



HAL
open science

Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace

Jean-Charles Passieux

► **To cite this version:**

Jean-Charles Passieux. Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT: . tel-00395693

HAL Id: tel-00395693

<https://theses.hal.science/tel-00395693>

Submitted on 16 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°ENSC-2008/131



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Jean-Charles PASSIEUX

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**Approximation radiale
et méthode LATIN multiéchelle
en temps et espace**

Soutenue à Cachan le 1er Décembre 2008 devant le jury composé de :

Bernhard A. SCHREFLER	Université de Padoue	Président
Francisco CHINESTA	École Centrale de Nantes	Rapporteur
David DUREISSEIX	Université Montpellier 2	Rapporteur
Jocelyn GAUDIN	Airbus France	Examineur
Pierre LADEVÈZE	ENS de Cachan	Examineur
David NÉRON	ENS de Cachan	Examineur

LMT-Cachan

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre LADEVÈZE pour m'avoir fait confiance en m'ouvrant les portes de son univers passionnant, en me déléguant des responsabilités et en me permettant de me rendre à des conférences en France et à l'étranger. Son excellence scientifique, son exigence et sa disponibilité ont rendu ces trois années aussi productives qu'agréables.

Merci également à David NÉRON pour son aide et ses conseils précieux. Ses qualités humaines, scientifiques et pédagogiques ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement Bernhard A. SCHREFLER de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse et également Jocelyn GAUDIN d'avoir apporté une expertise industrielle à ce travail de thèse. Je souhaite remercier très chaleureusement Francisco « Paco » CHINESTA pour les discussions que nous avons pu avoir, son humour et ses conseils, enfin merci de m'avoir si gentiment invité à participer à un workshop à Biarritz. Qu'il me soit permis de remercier David DUREISSEIX qui a contribué par ses nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, je lui en suis très reconnaissant. Je ne sais comment exprimer ma gratitude à ces deux dernières personnes d'avoir accepté si simplement de rapporter mon travail. C'est un immense honneur pour un jeune chercheur d'avoir pu soutenir sa thèse devant pareil jury.

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan dirigé par Olivier ALLIX, qu'il soit remercié de m'y avoir accueilli. Un grand merci à tous ses membres que j'ai eu l'honneur de côtoyer et qui ont contribué, de près ou de loin, à ce travail.

Un grand merci aussi aux copains du LMT et d'ailleurs, Julien PEBREL, Etienne VERGNAULT, Pierre KERFRIDEN et Pierre GOSSELET, Benjamin SOURCIS, Arnaud LAZARUS, Felipe BORDEU, David ODIÈVRE, Paul ENJALBERT... et tous les autres que je n'ai pas la place de citer... Pour les échanges scientifiques, mais aussi et surtout pour l'amitié, le sport, les soirées, les débats animés et tous ces bon moments sans lesquels tout ceci n'aurait certainement pas eu la même saveur. Un grand merci amical à Frisou, le sédatif du centre de calcul.

Je ne terminerai pas sans adresser un immense merci à ma famille et en particulier à mes parents qui m'ont encouragé dans mes études, et à qui je dois tout. Enfin une pensée affectueuse va à Maud et à notre petite Jeanne pour la tendresse et le soutien de tous les jours.

Paris, Décembre 2008

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
I Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation pour les problèmes non linéaires d'évolution	7
1 État de l'art sur le multiéchelle	9
1 Stratégies multiéchelles en espace	10
1.1 Méthodes d'homogénéisation	10
1.2 Méthodes d'enrichissement	13
1.3 Méthodes microscopiques directes	19
2 Stratégies multiéchelles en temps	26
2.1 Méthodes multi-pas en temps	26
2.2 Méthodes d'enrichissement micro	27
2.3 Méthodes dédiées aux chargements cycliques	27
2.4 Méthodes de décomposition de domaine en temps	30
2 Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation	35
1 Problème de référence à l'échelle micro	36
2 Problème de référence sous-structuré en temps et en espace	37
2.1 Conditions d'admissibilité sur $\Omega_E \times I_i^G$	38
2.2 Comportement d'interface	39
2.3 Reformulation du problème de référence	40
3 Description multiéchelle sur l'espace-temps	40
3.1 Une description des inconnues à deux échelles	40
3.2 Admissibilité des quantités macro	41
4 La stratégie de calcul multiéchelle	42
4.1 La méthode LATIN	42
4.2 Étape locale à l'itération $n + 1$	43
4.3 Étape linéaire à l'itération $n + 1$	44
5 Précisions sur l'algorithme	47
3 Mise en œuvre de la stratégie	51
1 Choix des espaces d'approximation	52
1.1 Discrétisation spatiale	52
1.2 Discrétisation temporelle	54

2	Étape linéaire pour un matériau viscoélastique	55
3	Étape locale pour quelques types d'interfaces	57
4	Choix des directions de recherche	60
4.1	Directions de recherche dans les sous-structures	60
4.2	Directions de recherche dans les interfaces	61
5	Un code éléments finis	62
4	Maîtrise de la convergence	67
1	Contrôle de la convergence	68
1.1	Indicateur d'erreur classique	68
1.2	Définition d'un nouvel indicateur d'erreur	69
1.3	Comparaison sur un exemple de contact	71
1.4	Limitations	72
2	Base macro et extensibilité	74
2.1	Base macro spatiale	74
2.2	Base macro temporelle	77
2.3	Techniques de raffinement classiques	79
2.4	Une technique d'enrichissement automatique	81
II	Approximation radiale et stratégie de calcul adaptative	87
5	L'approximation radiale sur l'espace-temps	89
1	La POD	91
1.1	Le principe	91
1.2	Constructions classiques de la POD	91
1.3	Exemple	93
2	L'approximation radiale sur l'espace-temps	95
2.1	Définition classique	95
2.2	Définition sous forme d'un problème de minimisation	97
2.3	Approximation d'une fonction connue	98
3	Application à la résolution d'un problème micro	101
3.1	Réécriture de la direction de recherche	101
3.2	Reformulation des problèmes micro	102
3.3	Nouvelle approche pour l'approximation d'un problème micro	102
6	Mise en œuvre de la nouvelle technique d'approximation radiale	109
1	Exemple de référence	110
2	Approximation d'ordre 1	111
2.1	Problème spatial	111
2.2	Problème temporel	116
2.3	Exemple	119
3	Approximation d'ordre m	119
4	Mise à jour des fonctions temporelles	121

4.1	Problème temporel sur toutes les fonctions	122
4.2	Une technique alternative de résolution des problèmes temporels .	124
4.3	Résolution d'équations différentielles avec conditions finales	124
4.4	Application à la réutilisation des fonctions spatiales	129
7	Une stratégie de calcul adaptative	133
1	Les méthodes de multirésolution	134
1.1	Méthode LATIN pour la multirésolution	134
1.2	Méthodes d'accélération Krylov	135
1.3	Réduction de modèle basée sur la POD	135
2	Une méthode de calcul adaptative	138
2.1	Quelques remarques	139
2.2	Adaptativité et gestion de la base réduite	140
3	Exemples 3D	147
	Conclusion	151
	Bibliographie	153

Introduction

Aujourd'hui, la conception de structures complexes telles que celles rencontrées dans l'aéronautique ou le spatial, nécessite encore des campagnes d'essais lourdes et coûteuses, allant des essais de base jusqu'à la rupture d'une ou plusieurs structures complètes, en passant par différents niveaux d'éprouvettes technologiques. C'est pourquoi, les acteurs du monde industriel mettent en avant les simulations numériques dans le processus de conception afin de guider, compléter ou remplacer une partie de l'approche expérimentale.

Dans ce contexte, on constate un intérêt grandissant pour les méthodes de calcul multiéchelles, capables de prédire le comportement de structures dans lesquelles au moins deux échelles vraiment différentes peuvent être identifiées, tant au niveau spatial que temporel. Un exemple typique est celui d'une grande structure dans laquelle apparaissent des phénomènes locaux tels que le flambage local ou la micro fissuration. Un autre exemple emblématique est celui des matériaux à hautes performances, dont les composants élémentaires peuvent avoir des propriétés mécaniques très différentes. C'est le cas notamment des matériaux composites dont la microstructure fortement hétérogène est décrite à une échelle très petite. La difficulté pour simuler de tels problèmes réside dans le fait que les phénomènes complexes à l'échelle microscopique peuvent avoir une influence sur le comportement mécanique global de ces dernières ; ces phénomènes pouvant également suivre des évolutions rapides par rapport à une évolution globalement lente de la structure. La volonté de prendre en compte précisément ces phénomènes a conduit à l'élaboration de modèles de plus en plus sophistiqués. Ceux-ci fournissent une description du matériau à une échelle fine par rapport à celle de la structure et permettent de prendre en compte des phénomènes à courte longueur de variation en temps. Le recours à ces modèles implique donc l'utilisation de discrétisations fines en espace et en temps, et leur mise en place à l'échelle d'une structure complète conduit à des problèmes à très grand nombre d'inconnues dont la résolution est hors de portée des moyens de calculs disponibles aujourd'hui.

La résolution de ces problèmes nécessite donc le développement de stratégies de calcul mettant en œuvre une véritable interaction entre les différentes échelles spatiales et temporelles. Ce challenge scientifique a conduit à la mise en place de partenariats privilégiés entre certains acteurs des milieux industriels et universitaires, sous la forme de grands programmes de recherche nationaux ou européens (MAAXIMUS, MAIA...) ou de mécénats scientifiques. Les travaux de cette thèse s'inscrivent ainsi dans le cadre de la chaire *Advanced Computational Structural Mechanics* de la Fondation EADS dont est titulaire Pierre Ladevèze.

Une des premières approches proposées pour tenter de répondre à cette problématique est la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques initiée par Sanchez-Palencia [Sanchez-Palencia, 1974, 1980]. Il s'agit d'une véritable méthode multiéchelle puisqu'elle conduit à la résolution d'un problème grossier homogénéisé dont le modèle inconnu *a priori* est associé au comportement d'un volume élémentaire représentatif. Les propriétés locales, quant à elles, peuvent être déduites des quantités homogénéisées. Cette théorie est à la base de nombreuses stratégies [Devries et al., 1989; Fish et al., 1997; Oden et al., 1999; Feyel, 2003]. Outre la périodicité, cette approche repose sur l'hypothèse forte que le rapport de l'échelle rapide sur l'échelle lente soit petit. De plus, les bords de la structure, qui ne peuvent être homogénéisés, nécessitent un traitement particulier [Auriel et al., 1982; Devries et al., 1989]. Enfin, ces démarches ne sont pas directement adaptées aux problèmes non linéaires d'évolution. D'autres démarches en marge de l'homogénéisation ont été proposées. Parmi ces dernières, nous pouvons distinguer une première famille de méthodes basée sur une description grossière enrichie par l'échelle locale. L'échelle micro est décrite soit plus finement [Ibrahimbegović et Melnyk, 2007], soit avec un modèle différent [Ben Dhia, 1998], soit analytiquement [Hughes et al., 1998]. Ce type de méthodes peut également consister à augmenter l'espace de recherche, tirant parti de la connaissance que l'on peut avoir *a priori* de la solution dans certaines régions de l'espace [Melenk et Babuška, 1996; Moës et al., 1999; Strouboulis et al., 2001]. Une seconde famille d'algorithmes itératifs prend comme point de départ le problème à l'échelle fine, et utilise l'échelle grossière pour accélérer la convergence. C'est le cas notamment des méthodes de décomposition de domaine [Mandel, 1993; Farhat et Roux, 1991; Ladevèze et Dureisseix, 2000], mais aussi les méthodes multigrilles [Briggs, 1987; Fish et Belsky, 1995]. Cependant toutes ces méthodes n'introduisent une séparation d'échelles qu'au niveau spatial.

Les aspects multiéchelles en temps ont fait l'objet de beaucoup moins de travaux. Nous trouvons principalement des méthodes multi-pas-de-temps [Gravouil et Combescure, 2001; Combescure et Gravouil, 2002; Gravouil et Combescure, 2003; Faucher et Combescure, 2003] ou des intégrateurs parallèles [Farhat et Chandesris, 2003; Belytschko et al., 1985; Bottasso, 2002] qui permettent d'avoir des représentations adaptées dans les différentes régions de l'espace, chacune traitée de manière monoéchelle. D'autres approches [Lions et al., 2001; Maday et Turinici, 2002] fournissent une véritable description à deux échelles de la solution. Cependant, aucune de ces méthodes ne met réellement en œuvre une procédure d'homogénéisation en temps. Il semble que ce type d'homogénéisation soit restreint au cas particulier des chargements cycliques [Guennouni, 1988; Cognard et Ladevèze, 1993; Ladevèze, 1999].

Dans ce contexte, une stratégie itérative basée sur la méthode LATIN¹ et sur l'introduction d'une échelle micro et macro en espace a été développée pour tenter de répondre à cette problématique [Ladevèze et al., 2001]. Dans un second temps, cette stra-

¹acronyme de Large Time INcrement method, voir [Ladevèze, 1999]

tégie a été étendue au domaine temporel [Ladevèze et Nouy, 2003] en tirant parti du fait que la méthode LATIN permet de travailler sur l'espace-temps complet à chaque itération. Cette approche multiéchelle avec homogénéisation a l'avantage de ne présenter aucune des limitations de la théorie de l'homogénéisation classique. Au cours de ces travaux, des premiers résultats encourageants ont été obtenus sur des exemples démonstrateurs 2D à faible nombre de degrés de libertés. Cependant, certaines améliorations étaient nécessaires afin de pouvoir étendre véritablement cette stratégie aux problèmes 3D complexes.

Le travail de thèse présenté ici étend cette stratégie aux **problèmes tridimensionnels complexes**, incluant de nombreuses surfaces de contact avec ou sans frottement, et s'attache plus précisément au développement de nouvelles techniques de calcul performantes adaptées aux **problèmes dépendants du temps** pour **réduire le coût de calcul** de cette stratégie tout en lui assurant une plus grande **robustesse**.

Le premier point de cette stratégie consiste à partitionner le domaine espace-temps étudié. Au niveau spatial, la structure est décomposée en sous-structures et en interfaces, chacune ayant leurs propres variables et équations. Ces sous-structures et interfaces sont à leur tour discrétisées par éléments finis [Hugues, 1987]. D'un point de vue purement spatial, la stratégie peut-être considérée comme une stratégie de décomposition de domaine mixte. Au niveau temporel, l'intervalle d'étude est découpé en sous-intervalles, eux-mêmes discrétisés par un schéma d'intégration de type Galerkin discontinu [Eriksson et al., 1985]. La distinction des échelles se fait uniquement sur les quantités d'interface qui sont vues comme la somme d'une contribution « macro » et de son complément « micro ». Un choix classique consiste à définir la partie « macro » comme une moyenne en temps et en espace.

Le deuxième point de cette méthode est d'utiliser, pour résoudre le problème ainsi posé, la méthode LATIN [Ladevèze, 1985c, 1999] qui est un solveur itératif initialement dédié aux problèmes non linéaires d'évolution, et qui a pour originalité d'être non-incrémental *i.e.* qui, à chaque itération, génère une approximation de la solution sur l'intervalle de temps entier. Dans notre cas, cet algorithme nous conduit à la résolution d'un ensemble de problèmes d'évolution linéaires indépendants par sous-structures et sous-intervalles temporels, ainsi qu'à la résolution d'un problème macroscopique homogénéisé en espace et en temps, qui permet de propager une partie des efforts (leur partie macro) à toute la structure et sur tout l'intervalle d'étude. Le choix de l'espace des quantités macro n'a pas d'influence sur la solution à convergence, mais a un rôle essentiel dans l'efficacité de la méthode.

La première partie de ce travail a donc consisté à étendre et mettre en œuvre cette stratégie dans le cas des problèmes tridimensionnels. Parmi les travaux liés à sa mise en œuvre, une attention particulière a été vouée à la maîtrise de la convergence. S'agissant d'une stratégie itérative, il est nécessaire de définir un indicateur de convergence fiable. L'indicateur classiquement utilisé [Ladevèze et al., 2001] ne semble pas adapté

à nos problèmes pour les raisons suivantes : le niveau d'erreur dépend de certains paramètres de l'algorithme ; les erreurs commises localement sont mal évaluées lorsque le nombre de sous-structures augmente. Nous avons donc proposé un nouvel indicateur de convergence basé sur le concept d'erreur en relation de comportement qui ne présente pas ces inconvénients.

La base spatiale classiquement utilisée [Ladevèze et Dureisseix, 2000] permet d'extraire la partie linéaire des efforts et déplacements d'interface qui comprend les résultantes et moments d'interface. Lorsque les échelles macro et micro en temps sont confondues, la stratégie consiste à assurer la continuité des efforts macro par la résolution d'un problème homogénéisé en espace à chaque instant. Le principe de Saint Venant, qui garantit au complément micro de n'avoir qu'un effet local, assure donc l'extensibilité de la méthode. Le fait de séparer les échelles temporelles permet de réduire considérablement le nombre de problèmes homogénéisés à résoudre. Cependant, le choix de la base macroscopique temporelle est complexe et a fait l'objet d'une étude particulière dans cette thèse. Le choix actuel [Ladevèze et Nouy, 2003], qui consiste à définir les efforts macro comme la partie polynomiale en temps des résultantes et moments d'interface, conduit à des problèmes macro qui ne sont cohérents qu'en moyenne avec le principe de Saint Venant, ce qui peut, dans certains cas, entraîner une perte partielle d'extensibilité. Dans ce travail, plusieurs méthodes sont proposées pour pallier ce problème [Passieux et al., 2007, 2008]. Parmi elles, une technique de détection des phénomènes temporels dont la partie macro spatiale est non-nulle est présentée. Nous montrons comment extraire parmi eux des fonctions temporelles pertinentes susceptibles d'être ajoutées à la base macro temporelle.

Une part importante de ce travail de thèse fut consacrée à l'étude de techniques innovantes de résolution de problèmes linéaires d'évolution, telles que l'« approximation radiale ». Ce point capital fait partie intégrante de la méthode LATIN [Ladevèze, 1999] et lui assure des performances remarquables. Initialement, il s'agit d'une extension du concept de fonctions radiales qui s'est avérée très efficace pour la résolution de problèmes de (visco)plasticité [Ladevèze, 1985b]. Tout comme la POD (pour *Proper Orthogonal Decomposition*, voir [Chatterjee, 2000]), son principe est de trouver la meilleure approximation d'ordre n d'une fonction de deux variables (ici le temps et l'espace) sous la forme d'une somme de n produits de deux fonctions découplées. Les méthodes diffèrent néanmoins, en ce sens que la POD se limite à la décomposition d'une fonction connue explicitement. L'approximation radiale, quant-à-elle, est une véritable méthode de résolution qui permet de calculer directement l'approximation de l'inconnue d'un problème d'évolution. Pour ce faire, une technique de résolution itérative, basée sur un problème de minimisation [Nouy et Ladevèze, 2004], consiste alors à rechercher alternativement la fonction spatiale et la fonction temporelle minimisant une norme. Des techniques similaires ont également été employées dans le cas de plusieurs variables spatiales [Ammar et al., 2006, 2007] ou dans le domaine stochastique [Nouy, 2007].

Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle technique robuste et efficace pour

le calcul de l'approximation d'un problème micro de la stratégie multiéchelle dans le cas des modèles de matériaux à variables internes. Cette nouvelle technique conduit à une remarquable réduction du nombre de fonctions générées [Ladevèze et al., 2007b, 2008b,a; Passieux et al., 2008] par rapport à celle utilisée dans [Nouy et Ladevèze, 2004]. Nous montrons qu'elle permet de transformer la résolution d'un problème d'évolution en la résolution d'un nombre réduit de problèmes spatiaux classiques indépendants du temps et d'équations différentielles scalaires temporelles.

Enfin, il peut être intéressant de mettre à jour l'ensemble des fonctions temporelles associées aux fonctions spatiales déjà construites. Ceci conduit à la résolution d'un système d'équations différentielles possédant notamment des conditions finales et dont la résolution est non triviale. L'étude a également consisté à mettre en évidence les faiblesses des méthodes incrémentales classiques, puis à proposer une technique alternative par projection, plus robuste et moins coûteuse qu'une résolution globale sur le temps.

À chaque itération de l'algorithme, une série de problèmes linéaires d'évolution doit être résolue, ces derniers pouvant être relativement similaires d'une itération à l'autre. La dernière partie de ce travail a donc concerné l'étude des méthodes de calcul sachant tirer parti de la connaissance des résolutions précédentes. Dans ce cadre les méthodes de Krylov [Rey et Léné, 1998; Saad, 2000; Risler et Rey, 2000] permettent d'accélérer la résolution d'un nouveau système en mettant à profit la connaissance des sous-espaces de Krylov des systèmes précédents à l'initialisation, dans le préconditionneur ou dans l'espace d'augmentation du nouveau système. D'autre part, les méthodes de réduction de modèles associées à la POD sont souvent utilisées dans ce type de problématique [Bialecki et al., 2005; Krysl et al., 2001; Ryckelynck, 2005; Niroomandi et al., 2008; Chinesta et al., 2008]. Elles nécessitent, dans un premier temps, la résolution partielle ou approchée du problème de référence avec des méthodes standards, puis dans un second temps, le calcul de la POD tronquée des solutions générées. Enfin, dans un dernier temps, elles consistent à projeter les nouveaux problèmes sur l'une ou l'autre des deux bases réduites de fonctions. Cependant, on ne peut connaître *a priori* ni la quantité minimale d'informations, ni l'ordre minimal de réduction, nécessaires à la construction d'un modèle à la fois réduit et pertinent pour les futures résolutions.

Nous proposons une méthode d'approximation adaptative au sein de la stratégie multiéchelle, basée sur l'approximation radiale des problèmes micro de l'étape linéaire. Pour ce faire, une partie des fonctions construites au cours des itérations de l'algorithme est stockée pour former une base réduite. Nous montrons qu'il est pertinent de réutiliser cette base sous la forme d'un modèle réduit dans une phase dite « préliminaire » pour calculer, à moindre coût, une approximation qui fournit une solution de qualité souvent suffisante. Afin de maîtriser cette approximation, nous avons développé une stratégie qui nous permet de mener uniquement les calculs nécessaires à la convergence de l'algorithme. Cette stratégie est une véritable approche adaptative, dans la mesure où, à l'aide d'estimateurs d'erreur basés sur l'erreur en relation de comportement, elle nous permet de localiser les endroits de la structure où l'approxima-

tion n'est pas satisfaisante, et le cas échéant, d'enrichir l'espace d'approximation, en enrichissant la base réduite. Nous montrons que cette stratégie est particulièrement bien adaptée au cas des matériaux composites, pour lesquels de nombreuses sous-structures semblables peuvent partager une base réduite commune, mais également à la multirésolution et aux études paramétriques qui nécessitent des résolutions successives similaires.

Ce travail a également donné lieu à l'élaboration d'un logiciel robuste, baptisé *Multi-ST*, intégrant beaucoup des « ingrédients » récents de la méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace avec approximation radiale. Ce logiciel 2D-3D, écrit en C++ et en Python, s'intègre à la plate-forme logicielle du LMT et va, de ce fait, servir de base pour plusieurs thèses qui vont débiter. Tous les exemples de ce document en sont issus, et tous les développements y ont été implantés.

Ce document est composé de deux parties. Une première partie concerne les stratégies de calcul multiéchelles adaptées aux problèmes non-linéaires d'évolution. Elle est elle-même composée de trois chapitres :

- Dans le premier, nous menons une étude bibliographique des principales méthodes de calcul multiéchelles en espace puis en temps.
- Dans le deuxième, la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation est présentée dans le cas général de la (visco)plasticité.
- Dans le troisième, nous présentons la mise en œuvre que nous avons fait de la méthode. L'ensemble des problèmes à résoudre à chaque étape sont introduits dans le cadre d'un problème de viscoélasticité en 3D.
- Dans le quatrième, nous présentons un outil de contrôle de la convergence. Puis nous mettons en évidence les limites du choix actuel des espaces macroscopiques temporels et proposons différentes approches pour pallier le problème.

La deuxième partie traite de l'approximation radiale pour les problèmes d'évolution. Cette partie se compose également de trois chapitres :

- Dans le premier, une étude bibliographique comparative sur la POD et l'approximation radiale est proposée. Une nouvelle technique pour la résolution des problèmes micro de la stratégie multiéchelle est présentée.
- Dans le deuxième, nous présentons en détail la mise en œuvre de cette approximation et nous montrons ces performances sur des exemples 3D.
- Dans le troisième et dernier chapitre, après avoir rappelé le principe de quelques méthodes de réutilisation, nous présentons une façon de tirer partie de l'approximation radiale pour faire une stratégie multiéchelle avec réduction de modèle adaptative.

Première partie

Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation pour les problèmes non linéaires d'évolution

État de l'art sur les stratégies de calcul multiéchelles

Dans ce chapitre nous dressons un état de l'art non exhaustif des stratégies de calcul multiéchelles tant spatiales que temporelles. Pour chaque méthode, nous présentons, autant que possible, la séparation d'échelle et les problèmes à résoudre aux différentes échelles. La première partie concerne les méthodes spatiales. La seconde concerne les méthodes multiéchelles en temps.

Sommaire

1	Stratégies multiéchelles en espace	10
1.1	Méthodes d'homogénéisation	10
1.2	Méthodes d'enrichissement	13
1.3	Méthodes microscopiques directes	19
2	Stratégies multiéchelles en temps	26
2.1	Méthodes multi-pas en temps	26
2.2	Méthodes d'enrichissement micro	27
2.3	Méthodes dédiées aux chargements cycliques	27
2.4	Méthodes de décomposition de domaine en temps	30

1 Stratégies multiéchelles en espace

1.1 Méthodes d'homogénéisation

La plupart des méthodes multiéchelles sont basées sur le principe d'homogénéisation, dans lequel l'échelle macroscopique est associée à une moyenne sur un certain volume de l'échelle microscopique. La théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques [Sanchez-Palencia, 1974, 1980], basée sur l'analyse asymptotique de la solution, propose une véritable approche multiéchelle mettant en jeu un problème macro posé sur des quantités homogénéisées et un problème micro permettant de remonter aux propriétés locales. Dans cette partie, nous décrivons les principaux résultats de cette théorie, ainsi que quelques méthodes qui lui sont associées.

1.1.1 Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques

Cette théorie s'applique dans le cas où le matériau est constitué de la répétition régulière d'un même motif, la cellule élémentaire. Cette cellule élémentaire est agrandie par une homothétie de rapport ϵ et notée Θ . ϵ est un petit paramètre qui caractérise le rapport des échelles micro et macro. La variable $\underline{x} \in \Omega$ est associée aux variations lentes (échelle macro), tandis que $\underline{y} \in \Theta$ est la variable locale de Θ associée aux variations rapides (échelle micro) (1.1). Ainsi toute variable du problème s'écrit

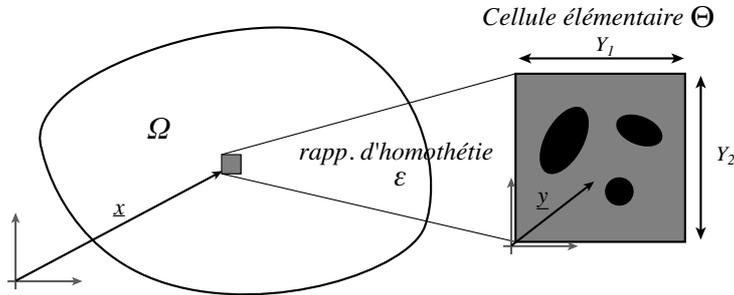


FIG. 1.1: Volume élémentaire représentatif et changement d'échelle.

$s(\underline{M}) = s(\underline{x}, \underline{y})$ et est \underline{Y} -périodique par rapport à \underline{y} . En particulier, l'opérateur de Hooke étant constant d'une cellule à l'autre, il est tel que $\underline{\mathbf{K}}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\mathbf{K}}(\underline{y})$. La différentielle d'une variable $s(\underline{M}) = s(\underline{x}, \underline{y})$ par rapport à \underline{M} s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{M}} s(\underline{M}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} s(\underline{x}, \underline{y}) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \underline{y}} s(\underline{x}, \underline{y})$$

Considérant que le rapport d'échelles ϵ est infiniment petit, cette technique consiste en un développement asymptotique en ϵ des variables $\underline{u}, \underline{\epsilon}$ et $\underline{\sigma}$:

$$s(\underline{M}) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i s^{(i)}(\underline{x}, \underline{y})$$

Il s'agit alors de développer les équations d'équilibre et de comportement :

Ordre (-1) : Le champ de déplacement $\underline{u}^{(0)}(\underline{x})$ est indépendant de \underline{y} , c'est la solution macroscopique à variation lente.

Ordre (0) : Le problème local consiste à trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}^\Theta$ espace des champs périodiques sur $\partial\Theta$, tel que $\forall \underline{v} \in \mathcal{U}^\Theta$:

$$\int_{\Theta} \varepsilon_y(\underline{v}) : \mathbf{K} \varepsilon_y(\underline{u}^{(1)}) dy + \int_{\Theta} \varepsilon_y(\underline{v}) : \mathbf{K} \varepsilon_x(\underline{u}^{(0)}) dy$$

Le problème étant linéaire, on peut construire un opérateur \mathbf{H} tel que :

$$\varepsilon_y(\underline{u}^{(1)}) = \mathbf{H} \varepsilon_x(\underline{u}^{(0)})$$

On peut donc en déduire les champs de déformation et de contrainte micro :

$$\varepsilon^{(0)} = (1 + \mathbf{H}) \varepsilon_x(\underline{u}^{(0)}) \quad \text{et} \quad \sigma^{(0)} = (\mathbf{K} + \mathbf{KH}) \varepsilon_x(\underline{u}^{(0)})$$

Ordre (1) : En notant $\langle \cdot \rangle_{\Theta} = \int_{\Theta} \cdot dy$ la moyenne sur Θ , le problème s'écrit :

$$\underline{\text{div}}_x(\langle \sigma^{(0)} \rangle_{\Theta}) + \langle f_d \rangle_{\Theta} = 0$$

$$\text{avec } \langle \sigma^{(0)} \rangle_{\Theta} = \langle \mathbf{K} + \mathbf{KH} \rangle_{\Theta} \langle \varepsilon^{(0)} \rangle_{\Theta}$$

$$\text{et } \langle \varepsilon^{(0)} \rangle_{\Theta} = \varepsilon_x(\underline{u}^{(0)})$$

■ Bilan

Ainsi, le problème à l'ordre (1) définit un véritable problème macroscopique sur les quantités moyennes $\sigma^M = \langle \sigma^{(0)} \rangle_{\Theta}$, $\varepsilon^M = \langle \varepsilon^{(0)} \rangle_{\Theta}$ et $\underline{u}^M = \underline{u}^{(0)}$, avec un opérateur de comportement homogénéisé $\langle \mathbf{K} + \mathbf{KH} \rangle_{\Theta}$ issu de calculs sur la microstructure. Ce problème est un problème d'élasticité classique. Une fois sa solution calculée, on peut retourner aux quantités locales par le problème à l'ordre (0). Cependant, outre le fait que cette théorie repose sur des hypothèses fortes de périodicité, linéarité et rapport d'échelle très petit, le matériau ne peut pas être homogénéisé au niveau des bords de Ω , et nécessite donc un traitement particulier [Auriel et al., 1982; Devries et al., 1989].

1.1.2 Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation

Dans le cadre non linéaire, des travaux inspirés de cette théorie [Devries et al., 1989; Lefik et Schrefler, 1992; Schrefler et al., 1997; Fish et al., 1997; Temizer et Wriggers, 2007] ont consisté à écrire le développement asymptotique de toutes les variables du problème (déformation anélastique, endommagement...). D'autres approches consistent à ne pas se donner *a priori* d'hypothèse sur le modèle macro non linéaire, mais plutôt à mener une analyse micro-macro itérative, dans laquelle un problème macro est résolu par une technique éléments finis avec un comportement issu de calculs sur la microstructure. Les calculs à l'échelle micro peuvent être par éléments finis également [Feyel et Chaboche, 2000; Feyel, 2003], ou par d'autres techniques telles que la « Voronoï cell finite element method » [Ghosh et al., 1995, 2001]. Dans la suite, nous étudions

l'exemple de la méthode des éléments finis à deux niveaux.

■ Méthode FE^2

La méthode des éléments finis à deux niveaux (FE^2) consiste à discrétiser la structure par une méthode éléments finis et associer à chaque point d'intégration de chaque élément un volume élémentaire représentatif Θ du matériau périodique, lui-même muni d'un maillage éléments finis fin. Les variables s sont décomposées en une partie macro s^M et une partie micro s^m à qui on impose des conditions de périodicité sur les bords $\partial\Theta$. Les quantités macro s^M sont constantes sur la cellule Θ , et correspondent à la valeur de cette variable s au point de Gauss du maillage grossier.

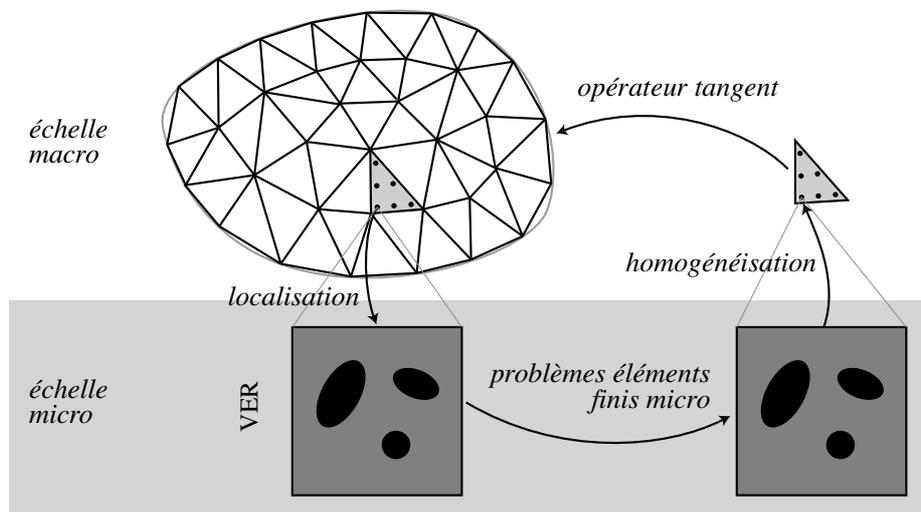


FIG. 1.2: Une itération de la méthode FE^2 .

La stratégie itérative de résolution est très simple. Le problème macroscopique est résolu par un algorithme de type Newton-Raphson. Une itération est composée de (cf. Figure 1.2) :

1. **Localisation** : La déformation ε^M est calculée aux points de Gauss du maillage grossier. Elle définit le chargement du problème micro.
2. **Problèmes micro** : Un nouvel algorithme de type Newton est utilisé pour résoudre chacun des problèmes micro non linéaires à déformation imposée et conditions de périodicité sur le bord.
3. **Homogénéisation** : Le problème micro donne accès à $\sigma^M = \langle \sigma \rangle$, ainsi qu'à l'opérateur tangent micro. Une série de problèmes micro est résolue pour calculer l'opérateur tangent homogénéisé \mathbf{K}^M .
4. **Problème grossier** : l'opérateur tangent homogénéisé \mathbf{K}^M est assemblé et le problème macro peut-être résolu, ce qui démarre une nouvelle itération du schéma de Newton global.

■ Bilan

Cette stratégie originale est une façon assez générale d'étendre la théorie de l'homogénéisation aux problèmes non linéaires. Tous ces problèmes micro étant indépendants, la méthode se prête très bien au calcul parallèle. En revanche, ces approches possèdent les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation périodique.

1.2 Méthodes d'enrichissement

Nous entendons par méthodes d'enrichissement une famille de méthodes dont le problème de référence est écrit à l'échelle macro. Constatant que le modèle macro peine à capter les phénomènes à l'échelle de la microstructure, ces méthodes consistent à aller chercher de l'information à l'échelle micro pour enrichir le modèle macro là où il manque de pertinence. Cet enrichissement peut être analytique, numérique, ou expérimental. Nous distinguons trois classes de méthodes. La première rassemble des méthodes qui assurent l'égalité des quantités micro et macro sur le bord des cellules macro. La deuxième rassemble les méthodes de superposition de modèles, et la troisième, celles basées sur la partition de l'unité.

1.2.1 Méthodes dans lequel l'enrichissement est confiné dans les cellules macro

■ Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique

La méthode de projection de Dirichlet hiérarchique (HDPM) a été initialement proposée [Zohdi et al., 1996; Oden et al., 1999] pour l'étude de structures fortement hétérogènes dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cette méthode repose sur une vision à deux échelles de la structure. Une première échelle dite *macroscopique* liée à un modèle homogénéisé du matériau et à un maillage éléments finis relativement grossier. La seconde échelle, dite *microscopique*, est obtenue en décomposant le domaine Ω en sous-domaine Ω_i suivant une grille régulière (cf. Figure 1.3). Chaque cellule peut, au besoin, être elle-même maillée par éléments finis suffisamment finement pour pouvoir décrire la microstructure du matériau.

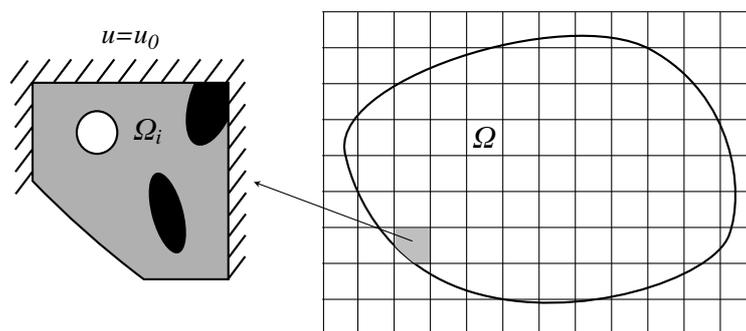


FIG. 1.3: Les deux échelles de la méthode de projection de Dirichlet hiérarchique

Pour coupler les deux échelles, la méthode propose de corriger le champ de déplacement issu d'un calcul à l'échelle grossière \underline{u}_0 , par des calculs locaux indépendants

par cellule, menés à l'échelle fine. Comme son nom l'indique, la méthode consiste à imposer, comme conditions aux limites, le déplacement macro \underline{u}_0 sur la frontière de Ω_i . Si, éventuellement, la frontière de Ω_i correspond à celle de Ω , les conditions aux limites du problème initial, lui sont appliquées. Il en résulte un champ de déplacement \underline{u}_i^1 satisfaisant l'équilibre local.

En combinant l'ensemble des solutions calculées, on peut définir un champ de déplacement \underline{u} *a priori* plus précis et cinématiquement admissible. Afin d'assurer à la méthode un caractère plus systématique et d'avantage de robustesse, une stratégie adaptative basée sur un estimateur *a posteriori* [Oden et al., 2006] lui est associé. Elle est constituée de trois niveaux d'amélioration successifs :

1. Le premier niveau correspond à la procédure décrite précédemment. La qualité de la solution \underline{u} est mesurée par un estimateur d'erreur *a posteriori*. Si sa qualité n'est pas suffisante, on passe au niveau 2.
2. Le deuxième niveau consiste à recalculer l'opérateur homogénéisé (par exemple le module d'Young et le coefficient de poisson) au sens d'un potentiel fonction de \underline{u} et \underline{u}_0 . Une fois l'opérateur amélioré, l'étape 1 peut être reconduite. Si après plusieurs itérations des deux précédentes étapes, la nouvelle solution n'est toujours pas d'une qualité suffisante, alors on passe au niveau 3.
3. L'idée du troisième niveau consiste à déraffiner la grille de décomposition du domaine. Les précédentes étapes sont alors réitérées. De cette façon, la taille des problèmes micro est agrandie, et la précision de la solution \underline{u} s'améliore. Dans le cas extrême, s'il ne reste plus qu'une seule sous-structure, alors le problème complet est résolu sur la micro structure, ce qui assure la convergence de la méthode.

■ Bilan

Il s'agit là d'une stratégie multiéchelle impliquant des résolutions à l'échelle macro homogénéisée, et à l'échelle micro associée à la microstructure. L'originalité de cette méthode est que, contrairement aux méthodes d'adaptativité qui consistent le plus généralement à raffiner le maillage dans les zones erronées, c'est le modèle, voire même l'échelle de modélisation, qui est adaptée au problème à résoudre. Cependant, cette approche est limitée au cas linéaire.

■ Méthode aux échelles fortement couplées

La méthode aux échelles fortement couplées (*Strong Coupling Method*), est une méthode initialement introduite par [Ibrahimbegović et Markovič, 2003; Markovič et Ibrahimbegović, 2004], pour traiter des problèmes non linéaires fortement hétérogènes. Cette stratégie met en œuvre une discrétisation éléments finis à la fois pour l'échelle macro et l'échelle micro. Elle présente l'avantage de ne pas nécessiter de rapport d'échelles infini. L'idée de base est de considérer un maillage éléments finis grossier, dans lequel chaque élément fini macro représente une fenêtre à l'échelle micro contenant une description fine de la micro-structure, à son tour discrétisée par éléments finis. Le

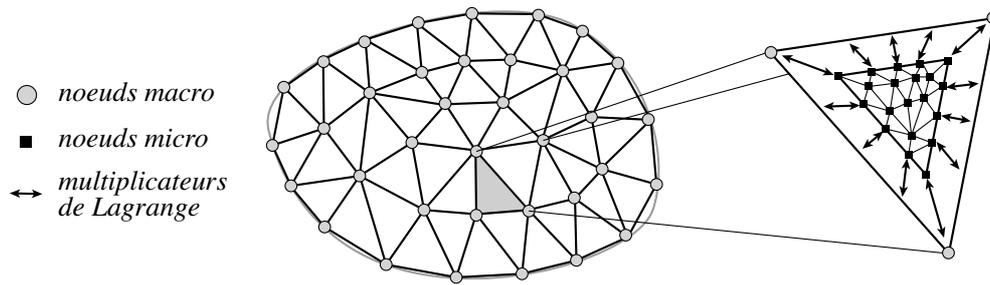


FIG. 1.4: Maillage grossier, maillages fins imbriqués, et multiplicateurs de Lagrange

couplage s'effectue grâce à une technique de multiplicateurs de Lagrange localisés. La continuité entre les inconnues de chaque nœud de bord du maillage fin et celles des nœuds de l'élément macro associé est assurée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange (cf. Figure 1.4). Une stratégie itérative transforme le problème couplé en la résolution, à chaque itération, d'un problème global sur la grille grossière, ainsi qu'un ensemble de problèmes micro indépendants par éléments macro, fait d'un problème élément fini standard.

■ Bilan

Cette méthode de calcul multiéchelle et parallèle à l'avantage de ne mettre en œuvre que des problèmes éléments finis standards. Cependant la méthode impose une cinématique macro a priori, qui peut s'avérer pénalisante dans certains cas de fortes discontinuités à l'échelle micro. Elle prend néanmoins tout son sens lorsque les phénomènes micro sont diffus à l'échelle micro, ou confinés dans les éléments macro.

■ Méthode variationnelle multiéchelle

La VMS method (pour *Variational MultiScale Method* [Hughes, 1995]) offre un cadre général pour le calcul de la solution de problèmes multiéchelles. Par problème multi-échelle, les auteurs entendent des problèmes dans lesquelles plusieurs échelles interviennent, et dont au moins une n'est pas accessible par une approche numérique globale du problème. L'idée de base est donc de décomposer la solution \underline{u} en une contribution grossière \underline{u}^M traitée numériquement et une fine \underline{u}^m traitée analytiquement, telles que :

$$\underline{u} = \underline{u}^M + \underline{u}^m$$

La première étape consiste à résoudre les équations de l'échelle fine associées au résidu de l'échelle grossière. L'effet des petites échelles est ensuite condensé au niveau grossier, ce qui permet de construire un problème grossier « quasi-exact », et qui prend en compte les échelles fines.

La méthode dépend donc beaucoup du choix que l'on peut faire pour approximer l'échelle micro \underline{u}^m . Les travaux initiaux sont principalement basés sur une résolution analytique des problèmes micro. Dans les premiers travaux [Hughes, 1995], la méthode est présentée dans le cadre des méthodes spectrales ou de Fourier, pour lesquelles la

résolution des problèmes micro est basée sur des fonctions de Green du problème. Les éléments finis standards, pour lesquels les gradients sont discontinus d'un élément à l'autre, nécessitent un traitement particulier [Hughes et al., 1998].

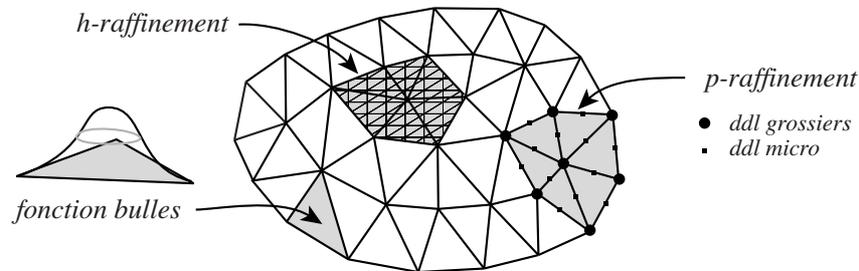


FIG. 1.5: Maillage éléments finis grossier. VMS avec fonctions bulles, h et p raffinements

■ fonctions bulles

Les auteurs proposent, dans un premier temps, des enrichissements propres à chaque élément fini qui s'annulent sur leur frontière (fonction bulle, figure 1.5). Le problème micro consiste donc en la résolution de problèmes découplés sur chaque élément. Bien que facile à mettre en œuvre, cette approximation est relativement pauvre.

■ p -raffinement hiérarchique

Une idée plus performante consiste à utiliser des fonctions micro définies sur un ensemble d'éléments finis, grâce par exemple à l'utilisation des fonctions éléments finis d'ordre p (figure 1.5), complémentaires des fonctions linéaires classiques. Les problèmes micro sont donc des problèmes éléments finis standards portant sur un petit nombre d'éléments. La qualité du problème macro dépend donc du degré p de raffinement.

■ h -raffinement hiérarchique

Dans [Larson et Målqvist, 2007], l'idée consiste à séparer le problème micro en un ensemble de contributions locales en utilisant une partition de l'unité. Le problème micro consiste donc en la résolution d'un ensemble des problèmes indépendants sur des patches raffinés (figure 1.5). La précision du problème grossier dépend donc du raffinement h et de la taille des patches.

■ Bilan

Cette méthode permet d'enrichir les méthodes éléments finis basés sur un maillage grossier par une technique de régularisation. Cependant, l'enrichissement reste localisé, et les différents sous-problèmes micro n'ont pas d'effet les uns sur les autres.

1.2.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin initialement introduite par [Ben Dhia, 1998; Ben Dhia et Rauteau, 2005] est une méthode générale de décomposition de modèle avec recouvrement. Dans le cadre de l'analyse multiéchelle, cette méthode permet de superposer

à un problème grossier, un modèle plus fin, tant au niveau de la discrétisation que des équations du modèle elles-mêmes, dans les zones d'intérêt. Le raccord entre les modèles est écrit de manière faible, via un multiplicateur de Lagrange, sur une zone de recouvrement. C'est ce qui fait l'originalité de la méthode. La concurrence des modèles

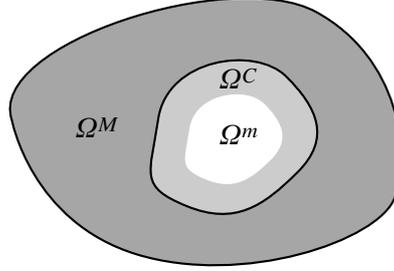


FIG. 1.6: Domaine grossier Ω^M , zone d'intérêt Ω^m et zone de collage Ω^C .

est gérée par l'introduction de fonctions de pondération α pour chaque modèle réalisant une partition de l'unité sur le domaine d'étude Ω : $\forall \underline{x} \in \Omega$, $\alpha_m(\underline{x}) + \alpha_M(\underline{x}) = 1$. Cette fonction est introduite dans la formulation variationnelle du problème. Dans le cadre du problème d'élasticité linéaire décrit figure 1.6, le problème s'écrit : trouver $(\underline{u} = (\underline{u}^M, \underline{u}^m), \underline{\lambda})$ tels que $\forall (\underline{u}^* = (\underline{u}^{M*}, \underline{u}^{m*}), \lambda^*)$,

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) + b(\underline{\lambda}, \underline{u}^*) &= l_\alpha(\underline{u}^*) \\ b(\underline{\lambda}^*, \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{v}) &= \sum_{k=M \text{ et } m} \int_{\Omega^k} \alpha_k(\underline{x}) \varepsilon(\underline{u}^k) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{v}^k) d\Omega \\ b(\underline{\lambda}, \underline{u}) &= \langle \underline{\lambda}, \underline{u}^M - \underline{u}^m \rangle \\ l_\alpha(\underline{v}) &= \sum_{k=M \text{ et } m} \int_{\Omega^k} \alpha_k(\underline{x}) f_d \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d \cdot \underline{v} d\Gamma \end{aligned}$$

Le choix du paramètre α , ainsi que le choix du produit scalaire $\langle \cdot \rangle$ sont des paramètres de la méthode. Le choix de l'espace *médiateur* (l'espace du multiplicateur $\underline{\lambda}$), et donc le choix du produit scalaire, a une influence sur la nature de l'approche. Classiquement, le raccord se fait au sens d'un produit scalaire de $H^1(\Omega^C)$ pondéré. Des travaux récents ont permis de coupler le problème ainsi posé à un solveur itératif, ce qui en fait une méthode de décomposition de domaine et de modèle avec recouvrement [Elkhodja et al., 2008; Pebrel et al., 2008a].

■ Bilan

La méthode Arlequin est une méthode générale et originale de décomposition de modèle avec recouvrement. Ses paramètres lui permettent de balayer une large gamme de méthodes. Cette approche est particulièrement intéressante pour les structures industrielles complexes, que l'on peut ainsi raffiner, tant au niveau du modèle qu'au niveau de la discrétisation, sans nécessiter une phase de remaillage excessivement coûteuse.

1.2.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

■ PUM

Un espace d'approximation composé de fonctions polynomiales, telles que le sont les fonctions de forme éléments finis peut s'avérer inapte à représenter des phénomènes non réguliers (pointes de fissures, discontinuité des variables...). Pour ce type de solutions singulières, les méthodes qui consistent à raffiner le maillage (que ce soit la version h ou p) sont mises en échec. Cependant, une connaissance analytique, numérique ou expérimentale de ces phénomènes peut permettre de construire des espaces d'approximation plus riches. C'est dans ce contexte qu'a été développée la méthode de la partition de l'unité (PUM) [Melenk et Babuška, 1996]. Cette méthode peut être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis. L'approximation PUM sur le domaine Ω s'écrit :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \left(\sum_{j \in \mathbf{J}_i} a_j^i \underline{\psi}_j^i(\underline{x}) \right)$$

avec \mathbf{I} l'ensemble des nœuds, et \mathbf{J}_i l'ensemble des fonctions additionnelles connues. Les coefficients a_j^i sont les inconnues, ou degrés de libertés (ddl). Les fonctions $\varphi_i(\underline{x})$ sont les fonctions de forme éléments finis, elle forment une partition de l'unité :

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Cette approximation est donc capable de reproduire exactement n'importe quelle fonction connue \underline{v} , en définissant simplement $\underline{\psi}^i = \underline{v}$.

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \underline{v} = \underline{v}$$

Notons enfin que si $\mathbf{J} = \{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ ou $\underline{x}, \underline{y}$ et \underline{z} sont les vecteurs orthonormés de \mathbb{R}^3 , alors l'approximation correspond à l'approximation éléments finis standards.

La méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) [Strouboulis et al., 2001] et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [Moës et al., 1999] sont toutes deux des méthodes qui combinent une approche éléments finis standards avec la PUM. Les fonctions éléments finis standards sont enrichies avec des fonctions spéciales venant de la connaissance partielle que l'on peut avoir de la solution du problème que l'on traite. La solution est cherchée sous la forme suivant :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) a^i + \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \left(\sum_{j \in \mathbf{J}_i} b_j^i \underline{\psi}_j^i(\underline{x}) \right)$$

ou les a^i sont les degrés de libertés classiques et les b^i les degrés liés à l'enrichissement.

■ X-FEM

La méthode X-FEM utilise la partition de l'unité pour introduire diverses discontinuités dans le modèle éléments finis, sans avoir à utiliser un maillage conforme à la discontinuité. La description géométrique de ces surfaces de discontinuité est réalisée par la technique des *level-sets*, qui consiste à représenter la surface par l'iso-zéro de la fonction de distance signée ξ_Γ . Dans le cas des fissures, deux types d'enrichissement

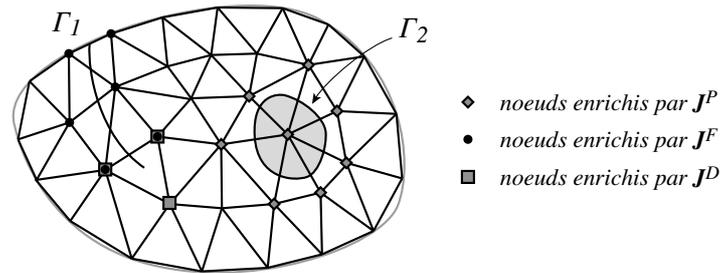


FIG. 1.7: Nœuds enrichis à proximité d'une fissure Γ_1 ou d'une interface entre matériaux Γ_2

sont proposés. En pointe de fissure, on ajoute les fonctions analytiques d'une fissure en milieu infini J^P . Sur tous les éléments coupés par la fissure, on enrichit par la fonction de *Heaviside* construite à partir du *level set* qui permet de rendre compte de la discontinuité J^F . Dans le cas d'une interface entre matériaux différents, les dérivées normales du déplacement étant discontinues, on enrichit tous les éléments coupés par la fonction distance J^D (cf. Figure 1.7).

Cette méthode est aujourd'hui l'une des méthodes les plus répandues pour le suivi de fissures. Elle a été plus récemment associée à des méthodes de décomposition de domaine pour simuler la propagation de fissure en 2D [Guidault et al., 2008] ou avec des méthodes multigrilles en espace pour la propagation non plane 3D [Rannou et al., 2008].

■ G-FEM

L'idée de la méthode des éléments finis généralisés est d'utiliser la PUM pour enrichir le comportement local du modèle éléments finis, en choisissant des fonctions spéciales sous la forme de développements asymptotiques, de modes, ou encore de solutions éléments finis de problèmes locaux appelés des *handbooks*. Cette technique permet de modéliser des structures présentant un grand nombre d'inclusions ou de trous. Pour ce faire, les trous intersectant un élément de la grille grossière, sont isolés dans un problème à part contenant uniquement ces trous, soumis à des chargements simples, type Dirichlet ou Neumann (cf. Figure 1.8).

1.3 Méthodes microscopiques directes

Les méthodes regroupées dans cette partie ont comme point de départ, la résolution du problème à l'échelle fine. Ce choix conduit à des discrétisations fines sur le do-

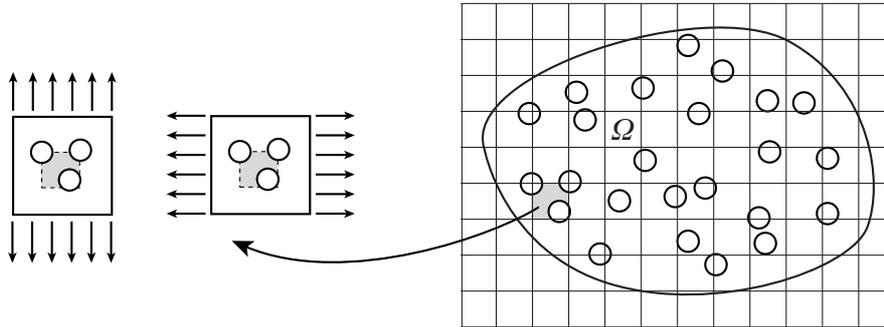


FIG. 1.8: Définition des *handbooks* résolus sur un élément du maillage grossier contenant trois trous

maine complet Ω , et rend donc ces approches hors de portée des solveurs directs tels que LU, QR, Cholesky, LDL. Des méthodes itératives sont alors utilisées. Il peut s'agir de solveurs itératifs globaux tels que Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxation. Le domaine peut également être décomposé et le problème résolu soit par des méthodes alternées telles que Uzawa, Schwarz, soit en *condensant* le problème sur l'interface et en le résolvant avec un algorithme approprié tel que Gradient Conjugué ou GMRes. Le dénominateur commun de ces méthodes est qu'elles peinent à capter rapidement les composantes à grande longueur de variation de la solution. L'idée est donc d'introduire une (parfois plus) échelle grossière supplémentaire, dont le but est d'accélérer la convergence de l'algorithme itératif de départ. Le choix de cette seconde échelle n'a pas d'influence sur la solution, mais seulement sur le taux de convergence. Nous présentons donc d'abord les méthodes multigrilles, puis enfin les méthodes de décomposition de domaine multi-niveaux.

1.3.1 Méthodes multigrilles

Les méthodes multigrilles [Briggs, 1987] partent donc du constat précédent que les algorithmes itératifs traitent efficacement les composantes à faible longueur d'onde du résidu, mais peinent à prendre en compte les grandes longueurs de variations. L'idée consiste donc à réaliser des résolutions incomplètes sur une hiérarchie de grilles plus grossières que la première. L'idée étant de construire des algorithmes permettant de résoudre un problème en un nombre d'itérations indépendant du nombre de degrés de liberté du problème micro initial. Le transport d'une grille à l'autre se fait par des opérateurs de restriction \mathbf{R} et de prolongement \mathbf{P} qui correspondent classiquement à des interpolations linéaires. En outre, les itérations du calcul s'organisent suivant des cycles (en V, en W ...) qui alternent le passage entre les grilles fines et grossières.

À titre d'exemple, nous étudions un cycle en « V » appliqué au problème non linéaire discrétisé $\mathbf{L}(U) = F$. Nous noterons \square_f et \square_g les quantités associées respectivement à la grille fine et à la grille grossière. L'itération k de l'algorithme est la suivante :

- (1) **Lissage** On réalise α^k itérations de l'algorithme sur la grille la plus fine avec

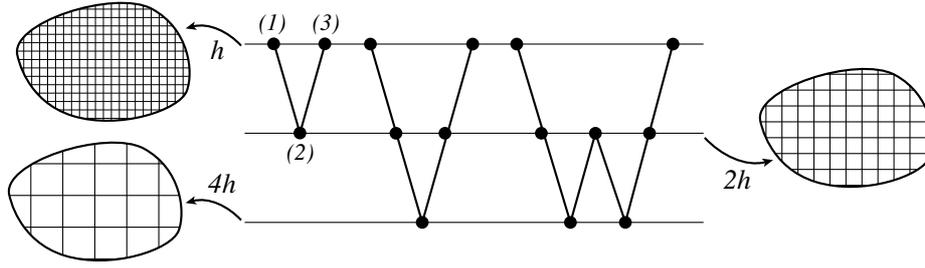


FIG. 1.9: Exemples de cycles « V » et « W » sur une hiérarchie de 2 ou 3 grilles

l'initialisation $U_{f,0}^k$. Cette étape a pour but de capter les hautes fréquences de la solution. Le résidu du problème non linéaire est le suivant :

$$R_f^k = F - \mathbf{L}_f(U_f^k)$$

Ensuite la solution et le résidu sont projetés sur la grille grossière par :

$$R_g^k = \mathbf{R}^F R_f^k \quad \text{et} \quad U_g^k = \mathbf{R}^U U_f^k$$

(2) **Correction sur la grille grossière** On résout le problème non linéaire suivant sur la grille grossière. Cette étape a pour but de capter les basses fréquences de la solution :

$$\mathbf{L}_g(U_g^k + E_g^k) = R_g^k + \mathbf{L}_g(U_g^k)$$

Ce problème est généralement de même nature que le problème initial. Enfin, la correction est projetée sur la grille fine :

$$E_f^k = \mathbf{P}^U E_g^k$$

(3) **Mise à jour de la solution** la solution à l'échelle fine est corrigée par le calcul à l'échelle grossière et sert d'initialisation pour l'étape (1) de l'itération $k+1$:

$$U_{f,0}^{k+1} = U_f^k + E_f^k$$

Dans le cas de milieux fortement hétérogènes, les auteurs de [Fish et Belsky, 1995] ont montré que les restrictions classiques étaient insuffisantes pour assurer l'extensibilité de la méthode. Ils ont donc proposé de calculer des opérateurs par une approche basée sur l'homogénéisation. Le problème grossier est alors un problème homogénéisé, et la solution grossière capte plus efficacement les phénomènes à grande longueur de variation à chaque itération.

1.3.2 Méthodes de décomposition de domaine

Le développement des calculateurs à architecture parallèle a entraîné un fort attrait pour les méthodes de décomposition de domaine¹ dans les années 90 qui fait

¹En s'en tenant au sens strict des mots, on devrait considérer comme méthode de décomposition de domaine, tout algorithme incluant une sous-structuration. Ce n'est pas le cas. Le terme DDM (pour *Domain Decomposition Method*) désigne une communauté de méthodes plus restreinte que cela. Seules des méthodes y appartenant sont regroupées dans cette partie.

qu'elles sont aujourd'hui probablement les méthodes les plus utilisées pour résoudre des problèmes de grande taille. D'une part, même s'il s'agit de méthodes basées sur des

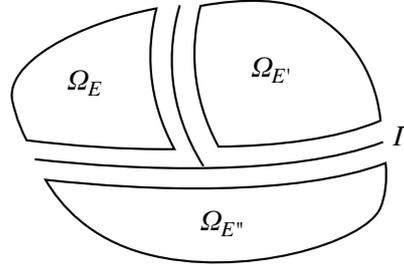


FIG. 1.10: Décomposition de domaine

considérations physiques, elles bénéficient d'une écriture algébrique (au moins dans le cadre linéaire) relativement aisée à appréhender et qui permet une étude mathématique rigoureuse et donc une bonne compréhension de leur comportement ; d'autre part elles bénéficient de solveurs performants et robustes. Souvent présentées du point de vue discret et linéaire (pour un état de l'art [Gosselet et Rey, 2006]), elles peuvent aussi être écrites dans un cadre variationnel (cf. [Magoulès et Roux, 2006]) et être étendues au cas non linéaire. Dans le cas linéaire, du point de vue discret, le problème décomposé est constitué d'un ensemble d'équations d'équilibres locaux ainsi que d'une condition de continuité des champs de déplacement et d'équilibre des efforts :

$$\mathbf{K}^E U^E = \mathbf{t}^{E,T} \lambda^E + F^E \quad (1.1)$$

$$\sum_{\Omega_E} A^E \lambda^E = 0 \quad (1.2)$$

$$\sum_{\Omega_E} B^E \mathbf{t}^E U^E = 0 \quad (1.3)$$

où λ^E est le vecteur des réactions nodales. B^E et A^E sont des opérateurs de prolongement (signés ou non) et \mathbf{t}^E un opérateur de trace sur l'interface du sous-domaine.

Nous ne nous intéresserons, dans cette partie, qu'aux méthodes présentant un caractère multiéchelle. Leur grande majorité consiste à transformer préalablement ce problème en un problème posé sur une variable d'interface (lors d'une étape dite de condensation), avant de résoudre ce problème par un algorithme adapté aux propriétés du problème d'interface tel que Gradient Conjugué ou GMRes (voir l'ouvrage de référence [Saad, 2000]). La variable de condensation est la caractéristique première de chaque approche et c'est en toute logique selon ce critère qu'on a l'habitude de les classer. Après avoir brièvement expliqué l'étape de condensation, qui est commune à beaucoup d'approches, on tentera de résumer les spécificités de chacune des approches les plus populaires.

■ Condensation

Le principe de la condensation est simple : il s'agit de transformer le problème dé-

composé en un problème posé sur une variable d'interface. On commence donc par supposer qu'une des équations (1.2) ou (1.3) est vérifiée.

- Dans le cas où l'équation de continuité des déplacements (1.3) est vérifiée, on peut supposer l'existence d'un champ de déplacement d'interface W qui est la trace des déplacements de chaque sous-domaine.
- Si les efforts sont supposés équilibrés (1.2) alors on peut introduire un effort d'interface λ .

On réécrit alors l'équation d'interface non vérifiée (portant sur la quantité duale de celle introduite précédemment) en fonction de la variable introduite. On écrira donc $U^E = \mathbf{D}^E(B^{E^T} \lambda) + d^E$ ou $\lambda^E = \mathbf{S}^E(A^{E^T} W) + b^E$. Les vecteurs b^E et d^E représentant les efforts condensés d'interface, ils sont définis par la résolution de problèmes locaux en imposant la quantité (effort ou déplacement) nulle sur l'interface et les conditions aux limites du problème initial. Les opérateurs \mathbf{D}^E et \mathbf{S}^E sont des compléments de Schur, ils sont définis à conditions aux limites extérieures nulles :

- \mathbf{D}^E est le complément de Schur dual : il est défini par la résolution du problème local en imposant sur l'interface l'effort $B^{E^T} \lambda$, c'est un problème qui peut ne pas avoir une solution unique. Il se peut même ne pas avoir de solutions du tout si l'effort λ n'est pas choisi correctement, le traitement de cette contrainte sur λ joue un rôle prépondérant dans toutes les méthodes.
- \mathbf{S}^E est le complément de Schur primal : il est défini par la résolution du problème local à déplacement imposé $A^{E^T} W$ sur l'interface, il a donc une solution unique.

Le problème d'interface à résoudre est un simple « assemblage » (au sens des A^E ou des B^E) des opérateurs locaux, on note alors \mathbf{D} et \mathbf{S} les opérateurs assemblés correspondants. Ce problème est résolu par un algorithme de type Krylov. Ces approches ayant l'avantage de ne nécessiter que des produits matrices vecteurs, il n'est donc pas nécessaire d'assembler \mathbf{D} ou \mathbf{S} . Le produit d'un vecteur par un complément de Schur revient donc à une résolution de problème sur chaque sous-domaine et à un assemblage, opération très fortement parallèle.

À noter que \mathbf{D}^E et \mathbf{S}^E sont inverses l'un de l'autre. En conséquence on peut construire facilement un bon préconditionneur de \mathbf{D} à partir de l'assemblage des contributions locales de \mathbf{S} et vice-versa et ce à un faible coût puisqu'ils correspondent à des problèmes de même nature. On n'a donc pas de factorisation supplémentaire d'opérateurs à effectuer. Ce préconditionneur est dit optimal, même si, bien entendu, le meilleur préconditionneur est l'inverse de l'opérateur. L'utilisation d'un bon préconditionneur rend les méthodes de Krylov très performantes, le fait d'avoir accès à un bon préconditionneur à un coût faible est donc un gros avantage.

■ **Approche primale** La méthode **BDD** (pour *Balancing Domain Decomposition method* [Mandel, 1993]) est une méthode de type primale. Le problème d'interface est résolu par un gradient conjugué préconditionné projeté. C'est l'utilisation d'un préconditionneur – lié à la résolution de problèmes locaux à efforts imposés – qui conduit à la résolution d'un problème grossier. En effet, à chaque itération du gradient conjugué, le résidu d'équilibre en effort qui est utilisé pour piloter les problèmes locaux du pré-

conditionneur doit vérifier le même type de conditions que dans une approche duale.

■ **Approche duale** La méthode **FETI** (pour *Finite Element Tearing and Interconnecting* [Farhat et Roux, 1991]) est une méthode de type duale. Le problème d'interface construit est également résolu par un gradient conjugué préconditionné projeté. Le préconditionneur est utilisé pour accélérer la convergence du gradient conjugué. L'utilisation du projecteur est liée à la condition d'inversion des problèmes locaux, c'est le traitement de cette condition *globale* qui permet à chaque itération une propagation globale de l'information.

Dans [Gosselet et Rey, 2002], les auteurs proposent des stratégies d'**accélération de la convergence** dans le cadre de la résolution de plusieurs problèmes linéaires, donc en particulier de la résolution d'un problème non linéaire par une approche par exemple de type Newton. Les auteurs proposent la construction de préconditionneurs et/ou de problèmes grossiers définis grâce à la réutilisation des informations issues de la résolution des problèmes précédents, information représentée par les espaces de Krylov. Il s'agit donc d'un premier pas pour améliorer les performances des méthodes de décomposition de domaine dans le cadre non linéaire.

Les méthodes présentées jusqu'à maintenant sont toutes dédiées aux problèmes linéaires. Dans le cadre non linéaire elles sont simplement utilisées comme solveur de la prédiction linéaire d'un Newton-Raphson. Il n'est donc absolument pas tenu compte de la décomposition de domaine pour traiter la non-linéarité. Autrement dit, il n'est jamais résolu de problèmes non linéaires sur les sous-structures. Dans [Pebrel et al., 2008b] les auteurs proposent une **extension de la méthode FETI au cas non linéaire** : la condensation se fait sur le problème non linéaire, le problème d'interface non linéaire est résolu par un algorithme de Newton-Raphson et la stratégie est équivalente à une approche de type FETI avec une étape de résolution de problèmes non linéaires sur chaque sous-structure.

■ **Approche non linéaire mixte** : La méthode de décomposition de domaine basée sur la **LATIN** (pour *Large Time INcrement method* [Ladevèze, 1999]) présente l'originalité de définir des champs d'efforts et de déplacement de chaque côté de l'interface. Cependant, contrairement aux méthodes précédemment citées, celle-ci n'est pas basée sur une condensation du problème sur l'interface, ni l'utilisation d'un Gradient Conjugué. Ici, l'interface a un sens plus physique et permet de prendre en compte des comportements surfaciques complexes. Pour un problème de statique linéaire et pour certaines valeurs des paramètres de la LATIN — interfaces parfaites ; directions de recherches scalaires constantes ; relaxation égale à 1 — cette méthode est équivalente (voir *cf.* [Dureisseix et Champaney, 2000]) à l'algorithme ALG3 d'Uzawa et ainsi à la méthode de Schwarz modifié (mixte) sans-recouvrement [Fortin et Glowinski, 1982; Ladevèze, 1985a; Glowinski et Le Tallec, 1989; Lions, 1990].

Dans [Ladevèze et Dureisseix, 2000], les auteurs introduisent une condition de continuité supplémentaire, la continuité de la partie linéaire des efforts d'interfaces est forcée à chaque itération de la méthode. Ceci conduit à la résolution d'un problème gros-

sier défini sur l'ensemble de la structure, associé au calcul d'opérateur de comportement homogénéisé. Cette méthode faisant l'objet de cette thèse est plus particulièrement détaillée dans le chapitre suivant (Chapitre 2). Cette stratégie de calcul multi-échelle a été appliquée avec succès à une grande variété de problèmes, parmi lesquels : analyse de structures hétérogènes en statique [Ladevèze et Dureisseix, 2000; Ladevèze et al., 2001], systèmes multi-contact [Ladevèze et al., 2002], problèmes multiéchelles en temps et en espace [Ladevèze et Nouy, 2003; Ladevèze et al., 2008b], suivis de fissure [Guidault et al., 2008], délaminage des composites [Kerfriden et al., 2009], aux milieux non réguliers discrets [Nineb et al., 2007; Alart et Dureisseix, 2008], ainsi que l'interaction fluide-structure [Vergnault et al., 2009].

■ **Approche hybride** La méthode **HDD** (pour *Hybrid Domain Decomposition method* [Gosselet et Rey, 2006]) est un cadre qui unifie les méthodes primales et duales. L'idée est de traiter certains degrés de liberté par une approche primale, et les autres par une approche duale. Cette méthode est notamment utilisée dans le cadre des problèmes multiphysiques traités de façon monolithiques, dans lesquels il n'est pas forcément judicieux de traiter les différentes physiques avec la même approche. Le système résultant est non symétrique et semi-défini, il est résolu par un algorithme de type GMRes.

■ **Approches à 2 niveaux de condensation : FETI-DP et BBDC**

FETI-DP (pour *dual-primal FETI* [Farhat et al., 2001]) est un FETI à deux niveaux, qui propose de recondenser le problème d'interface sur les déplacements de certains degrés de liberté, par exemple en 2D, sur les nœuds de coin. Ceci a pour effet d'assurer la continuité du déplacement (et rotations) aux coins de chaque sous-structures, à chaque itération du gradient conjugué. Le problème grossier est donc beaucoup plus riche. Un autre avantage réside dans le fait que les matrices de problèmes locaux ne sont plus singulières, et les modes de corps rigides n'ont plus besoin d'être calculés.

Il existe également une version à deux niveaux de l'approche primale, appelée BBDC (pour *BDD by constraints* [Dohrmann, 2003]). Il a été démontré que le problème d'interface possédait le même conditionnement que celui de la méthode FETI-DP. Résolu par un gradient conjugué, les méthodes ont donc les mêmes performances.

2 Stratégies multiéchelles en temps

2.1 Méthodes multi-pas en temps

Dans certains cas, le fait d'utiliser une description unique pour tous les phénomènes temporels en jeu, peut s'avérer inutile voire, parfois, pénalisant, en particulier dans le cas des problèmes multiphysiques, pour lesquels les différentes physiques ne nécessitent pas la même description [Dureisseix et al., 2003; Néron et Dureisseix, 2008a], ou dans le cas où une zone de l'espace limitée nécessite une solution temporelle fine [Combescure et Gravouil, 2002].

Pour répondre à cette problématique, des premières approches ont été proposées pour permettre de prendre en compte des discrétisations temporelles différentes dans des régions séparées de la structure. Des méthodes mixtes initiées par [Hughes et Liu, 1978] permettent de coupler des schémas d'intégrations différents, par exemple implicite-explicite. Les méthodes permettant de prendre en compte des discrétisations temporelles différentes sont introduites, ce sont les méthodes de sous-cyclage ou multi-pas en temps [Belytschko et al., 1979]. Puis des méthodes mixtes avec sous-cyclage, combinant les deux approches précédentes ont été proposées [Belytschko et al., 1985; Gravouil et Combescure, 2001; Combescure et Gravouil, 2001]. Ces méthodes permettent alors d'adapter la finesse dans certaines zones, afin de modéliser des phénomènes complexes, sans que cela devienne pénalisant pour le reste de la structure. Ces méthodes ont été particulièrement bien adaptées à la simulation de l'impact en dynamique transitoire [Combescure et Gravouil, 2002; Faucher et Combescure, 2003]. Dans [Gravouil et Combescure, 2003] l'approche est couplée à des méthodes multiéchelle spatiales.

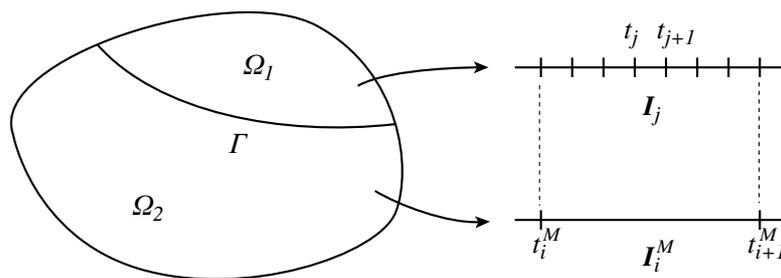


FIG. 1.11: Définitions des domaines Ω_1 et Ω_2 et de leur schéma temporel associé

L'idée est de partitionner le domaine en sous-domaines et d'associer à chacun un schéma d'intégration et une discrétisation temporelle. Nous considérons une structure décomposée en deux sous-structures Ω_1 et Ω_2 séparées par l'interface Γ (cf. Figure 1.11). Ensuite, les problèmes de dynamiques sont posés sur chacun des sous-domaines, la continuité des inconnues est assurée par un multiplicateur de Lagrange

Λ . L'équation traduisant l'équilibre de chaque sous-domaine s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} &= \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{link} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}^{link} = \mathbb{C}^T \Lambda \\ \sum_s \mathbb{C}\mathbf{W} &= 0 \end{aligned}$$

\mathbb{M} et \mathbb{K} sont les matrices de masse et de rigidité. \mathbb{C} est la matrice de contrainte, et \mathbf{W} peut être le déplacement, la vitesse ou l'accélération suivant celle de ces trois variables dont on cherche à imposer la continuité à l'interface Γ . L'idée est de remarquer que cette écriture, dans le cas linéaire, peut être séparée entre deux problèmes. D'une part un problème qui ne dépend que des quantités liées à la sous-structure courante libre (*free*), et d'autre part, un problème lié à la solution des problèmes adjacents, noté lié (*link*) :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}_{free} + \mathbb{K}\mathbf{U}_{free} = \mathbf{F}^{ext} \quad (1.4)$$

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}_{link} + \mathbb{K}\mathbf{U}_{link} = \mathbf{F}^{link} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{free} + \mathbf{U}_{link} \quad (1.6)$$

$$\sum_s \mathbb{C}\mathbf{W} = 0 \quad (1.7)$$

Ce problème est alors résolu par l'algorithme de Schur dual suivant, à chaque pas de temps :

1. Résoudre les problèmes libres (1.4)
2. Résoudre le problème condensé d'interface (1.7)
3. Résoudre les problèmes liés (1.5)
4. En déduire la solution sur chaque sous-domaine (1.6)

Dans le cas de discrétisations différentes, toutes les variables d'interface (Λ et \mathbf{W}) sont définies sur la grille grossière. Un opérateur de prolongement qui peut être basé sur une interpolation linéaire est utilisé pour transférer les champs sur la grille fine.

2.2 Méthodes d'enrichissement micro

Ces méthodes étendent au domaine temporel certaines des techniques d'enrichissement présentées au premier chapitre. Dans [Bottasso, 2002], l'auteur met en œuvre la méthode variationnelle multiéchelle (*VMS method*, cf. § 1.2.1) sur un problème hyperbolique. Un schéma de Galerkin discontinu est employé pour la solution grossière, et la solution micro est recherchée comme combinaison linéaire de polynômes orthogonaux à ceux de l'espace macro.

2.3 Méthodes dédiées aux chargements cycliques

2.3.1 Homogénéisation périodique

La méthode proposée dans [Guennouni, 1988] étend, en quelque sorte, l'homogénéisation périodique au domaine temporel. Elle repose sur une description à deux

échelles du domaine temporel. D'une part, un temps long $t^M \in [0, T]$ qui décrit les variations lentes et d'autre part, un temps court t^m qui décrit les variations rapides sur une période ΔT . À l'instar de la méthode spatiale, on introduit un petit paramètre $\epsilon = \Delta T/T$. On a ainsi :

$$\epsilon t^m = t^M$$

Ainsi la différentielle d'une variable $s(t) = s(t^M, t^m)$ par rapport au temps se note :

$$\dot{s}(t) = \frac{\partial}{\partial t^M} s(t^M, t^m) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t^m} s(t^M, t^m)$$

On se place dans le cas d'un problème de viscosité de type Maxwell :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_e \\ &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned}$$

avec \mathbf{K} et \mathbf{B} constants. On considère également, pour simplifier, que le chargement est constitué d'un effort donné découplé en temps et en espace $\underline{F}_d(\underline{x}, t) = \lambda(t^M, t^m) \underline{F}_d^s(\underline{x})$ et que $\underline{u}_d = 0$. Les variables $\underline{u}, \boldsymbol{\sigma}$ et ϵ_p sont cherchées sous la forme d'un développement asymptotique :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i s^{(i)}(t^M, t^m)$$

les $s^{(i)}$ étant ΔT -périodiques par rapport à t^m .

Enfin, on note $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur moyenne suivant :

$$\langle s(t^M, t^m) \rangle = \int_0^{\Delta T} s(t^M, t^m) dt^m$$

Les variables $s(t^M, t^m)$ sont vues comme la somme d'une partie macro $s_M(t^M)$ et de son complément micro $s_m(t^M, t^m)$:

$$s_M(t^M) = \langle s(t^M, t^m) \rangle \quad \text{et} \quad s_m(t^M, t^m) = s(t^M, t^m) - \langle s(t^M, t^m) \rangle$$

En introduisant le développement asymptotique dans l'équation du problème, on obtient deux types de problèmes (les exposants $\square^{(0)}$ sont omis) :

1. Un problème micro élastique ; trouver $s_m(t^M, t^m)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}_m &= 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \underline{n} = \underline{F}_d - \langle \underline{F}_d \rangle \\ \mathbf{K} \boldsymbol{\epsilon}(\underline{u}_m) &= \boldsymbol{\sigma}_m \quad \text{et} \quad \underline{u}_m = 0 \end{aligned}$$

Le chargement étant radial, ce problème peut être résolu par un problème de statique linéaire avec comme chargement \underline{F}_d^s qui permet de trouver $s^s = (\underline{u}^s, \boldsymbol{\sigma}^s)$. On en déduit $s_m = (\underline{u}_m, \boldsymbol{\sigma}_m)$ par :

$$s_m(\underline{x}, t^M, t^m) = (\lambda(t^M, t^m) - \langle \lambda(t^M, t^m) \rangle) s^s(\underline{x})$$

2. Un problème macro non linéaire ; trouver $s_M(t^M)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} s_M(\underline{x}, 0) &= s_0(\underline{x}) - s_m(\underline{x}, 0, 0) \\ \underline{\text{div}}\sigma_M &= 0 \quad \text{et} \quad \sigma_M \cdot \underline{n} = \langle \underline{F}_d \rangle \\ \mathbf{K}\varepsilon(\underline{u}_M) &= \sigma_M \quad \text{et} \quad \underline{u}_M = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_p &= \langle \mathbf{B}(\sigma_M + \sigma_m) \rangle = \langle \mathbf{B}(\sigma_M + \lambda_m(t^M, t^m)\sigma^s) \rangle \end{aligned}$$

Dans le cas général, le chargement est décomposé sous forme radiale (cf. chapitre 5). Ainsi le problème revient donc à calculer un ensemble de problèmes élastiques liés aux fonctions spatiales du chargement, ce qui nous donne la solution micro. La solution macro construite à partir de la solution micro et du chargement peut ensuite être résolue sur l'intervalle d'étude $t^M \in [0, T]$.

■ Bilan

Il s'agit donc d'une véritable méthode à deux échelles pour les problèmes non linéaires d'évolution sous chargements cycliques. Tout comme l'approche spatiale, cette méthode nécessite un rapport d'échelle ε très petit.

2.3.2 Méthode LATIN

La méthode développée dans [Cognard et Ladevèze, 1993; Ladevèze, 1999] et basée sur la LATIN propose une représentation particulière des variables sur deux échelles de temps. Il s'agit d'une vision éléments finis temporels ou les valeurs nodales sont des fonctions du temps périodiques. Tout comme la méthode précédente, deux temps caractéristiques sont distingués : un temps court t^m et un temps long t^M . Les variables sont également ΔT -périodiques par rapport au temps court. L'intervalle d'étude est muni d'une partition grossière de N intervalles I_i^G . Chaque intervalle de cette partition peut contenir plusieurs centaines de cycles Δt . Le premier cycle de l'intervalle I_i^G est noté cycle nodal de l'intervalle I_i^G . Des fonctions de formes éléments finis linéaires $\{\phi_i\}$ sont définies pour chaque intervalle I_i^G . Ainsi une variable $f(t)$ sera interpolée sous la forme :

$$s(t) \approx \tilde{f}(t^M, t^m) = \sum_{i=0}^N f_i(t^m)\phi_i(t^M) \quad (1.8)$$

où $f_i(t^m)$ est la fonction nodale de l'intervalle I_i^G Δt -périodique.

Le problème est ensuite résolu par la méthode LATIN [Ladevèze, 1999] (la méthode est présentée au chapitre 2) qui consiste en la succession des deux étapes suivantes :

■ **L'étape locale à l'itération n** consiste à construire, pour chaque pas de temps I_i^G une solution nodale $\hat{s}(t_i^m)$ par la résolution d'équations différentielles non linéaires locales sur les points d'intégration en espace. Connaissant cette solution nodale, l'équation différentielle peut être résolue sur l'intervalle complet conduisant à $\hat{s}_i(t^m)$. Pour le calcul de cette intégrale, des approximation réduites peuvent être utilisées pour réduire

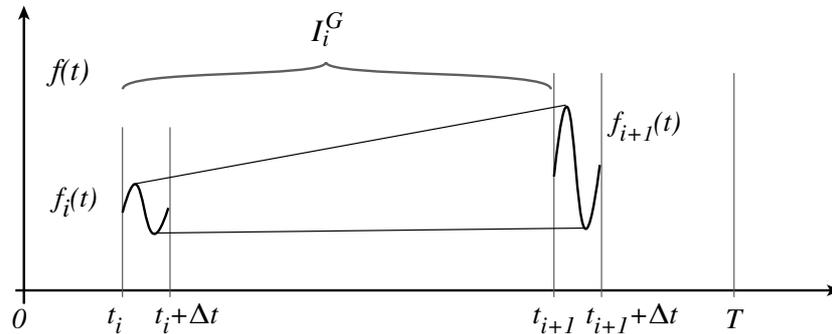


FIG. 1.12: Elements finis temporel linéaire

le coût de l'étape.

■ **L'étape linéaire à l'itération n** L'étape linéaire consiste à construire la solution \mathbf{s} d'un problème linéaire par une technique d'approximation dédiée : l'approximation radiale (cette méthode fait l'objet du chapitre 5). Cette technique conduit à la résolution d'un faible nombre de problèmes temporels et spatiaux. Les problèmes spatiaux sont standards, mais nécessitent des intégrations temporelles qui peuvent être menées avec les techniques d'intégrations approchées de l'étape précédente. Les problèmes temporels sont constitués de deux types de problèmes, un problème sur le cycle nodal donnant accès aux fonctions micro et un problème en variables macro qui permet, à partir d'une interpolation linéaire sur les intervalles I_i^G de connaître la valeur nodale suivante.

Cette stratégie propose donc une vision à deux échelles sur problème. Elle ne nécessite que le calcul de la solution sur un nombre restreint de cycles au prix de techniques de résolutions sophistiquées. Dans ces conditions le coût de calcul peut être considérablement réduit comparativement à une méthode incrémentale classique.

■ **Remarque 2.1** Cette méthode multiéchelle permet de déterminer de manière itérative la solution en chaque pas de temps d'un problème non-linéaire d'évolution sous chargement cyclique. Si l'on souhaite seulement déterminer le cycle stabilisé à partir duquel la durée de vie de la structure en fatigue peut être estimée, des techniques de calcul directes (non-incrémentales ou à grands incréments de temps) ont été introduites dans [Ladevèze et Rougée, 1985; Comte et al., 2006; Maitournam et al., 2002].

2.4 Méthodes de décomposition de domaine en temps

L'intégration d'un système d'équations différentielles à une échelle fine (avec un grand nombre d'intervalles de temps) peut conduire à des temps de calculs déraisonnables pour l'ingénieur. La méthode « Pararéel » [Lions et al., 2001; Maday et Turinici, 2002] et la méthode PITA [Farhat et Chandesris, 2003] sont des méthodes d'intégrations parallèles sur l'intervalle d'étude qui ont été développées pour tirer parti des cal-

culateurs à architecture parallèle. Elles se basent sur une décomposition du domaine temporel en intervalles grossiers (Figure 1.13), et proposent un algorithme itératif pour rendre la solution continue aux « interfaces temporelles ». Cet algorithme se compose de deux étapes. Dans un premier temps, on résout avec la précision souhaitée l'équation (*étape de prédiction*) sur chaque sous-intervalle grossier indépendamment, donc en parallèle. Puis, ensuite, on calcule une correction grossière dans le but de corriger les discontinuités aux interfaces temporelles (*étape de correction*).

On considère l'équation aux dérivées partielles discrétisée en espace suivante :

$$\underline{\dot{u}}(t) + \mathbb{A}(t)\underline{u}(t) = \underline{f}(t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.9)$$

avec les conditions initiales $\underline{u}(t = 0) = \underline{u}_0$. Par exemple, la discrétisation éléments finis d'un problème linéaire ou non, faisant éventuellement intervenir des dérivées secondes en temps peut être écrite sous cette forme. Soit $\mathcal{T}^G = \{I_i^G = [t_i^G, t_{i+1}^G]\}_{i=0}^{N^G-1}$ une partition grossière de l'intervalle d'étude $[0, T]$ et l'ensemble des $\mathcal{T}_i = \{I_j = [t_j, t_{j+1}]\}_{j=0}^{N-1}$ partitions fines des intervalles I_i^G (cf. Figure 1.13).

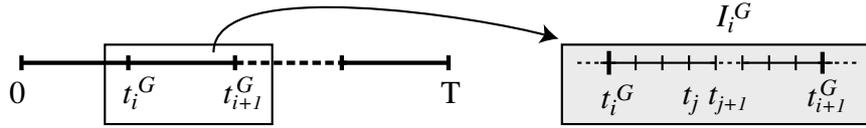


FIG. 1.13: Décomposition de l'intervalle d'étude en sous-intervalles grossiers

Nous pouvons alors réécrire le problème sous-structuré, indépendamment sur chaque intervalle grossier I_i^G , en notant $\underline{u}_i(t)$ la solution et \underline{U}_i sa condition initiale sur l'intervalle I_i^G , on a :

$$\underline{\dot{u}}_i(t) + \mathbb{A}(t)\underline{u}_i(t) = \underline{f}(t) \quad \text{et} \quad \underline{u}_i(t_i^G) = \underline{U}_i \quad \forall t \in I_i^G \quad (1.10)$$

avec les conditions de continuité aux interfaces temporelles :

$$\underline{U}_0 = \underline{u}_0 \quad \text{et} \quad \underline{U}_i = \underline{u}_{i-1}(t_i^G) \quad (1.11)$$

Les problèmes d'intégrations sur les intervalles grossiers (1.10) sont couplés par les conditions de continuité (1.11). L'idée est de se donner un algorithme itératif entre ces deux classes d'équations. À l'itération k , on se fixe d'abord les conditions initiales $\{\underline{U}_i^k\}_{i=0}^{N^G-1}$, et l'on cherche à résoudre les problèmes indépendants sur chaque sous-intervalle grossier en parallèle. La solution obtenue $\{\underline{u}_i^k(t)\}_{i=0}^{N^G-1}$ est discontinue aux temps t_i^G . L'idée de la deuxième étape est de calculer une correction $\{\underline{c}_i^k(t)\}_{i=0}^{N^G-1}$, discontinue aux interfaces telle que la somme $\{\underline{u}_i^k + \underline{c}_i^k\}_{i=0}^{N^G-1}$ soit une bonne approximation du problème initial. La correction doit donc vérifier l'équation aux dérivées partielles homogène associée :

$$\underline{\dot{c}}_i^k(t) + \mathbb{A}(t)\underline{c}_i^k(t) = 0 \quad (1.12)$$

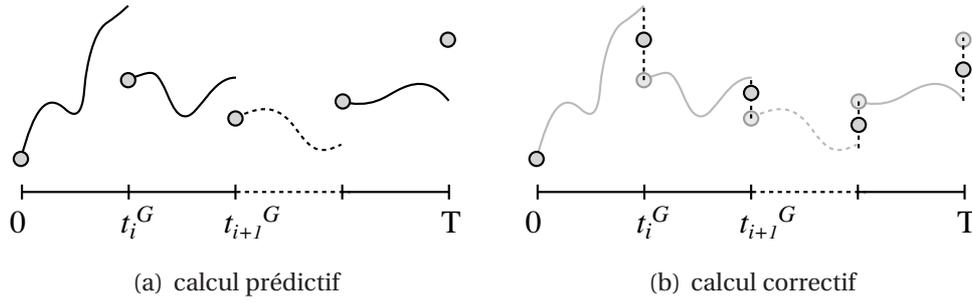


FIG. 1.14: Les deux étapes de l'algorithme

avec les conditions de continuité aux interfaces temporelles :

$$\underline{c}_i^k(t_i^G) = \underline{c}_{i-1}^k(t_i^G) + \underline{u}_{i-1}^k(t_i^G) - \underline{U}_i^k \quad (1.13)$$

Si l'on cherche la correction discrétisée sur la partition fine, alors l'algorithme converge en une seule itération. Cependant, son calcul est aussi coûteux que le calcul de la solution du problème initial. L'intérêt est justement de trouver une solution grossière de ce problème de correction. Il ne reste plus qu'à mettre à jour les conditions initiales de la manière suivante :

$$\underline{U}_i^{k+1}(t_i^G) = \underline{u}_{i-1}^k(t_i^G) + \underline{c}_{i-1}^k(t_i^G) \quad (1.14)$$

Plus récemment, une technique adaptative basée sur un raffinement croissant au cours des itérations de l'algorithme a été proposée dans [Chiaruttini et Rey, 2005] pour des problèmes non linéaires à variables internes et permet d'accroître notablement le gain de la méthode.

■ Bilan

Ces méthodes sont de véritables méthodes de décomposition de domaine temporel, adaptées au calcul parallèle. Elles deviennent intéressantes, en temps de calcul, si le nombre d'itérations à convergence est très inférieur au nombre d'intervalles grossiers. Un calcul sur une échelle grossière est mené, son coût est faible, et il permet d'améliorer les conditions de raccord aux interfaces. Il s'agit donc d'une méthode multiéchelle. Cependant, le problème grossier n'est autre qu'une étape de correction aux interfaces, et ne met pas en œuvre un véritable comportement mécanique homogénéisé.

Bilan

Dans ce chapitre nous avons présenté des stratégies mettant en œuvre un aspect multiéchelle en espace ou en temps. Les deux grandes familles de méthodes en espaces sont donc les méthodes de décomposition de domaine qui ont l'avantage de résoudre exactement le problème de référence à l'échelle micro ; et les méthodes basées sur l'homogénéisation qui fournissent un comportement macroscopique plus riche, mais limité aux grands rapports d'échelles. Du côté temporel, assez peu de méthodes

présentent une réelle procédure d'homogénéisation en temps ; les seules existantes étant limitées aux chargements cycliques.

Dans ce cadre, a été développée [Ladevèze et Nouy, 2003] une méthode de décomposition de domaine mixte qui inclut automatiquement une phase d'homogénéisation ne présentant pas les limitations des méthodes d'homogénéisation standards. Cette phase conduit à la résolution d'un problème homogénéisé en temps et en espace. Les couplages des échelles pris en compte par un algorithme itératif : la LATIN. Cette méthode, qui est le point de départ de ce travail de thèse est décrite en détail dans le chapitre suivant.

Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace

Dans ce chapitre, nous présentons la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps en espace basée sur la LATIN qui est à la base de ce travail de thèse. La stratégie est présentée dans le cadre de la (visco)plasticité. La méthode a fait l'objet des publications suivantes [Ladevèze et Nouy, 2003; Ladevèze et al., 2007a, 2008b]

Sommaire

1	Problème de référence à l'échelle micro	36
2	Problème de référence sous-structuré en temps et en espace	37
2.1	Conditions d'admissibilité sur $\Omega_E \times I_i^G$	38
2.2	Comportement d'interface	39
2.3	Reformulation du problème de référence	40
3	Description multiéchelle sur l'espace-temps	40
3.1	Une description des inconnues à deux échelles	40
3.2	Admissibilité des quantités macro	41
4	La stratégie de calcul multiéchelle	42
4.1	La méthode LATIN	42
4.2	Étape locale à l'itération $n + 1$	43
4.3	Étape linéaire à l'itération $n + 1$	44
5	Précisions sur l'algorithme	47

1 Problème de référence à l'échelle micro

Sous l'hypothèse des petites perturbations, nous considérons l'évolution quasi-statique et isotherme d'une structure Ω sur l'intervalle d'étude $[0, T]$. Cette structure est soumise à des efforts extérieurs volumiques \underline{f}_d et surfaciques \underline{F}_d sur la partie $\partial_2\Omega$ de son bord. Sur la partie complémentaire $\partial_1\Omega$, le déplacement \underline{u}_d est imposé (Figure 2.1).

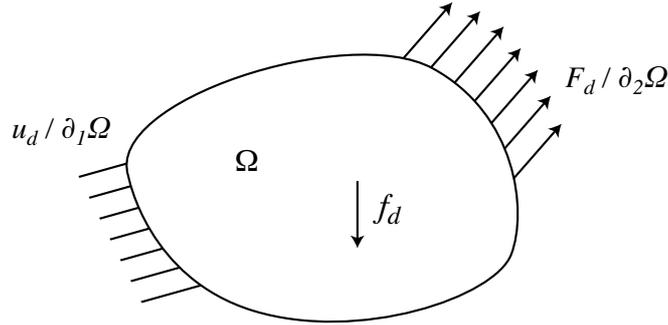


FIG. 2.1: Problème de référence à l'échelle micro

L'état de la structure est entièrement défini par la donnée des champs $(\dot{\varepsilon}_p, \dot{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})$ avec :

- ε_p désigne la partie anélastique de la déformation ε . En effet, la déformation ε , associée au déplacement \underline{u} , est découpée en une partie élastique ε_e et une partie anélastique $\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e$. \mathbf{X} désigne le reste des variables internes.
- $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le champ de contraintes de Cauchy et \mathbf{Y} l'ensemble des variables conjuguées de \mathbf{X} .

Toutes les quantités doivent vérifier des conditions initiales à $t = 0$.

En utilisant les notations suivantes pour les champs primaux :

$$\mathbf{e}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ -\mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_e \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{e}_p = \mathbf{e} - \mathbf{e}_e \quad (2.1)$$

et pour leurs champs duaux :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

le taux de dissipation s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\dot{\varepsilon}_p : \boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y}) d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\varepsilon}_p \circ \mathbf{f}) d\Omega \quad (2.3)$$

où \cdot désigne le produit scalaire adapté à la nature tensorielle de \mathbf{X} et \mathbf{Y} , et \circ désigne l'opérateur associé. On introduit également la forme bilinéaire « dissipation » :

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{s}' \rangle = \int_{[0, T] \times \Omega} \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\dot{\varepsilon}_p \circ \mathbf{f}' + \dot{\varepsilon}'_p \circ \mathbf{f}) d\Omega dt \quad (2.4)$$

avec \mathbf{E} et \mathbf{F} , les espaces associés aux champs $\dot{\mathbf{e}}_p$ et \mathbf{f} qui sont compatibles avec (2.4). Ces espaces nous permettent donc de définir $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{F}$, l'espace dans lequel l'état de la structure $\mathbf{s} = (\dot{\mathbf{e}}_p, \mathbf{f})$ est recherché.

■ Loi d'état

En suivant [Ladevèze, 1999], et si ρ désigne la masse volumique, de l'énergie libre $\rho\psi(\varepsilon_e, \mathbf{X})$ on obtient, sous l'hypothèse usuelle de découplage, une formulation dite « normale » des équations d'état :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = \mathbf{K} \varepsilon_e \\ \mathbf{Y} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} = \Lambda \mathbf{X}\end{aligned}\tag{2.5}$$

où \mathbf{K} est le tenseur de Hooke et Λ un tenseur constant symétrique défini positif qui sont des caractéristiques du matériau. Ces équations peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{e}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix}\tag{2.6}$$

La loi est dite « normale » en ce sens que \mathbf{A} est un opérateur linéaire symétrique défini positif. Ce formalisme, permet de prendre en compte un grand nombre de modèles de matériaux [Ladevèze, 1999].

La relation de comportement est obtenue par l'opérateur différentiel positif \mathbf{B} , qui dérive du pseudo-potential de dissipation $\phi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Y})$:

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \phi^* \\ \partial_{\mathbf{Y}} \phi^* \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{f}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_p|_{t=0} = \mathbf{0}\tag{2.7}$$

2 Problème de référence sous-structuré en temps et en espace

L'idée de base consiste à décrire la structure comme l'assemblage de composants simples, des sous-structures et des interfaces, chacune ayant ses propres variables et équations (admissibilité et comportement) [Ladevèze, 1999] (cf. Figure 2.3). L'intervalle de temps est également décomposé en sous-intervalles grossiers (Figure 2.2).

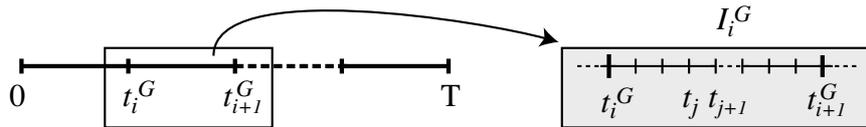


FIG. 2.2: Décomposition de l'intervalle d'étude $[0, T]$ en sous-intervalles I_i^G

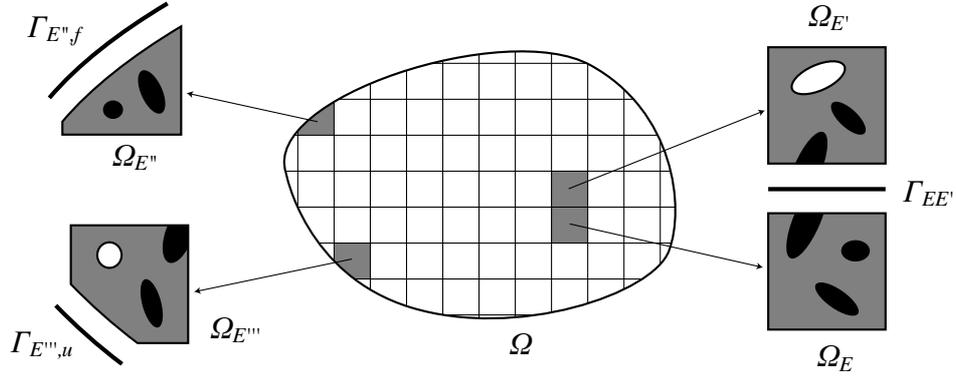


FIG. 2.3: Décomposition du domaine en sous-domaine et interfaces

Chaque sous-structure d'espace-temps $\Omega_E \times I_i^G$ de $\Omega \times [0, T]$ est définie par la donnée des variables $(\dot{\mathbf{e}}_{pE}, \mathbf{f}_E)$ et est soumise sur son bord $\partial\Omega_E$ à l'action de son environnement (l'extérieur ou les autres sous-structures) au travers d'un déplacement \underline{W}_E et d'un effort \underline{F}_E (Figure 2.3). On notera \square_E la restriction des variables et opérateurs au sous-domaine Ω_E et $\mathbf{E}_E, \mathcal{W}_E, \mathbf{F}_E$ et \mathcal{F}_E , les espaces correspondants aux champs $\dot{\mathbf{e}}_{pE}, \underline{W}_E, \mathbf{f}_E$ et \underline{F}_E . Ces espaces nous permettent de définir $\mathbf{S}_E = \mathbf{E}_E \times \mathcal{W}_E \times \mathbf{F}_E \times \mathcal{F}_E$, l'espace dans lequel $\mathbf{s}_E = (\dot{\mathbf{e}}_{pE}, \underline{W}_E, \mathbf{f}_E, \underline{F}_E)$ est recherché.

2.1 Conditions d'admissibilité sur $\Omega_E \times I_i^G$

La solution du problème sous-structuré doit vérifier les conditions suivantes :

- **Le champ de déplacement** \underline{u}_E doit être égal au déplacement d'interface \underline{W}_E sur le bord $\partial\Omega_E$, il doit également vérifier les conditions initiales \underline{u}_{E0} à $t = t_i^G$:

$$\underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E \quad \text{et} \quad \underline{u}_E|_{t=t_i^G} = \underline{u}_{E0} \quad (2.8)$$

L'espace des champs $(\underline{u}_E, \underline{W}_E)$ correspondant est noté \mathcal{U}_E . Dans le cas particulier où $t_i^G = 0$, alors \underline{u}_{E0} est la condition initiale du problème de référence. Dans le cas général, cette condition initiale traduit la condition de continuité aux interfaces temporelles.

- **Le champ de contraintes** σ_E doit être symétrique et doit équilibrer les efforts d'interface \underline{F}_E sur $\partial\Omega_E$ ainsi que les efforts volumiques \underline{f}_d sur Ω_E . La formulation variationnelle correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^*, \quad & - \int_{I_i^G \times \Omega_E} \sigma_E : \varepsilon(\dot{\underline{u}}_E^*) d\Omega dt \\ & + \int_{I_i^G \times \Omega_E} \underline{f}_d \cdot \dot{\underline{u}}_E^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \dot{\underline{W}}_E^* d\Gamma dt = 0 \quad (2.9) \end{aligned}$$

le sous-espace de $\mathbf{F}_E \times \mathcal{F}_E$ dont les éléments $(\mathbf{f}_E, \underline{F}_E)$ vérifient cette condition, est noté \mathcal{F}_E .

- **Le taux de déformation** $\dot{\epsilon}_E$ doit être le gradient symétrique d'un champ de vitesse de l'espace \mathcal{U}_E . La formulation variationnelle traduisant cette condition s'écrit :

$$\forall (\mathbf{f}_E^*, \underline{F}_E^*) \in \mathcal{F}_E^*, \quad - \int_{I_i^G \times \Omega_E} \boldsymbol{\sigma}_E^* : \dot{\epsilon}_E d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \underline{F}_E^* \cdot \dot{W}_E d\Gamma dt = 0 \quad (2.10)$$

Le sous-espace de $\mathbf{E}_E \times \mathcal{W}_E$ dont les éléments $(\mathbf{e}_E, \underline{W}_E)$ vérifient cette condition est noté \mathcal{E}_E .

- **En résumé**, l'ensemble des variables $\mathbf{s}_E = (\dot{\mathbf{e}}_{pE}, \underline{W}_E, \mathbf{f}_E, \underline{F}_E)$ doit vérifier :

$$((\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_E + \dot{\mathbf{e}}_{pE}), \underline{W}_E) \in \mathcal{E}_E \quad \text{et} \quad (\mathbf{f}_E, \underline{F}_E) \in \mathcal{F}_E \quad (2.11)$$

ce qui définit \mathbf{A}_{dE} , le sous-espace de \mathbf{S}_E dont les éléments \mathbf{s}_E vérifient cette condition (ces champs sont alors dits « E -admissibles »), mais également la relation de comportement :

$$\dot{\mathbf{e}}_{pE} = \mathbf{B}(\mathbf{f}_E) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_{pE}|_{t=0} = 0 \quad (2.12)$$

2.2 Comportement d'interface

Une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$, est caractérisée par la restriction notée $(\underline{W}_{EE'}, \underline{W}_{E'E'})$ (resp. $(\underline{F}_{EE'}, \underline{F}_{E'E'})$) des déplacements $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$ (resp. efforts $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$) des sous-structures avoisinantes. La relation de comportement de l'interface $\Gamma_{EE'}$ s'écrit, dans le cas général :

$$\mathbf{b}_{EE'} \left(\underline{F}_{EE'}|_t, \underline{F}_{E'E'}|_t, \dot{W}_{EE'}|_\tau, \dot{W}_{E'E'}|_\tau, \tau \leq t \right) = \underline{0} \quad (2.13)$$

dans lequel $\mathbf{b}_{EE'}$ dépend du type de comportement d'interface choisi. Par exemple pour une interface parfaite, on a :

$$\underline{W}_{EE'} = \underline{W}_{E'E} \quad (2.14)$$

$$\underline{F}_{EE'} = -\underline{F}_{E'E} \quad (2.15)$$

- **Remarque 2.1** Les conditions aux limites sur $\partial\Omega$ sont prises en compte comme les types de comportement particuliers suivants :

- pour un déplacement imposé sur $\Gamma_{E1} = \partial\Omega_E \cap \partial_1\Omega$: $\underline{W}_E = \underline{u}_d$
- pour un effort imposé sur $\Gamma_{E2} = \partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega$: $\underline{F}_E = \underline{F}_d$

On pourrait néanmoins envisager des techniques standards pour imposer ces conditions aux limites (pénalisation, multiplicateurs de Lagrange).

■ **Remarque 2.2** Dans le cas d'une non-linéarité de surface (contact [Ladevèze et al., 2002], interfaces cohésives [Ladevèze et al., 2006; Kerfriden et al., 2009]...), il sera judicieux de la faire coïncider avec les interfaces de la décomposition de domaine [Ladevèze, 1999]. Par exemple, lorsque l'on étudie des assemblages de structures, un choix naturel consiste à faire se confondre les sous-structures avec les composants [Boucard et Champaney, 2003]. Chaque composant peut à son tour être décomposé avec des interfaces parfaites entre les sous-domaines.

2.3 Reformulation du problème de référence

Nous pouvons donc revenir au problème de référence (2.1). Il consiste à trouver l'ensemble des $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega}$ de l'espace $\mathbf{S} = \otimes_{\Omega_E \subset \Omega} \mathbf{S}_E$. Soient \mathbf{E} , \mathcal{W} , \mathbf{F} et \mathcal{F} les extensions respectives des espaces précédents \mathbf{E}_E , \mathcal{W}_E , \mathbf{F}_E et \mathcal{F}_E au problème complet. Afin d'alléger les notations, $(\dot{\mathbf{e}}_p, \underline{\dot{W}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{F}) \in \mathbf{E} \times \mathcal{W} \times \mathbf{F} \times \mathcal{F}$ désignera $(\dot{\mathbf{e}}_{pE}, \underline{\dot{W}}_E, \underline{\mathbf{f}}_E, \underline{F}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \mathbf{E}_E \times \mathcal{W}_E \times \mathbf{F}_E \times \mathcal{F}_E$.

Le problème global de référence, défini sur le domaine spatio-temporel complet $[0, T] \times \Omega$, s'écrit sous la forme :

□ **Problème 2.1** Trouver $\mathbf{s}_{\text{exacte}} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega}$ qui vérifie, $\forall \Omega_E \subset \Omega$,

- la condition d'E-admissibilité $\mathbf{s}_E \in \mathbf{A}_{\mathbf{d}E}$
- La relation de comportement $\dot{\mathbf{e}}_{pE} = \mathbf{B}(\underline{\mathbf{f}}_E)$ avec $\mathbf{e}_{pE}|_{t=0} = 0$
- Le comportement d'interface $\forall \Omega_{E'} \in \Omega_E$,

$$\mathbf{b}_{EE'} \left(\underline{F}_{EE'|t}, \underline{F}_{E'E|t}, \underline{\dot{W}}_{EE'|\tau}, \underline{\dot{W}}_{E'E|\tau}, \tau \leq t \right) = \underline{0}$$

3 Description multiéchelle sur l'espace-temps

3.1 Une description des inconnues à deux échelles

L'approche *multiéchelle*, ou *micro/macro* consiste à introduire une description à deux échelles des **quantités d'interfaces uniquement**. Ces échelles sont appelées « micro » et « macro » et concernent tant le temps que l'espace. Nous le verrons plus loin, l'idée consiste à imposer, à chaque itération de la LATIN, la continuité de la partie macro des efforts d'interfaces, d'où l'intérêt de trouver une base représentative, mais de taille réduite. L'idée est due à [Ladevèze et Dureisseix, 1998, 2000] pour les problèmes multiéchelles en espace. Par la suite, elle a été étendue aux problèmes multiéchelles en temps et en espace dans [Ladevèze et Nouy, 2003].

Pour les interfaces de bord de Ω_E , les inconnues $(\underline{\dot{W}}_E, \underline{F}_E) \in \mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E$ sont séparées en :

$$\underline{\dot{W}}_E = \underline{\dot{W}}_E^M + \underline{\dot{W}}_E^m \quad \text{et} \quad \underline{F}_E = \underline{F}_E^M + \underline{F}_E^m \quad (2.16)$$

dans lequel les exposants \square^M et \square^m désignent respectivement la partie macro et le complément micro du champ \square . Les espaces correspondants aux parties macro sont notés \mathcal{W}_E^M et \mathcal{F}_E^M ; les espaces correspondants aux parties micro sont \mathcal{W}_E^m et \mathcal{F}_E^m . On notera naturellement $\mathcal{W}^M, \mathcal{F}^M, \mathcal{W}^m$ et \mathcal{F}^m leur extension à l'ensemble des interfaces.

Les espaces \mathcal{W}_E^M et \mathcal{F}_E^M peuvent être choisis arbitrairement, leur choix n'ayant d'influence que sur le taux de convergence. Une fois ces espaces choisis, la partie macro $\underline{\dot{W}}_E^M$ du champ $\underline{\dot{W}}_E \in \mathcal{W}_E$ est définie par la meilleure approximation de $\underline{\dot{W}}_E$ au sens de la forme bilinéaire suivante :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_E^M, \quad \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} (\underline{\dot{W}}_E^M - \underline{\dot{W}}_E) \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma \, dt = 0 \quad (2.17)$$

et la partie macro \underline{F}_E^M du champ $\underline{F}_E \in \mathcal{F}_E$ par :

$$\forall \underline{W}^* \in \mathcal{W}_E^M, \quad \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} (\underline{F}_E^M - \underline{F}_E) \cdot \underline{W}^* \, d\Gamma \, dt = 0 \quad (2.18)$$

Les compléments micro sont ensuite définis par $\underline{\dot{W}}_E^m = \underline{\dot{W}}_E - \underline{\dot{W}}_E^M$ et $\underline{F}_E^m = \underline{F}_E - \underline{F}_E^M$. Les équations (2.17) et (2.18) sont équivalentes à :

$$\int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \underline{\dot{W}}_E \cdot \underline{F}_E \, d\Gamma \, dt = \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} (\underline{\dot{W}}_E^M \cdot \underline{F}_E^M + \underline{\dot{W}}_E^m \cdot \underline{F}_E^m) \, d\Gamma \, dt \quad (2.19)$$

Les parties macro sont donc des moyennes en temps et en espace des efforts et déplacement d'interfaces. Concernant le domaine spatial, l'échelle macro est associée à la longueur caractéristique L_M des interfaces, *a priori* grande devant celle L_m de la discrétisation. Aucune condition sur le rapport d'échelles n'est cependant nécessaire. En pratique, une condition nécessaire pour assurer à la méthode l'extensibilité en espace, est que \mathcal{W}_E^M contienne les mouvements de corps rigides des interfaces et que \mathcal{F}_E^M contienne les résultantes et moments des efforts d'interfaces.

Concernant le domaine temporel, l'échelle macro est associée au temps caractéristique $\Delta t_i^G = t_{i+1}^G - t_i^G$ de l'intervalle grossier I_i^G , *a priori* grand devant celui de la partition fine qui munit chacun des intervalles grossiers.

Un champ \square_E^M s'écrit donc en chaque point (\underline{x}, t) de $\Gamma_{EE'} \times I_k^M$ sous la forme $\sum_{i,j} \alpha_{ij} \underline{e}_j^M(\underline{x}) f_i^M(t)$.

3.2 Admissibilité des quantités macro

Nous l'avons dit, le point fondamental, qui confère à la méthode l'extensibilité, consiste à **imposer partiellement, à chaque itération, la continuité des efforts d'interfaces**. Plus précisément, seule la partie macro des efforts doit vérifier l'équilibre de chaque interface, ainsi que les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \underline{F}_{EE'}^M + \underline{F}_{E'E}^M &= \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_{EE'} \\ \underline{F}_{E2}^M + \underline{F}_d^M &= \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_{E2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le sous-espace de \mathcal{F}^M correspondant est noté $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$. Nous introduisons également l'espace $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ dont les éléments appartiennent à \mathcal{W}^M , sont continus à chaque interface et vérifient les conditions de Dirichlet sur $\partial_1\Omega$. Enfin, les sous-espaces de \mathcal{W} et \mathcal{F} dont les éléments ont leur partie macro dans $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ et $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$ sont notés \mathcal{W}_{ad} et \mathcal{F}_{ad} .

■ **Remarque 3.1** *Seule la continuité de la partie macro des efforts d'interface est assurée, c'est en effet la seule équation qui s'écrit toujours en variables macro quelque soit le comportement d'interface choisi. En revanche, les conditions de transmission aux interfaces des déplacements ou vitesses ne s'écrivent pas nécessairement en variables macro dans le cas d'un comportement d'interface quelconque.*

4 La stratégie de calcul multiéchelle

4.1 La méthode LATIN

Le problème décomposé de référence, défini sur le domaine d'espace-temps $\Omega \times [0, T]$, s'écrit donc sous la forme :

□ **Problème 2.2** *Trouver $\mathbf{s}_{\text{exacte}} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega}$ qui vérifie, $\forall \Omega_E \subset \Omega$,*

(a) *la condition d'E-admissibilité* $\mathbf{s}_E \in \mathbf{A}_{\text{d}E}$

(b) *l'admissibilité des efforts macro* $\underline{F} \in \mathcal{F}_{\text{ad}}$

(c) *la relation de comportement* $\dot{\mathbf{e}}_{pE} = \mathbf{B}(\mathbf{f}_E)$ avec $\mathbf{e}_{pE}|_{t=0} = \mathbf{0}$

(d) *le comportement d'interface* $\forall \Omega_{E'} \in \Omega_E,$

$$\mathbf{b}_{EE'} \left(\underline{F}_{EE'|t}, \underline{F}_{E'E|t}, \underline{W}_{EE'|\tau}, \underline{W}_{E'E|\tau}, \tau \leq t \right) = \underline{\mathbf{0}}$$

La méthode LATIN [Ladevèze, 1999], qui est le pilier de la méthode présentée ici, est un solveur itératif général pour des problèmes non linéaires d'évolution, qui travaille à chaque itération sur le domaine spatio-temporel d'étude complet. Elle a été appliquée avec succès à une grande variété de problèmes, parmi lesquels : analyse statique, quasi-statique et dynamique, analyse post-flambage, plasticité sous chargement cyclique, systèmes fortement hétérogènes, délaminage des composites, systèmes multi-contact, suivis de fissure, problèmes multi-physiques, ainsi que l'interaction fluide-structure. [Cognard et Ladevèze, 1993], [Champaney et al., 1999], [Ladevèze et Dureisseix, 2000], [Ladevèze et al., 2001], [Ladevèze et Nouy, 2002], [Boucard et Champaney, 2003], [Dureisseix et al., 2003], [Néron et Dureisseix, 2008b], [Guidault et al., 2008], [Kerfriden et al., 2009], [Vergnault et al., 2009], [Ladevèze et al., 2008b].

Le premier principe de la méthode consiste à séparer les équations en deux groupes auxquels deux espaces de solutions sont associés : l'espace \mathbf{A}_{d} des solutions des équations linéaires éventuellement globales (2.2a) et (2.2b), ainsi que Γ des solutions des équations locales éventuellement non linéaires (2.2c) et (2.2d).

Le second principe de cette méthode consiste à utiliser un schéma itératif à deux étapes pour accéder à la solution $\mathbf{s}_{\text{exacte}}$ vérifiant naturellement $\mathbf{s}_{\text{exacte}} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$. Une itération de la LATIN est constituée de deux étapes, appelées « locale » et « linéaire ». Telles que présentées sur la figure 2.4, ces étapes consistent à construire des solutions de Γ et \mathbf{A}_d alternativement.

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d \xrightarrow{\text{étape locale}} \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma \xrightarrow{\text{étape linéaire}} \mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{s}_{\text{exacte}}$$

Itération $n + 1$

FIG. 2.4: Etapes locales et linéaires à l'itération $n + 1$

La figure 2.5 tente de donner une interprétation géométrique de la méthode dans le repère $(\dot{\mathbf{e}}_p, \dot{\underline{W}}) - (\mathbf{f}_E, \underline{F}_E)$. On comprend sur cette figure, que, afin de fermer le problème, doivent être introduites, ce que nous appelons « les directions de recherche » \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- , qui permettent de passer d'un espace à l'autre.

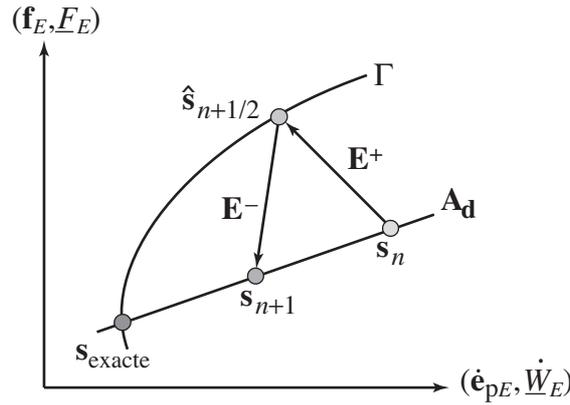


FIG. 2.5: Une itération de la méthode LATIN

4.2 Étape locale à l'itération $n + 1$

Cette étape consiste à calculer $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} = (\hat{\mathbf{s}}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \Gamma$ connaissant $\mathbf{s}_n = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \mathbf{A}_d$ et en suivant la direction de recherche \mathbf{E}^+ :

$$(\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n) \in \mathbf{E}^+ \iff \forall \Omega_E \subset \Omega, \begin{cases} \mathbf{H}^+ (\hat{\mathbf{f}}_E - \mathbf{f}_E) + (\hat{\mathbf{e}}_{pE} - \mathbf{e}_{pE}) = 0 \\ \mathbf{h}^+ (\hat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) - (\hat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

\mathbf{H}^+ et \mathbf{h}^+ sont des opérateurs symétriques définis positifs qui sont des paramètres de la méthode. \mathbf{H}^+ peut être interprété comme un opérateur linéarisé de \mathbf{B} et \mathbf{h}^+ comme une viscosité de l'interface.

Résoudre cette étape consiste donc à injecter les relations de comportement d'interfaces $\mathbf{b}_{EE'}$ ainsi que la relation de comportement des sous-structures \mathbf{B} dans la direction (2.21). Les variables ne vérifiant pas l'admissibilité, cette étape consiste en la résolution d'un ensemble de problèmes locaux (en chaque point d'interpolation), si \mathbf{b} et \mathbf{B} le sont également. Dans le chapitre suivant, on pourra trouver le détail des problèmes à résoudre à l'étape locale, pour des comportements d'interface particuliers.

4.3 Étape linéaire à l'itération $n + 1$

À cette étape, le problème consiste à trouver $\mathbf{s}_{n+1} = (\mathbf{s}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \mathbf{A}_d$ connaissant $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} = (\hat{\mathbf{s}}_E)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \Gamma$ et en suivant la direction de recherche \mathbf{E}^- :

$$\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{E}^- \iff \forall \Omega_E \subset \Omega, \begin{cases} \mathbf{H}^-(\mathbf{f}_E - \hat{\mathbf{f}}_E) - (\dot{\mathbf{e}}_{pE} - \hat{\dot{\mathbf{e}}}_{pE}) = 0 \\ \mathbf{h}^-(\underline{F}_E - \hat{\underline{F}}_E) + (\underline{\dot{W}}_E - \hat{\underline{\dot{W}}}_E) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Cette direction de recherche peut être écrite sous forme faible, pour le terme de sous-structure :

$$\forall \mathbf{f}^* \in \mathbf{F}, \sum_{\Omega_E \subset \Omega} \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{H}^-(\mathbf{f}_E - \hat{\mathbf{f}}_E) - (\dot{\mathbf{e}}_{pE} - \hat{\dot{\mathbf{e}}}_{pE})) \circ \mathbf{f}^* \, d\Omega \, dt = 0 \quad (2.23)$$

et pour le terme de bord :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_{ad}, \sum_{\Omega_E \subset \Omega} \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} (\mathbf{h}^-(\underline{F}_E - \hat{\underline{F}}_E) + (\underline{\dot{W}}_E - \hat{\underline{\dot{W}}}_E)) \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma \, dt = 0 \quad (2.24)$$

On peut remarquer que la fonction test \underline{F}^* appartient à \mathcal{F}_{ad} et non pas \mathcal{F} , ce qui couple cette équation pour toutes les interfaces. Pour rendre ces équations locales par sous-domaine, on assure cette condition par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange $\underline{\dot{W}}^M$ ($\underline{\dot{W}}^M = (\underline{\dot{W}}_E^M)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \mathcal{W}_{ad}^{M*}$), où \mathcal{W}_{ad}^{M*} est le sous-espace de \mathcal{W}_{ad}^M dont les éléments sont nuls sur $\partial_1\Omega$. Ainsi la direction de recherche peut être ré-écrite :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}, \sum_{\Omega_E \subset \Omega} \left\{ \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} (\mathbf{h}^-(\underline{F}_E - \hat{\underline{F}}_E) + (\underline{\dot{W}}_E - \hat{\underline{\dot{W}}}_E)) \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma \, dt - \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \underline{\dot{W}}_E^M \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma \, dt \right\} = 0 \quad (2.25)$$

avec l'admissibilité des efforts macro au sens faible :

$$\forall \underline{\dot{W}}^{M*} = (\underline{\dot{W}}_E^M)_{\Omega_E \subset \Omega} \in \mathcal{W}_{ad}^{M*}, \sum_{\Omega_E \subset \Omega} \left\{ \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \underline{\dot{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E \, d\Gamma \, dt - \int_{I_i^G \times \Gamma_{E2}} \underline{\dot{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d \, d\Gamma \, dt \right\} = 0 \quad (2.26)$$

4.3.1 Problème micro

Le problème micro est un problème linéaire qui consiste en un ensemble de problèmes indépendants par sous-structure. La solution \mathbf{s}_E vérifie l' E -admissibilité, ainsi que la direction de recherche \mathbf{E}^- . D'une part, l'admissibilité cinématique et les équations d'état conduisent à la relation suivante : $\forall \mathbf{f}^* \in \mathbf{F}$ et $\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}$

$$\int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{f}}_E + \dot{\mathbf{e}}_{pE}) \circ \mathbf{f}^* \, d\Omega dt = \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \underline{\dot{W}}_E \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma dt \quad (2.27)$$

D'autre part, en injectant les directions de recherche (2.23) et (2.25) dans l'équation d'admissibilité (2.27) précédente, on obtient l'expression du problème micro :

□ **Problème 2.3** Trouver $(\mathbf{f}_E, \underline{F}_E) \in \mathcal{F}_E$ qui vérifient $\forall (\mathbf{f}^*, \underline{F}^*) \in \mathcal{F}_E^*$,

$$\int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{f}}_E + \mathbf{H}^- \mathbf{f}_E) \circ \mathbf{f}^* \, d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \mathbf{h}^- \underline{F}_E \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma dt =$$

$$\int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{H}^- \widehat{\mathbf{f}}_E - \dot{\mathbf{e}}_{pE}) \circ \mathbf{f}^* \, d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \left(\mathbf{h}^- \widehat{\underline{F}}_E + \widehat{\underline{W}}_E + \widehat{\underline{W}}_E^M \right) \cdot \underline{F}^* \, d\Gamma dt$$

La solution de ce problème ne dépend que de $\widehat{\mathbf{s}}_E$ et de la valeur de $\widehat{\underline{W}}_E^M$ sur le bord $\partial\Omega_E$, qui est inconnue mais considérée, à ce stade comme une donnée pour le problème micro.

■ **Remarque 4.1** Les problèmes micro sont définis sur $\Omega_E \times I_i^G$ et indépendants par sous-structure. Une technique de résolution classique sera détaillée dans le chapitre suivant (Chapitre 3), dans le cas de la viscoélasticité. Elle consiste à résoudre le problème de manière incrémentale sur la partition fine dont est muni I_i^G . Pour ce faire, le problème doit être dualisé pour se ramener à un problème éléments finis classique en déplacement. Une technique alternative sera présentée dans le chapitre 5.

Le problème étant linéaire, sa solution peut être vue comme la somme d'un terme que l'on peut calculer explicitement $\widehat{\mathbf{s}}_E$ ne dépendant que de $\widehat{\mathbf{s}}_E$ et d'un terme qui dépend de la donnée du multiplicateur de Lagrange $\widehat{\underline{W}}_E^M$:

$$\mathbf{s}_{E|I_i^G} = \mathbf{L}_{E|I_i^G}(\widehat{\underline{W}}_{E|I_i^G}^M) + \widehat{\mathbf{s}}_{E|I_i^G}$$

ou $\mathbf{L}_{E|I_i^G}^s$ est un opérateur linéaire. En particulier, on peut écrire la même relation sur les efforts macro :

$$\underline{F}_{E|I_i^G}^M = \mathbf{L}_{E|I_i^G}^M(\widehat{\underline{W}}_{E|I_i^G}^M) + \widehat{\underline{F}}_{E|I_i^G}^M$$

$\mathbf{L}_{E|I_i^G}^M$ est un opérateur linéaire de \mathcal{W}_E^M dans \mathcal{F}_E^M . Il peut être interprété comme un opérateur de comportement homogénéisé sur le sous-domaine d'espace-temps $\Omega_E \times I_i^G$.

Le calcul de cet opérateur est fait explicitement, mais il reste raisonnable, puisqu'il va d'un espace macro de dimension finie très réduite à un autre espace macro de même dimension. En pratique il est calculé en résolvant un ensemble de problèmes micro (3.2) en prenant $\hat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2} \equiv 0$, des conditions initiales homogènes, et $\hat{\underline{W}}_E^M$ parcourant l'ensemble des vecteurs de base de \mathcal{W}_E^M , qui ne sont autres que les vecteurs de base macroscopiques.

■ **Remarque 4.2** *Cet opérateur ne dépend que des directions de recherche et de la base macro. Il peut donc être conservé d'une itération à l'autre, si les directions de recherche ainsi que la base macro, n'ont pas été modifiées. De plus, la construction de l'opérateur $\mathbf{L}_{E|I_i^G}^M$ étant indépendante d'une sous-structure à l'autre et d'un intervalle grossier à l'autre, son calcul peut être aisément mené en parallèle en espace mais également en temps.*

4.3.2 Problème macro

Le problème macro s'écrit donc simplement en injectant l'opérateur homogénéisé de chaque sous-structure (4.3.1) dans la relation d'admissibilité des efforts macro (2.26) :

$$\square \text{ Problème 2.4 } \text{ Trouver } \hat{\underline{W}} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^M \text{ qui vérifie } \forall \hat{\underline{W}}^{M\star} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^{M\star},$$

$$\sum_{\Omega_E \subset \Omega} \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \hat{\underline{W}}_E^{M\star} \cdot \left(\mathbf{L}_{E|I_i^G}^M(\hat{\underline{W}}_E^M) + \hat{\underline{F}}_{E|I_i^G}^M \right) d\Gamma dt =$$

$$\sum_{\Omega_E \subset \Omega} \int_{I_i^G \times \Gamma_{E2}} \hat{\underline{W}}_E^{M\star} \cdot \underline{F}_d d\Gamma dt$$

Ce problème est donc construit par assemblage des opérateurs homogénéisés locaux. Il s'agit d'un problème spatio-temporel non symétrique et global sur $\Omega \times I_i^G$. Si le nombre d'interfaces augmente, ou si le nombre de fonctions de base macro augmente, sa résolution peut devenir prohibitive. Pour réduire le coût de sa résolution, il est possible d'envisager une résolution approchée, notamment par une technique itérative que l'on peut interpréter comme une troisième échelle [Ladevèze et al., 2001; Ladevèze et Nouy, 2003; Ladevèze et al., 2006; Kerfriden et al., 2009]. En pratique, on remarque qu'une approximation même grossière du problème macro n'a pas d'influence sur la convergence globale de la méthode.

■ **Remarque 4.3** $\mathbf{L}_{E|I_i^G}^M$ n'est pas véritablement un opérateur homogénéisé standard, puisqu'il relie un résidu d'équilibre macro sur les interfaces à un multiplicateur de Lagrange dont la norme tend vers 0 au fur et à mesure des itérations. Cet opérateur traduit un effet de couplage entre les échelles. On aurait pu envisager le recours à un véritable opérateur de comportement homogénéisé, une sorte de complément de Schur macro spatio-

temporel reliant les efforts macro aux vitesses macro d'interfaces :

$$\underline{F}_{E|I_i^G}^M = \mathcal{S}_{p|I_i^G}^M \dot{\underline{W}}_{E|I_i^G}^M - \mathcal{S}_{p|I_i^G}^M \hat{\underline{W}}_{E|I_i^G}^M + \hat{\underline{F}}_{E|I_i^G}^M$$

En condensant ces opérateurs sur les degrés de libertés macro d'interface, on aurait ainsi eu accès à un problème macro plus conventionnel. Résolu de manière exacte, ce problème permettrait d'assurer la continuité des efforts et les conditions de transmissions des vitesses macro aux interfaces à chaque itération. Si dans le cas d'interfaces parfaites (ou élastiques) ce choix semble judicieux, c'est parce que le comportement d'interface peut facilement être restreint aux variables macro. Dans le cas d'une interface quelconque, le comportement ne s'écrit pas en variables macroscopiques. C'est la raison pour laquelle seule la continuité des efforts macro d'interfaces est imposée dans le cas général.

4.3.3 Résolution de l'étape linéaire

L'étape linéaire est résolue de manière incrémentale sur la grille grossière. Pour chaque nouvel intervalle grossier I_i^G , trois types de problèmes sont résolus. Une première série de problèmes micro en prenant le multiplicateur de Lagrange $\underline{\tilde{W}}_E^M$ nul. Ces problèmes permettent, via le calcul de $\hat{\underline{F}}_{E|I_i^G}^M$, de construire le second membre macro. Un unique problème macro, dont la résolution donne accès au multiplicateur de Lagrange $\underline{\tilde{W}}^M$ sur toutes les interfaces et tout l'intervalle de temps I_i^G . Ceci permet donc de construire le second membre du problème micro complet. Enfin une deuxième série de problèmes micro qui permettent de calculer la solution complète du problème micro. Une fois ces trois étapes résolues pour l'intervalle grossier I_i^G , on peut passer à l'intervalle grossier suivant.

■ **Remarque 4.4** La continuité à l'interface temporelle entre I_i^G et I_{i+1}^G est assurée par la prise en compte de la condition initiale du problème micro 1 sur l'intervalle I_{i+1}^G qui est définie par la solution à l'instant final sur l'intervalle I_i^G . Les problèmes macro et micro 2 ont des conditions initiales nulles.

5 Précisions sur l'algorithme

■ Initialisation

Pour initialiser l'algorithme, nous choisissons de construire artificiellement une solution \mathbf{s}_0 de l'espace \mathbf{A}_d . Une solution facile à calculer est la solution nulle $\mathbf{s}_0 \equiv 0$ à laquelle on rajoute la condition initiale.

■ Convergence de la stratégie

La convergence de la stratégie monoéchelle a été démontrée dans [Ladevèze, 1999] sous certaines conditions. En effet, si l'opérateur \mathbf{B} est monotone, et si de plus les

interfaces représentent des conditions aux limites, des liaisons parfaites ou des surfaces de contact sans frottement, alors il a été montré que le processus moyen $(\mathbf{s}_{n+1} + \mathbf{s}_n)/2$ converge si les directions de recherche sont conjuguées, c'est-à-dire $(\mathbf{H}^+, \mathbf{h}^+) = (\mathbf{H}^-, \mathbf{h}^-) = (\mathbf{H}, \mathbf{h})$ et si \mathbf{H} et \mathbf{h} sont positifs.

Pour se placer dans le cadre de la preuve de convergence, et pour assurer la convergence de la méthode sur un classe plus large de comportements et de types d'interfaces, il est classiquement introduit une étape de relaxation. En notant $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}$ la quantité issue du calcul de l'étape linéaire (précédemment appelée \mathbf{s}_{n+1}), l'étape de relaxation revient à :

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mu \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n \quad (2.28)$$

ou $\mu \in [0, 1]$ est le paramètre de relaxation, généralement pris égal à 0.8.

Une mesure de la distance entre deux solutions consécutives appartenant à chacun des deux espace permet de définir un indicateur de convergence :

$$v^2 = \frac{\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|^2}{\|\mathbf{s} + \hat{\mathbf{s}}\|^2} \quad (2.29)$$

le choix de cet indicateur ainsi que les choix classiques de $\|\cdot\|$ sont discutés au chapitre 4

■ Algorithme

L'algorithme 1 rappelle les différentes étapes de la stratégie de calcul multiéchelle présentée dans ce chapitre :

Algorithme 1 : Stratégie de calcul multiéchelle en temps et en espace

■ **Initialisation** : $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{A}_d$

pour $n = 1, \dots, n_{max}$ **faire**

■ **Etape locale** : calcul de $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$

• **Problèmes sur les sous-structures** locaux en temps et en espace

→ mise à jour éventuelle de \mathbf{H}^+

→ calcul de $\hat{\mathbf{f}}_E$ et $\hat{\mathbf{e}}_{pE}$

• **Problèmes sur les interfaces** locaux en temps et en espace

→ mise à jour éventuelle de \mathbf{h}^+

→ calcul de $\hat{\underline{F}}$ et $\hat{\underline{W}}$

■ **Etape linéaire** : calcul de $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$

pour $i = 1, \dots, N_G$ **faire**

• **Problèmes micro 1** définis sur $\Omega_E \times I_i^G$

→ calcul de $\mathbf{s}_{E,n+1|I_i^G}$ associée à $\hat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2|I_i^G}$

→ construction du second membre du problème macro

→ mise à jour éventuelle des opérateurs homogénéisés

• **Problème macro** spatio-temporel défini sur $\Omega_E \times I_i^G$

→ calcul de $\hat{\underline{W}}_{n+1|I_i^G}^M$

• **Problèmes micro 2** définis sur $\Omega_E \times I_i^G$

→ calcul de $\mathbf{s}_{E,n+1|I_i^G}$

■ **Critère d'arrêt** basé sur $\|\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}\|$

Mise en œuvre de la stratégie pour des matériaux viscoélastiques

Ce chapitre apporte quelques précisions quant à la stratégie précédemment présentée. Les choix des discrétisations spatiales et temporelles utilisées dans cette thèse y sont présentées. Les problèmes à chaque étape de la méthode y sont présentés dans le cadre d'un matériau viscoélastique, en utilisant cette discrétisation. Le choix des directions de recherche y est discuté. Enfin un exemple 3D non linéaire traité par le code développé pendant cette thèse est proposé.

Sommaire

1	Choix des espaces d'approximation	52
1.1	Discrétisation spatiale	52
1.2	Discrétisation temporelle	54
2	Étape linéaire pour un matériau viscoélastique	55
3	Étape locale pour quelques types d'interfaces	57
4	Choix des directions de recherche	60
4.1	Directions de recherche dans les sous-structures	60
4.2	Directions de recherche dans les interfaces	61
5	Un code éléments finis	62

1 Choix des espaces d'approximation

1.1 Discrétisation spatiale

Le champ de déplacement \underline{u}_E et la contrainte σ_E sur une sous-structure Ω_E appartiennent respectivement aux espaces \mathcal{U}_E^h et \mathcal{F}_E^h . Les déformations appartiennent à \mathcal{E}_E^h . Pour ces espaces d'approximations, nous utiliserons une discrétisation éléments finis. Cependant, dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine mixte, une attention particulière doit être portée à la discrétisation des quantités d'interface [Ladevèze et Nouy, 2003].

Sur une interface $\Gamma_{EE'}$, les déplacements \underline{W} et efforts \underline{F} appartiennent respectivement aux espaces $\mathcal{W}_{EE'}^h$ et $\mathcal{F}_{EE'}^h$. Le choix de ces espaces doit être fait avec soin. En particulier \underline{F} appartient à $H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})$, et n'est donc pas nécessairement continu. Un choix classique consiste donc à interpoler les efforts de manière compatible avec la trace des contraintes sur le bord. Par exemple, pour un triangle (en 2D) et un tétraèdre (en 3D) linéaire, la contrainte étant constante par élément, les quantités d'interfaces sont choisies constantes par élément d'interface (la valeur étant définie au centre de gravité de l'élément d'interface).

En pratique, cette discrétisation génère des modes oscillants d'interface dont l'énergie est très mal évaluée. Ces modes sont particulièrement visibles dans les zones à forts gradient ou à fortes discontinuités. Par exemple, la solution d'un problème simple (cf. Figure 3.1) obtenue sans traitement particulier présente des oscillations sur la contrainte ainsi que sur l'inter-effort normal, le long d'une interface verticale.

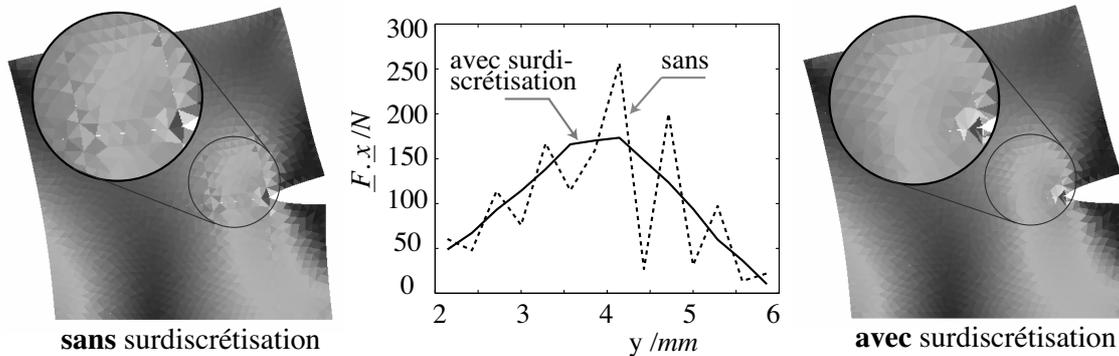


FIG. 3.1: Oscillations sur la contrainte et sur l'effort normal le long d'une interface

Ce phénomène est décrit précisément dans [Ladevèze et Nouy, 2003] et les solutions suivantes y sont proposées. L'idée adoptée consiste à décrire les bords des sous-structures plus finement que les interfaces. On parle alors de sous-discrétisation des interfaces ou surdiscrétisation des sous-structures. Deux méthodes peuvent être envisagées. La méthode- p consiste à augmenter le degré d'interpolation des éléments de bord, en ajoutant, par exemple, des nœuds sur les arêtes de ces éléments. La méthode- h , quant à elle, nécessite le découpage des éléments de bord en sous-éléments, de ma-

nière à mettre en vis-a-vis un élément d'interface, avec plusieurs éléments de sous-structures. En 2D, la méthode- h est décrite pour les triangles et quadrangles dans [Ladevèze et Nouy, 2002]. Sur la figure 3.2, nous pouvons constater que la convergence est pénalisée en l'absence de surdiscrétisation.

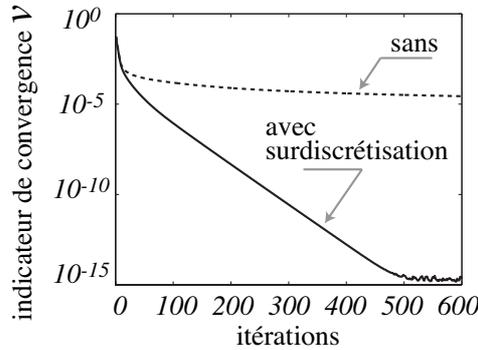


FIG. 3.2: Critère de convergence en fonctions des itérations, avec et sans surdiscrétisation

En 3D, la technique que nous utilisons est celle développée dans le code de D. Violeau. Dans les exemples qui suivent, nous utilisons des éléments tétraédriques auxquels nous appliquons une méthode- h . Pour ce faire, nous ajoutons des nœuds sur les faces de bord (1 face, 2 faces, ou 3 faces cf. Figure 3.3) et reconstruisons de nouveaux

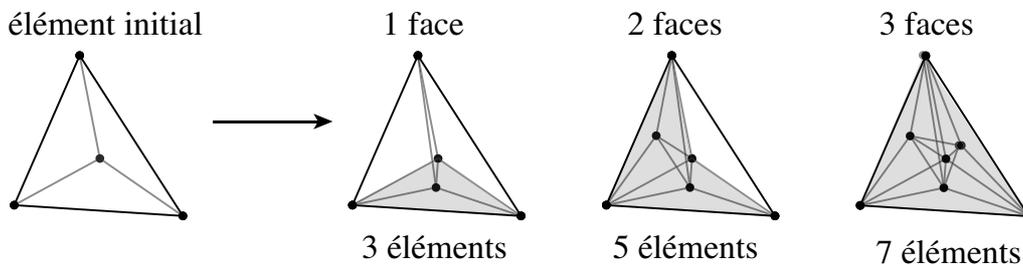


FIG. 3.3: Méthode- h pour les tétraèdres

tétraèdres sur ces bases. Dans le cas général, pour utiliser, par exemple, des prismes ou des hexaèdres, pour qui le découpage nécessite l'utilisation d'éléments pyramidaux, la méthode- p peut être utilisée. Elle requiert, cependant, la construction *a priori* d'un grand nombre d'éléments (suivant les configurations). Une technique alternative simple consiste à utiliser la méthode- h appliquée à tous les éléments de la sous-structure, pour ne pas avoir à différencier les configurations des éléments. Dans les exemples, nous utiliserons une surdiscrétisation de type h . Les efforts et déplacement d'interface seront $p0$ sur les éléments d'interface et les déplacements de sous-structure seront $p1$ sur des éléments surdiscrétisés. Un exemple de maillage est donnée Figure 3.4.

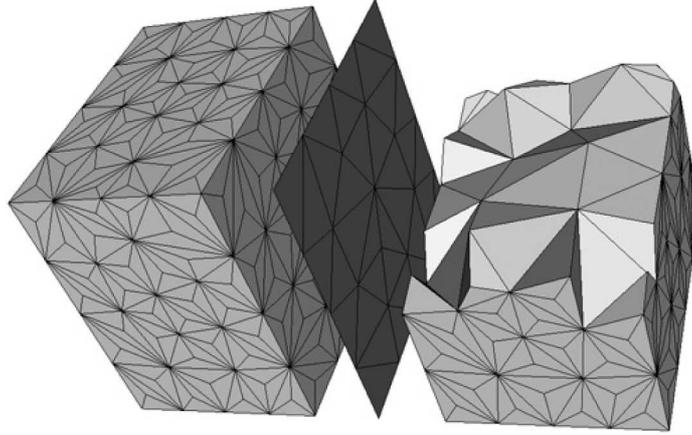


FIG. 3.4: Interface p_0 et bords de sous-structures p_1 surdiscrétisées

1.2 Discrétisation temporelle

Au niveau temporel, nous utiliserons une technique de Galerkin Discontinu. Elle se base sur une partition $\tau_h = \{I_j^f = [t_j, t_{j+1}]\}_{j=0}^N$ de chaque intervalle grossier I_i^G . Cette technique permet de rechercher les solutions dans un espace de fonctions éventuellement discontinues aux pas de temps t_j (cf. Figure 3.5). Nous noterons $\mathbf{Z}_r^{[0,T]}$ l'espace des fonctions polynomiales de degrés r sur les intervalles de τ_h et éventuellement discontinues aux instant t_j . L'intégrale de la dérivée d'une fonction de $\mathbf{Z}_r^{[0,T]}$ nécessite d'être redéfinie au sens des distributions.

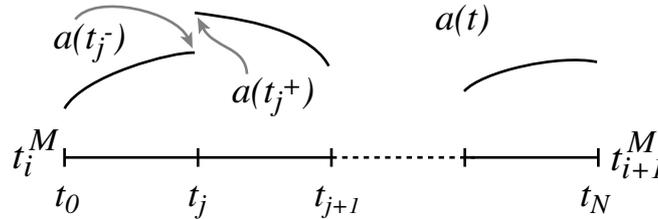


FIG. 3.5: Fonction $a \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]}$ sur la partition τ_h

Soit a et $b \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]}$, au sens de Galerkin Discontinu [Eriksson et al., 1985], on peut définir, par exemple :

$$\int_{I_i^G} a \dot{b} dt = \sum_{j=1}^N \int_{]t_j, t_{j+1}[} a \dot{b} dt + a(t_j^+) (b(t_j^+) - b(t_j^-)) \quad (3.1)$$

ou $b_{t_0^-}$ désigne la condition initiale, prise au sens faible.

■ **Remarque 1.1** Dans le cas particulier de Galerkin Discontinu d'ordre 0, les fonctions sont constantes par morceau, donc l'intégrale d'une fonction $a \in \mathbf{Z}_0^{[0,T]}$ et de la dérivée de

$b \in \mathbf{Z}_0^{[0,T]}$ s'écrit :

$$\int_{I_i^G} a \dot{b} dt = \sum_{i=1}^N a(t_j^+) (b(t_j^+) - b(t_j^-)) \quad (3.2)$$

Dans ce cas, le schéma est similaire à Euler implicite, pour lequel la dérivée d'une fonction $b(t)$ en t_j se note $(b_j - b_{j-1})/\delta t_j$ avec $\delta t_j = t_j - t_{j-1}$. Les calculs sont similaires mais l'interprétation sensiblement différente, puisqu'il s'agit de comparer une méthode de collocation à une méthode d'interpolation. Pour pouvoir faire véritablement un parallèle, il faudrait extrapoler la solution $b(t)$ obtenue par Euler implicite entre deux pas de temps consécutifs $]t_{j-1}, t_j]$ par la constante b_j .

2 Étape linéaire pour un matériau viscoélastique

Dans cette partie, nous étudions la résolution par une méthode incrémentale classique des problèmes de l'étape linéaire, dans le cas particulier de matériaux viscoélastiques de type Maxwell. Pour ces matériaux, le tenseur de déformation se décompose en une partie élastique et une partie anélastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (3.3)$$

$$= \mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{B}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad (3.4)$$

\mathbf{B} peut être éventuellement non linéaire. Pour un matériau de ce type, le problème à résoudre à l'étape linéaire (cf. problème 3.2 chapitre 2) s'écrit (l'indice E omis) :

□ **Problème 3.1** Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{F}) \in \mathcal{F}$ qui vérifient $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{F}^*) \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H}^- \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \mathbf{h}^- \underline{F} \cdot \underline{F}^* d\Gamma dt = \\ \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{H}^- \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \left(\mathbf{h}^- \hat{\underline{F}} + \hat{\underline{W}} + \hat{\underline{W}}^M \right) \cdot \underline{F}^* d\Gamma dt \end{aligned}$$

Ce problème est résolu en deux parties (cf. Chapitre 2), une associée aux quantités issues de l'étape locale $\hat{\mathbf{s}}$ (problème micro 1), permettant de construire le second membre du problème macro et une associée au multiplicateur de Lagrange $\hat{\underline{W}}^M$ (problème micro 2). Ces deux problèmes s'écrivent sous une écriture unique :

□ **Problème 3.2** Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{F}) \in \mathcal{F}$ qui vérifient $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{F}^*) \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H}^- \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \mathbf{h}^- \underline{F} \cdot \underline{F}^* d\Gamma dt = \\ \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{H}^- \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \left(\mathbf{h}^- \bar{\underline{F}} + \bar{\underline{W}} \right) \cdot \underline{F}^* d\Gamma dt \end{aligned}$$

avec $\bar{\mathbf{s}} = (\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p, \dot{\bar{\mathbf{W}}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{F}})$ désignant les données du problème, différentes suivant qu'il s'agisse du problème micro 1 :

$$\bar{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}} = (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \hat{\mathbf{W}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{F}}) \quad (3.5)$$

ou du problème micro 2 :

$$\bar{\mathbf{s}} = (\mathbf{0}, \dot{\mathbf{W}}^M, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (3.6)$$

Pour être résolu avec une technique incrémentale classique, ce problème formulé en contrainte, doit être dualisé, pour se ramener à un problème éléments finis en déplacement classique. Pour ce faire, nous récrivons la condition d'admissibilité du champ test $(\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{\mathbf{F}}^*)$ par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{W}})$. Ainsi le problème micro s'écrit :

□ **Problème 3.3** Trouver $(\boldsymbol{\sigma}, \underline{\mathbf{F}}) \in \mathcal{F}$ et $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{W}}) \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{\mathbf{F}}^*) \in \mathcal{F}^*$,

$$\begin{aligned} \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{K}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H}^- \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \mathbf{h}^- \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^* d\Gamma dt = \\ \int_{I_i^G \times \Omega_E} (\mathbf{H}^- \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt + \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} (\mathbf{h}^- \bar{\mathbf{F}} + \dot{\bar{\mathbf{W}}}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^* d\Gamma dt \\ + \int_{I_i^G \times \Omega_E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt - \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \dot{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^* d\Gamma dt \end{aligned}$$

et $\forall (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \dot{\mathbf{W}}^*) \in \mathcal{E}^*$

$$\int_{I_i^G \times \Omega_E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* : \boldsymbol{\sigma} d\Omega dt - \int_{I_i^G \times \partial\Omega_E} \dot{\mathbf{W}}^* \cdot \underline{\mathbf{F}} d\Gamma dt = 0$$

Remarquons que le champ test $(\boldsymbol{\sigma}^*, \underline{\mathbf{F}}^*)$, ne vérifie pas de contrainte d'admissibilité, donc le problème (3.3) s'écrit en tout point de l'espace et du temps. Plus précisément, dans ce cadre, la première relation du problème (3.3) s'écrit sous la forme de deux types de problèmes, un problème en chaque point d'interpolation du sous-domaine et un problème en chaque point d'interpolation de sa frontière. L'écriture du problème dualisé dépend donc du schéma incrémental choisi. Dans la suite, nous utiliserons, par exemple, le schéma de Galerkin discontinu d'ordre 0. Chaque variable appartiendra donc à $\mathbf{Z}_0^{[0,T]}$. On notera I_j^f l'intervalle de temps courant, et δt_j sa longueur, de telle sorte que :

$$\mathbf{K}^{-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_{j-1}}{\delta t_j} + \mathbf{H}^- \boldsymbol{\sigma}_j - \mathbf{H}^- \bar{\boldsymbol{\sigma}}_j + \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pj} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pj-1}}{\delta t_j} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_j - \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1}}{\delta t_j} = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{h}^- \underline{\mathbf{F}}_j - \mathbf{h}^- \bar{\underline{\mathbf{F}}}_j - \frac{\bar{\mathbf{W}}_j - \bar{\mathbf{W}}_{j-1}}{\delta t_j} + \frac{\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_{j-1}}{\delta t_j} = 0 \quad (3.8)$$

Les équations locales (3.7) et (3.8) sont ensuite injectées dans l'équation d'admissibilité des contraintes (deuxième relation du problème (3.3)). On notera pour simplifier

$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}^{-1}/\delta t_j + \mathbf{H}^{-1})^{-1}$. La résolution d'un problème micro consistera donc à résoudre pour chaque intervalle de temps I_j^f , le problème spatial suivant, les données à l'intervalle de temps précédent étant connues :

□ **Problème 3.4** Trouver $(\varepsilon(\underline{u}_j), \underline{W}_j) \in \mathcal{E}_E$ qui vérifient $\forall (\varepsilon^*, \underline{W}^*) \in \mathcal{E}_E^*$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_E} \frac{\bar{\mathbf{K}}}{\delta t_j} \varepsilon(\underline{u}_j) : \varepsilon^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \frac{\mathbf{h}^{-1}}{\delta t_j} \underline{W}_j \cdot \underline{W}^* d\Gamma = \\ - \int_{\Omega_E} \bar{\mathbf{K}} \left(\mathbf{H}^{-1} \bar{\underline{\sigma}}_j - \frac{\bar{\varepsilon}_{pj} - \bar{\varepsilon}_{pj-1}}{\delta t_j} + \frac{\mathbf{K}^{-1} \underline{\sigma}_{j-1} - \varepsilon(\underline{u}_{j-1})}{\delta t_j} \right) : \varepsilon^* d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega_E} \left(\bar{\underline{F}}_j + \mathbf{h}^{-1} \frac{\bar{\underline{W}}_j - \bar{\underline{W}}_{j-1}}{\delta t_j} + \mathbf{h}^{-1} \frac{\underline{W}_{j-1}}{\delta t_j} \right) \cdot \underline{W}^* d\Gamma \end{aligned}$$

Dans une étape de post-traitement, les inconnues statiques sont recalculées par les équations locales (3.7) et (3.8) en chaque point du temps et de l'espace.

3 Étape locale pour quelques types d'interfaces

Un des avantages les plus significatifs qu'apportent les méthodes de décomposition de domaine mixtes, et plus particulièrement la LATIN, est de pouvoir prendre en compte très facilement des comportements d'interface complexes éventuellement non linéaires tels que les interfaces à épaisseur variable, le contact frottant, les interfaces cohésives... Si l'on fait coïncider ces interfaces particulières avec les interfaces de la décomposition de domaine, alors leur comportement (donc la non-linéarité) est pris en compte uniquement à l'étape locale, donc point d'interpolation par point d'interpolation, ceci avec un coût très faible.

Nous détaillons dans cette partie le calcul à mener à l'étape locale pour un certain nombre d'interfaces particulières qu'il nous a été nécessaire de d'implanter pour traiter les différents problèmes de ce manuscrit. Nous rappelons qu'à cette étape, connaissant \mathbf{s} , nous cherchons $\hat{\mathbf{s}}$ en suivant la direction de recherche sur chaque interface $\Gamma_{EE'}$:

$$\mathbf{h}(\hat{\underline{F}}_{EE'} - \underline{F}_{EE'}) - (\hat{\underline{W}}_{EE'} - \underline{W}_{EE'}) = 0 \quad (3.9)$$

Dans la suite l'indice $\square_{EE'}$ sera omis, \underline{W}' désignera $\underline{W}_{E'E}$.

■ Interface parfaite

Le comportement parfait d'une interface se traduit par la nullité du saut de déplacement $\hat{\underline{W}} = \underline{W}'$, et l'équilibre de l'interface $\hat{\underline{F}} + \underline{F}' = 0$. Il suffit alors d'injecter ce comportement dans la direction de recherche (3.9)

En pratique, nous allons faire l'addition des expressions des deux directions de recherche de part et d'autre de l'interface $\Gamma_{EE'} : \forall t \in [0, T]$

$$(\underline{F} + \underline{F}') + \mathbf{h}^{-1} \underline{\hat{W}} + \mathbf{h}'^{-1} \underline{\hat{W}}' = (\underline{\hat{F}} + \underline{\hat{F}}') + \mathbf{h}'^{-1} \underline{\dot{W}}' + \mathbf{h}^{-1} \underline{\dot{W}}$$

puis ne faire intervenir le comportement qu'après :

$$\underline{\hat{W}} = (\mathbf{h}^{-1} + \mathbf{h}'^{-1})^{-1} \left\{ \mathbf{h}'^{-1} \underline{\dot{W}}' + \mathbf{h}^{-1} \underline{\dot{W}} - (\underline{F} + \underline{F}') \right\} \quad (3.10)$$

Soit après discrétisation :

$$\underline{\hat{W}}_j = \underline{\hat{W}}_{j-1} + (\mathbf{h}^{-1} + \mathbf{h}'^{-1})^{-1} \left\{ \mathbf{h}'^{-1} (\underline{W}'_j - \underline{W}'_{j-1}) + \mathbf{h}^{-1} (\underline{W}_j - \underline{W}_{j-1}) - \delta t_j (\underline{F}_j + \underline{F}'_j) \right\}$$

puis, connaissant $\underline{\hat{W}}$, on revient aux efforts d'interface grâce aux directions de recherche de part et d'autre de l'interface :

$$\underline{\hat{F}} = \underline{F} + \mathbf{h}^{-1} (\underline{\hat{W}} - \underline{\dot{W}})$$

■ Interface de prise en compte des conditions aux limites

Nous rappelons que les conditions aux limites peuvent être considérées comme des comportements d'interface particuliers. Le comportement des interfaces étant vérifié à l'étape locale, dans le cas d'un déplacement (resp. un effort) imposé, $\underline{\hat{W}}$ (resp. $\underline{\hat{F}}$) est pris égal à \underline{U}_d (resp. \underline{F}_d), et le champs dual $\underline{\hat{F}}$ (resp. $\underline{\hat{W}}$) est calculé via la direction de recherche.

Déplacement imposé :

$$\underline{\hat{W}} = \underline{U}_d \Big|_{\Gamma \cap \partial_u \Omega}$$

$$\underline{\hat{F}} = \underline{F} + \mathbf{h}^{-1} (\underline{\dot{U}}_d \Big|_{\Gamma \cap \partial_u \Omega} - \underline{\dot{W}})$$

Effort imposé :

$$\underline{\hat{W}} = \underline{\dot{W}} + \mathbf{h} (\underline{F}_d - \underline{F})$$

$$\underline{\hat{F}} = \underline{F}_d \Big|_{\Gamma \cap \partial_f \Omega}$$

■ Interface de déplacement normal

L'interface de déplacement normal permet d'imposer un déplacement W_n aux quantités normales $\underline{\hat{W}} \cdot \underline{n} = \underline{U}_n$ ainsi qu'une condition de bord libre sur les quantités tangentielles. Dans le cas où l'interface est droite (2D) ou plane (3D) et lorsque $\underline{U}_n = 0$, elle est aussi appelée interface de symétrie. En réalité, il s'agit d'une interface de conditions aux limites de type effort sur les quantités tangentielles, et type déplacement sur les quantités normales. Notons \underline{n} le vecteur unitaire normal à $\Gamma_{EE'}$ dont le sens va de E vers E' en tout point de l'interface, et Π_t , l'opérateur de projection dans le plan tangent.

Partie normale :

$$\underline{\hat{W}} \cdot \underline{n} = \underline{U}_n$$

$$\underline{\hat{F}} \cdot \underline{n} = \underline{F} \cdot \underline{n} + \mathbf{h}^{-1} (\underline{\dot{U}}_n - \underline{\dot{W}} \cdot \underline{n})$$

Partie tangentielle :

$$\Pi_t \underline{\hat{F}} = \underline{0}$$

$$\Pi_t \underline{\hat{W}} = \Pi_t \underline{\dot{W}} - \mathbf{h} \Pi_t \underline{F}$$

■ Interface de contact avec frottement

Pour prendre en compte le contact avec ou sans frottement [Alart et Curnier, 1991; Dostal et al., 1998; Barbotteu et al., 2001; Dureisseix et Farhat, 2001; Ladevèze et al., 2002; Boucard et Champaney, 2003; Avery et al., 2004], il n'est pas nécessaire d'utiliser une approche par multiplicateurs de Lagrange, pénalisation ou Lagrangien augmenté, il suffit de faire coïncider la surface de contact avec une interface de la décomposition de domaine, et le calcul non linéaire suivant doit être mené à l'étape locale. La difficulté, dans ce cas, est qu'à l'étape locale, on doit trouver des efforts et déplacements vérifiant un comportement inconnu *a priori*. Une méthode classique consisterait à supposer un comportement (ouverture ou contact, adhérence ou glissement), de faire un calcul prédictif sous ces hypothèses, et de vérifier si l'hypothèse n'est pas absurde, ou de corriger, le cas échéant, l'hypothèse de départ. L'originalité de la démarche présentée ici (introduite dans [Duvaut et Lions, 1976]) est qu'il s'agit d'une méthode directe de calcul du problème non linéaire de contact. Pour ce faire, le problème est séparé en deux étapes : un problème de contact, puis en cas de contact, un problème de frottement.

Problème de contact Les deux cas de figures suivants sont distingués :

- décollement : si $\underline{n} \cdot (\widehat{W}' - \widehat{W}) > 0$ alors $\widehat{F} = \widehat{F}' = 0$
- contact : si $\underline{n} \cdot (\widehat{W}' - \widehat{W}) = 0$ alors $\underline{n} \cdot \widehat{F} + \underline{n} \cdot \widehat{F}' = 0$

Ce comportement peut être réécrit en notant :

- décollement : si $C_n > 0$
- contact : si $C_n \leq 0$

$$C_n = \frac{\underline{n} \cdot (\widehat{W}' - \widehat{W})}{\delta t (\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} - \frac{\underline{n} \cdot (\mathbf{h}'_n \widehat{F}' - \mathbf{h}_n \widehat{F})}{(\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} \quad (3.11)$$

Problème de frottement de Coulomb S'il y a contact, il peut y avoir :

- adhérence : si $\|\Pi_t \widehat{F}\| < \mu |\underline{n} \cdot \widehat{F}|$ alors $\Pi_t (\widehat{W}' - \widehat{W}) = 0$
- glissement : si $\|\Pi_t \widehat{F}\| = \mu |\underline{n} \cdot \widehat{F}|$ alors $\exists \lambda > 0$ tel que $\Pi_t (\widehat{W}' - \widehat{W}) = -\lambda \Pi_t \widehat{F}$

Ce comportement peut être réécrit de la manière suivante :

- adhérence : $\|G_t\| < \mu \widehat{F} \cdot \underline{n}$
- glissement : $\|G_t\| \geq \mu \widehat{F} \cdot \underline{n}$

$$G_t = \frac{\Pi_t (\widehat{W}' - \widehat{W})}{\mathbf{h}'_t + \mathbf{h}_t} - \frac{\Pi_t (\mathbf{h}'_t \widehat{F}' - \mathbf{h}_t \widehat{F})}{\mathbf{h}'_t + \mathbf{h}_t} \quad (3.12)$$

Ces problèmes doivent donc être résolus en chaque point de chaque interface, et à chaque instant. Nous injectons les directions de recherche (3.9) dans les expressions de C_n (3.11) et G_t (3.12), afin de pouvoir les calculer. G_t peut être calculé directement

$$G_t = \frac{\Pi_t (\dot{W}' - \dot{W})}{\mathbf{h}'_t + \mathbf{h}_t} - \frac{\Pi_t (\mathbf{h}'_t F' - \mathbf{h}_t F)}{\mathbf{h}'_t + \mathbf{h}_t} \quad (3.13)$$

tandis que le calcul de C_n fait intervenir le schéma temporel

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{\underline{n} \cdot (\widehat{\underline{W}}'_j - \widehat{\underline{W}}_j)}{\delta t_j (\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} - \frac{\underline{n} \cdot (\mathbf{h}'_n \widehat{\underline{F}}'_j - \mathbf{h}_n \widehat{\underline{F}}_j)}{(\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} \\
&= \frac{\underline{n} \cdot (\widehat{\underline{W}}'_j - \widehat{\underline{W}}_j)}{(\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} - \frac{\underline{n} \cdot (\mathbf{h}'_n \widehat{\underline{F}}'_j - \mathbf{h}_n \widehat{\underline{F}}_j)}{(\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} + \frac{\underline{n} \cdot (\widehat{\underline{W}}'_{j-1} - \widehat{\underline{W}}_{j-1})}{\delta t_j (\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} \\
&= \frac{\underline{n} \cdot (\underline{\dot{W}}'_j - \underline{\dot{W}}_j)}{(\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} - \frac{\underline{n} \cdot (\mathbf{h}'_n \underline{F}'_j - \mathbf{h}_n \underline{F}_j)}{(\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)} + \frac{\underline{n} \cdot (\widehat{\underline{W}}'_{j-1} - \widehat{\underline{W}}_{j-1})}{\delta t_j (\mathbf{h}'_n + \mathbf{h}_n)}
\end{aligned}$$

Une fois ces critères calculés, on étudie en chaque point \underline{x} , pour chaque instant t_j s'il y a contact ou décollement :

si $C_n > 0$	<i>décollement</i>	$ \begin{cases} \widehat{\underline{F}} = \widehat{\underline{F}}' = 0 \\ \widehat{\underline{W}} = \underline{\dot{W}} - \mathbf{h}\underline{F} \\ \widehat{\underline{W}}' = \underline{\dot{W}}' - \mathbf{h}\underline{F}' \end{cases} $
si $C_n \leq 0$	<i>contact</i>	$ \begin{cases} \widehat{\underline{F}} \cdot \underline{n} = -\widehat{\underline{F}}' \cdot \underline{n} = C_n \\ \widehat{\underline{W}} \cdot \underline{n} = \underline{\dot{W}} \cdot \underline{n} + \mathbf{h}_n (\widehat{\underline{F}} - \underline{F}) \cdot \underline{n} \\ \widehat{\underline{W}}' \cdot \underline{n} = \underline{\dot{W}}' \cdot \underline{n} \end{cases} $

Si il y a contact, on détermine s'il y a glissement ou adhérence.

si $\ G_t\ < \mu \widehat{\underline{F}} \cdot \underline{n}$	<i>adhérence</i>	$ \begin{cases} \Pi_t \widehat{\underline{F}} = -\Pi_t \widehat{\underline{F}}' = G_t \\ \Pi_t \widehat{\underline{W}} = \Pi_t \underline{\dot{W}} + \mathbf{h}_t \Pi_t (\widehat{\underline{F}} - \underline{F}) \\ \Pi_t \widehat{\underline{W}}' = \Pi_t \underline{\dot{W}}' \end{cases} $
si $\ G_t\ \geq \mu \widehat{\underline{F}} \cdot \underline{n}$	<i>glissement</i>	$ \begin{cases} \Pi_t \widehat{\underline{F}} = -\Pi_t \widehat{\underline{F}}' = \mu (\widehat{\underline{F}} \cdot \underline{n}) \frac{G_t}{\ G_t\ } \\ \Pi_t \widehat{\underline{W}} = \Pi_t \underline{\dot{W}} + \mathbf{h}_t \Pi_t (\widehat{\underline{F}} - \underline{F}) \\ \Pi_t \widehat{\underline{W}}' = \Pi_t \underline{\dot{W}}' + \mathbf{h}_t \Pi_t (\widehat{\underline{F}}' - \underline{F}') \end{cases} $

4 Choix des directions de recherche

4.1 Directions de recherche dans les sous-structures

L'opérateur \mathbf{H}^- optimal pour les directions de recherche est l'opérateur tangent de \mathbf{B} . Dans ce cas la méthode s'apparente à un algorithme de Newton-Raphson sur l'espace-temps. En réalité mettre à jour cet opérateur à chaque itération de la LATIN

peut être coûteux, puisque les problèmes micro et les opérateurs homogénéisés en dépendent. On peut alors choisir de ne le mettre à jour que sur un nombre réduit d'itérations. Dans ce cas l'algorithme s'apparente à un algorithme de quasi-Newton. Ainsi tous les opérateurs sont constants d'une itération à l'autre et peuvent être conservés. De même, si la méthode préconise d'utiliser des directions de recherche conjuguées, en pratique, la direction \mathbf{H}^+ est prise verticale ($\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$), afin de simplifier grandement l'étape locale. Pour plus de précisions on pourra se référer à [Ladevèze, 1999].

■ **Remarque 4.1** *Dans le cas d'un comportement linéaire, on pourra évidemment prendre $\mathbf{H} = \mathbf{H}^- = \mathbf{H}^+ = \mathbf{B}$. Le comportement sera donc vérifié également à l'étape linéaire.*

4.2 Directions de recherche dans les interfaces

Le choix des directions de recherche, ou plus généralement le paramètre d'augmentation dans une méthode de décomposition de domaine mixte reste, dans le cas général, un problème relativement ouvert. Récemment, des travaux [Ladevèze et al., 2006] ont été menés sur l'interprétation et l'optimisation des directions de recherche dans le cas de l'élastostatique, et pour la première itération, lorsque les quantités $\hat{\square}$ de l'étape locale sont nulles. Dans ce cas, la direction de recherche \mathbf{h}_E^- optimale reliant \underline{F}_E à \underline{W}_E sur le bord $\partial\Omega_E$ est l'inverse de la rigidité du complémentaire de Ω_E condensé sur $\partial\Omega_E$ (appelé complément de Schur dans le cas discret). Le calcul de cet opérateur n'est évidemment pas envisageable, puisqu'il nécessite plusieurs résolutions du problème de référence et dépend des conditions aux limites. Dans le cas multiéchelle, les résultantes et moments d'interface sont propagés grâce au problème macro. En vertu du principe de Saint Venant, les directions de recherche n'ont un effet que sur les quantités locales. On peut montrer qu'il est possible de ne calculer l'opérateur \mathbf{h}_E^- que sur une zone réduite autour de Ω_E . Il montre également qu'une approximation même grossière de cet opérateur est souvent suffisante.

Dans le cadre des problèmes non linéaires, et plus particulièrement dans le cas de non-linéarités d'interfaces, ce choix n'est pas aussi efficace. Dans [Ladevèze et al., 2001], la direction de recherche se sépare en une partie micro et macro. De sorte que la partie macro \mathbf{h}_E^M peut être choisie comme le comportement de l'interface ($\mathbf{h}_E^M = \infty$ pour une interface parfaite, $\mathbf{h}_E^M = k^{-1}$ dans le cas élastique...) ce qui permet d'imposer à l'étape macro le comportement d'interface. La partie micro \mathbf{h}_E^m , étant associée à la microstructure, peut faire l'objet du même choix que précédemment. Ceci pose cependant plusieurs problèmes pour notre cas, puisque le fait de séparer les directions de recherche micro/macro nécessite l'introduction de projecteurs micro/macro spatio-temporels qui compliquent les calculs. De plus il est impossible de trouver un opérateur \mathbf{h}_E^M capable d'assurer l'ensemble du comportement, qui ne s'écrit pas toujours en variables macro (cf. Remarque 4.3 Chapitre 2). C'est le cas par exemple pour des interfaces complexes telles que le contact frottant.

Cependant, pour nous, l'introduction du multiéchelle peut être vue comme une façon intelligente de s'affranchir d'un choix complexe des directions de recherche. En

effet, ce choix crucial en monoéchelle a beaucoup moins d'influence en multiéchelle. Ici, \mathbf{h}_E^- est homogène à l'inverse d'une rigidité sur un temps. Par extension, nous choisirons donc le même opérateur qu'en statique divisé par un temps caractéristique tel que le temps d'étude, la longueur d'un intervalle macro, ou un temps caractéristique matériau. Enfin pour rester dans le cadre théorique de la convergence de la LATIN, nous choisirons $\mathbf{h}^+ = \mathbf{h}^- = \mathbf{h}$.

5 Un code éléments finis

■ Caractéristiques du code

Ce travail de thèse a donné lieu à l'élaboration du code de recherche éléments finis 2D/3D *Multi-ST* basé sur une bibliothèque éléments finis développée au LMT-Cachan par H. Leclerc et un code développé par D. Violeau dédié aux problèmes élasto-statiques. Ce code en C++ / Python permet de traiter des problèmes élastiques, visco-élastiques d'évolution ou élasto-statiques. La structure est décomposée en sous-domaines de matériaux éventuellement différents (d'une sous-structure à l'autre ou à l'intérieur d'une même sous-structure). Les bords des sous-structures sont surdiscrétisés automatiquement si on le souhaite. Les algorithmes de résolution sont la LATIN mono-échelle, multiéchelle en espace ou multiéchelle en temps et en espace, et les problèmes micro peuvent être résolus par une méthode incrémentale classique ou par approximation radiale (qui fera l'objet du chapitre 5). Le comportement d'interface peut être parfait ; conditions aux limites effort ou déplacement ; contact avec ou sans frottement, avec ou sans jeu ; symétrie. D'une manière générale, toutes les particularités développées dans cette thèse y ont été implantées, et les exemples qui y sont présentés en sont exclusivement issus.

Le code développé dans un langage moderne permet de traiter des problèmes non linéaires d'évolution de plus de $3 \cdot 10^5$ degrés de libertés sur 60 intervalles de temps en séquentiel. Ce logiciel robuste rassemble la plupart des « ingrédients » de la méthode LATIN multiéchelle avec approximation radiale ; il a été développé dans le cadre d'une plate-forme logicielle commune du laboratoire et servira de base à d'autres thèses.

■ Illustration : une structure fissurée hétérogène

Nous étudions le problème d'évolution d'une structure 3D hétérogène contenant des fissures (cf. Figure 3.6(a)). La structure est encastrée à sa base et soumise aux efforts extérieurs \underline{F}_1 , \underline{F}_2 et \underline{F}_3 (cf. Figure 3.6(b)). Les dimensions extérieures de la structure sont de $120 \times 120 \times 20$ mm, et l'intervalle d'étude est de $T = 10$ s. Les fissures sont modélisées par un contact unilatéral avec frottement de Coulomb de coefficient de frottement $\mu = 0.3$.

La structure est composée de deux types de cellules. Les cellules de type-I sont homogènes et constituées du matériau de type-1 ; Les cellules de type-II sont constituées d'une inclusion cylindrique de matériau de type-2 dans une matrice de matériau de type-1. Les matériaux de type-1 et type-2 sont viscoélastiques linéaires et leur carac-

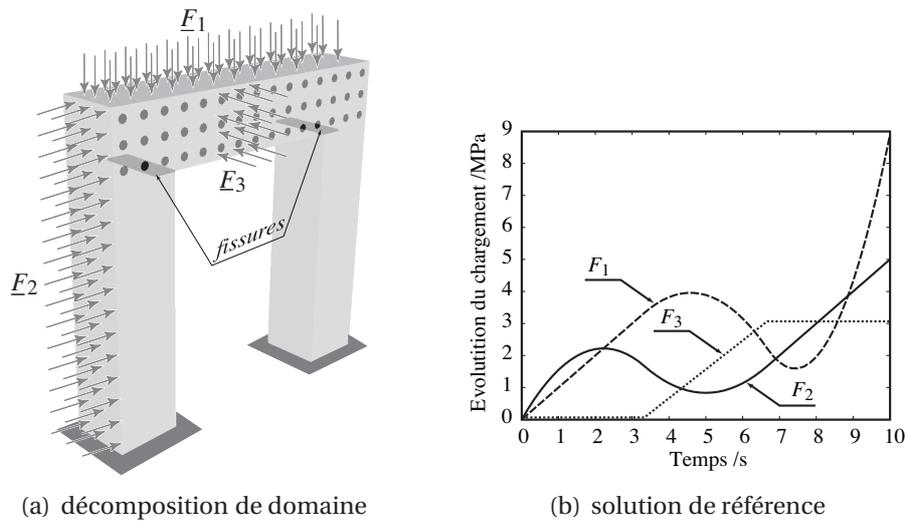


FIG. 3.6: Description du problème

téristiques sont données dans le tableau 3.1. Leur relation de comportement s'écrit $\dot{\epsilon}_p = \mathbf{B}_i \sigma = \frac{1}{\eta_i} \mathbf{K}_i^{-1} \sigma$.

Matériau	type-1	type-2
Module d'Young	$E_1 = 50 \text{ GPa}$	$E_2 = 250 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson	$\nu_1 = 0.3$	$\nu_2 = 0.2$
Paramètre de viscosité	$\eta_1 = 10 \text{ s}$	$\eta_2 = 1000 \text{ s}$

TAB. 3.1: Propriétés matériaux de la structure hétérogène

Le domaine est décomposé en 351 sous-structures et 1296 interfaces (cf. figure 3.7). Chaque sous-structure correspond à une cellule. Au niveau microscopique, les sous-

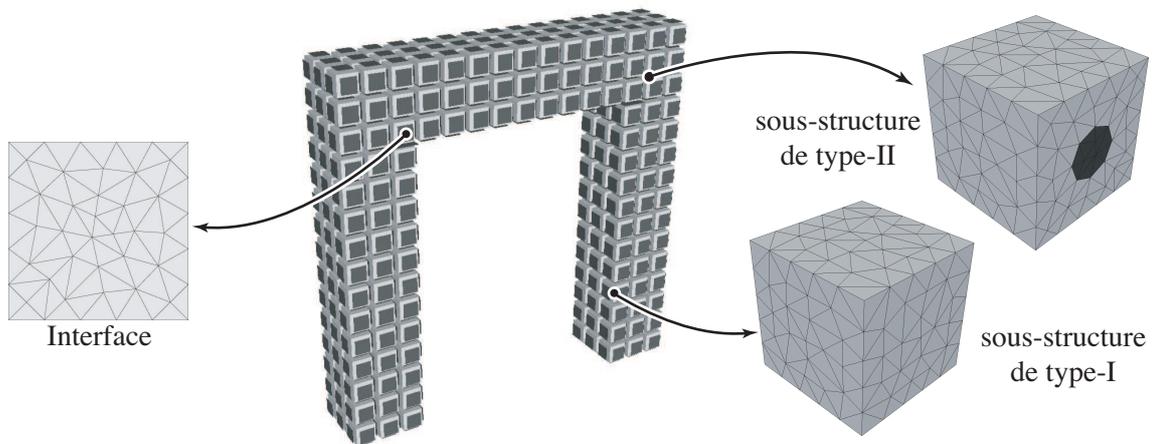


FIG. 3.7: Décomposition de la structure en sous-structures et en interfaces

structures de type-I, de type-II et les interfaces sont maillées avec respectivement 847, 717 et 144 degrés de libertés (ddl). Le niveau macroscopique spatial est associé à la taille des interfaces, et consiste en 9 degrés de libertés macro par interface correspondant à la partie linéaire des déplacements et efforts d'interface. Au niveau temporel, l'échelle micro est décrite par une partition fine de l'intervalle d'étude de 60 intervalles fins, en utilisant un schéma de Galerkin discontinu d'ordre 0. L'échelle macro temporelle est associée à une grille grossière de l'intervalle d'étude, composé de 3 intervalles macro, avec une schéma de type Galerkin discontinu du second ordre.

Puisque la relation de comportement est linéaire, la direction de recherche est prise de telle sorte que $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. La longueur caractéristique des interfaces étant $L_E = 4$ mm, nous prenons le paramètre de direction de recherche scalaire constant suivant $\mathbf{h} = h\mathbf{I}$, avec $h = \frac{L_E}{E_1 v_1}$.

La figure 3.8 montre l'évolution au cours des itérations de l'indicateur de convergence $\nu(\mathbf{s})$. Nous pouvons observer que l'algorithme converge rapidement vers une solution de qualité.

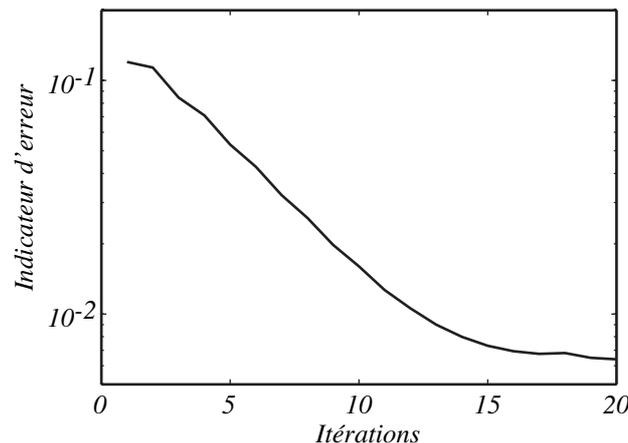


FIG. 3.8: Convergence de la méthode

Afin de corroborer ce résultat, la figure 3.9 présente les approximations du champ de contrainte moyenne sur la structure (avec un zoom près des non-linéarités de contact) à l'instant final $T = 10$ s aux itérations 1,5 et 20, ainsi qu'à convergence (la solution de référence). L'algorithme travaillant sur tout le domaine temporel à chaque itération, l'évolution sur tout le domaine temporel du champ de déplacement \underline{W} au point P_2 est également représenté aux mêmes itérations. On peut observer que grâce à la résolution du problème macro, la méthode nous conduit, même à la première itération, à une approximation de relativement bonne qualité, à la fois au niveau spatial et temporel. Après quelques itérations, la solution devient de plus en plus précise, de telle sorte que la différence avec la référence ne se voit plus à l'œil nu.

Un exemple de la description micro-macro de la solution est donné Figure 3.10. Les figures 3.10(a) et 3.10(b) montrent l'évolution de l'effort \underline{F} et sa partie macro \underline{F}^M à l'instant $t = 2/3T$ le long de la ligne horizontale L_1 , dans la partie hétérogène de la

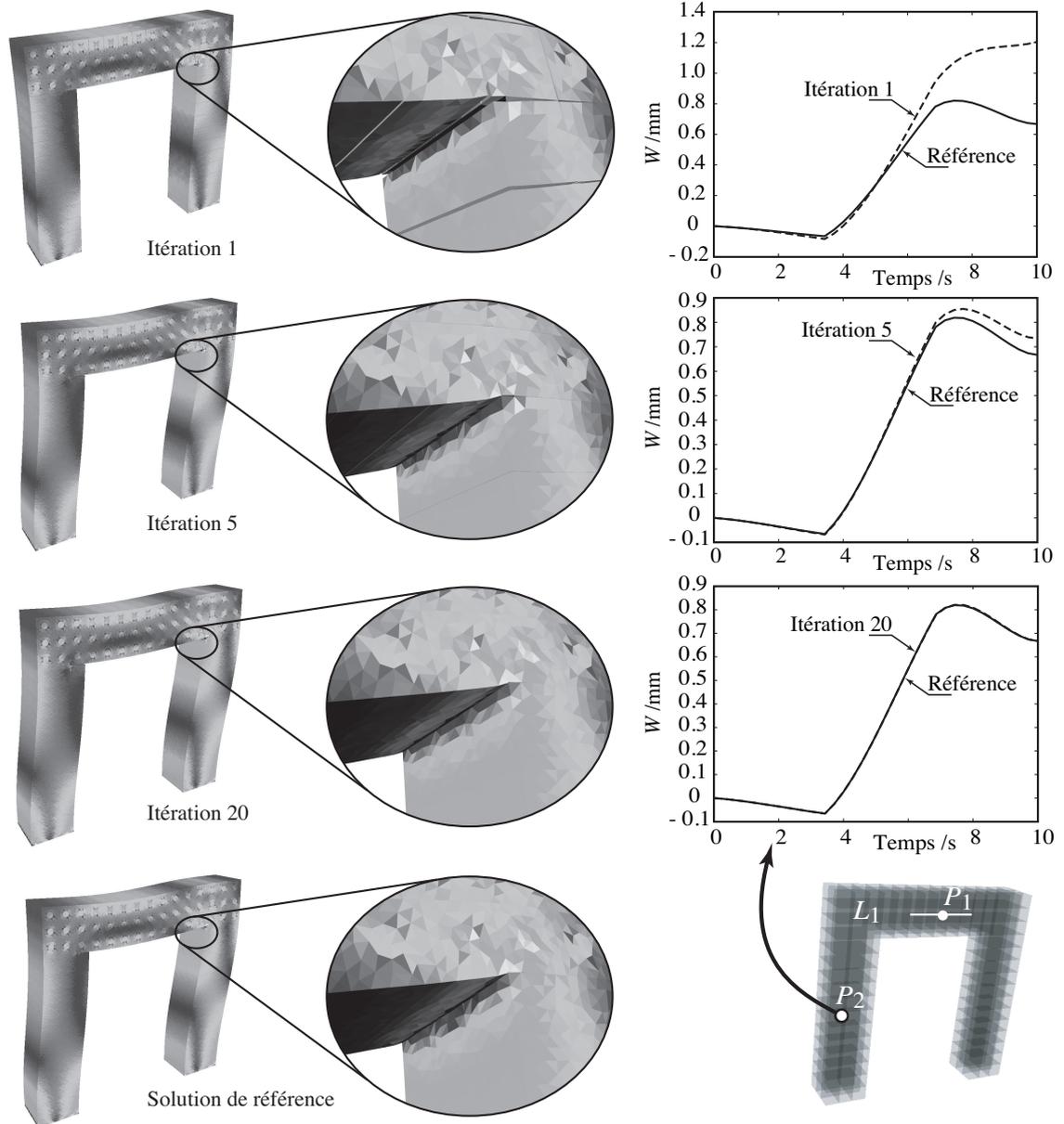
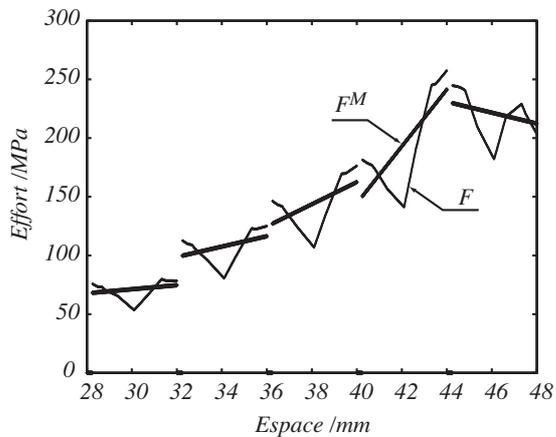


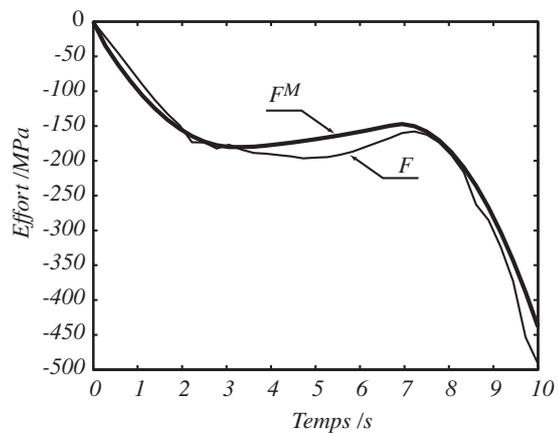
FIG. 3.9: Approximation de la solution spatiale et temporelle au cours des itérations

structure, ainsi que l'évolution temporelle au point P_1 de cette ligne. Les figures 3.10(c) et 3.10(d) présentent les mêmes évolutions pour le déplacement \underline{W} et sa partie macro \underline{W}^M .

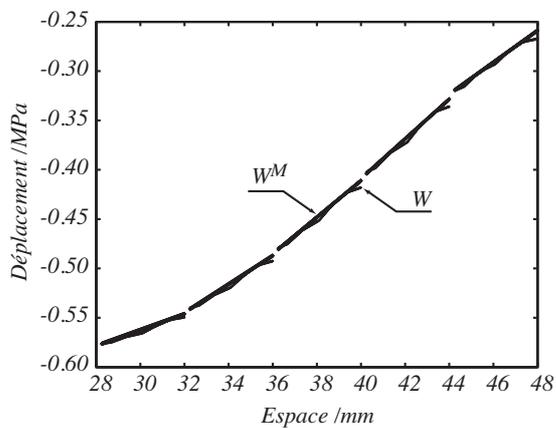
On peut observer que la partie macro des quantités considérées constitue une bonne approximation en moyenne de la solution, et ceci grâce à un nombre très restreint de fonctions de base (27 ddls par interface et par intervalle macro). L'espace macroscopique choisi nous conduit à la résolution d'un problème macro très efficace, avec assez peu d'inconnues (dans cet exemple, 35 000ddls comparé aux 270 000ddls du problème de référence assemblé).



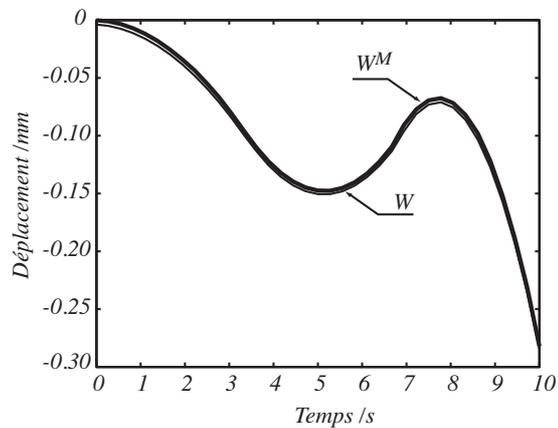
(a) \underline{F} et \underline{F}^M et $t = 2/3T$ sur la ligne L_1



(b) Evolution temporelle de \underline{F} et \underline{F}^M au point P_1



(c) \underline{W} et \underline{W}^M à $t = 2/3T$ sur la ligne L_1



(d) Evolution temporelle de \underline{W} et \underline{W}^M au point P_1

FIG. 3.10: Description micro/macro de la solution

Dans ce chapitre, nous proposons quelques contributions à la stratégie pour la maîtrise de la convergence de la méthode. Une première partie concerne l'indicateur de convergence, qui est un outil essentiel à son contrôle. Une deuxième partie concerne le choix de la base macro temporelle avec pour objectif d'aller vers une stratégie multiéchelle en temps et en espace extensible.

Sommaire

1	Contrôle de la convergence	68
1.1	Indicateur d'erreur classique	68
1.2	Définition d'un nouvel indicateur d'erreur	69
1.3	Comparaison sur un exemple de contact	71
1.4	Limitations	72
2	Base macro et extensibilité	74
2.1	Base macro spatiale	74
2.2	Base macro temporelle	77
2.3	Techniques de raffinement classiques	79
2.4	Une technique d'enrichissement automatique	81

1 Contrôle de la convergence

S'agissant d'une stratégie itérative, il est nécessaire de définir un indicateur de convergence fiable, qui, passé en dessous d'un critère donné ϵ , arrête l'algorithme sur une solution dont la qualité est en accord avec le critère fixé *a priori* ϵ . L'indicateur classiquement utilisé, facile à mettre en œuvre, présente un certain nombre de défauts parmi lesquels :

- le niveau d'erreur atteint dépend fortement des directions de recherche.
- les erreurs locales sont mal prises en compte lorsque le nombre de sous-structures augmente.

Ceci a pour effet de rendre difficile son interprétation. En d'autres termes, il ne constitue donc pas un outil fiable pour le contrôle des itérations. Dans ce paragraphe, un nouvel indicateur basé sur l'erreur en relation de comportement est proposé. Il ne présente pas les inconvénients de l'indicateur classique.

1.1 Indicateur d'erreur classique

La solution exacte étant à l'intersection des espaces Γ et \mathbf{A}_d , tandis que les approximations fournies à chaque itération n'appartiennent qu'à l'un ou l'autre de ces espaces. L'indicateur d'erreur classique est basé sur une mesure de la distance entre les solutions consécutives d'une même itération (s_{n+1} et $\hat{s}_{n+1/2}$) (cf. Figure 4.1) :

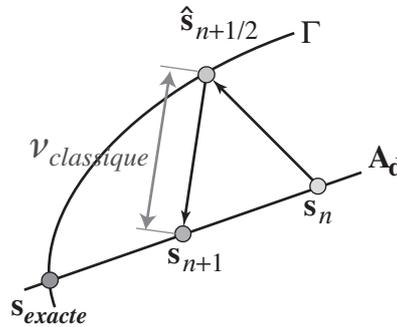


FIG. 4.1: interprétation graphique de l'indicateur classique

$$v_{classique}^2 = \frac{\|s - \hat{s}\|^2}{\|s + \hat{s}\|^2} \quad (4.1)$$

Suivant le choix de la norme, différents indicateurs peuvent se décliner. Nous citons les deux principaux : l'erreur en énergie et l'erreur selon la direction de recherche :

$$\|s\|_{ener}^2 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E \times [0, T]} \sigma : \dot{\epsilon}^p d\Omega dt + \sum_{\Gamma \in \partial\Omega_E} \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} \underline{F} \cdot \underline{\dot{W}} d\Gamma dt \quad (4.2)$$

$$\|s\|_{ddr}^2 = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E \times [0, T]} (\mathbf{H}^{-1} \sigma : \sigma + \mathbf{H} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p) d\Omega dt + \sum_{\Gamma \in \partial\Omega_E} \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} (\mathbf{h}^{-1} \underline{F}^2 + \mathbf{h} \underline{\dot{W}}^2) d\Gamma dt \quad (4.3)$$

En pratique on remarque que lorsque l'on mène des calculs différents avec cet indicateur et un critère d'arrêt constant, on obtient des solutions de qualité vraiment différentes. Par exemple, sur la figure 4.1, on comprend aisément que la mesure de l'erreur dépend fortement de la direction de recherche. En particulier, si l'on choisit une pente plus forte ou plus faible pour la direction de recherche, on imagine facilement que la valeur de l'erreur sera différente, pour une qualité donnée de la solution.

1.2 Définition d'un nouvel indicateur d'erreur

Afin de pallier ces problèmes, et dans le but d'avoir une meilleure maîtrise des itérations, il nous a semblé nécessaire de développer un indicateur plus fiable. L'idée ici est de quantifier la distance entre un espace et la solution appartenant à l'autre espace. Si l'on choisit de mesurer la distance entre \mathbf{A}_d et une solution $\hat{\mathbf{s}}$ de Γ , la seule façon de procéder conduit à la définition classique. Nous choisissons donc de mesurer la distance entre Γ et une solution \mathbf{s} de \mathbf{A}_d (Figure 4.2). Il faut donc quantifier la

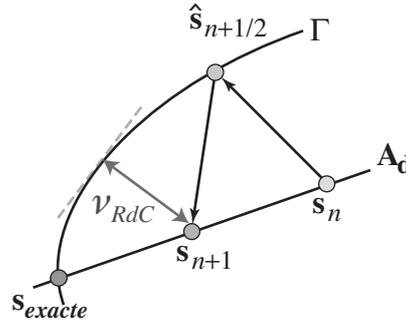


FIG. 4.2: interprétation graphique du nouvel indicateur

façon dont la solution \mathbf{s} ne vérifie pas la relation de comportement. Pour ce faire, nous utilisons une erreur en relation de comportement dont l'expression va dépendre du type de comportement caractérisant la sous-structure et l'interface sur laquelle on se trouve.

En pratique, l'indicateur se compose d'une partie provenant des quantités sur les sous-structures associée à la non-vérification de \mathbf{B} et une partie sur les interfaces associée à la non-vérification de \mathbf{b} :

$$v_{RdC}^2(\mathbf{s}) = v_{\Omega, RdC}^2(\mathbf{s}) + v_{\Gamma, RdC}^2(\mathbf{s}) \quad (4.4)$$

■ Terme de sous-structure

Pour le terme lié aux sous-structures $v_{\Omega, RdC}^2(\mathbf{s})$, on propose d'utiliser naturellement l'erreur en relation de comportement associée à \mathbf{B} , que l'on norme :

$$v_{\Omega, RdC}^2(\mathbf{s}) = \frac{\sum_{E \in \mathbf{E}} e_{RdC}^2(\mathbf{s})}{\sum_{E \in \mathbf{E}} \|\mathbf{s}\|_{sst}^2} \quad (4.5)$$

avec, dans notre cas, l'erreur en dissipation suivante et la norme associée :

$$e_{RdC}^2(\mathbf{s}) = \int_{\Omega_E \times [0, T]} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B}(\mathbf{f}_E) - \dot{\mathbf{e}}_{pE})^2 d\Omega dt \quad (4.6)$$

$$\|\mathbf{s}\|_{sst}^2 = \int_{\Omega_E \times [0, T]} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B}(\mathbf{f}_E) + \dot{\mathbf{e}}_{pE})^2 d\Omega dt \quad (4.7)$$

■ Terme d'interface

Pour le terme d'interface, il s'agit de quantifier la non-vérification de la relation de comportement de chaque interface $\mathbf{b}_{EE'}(\underline{F}_{EE'}, \underline{F}_{E'E}, \underline{W}_{EE'}, \underline{W}_{E'E})$. On considère que l'on a N_b types de relations de comportement d'interfaces différents $\mathbf{b}_i = 0$, on note Γ_i l'ensemble des interfaces étant défini par ce même comportement $\mathbf{b}_i = 0$. On peut remarquer que chaque relation $\mathbf{b}_i = 0$ est composée de p équations vectorielles $\mathbf{b}_{ij} = \underline{0}$ représentant q équations scalaires. Par exemple, pour une interface parfaite en 3D, on doit vérifier $p = 2$ équations vectorielles ($\underline{W}_{EE'} = \underline{W}_{E'E}$ et $\underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0$) représentant $q = 3$ équations scalaires (en projection sur chaque direction de l'espace). En 3D $p \times q = 6$ (4 en 2D) pour une interface intérieure et $p \times q = 3$ (2 en 2D) pour une interface de prise en compte des conditions aux limites. On propose d'utiliser le critère global $v_{\Gamma, RdC}$ suivant pour évaluer la non-vérification des relations de comportement locales de toute la structure :

$$v_{\Gamma, RdC}^2(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N_b} \sum_{i=1}^p v_{ij}^2 \quad \text{avec} \quad v_{ij}^2 = \frac{\sum_{\Gamma \in \Gamma_i} \int_{\Gamma \times [0, T]} \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{b}_{ij} d\Gamma dt}{\sum_{\Gamma \in \Gamma_i} \int_{\Gamma \times [0, T]} \tilde{\mathbf{b}}_{ij}^T \tilde{\mathbf{b}}_{ij} d\Gamma dt} \quad (4.8)$$

Pour alléger les notations, \underline{W} (resp. \underline{W}') désignera $\underline{W}_{EE'}$ (resp. $\underline{W}_{E'E}$).

■ **interface parfaite** $\mathbf{i} = 1$, $p = 2$ et $q = 3$, $\forall \Gamma_{EE'} \in \Gamma_1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{11} &= \underline{W} - \underline{W}' & \tilde{\mathbf{b}}_{11} &= \underline{W} + \underline{W}' \\ \mathbf{b}_{12} &= \underline{F} + \underline{F}' & \tilde{\mathbf{b}}_{12} &= \underline{F} - \underline{F}' \end{aligned}$$

■ **interface à déplacement imposé** $\mathbf{i} = 2$, $p = 1$ et $q = 3$, $\forall \Gamma_{EE'} \in \Gamma_2$,

$$\mathbf{b}_{21} = \underline{W} - \underline{U}_d \quad \tilde{\mathbf{b}}_{21} = \underline{W} + \underline{U}_d$$

■ **interface à effort imposé** $\mathbf{i} = 3$, $p = 1$ et $q = 3$, $\forall \Gamma_{EE'} \in \Gamma_3$,

$$\mathbf{b}_{31} = \underline{F} - \underline{F}_d \quad \tilde{\mathbf{b}}_{31} = \underline{F} + \underline{F}_d$$

■ **contact frottant** $\mathbf{i} = 4$, il faut calculer les indicateurs de contact C_n et G_t à partir des quantités \underline{F} et \underline{W} de l'étape linéaire.

■ **ouverture** ($C_n > 0$),

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{41} &= \underline{F} & \tilde{\mathbf{b}}_{41} &= \underline{F} \\ \mathbf{b}_{41} &= \underline{F}' & \tilde{\mathbf{b}}_{41} &= \underline{F}' \end{aligned}$$

- **adhérence** ($C_n \leq 0$ et $\|G_t\| < \mu \underline{F} \cdot \underline{n}_{EE'}$),

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{41} &= \underline{F} + \underline{F}' & \tilde{\mathbf{b}}_{41} &= \underline{F} - \underline{F}' \\ \mathbf{b}_{42} &= \underline{W} \cdot \underline{n}_{EE'} - \underline{W}' \cdot \underline{n}_{EE'} & \tilde{\mathbf{b}}_{42} &= \underline{W} \cdot \underline{n}_{EE'} + \underline{W}' \cdot \underline{n}_{EE'} \\ \mathbf{b}_{43} &= \Pi_t \underline{\dot{W}} - \Pi_t \underline{\dot{W}}' & \tilde{\mathbf{b}}_{43} &= \Pi_t \underline{\dot{W}} + \Pi_t \underline{\dot{W}}' \end{aligned}$$

- **glissement** ($C_n \leq 0$ et $\|G_t\| \geq \mu \underline{F} \cdot \underline{n}_{EE'}$),

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{41} &= \underline{F} + \underline{F}' & \tilde{\mathbf{b}}_{41} &= \underline{F} - \underline{F}' \\ \mathbf{b}_{42} &= \underline{W} \cdot \underline{n}_{EE'} - \underline{W}' \cdot \underline{n}_{EE'} & \tilde{\mathbf{b}}_{42} &= \underline{W} \cdot \underline{n}_{EE'} + \underline{W}' \cdot \underline{n}_{EE'} \\ \mathbf{b}_{43} &= \Pi_t (\underline{\dot{W}} - \underline{\dot{W}}') \wedge \Pi_t \underline{F} & \tilde{\mathbf{b}}_{43} &= \Pi_t (\underline{\dot{W}} - \underline{\dot{W}}') \wedge \Pi_t \underline{F} \\ \mathbf{b}_{44} &= \|\Pi_t \underline{F}\| - \mu \underline{F} \cdot \underline{n}_{EE'} & \tilde{\mathbf{b}}_{44} &= \|\Pi_t \underline{F}\| + \mu \underline{F} \cdot \underline{n}_{EE'} \end{aligned}$$

1.3 Comparaison sur un exemple de contact

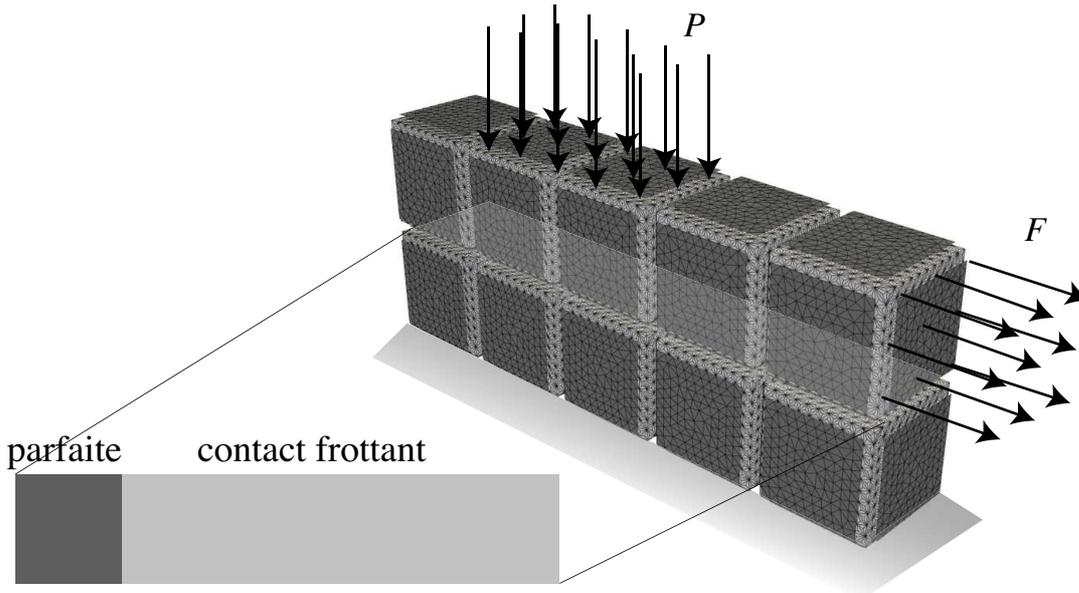


FIG. 4.3: Problème, conditions aux limites et décomposition du domaine

Nous étudions un exemple de contact frottant simple pour comparer les indicateurs d'erreur précédents. On considère une structure 3D possédant une surface de contact sur quatre cinquièmes de sa longueur. Cette structure encastée sur toute sa longueur est soumise à une précharge P , et à un effort de traction F (cf. Figure 4.3). Sur la figure 4.4, la solution de référence de ce problème est présentée, elle fait apparaître sur la surface de contact, les trois scénarios possibles que sont l'adhérence, le glissement et le décollement.

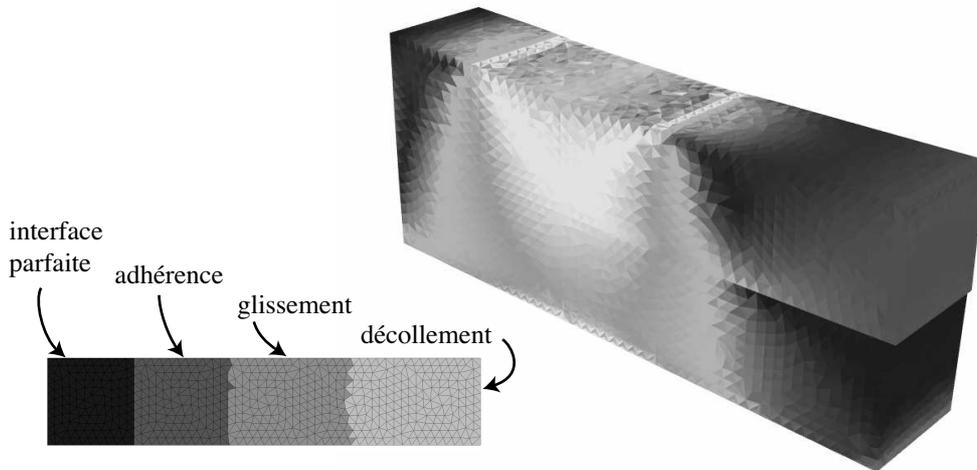


FIG. 4.4: Solution du problème de contact

Nous allons étudier la capacité de notre indicateur à évaluer la qualité d'une solution non convergée. On prend l'exemple de l'influence de la direction de recherche sur la valeur de l'indicateur d'erreur. La difficulté est que la convergence dépend évidemment fortement de la direction de recherche. Nous souhaitons isoler l'influence de la direction de recherche sur l'indicateur de celle qu'elle a sur la convergence. Pour ce faire, un premier calcul est mené jusqu'à un nombre arbitraire de 12 itérations (en veillant à ce que l'algorithme n'ait pas convergé) avec la valeur standard de la direction de recherche k_{opt} . Nous notons ϵ_{ddr} et ϵ_{rdc} les valeurs des indicateurs obtenus au bout de 12 itérations. À présent, des calculs sont lancés pour différentes valeurs des directions de recherche, en se donnant les critères d'arrêts ϵ_{ddr} et ϵ_{rdc} . Étant donné que la direction de recherche a une influence sur la convergence, on s'attend à ne pas atteindre ce critère en 12 itérations. Un bon indicateur devrait cependant fournir une solution de qualité comparable, quel que soit le nombre d'itérations nécessaire. Les résultats sont présentés Figure 4.5

On remarque que pour un critère d'arrêt donné ϵ_{ddr} , les solutions fournies pour différentes valeurs des directions de recherche sont vraiment différentes. En revanche, avec l'indicateur basé sur l'erreur en relation de comportement, les qualités des solutions produites sont comparables. L'indicateur proposé fournit donc une information fiable quant à la qualité d'une solution non convergée, et permet donc une meilleure maîtrise de la convergence de l'algorithme.

1.4 Limitations

Il faut cependant prendre certaines précautions pour utiliser cet indicateur. Par exemple, les dénominateurs des termes v_{ij} peuvent être nuls. C'est le cas notamment, lorsque les déplacements imposés sont nuls, lorsque l'effort imposé est nul, ou lorsque

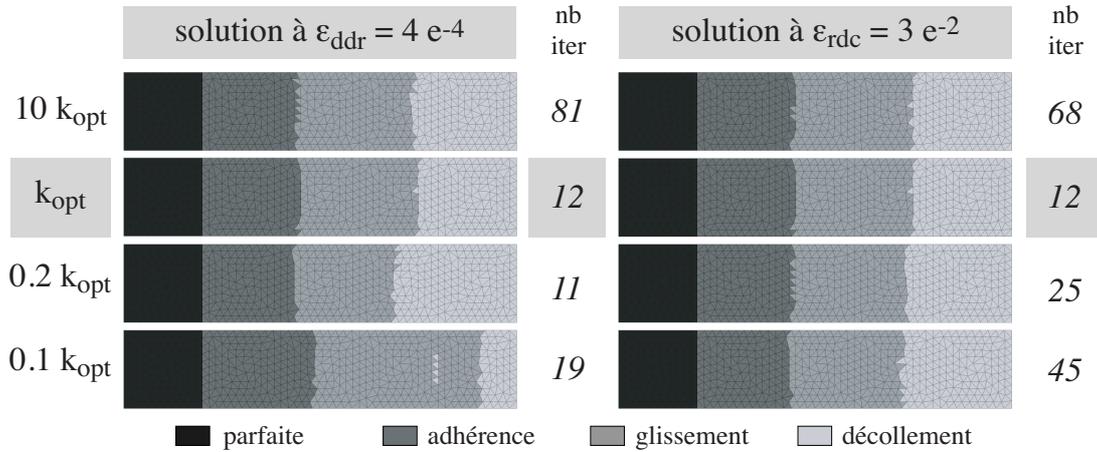


FIG. 4.5: Comparaison des solutions à un critère d'erreur fixé

toutes les interfaces de contact sont ouvertes. En pratique, deux corrections sont envisageables. La première consiste à négliger le terme v_{ij} correspondant. La seconde consiste à opérer des regroupements de termes v_{ij} de même nature. Par exemple, la vérification des déplacements imposés et la continuité des déplacements d'une interface parfaite peuvent être regroupées. Ainsi, le déplacement imposé à zéro sera normé par la valeur des déplacement d'interface. En pratique ces difficultés disparaissent lorsque la complexité du cas test augmente.

Par ailleurs, ce critère ne règle pas le problème de la dépendance du niveau d'erreur à la sous-structuration. En particulier lorsqu'une erreur localisée est plus importante que le reste de la structure, le dénominateur sera composé de la somme de la valeur moyenne des variables d'interface, et le numérateur sera la somme d'un grand nombre de termes presque tous nuls sauf le terme lié à l'erreur locale. On comprend dans ce cas que l'erreur va dépendre du nombre d'interfaces, pour une solution de qualité fixée. Afin de pouvoir mieux interpréter le niveau d'erreur, nous pouvons envisager une version locale $v_{\Gamma, Rdc}^{loc}(\mathbf{s})$ de l'indicateur $v_{Rdc}(\mathbf{s})$.

$$v_{\Gamma, Rdc}^{loc 2}(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{N_b} \sum_{i=1}^p v_{ij}^2 \quad \text{avec} \quad v_{ij}^2 = \frac{\sup_{\Gamma \in \Gamma_i} \int_{\Gamma \times [0, T]} \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{b}_{ij} d\Gamma dt}{\sup_{\Gamma \in \Gamma_i} \sum_{\Gamma \in \Gamma_i} \int_{\Gamma \times [0, T]} \tilde{\mathbf{b}}_{ij}^T \tilde{\mathbf{b}}_{ij} d\Gamma dt} \quad (4.9)$$

Cet indicateur s'interprète donc comme le niveau d'erreur maximum sur une quantité divisé par le niveau moyen des ces quantités à l'échelle de la structure.

2 Base macro et extensibilité

Les méthodes de décomposition de domaine ont été initialement développées pour tirer parti des calculateurs à architecture parallèle. L'idée est simple, si la mémoire d'un ordinateur lui permet de résoudre au maximum un problème de taille N , avec une méthode adaptée, on peut espérer résoudre, avec n processeurs, un problème de taille $n \times N$.

On appelle l'accélération $s(n)$ (en anglais *speedup*), le rapport du temps d'exécution en séquentiel sur celui en parallèle. On appelle efficacité $e(n)$, le rapport de l'accélération sur le nombre de processeurs :

$$e(n) = \frac{s(n)}{n}$$

Un algorithme est efficace lorsque $e(n)$ se rapproche de 1. Si un algorithme est tel que son efficacité est stable lorsque n augmente, il est alors dit numériquement extensible. L'extensibilité caractérise la robustesse de l'approche lorsque le nombre de processeurs, donc de sous-structures augmente. Pour traiter des problèmes de grande taille, il est donc absolument nécessaire que la méthode soit extensible. Pour une méthode de décomposition de domaine, l'extensibilité se traduit par la dépendance de la vitesse de convergence à la sous-structuration. Cette partie traite de l'influence du choix des bases macro spatiales et temporelles sur l'extensibilité. Un premier exemple 3D est proposé, il permet de montrer que l'extensibilité est vérifiée dans le cas où les échelles temporelles micro et macro sont confondues. En revanche, lorsque la base macro classique est utilisée en temps, l'extensibilité n'est pas toujours garantie en totalité. Une étude est proposée pour montrer que des méthodes de raffinement classiques (h ou p) de la base macro temporelle ne permettent pas de résoudre le problème. Nous proposons enfin une technique générale d'enrichissement de l'espace macro temporel, qui confère d'avantage de robustesse à la méthode.

2.1 Base macro spatiale

Tel qu'il est précisé dans le chapitre 2, aucune condition n'est requise *a priori* sur la base macro spatiale. Cependant, pour assurer l'extensibilité de la méthode, la partie macro des efforts (resp. des déplacements) doit contenir les résultantes et moments (resp. les mouvements de corps rigides) d'interface [Ladevèze et Dureisseix, 1998, 2000]. En effet, selon le principe de Saint Venant, les compléments micro n'ont qu'un effet local. On peut donc construire une base macro capable de découpler les quantités ayant un effet local et de celles ayant un effet global. À chaque itération, on impose à la partie à effet global des efforts d'être continue via la résolution du problème macro.

On peut alors choisir d'enrichir la base macro par des moyennes d'ordre supérieur, ce qui revient à considérer l'interface comme un milieu déformable. En pratique, on pourra choisir d'utiliser la partie linéaire des efforts et déplacements d'interface. Dans le cas d'une interface de forme quelconque en 3D, cela revient à considérer une base

de dimension 12 (3 translations, 3 rotations, 3 cisaillements, 3 extensions ; *pour plus de détails sur leur construction* [Ladevèze et al., 2006]). Dans le cas particulier d'une interface plane, les 3 modes hors plan sont naturellement retirés (cf. Figure 4.6).

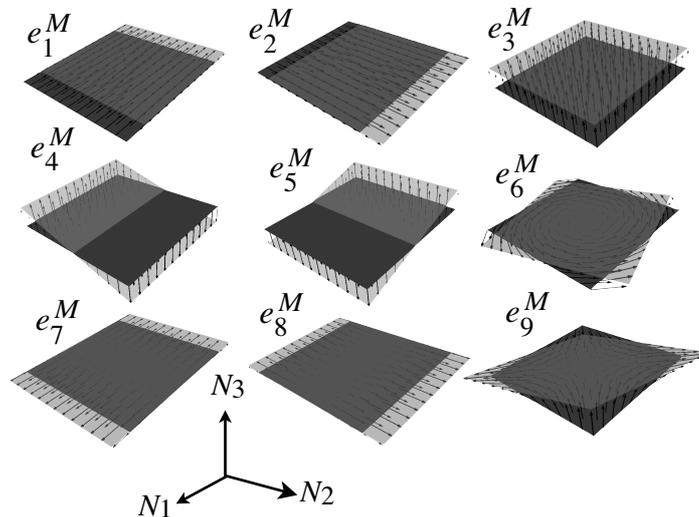


FIG. 4.6: Base macro spatiale

Afin de mettre en évidence le caractère extensible de la méthode, examinons un exemple tridimensionnel simple. Considérons l'évolution de la structure hétérogène de forme cubique donnée Figure 4.7. La structure est encastree à sa base et soumise à un effort à son sommet dont l'évolution est décrite sur la figure 4.7. La structure est suc-

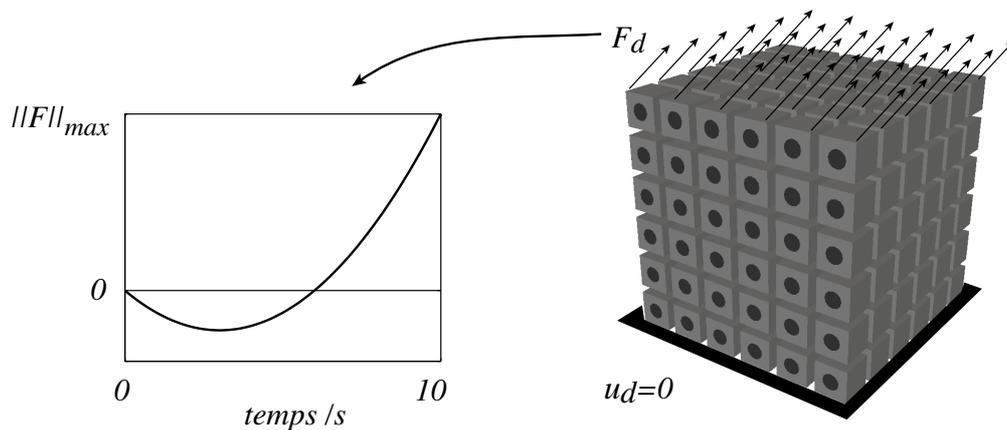


FIG. 4.7: Définition du problème

cessivement décomposée en 8, 27 et 216 sous-structures (cf. Figure 4.8). Afin d'étudier l'effet de la base macro spatiale seulement, nous faisons coïncider les descriptions micro et macro en temps. Pour ce faire, l'intervalle $[0, T]$ est muni de 20 intervalles grossiers chacun muni d'un seul intervalle fin. La base macro temporelle ne possède que la

fonction constante sur $I_i^G = I_j^f$. Cette approche multiéchelle en espace et monoéchelle en temps sera notée *MuS*.

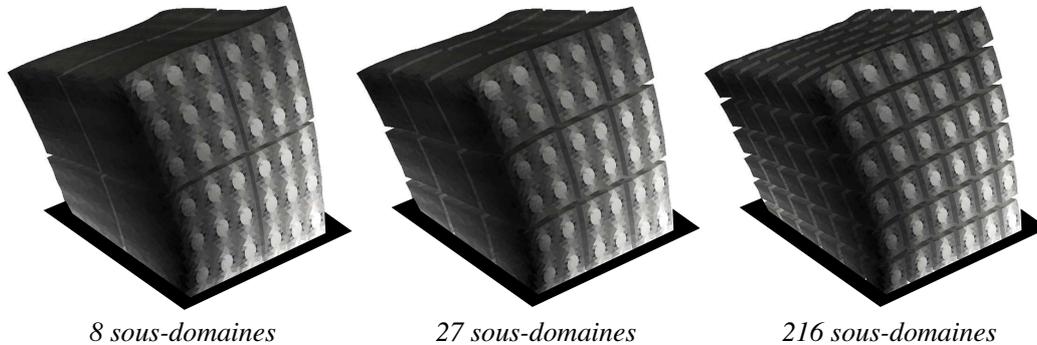


FIG. 4.8: Différentes décompositions du domaine

Sur la figure 4.9 est représentée la valeur de l'indicateur de convergence $v_{RdC}(\mathbf{s})$ au cours des itérations de *MuS* pour les trois sous-structurations différentes. Le principe de Saint Venant assurant l'extensibilité, il n'est pas étonnant de voir les trois courbes se superposer.

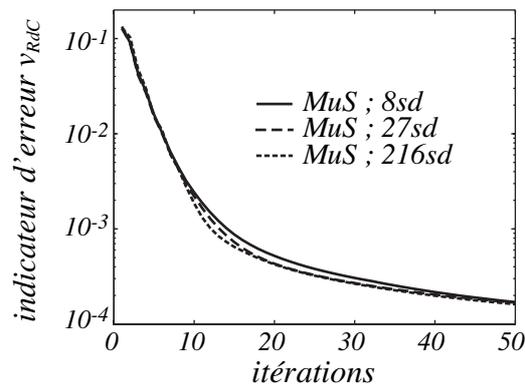


FIG. 4.9: Convergence de *MuS* pour différentes décompositions du domaine

Le choix de la base macro spatiale possède un fort contenu mécanique. Le principe de Saint-Venant assure un découplage optimal des quantités micro et macro, et ceci avec une base de dimension très réduite.

■ **Remarque 2.1** Lorsque le nombre de sous-structures augmente (resp. 8, 27 et 216), la taille des problèmes par sous-structure diminue (resp. 11937, 3855 et 615 ddls), mais la taille du problème macro augmente (resp. 324, 972 et 6804 ddls). L'extensibilité est altérée par la résolution du problème macro, lorsque celle-ci devient prohibitive. Dans ce cas, des techniques de résolution approchées peuvent être envisagées, afin de réduire son coût et de ne pas nuire à la robustesse de la méthode [Ladevèze et al., 2001; Ladevèze et Nouy, 2003; Ladevèze et al., 2006; Kerfriden et al., 2009].

2.2 Base macro temporelle

Lorsque la stratégie n'est multiéchelle qu'en espace (*MuS*), comme c'était le cas dans le paragraphe précédent, un problème macro doit être résolu à chaque intervalle de temps de la partition fine. Le problème macro pouvant être de grande taille, cette étape peut devenir prohibitive dans le cadre de problèmes d'évolution. L'idée de l'ap-

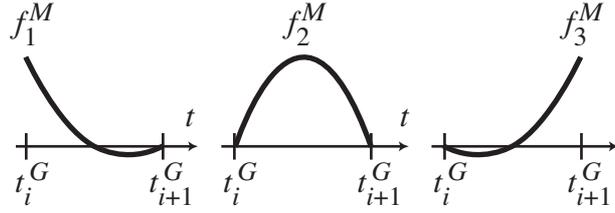


FIG. 4.10: Choix actuel de la base macro temporelle

proche multiéchelle en temps et en espace (notée *MuST*) est d'approximer l'évolution des quantités macro spatiales. Ainsi le problème macro, n'est plus résolu en chaque point d'intégration temporel de la grille fine, mais de manière approchée en projection sur la base macro temporelle une fois par intervalle grossier. On utilise classiquement [Ladevèze et Nouy, 2003] une base macro temporelle constituée de fonctions polynomiales. Afin que la taille du problème grossier n'augmente pas trop, on se limite souvent à une base quadratique (*cf.* Figure 4.10). En pratique, cette base n'est pas utilisée telle quelle, mais orthonormalisée au sens du produit scalaire temporel suivant :

$$\langle a(t), b(t) \rangle_{I_i^G} = \int_{I_i^G} a(t) b(t) dt$$

La partie des efforts qui, en vertu du principe de Saint Venant se propage dans la structure est associée aux résultantes et moments des efforts à chaque instant. En prenant une moyenne en temps de ces quantités, une approximation est faite. Cette dernière entraîne que **la partie micro n'est plus à résultantes et moments nuls** à chaque instant. Cette partie micro n'est cependant pas prise en compte par le problème macro, et subit un traitement monoéchelle. Dans la majorité des cas néanmoins, l'extensibilité de la méthode est conservée. En effet, si l'on reprend l'exemple précédent, en utilisant l'approche *MuST* avec la base macro quadratique et un seul intervalle grossier, on peut constater (Figure 4.11) que les courbes de convergence sont quasiment superposées. L'extensibilité est donc conservée dans les exemples simples. On peut également remarquer qu'elles se confondent avec les courbes de l'approche *MuS*. On a aussi remplacé la résolution, à chaque itération, de 20 problèmes macro spatiaux, par un seul problème macro spatio-temporel, sans dégrader la convergence de la méthode.

Cependant, dans certains cas plus complexes, l'extensibilité peut être partiellement perdue. Afin de mettre en évidence le problème, examinons le cas artificiel d'un problème dont l'évolution temporelle du chargement n'est pas représentée exactement par la base macro temporelle de *MuST*. Nous considérons l'évolution sur $[0, T]$

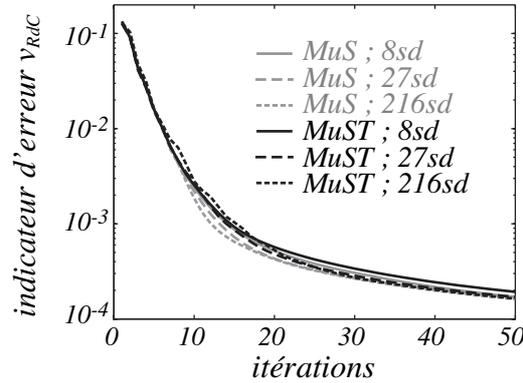


FIG. 4.11: Convergence de *MuST* pour différentes décompositions du domaine

de la structure hétérogène présentée Figure 4.12(a). Elle est encastrée à sa base et soumise à un effort à son sommet dont l'évolution temporelle est donnée Figure 4.12(b). On utilise la méthode *MuST* avec une base quadratique sur un seul intervalle grossier. L'intervalle $[0, T]$ est muni de 60 intervalles fins I_j^f . On peut remarquer que le chargement possède une partie micro non nulle.

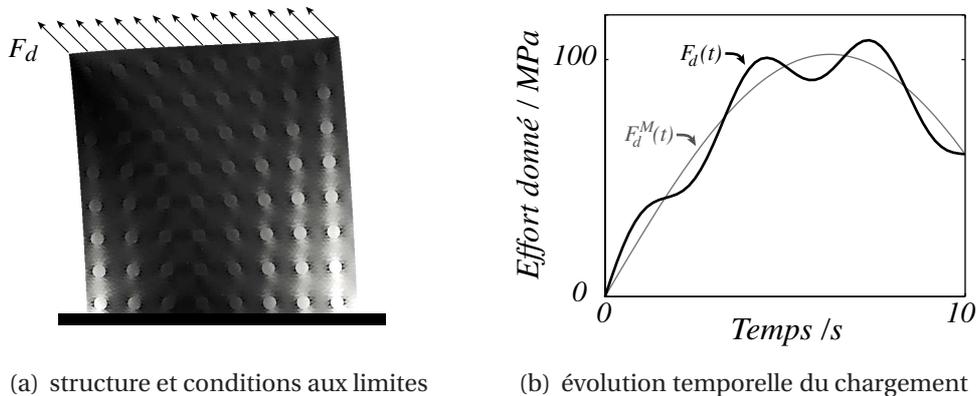


FIG. 4.12: Problème simple. Base macro non compatible avec le chargement

Sur la figure 4.13 sont représentées les courbes de convergence pour les méthodes *MuS*, *MuST* et également pour la méthode monoéchelle (notée *Mo*).

Étant donné que la méthode *MuST* approxime la méthode *MuS*, cette dernière représente donc la référence vers laquelle il faut tendre pour obtenir l'extensibilité. On constate une différence notable entre la courbe de convergence de la *MuST* et *MuS*. La courbe de la *MuST* apporte néanmoins un gain considérable par rapport à la version monoéchelle *Mo*. En réalité, les oscillations qui ne sont pas à résultantes et moments nuls, sont sentées, en vertu du principe de Saint Venant, se propager dans toute la structure. Elles ne sont cependant pas transmises au reste de la structure par le problème macro. Ces oscillations sont donc traitées en monoéchelle, et la méthode perd partiellement son extensibilité.

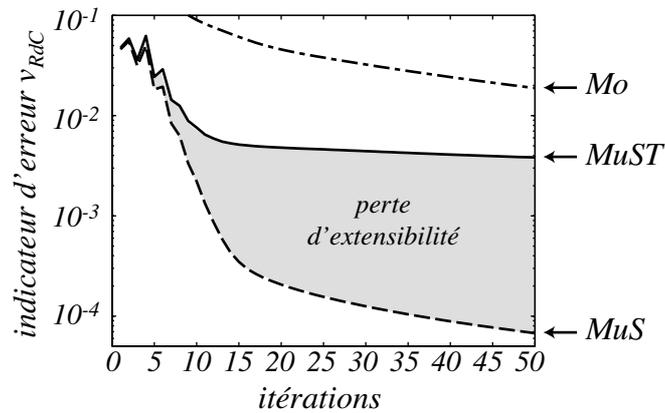


FIG. 4.13: Courbes de convergence pour les méthodes *MuS*, *MuST* et *Mo*

Le reste de ce chapitre, tente de proposer des techniques permettant d'obtenir malgré tout l'extensibilité de la méthode *MuST*.

2.3 Techniques de raffinement classiques

La première idée naturelle consiste à enrichir l'espace macroscopique temporel. Deux possibilités sont envisageables, une vision *p*-raffinement qui consiste à augmenter le degré des fonctions de base macro temporelles, et une vision *h*-raffinement qui consiste à diminuer la taille du support des fonctions de base macro.

2.3.1 *p*-raffinement

La première consiste à renforcer l'approximation macro en augmentant le nombre de fonctions de base. Par exemple, cela peut consister à augmenter le degré des polynômes sur chaque intervalle de temps grossiers. On pourrait également envisager des familles de fonctions plus complexes telles que des séries de Fourier, des ondelettes... Examinons le cas d'une base polynomiale. Nous résolvons le problème de la figure 4.12 avec la méthode *MuST* pour différents degrés *p* de polynômes. Nous commençons par la base quadratique précédente $p = 2$ puis nous augmentons progressivement le degré des polynômes de la base $p = 3, 5, 7, 9, 11$ et 13 , jusqu'à se rapprocher de la convergence de la méthode *MuS*. Nous superposons sur la figure 4.14(a) les courbes de convergence correspondantes sur les courbes de la figure 4.13.

Sur cette figure, on peut remarquer qu'il faut utiliser au moins une base de polynômes de degré $p = 10$ voire 13 , pour se rapprocher de la convergence de la méthode *MuS* qui sert de référence. L'utilisation d'une telle technique en 3D conduirait à une base de dimension $12 \times 14 = 168$, ce qui reviendrait à construire des opérateurs homogénéisés de taille $168 \times 6 = 1008$ dans le cas d'une sous-structure de forme cubique. Sans compter que pour des exemples plus complexes, le degré 13 ne serait sans doute pas suffisant, cette technique est totalement inappropriée.

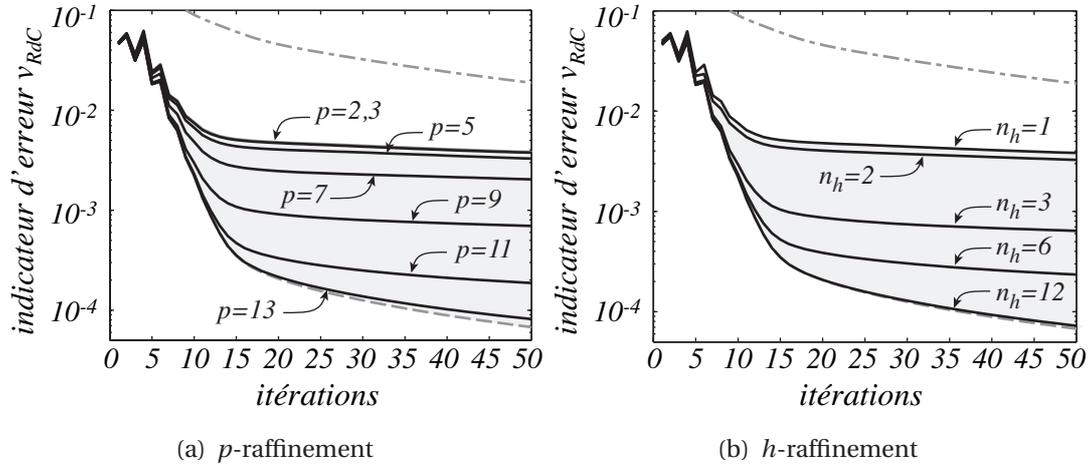


FIG. 4.14: Raffinement de l'approximation temporelle macroscopique

2.3.2 h -raffinement

La deuxième idée consiste à raffiner la grille grossière à laquelle est associée l'espace macro temporel. En conservant cette fois-ci un degré constant égal à $p = 2$, on s'intéresse à l'effet du raffinement de la grille grossière \mathcal{T}^G . Nous partons de l'exemple précédent pour lequel l'intervalle d'étude $[0, T]$ était muni de $n_h = 1$ intervalle grossier, puis nous augmentons le nombre d'intervalles grossiers $n_h = 2, 3, 6$ et 12 progressivement jusqu'à se rapprocher de la courbe de référence. Le nombre total d'intervalles de temps fins reste constant. Sur la figure 4.14(b), nous superposons les courbes de convergence correspondante saux courbes tracées sur la figure 4.13.

On constate ici qu'il faut attendre un nombre d'intervalles grossiers tel $n_h = 12$, que le coût de calcul se rapproche de la méthode *MuS*. En effet, dans le cas $n_h = 12$, une quantité est définie constante par morceaux sur 5 intervalles fins pour chacun des 12 intervalles grossiers. Sa partie macro sera alors définie par les 3 paramètres d'une interpolation quadratique sur chaque intervalle grossier. Il faut donc attendre de faire quasiment coïncider la description micro avec la description macro, pour se rapprocher de la convergence de référence.

■ **Remarque 2.2** *Contrairement à l'approche précédente, cette technique a au moins le mérite d'être convergente, puisqu'elle conduit, dans le pire des cas, à résoudre le problème avec la méthode *MuS*.*

Ainsi, les méthodes de raffinement classiques analysées dans cette partie sont tenues en échec. En particulier, pour obtenir l'extensibilité dans un cas simple tel que celui étudié, elles nécessitent des degrés d'enrichissement tels qu'elles entraînent des coûts de calculs prohibitifs.

2.4 Une technique d'enrichissement automatique

Nous proposons, dans cette partie, une technique consistant à enrichir automatiquement la base macro afin de la rendre compatible « au mieux » avec les parties linéaires des efforts et vitesses d'interface de chaque sous-structure. L'idée que nous proposons consiste à extraire sur chaque interface $\Gamma_{EE'}$ à la fin de l'étape linéaire de chaque itération, les parties macro spatiales (projection sur la base spatiale uniquement) des compléments micro. Ces fonctions sont le reflet de phénomènes micro temporels, dont les résultantes et moments (ou modes de corps rigides) ne sont pas nuls. Ces quantités ont, selon le principe de Saint Venant, un effet global, mais elles ne sont pas prises en compte par le problème macro. En 3D, la partie linéaire spatiale $\underline{R}_{F,EE'}^m(t)$ (resp. $\underline{R}_{W,EE'}^m(t)$) des efforts $\underline{F}_{EE'}^m(\underline{x}, t)$ (resp. des déplacements $\underline{W}_{EE'}^m(\underline{x}, t)$) micro sur $\Gamma_{EE'}$ est :

$$\begin{aligned} \underline{R}_{F,EE'}^m(t) \quad \text{tel que} \quad R_{F,EE',k}^m(t) &= \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_k^M(\underline{x}) \cdot \underline{F}_{EE'}^m(\underline{x}, t) d\Gamma \\ \underline{R}_{W,EE'}^m(t) \quad \text{tel que} \quad R_{W,EE',k}^m(t) &= \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_k^M(\underline{x}) \cdot \underline{W}_{EE'}^m(\underline{x}, t) d\Gamma \end{aligned}$$

où les \underline{e}_i^M sont les n_{esp}^M fonctions de bases macro en espace. $\underline{R}_{F,EE'}^m$ et $\underline{R}_{W,EE'}^m$ représentent donc $2n_{esp}^M$ fonctions par interface décrivant les évolutions temporelles de phénomènes ayant un effet sur la structure complète, mais n'étant pas propagées par la résolution du problème macro. Elles sont donc toutes susceptibles d'être ajoutées à la base macro temporelle et il nous faut un critère pour les trier. En notant les évolutions temporelles des parties macro $\underline{R}_{F,EE'}^M$ et $\underline{R}_{W,EE'}^M$:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{F,EE'}^M(t) \quad \text{tel que} \quad R_{F,EE',k}^M(t) &= \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_k^M(\underline{x}) \cdot \underline{F}_{EE'}^M(\underline{x}, t) d\Gamma \\ \underline{R}_{W,EE'}^M(t) \quad \text{tel que} \quad R_{W,EE',k}^M(t) &= \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_k^M(\underline{x}) \cdot \underline{W}_{EE'}^M(\underline{x}, t) d\Gamma \end{aligned}$$

pour une interface $\Gamma_{EE'}$, on peut définir l'indicateur suivant pour chaque composante k de $\underline{R}_{F,EE'}^m$ et de $\underline{R}_{W,EE'}^m$, pour chaque intervalle grossier I_i^G :

$$\xi_{F,EE',i,k}^2 = \frac{\int_{I_i^G} \underline{R}_{F,EE',k}^m(t)^2 dt}{\int_{I_i^G} \left(\underline{R}_{F,EE'}^M(t) \right)^T \cdot \underline{R}_{F,EE'}^M(t) dt}$$

Cet indicateur permet de trier l'ensemble de ces fonctions. On pourra alors ajouter, dans la base macro temporelle, les fonctions ayant le plus grand indicateur ξ . Si la base macro est enrichie par trop de fonctions, la taille du problème macro augmente, et sa résolution devient prohibitive. On limitera donc l'enrichissement à quelques fonctions. Ces fonctions d'enrichissement pourront être mise à jour au bout de quelques itérations, le temps que l'information les concernant ait eu le temps de se propager. On

définit également un critère ξ^0 en dessous duquel les fonctions ne seront pas ajoutées à la base macro temporelle.

Un point important consiste à **enrichir la base macro de manière cohérente avec la nature du modèle de matériau considéré**. En effet, si une fonction de $\underline{R}_{F,EE'}^m$ (donc captée à partir de quantités de type effort) est susceptible d'enrichir la base macro pour améliorer la représentation de l'évolution des résultantes et de moments en jeu dans la structure, elle n'est pas forcément apte à représenter les phénomènes correspondants en déplacements. Par exemple :

- pour un matériau élastique linéaire, le modèle est tel que les efforts et les déplacements sont reliés par une relation de proportionnalité :

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon$$

Ainsi, l'ajout d'une fonction de $\underline{R}_{F,EE'}^m$ sera suffisante pour améliorer la représentation des évolutions des efforts et déplacement à effet global ;

- pour un matériau viscoélastique, comme celui utilisé ici, le modèle est basé sur une dualité entre **les vitesse et une combinaison linéaire de la contrainte et du taux de contrainte** :

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{K}^{-1}\dot{\sigma} + \mathbf{B}(\sigma)$$

C'est pourquoi lorsqu'une fonction temporelle susceptible d'enrichir la base macro sera extraite des efforts, **sa dérivée sera également ajoutée à la base macro**, et inversement. D'une manière générale, la base macro temporelle devra, dans la mesure du possible, être compatible avec les dérivées de chacune des fonctions de base. Une base polynomiale est donc bien adaptée.

Cette technique d'enrichissement automatique (on notera *aMuST*) est appliquée au problème précédent 4.12. On fixe à 2 le nombre maximal de fonctions que l'on peut ajouter à la base macro temporelle. Pour cet exemple, le critère de rejet est fixé à $\xi^0 = 0.3$ et on laisse 10 itérations entre deux appels à la procédure de détection. La courbe de convergence correspondante est donnée Figure 4.15. On constate qu'en ajoutant seulement 2 fonctions adaptées au problème et leurs dérivées, la convergence peut être fortement accélérée. Les fonctions qui enrichissent la base macro sont issues du calcul, et permettent de se rapprocher de la courbe de convergence de la méthode *MuS*.

■ **Un exemple plus compliqué** : L'exemple précédent, qui permet de mettre en évidence le problème est évidemment artificiel. En pratique, on veillera toujours à ce que le choix de l'espace macro temporel (constitué de la base macro ainsi que de la partition grossière), soit tel qu'il inclut totalement au niveau macro les résultantes et moments du chargement. Dans ce cas, **l'espace macro sera dit compatible avec les données**. Dans notre cas, ceci aurait donc simplement consisté à introduire des fonctions sinusoïdales de même fréquence que celle de la perturbation du chargement de la figure 4.12. Il se pourrait cependant que des résultantes et/ou des moments des efforts sur les

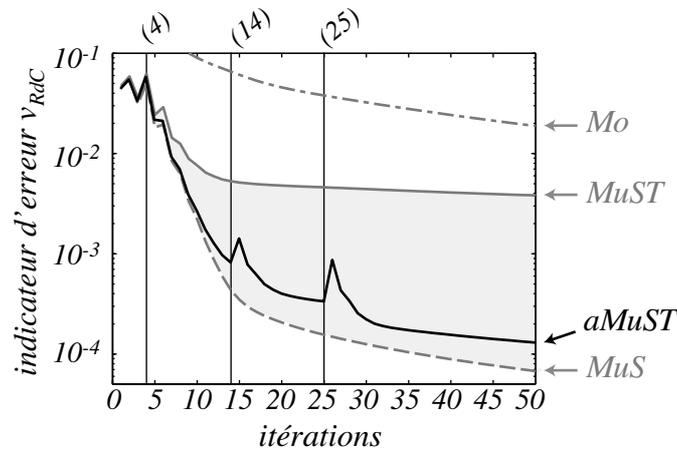


FIG. 4.15: Courbes de convergence pour la méthode *aMuST*

interfaces suivent des évolutions très différentes de celle du chargement. C'est le cas, par exemple, dans le cadre de problèmes non linéaires.

Pour se placer dans ce cas, examinons, à présent, le problème (cf. Figure 4.16(a)) de

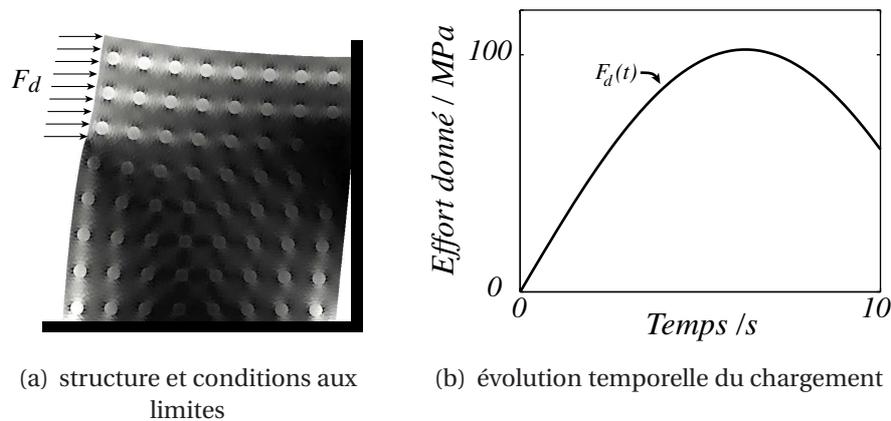


FIG. 4.16: Problème avec contact. Base macro compatible avec le chargement

la même structure soumise, cette fois, à un effort latéral (à gauche) la poussant contre un massif indéformable (à droite). Le massif est modélisé par une interface particulière de contact avec jeu. L'évolution du chargement est simple (cf. Figure 4.16(b)), de sorte qu'une base quadratique en temps soit compatible avec les données. Sur la figure 4.17, sont présentées les courbes de convergence des méthodes *MuS*, *MuST*, *Mo* et *aMuST* pour laquelle le critère de rejet vaut $\xi^0 = 0.3$, une seule fonction est ajoutée à la base avec sa dérivée et elle est mise à jour toutes les 20 itérations.

Cette fois encore, alors que l'espace macro est compatible avec les données, il est cependant trop pauvre pour pouvoir prendre en compte les phénomènes temporels autour du contact. Ces derniers sont traités de manière monéchelle, et la convergence

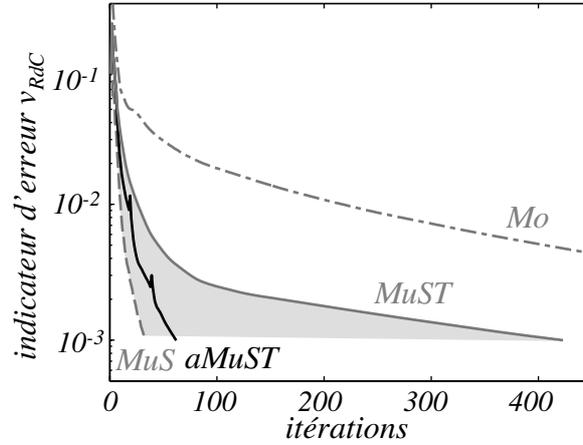


FIG. 4.17: Courbes de convergence pour les méthodes MuS , $MuST$, $aMuST$ et Mo

globale de la méthode est pénalisée. Dans cet exemple, avec une seule fonction supplémentaire mise à jour de temps en temps, la méthode $aMuST$ converge très vite. Même si elle nécessite 2 fois plus d'itérations que la courbe de référence, plus de 7 fois moins d'itérations que la méthode $MuST$ standard sont nécessaires pour attendre une erreur de $v_{RdC} = 10^{-3}$.

■ **Remarque 2.3** Les fonctions de la base macro spatio-temporelle $\underline{e}_i^M(\underline{x}) \times f_j^M(t)$ sont définies par le produit des fonctions de base temporelles $f_j^M(t)$ par les fonctions de base spatiales $\underline{e}_i^M(\underline{x})$. À chaque fois qu'une nouvelle fonction temporelle est ajoutée à la base, la dimension de l'espace macro est augmentée de n_{esp}^M . Or la fonction temporelle est adaptée au mode macro $\underline{R}_{F,EE'}^m$ duquel elle est issue. On pourrait envisager d'enrichir la base macro par des fonctions spatio-temporelles $\underline{g}^M(\underline{x}, t)$ permettant ainsi de réduire la taille de la base totale, avec uniquement des fonctions vraiment adaptées au problème à résoudre. Cette technique n'a cependant pas encore été testée.

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé, dans une première partie, un outil permettant de contrôler la convergence de la LATIN multiéchelle. Il s'agit d'un indicateur basé sur le concept d'erreur en relation de comportement. Il permet d'avoir accès à une indication fiable sur la qualité de la solution à une itération donnée. Il ne présente pas les inconvénients des indicateurs d'erreur classiquement utilisés. Dans une deuxième partie, nous avons montré que la stratégie multiéchelle en temps et en espace pouvait dans certains cas perdre partiellement son extensibilité, et ceci même lorsque l'espace macro est compatible avec les données. Quelques techniques du type p et h -raffinement ont été explorées, et se sont montrées inefficaces, ou trop coûteuses. Une

technique automatique d'enrichissement a été proposée, elle permet de pallier les limitations de l'approche classique, et améliore considérablement l'extensibilité de la méthode.

Deuxième partie

Approximation radiale et stratégie de calcul adaptative

L'approximation radiale sur l'espace-temps

Ce chapitre est composé d'une partie bibliographique sur la POD, ainsi que sur l'approximation radiale. S'en suit une partie dans laquelle nous proposons une nouvelle façon d'adapter l'approximation radiale dans le cadre de la LATIN, pour les modèles de matériaux à variables internes.

Sommaire

1	La POD	91
1.1	Le principe	91
1.2	Constructions classiques de la POD	91
1.3	Exemple	93
2	L'approximation radiale sur l'espace-temps	95
2.1	Définition classique	95
2.2	Définition sous forme d'un problème de minimisation	97
2.3	Approximation d'une fonction connue	98
3	Application à la résolution d'un problème micro	101
3.1	Réécriture de la direction de recherche	101
3.2	Reformulation des problèmes micro	102
3.3	Nouvelle approche pour l'approximation d'un problème micro	102

À l'étape linéaire, nous devons résoudre une série de problèmes linéaires dépendants du temps. Les techniques usuelles permettant de résoudre ce genre de problèmes d'évolution sont des techniques dites « incrémentales » qui utilisent des schémas d'intégration classiques. Parmi elles, on distingue les méthodes explicites (conditionnellement stables), qui imposent une discrétisation temporelle très fine et qui sont principalement utilisées en dynamique transitoire. Les méthodes implicites, plus fiables car stables, nécessitent cependant l'inversion d'un système à chaque intervalle de temps, et conduisent ainsi à des coûts de calculs prohibitifs dans le cadre d'une méthode itérative. Pour résoudre ce type de problèmes, les méthodes incrémentales classiques peuvent conduire à des coûts de calculs prohibitifs.

Dans ce contexte, une méthode de résolution alternative basée sur le concept de fonctions radiales a été introduite : l'approximation radiale sur l'espace-temps [Ladevèze, 1999]. Initialement, il s'agit d'une extension du concept de fonctions radiales qui s'est avéré très efficace pour la résolution de problèmes de (visco)plasticité [Ladevèze, 1985b]. Cette méthode propose de construire la solution d'un problème d'évolution sous la forme d'une somme de produits d'une fonction temporelle par une fonction spatiale.

$$f(\underline{x}, t) \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{x}) \quad (5.1)$$

Cette écriture générale possède des similarités avec la POD (pour *Proper Orthogonal Decomposition*) qui consiste, connaissant une fonction du temps et de l'espace $f(\underline{x}, t)$ à calculer sa meilleure décomposition de rang m . L'approximation radiale permet, quant-à-elle, de calculer l'approximation d'un problème d'évolution en calculant directement sa meilleure décomposition d'ordre m , sans qu'aucune solution ou base de fonctions ne soit connue au préalable. En cela, la méthode d'approximation radiale sur l'espace-temps peut-être vue comme une méthode qui généralise la POD.

Ce type d'approximation présente l'avantage de réduire le volume d'informations, puisqu'il conduit à une représentation réduite de la solution. De plus, nous le verrons, la construction de l'approximation radiale conduit à la résolution d'un petit nombre de problèmes spatiaux et de problèmes temporels au lieu d'un problème spatio-temporel complet, ce qui a pour effet de réduire considérablement le coût de calcul. Outre ces avantages, l'intérêt majeur de ces méthodes est qu'elles servent de base à la construction de méthodes de réductions de modèles. Ces méthodes feront l'objet du dernier chapitre (Chapitre 7).

Ce chapitre est composé d'une première partie bibliographique comparative sur la POD et l'approximation radiale. Nous présentons, dans une deuxième partie, une nouvelle approche performante et robuste pour construire l'approximation d'un problème micro de l'étape linéaire de la stratégie de calcul multiéchelle, dans le cas des modèles de matériaux à variables internes.

1 La POD

Dans cette partie, nous rappelons le principe de la POD, dont les premiers travaux datent de plus d'un siècle [Pearson, 1901]. Originellement inventée pour réduire des collections de données multidimensionnelles en dimension réduite à des fins d'analyse et de statistique, elle est aujourd'hui à la base de nombreuses stratégies de réduction de modèles qui font l'objet du chapitre suivant (Chapitre 6).

1.1 Le principe

Supposons que l'on souhaite représenter une fonction $f(\underline{x}, t), \forall (\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ sous la forme de la somme du produit découpé d'une fonction du temps $\lambda_i(t)$ par une fonction de l'espace $\Lambda_i(\underline{x})$:

$$f(\underline{x}, t) \approx \check{f}_m(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{x}) \quad (5.2)$$

La représentation (5.2) n'est évidemment pas unique. Par exemple pour les $\{\Lambda_i(\underline{x})\}_m$, on peut utiliser les séries de Fourier ou des familles de polynômes orthogonaux... Dans ce cas, et s'il s'agit d'une base orthonormée, connaissant une famille de fonctions $\{\Lambda_i(\underline{x})\}_m$, il ne reste plus qu'à déduire les fonctions $\{\lambda_i(t)\}_m$ par :

$$\lambda_i(t) = \int_{\Omega} f(\underline{x}, t) \Lambda_i(\underline{x}) d\Omega \quad (5.3)$$

Cependant, le problème est que le nombre m de fonctions nécessaires pour obtenir une bonne approximation peut être grand. Ce genre de décomposition ne correspond clairement pas aux approches de réductions de données. Nous cherchons donc à trouver une base de fonctions qui soit telle que l'approximation de rang k avec cette base soit la meilleure approximation de rang k au sens d'une norme donnée. Si l'on choisit une telle base, alors l'expression (5.2) s'appelle *la POD* de f tronquée à l'ordre m .

Nous présentons, dans le paragraphe suivant, les façons classiques de construire cette approximation.

1.2 Constructions classiques de la POD

L'article [Liang et al., 2002] montre l'équivalence, dans le cas discret, des trois façons de construire la POD : la *décomposition de Karhunen-Loeve (KLD)*, l'*analyse en composantes principales (PCA)*, et la *décomposition en valeurs singulières (SVD)*. Cette technique est encore connue sous d'autres noms : la *transformation d'Hotteling*, les *modes quasi-harmoniques* ou encore les *fonctions orthogonales empiriques*. Les fonctions de base issues de cette décomposition s'appellent fonctions propres empiriques, fonctions de base empirique, fonctions orthogonales empiriques ou encore modes propres orthogonaux. Cette terminologie hétérogène vient du fait que la POD a été

« réinventée » plusieurs fois et utilisée dans un nombre surprenant de domaines scientifiques et technologiques. Parmi ceux-ci, on trouve l'analyse statistique de données expérimentales ou numériques [Hotelling, 1933; Karhunen, 1943; Loeve, 1955; Aubry et al., 1991], l'acoustique, le traitement d'image, l'ingénierie biomédicale [Nenadic et al., 2002; Niroomandi et al., 2008], *etc...*

Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas discret. Considérons que nous avons accès à n variables d'état telles que des mesures expérimentales (jauges de déformations, accéléromètres, pixels pour la corrélation d'images...) ou des inconnues d'un modèle numérique (degrés de liberté, inconnues nodales, aux points de gauss...). Nous supposons maintenant que nous disposons des informations concernant ces n variables à p instants du temps, ou pour p valeurs des paramètres aléatoires. Les méthodes classiques de POD consistent à ranger ces données dans une matrice A de taille $p \times n$.

■ KLD et PCA

Dans le cas discret, la décomposition de Karhunen-Loeve (KLD) [Karhunen, 1943; Loeve, 1955] et l'analyse en composantes principales (PCA) [Pearson, 1901; Hotelling, 1933] sont relativement similaires. Pour construire les bases de vecteurs spatiaux et temporels, les méthodes KLD et PCA consistent à trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de covariance C :

$$Cv_i = s_i v_i \quad \text{avec} \quad C = AA^T \quad \text{ou} \quad Cu_i = s_i u_i \quad \text{avec} \quad C = A^T A \quad (5.4)$$

suivant que l'on cherche à calculer une base de fonctions spatiales ou temporelles. En pratique, on choisit généralement de calculer celle (par exemple $(u_i)_m$) qui correspond au plus grand nombre d'inconnues $r = \sup(n, p)$.

La famille de fonctions complémentaires (par exemple $(v_i)_m$) est calculée par l'expression (5.3).

■ SVD

Une technique alternative consiste à calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) de A , qui est un outil de factorisation des matrices rectangulaires réelles ou complexes initialement introduite par Beltrami et Jordan dans les années 1870 et étendue aux matrices complexes rectangulaires par Ekardt et Young en 1939. Cette décomposition peut-être vue comme une généralisation du concept de valeurs propres à des matrices arbitraires, qui ne sont pas nécessairement carrées :

$$A = V\Sigma U^T \quad (5.5)$$

Dans laquelle V est la matrice $n \times n$ des fonctions spatiales orthonormées, U la matrice $p \times p$ des fonctions temporelles orthonormées et Σ la matrice $n \times p$ égale à zéro partout sauf sur les $\inf(n, p)$ éléments de la diagonale qui sont les valeurs singulières. Pour faire le rapprochement avec les méthodes précédentes, les carrés des $\inf(n, p)$ premières valeurs propres s_i de la matrice de covariance C sont égaux aux valeurs singulières de

A. Ensuite, en notant $L = V\Sigma$, et en notant l_i la i ème ligne de L et on a :

$$A = LU^T = \sum_{i=1}^n l_i u_i^T \quad (5.6)$$

L'équation (5.6) est la version discrète de (5.2) (ainsi U est une famille de fonctions normée, V non). Cependant, cette décomposition est souvent obtenue grâce au calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de covariance de A . Les valeurs singulières sont la norme des fonctions complémentaires.

1.3 Exemple

Afin d'illustrer la pertinence de cette méthode, nous reprenons l'exemple présenté dans [Chatterjee, 2000]. Nous considérons une fonction f définie sur $[0 T] \times [0 L]$. L'intervalle est partitionné en $p = 50$ pas de temps, et le domaine spatial en $n = 25$ points. Nous rangeons les valeurs de la fonction f dans une matrice A de taille 25×50 . Nous

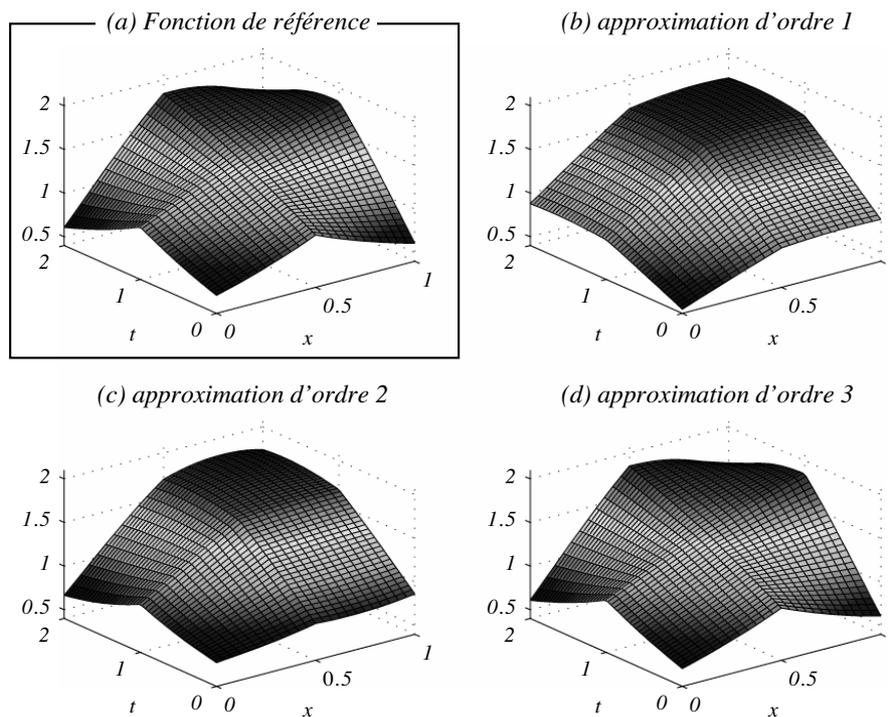


FIG. 5.1: Exemple de POD tronquée aux ordres 1,2 et 3

calculons la SVD de A . Puis nous reconstruisons la solution tronquée à la première valeur singulière, puis aux deux premières, puis aux trois premières. Sur la figure 5.1, nous représentons ces trois solutions ainsi que la fonction de départ f . On remarque que les différences entre la solution de rang 3 et la fonction f ne sont plus visibles à l'œil nu. La figure 5.2 présente les valeurs singulières, qui traduisent la précision de

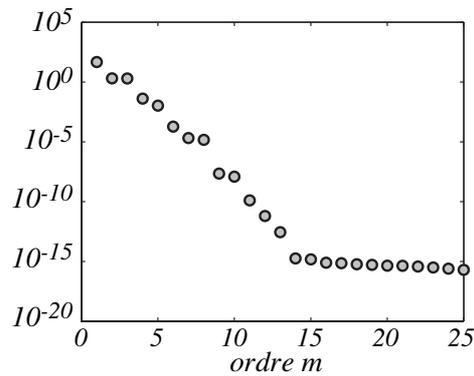


FIG. 5.2: Valeurs singulières de A

l'approximation d'ordre m . On aperçoit que les valeurs singulières décroissent très vite. Les fonctions associées aux valeurs singulières les plus faibles ont un effet négligeable sur la qualité de la solution. Ceci permet de comprendre l'intérêt de ce type de représentation. Ici, il suffit de $3n + 3p$ données pour avoir une solution de qualité alors qu'il en faut np pour stocker la fonction f . La POD est assez générale, on peut l'ap-

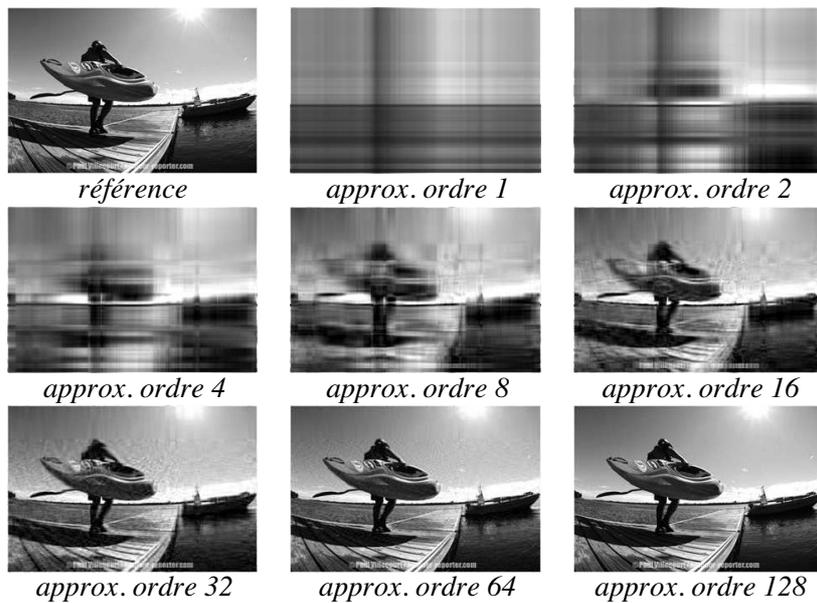


FIG. 5.3: POD tronquées d'une image de 300×200 pixels

pliquer à n'importe quelle fonctions à deux variables, du temps, de l'espace ou d'un paramètre stochastique... Par exemple, en remplaçant la variable temporelle par une autre variable spatiale, la POD peut également être utilisée pour le traitement d'image. La figure 5.3 montre que même lorsque les fonctions sont très chahutées, l'approximation converge rapidement. Il s'agit donc d'une méthode performante de réduction de données. Elle présente de fortes similarités avec l'approximation radiale dont nous

allons énoncer le principe dans le paragraphe suivant.

2 L'approximation radiale sur l'espace-temps

L'approximation radiale, introduite initialement en 1985 [Ladevèze, 1985b] comme partie intégrante de la LATIN, est une méthode qui permet de calculer l'approximation de la solution d'un problème par sa meilleure décomposition d'ordre k souhaité. Elle ne nécessite la connaissance d'aucune solution *a priori*, ni la connaissance de l'une ou l'autre des deux bases de fonctions. Toutes les fonctions $\lambda_i(t)$ et $\Lambda_i(\underline{x})$ sont inconnues *a priori* et sont issues d'un calcul automatique, chaque paire $\lambda_i\Lambda_i$ après l'autre. Un indicateur de la qualité de la solution obtenue peut-être calculé *a posteriori*. Si l'approximation est trop grossière, il est possible d'obtenir une approximation d'ordre plus élevé en calculant uniquement le terme supplémentaire. Fort de ce constat, l'approximation radiale peut être vue comme une méthode de POD plus générale que les techniques classiques KLD, SVD et PCA. Cette méthode a été utilisée dans un certain nombre de domaines tels que l'identification [Allix et Vidal, 2002], la plasticité, simulation de mise en forme de matériaux, ou plus récemment dans le domaine stochastique [Nouy, 2007]. Des développements similaires ont été également utilisés dans le cas de problèmes multi-variables [Ammar et al., 2006, 2007; Chinesta et al., 2008], sous le nom de la méthode de séparation de variables.

On considère ici la résolution d'un problème parabolique classique. On se place dans le cas discret tant au niveau spatial que temporel. Ainsi, une fonction $u(\underline{x}, t)$ définie sur l'espace-temps sera représentée par une fonction $\mathbf{u}(t)$ définie sur $[0, T]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n , n étant le nombre d'inconnues spatiales. Chacune des composantes étant une fonction scalaire du temps. Dans le cas d'une discrétisation de type Galerkin discontinu d'ordre r , on notera l'espace $(\mathbf{Z}_r^{[0, T]})^n$. Le problème d'évolution s'écrit alors, trouver $\mathbf{u} \in (\mathbf{Z}_r^{[0, T]})^n$, tel que

$$\int_{[0, T]} \mathcal{L}(\mathbf{u})^T \mathbf{u}^* dt = \int_{[0, T]} \mathbf{f}^T \mathbf{u}^* dt \quad \forall \mathbf{u}^* \in (\mathbf{Z}_r^{[0, T]})^n \quad (5.7)$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire. L'approximation radiale consiste à rechercher une approximation de la solution de ce problème sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) \approx \check{\mathbf{u}}_m(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \mathbf{U}_i \quad (\lambda_i, \mathbf{U}_i) \in \mathbf{Z}_r^{[0, T]} \times \mathbb{R}^n \quad (5.8)$$

2.1 Définition classique

L'approximation radiale classique consiste à injecter dans la formulation variationnelle (5.7), l'écriture de $\mathbf{u}(t)$ (5.8) ainsi que le champ test suivant :

$$\mathbf{u}^*(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^*(t) \mathbf{U}_i + \lambda_i(t) \mathbf{U}_i^* \quad (5.9)$$

■ **Remarque 2.1** En remplaçant la variable temporelle par une variable spatiale, cette technique coïncide avec la méthode de séparation de variables proposée par [Ammar et al., 2006, 2007] pour la simulation de fluides complexes ou par [Chinesta et al., 2008] pour des problèmes de transfert thermiques.

Pour illustrer la démarche, considérons le cas où $m = 1$. Le problème consiste donc à trouver $(\lambda, \mathbf{U}) \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]} \times \mathbb{R}^n$, tels que, $(\lambda^*, \mathbf{U}^*) \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]} \times \mathbb{R}^n$,

$$\int_{[0,T]} \mathcal{L}(\lambda \mathbf{U})^T \lambda \mathbf{U}^* dt = \int_{[0,T]} \mathbf{f}^T \lambda \mathbf{U}^* dt \quad (5.10)$$

$$\int_{[0,T]} \mathcal{L}(\lambda \mathbf{U})^T \lambda^* \mathbf{U} dt = \int_{[0,T]} \mathbf{f}^T \lambda^* \mathbf{U} dt \quad (5.11)$$

L'équation (5.10) est un problème « spatial » indépendant du temps, mais dont la construction des opérateurs nécessitent des calculs d'intégrales temporelles de la fonction $\lambda(t)$. L'équation (5.11) est un problème « temporel », qui n'est autre qu'une simple équation différentielle scalaire, mais dont les coefficients nécessitent le calcul d'intégrales spatiales de \mathbf{U} (ici des produits scalaires l'espace étant discrétisé).

La technique classique de résolution de ce problème couplé [Ladevèze, 1999] est itérative et consiste à calculer alternativement la fonction spatiale puis temporelle, par l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Résolution itérative de l'approximation classique d'ordre 1

- initialisation $\lambda^0(t)$

pour $k = 1, \dots, k_{max}$ **faire**

 - $\lambda^{k-1}(t)$ étant fixé, on cherche \mathbf{U}^k solution du problème (5.10)

 - \mathbf{U}^k étant fixé, on cherche $\lambda^k(t)$ solution du problème (5.11)

 - normalisation de \mathbf{U}^k (ou λ^k , au choix)

Pour construire une approximation à plusieurs paires de fonctions, c'est-à-dire $m \geq 2$, on peut utiliser plusieurs méthodes. Pour rester dans le cadre de la meilleure décomposition, il faudrait introduire la forme générale (5.9) et utiliser une démarche similaire à celle de l'algorithme 2, mais en cherchant les m fonctions spatiales puis temporelles en même temps. Cette approche est à proscrire puisqu'elle conduit à inverser des systèmes de taille m fois plus grande qui deviennent rapidement hors de portée de calcul lorsque le nombre de fonctions augmente. D'autres méthodes basées sur des techniques d'Arnoldi permettent, via la construction d'un sous-espace de Krylov, de générer une base réduite de taille souhaitée. Cependant ce type d'approche ne rentre pas véritablement dans le cadre de l'approximation radiale dont le but est de trouver la meilleure décomposition d'ordre m . L'idée utilisée ici est de construire les fonctions λ_i, \mathbf{U}_i une par une par l'algorithme 3.

Il arrive parfois, en particulier lorsque cette approximation est utilisée dans le cadre de la stratégie multiéchelle, que l'algorithme classique de résolution du problème couplé (5.10), (5.11) ne converge pas [Nouy et Ladevèze, 2004]. En fait, ce problème peut

Algorithme 3 : Résolution approchée de l'approximation d'ordre m

-
- initialisation $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$
 - pour** $m = 1, \dots, m_{max}$ **faire**
 - les paires connues $(\lambda_i \mathbf{U}_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ étant fixées,
on applique l'algorithme 2 au problème $\mathcal{L}(\lambda_m \mathbf{U}_m) = \tilde{\mathbf{f}}$
 - mise à jour du second membre : $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\lambda_i \mathbf{U}_i)$
-

être interprété par un problème aux valeurs propres généralisé sur un opérateur construit sur \mathcal{L} . Il peut arriver que \mathcal{L} soit tel que cet opérateur ait des valeurs propres complexes. L'algorithme itératif de résolution, qui peut-être vu comme une méthode des puissances généralisée (cf. Remarque 2.4), ne converge donc pas dans le cas général. Ce constat à donc conduit au développement d'une technique générale plus robuste sous la forme d'un problème de minimisation [Nouy et Ladevèze, 2004].

2.2 Définition sous forme d'un problème de minimisation

Pour remédier au problème de l'approche classique, une technique alternative consiste à définir l'approximation par un problème de minimisation du résidu $(\mathcal{L}(\lambda \mathbf{U}) - \mathbf{f})$. La meilleure approximation d'ordre 1 consistera donc à trouver (λ, \mathbf{U}) minimisant sur $\mathbf{Z}_r^{[0,T]} \times \mathbb{R}^n$:

$$\|\mathcal{L}(\lambda \mathbf{U}) - \mathbf{f}\| \quad (5.12)$$

L'approximation dépend donc du choix de la norme $\|\cdot\|$. Le choix d'une norme doit être adaptée au problème à résoudre. Dans le cas où \mathcal{L} n'est pas symétrique, l'idée consiste à construire une norme basée sur la symétrisation de \mathcal{L} . Dans [Ladevèze et Nouy, 2003], le choix de cette norme est proposé pour différentes classes de problèmes d'évolution paraboliques.

La technique itérative de construction de l'approximation d'ordre 1 reste cependant inchangée :

Algorithme 4 : Résolution itérative de l'approximation d'ordre 1

-
- initialisation $\lambda^0(t)$
 - pour** $k = 1, \dots, k_{max}$ **faire**
 - $\lambda^{k-1}(t)$ étant fixé, on cherche \mathbf{U}^k qui minimise $\|\mathcal{L}(\lambda \mathbf{U}) - \mathbf{f}\|$
 - \mathbf{U}^k étant fixé, on cherche $\lambda^k(t)$ qui minimise $\|\mathcal{L}(\lambda \mathbf{U}) - \mathbf{f}\|$
 - normalisation de \mathbf{U}^k (ou λ^k , au choix)
 - critère d'arrêt basé sur la stagnation de $\|\mathcal{L}(\lambda \mathbf{U}) - \mathbf{f}\|$.
-

En pratique, nous le verrons dans les exemples du chapitre suivant (Chapitre 6), l'algorithme 4 converge très vite. Un autre point fort d'une cette formulation est que

nous avons accès à un indicateur de qualité de l'approximation d'ordre m , basé sur la stagnation de la norme du résidu associé. L'approximation d'ordre $m \geq 2$ est construite par un algorithme similaire à l'algorithme 3.

■ **Remarque 2.2** *Dans le cas général, l'utilisation de cette approximation ne conduit pas à la meilleure décomposition d'ordre m . La différentiation de $\|\cdot\|$ par rapport à λ et par rapport à $\|\mathbf{U}\|$ donne respectivement :*

$$\mathbf{U} = f(\lambda) \quad \lambda = g(\mathbf{U}) \|\mathbf{U}\|^{-1}$$

Par composition de f et g , la fonction temporelle est solution de :

$$\lambda = g \circ f(\lambda) \|\mathbf{U}\|^{-1} = T(\lambda)$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\tilde{T}(\lambda) = \omega \lambda$$

Ce problème aux valeurs propres généralisé dépend de \mathcal{L} et de \mathbf{f} et ne possède pas l'ensemble des propriétés d'un problème aux valeurs propres classique. La méthode de construction précédente pouvant être vue comme une méthode des puissances appliquée à \tilde{T} , elle ne conduit donc pas nécessairement au spectre de \tilde{T} , c'est d'ailleurs le cas dans nos exemples. Pour un certain nombre de problèmes de physique, cette technique conduit à un ensemble de fonctions différentes des vecteurs propres de \tilde{T} mais suffisamment proche pour qu'elle reste très efficace.

■ **Remarque 2.3** *Si \mathcal{L} est un opérateur symétrique ne dépendant pas du temps, alors cette approche est équivalente à l'approche classique présentée dans le paragraphe précédent.*

2.3 Approximation d'une fonction connue : comparaison avec la POD

On s'intéresse ici à l'approximation d'une fonction connue $u(\underline{x}, t)$ définie sur $\Omega \times [0, T]$. On montre dans ce paragraphe, que dans ce cas, l'approximation radiale coïncide exactement avec la POD. Dans cette partie, on s'appuie sur quelques résultats théoriques de l'approximation radiale, démontrés dans [Ladevèze, 1999] auquel on pourra se reporter pour plus de détails.

2.3.1 Cas continu

Dans un premier temps examinons l'approximation d'ordre 1, $\tilde{u}_1(\underline{x}, t) = \lambda(t)U(\underline{x})$, elle minimise la norme suivante du résidu :

$$e(u - \lambda U) = \|u - \lambda U\| \tag{5.13}$$

où la norme est définie par $\|\square^2\| = \int_{\Omega \times [0, T]} \square^2 d\Omega dt$. λ et U sont solutions du problème variationnel suivant associé à la minimisation de (5.13) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times [0, T]} (u - \lambda U) \lambda^* U d\Omega dt &= 0 \quad \forall \lambda^* \\ \int_{\Omega \times [0, T]} (u - \lambda U) \lambda U^* d\Omega dt &= 0 \quad \forall U^* \end{aligned}$$

Si λ et U sont solutions de ce problème, alors ils vérifient :

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} u U d\Omega}{\int_{\Omega} U U d\Omega} \quad (5.14)$$

$$U = \frac{\int_{[0, T]} u \lambda dt}{\int_{[0, T]} \lambda \lambda dt} \quad (5.15)$$

λ et U étant définis à un facteur multiplicatif près, on pourra normer l'une ou l'autre de ces deux fonctions. On prendra par exemple $\int_{[0, T]} \lambda \lambda dt = 1$.

En injectant (5.15) dans (5.14), on obtient

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} u \int_{[0, T]} u \lambda dt d\Omega}{\int_{\Omega} U U d\Omega} = \mathbf{T}(\lambda) \quad (5.16)$$

Si l'on note $\tilde{\mathbf{T}}$ l'opérateur suivant :

$$\tilde{\mathbf{T}} : \lambda \mapsto \tilde{\mathbf{T}}(\lambda) = \int_{\Omega} u \int_{[0, T]} u \lambda dt d\Omega \quad (5.17)$$

alors trouver l'approximation de u nous conduit à la résolution du problème suivant aux valeurs propres sur l'opérateur $\tilde{\mathbf{T}}$. Trouver (ω, λ) tels que :

$$\tilde{\mathbf{T}}(\lambda) = \omega \lambda \quad \omega \in \mathbb{R}^{+\star} \quad (5.18)$$

Dans [Ladevèze, 1999], un certain nombre de résultats concernant cette approximation sont démontrés, parmi eux on peut citer :

Pour l'approximation d'ordre 1 :

- le problème aux valeurs propres associé à $\tilde{\mathbf{T}}$ admet une suite dénombrable de valeurs propres et fonctions propres. Les valeurs propres sont positives et les fonctions propres sont orthogonales.
- λ est la première fonction propre du problème aux valeurs propres.

– U peut être calculé à partir de λ par (5.15)

Pour l'approximation d'ordre m :

– la meilleure décomposition d'ordre m s'écrit $\check{u}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i$.

– les λ_i sont les premières fonctions propres du problème aux valeurs propres associé à $\tilde{\mathbf{T}}$.

– les fonctions complémentaires sont déduites par $U_i = \int_{[0,T]} u \lambda_i dt$.

2.3.2 Cas discret – comparaison avec la POD

À présent, notons $\underline{U} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur correspondant à la discrétisation de U , $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ celui lié à λ et $A \in \mathbb{R}^{n+p}$ la matrice liée à u . Alors l'approximation $\check{A}_1 = \underline{\lambda} \underline{U}^T$ de A vérifie :

$$\underline{\lambda} = \frac{A \underline{U}}{\underline{U}^T \underline{U}} \quad (5.19)$$

$$\underline{U} = \frac{A^T \underline{\lambda}}{\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \quad (5.20)$$

Et donc le problème aux valeurs propres porte sur l'opérateur $\tilde{\mathbf{T}}$ suivant :

$$\tilde{\mathbf{T}}: \underline{\lambda} \mapsto \tilde{\mathbf{T}}(\underline{\lambda}) = A A^T \underline{\lambda} \quad (5.21)$$

L'approximation radiale revient donc, dans ce cas, à rechercher les valeurs propres de la matrice $A A^T$, qui n'est autre que la matrice de covariance des méthodes de construction de la POD. Ce qui prouve que dans ce cas, les méthodes conduisent à la même décomposition. L'approximation est cependant une méthode plus générale puisqu'elle permet de déterminer directement l'inconnue d'un problème d'évolution.

■ **Remarque 2.4** L'algorithme 3, consiste donc dans ce cas, à calculer $\underline{\lambda}$ par l'équation (5.19) puis à calculer \underline{U} par l'équation (5.20). On comprend donc pourquoi cet algorithme peut-être vu comme une méthode des puissances généralisée.

■ **Remarque 2.5** Lorsque l'on utilise la technique itérative approchée pour résoudre ce problème, on s'écarte de ce cadre théorique. Cependant, en pratique, on observe assez peu de différence entre la solution calculée par l'algorithme 4, et celle issue du calcul des valeurs propres de l'opérateur $\tilde{\mathbf{T}}$, même avec un nombre très faible d'itérations. Par exemple, on a calculé, à l'aide de l'algorithme 4, l'approximation de la surface de A. Chatterjee Figure 5.1, en fixant $k_{max} = 2$. Sur la figure 5.4, on superpose les valeurs singulières issues de la SVD de la surface (en grisé) avec (en trait plein) les valeurs des normes des U_i qui sont sensées être comparables. La résolution approchée par l'algorithme 4 est très efficace, et entraîne assez peu d'erreur, même pour un nombre d'itérations k_{max} faible.

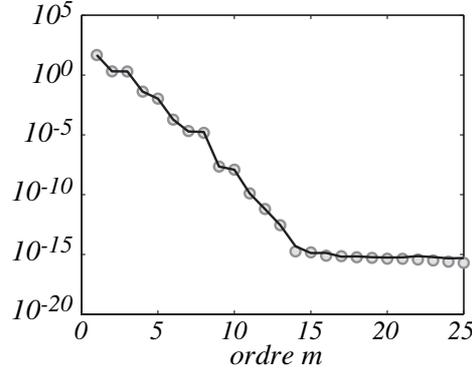


FIG. 5.4: Convergence de l'approximation radiale et valeurs singulières de A

3 Application à la résolution d'un problème micro

Nous rappelons, dans cette partie, la méthode proposée par [Nouy et Ladevèze, 2004] qui permet d'appliquer cette résolution approchée dans le cas d'un problème micro de l'étape linéaire de la stratégie multiéchelle présentée dans le chapitre 2. Puis nous proposons une méthode alternative plus performante, dédiée aux matériaux à variables internes.

3.1 Réécriture de la direction de recherche

Nous rappelons qu'à l'itération n de la stratégie multiéchelle, l'étape linéaire consiste à trouver $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ connaissant $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$, en suivant la direction de recherche \mathbf{E}^- .

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{f}^{n+1} - \hat{\mathbf{f}}^{n+1/2}) - (\dot{\mathbf{e}}_p^{n+1} - \hat{\mathbf{e}}_p^{n+1/2}) &= 0 \\ \mathbf{h}(\underline{F}^{n+1} - \hat{\underline{F}}^{n+1/2}) + (\underline{\dot{W}}^{n+1} - \hat{\underline{W}}^{n+1/2}) - \underline{\dot{W}}^M &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

On choisit de réécrire l'étape linéaire sur la correction de solution $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$, qui doit donc appartenir à \mathbf{A}_d^* , l'espace homogène associé à \mathbf{A}_d . Nous noterons la direction de recherche sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\Delta \mathbf{f}^{n+1} - \bar{\mathbf{f}}) - (\Delta \dot{\mathbf{e}}_p^{n+1} - \dot{\mathbf{e}}_p) &= 0 \\ \mathbf{h}(\Delta \underline{F}^{n+1} - \bar{\underline{F}}) + (\Delta \underline{\dot{W}}^{n+1} - \underline{\dot{W}}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec $\bar{\mathbf{s}}$ les données connues à cette étape,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}} &= \left((\hat{\mathbf{e}}_p^{n+1/2} - \dot{\mathbf{e}}_p^n), (\hat{\underline{W}}^{n+1/2} - \underline{\dot{W}}^n + \underline{\dot{W}}^M), (\hat{\mathbf{f}}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n), (\hat{\underline{F}}^{n+1/2} - \underline{F}^n) \right) \\ &= \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n + \left(0, \underline{\dot{W}}^M, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Rappelons qu'à l'étape linéaire, nous avons deux types de problèmes micro à résoudre. Le premier est associé à la direction de recherche pour laquelle le second membre vaut $\bar{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$. Puis une fois le problème macro résolu, connaissant $\widetilde{\dot{W}}^M$, on devra résoudre un deuxième problème cette fois-ci associé à la direction de recherche pour laquelle $\bar{\mathbf{s}} = (0, \widetilde{\dot{W}}^M, 0, 0)$. Cette écriture unique couvre les deux types de problèmes à résoudre à l'étape linéaire. Toute la suite est donc applicable à l'un ou l'autre de ces deux types de problèmes.

3.2 Reformulation des problèmes micro

Afin d'appliquer la méthode décrite dans la partie précédente, le problème précédent est, à présent, formulé comme un problème de minimisation du résidu associé à la vérification de la direction de recherche (5.23). Si l'on fait l'analogie entre la direction de recherche et une relation de comportement, alors la norme sur le résidu peut être vue comme une erreur en relation de comportement. Le problème micro s'écrit alors (indice n omis) :

□ **Problème 5.1** Trouver $\Delta \mathbf{s}$ minimisant sur \mathbf{A}_d^* l'erreur en relation de comportement $e_{RdC}(\Delta \mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}})$ associée à la direction de recherche, définie par :

$$e_{RdC}^2(\Delta \mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) = \left\| \mathbf{H}(\Delta \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) - (\Delta \dot{\mathbf{e}}_p - \dot{\bar{\mathbf{e}}}_p) \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \mathbf{h}(\Delta \underline{F} - \bar{\underline{F}}) + (\Delta \dot{\underline{W}} - \dot{\bar{\underline{W}}}) \right\|_{\Gamma}^2$$

avec

$$\|\square\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega_E \times I_i^G} \square \cdot \mathbf{M}(t) \square d\Omega dt \quad \text{et} \quad \|\square\|_{\Gamma}^2 = \int_{\partial\Omega_E \times I_i^G} \square \cdot \mathbf{m}(t) \square d\Gamma dt$$

où \mathbf{M} et \mathbf{m} sont des opérateurs symétriques définis positifs.

■ **Remarque 3.1** L'erreur en relation de comportement ainsi construite s'écrit comme la somme de deux normes. Une norme sur les quantités du sous-domaine $\|\cdot\|_{\Omega}$ et une norme sur celles des interfaces $\|\cdot\|_{\Gamma}$. Une condition sur le choix des opérateurs \mathbf{M} et \mathbf{m} est que les deux termes de l'erreur soient du même ordre de grandeur afin de ne pas donner de poids prépondérant à l'un ou l'autre. En pratique, pour l'erreur en relation de comportement, on pourra prendre un opérateur composé de la partie symétrique de \mathbf{H} , ainsi que d'une fonction poids temporelle classique cf. [Chamoïn et Ladevèze, 2007] :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathbf{H}_{sym}^{-1} \\ \mathbf{m}(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathbf{h}_{sym}^{-1} \end{aligned}$$

3.3 Nouvelle approche pour l'approximation d'un problème micro

Le problème micro est écrit sous la forme d'un problème de minimisation. Il doit désormais être ré-écrit dans le cadre de l'approximation radiale. Pour ce faire, il est nécessaire de préciser sur quelles inconnues porte l'approximation et comment on la

construit. Dans [Nouy et Ladevèze, 2004], les auteurs présentent une stratégie de décomposition de domaine dont l'état est décrit par la donnée des variables $\mathbf{s} = (\mathbf{e}, \underline{W}, \mathbf{f}, \underline{F})$. L'espace d'admissibilité \mathbf{A}_d^* , est alors associé à ce choix et conduit naturellement à une approximation radiale $\Delta \mathbf{s}$ des variables $\Delta \mathbf{s}$ compatible avec cette définition de \mathbf{A}_d^* . Le choix qui est fait est donc le suivant :

$$(\Delta \check{\boldsymbol{\sigma}}, \Delta \check{\underline{F}})(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) (\mathbf{C}_i, \underline{G}_i)(\underline{x}) \quad (5.25)$$

$$\Delta \check{\mathbf{Y}}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{m'} d_i(t) \Psi_i(\underline{x}) \quad (5.26)$$

$$(\Delta \check{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta \check{\underline{W}})(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{m''} e_i(t) (\mathbf{E}_i, \underline{Z}_i)(\underline{x}) \quad (5.27)$$

La déformation anélastique est alors déduite de l'équation d'état par :

$$\Delta \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_{i=1}^{m'} e_i(t) \mathbf{E}_i(\underline{x}) - \sum_{i=1}^m c_i(t) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_i(\underline{x}) \quad (5.28)$$

$$\Delta \check{\mathbf{X}}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{m'} d_i(t) \Lambda^{-1} \Psi_i(\underline{x}) \quad (5.29)$$

L'approche qui suit est présentée comme une amélioration de la technique décrite précédemment. Pour nous, l'état de la structure est décrit par la donnée des variables suivantes $\mathbf{s} = (\dot{\mathbf{e}}_p, \underline{W}, \mathbf{f}, \underline{F})$. Le choix de la décomposition des variables par l'approximation radiale doit être compatible avec lui. Tentons d'abord de caractériser les inconnues minimales de la résolution complète d'un problème micro.

3.3.1 Propriété préliminaire

L'idée est de remarquer que tout est piloté par le taux de déformation anélastique $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$, les autres variables internes $\Delta \mathbf{X}$ et le champ de vitesse d'interface $\Delta \underline{W}$. Une fois ces quantités connues, les autres inconnues du problème se déduisent d'elles. En effet, à cette étape, la loi d'état est vérifiée, donc $\forall t \in I_i^G$ et $\forall \underline{x} \in \Omega$

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{f} + \Delta \mathbf{e}_p$$

Donc connaissant $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ et $\Delta \underline{W}$, on est capable d'écrire $\forall t \in I_i^G$ un nouveau problème pour trouver $\Delta \underline{u} \in \mathcal{U}^2 = \{\Delta \underline{u} \text{ rég. tel que } \Delta \underline{u}|_{\Gamma} = \Delta \underline{W}\}$ et $\Delta \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^2 = \{\Delta \boldsymbol{\sigma} \text{ rég. tel que } \text{div}(\Delta \boldsymbol{\sigma}) = 0\}$ tels que $\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^2$

$$\int_{\Omega_E \times I_i^G} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{K} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dt d\Omega = \int_{\Omega_E \times I_i^G} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \Delta \boldsymbol{\sigma} \, dt d\Omega + \int_{\Omega_E \times I_i^G} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{K} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p \, dt d\Omega \quad (5.30)$$

où $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \underline{u})$. Cependant, $\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^2$,

$$\int_{\Omega_E \times I_i^G} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \Delta \boldsymbol{\sigma} \, dt d\Omega = \int_{\partial \Omega_E \times I_i^G} \underline{u}^* \Delta \underline{F} \, dt d\Gamma = 0 \quad \text{car } \underline{u}^*|_{\partial \Omega_E} = \underline{0}$$

Ainsi connaissant $\Delta\dot{\underline{\varepsilon}}_p$ et $\Delta\dot{\underline{W}}$, on a accès à $\Delta\varepsilon$ et $\Delta\underline{u}$, par la résolution du problème linéaire annexe suivant $\forall \underline{u}^* \in \mathcal{W}_0^2$,

$$\int_{\Omega_E \times I_i^G} \varepsilon(\underline{u}^*) : \mathbf{K} \Delta \varepsilon \, dt d\Omega = \int_{\Omega_E \times I_i^G} \varepsilon(\underline{u}^*) : \mathbf{K} \Delta \varepsilon_p \, dt d\Omega \quad \Delta \underline{u}|_{\partial\Omega_E} = \Delta \underline{W} \quad (5.31)$$

et par suite, on retourne aux quantités statiques par $\forall t \in I_i^G$ et $\forall \underline{x} \in \Omega_E$

$$\Delta \underline{\sigma} = \mathbf{K}(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_p) \quad \text{et} \quad \Delta \underline{F} = \Delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega_E} \quad (5.32)$$

Concernant les variables internes, connaissant $\Delta \mathbf{X}$, on peut directement connaître sa variable duale par :

$$\Delta \mathbf{Y} = \Lambda \Delta \mathbf{X} \quad (5.33)$$

On remarque donc que les inconnues minimales du problème sont le taux de déformation anélastique $\Delta\dot{\underline{\varepsilon}}_p$, les variables internes additionnelles $\Delta \mathbf{X}$, ainsi que la trace du déplacement sur le bord de chaque sous-structure $\Delta \underline{W}$.

3.3.2 Décomposition des variables du problème

Nous allons donc tirer parti de cette remarque dans la construction de l'approximation radiale de ce problème. Le point de départ consiste à approximer les corrections en déformation anélastique et en variables internes par :

$$\Delta \check{\underline{\varepsilon}}_{p,m}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^p(t) \mathbf{E}_i^p(\underline{x}) \quad (5.34)$$

$$\Delta \check{\mathbf{X}}_m(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(t) \Xi_i(\underline{x}) \quad (5.35)$$

et faire de même avec la trace du déplacement sur le bord $\Delta \underline{W}$:

$$\Delta \check{\underline{W}}_m(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^W(t) \underline{Z}_i(\underline{x}) \quad (5.36)$$

■ **Proposition 1** : Dans les écritures (5.34) et (5.36), les fonctions temporelles peuvent être choisies identiques :

$$\alpha_i^p(t) = \alpha_i^W(t) = \alpha_i^u(t) = \alpha_i(t)$$

Une fois les quantités $\mathbf{E}_i^p, \Xi_i, \underline{Z}_i$ et α_i calculées, toutes les autres se déduisent des premières de la manière suivante :

– La déformation élastique et le déplacement sont égaux à :

$$(\Delta \check{\underline{e}}(\underline{u}), \Delta \check{\underline{u}})(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) (\mathbf{E}_i, \underline{U}_i)(\underline{x}) \quad (5.37)$$

avec $(\mathbf{E}_i, \underline{U}_i)$ qui se déduit de \mathbf{E}_i^p et \underline{Z}_i par la résolution du problème annexe suivant :

$$\int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{U}^*) : \mathbf{K} \mathbf{E}_i \, d\Omega = \int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{U}^*) : \mathbf{K} \mathbf{E}_i^p \, d\Omega \quad \text{avec} \quad \underline{U}_i|_{\partial\Omega_E} = \underline{Z}_i \quad (5.38)$$

– La contrainte et les efforts sur le bord sont égaux à :

$$(\Delta \check{\underline{\sigma}}, \Delta \check{\underline{F}})(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) (\mathbf{K} \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^p, \mathbf{K}(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^p) \cdot \underline{n}|_{\Gamma})(\underline{x}) \quad (5.39)$$

– Les variables internes duales sont égales à :

$$\Delta \check{\underline{Y}}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(t) \Lambda^{-1} \Xi_i(\underline{x}) \quad (5.40)$$

□ **Preuve** : (dans le cas ou $m=1$, en omettant l'indice i)

Nous représentons le déplacement et la déformation sous la forme quelconque suivante :

$$(\Delta \check{\underline{e}}(\underline{u}), \Delta \check{\underline{u}})(\underline{x}, t) = \alpha^u(t) (\mathbf{E}, \underline{U})(\underline{x}) \quad (5.41)$$

Pour les calculer à partir des quantités connues, elles sont injectées dans le problème (5.31). On peut ainsi écrire, $\forall \underline{U}^* \in \mathcal{W}_0^2$ tel que $\underline{U}^*|_{\Gamma} = 0$:

$$\int_{I_i^G} \alpha^u \alpha^u \, dt \int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{U}^*) : \mathbf{K} \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{I_i^G} \alpha^u \alpha^p \, dt \int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{U}^*) : \mathbf{K} \mathbf{E}^p \, d\Omega \quad (5.42)$$

sous la contrainte $\alpha^u \underline{U}|_{\Gamma} = \alpha^W \underline{Z}$, et $\forall \alpha^u(t)$

$$\int_{I_i^G} \alpha^{u^*} \alpha^u \, dt \int_{\Omega_E} \mathbf{E} : \mathbf{K} \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{I_i^G} \alpha^{u^*} \alpha^p \, dt \int_{\Omega_E} \mathbf{E} : \mathbf{K} \mathbf{E}^p \, d\Omega \quad (5.43)$$

Cette dernière relation (5.43), prouve que les fonctions $\alpha^p(t)$ et $\alpha^u(t)$ sont proportionnelles. Cependant, dans la décomposition (5.41), les fonctions $(\mathbf{E}, \underline{U})$ et $\alpha^u(t)$ sont définies à une constante multiplicative près. Fixer l'une revient à fixer l'autre. En particulier, nous pouvons donc choisir de prendre $\alpha^u(t) = \alpha^p(t)$. Par ailleurs, concernant les fonctions temporelles du déplacement \underline{u} , de sa trace sur le bord \underline{W} , ainsi que de son gradient symétrique $\varepsilon(\underline{u})$, un choix naturel consiste à les prendre égales puisque ces quantités sont liées les unes aux autres par des opérateurs spatiaux linéaires et constants, ainsi :

$$\alpha^p(t) = \alpha^W(t) = \alpha^u(t) = \alpha(t)$$

Dans ces conditions, l'expression du problème annexe (5.42) qui permet de calculer $(\mathbf{E}, \underline{U})$ à partir de $\mathbf{E}^p, \underline{Z}$ ne porte que sur les fonctions spatiales et s'écrit :

$$\int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{U}^*) : \mathbf{K} \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{U}^*) : \mathbf{K} \mathbf{E}^p \, d\Omega \quad \text{avec} \quad \underline{U}|_{\Gamma} = \underline{Z} \quad (5.44)$$

Enfin, la relation (5.32) entraîne que la fonction des contraintes et des efforts soit égale à $\alpha(t)$. Le retour aux variables internes duales ne pose pas de difficulté particulière. □

■ **Remarque 3.2** *La décomposition ainsi réalisée n'est pas unique. Afin de la rendre unique, on norme les fonctions spatiales de la manière suivante :*

$$\mathbf{E}_i^p \leftarrow \frac{\mathbf{E}_i^p}{\sqrt{\|\mathbf{E}_i^p\|_{\Omega}^2 + \|\underline{Z}_i\|_{\Gamma}^2}} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_i \leftarrow \frac{\underline{Z}_i}{\sqrt{\|\mathbf{E}_i^p\|_{\Omega}^2 + \|\underline{Z}_i\|_{\Gamma}^2}} \quad (5.45)$$

ainsi que pour les variables internes :

$$\Xi_i \leftarrow \frac{\Xi_i}{\|\Xi_i\|_{\Omega}} \quad (5.46)$$

Cette normalisation assure l'unicité de l'ensemble des paires de fonctions.

3.3.3 Approximation d'ordre 1

La meilleure approximation d'ordre 1 ($m = 1$) sera donc simplement définie comme solution du problème de minimisation de l'erreur en relation de comportement $e_{RdC}(\Delta\check{s} - \bar{s})$ suivant :

• **Problème** Trouver l'approximation $\Delta\check{s}$ définie par (α, β) et $(\mathbf{E}^p, \Xi, \underline{Z})$ minimisant sur \mathbf{A}_d^* l'erreur en relation de comportement $e_{RdC}(\Delta\check{s} - \bar{s})$ associée aux directions de recherche, définie par :

$$\begin{aligned} e_{RdC}^2(\Delta\check{s} - \bar{s}) &= \|\mathbf{H}\Delta\check{\mathbf{f}} - \Delta\check{\mathbf{e}}_p - \bar{\Delta}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{h}\Delta\check{\underline{F}} + \Delta\check{\underline{W}} - \bar{\delta}\|_{\Gamma}^2 \\ &= e\left(\alpha(t), \beta(t), \mathbf{E}^p(\underline{x}), \Xi(\underline{x}), \underline{Z}(\underline{x}), \bar{\Delta}, \bar{\delta}\right)^2 \end{aligned}$$

Avec les notations suivantes des quantités connues à cette étape :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \mathbf{H}\bar{\mathbf{f}} - \dot{\bar{\mathbf{e}}}_p \\ \bar{\delta} &= \dot{\bar{\underline{W}}} + \mathbf{h}\bar{\underline{F}} \end{aligned}$$

On peut montrer, en suivant une technique analogue à [Ladevèze, 1999], que si $(\alpha, \beta, \mathbf{E}^p, \Xi, \underline{Z})$ est solution du problème de minimisation précédent, alors il existe un quotient de Rayleigh $\mathbf{R}(\alpha, \beta)$ que les fonctions α et β rendent stationnaire.

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta) = \int_{\partial\Omega \times I_i^G} (\alpha \mathbf{h}_G + \dot{\alpha} \underline{Z}) \mathbf{m} \bar{\delta} \, d\Gamma \, dt + \int_{\Omega \times I_i^G} \left(\mathbf{H} \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{C} \\ \beta \Lambda^{-1} \Xi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \mathbf{E}_p \\ -\beta \Xi \end{bmatrix} \right) \circ \bar{\Delta} \, d\Omega \, dt \quad (5.47)$$

et de plus,

$$e_{RdC}^2(\Delta \check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = e_{RdC}^2(\bar{\mathbf{s}}) - \mathbf{R}(\alpha, \beta) = \|\bar{\Delta}\|_{\Omega}^2 + \|\bar{\delta}\|_{\Gamma}^2 - \mathbf{R}(\alpha, \beta) \quad (5.48)$$

Ce résultat permet donc de définir un estimateur de l'erreur pour le calcul d'une nouvelle paire de fonctions.

3.3.4 Technique de construction de l'approximation radiale

On propose ici une technique itérative pour construire cette approximation. Elle est basée sur une minimisation alternative sur les fonctions temporelles et les fonctions spatiales.

Algorithme 5 : Recherche de l'approximation radiale d'un problème micro

- **Initialisation** de $\alpha^0(t), \beta^0(t)$ par une fonction simple a_0 ou $a_0 t$
 - pour** $k = 1, \dots, k_{max}$ **faire**
 - **Problème spatial :**
Les fonctions temporelles $\alpha^{k-1}(t), \beta^{k-1}(t)$ fixées.
On cherche $\mathbf{E}^{p,k}(\underline{x}), \Xi^k(\underline{x})$ et $\underline{Z}^k(\underline{x})$ qui minimisent $e_{RdC}^2(\Delta \check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$.
 - **Normalisation** des fonctions spatiales $\mathbf{E}^{p,k}(\underline{x}), \Xi^k(\underline{x})$ et $\underline{Z}^k(\underline{x})$.
 - **Problème temporel :**
Les fonctions spatiales $\mathbf{E}^{p,k}(\underline{x}), \Xi^k(\underline{x})$ et $\underline{Z}^k(\underline{x})$ sont fixées.
On cherche $\alpha^k(t), \beta^k(t)$ qui minimisent $e_{RdC}^2(\Delta \check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$.
-

■ **Remarque 3.3** En pratique l'algorithme 5 converge rapidement. On verra dans les exemples que k_{max} peut être pris très petit.

3.3.5 Approximation d'ordre m

La technique proposée est similaire à l'algorithme 3 et consiste à construire les paires de fonctions les unes après les autres. Pour calculer la paire $m+1$, il suffit d'ajouter au second membre $\bar{\Delta}$ et $\bar{\delta}$ les m triplets connus $(\alpha_i, \mathbf{E}_i^p, \underline{W}_i)_{i=1..m}$. On pourra juger

de la qualité de l'approximation d'ordre m avec un indicateur naturellement basé sur l'erreur en relation de comportement $e_{RdC}^2(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$.

$$\xi_{RdC}^2(\Delta\check{\mathbf{s}}) = \frac{e_{RdC}^2(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})}{e_{RdC}^2(\bar{\mathbf{s}})} \quad (5.49)$$

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons étudié la décomposition orthogonale aux valeurs propres, ainsi que l'approximation radiale sur l'espace-temps. Seules les méthodes de construction de la décomposition ont été présentées, les méthodes de réduction de modèle qui leur sont associées faisant l'objet du chapitre 7. Nous avons montré que dans le cas de l'approximation d'une fonction connue discrète, ces méthodes sont similaires. Nous avons ensuite rappelé comment les auteurs de [Nouy et Ladevèze, 2004] utilisaient cette approximation pour la résolution des problèmes micro de la stratégie multiéchelle. Enfin nous avons proposé une nouvelle approche, plus physique, dédiée aux modèles de matériaux à variables internes. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les différents problèmes à résoudre pour la mettre en œuvre. Nous pourrions également constater qu'elle conduit à une réduction du nombre de fonctions nécessaires pour obtenir une qualité donnée de l'approximation.

Mise en œuvre de la nouvelle technique d'approximation radiale

Dans ce chapitre, nous présentons les aspects techniques liés à la mise en œuvre de la nouvelle formulation de l'approximation radiale sur l'espace-temps. Les performances de la méthode seront illustrées sur un exemple tridimensionnel simple.

Sommaire

1	Exemple de référence	110
2	Approximation d'ordre 1	111
2.1	Problème spatial	111
2.2	Problème temporel	116
2.3	Exemple	119
3	Approximation d'ordre m	119
4	Mise à jour des fonctions temporelles	121
4.1	Problème temporel sur toutes les fonctions	122
4.2	Une technique alternative de résolution des problèmes temporels .	124
4.3	Résolution d'équations différentielles avec conditions finales	124
4.4	Application à la réutilisation des fonctions spatiales	129

Dans le chapitre précédent (Chapitre 5), nous avons présenté une nouvelle façon d'utiliser l'approximation radiale pour les problèmes micro de la stratégie, dans le cas des modèles de matériaux à variables internes. Dans ce chapitre, les aspects techniques et numériques liés à la mise en œuvre de cette nouvelle approximation sont développés. L'exposé sera restreint au cas de la viscoélasticité, sans variable interne additionnelle. Les propriétés de la méthode seront illustrées sur un même cas test de référence proposé au début du chapitre.

Après la présentation de l'exemple, le chapitre se compose de trois parties. La première détaille les problèmes à résoudre pour le calcul d'une approximation d'ordre 1. La deuxième partie présente la technique de construction d'une approximation d'ordre supérieur. Enfin, la dernière partie propose quelques exemples de réutilisation d'une approximation calculée pour un premier problème, à la résolution d'autres problèmes similaires.

1 Exemple de référence

Tout au long de ce chapitre les propriétés et les performances de la méthode proposée seront illustrées sur un problème test. Considérons le quart de cylindre hétérogène présenté sur la figure 6.1, représentant une sous-structure Ω_E . Il est constitué d'une couche intérieure de matériau de type-I et de deux couches extérieures de matériau de type-II. Ces matériaux sont viscoélastiques linéaires, de module d'Young $(E_1; E_2) = (50\text{GPa}; 250\text{GPa})$, coefficient de poisson $(\nu_1; \nu_2) = (0,3; 0,2)$, et viscosité $(\eta_1; \eta_2) = (1\text{s}; 10\text{s})$. On étudie la résolution, sur cette structure, d'un problème micro avec comme seul chargement, le multiplicateur de Lagrange \tilde{W}^M décrit sur la figure 6.1. La structure est

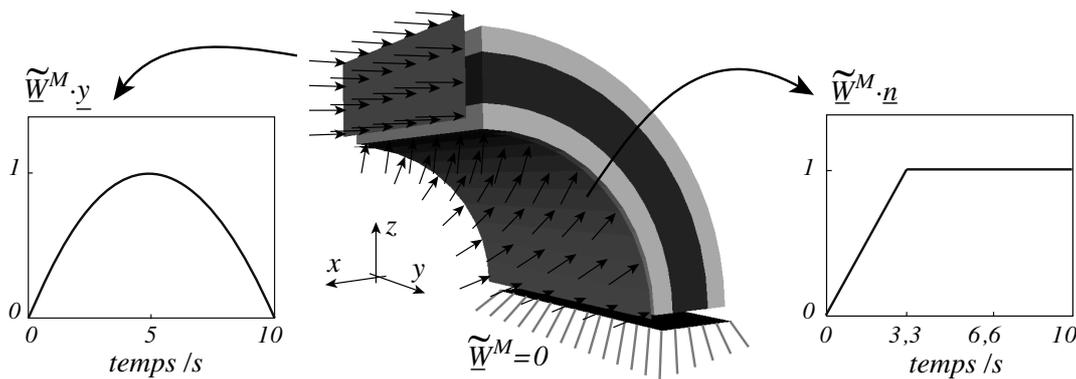


FIG. 6.1: Problème test de référence pour le chapitre

maillée avec 4144 tétraèdres à 4 noeuds, soit 3135 degrés de liberté. On choisit $\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{K}$ et $\mathbf{h} = \frac{L_M}{\eta_2 E_2}$. Pour simplifier les notations, nous ne considérons qu'un seul intervalle macro égal à l'intervalle d'étude $I_i^G = [t_i^M, t_{i+1}^M] = [0, T] = [0, 10\text{s}]$ discrétisé en 60 intervalles de temps micro. Le problème micro étudié est donc défini sur $\Omega_E \times [0, T]$. Ce problème

est linéaire mais la solution dépendant de l'histoire du chargement. Une solution de référence est calculée avec un schéma incrémental classique (*cf.* Chapitre3), ce qui nécessite la résolution de 60 systèmes linéaires associés à chacun des pas de temps.

2 Approximation d'ordre 1

Dans cette partie, une façon simple de mettre en œuvre cette technique d'approximation est proposée ; elle tient compte du fait qu'elle s'intègre dans une méthode de décomposition de domaine. Les fonctions étant calculées les unes après les autres, on présente donc, dans le cas d'une approximation d'ordre $m = 1$, les différentes étapes de l'algorithme 5 du chapitre 5. Pour mémoire cet algorithme consiste à minimiser l'erreur $e_{RdC}^2(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$ alternativement par rapport aux fonctions spatiales, d'une part, les fonctions temporelles étant fixées (*problème spatial*), et par rapport aux fonctions temporelles, d'autre part, les fonctions spatiales étant fixées (*problème temporel*).

2.1 Problème spatial

À cette étape, $\alpha(t)$ est fixé et on recherche $\mathbf{E}^p(x)$ et $\underline{Z}(x)$ qui minimisent $e_{RdC}^2(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$. Pour être tout à fait en accord avec la description des inconnues précédemment introduite, il faudrait construire dans l'ordre les fonctions suivantes :

$$\Delta\check{\varepsilon}_p(x, t) = \alpha(t)\mathbf{E}^p(x) \quad (6.1)$$

$$(\Delta\check{\varepsilon}(\underline{u}), \Delta\check{W})(x, t) = \alpha(t)(\mathbf{E}, \underline{Z})(x) \quad (6.2)$$

dont on déduit :

$$(\Delta\check{\sigma}, \Delta\check{F})(x) = \alpha(t) (\mathbf{K}\mathbf{E} - \mathbf{E}^p, \mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \cdot \underline{n}|_{\Gamma})(x) \quad (6.3)$$

Cependant, la construction de la solution dans cet ordre conduit à un problème éléments finis complexe de taille deux fois plus grande qu'un problème éléments finis standard. Une solution plus naturelle consiste à calculer les inconnues dans un ordre différent. Pour ce faire, on introduit des inconnues intermédiaires cinématiques :

$$\Delta\check{\varepsilon}(\underline{u})(x, t) = \alpha(t)\mathbf{E}(x) \quad , \quad \Delta\check{W}(x, t) = \alpha(t)\underline{Z}(x) \quad (6.4)$$

et statiques

$$\Delta\check{\sigma}(x, t) = \alpha(t)\mathbf{C} \quad , \quad \Delta\check{F}(x, t) = \alpha(t)\underline{G}(x) \quad (6.5)$$

Ensuite, par post-traitement, on en déduit la déformation anélastique :

$$\Delta\check{\varepsilon}_p(x, t) = \alpha(t)\mathbf{E}^p(x) \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}^p = \mathbf{E} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} \quad (6.6)$$

Il faut ensuite normer les fonctions spatiales $(\mathbf{E}_p, \underline{Z})$ et éventuellement $(\mathbf{E}, \mathbf{C}, \underline{G})$ en les divisant par $\sqrt{\|\mathbf{E}^p\|_{\Omega}^2 + \|\underline{Z}\|_{\Gamma}^2}$. En effet, \mathbf{E}_p et \underline{Z} sont les fonctions minimales desquelles

toutes les autres peuvent être déduites, les inconnues intermédiaires $(\mathbf{E}, \underline{Z})$ et $(\mathbf{C}, \underline{G})$ pouvant ne pas être conservées.

□ **Problème 6.1** Le problème spatial consiste donc, connaissant α , à trouver $((\mathbf{E}, \underline{Z}), (\mathbf{C}, \underline{G}))$ qui minimisent sur $\mathcal{E}_E^* \times \mathcal{F}_E^*$ l' e_{RdC}^2 suivante :

$$e_{RdC}^2(\Delta\check{s} - \bar{s}) = \|\mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}\mathbf{C} + \mathbf{H}\alpha\mathbf{C} - \dot{\alpha}\mathbf{E} - \bar{\Delta}\|_{\Omega}^2 + \|\alpha\mathbf{h}\underline{G} + \dot{\alpha}\underline{Z} - \bar{\delta}\|_{\Gamma}^2$$

■ **Remarque 2.1** Par abus de notation, dans ce chapitre \mathcal{E}_E et \mathcal{F}_E définiront la restriction des mêmes espaces (définis dans le chapitre 2) aux fonctions ne dépendant plus du temps. \mathcal{E}_E^* et \mathcal{F}_E^* étant leurs espaces homogènes associés.

2.1.1 Stationnarité de l'erreur par rapport aux fonctions spatiales

La stationnarité de l'erreur par rapport aux fonctions spatiales $(\mathbf{E}, \underline{Z})$ et $(\mathbf{C}, \underline{G})$ s'écrit de la manière suivante :

□ **Problème 6.2** Trouver $(\mathbf{E}, \underline{Z}) \in \mathcal{E}_E^*$ et $(\mathbf{C}, \underline{G}) \in \mathcal{F}_E^*$ tels que, $\forall (\mathbf{E}^*, \underline{Z}^*) \in \mathcal{E}_E^*$ et $\forall (\mathbf{C}^*, \underline{G}^*) \in \mathcal{F}_E^*$,

$$\begin{cases} \int_{\Omega_E} \mathbf{C}^* : (\mathbf{A}_{CC}\mathbf{C} - \mathbf{A}_{CE}\mathbf{E} + \bar{\Delta}_C) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{G}^* (\mathbf{a}_{GG}\underline{G} + \mathbf{a}_{GZ}\underline{Z} - \bar{\delta}_G) d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega_E} \mathbf{E}^* : (\mathbf{A}_{EE}\mathbf{E} - \mathbf{A}_{EC}\mathbf{C} - \bar{\Delta}_E) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{Z}^* (\mathbf{a}_{ZZ}\underline{Z} + \mathbf{a}_{ZG}\underline{G} - \bar{\delta}_Z) d\Gamma = 0 \end{cases}$$

avec les notations suivantes :

$$\mathbf{A}_{CC} = (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{H}\dot{\alpha}, \alpha)_{[0,T]} + (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}, \alpha)_{[0,T]} + (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}\alpha, \alpha)_{[0,T]}$$

$$\mathbf{A}_{CE} = (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\mathbf{H}\mathbf{M}\dot{\alpha}, \alpha)_{[0,T]}$$

$$\mathbf{A}_{EC} = (\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\mathbf{M}\mathbf{H}\alpha, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

$$\mathbf{A}_{EE} = (\mathbf{M}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

$$\mathbf{a}_{GG} = (\mathbf{h}\mathbf{m}\mathbf{h}\alpha, \alpha)_{[0,T]}$$

$$\bar{\Delta}_C = -(\mathbf{H}\mathbf{M}\bar{\Delta}, \alpha)_{[0,T]} - (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\bar{\Delta}, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

où

$$\mathbf{a}_{GZ} = (\mathbf{h}\mathbf{m}\dot{\alpha}, \alpha)_{[0,T]}$$

$$\bar{\Delta}_E = -(\mathbf{M}\bar{\Delta}, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

$$\mathbf{a}_{ZG} = (\mathbf{m}\mathbf{h}\alpha, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

$$\bar{\delta}_G = (\mathbf{h}\mathbf{m}\bar{\delta}, \alpha)_{[0,T]}$$

$$\mathbf{a}_{ZZ} = (\mathbf{m}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

$$\bar{\delta}_Z = (\mathbf{m}\bar{\delta}, \dot{\alpha})_{[0,T]}$$

l'on note $(a, b)_{[0,T]} = \int_{[0,T]} ab dt$.

Le problème ainsi obtenu peut-être vu comme l'association de deux problèmes couplés : un problème en contraintes (problème statique) et un problème en déplacements (cinématique). Une première façon de résoudre ce problème consiste à assembler le problème global et à le résoudre de manière directe. Cette résolution conduira à l'inversion d'un système deux fois plus grand que celui d'un problème éléments finis

standard ce qui n'est pas envisageable dans le contexte d'une stratégie de décomposition de domaine.

Pour réduire le coût de cette étape, nous proposons une approche itérative pour résoudre ce problème couplé par la technique de type point fixe suivante :

Algorithme 6 : Algorithme itératif de résolution du problème spatial

- **Initialisation** de $(\mathbf{E}, \underline{Z})$ (0 par exemple)
 - pour** $p = 1, \dots, p_{max}$ **faire**
 - **Problème statique :**
 $(\mathbf{E}, \underline{Z})$ étant fixé, on cherche $(\mathbf{C}, \underline{G})$ minimisant e_{RdC}^2
 - **Problème cinématique :**
 $(\mathbf{C}, \underline{G})$ étant fixé, on cherche $(\mathbf{E}, \underline{Z})$ minimisant e_{RdC}^2
-

■ **Remarque 2.2** Rappelons qu'à cette étape, la fonction temporelle est fixée. Comme on pourra le voir par la suite, l'algorithme 6 conduit à la résolution d'un nombre limité de problèmes éléments finis en déplacement classiques.

2.1.2 Problème statique

Le problème formulé en contraintes doit d'abord être dualisé afin que l'on puisse le résoudre par une méthode éléments finis standard.

■ **Dualisation du problème en contraintes :** Pour ce faire, la contrainte d'admissibilité $(\mathbf{C}^*, \underline{G}^*) \in \mathcal{F}_E^*$ est assurée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\underline{Z}}) \in \mathcal{E}_E^*$, le problème peut donc être reformulé de la manière suivante : trouver $(\mathbf{C}, \underline{G}) \in \mathcal{F}_E^*$ et $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\underline{Z}}) \in \mathcal{E}_E^*$ tels que $\forall (\mathbf{C}^*, \underline{G}^*) :$

$$\int_{\Omega_E} \mathbf{C}^* : (\mathbf{A}_{CC}\mathbf{C} - \mathbf{A}_{CE}\mathbf{E} + \bar{\Delta}_C) + \int_{\partial\Omega_E} \underline{G}^* (\mathbf{a}_{GG}\underline{G} + \mathbf{a}_{GZ}\underline{Z} - \bar{\delta}_G) - \int_{\Omega_E} \mathbf{C}^* : \tilde{\mathbf{E}} + \int_{\partial\Omega_E} \underline{G}^* \tilde{\underline{Z}} = 0 \quad (6.7)$$

et

$$\forall (\tilde{\mathbf{E}}^*, \tilde{\underline{Z}}^*) \in \mathcal{E}_E^* \quad \int_{\Omega_E} \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{E}}^* d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{G} \tilde{\underline{Z}}^* d\Gamma \quad (6.8)$$

Or, $(\mathbf{C}^*, \underline{G}^*)$ étant désormais quelconques, on peut écrire la relation (6.7) en tout point :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_{CC}^{-1} (\mathbf{A}_{CE}\mathbf{E} - \bar{\Delta}_C + \tilde{\mathbf{E}}) \quad (6.9)$$

$$\underline{G} = \mathbf{a}_{GG}^{-1} (\bar{\delta}_G - \mathbf{a}_{GZ}\underline{Z} - \tilde{\underline{Z}}) \quad (6.10)$$

Ces relations sont injectées dans l'équation d'admissibilité (6.8) du multiplicateur $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{Z}})$: $\forall (\tilde{\mathbf{E}}^*, \tilde{\mathbf{Z}}^*) \in \mathcal{E}_E^*$,

$$\int_{\Omega_E} \tilde{\mathbf{E}}^* : \mathbf{A}_{CC}^{-1} (\mathbf{A}_{CE} \mathbf{E} - \bar{\Delta}_C + \tilde{\mathbf{E}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{a}_{GG}^{-1} (\bar{\delta}_G - \mathbf{a}_{GZ} \mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}) d\Gamma \quad (6.11)$$

Après résolution, (\mathbf{C}, \mathbf{G}) sont déduits des équations locales (6.9) et (6.10).

■ Exemple d'un matériau viscoélastique linéaire.

Dans le cas viscoélastique linéaire, la relation de comportement est telle que $\mathbf{B} = \frac{1}{\eta} \mathbf{K}^{-1}$. On choisit donc le paramètre de direction de recherche suivant $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ puisque \mathbf{B} est linéaire. Pour le choix de la norme, on choisit naturellement $\mathbf{M} = (1 - \frac{t}{T}) \mathbf{H}^{-1}$ et $\mathbf{m} = (1 - \frac{t}{T}) \mathbf{h}^{-1}$. Avec un tel choix de \mathbf{M} et \mathbf{m} , certains termes de couplage traduisant l'admissibilité de (\mathbf{E}, \mathbf{Z}) s'annulent dans l'équation (6.11). On obtient ainsi :

□ **Problème 6.3** Trouver $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{Z}}) \in \mathcal{E}_E^*$ tel que $\forall (\tilde{\mathbf{E}}^*, \tilde{\mathbf{Z}}^*) \in \mathcal{E}_E^*$,

$$\int_{\Omega_E} \tilde{\mathbf{E}}^* : \mathbf{K} \tilde{\mathbf{E}} \alpha_{CC} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{h}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \alpha_{GG} d\Gamma = \int_{\Omega_E} \tilde{\mathbf{E}}^* : \mathbf{K} (\bar{\Delta}_C - \mathbf{E} \alpha_{CE}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \tilde{\mathbf{Z}}^* \mathbf{h}^{-1} \bar{\delta}_G d\Gamma \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \alpha_{CC} &= \eta \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \dot{\alpha} \dot{\alpha} dt + 2 \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \dot{\alpha} \alpha dt + \frac{1}{\eta} \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \alpha \alpha dt \\ \alpha_{CE} &= \eta \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \dot{\alpha} \dot{\alpha} dt & \alpha_{GG} &= \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \alpha \alpha dt \\ \bar{\Delta}_C &= -\eta \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \bar{\Delta} \dot{\alpha} dt - \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \bar{\Delta} \alpha dt \\ \bar{\delta}_G &= \int_{[0,T]} (1 - \frac{t}{T}) \bar{\delta} \alpha dt \end{aligned}$$

Ce problème éléments finis en déplacement classique ne dépend plus du temps. Il a la même forme qu'un problème de statique avec des conditions aux limites de type Robin et une distribution d'effort volumique.

2.1.3 Problème cinématique

Ce problème étant déjà un problème en déplacement, sa résolution ne pose pas de difficulté particulière.

■ Exemple d'un matériau viscoélastique linéaire.

Avec le même choix pour les opérateurs \mathbf{M} , \mathbf{H} , \mathbf{m} et \mathbf{h} que dans le paragraphe précédent,

et en remarquant également que certains termes de couplage traduisant l'admissibilité cette fois-ci de $(\mathbf{C}, \underline{G})$ s'annulent dans la deuxième équation du problème 6.2. Le problème cinématique est le suivant :

□ **Problème 6.4** Trouver $(\mathbf{E}, \underline{Z}) \in \mathcal{E}_E^*$ tel que $\forall (\mathbf{E}^*, \underline{Z}^*) \in \mathcal{E}_E^*$,

$$\int_{\Omega_E} \mathbf{E}^* : \mathbf{K} \mathbf{E} \alpha_{EE} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{Z}^* \mathbf{h}^{-1} \underline{Z} \alpha_{ZZ} d\Gamma = \int_{\Omega_E} \mathbf{E}^* : (\bar{\Delta}_E - \mathbf{C} \alpha_{EC}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{Z}^* \bar{\delta}_Z d\Gamma \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \alpha_{EE} &= \eta \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \dot{\alpha} \dot{\alpha} dt & \bar{\Delta}_E &= -\eta \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \bar{\Delta} \dot{\alpha} dt \\ \alpha_{EC} &= \eta \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \dot{\alpha} \dot{\alpha} dt & \bar{\delta}_Z &= \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \bar{\delta} \dot{\alpha} dt \\ \alpha_{ZZ} &= \int_{[0,T]} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \alpha \alpha dt \end{aligned}$$

2.1.4 Exemple

On étudie la convergence de la résolution itérative du problème spatial couplé lié à la construction de la première fonction spatiale du problème test. Pour juger de la convergence de l'algorithme, on se base sur la résolution globale du système couplé prise comme référence, pour se donner une mesure *exacte* de l'erreur.

$$e_{exact} = \frac{\|\mathbf{E}_n^p - \mathbf{E}_{ex}^p\|}{\|\mathbf{E}_{ex}^p\|} \quad (6.14)$$

La figure 6.2 montre que le point fixe converge très vite. En effet, avec seulement 4

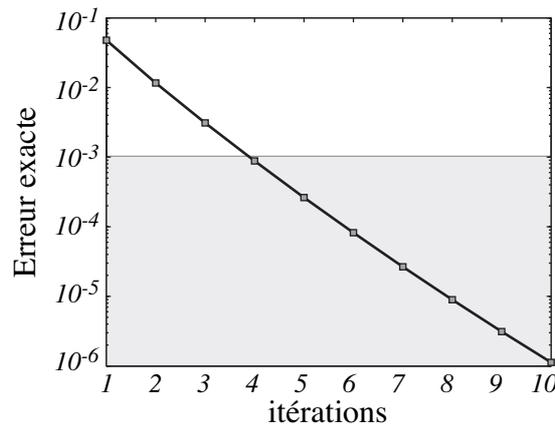


FIG. 6.2: Convergence de l'algorithme

itérations, l'erreur commise avec l'algorithme itératif est inférieure à 0.1% par rapport

à la solution de référence. En terme de coût de calcul, si n_{ddl} désigne le nombre d'inconnues d'un problème classique (3 fois le nombre de noeuds en 3D), il faut comparer l'inversion d'un système non symétrique de taille $2n_{ddl}$, pour la résolution couplée, à celui de plusieurs systèmes symétriques de taille n_{ddl} pour la résolution itérative. Le tableau 6.1 présente le coût d'inversion de chacun de ces systèmes dans le cas de notre problème test :

Résolution d'un problème découplé (taille n_{ddl})	0,3084s
Résolution du problème global (taille $2n_{ddl}$)	2,527s
Ratio	8.19

TAB. 6.1: temps d'inversion des systèmes liés à la résolution du problème spatial

Sur cet exemple, le coût de l'inversion du système global couplé est plus de 8 fois plus important que le coût de l'inversion de l'un des systèmes découplés de la résolution itérative. Ce qui fait que l'on peut faire 4 itérations de point fixe pour être équivalent à la résolution assemblée.

■ **Remarque 2.3** *Il faut noter que cette technique devient de plus en plus intéressante lorsque le nombre de degrés de liberté augmente. De plus, dans ce travail de thèse, l'approximation radiale sur l'espace-temps est employée au sein d'une méthode de décomposition de domaine. En effet, un objectif raisonnable est de résoudre éventuellement plusieurs problèmes par sous-structure, mais dont la taille est au plus celle d'un problème éléments finis en déplacement classique. La résolution globale couplée n'est donc pas du tout adaptée puisqu'elle augmente la taille des problèmes par sous-structure. La méthode itérative proposée ne présente pas ce problème et prend tout son sens dans ce cadre.*

2.2 Problème temporel

Le problème temporel est issu de la minimisation de l'erreur par rapport à la fonction temporelle α :

□ **Problème 6.5** *Connaissant $(\mathbf{E}_p, \underline{Z})$, le problème temporel consiste à trouver α qui minimise sur $\mathbf{Z}_r^{[0,T]}$ l' e_{RdC}^2 suivante :*

$$e_{RdC}^2(\Delta\check{s} - \bar{s}) = \|\mathbf{H}\alpha\mathbf{C} - \dot{\alpha}\mathbf{E}_p - \bar{\Delta}\|_{\Omega}^2 + \|\alpha\mathbf{h}\underline{G} + \dot{\alpha}\underline{Z} - \bar{\delta}\|_{\Gamma}^2$$

■ **Remarque 2.4** *Dans la suite, les expressions des problèmes à résoudre dépendront également des quantités intermédiaires \mathbf{C} et \underline{G} . On aurait pu souhaiter les écrire uniquement en fonction des variables minimales que sont \mathbf{E}_p et \underline{Z} , mais ceci alourdirait inutilement les expressions. Rappelons simplement que les variables intermédiaires \mathbf{C} et \underline{G} sont déduites des variables minimales \mathbf{E}_p et \underline{Z} par la résolution d'un problème annexe. En pratique, on pourra les conserver tant que les opérateurs \mathbf{H} et \mathbf{h} restent les mêmes. C'est ce qui est fait dans le code.*

2.2.1 Stationnarité de l'erreur par rapport à la fonction temporelle

La stationnarité de l'erreur en relation de comportement par rapport à la fonction temporelle α s'écrit :

□ **Problème 6.6** Trouver $\alpha \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]}$ tels que, $\forall \alpha^* \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]}$,

$$\int_{[0,T]} \dot{\alpha}^* \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\mathbf{a}_{11} \dot{\alpha} + \mathbf{a}_{10} \alpha - \bar{d}_1) dt + \int_{[0,T]} \alpha^* \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\mathbf{a}_{01} \dot{\alpha} + \mathbf{a}_{00} \alpha - \bar{d}_0) dt = 0 \quad (6.15)$$

avec les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11} &= \int_{\Omega_E} \mathbf{E}_p : \mathbf{M} \mathbf{E}_p d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\underline{Z}} \mathbf{m} \underline{\underline{Z}} d\Gamma \\ \mathbf{a}_{10} &= - \int_{\Omega_E} \mathbf{E}_p : \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\underline{Z}} \mathbf{m} \mathbf{h} \underline{\underline{G}} d\Gamma \\ \mathbf{a}_{01} &= - \int_{\Omega_E} \mathbf{C} : \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{E}_p d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\underline{G}} \mathbf{h} \mathbf{m} \underline{\underline{Z}} d\Gamma \\ \mathbf{a}_{00} &= \int_{\Omega_E} \mathbf{C} : \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\underline{G}} \mathbf{h} \mathbf{m} \mathbf{h} \underline{\underline{G}} d\Gamma \\ \bar{d}_1 &= - \int_{\Omega_E} \mathbf{E}_p : \mathbf{M} \bar{\Delta} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\underline{Z}} \mathbf{m} \bar{\delta} d\Gamma \\ \bar{d}_0 &= \int_{\Omega_E} \mathbf{C} : \mathbf{H} \mathbf{M} \bar{\Delta} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\underline{G}} \mathbf{h} \mathbf{m} \bar{\delta} d\Gamma \end{aligned}$$

Ce problème de minimisation fait apparaître des produits de dérivées, ce qui couple tous les intervalles de temps et en fait un problème global sur l'intervalle d'étude.

2.2.2 Méthode globale de résolution

On présente ici une façon de résoudre ce problème global sur l'intervalle d'étude. Pour cela, il est nécessaire de définir l'intégrale du produit de dérivées au sens de Galerkin discontinu. En effet, on cherche à calculer une intégrale du type :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} \dot{b} dt \quad (6.16)$$

On choisit de représenter la dérivée \dot{a} d'une fonction a de $\mathbf{Z}_r^{[0,T]}$ par une fonction \check{a} appartenant elle aussi à $\mathbf{Z}_r^{[0,T]}$. Elle est définie comme suit :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} v dt = \int_{[0,T]} \check{a} v dt \quad , \quad \forall v \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]} \quad (6.17)$$

Il est alors possible de définir un produit de dérivées par l'intégrale suivante :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} \dot{b} dt = \int_{[0,T]} \check{a} \check{b} dt \quad (6.18)$$

La résolution dépend donc du schéma temporel. Par exemple, pour Galerkin Discontinu d'ordre 0, les fonctions sont constantes par morceau, donc l'intégrale de la dérivée d'une fonction $a \in \mathbf{Z}_0^{[0,T]}$ s'écrit :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} v dt = \sum_{i=1}^N v(t_i^+) (a(t_i^+) - a(t_i^-)) \quad \forall v \in \mathbf{Z}_0^{[0,T]} \quad (6.19)$$

Il faut trouver une fonction \check{a} qui soit telle que $\forall v \in \mathbf{Z}_0^{[0,T]}$:

$$\int_{[0,T]} \dot{a} v dt = \int_{[0,T]} \check{a} v dt \quad (6.20)$$

$$\sum_{i=1}^N v(t_i^+) (a(t_i^+) - a(t_i^-)) = \sum_{i=1}^N \Delta t_i v(t_i^+) \check{a}(t_i^+) \quad (6.21)$$

avec $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Cela donne donc :

$$\check{a}(t_i^+) = \frac{a(t_i^+) - a(t_i^-)}{\Delta t_i} \quad (6.22)$$

Comme la fonction \check{a} appartient à $\mathbf{Z}_r^{[0,T]}$, sur chaque intervalle $]t_{i-1}, t_i[$, la valeur de \check{a} est constante et vaut $\check{a}(t_i^+)$. Cette écriture permet de donner un sens à la notation (6.16). Dans le paragraphe suivant, le système à résoudre pour déterminer une solution au problème temporel est présenté dans ce cas particulier.

■ Exemple de résolution du problème temporel avec un schéma de type Galerkin discontinu d'ordre 0.

Sur chaque intervalle de temps i , le système s'écrit donc :

$$\mathbf{q}_i^{*T} \mathbf{T}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^{*T} \mathbf{b}_i \quad (6.23)$$

avec $\mathbf{q}_i^T = [\alpha_{i-1} \quad \alpha_i]$, $\mathbf{b}_i^T = \left[-\frac{\bar{d}_1}{dt} \quad \left(\frac{\bar{d}_1}{dt} + \bar{d}_0 \right) \right]$ et la matrice élémentaire (où d'intervalle) d'intégration :

$$\mathbf{T}_i = \left(1 - \frac{t_i}{T}\right) \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}_{11}}{dt^2} & \left(-\frac{\mathbf{a}_{10}}{dt} - \frac{\mathbf{a}_{11}}{dt^2}\right) \\ \left(-\frac{\mathbf{a}_{01}}{dt} - \frac{\mathbf{a}_{11}}{dt^2}\right) & \left(\frac{\mathbf{a}_{11}}{dt^2} + \frac{\mathbf{a}_{10}}{dt} + \frac{\mathbf{a}_{01}}{dt} + \mathbf{a}_{00}\right) \end{bmatrix}$$

Enfin en assemblant les matrices liées à chaque intervalle de temps, on obtient un système global $\mathbf{T} \mathbf{q} = \mathbf{b}$ de taille le nombre de pas de temps N . Ce système est symétrique (si \mathbf{H} l'est aussi) et tridiagonal par bloc. Chaque bloc correspond à l'ensemble des inconnues d'un intervalle (1 pour Galerkin Discontinu d'ordre 0) sa résolution n'est donc pas trop coûteuse dans ce cas.

2.3 Exemple

On étudie la construction par l'algorithme itératif de l'approximation d'ordre 1 du problème test. La convergence de cet algorithme est illustrée par l'évolution de l'indicateur de convergence suivant, il est basé sur la stagnation du quotient de Rayleigh :

$$\xi_{\mathcal{R}} = \frac{|\mathcal{R}(\alpha^{k+1}) - \mathcal{R}(\alpha^k)|}{|\mathcal{R}(\alpha^{k+1})|}$$

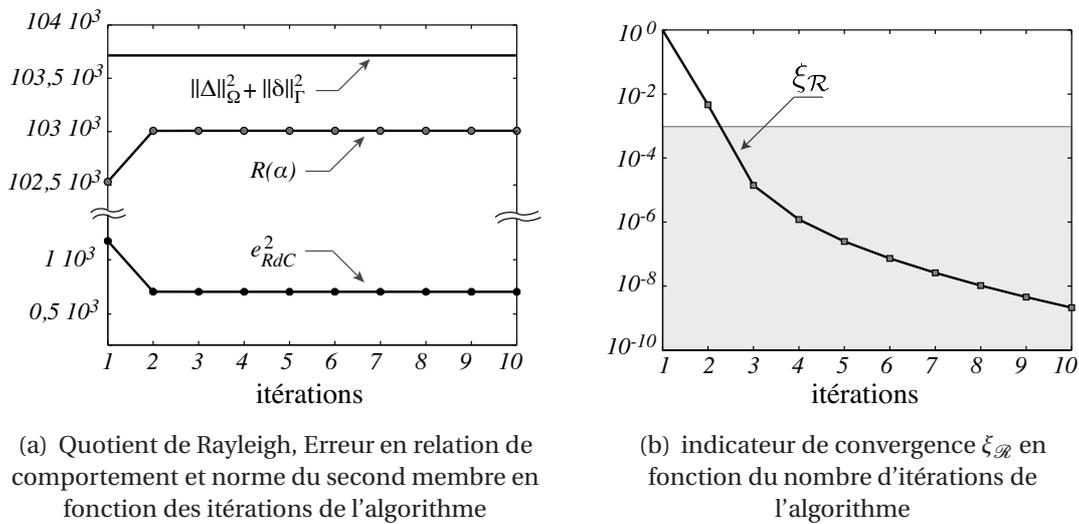


FIG. 6.3: Convergence de l'algorithme 6

Sur la figure 6.3(a), on trace l'évolution au cours des itérations du quotient de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha^k)$, l'évolution de l'erreur en relation de comportement liée à la direction de recherche e_{RdC} , ainsi que la valeur constante de la norme du second membre $\|\bar{\Delta}\|_{\Omega}^2 + \|\bar{\delta}\|_{\Gamma}^2$. On peut vérifier que la solution maximise le quotient de Rayleigh, et minimise l'erreur $e_{RdC}(\bar{\mathfrak{s}} - \bar{\mathfrak{s}})$. On peut également constater que le quotient de Rayleigh devient stationnaire très vite. Sur la figure 6.3(b) l'évolution de l'indicateur de convergence $\xi_{\mathcal{R}}$ est tracée au cours des itérations. Dans notre exemple, il est inférieur à 1% après seulement 2 itérations. En pratique, on pourra se contenter de deux ou trois itérations.

3 Approximation d'ordre m

On cherche maintenant à construire une approximation d'ordre m du problème test. On construit les paires de fonctions les unes après les autres par l'algorithme 5 du chapitre précédent (Chapitre 5). Deux techniques d'approximation sont utilisées pour résoudre ce problème. D'une part la technique *classique* présentée dans [Nouy et Ladevèze, 2004] et d'autre part la *nouvelle* approche proposée dans cette thèse. La

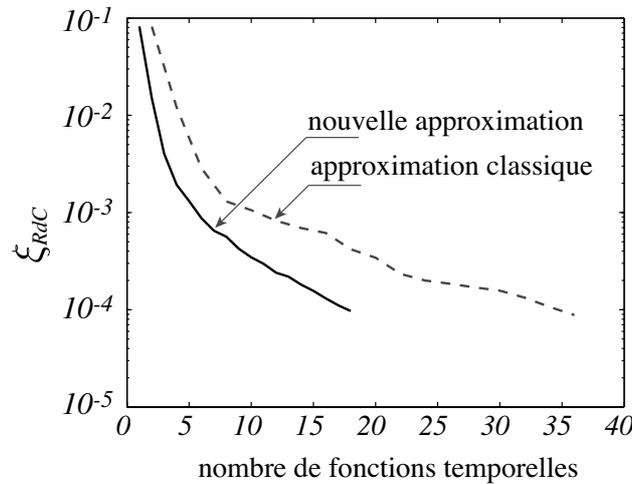


FIG. 6.4: Erreur $\xi_{RdC}(\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$ en fonction du nombre de fonctions m .

qualité de l'approximation est évaluée par la valeur de l'indicateur $\xi_{RdC}(\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$ (cf. (5.49), chapitre 5) :

On peut observer sur la figure 6.4 une convergence rapide des deux algorithmes. En effet, une solution de qualité peut être obtenue avec relativement peu de paires de fonctions. Cependant, on peut remarquer que la nouvelle approche génère pratiquement deux fois moins de fonctions temporelles à qualité d'approximation équivalente.

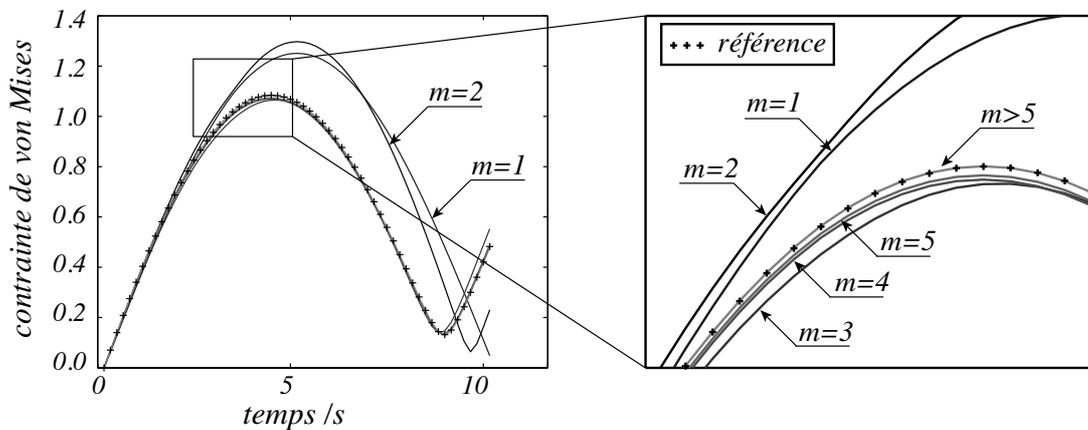


FIG. 6.5: Evolution temporelle de la contrainte de von Mises en un point de la structure pour différents ordres m d'approximation.

Afin de juger de la qualité de l'approximation sur une quantité locale, on trace sur la figure 6.5 l'évolution de la contrainte de von Mises en un point de la structure pour différents ordres m d'approximation. L'approximation d'ordre m est comparée à la solution dite *de référence* obtenue par une résolution incrémentale standard (cf. Chapitre 3). On peut donc remarquer que même avec une approximation pauvre (ordre très faible), on obtient une approximation correcte de la solution.

Enfin, la figure 6.6 présente les 6 premières fonctions spatiales et temporelles correspondant à la résolution du problème test. Toutes ces fonctions sont calculées automatiquement par l'algorithme 5 du chapitre 5. Les fonctions spatiales sont orthonormées. Pour pouvoir comparer leurs allures, sur la figure, les fonctions temporelles ont été normées (leur amplitude est de l'ordre de grandeur de ξ_{RdC} Figure 6.4).

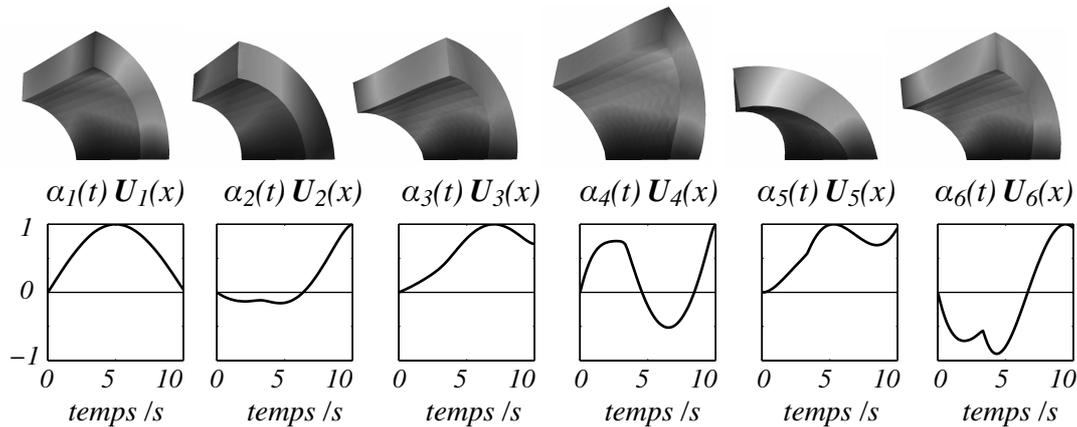


FIG. 6.6: 6 premières fonctions radiales du temps et de l'espace

■ **Remarque 3.1** Contrairement aux approches spectrales, on peut remarquer que les fonctions spatiales générées par l'algorithme sont adaptées au problème à résoudre. En particulier, on peut noter que la forme des fonctions spatiales dépend fortement du chargement. C'est ce qui explique que si peu de fonctions suffisent pour obtenir une approximation correcte. Cependant, on va le voir dans le paragraphe suivant, si le chargement est modifié raisonnablement, et que l'on se contente de mettre à jour les fonctions temporelles uniquement, on peut générer une approximation de qualité voisine.

4 Mise à jour des fonctions temporelles

Il peut arriver que l'on souhaite mettre à jour l'ensemble des fonctions temporelles associées aux fonctions spatiales déjà construites. Considérons que nous avons construit une approximation d'ordre m . Cette étape consiste alors à réactualiser l'ensemble des fonctions temporelles $\alpha_i(t)$, les fonctions spatiales étant fixées. On pourra en particulier appliquer cette technique à chaque fois qu'une nouvelle paire sera générée dans l'algorithme 5 du chapitre 5. Par exemple, on applique cette technique après la construction de chaque nouvelle fonction dans l'exemple test. La figure 6.7 présente la courbe de convergence de l'approximation avec et sans cette étape de mise à jour. Ce premier exemple montre l'intérêt que peut présenter une telle étape. Dans la partie qui suit, on présente le problème à résoudre et les difficultés numériques liées à cette mise à jour.

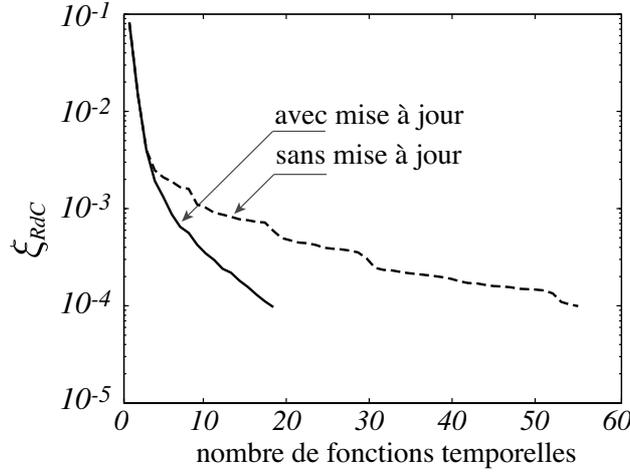


FIG. 6.7: Erreur $\xi_{RdC}(\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})$ en fonction de m avec et sans mise à jour de fonctions temporelles à chaque itération.

■ **Remarque 4.1** Pour cet exemple, on est donc dans le cas où l'algorithme ne conduit pas à la meilleure décomposition, puisque l'étape de mise à jour des fonctions temporelles améliore l'approximation. Cette méthode des puissances améliorée permet donc de se rapprocher de la meilleure décomposition (sans pour autant s'y ramener) et donc minimiser l'effet de la résolution approchée de l'algorithme 5 du chapitre 5.

■ **Remarque 4.2** Si jusqu'ici l'orthogonalisation des fonctions spatiales n'était pas nécessaire, elle est maintenant requise afin que le problème de mise à jour des fonctions temporelles soit bien défini. Des qu'une nouvelle paire de fonctions sera générée, elle sera orthogonalisée par rapport à l'ensemble des fonctions déjà construites, au sens du produit scalaire suivant :

$$\langle (\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^1, \underline{W}^1), (\mathbf{E}_{\mathbf{p}}^2, \underline{W}^2) \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\mathbf{p}}^1 : \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{E}_{\mathbf{p}}^1 d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{h}} \underline{W}^1 \underline{W}^2 d\Gamma \quad (6.24)$$

Dans lesquels $\tilde{\mathbf{H}}$ et $\tilde{\mathbf{h}}$ sont des moyennes en temps des opérateurs \mathbf{H} et \mathbf{h} .

4.1 Problème temporel sur toutes les fonctions

Dans cette partie, nous présentons le problème à résoudre pour mettre à jour les fonctions temporelles. Afin d'alléger l'écriture, on notera dans la suite $(\mathbf{E}_{\mathbf{p}}, \underline{Z}) = (\mathbf{E}_{p,i}, \underline{Z}_i)$ le vecteur des m fonctions spatiales de la base et $\underline{\alpha} = \alpha_i$ le vecteur de leurs fonctions temporelles associés, de telle sorte que :

$$\Delta \check{\mathbf{s}}_p = \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_{p,i} \alpha_i = \mathbf{E}_{\mathbf{p}}^T \underline{\alpha}$$

Cette étape de mise à jour consiste à trouver le jeu des m fonctions temporelles $\underline{\alpha}$ qui minimisent l'erreur en relation de comportement $e_{RdC}(\Delta \mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}})$, les fonctions spatiales

($\mathbb{E}_p, \underline{\mathbb{Z}}$) étant fixées. La stationnarité de l'erreur par rapport à l'ensemble des fonctions temporelles conduit à la résolution du système d'équations différentielles couplées suivantes :

□ **Problème 6.7** Trouver $\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]^m}$ tels que, $\forall \underline{\alpha}^* \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]^m}$,

$$\int_{[0,T]} \underline{\alpha}^* \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(\mathbf{A}_{11} \dot{\underline{\alpha}} + \mathbf{A}_{10} \underline{\alpha} - \overline{\mathbf{D}}_1\right) dt + \int_{[0,T]} \underline{\alpha}^* \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(\mathbf{A}_{01} \dot{\underline{\alpha}} + \mathbf{A}_{00} \underline{\alpha} - \overline{\mathbf{D}}_0\right) dt = 0 \quad (6.25)$$

avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \int_{\Omega_E} \mathbb{E}_p : \mathbf{M} \mathbb{E}_p^T d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbb{Z}} \underline{\mathbf{m}} \underline{\mathbb{Z}}^T d\Gamma \\ \mathbf{A}_{10} &= - \int_{\Omega_E} \mathbb{E}_p : \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C}^T d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbb{Z}} \underline{\mathbf{m}} \underline{\mathbf{h}} \underline{\mathbb{G}}^T d\Gamma \\ \mathbf{A}_{01} &= - \int_{\Omega_E} \mathbb{C} : \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbb{E}_p^T d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbb{G}} \underline{\mathbf{h}} \underline{\mathbf{m}} \underline{\mathbb{Z}}^T d\Gamma \\ \mathbf{A}_{00} &= \int_{\Omega_E} \mathbb{C} : \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{H} \mathbf{C}^T d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbb{G}} \underline{\mathbf{h}} \underline{\mathbf{m}} \underline{\mathbf{h}} \underline{\mathbb{G}}^T d\Gamma \\ \overline{\mathbf{D}}_1 &= - \int_{\Omega_E} \mathbb{E}_p : \mathbf{M} \overline{\Delta} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbb{Z}} \underline{\mathbf{m}} \overline{\delta} d\Gamma \\ \overline{\mathbf{D}}_0 &= \int_{\Omega_E} \mathbb{C} : \mathbf{H} \mathbf{M} \overline{\Delta} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{\mathbb{G}} \underline{\mathbf{h}} \underline{\mathbf{m}} \overline{\delta} d\Gamma \end{aligned}$$

En utilisant la technique de résolution globale sur l'intervalle de temps, décrite dans le paragraphe précédent pour les problèmes temporels, on obtient un système global $\mathbf{T}_p \mathbf{q}_p = \mathbf{b}_p$ de taille $N \times m \times p$ (ou m est le nombre de fonctions, N le nombre d'intervalles fins I_j^f et p le nombre d'inconnues par intervalle fin). Ce système est encore symétrique (si \mathbf{H} l'est aussi) et tridiagonal par bloc, chaque bloc étant de taille $m \times p$. La taille de ce système peut devenir très grande. En effet, avec par exemple $N = 120$ pas de temps et $m = 100$ fonctions, la taille du système peut dépasser 10^4 . Ce système devant être re-assemblé et re-factorisé pour chaque nouvelle fonction, le coût de cette étape peut devenir non négligeable. Cette technique basique de résolution est limitée à un faible nombre de fonctions.

4.2 Une technique alternative de résolution des problèmes temporels

Afin de limiter le coût de calcul de cette réactualisation, nous présentons dans ce paragraphe une technique adaptée à la résolution d'un tel système d'équations différentielles. Le premier point consiste à transformer le système d'équations différentielles du premier ordre faisant apparaître des produits de dérivées en un système d'équations différentielles du second ordre classique, par intégration par parties.

Trouver $\underline{\alpha} \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]^m}$ tels que, $\forall \underline{\alpha}^* \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]^m}$,

$$\left[\underline{\alpha}^* \left(\mathbf{A}_{11} \dot{\underline{\alpha}} + \mathbf{A}_{10} \underline{\alpha} - \overline{D}_1 \right) \right]_0^T - \int_{[0,T]} \underline{\alpha}^* \left(\mathbf{A}_{11} \ddot{\underline{\alpha}} + \mathbf{A}_{10} \dot{\underline{\alpha}} - \dot{\overline{D}}_1 \right) dt + \int_{[0,T]} \underline{\alpha}^* \left(\mathbf{A}_{01} \dot{\underline{\alpha}} + \mathbf{A}_{00} \underline{\alpha} - \overline{D}_0 \right) dt = 0 \quad (6.26)$$

En remarquant que $\underline{\alpha}^* \in \mathbf{Z}_r^{[0,T]^m}$ donc $\underline{\alpha}^*(0) = 0$. On en déduit le système de m équations différentielles du second ordre avec m conditions finales suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \ddot{\underline{\alpha}}(t) + (\mathbf{A}_{10} - \mathbf{A}_{01}) \dot{\underline{\alpha}}(t) - \mathbf{A}_{00} \underline{\alpha}(t) = \dot{\overline{D}}_1(t) - \overline{D}_0(t) \\ \underline{\alpha}(0) = \underline{\alpha}_0 \\ \mathbf{A}_{11} \dot{\underline{\alpha}}(T) + \mathbf{A}_{10} \underline{\alpha}(T) = \overline{D}_1(T) \end{cases} \quad (6.27)$$

Le système différentiel est de taille m mais possède des conditions initiales et finales et sa résolution est non triviale. Dans le paragraphe suivant, une méthode est proposée pour résoudre un tel système.

4.3 Résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre avec conditions finales

Tout système de taille m et d'ordre k peut être ramené à la résolution d'un système du premier ordre de taille $k \times m$ de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{K} \mathbf{q} = \mathbf{d}(t) \\ \mathbb{A}_0 \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \\ \mathbb{A}_T \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_T \end{cases} \quad (6.28)$$

Dans le cas de l'étape de mise à jour des fonctions temporelles, $k = 2$, donc le système d'équations différentielles (6.28) est de taille de $2m$ avec le vecteur inconnu suivant :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \dot{\underline{\alpha}} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

et les matrices suivantes :

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix} \quad \mathbb{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{1}_d \\ -\mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{10} - \mathbf{A}_{01} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\overline{D}}_1(t) - \overline{D}_0(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbb{A}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad \mathbf{q}_T = \overline{\mathbf{D}}_1(T)$$

Ce système est équivalent à celui du problème de mise à jour des fonctions temporelles (6.27).

4.3.1 Méthode de tirs

Les méthodes de tirs consistent à remplacer les conditions finales par des conditions initiales afin de se ramener à un problème de Cauchy. Le problème consiste alors à trouver les conditions initiales manquantes qui soient telles que la solution construite à partir d'elles vérifie les conditions finales. Dans notre cas, la fonction qui, à un jeu de conditions initiales, associe les conditions finales est affine. Le schéma de résolution est le suivant :

- On calcule une solution particulière $\mathbf{q}^p(t)$ du problème avec, par exemple, une condition initiale nulle $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ par une méthode incrémentale classique.
- On calcule la valeur de la condition finale associée.
- On choisit un jeu de m conditions initiales $(\mathbf{q}_{i,0}^h)_{1 \leq i \leq m}$ linéairement indépendantes mais vérifiant les conditions initiales connues.
- On calcule alors les m solutions du problème homogène $\mathbf{q}_i^h(t)$ avec les conditions initiales précédentes.
- On calcule les m valeurs des conditions finales $\mathbf{q}_{i,T}^h = \mathbb{A}_T \mathbf{q}_i^h(T)$ des solutions homogènes et celle de la solution particulière \mathbf{q}_T^p .
- On cherche la combinaison linéaire (c_i) des conditions finales obtenues qui égale les conditions finales souhaitées.

Les coefficients de la combinaison doivent vérifier :

$$\mathbf{q}_T^p + \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{q}_{i,T}^h = \mathbf{q}_T \quad (6.30)$$

Ce qui revient donc à inverser le système de taille m^2 suivant :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1,T}^h \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{2,T}^h \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{m,T}^h \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_T - \mathbf{q}_T^p \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

■ **Remarque 4.3** Cette méthode est également connue sous le nom de « méthode de la matrice de transition » qui tient son nom de ce dernier système reliant les conditions initiales aux conditions finales.

En pratique, il arrive que la matrice \mathbb{K} ne soit ni définie ni positive. Donc certaines solutions font apparaître des exponentielles positives qui conduisent les solutions homogènes et particulières générées à suivre des branches d'hyperboles. Comme on pourra le voir dans les exemples, le système (6.31) peut être très mal conditionné et la solution qui en résulte très erronée.

■ **Remarque 4.4** *L'instabilité de cette méthode a également été remarquée pour la résolution de problèmes quadratiques linéaires dans le cadre de l'identification [Allix et al., 2005; Feissel et Allix, 2007]. Dans leur cas, un système composé du couplage d'une équation directe et d'une équation rétrograde en temps met en échec les méthodes classiques. Une méthode basée sur l'équation de Riccati est proposée, elle permet de découpler ces deux problèmes et de résoudre chacun d'eux par un schéma incrémental classique.*

4.3.2 Une nouvelle méthode avec projection

Nous nous proposons d'utiliser une technique par projection pour résoudre ce genre de difficulté numérique. L'idée est de produire des solutions homogènes orthogonalisées par rapport aux solutions suivant les branches d'hyperboles déjà produites pour ne pas exciter plusieurs fois la même solution à exponentielle positive. On s'intéresse dans un premier temps aux m résolutions du système d'équations différentielles homogènes associées. Il s'agit d'un système du premier ordre, donc quel que soit le schéma d'intégration choisi, il est possible d'écrire une relation de récurrence (ou d'intégration) pour chaque pas de temps n , du type :

$$\mathbf{q}_n = \mathbb{Z}_{n-1}^n \mathbf{q}_{n-1} \quad (6.32)$$

Par exemple pour le schéma de Galerkin discontinu d'ordre 0, on a :

$$\mathbb{Z}_{n-1}^n = \left(\frac{\mathbb{M}}{\Delta t} + \mathbb{K} \right)^{-1} \frac{\mathbb{M}}{\Delta t}$$

Cet opérateur définit le processus d'intégration à partir de la condition initiale \mathbf{q}_0 . Plus généralement, on définit l'opérateur :

$$\mathbf{q}_n = \mathbb{Z}_m^n \mathbf{q}_m \quad \text{avec} \quad n \geq m$$

Supposons que l'on a déjà produit k solutions homogènes $\{\mathbf{q}^i\}_{1 \leq i \leq k}$, dont certaines ont « explosé » quand $t \rightarrow T$. On construit une nouvelle solution \mathbf{q} . Un critère d'amplitude maximum ξ^{max} , permettant de détecter les solutions hyperboliques est fixé de telle sorte que si, à un instant n , la norme de \mathbf{q}_n dépasse ξ^{max} , elle soit considérée comme suivant une branche d'hyperbole. Si tel est le cas, on peut écrire la projection de \mathbf{q}_n sur les solutions déjà créées $\{\mathbf{q}^i\}_{1 \leq i \leq k}$:

$$\Pi \mathbf{q}_n = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_n^i \rangle_n \mathbf{q}_n^i$$

La projection peut-être effectuée avec n'importe quel produit scalaire, on utilisera par exemple $\langle \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n \rangle_n = \mathbf{p}_n^T (\mathbb{Z}_{n-1}^n)_{sym} \mathbf{q}_n$ (si naturellement cet opérateur définit un produit scalaire). On modifie donc \mathbf{q} à l'instant n de la manière suivante :

$$\mathbf{q}_n^* = (1 - \Pi) \mathbf{q}_n$$

On peut également modifier son « histoire » ($i < n$) jusqu'à sa condition initiale :

$$\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i - \mathbb{Z}_i^k \Pi \mathbf{q}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_0^* = \mathbf{q}_0 - \mathbb{Z}_0^k \Pi \mathbf{q}_n$$

Ensuite, le processus normal d'intégration peut être poursuivi jusqu'à ce que la solution dépasse à nouveau le critère. Dans ce cas, la procédure de projection est appliquée à nouveau. Ainsi, pour la résolution de l'équation homogène, à chaque fois que l'on construit une nouvelle solution, on regarde, à chaque intervalle de temps, si elle explose. Si c'est le cas, on l'orthogonalise par rapport aux solutions qui ont explosé, à l'aide de la procédure de projection présentée plus haut. Si la solution explose quand même, on l'ajoute à l'ensemble des solutions qui explosent.

Enfin, on obtient un ensemble de solutions homogènes que l'on norme. On cherche la combinaison linéaire qui permet à la somme $\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$ de vérifier les conditions aux limites. Pour ce faire on opère de la même manière que (6.31) avec un petit système, qui cette fois est bien conditionné.

■ **Remarque 4.5** *Pour ajouter de la souplesse à la méthode, on peut également chercher l'ensemble des solutions homogènes, même celles qui ne vérifient pas les conditions initiales connues. Une fois ces solutions déterminées, il faut trouver la combinaison linéaire de ces fonctions qui soit telle que les conditions initiales et finales soient vérifiées. Le système est alors de taille $2m$ au lieu de m .*

■ **Remarque 4.6** *Dans notre cas, on pourrait également injecter directement la solution $\underline{\alpha}(t) = \underline{\alpha}_p(t) + \sum_{i=1}^m a_i \underline{\alpha}_h^i(t)$ dans l'erreur en relation de comportement initiale, et minimiser par rapport aux coefficients de la combinaison linéaire $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$. Ceci conduirait à une méthode complexe, mais sans doute plus robuste.*

■ **Remarque 4.7** *Dans le cas où \mathbb{M} et \mathbb{K} ne dépendent pas du temps et si l'on utilise une partition régulière de l'intervalle d'étude, alors $\mathbb{Z}_0^1 = \mathbb{Z}_n^{n+1} = \mathbb{Z}, \forall n$. Dans ce cas, $\mathbb{Z}_0^T = \mathbb{Z}^N$ avec N le nombre de pas de temps. Si \mathbb{Z} a des valeurs propres supérieures à 1, et si N est suffisamment grand, on risque de trouver une solution proportionnelle au vecteur propre associé, et donc de diverger. On peut faire l'analogie avec la méthode des puissances. Pour cette méthode, il est bien connu qu'il faut ré-orthogonaliser à chaque itération la solution par rapport aux vecteurs propres déjà trouvés parce qu'en pratique l'orthogonalité se perd au fil des itérations et l'on risque de « re-brancher » sur une valeur propre supérieure déjà trouvée. Dans notre cas, le même phénomène se produit. La méthode proposée ici permet de s'assurer que les solutions trouvées ne « branchent » pas toutes vers le même mode.*

4.3.3 Exemple

Étudions l'exemple de la résolution d'un système de 3 équations différentielles du second ordre avec conditions initiales et finales issues de la mise à jour des fonctions

Méthode de tir	$1,79.10^{16}$
Méthode par projection	$6,63.10^3$

TAB. 6.2: Conditionnement du système permettant d'imposer les conditions finales

temporelles du cas test dans le cas où l'on a généré $m = 3$ paires de fonctions. La résolution de ce système d'équations différentielles est menée avec les deux méthodes incrémentales présentées, la méthode de tir classique puis la méthode par projection. Sur les figures 6.8(a) et 6.8(b), les solutions obtenues sont comparées avec la solution issue de la méthode globale sur l'intervalle de temps présentée dans le paragraphe 2.2.2 prise ici comme référence.

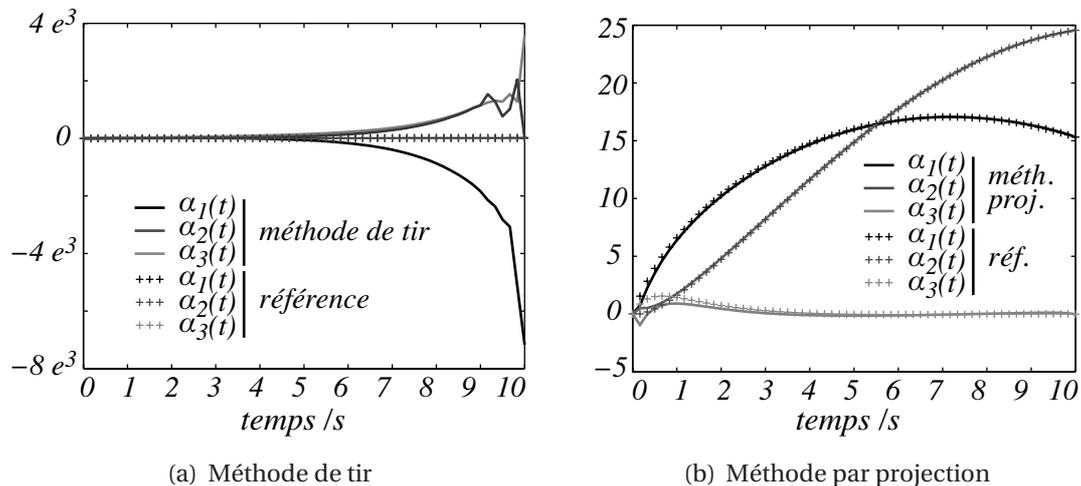


FIG. 6.8: Comparaison des méthodes de résolution d'équations différentielles avec conditions finales

On peut remarquer que la méthode de tir standard est totalement inapte à résoudre ce problème, tandis que la méthode avec projection donne une solution de très bonne qualité.

A la fin de chacune de ces deux méthodes, on cherche la combinaison linéaire des solutions homogènes obtenues qui permet à la somme de la solution particulière avec cette combinaison de solutions homogènes de vérifier les conditions aux limites. Dans le tableau 6.2, est donné le conditionnement des systèmes (6.31) correspondants. On peut constater que le conditionnement du système dans le cas de la méthode de tir est très mauvais. Ceci est dû au fait que les solutions homogènes aux instants finaux sont très proches. En revanche, dans le cas de la méthode par projection, le conditionnement de la matrice est raisonnable.

4.4 Application à la réutilisation des fonctions spatiales

Dans ce paragraphe, on réutilise la base de fonctions spatiales générées pour un premier problème, afin d'approximer la solution associée à d'autres problèmes similaires.

4.4.1 Différents cas de chargement

On réutilise les fonctions spatiales pour différents cas de chargement, de la manière suivante : pour le cas de chargement du problème de référence, on construit un ensemble de jeux de fonctions radiales afin d'obtenir une qualité telle que $\xi_{RdC} = 10^{-3}$. Avec la méthode classique il faut 13 paires de fonctions, et il en faut 6 pour la nouvelle approche. L'évolution temporelle du chargement sur la partie cylindrique (*cf. fonction de droite sur la figure 6.1*) est ensuite modifiée, elle prend successivement les allures décrites sur la figure 6.9. Pour la résolution des autres cas de chargement, on réutilise les fonctions spatiales du premier cas de chargement et on se contente donc de mettre à jour les fonctions temporelles correspondantes. Une simple mise à jour des fonc-

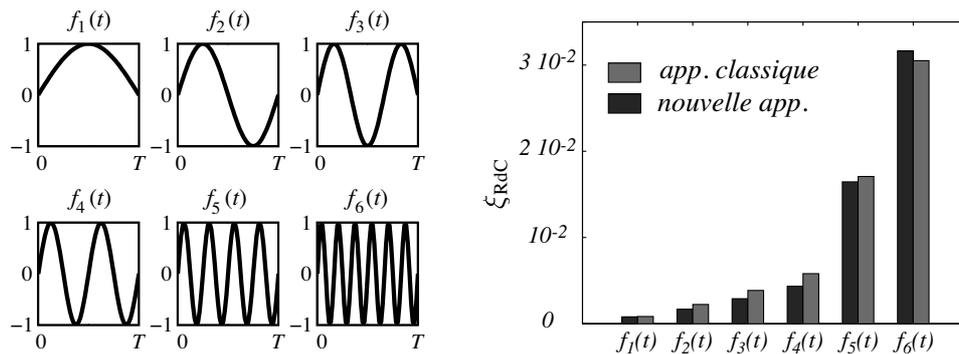


FIG. 6.9: Réutilisation des fonctions spatiales pour différents cas de chargement.

tions temporelles permet donc de générer une approximation de qualité voisine, pour différents cas de chargement. On peut également remarquer que la nouvelle méthode semble aussi efficace que la méthode classique dans le cadre de la multirésolution. Et ceci malgré le fait qu'elle nécessite plus de deux fois moins de fonctions temporelles ; l'étape de mise-à-jour travaillant sur des systèmes de taille deux fois plus petite.

■ **Remarque 4.8** Cette propriété est utilisée avantageusement pour la construction des opérateurs homogénéisés, qui nécessite la résolution d'un ensemble de problèmes micro définis sur $\Omega_E \times I_i^G$. En particulier, à une fonction de base macro spatiale donnée, on doit résoudre un ensemble de problèmes micro associés aux différentes fonctions de base macro temporelles. En pratique, on remarque que pour chaque nouvelle fonction de base macro spatiale, la construction d'un ou plusieurs jeux de fonctions radiales est nécessaire pour approximer correctement le problème micro associé à la première fonction de base macro temporelle. Pour les autres, une simple mise à jour des fonctions spatiales

suffit dans la plus grande majorité des cas. On pourra donc envisager de prendre des bases macro temporelles assez riches, sans pour autant augmenter le coût de construction des opérateurs homogénéisés.

4.4.2 Différentes données matériaux

On procède de la même manière que précédemment, mais cette fois-ci, on s'intéresse à la résolution du problème test pour différents paramètres matériaux. Les modules d'Young des deux matériaux varient de $\pm 10\%$. On résout le problème initial par l'approximation radiale, avec la même précision. On conserve les fonctions spatiales, puis on réactualise simplement les fonctions temporelles pour les nouveaux jeux de matériaux. Sur la figure 6.10, on relève la valeur de l'indicateur ξ_{RdC} obtenu après une mise à jour des fonctions temporelles pour différentes valeurs des modules d'Young. On peut remarquer que l'erreur ne dépasse pas 4%, même lorsque le module d'Young

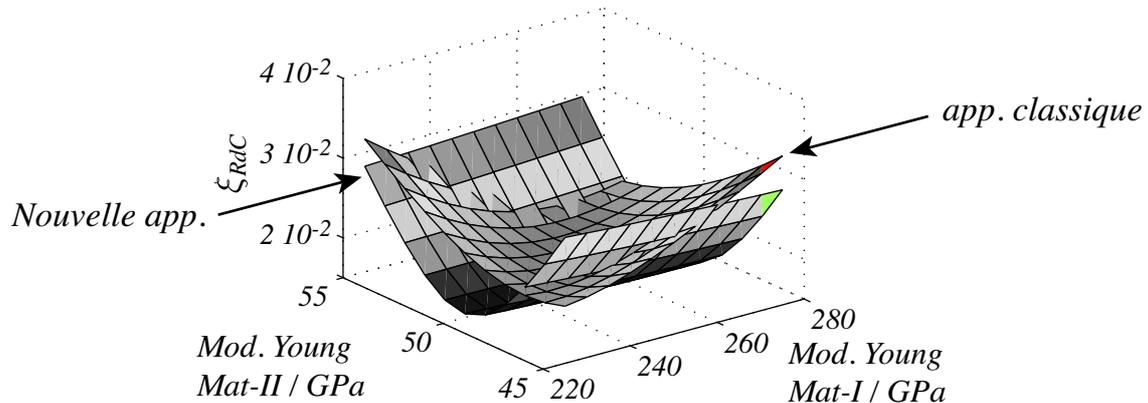


FIG. 6.10: Réutilisation des fonctions spatiales pour différents paramètres matériaux.

du matériau de type-I est perturbé de $+10\%$ et celui de type-II de -10% . La méthode semble donc robuste face à la variation raisonnable des paramètres matériaux. Là encore, la capacité de ces méthodes à la multirésolution est comparable, malgré le fait que la taille des systèmes à inverser pendant la mise à jour des fonctions temporelles de la nouvelle méthode soit deux fois plus petit que celui de l'ancienne.

■ **Remarque 4.9** On pourra noter que dans ce cas précis, la nouvelle méthode oblige à recalculer les quantités intermédiaires même si elles avaient été conservées, puisque l'opérateur de comportement a changé.

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté la mise en œuvre de la nouvelle méthode d'approximation radiale sur l'espace-temps, ainsi que l'ensemble des problèmes à résoudre, avec un exemple pour les matériaux viscoélastiques linéaires. Parmi les contri-

butions proposées, on peut noter l'introduction d'une nouvelle façon de résoudre le problème spatial. Cette méthode permet de ne pas augmenter la taille minimale des problèmes à résoudre comparativement à une méthode incrémentale standard, ce qui, dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine est indispensable. Les faiblesses des méthodes d'intégration standards pour résoudre l'étape de mise à jour des fonctions temporelles ont été étudiées. Une nouvelle méthode robuste de résolution d'équations différentielles avec conditions finales a été proposée. Enfin, on a pu constater que la nouvelle méthode d'approximation conduisait à un nombre réduit de fonctions temporelles, pour une qualité donnée d'approximation. La méthode est aussi efficace et nécessite moins de calculs, elle est donc plus robuste. Dans la dernière partie, la capacité de la méthode à réutiliser une base de fonctions générées pour un ancien problème a été mise en évidence. L'objectif du chapitre suivant (Chapitre 7), est donc de proposer une méthode adaptative qui permette de tirer parti de cette propriété.

Une stratégie de calcul adaptative

Dans le chapitre précédent (Chapitre 6), nous avons montré comment il était possible de résoudre un problème micro donné avec précision en utilisant l'approximation radiale. Dans ce septième et dernier chapitre, nous allons montrer comment on peut utiliser cette méthode de résolution réduite pour construire une stratégie de résolution adaptative au sein d'une méthode LATIN multiéchelle.

Sommaire

1	Les méthodes de multirésolution	134
1.1	Méthode LATIN pour la multirésolution	134
1.2	Méthodes d'accélération Krylov	135
1.3	Réduction de modèle basée sur la POD	135
2	Une méthode de calcul adaptative	138
2.1	Quelques remarques	139
2.2	Adaptativité et gestion de la base réduite	140
3	Exemples 3D	147

Au cours des itérations de la stratégie de calcul multiéchelle, l'étape linéaire requiert la résolution d'une série de problèmes linéaires d'évolution. Ces problèmes peuvent être similaires les uns aux autres, mais également d'une itération à l'autre, car les opérateurs et seconds membres varient peu. Les méthodes de calcul incrémentales sont assez peu performantes dans ce cadre car elles ne savent pas tirer parti de l'information générée par les résolutions précédentes. C'est pourquoi des méthodes alternatives ont été proposées.

Pour débiter ce chapitre, on étudie donc quelques méthodes dites de multirésolution qui réutilisent les résolutions précédentes pour accélérer, simplifier ou initialiser de manière plus pertinente les résolutions suivantes. Un intérêt particulier est voué aux méthodes de réduction de modèles associées à la POD qui permettent de tirer l'information à la fois la plus réduite et la plus pertinente des solutions des problèmes précédents. Les nouveaux problèmes sont résolus en projection sur les fonctions issues de calculs précédents et ont donc un coût très réduit. Cependant, on ne peut pas connaître *a priori* la quantité minimale d'informations à retenir pour obtenir un modèle pertinent pour les résolutions futures et il n'est généralement pas possible d'enrichir simplement le modèle réduit ainsi construit.

Nous présentons donc une stratégie adaptative de résolution des problèmes micro de la stratégie de calcul multiéchelle basée sur l'approximation radiale. Une base de fonctions spatiales est construite au fur et à mesure des itérations. Dans une phase préliminaire, une approximation de la solution est générée à moindre coût en réutilisant cette base de fonctions. Un indicateur basé sur l'erreur en relation de comportement est mis en place pour quantifier la qualité de cette approximation. Si la qualité n'est pas suffisante, la base de fonctions est alors enrichie. Cet indicateur permet à la stratégie de générer le minimum de calculs pour assurer la convergence de la méthode. Des exemples sont proposés pour illustrer la démarche.

1 Les méthodes de multirésolution

Dans cette partie, on s'attarde sur trois types de techniques de multirésolution : la première basée sur l'utilisation de la solution précédente comme initialisation pour un solveur LATIN ; la deuxième basée sur la réutilisation des sous-espaces de Krylov et la dernière sur la réutilisation de la décomposition POD des solutions précédemment calculées.

1.1 Méthode LATIN pour la multirésolution

Une première méthode dédiée aux problématiques de multirésolution et d'analyse paramétrique a été proposée dans [Boucard et Ladevèze, 1999; Boucard et Champaney, 2003]. Cette technique repose sur l'idée simple que la solution d'un premier problème obtenu pour une certaine valeur des paramètres (propriétés matériaux, coefficient de frottement...) peut servir de très bonne initialisation pour le calcul d'une solution as-

sociée à un jeu de paramètres proches. Ceci est rendu possible dans la méthode LATIN, puisqu'il est possible d'initialiser l'algorithme avec une solution admissible, mais ne vérifiant pas nécessairement les relations de comportement et les conditions de contact frottant. Cette méthode aussi simple soit-elle a permis d'obtenir des gains non-négligeables en temps de calcul. Cependant, seule la solution du calcul précédent est réutilisée, l'information concernant les problèmes antérieurs n'est pas mise à profit.

1.2 Méthodes d'accélération Krylov

Une famille de méthodes sachant tirer parti de l'ensemble des résolutions antérieures est celle des solveurs à mémoire (ou *learning methods*) basés sur la réutilisation des sous-espaces de Krylov. Ces méthodes reposent sur des algorithmes de Krylov (cf. [Saad, 2000]) tels que le Gradient Conjugué (CG) ou GMRES (pour *Global Minimal Residual*). La résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}x = b$ par ces algorithmes repose sur la génération d'une certaine base d'un sous-espace de Krylov associé à \mathbb{A} . Lorsque l'on dispose d'une succession de systèmes linéaires $(\mathbb{A}_i, b_i)_{1 \leq i \leq m}$ proches les uns des autres à résoudre, l'idée consiste à réutiliser les sous-espaces de Krylov des systèmes précédents pour accélérer la convergence du nouveau système. Les méthodes d'accélération [Rey et Léné, 1998; Saad, 2000; Risler et Rey, 2000; Gosselet et Rey, 2002] mettent l'information liée aux espaces de Krylov des systèmes précédents au profit de l'**initialisation**, du **préconditionneur**, et de l'**espace d'augmentation**, qui sont les trois paramètres connus pour piloter la vitesse de convergence des solveurs de Krylov. En particulier, l'approche SRKS (pour *Selective Reuse of Krylov Subspaces*) consiste à injecter un ensemble de vecteurs de Ritz liés aux systèmes précédents dans la matrice d'augmentation d'un Gradient Conjugué projeté [Chapman et Saad, 1997]. Cette méthode comprend, à la fin de la résolution de chaque système, une étape de sélection des seuls vecteurs de Ritz qui ont convergé vers les vecteurs propres de l'opérateur. En conséquence, seule l'information la plus représentative du comportement spectral de ce système est conservé pour accélérer les systèmes suivants.

■ **Remarque 1.1** *Ces techniques de réutilisation très performantes, dédiées aux problèmes indépendants du temps, ne répondent pas directement à notre problématique qui est de trouver la meilleure base réduite. Cependant ces méthodes pourraient être étendues aux problèmes d'évolution et on pourrait s'inspirer de la phase de sélection de SRKS, pour mettre au point une technique de « nettoyage » de la base de fonctions générée au cours des itérations par la technique décrite dans la section suivante.*

1.3 Réduction de modèle basée sur la POD

Les méthodes de réduction de modèle basée sur la POD sont utilisées dans les domaines de la simulation numérique et notamment en dynamique, en thermique transitoire, dans le domaine stochastique. Dans le cadre de la multirésolution, le principe est de construire la POD tronquée de la solution calculée sur l'ensemble des premiers

systèmes, de fixer l'une ou l'autre des familles de fonctions et de résoudre des problèmes similaires en projection sur cette base de fonctions.

Dans ce cadre, on distingue deux classes de méthodes : celles *a posteriori* qui nécessitent un ou plusieurs calculs complets du problème de référence avec des techniques standards. Cette phase peut être vue comme un apprentissage. Puis celles dites *a priori* dont le modèle réduit est calculé au cours de la résolution du problème, mais qui nécessitent néanmoins un calcul partiel ou approché du problème de référence avec des techniques standards.

1.3.1 Réduction de modèle *a posteriori*

Le principe de ces méthodes est simple, il s'agit de mener un ou plusieurs calculs du problème de référence avec des paramètres différents (paramètres aléatoires pour le stochastique, ou des chargements temporels différents pour les problèmes d'évolution) sur une plage de variation pré-établie. Il suffit alors de collecter l'ensemble des quantités d'intérêt (généralement tous les degrés de liberté) dans les colonnes d'une matrice A . Le calcul de la POD de A (cf. Chapitre 5) permet de construire un modèle réduit *a posteriori* en ce sens qu'il ne peut-être construit qu'après des résolutions complètes du problème. Ces techniques sont très largement utilisées dans le cadre de la multirésolution, des études paramétriques ou lorsque l'on souhaite déterminer des surfaces de réponses [Matthies et Keese, 2005], [Ghanem et Spanos, 1991]. Dans ce cas, l'information liée aux résolutions précédentes est réutilisée via la décomposition POD tronquée des solutions précédentes. Les nouvelles résolutions en projection sur cette base sont très peu coûteuses.

■ **Remarque 1.2** *Ces méthodes sont notamment utilisées dans le cadre du calcul en temps réel (par exemple dans l'ingénierie bio-médicale [Picinbono et al., 2003; Niroomandi et al., 2008]) pour lequel les méthodes éléments finis sont à proscrire à cause de leur coût prohibitif. Ces méthodes ont recours à une phase entraînement qui consiste à construire le modèle réduit, via la résolution complète du problème pour des valeurs de paramètres balayant une plage de variation. Les problèmes peuvent alors être résolus en temps réel avec le modèle réduit uniquement.*

1.3.2 Réduction de modèle *a priori*

En toute rigueur, pour être sur que le modèle soit pertinent sur toute la plage de variation des paramètres (ou sur tout le domaine temporel) et que les méthodes *a posteriori* soient robustes, il est nécessaire que l'ensemble des valeurs possibles soit parcouru pendant la phase d'entraînement. Fort de ce constat, des méthodes alternatives ont été proposées.

■ **Calcul partiel** Une première idée consiste à résoudre le problème en deux temps. La première phase (pendant les premières variations des paramètres ou les premiers

pas de temps), appelée le *cliché* (ou *snapshot*, cf. Figure 7.1(a)), consiste à résoudre

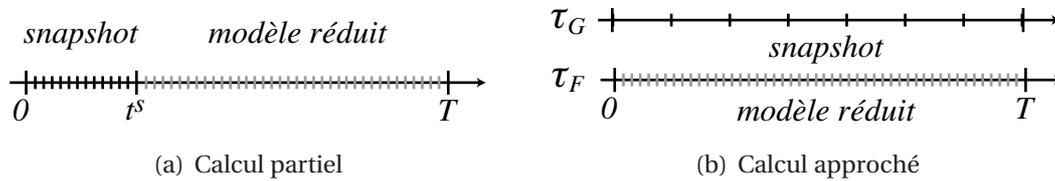


FIG. 7.1: Définition des *snapshot*

le problème avec une méthode classique, et à stocker les solutions correspondantes. La deuxième phase consiste alors à résoudre le problème grâce à un modèle réduit construit à partir de la POD du *snapshot*. De telles techniques ont été appliquées avec succès à la dynamique [Krysl et al., 2001], ou à la thermique transitoire [Bialecki et al., 2005].

■ **Calcul approché** Une alternative consiste à résoudre entièrement le problème de référence, mais de manière approchée. Par exemple, pour un problème d'évolution, le problème de référence est résolu sur une grille grossière en temps τ_G (Figure 7.1(b)). Ensuite, le modèle réduit est construit à partir de la POD du problème grossier. Le problème sur la grille fine τ_F peut alors être résolu avec un modèle réduit pertinent et adapté au problème à résoudre. Cette approche originale peut-être considérée comme une approche multiéchelle en temps non exacte.

■ **Construction itérative** D'autres stratégies [Ryckelynck, 2002; Chinesta et al., 2008] permettent de déterminer le modèle réduit au cours des itérations d'un algorithme itératif. La LATIN, qui permet de mener des résolutions sur tout l'espace-temps à chaque itération, est souvent utilisée. Pendant les premières itérations, les solutions sont calculées avec une méthode classique et stockées. Un espace de solution est généré, à partir duquel un modèle réduit est construit par POD. Chaque itération commence donc par une phase d'initialisation au cours de laquelle la solution est calculée avec le modèle réduit. Si la solution n'est pas satisfaisante, la solution est recalculée avec une méthode classique et permet d'enrichir le modèle réduit. L'APHR (pour *A Priori HyperReduction Method* [Ryckelynck, 2005]) propose, de plus, de construire le modèle réduit sur une sélection des variables décrivant l'état de la structure, afin de réduire d'avantage le temps de calcul.

Bilan

L'avantage de ces méthodes est qu'ayant déjà calculé un jeu de solutions, elle permettent de calculer de manière approchée, mais avec précision, une nouvelle solution avec un nombre d'inconnues très réduit. Elles permettent donc de tirer l'information la plus pertinente des solutions déjà connues, et de la réutiliser pour les nouveaux calculs. Elles conduisent à des diminutions colossales des coûts de calculs. Outre le

fait que ces méthodes *a posteriori* nécessitent une partie au moins du calcul global qu'on souhaite éviter en ayant recours à un modèle réduit, ces approches présentent quelques limites :

- on ne connaît pas la longueur optimale du *snapshot*, ou la quantité minimale d'informations nécessaire à la construction du modèle réduit et pertinent (le plus réduit possible permettant d'avoir une qualité suffisante) ;
- on ne connaît pas *a priori* le nombre minimale de fonctions que l'on doit garder dans la base, ou l'ordre de troncature minimal nécessaire à sa construction ;
- hormis éventuellement le cas des méthodes de construction itérative, on ne dispose pas d'une façon simple d'enrichir le modèle si les paramètres changent trop ou si les effets temporels ont de grosses variations, et que le modèle réduit perd de la pertinence.

Ces méthodes très performantes sont des méthodes spectrales dans lesquelles, on utilise la POD pour construire de manière intelligente l'une ou l'autre des bases de fonctions $\{\lambda_i(t)\}_m$ ou $\{\Lambda_i(x)\}_m$ que l'on fixe pour les calculs suivants.

2 Une méthode de calcul adaptative

Dans le chapitre précédent (Chapitre 6), on a pu remarquer que lors de la construction de l'approximation radiale, le calcul des fonctions temporelles conduisait à la résolution d'une simple équation différentielle scalaire, tandis que le calcul d'une fonction spatiale nécessitait le calcul de quelques problèmes éléments finis indépendants du temps. Il est clair que, dans l'élaboration d'une nouvelle paire de fonctions, l'étape qui est de loin la plus coûteuse correspond au calcul de la fonction spatiale. C'est pourquoi, de manière classique [Ladevèze, 1999], **les fonctions spatiales seront stockées et réutilisées.**

La résolution d'**un problème micro commencera donc systématiquement par une phase d'initialisation** appelée *étape préliminaire*, consistant à rechercher un jeu de fonctions temporelles associé à la base de fonctions spatiales déjà construites. On réalise donc cette étape dont le rôle est trouver l'ensemble des fonctions temporelles qui minimisent l'erreur en relation de comportement, les fonctions spatiales étant fixées (pour plus de détails sur cette étape voir le chapitre 6).

En général, les opérateurs et les seconds membres varient peu d'une itération à l'autre. **Cette phase d'initialisation est donc généralement suffisante** pour obtenir une bonne approximation de la solution du problème micro. Néanmoins, si cette approximation s'avère ne pas être suffisante, dans un deuxième temps, **on pourra enrichir la base** en construisant une ou plusieurs nouvelles paires de fonctions. **L'espace d'approximation réduit s'enrichit donc automatiquement** au cours de itérations de la méthode LATIN. En ceci, la méthode peut être qualifiée d'adaptative.

2.1 Quelques remarques

Nous rappelons que la construction de l'approximation radiale est faite en minimisant une erreur en relation de comportement lié aux directions de recherche. Replacé dans le contexte de la stratégie multiéchelle, ce choix s'avère pertinent, puisque la seule équation qui est vérifiée de manière approchée est la direction de recherche. Or la direction de recherche n'est qu'un paramètre de la méthode, et elle n'a d'influence que sur le taux de convergence. La figure 7.2 tente de donner une interprétation géométrique de l'approximation faite par l'approximation radiale : l'approximation $\hat{\mathbf{s}}$ de \mathbf{s} appartient à \mathbf{A}_d , mais $\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}$ ne vérifie pas la direction de recherche. La définition de l'approximation est donc bien adaptée à la stratégie multiéchelle car aucune des équations de \mathbf{A}_d n'est approximée à l'étape linéaire.

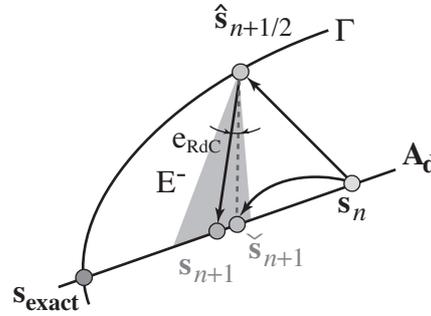


FIG. 7.2: Non vérification de la direction de recherche par l'approximation radiale

2.1.1 Cas des structures à motifs répétés

Dans le cas des structures composites, ou plus généralement des structures à motifs répétés, la base de fonctions peut-être commune à un grand nombre de sous-structures. La phase d'initialisation d'un problème micro sur une sous-structure pourra donc utiliser des fonctions spatiales construites pour les autres sous-structures au cours des itérations précédentes et même de l'itération courante. Les solutions des problèmes micro sur des sous-structures identiques seront généralement similaires pour les efforts, les contraintes, les déformations et éventuellement les variables internes. En revanche, les déplacements seront comparables, mais à un mode de corps rigide près. Il est donc indispensable d'ajouter à la base commune, les fonctions spatiales correspondantes aux modes de corps rigides des sous-structures :

$$(\mathbf{E}^p, \underline{Z}) = (0, \underline{r}_i), \quad i \in \{1, \dots, n_r\} \quad (7.1)$$

ou $\{\underline{r}_i\}_{i=1}^{n_r}$ sont la trace sur $\partial\Omega_E$ des vecteurs d'une base de l'espace $\mathcal{R}_{h,E}^W$ des modes de corps rigides de Ω_E . Le nombre de fonctions rajoutées à chaque base est donc $n_r = 6$ en 3D et $n_r = 3$ en 2D.

■ **Remarque 2.1** *Cependant, dans le cadre des calculateurs parallèles à architecture de type cluster (dans lequel chaque processeur a une mémoire séparée), la création d'une base commune conduit à des échanges superflus entre processeurs qui ralentissent l'exécution du code. Dans ce cas là, la base commune sera alors partagée par les différentes sous-structures d'un même processeur. Pour les architectures à mémoire partagée, ce choix ne pose aucun problème. Comme on pourra le voir dans les exemples, peu de fonctions sont nécessaires à la résolution des problèmes micro d'un grand nombre de sous-structures.*

2.1.2 Cas des chargements cycliques

L'étape linéaire est résolue de manière incrémentale sur la grille grossière. Les problèmes micro sont donc définis sur $\Omega_E \times I_i^G$. L'approximation radiale consiste donc à trouver un jeu de fonctions spatiales et temporelles pour chaque intervalle grossier. Tous les intervalles grossiers partageront naturellement la même base de fonctions spatiales. Dans le cas des chargements cycliques, ce choix pourra devenir très avantageux si un cycle est attribué à un ou à un nombre entier d'intervalles grossiers.

■ **Remarque 2.2** *Cette technique sera particulièrement bien adaptée au calcul des opérateurs $L_{E|I_i^G}^M$ calculés pour chaque sous-domaine spatio-temporel $\Omega_E \times I_i^G$.*

2.2 Adaptativité et gestion de la base réduite

Afin de rendre l'approche robuste et systématique, il est nécessaire de définir une stratégie automatique de gestion de la base au cours des itérations, l'objectif étant de construire le minimum de fonctions spatiales à chaque itération, en veillant à ce que cette technique d'approximation ne pénalise pas la convergence globale de la méthode LATIN multiéchelle. Dans ce cadre, un certain nombre de choix s'offre à nous : Quel est le nombre minimal de nouveaux jeux de fonctions que l'on doit rajouter à la base réduite à chaque itération pour assurer la convergence de la LATIN ? Quel critère choisir pour éliminer des fonctions inintéressantes ? Existe-t-il un indicateur fiable permettant de savoir si, sur une sous-structure et à une itération donnée, l'étape préliminaire est suffisante ou si, au contraire, la base doit être enrichie. Dans ce paragraphe, nous proposons une technique d'approximation adaptative pour résoudre les problèmes micro de la méthode LATIN multiéchelle sans altérer la convergence de cette dernière. La méthode sera testée sur un exemple simple.

L'approche générale d'approximation adaptative pour résoudre les problèmes micro de la stratégie multiéchelle est le suivant :

Algorithme 7 : Approximation adaptative de résolution des problèmes micro

- **Prédiction :** réalisation d'une étape préliminaire (mise à jour de l'ensemble des fonctions temporelles associées aux fonctions spatiales déjà construites).

- **Calcul d'un indicateur de qualité de l'approximation ξ**

si $\xi > \xi^0$ alors

 pour $m = 1, \dots, m_{max}$ faire

 - **Amélioration de la base :** Les premières fonctions étant fixées, réalisation d'une approximation d'ordre 1.

 - **Orthogonalisation** de la fonction trouvée par rapport à la base de fonctions existantes. Calcul du résidu après orthogonalisation r_{\perp}

 si $r_{\perp} < r^0$ alors

 └ le nouvelle fonction n'est pas conservée

L'algorithme 7 est paramétré par le choix de l'indicateur ξ de la qualité de la solution, ainsi que le critère ξ^0 qui lui est associé. En d'autres termes, ces paramètres permettent de piloter la qualité de l'approximation au cours des itérations de la LATIN. Afin d'illustrer la méthode, nous étudions l'évolution sur $[0, T]$ d'une structure

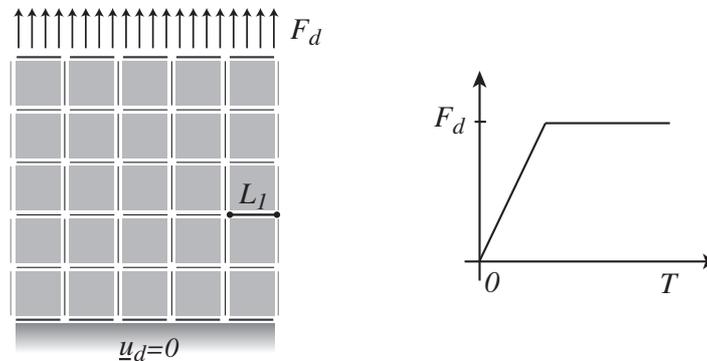


FIG. 7.3: Problème démonstrateur simple

viscoélastique linéaire fissurée (ligne L_1) de module d'Young $E = 100GPa$, coefficient de poisson $\nu = 0.3$ et viscosité $\eta = 10s$ soumise à un effort \underline{F}_d et encastée (Figure 7.3). La structure est décomposée en 25 sous-structures et l'intervalle $[0, T]$ en 60 intervalles de temps.

2.2.1 Approximation de la solution \mathbf{s}_n

Dans le chapitre 5, nous avons choisi de reformuler l'étape linéaire sur la correction de solution $\Delta \mathbf{s}_{n+1} = (\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n)$. Afin de comprendre ce choix, étudions le cas de

l'approximation de la solution complète. Nous cherchons donc directement l'approximation de la solution \mathbf{s}_{n+1} à l'itération $n + 1$. Dans ce cas, $\bar{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ pour le premier problème micro et il est inchangé pour le problème micro 2. Un choix naturel pour l'indicateur de qualité de l'approximation, consiste à le définir à partir de l'erreur en relation de comportement. Nous pouvons par exemple choisir :

$$\xi = \xi_{RdC}(\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = \frac{e_{RdC}(\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})}{\|\bar{\mathbf{s}}\|} \quad (7.2)$$

avec

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}\|_{\Omega}^2 + \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{h}F\|_{\Gamma}^2 + \|\underline{W}\|_{\Gamma}^2 \quad (7.3)$$

■ **Remarque 2.3** *L'objectif est de proposer une méthode systématique permettant d'assurer la convergence de la méthode. Dans la mesure du possible, nous préférons donc générer une base de fonctions très différentes, les unes des autres, avec peu de nouvelles fonctions par itérations. Pour l'exemple de la figure 7.3, on prendra $m_{max} = 1$ et $r^0 = 30\%$.*

Nous testons l'algorithme 7 pour l'approximation des problèmes micro de la stratégie multiéchelle appliquée à l'exemple de la figure 7.3 avec cette hypothèse et en prenant, par exemple un critère $\xi^0 = 0.1$.

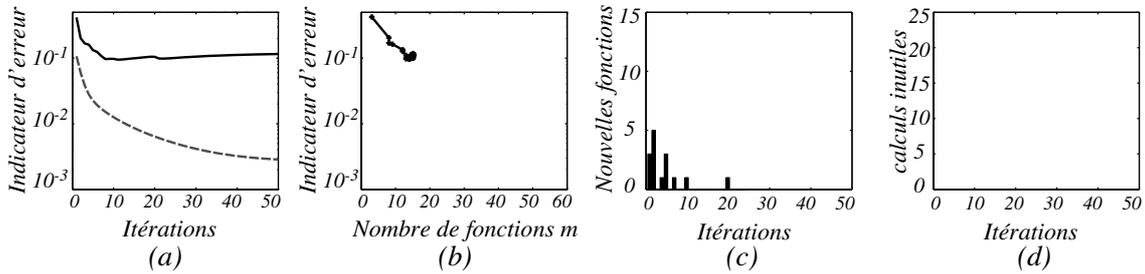


FIG. 7.4: Indicateur d'erreur LATIN $v_{RdC}(\mathbf{s})$ et nombre de fonctions générées à chaque itérations pour l'approximation radiale de \mathbf{s}_{n+1}

La figure 7.4 présente, dans l'ordre :

- 7.4(a) l'indicateur de convergence $v_{RdC}(\mathbf{s})$ de la LATIN en fonction du nombre d'itérations avec approximation radiale (trait continu), et celui, de référence, avec un schéma incrémental classique (pointillé).
- 7.4(b) l'indicateur de convergence $v_{RdC}(\mathbf{s})$ de la LATIN en fonction du nombre total de fonctions dans la base spatiale.
- 7.4(c) le nombre de nouvelles fonctions ajoutées à la base à chaque itération de la LATIN
- 7.4(d) les fonctions calculées mais qui ne sont pas stockées dans la base, car ne vérifiant pas le critère $r_{\perp} > r^0$. Ces calculs sont donc considérés comme inutiles.

En regardant la figure 7.4(b), on constate que le critère $\xi > \xi^0$ est toujours vérifié, ce qui empêche la construction de nouvelles fonctions. Et ainsi le fait d'utiliser un critère

ξ^0 constant bloque la convergence de la méthode à un niveau lié à l'ordre de grandeur du critère ξ^0 . Ce résultat paraît naturel, dans la mesure où le dénominateur de l'indicateur ξ_{RdC} est de niveau constant au cours des itérations de la LATIN, un critère constant ξ^0 fait donc stagner la méthode. On comprend donc l'intérêt de formuler l'étape linéaire sur la correction de solution.

■ **Remarque 2.4** *On aurait pu envisager un critère ξ^0 variable au cours des itérations, éventuellement indexé sur le niveau de l'indicateur de convergence global de la méthode, mais cette approche est moins systématique et moins naturelle que de travailler sur la correction.*

2.2.2 Approximation de la correction $\Delta \mathbf{s}_{n+1} = (\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n)$

On se replace donc dans le cadre de la définition de l'approximation radiale présentée dans le chapitre 5, l'indicateur naturellement associé est le suivant :

$$\xi = \xi_{RdC}(\Delta \check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = \frac{e_{RdC}(\Delta \check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})}{\|\bar{\mathbf{s}}\|} \quad (7.4)$$

avec

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}\|_{\Omega}^2 + \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{h}F\|_{\Gamma}^2 + \|\underline{W}\|_{\Gamma}^2 \quad (7.5)$$

Cette fois-ci, le critère ξ^0 fixe la qualité de l'approximation d'une correction. La méthode étant convergente, le niveau de la correction diminue à chaque itération, et le critère ξ^0 est de plus en plus exigeant.

■ **Remarque 2.5** *En pratique, le choix de ξ^0 n'a pas un grand effet sur le comportement de la méthode. On le verra dans les exemples, un critère ξ^0 très grossier, par exemple 0.5 suffit à faire converger la méthode. En réalité, ce critère assure la convergence, dans la mesure où il assure d'améliorer la solution d'au moins 50% par rapport à une solution incrémentale, à chaque itération. S'il valait 30% ou 70%, la méthode serait assurée de converger quand-même.*

Ré-examinons la résolution du problème 7.3 avec la méthode multiéchelle et la méthode de calcul de l'approximation radiale ainsi construite :

Le résultat est présenté sur la figure 7.5. On remarque que la convergence est assurée, l'algorithme n'est pas bloqué comme précédemment. Cependant, on peut distinguer deux points faibles :

1. Au cours des premières itérations de l'algorithme, le niveau de l'indicateur d'erreur LATIN est beaucoup plus élevé que dans le cas de référence sans approximation radiale. On peut cependant remarquer que ce phénomène s'atténue au cours des itérations.
2. Assez rapidement, un nombre de fonctions relativement grand (en particulier largement plus grand que le nombre de fonctions nécessaires à la convergence) est généré pour être rejetées car ne vérifiant pas le critère d'orthogonalité. Ce sont des calculs inutiles.

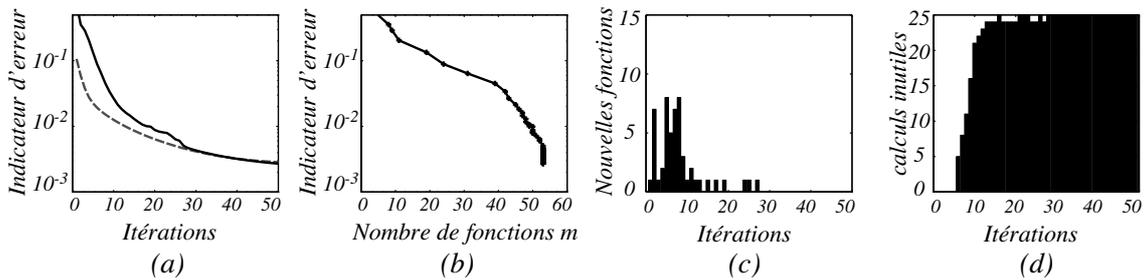


FIG. 7.5: Indicateur d'erreur LATIN ν_{RdC} et nombre de fonctions générées à chaque itération pour l'indicateur local ξ_{RdC}

Ces problèmes sont découplés, ils sont donc traités séparément :

■ Premier point faible

Au début de l'algorithme, la convergence de l'algorithme est pilotée principalement par le problème macro. Si l'algorithme n'est pas superposé à la solution de référence sur les premières itérations, c'est que le problème macro, donc les problèmes micro 2, sont trop grossièrement approximés. Corriger ce défaut ne pose donc pas de difficulté majeure.

Rappelons que les problèmes micro de type 2 sont linéaires et ont pour unique chargement la donnée du multiplicateur de Lagrange \widetilde{W}^M sur le bord $d\Omega_E$. Notons, de plus, que \widetilde{W}^M appartient à un espace de dimension finie, de petite taille. Ainsi un nombre fini de fonctions est nécessaire et suffisant pour résoudre précisément l'ensemble de ces problèmes sur toutes les itérations. Tant que ces fonctions ne sont pas générées, le problème macro est mal approximé. L'algorithme construit ces fonctions au cours de sa convergence, donc les problèmes micro 2 sont de mieux en mieux calculés. Le problème macro devient donc de plus en plus pertinent et la méthode récupère la convergence de référence progressivement.

Une technique simple peut consister à construire les opérateurs homogénéisés avec l'approximation radiale, et à conserver les fonctions générées pour le calcul itératif. Dans ce cas les problèmes micro de type 2 ne nécessiteront la construction d'aucune nouvelle fonction. En 2D, le calcul d'un opérateur homogénéisé requiert la résolution de $4 \times 4 \times 3 = 48$ problèmes micro différents (pour une sous-structure carrée à 4 interfaces, 4 fonctions de bases macro en espace et 3 en temps), on peut donc espérer ne pas nécessiter la construction d'une trop grande base de fonctions, étant donné, de plus, la remarque 4.8 du chapitre 6. En revanche en 3D, cette technique est clairement inenvisageable, puisque le calcul d'un opérateur homogénéisé requiert la résolution de $6 \times 9 \times 3 = 162$ problème micro (et ceci sans prendre en compte que les problèmes 3D sont plus complexes, et nécessitent plus de fonctions radiales pour être résolus).

■ **Remarque 2.6** *L'opérateur homogénéisé pourra, néanmoins, être calculé avec l'approximation radiale, mais les fonctions générées ne seront pas conservées pour le reste du calcul itératif.*

Une autre solution consiste à résoudre les problèmes micro 2 avec précision, dès les premières itérations. Dès lors, les problèmes macro seront bien calculés, sans pour autant que le nombre de fonctions final soit nécessairement plus grand. A la différence de la méthode précédente, seules les fonctions nécessaires aux modes macro activés par le problème seront calculés. Nous adopterons ce choix pour la résolution des problèmes micro 2.

■ Deuxième point faible

Comme on vient de le voir, assez rapidement, les problèmes micro 2 ne requièrent plus la construction de nouvelles fonctions. Ce problème est donc uniquement lié aux problèmes micro 1. Il vient du fait que le critère d'orthogonalité n'est pas très naturel. L'objectif serait d'être capable de prédire, avant de faire un calcul, s'il va conduire à une fonction utile ou pas. Ceci se traduit donc par le fait que l'indicateur ξ_{RdC} est mal adapté aux problèmes de l'étape linéaire. En clair il est trop exigeant.

Dans une méthode de décomposition de domaine, il est bien connu que tous les sous-domaines ne convergent pas à la même vitesse. Par exemple, dans une zone où les gradients sont faibles, au bout de quelques itérations, la solution est quasiment convergée. Le problème posé sur la correction est donc dérisoire par rapport à d'autres sous-structures dans lesquelles la solution est très erronée. Dans ces zones là, pour lesquelles on pourrait largement se contenter d'une simple étape préliminaire, le dénominateur $\|\bar{\mathbf{s}}\|$ est très faible, donc le critère $\xi_{RdC} < \xi^0$ n'est quasiment jamais vérifié. Le critère conduit donc au calcul d'une nouvelle fonction qui s'avère *a posteriori* inutile.

L'objectif est donc de modifier l'indicateur d'erreur ξ_{RdC} , afin que l'effort soit concentré sur les sous-structures les plus mal approximées par l'étape préliminaire.

2.2.3 Une stratégie améliorée

Nous proposons donc une stratégie adaptative basée sur un indicateur d'erreur basé sur une erreur en relation de comportement différente suivant le type de problème à résoudre. La stratégie adoptée est donc la suivante : pour les problèmes micro 2, on utilise l'algorithme 7 avec les paramètres suivants :

- l'indicateur de qualité normé classique :

$$\xi = \xi_{RdC}(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = \frac{e_{RdC}(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})}{\|\bar{\mathbf{s}}\|}$$

- Un critère ξ^0 relativement exigeant pour assurer une résolution des problèmes micro 2 de qualité, pour ne pas perturber la convergence macro.
- Le critère d'orthogonalité r^0 , n'a pas tellement d'importance dans ce cas.
- Le nombre maximum de fonctions m_{max} peut être éventuellement pris supérieur à 1 afin, une fois encore, de résoudre précisément ces problèmes.

Concernant les problèmes micro 1, on utilise également l'algorithme 7 mais avec les paramètres suivants :

- Un indicateur de qualité normé modifié :

$$\xi = \xi_{RdC}(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}) = \frac{e_{RdC}(\Delta\check{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}})}{\sup_E \|\bar{\mathbf{s}}\|}$$

- Un critère ξ^0 assez grossier pour ne pas générer trop de fonctions au début de l'algorithme, phase dans laquelle les problèmes micro sont très loin de la solution à convergence. Ce critère deviendra automatiquement plus exigeant au cours des itérations.
- Le critère d'orthogonalité r^0 , a une influence limitée puisque l'indicateur ci-dessus est sensé prédire si le calcul d'une fonction est nécessaire ou pas. Ce critère *a posteriori* ne devrait pas être trop utilisé.
- Le nombre maximum de fonctions m_{max} , est pris égal à 1, pour ne pas générer trop de fonctions au début des itérations.

■ **Remarque 2.7** Pour que le critère reste pertinent, la partie mode de corps rigide pourra être retirée à \underline{W} dans le calcul de $\|\underline{W}\|_{\Gamma}$ du critère ξ_{RdC} du problème micro 1. Elle pourra être éventuellement conservée pour le calcul de l'indicateur des problèmes micro 2, puisque les mouvements de corps rigides font partie de la solution.

On reprend donc l'exemple 7.3 avec la stratégie précédemment citée, avec pour les problèmes micro 2, la paramètres $\xi^0 = 0.001$, $r^0 = 0.3$ et $m_{max} = 3$, et pour les problèmes micro 1, $\xi^0 = 0.5$, $r^0 = 0.3$ et $m_{max} = 1$. Le résultat est donné figure 7.6 :

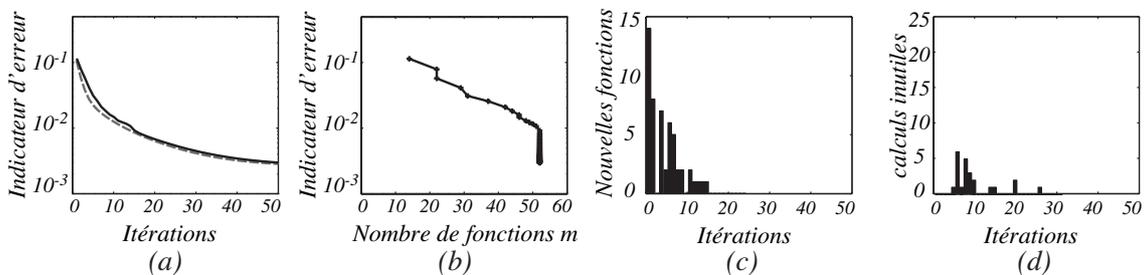


FIG. 7.6: Indicateur d'erreur LATIN v_{RdC} et nombre de fonctions générées à chaque itération pour l'indicateur local ξ_{RdC}

On peut remarquer sur la figure 7.6(a) que la convergence globale de la méthode n'est pas altérée par l'approximation. Même au début de l'algorithme, les courbes sont très proches, donc les problèmes macro sont bien calculés. On peut voir, notamment sur la figure 7.6(c), qu'à la première itération, un nombre plus conséquent de fonctions est généré, elles correspondent aux fonctions calculés par les problèmes micro 2. Sur la figure 7.6(d), on remarque que très peu de fonctions sont rejetées. Notre indicateur ξ_{RdC} modifié apparaît donc comme un critère *a priori* de nécessité du calcul d'une nouvelle fonction, très pertinent. Étant basé sur un dénominateur commun, cet indicateur permet à toutes les sous-structures de converger ensemble. Les approxima-

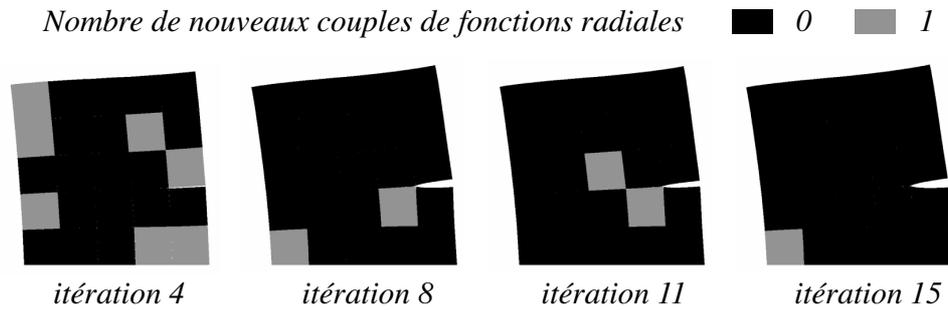


FIG. 7.7: Nombre de nouvelles paires de fonctions radiales pour chaque sous-structure et chaque itération

tions des solutions de chacune des sous-structures sont comparables, et l'effort n'est fait que sur les sous-structures étant les plus mal approchées par l'étape préliminaire. Cette constatation est corroborée par la figure 7.7, sur lequel on peut voir les sous-structures pour lesquelles il a fallu construire une nouvelle fonction. Elle sont souvent situées autour de la pointe de fissure, ou près des conditions aux limites.

Enfin on peut remarquer des caractéristiques particulières de la méthode d'approximation adaptative. D'une part le nombre de nouvelles fonctions requises décroît avec les itérations 7.6(c), ce qui traduit que la base, donc le modèle, est de plus en plus riche. D'autre part, il arrive que certaines itérations de la LATIN ne nécessitent pas le calcul de nouvelles fonctions 7.6(c). Dans ces moments, l'approximation radiale fait converger l'algorithme pour un coût dérisoire.

3 Exemples 3D

■ Composite C/C 4D

On considère l'évolution sur $[0, 10s]$ d'une structure hétérogène 3D constituée de fibres ($E_1 = 250\text{GPa}$, $\nu = 0.2$ et $\eta = 1000s$) et d'une matrice ($E_1 = 50\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ et $\eta = 10s$) (cf. Figure 7.8). La structure est soumise à un chargement de torsion et est encastree à sa base. Des fissures traversant les fibres sont modélisées par des surfaces de contact $\mu = 0.3$. La structure est décomposée en 64 cellules élémentaires de deux types. 8 groupes de 8 sous-structures partagent une base commune de fonctions. Les problèmes de l'étape linéaire sont résolus avec la technique adaptative liée à l'approximation radiale présentée précédemment avec les paramètres $\xi^0 = 0.003$, $r^0 = 0.3$ et $m_{max} = 3$ pour les problèmes micro 2 et $\xi^0 = 0.5$, $r^0 = 0.3$ et $m_{max} = 1$ pour les problèmes micro 1.

La convergence de la stratégie est présentée sur la figure 7.9. La courbe de convergence de la méthode avec approximation est proche de celle de référence. Le nombre de fonctions créé par itération est à peu près stable.

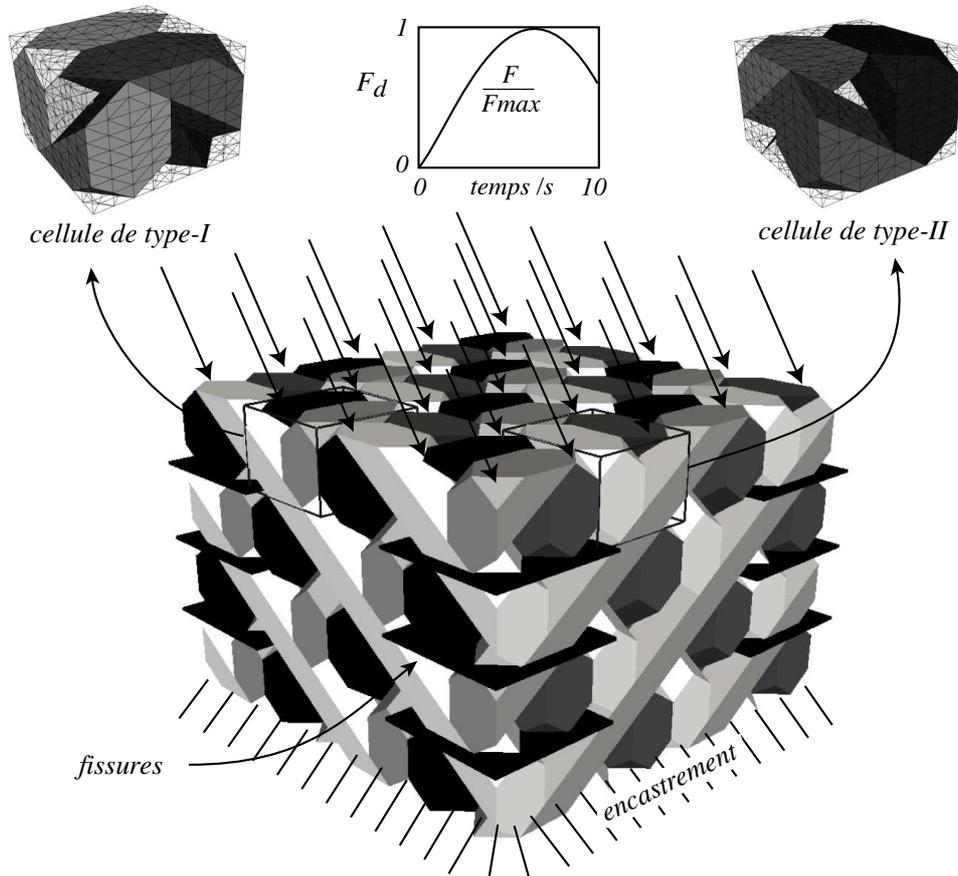


FIG. 7.8: Problème hétérogène avec contacts frottants (matrice non représentée)

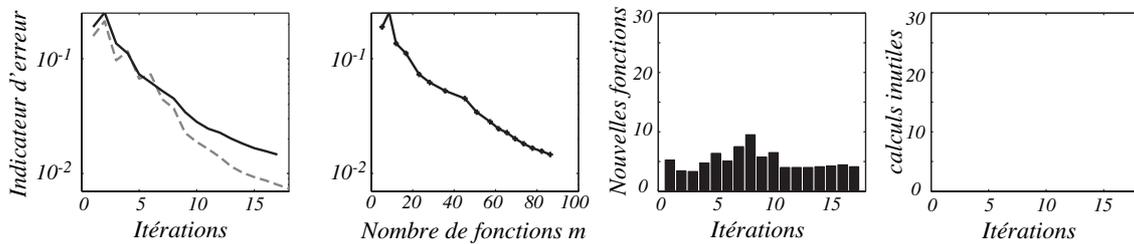


FIG. 7.9: Indicateur d'erreur LATIN v_{RdC} et nombre de fonctions générées en moyenne et par base commune

■ **Portique hétérogène** On considère à présent la structure 3D hétérogène et fissurée étudiée au chapitre 3. L'intervalle d'étude $[0, T] = [0, 3.3s]$ est muni d'un seul intervalle grossier de 20 intervalles fins. La structure est décomposée en 351 sous-structures réparties en 13 groupes de 27 sous-structures. Chaque groupe de sous-structures est associé à une base de fonctions communes. Cette fois-ci, les problèmes de l'étape linéaire sont résolus avec la technique adaptative d'approximation présentée dans le paragraphe précédent. Chaque problème micro est résolu avec l'algorithme 7. Nous choisissons les paramètres $\xi^0 = 0.003$, $r^0 = 0.3$ et $m_{max} = 1$ pour les problèmes micro 2, ainsi que $\xi^0 = 0.5$, $r^0 = 0.3$ et $m_{max} = 1$ pour les problèmes micro 1.

Le comportement de la stratégie est présenté sur la figure 7.10.

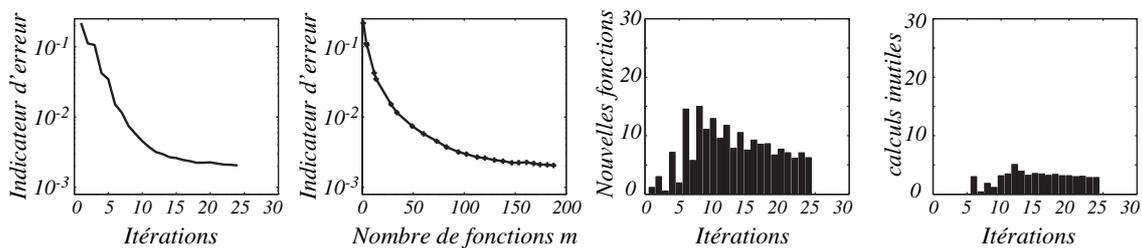


FIG. 7.10: Indicateur d'erreur LATIN v_{RdC} et nombre de fonctions générées en moyenne par base commune

On remarque une bonne convergence de la méthode. Le nombre de fonctions inutilement générées reste faible et stable. Sur la figure 7.11, on représente uniquement les cellules nécessitant le calcul d'une nouvelle fonction.

On peut remarquer que dans un cas non linéaire 3D de grande taille, le nombre de fonctions peut devenir important. En particulier, le coût de l'étape linéaire étant directement relié à la taille de la base réduire, le temps de calcul d'une étape linéaire augmente au cours des itérations. Dans ce cas, il faudrait sans doute procéder à une étape de tri. En effet, il faudrait envisager de sélectionner les meilleures fonctions déjà construites et détruire les autres, afin de stabiliser le coût d'une itération. Une façon de le faire serait de mesurer la contribution de chacune des fonctions sur plusieurs itérations, et si les contributions sont inférieures à un critère, la fonction pourrait être rejetée. Une étude plus approfondie reste cependant à mener.

Bilan

Après avoir brièvement rappelé le principe des méthodes de réduction de modèle basées sur la POD, nous avons présenté, dans ce chapitre, une technique d'approximation adaptative basée sur l'approximation radiale sur l'espace-temps. Nous avons proposé une technique de réutilisation systématique des fonctions générées pendant les itérations précédentes. Nous avons proposé un schéma adaptatif naturel pour piloter l'adaptativité de l'approximation, et l'enrichir de manière automatique, si besoin est, au cours des itérations. Ce schéma est basé sur un estimateur d'erreur en relation

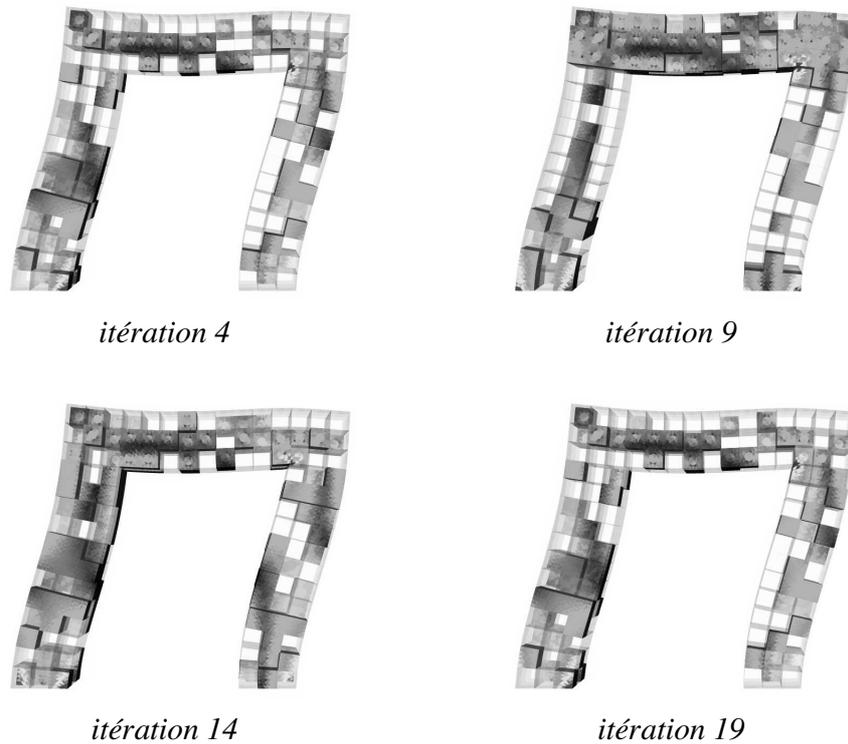


FIG. 7.11: Cellules nécessitant l'enrichissement de la base par une paire de fonctions par itération

de comportement lié à la non-vérification de la direction de recherche par la correction de solution. L'étude de ses faiblesses nous a conduit à l'adapter plus spécifiquement à la stratégie de décomposition de domaine dans lequel il prend place. Nous avons donc défini un indicateur plus adapté à la méthode, qui semble être un bon indicateur *a priori* de la nécessité de calculer une nouvelle fonction. La stratégie permet donc de faire converger l'ensemble des sous-structures à la même vitesse, évitant ainsi des calculs inutiles.

Cette technique d'approximation permet donc un gain considérable en terme de calcul, ainsi qu'en mémoire, sans pour autant que la robustesse et l'efficacité de la stratégie ne soient pénalisées. Enfin en permettant la construction d'une base réduite pour plusieurs sous-structures, la méthode permet d'envisager des gains colossaux pour l'analyse fine de structures à motifs répétés tels que les composites.

Conclusion

Ce travail s'est appuyé sur la méthode LATIN multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace. Le premier point a consisté à étendre cette méthode aux problèmes tridimensionnels complexes, incluant des surfaces de contact avec ou sans frottement. Ce travail a donné lieu à l'élaboration d'un outil logiciel développé dans un langage moderne, permettant la simulation de problèmes bi- et tri-dimensionnels non linéaires d'évolution. Ce code, baptisé *Multi-ST*, est relativement robuste et dispose de beaucoup des « ingrédients » les plus avancés de la méthode LATIN multiéchelle. Il s'intègre dans la plate-forme logicielle du laboratoire et servira donc d'outil de base à plusieurs thèses. Des exemples ont été présentés dans le cadre de la visco-élasticité ; ils ont mis en évidence la pertinence du choix de la séparation des échelles ainsi que les performances générales de l'approche dans le cas d'une non-linéarité de type contact frottant.

Une seconde partie du travail a consisté au développement d'un indicateur permettant un contrôle plus fiable de la convergence de la méthode. Cet indicateur est basé sur le concept d'erreur en relation de comportement. Un exemple a été proposé pour illustrer le fait qu'il ne présente pas les inconvénients des indicateurs de convergence classiquement utilisés dans la méthode LATIN. C'est un outil qui donne accès à une indication fiable sur la qualité d'une solution non convergée et permet ainsi d'avoir un meilleur contrôle des itérations.

Une stratégie d'automatisation du choix de l'espace macroscopique au niveau temporel a également été proposée. Elle assure à la méthode une plus grande robustesse dans le cas de problèmes de grande taille. Une procédure de détection des phénomènes temporels mal pris en compte par le problème macro a été développée. Associée à une phase de tri, elle permet d'enrichir l'espace macroscopique temporel de façon à le rendre compatible au mieux avec les quantités d'interfaces en jeu dans le problème à résoudre. Il s'agit donc d'une méthode de séparation adaptative des échelles temporelles qui améliore la qualité de la démarche d'homogénéisation et augmente les performances de la méthode.

Une dernière partie de cette thèse a été consacrée à l'étude et à l'amélioration de stratégies de calcul performantes dédiées aux problèmes à plusieurs variables et plus particulièrement aux problèmes d'évolution. Une étude parallèle de l'approximation radiale et de la POD a été menée. Elle a conduit à la conclusion que l'approximation radiale était une méthode générale de détermination de la POD. Une nouvelle façon de mettre en œuvre cette approximation dans le cadre de la stratégie de calcul multiéchelle a été proposée. Elle conduit à une technique de résolution robuste qui permet

de réduire considérablement le nombre et la taille des systèmes à résoudre par rapport à l'approche classiquement utilisée dans la LATIN.

Enfin, une méthode de calcul adaptative a été développée. Elle consiste à mettre en synergie la méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace et la POD. L'approche est basée sur une réutilisation des fonctions spatiales générées par l'approximation radiale au cours des itérations précédentes. Un indicateur basé sur l'erreur en relation de comportement a été mis en place pour piloter la stratégie adaptative et enrichir, quand il le faut, l'espace d'approximation des problèmes micro de la stratégie. Cette technique conduit à une forte réduction du nombre de calculs car elle permet de ne faire que les calculs minimaux nécessaires à la convergence.

Cependant, un certain nombre de points, qui n'ont pas été abordés dans cette thèse, reste encore à traiter. Dans un premier temps, le code doit être parallélisé pour pouvoir tirer le meilleur parti de la méthode. Ceci nécessitera donc le recours à une technique approchée de résolution du problème macro qui est actuellement résolu par un solveur direct. Ensuite, l'implantation de la stratégie dans le cadre de non-linéarités matériaux telles que la plasticité ou l'endommagement reste à mener. Outre la simple difficulté liée au code, la question de la fréquence de mise à jour des directions de recherche sera centrale, puisque le coût d'assemblage des opérateurs homogénéisés et de celui du problème macro ne sont pas négligeables.

Concernant l'approximation radiale, les perspectives sont nombreuses. Dans un premier temps, on pourra tenter d'appliquer la stratégie avec POD aux problématiques de multirésolution ; la base de fonctions pouvant être conservée et triée pour les résolutions ultérieures. Une problématique soulevée par cette thèse est la question de la taille de la base réduite. En effet, dans les exemples présentés, on peut remarquer que la taille de la base peut augmenter. Au fur et à mesure des itérations, les assemblages des problèmes spatiaux et temporels de l'approximation radiale peuvent devenir assez coûteux, puisqu'ils nécessitent le calcul d'intégrales en espace et en temps de toutes les fonctions de la base. Une phase de tri et de sélection pourrait être ajoutée à la méthode pour stabiliser le temps de calcul d'une étape linéaire. Enfin, il pourrait être souhaitable de décomposer également les solutions de l'étape locale, ainsi que les opérateurs de direction de recherche, afin de découpler les intégrales sur l'espace-temps en produits d'intégrales en temps et d'intégrales en espace.

Bibliographie

- P. Alart et A. Curnier (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 :253–275.
- P. Alart et D. Dureisseix (2008). A scalable multiscale LATIN method adapted to nonsmooth discrete media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :319–331.
- O. Allix, P. Feissel, et H. M. Nguyen (2005). Identification strategy in the presence of corrupted measurements. *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 22(5/6) :487–504.
- O. Allix et P. Vidal (2002). A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :2727–2758.
- A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, et R. Keunings (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176.
- A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, et R. Keunings (2007). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids : Part II : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2-3) :98–121.
- N. Aubry, R. Guyonnet, et R. Lima (1991). Spatiotemporal analysis of complex signals : theory and applications. *Journal of Statistical Physics*, 64 :683–739.
- C. Auriel, G. Boubal, et P. Ladevèze (1982). Sur une méthode de calcul des efforts locaux. *Comptes rendus des JNC 3, Pluralis Paris*, pages 279–288.
- P. Avery, G. Rebel, M. Lesoinne, et C. Farhat (2004). A numerically scalable dual-primal substructuring method for the solution of contact problems—part I : the frictionless case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :2403–2426.
- M. Barboteu, P. Alart, et M. Vidrascu (2001). A domain decomposition strategy for non-classical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4785–4803.

- T. Belytschko, P. Smolinski, et W. K. Liu (1985). Stability of multi-time step partitioned integrators for first-order finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3) :281–297.
- T. Belytschko, H.-J. Yen, et R. Mullen (1979). Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17(18) :259–275.
- H. Ben Dhia (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 326 :899–904.
- H. Ben Dhia et G. Rateau (2005). The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62 :1442–1462.
- R. A. Białeckci, A. J. Kassab, et A. Fic (2005). Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(6) :774–797.
- C. L. Bottasso (2002). Multiscale temporal integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(25-26) :2815–2830.
- P.-A. Boucard et L. Champaney (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 :1259–1282.
- P.-A. Boucard et P. Ladevèze (1999). A multiple solution method for non-linear structural mechanics. *Mechanical Engineering*, 50(5) :317–328.
- W.L. Briggs (1987). *A multigrid tutorial*. Society for industrial and applied mathematics.
- L. Chamoin et P. Ladevèze (2007). Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71 :1387–1411.
- L. Champaney, J.-Y. Cognard, et P. Ladevèze (1999). Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers and Structures*, 73 :249–266.
- A. Chapman et Y. Saad (1997). Deflated and augmented Krylov subspace techniques. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 4(1) :43–66.
- A. Chatterjee (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7) :808–817.
- V. Chiaruttini et C. Rey (2005). Un schéma d'intégration temporelle multiéchelle appliqué à un problème de mécanique non-linéaire. In *Actes du septième colloque national en calcul de structures (GIENS)*, pages 133–138.

- F. Chinesta, A. Ammar, F. Lemarchand, P. Beauchene, et F. Boust (2008). Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :400–413.
- J.-Y. Cognard et P. Ladevèze (1993). A large time increment approach for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 9 :114–157.
- A. Combescure et A. Gravouil (2001). A time-space multi-scale algorithm for transient structural nonlinear problems. *Mécanique et Industries*, 2(1) :43–55.
- A. Combescure et A. Gravouil (2002). A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :1129–1157.
- F. Comte, M. H. Maitournam, P. Burry, et T. Mac Lan Nguyen (2006). A direct method for the solution of evolution problems. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(5) :317–322.
- F. Devries, F. Dumontet, G. Duvaut, et F. Léné (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27 :285–298.
- C.R. Dohrmann (2003). A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 25 :246–258.
- Z. Dostal, A. Friedlander, et S. Santos (1998). Solution of coercive and semicoercive contact problems with FETI domain decomposition. *Contemporary Mathematics*, 218 :82–93.
- D. Dureisseix et L. Champany (2000). Calcul de structures et parallélisme : un bilan et quelques développements récents. *Mécanique et Industries*, 1 :43–60.
- D. Dureisseix et C. Farhat (2001). A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :2643–2666.
- D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron, et B. A. Schrefler (2003). A multi-time-scale strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1(4) :387–400.
- G. Duvaut et J.-L. Lions (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer Berlin.
- N. Elkhodja, F.-X. Roux, et H. Ben Dhia (2008). Solution with a domain decomposition solver of a multi-altered structures modeled in the arlequin framework. In *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM 2008)*.

- K. Eriksson, C. Johnson, et V. Thomée (1985). Time discretization of parabolic problems by the discontinuous galerkin formulation. *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 19 :611–643.
- C. Farhat et M. Chandesris (2003). Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 :1397–1434.
- C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, K. Pierson, et D. Rixen (2001). A dual-primal unified FETI method—part I : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1523–1544.
- C. Farhat et F.X. Roux (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227.
- V. Faucher et A. Combescure (2003). A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :509–533.
- P. Feissel et O. Allix (2007). Modified constitutive error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : the elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13/16) :1968–1983.
- F. Feyel (2003). A multilevel finite element (FE²) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3233–3244.
- F. Feyel et J.-L. Chaboche (2000). FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330.
- J. Fish et V. Belsky (1995). Multigrid method for periodic heterogeneous media II. Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(17-38).
- J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi, et M. S. Shephard (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148 :53–73.
- M. Fortin et R. Glowinski (1982). Méthodes de lagrangien augmenté. In *Méthodes Mathématiques de l'Informatique*, volume 9. P.-L. Lions (Ed.).
- R.G. Ghanem et P. Spanos (1991). *Stochastic Finite Elements : A spectral Approach*. Springer, Berlin.

- S. Ghosh, K. Lee, et S. Moorthy (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoï cell finite element method. *Journal of Solids and Structures*, 32(1) :27–62.
- S. Ghosh, K. Lee, et P. Raghavan (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :2335–2385.
- R. Glowinski et P. Le Tallec (1989). Augmented lagrangian interpretation of the non-overlapping schwarz alternating method. In SIAM, editor, *Proc. of the 3rd International Symposium on Domain Decomposition Methods for P.D.E.*, pages 224–231.
- P. Gosselet et C. Rey (2002). On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for non-linear elasticity. In *Proceedings of the 14th conference on domain decomposition methods*, pages 419–426.
- P. Gosselet et C. Rey (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13 :515–572.
- A. Gravouil et A. Combescure (2001). Multi-time-step explicit implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :199–225.
- A. Gravouil et A. Combescure (2003). Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 :1545–1569.
- T. Guennouni (1988). On a computational method for cycling loading : the time homogenization. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (in french)*, 22(3) :417–455.
- P.A. Guidault, O. Allix, L. Champaney, et S. Cornuault (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5) :381–399.
- H. Hotelling (1933). Analysis of complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24 :417–441.
- T. J. R. Hughes (1995). Multiscale phenomena : Green’s function, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 :387–401.
- T. J. R. Hughes, G. R. Feijoo, L. Mazzei, et J.-B. Quincy (1998). The variational multiscale—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 :3–24.

- T. J. R. Hughes et W. K. Liu (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis : implementation and numerical examples. *Journal of Applied Mechanics*, 65 :371–374.
- T. J. R. Hugues (1987). *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications.
- A. Ibrahimbegović et D. Markovič (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3089–3108.
- A. Ibrahimbegović et S. Melnyk (2007). Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh : an alternative to the extended finite element method. *Computational mechanics*, 40 :149–155.
- K. Karhunen (1943). Uber lineare methoden für wahrscheinigkeitsrechnung. *Annales of Academic Science Fennicae Series A1 Mathematical Physics*, 37 :3–79.
- P. Kerfriden, O. Allix, et P. Gosselet (accepted 2009). A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminate. *Computational mechanics*.
- P. Krysl, S. Lall, et J.E. Marsden (2001). Dimentional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 :479–504.
- J. Ladevèze (1985a). Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaines. In *Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, pages 893–907. Pluralis.
- P. Ladevèze (1985b). New algorithms : mechanical framework and development (in french). Technical Report 57, LMT-Cachan.
- P. Ladevèze (1985c). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Compte rendu de l’académie des Sciences*, 300(2) :41–44.
- P. Ladevèze (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- P. Ladevèze et D. Dureisseix (1998). A 2-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis. *Contemporary Mathematics*, 218 :246–253.
- P. Ladevèze et D. Dureisseix (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28.

- P. Ladevèze, O. Loiseau, et D. Dureisseix (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :121–138.
- P. Ladevèze, G. Lubineau, et D. Violeau (2006). Computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137 :139–150.
- P. Ladevèze, D. Néron, et P. Gosselet (2007a). On a mixed and multiscale domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1526–1540.
- P. Ladevèze, D. Néron, et J.-C. Passieux (2007b). The LATIN multiscale strategy and the time-space approximation. In *Proc. of ECCOMAS Thematic Conference on Multi-Scale Computational Methods for Solids and Fluids*.
- P. Ladevèze, D. Néron, et J.-C. Passieux (2008a). The LATIN multiscale strategy and the time-space approximation. In *Proc. of Ecomas Multidisciplinary Jubilee Symposium - New Computational Challenges in Materials, Structures, and Fluids*.
- P. Ladevèze, D. Néron, et J.-C. Passieux (to appear 2008b). On multiscale computational mechanics with time-space homogenization. In *Multiscale methods—Bridging the scales in Science and Engineering*. Oxford University Press. Ed. J. Fish.
- P. Ladevèze et A. Nouy (2002). Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps. *Comptes Rendus de Mécanique*, 330 :683–689.
- P. Ladevèze et A. Nouy (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087.
- P. Ladevèze, A. Nouy, et O. Loiseau (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891.
- P. Ladevèze et P. Rougée (1985). (Visco)plasticity under cyclic loadings : properties of the homogenized cycle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, II(301) :891–894.
- M.G. Larson et A. Målqvist (2007). Adaptive variational multiscale methods based on a posteriori error estimation : Energy norm estimates for elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :2313–2324.
- M. Lefik et B. A. Schrefler (1992). Homogenized material coefficients for 3D elastic analysis of superconducting coils. In *New advances in computational structural mechanics*, pages 435–446. P. Ladevèze and O. C. Zienkiewicz.
- Y.C. Liang, H.P. Lee, S.P. Lim, W.Z. Lin, K.H. Lee, et C.G. Wu (2002). Proper orthogonal decomposition and its applications—part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3) :527–544.

- J.-L. Lions, Y. Maday, et G. Turinici (2001). Résolution d'EDP par un schéma en temps "pararéel". *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, I(332) :661–668.
- P.-L. Lions (1990). On the Schwarz alternating method III : A variant for nonoverlapping subdomains. In *Proc. of the third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 202–223. SIAM.
- M.M. Loeve (1955). *Probability Theory*. Van Nostrand, Princeton, NY.
- Y. Maday et G. Turinici (2002). A parareal in time procedure for the control of partial differential equations. *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, I(335)(Issue 4) :387–392.
- F. Magoulès et F.-X. Roux (2006). Lagrangian formulation of domain decomposition methods : A unified theory. *Applied Mathematical Modeling*, 30 :593–615.
- M. H. Maitournam, B. Pommier, et J.-J. Thomas (2002). Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomecanique cyclique. determination of the asymptotic response of a structure under cyclic thermomechanical loading. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(10) :703–708.
- J. Mandel (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(233-241).
- D. Markovič et A. Ibrahimbegović (2004). On micro-macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48-51) :5503–5523.
- H. G. Matthies et A. Keese (2005). Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16) :1295–1331.
- J. Melenk et Ivo Babuška (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 :289–314.
- N. Moës, J. Dolbow, et T. Belytschko (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Engineering Science*, 46 :131–150.
- Z. Nenadic, B. Ghosh, et P. Ulinski (2002). Propagating waves in visual cortex : A large scale model of turtlevisual cortex. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(7-8) :743–749.
- D. Néron et D. Dureisseix (2008a). A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(6) :783–804.

- D. Néron et D. Dureisseix (2008b). A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupled physics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(9) :1053–1084.
- S. Nineb, P. Alart, et D. Dureisseix (2007). Domain decomposition approach for non-smooth discrete problems, example of a tensegrity structure. *Computers and Structures*, 85 :499–511.
- E. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, et F. Chinesta (2008). Real-time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 91 :223–231.
- A. Nouy (2007). A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521–4537.
- A. Nouy et P. Ladevèze (2004). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087.
- J. T. Oden, S. Prudhomme, A. Romkes, et P. T. Bauman (2006). Multi-scale modeling of physical phenomena : Adaptive control of models. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 28 :2359–2389.
- J. T. Oden, K. Vemaganti, et N. Moës (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 :3–25.
- J.-C. Passieux, P. Ladevèze, et D. Néron (2007). Sur l’extensibilité d’une stratégie de calcul multiéchelle et parallèle avec homogénéisation en temps et en espace. In *Proc. of CFM 2007 - 18e Congrès Français de Mécanique*.
- J.-C. Passieux, P. Ladevèze, et D. Néron (2008). Parallel computing features of a multiscale strategy with space and time homogenization. In *Proc. of the 6th International Conference on Engineering Computational Technology*.
- K. Pearson (1901). On lines planes of closes fit to system of points in space. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2 :559–572.
- J. Pebrel, P. Gosselet, et C. Rey (2008a). Multiscale analysis of structures using overlapping nonlinear patches. In *3rd International Conference on Computational Methods for Coupled Problems*.
- J. Pebrel, C. Rey, et P. Gosselet (2008b). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :251–262.

- G. Picinbono, H. Delingette, et N. Ayache (2003). Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graphical models*, 56(5) :305–321.
- J. Rannou, A. Gravouil, et M.-C. Baietto-Dubourg (2008). A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (wiley early view).
- C. Rey et F. L  n   (1998). Reuse of Krylov spaces in the solution of large scale non-linear elasticity problems. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 465–471. Springer.
- F. Risler et C. Rey (2000). Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, 23 :1–30.
- D. Ryckelynck (2002). Réduction a priori de modèles thermom  caniques. *Comptes Rendus Mécanique*, 330 :299–505.
- D. Ryckelynck (2005). A priori hyperreduction method : An adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202 :346–366.
- Y. Saad (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Compagny, 3rd edition.
- E. Sanchez-Palencia (1974). Comportement local et macroscopique d’un type de milieux physiques h  trog  nes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4) :331–351.
- E. Sanchez-Palencia (1980). Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127.
- B. A. Schrefler, M. Lefik, et U. Galvanetto (1997). Correctors in a beam model for unidirectional composites. *Mechanics in Computational Material Structures*, 4 :159–190.
- T. Strouboulis, K. Coops, et Ivo Babuřka (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32-33) :4081–4193.
- I. Temizer et P. Wriggers (2007). An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :3409–3423.
- E. Vergnault, O. Allix, H. Leclerc, et S. Maison-LePo  c (to appear 2009). A mixed scalable domain decomposition method for incompressible flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- T.I. Zohdi, J.T. Oden, et G.J. Rodin (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4) :273–298.