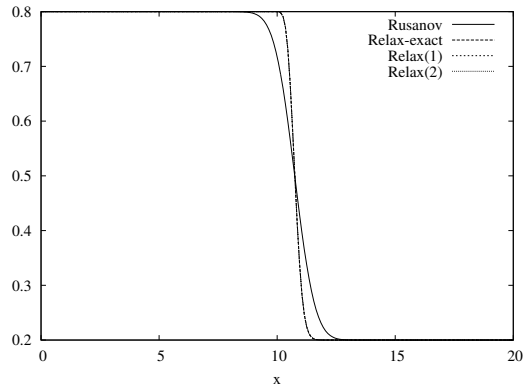
$$p_1 \left( \frac{(\alpha_1 \rho_1)_j^{n+1}}{(\alpha_1)_j^{n+1}} \right) - p_2 \left( \frac{(\alpha_2 \rho_2)_j^{n+1}}{1 - (\alpha_1)_j^{n+1}} \right) = 0, \quad (41)$$

to define the equilibrium void fraction  $(\alpha_1)_j^{n+1}$ . The equations of state we consider are the same than the ones given by Munkejord [29] that is

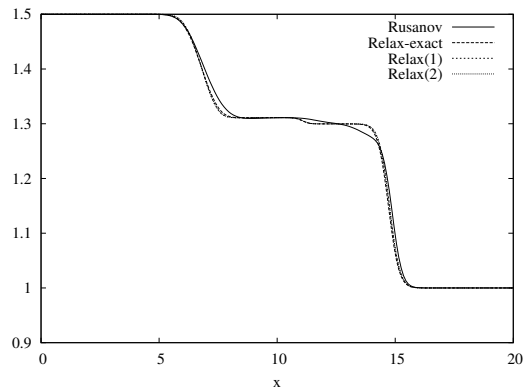
$$p_k = c_k^2 (\rho_k - \rho_k^0), \quad k = 1, 2,$$

where the constants  $c_k$  and  $\rho_k^0$  are respectively the sound speed and the 'reference density' of phase  $k$ . The values of these constants are given in Table 4. Equation (41) can be solved explicitly. We get the equilibrium

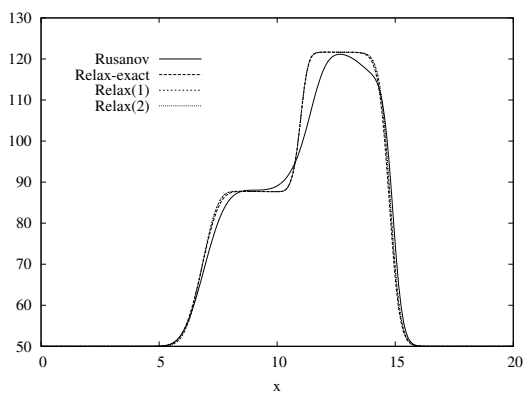
TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



(b) Pressure  $p_1$  ( $10^5$  Pa)



(c) Velocity  $u_1$  (m/s)

FIGURE 7. General shock tube test - numerical results for phase 1

TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER

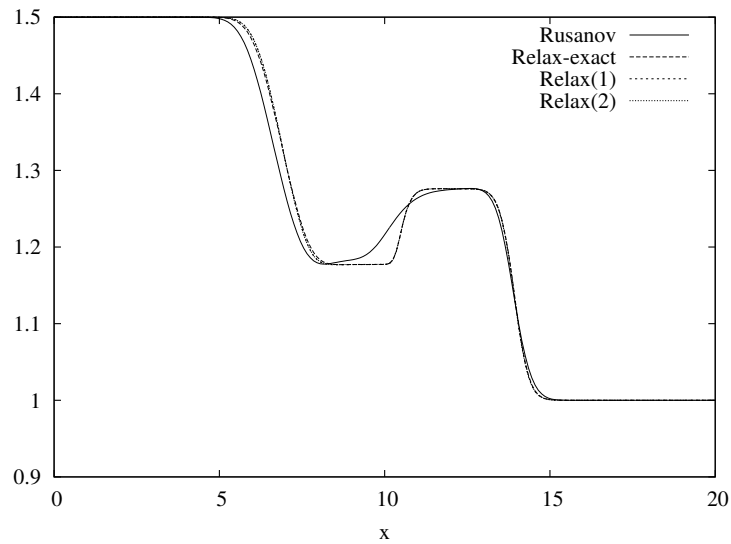
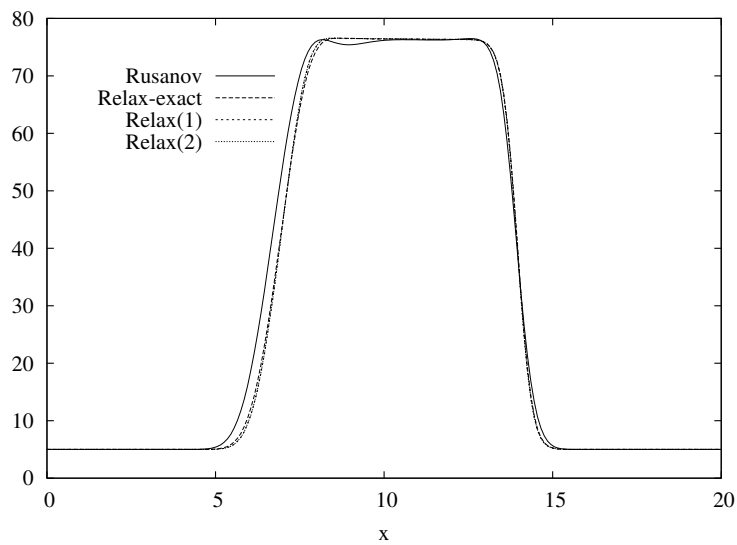
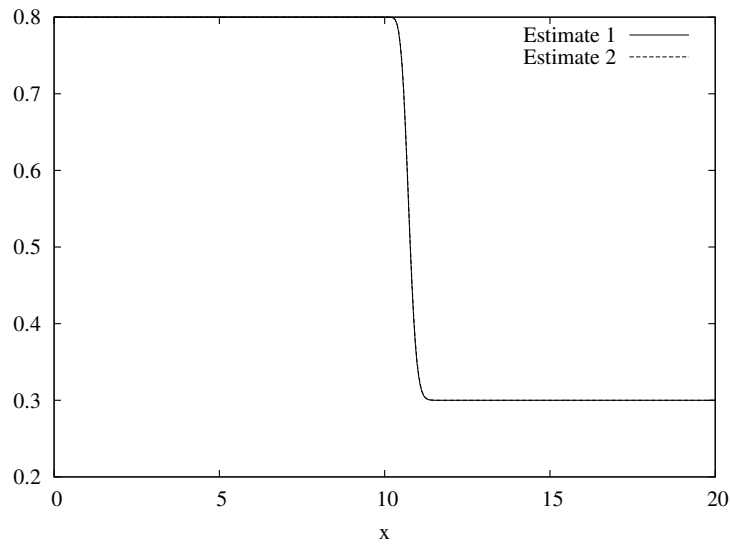
(a) Pressure  $p_2$  ( $10^5$  Pa)(b) Velocity  $u_2$  (m/s)

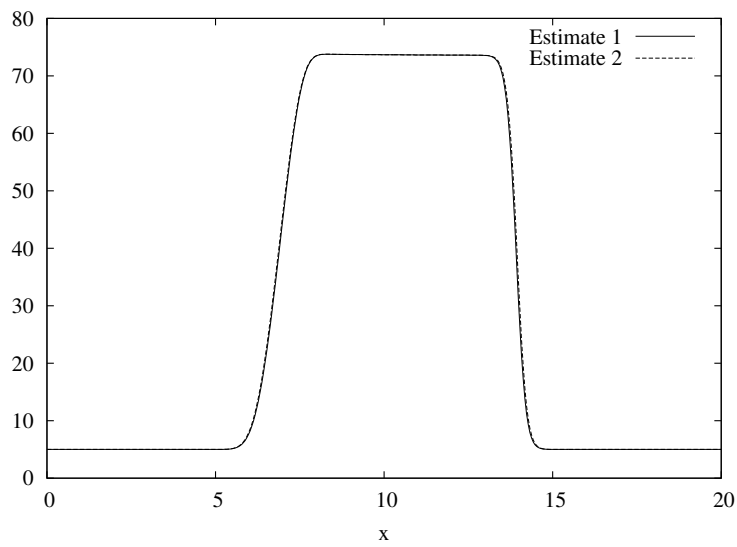
FIGURE 8. General shock tube test - numerical results for phase 2

TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER

31



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



(b) Velocity  $u_2$  (m/s)

FIGURE 9. Shock tube-different estimate of  $[\overline{\alpha_2 \Pi_2}]$



TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER

	$c_k$ (m/s)	$\rho_k^0$ (kg/m <sup>3</sup> )
Air (1)	$\sqrt{10^5}$	0
Water (2)	1000	999.9

TABLE 4. Constants in the equation of state

void fraction  $(\alpha_1)_j^{n+1}$  at time  $t^{n+1}$  by the following formula:

$$(\alpha_2)_j^{n+1} = 1 - (\alpha_1)_j^{n+1} = \frac{-\psi_2 - \sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3}}{2\psi_1}, \tag{42}$$

where

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c_2^2 \rho_2^0 - c_1^2 \rho_1^0, \\ \psi_2 &= -c_2^2 ((\alpha_2 \rho_2)_j^{n+1} + \rho_2^0) + c_1^2 (-(\alpha_1 \rho_1)_j^{n+1} + \rho_1^0), \end{aligned}$$

and

$$\psi_3 = c_2^2 (\alpha_2 \rho_2)_j^{n+1}.$$

6.2.1. Large relative velocity shock tube

This test case is given in Munkejord [29]. The length of the domain is now 100 m and initial conditions are such that:

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{if } x < 50, \\ \mathbf{u}_R & \text{if } x > 50, \end{cases}$$

with  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  written in Table 5. We compute the solution on a grid of 1000 cells. Results are plotted at

	Unity	$L$	$R$
$\alpha_1$	-	0.29	0.30
$p$	$10^5$ Pa	2.65	2.65
$u_1$	m/s	65	50
$u_2$	m/s	1	1

TABLE 5. Large relative velocity shock tube - initial conditions

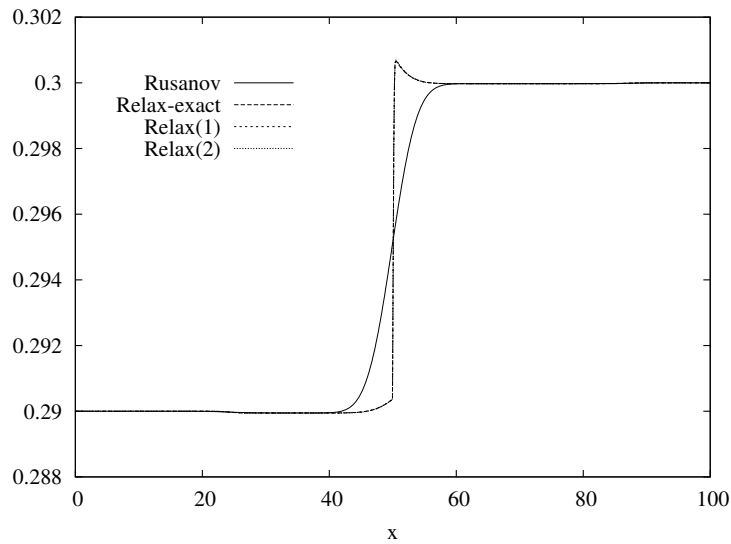
final time 0.1 s on Figures 10 and 11. These numerical results are similar to the one obtained in [29] with a first-order scheme.

6.2.2. The water faucet test case

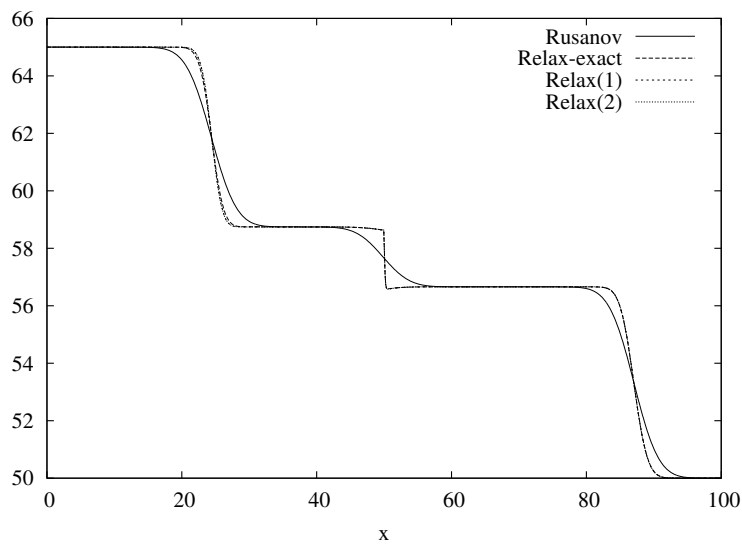
The water faucet test case is a classical benchmark test for one-dimensional two-phase flow simulations and is described in Ransom [34]. This test consists in an incoming water flow in presence of gravity in a vertical tube with length 12 m and diameter 1 m. More precisely, at the temperature  $T = 50$  °C, we consider a flow of water (phase 2) at the top of the tube in  $x = 0$  m with inlet conditions given in Table 6. The bottom of the tube in  $x = 12$  m is open to room pressure  $p = 10^5$  Pa (outlet conditions) and the top of the tube is closed to air flow (phase 1), *i.e.*

$$u_1(x = 0, t) = 0.$$

TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER



(a) Fraction  $\alpha_1$  (-)



(b) Velocity  $u_1$  (m/s)

FIGURE 10. Large relative velocity shock tube - results for phase 1

TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER

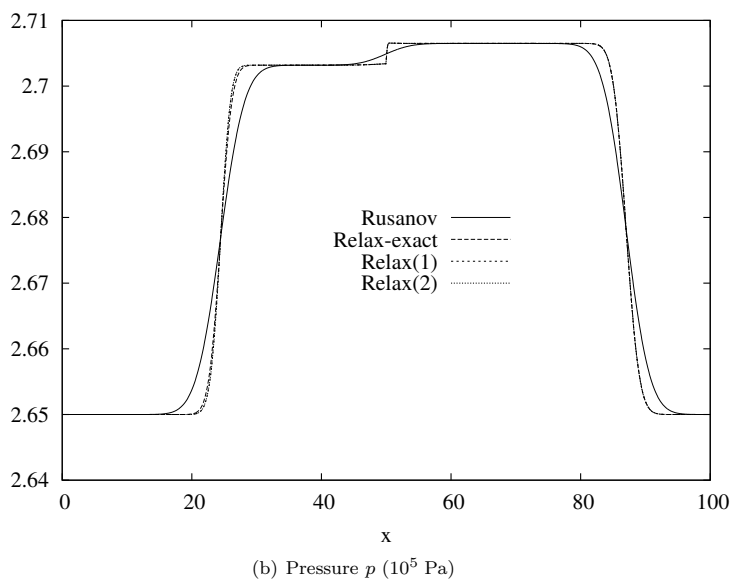
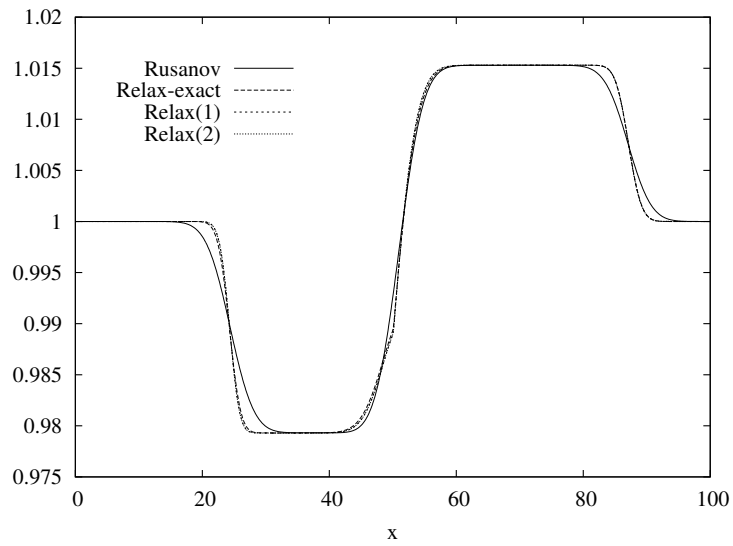


FIGURE 11. Large relative velocity shock tube - results for phase 2

The initial conditions on the domain are given by the inlet conditions. Since a gravity field is introduced in this test, the momentum balance equation for phase  $k$  reads

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + p_k(\rho_k)) - p_1(\rho_1) \partial_x \alpha_k = \alpha_k \rho_k g, \quad k = 1, 2.$$

In the numerical scheme, the source term  $\alpha_k \rho_k g$  is accounted for by using a standard explicit centered approximation. We fix the boundary conditions to the inlet conditions for the top of the tube while we solve an half Riemann problem for the bottom (see Dubois and LeFloch [17]). Due to the effect of gravity, a thin liquid jet will form. It is common to compare the solution of this problem to the analytical solution of the much simpler

	Unity	Inlet	Outlet
$\alpha_1$	-	0.2	-
$p$	$10^5$ Pa	1.0	1.0
$u_1$	m/s	0	-
$u_2$	m/s	10	-

TABLE 6. The water faucet test case - inlet and outlet conditions

model corresponding to the following momentum balance

$$\partial_t(\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2) = \alpha_2 \rho_2 g.$$

This gives for the air void fraction (see [15]):

$$\alpha_1(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_2^0 u_2^0}{\sqrt{2gx + (u_2^0)^2}}, & \text{if } x \leq u_2^0 t + \frac{1}{2}gt^2, \\ 1 - \alpha_2^0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (43)$$

where  $\alpha_2^0 = \alpha_2(x, t = 0)$  and  $u_2^0 = u_2(x, t = 0)$  and for the velocity of water:

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \sqrt{(u_2^0)^2 + 2gx}, & \text{if } x \leq u_2^0 t + \frac{1}{2}gt^2, \\ u_2^0 + gt, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (44)$$

Numerical results for *Relax(2)* method are plotted on Figure 12(a) and Figure 12(b) with different grid resolutions. Since the other relaxation-based solvers give similar results, we plot results only for the scheme *Relax(2)*. The results are similar to Munkejord [29] for a first order scheme on the two-fluid two-pressure diphasic model with instantaneous pressure relaxation.

#### ACKNOWLEDGMENTS

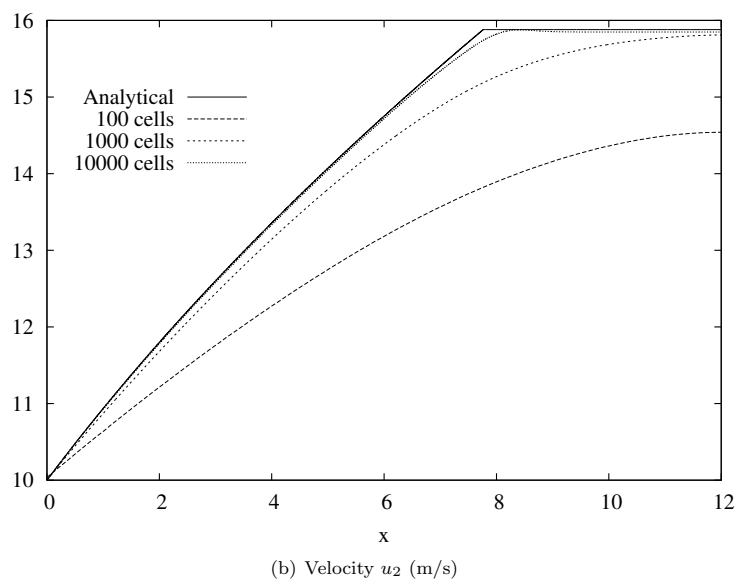
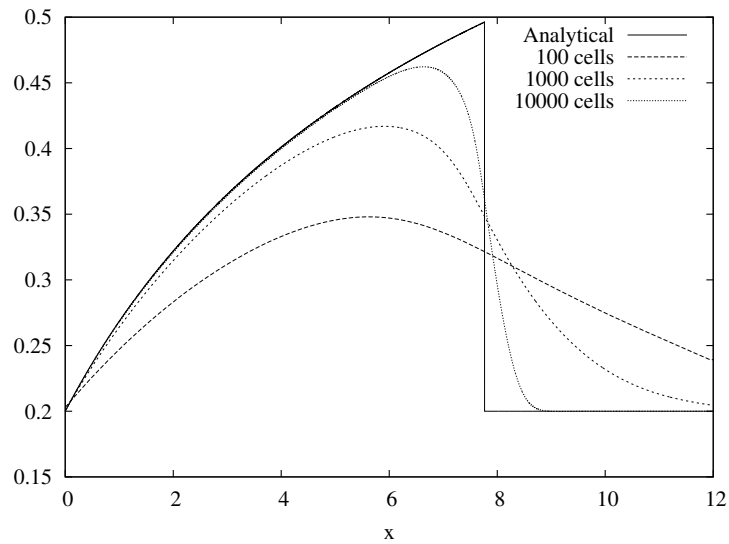
The work presented here was partially supported by the NEPTUNE project, with financial support from CEA (Commissariat à l’Energie Atomique), EDF (Electricité de France), IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire) and AREVA-NP.

#### Appendix 1. Proof of Theorem 3

First of all we recall that the eigenvalues and the nature of the characteristic fields of system (32) are the same than the ones of system (17).

Moreover, from the first equation in (32), we deduce that the variable  $\alpha_1$  (and then  $\alpha_2$ , since  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ )

TITLE WILL BE SET BY THE PUBLISHER

FIGURE 12. The water faucet test case - numerical results for *Relax(2)*

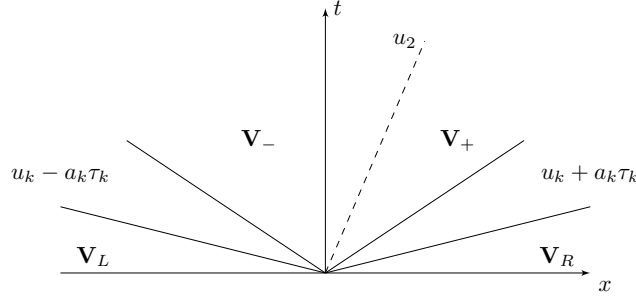


FIGURE 13. General structure in the subsonic regime of the Riemann solution associated with (32).

admits a jump only on the  $\lambda_0$ -contact discontinuity. Then, on the left and on the right of this discontinuity, we can rewrite system (32) as two decoupled systems on the fluid 1 and fluid 2 respectively:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x(\rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t(\rho_1 u_1) + \partial_x(\rho_1 u_1^2 + \Pi_1) = 0, & \text{for } \frac{x}{t} < \lambda_0^r \text{ and } \frac{x}{t} > \lambda_0^r, \\ \partial_t(\rho_1 \mathcal{T}_1) + \partial_x(\rho_1 \mathcal{T}_1 u_1) = 0, \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho_2 + \partial_x(\rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t(\rho_2 u_2) + \partial_x(\rho_2 u_2^2 + \Pi_2) = 0, & \text{for } \frac{x}{t} < \lambda_0^r \text{ and } \frac{x}{t} > \lambda_0^r. \\ \partial_t(\rho_2 \mathcal{T}_2) + \partial_x(\rho_2 \mathcal{T}_2 u_2) = 0, \end{cases} \quad (46)$$

At the  $\lambda_0$ -contact discontinuity, the jump relations (35) must be verified.

We focus now on the variable  $\mathcal{T}_1$ . It appears from (45) and (35), that jumps in  $\mathcal{T}_1$  are admissible only on the  $\lambda_0$  and the  $\lambda_5$  wave. The fourth equation in (35) implies that the whole jump between the right and left values is carried by this latter wave. Therefore,  $\mathcal{T}_1$  is continuous on the  $\lambda_5$ -wave and the same is true for all the other variables by usual jump conditions on (45) and (46). This implies that the Riemann problem solution does not depend on the relative position of the  $\lambda_5$ - and  $\lambda_0$ -waves. Its structure is presented in Figure 13. We want now to compute the intermediate states for the fluid 2. The Rankine-Hugoniot relations on the momentum balance equation on the  $\lambda_3$  and  $\lambda_4$ -waves read:

$$\begin{aligned} -\lambda_3^r(\mathbf{v}_L)(\rho_{2-} u_{2-} - \rho_{2L} u_{2L}) + (\rho_{2-} u_{2-}^2 - \rho_{2L} u_{2L}^2) + \Pi_{2-} - \Pi_{2L} &= 0, \\ -\lambda_4^r(\mathbf{v}_R)(\rho_{2R} u_{2R} - \rho_{2+} u_{2+}) + (\rho_{2R} u_{2R}^2 - \rho_{2+} u_{2+}^2) + \Pi_{2R} - \Pi_{2+} &= 0. \end{aligned}$$

Whereas the continuity of the wave speeds for the  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  and  $\lambda_0$ -waves gives:

$$\begin{aligned} \lambda_0^r &= u_{2-} = u_{2+} = u_2, \\ \lambda_3^r(\mathbf{v}_L) &= u_{2L} - a_2 \tau_{2L} = u_2 - a_2 \tau_{2-}, \\ \lambda_4^r(\mathbf{v}_R) &= u_{2R} + a_2 \tau_{2R} = u_2 + a_2 \tau_{2+}. \end{aligned} \quad (47)$$

Using these relations, the Rankine-Hugoniot jump conditions above become:

$$\begin{aligned} a_2(u_2 - u_{2L}) &= \Pi_{2L} - \Pi_{2-} , \\ a_2(u_2 - u_{2R}) &= \Pi_{2+} - \Pi_{2R} . \end{aligned} \tag{48}$$

We multiply the first of these equations by  $\alpha_{2L}$ , the second by  $\alpha_{2R}$  and sum them. By using the last relation in (35), we finally obtain

$$u_2 = \frac{\alpha_{2L}\lambda_3^r(\mathbf{v}_L) + \alpha_{2R}\lambda_4^r(\mathbf{v}_R)}{\alpha_{2L} + \alpha_{2R}} + \frac{\alpha_{2L}I_{2L} - \alpha_{2R}I_{2R}}{a_2(\alpha_{2L} + \alpha_{2R})} + \frac{[\overline{\alpha_2\Pi_2}](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)}{a_2(\alpha_{2L} + \alpha_{2R})}.$$

From (47), we have

$$\tau_{2-} := \frac{1}{\rho_{2-}} = \frac{u_2 - \lambda_3^r(\mathbf{v}_L)}{a_2}, \quad \tau_{2+} := \frac{1}{\rho_{2+}} = \frac{\lambda_4^r(\mathbf{v}_R) - u_2}{a_2}.$$

We pass now to the computation of the intermediate states for the fluid 1. The first step is to get the value of  $m$ . The continuity of the wave speeds for the  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ -waves gives:

$$\begin{aligned} \lambda_1^r(\mathbf{v}_L) &= u_{1L} - a_1\tau_{1L} = u_{1-} - a_1\tau_{1-} , \\ \lambda_2^r(\mathbf{v}_R) &= u_{1R} + a_1\tau_{1R} = u_{1+} + a_1\tau_{1+} , \end{aligned} \tag{49}$$

whereas by definition of  $m$  one has:

$$\begin{cases} \alpha_{1L}(u_{1-} - u_2) = m\tau_{1-} , \\ \alpha_{1R}(u_{1+} - u_2) = m\tau_{1+} . \end{cases} \tag{50}$$

Once  $m$  is known, the quantities  $\tau_{1-}$ ,  $\tau_{1+}$ ,  $u_{1-}$ ,  $u_{1+}$  are then easily obtained by solving a linear system given by the four equations (49)-(50) and whose matrix is

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 1 \\ m & 0 & -\alpha_{1L} & 0 \\ 0 & m & 0 & -\alpha_{1R} \end{pmatrix}.$$

Its determinant is given by  $(m - a_1\alpha_{1L})(m + a_1\alpha_{1R})$  and is negative provided that  $a_1$  is chosen sufficiently large (see Remark 4). Now the third and the fifth relations in (35) give

$$m(u_{1+} - u_{1-}) + (\alpha_{1R}\Pi_{1+} - \alpha_{1L}\Pi_{1-}) = -[\overline{\alpha_2\Pi_2}](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R).$$

Then we write

$$\begin{aligned} m(\lambda_2^r(\mathbf{v}_R) - \lambda_1^r(\mathbf{v}_L)) &= m(u_{1+} - u_{1-}) + a_1m(\tau_{1+} - \tau_{1-}) = \\ &= -[\overline{\alpha_2\Pi_2}](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) - (\alpha_{1R}\Pi_{1+} - \alpha_{1L}\Pi_{1-}) + a_1\alpha_{1L}(u_{1-} - u_2) + a_1\alpha_{1R}(u_{1+} - u_2) \\ &= -[\overline{\alpha_2\Pi_2}](\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) - a_1u_2(\alpha_{1L} + \alpha_{1R}) + \alpha_{1L}(a_1u_{1-} + \Pi_{1-}) + \alpha_{1R}(a_1u_{1+} - \Pi_{1+}) \end{aligned}$$

But for the phase 1, the analogous of (48) writes  $a_1 u_{1-} + \Pi_{1-} = a_1 u_{1L} + \Pi_{1L}$  and  $a_1 u_{1+} - \Pi_{1+} = a_1 u_{1R} - \Pi_{1R}$ . In other words, the right-hand side is known and as an immediate consequence  $m$  also does. Easy calculations give the expected formulas for  $u_{1-}$ ,  $u_{1+}$ ,  $\rho_{1-}$ ,  $\rho_{1+}$  and  $m$ .

## REFERENCES

- [1] R. ABGRALL AND R. SAUREL, *Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures*, J. Comput. Phys., Vol. 186, (2003), pp. 361-396.
- [2] N. ANDRIANOV, *Analytical and numerical investigation of two-phase flows*, PhD thesis, Univ. Magdeburg (2003).
- [3] N. ANDRIANOV, R. SAUREL AND G. WARNECKE, *A simple method for compressible multiphase mixtures and interfaces*, International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 41(2), (2003), pp. 109-131.
- [4] N. ANDRIANOV AND G. WARNECKE, *The Riemann problem for the Baer-Nunziato two-phase flow model*, J. Comput. Phys., Vol. 195, (2004), pp. 434-464.
- [5] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, T. GALIÉ, E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART, N. SEGUIN, *The drift-flux asymptotic limit of barotropic two-phase two-pressure models*, Communications in Mathematical Sciences, vol. 6, (2008), pp.521-529.
- [6] M.R. BAER AND J.W. NUNZIATO, *A two phase mixture theory for the deflagration to detonation (DDT) transition in reactive granular materials*, Int. J. Multiphase Flows, Vol. 12(6), (1986), pp. 861-889.
- [7] BERTHON C., BRACONNIER B., NKONGA B., *Numerical approximation of a degenerate non-conservative multifluid model: relaxation scheme*, Int. J. Numer. Methods Fluids, 48, No. 1, 85-90 (2005).
- [8] BRACONNIER B., *Modélisation numérique d'écoulements multiphasiques pour des fluides compressibles, non miscibles et soumis aux effets capillaires*, Thèse de l'Université Bordeaux I., 2007.
- [9] F. BOUCHUT, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics series, Birkhauser, (2004).
- [10] T. BUFFARD, T. GALLOUËT AND J.M. HÉRARD, *A sequel to a rough Godunov scheme. Application to real gas flows*, Computers and Fluids, Vol. 29(7), (2000), pp. 813-847.
- [11] C.E. CASTRO AND E.F. TORO, *A Riemann solver and upwind methods for a two-phase flow model in nonconservative form*, International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 50, (2006), pp. 275-307.
- [12] C. CHALONS AND F. COQUEL, *Navier-Stokes equations with several independent pressure laws and explicit predictor-corrector schemes*, Numer. Math., Vol. 101(3), (2005), pp. 451-478.
- [13] C. CHALONS AND J.F. COULOMBEL, *Relaxation approximation of the Euler equations*, submitted
- [14] F. COQUEL, T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD AND N. SEGUIN, *Closure laws for a two-phase two-pressure model*, Comptes Rendus Mathématique, Vol. 334, (2002), pp. 927-932.
- [15] F. COQUEL, K. EL AMINE, E. GODLEWSKI, B. PERTHAME AND P. RASCLE, *Numerical methods using upwind schemes for the resolution of two-phase flows*, J. Comput. Phys., Vol. 136, (1997), pp. 272-288.
- [16] F. COQUEL, E. GODLEWSKI, A. IN, B. PERTHAME AND P. RASCLE, *Some new Godunov and relaxation methods for two phase flows*, Proceedings of the International Conference on Godunov methods : theory and applications, Kluwer Academic, Plenum Publisher, 2001.
- [17] F. DUBOIS AND P.G. LEFLOCH, *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Diff. Equ., Vol. 71, (1988), pp. 93-122.
- [18] P. EMBID AND M. BAER *Mathematical analysis of a two-phase continuum mixture theory*, Contin. Mech. Thermodyn. Vol. 4, no. 4, (1992), pp. 279-312.
- [19] T. GALIÉ, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [20] T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD AND N. SEGUIN, *Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS), Vol. 14(5), (2004), pp. 663-700.
- [21] S. GAVRILYUK AND R. SAUREL, *Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia.*, J. Comput. Phys., Vol. 175, (2002), pp. 326-360.
- [22] J. GLIMM, D. SALTZ AND D.H. SHARP, *Two phase flow modelling of a fluid mixing layer*, J. Fluid Mech., Vol. 378, (1999), pp. 119-143.
- [23] P. GOATIN AND P.G. LEFLOCH *The Riemann problem for a class of resonant nonlinear systems of balance laws*, Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse Non-linéaire Vol. 21, (2004), pp. 881-902.
- [24] E. GODLEWSKI AND P.A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer-Verlag, 1996.
- [25] V. GUILLEMAUD, *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions*, Thèse de l'Université de Provence, Aix-Marseille 1, 2007.
- [26] S. JIN AND Z. XIN, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 48, (1995), pp. 235-276.
- [27] A.K. KAPILA, S.F. SON, J.B. BDZIL, R. MENIKOFF AND D.S. STEWART, *Two phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone*. Phys. Fluids, Vol. 9(12), (1997), pp. 3885-3897.



- [28] S. KARNI, E. KIRR, A. KURGANOV AND G. PETROVA, *Compressible two-phase flows by central and upwind schemes*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), Vol. 38(3), (2004), pp. 477–493.
- [29] S.T. MUNKEJORD, *Comparison of Roe-type methods for solving the two-fluid model with and without pressure relaxation*, Computers and Fluids, Vol. 36, (2007), pp. 1061–1080.
- [30] P.G. LEFLOCH *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form*, Comm. Part. Diff. Equa. Vol. 13, (1988), pp. 669–727.
- [31] P.G. LEFLOCH *Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form*, Institute for Math. and its Appl., Minneapolis Preprint # 593, (1989).
- [32] P.G. LEFLOCH AND M.D. THANH *The Riemann problem for fluid flows in a nozzle with discontinuous cross-section*, Comm. Math. Sci. Vol. 1, (2003), pp. 763–796.
- [33] R. SAUREL AND R. ABGRALL, *A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows*, J. Comput. Phys., Vol. 150, (1999), pp. 425–467.
- [34] V.H. RANSOM, *Numerical benchmark tests*, Multiphase science and technology, Vol. 3, edited by G. F. Hewitt, J.M. Delhay, N. Zuber, Washington (USA): Hemisphere/Springer (1987), p. 467–7.
- [35] V.V. RUSANOV, *Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles*, J. Comp. Math. Phys., USSR, Vol. 1, (1961), pp. 267–279.
- [36] R. SAUREL AND O. LEMETAYER, *A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation*, J. Fluid Mech., Vol. 431, (2001), pp. 239–271.
- [37] D.W. SCHWENDEMAN, C.W. WAHLE AND A.K. KAPILA, *The Riemann problem and high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow*, J. Comput. Phys., Vol. 212, (2006), pp. 490–526.
- [38] B.H. STEWART AND B. WENDROFF, *Two-phase flow : models and methods*, J. Comput. Phys., Vol. 56, (1984), pp. 363–409.

---

## THE DRIFT-FLUX ASYMPTOTIC LIMIT OF BAROTROPIC TWO-PHASE TWO-PRESSURE MODELS

ANNALISA AMBROSO, CHRISTOPHE CHALONS, FRÉDÉRIC COQUEL, THOMAS  
GALIÉ, EDWIGE GODLEWSKI, PIERRE-ARNAUD RAVIART, NICOLAS SEGUIN

**Abstract.** We study the asymptotic behavior of the solutions of barotropic two-phase two-pressure models, with pressure relaxation, drag force and external forces. Using Chapman-Enskog expansions close to the expected equilibrium, a drift-flux model with a Darcy type closure law is obtained. Besides, restricting this closure law to permanent flows (defined as steady flows in some Lagrangian frame), we can obtain a drift-flux model with an algebraic closure law, in the spirit of Zuber-Findlay models. The example of a two-phase flow in a vertical pipe is described.

**Résumé.** Nous étudions le comportement asymptotique des solutions de modèles diphasiques barotropes à deux pressions, en présence de la relaxation en pression, de la force de traînée et de forces extérieures. À l'aide de développements de type Chapman-Enskog autour de l'équilibre naturel, nous obtenons un modèle de Drift fermé par une loi de type Darcy. En outre, en restreignant cette fermeture aux écoulements permanents (que nous définissons comme des écoulements stationnaires dans le repère du fluide), nous aboutissons à un modèle de Drift avec une fermeture algébrique, du même type que celle de Zuber-Findlay. Enfin, nous décrivons le cas d'un écoulement diphasique dans une conduite verticale.

### 1. Introduction

The description of two-phase flows is of great importance. Numerous applications need a clever modeling of such flows, in particular in nuclear engineering. Due to the complexity of these flows, some assumptions must be made according to the configurations under study. Various classes of models exist and a crucial problem is the understanding of the compatibility between all these models [9, 12, 4]. Indeed, the knowledge of these relationships can help us when a coupling between two-phase flow models from different classes must be performed. In [1] for instance, the coupling of two homogeneous two-phase models with different time scales for the mass transfer is investigated. The relationship between these two models enters in the classical frame of relaxation mechanisms [3] and different ways of coupling are proposed.

Here, we investigate the links between two-pressure models, such as the one proposed by Baer and Nunziato [2], and drift-flux models, like the Zuber-Findlay one [14] (see also [8] or [6] for richer models). The main tools we use are Chapman-Enskog expansions and long-time scalings, but this study does not enter in the theory developed in [3]. These tools enable us to understand the different modeling assumptions and asymptotic expansions that are necessary to bridge two-pressure models and drift-flux models. A fundamental step is the use of a drift-flux model with a Darcy closure law (see [7] for related computations).

In this note, the main guidelines are sketched. Full details on the asymptotic developments and the numerical schemes are provided in a forthcoming companion paper.

### 2. Two-phase two-pressure models and drift-flux models

Two-phase two-pressure models [2] are governed by the following set of equations,

with  $\mathbf{u} = (\alpha_2, \alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \alpha_1\rho_1u_1, \alpha_2\rho_2u_2)^T$  in  $d$  space variables, ( $d = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
 \partial_t \alpha_2 + V_i(\mathbf{u}) \cdot \nabla_x \alpha_2 &= \Theta(\mathbf{u})(p_2 - p_1), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\
 \partial_t(\alpha_1\rho_1) + \nabla_x \cdot (\alpha_1\rho_1u_1) &= \Gamma(\mathbf{u}), \\
 \partial_t(\alpha_2\rho_2) + \nabla_x \cdot (\alpha_2\rho_2u_2) &= -\Gamma(\mathbf{u}), \\
 \partial_t(\alpha_1\rho_1u_1) + \nabla_x \cdot (\alpha_1\rho_1u_1 \otimes u_1 + \alpha_1p_1\mathbb{I}) - P_i(\mathbf{u})\nabla_x \alpha_1 & \\
 &= \alpha_1\rho_1f_1(\mathbf{u}) + \Lambda(\mathbf{u})|u_2 - u_1|(u_2 - u_1), & (2.1) \\
 \partial_t(\alpha_2\rho_2u_2) + \nabla_x \cdot (\alpha_2\rho_2u_2 \otimes u_2 + \alpha_2p_2\mathbb{I}) - P_i(\mathbf{u})\nabla_x \alpha_2 & \\
 &= \alpha_2\rho_2f_2(\mathbf{u}) + \Lambda(\mathbf{u})|u_1 - u_2|(u_1 - u_2),
 \end{aligned}$$

where  $\alpha_k$ ,  $\rho_k$ ,  $u_k$  are the void fraction, the density and the velocity of the phase  $k$ ,  $k = 1, 2$  and  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . We assume that solutions to (2.1) belong to the set  $\mathbf{u} = (\alpha_2, (1 - \alpha_2)\rho_1, \alpha_2\rho_2, (1 - \alpha_2)\rho_1u_1, \alpha_2\rho_2u_2)^T \in \Omega := (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . The pressures  $p_k$  are defined by the equations of state  $p_k = \mathcal{P}_k(\rho_k)$  where the  $\mathcal{P}_k$  satisfy classical assumptions for  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}'_k(\rho_k) &> 0, \quad \forall \rho_k > 0, \\
 \lim_{\rho_k \rightarrow 0} \mathcal{P}_k(\rho_k) &= 0, \quad \lim_{\rho_k \rightarrow \infty} \mathcal{P}_k(\rho_k) = +\infty. & (2.2)
 \end{aligned}$$

The vectors  $f_1$  and  $f_2$  denote the external forces for phases 1 and 2 while  $\Lambda$  and  $\Theta$  correspond to positive relaxation functions and the source term  $\Gamma$  corresponds to the mass transfer from phase 2 to phase 1. The two functions  $V_i$  and  $P_i$ , the so-called interfacial velocity and pressure, are convex combinations of, respectively,  $u_1$  and  $u_2$ , and  $p_1$  and  $p_2$ :

$$\begin{aligned}
 V_i(\mathbf{u}) &= \beta_V(\mathbf{u})u_1 + (1 - \beta_V(\mathbf{u}))u_2, \\
 P_i(\mathbf{u}) &= \beta_P(\mathbf{u})p_1 + (1 - \beta_P(\mathbf{u}))p_2,
 \end{aligned}$$

with  $\beta_V, \beta_P \in [0, 1]$ . If  $d = 1$ , such systems are strictly hyperbolic over  $\Omega$ , except when the wave speed  $V_i$  identifies with another wave speed  $u_k \pm \sqrt{\mathcal{P}'_k(\rho_k)}$ ,  $k = 1, 2$  [2, 5] (the system is hyperbolic but not strictly hyperbolic if  $d > 1$  due to the multiplicity of the eigenvalues  $u_k$ ).

Let us focus now on drift-flux models. They read

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{\rho} + \nabla_x \cdot (\tilde{\rho}\tilde{u}) &= 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\
 \partial_t(\tilde{\rho}\tilde{Y}) + \nabla_x \cdot (\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{Y} + \tilde{\rho}\tilde{Y}(1 - \tilde{Y})\tilde{u}_r) &= \tilde{\Gamma}(\tilde{\mathbf{v}}), & (2.3) \\
 \partial_t(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \nabla_x \cdot (\tilde{\rho}\tilde{u} \otimes \tilde{u} + \tilde{p}\mathbb{I} + \tilde{\rho}\tilde{Y}(1 - \tilde{Y})\tilde{u}_r \otimes \tilde{u}_r) &= \tilde{\rho}(1 - \tilde{Y})\tilde{f}_1 + \tilde{\rho}\tilde{Y}\tilde{f}_2,
 \end{aligned}$$

where  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\rho}\tilde{u}$  and  $\tilde{Y}$  are the density of the mixture, the momentum vector of the mixture and the mass fraction of the phase 2. Noting  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho}\tilde{Y}, \tilde{\rho}\tilde{u})^T$ , we define the set of admissible states  $\Omega_D := \{\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{2+d} \mid \tilde{\rho} > 0, (\tilde{\rho}\tilde{Y}/\tilde{\rho}) \in (0, 1)\}$ . The pressure  $\tilde{p}$  is given by some closure law  $\tilde{p} = \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\mathbf{v}})$ . More precisely, let be given two classical pressure laws  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  and  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  satisfying

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{P}}'_k(\tilde{\rho}_k) &> 0, \quad \forall \tilde{\rho}_k > 0, \\
 \lim_{\tilde{\rho}_k \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{P}}_k(\tilde{\rho}_k) &= 0, \quad \lim_{\tilde{\rho}_k \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{P}}_k(\tilde{\rho}_k) = +\infty. & (2.4)
 \end{aligned}$$

Then, the pressure law  $\tilde{p} = \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\mathbf{v}})$  is obtained by solving the  $2 \times 2$  nonlinear system

$$\begin{aligned}
 \tilde{p} &= \tilde{\mathcal{P}}_1(\tilde{\rho}(1 - \tilde{Y})/(1 - \tilde{\alpha})), \\
 \tilde{\mathcal{P}}_1(\tilde{\rho}(1 - \tilde{Y})/(1 - \tilde{\alpha})) &= \tilde{\mathcal{P}}_2(\tilde{\rho}\tilde{Y}/\tilde{\alpha}), & (2.5)
 \end{aligned}$$

where the unknown  $(\tilde{p}, \tilde{\alpha})$  belongs to  $(0, +\infty) \times (0, 1)$ . The existence and uniqueness of the solution  $(\tilde{p}, \tilde{\alpha})$  is ensured by assumptions (2.4), provided that  $\tilde{\mathbf{v}} \in \Omega_D$ . The relative velocity vector  $\tilde{u}_r$  corresponds to the difference between the velocity of the phase 2 and the velocity of the phase 1 and is given by the closure law  $\tilde{u}_r = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{v}})$  (see [9] and [10] for explicit laws). The precise form of the vector-valued function  $\tilde{\Phi}$  will be discussed in Section 4. The functions  $\tilde{\Gamma}$ ,  $\tilde{f}_1$  and  $\tilde{f}_2$  denote the mass transfer and the external forces.

### 3. Asymptotic analysis

The goal of this section is to obtain a model similar to (2.3) using asymptotic arguments, starting from a two-phase two-pressure model (2.1).

#### 3.1. The time scales of the source terms

In order to study the asymptotic limits of (2.1), we must explicit the different scales of the system. To this aim, we use a small parameter  $\varepsilon$  which describes the strength of perturbations of an adimensionalized one-velocity one-pressure equilibrium flow. The first perturbation we are interested in concerns the difference of the velocities. In order to obtain a first order in  $\varepsilon$  perturbation, we set

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \frac{\lambda(\mathbf{u})}{\varepsilon^2} \quad (3.1)$$

since the drag force is quadratic with respect to  $u_1 - u_2$ . It is classical to assume that the pressure relaxation is much faster than the relaxation due to the drag force [9]. Therefore, we use the following scaling for the pressure relaxation coefficient

$$\Theta(\mathbf{u}) = \frac{\theta(\mathbf{u})}{\varepsilon^2} \quad (3.2)$$

(the pressure relaxation term is linear with respect to  $p_1 - p_2$ ). Besides, we assume that the characteristic time associated with the mass transfer is much larger than the ones of the pressure relaxation and of the drag effects. We then use the scaling

$$\Gamma(\mathbf{u}) = \varepsilon\gamma(\mathbf{u}). \quad (3.3)$$

Letting  $\Gamma$  be linear with respect to  $\varepsilon$  will enable us to preserve the mass transfer term when we investigate the long-time behavior of the solutions in Section 3.3.

#### 3.2. First order equilibrium: a drift-flux model with a Darcy law

This first step in bridging models (2.1) and (2.3) lies in the study of the first order asymptotic limit of (2.1).

Solutions to (2.1) with (3.1-3.2) are now parameterized by  $\varepsilon$  and we denote them  $\mathbf{u}^\varepsilon$ . Let us introduce some new variables:

$$\begin{aligned} \rho^\varepsilon &= \alpha_1^\varepsilon \rho_1^\varepsilon + \alpha_2^\varepsilon \rho_2^\varepsilon, & \rho^\varepsilon u^\varepsilon &= \alpha_1^\varepsilon \rho_1^\varepsilon u_1^\varepsilon + \alpha_2^\varepsilon \rho_2^\varepsilon u_2^\varepsilon, & \rho^\varepsilon Y^\varepsilon &= \alpha_2^\varepsilon \rho_2^\varepsilon, \\ u_r^\varepsilon &= u_2^\varepsilon - u_1^\varepsilon, & p^\varepsilon &= \alpha_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_2^\varepsilon p_2^\varepsilon, & p_r^\varepsilon &= p_2^\varepsilon - p_1^\varepsilon. \end{aligned}$$

By easy calculations, one can deduce from (2.1) the following equations:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) &= 0, \\
 \partial_t (\rho^\varepsilon Y^\varepsilon) + \nabla_x \cdot (\rho^\varepsilon u^\varepsilon Y^\varepsilon + \rho^\varepsilon Y^\varepsilon (1 - Y^\varepsilon) u_r^\varepsilon) &= \Gamma^\varepsilon, \\
 \partial_t (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \nabla_x \cdot (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon + p^\varepsilon \mathbb{I} + \rho^\varepsilon Y^\varepsilon (1 - Y^\varepsilon) u_r^\varepsilon \otimes u_r^\varepsilon) \\
 &= \rho^\varepsilon (1 - Y^\varepsilon) f_1^\varepsilon + \rho^\varepsilon Y^\varepsilon f_2^\varepsilon, \\
 \partial_t u_r^\varepsilon + u_r^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla_x u_r^\varepsilon + \nabla_x \cdot ((1/2 - Y^\varepsilon) u_r^\varepsilon \otimes u_r^\varepsilon) + (1/\rho_2^\varepsilon - 1/\rho_1^\varepsilon) \nabla_x p^\varepsilon \\
 &+ (\beta_P / (\rho^\varepsilon Y^\varepsilon) - (1 - \beta_P) / (\rho^\varepsilon (1 - Y^\varepsilon))) + 1/\rho_1^\varepsilon - 1/\rho_2^\varepsilon p_r^\varepsilon \nabla_x \alpha_2^\varepsilon \\
 &+ \rho^\varepsilon / (\rho_1^\varepsilon \rho_2^\varepsilon) \nabla_x p_r^\varepsilon = f_2^\varepsilon - f_1^\varepsilon - \lambda^\varepsilon |u_r^\varepsilon| u_r^\varepsilon / (\varepsilon^2 \rho^\varepsilon Y^\varepsilon (1 - Y^\varepsilon)), \\
 \partial_t p_r^\varepsilon + u_r^\varepsilon \cdot \nabla_x p^\varepsilon + (\rho_2^\varepsilon \mathcal{P}'_2(\rho_2^\varepsilon) - \rho_1^\varepsilon \mathcal{P}'_1(\rho_1^\varepsilon)) (\nabla_x \cdot u^\varepsilon - u_r^\varepsilon \cdot \nabla_x Y^\varepsilon) \\
 &+ (Y^\varepsilon \rho_1^\varepsilon \mathcal{P}'_1(\rho_1^\varepsilon) + (1 - Y^\varepsilon) \rho_2^\varepsilon \mathcal{P}'_2(\rho_2^\varepsilon)) \nabla_x \cdot u_r^\varepsilon + (\alpha_1^\varepsilon u_2^\varepsilon - \alpha_2^\varepsilon u_1^\varepsilon) \cdot \nabla_x p_r^\varepsilon \\
 &+ (\beta_V \rho_2^\varepsilon \mathcal{P}'_2(\rho_2^\varepsilon) / \alpha_2^\varepsilon - (1 - \beta_V) \rho_1^\varepsilon \mathcal{P}'_1(\rho_1^\varepsilon) / \alpha_1^\varepsilon - p_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon \cdot \nabla_x \alpha_2^\varepsilon \\
 &= -(\rho_1^\varepsilon \mathcal{P}'_1(\rho_1^\varepsilon) / \alpha_1^\varepsilon + \rho_2^\varepsilon \mathcal{P}'_2(\rho_2^\varepsilon) / \alpha_2^\varepsilon) \theta^\varepsilon p_r^\varepsilon / \varepsilon^2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

It is worth noticing that under assumptions (2.2), the application which maps  $\mathbf{u}^\varepsilon \in \Omega$  to  $(\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon Y^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon, u_r^\varepsilon, p_r^\varepsilon)^T$  is a diffeomorphism. Therefore,  $\alpha_2^\varepsilon, \rho_1^\varepsilon, \rho_2^\varepsilon, f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon \dots$  must be understood in (3.4) as functions of  $(\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon Y^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon, u_r^\varepsilon, p_r^\varepsilon)^T$  (we keep for simplicity the same notations whatever the dependence of the functions on  $\mathbf{u}^\varepsilon$  or on  $(\rho^\varepsilon, \rho^\varepsilon Y^\varepsilon, \rho^\varepsilon u^\varepsilon, u_r^\varepsilon, p_r^\varepsilon)^T$  is). We thus deduce that the system (3.4) is closed.

We are interested in studying solutions of (3.4), near the equilibrium defined by

$$u_r^\varepsilon = 0 \quad \text{and} \quad p_r^\varepsilon = 0, \tag{3.5}$$

and in obtaining a closed system which describes such solutions up to the first order in  $\varepsilon$ . With this in mind, we follow the Chapman-Enskog method and focus on solutions of the form

$$\begin{aligned}
 u_r^\varepsilon &= \varepsilon u_{r1}^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
 p_r^\varepsilon &= \varepsilon p_{r1}^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

These expansions and the last two equations of (3.4) lead us to define

$$\begin{aligned}
 |u_{r1}^\varepsilon| u_{r1}^\varepsilon &= \frac{\rho^\varepsilon Y^\varepsilon (1 - Y^\varepsilon)}{\lambda^\varepsilon} \left( f_2^\varepsilon - f_1^\varepsilon + \left( \frac{1}{\rho_1^\varepsilon} - \frac{1}{\rho_2^\varepsilon} \right) \nabla_x p^\varepsilon \right), \\
 p_{r1}^\varepsilon &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

We are now in position to propose a first order equilibrium system associated with the two-phase two-pressure model (2.1), that is to say a reduced model in which only second (and higher) order terms in  $\varepsilon$  have been neglected.

**PROPOSITION 3.1.** *Let us note  $\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho u)^T \in \Omega_D$  and assume that  $\Gamma, \lambda, f_1$  and  $f_2$  only depend on  $\mathbf{v}$ . Consider the system*

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) &= 0, \\
 \partial_t (\rho Y) + \nabla_x \cdot (\rho u Y + \rho Y (1 - Y) u_r) &= \Gamma(\mathbf{v}), \\
 \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + p \mathbb{I} + \rho Y (1 - Y) u_r \otimes u_r) \\
 &= \rho (1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v}),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

where

$$|u_r|u_r = \varepsilon^2 \frac{\rho Y(1-Y)}{\lambda(\mathbf{v})} \left( f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) + \left( \frac{1}{\rho_1(\mathbf{v})} - \frac{1}{\rho_2(\mathbf{v})} \right) \nabla_x p \right), \quad (3.9)$$

and with the pressure law  $p = \mathcal{P}(\mathbf{v})$ , given by the solution  $(p, \alpha_2^\varepsilon)$  of the  $2 \times 2$  nonlinear system

$$\begin{aligned} p &= \mathcal{P}_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2^\varepsilon)), \\ \mathcal{P}_1(\rho(1-Y)/(1-\alpha_2^\varepsilon)) &= \mathcal{P}_2(\rho Y/\alpha_2^\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.10)$$

The system (3.8-3.10) is closed and its solutions correspond to equilibrium solutions of the two-phase two-pressure model (2.1) up to the first order in  $\varepsilon$ .

In order to prove that this system is closed, we only need to study the system (3.10). As soon as  $\mathbf{v} \in \Omega_D$ , simple computations allow to check that assumptions (2.2) on the pressure laws ensure that  $\alpha_2^\varepsilon \in (0, 1)$  and that there exists a function  $\mathcal{P}$  that maps  $\mathbf{v}$  to  $p$  (see (2.4) and (2.5) for a similar discussion). Note that these assumptions also ensure that the pressure laws are invertible, so that the functions  $\rho_k(\mathbf{v}) := \mathcal{P}_k^{-1}(\mathcal{P}(\mathbf{v}))$ ,  $\mathbf{v} \in \Omega_D$ , in (3.9) make sense.

Besides, only terms of order  $\varepsilon^2$  and higher have been neglected in (3.8-3.10), thanks to the assumptions on  $\lambda$ ,  $\Gamma$ ,  $f_1$  and  $f_2$  made in Proposition 3.1. The term  $u_r \otimes u_r$ , of order  $\varepsilon^2$ , has been kept in (3.8) in agreement with the classical form of drift-flux models. It is also important to remark that, due to the order in  $\varepsilon^2$  of the pressure relaxation, the first order pressure correction  $p_{r1}^\varepsilon$  is null and consequently, the system (3.8-3.10) is independent of  $\theta$ .

This system enables to describe flows near the equilibrium (3.5) of system (2.1) (see [7] for a study of a related system). It is the first step towards a classical drift-flux model. Indeed,  $\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho u)^T$  in (3.8) and  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho} Y, \tilde{\rho} \tilde{u})^T$  in (2.3) verify the same set of partial differential equations, with  $\Gamma \equiv \tilde{\Gamma}$ ,  $f_1 \equiv \tilde{f}_1$  and  $f_2 \equiv \tilde{f}_2$ , the only difference being that the hydrodynamic closure law (3.9) is a Darcy-like law, in the sense that  $u_r$  depends not only on  $\mathbf{v}$  but also on its derivative *via*  $\nabla_x p$ .

### 3.3. Permanent flows: from a Darcy law to a zeroth order law

In order to obtain a zeroth order hydrodynamic closure law, we investigate permanent flows. We define such flows as the long-time limit of the solutions of (3.8) along the characteristics of the flow. We then focus on the characteristics of the flow and rewrite system (3.8) in the associated frame of reference. Let us consider the differential system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, t), & t > 0, \\ x(0) = \xi, \end{cases} \quad (3.11)$$

where  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . We denote  $x(\xi, t)$  the solution of (3.11) and introduce the associated change of coordinates

$$\bar{\phi}(\xi, t) = \phi(x(\xi, t), t), \quad (3.12)$$

where  $\phi$  is a given function in Eulerian coordinates and  $\bar{\phi}$  the same function in Lagrangian coordinates. We then obtain

$$\partial_t \bar{\phi} = \overline{\partial_t \phi + u \cdot \nabla_x \phi}.$$

The equations of (3.8) becomes in the new frame of reference

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\rho} + \overline{\rho \nabla_x \cdot u} &= 0, \\ \partial_t \bar{\rho Y} + \overline{\rho Y \nabla_x \cdot u} + \overline{\nabla_x \cdot (\rho Y (1 - Y) u_r)} &= \varepsilon \bar{\gamma}, \\ \partial_t \bar{\rho u} + \overline{(\rho \nabla_x \cdot u) u} + \overline{\nabla_x p} + \overline{\nabla_x \cdot (\rho Y (1 - Y) u_r \otimes u_r)} &= \overline{\rho((1 - Y) f_1 + Y f_2)}. \end{aligned}$$

In order to investigate the long-time limit, we use the scaling  $s = \varepsilon t$ . This leads to

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_s \bar{\rho} + \overline{\rho \nabla_x \cdot u} &= 0, \\ \varepsilon \partial_s \bar{\rho Y} + \overline{\rho Y \nabla_x \cdot u} + \overline{\nabla_x \cdot (\rho Y (1 - Y) u_r)} &= \varepsilon \bar{\gamma}, \\ \varepsilon \partial_s \bar{\rho u} + \overline{(\rho \nabla_x \cdot u) u} + \overline{\nabla_x p} + \overline{\nabla_x \cdot (\rho Y (1 - Y) u_r \otimes u_r)} &= \overline{\rho((1 - Y) f_1 + Y f_2)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

At the zeroth order, it remains

$$\overline{\rho \nabla_x \cdot u} = 0, \tag{3.14}$$

$$\partial_s \overline{\rho Y} + \overline{\nabla_x \cdot (\rho Y (1 - Y) u_{r1})} = \bar{\gamma}, \tag{3.15}$$

$$\overline{\nabla_x p} = \overline{\rho((1 - Y) f_1 + Y f_2)}. \tag{3.16}$$

Assuming now that the flow governed by (3.8) satisfies this relation for all  $t > 0$  and  $x \in \mathbb{R}^d$ , the closure law (3.9) becomes

$$\begin{aligned} |u_r| u_r &= \varepsilon^2 \frac{\rho Y (1 - Y)}{\lambda(\mathbf{v})} \left( f_2(\mathbf{v}) - f_1(\mathbf{v}) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\rho_1(\mathbf{v})} - \frac{1}{\rho_2(\mathbf{v})} \right) (\rho(1 - Y) f_1(\mathbf{v}) + \rho Y f_2(\mathbf{v})) \right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

from which one can deduce a zeroth order closure law  $u_r = \Phi(\mathbf{v})$ .

REMARK 1. *Provided that  $\lambda$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  and  $\mathcal{P}$  are only functions of  $\rho$  and  $\rho Y$ , equations (3.15), (3.16) with the closure laws*

$$\bar{p} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{v}}) \quad \text{and} \quad \overline{|u_{r1}| u_{r1}} = \overline{\frac{\rho Y (1 - Y)}{\lambda} \left( f_2 - f_1 + \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \nabla_x p \right)}. \tag{3.18}$$

*constitute a closed system very similar those which govern the evolution of the saturation of a fluid in a porous medium, coupled with a Darcy law.*

REMARK 2. *One can here notice the importance of the scaling  $\Gamma = \varepsilon \gamma$ . Indeed, when  $\varepsilon \rightarrow 0$ , the second equation of (3.13) directly vanishes whereas, if  $\Gamma$  had been independent of  $\varepsilon$ , the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  would yield  $\Gamma \equiv 0$ .*

#### 4. The asymptotic drift-flux model

We have obtained a closed drift-flux model, composed of the PDE's (3.8) with the zeroth order hydrodynamic closure law (3.17) and the pressure law given by the solution of (3.10). This last equation is exactly the pressure law  $\tilde{\mathcal{P}}$  which appears for classical drift-flux models (2.3), provided that  $\mathcal{P}_k \equiv \tilde{\mathcal{P}}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Moreover,  $\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho u)$  in (3.8) and  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho} Y, \tilde{\rho} \tilde{u})$  in (2.3) verify the same set of PDE's, with  $f_1 \equiv \tilde{f}_1$ ,  $f_2 \equiv \tilde{f}_2$  and  $\Gamma \equiv \tilde{\Gamma}$ . Then, it remains to address the hydrodynamic law (3.17).

#### 4.1. The case of a vertical pipe with buoyancy effects

In order to understand the connection between the hydrodynamic laws  $\Phi$  and  $\tilde{\Phi}$ , we present the case of a dispersed flow in a vertical confined channel only subject to the gravity force, that is to say we only consider classical buoyancy effects. The model is now one-dimensional,  $x$  is the upward direction and thus,  $f_1 = f_2 = -g$  where  $g$  is the gravity constant. Assume that the phase 1 is the air and the phase 2 is the liquid, then  $\rho_1 \ll \rho_2$ .

Following [10], the drag force in the two-pressure model (2.1) can be defined by

$$\Lambda(\mathbf{u})|u_r|u_r = \frac{3}{8R_D}\alpha_1\rho_2C_D(\mathbf{u})|u_r|u_r$$

where  $R_D$  is the bubble radius (assumed to be constant) and  $C_D$  is the drag coefficient. For the present configuration of flow, Ishii and Zuber proposed the following formula in [11]

$$C_D(\mathbf{u}) = \frac{4R_D}{3}(\alpha_2)^{-\vartheta}\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g/\sigma},$$

where  $\sigma$  denotes the surface tension and the value of the constant  $\vartheta$  is given according to the ratio of the dynamical viscosities of the phases. This leads to

$$\Lambda(\mathbf{u})|u_r|u_r = \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_2)^{-\vartheta}\rho_2\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g/\sigma}|u_r|u_r,$$

from which we can deduce  $\Lambda$  (note that  $\Lambda$  can also be expressed as a function of  $\mathbf{v}$ ). On the other hand, Equation (3.17) reduces to

$$\Lambda(\mathbf{u})|u_r|u_r = -\alpha_1\alpha_2(\rho_2 - \rho_1)g.$$

Due to the configuration of the flow, both velocities  $u_1$  and  $u_2$  are negative and  $u_2 \leq u_1$ , which yields  $\Lambda(\mathbf{u}) \geq 0$ . Identifying the two latter equations enables us to deduce the following form for the relative velocity:

$$u_r = -\sqrt{2}\left(\frac{\sigma(\rho_2 - \rho_1)g}{(\rho_2)^2}\right)^{1/4}(\alpha_2)^{(1+\vartheta)/2}.$$

This definition corresponds to a classical hydrodynamic closure law  $\tilde{u}_r = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{v}})$  for drift-flux models (see for instance [8] or [6] for such models and extensions). Actually, this correspondence is not so surprising since it is a classical way of modeling in two-phase flows. The cornerstone of this derivation in modeling of two-phase flows is the balance of the gradient of pressure with the external forces, which is recovered here by the study of permanent flows.

#### 4.2. Some remarks on the derivation

Let us first provide a comment on the entropy criterion. The functions  $V_i$  and  $P_i$  are only assumed to be convex combinations of the velocities and pressures respectively. For a more detailed analysis regarding the consistency of two-phase two-pressure models with the entropy principle, additional requirements on these two quantities must be added [5]. This should enable us to study the dissipative structure of the relaxation terms and the nonlinear stability of the asymptotic limits proposed here, following [3].

On the other hand, a theoretical study of the asymptotic limits described in this paper should be performed. In particular, the works of Yong [13] on the relation of



the dissipative structure of the relaxation phenomenon with the convergence towards equilibrium smooth flows could be very useful to justify the asymptotic link between the two-pressure model (2.1) and the drift-flux model (2.3).

In general, system (3.8) is directly obtained from (2.1) by algebraic manipulations and restricting to one-pressure flows, while the drift law is derived using the balance of the buoyancy effects by the drag forces. The novelty of our work is the proposition of a hierarchy between two-pressure models and drift-flux models by the use of asymptotic mechanisms.

**Acknowledgments.** The authors would like to thank Olivier Grégoire (CEA Saclay) for valuable insights in the origins of drift-flux models and illuminating discussions. This work falls within the scope of a joint research program on the coupling of multiphase flows models between CEA Saclay and Laboratoire Jacques-Louis Lions (<http://www.ann.jussieu.fr/groupe/cea>). It was partially supported by the Neptune Project, with financial support from CEA, EDF, IRSN and AREVA-NP.

## REFERENCES

- [1] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, and N. Seguin. The coupling of homogeneous models for two-phase flows. *Int. J. Finite Volumes*, 4(1):1–39, 2007.
- [2] M. R. Baer and J. W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 12:861–889, 1986.
- [3] G. Q. Chen, C. D. Levermore, and T. P. Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(6):787–830, 1994.
- [4] D. A. Drew and S. Passman. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, New-York, 1998.
- [5] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(5):663–700, 2004.
- [6] O. Grégoire and M. Martin. Derivation of a well-posed and multidimensional drift-flux model for boiling flows. *C. R. Mecanique*, 333(6):459–466, 2005.
- [7] H. Guillard and F. Duval. A Darcy law for the drift velocity in a two-phase flow model. *J. Comput. Phys.*, 224(1):288–313, 2007.
- [8] T. Hibiki and M. Ishii. One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:4935–4948, 2003.
- [9] M. Ishii. *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- [10] M. Ishii and K. Mishima. Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nuclear Engrg. Design*, 82(2-3):107–126, 1984.
- [11] M. Ishii and N. Zuber. Drag coefficient and relative velocity in bubbly droplet, or particulate flows. *AIChE J.*, 25:843–855, 1979.
- [12] H. B. Stewart and B. Wendroff. Two-phase flow: models and methods. *J. Comput. Phys.*, 56(3):363–409, 1984.
- [13] W.-A. Yong. Entropy and global existence for hyperbolic balance laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 172(2):247–266, 2004.
- [14] N. Zuber and J. A. Findlay. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *J. Heat Transfer*, 68:453–468, 1965.

Annalisa AMBROSO, Christophe CHALONS, Thomas GALIÉ:  
DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France  
annalisa.ambroso@cea.fr, thomas.galie@cea.fr

Christophe CHALONS:  
Université Paris Diderot-Paris 7 and UMR 7598, F-75005 Paris, France  
chalons@math.jussieu.fr

Frédéric COQUEL, Edwige GODLEWSKI, Pierre-Arnaud RAVIART, Nicolas SEGUIN:  
UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire J.-L. Lions, F-75005, Paris, France  
CNRS, UMR 7598, Laboratoire J.-L. Lions, F-75005, Paris, France  
coquel@ann.jussieu.fr, godlewski@ann.jussieu.fr,  
pa@raviart.com, seguin@ann.jussieu.fr





## **Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques.**

### **Résumé**

Cette thèse est dédiée à l'étude de problèmes de couplage en espace entre différents modèles d'écoulements compressibles. Nous considérons des formulations monodimensionnelles où l'interface de couplage est mince, fixe et séparant deux régions de l'espace correspondant aux deux modèles à coupler. L'objectif de notre travail consiste à définir une condition de couplage à l'interface et à résoudre numériquement le problème de couplage muni de cette condition.

Après un état de l'art non exhaustif sur le couplage de systèmes hyperboliques de lois de conservation, nous proposons une nouvelle formulation de condition de couplage basée sur l'ajout d'un terme source mesure agissant exactement sur l'interface de couplage. Nous supposons, dans un premier temps, que le poids associé à ce terme source est connu et constant. Deux solveurs de Riemann sont développés dont une approche par relaxation préservant les solutions équilibres du problème de couplage. Cette méthode par relaxation est reprise par la suite dans le cadre d'un problème d'optimisation sous contraintes pour déterminer un poids dynamique en temps selon différentes motivations de transmission à l'interface.

Dans une seconde partie, nous développons un solveur de Riemann approché pour un modèle bifluide à deux pressions dans le cas d'un écoulement diphasique isentropique par phase. Le modèle en question a pour particularité de comprendre des termes non conservatifs que l'on réécrit alors sous la forme de termes sources mesures. L'approche par relaxation établie dans la partie précédente est alors étendue au cas du modèle bifluide, moyennant une estimation *a priori* des contributions non conservatives. Cette méthode nous permet, dans un dernier chapitre, de résoudre numériquement le problème de couplage interfacial entre un modèle bifluide à deux pressions et un modèle de drift-flux grâce à l'approche dite du modèle père.

**Mot-clés :** couplage interfacial, systèmes hyperboliques, terme source mesure, méthodes volumes finis, solveurs de Riemann, relaxation, modèle bifluide, termes non conservatifs, modèle de drift-flux, modèle père.

---

## **Interface Model Coupling in Fluid Dynamics. Application to Two-Phase Flows.**

### **Abstract**

This thesis is devoted to the study of interface model coupling problems in space between different models of compressible flows. We consider one-dimensional problems where the interface is sharp, fixed and separating two regions of space corresponding to the two coupled models. Our goal is to define a coupling condition at the interface and to solve numerically the coupling problem with this condition.

After a state of art on the interface model coupling of hyperbolic systems of conservation laws, we propose a new coupling condition by adding in the equations of the coupled problem a measure source term at the interface. We first suppose a given constant weight associated to this source term. Two Riemann solvers are developed and one of them is based on a relaxation approach preserving equilibrium solutions of the coupled problem. This relaxation method is then used in an optimization problem, defined by several motivations at the interface, which permits to calculate a time dynamical weight.

In a second part, we develop an approached Riemann solver for a two-phase two-pressure model in the particular case of a two-phase isentropic flow. Such a model contains non conservative terms that we write under the form of measure source terms. The previous relaxation method is thus extended to the case of the two-phase two-pressure model with an *a priori* estimation of the non conservative term contributions. The method allows us to solve, in the next and last chapter, the coupling problem of a two-fluid two-pressure model with a drift-flux model thanks to the father model approach.

**Keywords :** interface coupling, hyperbolic systems, measure source term, finite volume methods, Riemann solvers, relaxation, two-phase flow model, non conservative terms, drift-flux model, father model.